

UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

ENLACE TOPOLÓGICO ASINTÓTICO DE  
SOLENOIDES INCRUSTADOS EN EL TORO  
SÓLIDO

WALDO GONZALO ARRIAGADA SILVA

2005

UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

ENLACE TOPOLÓGICO ASINTÓTICO DE SOLENOIDES INCRUSTADOS EN EL TORO  
SÓLIDO

NOMBRE WALDO GONZALO ARRIAGADA SILVA

COMISIÓN EXAMINADORA	NOTA (nº)	CALIFICACIONES: (Letras)	FIRMA
PROFESOR GUÍA (DIRECTOR) Sr. JEAN- MARC GAMBAUDO	: .....	.....	.....
PROFESOR INTEGRANTE Sr. ALEJANDRO MAASS	: .....	.....	.....
PROFESOR INTEGRANTE Sr. MANUEL DEL PINO	: .....	.....	.....
NOTA FINAL EXAMEN DE TÍTULO	: .....	.....	.....

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

SANTIAGO DE CHILE  
Octubre 2005

RESUMEN DE LA MEMORIA  
PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO  
POR: WALDO GONZALO ARRIAGADA  
SILVA.  
FECHA: 23 DE NOVIEMBRE DE 2005.  
PROF. GUÍA: Sr. JEAN-MARC GAMBAUDO.

## ENLACE TOPOLÓGICO ASINTÓTICO DE SOLENOIDES INCRUSTADOS EN EL TORO SÓLIDO.

Un solenoide de dimensión 1 es localmente el producto de un conjunto de Cantor por un intervalo. La teoría de nudos trata acerca de las incrustaciones (“embeddings”) del círculo  $S^1$  en la esfera  $S^3$ . Por ejemplo, se puede definir el *linking de Gauss* de dos nudos en  $S^3$ . Este trabajo trata acerca de las incrustaciones de solenoides en la esfera  $S^3$ .

Para cualquier difeomorfismo  $\phi$  en  $\text{Diff}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$  y cualquier medida de probabilidad  $\mu$ , invariante, se puede intentar medir el enlace promedio (average linking) de las órbitas de  $\phi$ . Esto se puede hacer de dos maneras canónicas y distintas.

Por un lado, el *invariante de Calabi* mide el enlace asintótico promedio de los pares de órbitas bajo la acción del difeomorfismo; por otro lado, el *invariante de Ruelle* mide la rotación asintótica promedio del plano tangente alrededor de una órbita bajo la acción de la diferencial del difeomorfismo. A pesar del hecho que estos dos invariantes describen propiedades topológicas y diferenciales del enlace, ellos no están muy relacionados y podemos fácilmente construir ejemplos de difeomorfismos y medidas en donde uno de estos números es cero pero el otro no.

En este trabajo se analiza la situación particular en que el difeomorfismo  $\phi$  en  $\text{Diff}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$  posee un conjunto de Cantor  $X$  invariante, tal que la dinámica restringida a  $X$  es minimal y únicamente ergódica. El objetivo es mostrar cómo, en este preciso ambiente, los invariantes de Calabi y Ruelle son dos elementos del mismo contexto global en la dinámica de los solenoides.

Una clase interesante de solenoides incrustados, consiste en los solenoides que son un conjunto invariante de un campo de vectores no singular de clase  $C^1$ , cuyas hojas son transversales a la fibra del toro. Las propiedades de esta clase se comentan al final de la memoria.

## AGRADECIMIENTOS

Las personas a quienes debo mi formación son muchas. Tal vez incontables. Los nombres de todas ellas no cabrían acá. Sin embargo, voy a extraer la subsucesión que me es más importante.

Mi padre y mi madre han sido los pilares básicos. Les agradezco su constancia para conmigo y su apoyo incondicional. Mis abuelos. Ellos son mis otros padres y mis segundos pilares cuando los primeros tiemblan. Les agradezco su bondad y su cariño. A mis seis hermanos les debo los buenos ratos y los malos también. No me olvido de la cortesía y nobleza de corazón de todos y cada uno de mis tíos, a quienes, con justa razón, debo llamar hermanos.

Al profesor Jean-Marc Gambaudo le debo todo este trabajo de memoria. He tenido la suerte de desarrollar con él un problema relacionado con tópicos muy bonitos y no muy familiares acá en la Universidad. Quizás su más grande enseñanza provenga no sólo de los momentos de discusión de los temas, sino de su saber general, su amplia óptica y de su calidad humana. Agradezco su ayuda y la bondad que me brindó al dirigir este trabajo y aceptar su dirección y le estoy en deuda porque, entre otras cosas y a pesar de mi poca experiencia en matemática, siempre le dio gran relevancia a mis ideas y me enseñó que existe una matemática diferente, y una manera diferente de hacer matemática. Agradezco su interés en planos de mi vida más allá de los netamente estudiantiles.

No quiero perder la oportunidad de agradecer al profesor Manuel del Pino, quien me hizo ver la belleza de la matemática en los primeros años de estudio en esta facultad y siempre estuvo interesado en mis proyectos. También agradezco a los profesores Felipe Álvarez, Patricio Felmer, Roberto Comminetti, Pablo Dartnell y Alejandro Maass por la excelencia de sus cátedras en los cursos correspondientes y por su cariño hacia los alumnos de esta carrera. Sumo a ellos la persona del profesor Jaime González, quien ha sido muy noble conmigo y me ha ayudado mucho en los meses de preparación de este trabajo.

De manera muy especial agradezco a las personas más lindas de esta tierra: Claudia y Palomita y espero que me perdonen el sacrificio que les he causado durante este tiempo.

A mis amigos y compañeros. Gracias a Emilio, quien siempre estuvo cercano a mí y a mi familia y con quien viví gratos momentos de amistad. Gracias también a Willy por su amistad sincera y temprana. Gracias a Óscar Vásquez, compañero de carrera y amigo sustancial. No quiero dejar de mencionar a René Quilodrán, Hernán Castro y Alonso Silva quienes han sido muy buenos compañeros y nunca dejaron de aclararme las materias de los ramos. Sinceramente.

*“Nadie puede escribir un libro. Para  
Que un libro sea verdaderamente,  
Se requieren la aurora y el poniente,  
Siglos, armas y el mar que une y separa.”*

*Jorge Luis Borges*

Este trabajo está dedicado a la  
memoria del Nico y de mi Abuelo.

# ÍNDICE GENERAL

1. Introducción . . . . .	6
1.1. Antecedentes Históricos para la Teoría de Nudos y Enlaces . . . . .	6
1.2. Sobre “Infinite Cascades of Braids” . . . . .	7
2. Prerequisitos . . . . .	8
2.1. Elementos de Geometría . . . . .	8
2.1.1. Espacio Tangente . . . . .	8
2.1.2. Fibrados . . . . .	9
2.2. Sistemas Dinámicos . . . . .	10
2.2.1. Dinámica Continua . . . . .	10
2.2.2. Atractores . . . . .	11
2.3. Nudos y Trenzas . . . . .	12
2.4. Solenoide . . . . .	17
2.5. Resultados Adicionales . . . . .	18
3. Acerca de la Cascada Infinita de Órbitas Periódicas . . . . .	20
3.1. Cascada de órbitas periódicas y homeomorfismos del 2-disco . . . . .	20
3.2. Asymptotic linking numbers para cascadas de órbitas: el caso de flujos 3-D . . . . .	21
3.3. Propiedades Asintóticas . . . . .	23
4. Properties of Asymptotic Linking of solenoids in the solid torus . . . . .	25
4.1. The Calabi invariant and the Ruelle invariant . . . . .	25
4.1.1. The Calabi invariant . . . . .	25
4.1.2. The Ruelle invariant . . . . .	27
4.1.3. Examples . . . . .	29
4.2. Minimal Cantor system . . . . .	29
4.2.1. Matrix representation . . . . .	32
4.3. Linking properties of invariant minimal Cantor sets . . . . .	33
5. Discusión y Conclusiones . . . . .	39

---

A. Abstract Solenoids . . . . .	41
A.1. Oriented solenoids . . . . .	41
A.2. Embedded solenoids . . . . .	43
Bibliografía . . . . .	46

## Capítulo 1

# INTRODUCCIÓN

### 1.1. *Antecedentes Históricos para la Teoría de Nudos y Enlaces*

Las herramientas que se utilizan en este estudio provienen esencialmente de la geometría diferencial y de los sistemas dinámicos topológicos; ambas disciplinas tienen un cauce común que nos ocupa durante gran parte del capítulo 2 y que es la *teoría de nudos y enlaces en variedades 3-D*. Los resultados e ideas básicas de esta teoría pueden ser apreciados intuitivamente, simplemente jugando con un pedazo de cuerda. De hecho, ese es el principio de algunas formulaciones bastante antiguas de esta disciplina. Sin embargo, la teoría matemática de los nudos comenzó sólo en el siglo diecinueve. Sus orígenes descansan en el interés de Gauss por las líneas de campos electromagnéticos y en intentos por clasificar cuerdas anudadas que modelaban el comportamiento de algunos elementos químicos. Rápidamente esta rama deja sus orígenes físicos y llega a ser una piedra fundamental en el estudio de topologías en dimensiones chicas.

Las raíces de los sistemas dinámicos son considerablemente anteriores. Pueden ser encontradas ya en el *Principia Mathematica* de Isaac Newton y en intentos de modelamientos del movimiento de objetos livianos. Al inicio, sin embargo, se trataba de formulaciones técnicas que tenían mera relación con el cálculo diferencial e integral. En los últimos cien años, esta rama también ha requerido una fuerte componente geométrica. Henri Poincaré esencialmente inventó la moderna teoría geométrica de los sistemas dinámicos.

Por otro lado, en el decenio pasado hubo fuertes intentos para complementar la teoría de nudos con la teoría de los sistemas dinámicos. La idea central de este esfuerzo es simple: una órbita cerrada (periódica) en un flujo tridimensional es una incrustación del círculo,  $S^1$ , dentro de la variedad 3-D que constituye el espacio de estados del sistema; por lo tanto, es un nudo. Similarmente, una colección finita de órbitas periódicas define un *enlace*.

En este marco surgen varios hechos. Entre ellos destaca la existencia de nudos y enlaces no triviales para flujos de un campo vectorial de una ecuación diferencial ordinaria. De hecho, fue R.F. Williams, en el contexto de un seminario relativo a vórtices y turbulencia llevado a cabo en el Departamento de Matemática de Berkeley en 1976, quien primero conjeturó la existencia de enlaces no triviales en un set de EDO bien conocidas: las ecuaciones de Lorenz. Por supuesto,



debido a que las órbitas periódicas sólo forman nudos y enlaces en flujos 3-D, las aplicaciones a sistemas dinámicos, en general, son muy limitadas. Sin embargo, no se pretende más; es decir, los resultados y las ideas centrales de este trabajo tienen sus orígenes en teorías desarrolladas en  $S^3$ .

## 1.2. Sobre “Infinite Cascades of Braids”

En el año 1994, J.-M. Gambaudo, D. Sullivan y C. Tresser publicaron un artículo [3] titulado *Infinite Cascades of Braids And Smooth Dynamical Systems* en *Topology*. Ahí se aborda el problema del “enlace” entre órbitas en un conjunto compacto invariante de un campo vectorial no singular en alguna región del espacio euclidiano  $\mathbb{R}^3$ . *Grosso modo*, este artículo integra dos conceptos ya conocidos en la literatura matemática de mediados de los años ’80 que provienen de considerar un campo vectorial  $X$  (y el flujo  $\{\phi^t\}$  sin singularidades asociado) sobre una variedad  $V$  cerrada, conexa, orientable, de dimensión 3. Uno de estos conceptos, el *Autoenlace Infinitesimal*  $\omega_{\phi^t}(x, T)$  de un vector  $u$  tangente en el punto  $x$  a la variedad  $V$ , ya había permitido a Ruelle demostrar (1985) un teorema relativo a la convergencia  $\mu$ -ctp de la cantidad  $\frac{\omega_{\phi^t}(x, T)}{T}$  cuando  $T \rightarrow \infty$  y cuando el fibrado normal a la variedad  $V$  es trivial, donde  $\mu$  es una medida invariante para el flujo  $\phi^t$ .

El otro pilar sobre el que descansa el argumento del artículo, es la noción de *Enlace Topológico* entre los pares de órbitas. Se define como el número algebraico de veces que un punto “gira” alrededor del otro cuando el par de órbitas se mira como la proyección móvil de dos puntos en un 2-disco transversal al par de órbitas. La existencia del *Autoenlace Infinitesimal* y del *Enlace Topológico* se establece de manera no muy compleja en virtud de las propiedades diferenciales y topológicas del flujo.

Una consecuencia de la diferenciabilidad del flujo es el siguiente hecho: si se consideran tres órbitas que permanecen cercanas durante un tiempo  $T$ , entonces el *enlace topológico* entre dos de ellas difiere del *autoenlace infinitesimal* de la tercera en, a lo más, una vuelta y media. Además, debido a que la cantidad  $\omega_{\phi^t}(x, T)$  es cuasi-aditiva con *defecto* igual a 1, hay una relación entre el *enlace topológico promedio* y el *autoenlace infinitesimal promedio* entre órbitas cercanas (ver [4].)

Pues bien, lo anterior condujo en ese artículo a la demostración de un teorema muy importante: la *coherencia de las cascadas de trenzas en un flujo suave*, que constituye el punto de partida para este trabajo y al que dedicaremos todo el capítulo 3. Este teorema establece la convergencia de la sucesión de los *números de enlace topológico promedio entre las órbitas* sucesivas de la cascada. Es más, se prueba que este número de enlace promedio converge *exactamente* al promedio del giro temporal de la derivada (*average twisting number* de la derivada).

Acá determinamos una generalización de este teorema al caso de solenoides minimales que no se obtienen necesariamente como límite de una cascada de órbitas periódicas. Esta extensión es el punto de partida para una serie de consecuencias muy significativas y matemáticamente estéticas.

## Capítulo 2

### PREREQUISITOS

#### 2.1. Elementos de Geometría

En lo que sigue, es clave la definición de variedad y variedad diferencial.

Una *carta* de de dimensión  $n$  en un espacio topológico  $V$  es un par  $(U, x)$ , donde  $U$  es un abierto de  $V$  y  $x : U \rightarrow \tilde{U}$  es un homeomorfismo de  $U$  en un abierto  $\tilde{U}$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Un *atlas* de dimensión  $n$  y clase  $C^k$  en un espacio topológico  $V$  es una familia de cartas de dimensión  $n$  tales que sus dominios forman un cubrimiento abierto de  $V$  y si  $(U_1, x_1)$  y  $(U_2, x_2)$  son dos cartas del atlas, entonces la función  $x_1^{-1} \circ x_2$  es de clase  $C^k$  sobre su dominio.

Una *estructura diferencial* en un espacio topológico  $V$  es un atlas maximal respecto de la inclusión.

Una *variedad diferencial* de clase  $C^k$  y de dimensión  $n$  es un par  $(V, E)$ , donde  $V$  es un espacio topológico de Hausdorff con una base numerable, y  $E$  es una estructura diferencial de clase  $C^k$  en  $V$  y de dimensión  $n$ .

##### 2.1.1. Espacio Tangente

Sea  $V$  una variedad diferencial y sea  $p \in V$ . Definimos el *conjunto de las funciones diferenciables locales en  $p$*  como el conjunto  $C_p^\infty(V)$  formado por todas las funciones diferenciables  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  definidas sobre un entorno abierto  $U$  de  $p$  en  $V$ .

Hay que notar el hecho que  $C_p^\infty(V)$  no tiene estructura de espacio vectorial, pues, por ejemplo,  $f - f \neq g - g$  salvo que  $f$  y  $g$  tengan el mismo dominio. Este inconveniente se soslaya tomando clases de equivalencia. El espacio resultante se denomina *espacio de gérmenes diferenciables* y no tiene mayor incidencia en el resto del trabajo.

Definimos el *espacio tangente a  $V$  en  $p$*  como el conjunto  $T_p(V)$  formado por todas las aplicaciones  $v : C_p^\infty(V) \rightarrow \mathbb{R}$  que cumplen:

$$\begin{aligned}v(r\alpha + s\beta) &= rv(\alpha) + sv(\beta) \\v(\alpha\beta) &= v(\alpha)\beta(p) + \alpha(p)v(\beta)\end{aligned}$$

para todo  $\alpha, \beta \in C_p^\infty(V)$ ,  $r, s \in \mathbb{R}$ . Tales aplicaciones se llaman *derivaciones en  $C_p^\infty(V)$* , y son normalmente denominados *vectores tangentes a  $V$  en  $p$* .

Un hecho notable sobre los vectores tangentes es su carácter local.

**Teorema 2.1.1.** *Sea  $V$  una variedad diferencial,  $p \in V$ ,  $v \in T_p(V)$  y consideremos dos funciones  $f$  y  $g \in C_p^\infty$  que coinciden en un entorno de  $p$ . Entonces  $v(f) = v(g)$ .*

(Para la demostración de este teorema se puede consultar [10].)

### 2.1.2. Fibrados

El ejemplo típico de fibrado es el fibrado tangente a una variedad  $V$ . En general, un fibrado puede entenderse como una parametrización de una familia de variedades, donde el parámetro recorre, a su vez, una variedad.

Sea  $V$  una variedad diferencial de dimensión  $n$ .  $TV = \bigcup_{p \in V} T_p(V)$  se denomina *fibrado tangente a  $V$*  y es por sí misma una variedad diferencial.

Un *fibrado (diferencial)* es una cuádrupla  $(E, \pi, B, F)$ , donde  $\pi : E \rightarrow B$  es una aplicación diferenciable entre variedades tal que cada punto  $p \in B$  posee una vecindad abierta  $U$ , para la cual hay un difeomorfismo

$$f : U \times F \rightarrow \pi^{-1}(U)$$

tales que  $\pi(f(p, v)) = p$  para todo  $p \in U$  y para todo  $v \in F$ ;  $f$  es llamada *factorización local de  $E$* .

Se dice que  $B$  es el *espacio base del fibrado*,  $\pi$  es la *proyección* y  $F$  es la *fibra típica*. Para cada  $p \in B$ , el conjunto  $F_p = \pi^{-1}(p)$  es la *fibra sobre  $p$* .

Un resultado conocido en la literatura es que cada fibra  $F_p$  tiene una estructura natural de subvariedad de  $E$  difeomorfa a  $F$ .

Otro ejemplo de fibrado es el *fibrado trivial*  $E = B \times F$ , con  $\pi : E \rightarrow B$  la proyección en la primera componente. En un capítulo posterior se ocupa esta noción de fibrado trivial. Veamos en qué consiste.

Un *homomorfismo de fibrados* es una aplicación diferenciable  $\phi : E \rightarrow E'$  tal que si  $x, y \in E$  satisfacen  $\pi(x) = \pi(y)$ , entonces se cumple también que  $\pi'(\phi(x)) = \pi'(\phi(y))$ .

Entonces  $\phi$  induce una aplicación  $\phi_B : B \rightarrow B'$  únicamente determinada por la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow{\phi_B} & B' \end{array}$$

La aplicación  $\phi_B$  es diferenciable.

Diremos que  $\phi$  es un *isomorfismo de fibrados* si es un homomorfismo de fibrados y un difeomorfismo. (En tal caso,  $\phi_B$  es difeomorfismo.) Un fibrado  $E$  es *trivial*, si es isomorfo al fibrado trivial  $B \times F$ .

A modo de ejemplo,  $E = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  tiene estructura de fibrado trivial sobre  $\mathbb{R}$  con la fibra  $S^n$  a través de la aplicación  $\pi : E \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\pi(x) = \|x\|$ .

## 2.2. Sistemas Dinámicos

El punto clave de los sistemas dinámicos es su *espacio de estados*: una variedad diferenciable  $M$ , que constituye todos los posibles estados del sistema, y una función o *flujo* definido sobre  $M$ . En los ejemplos clásicos de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), el campo vectorial ahí definido genera un flujo  $\phi_t : M \rightarrow M$ ,  $t \in \mathbb{R}$  y el problema general asumido por los teóricos es describir  $\phi_t$  geoméricamente, vía las acciones sobre subconjuntos de  $M$ . Esto conlleva a la clasificación del comportamiento asintótico de todas las posibles soluciones, mediante la búsqueda de puntos fijos, órbitas periódicas y subconjuntos recurrentes más extraños, como también el conjunto de órbitas que atraviesan este tipo de conjuntos. En muchas aplicaciones  $\phi_t$  depende también de parámetros externos, y los cambios topológicos o *bifurcaciones* que ocurren en  $M$  mientras estos parámetros varían, también son de sustancial interés. Estudiando estos fenómenos y otros relacionados, uno ya no puede esperar encontrar soluciones cerradas de los sistemas de ecuaciones, en términos de funciones conocidas. En lugar de eso, hay que realizar estudios cualitativos del comportamiento de las soluciones.

### 2.2.1. Dinámica Continua

Aunque los sistemas dinámicos se originaron en cuestiones sobre las dinámicas a tiempo continuo de algunos problemas de *mecánica celeste*, mucha de la teoría primero se desarrolló para funciones a imagen discreta, cuyo análisis es más simple. Una función puede ser vista como una acción de  $\mathbb{Z}$  sobre la variedad  $M$ . El análogo continuo de una función es una acción de  $\mathbb{R}$  sobre  $M$ , o un *flujo*.

Un *flujo* sobre una variedad  $M$  es una función continua  $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  que satisface las siguientes condiciones:

- (1)  $\phi_t \equiv \Phi(t, -) : M \rightarrow M$  es un homeomorfismo de  $M$  para todo  $t$ ;
- (2)  $\phi_0 = \text{id}_0$ , o sea,  $\phi_0(x) = x$  para todo  $x \in M$ ;
- (3)  $\phi_t(\phi_s(x)) = \phi_{t+s}(x)$  para todo  $s, t \in \mathbb{R}$ .

Mientras funciones a imagen discreta (simplemente las llamaremos funciones) y flujos son dos objetos fundamentalmente distintos, en ciertos ejemplos pueden estar relacionados. Dada una función  $f : M \rightarrow M$ , uno puede definir el *flujo suspendido de  $f$*  como el espacio cociente de  $M \times \mathbb{R}$  con el flujo trivial  $\phi_t(x, s) = (x, s + t)$ , identificando  $(x, s)$  con  $(f(x), s + 1)$ . El flujo  $\phi_t$  pasa a un *flujo suspendido*,  $\tilde{\phi}_t$ , actuando sobre el *mapping toro*,  $\tilde{M} = M \times \mathbb{R} / (x, s) \sim (f(x), s + 1)$ . En el caso en que  $f$  sea isotópica a la identidad,  $\tilde{M}$  es homeomorfo a  $M \times \mathbb{S}^1$ .

Análogamente, dado un flujo  $\psi_t$  sobre una variedad cerrada  $S$ , decimos que  $S$  tiene una *sección local de cruce* (o una *sección de Poincaré*) si existe una subvariedad cerrada  $\Pi \subset S$  de codimensión 1, que transversalmente intersecta al flujo en cada punto de  $\Pi$ . En el caso en que algún subconjunto  $U \subset \Pi$  consista de órbitas que retornan a  $\Pi$  en un tiempo finito, hay una *función de retorno* (o *función de Poincaré*)  $r : U \rightarrow \Pi$  que asigna a un punto  $p \in U$  la imagen  $\psi_{T(p)}(p)$ , donde  $T(p)$ , el *tiempo de retorno*, es el más chico de los  $t > 0$  tal que  $\psi_t(p) \in \Pi$ . En el caso en que  $\Pi$  intersecte a todas las líneas del flujo  $\phi_t$ , decimos que  $\Pi$  es una *sección global de cruce*. Claramente, tomar la (apropiada) sección de Poincaré es lo inverso de suspender una función. El estudio de funciones iteradas es de central importancia luego de que Poincaré desarrollara la técnica de secciones de cruce y funciones de retorno para el estudio de órbitas periódicas en flujos generados por ecuaciones diferenciales ordinarias.

**Definición 2.2.1.** *Un conjunto invariante  $\Lambda$  para un flujo  $\phi_t$  (es decir,  $\phi_t(\Lambda) = \Lambda$ ) sobre  $M$  es hiperbólico si existe una disociación (splitting) del espacio tangente  $TM_\Lambda = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^u \oplus E_\Lambda^c$ , con*

$$\begin{aligned} \|D\phi_t(v)\| &\leq Ce^{-\lambda t}\|v\| \quad \forall v \in E_\Lambda^s, \quad \forall t > 0, \\ \|D\phi_{-t}(v)\| &\leq Ce^{-\lambda t}\|v\| \quad \forall v \in E_\Lambda^u, \quad \forall t > 0, \\ \frac{d\phi_t}{dt}\Big|_{t=0}(x) &\text{ genera } E_x^c, \quad \forall x \in \Lambda, \end{aligned}$$

para alguna constante  $C > 0$ ,  $\lambda > 1$ . La dirección del “centro” unidimensional  $E_x^c$  es tangente a la órbita misma en cada punto.

Dado un flujo  $\phi_t$  sobre  $M$ , un punto  $x \in M$  es *cadena-recurrente* para  $\phi$  si, para cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe una sucesión de puntos  $\{x = x_1, x_2, \dots, x_n = x\}$  y un conjunto de números reales  $\{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}\}$ , tales que  $t_i > 1$  y  $\|\phi_{t_i}(x_i) - x_{i+1}\| < \varepsilon$ , para todo  $1 \leq i \leq n - 1$ . El conjunto *cadena recurrente* de  $\phi$ , es el conjunto de todos los puntos de  $M$  que son cadena recurrentes.

### 2.2.2. Atractores

Para  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo, un conjunto  $\Lambda \subset M$  es un *atractor* si existe un conjunto compacto  $N \subset M$  tal que  $\Lambda = \bigcap_{k=0}^{\infty} f^k(N)$  y  $\Lambda$  está contenido en el conjunto *cadena recurrente*. Veremos en otra subsección por qué es importante la noción de atractor en este trabajo.

## 2.3. Nudos y Trenzas

En el trabajo de Henri Poincaré aparece la idea siguiente: una órbita periódica de un flujo dentro de la esfera de dimensión tres forma un *nudo*, es decir, la incrustación de un círculo orientable dentro de  $S^3$ . Esto permitía relacionar naturalmente dos dominios aparentemente distintos: el estudio de los sistemas dinámicos y la teoría de nudos.

### Nudos

Un *nudo* es una incrustación  $K : S^1 \hookrightarrow S^3$  de la 1-esfera dentro de la 3-esfera. Un *enlace*  $L : \coprod S^1 \hookrightarrow S^3$  es una colección disjunta y finita de nudos.

La 3-esfera se define como la esfera unidad de  $\mathbb{R}^4$ . Ahora bien,  $S^3$  puede ser vista como  $\mathbb{R}^3$  más un punto adicional: el infinito.

En este sentido, un *nudo* es un espacio métrico compacto, conexo, localmente homeomorfo a un intervalo (ver [11].) El *nudo* más simple es el “unknot”  $S^1$  (ver figura 2.1.) Un “unknot” es una incrustación de  $S^1$  en  $S^3$  cuya imagen es la frontera de un disco incrustado  $D^2 \subset D^3$ :

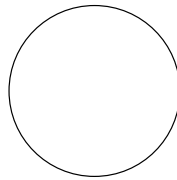


Fig. 2.1: Unknot

Los siguientes nudos “más simples” son el *trefoil knot* (o *nudo trébol*), y el *octo-nudo* (ver figuras 2.2 y 2.3.) Usualmente, consideraremos la *orientación* de los nudos.

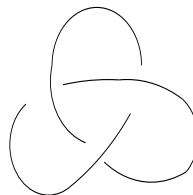


Fig. 2.2: Trefoil

El problema fundamental de la teoría de nudos (enlaces) es el siguiente: ¿cuándo dos nudos (enlaces) son el mismo? En teoría de nudos, la noción de “igualdad” se construye acorde con la

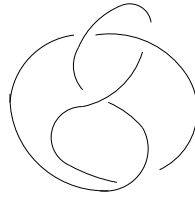


Fig. 2.3: Octo-nudo

noción intuitiva del término; es decir, un nudo es igual a otro si se puede llevar, sin romper la cuerda, a esa otra configuración.

Dos nudos  $K_1$  y  $K_2$  son *ambiente isotópicos*, o, simplemente, *isotópicos* si existe una familia  $\{h_t\}$  de homeomorfismos de  $S^3$  tal que  $h_0$  es la identidad y  $h_1 \circ K_1 = K_2$ . En estos términos, la pregunta fundamental es: ¿cuándo son dos nudos isotópicos?

Uno de los primeros logros en teoría de nudos fue una reformulación de la pregunta anterior de un problema topológico global a uno de combinatoria local, debido a *Reidemeister*. Dado un nudo o enlace, consideremos todas sus posibles *presentaciones*; es decir, proyecciones planares con orientaciones dibujadas. Cualquier presentación siempre se puede elegir *regular*, o sea, teniendo sólo dobles puntos transversales. Al respecto, Reidemeister concluyó el siguiente

**Teorema 2.3.1.** *Dos presentaciones regulares corresponden a enlaces isotópicos si y sólo si sus diagramas están relacionados por isotopía (fijando los puntos de cruce) y por una secuencia finita de las tres Movidas de Reidemeister, dadas en la figura 2.4.*

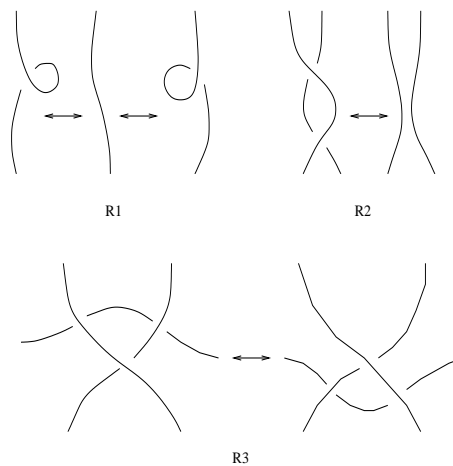


Fig. 2.4: Movidas R1, R2, R3

Aún con el teorema 2, el problema de la equivalencia de nudos es muy difícil de resolver. Sin embargo, bajo algunas condiciones (nudos toroidales), restringidas versiones de este problema han tenido una solución satisfactoria.

La teoría de nudos y enlaces estudia incrustaciones de círculos en  $S^3$ . Con algunas restricciones cuidadosas en el rango de estas incrustaciones, también se puede incrustar arcos en  $S^3$  de distintas formas topológicas. La teoría de trenzas estudia estos fenómenos.

*Trenzas*

Dado un entero positivo  $N$ , una *trenza de  $N$  filamentos* es una colección  $b = \{b_i\}_1^N$  de  $N$  incrustaciones disjuntas del intervalo  $[0,1]$  dentro del espacio euclidiano  $\mathbb{R}^3$  tal que para cada  $i$ ,

- (1)  $b_i(0) = (i, 0, 1)$
- (2)  $b_i(1) = (\tau(i), 0, 0)$  para alguna permutación  $\tau$ ; y
- (3)  $p_3[b_i(t)]$  es una función monótona decreciente de  $t$ , donde  $p_3$  denota la proyección dentro de la tercera coordenada.

Dos trenzas,  $b_1$  y  $b_2$ , son isotópicas si existe una isotopía  $h_t$  desde  $b_1$  a  $b_2$ , y si  $h_t \circ b_1$  satisface la definición anterior, para todo  $t \in [0,1]$ .

El estudio de trenzas difiere del estudio de nudos, fundamentalmente en que existe una **estructura natural de grupo** sobre el conjunto de las trenzas. Restringiéndonos al conjunto de todas las trenzas de  $N$  filamentos, hay una operación de grupo dada por la concatenación. Dadas trenzas  $b_1$  y  $b_2$ , uno define la suma de trenzas mediante el siguiente procedimiento: añadiendo el extremo superior del  $i$ -ésimo filamento de  $b_2$  al extremo inferior del  $i$ -ésimo filamento de  $b_1$  (ver figura 2.5.) De esta manera, uno obtiene el *grupo de trenzas de  $N$  filamentos*,  $B_N$ .

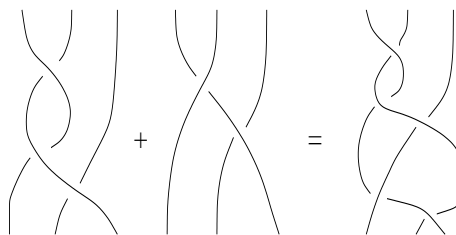


Fig. 2.5: Suma de trenzas sobre  $B_3$

Los generadores estándar para  $B_N$  se denotan  $\{\sigma_i : i = 1, \dots, (N - 1)\}$  y están dados geoméricamente como el cruce del  $i$ -ésimo filamento sobre el  $i + 1$ -ésimo filamento, como se



muestra en la figura 2.6. Las presentaciones para  $B_N$  en relación a estos generadores fue dada por Artin [Art] y son las siguientes:

$$B_N = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{N-1} \quad : \quad \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i - j| > 1; \quad \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad i < N - 1 \rangle$$

Las relaciones para estas presentaciones se ilustran en la figura 2.7.

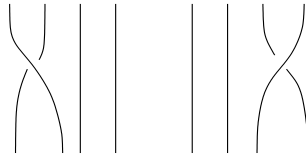


Fig. 2.6: Ejemplos de generadores para  $B_4$ :  $\sigma_1$  y  $\sigma_3^{-1}$

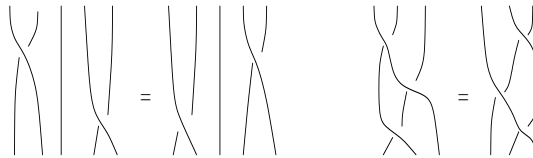


Fig. 2.7: Relaciones:  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$  para  $|i - j| > 1$ ;  $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$  para  $i < N - 1$

Una conexión entre teoría de trenzas y teoría de nudos se establece por una simple operación sobre el grupo de las trenzas, conocido como *cerradura*. Dada una trenza  $b$ , uno puede *cerrarla*,  $\bar{b}$ , de la siguiente manera: conectar el extremo superior y el correspondiente inferior de cada filamento de  $b$  de la manera obvia: ver figura 2.8. Una pregunta que aparece en este contexto es la siguiente: ¿cuál tipo de trenzas cerradas representan nudos y enlaces? La respuesta viene de Alexander (ver [11]).

**Teorema 2.3.2** (Alexander).

*Cualquier enlace  $L$  es isotópico a una trenza cerrada con algún número de filamentos.*

Un ejemplo particular en donde aparece naturalmente la noción de trenza cerrada es en el caso en que el campo de vectores se obtiene por la suspensión de un difeomorfismo del disco euclidiano  $\mathbf{D}^2$ . Para ser más precisos, consideremos un difeomorfismo  $\phi$  del disco  $\mathbf{D}^2$  que es la identidad en el borde.  $\phi$  puede ser “conectado” a la identidad por un camino  $\{\phi_t\}$  formado por difeomorfismos del disco que fijan el borde, llamado “isotopía”. Notemos  $T$  como el toro sólido  $\mathbf{D}^2 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . El campo de vectores de  $\mathbf{D}^2 \times \mathbb{R}$  y de coordenadas  $(\frac{\partial \phi_t}{\partial t}(x), 1)$  en el borde superior de cada punto  $(x, t)$  induce un campo de vectores  $X_{\phi_t}$  dentro de  $T$ . Una órbita periódica de tal campo reviste una

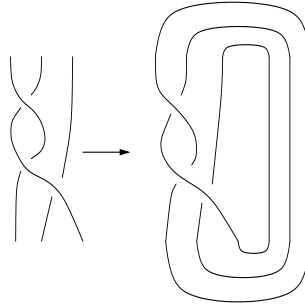


Fig. 2.8: La trenza  $\sigma_1^2 \sigma_2$  y su cerradura.

forma particular: ella se incrusta naturalmente dentro del toro sólido “girando siempre en el mismo sentido”. Tal órbita describe una *trenza cerrada*.

Existe otra manera de interpretar el grupo de trenzas de Artin, más en relación con la noción de dinámica. Consideremos el disco “punteado” de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{D}_n^2$ , construido mediante la remoción de  $n$  puntos distintos del disco  $\mathbf{D}^2$ , de coordenadas  $(\frac{i}{n-1} - \frac{1}{2}, 0)$  para  $i$  variando de 0 a  $n-1$ . El grupo fundamental  $\pi_1(\mathbf{D}_n^2)$  de  $\mathbf{D}_n^2$  se define como el grupo de homotopía de caminos cerrados de  $\mathbf{D}_n^2$  que pasan por un punto base previamente fijado. J.S. Birman (ver [11]) demostró que:

**Teorema 2.3.3** (Birman).

*El grupo de trenzas de Artin es isomorfo al subgrupo de automorfismos del grupo fundamental  $\pi_1(\mathbf{D}_n^2)$  inducido por los homeomorfismos de  $\mathbf{D}_n^2$  que son la identidad cerca del borde del disco  $\mathbf{D}^2$ .*

Sea  $D$  un disco abierto difeomorfo a un disco euclidiano incrustado en  $\mathbb{R}^3$  y sea  $\mathcal{G} = \{\gamma_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, i = 1, \dots, n\}$  una colección finita de curvas simples de clase  $C^\infty$  dos a dos disjuntas, tales que verifican las condiciones siguientes (ver figura 2.9):

- (1) cada  $\gamma_i$  interseca a  $D$  sólo en sus extremos (los extremos de  $\gamma_i$ ) y estas intersecciones son transversales,
- (2) cada  $\gamma_i'(0)$  y cada  $\gamma_i'(1)$  inducen la misma orientación sobre  $D$ .

La clase de isotopía de difeomorfismos que preservan la orientación de un sistema de curvas como el descrito antes, es un *pseudo-nudo*.

M. Lagrange (ver [11]) demostró una extensión del teorema de Alexander:

**Teorema 2.3.4.** *Cualquier pseudo-nudo es isotópico a una trenza con algún número de filamentos.*

Así como la noción de nudo tiene una relación más o menos directa con la noción de trenza, un pseudo-nudo tiene una relación directa con la noción de pseudo trenza. De hecho, la origina.

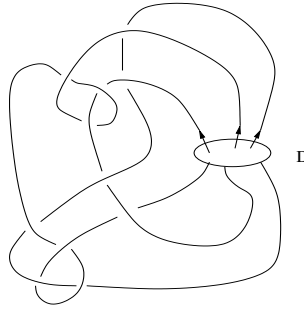


Fig. 2.9: Un representante de un pseudo-nudo.

## 2.4. Solenoide

Existe un ejemplo muy bonito de atractor hiperbólico, el **solenoide**. Este objeto ya era conocido por topólogos hacia principios de la década de los '60, pero fue introducido por Smale el año 1967 como ejemplo de sistema dinámico. Más tarde, utilizando este objeto como modelo, R. Williams desarrolló la teoría de atractores unidimensionales. En este contexto, entenderemos la construcción del solenoide, en el capítulo 3, como un conjunto límite que aparece cuando se itera la función (del toro sólido en el toro sólido) siguiente:

$$(x, y, \theta) \mapsto \left( \frac{1}{10}x + \frac{1}{2}\cos(\theta), \frac{1}{10}y + \frac{1}{2}\sen(\theta), 2\theta \right)$$

Esta estructura simula a una *trenza cerrada*. Una descripción de tal conjunto la encontramos también en [3]. Ahí se obtiene un solenoide como límite de una cascada de órbitas periódicas  $O_1, O_2, O_3, \dots$  donde  $O_{n+1}$  es una trenza conexa dentro de un toro sólido  $T_n$  de diámetro  $O_n$  y el primer toro  $T_1$  es el toro sólido estándar de  $\mathbb{R}^3$ .

**Definición 2.4.1.** *Un conjunto  $C$  no vacío y compacto es minimal si la órbita de cada punto es densa en  $C$ .*

La siguiente definición proviene de [11]:

**Definición 2.4.2.** *Un conjunto minimal de un campo de vectores  $X$  es un solenoide si él es localmente homeomorfo al producto de un conjunto de Cantor por un intervalo.*

Un resultado muy atractivo que aparece en el mismo artículo es la siguiente

**Proposición 2.4.1.** *Todo solenoide es trenzable.*

Sin embargo, hay conjuntos minimales de campos de vectores de clase  $C^\infty$  que no lo son. La proposición nos dice que esta obstrucción desaparece en el caso de los solenoides.

## 2.5. Resultados Adicionales

Los siguientes resultados, relativos a la **dimensión topológica** de los nudos y solenoides, son bien conocidos en la literatura. Han sido extractados de [11].

Sea  $X$  un espacio topológico. Un *cubrimiento* de  $X$  es una colección  $\mathcal{C}$  de conjuntos abiertos en  $X$ , cuya unión contiene a  $X$ . Un *refinamiento* de un cubrimiento  $\mathcal{C}$  de  $X$  es otro cubrimiento  $\mathcal{C}'$  de  $X$  tal que cada conjunto  $B$  en  $\mathcal{C}'$  está contenido en algún conjunto  $A$  en  $\mathcal{C}$ .

**Definición 2.5.1.** *Decimos que  $X$  tiene dimensión topológica  $m$  si cada cubrimiento  $\mathcal{C}$  de  $X$  posee un refinamiento  $\mathcal{C}'$  en el cual cada punto de  $X$  aparece en, a lo más,  $m + 1$  conjuntos en  $\mathcal{C}'$ , y  $m$  es el menor de tales enteros.*

### Lema 2.5.1.

*Todo nudo es de dimensión 1.*

*Todo solenoide es de dimensión 1.*

Como está escrito en la introducción a este trabajo, las órbitas periódicas de flujos 3-D forman nudos y enlaces sólo en  $\mathbb{R}^3$ . Es por esto que interesa estudiar las incrustaciones de estos objetos en el espacio 3-euclidiano.

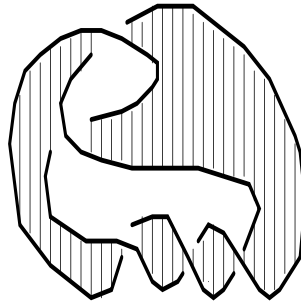
**Teorema 2.5.1.** *Todo nudo se incrusta en  $\mathbb{R}^3$ .*

**Corolario 2.5.1.** *Todo solenoide se incrusta en  $\mathbb{R}^3$ .*

En [12], por ejemplo, se demuestra que cualquier enlace en  $S^3$  puede obtenerse como la frontera de alguna superficie incrustada en  $S^3$ . Tales superficies son útiles cuando se desea estudiar algunas propiedades del enlace, como la factorización de un nudo en componentes primas, o bien el estudio de los polinomios de Alexander asociados al nudo. Se las denomina *Superficies de Seifert*. Un ejemplo de una tal superficie se muestra en la figura 2.10.

Un problema interesante abierto tiene que ver con la posibilidad de construir superficies cuyo borde sea un solenoide: ¿podemos construir, para el caso de un solenoide, el equivalente a la *superficie de Seifert* asociada a un nudo? (ver [11].)

**Definición 2.5.2.** *Una Superficie de Seifert de un enlace  $L$  en  $S^3$  es una superficie conexa, compacta y orientable contenida en  $S^3$ , que tiene a  $L$  como frontera.*



*Fig. 2.10:* El borde de la superficie es un nudo.

## Capítulo 3

# ACERCA DE LA CASCADA INFINITA DE ÓRBITAS PERIÓDICAS

### 3.1. Cascada de órbitas periódicas y homeomorfismos del 2-disco

Sea  $f$  un homeomorfismo del 2-disco,  $\mathbf{D}^2$ , que preserve la orientación. Una *cascada de órbitas periódicas* para  $f$  es una sucesión infinita de órbitas periódicas  $\{O_n\}$  de  $f$  con períodos  $\{q_n\}$  tales que, para cada  $n \geq 1$ , se tiene:

- $q_n = a_n \cdot q_{n-1}$  con  $q_0 = 1$  y  $a_n > 1$ ,
- existe una colección  $C_n^0, \dots, C_n^{q_n-1}$  de curvas simples, cerradas y disjuntas que son la frontera de los discos disjuntos respectivos  $\mathcal{D}_n^0, \dots, \mathcal{D}_n^{q_n-1}$ , y que tienen las siguientes propiedades:
  - cada  $\mathcal{D}_n^i$  contiene exactamente un punto de  $O_{n-1}$  y  $a_n$  puntos de  $O_n$ ,
  - $f(C_n^i)$  es isotópica a  $C_n^{i+1 \bmod q_n}$  en el disco “con hoyos” (perforado)  $\mathbf{D}^2 \setminus \bigcup_{i \leq n} O_i$ ,
  - la unión de los discos  $\mathcal{D}_n^i$  está contenida en la unión de los discos  $\mathcal{D}_{n-1}^i$ ,
  - los diámetros de los discos  $\mathcal{D}_n^i$  convergen uniformemente a 0 con  $n$ .

Sea  $\{f_t\}_{t \in [0,1]}$  un arco de homeomorfismos que une la identidad,  $f_0 = Id$ , con  $f_1 = f$ , y sea  $\{f_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  el arco de homeomorfismos que une la identidad,  $Id$ , con todos los iterados de  $f$ , donde  $f_t = f^{[t]} \circ f_{\{t\}}$ . A cada cascada de órbitas periódicas,  $O_n$ , le podemos asociar una *signatura*  $\{(\tilde{l}_n, q_n)\}$ , donde  $\tilde{l}_n = \frac{l_n}{q_n}$  y  $l_n$  se define a continuación:

En alguno de los  $\mathcal{D}_n^i$  tomamos el punto  $x_{n-1}$  de  $O_{n-1}$ , y un punto  $x_n$  de  $O_n$ ; entonces  $l_n$  es el número algebraico de vueltas que el vector  $\frac{f_t(x_n) - f_t(x_{n-1})}{\|f_t(x_n) - f_t(x_{n-1})\|}$  efectúa en el círculo unitario cuando  $t$  va de 0 hasta  $q_n$ . El número  $l_n$  es independiente de la elección de  $\mathcal{D}_n^i$ , e independiente de la elección del punto  $x_n$  en  $\mathcal{D}_n^i$ .

Para cada signatura  $\{(\tilde{l}_n, q_n)\}$  con  $\tilde{l}_n = \frac{l_n}{q_n}$ ,  $q_n$  es estrictamente creciente y  $a_n = \frac{q_n}{q_{n-1}}$  y  $l_n$  son coprimos para cada  $n$ .

La siguiente figura muestra los primeros elementos de de una cascada de órbitas periódicas en el caso en que todos los discos  $\mathcal{D}_n^i$  son discos geométricos y  $f(\mathcal{C}_n^i) = \mathcal{C}_n^{i+1 \bmod q_{n-1}}$ .

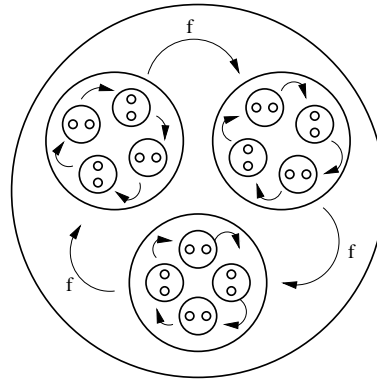


Fig. 3.1: Primeros elementos de una cascada

### 3.2. Asymptotic linking numbers para cascadas de órbitas: el caso de flujos 3-D

Vamos a considerar el enlace (*linking*) entre órbitas de un conjunto compacto invariante de un campo de vectores no singular de clase  $C^1$  dentro de un toro sólido, tal que las líneas del flujo  $\phi_t$  son transversales a los 2-discos (ver figura 3.2.) Además, fijamos la estructura de producto directo  $S^1 \times D^2$  en el toro sólido, trivializando el fibrado sobre  $S^1$ .

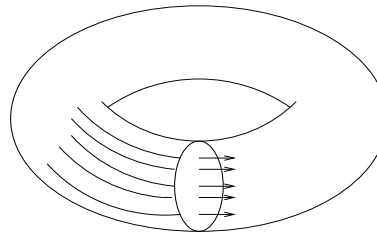


Fig. 3.2: Las líneas de flujo son transversales a la fibra.

Se tienen los siguientes hechos:

- (i) Dos segmentos de órbitas, largos y finitos, tienen un *linking number* aproximado si parten y terminan juntos uno del otro. Este número es el número algebraico de veces que un punto gira alrededor del otro cuando el par de órbitas se mira como proyección en la fibra  $\mathbf{D}^2 \times \{\theta\}$  (los 2-discos transversales) como un par de puntos móviles. La ambigüedad en este número es de una vuelta para todos esos pares de órbitas, una vez que se establece la proyección.
- (ii) Si el flujo es continuamente diferenciable, existe un número de giro análogo al anterior para cada segmento de órbita. Se define contando el número de veces que un vector tangente en la dirección del disco gira alrededor de la órbita. Notaremos esta cantidad como  $\omega_\phi(\cdot, T)$ . Dos vectores tangentes distintos girarán el mismo número de veces con un error de hasta media vuelta, debido a la linelidad (vectores antipodales giran lo mismo.)

La siguiente relación (o coherencia) entre el *linking topológico* del punto (i) y el *self linking infinitesimal* del punto (ii) es una consecuencia de la continua diferenciable del flujo:

- (iii) Para cada tiempo  $T$ , existe un  $\varepsilon = \varepsilon(T) > 0$  de tal forma que si tres órbitas de longitudes  $T$  están dentro de  $\varepsilon$  para  $0 \leq t \leq T$ , entonces el linking topológico entre dos de ellas difiere del self linking infinitesimal de la tercera órbita por, a lo más, una vuelta y media.
- (iv) Estos linking satisfacen la propiedad de cuasi-adición: si consideramos el recorrido de una órbita hasta el tiempo  $T_1$  y luego hasta el tiempo  $T_2$ , entonces los linking hasta el tiempo  $T_1 + T_2$  se relacionan con los linking hasta los tiempos anteriores de una manera cuasi-aditiva.
- (v) En [Ruelle], usando la propiedad algebraica anterior, D. Ruelle probó que para casi todo punto relativo a una medida ergódica invariante, el promedio de los linking infinitesimales tiene un límite cuando  $T \rightarrow \infty$ .

### *Invariante de Ruelle y difeomorfismos del disco*

En el contexto del self-linking infinitesimal, en [4] aparecen el teorema y la definición siguientes.

**Teorema 3.2.1.** *Sea  $V$  una variedad cerrada, conexa, orientable, de dimensión 3 y  $\phi_t$  un flujo sin singularidades sobre  $V$  donde el fibrado normal es trivial; sea  $\mu$  una medida invariante para  $\phi_t$ . Entonces:*

- Para  $\mu$ -ctp  $x$  en  $V$ , la cantidad  $\frac{\omega_\phi(x, T)}{T}$  converge cuando  $T$  tiende hacia  $\pm\infty$  hacia un límite  $\Omega_\phi(x)$ ,
- La función  $\Omega_\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable.



Llamaremos *invariante de Ruelle* asociado al par  $(\phi_t, \mu)$  y lo notaremos como  $\mathcal{R}_\mu(\phi)$  a la integral  $\int_V \Omega_\phi(x) d\mu(x)$ .

Además,  $\text{Diff}^r(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$  es el grupo de difeomorfismos de clase  $C^r$  ( $0 \leq r \leq \infty$ ) definidos sobre el disco  $\mathbf{D}^2$ , que son la identidad cerca del borde  $\partial\mathbf{D}^2$ . Para  $r = 0$  este grupo se anota  $\text{Homeo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$ . Si  $\mu$  es una medida finita sobre  $\mathbf{D}^2$ , el subgrupo de difeomorfismos de clase  $C^r$  que preservan la medida se anota como  $\text{Diff}_\mu^r(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$ .

*Observación.* En el mismo artículo [4] se demuestra que, bajo ciertas condiciones,  $\mathcal{R}_\mu(\phi_t)$  es un invariante de conjugación topológica, en un sentido que precisaremos en el siguiente capítulo.

### 3.3. Propiedades Asintóticas

Consideremos la sucesión de cascada de órbitas periódicas  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3, \dots$  donde  $\mathcal{O}_{n+1}$  es una trenza conexa (con al menos dos filamentos para evitar trivialidad) dentro de un toro sólido  $\mathcal{T}_n$  (que “envuelve” a la órbita  $\mathcal{O}_n$ ). Entonces asumimos que  $\mathcal{T}_1$  es el toro sólido original estándar de  $\mathbb{R}^3$ , e inductivamente, los 2-discos de cada nuevo toro sólido  $\mathcal{T}_{n+1}$  están contenidos en el 2-disco grande del toro precedente  $\mathcal{T}_n$ , tal que el diámetro de los 2-discos tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ . Entonces el conjunto compacto invariante (solenoides) es la intersección de los toros sólidos y existe una sucesión de números de enlace (linking numbers) de  $\mathcal{O}_{n+1}$  alrededor de  $\mathcal{O}_n$ . Dividiendo este número de enlace por el número de veces que  $\mathcal{O}_n$  “se enrolla” en torno de  $\mathcal{T}_1$  (en el caso de los homeomorfismos del disco, este número es el período  $q_n$ ) se define el *n-ésimo número de enlace promedio*,  $\bar{l}_n$ .

*Observación.*

1. El flujo en cascadas dentro del toro sólido cíclicamente intercambia pequeños discos invariantes en la sección de la fibra  $\mathbf{D}^2 \times \{\theta\}$ , y repite esta acción dentro de estos discos (ver figura 3.1)
2. La intersección del solenoide con los 2-discos transversales de  $\mathcal{T}_1$  es un conjunto de Cantor (ver, v.g. [13]) y el movimiento acá es cuasi-periódico; es decir, una traslación minimal (pues las órbitas son densas) de un grupo abeliano compacto. Por lo tanto, existe una única medida ergódica sobre el Cantor relativa a la acción del flujo.
3. Desde un punto de vista topológico, puede aparecer cualquier sucesión de números de enlace promedio (para más detalles, consultar [3].)

En relación a la última observación, si suponemos que el flujo es de clase  $C^1$ , entonces un teorema nos asegura que habrá convergencia de la sucesión de los números de enlace promedio. Como se señaló en la introducción, el objetivo de este trabajo es extender esta idea al caso de solenoides minimales generales, que no se obtienen como límite de una cascada de órbitas periódicas. Es decir, queremos generalizar el siguiente

**Teorema 3.3.1** (Coherencia de cascadas trenzadas en un flujo suave).

La sucesión de números de enlace promedio topológicamente definidos entre órbitas sucesivas de la cascada,  $\{\tilde{l}_n\}$ , converge. El límite es igual al promedio asintótico del self linking infinitesimal de la derivada.

*Demostración.* Usando la propiedad (v), elegimos un punto  $x$  del conjunto de Cantor para el cual existe el promedio asintótico del self linking infinitesimal,  $\Omega_\phi(x)$ . Sea  $\tilde{T} > 0$  y  $N$  suficientemente grande de tal manera que todas las órbitas  $\mathcal{O}_n$  con  $n > N$  permanezcan dentro de una vecindad de radio  $\varepsilon(\tilde{T})$  de la órbita de  $x$  para todo tiempo. Denotando como  $l_n$  el número de enlace de  $\mathcal{O}_n$  alrededor de  $\mathcal{O}_{n-1}$ , tenemos:

$$|l_n - \omega_\phi(x, q_n)| \leq \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{q_n}{\tilde{T}} + 1\right)$$

donde se ha usado (iii) y el hecho que la cuasi-aditividad de  $\omega_\phi(x, T)$  tiene defecto 1. Por lo tanto, para cualquier punto de acumulación  $\tilde{l}$  de la sucesión  $\tilde{l}_n$ , tenemos:

$$|\tilde{l} - \Omega_\phi(x)| \leq \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\tilde{T}}.$$

Como esto vale para cada  $\tilde{T} > 0$ , se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{l}_n = \Omega_\phi(x).$$

□

*Observación.* La demostración y la observación anteriores muestran que  $\Omega_{\phi_t}(x)$  existe para todo  $x$  en el conjunto de Cantor, y esta cantidad es independiente de  $x$ . De manera más general, en el caso únicamente ergódico (es decir, cuando hay una única medida invariante sobre el conjunto invariante) el límite del promedio del self linking infinitesimal *existe* para cualquier sucesión de segmentos de órbitas cuya longitud tiende a infinito, y es independiente de la sucesión de segmentos de órbitas.

## Capítulo 4

# PROPERTIES OF ASYMPTOTIC LINKING OF SOLENOIDS IN THE SOLID TORUS

Let  $\mathbf{D}^2$  stands for the 2-disk and  $\text{Diff}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$  the group of smooth diffeomorphisms on  $\mathbf{D}^2$  that are identity in a neighborhood of the boundary  $\partial\mathbf{D}^2$ . For any diffeomorphism  $\phi$  in  $\text{Diff}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$  and any invariant probability measure  $\mu$ , one can try to measure the average linking of the orbits of  $\phi$ . This can be done in two different standard ways<sup>1</sup>. On the one hand, the *Calabi invariant* measures the average asymptotic linking of pair of orbits under the action of a diffeomorphism. and on the other hand, the *Ruelle invariant* measures the averaged asymptotic rotation of the tangent plane around an orbit under the action of the differential of a diffeomorphism. Despite the fact that these two invariants describe linking properties, they are not tightly connected and we can easily construct examples of diffeomorphisms and measures where anyone of these two numbers is zero and the other different from zero.

In this paper we analyse the particular situation when a diffeomorphism  $\phi$  in  $\text{Diff}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$  possesses an invariant Cantor set  $X$  such that the dynamics restricted to  $X$  is minimal and uniquely ergodic. We shall denote by  $\mu_X$  the unique invariant probability measure with support in  $X$ . Our aim is to show how, in this precise context, the Calabi invariant and the Ruelle invariant are two elements of a same global picture. This picture is given to us from the abstract study of minimal maps on a Cantor set and their *Kakutani-Rohlin towers*.

### 4.1. The Calabi invariant and the Ruelle invariant

*In this section, following [4], we recall definitions and properties of the Calabi invariant and the Ruelle invariant.*

#### 4.1.1. The Calabi invariant

Let  $\phi$  be an element in  $\text{Diff}_\mu(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$ , The Calabi invariant measures the average asymptotic linking of pair of orbits of  $\phi$ . It is constructed as follows: Since the group  $\text{Diff}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$  is arc connected, we can chose an isotopy  $(\phi_t)_{t \in [0,1]}$  from the identity  $\phi_0 = Id$  to  $\phi_1 = \phi$ . For any pair of

---

<sup>1</sup> See [4] for more sophisticated constructions.

distinct points  $x$  and  $y$  in  $\mathbf{D}^2$  we denote  $\text{Ang}_\phi(x, y)$  the angular variation of the vector  $\overrightarrow{\phi_t(x)\phi_t(y)}$  when  $t$  goes from 0 to 1 (see figure 4.1.)

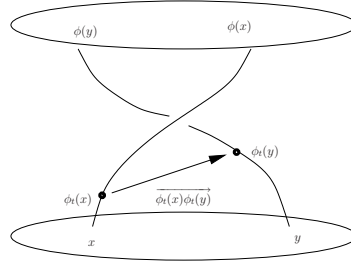


Fig. 4.1: Geometric meaning of the  $\text{Ang}_\phi$  function.

Since the group  $\text{Diff}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$  is contractible, the quantity  $\text{Ang}_\phi(x, y)$  does not depend on the chosen isotpy. Let  $\Delta$  stands for the diagonal in  $\mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^2$ . Since the probability measure  $\mu$  does not charge points,  $\Delta$  has measure zero when  $\mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^2$  is equipped with the product measure  $\mu \times \mu$ . Since  $\phi$  is a diffeomorphism, the map:

$$(x, y) \in \mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^2 \setminus \Delta \mapsto \text{Ang}_\phi(x, y) \in \mathbb{R},$$

is bounded. It follows that the map  $\text{Ang}_\phi$  is integrable on  $\mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^2$ . Calabi invariant denoted by  $\text{Cal}_\mu(\phi)$  is the integral:

$$\text{Cal}_\mu(\phi) = \iint \text{Ang}_\phi(x, y) d\mu(x) d\mu(y).$$

Notice that when  $\phi$  belongs to  $\text{Homeo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$  which is also arc connected and contractible, it is still possible to define the map

$$(x, y) \in \mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^2 \setminus \Delta \mapsto \text{Ang}_\phi(x, y) \in \mathbb{R},$$

but it is not possible to insure that this map is integrable.

For any pair of homeomorphisms  $\phi$  and  $\psi$  in  $\text{Homeo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$  and any pair of distinct points  $x$  and  $y$  in  $\mathbf{D}^2$ , we have:

$$\text{Ang}_{\phi \circ \psi}(x, y) = \text{Ang}_\psi(x, y) + \text{Ang}_\phi(\psi(x), \psi(y)).$$

This relation induces the following three properties.

*Group morphism:*

The map  $\text{Cal} : \phi \in \text{Diff}_\mu(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2) \mapsto \text{Cal}_\mu(\phi) \in \mathbb{R}$  is a group morphism:

$$\text{Cal}_\mu(\phi \circ \psi) = \text{Cal}_\mu(\phi) + \text{Cal}_\mu(\psi), \quad \forall \phi, \psi \in \text{Diff}_\mu(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2).$$

*Ergodic average:*

For any element  $\phi$  in  $\text{Diff}_\mu(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$  and almost every pair of points  $x$  and  $y$  in  $\mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^2$  the quantity  $\frac{1}{n} \text{Ang}_{\phi^n}(x, y) \equiv \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \text{Ang}_\phi(\phi^k(x), \phi^k(y))$  converges when  $n$  goes to  $\infty$  to a limit that we denote by  $\widetilde{\text{Ang}}_\phi(x, y)$ . The map

$$(x, y) \in \mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^2 \mapsto \widetilde{\text{Ang}}_\phi(x, y)$$

is integrable and its integral satisfies:

$$\iint \widetilde{\text{Ang}}_\phi(x, y) d\mu(x) d\mu(y) = \text{Cal}_\mu(\phi) = \iint \text{Ang}_\phi(x, y) d\mu(x) d\mu(y).$$

*Topological invariance:*

**Theorem 4.1.1.** [4] *Let  $\mu_1$  and  $\mu_2$  be two probability measures that do not charge points,  $\phi_1$  a diffeomorphism in  $\text{Diff}_{\mu_1}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$  and  $\phi_2$  a diffeomorphism in  $\text{Diff}_{\mu_2}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$ . Assume there exists a homeomorphism  $h$  in  $\text{Homeo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$  such that:*

- ◇  $h_*(\mu_1) = \mu_2$ ;
- ◇  $h \circ \phi_1 = \phi_2 \circ h$ .

*Then:*

$$\text{Cal}_{\mu_1}(\phi_1) = \text{Cal}_{\mu_2}(\phi_2).$$

#### 4.1.2. The Ruelle invariant

The Ruelle invariant measures the averaged asymptotic rotation of the tangent plane around an orbit. Chose again an isotopy  $(\phi_t)_{t \in [0,1]}$  from the identity  $\phi_0 = Id$  to  $\phi_1 = \phi$  and extend this, isotopy to the iterates of  $\phi$  by setting:

$$\phi_t = \phi_{t-[t]} \circ \phi^{[t]}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

where  $[\cdot]$  stands for the integer part. For any point  $x$  in  $\mathbf{D}^2$  and any tangent vector  $u$  in  $\mathbb{R}^2$  different from 0, and any time  $t$  in  $\mathbb{R}$ , we consider the vector  $d\phi_t(x)(u)/\|d\phi_t(x)(u)\|$  and we denote by  $\omega_\phi(x, u, T)$  the angular variation of this vector when  $t$  goes from 0 to  $T$  (see figure 4.2.) Since the map  $\phi$  is a diffeomorphism, for any pair of vectors  $u_1$  and  $u_2$  different from 0, we have:

$$|\omega_\phi(x, u_1, T) - \omega_\phi(x, u_2, T)| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbf{D}^2, \forall T \in \mathbb{R}.$$

We define:

$$\omega_\phi(x, T) = \inf_{u \in \mathbb{R}^2 - \{0\}} \omega_\phi(x, u, T) \quad \forall x \in \mathbf{D}^2, \forall T \in \mathbb{R}.$$

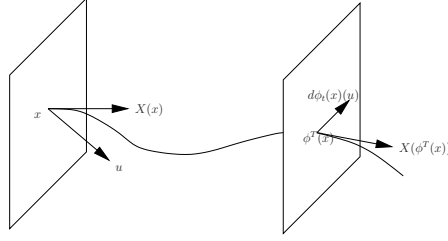


Fig. 4.2: The infinitesimal self linking of the derivative.

We have the following quasi-additive property:

$$|\omega_\phi(x, T + T') - \omega_\phi(x, T) - \omega_\phi(\phi^T(x), T')| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbf{D}^2, T, T' \in \mathbb{R}.$$

It follows that, for  $\mu$ -almost every  $x$  in  $\mathbf{D}^2$ , the quantity  $\frac{1}{T}\omega_\phi(x, T)$  converges to a limit  $\Omega_\phi(x)$  independent on the chosen isotopy. Furthermore the map:

$$x \in \mathbf{D}^2 \mapsto \Omega_\phi(x) \in \mathbb{R}$$

is integrable and the Ruelle invariant is the quantity:

$$\mathcal{R}_\mu(\phi) = \int_{\mathbf{D}^2} \Omega_\phi(x) d\mu(x).$$

The quasi-additivity also yields the following properties:

*Group quasi-morphism*

The map  $\mathcal{R}_\mu : \phi \in \text{Diff}_\mu(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2) \mapsto \mathcal{R}_\mu(\phi) \in \mathbb{R}$  is a group quasi-morphism:

$$|\mathcal{R}_\mu(\phi \circ \psi) - \mathcal{R}_\mu(\phi) - \mathcal{R}_\mu(\psi)| \leq 4\mu(\mathbf{D}^2), \quad \forall \phi, \psi \in \text{Diff}_\mu(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2).$$

*Homogeneity*

The quasi-morphism  $\mathcal{R}_\mu$  is homogeneous:

$$\mathcal{R}_\mu(\phi^n) = n\mathcal{R}_\mu(\phi), \quad \forall \phi \in \text{Diff}_\mu(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2), \forall n \in \mathbb{Z}.$$

*Topological invariance:*

**Theorem 4.1.2.** [4] Let  $\mu_1$  and  $\mu_2$  be two probability measures that do not charge points,  $\phi_1$  a diffeomorphism in  $\text{Diff}_{\mu_1}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$  and  $\phi_2$  a diffeomorphism in  $\text{Diff}_{\mu_2}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$ . Assume there exists a homeomorphism  $h$  in  $\text{Homeo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$  such that:

- ◇  $h_*(\mu_1) = \mu_2$ ;
- ◇  $h \circ \phi_1 = \phi_2 \circ h$ .

Then:

$$\mathcal{R}_{\mu_1}(\phi_1) = \mathcal{R}_{\mu_2}(\phi_2).$$

### 4.1.3. Examples

Consider the case we the invariant measure is the lebesgue measure  $\lambda$  associated with the standard area form  $\omega$  on  $\mathbf{D}^2$ . Let  $\mathcal{H} : \mathbf{D}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  be a smooth function which vanishes in a neighborhood of the boundary  $\partial\mathbf{D}^2$ . For any regular value  $\zeta$  of  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H}^{-1}(\zeta)$  is a finite collection of simple disjoint closed curves. To each of these curves we associate an index  $+1$  or  $-1$  according to the fact that  $\mathcal{H}$  increases or decreases when crossing the curve from its interior to its exterior. We denote by  $n_{\mathcal{H}}(\zeta)$  the sum of these indices.

The hamiltonian vector field  $X_{\mathcal{H}}$  associated with  $\mathcal{H}$  is the symplectic dual of the 1-form  $d\mathcal{H}$ , *i.e.*:

$$d\mathcal{H}(-) = \omega(-, X_{\mathcal{H}}).$$

This vector field generates a flow  $\phi_{\mathcal{H}}^t$ . For this flow and for the lebesgue measure, the Calabi invariant and the Ruelle invariant can be computed.

**Proposition 4.1.3.** [4]

$$\text{Cal}_{\lambda}(\phi_{\mathcal{H}}^t) = -2t \int_{\mathbf{D}^2} \mathcal{H}(x) d\lambda(x), \quad \text{and} \quad \mathcal{R}_{\lambda}(\phi_{\mathcal{H}}^t) = t \int_{\mathbb{R}} n_{\mathcal{H}}(\zeta) d\zeta.$$

## 4.2. Minimal Cantor system

Let  $X$  be a Cantor set *i.e.* a compact metric space perfect and totally disconnected and let  $\phi : X \rightarrow X$  be a minimal homeomorphism *i.e.* all its orbits are dense. We call the data  $(X, \phi)$  a minimal Cantor system.

Fix a point  $x_0$  in  $X$  and a decreasing sequence of positive numbers  $(\delta_l)_{l \geq 0}$  converging to zero. A Kakutani-Rohlin towers system sequence associated with  $x_0$  and  $(\delta_l)_{n \geq 0}$  can be constructed as follows.

*Step 1:* Choose a clopen (closed open) subset  $\mathcal{C}_0$  of  $X$  containing  $x_0$  with diameter smaller than  $\delta_0$ . For each  $x$  in  $\mathcal{C}_0$  we denote by  $n_{\mathcal{C}_0}(x)$  the first return of the forward orbit of  $x$  in  $\mathcal{C}_0$ . The minimality condition implies that there exists a partition of  $\mathcal{C}_0$  in clopen sets:

$$\mathcal{C}_{0,0}, \mathcal{C}_{0,1}, \dots, \mathcal{C}_{0,k(\mathcal{C}_0)}$$

such that :

- ◇ the return time function in  $\mathcal{C}_0$ ,  $n_{\mathcal{C}_0}$  take a constant value  $n_{0,i}$  on each  $\mathcal{C}_{0,i}$ 's;
- ◇ the diameter of  $\phi^n(\mathcal{C}_{0,i})$  is smaller than  $\delta_0$  for each  $n$  in  $\{0, \dots, n_{0,i} - 1\}$ ;
- ◇ up to renaming it is always possible to assume that  $x_0 \in \mathcal{C}_{0,0}$ .

For  $i = 0, \dots, k(\mathcal{C}_0)$ , the collection

$$\{\mathcal{C}_{0,i}, \phi(\mathcal{C}_{0,i}), \dots, \phi^{n_{0,i}-1}(\mathcal{C}_{0,i})\}$$

is called a *tower* and the collection of all towers when  $i$  runs from 0 to  $k(\mathcal{C}_0)$ , a *tower system* with mesh  $\delta_0$ .

*Step 2:*

Choose now a clopen subset  $\mathcal{C}_1$  of  $\mathcal{C}_{0,0}$  containing  $x_0$  with diameter smaller than  $\delta_1$ . The minimality condition again implies that there exists a partition of  $\mathcal{C}_1$  in clopen sets:

$$\mathcal{C}_{1,0}, \mathcal{C}_{1,1}, \dots, \mathcal{C}_{1,k(\mathcal{C}_1)}$$

such that :

- ◇ the return time function in  $\mathcal{C}_1$ ,  $n_{\mathcal{C}_1}$  take a constant value  $n_{1,i}$  on each  $\mathcal{C}_{1,i}$ 's;
- ◇ the diameter of  $\phi^n(\mathcal{C}_{1,i})$  is smaller than  $\delta_1$  for each  $n$  in  $\{0, \dots, n_{1,i} - 1\}$ ;
- ◇ up to renaming it is always possible to assume that  $x_0 \in \mathcal{C}_{1,0}$ .

We add an extra condition relating the tower system in construction with the tower system already constructed:

- ◇ for each each  $i$  in  $\{0, \dots, k(\mathcal{C}_1)\}$  and  $n$  in  $\{0, \dots, n_{1,i} - 1\}$ , there exist  $j$  in  $\{0, \dots, k(\mathcal{C}_0)\}$  and  $m$  in  $\{0, \dots, n_{0,j} - 1\}$  such that

$$\phi^n(\mathcal{C}_{1,i}) \subset \phi^m(\mathcal{C}_{0,j}).$$

We have constructed in this way a second tower system with mesh  $\delta_1$  coherent with the first one.

*Step 3:* We iterate this procedure in order to get for each  $l \geq 0$ , a clopen  $\mathcal{C}_l$  with diameter  $\delta_l$ , and a partition of  $\mathcal{C}_l$  in clopen sets:

$$\mathcal{C}_{l,0}, \mathcal{C}_{l,1}, \dots, \mathcal{C}_{l,k(\mathcal{C}_l)}$$

such that :

- ◇ the return time function in  $\mathcal{C}_l$ ,  $n_{\mathcal{C}_l}$  take a constant value  $n_{l,i}$  on each  $\mathcal{C}_{l,i}$ 's;
- ◇ the diameter of  $\phi^n(\mathcal{C}_{l,i})$  is smaller than  $\delta_l$  for each  $n$  in  $\{0, \dots, n_{l,i} - 1\}$ ;
- ◇ for each each  $i$  in  $\{0, \dots, k(\mathcal{C}_l)\}$  and  $n$  in  $\{0, \dots, n_{l,i} - 1\}$ , there exist  $j$  in  $\{0, \dots, k(\mathcal{C}_{l-1})\}$  and  $m$  in  $\{0, \dots, n_{l-1,j} - 1\}$  such that

$$\phi^n(\mathcal{C}_{l,i}) \subset \phi^m(\mathcal{C}_{l-1,j}).$$

- ◇  $\phi^n(\mathcal{C}_{l,i})$  is smaller than  $\delta_l$  for each  $n$  in  $\{0, \dots, n_{l,i} - 1\}$ ;
- ◇ up to renaming it is always possible to assume that  $x_0 \in \mathcal{C}_{l,0}$ .



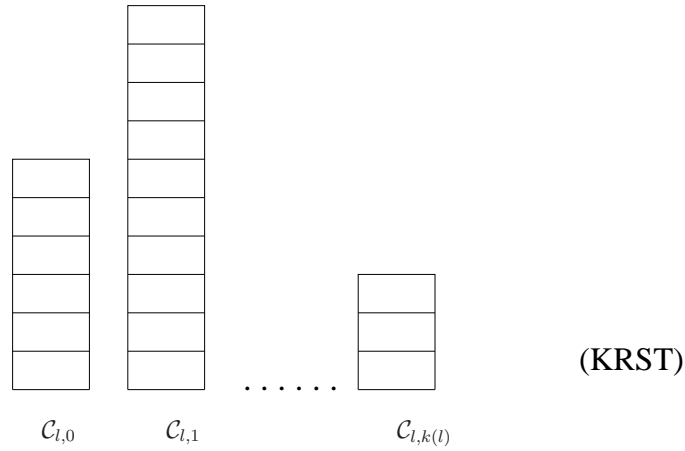


Fig. 4.3: A Kakutani-Rohlin towers system (KRST).

We have constructed in this way a sequence of  $n$  tower systems with mesh  $\delta_0, \dots, \delta_n$  each one coherent with its predecessor. Figure 4.3 shows a representation of a *Kakutani-Rohlin towers system* by drawing the clopen sets in the base of the rectangles (the towers) and figure 4.4 shows the coherence between towers of generations  $l - 1$  and  $l$ .

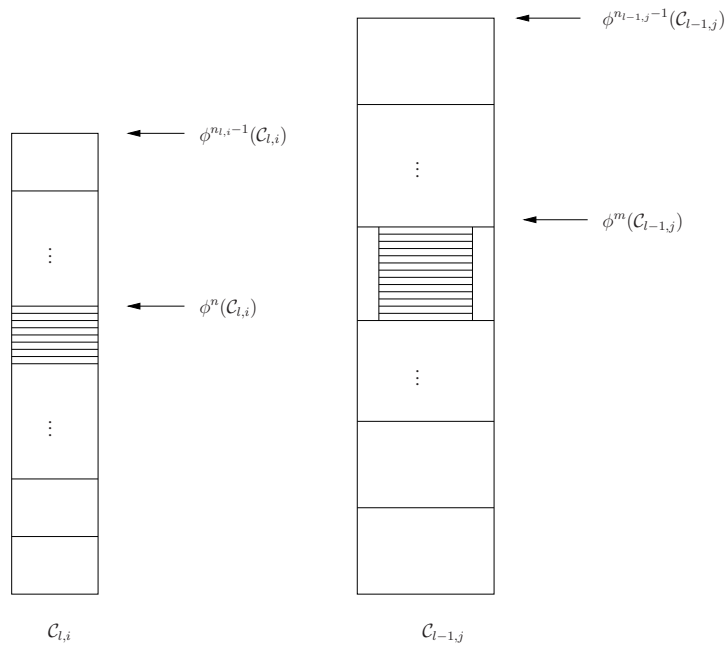


Fig. 4.4: The coherence between towers.

### 4.2.1. Matrix representation

There is a naive idea behind these representations. We can construct a matrix associated to this *Kakutani-Rohlin towers system* as follows:

Choose  $l \geq 0$  and let  $\{\mathcal{C}_{l,0}, \mathcal{C}_{l,1}, \dots, \mathcal{C}_{l,k(l)}\}$  be a partition of the clopen  $\mathcal{C}_l$ , constructed as before.

The matrix  $\mathcal{M}_l$  associated to the Kakutani-Rohlin towers system (KRTS) (fig. 4.3) is a  $(n_{l,0} + n_{l,1} + \dots + n_{l,k(\mathcal{C}_l)}) \times (n_{l,0} + n_{l,1} + \dots + n_{l,k(\mathcal{C}_l)})$  real matrix, such that

$$(\mathcal{M}_l)_{p,q} = \int \int_{\phi^t(\mathcal{C}_{l,i}) \times \phi^r(\mathcal{C}_{l,j})} \text{Ang}_\phi(x, y) d\mu_X(x) d\mu_X(y)$$

where  $i$  stands for the unique natural number such that

$$n_{l,0} + n_{l,1} + \dots + n_{l,(i-1)} < p \leq n_{l,0} + n_{l,1} + \dots + n_{l,i}$$

and  $j$  stands for the unique natural number such that

$$n_{l,0} + n_{l,1} + \dots + n_{l,(j-1)} < q \leq n_{l,0} + n_{l,1} + \dots + n_{l,j}$$

and

$$\begin{aligned} t &= p - (n_{l,0} + n_{l,1} + \dots + n_{l,(i-1)}) \\ r &= q - (n_{l,0} + n_{l,1} + \dots + n_{l,(j-1)}) \end{aligned}$$

Intuitively,  $(\mathcal{M}_l)_{p,p}$ , with  $p \in \{1, \dots, (n_{l,0} + \dots + n_{l,k(\mathcal{C}_l)})\}$ , measures the average asymptotic linking between orbits of points in a definite clopen  $\mathcal{C}_{l,i}$  ( $i$  is just determined by  $p$ ). Figure 4.5 is a schematic approximation to this concept:

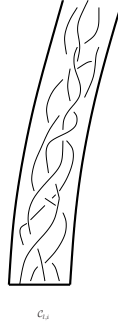


Fig. 4.5: Contributions to the “inner” Calabi.

On the other hand,  $(\mathcal{M}_l)_{p,q}$ , with  $p \neq q$ , measures the average asymptotic linking between orbits of points which, in generation  $l$ , belong to different clopen  $\mathcal{C}_{l,i}$  and  $\mathcal{C}_{l,j}$ , or belong to the same clopen  $\mathcal{C}_{l,k}$  but the tower associated to this clopen crosses itself. Figure 4.6 shows this situation.

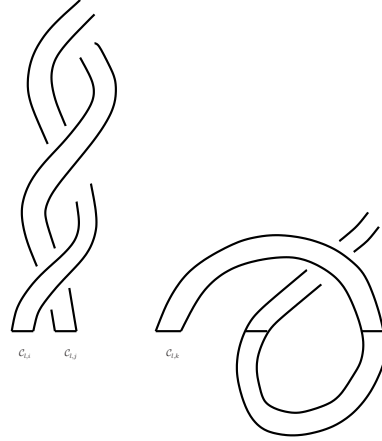


Fig. 4.6: Contributions to the “outer” Calabi.

Notice that  $Cal_{\mu_X}(\phi) = \sum_{p,q} (\mathcal{M}_l)_{p,q}$ . This fact, and the above construction, yield to defining  $Cal_{\mu_X, Int_l}(\phi)$  as the contribution to  $Cal_{\mu_X}(\phi)$  of the diagonal elements, and  $Cal_{\mu_X, Out_l}(\phi)$  as the contribution of outer elements of the diagonal. In these terms, we can formally “arrange” the clopen sets of generation  $l$  in such a way the matrix rows and the matrix columns correspond to the clopen level positions. Actually, this is the meaning of the matrix definition. Figure 4.7 shows this arrangement. There  $\mathcal{T}_l(\mathcal{C}_{l,k})$ , with  $k \in \{1, \dots, k(\mathcal{C}_l)\}$ , is the tower associated with the clopen  $\mathcal{C}_{l,k}$ .

### 4.3. Linking properties of invariant minimal Cantor sets

In this section we consider a diffeomorphism  $\phi$  in  $\text{Diff}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$  which possesses an invariant Cantor set  $X$  on which the dynamics of  $\phi|_X$  is minimal and uniquely ergodic. We denote by  $\mu_X$  the unique probability measure with support in  $X$ .

Consider first the Ruelle invariant  $\mathcal{R}_{\mu_X}(\phi)$ . The unique ergodicity of the map on the Cantor set implies:

**Proposition 4.3.1.** *The quantity  $\frac{1}{n}\omega_\phi(x, n)$  converges uniformly in  $x$  when  $n$  goes to infinity to the constant  $\mathcal{R}_{\mu_X}(\phi)$ .*

Proof: After [3], we notice that  $\forall x \in \mathbf{D}^2$  and all positive integers  $n$  and  $m$  we have:

$$|\omega_\phi(x, n+m) - \omega_\phi(x, n) - \omega_\phi(\phi^n(x), m)| \leq 1.$$

Therefore, we get the following inequalities

$$\omega_\phi(x, n+m) \leq \omega_\phi(x, n) + \omega_\phi(\phi^n(x), m) \leq \omega_\phi(x, n+m) + 1. \quad (4.3.1)$$

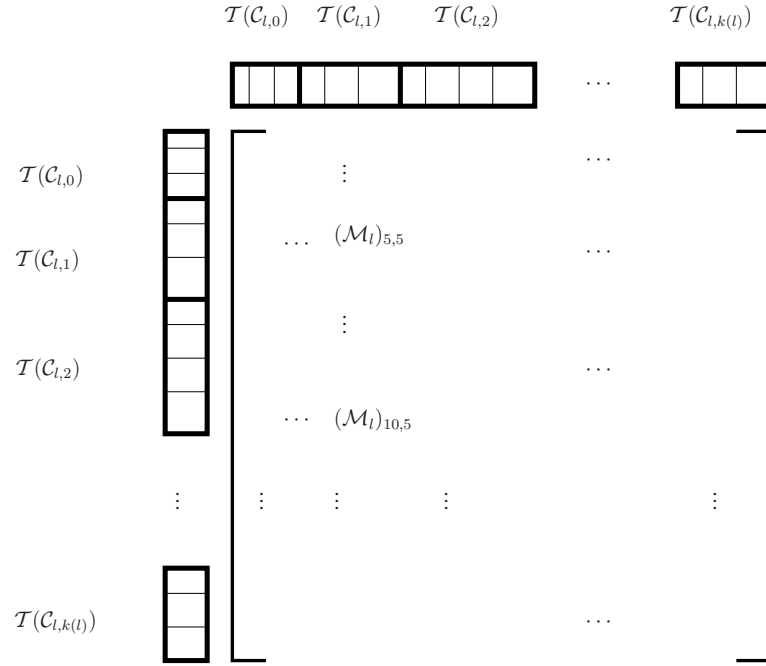


Fig. 4.7: Matrix representation: the summation  $\sum_{p,q} (\mathcal{M}_l)_{p,q}$  is the Calabi invariant, at each generation  $l$ .

Now, consider the Euclidean division of  $n$  by  $m$  :  $n = km + r$ , with  $0 \leq r \leq m - 1$ . Using (4.3.1) we obtain

$$\omega_\phi(x, n) \leq \omega_\phi(x, km) + \omega_\phi(\phi^{km}, r) \leq \omega_\phi(x, n) + 1.$$

Using (4.3.1) again we obtain

$$\omega_\phi(x, km) \leq \omega_\phi(x, j) + \sum_{i=0}^{k-2} \left( \omega_\phi(\phi^{im+j}(x), m) + \omega_\phi(\phi^{(k-1)m+j}(x), m-j) \right) \leq \omega_\phi(x, km) + k,$$

for  $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ . By adding up all these inequalities we obtain

$$\begin{aligned} \omega_\phi(x, km) &\leq \left( \frac{1}{m} \right) \left( \sum_{j=0}^{m-1} \left( \omega_\phi(x, j) + \omega_\phi(\phi^{(k-1)m+j}(x), m-j) \right) + \sum_{i=0}^{(k-1)m-1} \omega_\phi(\phi^i(x), m) \right) \\ &\leq \omega_\phi(x, km) + k. \end{aligned}$$

This yields:

$$\left| \frac{\omega_\phi(x, n)}{n} - \left( \frac{1}{m} \right) \left( \frac{1}{n} \right) \sum_{i=0}^{n-1} \omega_\phi(\phi^i(x), m) \right| \leq \left( \frac{1}{n} \right) \left( k + 1 + \mathcal{F}(\omega_\phi, x, m) + |\omega_\phi(\phi^{km}(x), r)| \right)$$

where

$$\mathcal{F}(\omega_\phi, x, m) = \left( \frac{1}{m} \right) \left| \sum_{j=0}^{m-1} (\omega_\phi(x, m) + \omega_\phi(\phi^{(k-1)m+j}(x), m-j)) + \sum_{j=0}^{m+r-1} \omega_\phi(\phi^{(k-1)m+j}(x), m) \right|.$$

Notice that there exists a uniform bound  $B(m)$  such that  $\mathcal{F}(\omega_\phi, x, m) + |\omega_\phi(\phi^{km}(x), r)| \leq B(m)$ , thus:

$$\left| \frac{\omega_\phi(x, n)}{n} - \left( \frac{1}{m} \right) \left( \frac{1}{n} \right) \sum_{i=0}^{n-1} \omega_\phi(\phi^i(x), m) \right| \leq \left( \frac{1}{n} \right) (k+1 + B(m)). \quad (4.3.2)$$

But according to the *Birkoff ergodic theorem*,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_\phi(\phi^i(x), m) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int \omega_\phi(x, m) d\mu_X(x),$$

and since  $\omega_\phi(\cdot, m) : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  is a continuous function, the unique ergodicity hypothesis implies that this convergence is uniform on  $x$  (see [16], pp 160.)

Therefore,  $\exists \tilde{n} \in \mathbb{N}$  such that, for all  $x$ , if  $n \geq \tilde{n}$ , then

$$\left| \left( \frac{1}{m} \right) \left( \frac{1}{n} \right) \sum_{i=0}^{n-1} \omega_\phi(\phi^i(x), m) - \int_X \frac{\omega_\phi(x, m)}{m} d\mu_X(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Besides,  $\exists \tilde{m} \in \mathbb{N}$  such that if  $m \geq \tilde{m}$ , then

$$\left| \mathcal{R}_\mu(\phi) - \int_X \frac{\omega_\phi(x, m)}{m} d\mu_X(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

So, choosing  $M = \min\{\tilde{n}, \tilde{m}\}$ , we get for all  $x$ , according to (4.3.2)

$$\left| \frac{\omega_\phi(x, n)}{n} - \mathcal{R}_\mu(\phi) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \left( \frac{1}{n} \right) (k+1 + B(m))$$

and this holds for all  $n, m \geq M$ . This proves the lemma.  $\square$

Let us consider now the Calabi invariant  $Cal_{\mu_X}(\phi)$  and a Kakutani-Rohlin towers system sequence associated with a point  $x_0$  in  $X$  and with a sequence of meshes  $(\delta_l)_{l \geq 0}$ . Choose  $l \geq 0$  and define:

$$\mathcal{T}_l = \left\{ (n, i) : n \in \{0, \dots, n_{l,i} - 1\}, i \in \{0, \dots, k(\mathcal{C}_l)\} \right\},$$

$$Int_l = \left\{ ((n, i), (n, i)) : (n, i) \in \mathcal{T}_l \right\} \subset \mathcal{T}_l \times \mathcal{T}_l,$$

and

$$Out_l = \mathcal{T}_l \times \mathcal{T}_l \setminus Int_l.$$

As stated before, the Calabi invariant  $Cal_{\mu_X}(\phi)$  decomposes as:

$$\begin{aligned} Cal_{\mu_X}(\phi) &= \int \int_{X \times X} Ang_\phi(x, y) d\mu_X(x) d\mu_X(y) \\ &= \sum_{(n,i) \in \mathcal{T}_l} \sum_{(m,j) \in \mathcal{T}_l} \int \int_{\phi^n(\mathcal{C}_{l,i}) \times \phi^m(\mathcal{C}_{l,j})} Ang_\phi(x, y) d\mu_X(x) d\mu_X(y). \end{aligned}$$

But according to the matrix representation:

$$Cal_{\mu_X, Int_l}(\phi) = \sum_{Int_l} \int \int_{\phi^n(\mathcal{C}_{l,i}) \times \phi^n(\mathcal{C}_{l,i})} Ang_\phi(x, y) d\mu_X(x) d\mu_X(y),$$

and

$$Cal_{\mu_X, Out_l}(\phi) = \sum_{Out_l} \int \int_{\phi^n(\mathcal{C}_{l,i}) \times \phi^m(\mathcal{C}_{l,j})} Ang_\phi(x, y) d\mu_X(x) d\mu_X(y),$$

we have:

$$Cal_{\mu_X}(\phi) = Cal_{\mu_X, Int_l}(\phi) + Cal_{\mu_X, Out_l}(\phi).$$

The proof of the following proposition is plain.

**Proposition 4.3.2.** *The sequences  $(Cal_{\mu_X, Out_l}(\phi))_{l \geq 0}$  and  $(Cal_{\mu_X, Int_l}(\phi))_{l \geq 0}$  satisfy:*

When  $l = 0$  :

$$Cal_{\mu_X}(\phi) = Cal_{\mu_X, Int_0}(\phi) \quad \text{and} \quad Cal_{\mu_X, Out_0}(\phi) = 0.$$

When  $l$  goes to  $+\infty$  :

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} Cal_{\mu_X, Out_l}(\phi) = Cal_{\mu_X}(\phi) \quad \text{and} \quad \lim_{l \rightarrow +\infty} Cal_{\mu_X, Int_l}(\phi) = 0.$$

Proof: By hypothesis  $\delta_l \rightarrow_{l \rightarrow \infty} 0$ . Therefore,  $\mu_X(\mathcal{C}_{l,i}) \rightarrow_{l \rightarrow \infty} 0$ .

Then, by definition,

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} Cal_{\mu_X, Int_l}(\phi) = 0.$$

□

The link between the Calabi invariant and the Ruelle invariant is given by the following theorem:

**Theorem 4.3.3.**

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Lambda_l} \text{Cal}_{\mu_X, \text{Int}_l}(\phi) = \mathcal{R}_{\mu_X}(\phi),$$

where  $\Lambda_l$  stands for the product measure of  $\text{Int}_l : \Lambda_l = \sum_{i=0}^{k(\mathcal{C}_l)} n_{l,i} \mu_X(\mathcal{C}_{l,i})^2$ .

Proof: We can rewrite  $\text{Cal}_{\mu_X, \text{Int}_l}(\phi)$  as:

$$\text{Cal}_{\mu_X, \text{Int}_l}(\phi) = \sum_{i=0}^{k(\mathcal{C}_l)} \int \int_{\mathcal{C}_{l,i} \times \mathcal{C}_{l,i}} \text{Ang}_{\phi^{n_{l,i}}}(x, y) d\mu_X(x) d\mu_X(y).$$

In fact,

$$\begin{aligned} & \sum_{\text{Int}_l} \int \int_{\phi^n(\mathcal{C}_{l,i}) \times \phi^n(\mathcal{C}_{l,i})} \text{Ang}_{\phi}(x, y) d\mu_X(x) d\mu_X(y) = \\ & \sum_{i=0}^{k(\mathcal{C}_l)} \sum_{n=0}^{n_{l,i}-1} \int \int_{\mathcal{C}_{l,i} \times \mathcal{C}_{l,i}} \text{Ang}_{\phi}(\phi^n x, \phi^n y) d\mu_X(x) d\mu_X(y) = \\ & \sum_{i=0}^{k(\mathcal{C}_l)} \int \int_{\mathcal{C}_{l,i} \times \mathcal{C}_{l,i}} \sum_{n=0}^{n_{l,i}-1} \text{Ang}_{\phi}(\phi^n x, \phi^n y) d\mu_X(x) d\mu_X(y) = \\ & \sum_{i=0}^{k(\mathcal{C}_l)} \int \int_{\mathcal{C}_{l,i} \times \mathcal{C}_{l,i}} \text{Ang}_{\phi^{n_{l,i}}}(x, y) d\mu_X(x) d\mu_X(y) \end{aligned}$$

the second equality being a consequence of  $\phi^{-n}(\mu_X) = \mu_X$ , for all  $n \in \mathbb{N}$ , and the last equality being a consequence of the *ergodic average* property of  $\text{Ang}_{\phi}$ .

We use now the following standard lemma which is a direct consequence of the  $C^1$ -smoothness of the diffeomorphism.

**Lemma 4.3.4.** *For any  $N_0$  there exists  $\delta$  sufficiently small such that for any triplet of points  $x, y$  and  $z$  which are within a distance smaller than  $\delta$  one of the other:*

$$|\text{Ang}_{\phi^n}(x, y) - \omega_{\phi}(z, n)| \leq 3, \quad \forall 0 \leq n \leq N_0.$$

So, choosing  $N_0 \in \mathbb{N}$ , for  $l$  big enough so that  $\delta_l < \delta$ , we have, using a telescopic sum:

$$\int \int_{\mathcal{C}_{l,i} \times \mathcal{C}_{l,i}} |\text{Ang}_{\phi^{n_{l,i}}}(x, y) - \omega_{\phi}(z, n_{l,i})| d\mu_X(x) d\mu_X(y) \leq \frac{3n_{l,i}}{N_0} \mu_X(\mathcal{C}_{l,i})^2$$

with  $z \in \mathcal{C}_{l,i}$ .

Thus

$$|Cal_{\mu_X, Int_l}(\phi) - \sum_{i=0}^{k(C_l)} \omega_\phi(x_{l,i}, n_{l,i}) \mu_X(C_{l,i})^2| \leq \sum_{i=0}^{k(C_l)} \frac{3n_{l,i}}{N_0} \mu_X(C_{l,i})^2, \quad \forall x_{l,i} \in C_{l,i}.$$

Using Proposition 4.3.1, we get that there exists  $l_0$  such that for  $l$  bigger than  $l_0$ :

$$|Cal_{\mu_X, Int_l}(\phi) - \sum_{i=0}^{k(C_l)} \mathcal{R}_{\mu_X}(\phi) n_{l,i} \mu_X(C_{l,i})^2| \leq \sum_{i=0}^{k(C_l)} \frac{3n_{l,i}}{N_0} \mu_X(C_{l,i})^2.$$

Let  $\Lambda_l$  be the measure of  $Int_l$ , we have:

$$\Lambda_l = \sum_{i=0}^{k(C_l)} n_{l,i} \mu_X(C_{l,i})^2.$$

It follows that

$$\left| \frac{1}{\Lambda_l} Cal_{\mu_X, Int_l}(\phi) - \mathcal{R}_{\mu_X}(\phi) \right| \leq \frac{3}{N_0}.$$

Since this can be prove for any  $N_0$ , we get:

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Lambda_l} Cal_{\mu_X, Int_l}(\phi) = \mathcal{R}_{\mu_X}(\phi).$$

□



## Capítulo 5

### DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En el capítulo precedente, hemos utilizado una de las caracterizaciones del invariante de Calabi. Realmente, esta caracterización nos llega de Albert Fathi, quien introdujo el invariante de Calabi como la integral iterada de la función  $Ang_\phi$  sobre el disco  $\mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^2$  (al respecto, ver [2].) La interpretación que él entrega ahí es la que hemos usado en este trabajo y es la que permite visualizar el teorema 4.3.3 como la generalización del resultado para una cascada de órbitas periódicas que aparece en [3].

Como se señaló en el capítulo 4, cuando uno elige un difeomorfismo  $\phi$ , el número  $Ang_\phi$  no depende de la isotopía  $\phi_t$  elegida. En efecto, supongamos que  $\phi \in \text{Homeo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$ . Como este grupo es contráctil, dos isotopías  $\phi_t^0$  y  $\phi_t^1$  pueden ser unidas mediante un camino de isotopías  $\phi_t^s$ , con  $t \in [0, 1]$  y  $s \in [0, 1]$  ( $\phi_0^s = Id$ ,  $\phi_1^s = \phi$ ). Entonces el ángulo que gira el vector correspondiente  $\overrightarrow{\phi_t^s(x)\phi_t^s(y)}$  cuando  $t$  varía de 0 a 1 es independiente de  $s$  pues, por una parte, es continuo en  $s$  y, por otra, su reducción módulo  $\mathbb{Z}$  no es otra que el ángulo en  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  entre  $\phi_0 = \phi_0^s$  y  $\phi_1 = \phi_1^s$ .

La función  $Ang_\phi$  está definida y es continua en el complemento de la diagonal  $\Delta$  dentro de  $\mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^2$ . Se pueden construir ejemplos de homeomorfismos  $\phi$  tales que  $Ang_\phi$  no es una función acotada. Sin embargo, si  $\phi$  es de clase  $C^1$  se puede demostrar que esta función está acotada (ver [4], pp. 1358-1359.)

En términos gruesos, el resultado aquí expuesto consiste en que el promedio asintótico de la función  $Cal_{\mu_X, Int_t}(\phi)$  cuando  $\phi$  es un difeomorfismo del disco, es exactamente el número de Ruelle  $\mathcal{R}_{\mu_X}(\phi)$ . Lo que demuestra 4.3.3 es una generalización de la *coherencia de las cascadas trenzadas en un flujo suave* del paper [3]. Sin embargo, hay un hecho que es importante destacar. En el caso de un solenoide general, los números  $Cal_{\mu_X, Int_t}(\phi)$  y  $Cal_{\mu_X, Out_t}(\phi)$  no son siempre invariantes topológicos, en el sentido del resultado 4.1.1. Pero en el caso en que el solenoide se obtiene como el límite de una cascada de órbitas periódicas y cuando las secciones de estas órbitas son discos, entonces  $Cal_{\mu_X, Int_t}(\phi)$  y  $Cal_{\mu_X, Out_t}(\phi)$  sí son invariantes topológicos (en el sentido del teorema 4.1.1.) Lo que es invariante topológico en el caso general es la suma de ambos números.

Una de las preguntas que quedan abiertas en relación a las *Superficies de Seifert asociadas a un nudo* es la siguiente: ¿podemos tener para los solenoides el equivalente a una superficie de Seifert asociada a un nudo? Si ese es el caso, entonces podemos estudiar los invariantes contruídos a partir

de superficies de Seifert: enlace, signatura, polinomio de Alexander, etc. Tal vez la descripción que acá entregamos con J.-M. Gambaudo sirve para elaborar un algoritmo de construcción de superficies solenoidales. Pero ese es otro problema.

# Apéndice A

## ABSTRACT SOLENOIDS

### A.1. Oriented solenoids

Consider a compact metric space  $\mathcal{S}$  and assume that, attached with  $\mathcal{S}$ , there exists a collection  $(U_i, T_i, I_i, h_i)_{i \in I}$  such that:

- ◇ For each  $i$  in  $I$ :
  - $U_i$  is an open set in  $\mathcal{S}$ ;
  - $T_i$  is a totally disconnected compact metric space;
  - $I_i$  is an open real interval;
  - and  $h_i : U_i \rightarrow I_i \times T_i$  is a homeomorphism.
- ◇ The collection  $\{U_i\}_{i \in I}$  is a cover of  $\mathcal{S}$ .
- ◇ The *transition maps*  $h_{i,j} = h_j \circ h_i^{-1}$  read on their domains of definitions:

$$h_{i,j}(x, t) = (f_{i,j}(x, t), \tau_{i,j}(t)),$$

where  $\tau_{i,j}$  is a continuous map, and  $f_{i,j}$  is a map continuous in the  $t$  variable, smooth in the  $x$  variable, and which satisfy  $\partial f_{i,j}(x, t)/\partial x > 0$  where defined.

Such a collection  $(U_i, T_i, I_i, h_i)_{i \in I}$  defines an *atlas* of a (*oriented*) *solenoid structure* on  $\mathcal{S}$ . The  $U_i$ 's are called *boxes* and the  $h_i$ 's are called *charts* of the solenoid structure. Two atlases are *equivalent* if their union is again an atlas. An *oriented solenoid* is the data of a compact metric space  $\mathcal{S}$  together with an equivalence class of atlases. To lighten notations we will speak about an oriented solenoid  $\mathcal{S}$  without making explicitly reference to the underlying equivalence class of atlases  $\mathcal{A}^+$ .

We call *slice* of an oriented solenoid, a subset of the form  $h_j^{-1}(I_j \times \{t\})$  for some  $j$  in  $I$ ,  $t$  in  $T_j$ , where  $(U_i, T_i, I_i, h_i)_{i \in I}$  is an atlas in  $\mathcal{A}^+$ . The transition maps map slices onto slices. The *leaves* of  $\mathcal{S}$  are the smallest connected subsets that contain all the slices they intersect. Each leaf is a one dimensional oriented differentiable manifold. Similarly we call *transversals* of an oriented solenoid the subsets of  $\mathcal{S}$  of the form  $h_j^{-1}(\mathcal{C}_j)$  where  $\mathcal{C}_j$  is a clopen (closed open) set in  $h_j^{-1}(I_j \times T_j)$  for some  $j$  in  $I$ , where  $(U_i, T_i, I_i, h_i)_{i \in I}$  is an atlas in  $\mathcal{A}^+$  such that the projection  $\mathcal{C}_j \rightarrow T_j$  is injective. As for slices, the transition maps map transversals onto transversals.

Notice that whenever the  $T_i$ 's of a given atlas are finite sets, the oriented solenoid reduces to a finite collection of oriented closed curves.

The most naive example of oriented solenoid is the oriented circle  $S^1$ . Actually, any product  $S^1 \times T$  where  $T$  is any totally disconnected compact metric space can be equipped with a structure of oriented solenoid. More generally, any bundle over the circle whose fiber is a totally disconnected compact metric space inherits a structure of oriented solenoid. Let us be more precise about this last statement. Consider a totally disconnected compact metric space  $\mathcal{C}$  and a homeomorphism  $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ . On the product space  $\mathcal{C} \times \mathbb{R}$  we define the equivalence relation:

$$(x, u) \sim (y, v) \iff v - u \in \mathbb{Z} \quad \text{and} \quad x = \phi^{v-u}(y).$$

The quotient space  $\mathcal{C} \times \mathbb{R} / \sim$  is a compact metric space which is naturally equipped with a structure of oriented solenoid.

Two oriented solenoids  $\mathcal{S}_1$  and  $\mathcal{S}_2$  are *isomorphic* if there exists a homeomorphism  $\Psi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$  such that  $\Psi$  and its inverse are orientation preserving smooth maps in the leaf direction. The following proposition due to Etudiant de Lille shows that up to isomorphisms the above examples contain the set of all oriented solenoids:

**Proposition A.1.1.** *Any oriented solenoid is isomorphic to a bundle over the circle whose fiber is a totally disconnected compact metric space.*

Proof: Notice that, using a partition of the unity, it is always possible to equip an oriented solenoid  $\mathcal{S}$  with a never vanishing vector field tangent to the leaves which varies smoothly in the leaf direction and continuously in the transverse direction and pointing in the positive direction. Up to homotopy there is only one such vector field. Let  $\phi^t$  be its flow. For any finite collection of disjoint verticals, we define the maps:

$$\Phi : v \in \mathcal{V} \mapsto \Phi(v) \in \mathcal{V}$$

where  $\Phi(v)$  is the first point in  $\mathcal{V}$  on the open-half positive leaf emanating from  $v$ ;  
and

$$\zeta : v \in \mathcal{V} \mapsto \zeta(v) \in \mathbb{R}^+,$$

where

$$v \in \mathcal{V} \mapsto \zeta(v) = \inf\{t > 0, \phi^t(v) \in \mathcal{V}\} \in \mathbb{R}^+.$$

The following lemma is plain.

**Lemma A.1.2.** *There exist a finite collection of disjoint verticals  $\mathcal{V} = \{V_l\}_{l \in L}$ ,  $|L| < \infty$ , and  $\tau > 0$  such that:*

$$\tau < \zeta(v), \quad v \in \mathcal{V}.$$

Furthermore for any  $0 < \epsilon < \tau$  and for any  $l$  in  $L$ , there exists a decomposition of each vertical  $V_l$  in a finite union of disjoint clopen sets  $\mathcal{C}_{k,l}$  where  $1 \leq k \leq l$  satisfying:

- ◊ there exists a unique  $l'$  in  $L$  such that  $\Phi(\mathcal{C}_{k,l}) \subset V_{l'}$ ;

$$\diamond \sup_{v \in \mathcal{C}_{k,l}} \zeta(v) - \inf_{v \in \mathcal{C}_{k,l}} \zeta(v) < \epsilon.$$

Consider now the box  $\mathcal{B}_{k,l} = \cup_{v \in \mathcal{C}_{k,l}} \cup_{0 < t < \zeta(v)} \{\phi^t(v)\}$ . It is possible to make a reparametrization of the flow  $\phi^t$  in this box so that the new flow satisfies that each orbit starting from  $\mathcal{C}_{k,l}$  takes a same rational time  $r_{k,l}$  to reach  $V_l$ . We perform a similar surgery for all boxes  $\mathcal{B}_{k,l}$ ,  $1 \leq k \leq k(l)$ ,  $l$  in  $L$ . This surgery define a homeomorphism  $h$  on  $\mathcal{S}$  which smooth in the leaf direction. For the image flow  $\tilde{\phi}^t$ , the corresponding map

$$\tilde{\zeta} : v \in \mathcal{V} \mapsto \zeta(v) = \inf\{t > 0, \phi^t(v) \in \mathcal{V}\} \in \mathbb{R}^+,$$

takes only a finite number of rational values, namely  $r_{k,l}$ ,  $1 \leq k \leq k(l)$ ,  $l$  in  $L$ . . Let  $d$  be a rational common divisor of all these values. For each point  $w$  in  $\mathcal{S}$ , there exists a unique  $l$  in  $L$ , a unique  $1 \leq k \leq l$ , a unique  $v$  in  $\mathcal{C}_{k,l}$  and a unique  $r(w)$  in  $[0, r_{k,l}[$  such that:

$$w = \tilde{\phi}^{r(w)}(v).$$

Consider the projection  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/d\mathbb{Z}$ . The map

$$\pi \circ r \circ h : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}/d\mathbb{Z},$$

actually defines a fibration over the circle  $\mathbb{R}/d\mathbb{Z}$ .  $\square$

## A.2. Embedded solenoids

The aim of this section is to describe linking properties of the leaves and extend the classical Gauss linking number to embedded oriented solenoids. Notice that, using a partition of the unity, it is always possible to equip an oriented solenoid  $\mathcal{S}$  with a never vanishing vector field tangent to the leaves which varies smoothly in the leaf direction and continuously in the transverse direction and pointing in the positive direction. Up to homotopy there is only one such vector field.

Since oriented solenoids have topological dimension 1, embeddings of solenoids exist (see for instance [9] or [14].)

By the above statements, every oriented solenoid  $\mathcal{S}$  can be seen as the suspension of a homeomorphism  $\phi_{\mathcal{S}}$  of a compact totally disconnected set  $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ . Any compact totally disconnected set can be mapped by a continuous injective map in the 2 disk  $\mathbf{D}$  and any homeomorphism of a compact totally disconnected subset of  $\mathbf{D}$  can be extended to a homeomorphism of  $\mathbf{D}$ . It follows that there exists an injective continuous map  $e$  from  $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$  to the 2-disk  $\mathbf{D}$  and a homeomorphism  $\psi : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$  such that:

$$e \circ \phi_{\mathcal{S}} = \psi.$$

Actually the homeomorphism  $\psi$  can be chosen so that its restriction to the boundary  $\partial\mathbf{D}$  of the disk  $\mathbf{D}$  is the identity. The suspension of the map  $\psi$  defines a continuous flow  $\psi^t$  in the solid torus  $\mathcal{T} = \mathbf{D} \times \mathbf{S}^1$  and the embedded solenoid  $e(\mathcal{S})$  is an invariant set for this flow.

Let us consider a solenoid  $\mathcal{S}$ . Let  $\mathcal{T}$  be a solid torus and  $\pi : \mathcal{T} \rightarrow \mathbf{S}^1$  the associated fibration over the circle  $\mathbf{S}^1$  with fiber the 2-disk  $\mathbf{D}$ .

A map:

$$e : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T},$$

is an *embedding* (in the solid torus, see figure A.1) if:

- ◇ it is a homeomorphism onto its image;
- ◇ is smooth along the leaves and the differential in the leaf direction never vanishes;
- ◇ the image of each leaf is transverse to the fibers of the fibration  $\pi$ .

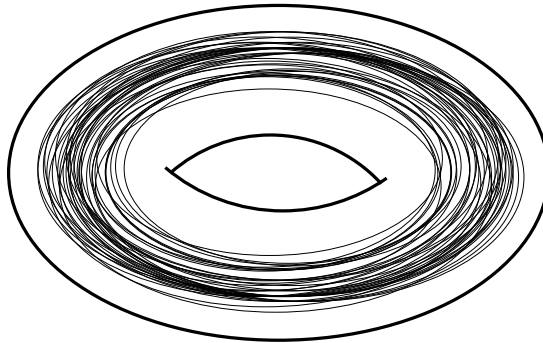


Fig. A.1: An embedded solenoid in the solid torus.

Two embedded solenoids  $e_1(\mathcal{S})$  and  $e_2(\mathcal{S})$  are isotopic if there exists a homeomorphism isotopic to the identity that maps one embedded solenoid onto the other, leaves being mapped smoothly on leaves and orientation preserving.

It seems tempting to try to extend knot theory, *i.e.* the study of isotopy classes of links in  $\mathbf{S}^3$ , to oriented solenoid. Let us recall a first result obtained in this direction by M. Lagrange [11]. A closed braid is a collection of smooth closed oriented curves in the solid torus of revolution in  $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} = \mathbf{S}^3$ :

$$\mathcal{T} = \{(\cos \theta(1 + \rho \cos \phi), \sin \theta(1 + \rho \cos \phi), \rho \sin \phi), \theta \in [0, 2\pi[, \phi \in [0, 2\pi[, 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}\}$$

wrapping in the solid torus along the  $\theta$  increasing direction. A classical result by Alexander asserts that any oriented link in  $\mathbf{S}^3$  is isotopic to a closed braid (see chapter 2.) Recently this theorem has been generalized to oriented embedded solenoids:

**Theorem A.2.1.** [11] *Any embedded oriented solenoid is isotopic to an embedded solenoid in the solid revolution torus whose leaves are oriented in the  $\theta$  increasing direction.*

Notice that this last result can be seen as an “embedded version” of Proposition A.1.1.

Consider a solid torus  $\mathcal{T}$  defining a fibration over the circle  $\pi : \mathcal{T} \rightarrow \mathbf{S}^1$  whose fiber is the 2-disk  $\mathbf{D}$  and fix a direct product structure  $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}$  in the solid torus trivializing the fibration over  $\mathbf{S}^1$ . Consider now a non singular  $C^1$ -vector field  $X$  in  $\mathcal{T}$  tranverse to the fibers of the fibration and denote  $\phi^t$  its flow. An invariant set  $\phi^t(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$  of flow is a *solenoid* if it intersects each fiber along a Cantor set.

Fix a fiber  $\mathbf{D}$  and denote

$$\Phi : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$$

the first return map associated with  $X$  in the fiber  $\mathbf{D}$ . Assume now that the map  $\Phi$  possesses an invariant Cantor set  $\mathcal{C}$  on which the dynamics is minimal (*i.e.* each forward orbit of a point  $\mathcal{C}$  is dense in  $\mathcal{C}$ ) . We call *invariant solenoid* associated with  $X$  and  $\mathcal{C}$ , and denote  $\mathcal{S}(X, \mathcal{C})$ , the suspension of the Cantor set  $X$ :

$$\mathcal{S}(X, \mathcal{C}) = \cup_{x \in \mathcal{C}} \{ \phi^t(x), t \in \mathbb{R}^+ \}.$$

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] V. I. ARNOLD, B. A. KHESIN, “Topological Methods in Hydrodynamics”, Applied Mathematical Sciences, vol. N° 125, Springer-Verlag, New York Inc., 1998
- [2] A. FATHI, “Transformations et homéomorphismes préservant la mesure. Systèmes dynamiques minimaux”, Thèse Orsay, 1980.
- [3] J. M. GAMBAUDO, D. SULLIVAN, C. TRESSER, *Infinite cascades of braids and smooth dynamical systems*. Topology, Vol. 33, N°1, pp. 85-94, 1994.
- [4] J. M. GAMBAUDO, É. GHYS, *Enlacements asymptotiques*. Topology, Vol. 36, N°6, pp. 1355-1379, 1997.
- [5] J. M. GAMBAUDO, É. GHYS, *Commutators and diffeomorphisms of surfaces*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. (2004), **24**, 1591-1617.
- [6] J. M. GAMBAUDO, E. E. PÉCOU, *Dynamical cocycles with values in the Artin Braid Group*, Stony Brook, abril 1997.
- [7] J. M. GAMBAUDO, *Knots, Fluids and Flows*, Universidad de Chile, Centro de Modelamiento Matemático, Marzo 2005.
- [8] R.W. GHRIST, P.J. HOLMES, M.C. SULLIVAN, “Knots and Links in Three Dimensional Flows”, Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics, Berlin Heidelberg, 1997.
- [9] HUREWICZ, WALLMAN, “Dimension Theory”, Princeton Mathematical Series, v. 4. 1941
- [10] C. IVORRA C., “Topología Algebraica”, apuntes en red.
- [11] M. LAGRANGE, “Des nœuds aux champs de vecteurs: les solénoïdes”, Université de Bourgogne, Laboratoire de Topologie, noviembre 2002.
- [12] W. B. R. LICKORISH, “An Introduction to Knot Theory”, Springer-Verlag, New York Inc., 1997.
- [13] C. ROBINSON, “Dynamical Systems”, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Second Edition, 1999.



- 
- [14] RUSHING, "Topological Embeddings", Academic Press, 1973, PURE AND APPLIED MATHEMATICS; Vol N°52.
- [15] C. TRESSER, A. WILKINSON, *When an infinitely-renormalizable endomorphism of the interval can be smoothed*, Berkeley, CA, USA.
- [16] P. WALTERS, "An Introduction to Ergodic Theory", Graduate Texts in Mathematics, N° 79, Springer-Verlag, New York, 1982.