

Memoria para optar al título de Sociólogo:
Sistemas dinámicos en Ciencias Sociales: Una
aproximación metodológica

José Ignacio Carrasco Armijo

Profesor Guía:
Manuel Vivanco

Profesores correctores:
Rodrigo Figueroa
Héctor Ramírez.

abril 2008

Agradecimientos.

A los profesores Manuel Vivanco y Rodrigo Figueroa, por su interés en áreas no consolidadas en Sociología y por sus sabios consejos.

A los profesores del Departamento de Ingeniería Matemática (DIM), Héctor Ramírez y Raúl Gouet, por abrirme las puertas y guiarme en nuevos conocimientos.

Al profesor Nicolás Yus por enseñarme los primeros pasos en la complejidad de la matemática, por su humor y por su apoyo.

A los funcionarios de la Subsecretaría de Pesca, Jorge Farías y Max Montoya, por su disposición y por su orientación en temas técnicos.

A José Selín Carrasco por darme la confianza para explorar en terrenos de incertidumbre.

A Jaime Romero, Jimena Royo y Fernanda Valdovinos por su generosidad.

Finalmente, quiero agradecer a todas las personas que me acompañaron y me ayudaron con sus sabios consejos, entre ellos a mi gran familia, sobre todo a Marianela Armijo, Pablo Carrasco, Felipe Ortega, Rocío Ortega, Silvia Baldivieso, Emilia Carrasco Baldivieso y Víctor Carrasco. Además, a todas mis amigas y amigos por su cariño y alegría.

Resumen

En esta memoria se proponen algunas consideraciones metodológicas para la realización de investigaciones en Ciencias Sociales que se apoyen en el uso de sistemas dinámicos. Para lo cual se ha dividido en tres partes. En la primera parte se desarrollan las definiciones fundamentales de la teoría de sistemas dinámicos. En la segunda se revisan los antecedentes en cuanto a aplicaciones ya realizadas en Ciencias Sociales. En la tercera parte, se desarrollan nociones básicas sobre la construcción de modelos, en tanto es un momento fundamental en este tipo de investigaciones, mencionando algunos casos ejemplares que permiten reflexionar sobre aspectos clave de este proceso. Por otro lado, se presenta una breve investigación en Ciencias Sociales en que es relevante la utilización de un modelo basado en sistemas dinámicos, definiendo el diseño de investigación, además de los resultados obtenidos y comentarios correspondientes, enfatizando el papel de las simulaciones computacionales en este tipo de investigaciones. Finalmente, se proponen algunas modificaciones a la investigación con el objetivo de dejar planteado ulteriores avances más sociológicos en el tema.

Índice.

Introducción.	IV
1. Sistemas dinámicos: ¿Qué y para qué?.....	1
1.1. Sistemas dinámicos en el marco de la complejidad, 1	
1.2. Conceptos y propiedades básicas, 3	
1.2.1. Más allá de la linealidad.	
1.2.2. Dimensiones.	
1.2.3. Sistemas dinámicos discretos y continuos.	
1.2.4. Iteración y órbita.	
1.2.5. Punto fijo y punto periódico.	
1.2.6. Retrato de fases y análisis gráfico.	
1.2.7. Atractor y repulsor.	
1.2.8. Parámetros y bifurcaciones.	
1.2.9. Caos.	
1.2.10. Un ejemplo ilustrativo.	
1.2.11. Aplicaciones paradigmáticas.	
2. Sistemas dinámicos en Ciencias Sociales: una entrada posible a la complejidad de la sociedad...29	
2.1. Aplicaciones orientadas a modelos, 30	
2.1.1. Difusión de drogas en una comunidad	
2.1.2. Sistemas dinámicos y comportamiento microeconómico.	
2.2. Aplicaciones orientadas a otras metas, 34	
2.2.1. Diagnóstico del caos en series temporales.	
2.2.2. Análisis gráfico de series de datos: ciclos económicos de largo plazo.	
3. Una perspectiva metodológica en el uso de sistemas dinámicos en Ciencias Sociales.....37	
3.1. Una aproximación a la construcción de modelos, 38	
3.1.1. Deducciones a partir de la teoría existente.	
3.1.2. Relevancia de un enfoque empírico.	
3.2. Aprendizajes de una aproximación bioeconómica de la pesca artesanal, 44	
3.2.1. Introducción y presentación del problema.	
3.2.2. Pregunta de investigación.	
3.2.3. Objetivos.	
3.2.4. Marco teórico.	
3.2.5. Elección del modelo: El modelo de <i>Gordon-Schaefer</i>	
3.2.6. Presentación de las simulaciones	
3.2.7. Propuesta de modificación.	
Conclusiones: Consideraciones metodológicas.....	66
Bibliografía.....	69
Apéndices.....	73
Apéndice A: Algoritmos en Matlab de las simulaciones realizadas, 73	
Apéndice B: Estimación de Parámetros biológicos, 79	

Introducción.

La profundidad y la productividad científica con la que se ha estudiado los sistemas dinámicos ha sido muy diferente en Ciencias Sociales con respecto a Ciencias Naturales y Exactas. Las explicaciones para esto son muchas, sin embargo, la escasa rigurosidad y formalización con la que se ha trabajado en Ciencias Sociales da cuenta en gran medida de ello. Si bien por un lado hay aproximaciones metafóricas y semánticas que han tenido alta popularidad, éstas se encuentran por definición, limitadas a ser metáforas. Por otro lado, hay aproximaciones que intentan establecer una continuidad con la teoría de sistemas dinámicos, permitiendo no solo retomar su contexto matemático, sino también definir claramente los alcances y limitaciones que tiene el estudio de los sistemas dinámicos en Ciencias Sociales.

Considerando que el escualido avance en este ámbito se debe en gran medida a un vacío metodológico que explique cómo integrar el uso de modelos basados en sistemas dinámicos en Ciencias Sociales, en esta memoria se proponen algunas consideraciones metodológicas para la realización de investigaciones que se apoyen en este tipo de modelos. Lo cual requiere tener claridad sobre qué son, para qué puede servir el uso de sistemas dinámicos, y como puede ser una investigación en Ciencias Sociales en que es relevante su uso.

De este modo, la memoria se ha dividido en tres partes. En la primera parte se revisan las definiciones fundamentales de la teoría de sistemas dinámicos, desarrollando conceptos como atractor, bifurcaciones, aplicaciones paradigmáticas realizadas, entre otros.

En la segunda parte se revisan los antecedentes en cuanto a aplicaciones ya realizadas en Ciencias Sociales, enfatizando la relevancia de los sistemas dinámicos en la comprensión de fenómenos sociales complejos.

En la tercera parte, se presenta una breve investigación en que es relevante el

uso de sistemas dinámicos, ya que se trata un problema esencialmente dinámico y no lineal, la sostenibilidad de la pesca artesanal de merluza común en la quinta región de Chile. Permitiendo caracterizar las particularidades de este tipo de investigaciones.

Finalmente, se discuten los elementos que debieran ser considerados para replantear la investigación realizada, señalando qué modificaciones podrían efectuarse en el modelo para dar un panorama más realista de la situación de la pesca artesanal, así como una breve propuesta para responder a preguntas más sociológicas con modelos similares al presentado.

Capítulo 1

Sistemas dinámicos: ¿Qué y para qué?

1.1. Sistemas dinámicos en el marco de la complejidad

La teoría de sistemas dinámicos, *no es una teoría de fenómenos físicos, sino una teoría matemática, cuyos conceptos y técnicas se aplican a un amplio aspecto de fenómenos* (Capra 1998, 129). Una teoría que diversos autores enmarcan en el *paradigma de la complejidad* (Gerber 2006), en tanto permite comprender fenómenos constituidos por la no-linealidad y la temporalidad.

Si bien las aplicaciones de sistemas dinámicos se originaron principalmente en biología y en ecología, su utilidad se ha difundido por aquellas disciplinas en que las herramientas que suponen relaciones lineales y estáticas entre las variables han sido insuficientes para tratar con fenómenos más complejos. Desde problemáticas referidas al crecimiento en poblaciones biológicas hasta la dinámica en una comunidad en que interactúan drogadictos y no-drogadictos, es decir, desde problemas propios de la ecología hasta las ciencias sociales, el uso de sistemas dinámicos ha rendido frutos.

Tanto en la naturaleza como en la sociedad existen una gran cantidad de fenómenos que son no-lineales, de ahí que los supuestos con los que operan las herramientas lineales sean inadecuados para estudiarlos. Estudiar fenómenos no-lineales con herramientas lineales genera un reduccionismo en la relación entre las variables que en muchos casos impide comprender la complejidad del problema. La capacidad predictiva de los modelos lineales depende de que los datos observados se ubiquen en torno a la línea recta, lo cual, en términos de Mónica Gerber (2006), puede limitar la comprensión del fenómeno, *Al aplicar esta técnica [regresión lineal] es posible concluir que dos variables no se encuentran relacionadas, solamente por no obtener un coeficiente de regresión alto. Sin embargo, es posible que exista una fuerte relación, solo que ésta no sea lineal* (Gerber 2006).

Además de la no-linealidad, el uso de sistemas dinámicos permite estudiar problemas definidos por la temporalidad. Es decir, no se restringe a estudiar relaciones estáticas entre variables. Los problemas que los sistemas dinámicos contribuyen a estudiar son esencialmente dinámicos y por lo tanto la variable *tiempo* tiene que estar presente.

En síntesis los sistemas dinámicos combinan elementos de no-linealidad y temporalidad, aspectos fundamentales en gran parte de los fenómenos complejos que las herramientas tradicionales son escasamente capaces de estudiar plausiblemente. En cuanto a la pregunta por la relevancia que el uso de los sistemas dinámicos puede tener en ciencias sociales, es claro que en la sociedad se presentan en gran parte fenómenos que de ser reducidos a relaciones lineales y estáticas entre las variables, su comprensión se ve alicaída e incluso errada. El desafío de mostrar en la práctica de las ciencias sociales la pertinencia del uso de sistemas dinámicos comienza aquí, pero es necesario en primer lugar que el lector neófito en el asunto se familiarice al menos intuitivamente con conceptos básicos de la teoría de sistemas dinámicos. Una teoría matemática y en el mayor de los casos lejana a la formación de científicos sociales, pero no por eso inutilizable desde diversos ámbitos.

1.2. Conceptos y propiedades básicas

Lo que interesa en esta sección¹ es darle un sentido matemático a la definición de sistemas dinámicos, en tanto *la teoría de los sistemas dinámicos es la primera matemática que capacita a los científicos para tratar la plena complejidad de los fenómenos no-lineales* (Capra 1998, 139). En este sentido, tanto los conceptos como las reflexiones que se han realizado en el paradigma de la complejidad sobre este tipo de fenómenos requieren ser comprendidas en primera instancia en este contexto, lo cual posteriormente permite que las posibles aplicaciones tengan una coherencia con éste.

Esta sección es una de las más importantes del presente documento, en tanto se define el sentido matemático de conceptos clave, tales como atractores, bifurcaciones, retrato de fases. Para lo cual se ha optado por basarse en uno de los autores que de modo más básico desarrollan este tema en matemática, describiendo aquellos elementos clave para la comprensión de los sistemas dinámicos. El desarrollo de estos conceptos serán pertinentes no sólo para comprender los sistemas dinámicos, sino también para evaluar qué tan apegadas a estas definiciones son las aplicaciones que se presentarán en el siguiente capítulo.

Un sistema dinámico es una o más funciones matemáticas que se presentan temporalmente y cuyo comportamiento puede conocerse de acuerdo a ciertos parámetros, variables e interacciones entre las variables, por lo que que en definitiva interesa comprender *dónde van los puntos y qué es lo que hacen cuando pasa mucho tiempo* (Devaney 1988, 17). En este sentido, *un sistema dinámico consiste en un conjunto de variables dependientes del tiempo, llamadas variables de estado, junto con una regla*

¹En esta sección se hará referencia a diversos conceptos y definiciones desarrolladas en matemáticas, las cuales son impartidas en los primeros cursos de Cálculo diferencial e integral, así como en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO). No se considera apropiado aquí definir nociones básicas como dominio o continuidad de una función, por lo que se deja al lector que le interese profundizar en el tema revisar los textos disponibles sobre la materia. Se recomienda el libro de Michael Spivak mencionado en la bibliografía.

que permite determinar (sin ambigüedad) el estado del sistema (éste podría ser un estado pasado, presente o futuro) en términos de un estado prescrito en algún tiempo t_o (Cullen 2006, 26).

Considerando que se trata de funciones en que se presenta una variación temporal, se comprende que los sistemas dinámicos estén contruidos a partir de funciones definidas por ecuaciones diferenciales ó por iteraciones. Si bien aun es prematuro para presentar detalladamente una definición de sistemas dinámicos, se presentan dos ejemplos para que el lector pueda familiarizarse con éstos:

$$x_{t+1} = ax_t(1 - x_t) \quad (1.1)$$

donde t denota los pasos discretos del tiempo y x es la variable que cambia con éste.

$$\frac{dx}{dt} = ax(1 - x) \quad (1.2)$$

donde x es la variable que cambia con el tiempo t , es decir, es una función del tiempo t .

Si bien algunos autores señalan la distinción entre sistemas dinámicos lineales y no-lineales, en la mayoría de los textos sobre el tema no se realiza, en tanto el comportamiento de un sistema dinámico lineal no presenta un comportamiento interesante, lo cual no significa que sea trivial trabajar con éstos. Sin embargo, es relevante tenerla en cuenta al menos para ejemplificar algunas definiciones, como se verá más adelante. En este sentido, en las distinciones desarrolladas a continuación no se enfatizará mayormente entre sistemas dinámicos lineales y no lineales, en tanto la mayor parte de éstas solo competen a fenómenos que se presentan en los segundos.

Finalmente, es necesario señalar que la no-linealidad engloba una diversidad de fenómenos, lo que justamente explica que no todas las funciones no lineales presenten este tipo de comportamientos. Es más, es importante que el lector no suponga que todos los sistemas dinámicos permiten un estudio exhaustivo de la no-linealidad,

por lo general se presentarán distintas propiedades con distintos casos, ya que sólo algunos permiten desplegar en conjunto la riqueza de ésta.

1.2.1. Más allá de la linealidad

Si bien lo que interesa aquí es comprender la no-linealidad en el ámbito de los sistemas dinámicos, es importante definir también el concepto de linealidad, con tal de que el lector pueda apreciar algunas de las diferencias básicas sin tener que recurrir a textos matemáticos.

Función lineal

Una función lineal de una variable real a valores reales es una función matemática que se define a partir de una variable independiente de primer grado. Formalmente, se define del siguiente modo:

$$f(x) = ax. \quad (1.3)$$

Por otro lado, una función lineal de dos variables reales es una función que se define a partir de dos variables de primer grado.

$$f(x, y) = a_1x + a_2y, \quad \text{representa un plano} \quad (1.4)$$

y una función

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \quad (1.5)$$

representa una hipersuperficie plana de n-1 dimensiones en un volumen n-dimensional.

Lo que interesa rescatar de este concepto es una propiedad que será fundamental para comprender las reflexiones posteriores sobre linealidad, la *superposición*:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (1.6)$$

$$f(kx) = kf(x) \quad (1.7)$$

Intuitivamente esto significa que las soluciones de las funciones lineales, por más variables que contengan, pueden ser fragmentadas en nuevas soluciones. Esto se denomina propiedad analítica de las funciones lineales o *principio de superposición*.

Ecuación diferencial lineal

Una ecuación diferencial es una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes, con respecto a una o más variables independientes (Cullen 2006, 57). Lo que interesa es buscar la función que cumpla con la igualdad establecida en la ecuación. Se concentrará la atención en las ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (1.8)$$

Intuitivamente, esto significa que sus soluciones son funciones que tienen una derivada particular, es decir, funciones que varían de una manera específica. En este sentido, las ecuaciones diferenciales pueden referir al modo en que varía temporalmente un fenómeno. Sin embargo, es importante destacar que las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales no tienen por qué ser funciones lineales. Específicamente, una ecuación diferencial lineal es aquella que puede ser reconocida por dos características (Cullen 2006, 2): En primer lugar, la variable dependiente y y todas sus derivadas son de primer grado, es decir, la potencia de cada término que interviene es 1; y en segundo lugar los coeficientes dependen sólo de la variable independiente x .

Lo que interesa en este capítulo con respecto a esta definición es que la solución de las ecuaciones diferenciales lineales son analíticas, es decir, la suma de dos soluciones puede ser una solución, cumpliendo las propiedades de linealidad, en particular, con el principio de superposición. Lo cual es una de las explicaciones matemáticas de que el todo es igual a la suma de las partes y por lo tanto explica un aspecto importante del reduccionismo, *en las ecuaciones lineales las soluciones pueden ser fragmentadas, luego sumadas y la solución del problema seguirá siendo una solución* (Kiel 1997, 4).

Por otro lado, el determinismo, se aprecia en tanto la solución de la ecuación puede obtenerse a partir de un punto. En este sentido, una vez conocida la función que responde a la igualdad expresada en la ecuación y un punto cualquiera en que tenga sentido esta función, es posible conocer exactamente el resto de los puntos o estados.

Función no-lineal.

Formalmente, una función no-lineal es aquella que no cumple con la definición descrita en (1.2.1). Gran parte de las funciones no-lineales a las que se referirá en esta memoria serán funciones de una variable real a valores reales que se definen a partir de una variable independiente de dos o más grados, las cuales tienen la siguiente expresión:

$$f(x) = x^n + b, \quad n \geq 2. \quad (1.9)$$

Así, la representación de las funciones no lineales no son líneas rectas. Por otro lado, las funciones que consideran la multiplicación o cociente entre variables independientes, también son funciones no lineales. En este sentido, se aprecia, que este tipo de funciones puede considerar la interacción entre variables. Sin embargo, es conveniente advertir al lector que no todas las funciones no lineales presentan dificultades para encontrar sus soluciones. En efecto, la función $f(x) = x^2 + 3$ es no lineal, pero no es relevante para el estudio de los sistemas dinámicos, tal y como se verá más adelante.

Lo que interesa aquí de este tipo de funciones es que no cumplen las propiedades analíticas de las funciones lineales, sus soluciones no pueden ser fragmentadas y seguir siendo soluciones, es decir, no cumplen el *principio de superposición* descrito anteriormente.

Ecuación diferencial no lineal

Como se señaló en el capítulo anterior, las ecuaciones diferenciales pueden ser entendidas como una evolución temporal de un fenómeno. En particular, las no-lineales tienen una variación no-lineal, lo cual puede identificarse en tanto la variable dependiente y alguna de sus derivadas es de grado igual o mayor a 2. Además, los coeficientes pueden depender de interacciones entre diferentes variables independientes. Una definición correcta de una ecuación diferencial no-lineal es:

$$y' = f(t, y), \quad \text{es no lineal cuando } f \text{ es no-lineal.} \quad (1.10)$$

Los siguientes ejemplos muestran estas características:

$$(1 - y)y' + 2y = e^x, \quad \text{término no lineal: el coeficiente depende de } y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \sin(y) = 0, \quad \text{término no lineal: hay una función no lineal de } y$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} + y^2 = 0. \quad \text{término no lineal: potencia diferente de 1 en } y$$

Interesan aquí dos cuestiones, en primer lugar el carácter no analítico de estas ecuaciones, en tanto *una ecuación (diferencial) no lineal no puede ser fragmentada y luego sumada para obtener la solución* (Kiel 1997, 4). En segundo que las soluciones de algunas de estas ecuaciones tenga que realizarse de manera aproximada, a diferencia de las ecuaciones diferenciales lineales, en que las soluciones permiten un conocimiento exacto del comportamiento de éstas.

1.2.2. Dimensiones.

Los sistemas dinámicos pueden definirse en una o más dimensiones, dependiendo de la cantidad de variables independientes que se incluyan. En esta memoria se desarrollan únicamente aquellos definidos en una y dos dimensiones, en tanto las complicaciones formales aumentan a medida que aumentan el número de variables.

1.2.3. Sistemas dinámicos discretos y continuos.

Los sistemas dinámicos se clasifican como sistemas discretos o continuos respecto al tiempo, los primeros se definen sobre un intervalo de tiempo discreto y los segundos en uno continuo, lo que intuitivamente significa que *el tiempo se mide en pequeños lapsos* ó en cada instante por más ínfimo que sea, respectivamente. Además, la regla o modelo matemático en los primeros, son sucesiones definidas por relaciones recursivas o iteraciones y en los segundos, son ecuaciones diferenciales, *si el proceso está definido por una ecuación diferencial cuya variable independiente es el tiempo, entonces el problema consiste en predecir el comportamiento último de las soluciones de la ecuación en las distancias futuras ($t \rightarrow \infty$) y pasadas ($t \rightarrow -\infty$). Si el proceso es discreto, como la iteración de una función, entonces el problema consiste en entender el comportamiento final de los puntos $x, f(x), f^2(x), \dots, f^n$ a medida que n crece* (Devaney 1988, 17). Esto se expresa formalmente en el siguiente ejemplo, donde $f^i(x)$ se definirá en 1.13, para sistemas dinámicos discretos y continuos, respectivamente:

$$x_{t+1} = ax_t(1 - x_t) \quad (1.11)$$

donde t denota los pasos discretos del tiempo y x es la variable que cambia con éste.

$$\frac{dx}{dt} = ax(1 - x) \quad (1.12)$$

donde x es la variable que cambia con el tiempo t , es decir, es una función del tiempo t .

1.2.4. Iteración y órbita.

El concepto de iteración se refiere a la iteración de una función, dada por una operación matemática que consiste en la composición de una función consigo misma, en forma repetida. Si se tiene un punto específico x_0 , se evalúa en la función, luego su resultado y así sucesivamente. Formalmente, se define así:

$$\begin{aligned} f^n(x_0) &= x_0, & \text{si } n &= 1 \\ f^n(x_0) &= f^{n-1}(f(x_0)), & \text{si } n &> 1 \end{aligned} \tag{1.13}$$

La órbita de un sistema dinámico consiste en el conjunto de puntos que se iteran. En particular, *la órbita delantera es el conjunto de puntos $x, f(x), f^2(x), \dots, f^n$ y se denota por $O^+(x)$. Si f tiene inversa, es posible definir la órbita completa de x , $O(x)$ como el conjunto de puntos $f^n(x)$ para $n \in \mathbb{Z}$* (Devaney 1988, 17-18).

1.2.5. Punto Fijo y Punto Periódico.

Un punto fijo es un punto del dominio de la función que tiene la misma imagen, formalmente se define así:

$$f(x) = x \tag{1.14}$$

De modo similar, *El punto x es un punto periódico de período n si* (Devaney, 1988, 18)

$$f^n(x) = x \tag{1.15}$$

Por ejemplo, si se considera un sistema dinámico muy simple, dado por una función no-lineal $f(x) = x^2 - 1$, tiene puntos fijos en $(1 \pm \sqrt{5}/2)$, y puntos periódicos de período 2 en 0 y -1 . Esto puede observarse en tanto:

$$f\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

1.2.6. Retrato de fases y Análisis gráfico.

Una de las metas principales del estudio de los sistemas dinámicos es entender el comportamiento de las órbitas, identificando los puntos periódicos, así como lo que sucede al iterar en el largo plazo una función. Sin embargo, en general es imposible

o extremadamente difícil conseguirlo mediante la resolución de las funciones, ya que éstas no son en general tan sencillas como las utilizadas aquí para ejemplificar los conceptos. De este modo, se requiere de técnicas geométricas o cualitativas para comprender la dinámica de un sistema dado, en particular, el *retrato de fases consiste en una figura trazada la línea real, no en el plano, de las órbitas de un sistema* (Devaney 1988, 20).

Algunos ejemplos de retratos de fases de sistemas dinámicos muy sencillos se presentan en la figura 1.1

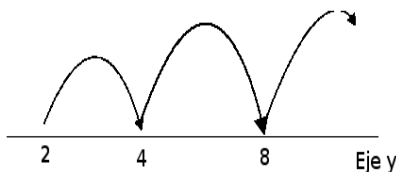


Figura 1.1: Retrato de fases de las tres primeras iteraciones de $f(x) = 2x$, con $x_0 = 2$

Una vez trazado el retrato de fases, puede trasladarse la representación de la órbita al plano, dando lugar al *análisis gráfico*, el cual se realiza identificando la diagonal expresada por la función identidad, permitiendo que una órbita se obtenga tras dibujar repetidamente segmentos rectos verticales y horizontales desde la diagonal al gráfico y viceversa, respectivamente (Devaney 1988, 21). La figura 1.2 es un ejemplo de análisis gráfico.

1.2.7. Atractor y Repulsor.

Para comprender estos dos conceptos, es necesario definir primero *punto hiperbólico*:

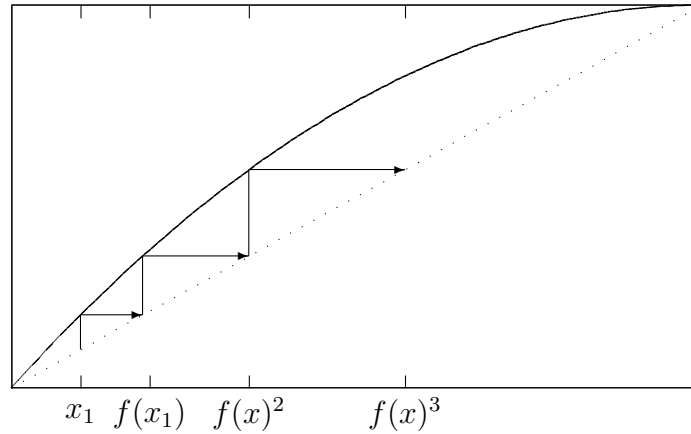


Figura 1.2: Análisis gráfico de $f(x) = 2x - x^2$, con $x \in [0, 1]$

Sea un punto periódico p de período n . El punto p es hiperbólico si:

$$|(f^n)'(p)| \neq 1, \quad (1.16)$$

Punto periódico atractor si:

$$|(f^n)'(p)| < 1, \quad (1.17)$$

y Punto periódico repulsor si:

$$|(f^n)'(p)| > 1. \quad (1.18)$$

La explicación intuitiva de que el concepto de atractor y repulsor esté vinculado al de punto hiperbólico, es que las derivadas de los puntos periódicos tienen que tener un comportamiento particular, en tanto la inclinación de la recta tangente en el punto p tiene que ser tal que consiga atraer o repeler a lo que se conoce como vecindades. Se denota como vecindad estable local (W_{loc}^s) y vecindad inestable local (W_{loc}^u), para atractor y repulsor, respectivamente.

En la figura 1.3 se muestran ejemplos de un punto atractor y uno repulsor.

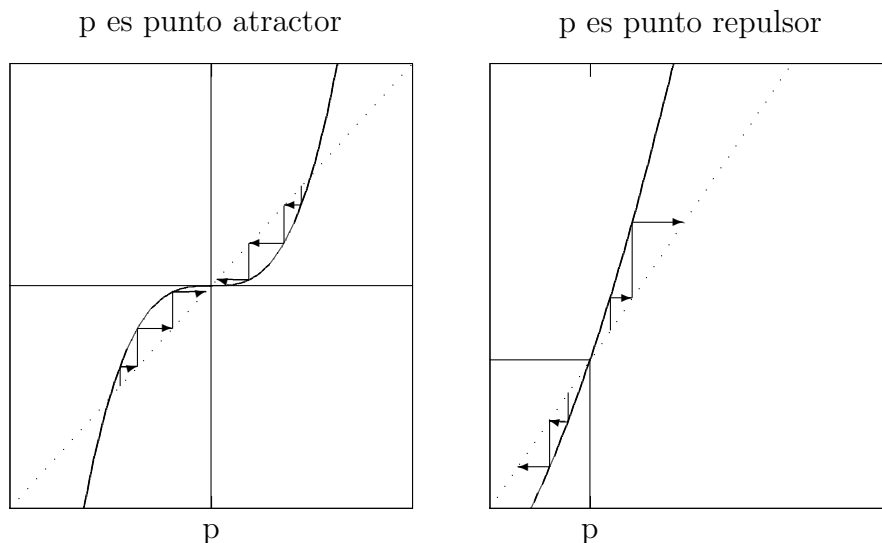


Figura 1.3: Punto atractor y repulsor

Por una parte, el gráfico del lado izquierdo representa la función $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x)$. El gráfico del lado derecho representa la función $f(x) = x + x^3$, que tiene un punto repulso en $p = 0$.

1.2.8. Parámetros y bifurcaciones.

El concepto de bifurcación significa *una división en dos, un cambio*. En los Sistemas dinámicos, *el objetivo de la teoría de las bifurcaciones es estudiar lo que les sucede a medida que los parámetros cambian. Estos cambios conllevan por lo general cambios en la estructura de puntos periódicos* (Devaney 1988, 80).

El concepto de parámetro se refiere a la idea de *una constante que puede considerarse distintos valores*. En la siguiente función, la constante c es el parámetro, en tanto podría interesar el comportamiento de la función para ciertos rangos de los valores

c , como por ejemplo $c > 1$, $0 < c < 1$:

$$Q_c(x) = x^2 + c$$

Al conjunto de las funciones Q_c se les llama familia de funciones.

Para explicar el concepto de bifurcación, se considerarán funciones de dos variables de la forma, $G(x, \lambda) = f_\lambda(x)$, donde para λ fijo, f_λ es una función de una variable. A continuación se verán dos ejemplos sencillos en que se presentan cambios en la estructura de los puntos periódicos a medida que el parámetro cambia:

- Bifurcación de duplicación del período.

Si se considera la familia $E_\lambda(x) = \lambda e^x$, con $\lambda < 0$, lo que ocurre es del todo interesante. Nótese que cuando $\lambda = -e$, $E_\lambda(-1) = -1$ y $E'_\lambda(-1) = -1$, y por lo tanto -1 es un punto fijo no hiperbólico. Cuando $\lambda > -e$, el punto fijo es atractor, pero cuando $\lambda < -e$, es repulsor. Por lo que se aprecia que el punto fijo de E_λ sufre un cambio en la dinámica cercana a $\lambda = -e$. La figura 1.3 es útil para comprender la situación.

Sin embargo, eso no es todo lo que ocurre, ya que si se considera la función E_λ^2 , es posible apreciar que surgen dos nuevos puntos fijos q_1 y q_2 . Este fenómeno llamado *bifurcación de período doble* se caracteriza por dos elementos, *un cambio de atractor a repulsor del punto fijo y el surgimiento de una nueva órbita de período dos* (Devaney 1988, 82). La figura 1.5 muestra el análisis gráfico que permite visualizar la duplicación de período.

Este cambio en la estructura de los puntos periódicos puede ser graficada a partir de lo que se llama *diagrama de bifurcaciones*, que traza la ubicación de los puntos fijos y periódicos versus el parámetro. Lo cual se aprecia en la figura 1.6.

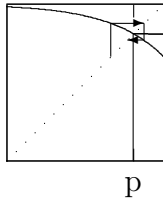
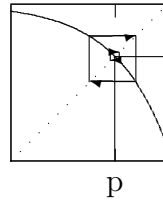
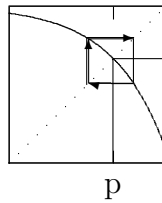
a. Punto p es atractorc. Punto p es repulsorb. Punto p no es hiperbólico

Figura 1.4: Análisis gráfico de $E_\lambda(x) = \lambda e^x$. a) $-e < \lambda < 0$, b) $\lambda = -e$ y c) $\lambda < -e$

1.2.9. Caos

La definición formal de caos es en primera instancia muy complicada y ajena a una aproximación intuitiva:

Sea V un conjunto. $f : V \rightarrow V$ es caótica en V si:

1. f tiene sensibilidad a las condiciones iniciales.
2. f es topológicamente transitivo.
3. Los puntos periódicos son densos en V .

Sin embargo, luego de explicar las dos primeras condiciones resulta mucho más accesible.

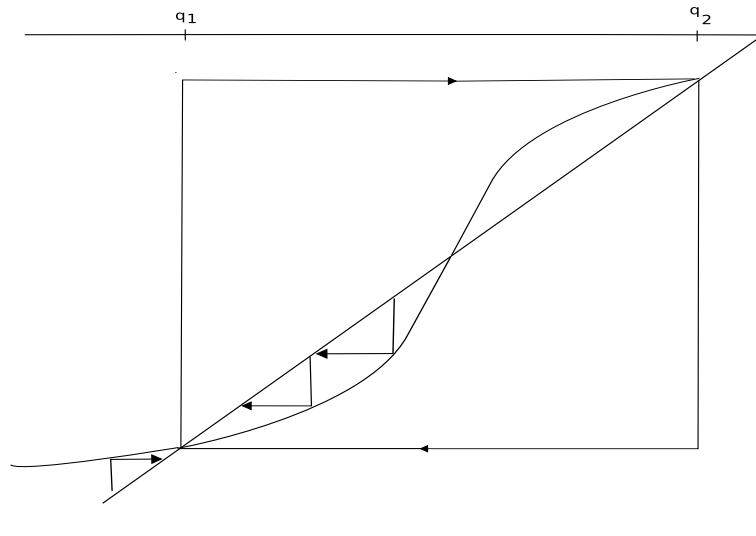


Figura 1.5: Análisis gráfico de Duplicación de período, $E_\lambda^2(x)$ con $\lambda < -e$

En primer lugar, sensibilidad, que en algunos textos se le llama sensibilidad a las condiciones iniciales se define formalmente del siguiente modo:

$f : J \rightarrow J$ tiene sensibilidad a las condiciones iniciales si existe $\delta > 0$ tal que, para algún $x \in J$ y para alguna vecindad N de x , existe $y \in N$ y $n \geq 0$ tal que $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.

Intuitivamente, una función tiene sensibilidad a las condiciones iniciales si existen puntos muy cercanos a x que finalmente se separan de x al menos en una distancia δ al iterar la función f . No es necesario que todos los puntos cercanos a x cumplan esto, sino que al menos exista uno que lo haga. Esta característica del caos es lo que se va a relacionar con la dificultad para realizar soluciones exactas, incluso mediante computadores, siendo necesario un análisis cualitativo de su comportamiento.

En segundo lugar, topológicamente transitivo:

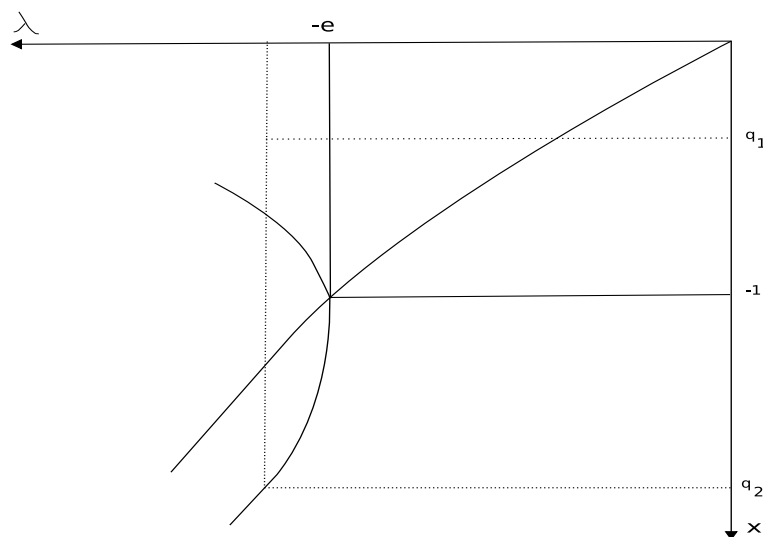


Figura 1.6: Diagrama de bifurcaciones para $E_\lambda^2(x)$

$f : J \rightarrow J$ es topológicamente transitiva si para algún par de conjuntos abiertos $U, V \subset J$ existe $k > 0$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$

Intuitivamente esto significa que la función tiene puntos que se mueven arbitrariamente de una vecindad a otra a medida que la función se itera. *Consecuentemente, el sistema dinámico no puede ser descompuesto*², lo cual enfatiza aun más la importancia el sistema dinámico debe ser comprendido sin ser fragmentado.

En síntesis, *Un mapa caótico posee tres ingredientes: impredecibilidad, indescomposición y un elemento de regularidad*. Lo primero se explica por la sensibilidad a las condiciones iniciales, lo segundo en cuanto no pueden separarse las vecindades de f como conjuntos independientes en que no hay interacción, y lo tercero en cuanto *en el medio de este comportamiento, se tiene un elemento de regularidad, dado por la densidad de los puntos periódicos*³

²Devaney, R. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Pág. 49

³Devaney, R. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Pág. 50

Medición del caos: Exponentes del Lyapunov.

La sensibilidad o sensibilidad a las condiciones iniciales de un sistema dinámico puede ser medida mediante lo que se denomina *Exponentes de Lyapunov*. Esta medición consiste en *determinar la tasa de divergencia exponencial de órbitas adyacentes infinitamente próximas*⁴. Para lo cual se establecen dos puntos cercanos x_0 y $x_0 + \varepsilon$, en que ε es un número mayor a 0 lo más pequeño que se quiera, luego se realizan n iteraciones expresadas en $f^n(x_0)$ y $f^n(x_0 + \varepsilon)$. Supóngase que ambos puntos están a una distancia

$$|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)| = \varepsilon \exp^{n\lambda(x_0)}$$

Es decir, que la separación inicial ε se ha multiplicado por un número que crece exponencialmente con el número de iteraciones n y que, además, viene caracterizado por un exponente $\lambda(x_0)$ dependiente del punto x_0 en el que se está analizando la sensibilidad a las condiciones iniciales. En este sentido lo que interesa conocer es el valor del exponente, ya que en definitiva determina la divergencia entre los puntos escogidos. Este exponente se calcula del siguiente modo⁵:

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left| \frac{df^n(x_0)}{dx_0} \right| \quad (1.19)$$

Que en definitiva es $\frac{df^n(x_0)}{dx_0}$, es decir, *la derivada de la función $f^n(x)$ evaluada en $x = x_0$* . En este sentido, lo que interesa son tres casos⁶, ya que tendrán tres posibles implicancias en el comportamiento del sistema dinámico:

- $\lambda < 0$, entonces la órbita es estable y periódica.
- $\lambda = 0$, entonces la órbita es marginalmente estable.
- $\lambda > 0$, entonces la órbita es caótica

⁴Martín, M. Morán, M. Reyes, M. *Iniciación al Caos*. Pág. 265

⁵Ibid. Pág. 265

⁶Brown, T. *Measuring Chaos Using Lyapunov Exponent*. En *Chaos theory in Social Science*. Pág. 57

1.2.10. Un ejemplo ilustrativo de los conceptos: La familia cuadrática asociada a la ecuación logística.

En este ejemplo interesa poner en práctica los conceptos desarrollados anteriormente. El cual además ha sido escogido en tanto presenta claramente el paso de comportamientos deterministas a caóticos.

La familia de sistemas dinámicos de la forma:

$$F_\mu = \mu x(1 - x) \quad (1.20)$$

donde $x \in [0, 1]$, y el parámetro μ toma valores en el intervalo $[0, 4]$. Para cada valor del parámetro μ se tiene un sistema dinámico. La representación gráfica de F_μ se muestra en la figura 1.7

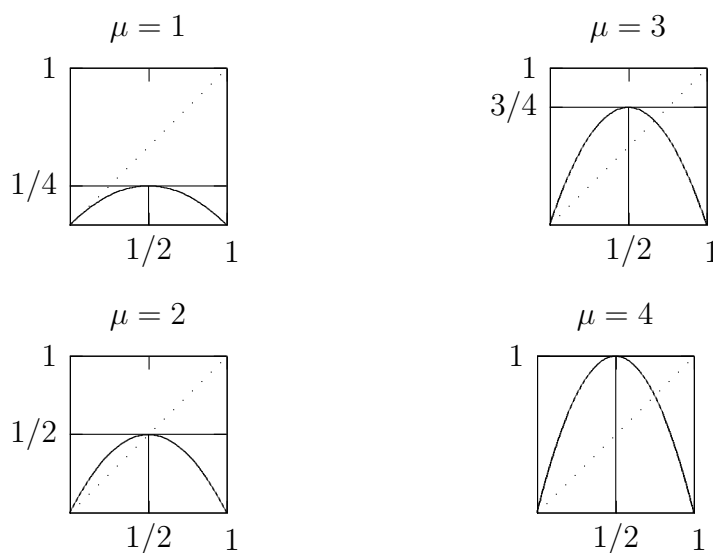


Figura 1.7: Familia cuadrática para distintos valores de μ

Casos $1 \leq \mu \leq 3$

Para no aburrir al lector, se pasará directamente a este caso, dejando para una revisión de la bibliografía o un simple ejercicio el caso $0 \leq \mu \leq 1$.

En este caso, se tiene dos puntos fijos, $x = p_\mu = \mu - 1/\mu$ y $x = p_0 = 0$. Además, al calcular la derivada del sistema dinámico en los puntos fijos, se aprecia que p_μ es atractor y p_0 repulsor. ya que:

$$|F'_\mu(p_0)| = \mu > 1$$

y

$$F'_\mu(p_\mu) = \begin{cases} |2 - \mu| < 1 & 1 < \mu < 3 \\ 1 & \mu = 3 \end{cases}$$

También es interesante observar cómo convergen las órbitas. *Para cualquier μ , $1 < \mu \leq 3$, la órbita de cualquier punto $x \in (0, 1)$ converge a p_μ , lo cual se expresa formalmente⁷:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu^n(x) = p_\mu, \forall x \in (0, 1)$$

Si bien para demostrar esto formalmente se requiere separar los casos en que $1 < \mu < 2$ y $2 < \mu \leq 3$, lo que interesa es presentar la aplicación de los conceptos. El análisis gráfico presente en la figura 1.8 muestra el primer caso, en que puede apreciarse que la órbita converge a p_μ , el cual es el punto atractor descrito.

Hasta el momento se han visto aplicado todos los conceptos, con excepción del de bifurcación y el de caos. A continuación se verán los casos $3 < \mu \leq 4$, con el objetivo de presentar estos dos últimos.

⁷Martín, M. Morán, M. Reyes, M. *Iniciación al Caos*. Pág. 123

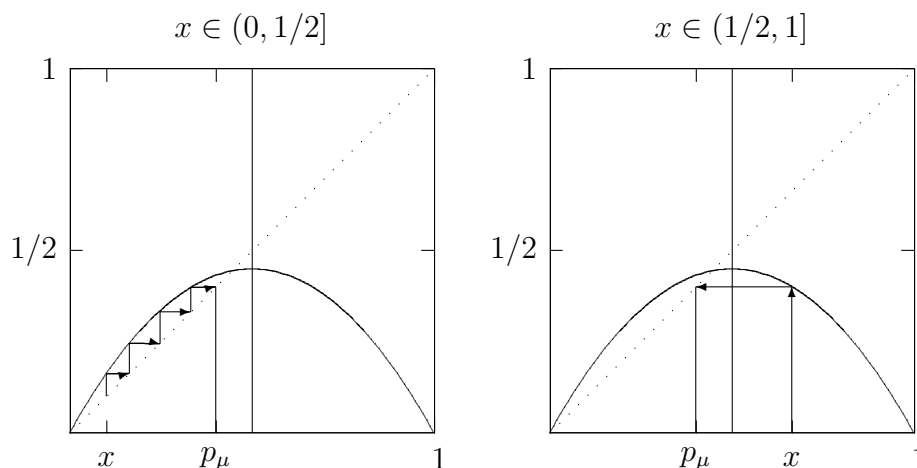


Figura 1.8: Análisis gráfico. Las órbitas convergen en p_μ

Toda la sencillez y todo el determinismo de los sistemas dinámicos asociados a la curva logística⁸. $F_\mu = \mu x(1 - x)$, $x \in [0, 1]$, que se ha considerado hasta ahora ($0 \leq \mu \leq 3$) empieza a desaparecer en cuanto μ supera el valor 3

Lo interesante es que si bien para los valores de $\mu \in (3, 4]$ permanecen los puntos fijos P_0 y $P_\mu = 1 - 1/\mu$, al observar la función $F_\mu^2(x)$ aparecen puntos periódicos de período 2, producidos por una bifurcación de duplicación de período. Si se llama q_μ a este nuevo punto atractor, de período 2, se cumple que:

$$| (F_\mu^2)'(q_\mu) | \leq 1$$

Además de la duplicación del período en el parámetro $3 < \mu \approx 3,449$, se produce algo muy novedoso, que se aprecia al observar el sistema dinámico para valores mayores a 3,449, *Al pasar este punto se puede probar que los puntos periódicos de período 2 se convierten en repulsivos y se duplican, cada uno de ellos, para dar una*

⁸Ibid. Pág. 134

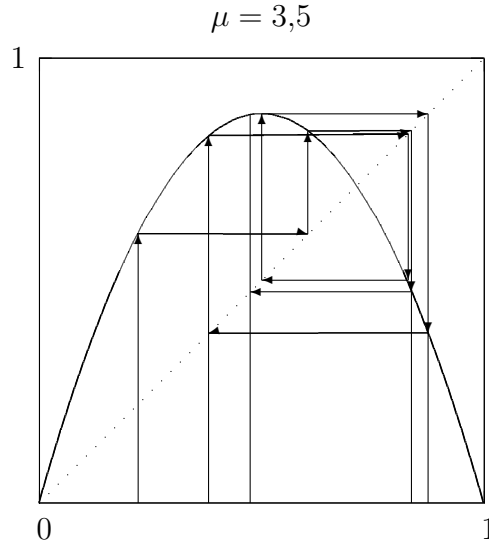


Figura 1.9: Duplicación de período de la familia cuadrática.

órbita periódica de período $2^2 = 4$ que será atractiva hasta, aproximadamente⁹, 3,55. Lo cual se aprecia el análisis gráfico de la figura 1.9.

Aquí se está en presencia de lo que se llama la duplicación del período como ruta al caos, en tanto si se continua observando el sistema dinámico, aparecerán múltiples bifurcaciones que seguirán duplicando los puntos periódicos, lo cual además de complicar el cálculo, ya que se requiere resolver ecuaciones de grado 8, 10, etc, *Al ir avanzando μ hacia 4 se va reproduciendo el fenómeno anterior y, sucesivamente, van apareciendo órbitas atractivas de período $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, ..., al tiempo que se van convirtiendo en repulsivas las órbitas que le proceden¹⁰.* A continuación se verá qué relación tiene esta ruta al caos con las tres condiciones: *sensibilidad a las condiciones iniciales, conjuntos topológicamente transitivos y densidad de puntos periódicos*

⁹Martín, M. Morán, M. Reyes, M. *Iniciación al Caos*. Pág. 140

¹⁰Martín, M. Morán, M. Reyes, M. *Iniciación al Caos*. Pág. 143

- Sensibilidad a las Condiciones Iniciales y densidad de puntos periódicos.

Obsérvese ahora los casos del sistema dinámico revisado aquí, pero con el valor del parámetro $\mu = 4$, es decir:

$$f(x) = 4x(1 - x) \quad (1.21)$$

Ahora, si se recuerda la definición de Sensibilidad a las Condiciones Iniciales, lo que debiera suceder para que el sistema dinámico fuese caótico, es que al escoger dos puntos arbitrariamente próximos, sus órbitas divergieran. Esto es justamente lo que ocurre. Sin detenerse en una demostración formal, basta con escoger dos puntos, $x_0 = 0,203142$ y $y_0 = 0,203143$, cuya distancia es $|x_0 - y_0| = 10^{-6}$, y ver el comportamiento de sus órbitas.

De este modo, *diremos que el sistema dinámico $f(x) = 4x(1 - x)$ es sensible a las condiciones iniciales*¹¹, y por lo tanto las órbitas generadas a partir de puntos iniciales próximos se comportan independiente, acercándose y separándose impredeciblemente.

- Topológicamente transitivo.

Tal y como se describió en los conceptos fundamentales, esta propiedad de los sistemas dinámicos se expresa en tanto *cualquier punto escogido va a visitar, en su recorrido, a casi todos los puntos del espacio de fases*. De este modo, lo que se pretende a continuación es dejar nuevamente la demostración formal para la bibliografía y desarrollar únicamente casos particulares de un modo riguroso y sugerente.

En primer lugar, el lector debe recordar que el sistema dinámico que se está revisando está definido en el intervalo $[0, 1]$ y cuyo espacio de fases es también $[0, 1]$, por lo que si la órbita de un punto escogido arbitrariamente visita todos los puntos del espacio de fases, entonces cumple con la propiedad que se quiere ejemplificar. Para

¹¹Martín, M. Morán, M. Reyes, M. *Iniciación al Caos*. Pág. 152

esto, Supongamos dividido el intervalo $[0, 1]$ en un cierto número de subintervalos tan pequeños como queramos. Para nuestro experimento podemos suponer que son 10 intervalos de longitud $10^{-1} : I_1 I_2, \dots I_{10}$. Luego, al observar la iteración del sistema dinámico a partir de cualquiera de los subintervalos, debiera recorrer el resto. Si partimos de $I_5 = [f(0,4), f(0,5)] = [0,96, 1]$, entonces:

$$\begin{aligned} f(I_5) &= [f(0,4), f(0,5)] = [0,96, 1] \\ f^2(I_5) &= f([0,96, 1]) = [f(1), f(0,96)] = [0, 0,1536] \\ f^3(I_5) &= f([0, 0,1536]) = [f(0), f(0,1536)] = [0, 0,5200] \\ f^4(I_5) &= f([0, 0,5200]) = [0, 1] \end{aligned}$$

En efecto, lo que ocurre es que en la primera iteración visitamos I_{10} , en la segunda I_1 e I_2 , en la tercera I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 e I_6 , y en la cuarta se cubre todo el intervalo¹². Lo que puede concluirse es que el sistema dinámico distribuye la órbita de los puntos del intervalo I_5 en todo el intervalo $[0, 1]$ y por lo tanto es densa en dicho intervalo o topológicamente transitivo.

- Densidad de puntos periódicos.

Basta recordar que la ruta al caos descrita por la duplicación de períodos genera cada vez un aumento de los puntos periódicos del sistema dinámico, por lo que al acercarse al valor del parámetro $\mu = 4$, la densidad de estos es evidente.

En síntesis, el sistema dinámico $F_\mu = \mu x(1-x)$ asociado a la curva logística tiene un comportamiento caótico para valores del parámetro $\mu = 4$. En particular, la sensibilidad a las condiciones iniciales por la divergencia de órbitas de puntos iniciales próximos, la propiedad de ser topológicamente transitivo en tanto puntos escogidos arbitrariamente tienen órbitas que recorren todo el espacio de fases, y la densidad de los puntos periódicos se presenta en el tránsito al caos producido por las bifurcaciones de duplicación de los períodos. La figura 1.10¹³ muestra el diagrama de bifurcaciones

¹²Ibid. Pág. 159

¹³Gleick, J. *Chaos, Making a new science*. Pág. 71

de la dinámica del sistema para los parámetros μ revisados:

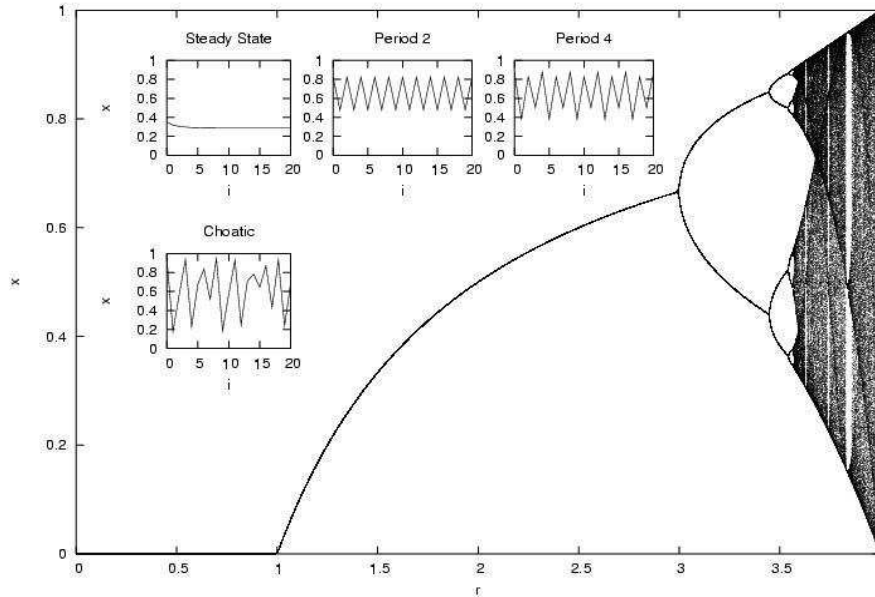


Figura 1.10: Diagrama de bifurcaciones para $\mu \in [0, 4]$

1.2.11. Aplicaciones paradigmáticas

A continuación se mostrará muy brevemente una aplicación de sistemas dinámicos en ecología, lo cual se considera relevante ya que en este contexto se presentan ejemplos clásicos de no-linealidad en términos matemáticos.

Modelo depredador-presa de Lotka y Volterra

Si se supone que dos especies animales interactúan dentro del mismo ambiente o ecosistema, y que la primera especie se alimenta sólo de vegetación y la segunda se alimenta sólo de la primera especie. Por razones de análisis, imagínese que los depredadores son zorros y las presas conejos. Sea $x(t)$ y $y(t)$ las poblaciones de zorros y conejos, respectivamente, en el tiempo t (Cullen 2006, 115). Si no hubiera conejos,

entonces se podría esperar que los zorros, sin un suministro adecuado de alimento, disminuyeran en número según la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = -ax, a > 0 \quad (1.22)$$

Sin embargo, cuando hay conejos en el medio, parece razonable que el número de encuentros o interacciones entre estas dos especies por tiempo unitario sea conjuntamente proporcional a sus poblaciones x e y ; es decir, proporcional al producto xy . Así cuando están presentes los conejos hay un suministro de alimento y, por consecuencia, los zorros se agregan al sistema en una proporción bxy , $b > 0$. Sumando esta última proporción a (1.22) se obtiene un modelo para la población de zorros:

$$\frac{dx}{dt} = -ax + bxy \quad (1.23)$$

Por otro lado, si no hay zorros, entonces la población de conejos, con una suposición adicional de de suministro ilimitado, crecería a una tasa proporcional al número de conejos presentes en el tiempo t :

$$\frac{dy}{dt} = dy, d > 0 \quad (1.24)$$

Pero cuando están presentes los zorros, un modelo para la población de conejos es la ecuación (1.24) disminuida por cxy , $c > 0$; es decir la tasa a la cual son comidos los conejos durante sus encuentros con los zorros:

$$\frac{dy}{dt} = dy - cxy \quad (1.25)$$

Las ecuaciones (1.23) y (1.25) constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, ya que consideran las interacciones entre las variables. A este sistema de ecuaciones se le conoce como modelo depredador-presa, desarrollado por el científico italiano Vito Volterra (1860-1940) y el científico estadounidense Alfred James Lotka (1880-1949).

$$\frac{dx}{dt} = -ax + bxy = x(-a + by) \quad \text{Lotka}$$

$$\frac{dy}{dt} = dy - cxy = y(d - cx) \quad \text{Volterra}$$

Lo interesante de estas ecuaciones, es que generan un sistema dinámico que para ciertos valores de zorros y conejos tiende a estabilizarse en un comportamiento periódico.

Capítulo 2

Sistemas dinámicos en Ciencias Sociales: una entrada posible a la complejidad de la sociedad

Tal y como se mencionó en 1.1, los sistemas dinámicos son relevantes para las ciencias sociales en tanto su uso permite estudiar fenómenos que son a la vez no-lineales y que se definen por un papel fundamental de la variable *tiempo*, es decir, contribuyen al estudio de fenómenos sociales cuya complejidad no puede ser debidamente observada con herramientas que suponen linealidad y comportamiento estático. Ciertamente hay diversas herramientas que se utilizan en la investigación en ciencias sociales que permiten estudiar relaciones no-lineales entre variables, tales como la regresión logarítmica, logística, etc, sin embargo, son técnicas estáticas que no son capaces de responder a cuestiones de índole temporal, como la trayectoria o evolución de un fenómeno. Por otro lado, existen también técnicas que se utilizan en ciencias sociales, como las series temporales, que si bien permiten realizar predicciones y es posible establecer una trayectoria de mediciones, no consideran la no-linealidad como un elemento central. En este sentido, los sistemas dinámicos son particularmente relevantes ya que combinan no-linealidad y temporalidad. De ahí que contribuyan a estudiar fenómenos sociales que por combinar estos dos elementos se caracterizan por ser de

una complejidad que las herramientas tradicionales son incapaces de observar.

En particular, en este capítulo interesa describir algunos de los alcances y limitaciones que ha tenido el estudio y aplicación de la teoría de sistemas dinámicos en Ciencias Sociales, desde una perspectiva que establezca una continuidad matemática con las características y propiedades descritas en el capítulo anterior, destacando la presencia de los comportamientos no-lineales y temporales de los problemas presentados.

Se presentan los casos en base a una distinción clave: si bien es posible apreciar una amplia variedad de aplicaciones en este campo, no todas consiguen plantear un modelo, es decir, no todas las aplicaciones que pretenden una continuidad con la teoría de sistemas dinámicos orientan su trabajo en función de un modelo en particular.

De las aplicaciones que orientan su trabajo en función de un modelo, se presentará dos casos paradigmáticos, uno desarrollado por Joshua Epstein en 1993, científico colaborador del Instituto de Santa Fe, que trata el problema de la dinámica de drogadictos en una comunidad; y otro desarrollado por J. Barkley y J. Rosser en 1997, en microeconomía. Por otro lado, de las aplicaciones que no trabajan sobre un modelo, se presentarán aquellos avances que se han desarrollado en cuanto una rama de los sistemas dinámicos, el comportamiento caótico. Aquí se presentarán dos tipos de aplicaciones, en primer lugar aquellas orientadas a diagnosticar comportamiento caótico en series temporales; y en segundo lugar, aquellas orientadas a observar comportamientos cualitativos de series de temporales.

2.1. Aplicaciones orientadas a modelos

Las aplicaciones que se presentan aquí, además de culminar en un modelo, están motivadas por dos ideas que subyacen en los grupos de trabajo transdisciplinario. En

primer lugar, existen modelos matemáticos simples que *pueden iluminar dinámicas complejas* (Epstein 1997, 1). En segundo lugar, es pertinente profundizar formalmente en analogías entre problemas biológicos y sociales, en tanto *la biología matemática ofrece un potencial subexplotado para desarrollar un nuevo punto de vista de la dinámica social* (Epstein 1997, 1).

2.1.1. Difusión de drogas en una comunidad

Estudiar la evolución de cómo se expande un grupo de drogadictos en una comunidad en que se interactúa con grupos de no adictos, policía y nuevos integrantes en la comunidad, es ciertamente un problema complejo, en tanto la dinámica de la expansión se basa en una relación no lineal entre los diferentes actores. De crucial importancia serán las condiciones iniciales y parámetros que se tomen en cuenta, repercutiendo en el comportamiento de las soluciones. Se recomienda al lector recordar los conceptos desarrollados en el capítulo anterior, ya que se estará continuamente haciendo referencia a éstos.

Además, interesa mostrar esta aplicación en tanto se aprecia claramente la analogía que se realiza con modelos biológicos, en particular, los utilizados para el estudio en la difusión de epidemias.

A continuación se presentará el modelo, pero no se profundizará en el proceso que subyace en su construcción, ya que eso constituye materia que se tratará detalladamente en el próximo capítulo.

El modelo es el siguiente:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \mu S \quad (2.1)$$

$$\frac{dI}{dt} = -\beta SI - \gamma IL \quad (2.2)$$

Variable	Definición
$S(t)$	Población no adicta y susceptible.
$I(t)$	Población adicta.
$L(t)$	Policía. Su función consiste en arrestar a los adictos de la comunidad.
$R(t)$	Población arrestada. Se asume que será permanente.
β	Tasa en la cual el contacto entre un adicto y no adicto produce un nuevo adicto ¹ .
μ	Tasa de incorporación de nuevos integrantes a la comunidad.
γ	Tasa en la cual el contacto entre policías y adictos resulta en el arresto de un adicto.
α	Tasa en la cual el incremento de adictos resulta en incremento de la policía.
b	Amortiguamiento económico al cual está sujeto el crecimiento policial.

Cuadro 2.1: Términos del modelo

$$\frac{dR}{dt} = -\gamma IL \quad (2.3)$$

$$\frac{dL}{dt} = \alpha I - bL \quad (2.4)$$

donde:

Cada una de las ecuaciones diferenciales describe la dinámica de las variables presentadas, obteniendo un modelo de la dinámica total de la comunidad. Si bien el modelo considera la interacción de cuatro subpoblaciones, *traficantes y adictos, policía, no adictos, y población removida*, la población total es $N = S(t) + I(t)$. De este modo, la no-linealidad está presente en tanto la dinámica de la población drogadicta es:

$$\frac{dI}{dt} = -\beta I(N - I) - \gamma IL$$

Es interesante y relevante destacar que la complejidad del problema (modelar la dinámica de la expansión de drogadictos) puede ser estudiada con un sistema dinámico simple, la famosa ecuación logística. Lo cual se explica en tanto la no-linealidad del problema se presenta básicamente en la interacción no-lineal entre la población

drogadicta y no drogadicta. En este sentido si bien la limitación de las herramientas lineales para este problema son evidentes (ya que se requiere definir una ecuación diferencial no lineal para esta dinámica), sería incorrecto afirmar que las herramientas lineales son inferiores o peores que las no-lineales, ya que ambas prueban sus rendimientos dependiendo de las características del problema. Dicho de otra manera, la linealidad es pertinente para problemas lineales y la no-linealidad para problemas no-lineales, es deber del investigador saber decidir cuándo utilizar las herramientas de las que dispone.

Se explicará la dinámica de la primera ecuación, dejando que el lector interesado revise el resto en la correspondiente bibliografía.

En la ecuación (2.1) se plantea que la dinámica de la población no adicta debe considerar el contacto con la población adicta, de ahí la presencia del término $S * I$. Además, este contacto resultará en población adicta dependiendo del valor del parámetro β , por ejemplo, si $\beta = 0$, *cada individuo no adicto rechaza la droga y por lo tanto la población adicta no crece* (Epstein 1997, 91). Además, se considera que van incorporándose nuevos integrantes no adictos a la comunidad, lo que puede entenderse como personas jóvenes que comienzan a ser susceptibles de ser adictos. Lo cual explica el producto de $\mu * S$, en tanto μ representa la tasa de incorporación de nuevos individuos.

Es interesante mencionar que si bien lo que subyace al modelo es una analogía con los modelos epidemiológicos, es posible obtener una serie de conclusiones a partir de su comportamiento que permiten discutir sobre problemas relevantes para las Ciencias Sociales.

Finalmente, es importante señalar que ciertamente se trata de un modelo simplista, *ya que una dinámica particular dependerá del tipo de droga...aquí se ha imaginado una droga abstracta que es total e irreversiblemente adictiva* (Epstein 1997, 89); además se supone una sociedad homogénea, en que no se presentan estratos que

los puedan diferenciar.

2.1.2. Sistemas dinámicos y comportamiento microeconómico.

La economía tiene una vasta tradición en lo concerniente a construcción de modelos matemáticos, lo cual explica que en cuanto al desarrollo de aplicaciones de sistemas dinámicos a fenómenos económicos también haya sido una de las disciplinas pioneras al respecto. J. Barkley y J. Rosser en *Chaos Theory and Rationality in Economics* presentan una serie de aplicaciones de sistemas dinámicos a microeconomía. A continuación se describirá uno de los casos más desarrollados por los autores.

Muy cercanos a los propuestas iniciales en ecología, basados esencialmente en funciones asociadas a la curva logística, los autores presentan un sistema dinámico desarrollado por los investigadores J. Benhabib y R. H. Day en 1981, el cual consiste en una formalización del comportamiento microeconómico de los consumidores, en particular, la *Curva de la demanda dinámica*, que estaría dada por:

$$x_{t+1} = \alpha m^2 x_t (m - x_t) \quad (2.5)$$

Este sistema dinámico tendría un parámetro dado por αm^2 , en que *para valores ligeramente superiores a 1, se genera una curva estable*. Pero que a medida que el valor aumenta emergen lo que se conoce como bifurcaciones de duplicación de período, para luego la dinámica caótica aparezca con valores mayores a 3,57.

2.2. Aplicaciones orientadas a otras metas

En las aplicaciones motivadas por estudiar el comportamiento caótico es posible apreciar diferentes avances de acuerdo a las disciplinas, *economistas y científicos políticos han aplicado la teoría del caos con considerable rigor metodológico y éxito*

en una variedad de fenómenos dinámicos, pero en las aplicaciones a Sociología...tales esfuerzos han tendido a ser más bien metafóricos...(Kiel 1997, 3). A continuación se presentan las dos aplicaciones ya mencionadas.

2.2.1. Diagnóstico del caos en series temporales.

En el artículo titulado *Complejidad en la evolución de la Opinión Pública*, del autor Michael McBurnett, se plantea que los modelos basados en ecuaciones lineales son insuficientes para explicar procesos dinámicos como las campañas presidenciales y sus resultados. Lo interesante de esta aplicación es que comprueba mediante exponentes de Lyapunov positivos que las series temporales de las elecciones presidenciales norteamericanas del año 1984 tienen un comportamiento caótico, sin embargo, se limita a eso, dejando de lado la construcción del modelo que permitiría predecir el comportamiento electoral de ese año.

Con respecto a este tipo de aplicaciones, es importante señalar que si bien varios autores plantean que *la presencia de un exponente de Lyapunov positivo es evidencia convincente de la presencia de caos en series temporales*(Kiel 1997, 193), no se presenta aún un consenso, principalmente porque no existe una metodología adaptada a las particularidades de las series de datos en Ciencias Sociales, *ninguno de estos test puede ser visto como definitivo, por lo que la pregunta al respecto sigue abierta* (Kiel 1997, 209).

2.2.2. Análisis gráfico de series de datos: ciclos económicos de largo plazo.

Los autores Brian Berry y Heja Kim en el artículo *Ciclos largos 1790-1990: Intermitencia, Caos, y Control* (Kiel 1997, 215-236), plantean que en el largo plazo los ritmos de crecimiento económico y de precios, acompañados por oscilaciones de corto plazo presentan una dinámica impredecible o caos determinista. En particular, señalan que los cambios institucionales realizados luego de la depresión de 1929

redujeron los límites de oscilación del crecimiento y de precios, alterando significativamente los ciclos y generando atractores que producirían un equilibrio estable. Se señala que las mediciones que se tienen son insuficientes, en tanto se requeriría al menos 200 años, lo cual justifica que el análisis se limite a realizar conclusiones de acuerdo a los gráficos.

Los autores concluyen que es posible señalar a partir de los gráficos, que se generan atractores de precios en los años siguientes a las reformas institucionales realizadas en la economía estadounidense, es decir en los dos últimos gráficos. Al mismo tiempo que generan límites para las oscilaciones en que éstos pueden variar.

Lo que interesa destacar de este tipo de aplicaciones es que si bien realizan análisis en cuanto a precios y crecimiento económico que están dados por series temporales bien definidas, en ningún caso se detienen a diagnosticar si éstas tienen un comportamiento caótico, ya sea a partir de los exponentes de Lyapunov o mediante una demostración formal de las características de los sistemas dinámicos caóticos. Por otro lado, tampoco se define lo que se está entendiendo por atractor, lo que en términos de los conceptos fundamentales desarrollados en el capítulo anterior debe referirse a un comportamiento específico de la derivada en los puntos atractores, así como de los puntos cercanos a éste. En este sentido, las conclusiones que realizan los autores sobre la existencia de una estabilidad puede ser cierta, pero no necesariamente puede homologarse a ésta con un comportamiento atractor. En definitiva, un análisis gráfico puede ser enriquecedor y esencial para la comprensión de los sistemas dinámicos, pero insuficiente si se carece del modelo que define el sistema dinámico que reproduce el comportamiento caótico o estable de esas series.

Capítulo 3

Una perspectiva metodológica en el uso de sistemas dinámicos en Ciencias Sociales

En este capítulo interesa profundizar desde un punto de vista metodológico en la relación de sistemas dinámicos y Ciencias Sociales. En el capítulo anterior se definió el contexto matemático en el que se desarrollan los sistemas dinámicos, y si bien se caracterizó el estado del arte de algunas de las aplicaciones realizadas en ciencias sociales, en ninguna de éstas se aprecia referencias sobre cómo se puede enmarcar una aplicación en una investigación. De ahí que haya un vacío sobre cómo realizar una investigación en Ciencias Sociales que utilice como herramienta los modelos definidos por sistemas dinámicos.

Una investigación se orienta a responder una pregunta. Por lo que la decisión sobre la utilización de sistemas dinámicos en la investigación dependerá del aporte que éstos puedan brindar en responder la *pregunta de investigación*. Determinar el aporte que el uso sistemas dinámicos puede tener dependerá en gran parte de la capacidad del investigador para justificar que la no-linealidad y la temporalidad están presentes de manera relevante en el problema de investigación. En el caso en

que sí contribuyan, deberá procederse a escoger o construir un modelo basado en sistemas dinámicos que responda a la mayor cantidad de elementos de la pregunta, o dicho de otra forma, que más objetivos de la investigación contribuya a responder.

Específicamente, el presente capítulo se divide en tres secciones. En la primera se desarrollan nociones básicas sobre la construcción de modelos, en tanto es fundamental comprender la relevancia que este proceso tiene en el marco de una investigación. Mencionando un caso ejemplar que permite reflexionar sobre aspectos clave de este proceso. En la segunda sección se presenta una breve investigación en Ciencias Sociales en que es relevante la utilización de un modelo basado en sistemas dinámicos. En la cual se define por un lado, el diseño de investigación (problema, pregunta, objetivos, breve marco teórico); y por otro lado, los resultados obtenidos y comentarios correspondientes, enfatizando el papel de las simulaciones computacionales en este tipo de investigaciones. Finalmente, se proponen algunas modificaciones a la investigación con el objetivo de dejar planteado ulteriores avances más sociológicos en el tema.

3.1. Una aproximación a la construcción de modelos

Un modelo matemático es *en una primera aproximación...*, un intento de explicar algún aspecto de la realidad utilizando las herramientas que proporcionan las matemáticas. Así, el punto de partida de todo proceso de modelización lo constituye el fenómeno que se desea describir o explicar (García 2002, 1). Las características del modelo o sistema dinámico que se utilice dependerán de la pregunta que se quiera responder. Sin embargo, escogerlo no es algo sencillo, ya que aunque por lo general los modelos no se construyen desde cero, sino que se comienza a trabajar en referencia a otros, es necesario conocer cómo es el proceso de construcción de modelos.

Es posible identificar dos elementos fundamentales en el proceso de construcción de modelos.

3.1.1. Deducciones a partir de la teoría existente

Por un lado, la importancia de las deducciones a partir de la teoría existente. Tener un conocimiento de las características del fenómeno que se está estudiando permite construir un modelo que sea coherente con lo que se pretende representar. Esta coherencia requiere en algunos casos descartar o incluir comportamientos en que el ojo inexperto no tiene mucho que aportar. En el artículo *Laura and Petrarch*(Rinaldi 1998), por ejemplo, en que el autor predice las fechas de los poemas escritos por Petrarca a su amada, se plantea que el modelo debe descartar una reacción lineal de Laura hacia el amor de Petrarca para valores lejanos al origen. A continuación se presenta brevemente el modelo y las justificaciones realizadas por el autor para describir la relación entre estos dos personajes.

Presentación del modelo

$$\frac{dL(t)}{dt} = -\alpha_1 L(t) + R_L(P(t)) + \beta_1 A_P \quad (3.1)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = -\alpha_2 P(t) + R_P(L(t)) + \beta_2 \frac{A_L}{1 + \delta Z(t)} \quad (3.2)$$

$$\frac{dZ(t)}{dt} = -\alpha_3 Z(t) + \beta_3 P(t) \quad (3.3)$$

El amor que Laura siente por Petrarca en el tiempo t está descrito por $L(t)$. Valores positivos y altos de L significan alto aprecio, mientras que valores negativos se asocian con frialdad y rechazo.

El comportamiento de Petrarca está descrito por las variables $P(t)$, amor por Laura en el tiempo t y $Z(t)$, inspiración poética. Altos valores de P indican amor

extático, mientras que valores negativos indican desesperación.

A_P y A_L representa el atractivo (físico, así como social e intelectual) de Petrarca y Laura. Todas las letras griegas son parámetros constantes positivos. Es importante señalar que los primeros términos de cada ecuación representan el proceso de olvido, por lo que los parámetros α se acompañan de un signo negativo. Por otro lado, los parámetros β representan la reacción ante el atractivo del otro.

Con respecto a la ecuación 3.3, interesa mencionar que es incluida en la ecuación 3.2 con el objetivo de destacar que el atractivo de Laura, depende de la inspiración de Petrarca.

Interesa explicar la justificación que hace el autor para la definición de los parámetros α y β , así como de las funciones $R_L(P(t))$ y $R_P(L(t))$.

Los funciones R_L y R_P

Estas dos funciones representan la reacción de Laura y Petrarca al amor que uno siente por el otro.

Por un lado $R_P(L)$ es una reacción lineal de Petrarca hacia el amor o rechazo de Laura, por lo que tiene sentido definirlo como

$$R_P(L) = \beta_2 L \tag{3.4}$$

Pero $R_L(P)$ solo es lineal para valores cercanos al origen. El autor plantea que la inclinación natural de una *bella dama de la alta sociedad* es estimular flirteos inofensivos. Sin embargo cuando estos se intensifican, expresándose en recitales públicos de los poemas de Petrarca, ella reacciona inmediatamente con rechazo. En este sentido, el autor deduce, a partir de su sentido común, que esta función se defina de manera no lineal. Para valores $P > 0$, primero se incrementa y luego decrece. Para valores negativos de P , el comportamiento de Laura es el propio de una *genuina*

mujer con ética católica, ya que ella responderá con sentimientos de piedad por la desesperanza que Petrarca siente. Rinaldi plantea la reacción de Laura como una función cúbica:

$$R_L(P) = \beta_1 \left[P \left(1 - \left(\frac{P}{\gamma} \right)^2 \right) \right] \quad (3.5)$$

El modelo finalmente queda del siguiente modo:

$$\frac{dL(t)}{dt} = -\alpha_1 L + \beta_1 \left[P \left(1 - \left(\frac{P}{\gamma} \right) \right)^2 + A_P \right] \quad (3.6)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = -\alpha_2 P + \beta_2 \left[L + \frac{A_L}{1 + \delta Z(t)} \right] \quad (3.7)$$

$$\frac{dZ(t)}{dt} = -\alpha_3 Z(t) + \beta_3 P \quad (3.8)$$

Es importante destacar que los parámetros β siguen teniendo las características descritas, por lo que son parámetros que representan la reacción tanto al amor como al atractivo del otro.

Los parámetros α , β , A_L y A_P

Los parámetros del modelo tienen relaciones que son deducidas por Rinaldi a partir de los poemas. A continuación interesa explicar brevemente estas deducciones.

Con respecto a los parámetros α , el autor señala que:

$$\alpha_1 = 3\alpha_2 \quad \alpha_3 = \frac{1}{10}\alpha_2 \quad (3.9)$$

Ya que es claro que $\alpha_1 > \alpha_2$, en tanto Petrarca se olvidará más lentamente de Laura, que viceversa. Además $\alpha_2 > \alpha_3$ en tanto la inspiración de Petrarca decrece lentamente. En este sentido, la relación 3.9 es coherente.

Con respecto a los parámetros β , Rinaldi plantea:

$$\beta_1 = \alpha_2, \quad \beta_2 = 5\alpha_2, \quad \beta_3 = 10\alpha_2 \quad (3.10)$$

Ya que Laura será menos sensible al amor que Petrarca siente por ella, y por lo tanto su reacción también. En cuanto a la inspiración de Petrarca, los poemas muestran que es altamente sensible.

Finalmente, con respecto a los *atractivos*, el autor plantea:

$$A_L = 2, \quad A_P = -1 \quad (3.11)$$

En tanto *ella es una bella e inspiradora mujer*, mientras que Petrarca es un *frío estudioso de las letras y la historia*.

3.1.2. Relevancia de un enfoque empírico

Por otro lado, la importancia empírica. Disponer de datos puede ser de mucha ayuda para aproximarse al tipo de sistemas dinámicos que pueden servir para modelar el fenómeno. En el ámbito de biología de poblaciones, De Vries (2006) da un ejemplo para el caso del crecimiento poblacional de la *Paramecium aurelia*¹. La siguiente tabla de datos muestra que

la población se incrementa lentamente, y los valores de p_n son relativamente pequeños, y a medida que pasa el tiempo, estos valores se incrementan hasta alcanzar un máximo aproximadamente en la mitad del experimento (De Vries 2006, 11). De este modo, es posible plantear que el crecimiento de la población P. Aurelia puede modelarse con la ecuación logística, que para estos datos podría ser la siguiente expresión:

¹La parameciuem en un organismo unicelular que se encuentra en grandes cantidades en pozas de agua fresca

Day (n)	Mean density of P. Aurelia (p_n)	Change in density ($\Delta p_n = p_{n+1} - p_n$)
0	2	-
1	-	-
2	14	20
3	34	32
4	56	38
5	94	95
6	189	77
7	266	64
8	330	86
9	416	91
10	507	73
11	580	30
12	610	-97
13	513	80
14	593	-36
15	557	3
16	560	-38
17	522	43
18	565	-48
19	517	-17
20	500	85
21	585	-85
22	500	-5
23	495	30
24	525	-15
25	510	-

Cuadro 3.1: Crecimiento de la Paramecium aurelia en condiciones aisladas

$$p_{n+1} = p_n + k(540 - p_n)p_n \quad (3.12)$$

Una parte fundamental en la construcción de modelos es establecer su validez, lo cual requiere contrastar empíricamente los resultados que arroja. Estos resultados son las diferentes *soluciones* del modelo. Sin embargo, en la presente memoria no se profundiza en este aspecto, ya que las aplicaciones realizadas están orientadas a mostrar los pasos más básicos en la construcción de modelos y no tanto a decir cuestiones válidas sobre los problemas tratados.

En síntesis, *un modelo matemático no es más que una representación artificial del fenómeno ...en estudio, una especie de maqueta creada por la mente humana* (García 2002, 1).

3.2. Aprendizajes de una aproximación bioeconómica de la pesca artesanal

3.2.1. Introducción y presentación del problema

La pesca artesanal puede ser un tema complejo si se toman en cuenta todos los aspectos que se relacionan: biológicos, económicos y sociales. De ahí que en la administración pesquera, el contexto en el cual se coordinan gran parte de las problemáticas, sea fundamental un enfoque transdisciplinario en que la no-linealidad y la temporalidad en las investigaciones realizadas jueguen un papel clave para definir políticas verdaderamente sostenibles. El excesivo énfasis o descuido en uno u otro aspecto, ha tenido en varios países consecuencias gravísimas, como la extinción de los recursos pesqueros, o el impacto en la estructura social especialmente en las comunidades de pescadores artesanales (Hersoug 2006, 7).

La sostenibilidad de la pesca artesanal entendida como un problema complejo, presenta relaciones no-lineales entre los ámbitos biológicos, económicos y sociales.

Lo que en términos intuitivos significa, por ejemplo, que mayores niveles de esfuerzo pesquero de los recursos marinos no tienen necesariamente mayores beneficios económicos ni menor impacto biológico. De hecho, en algunos casos conviene explotar más el recurso para que éste se reproduzca más rápido, pero en otras se requiere hacer precisamente lo contrario.

Ciertamente tomar decisiones sostenibles no es algo trivial y no basta con realizar estudios de carácter estático, ya que cuestiones que son válidas en un momento, no necesariamente lo son en otro. De ahí que sea fundamental incluir también la variable temporal. De este modo, han sido de especial contribución los modelos que permiten responder a preguntas en que el componente no-lineal y dinámico es clave. Lo cual explica que la administración pesquera ha sido paulatinamente complementada con el desarrollo de modelos matemáticos que permiten analizar las problemáticas de una manera más integradora. De especial contribución han sido los modelos basados en sistemas dinámicos, ya que la problemática de la sostenibilidad es por definición una cuestión en que la variable temporal es clave.

Diversas son las interrogantes que pueden plantearse desde la administración pesquera y diversos son los modelos que pueden utilizarse directamente o como referencia para responder a éstas.

En particular, en la pesquería de la merluza común de la quinta región de Chile no hay claridad sobre la situación futura de los pescadores artesanales, en cuanto a si en el mediano y largo plazo seguirá habiendo disponibilidad de peces dada la situación actual de esfuerzo; lo que tiene un directo impacto en los beneficios económicos, así como en el ingreso de nuevos pescadores, y en los conflictos con el gobierno y con los pescadores industriales. De este modo interesa estudiar si las actuales cantidades de esfuerzo pesquero, asociadas directamente a una cantidad de cuotas, son sostenibles biológica y económicamente.

3.2.2. Pregunta de investigación

¿Es sostenible bioeconómicamente la pesca artesanal de la quinta región en Chile a partir de su situación actual?

3.2.3. Objetivos

General

Predecir la sostenibilidad bioeconómica de la pesca artesanal de la quinta región en Chile a partir de su situación actual.

Específicos

- Caracterizar la pesquería en relación a los puntos de equilibrio bioeconómico del modelo.
- Predecir la sostenibilidad biológica de la merluza común de la quinta región a partir de la cantidad actual de esfuerzo pesquero artesanal.
- Predecir la sostenibilidad económica de la pesca artesanal de la quinta región a partir de la cantidad actual de esfuerzo pesquero.

3.2.4. Marco teórico

En el marco teórico que se presenta a continuación se desarrollan los conceptos básicos para comprender el contexto en el que esta breve investigación se enmarca, la administración pesquera, entendida como *el proceso integrado de recolección de información, planificación, toma de decisiones, asignación de recursos, formulación y aplicación de regulaciones pesqueras, mediante las cuales la autoridad pesquera controla el comportamiento presente y futuro de los actores interesados en la pesca, con el objetivo de asegurar la productividad continua de los recursos naturales*. En particular, en la administración pesquera se engloba un *Sistema de Gestión*, entendido

como *el conjunto de medidas, instituciones e instrumentos que articulan la regulación de las pesquerías* (Franquesa 1995, 1).

De este modo es fundamental desarrollar los conceptos de sostenibilidad y desarrollo sostenible, así como definiciones operativas de pesca artesanal, industrial y sistemas de gestión pesquera. Finalmente, se da un especial énfasis a los aspectos en los que la mirada sociológica puede ser relevante.

- Sostenibilidad: Económica, Social, Ambiental y Sistémica.

El concepto de sostenibilidad es un concepto esencialmente sistémico, en tanto se requiere integrar elementos biológicos, económicos y sociales. Según la FAO, la explotación de un recurso es sostenible cuando tiene *la habilidad para persistir en el largo plazo*. En particular, la explotación de una pesquería es sostenible cuando *puede ser conducida a un nivel aceptable de productividad biológica y económica sin provocar cambios en el ecosistema que cierren opciones para las generaciones futuras* (FAO, Glosario). En este sentido, si bien hay diferentes modelos que definen diferentes *niveles aceptables* de productividad², el aspecto clave es prevenir consecuencias irreversibles en el ecosistema.

El aspecto económico de la sostenibilidad se define en tanto se *mantienen las oportunidades de producción para las generaciones futuras* (FAO 2007). De este modo, las decisiones de manejo en este ámbito deben estar orientadas a que la productividad pueda mantenerse en el tiempo. Collin Clark (1990) distingue entre sobrepesca biológica y económica: la primera se define como el esfuerzo realizado en niveles superiores a la Pesca Máxima Sostenible (MSY); y la segunda como el esfuerzo realizado sobre el punto en que los ingresos y los costos se igualan, es decir, por sobre el equilibrio bioeconómico (Clark 1990, 27).

²Por ejemplo, en la presente investigación, se toma el modelo de *Gordon-Schaefer*, que será desarrollado más adelante.

En cuanto a la sostenibilidad social, la bibliografía señala que las decisiones de manejo son sostenibles cuando son aceptadas por la comunidad directa e indirectamente afectada. En los cuales pueden identificarse dos aspectos fundamentales. Por un lado, la validez o legitimidad de los instrumentos en los que se apoyan los modelos de gestión, expresada en última instancia por los indicadores utilizados por los modelos de gestión pesquera. Poul Degnbol, plantea la importancia de *la participación de los actores involucrados, consiguiendo finalmente que en las políticas converjan los incentivos locales con los globales* (Degnbol 2001, 7). Cuando únicamente se utilizan *indicadores que se justifican por razones teóricas y de investigación técnica*, la legitimidad de las decisiones finales será más limitadas.

Por otro lado, la sostenibilidad social también considera el impacto que las decisiones de manejo pueden tener en la estructura social. La administración pesquera debe ser capaz de considerar los actores que pueden ser más vulnerables, previniendo consecuencias indeseables en las comunidades de pescadores artesanales y de las comunidades asociadas a ellos, producto de la desigual competencia con la pesca industrial, por ejemplo. Bjorn Hersoug señala que en los países en que no se ha regulado debidamente, o simplemente no se ha regulado, las consecuencias en la estructura social han sido irreversibles.

En síntesis, el concepto de sostenibilidad, entendido como *sostenibilidad sistémica o ecosistémica*, requiere combinar elementos biológicos, económicos y sociales. En términos pedestres, esto puede comprenderse en tanto si bien talando todos los bosques chilenos es posible obtener sendos ingresos que abultaran el presupuesto fiscal, no sería una decisión sostenible en tanto se enfatizan excesivamente dos de los elementos de la sostenibilidad, el social y económico sobre el biológico.

- Sistemas de cuotas.

Una *cuota* se define como *parte de la Captura Total Permitida (TAC)*³ asignada a una unidad operativa, tal como un país, una embarcación, una compañía o un pescador individual (*cuota individual*). Las cuotas pueden ser o no ser transferibles, heredables y comercializables. Además, si bien usualmente se asignan cuotas de captura, es posible también asignar cuotas de esfuerzo pesquero o biomasa (FAO 2007).

En particular la cuota individual no transferible (InTQ)⁴ se caracterizan porque *no representan derechos de largo plazo porque no son comercializables por sus beneficiarios. La autoridad de la administración pesquera tiene la prerrogativa de redistribuirlas bajo ciertas condiciones* (FAO 2007). Mientras que las Cuotas Transferibles de Captura (ITQ) se asignan a pescadores individuales o embarcaciones y definen porque pueden ser vendidas entre ellos.

Los sistemas de cuotas pueden ser una combinación de asignación de diferentes tipos de cuotas. Estos son usados por la administración pesquera como una herramienta para regular la explotación de la pesquería con tal de mantener la sostenibilidad. Dependiendo de los objetivos que se tengan en la administración, definidos por el mapa político, social y económico en el que se desenvuelve una pesquería, habrán diferentes estrategias de gestión de las cuotas, que repercutirán en diferentes consecuencias para la sostenibilidad. De ahí que no haya sistemas de gestión o modelos de administración en los que pueda apoyarse la administración pesquera que funcionen de modo óptimo en todos los casos, ya que cada uno tiene particularidades (Franquesa 1995).

- Principales actores involucrados: Los actores involucrados en una pesquería son diversos, sin embargo, interesa definir solamente tres. Los pescadores industriales, los artesanales y las autoridades de la administración pesquera.

³Total Allowable Catch

⁴Individual non-transferible quota

1. Pesca artesanal: Es posible apreciar distintos criterios para definir la pesca artesanal, siendo los factores más comunes el *tamaño de la embarcación*, *tradiciones pesqueras*, tipo de *arte de pesca* y *distancia de la costa* en la cual pescan. En Chile, la Ley General de Pesca y Acuicultura (LGPA) promulgada en 1991, define la pesca artesanal como aquella *actividad pesquera extractiva realizada por personas naturales que en forma personal, directa y habitual trabajan como pescadores artesanales. Se distinguirá entre armador artesanal, mariscador alguero y pescador artesanal propiamente tal*⁵. Este último se define como aquel que se desempeña como patrón o tripulante en una embarcación artesanal, cualquiera que sea su régimen de retribución. Donde una *embarcación artesanal: es aquella explotada por un armador artesanal e inscrita en el Registro Pesquero Artesanal, de una eslora máxima no superior a 18 metros, 80 metros cúbicos de capacidad de bodega, y de hasta 50 toneladas de registro grueso*⁶. Por otro lado, la LGPA establece zonas de reserva para la pesca artesanal, dadas por las 5 millas desde la costa hacia el oeste.
2. La pesca industrial se define como la actividad pesquera extractiva realizada por armadores industriales, utilizando naves o embarcaciones pesqueras que sobrepasan los 25 metros de longitud⁷. Además, dependiendo de la pesquería, se definen áreas en las cuales se puede explotar los recursos. Para la pesquería de la merluza común, corresponde a 60 millas desde la línea base.
3. La autoridad pesquera es la autoridad ministerial que se encarga de ejecutar, regular y coordinar los mandatos del gobierno, que en definitiva deben estar orientadas en función de la sostenibilidad en términos sistémicos. En Chile, esta autoridad es la Subsecretaría de Pesca.

⁵Ley General de Pesca y Acuicultura, 1991

⁶Ibid.

⁷Para mayor desarrollo de la definición, revisar la Ley General de Pesca y Acuicultura

3.2.5. Elección del modelo: *El modelo de Gordon-Schaefer*

Como se mencionó en 3.2.1, el estudio de la sostenibilidad de la pesca artesanal puede ser abordado con modelos basados en sistemas dinámicos, ya que pueden ser capaces de considerar la complejidad del problema, expresada en términos de las relaciones no-lineales y temporales entre los aspectos que se requieren para comprenderla. De los diversos tipos de sistemas dinámicos revisados, se optó por el *modelo bioeconómico Gordon-Schaefer* en tanto si bien es uno de los más simples, permite acercarse a responder a la pregunta de investigación aquí presente. Sería equivocado afirmar que el modelo permite responder completamente a la pregunta, en tanto tiene diversas limitaciones como no considerar distribución por edades entre los peces. Sin embargo, es de utilidad para el presente ejercicio de aplicación.

Los modelos *bioeconómicos* se utilizan como apoyo en las decisiones de los sistemas de gestión y se caracterizan, según Ramón Franquesa, por *tratar de relacionar la reproducción de un recurso renovable, con su explotación motivada por fines económicos* (Franquesa 1995, 1). De este modo, si bien es posible estudiar mediante estos modelos *las consecuencias finales de la implantación de determinadas regulaciones sobre los procesos de explotación pesquera*, los sistemas de gestión tienen que apoyarse en una gama más amplia de indicadores y experiencias que no se acota a los modelos bioeconómicos.

La pregunta por la sostenibilidad bioeconómica de un recurso pesquero requiere un modelo que relacione *la reproducción de un recurso renovable, con su explotación motivada por fines económicos* (Franquesa 1995, 1). Específicamente, este modelo tiene que ser capaz de relacionar la tasa de reproducción de un recurso vivo, con el esfuerzo pesquero como un costo, así como las capturas expresadas como un ingreso por las ventas del recurso. Formalmente, el modelo de Gordon-Schaefer a tiempo discreto es el siguiente:

$$B_{t+1} = B_t + rB_t \left(1 - \frac{1}{K}B_t\right) - C_t \quad (3.13)$$

$$\pi = ITS - CT = pC - cE \quad (3.14)$$

Donde los términos del modelo son:

B_{t+1} : Dinámica de la población.
$C_t = qEB_t$: Captura E : Esfuerzo de pesca.
K : Capacidad de carga del ecosistema
r : Tasa de reproducción intrínseca
q : Coeficiente de capturabilidad
c : Costo
p : Precio
t : Tiempo
π : Beneficios económicos.
ITS =Ingresos totales.
CT =Costos totales.

Cuadro 3.2: Términos del modelo Gordon-Schaefer a tiempo discreto

Lo primero que es necesario tener claro es que este modelo es un sistema dinámico, donde la ecuación que lo define es una *ecuación en diferencia* o bien, un sistema dinámico definido en tiempo discreto⁸. En particular la ecuación (3.13) se construye a partir de la ecuación logística. Por un lado se modela el crecimiento poblacional y por otro las capturas que se realizan producto de la explotación pesquera. La ecuación (3.14) modela los beneficios económicos, relacionando ingresos y costos, con capturas y esfuerzo pesquero, respectivamente.

En segundo lugar, es fundamental enfatizar que en este modelo no se considera el esfuerzo pesquero industrial, en tanto la atención se concentra en el esfuerzo pesquero artesanal. Ciertamente esto implica diversas limitaciones en cuanto a la validez de los resultados que se puedan obtener con este modelo, que el lector debe tener en cuenta a lo largo de esta aplicación. Será de especial importancia tenerlas en cuenta

⁸Para revisar nuevamente estos conceptos, volver a sección 1.2

en la sección 3.2.6, ya que se harán algunas afirmaciones que solo tienen sentido en el contexto en que no se considera la relación entre esfuerzo pesquero industrial y artesanal. En la sección 3.2.7 se proponen cambios en el modelo para superar algunas de las limitaciones.

Algunas características del modelo

Si se revisan los conceptos de 1.2, se aprecia que este es un sistema dinámico con las siguientes características:

Se trata de una ecuación en diferencia no-lineal. La no-linealidad de la ecuación (3.13) tiene una consecuencia interesante que puede observarse a partir de la ecuación (3.14), ya que se encuentran claramente vinculadas a través de la variable *captura*. La relación entre el aspecto biológico y económico es no-lineal en tanto las capturas dependerán a su vez de la cantidad de biomasa que se realice (tomando el *esfuerzo* pesquero como una constante). De este modo, lo que se plantea en el modelo es que las capturas, y por lo tanto los beneficios económicos (π) no tienen, a medida que pasa el tiempo, una relación lineal con las cantidades de biomasa. Más adelante se explicará más detalladamente el comportamiento de las soluciones, siendo necesario retomar los conceptos de atractor y repulsor.

La ecuación (3.13) tiene dos dimensiones y dos parámetros. La primera dimensión la define la variable *tiempo* y la segunda la variable B_t o cantidad de Biomasa en el instante t . Los parámetros son la tasa de reproducción r y la capacidad de carga del ecosistema K .

Puntos de referencia bioeconómicos: Atractores y equilibrio

Es interesante observar los *puntos de referencia bioeconómicos*, los cuales representan importantes situaciones de equilibrio en el comportamiento de la explotación de recursos renovables. Como se mencionó en 1.2, el concepto de atractor se refiere a

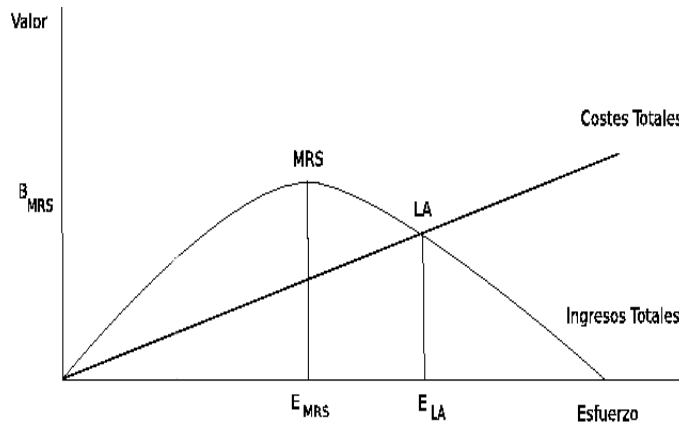


Figura 3.1: Gráfico estático del modelo Gordon-Schaefer

$MRS = p * C_{MRS}$	Ingresos en Máximo Rendimiento Sostenible.
$C_{MRS} = rK/4$	Captura en Máximo Rendimiento Sostenible.
$B_{MRS} = K/2$	Biomasa en el punto de Máximo Rendimiento Sostenible.
$E_{MRS} = r/2q$	Esfuerzo de pesca en el punto de MRS.
$E_{EBE} = (r/q)(1 - c/pqK)$	Esfuerzo en Equilibrio Bioeconómico ($ITS = CT$)
$C_{EBE} = q(E_{EBE})(1 - \frac{q * E_{EBE}}{r})K$	Captura en Equilibrio Bioeconómico.
$B_{EBE} = \frac{c}{qp}$	Biomasa en Equilibrio Bioeconómico.
$EBE = p * C_{EBE}$	Ingresos en Equilibrio Bioeconómico.

Cuadro 3.3: Puntos de referencia bioeconómicos

un tipo de comportamiento de las soluciones de la ecuación. Un comportamiento de equilibrio significa que existe un punto al que las soluciones se *acercan* a medida que la variable tiempo crece. Lo que se muestra a continuación es el *análisis gráfico* del modelo de Gordon-Schaefer, por lo que cada punto de referencia representa distintos puntos de equilibrio dependiendo de la igualdad que se esté tomando en cuenta. En Clark (1990) se deducen los puntos de referencia bioeconómicos, que se representan gráficamente en la figura 3.1 y que se detallan en el cuadro 3.3

Es importante enfatizar que el gráfico 3.1 representa el comportamiento estáti-

co del modelo. Lo que significa que para cada valor de la curva se tienen diferentes soluciones que dependerán de las condiciones iniciales que se presenten. En este gráfico, todos los valores de la curva son soluciones de equilibrio, es decir, $C_t = rB_t \left(1 - \frac{1}{K}B_t\right)$, que significa que las capturas son igual al crecimiento poblacional. Interesan especialmente este tipo de soluciones, ya que de este modo la cantidad de biomasa total del recurso se mantiene constante.

En particular, los puntos bioeconómicos representan diferentes escenarios en los que puede evolucionar la pesquería, siendo especialmente relevantes los puntos *EBE* (o *LA*) y *MRS*. El primero representa la cantidad de embarcaciones que son sostenibles biológica y económicamente en un régimen pesquero de libre acceso (sin regulaciones) (Clark 1990), lo cual se explica porque en este punto los costos se igualan con los ingresos, y por lo tanto los esfuerzos adicionales (embarcaciones) que pretendan ingresar no obtendrán las capturas suficientes para obtener beneficios sostenibles. El segundo es el punto en el cual los beneficios son máximos y se obtienen la mayor cantidad de capturas, por lo que se denomina un óptimo económico. Sin embargo, para alcanzar esta situación se requiere, por lo general, de regulaciones (Franquesa 1995, 6).

En síntesis, con este modelo es posible evaluar en qué situación se encuentra una pesquería en relación a los puntos bioeconómicos. Ciertamente, es un modelo con diversas limitaciones, ya que tiene una serie de supuestos que no se cumplen para todos los recursos (Seijo 1997, 35).

3.2.6. Presentación de las simulaciones

A continuación se presentan las salidas computacionales luego de haber realizado las simulaciones con datos tentativos⁹ para la pesca artesanal de merluza común de Valparaíso. Los cuatro primeros gráficos muestran el modelo de Gordon-Schaefer en su comportamiento estático, lo cual permite caracterizar a la pesquería en relación a los puntos bioeconómicos y por lo tanto observar si se encuentra sobre o subexplota-

⁹Datos proporcionados por Subpesca. No se garantiza su validez

Notación	Valor	Unidad de medida
K : Capacidad de carga del ecosistema	600000	Toneladas
r : Tasa de reproducción intrínseca	0.3	–
q : Coeficiente de capturabilidad	0.00004.	–
B_0 : Biomasa inicial	600000	Toneladas
E : Esfuerzo realizado por flota artesanal.	300	Embarcaciones
c : Costo	15.000	pesos chilenos por día.
p : Precio	246.000	pesos por tonelada.
t : Tiempo	1:20	Años.

Cuadro 3.4: Datos utilizados para la realización de las simulaciones

da. Por otro lado, los tres últimos corresponden a simulaciones propiamente tal, ya que lo que se realizó fue predecir la evolución de las capturas, la cantidad de biomasa y beneficios económicos a partir de la cantidad actual de esfuerzo artesanal del caso estudiado, permitiendo responder a la pregunta por la sostenibilidad bioeconómica en cuestión.

Se utilizan los siguientes datos, correspondientes a la especie merluza común (*Merluccius gayi*), medida en la quinta región de Valparaíso. Es importante señalar que el esfuerzo pesquero artesanal se realiza en las 5 primeras millas náuticas. Además los parámetros K , r y q utilizados no son válidos más para la presente investigación, ya que si bien se intentó realizar una estimación se encontraron varios problemas que impidieron terminar a tiempo¹⁰:

En el gráfico 3.2 se aprecia que la captura no se encuentra en un nivel sostenible en el tiempo. El punto en el que se intersectan las dos líneas punteadas no está en la curva. Lo que debiera suceder según el modelo (y que se muestra en las simulaciones), es que las capturas disminuyan hasta una cantidad sostenible. En términos de Clark (1990, 15), esto se explica porque al disminuir la cantidad de biomasa, las capturas

¹⁰El lector interesado puede revisar el método utilizado para intentar estimar los parámetros biológicos, los correspondientes códigos, así como los problemas encontrados, en el apéndice B

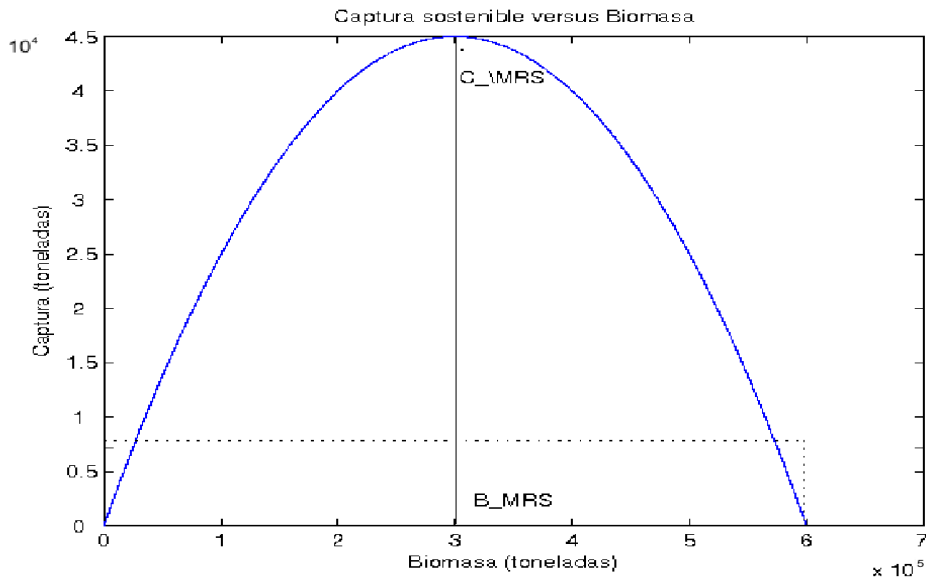


Figura 3.2: Captura Sostenible

también disminuyen, hasta que las capturas sean iguales al crecimiento, acercándose a lo que en definitiva constituye un *punto de equilibrio atractor*.

En el gráfico 3.3 se aprecia que la actual cantidad de esfuerzo es mucho menor de la que se requiere para situar a la pesquería en su Máximo Rendimiento Sostenible. Lo cual significa que aún pueden ingresar unas 3000 embarcaciones. El cálculo para obtener este valor se obtiene por la definición de Esfuerzo en el punto de Máximo Rendimiento Sostenible (E_{MRS}), $E_{MRS} = \frac{r}{2q}$, y que para el presente caso es

$$\frac{0,3}{2 * 0,00004}$$

Es fundamental enfatizar que en todas las simulaciones que se realizan aquí no se considera el esfuerzo pesquero industrial, lo cual explica que el MRS pueda llegar a 3000 embarcaciones.

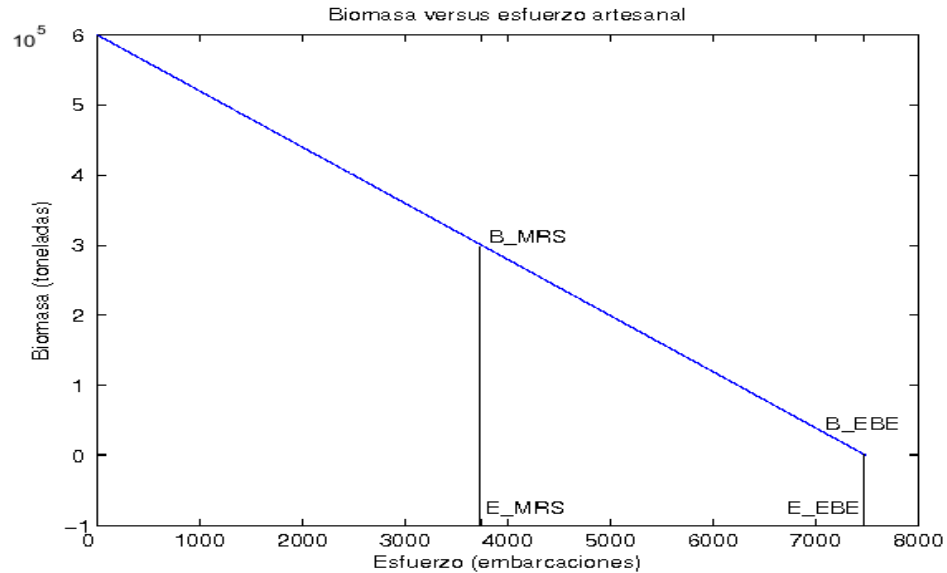


Figura 3.3: Biomasa y esfuerzo sostenible. $E_{MRS} = \frac{r}{2q}$ $E_{EBE} = \frac{r}{q} \left(1 - \left(\frac{c}{pqK}\right)\right)$
 $B_{MRS} = \frac{K}{2}$ $B_{EBE} = \frac{c}{qp}$

Si se observan los datos de principios de la década de los 90', se aprecia que la pesquería se encontraba explotada más cercana al óptimo, correspondiente a C_{MRS} , en que había una mayor disponibilidad de stock y de esfuerzo. También es interesante observar que si bien el esfuerzo en el equilibrio bioeconómico (E_{EBE}) es sostenible económicamente, la biomasa se vería muy disminuida, llegando a niveles inferiores a las 2000 toneladas, lo cual tiene consecuencias irreversibles.

Al observar el gráfico 3.4, es posible comprender lo que ocurriría si aumentara la cantidad de esfuerzo al nivel de E_{MRS} , en que si bien la biomasa disminuiría, las cantidades de captura serían las mayores posibles en esta pesquería. Sin embargo, aquí también se muestra que si el esfuerzo se aumenta por sobre E_{MRS} , hasta llegar a E_{EBE} las capturas disminuirían hasta cantidades menores a las 500 toneladas.

En el gráfico 3.5 se puede comprender la relación biológica y económica que

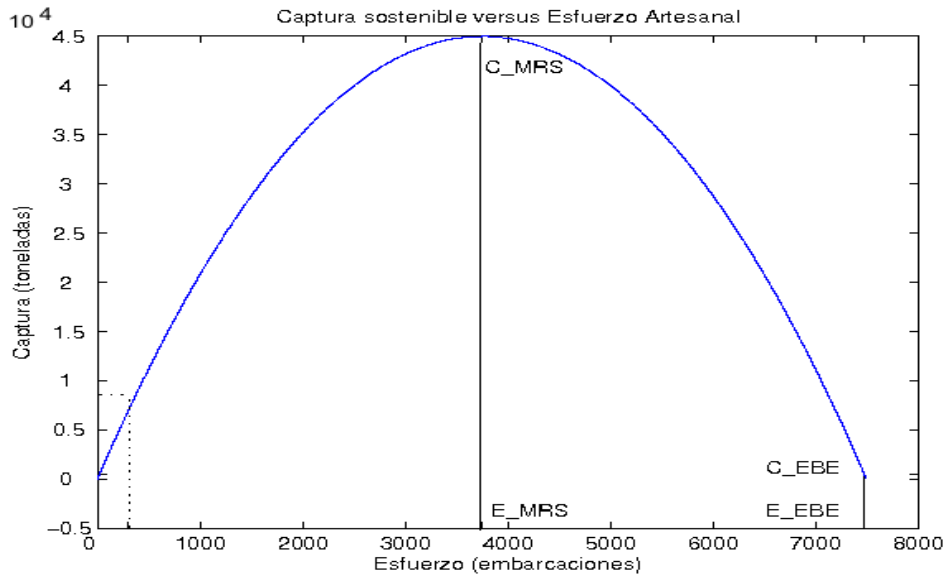


Figura 3.4: Captura Sostenible. $C_{MRS} = \frac{Kr}{4}$, $C_{EBE} = qK(E_{EBE}) \left(1 - \frac{q(E_{EBE})}{r}\right)$

explica por qué en el *EBE* se disminuiría tan considerablemente la biomasa. Como se mencionó en la subsección 3.2.5, este equilibrio se alcanza cuando los ingresos se igualan con los costos, y por lo tanto no hay incentivos para que ingresen más embarcaciones; dadas las características de esta pesquería, dejan de haber incentivos en una cantidad de esfuerzo en que la biomasa está muy reducida, lo que se explica por los bajos costos de un día estándar de pesca artesanal.

En los gráficos 3.6, 3.7 y 3.8 se verifica que la cantidad de biomasa se estabiliza en una cantidad compatible con el nivel de esfuerzo, lo cual explica tanto la disminución de las capturas como de la biomasa y de los beneficios. De este modo, se comprueban los puntos de equilibrio del modelo, en que dada una condición inicial, las soluciones se estabilizan en los diferentes puntos de la curva en que el crecimiento se iguala con las capturas.

En síntesis, considerando las limitaciones que el presente modelo tiene, princi-

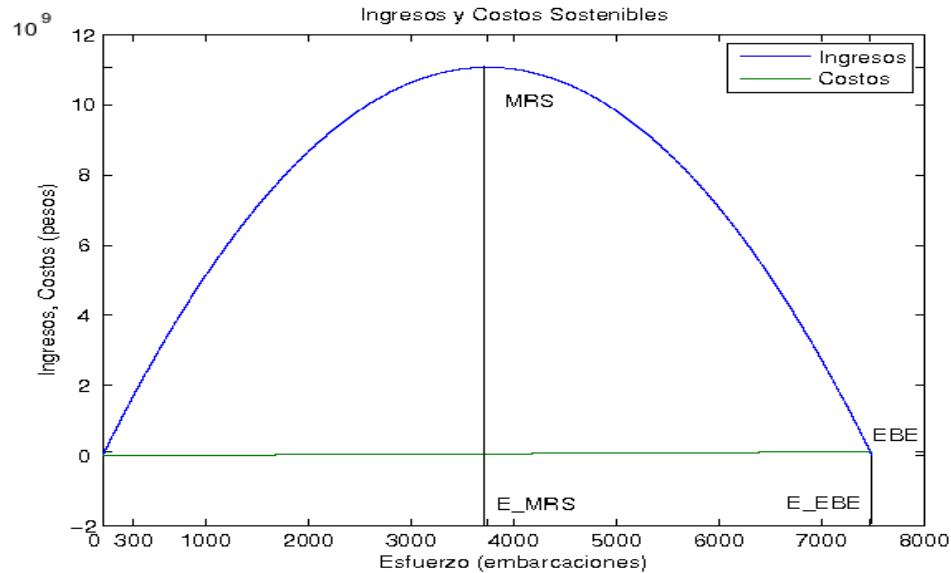


Figura 3.5: Ingresos y Costos Sostenibles. $MRS = p * C_{MRS}$, $EBE = p * C_{EBE}$

palmente en cuanto no considera el esfuerzo pesquero industrial y por lo tanto su validez se ve muy reducida, es posible señalar algunas interpretaciones a partir de las simulaciones realizadas. La situación actual de la pesca artesanal de la merluza común en Valparaíso es sostenible bioeconómicamente. Biológicamente en tanto si bien la cantidad de capturas son superiores a las sostenibles, en el plazo simulado éstas disminuirán hasta alcanzar una cantidad compatible para que la biomasa se mantenga constante. Económicamente, ya que si bien los beneficios de los pescadores artesanales disminuirán producto de la disminución en las capturas, también se estabilizarán en un nivel en que, según el modelo, sigue siendo rentable la cantidad de esfuerzo en cuestión. Sin embargo, esto no significa que la pesquería este funcionando en su nivel óptimo, de hecho, la cantidad de capturas está muy por debajo del C_{MRS} , como se puede apreciar en el gráfico 3.4. Es fundamental enfatizar que si se consideraran otros factores, como el esfuerzo pesquero industrial, tanto las simulaciones como sus respectivas interpretaciones serían diferentes, siendo necesario revisar la afirmación sobre la sostenibilidad bioeconómica de la situación actual.

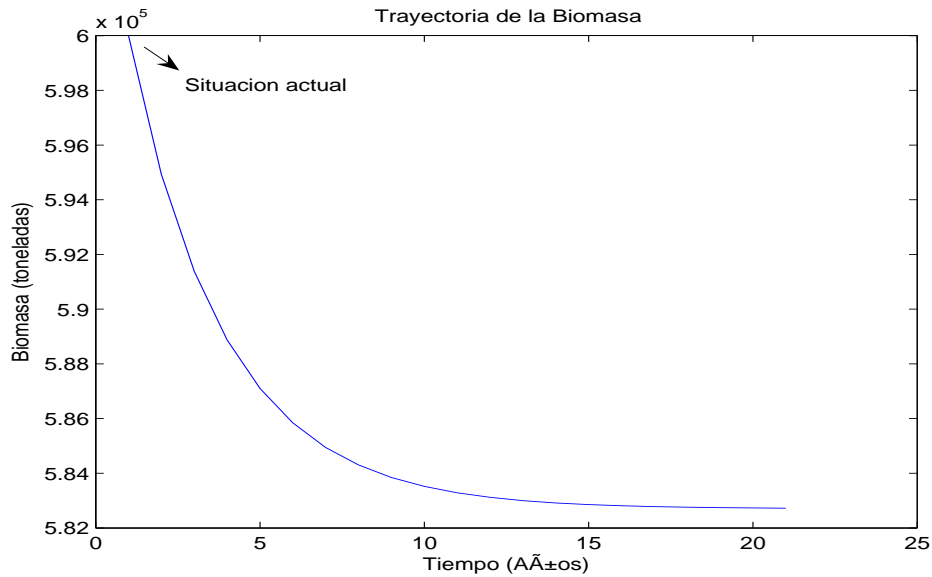


Figura 3.6: Simulación Evolución de Biomasa

Como se mencionó en la sección 3.1 no interesa desarrollar una de las etapas fundamentales en la construcción de modelos, la validación. Las razones para que no sea una motivación en esta aplicación son principalmente dos. Por un lado los datos con los que se trabajó son imprecisos, por lo que al intentar contrastar las soluciones presentadas con los datos reales, la comparación no rendiría muchos frutos. Por otro lado, el modelo utilizado tiene limitaciones en cuanto a representar el fenómeno de la sostenibilidad bioeconómica. De este modo, interesa realizar una propuesta de modificación a la manera en que se construyó el modelo, dejando planteado los elementos claves que permitirían una aproximación más aguda, más realista y en la que tenga más sentido realizar la validación correspondiente.

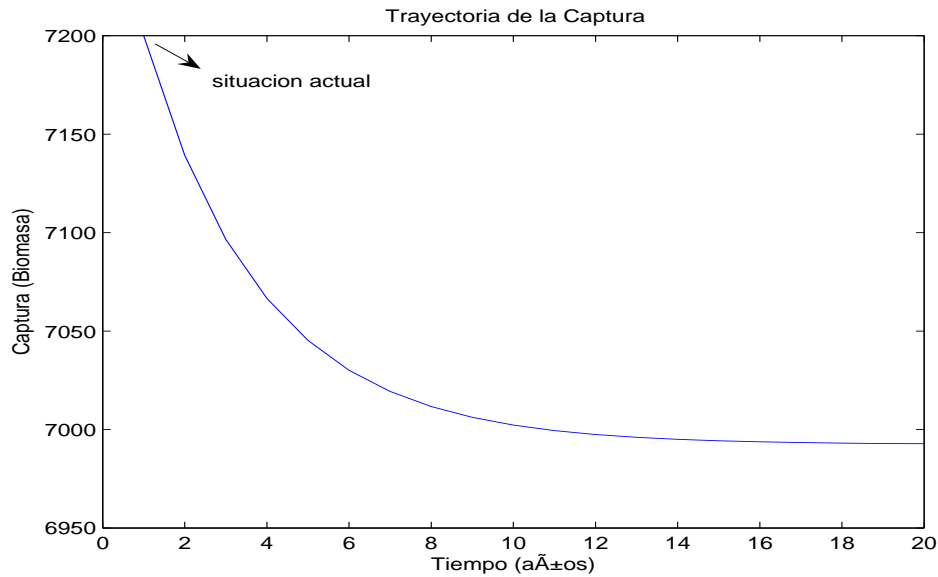


Figura 3.7: Simulación Evolución de Captura

3.2.7. Propuesta de modificación.

En esta subsección interesa enfatizar los aspectos sociológicos que permitirían darle mayor profundidad al análisis y mayor sostenibilidad a las decisiones de la administración pesquera. La atención se concentrará en tratar de justificar los elementos de la sostenibilidad social que podrían ser estudiados con el apoyo de sistemas dinámicos, esbozando de cierta manera un futuro trabajo en modelos matemáticos que respondan también a cuestiones relacionadas con la sostenibilidad social. Por lo que a continuación se retoma de manera muy breve algunos de estos aspectos mencionados en 3.2.4.

En cuanto al modelo de Gordon-Schaefer utilizado, el desafío inmediato es considerar también el esfuerzo industrial realizado, así como las capturas de estas flotas. Si se quiere tener un panorama más realista de la situación de la pesca artesanal, se requiere al menos considerar el comportamiento de este actor tan determinante, ya

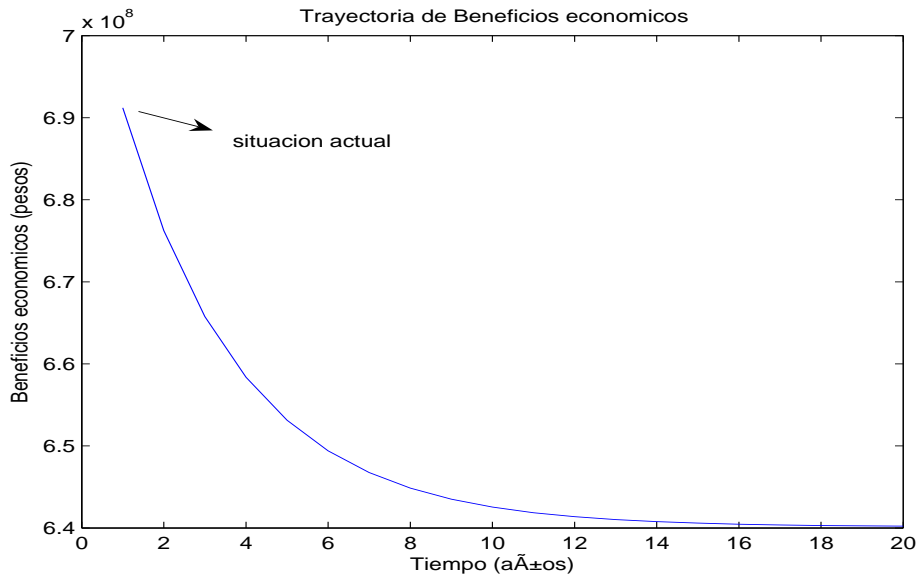


Figura 3.8: Simulación Evolución de Beneficios

que aunque pescan en zonas diferentes, las capturas de unos y otros están claramente relacionadas. Solo como propuesta, se deja esbozado la siguiente modificación al modelo, tomado de los autores Seijo y Salas (Seijo 1997):

$$\frac{dB}{dt} = rB(t) \left(1 - \frac{B(t)}{K} \right) - C_1(t) - C_2(t) \quad (3.15)$$

De los elementos que se mencionaron en la sección 3.2.4 en cuanto a la sostenibilidad social, el que alude al impacto en la estructura social es pertinente de ser revisado, particularmente los asentamientos de los pescadores artesanales, principalmente por dos cuestiones. En primer lugar, puede plantearse como hipótesis que la dinámica del asentamiento de los pescadores artesanales se asocia significativamente con los beneficios económicos que las capturas les otorgan, pero también con el desarrollo de capital social. En segundo lugar, que si bien puede ser caro recolectar las

series de datos sobre migraciones y desarrollo de capital de pescadores artesanales en un intervalo de 10 años, por ejemplo, no sería una tarea que requiriese instrumentos de medición tan sofisticados como los necesarios para la medición variables subjetivas.

Con un modelo que respondiese a la dinámica del asentamiento, podrían estudiarse problemas como por qué en algunos años se observa que la cantidad de pescadores artesanales inscritos aumenta, pero al mismo tiempo los beneficios disminuyen, quizás para ciertas cantidades de desarrollo de capital social de los pescadores artesanales, la dinámica de asentamiento no depende linealmente de los beneficios. Una investigación podría orientarse a investigar la evolución de los pescadores artesanales y sus organizaciones en los próximos 10 años, lo cual requeriría observar las soluciones a partir de la situación actual, siendo necesario incluir tanto variables bioeconómicas, como variables vinculadas a la sostenibilidad social.

El mapa conceptual de 3.9 permite tener una visión de lo que en 3.2.4 se planteó por *sostenibilidad sistémica*. El desafío es trabajar en construir modelos que incorporen variables tanto biológicas, económicas, como sociales. Donde el equipo que construya estos modelos, deberá ser capaz de incorporar indicadores que sean aceptados por todos los actores involucrados.

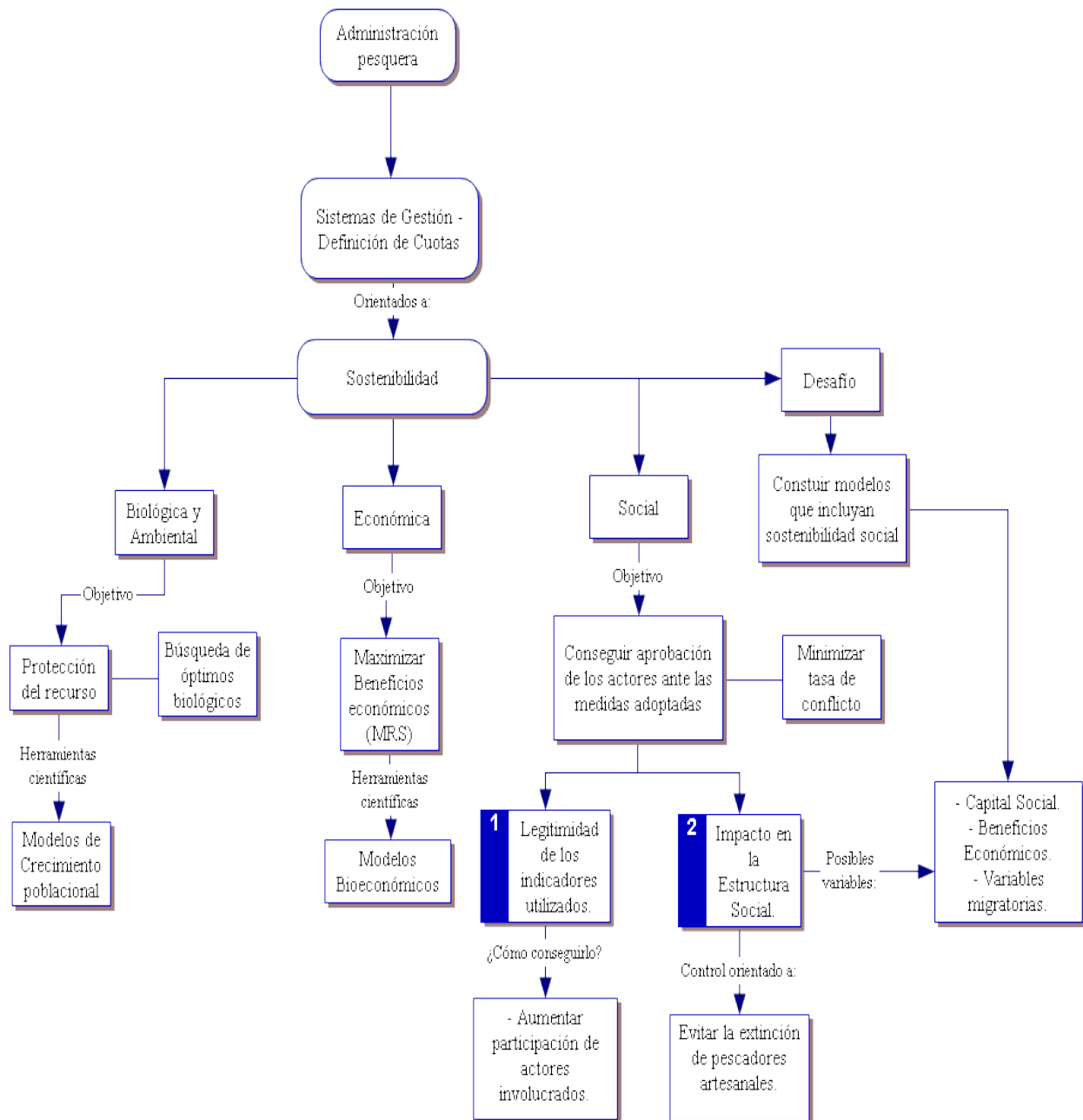


Figura 3.9: Mapa conceptual de la sostenibilidad sistémica

Conclusiones: Consideraciones metodológicas

- Si bien existen aplicaciones de sistemas dinámicos en Ciencias Sociales, se aprecia un vacío metodológico que dificulta el avance científico de investigaciones que se apoyen en este tipo de modelos.
- El uso de modelos basados en sistemas dinámicos en una investigación en Ciencias Sociales dependerá al menos de los siguientes factores:
 1. El diseño de investigación se desarrolla expresando el problema, la pregunta y los objetivos de tal manera que el componente dinámico se encuentre explícito.
 2. Es posible justificar que se trata de un problema en que sus relaciones presentan no linealidad.
 3. Es posible construir un modelo que represente la dinámica y no linealidad del problema.
- Hay problemas complejos en los que investigaciones que se apoyen en el uso de sistemas dinámicos podrían contribuir de manera relevante. Sin embargo, la falta de claridad sobre qué son y para qué sirven este tipo de modelos disminuye el interés en este tipo de investigaciones.
- Realizar investigaciones que se apoyen en sistemas dinámicos requiere de un conocimiento sobre el proceso de construcción de modelos, por lo que se requiere del trabajo en equipos transdisciplinarios que sean capaces de comunicarse y definir modelos que respondan lo mejor posible a los objetivos de la investigación.
- La elección y construcción de modelos, como un momento necesario en este tipo de investigaciones, no es un proceso eminentemente técnico. Si bien se requiere

de matemáticos, es necesario un diálogo con el marco teórico y con la eventual existencia de datos secundarios sobre el problema. Además de experiencia y desarrollo de la intuición, ya que modelar es de cierta forma un arte.

- Los resultados que se obtengan en este tipo de investigaciones serán, en gran parte, producto de un conjunto de simulaciones computacionales, en que se requiere combinar conocimientos matemáticos e informáticos. De ahí que también se requiere de un equipo multidisciplinario, siendo de especial aporte investigadores con una formación más allá de su propia área.
- En cuanto al ejemplo de investigación presentada para esta memoria, se plantea como desafío: Incorporar en el modelo la interacción entre pesca industrial y pesca artesanal, en tanto se obtendría un panorama más realista de la situación bioeconómica de ambos actores.
- Es pertinente estudiar la dinámica del asentamiento de los pescadores artesanales de la quinta región de Chile, en tanto es un componente relevante de la sostenibilidad social y por lo tanto sistémica de la explotación de la pesquería de la merluza. En particular, se propone construir un modelo con las variables *beneficios económicos* y *capital social*, así como las *bioeconómicas*.
- Si bien no es claro el éxito que pueda tener seguir profundizando en la relación de sistemas dinámicos y ciencias sociales, hay un argumento clave que debe ser tomado en cuenta. En la práctica de la investigación social, y en particular, en la práctica sociológica, se hace cada vez más necesario innovar con herramientas y enfoques que permitan comprender la complejidad de diversos problemas que las técnicas tradicionales no son capaces de analizar.

En este sentido, la reflexión sobre el éxito del uso de sistemas dinámicos y ciencias sociales tiene un componente epistemológico fundamental: La complejidad solo puede ser observada con herramientas complejas. De este modo, cada herramienta permite realizar una *distinción* que otras herramientas no

puede hacer. En particular, los sistemas dinámicos permiten distinguir aquellos fenómenos en que la no-linealidad y la temporalidad están presentes, por lo que desecharlos de antemano puede tener como consecuencias descartar rendimientos que con otras herramientas no podrían ser descubiertos.

Finalmente, es importante enfatizar que el estudio de los fenómenos complejos debe ser tratado con la mayor cantidad de herramientas y enfoques posibles, en tanto se conseguirá diferentes rendimientos complementarios. Según Aldo Mascareño, éstas pueden ser *modelos matemáticos de dinámicas no-lineales, redes neuronales, simulaciones computarizadas basadas en automatas celulares, teoría del caos, teoría de juegos, fuzzy-sets-theory, entre otros* (Mascareño, 2007), cada una con distinciones que pueden aportar al estudio de la sociedad y su complejidad inherente.

Bibliografía

1. Alegret, J.L. *La gestión de la pesca desde la perspectiva de las Ciencias Sociales*. Editado por Universidad de Coruña. 2000, España.
2. Capra, F. *La trama de la vida. Una nueva perspectiva de los sistemas vivos*. Editorial Anagrama. 1998, Barcelona.
3. Chae, D-R. Pascoe, S. *Use of simple bioeconomic models to estimate optimal effort levels in the Korean coastal flounder fisheries*. *Revista Aquatic Living Resources*. 2005.
4. Clark, Collin. *Mathematical Bioeconomics. The Optimal Management of the Renewable Resources*. Editorial John Wiley Sons. 1990, New York.
5. Cullen, D. Zill, D. *Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera*. Editorial Thompson. 2006, México.
6. Degnol, Poul. *The knowledge base for fisheries management in developing countries. Alternative Approaches and methods*. Institute for Fisheries Management and Coastal Community Development. 2001, Noruega.
7. Devaney, R. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Editorial Westview Press. 1988, Boston.
8. Domenech, J.M. Riba, M.D. *Métodos estadísticos-Modelo Lineal de Regresión*. Editorial Herder. 1985, Barcelona.
9. Epstein, J. *Nonlinear Dynamics, Mathematical Biology, and Social Science*. Editorial Addison-Wesley. 1997, U.S.A..

10. FAO, Glossary. Fisheries Department. <http://www.fao.org/fi/glossary/default.asp>. 2007.
11. Forrester, J. *Interview With Jay W. Forrester on System Dynamics*. Extraída de <http://web.mit.edu/sdg/www/publications.html>, el 10/05/07.
12. Franquesa, Ramón. *Modelos Bioeconómicos y políticas de regulación pesquera. Una lección introductoria*. Gabinete de Economía del Mar. 1995, España.
13. García, S. Gómez, F. Marbán J. *Modelos matemático y proceso dinámicos. Un primer contacto*. Universidad de Valladolid, 2002.
14. Gleick, J. *Chaos, Making a new Science*. Editorial Cardinal. 1988, Inglaterra.
15. Gerber, Mónica. *Complejidad: Teoría y Método*. Tesis Sociología Universidad de Chile. 2006, Santiago.
16. Hersoug, Bjrn. *Clossing the Commons*. Editorial Eburon Publishers. 2006, Holanda.
17. Hilborn, Ray. Mangel, Marc. *The Ecological Detective: Confronting Models with Data*. Princeton University Press, 1997.
18. Hillen, T. De Vries, G. Lewis, M. Muller, J. Schonfisch, B. *A Course in Mathematical Biology. Quantitative Modeling with Mathematical and Computational Methods*. Editorial SIAM. 2006, Philadelphia.
19. Isham, Josham. *Can Investments in Social Capital Improve Well-Being in Fishing Communities?. A Theoretical Perspective for Assesing the Policy Options*. Biennial Meeting of the International Institute of Fisheries Economics and Trade, 2000.
20. Kiel, D.L. Elliot, E. *Chaos Theory in Social Sciences. Foundations and Applications*. Editorial University of Michigan Press. 1997, EE.UU.
21. Martín, M. A. Morán, M. Reyes, M. *Iniciación al Caos*. Editorial Síntesis. 1998, Madrid.
22. Mascareño, Aldo. *Sociología del método: La forma de la investigación sistémica*. Ibero Forum. 2007.

23. May, R. *El Caos en Biología*. Revista *Mundo Científico*. 1991.
24. Montoya, Max. *Informe Técnico: Análisis del desempeño económico, de las áreas de manejo, 2000-2002*. Editado por Subpesca. 2004, Valparaíso.
25. Montoya, Max. *Clasificación de caletas de pesqueras artesanales*. Subpesca. 2002, Valparaíso.
26. Pérez, S. Gómez, F. Marbán, J. *Modelos Matemáticos y Procesos Dinámicos. Un primer contacto*. Editorial IV. Serie. 2002, Valladolid.
27. Rinaldi, Sergio. *Laura and Petrarch: An intriguing case of cyclical love dynamics*. SIAM Journal on Applied Mathematics, Volume 58, Number 4. Agosto 1998.
28. Simó, C. *Cómo entender el Caos Determinista*. Revista *Mundo Científico*. 1991.
29. Seijo, J.C. Defeo, O. Salas, S. *Bioeconomía pesquera. Teoría, modelación y manejo*. FAO. 1997.
30. Spivak, Michael. *Calculus*. Editorial Reverté. 1996
31. Strogatz, S. *Love and Differential Equations*. Nonlinear Dynamics and Chaos. Cambridge, MA: Westview Press. 1994.
32. Subsecretaría de Pesca, Gobierno de Chile. *Antecedentes Económicos y de Mercado de la Pesquería de Merluza Común. Informe Técnico*. 2002.

Apéndice A

Algoritmos en Matlab de las simulaciones realizadas

A continuación se presentan los algoritmos desarrollados en el software *Matlab* para realizar las simulaciones de las soluciones del modelo Gordon-Schaefer a tiempo discreto. Se describe la definición de las funciones creadas, así como los algoritmos para la situación estática y dinámica del modelo.

A.1. Funciones

- logística

```
function [f]=logistica(B),  
r= .3;  
K= 600000;  
q=0.00004;  
f= B + (r*B).*(1 - B/K);
```

- Captura Artesanal

```
function [f]=captu_artesanal(B),
```

74 APÉNDICE A. ALGORITMOS EN MATLAB DE LAS SIMULACIONES REALIZADAS

```
q=0.0004;  
B=[0:600000];  
f=q*300*B
```

■ Ingresos

```
function [f]=ingresos(B);  
p = 246000;  
q= .00004;  
f=p*captu(B);
```

■ Costos

```
function [f]=costos_sostenible(E),  
c=15000;  
E=[0:7500];  
q=0.00004;  
K = 600000; % carrying capacity  
r=0.3 ; % per capita productivity  
f = c * E
```

A.2. Estáticos

■ Captura versus Biomasa

```
function [f]=captura_biomasa(B),  
r= .3;  
B=[0:600000];  
K= 600000;  
f=(r*B).*(1 -B/K);
```


- Biomasa versus Esfuerzo

```
function [f]= biomasa_esfuerzo(E);
r= .3;
K= 600000;
q=0.00004;
E=[0:7500];
f = K*(1 -(q*E)/r);
```

- Captura versus esfuerzo (Captura sostenible)

```
function [f]=captura_sostenible(E),
q = 0.00004;
K = 600000;
r = 0.3 ; % Tasa de reproducion per cpita.
E = [0:7500];
f=(q*K*E).*(1-(q*E/r));
```

- Ingresos

```
function [f]=ingreso_sostenible(E),
q=0.0004;
K = 600000; % carrying capacity
r=0.3 ; % per capita productivity
E=[0:7500];
% Economic parameters
c_merluza=15000; % unit cost of effort
p_merluza=246000; % market price
q_merluza=0.00004; % catchability
c=c_merluza;
p=p_merluza;
q=q_merluza;
f = p * (q*K*E).*(1-(q*E/r));
```

A.3. Evolución temporal

- Simulación Evolución de Captura y Biomasa

```

r= .3;
K= 600000;
q=0.00004;
tr_logis=zeros (20,1);
tr_captu=zeros (20,1);
tr_logis(1) = K;
tr_captu(1) = captu(tr_logis(1));
for i = 1:20
    tr_captu(i) = captu(tr_logis(i));
    tr_logis(i+1) = logistica(tr_logis(i) - tr_captu(i));
end;

```

- Simulación Evolución de Beneficios.

```

tr_logis=zeros(20,1);
tr_captu=zeros(20,1);
tr_logis(1) = K;
tr_captu(1) = captu(tr_logis(1));
for i = 1:20
    tr_captu(i) = captu(tr_logis(i));
    tr_logis(i+1) = logistica(tr_logis(i) - tr_captu(i));
end;
tr_ingresos(1) = ingresos(tr_logis(1));
%los costos son fijos.
tr_beneficios(1) = beneficios(tr_logis(1));
for i = 1:20
    tr_ingresos(i) = ingresos(tr_logis(i));
end

```

```
for i = 1:20
    tr_beneficios(i) = beneficios(tr_logis(i));
end
```


Apéndice B

Estimación de Parámetros biológicos modelo Gordon-Schaefer: Método de máxima verosimilitud

Cómo se mencionó en 3.2.6, los valores de los parámetros biológicos utilizados en las simulaciones no pudieron ser estimados, por lo que si bien se trabajó con datos otorgados por la Subsecretaría de Pesca, no se garantiza su validez. Sin embargo, es pertinente incluir al menos en un apéndice el intento realizado para la estimación de los parámetros biológicos del modelo Gordon-Schaefer, ya que si bien es un apéndice técnico y vinculado indirectamente al ejercicio realizado, fue parte del trabajo desarrollado para la presente tesis y puede servir para otras aplicaciones de temas pesqueros.

B.1. Código

A continuación se presentan los algoritmos desarrollados en el software *Matlab* para realizar la estimación de los parámetros. La justificación matemática para utilizar el método de máxima verosimilitud puede revisarse en (Hilborn, 1997). Es fundamental que el lector revise el artículo mencionado, ya que permite comprender el contexto en que se enmarcan los códigos desarrollados a continuación.

```
% Estimacion MV en modelo pesquero
clear all
capturas=[25294 33220 28688 29715 30905 50136 46881 52820
63663 62560 61823 67021 75403 84897 80197 76731 93593 105235
122192 116040 115343 73598 47436]'/1000;
y=[588 866 549 604 756 732 848 681 1253 1199 881 1929 2079 1967
2406 1480 2607 2707 2159 2814 2509 911 805]'/1000;
logy=log(y);
meanlogy=mean(logy);
z=logy-meanlogy;
KI=0;
KF=1000;
K=KI:30:KF;
ri=0.0;
rf=4;
r=ri:0.01:rf;
biomasa=NaN(23,length(K),length(r));
for k=1:length(K)
    for rr=1:length(r)
        t=2;
        biomasa(t-1,k,rr)=K(k);
        while t<=23 & biomasa(t-1,k,rr)>0
```

```

        b=biomasa(t-1,k,rr)*(1+r(rr)*(1-biomasa(t-1,k,rr)/K(k)))
    - capturas(t-1);
        if b>0
            biomasa(t,k,rr)=b;
        end
        t=t+1;
    end
end
end
logbiomasa=log(biomasa);
meanlogbiomasa=mean(logbiomasa);
d=logbiomasa;
e=d;
for k=1:length(K)
    for rr=1:length(r)
        e(:,k,rr)=(d(:,k,rr)-meanlogbiomasa(1,k,rr)-z).^2;
    end
end
end
f=sum(e);
Z(:,:)=f(1,:,:);
[U,I]=min(Z);
[V,J]=min(U);
minimo=Z(I(J),J)
Kstar=K(I(J))
rstar=r(J)
ZZ=min(Z,12);
meshc(r,K,ZZ)
sigma2=minimo/23;
sigma=sqrt(sigma2)
s=meanlogy-meanlogbiomasa(1,I(J),J)+sigma2/2
q=exp(s)

```

Al ejecutar estos códigos en Matlab, aparecerá un gráfico definido por tres ejes, en que los ejes z e y están definidos por los valores de K y r que se quiere minimizar (Hilborn, 1997). El artículo utilizado para apoyarse en la estimación de los parámetros plantea que el Método de Máxima Verosimilitud permitiría obtener con la programación de algoritmos como los citados arriba, los valores de K , r , q y s para el modelo de Gordon-Schafer. Sin embargo, luego de realizar diversas modificaciones y ensayos con distintos valores para el intervalo de r y K , los resultados que la estimación entrega son siempre valores cercanos a los extremos superiores de los intervalos. Por ejemplo, si se define un intervalo para K entre 0 y 100.000, la estimación será un valor cercano a 100.000. De este modo, se descartó realizar la estimación, ya que no se disponía del tiempo ni los conocimientos para probar con otros métodos de estimación.

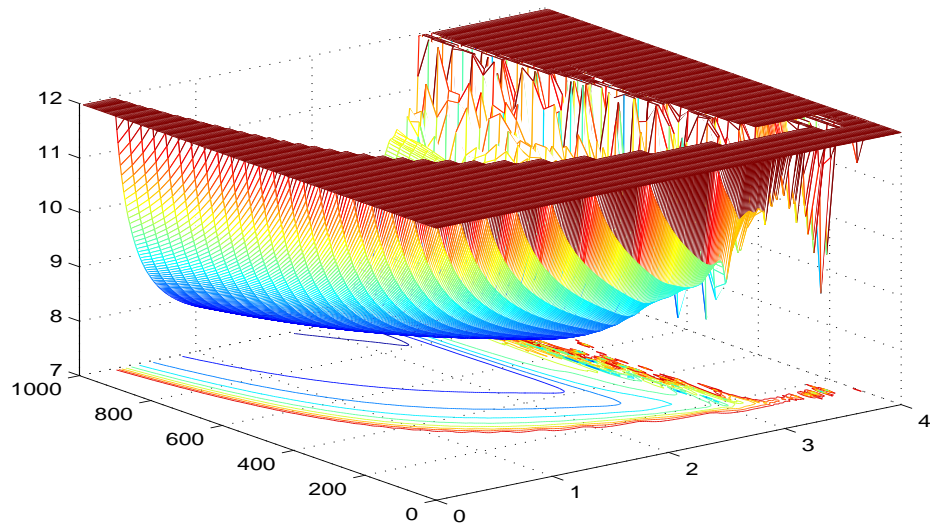


Figura B.1: Estimación parámetros K y r