



**UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECÁNICA**

**DETERMINACIÓN NUMÉRICA DE COEFICIENTES DINÁMICOS
NO LINEALES DE UN DESCANSO HIDRODINÁMICO CILÍNDRICO**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MECÁNICO

LEONARDO ANDRÉS BRAVO SALAS

**PROFESORA GUÍA:
VIVIANA MERUANE NARANJO**

**MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
WILLIAMS CALDERÓN MUÑOZ
ALEJANDRO ORTIZ BERNARDIN**

**SANTIAGO DE CHILE
JULIO 2012**

RESUMEN

Los descansos hidrodinámicos son ampliamente utilizados en equipos rotatorios debido a su capacidad de resistir altas cargas, alta amortiguación, escaso desgaste, amplia vida útil y una holgura entre rotor y descanso pequeña. La operación confiable de estos equipos bajo distintas condiciones de operación es de vital importancia. Para esto, es necesaria tanto la predicción como el control del comportamiento dinámico, esto es respuesta al desbalance, velocidades críticas e inestabilidades.

En este trabajo se realizan simulaciones computacionales a través de un software con la capacidad de resolución de problemas CFD (*Computational Fluid Dynamics*), con una interface FSI (*Fluid Structure Interaction*), que buscan la determinación de coeficientes dinámicos de rigidez y de amortiguamiento.

Se determinan los coeficientes dinámicos considerando términos lineales y no lineales, bajo diferentes condiciones de operación, dadas por la velocidad de rotación del eje. Estos coeficientes se obtienen mediante el uso de un método de identificación de parámetros de dominio temporal. Adicionalmente, se estudian los efectos generados por la inclusión del fenómeno de cavitación y la flexibilidad de la pared en las magnitudes de los coeficientes dinámicos. Finalmente, se validan los resultados comparando los coeficientes dinámicos lineales con aproximaciones analíticas de los distintos modelos desarrollados.

Los resultados obtenidos en modelos con cavitación muestran que los coeficientes de rigidez son determinantes en el ajuste de la respuesta del fluido a la excitación del rotor, no así los coeficientes de amortiguamiento que no contribuyen mayormente al ajuste (sus magnitudes son prácticamente nulas en muchos casos).

En condiciones bajo *Oil Whirl* los coeficientes no lineales adquieren mayor importancia, asimismo como para altas velocidades de operación.

La flexibilidad del descanso es determinante sólo para cuantificar la presión desarrollada por el fluido y la ubicación del punto de equilibrio que alcanza el rotor. Por lo tanto, para la determinación de coeficientes dinámicos bastaría simular con una pared rígida.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo representa el fruto de años de estudio y esfuerzo, marca el fin de una etapa y espero el comienzo de una nueva muy exitosa.

En primer lugar agradezco a la profesora Viviana Meruane por ser mi profesora guía, ser una excelente docente, tener una disposición admirable para resolver dudas y consultas y generar instancias de comunión y distensión entre sus memoristas.

Al Departamento de Ingeniería Civil Mecánica por cederme un lugar de trabajo para desarrollar mi memoria. Agradezco también a sus docentes, secretarías y funcionarios por su buena disposición y amabilidad.

A mis compañeros de estudios, desde bachillerato hasta los de mecánica, por los gratos momentos pasados en asados, carretes, fiestas y paseos. En especial a mis compinches Alexis, Carlos, Guillermo, Alex , Toño y Rodrigo.

A mis padrinos, tíos/as, primos/as que me han apoyado cuando lo necesite y me han demostrado su alegría por estar cerrando esta etapa de forma satisfactoria.

A Poncho Tangas por ser un perro leal, divertido, siempre atento y feliz cuando llegó a casa. Gracias por trasnochar conmigo cuando escribía este informe.

A ti Belén, por ser mi hermanita favorita, que me das tantas alegrías y que quiero mucho.

A mi madre, que siempre confió en mis capacidades, me brindó un apoyo incondicional, me transmitió confianza y me dio las herramientas necesarias para afrontar una vida muy distinta a la que hasta hoy he vivido. Gracias viejita, este trabajo te lo dedico.

Y a mucha gente que quiero, estimo y me ha brindado su ayuda, apoyo y buena onda en estos años, muchas gracias.

Índice

Capítulo 1	Introducción.....	1
Capítulo 2	Antecedentes Teóricos.....	5
2.1	<i>Oil Whirl</i> y Oil Whip.....	5
2.2	Lubricación Hidrodinámica	10
2.3	Modelos de analíticos de descansos hidrodinámicos.....	15
2.4	Cavitación en descansos hidrodinámicos.....	21
2.4.1	Modelo con condición de separación de flujo	22
2.4.2	Modelo de conservación de masa.....	23
2.4.2.1	Fluido con resistencia a tracción cero	24
2.4.2.2	Fluido con resistencia a la tracción finita.....	26
2.4.2.3	Bases del Algoritmo computacional	27
2.5	Descansos flexibles	30
2.6	Métodos Numéricos.....	31
2.6.1	Solución de sistemas de ecuaciones no lineales	31
2.6.2	Solución de ecuaciones algebraicas	32
2.6.3	Fluido.....	34
2.6.3.1	Ecuaciones de Flujo Incompresible	34
2.6.3.2	Integración de tiempo.....	35
2.6.3.3	Ecuaciones Discretizadas.....	36
2.6.3.4	Procedimiento de Solución	37
2.6.3.5	Interface Fluido-Estructura (FSI).....	37
2.6.3.6	Opciones de paso de tiempo	41
2.6.3.7	Modelo de cavitación	43
2.6.4	Sólido	44
2.6.4.1	Consideraciones globales	44
2.6.4.2	Integración de tiempo.....	45
2.6.4.3	Procedimiento de Solución	46
Capítulo 3	Metodología	48
3.1	Definición del descanso y de los modelos a desarrollar	48

3.2 Configuración de modelo computacional.....	50
3.2.1 Validación Malla	51
3.2.2 Validación del Paso de tiempo	53
3.2.3 Determinación Presiones de Cambio de Fases	55
3.3 Método de determinación de coeficientes dinámicos	58
Capítulo 4 Presentación de Resultados.....	65
4.1 Deformación de malla	65
4.2 Campo de Velocidades	66
4.3 Distribución de Presiones.....	67
4.3.1 Modelo sin cavitación y con pared rígida	67
4.3.2 Modelo con cavitación y con pared rígida.....	71
4.3.3 Modelo con cavitación y con pared flexible	74
4.4 Posición de Equilibrio del Rotor.....	77
4.4.1 Modelo sin cavitación y con pared rígida	77
4.4.2 Modelo con cavitación y con pared rígida	78
4.4.3 Modelo con cavitación y con pared flexible	80
4.5 Órbitas Temporales y Análisis de Frecuencias.....	81
4.5.1 Modelo sin cavitación y con pared rígida	81
4.5.2 Modelo con cavitación y con pared rígida.....	83
4.5.3 Modelo con cavitación y con pared flexible	85
4.6 Fracción de vapor	88
4.7 Deformaciones y Esfuerzos en Pared	89
4.8 Determinación de coeficientes	91
4.8.1 Modelo sin cavitación y con pared rígida.....	91
4.8.2 Modelo con cavitación y con pared rígida	96
4.8.3 Modelo con cavitación y con pared flexible	101
4.8.4 Comparación de coeficientes dinámicos.....	102
4.8.4.1 Comparación según cavitación	103
4.8.4.2 Comparación según flexibilidad de la pared	104
4.8.4.3 Comparación según aproximación de descansos dinámicos	105
Capítulo 5 Discusión y Conclusiones	107
Bibliografía	109

Notación

Símbolo	Descripción	Unidad
c	Holgura radial	m
c_{ij}	Coefficiente de amortiguamiento lineal	(N*s)/m
C_{ij}	Coefficiente de amortiguamiento lineal adimensional	
D	Diámetro del rotor	m
e	Excentricidad del rotor	m
F	Fuerza de reacción del fluido	N
F_o	Fuerza estática aplicada al rotor/eje	N
F_{xo}	Carga estática en dirección x	N
F_{yo}	Carga estática en dirección y	N
F_{mn}	Reacción del fluido en la dirección m ($m=\{x, y\}$), con aproximación de coeficientes dinámicos n, donde $n=\{L$ (lineal), NL (no lineal)	N
h	Espesor de aceite de la película de aceite	m
k	Modulo de bulk elasticidad	N/m ²
k_{ij}	Coefficiente de rigidez lineal	N/m
K_{ij}	Coefficiente de rigidez lineal adimensional	
kh_{ij}	Coefficiente de rigidez del material de la pared del descanso	N/m
Kh_{ij}	Coefficiente de rigidez adimensional del material de la pared del descanso	
L	Largo del descanso	m
m	Masa soportada por eje/rotor	kg
\dot{m}_{cav}	Caudal másico a presión de cavitación	Kg/s
$\dot{m}_{z,1}$	Caudal másico arriba de la interface en z	Kg/s
$\dot{m}_{z,2}$	Caudal másico debajo de la interface en z	Kg/s
N	Vector normal	
N_s	Parámetro de tensión superficial	
P	Presión del fluido (relativa)	Pa
P_C	Presión del fluido con aprox. de descanso corto	Pa
P_F	Presión del fluido en descanso finito	Pa
P_L	Presión del fluido con aprox. de descanso largo	Pa
R_o	Radio de curvatura de burbuja	m
R_d	Radio del descanso	m
R_r	Radio del rotor	m
S	Número de Sommerfeld	
T	Temperatura	° C, K
T_s	Tensión superficial	
U	Velocidad tangencial	m/s
u, v, w	Velocidades en x, y, z respectivamente	m/s
x, y, z	Direcciones cartesianas	
ΔP	Corrección de tensión superficial	Pa
Θ	Ángulo de excentricidad	°, rad
Θ_C	Ángulo de equilibrio bajo aproximación de des. corto	°, rad
Θ_L	Ángulo de equilibrio bajo aproximación de des. largo	°, rad
K	Razón de excentricidad	
M	Viscosidad dinámica del aceite	Pa·s
P	Densidad del fluido	Kg/m ³
ρ_{cav}	Densidad del fluido a la presión de cavitación	Kg/m ³
Φ	Ángulo tangencial (sistema de coordenadas cilíndrico)	°, rad
Ψ	Razón de densidades	
Ω	Velocidad de rotación del eje	rpm, rad/s
$\tilde{\Omega}$	Velocidad de <i>whirl</i>	rpm, rad/s
ω_c	Velocidad crítica	rpm, rad/s

Capítulo 1

Introducción

Los descansos con película de aceite son ampliamente usados en turbo-maquinaria debido a sus diversas ventajas, entre las cuales se encuentra su alta capacidad de amortiguación, capacidad de resistir altas cargas, ausencia de desgaste y una vasta vida útil. Además comparándolos con los descansos con elementos rodantes este tipo de descansos posee una holgura entre rotor y descanso mucho menor.

La operación confiable de la turbo-maquinaria, bajo regímenes de altas velocidades, es vital para la industria actual. Para esto es necesaria tanto la predicción como el control del comportamiento dinámico (respuesta al desbalance, velocidades críticas e inestabilidades).

De acuerdo al principio de operación los descansos en película de aceite pueden ser hidrodinámicos o hidrostáticos. Los descansos hidrodinámicos soportan la carga debido a la rotación del eje dado que generan presión en la película de aceite dentro del descanso. Por su parte, los descansos hidrostáticos reciben la presión desde una fuente externa.

En cuanto a la dirección de la carga se pueden distinguir descansos radiales (*journal bearings*) como axiales (*thrust bearings*).

Respecto al tipo de descanso en cuanto sección transversal se tienen:

- **Descansos circulares:** Son los descansos más simples en cuanto a formulación y los más comunes.
- **Descansos parciales:** Su sección transversal corresponde a un semicírculo sólo en la zona en la que se aplica la carga. Esto para reducir las pérdidas por fricción al reducir la superficie de contacto. Se usan para soportar grandes cargas estáticas, como en el caso de grandes turbinas. Unos topes son colocados en la zona opuesta al semicírculo por seguridad.
- **Descansos de múltiples arcos:** Su sección la conforman múltiples arcos de circunferencia (lóbulos). Usualmente tienen dos o tres lóbulos. Son utilizados para tener mejor estabilidad del eje.
- **Descansos *tilting pad*:** Consisten en varios tacos que pueden inclinarse libremente. La estabilidad de los ejes puede mejorar usando este tipo de descanso. Incluso, el *Oil Whip* puede ser completamente suprimido. Son especialmente útiles para cargas livianas, velocidades de operación elevadas, condiciones en extremo inestables.
- **Descansos de cojinete flotante:** Estos tienen un cojinete flotante, delgado y metálico, entre el rotor y el descanso. Son utilizados para disminuir las vibraciones del eje.

En la Figura 1.1 se muestran los tipos de descanso según su sección.

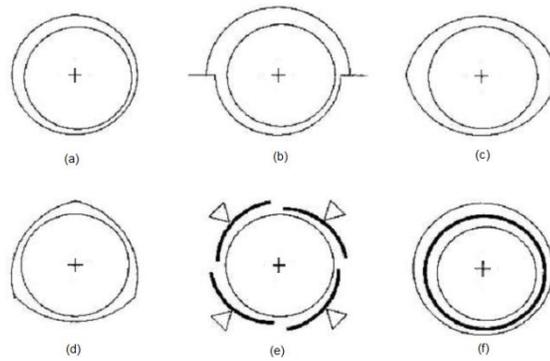


Figura 1.1: Tipos de descansos. (a) Descanso circular, (b) Descanso parcial, (c) Descanso con dos lóbulos, (d) Descanso con tres lóbulos, (e) Descanso *tilting pad*, (f) Descanso con cojinete flotante

Los descansos se pueden clasificar además según el tipo de lubricante. Puede ser de aceite, gas y grasa, entre otros.

En esta memoria se estudia un descanso hidrodinámico radial con sección circular y con lubricación de aceite.

Desde hace muchos años se ha avanzado en la modelación de los descansos hidrodinámicos. Stodola (1925) y Hummel (1926) representaron al descanso como un resorte simple. Sin embargo esta aproximación no explicaba las amplitudes de oscilación observadas a velocidades de operación críticas. Paralelamente Newkirk & Taylor (1925) describieron el fenómeno de inestabilidad producida en este tipo de descansos como *Oil Whip*. Este es un tipo de vibración auto-excitada, que sólo se presenta en rotores soportados por descansos hidrodinámicos. Este fenómeno puede causar accidentes catastróficos.

Estas vibraciones peligrosas pueden ser prevenidas, prediciendo la fuerza F producida por el fluido. Ésta puede expresarse en función de coeficientes dinámicos relacionados con la rigidez y el amortiguamiento del fluido (aceite).

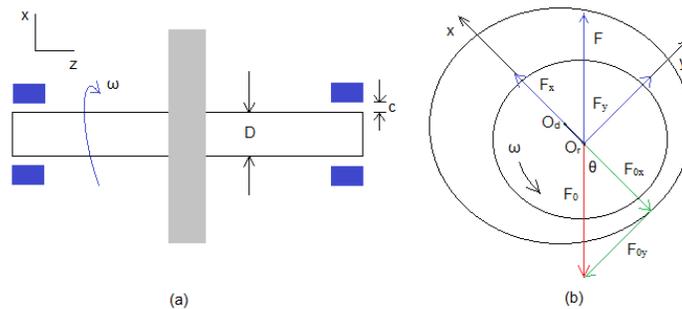


Figura 1.2: Esquema de descanso hidrodinámico circular. (a) Vista plano XZ (YZ), (b) Sección transversal, definición componentes F

Descomponiendo la fuerza F según la Figura 1.2 (b) y usando una aproximación de orden de Taylor de primer orden se tiene:

$$\begin{aligned} F_x &= F_{x0} + k_{xx} \cdot x + k_{xy} \cdot y + c_{xx} \cdot \dot{x} + c_{xy} \cdot \dot{y} + m_{xx} \cdot \ddot{x} + m_{xy} \cdot \ddot{y} \\ F_y &= F_{y0} + k_{yx} \cdot x + k_{yy} \cdot y + c_{yx} \cdot \dot{x} + c_{yy} \cdot \dot{y} + m_{yx} \cdot \ddot{x} + m_{yy} \cdot \ddot{y} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Donde F_{x0} y F_{y0} son las fuerzas que equilibran las cargas estáticas aplicadas sobre el rotor en las direcciones x e y respectivamente. Los términos de la forma k_{ij} son los coeficientes de rigidez asociados a la dirección i que multiplican al desplazamiento en la dirección j , mientras que los c_{ij} son los coeficientes de amortiguamiento asociados a la dirección i que multiplican a la velocidad en la dirección j . Los términos m_{ij} son las inercias virtuales del fluido en la dirección i multiplicadas por la aceleración en j . Estos últimos son relevantes para números de Reynolds grandes, en otro caso son despreciables.

En la actualidad hay disponibles bastantes desarrollos analíticos acerca de la determinación de estos coeficientes dinámicos. Estos suponen coeficientes lineales al realizar una expansión de Taylor de primer orden a F , y aproximaciones en cuanto al largo del descanso. Se tienen así aproximaciones de descanso largo, desarrollada por Hori en 1959, y de descanso corto, trabajada por Funakawa y Tatara en 1964. Estas expresiones son válidas para descansos con una relación entre el largo y el radio de estos (L/D) superior a 2 y menor a 1 respectivamente. Para descansos de largo finito no hay expresiones analíticas y se deben utilizar métodos numéricos. Por medio de perturbaciones finitas se resuelve la ecuación de Reynolds, aplicando diferencias finitas o usando elementos finitos.

La posición de equilibrio del rotor depende del número adimensional de Sommerfeld S , definido por las condiciones de operación del descanso (velocidad de rotación, viscosidad del fluido, carga estática), así como la geometría de éste. En torno a este punto de equilibrio la fuerza F actúa equilibrando al rotor del desbalance producido por la carga que actúa sobre el descanso. La representación de las ecuaciones de (1.1) da cuenta de esto. Luego, existe una estrecha relación entre S y la magnitud de los coeficientes dinámicos. Así se tiene una dependencia de los coeficientes con la velocidad de rotación del rotor, la viscosidad y la carga estática.

El descanso no sólo está sometido a una carga estática, además actúa sobre éste una componente dinámica asociada a resonancias, desbalance, sismos, etc. San Andrés & De Santiago (2005) estudiaron la dependencia de la carga dinámica en la determinación de los coeficientes dinámicos. Llegaron a la conclusión que estos no dependen de la magnitud de estas cargas, sin embargo hay una influencia de la frecuencia de excitación de éstas en los coeficientes de rigidez directos (k_{ii}). Esta influencia se debe a los efectos de inercia del fluido que aumentan con la frecuencia de excitación.

Los coeficientes dinámicos tienen también una estrecha relación con la temperatura, que afecta las propiedades del fluido y del sólido. La resolución numérica se complejiza al considerar los efectos de la distribución de temperatura.

La flexibilidad del soporte del descanso también es relevante, pues esta afecta la presión desarrollada en el fluido. También la rugosidad del descanso es importante, en consideración de los esfuerzos de corte en la superficie del descanso.

En virtud de las consideraciones del fluido, newtoniano o no, y del modelo de flujo que se aplique (laminar o turbulento) se obtienen resultados analíticos y numéricos distintos.

La ruptura del fluido en el descanso al presentarse cavitación provoca cambios importantes en las magnitudes de la presión en el descanso afectando la obtención de coeficientes.

La linealidad de los coeficientes es válida sólo para pequeñas vibraciones en torno a la posición de equilibrio del rotor. Para órbitas que superen el 40% de la holgura c del descanso el análisis lineal no es apto, según Lund (1987).

La no linealidad en los coeficientes dinámicos han sido tratados por Choy *et al.* (1991) con perturbaciones de los desplazamientos de orden impar y por Sawiki & Rao (2004) con coeficientes no lineales usando una expansión de Taylor de segundo orden.

En esta memoria se determinarán numéricamente los coeficientes dinámicos de un descanso hidrodinámico a través de un modelo CFD (*computational fluid dynamics*) con módulo FSI (*fluid structure interaction*). Para esto se utilizará un método de dominio temporal para la determinación de coeficientes. Se considerará un modelo CFD con un fluido newtoniano, flujo laminar, cavitación, flexibilidad de la pared del descanso, sin dependencia de la temperatura (para simplificar el modelo), usando una interface FSI de acoplamiento directo.

Se busca determinar los coeficientes no lineales de un descanso hidrodinámico cilíndrico y relacionar el cambio de las magnitudes de estos al variar la velocidad de operación del rotor, considerar la cavitación del fluido y presentar flexibilidad en la pared. En primera instancia se determinarán los coeficientes dinámicos lineales, para luego utilizar el modelo desarrollado por Sawiki & Rao para determinar los coeficientes dinámicos no lineales.

Capítulo 2

Antecedentes Teóricos

2.1 *Oil Whirl* y Oil Whip

En máquinas rotatorias de funcionamiento a altas velocidades como turbinas, generadores y ventiladores, la vibración en el eje rotatorio frecuentemente entorpece la operación continua de la máquina e incluso puede provocar fallas. Por precaución es importante prevenir estas vibraciones investigando su naturaleza.

Las vibraciones más relevantes que se dan en ejes rotatorios se listan a continuación:

- a) Vibración por resonancia debido al paso por una velocidad crítica
- b) Excitación armónica debido al paso de bolas o rodillos en descansos antifricción
- c) Vibraciones auto-excitadas debido al amortiguamiento interno del material del eje
- d) Vibraciones auto-excitadas debido a la película de aceite en descansos hidrostáticos e hidrodinámicos (*Oil whirl- Oil whip*)
- e) Vibraciones de flujo auto-inducidas
- f) Excitación armónica debido a desbalance

Se abordará el punto d) debido a que es la vibración de mayor relevancia en un descanso hidrodinámico.

En experimentos en ejes rotatorios soportados por descansos hidrodinámicos, Newrick and Taylor (1925) encontraron, bajo ciertas condiciones, un nuevo tipo de vibración severa distinta de la vibración a la velocidad crítica. Esta vibración desaparece al parar el suministro de aceite al descanso y reaparece al reanudar el suministro. Ellos concluyeron que las vibraciones eran causadas por el aceite en el descanso, y la llamaron *oil whirl*.

El fenómeno de *oil whirl* se produce al aumentar la velocidad de rotación del eje en las vecindades de la velocidad crítica principal ω_c . Esta vibración tiene una frecuencia cercana a $\omega/2$.

Muszinska (1987) precisó que esta frecuencia es levemente inferior a la mitad de la velocidad de rotación, y depende del tipo de descanso y las condiciones de excentricidad estática. Él encontró que la frecuencia del *oil whirl* varía entre 0,38X a 0,49X dependiendo del sistema.

Esta vibración disminuye cuando la velocidad de rotación pasa por la velocidad crítica. Luego, cuando se alcanza una velocidad de rotación de $2\omega_c$ bajo ciertas

condiciones, se produce una vibración violenta llamada *oil whip*. Al aumentar la velocidad de rotación esta vibración persiste conservando su amplitud e incluso aumentándola, no como una resonancia. Este fenómeno ocurre fácilmente para descansos con presiones bajas o viscosidades del aceite elevadas.

La dirección de la velocidad del *oil whirl* es igual a la dirección de la velocidad de rotación del eje mientras que su frecuencia se mantiene casi constante, y su valor es aproximadamente la velocidad crítica del eje.

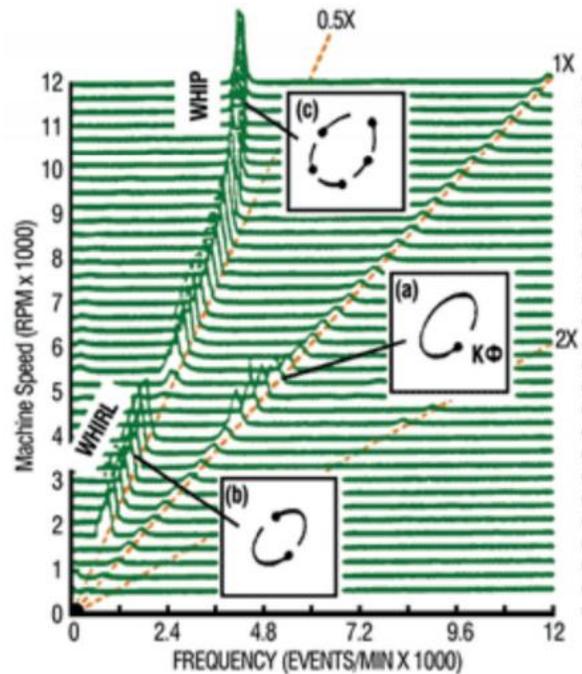


Figura 2.1: Gráfico de cascada. (a) Resonancia, (b) Oil Whirl, y (c) Oil Whip

En la Figura 2.1 se puede notar lo señalado respecto a las frecuencias del *oil whirl* y del *oil whip*. El *oil whirl* prácticamente sigue la línea 0.5X, que significa que su frecuencia es levemente inferior a la mitad de la velocidad de rotación del eje, mientras que el *oil whip* mantiene una frecuencia casi constante cercana a la frecuencia de resonancia.

En ciertos casos, por ejemplo cuando el rotor está suspendido en el aceite con dificultad, a altas presiones o con bajas viscosidades, se puede iniciar el *oil whip* a una velocidad por sobre el doble de la velocidad crítica principal. Al disminuir la velocidad de rotación, el *oil whip* persiste, y sólo a $2\omega_c$ disminuye su amplitud. La Figura 2.2 (a) y (b) muestra el caso general y el ejemplo citado en el que se presenta la curva de histéresis, respectivamente.

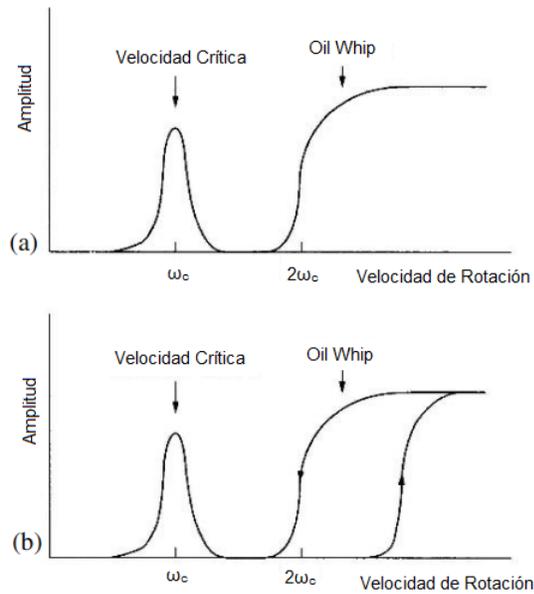


Figura 2.2: Amplitud Oil Whip: a) Caso general, b) Caso con curva de histéresis

Newkirk y Taylor dieron una explicación del *oil whip* basados en la velocidad de *whirl*. Esta velocidad se puede encontrar con ayuda de la siguiente figura:

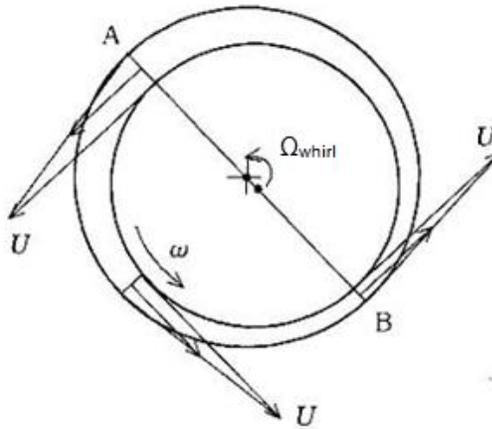


Figura 2.3: Esquema de velocidad de whirl Ω_{whirl}

La velocidad del aceite al contacto con la superficie del descanso es igual a cero mientras que al contacto con la superficie del rotor es igual a la velocidad tangencial que posee el rotor en su exterior. Asumiendo una distribución lineal de velocidad en el fluido entre ambas superficies, el promedio de la velocidad en el aceite es igual a la mitad de la velocidad tangencial del rotor, es decir constante en cualquier sección de la película. Por lo tanto, la tasa de flujo de aceite en una sección arbitraria de película de aceite por unidad de ancho es proporcional al área de sección transversal. En otras palabras, el volumen de aceite a través de la sección A de la Figura 2.3 es mucho más grande que el volumen de aceite a través de la sección B de la misma

figura. Asumiendo incompresibilidad en el aceite, el centro del rotor debería moverse de forma que el aceite en exceso en la zona A se acomode en zonas con menos aceite. Y considerando que la diferencia entre el flujo que pasa a través de A y el que sale de la sección B debe ser igual al flujo que desplaza el rotor en el descanso, se tiene que:

$$\frac{R_r \cdot \omega}{2}(c + e) - \frac{R_r \cdot \omega}{2}(c - e) = 2 \cdot R_r \cdot e \cdot \Omega_{whirl} \quad (2.1)$$

$$\Omega_{whirl} = \frac{\omega}{2}$$

Así el rotor girará con una velocidad *whirl* en la misma dirección que la velocidad de rotación y con una magnitud equivalente a la mitad de ω . De esta forma si se alcanza una velocidad del doble de la velocidad crítica ($\omega_c \approx \Omega_{whirl}$), el eje girará justo a la velocidad crítica (frecuencia natural), y se producirá una gran vibración debido a resonancia. Así, asumieron al *oil whip* como un fenómeno de resonancia. Sin embargo esta explicación es insatisfactoria al considerar que se mantiene una gran vibración por sobre $2\omega_c$, así como no explican el porqué del inicio del *oil whip* a velocidades por sobre $2\omega_c$ bajo ciertas circunstancias ni la curva de histéresis mostrada en la Figura 2.2.

En consideración de los criterios de estabilidad para pequeñas y grandes vibraciones en conjunto se puede dar una explicación razonable de la histéresis en el proceso de *oil whip*.

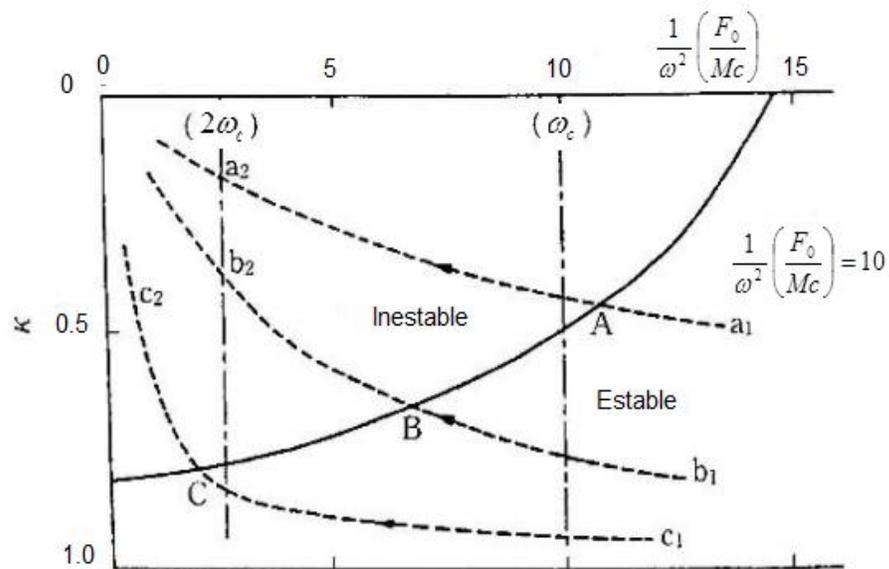


Figura 2.4: Diagrama de estabilidad para pequeñas y grandes vibraciones

En la Figura 2.4 se muestra el diagrama de estabilidad para pequeñas y grandes vibraciones. En el eje vertical se tiene la razón de excentricidad κ , en el eje horizontal se tiene la relación del producto entre el inverso al cuadrado de la velocidad de rotación ω y la razón entre la carga estática sobre el rotor F_0 y, el producto de la masa de la carga estática M y la holgura c .

Se muestra una curva para $(1/\omega^2)*(F_0/Mc)=10$, que delimita las zonas de estabilidad e inestabilidad para esta relación. Además hay dos rectas que muestran dos condiciones de velocidad relevantes en el análisis de *oil whip*, una para la velocidad crítica ω_c y otra para el doble de ésta, $2\omega_c$. Las curvas a1-a2, b1-b2 y c1-c2 representan las trayectorias que sigue el centro de un eje liviano, intermedio y pesado respectivamente. Los puntos a1, b1 y c1 son cercanos a una razón de excentricidad $\kappa=1$, mientras a2, b2 y c2 hacia un $\kappa=0$.

Tomando el caso de $(1/\omega^2)*(F_0/Mc)=10$ para las tres curvas que muestran las trayectorias de ejes livianos, intermedios y pesados se pueden distinguir distintos comportamientos en *oil whip*.

Para el caso a1-a2 antes de alcanzar la velocidad crítica ω_c el rotor cruza la curva de estabilidad, entrando a la zona inestable provocándose el *oil whirl*. Este se conserva hasta cruzar la recta de $2\omega_c$, velocidad a la cual comienza el *oil whip*. La velocidad de *whirl* es igual a la velocidad crítica y la dirección de la velocidad de *whirl* coincide con la dirección de la velocidad de rotación.

En el caso c1-c2, para un eje pesado, se cruza la recta ω_c sin entrar en inestabilidad, y no se produce el *oil whirl*, inclusive si se supera la velocidad $2\omega_c$. El sistema no entra en *oil whip*, hasta llegar al punto C en el que se entra a la zona inestable, dándose el fenómeno abruptamente a una velocidad por sobre $2\omega_c$. El caso b1-b2 es un caso intermedio en el que se presentan tanto *oil whirl* como *oil whip*. El *oil whirl* en este caso comienza a una velocidad por sobre la crítica. Los gráficos de amplitud y de frecuencia para las rutas descritas se muestran en la Figura 2.5.

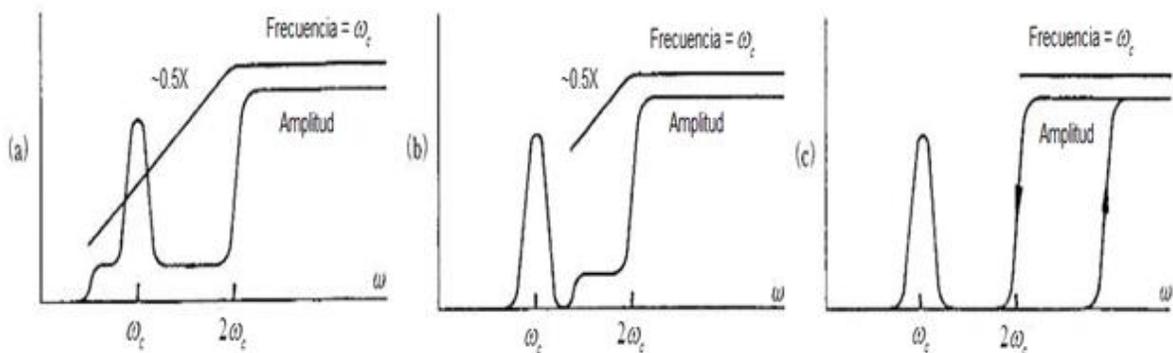


Figura 2.5: Oil whip en (a) Eje liviano, (b) Eje intermedio y, (c) Eje pesado.

2.2 Lubricación Hidrodinámica

La lubricación hidrodinámica consiste en la disminución de la fricción y del desgaste entre superficies por medio de fluidos, aceites, bajo la condición de un espesor de película de aceite h lo suficientemente pequeño respecto al largo L o al radio de curvatura R de esta película.

Los fenómenos relacionados con lubricación son en general complicados, debido a la complejidad en las condiciones de interface y en su tratamiento teórico.

Tower y Reynolds han estudiado el fenómeno de lubricación hidrodinámica en sus cimientos. Este último basado en la experiencia de Tower desarrollo una teoría de lubricación hidrodinámica, que caracteriza la presión asociada a una película de fluido entre dos superficies muy próximas con un movimiento relativo entre estas.

La distancia entre ambas es h , la que es suficientemente gruesa para ser tratada por un análisis hidrodinámico y lo suficientemente delgada para ser analizada por los supuestos de la ecuación de Reynolds.

Se caracterizará el sistema de coordenadas que describe la interacción entre el fluido y dos superficies.

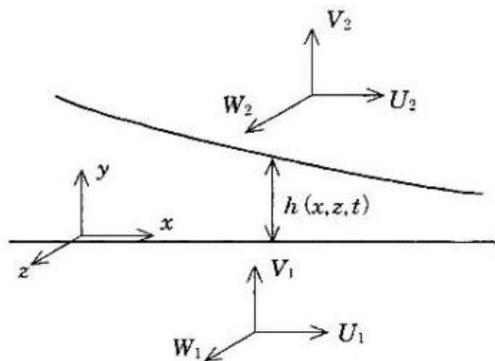


Figura 2.6: Película de aceite ente superficie del descanso y rotor.

Se definen velocidades asociadas a cada dirección según la Figura 2.6. La velocidad u en la dirección x , la velocidad v en la dirección y , y la velocidad w en la dirección z . Los subíndices que poseen las velocidades denotan a la superficie a las que pertenecen. Se define el espesor de fluido h como una función de x , z y t (tiempo).

Los supuestos hechos por Reynolds acerca del fluido son:

- Flujo laminar.
- La gravedad y las fuerzas de inercia que actúan sobre el fluido pueden ser ignoradas en comparación a las fuerzas viscosas.
- Compresibilidad del fluido es despreciable.

- El fluido es Newtoniano y los coeficientes de viscosidad constantes.
- La presión de fluido no cambia a través del ancho de la película de fluido.
- La tasa de cambio de la velocidad u y w en las direcciones x y z son despreciables respecto a la velocidad v en la dirección y .
- No hay deslizamiento entre el fluido y la superficie en contacto con éste.

Bajo estos supuestos, se toma un volumen de control como el de la Figura 2.7:

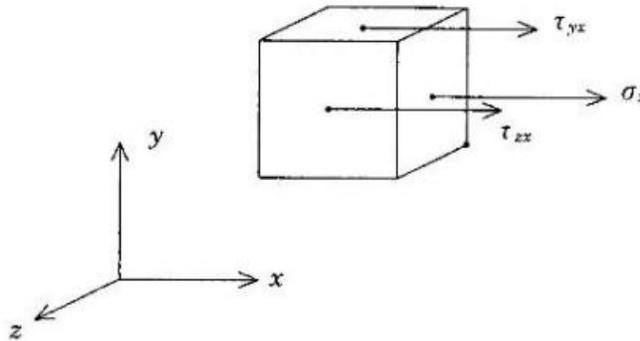


Figura 2.7: Pequeño volumen de control

Realizando un balance de fuerzas en la dirección x se tiene:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \sigma_x dydz - \tau_{yx} dx dz - \tau_{zx} dx dy = 0 \quad (2.2)$$

En que σ_x es el esfuerzo normal actuando en el plano normal a x , τ_{zx} y τ_{yx} son los esfuerzos de corte actuando en los planos z e y respectivamente, en la dirección x .

Desarrollando la ecuación (2.2) se tiene:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

Sea la presión del fluido P igual a $-\sigma_x$, se tendría:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

Considerando uno de los supuestos de Reynolds, fluido Newtoniano se tiene:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

En que μ es la viscosidad dinámica del fluido. Además se asumió que la tasa de cambio de la velocidad en la dirección z era despreciable respecto a la de la dirección y , por lo tanto:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Y la viscosidad del fluido es constante, luego:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.3)$$

De forma análoga haciendo un balance de fuerzas en la dirección z se tiene:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (2.4)$$

Luego integrando las ecuaciones (2.3) y (2.4) $\frac{\partial P}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ dos veces, asumiendo

que la presión P es constante en la dirección y , se obtendrán las velocidades u y w . Las condiciones de borde aplicadas son las siguientes:

$$[u=U_1, w=W_1 \text{ para } y=0] \ \& \ [u=U_2, w=W_2 \text{ para } y=h]$$

De esta forma, las velocidades son:

$$u = \left[-\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot y \cdot (h-y) \right] + \left[\left(1 - \frac{y}{h}\right) \cdot U_1 + \frac{y}{h} \cdot U_2 \right] \quad (2.5)$$

$$w = \left[-\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \cdot y \cdot (h-y) \right] + \left[\left(1 - \frac{y}{h}\right) \cdot W_1 + \frac{y}{h} \cdot W_2 \right] \quad (2.6)$$

El primer término a la derecha es llamado flujo de presión o flujo de Poiseuille. Es una velocidad de flujo debida al gradiente de presión, es proporcional a ésta y cambia parabólicamente a través del espesor del film de fluido. El segundo término a la derecha es llamado flujo de corte o flujo de Coutte. Es una velocidad de flujo debido al movimiento relativo entre las superficies en la dirección x . Cambia linealmente en la dirección y . El caso general combina ambos tipos de flujos para cuantificar u y w .

Por otra parte, se tiene la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.7)$$

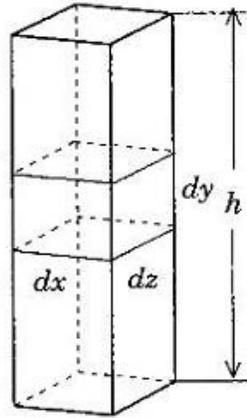


Figura 2.8: Elemento fluido prismático

Integrando en el volumen presentado en la Figura 2.8, $dV=dx*dz*h$, desde $y=0$ hasta $y=h$ se tiene:

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dy + \int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} \cdot dy + (v)_0^k = 0$$

Intercambiando la integral con la derivada, aplicando un teorema matemático, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h w dy - (u)_{h=0} \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) - (w)_{h=0} \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right) + (v)_0^k = 0$$

Aplicando las condiciones de borde señaladas anteriormente se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h w dy - U_2 \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) - W_2 \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right) + (V_2 - V_1) = 0 \quad (2.8)$$

Las integrales a la izquierda de la igualdad resolviéndose dan:

$$\int_0^h u dy = -\frac{h^3}{12\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{h}{2} \cdot (U_1 + U_2)$$

$$\int_0^h w dy = -\frac{h^3}{12\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{h}{2} \cdot (W_1 + W_2)$$

Se asumió que tanto la viscosidad μ como la presión son constantes en la dirección y .

Sustituyendo estas dos ecuaciones en la ecuación (2.8) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 6 \cdot \left[(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial}{\partial x} (U_1 + U_2) \right. \\ \left. + (W_1 - W_2) \frac{\partial h}{\partial z} + h \frac{\partial}{\partial z} (W_1 + W_2) + 2(V_1 + V_2) \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

En muchos casos prácticos, se puede tomar el eje x como la dirección del movimiento relativo de las dos superficies, en cuyo caso se tendría $V_1=W_1= W_2=0$. Además si la superficie 2 no posee desplazamientos en x, se tendría $U_2=0$. Así la ecuación (2.9) queda como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \cdot \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 6\mu \cdot \left[U_1 \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial U_1}{\partial x} + 2V_2 \right] \quad (2.10)$$

Esta última ecuación da cuenta de los mecanismos de generación de presión en lubricación hidrodinámica.

Los términos a la izquierda de la igualdad indican aproximadamente qué tipo de curvatura tiene la presión. Si la suma de los términos es negativa, se tendría presiones positivas.

Los términos a la derecha de la igualdad dan cuenta de las causas de los mecanismos de generación de presión:

- a) El primer término a la derecha de la igualdad representa la generación de presión debido al fluido que es llevado desde la zona con más grosor de fluido a la que posee menos grosor debido al movimiento de la superficie ($U_1 \neq 0$). Este mecanismo se conoce como efecto *wedge*.
- b) El segundo término a la derecha de la igualdad representa la generación de presión debido a la variación de la velocidad de superficie en distintos puntos del descanso. Este mecanismo es conocido como efecto *stretch*.
- c) El tercer término a la derecha de la igualdad representa la generación de presión debido a la variación de superficie de holgura. Este mecanismo es conocido como efecto *squeeze*.

El mecanismo a), efecto *wedge*, es el más comúnmente visto y se presenta en los descansos hidrodinámicos. Entonces la ecuación de Reynolds correspondiente a descansos hidrodinámicos será:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \cdot \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 6\mu \cdot U \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.11)$$

Donde $U_1=U=cte$ (velocidad tangencial del eje).

El análisis anterior considera un régimen estacionario. Cuando se integra la variable tiempo al análisis, la ecuación de continuidad cambia, teniéndose a la derecha de esta ecuación ya no 0, sino:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial t}$$

Con la inclusión de este término, se tiene un cambio en la ecuación (2.11), obteniéndose:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \cdot \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 6\mu \cdot U \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + 12 \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.12)$$

2.3 Modelos de analíticos de descansos hidrodinámicos

Se describirá en primera instancia la sección transversal del descanso hidrodinámico.

Para esto se necesita la siguiente figura:

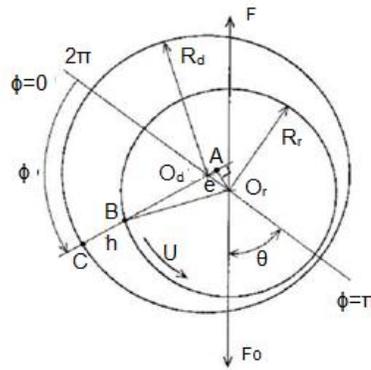


Figura 2.9: Representación de dimensiones relevante en plano XY descanso hidrodinámico

Donde O_d es el centro del descanso, R_d es el radio del descanso, O_r es el centro del rotor, R_r es el radio del rotor y U es la velocidad tangencial del rotor. La diferencia entre los radios del descanso y del rotor es la holgura c . En la mayor parte de los casos la razón entre c y R_b es bastante pequeña, por debajo de $1/500$, por lo que la figura exagera la magnitud de ésta.

F_0 es la carga estática que soporta el rotor y F es la fuerza resultante que ejerce el fluido sobre el rotor, y está en equilibrio con F_0 . La distancia entre O_d y O_r es la excentricidad del rotor. Se define la razón entre ésta y la holgura, e/c , como razón de excentricidad κ . Si $\kappa=0$ el descanso y el rotor están concéntricos, mientras que si $\kappa=1$ un punto de la superficie exterior del rotor está en contacto con la superficie del descanso.

El ángulo θ mide la desviación del centro del rotor respecto a la dirección en la que está aplicada la carga estática F_0 . Tanto este ángulo θ como la excentricidad e o κ definen la posición de equilibrio del rotor en el descanso.

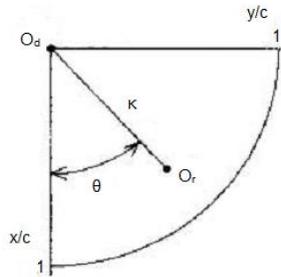


Figura 2.10: Posición de equilibrio del rotor

La recta que pasa a través O_d y O_r define la referencia para el ángulo ϕ según se observa en la Figura 2.10 y además divide al descanso simétricamente desde la zona con mayor espesor de aceite $\phi=0$ hasta la que tiene menor espesor de aceite $\phi=\pi$. Se muestra un espesor h , en particular, representado por la distancia entre B y C. De las siguientes relaciones se puede deducir la expresión que da cuenta de h :

$$h = \overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$$

Donde

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= R_d + e \cdot \cos(\phi) \\ \overline{AB} &= \sqrt{R_r^2 - (e \cdot \text{sen}(\phi))^2} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} h &= R_d + e \cdot \cos(\phi) - \sqrt{R_r^2 - (e \cdot \text{sen}(\phi))^2} \\ h &= R_d + e \cdot \cos(\phi) - R_r \sqrt{1 - (e/R_r)^2 \cdot \text{sen}(\phi)^2} \end{aligned}$$

Dado que $e/R_r \ll 1$, y está elevado al cuadrado, se desprecia. Por tanto la expresión para el espesor de aceite queda:

$$h = (R_d - R_r) + e \cdot \cos(\phi) = c + e \cdot \cos(\phi)$$

$$h = c(1 + \kappa \cdot \cos(\phi)) \tag{2.13}$$

La ecuación (2.12) describe la distribución de presiones en el descanso y con la ecuación (2.13) que muestra h en función de ϕ y κ se puede obtener la reacción del fluido al rotor, F . En función del largo del descanso L , se distinguen tres modelos analíticos para caracterizar a los descansos hidrodinámicos.

- **Aproximación de descanso largo**

Es válida para descansos que cumplan $L/D > 2$. Bajo esta aproximación $(\partial P / \partial z) = 0$, por lo tanto la ecuación (2.12) queda de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 6\mu \cdot U \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + 12 \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$

Integrando dos veces y utilizando la ecuación (2.13) para remplazar h, se obtiene:

$$P_L = P(\phi) = -\frac{6\mu R^2}{c^2 (1 + \kappa \cos \phi)^2} \cdot \left(\dot{\kappa} \cos \phi - \frac{\kappa}{(2 + \kappa^2)} \cdot (\omega + 2\dot{\theta}) \cdot \text{sen} \phi \right) \cdot (2 + \kappa \cos \phi) \quad (2.14)$$

- **Aproximación de descanso corto**

Es válida para descansos que cumplan $L/D < 1$. Bajo esta aproximación $(\partial P / \partial x) \ll (\partial P / \partial z)$, despreciando este término en la ecuación (2.12) se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \cdot \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 6\mu \cdot U \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + 12 \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$

Integrando dos veces y utilizando la ecuación (2.13) para remplazar h, se obtiene:

$$P_C = P(\phi, z) = \frac{3\mu}{c^2 (1 + \kappa \cos \phi)^3} \cdot (2\dot{\kappa} \cos \phi - \kappa \cdot (\omega + 2\dot{\theta}) \cdot \text{sen} \phi) \cdot \left(z^2 - \frac{L^2}{4} \right) \quad (2.15)$$

- **Aproximación de descanso finito**

Para razones L/D entre 1 y 2, las dos aproximaciones anteriormente descritas no son adecuadas. Hirani *et al.* (1998) definieron una distribución de presiones para un descanso finito combinando armónicamente las soluciones aproximaciones de descanso largo y corto.

$$\frac{1}{P_F} = \frac{1}{P_L} + \frac{1}{P_C}$$

$$P_F = \frac{P_L \cdot P_C}{P_L + P_C}$$

Ahora bien, para el cálculo de F es necesario integrar la presión del fluido en el descanso a través de la superficie del descanso (manto de un cilindro). Son necesarios condiciones de borde para la presión del fluido. En la dirección axial, z, se tiene que tanto para $z = -L/2$ como para $z = L/2$, $P = P_{\text{atm}}$ (asumiendo sólo presión dinámica en el descanso se tiene $P = 0$). En cuanto a la dirección tangencial θ , usualmente se trabaja con tres condiciones de borde:

- Condición de Sommerfeld: Distribución de presiones con cambio de signo para $\phi=\pi$, positiva para el rango entre 0 y π , y negativa para el rango entre π y 2π . Esta distribución es simétrica. No considera la ruptura del fluido en el descanso. Es aplicable cuando la presión del descanso es baja.
- Condición de Gumbel: Distribución de presiones que se diferencia de la de Sommerfeld por no tener presiones negativas. Entre π y 2π la presión en el descanso se considera 0. El rango entre 0 y π se tienen los mismos valores que con la condición de Sommerfeld en ese rango. Es conocida también como condición de medio-Sommerfeld, dado que sólo considera las presiones positivas. Ésta no considera la ruptura del fluido, pero es más realista que la primera. Es aplicable cuando la presión del descanso es bastante alta
- Condición de Reynolds: Bajo esta condición se elimina la discontinuidad en π que presenta la condición de Gumbel. En el punto $\pi+\delta$, $\delta>0$, se cumple que $(\partial P/\partial\phi=0)$, tras el cual $P=0$ hasta $\phi=2\pi$. Es necesario determinar este δ . Esta condición al igual que la de Gumbel es un acercamiento a un modelo que considera ruptura del fluido. Se le conoce también como condición de Swift-Stieber. En la sección siguiente se detallarán más condiciones que describan la ruptura del fluido, modelos de cavitación en descansos hidrodinámicos.

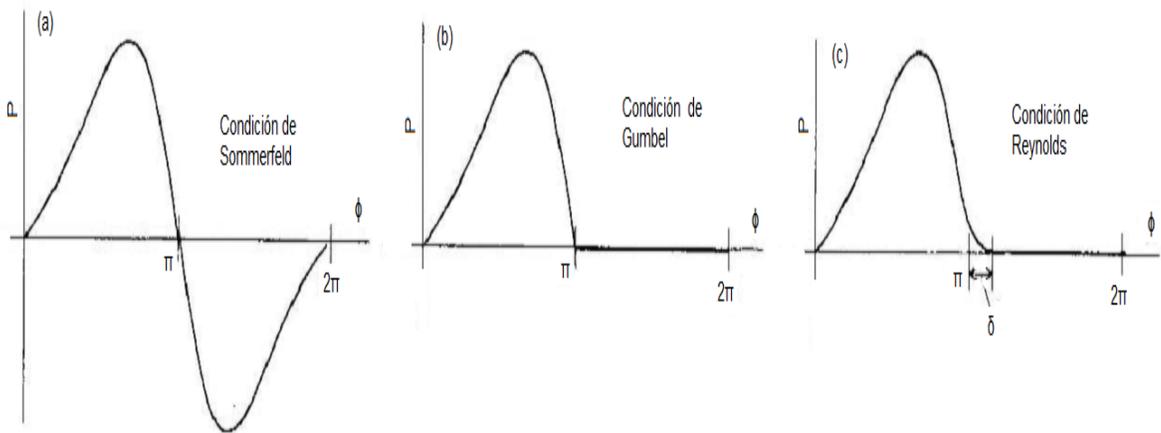
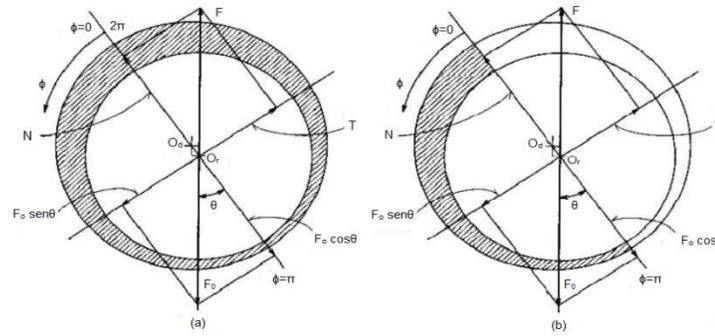


Figura 2.11: Condiciones de borde para la presión del fluido en el eje tangencial.

En virtud de las condiciones presentadas en la Figura 2.11 se pueden obtener las componentes de la fuerza de la carga aplicada:



**Figura 2.12: Equilibrio de fuerzas F y F_0 . Definición de componentes N y T de F .
(a) Condición de Sommerfeld, (b) Condición de Gumbel**

Las componentes N y T son:

$$N = -R \cdot \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{\varphi} P \cdot \cos\phi \, d\phi dz = F_0 \cdot \cos\theta$$

$$T = -R \cdot \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{\varphi} P \cdot \sen\phi \, d\phi dz = F_0 \cdot \sen\theta$$

Donde P es la presión del fluido, que se puede evaluar según alguna aproximación de descanso vista anteriormente (largo, corto o finito). Además en consideración de la condición aplicada para la presión, φ puede ser π o 2π para Sommerfeld y Gumbel respectivamente.

En el caso de usar la condición de Sommerfeld (superíndice 2π) con aproximación de descanso largo (subíndice L) en condiciones estacionarias ($\partial h/\partial t=0$) se obtiene que $N=0$, mientras que para T se tiene:

$$T_L^{2\pi} = F_0 \cdot \sen\theta = \mu UL \left(\frac{R}{c} \right)^2 \frac{12\pi\kappa}{(2+\kappa^2)(1-\kappa^2)^{1/2}}$$

En este caso $\theta \rightarrow \pi/2$, y considerando $P_m = F_0/(2RL)$ (presión media del descanso) y la relación entre la velocidad de rotación $N=U/(2\pi R)$.

Se define el número adimensional de Sommerfeld S . Es característico del descanso, considera la geometría de éste y propiedades relevantes del fluido (aceite):

$$S = \frac{\mu N}{P_m} \left(\frac{R}{c} \right)^2$$

De esta forma se obtiene la siguiente relación

$$S_L^{2\pi} = \left(\frac{12\pi^2\kappa}{(2+\kappa^2)(1-\kappa^2)^{1/2}} \right)^{-1}$$

Considerando para la misma aproximación la condición de Gumbel (superíndice π) y en estado estacionario se tiene:

$$N_L^\pi = F_0 \cdot \cos \theta = \mu UL \left(\frac{R}{c} \right)^2 \frac{12\kappa^2}{(2 + \kappa^2)(1 - \kappa^2)^{1/2}}$$

$$T_L^\pi = F_0 \cdot \text{sen} \theta = \mu UL \left(\frac{R}{c} \right)^2 \frac{6\pi\kappa}{(2 + \kappa^2)(1 - \kappa^2)^{1/2}}$$

En este caso, el número de Sommerfeld y el ángulo de excentricidad θ quedan expresados en función de las ecuaciones anteriores como:

$$S_L^\pi = \left(\frac{6\pi\kappa(4\kappa^2 + \pi^2(1 - \kappa^2))^{1/2}}{(2 + \kappa^2)(1 - \kappa^2)^{1/2}} \right)^{-1}$$

$$\tan \theta_L = \frac{\pi \cdot (1 - \kappa^2)^{1/2}}{2\kappa}$$

El número de Sommerfeld para aproximación de descanso corto (subíndice C), y con condición de Sommerfeld da como resultado.

$$S_C^{2\pi} = \left(\frac{\pi^2 \kappa}{2(1 - \kappa^2)^{3/2}} \right)^{-1}$$

Ahora bajo la condición de Gumbel, las relaciones quedan como:

$$N_C^\pi = F_0 \cdot \cos \theta = \mu UR \left(\frac{R}{c} \right)^2 \left(\frac{L}{D} \right)^3 \frac{8\kappa^2}{(1 - \kappa^2)^2}$$

$$T_C^\pi = F_0 \cdot \text{sen} \theta = \mu UL \left(\frac{R}{c} \right)^2 \left(\frac{L}{D} \right)^3 \frac{2\pi\kappa}{(1 - \kappa^2)^{3/2}}$$

$$S_C^\pi = \left(\frac{\pi\kappa(16\kappa^2 + \pi^2(1 - \kappa^2))^{1/2}}{(1 - \kappa^2)^2} \right)^{-1}$$

$$\tan \theta_C = \frac{\pi \cdot (1 - \kappa^2)^{1/2}}{4\kappa}$$

En el caso transiente, se tienen las siguientes relaciones para las componentes de la fuerza F bajo la condición de Gumbel:

$$N_C^\pi = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{R}{c} \right)^2 \frac{L^3}{R} \left[\frac{2\kappa^2(\omega + 2\dot{\theta})}{(1 - \kappa^2)^2} + \frac{\pi\dot{\kappa}(1 + 2\kappa^2)}{(1 - \kappa^2)^{5/2}} \right]$$

$$T_C^\pi = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{R}{c} \right)^2 \frac{L^3}{R} \left[\frac{\pi \dot{\kappa} (\omega + 2\dot{\theta})}{2(1 - \kappa^2)^{3/2}} + \frac{4\kappa \dot{\kappa}}{(1 - \kappa^2)^2} \right]$$

$$N_C^\pi = 6\mu \left(\frac{R}{c} \right)^2 RL \left[\frac{2\kappa^2 (\omega + 2\dot{\theta})}{(2 + \kappa^2)(1 - \kappa^2)} + \frac{2\dot{\kappa}}{(1 - \kappa^2)^{3/2}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi(2 + \kappa^2)} \right\} \right]$$

$$T_C^\pi = 6\mu \left(\frac{R}{c} \right)^2 RL \left[\frac{\pi \kappa (\omega + 2\dot{\theta})}{(2 + \kappa^2)(1 - \kappa^2)^{1/2}} + \frac{4\kappa \dot{\kappa}}{(2 + \kappa^2)(1 - \kappa^2)^{1/2}} \right]$$

2.4 Cavitación en descansos hidrodinámicos

En un descanso hidrodinámico cilíndrico al encontrar el rotor su posición de equilibrio a una distancia entre los centros del descanso y del rotor de e , genera dos zonas en que la presión se comporta de forma diametralmente diferente. La presión del aceite tiene directamente relación con el espesor de éste. Su relación es inversamente proporcional, así cuando h es menor se tiene la máxima presión de aceite, y cuando es mayor la presión baja. Las presiones para h grandes tienden a bajar hacia la presión ambiente P_{amb} e incluso más debajo de ésta llevando a la liberación de gases disueltos en el lubricante o vaporización del lubricante. El fenómeno de ruptura del fluido (película de aceite), característico de descansos cargados estáticamente, se conoce como cavitación del lubricante y puede ser vaporosa, gaseosa o pseudo-gaseosa.

La cavitación vaporosa es el resultado de un cambio de fase termodinámicamente inestable cuando la presión cae por debajo de la presión de vaporización del fluido a la temperatura predominante.

En la cavitación gaseosa usualmente el aceite contiene uno o múltiples tipos de gases disueltos en el fluido y sucede cuando la presión cae por debajo de la presión de saturación del gas en particular.

Y la cavitación pseudo-gaseosa es una forma de cavitación gaseosa durante la cual la burbuja de gas se expande en función de la despresurización sin alcanzar la difusión másica del líquido en la fase gaseosa.

Adicionalmente a las distribuciones de presiones que se presentaron en la sección 2.3, y que se representaron gráficamente en la Figura 2.11, en esta sección se presentarán dos modelos de distribución que consideran la ruptura del fluido de mejor manera.

2.4.1 Modelo con condición de separación de flujo

Mori *et al.* (1968) ofreció un conjunto de condiciones que predicen la ruptura de fluido y el origen de la cavitación, basados en el supuesto de que la separación de flujo contribuye a la ruptura del fluido. Éstos consideraron que la separación de flujo comienza en una superficie estacionaria del descanso cuando $du/dy|_{y=0}$ y $P=P_{cav}$. Estas condiciones se presentan en la superficie libre entre el aceite y la burbuja de cavitación, y tienen buenos resultados para un número limitado de casos. Luego Hopkins (1957) y Birkhoff & Hays (1963) emplearon estas mismas condiciones de borde a una superficie estacionaria en conjunto con la resolución las ecuaciones de Navier-Stokes, despreciando términos advectivos, para despejar la velocidad u (en dirección x):

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} (y^2 - h^2) + U$$

Considerando que en el punto en el que se origina la cavitación ($u(y=0)=0$), el gradiente de presión en x puede expresarse como:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{y=0} = \frac{2\mu U}{h^2}$$

Con la presión de cavitación $P=P_{cav}$, y la velocidad y el gradiente de presión para las condiciones de ruptura del fluido presentadas, se puede estimar la posición de la zona de cavitación.

Así, el aceite se ubica por debajo o por sobre la zona de cavitación, a diferencia del modelo desarrollado por Swift-Stieber en el que la zona de cavitación se presenta dividida en dedos de gas.

Coyne & Elrod (1970) introdujeron los efectos de la geometría, tensión superficial e inercia en la modelación de la ruptura de la película de aceite en un plano. Éstos propusieron un gradiente de presión modificado al desarrollado por Hopkins y Birkhoff & Hays. Aplicando la continuidad de masa en la interface líquido-gas, obtuvieron:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{6\mu U}{h^2} \left(1 - 2 \frac{h_\infty}{h} \right)$$

$$\frac{h_\infty}{h} = \frac{c}{h_\infty} \left(1 + \frac{R_0}{c} \cos \varphi \right)$$

El ángulo ϕ representa el ángulo de superficie mojada estacionario. Los términos c/h_∞ y R_0/c están asociados a un parámetro de tensión superficial

$$N_s = \sqrt[3]{\frac{3\mu U}{T_s}}$$

En adición a la condición de borde del gradiente de presión, Coyne & Elrod introdujeron una condición de borde de presión de la forma:

$$P = \frac{-T_s}{R_0} + \Delta P$$

Donde T_s es la tensión superficial en la interface líquido-gas, y R_0 es el radio de curvatura de la burbuja. La presión del fluido cerca de la interface estacionaria es $-T_s/R_0$, mientras que ΔP representa una corrección transiente de presión que es pequeña comparada con el término de tensión superficial cuando N_s es pequeño. Estas dos condiciones llevan a determinar la posición de la interface líquido-gas y la presión local que se presenta en ésta.

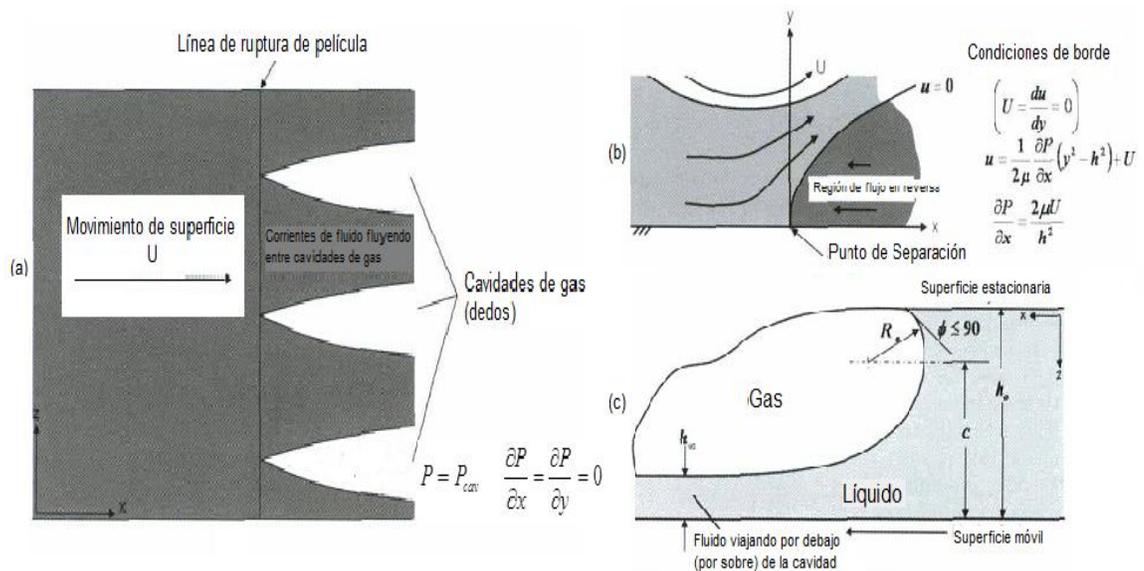


Figura 2.13: Ruptura de fluido y origen de cavitación. (a) Modelo de Swift-Stieber, (b) Modelo JFO-Floberg y, (c) Modelo Coyne & Elrod

2.4.2 Modelo de conservación de masa

El problema más complejo de sobrellevar con la ruptura de la película de aceite ha sido respetar la continuidad de masa dentro de los límites de la ecuación de Reynolds.

La condición de Gumbel sólo considera cuándo y dónde la presión del fluido se torna sub-ambiental (llega a P_{cav}). El modelo de Swift-Stieber (Reynolds) considera que toda la masa de fluido es transportada entre las cavidades de gas (dedos), pero no detalla el número de dedos, tamaño y volumen. Este modelo define los gradientes de presión a cero y a medida que la presión crece en la zona convergente permite que se de el proceso de reformación de la película de aceite. A diferencia de este último, los modelos basados en la separación de flujo predicen que el fluido transportado está por arriba o por debajo de la burbuja, usando continuidad de la masa para definir la interface de la cavidad. Sin embargo, a pesar de esto ninguno de los modelos de separación de flujo, ni los anteriores a éstos, son capaces de explicar cómo tanto en la interface líquida-gas móvil como en la cavidad se conserva la masa.

De este modo, Jakobson, Floberg y Olson desarrollaron un modelo de cavitación (JFO: 1973, 1974) que considera la conservación de masa a través de todo el descanso ha dado los fundamentos para los avances en la implementación de la cavitación numéricamente. Floberg distinguió en su análisis dos casos según la resistencia a la tracción del lubricante (fluido, aceite).

2.4.2.1 Fluido con resistencia a tracción cero

En general, los aceites poseen bajas resistencias a la tracción, que incluso decrecen con las grandes cantidades de aire disueltas en el aceite. La ruptura de fluido ocurre cuando se alcanza la presión de saturación, tras la cual se alcanza la presión de cavitación, que se mantiene en constante en la zona cavitada. Coexisten la fase líquida y gaseosa, donde la fase gaseosa se presenta en las cavidades con forma de dedo, así sólo los flujos del tipo Coutte se presenta transportando al líquido entre las cavidades.

Según la Figura 2.14 se tiene la siguiente de ecuación de conservación de masa:

$$\dot{m}_{x,i} dz - \dot{m}_{z,i} dx = \dot{m}_{cav} dz \quad (2.16)$$

Donde $i = \{1, 2\}$, (1) Arriba de la interface, (2) Debajo de la interface.

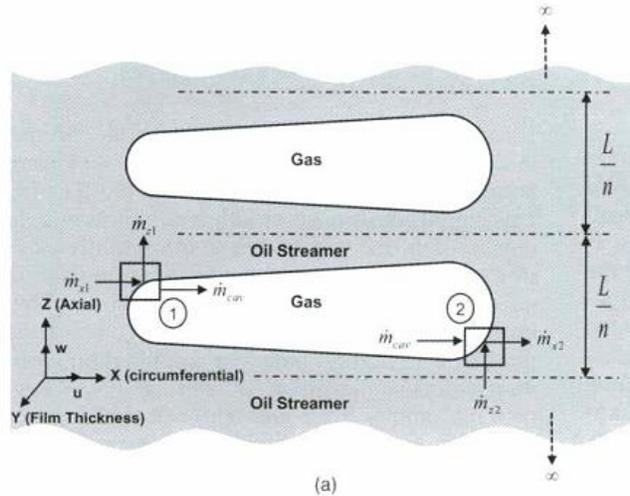


Figura 2.14: Geometría de la cavidad en modelo JFO con conservación de masa arriba (1) como abajo (2) de la interface

Despreciando los términos de inercia y considerando constantes las propiedades la forma simplificada de las ecuaciones de Navier-Stokes proporcionan expresiones para la velocidad u y w , en las direcciones x y z respectivamente. En la integración de estas velocidades a través de la película de aceite entre las superficies fijas y móviles se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{m}_{x,1} &= \frac{Uh_1}{2} - \frac{h_1^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_1 \\ \dot{m}_{z,1} &= \frac{h_1^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)_1 \\ \dot{m}_{cav} &= \frac{Uh_1}{2}\end{aligned}\tag{2.17}$$

Combinando la ecuación (2.16) con la ecuación (2.17) se obtiene para la zona por sobre la interface:

$$-\frac{h_1^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_1 + \frac{h_1^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)_1 \left(\frac{dx}{dz} \right)_1 = 0\tag{2.18}$$

Dado que no son permitidos esfuerzos de tracción (presiones negativas) en la película, para satisfacer la ecuación de continuidad es necesario que $\partial P / \partial z|_1 = 0$. Estas son las condiciones para la formación de la burbuja de cavitación.

Siguiendo el mismo procedimiento para el volumen de control (2) se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{m}_{x,2} &= \frac{Uh_2}{2} - \frac{h_2^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_2 \\ \dot{m}_{z,1} &= \frac{h_1^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)_2 \\ \dot{m}_{cav} &= \frac{Uh_1}{2} \end{aligned} \tag{2.19}$$

Análogamente combinando la ecuación de continuidad con la anterior se tiene:

$$-\frac{h_2^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_2 + \frac{h_2^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)_2 \left(\frac{dx}{dz} \right)_2 + \frac{Uh_2}{2} = \frac{Uh_1}{2} \tag{2.20}$$

Resolviendo la ecuación de Reynolds en conjunto con las condiciones de borde arriba mencionadas para ruptura de flujo y reformación se puede obtener un grupo de gráficos de contorno para la presión. Los contornos de presión positiva son las regiones en que se aplica la carga mientras la zona de cavitación teórica está marcada por las líneas de contorno de la presión de las sub-cavidades.

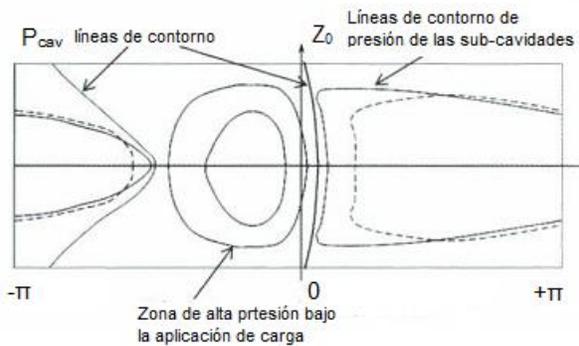


Figura 2.15: Contornos de presión en la superficie de fluido

2.4.2.2 Fluido con resistencia a la tracción finita

Basado en resultados experimentales, Floberg planteó la teoría que cuando el fluido puede soportar una cierta cantidad de resistencia a la tracción, un número finito de corrientes se forman y el fluyen entre las cavidades gaseosas, con cantidades despreciables de aceite entrando o adentro de las corrientes gaseosas ($\dot{m}_{cav} = 0$). La presión de cavitación ya no es la presión más baja en el descanso, dado que la presión de saturación del gas disuelto es distinta a ésta, y en la mayoría de los casos mayor al esfuerzo de tracción al que el fluido está sujeto en la zona divergente. Mientras la presión de saturación del gas es constante, la caída de presión tiene una fuerte dependencia con la velocidad de rotación del eje.

Usando la geometría de la Figura 2.16 se puede realizar el mismo procedimiento hecho en la sección 2.4.2.1.

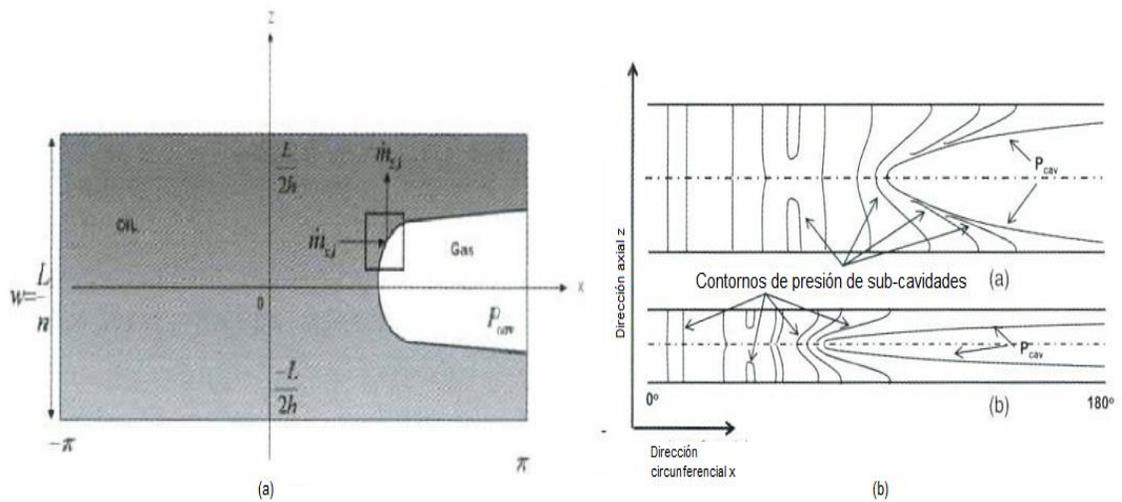


Figura 2.16: (a) Celda representativa de líquido con una resistencia a la tracción finita, (b) Contornos de presión en función de n corrientes

Donde W es el ancho de la celda, n es el número de corrientes de aceite desarrollados en el descanso (definen la cantidad de celdas de fluido como la Figura 2.16 en el descanso) relacionado con la resistencia a la tracción del fluido. Así se tiene la ecuación de continuidad y las ecuaciones de Reynolds para los volúmenes de control (1,2):

$$\dot{m}_{x,i} dz - \dot{m}_{z,i} dx = 0 \quad (2.21)$$

$$-\frac{h_1^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_1 + \frac{h_1^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)_1 \left(\frac{dx}{dz} \right)_1 = -\frac{Uh_1}{2} \quad (2.22)$$

$$-\frac{h_2^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_2 + \frac{h_2^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)_2 \left(\frac{dx}{dz} \right)_2 = -\frac{Uh_2}{2} \quad (2.23)$$

2.4.2.3 Bases del Algoritmo computacional

En 1974, Elrod & Adams obtuvieron una forma generalizada de la ecuación de Reynolds y la resolvieron numéricamente usando los conceptos propuestos por el modelo JFO (Jakobson, Floberg y Olson - 1973,1974). Éstos introdujeron una nueva variable, $\psi = \rho / \rho_c$, donde ρ es la densidad del fluido en estado líquido (asumida constante para esta fase en todos los análisis) y ρ_c es la densidad de correspondiente a la presión de cavitación. En consideración del módulo de bulk de elasticidad $k = \rho(\partial P / \partial \rho)$, lo integraron para un $k = \text{cte}$ obteniendo una

expresión que relaciona la presión del fluido P , con la presión de cavitación P_{cav} y con la razón de densidades ψ .

$$P = P_{cav} + k \ln \psi \quad (2.24)$$

Introduciendo las expresiones k y ψ y una nueva función $g=g(\psi)$ en la ecuación de Reynolds, se obtiene una forma modificada- ψ que es resuelta para esta variable:

$$12 \frac{\partial}{\partial t} (\psi h) + 6U \nabla (\psi h) = \nabla \cdot \frac{h^3}{\mu} \beta g(\psi) \nabla \psi \quad (2.25)$$

Este algoritmo respeta absolutamente la continuidad de la masa y sólo usa una ecuación para todo el fluido y la zona en cavitación. Esto último se logra por la función g , que en conjunto con la variable ψ tienen como función indicar si hay cavitación o no. Con $g(\psi)=1$ se tiene $P \geq P_{cav}$ y $\rho \geq \rho_c$, mientras que para $g(\psi)=0$ se tiene $P \leq P_{cav}$ y $\rho \leq \rho_c$.

La zona en cavitación, el contenido de masa de líquido es función de ρ_{cav} , ψ y h , con h : espesor de aceite. Esto significa que ψ además de ser una razón de densidades adimensional, cumple el rol de ser la fracción del contenido de líquido en la cavidad, con $(1-\psi)$ siendo el contenido de gas.

Una vez resuelta la ecuación (2.24) se puede construir la distribución de presiones del descanso con la ecuación (2.25).

Basados en el algoritmo de Elrod, Vijayaraghavan & Keith (1989-1990) acoplaron el módulo *bulk* de elasticidad y la función de cambio, obteniéndose la expresión para la presión:

$$P = P_{cav} + g \cdot k \ln \psi \quad (2.26)$$

Remplazando esta expresión en la ecuación clásica de Reynolds

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho U h}{2} - \frac{\rho h^3}{12\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\rho h^3}{12\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 0$$

Obtuvieron:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_c h \psi + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho_c U h}{2} \psi - \frac{\rho_c h^3 g \beta}{12\mu} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\rho_c h^3 g \beta}{12\mu} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.27)$$

En consideración de que en la zona en cavitación se aplique el supuesto que el fluido es transportado por un flujo de Couette, la ecuación (2.27) se simplifica a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_c h \psi + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho_c U h}{2} \psi \right) = 0$$

Finalmente se muestra cómo se distribuye la presión en la dirección tangencial al aplicar este modelo bajo las condiciones de una alta presión de saturación y una baja presión de saturación.

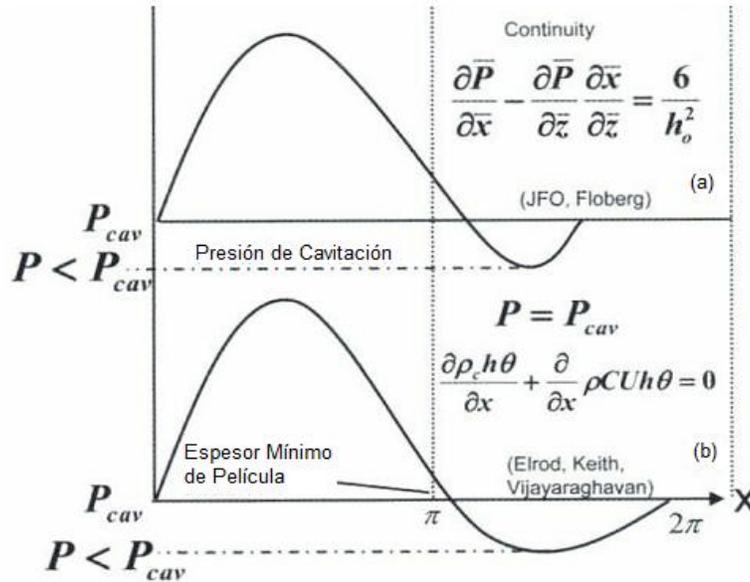


Figura 2.17: Distribución de presiones, (a) JFO, Floberg, (b) Elrod y otros.

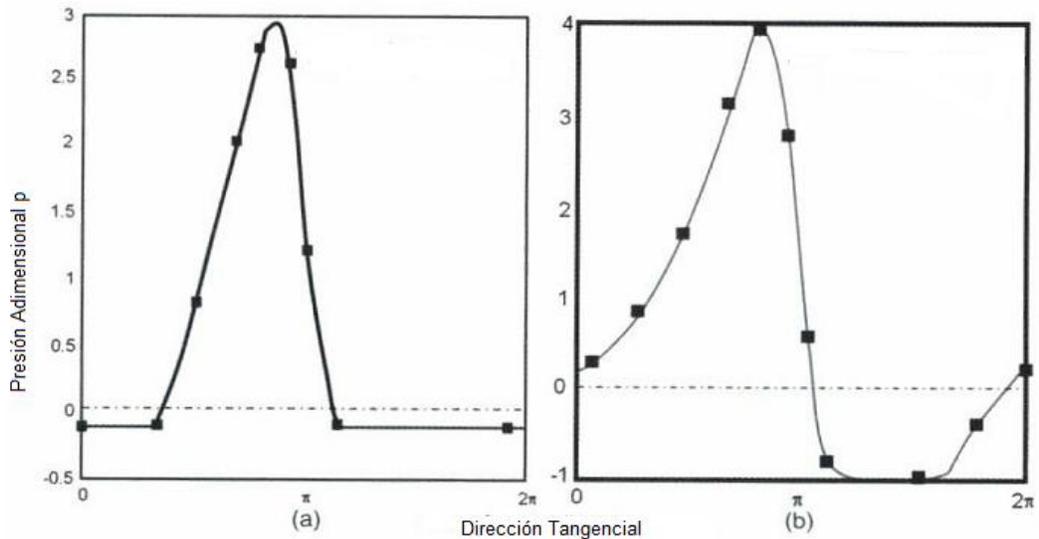


Figura 2.18: Distribución de presiones en θ considerando algoritmo de Elrod modificado: (a) Alta presión de saturación, (b) baja Presión de saturación

2.5 Descansos flexibles

En esta sección se mostrarán algunas conclusiones obtenidas por investigaciones realizadas por algunos autores con descansos elasto-hidrodinámicos (EHD).

Attia *et al.* (2010) hicieron simulaciones con descansos hidrodinámicos (HD) y elasto-hidrodinámicos (EHD) para estudiar el efecto de la deformación elástica del descanso en las características de ejecución de un descanso hidrodinámico cilíndrico. Encontraron que la distribución de presiones cambiaba, teniéndose menores máximos de presión en descansos EHD. Explicaron que esto se debía a la deformación del descanso. Resultados similares obtuvieron Sukuman Nair *et al.* (2004) en una investigación para descansos de 3 lóbulos. Las superficies afectadas por la presión en los descansos EHD son mayores, dada la deformación elástica que sufre el descanso.

Además propusieron que para una razón de excentricidad específica, los coeficientes dinámicos lineales, de rigidez y de amortiguamiento, decrecen al presentarse una pared flexible.

En cuanto a características de operación del descanso, como la carga soportada y el ángulo de excentricidad θ , concluyeron que también decrecen al considerar la flexibilidad del descanso, y que estos cambios son significantes especialmente para descansos deformables con excentricidades.

Por otro lado, Huiping *et al.* (2010), trabajaron con un modelo EHD, en consideración de cavitación, y sus conclusiones acerca de descansos EHD concuerdan con las de Attia *et al.* Además propusieron que en este tipo de descansos existe una relación entre la excentricidad y la flexibilidad de la pared del descanso. Para los descansos EHD más flexibles, es decir para materiales con menor E (modulo de elasticidad), se tiene una excentricidad mayor. Además la flexibilidad del descanso tiene gran influencia en la respuesta dinámica de un sistema rotor desbalanceado. Con el decremento de E aumenta el rango de movimiento del rotor en su posición de equilibrio. Esto afecta directamente la evaluación de los coeficientes dinámicos.

En consideración de que los sólidos se consideraron isotrópicos, estos cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})) & \varepsilon_{xy} &= \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{xy} \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})) & \varepsilon_{yz} &= \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{yz} \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{xx})) & \varepsilon_{xz} &= \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{xz}
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Transformando los esfuerzos y deformaciones presentados en las figuras a coordenadas cartesianas se comprobaría la validez de despreciar las deformaciones tangenciales y axiales al comprobar con las expresiones de ecuación (2.28).

2.6 Métodos Numéricos

En esta sección se describirán los métodos numéricos utilizados por el software de elementos finitos con método de resolución para CFD y con modulo FSI seleccionado para trabajar, ADINA 8.5.

Los modelos numéricos a desarrollar consideran fluido newtoniano, sin transferencia de calor, flujo laminar e incompresible, con interacción FSI en la interface común del sólido y del fluido en la que no se considera deslizamiento definida por la velocidad tangencial del sólido, propiedades constantes del fluido (sin dependencia del tiempo y presión), considerando la cavitación del fluido para dos modelos, la flexibilidad de la pared del descanso para el último modelo y condiciones de borde para la presión de las paredes laterales iguales a 0. La carga de cuerpo aplicada equivale a la fuerza gravitacional de la mitad de la masa del rotor.

Para el rotor se consideran condiciones cinemáticas de grandes desplazamientos y pequeñas deformaciones, implicando una formulación Lagrangiana. En la superficie FSI se tiene una formulación ALE (*Arbitrary-Lagrangian-Eulerian*). Para el fluido se usará la formulación Euleriana.

A continuación, se describirán los métodos numéricos aplicables tanto para fluidos como para sólidos, y luego se describirán los específicos para cada tipo de cuerpo.

2.6.1 Solución de sistemas de ecuaciones no lineales

La mayoría de las ecuaciones de elementos finitos o volúmenes finitos son no lineales. La solución de ecuaciones no lineales debe ser resuelta iterativamente resolviendo algunas ecuaciones algebraicas linealizadas. Este tipo de iteración es llamada iteración exterior. El software posee dos métodos para iteraciones exteriores:

- Método de Newton-Rhapson
- Método segregado

El método segregado es usado exclusivamente para elementos FCBI-C, mientras que el método de Newton-Rhapson es usado por los otros elementos. Para ecuaciones linealizadas, se tienen dos tipos de *solvers*, directos (*sparse solvers*) y algunos *solvers* iterativos. La iteración dentro de un método de resolución iterativo es llamada iteración interna.

Para los modelos desarrollados en esta memoria se utiliza el método de Newton Rhapson.

Considerando una ecuación no lineal $f(x)=0$, donde x es el vector solución que incluye todas las soluciones de las variables activas (u, v, w, P, T, \dots). Se toma la solución en el tiempo t , y se considera como condición inicial el vector x_0 en el tiempo $t+\Delta t$.

El algoritmo de este método se muestra a continuación:

Para $k=1$ a n

- a) Resolver Δx^k
$$\left(\frac{\partial f^{k-1}}{\partial x} \right) \Delta x^k = -f(x^{k-1})$$
- b) $x^k = x^{k-1} + \Delta x^k$
- c) $r = \max_v \left\{ \frac{\| \Delta x_v^k \|}{\| x_v^k \|} \right\}$
- d) Si $(r \leq \varepsilon) \rightarrow$ Parar

Con ε : tolerancia, el valor por defecto es $\varepsilon=0,001$.

2.6.2 Solución de ecuaciones algebraicas

La resolución de sistemas de ecuaciones de la forma $A*x=b$ es fundamental en los cálculos realizados en ADINA. La mayor parte de los recursos computacionales gastados, son para almacenar los datos de este tipo de sistema de ecuaciones, asimismo la mayor proporción del tiempo que demora el programa en resolver un modelo es usado para resolver este sistema.

ADINA tiene disponible dos categorías de métodos de resolución de ecuaciones algebraicas, los de solución directa y los iterativos.

Métodos de solución directa:

- Método de eliminación de Gauss
- *Sparse Solver*

Métodos iterativos

- *Right preconditioned biconjugate gradient method* (RPBCG)
- *Right preconditioned generalized minimal residual method* (RPGMRES)

- Método algebraico Multi-Grid

El método de eliminación de Gauss es probablemente la técnica más conocida de solución, aunque este método por lo general no es utilizado dado que el *Sparse Solver* es mucho más eficaz.

Precisamente este último es seleccionado para los modelos a desarrollar. Se diferencia de los otros métodos de solución directa porque preserva la dispersión de los elementos de la matriz, reduciendo así la memoria usada y los tiempos requeridos por la computadora para resolver el sistema.

El *Sparse Solver* se basa en el método de eliminación de Gauss, que resuelve el sistema de ecuaciones $Ax=b$ de la forma:

$$A \cdot x = b$$

$$A = LDU$$

$$x = U^{-1} \cdot D^{-1} \cdot L^{-1} \cdot b$$

Notar que el la matriz A no se invierte.

Calcular la completa descomposición de la matriz A en LDU es un procedimiento que resulta muy costoso en cuanto a recursos computacionales según los actuales estándares de cálculos matriciales.

La matriz ensamblada es guardada inicialmente en una forma compacta, acorde a la conectividad de los elementos finitos y las restricciones. Esta contiene sólo elementos distintos de cero en el nivel de ensamblado.

Luego *Sparse Solver* reordena las ecuaciones de elementos finitos para mantener la dispersión de la matriz original tan bien como se pueda. También ejecuta una factorización simbólica para ubicar esos elementos que no se vuelvan distintos de cero durante la factorización. Estos elementos son llamados sustitutos. El número de sustitutos determina el almacenaje adicional que es requerido por el método. El número de sustitutos en conjunto con la estructura de la matriz reordenada determina la efectividad de la ejecución de los cálculos en la factorización de la matriz.

En el ejemplo a continuación se muestra la ejecución de este método. Se considerará un problema con cinco grados de libertad definidos a los correspondientes nodos, como sigue:

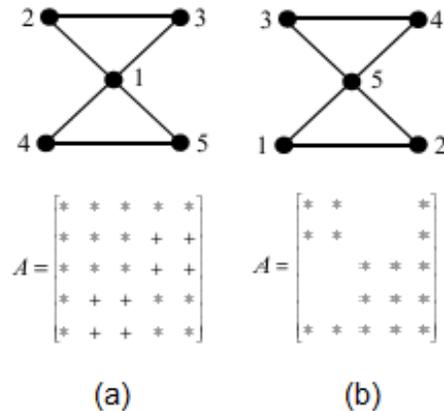


Figura 2.19: Ejemplo de Ordenamiento de Sparse Solver

Se muestra tanto para (a) como para (b) el ordenamiento de nodos del *Sparse Solver* y la matriz A.

Donde * indica los elementos distintos de cero originales, mientras que + representa los sustitutos adicionales. De la figura anterior, (a) representa un ordenamiento ineficiente, dado que la matriz está llena y hay sustitutos en la matriz.

En el caso (b) los elementos vacíos no están ni almacenados ni son calculados. No hay sustitutos en este caso, luego se ha alcanzado el mejor ordenamiento. Precisamente esto es a lo que apunta el *Sparse Solver* en reordenamiento, minimizar el número de sustitutos.

El *Sparse Solver* es efectivo, sin embargo los métodos iterativos en ciertas aplicaciones son más rápidos. Éste es entre 10 y 100 veces más rápido que los métodos de solución directa y requiere entre 2 y 10 veces más de almacenaje que los métodos iterativos.

2.6.3 Fluido

2.6.3.1 Ecuaciones de Flujo Incompresible

La compresibilidad de un fluido se mide como el cambio de volumen del fluido o de su densidad. El cambio de densidad bajo una variación de presión, puede ser expresado por el módulo de *bulk* de elasticidad k

$$k = \rho \cdot \frac{dp}{d\rho}$$

Donde ρ es la densidad del fluido y P es la presión de éste.

En general los fluidos incompresibles están caracterizados por las ecuaciones:

$$\rho = \text{Constante}$$

$$\bar{u} = C_v T$$

Donde \bar{u} es la energía interna específica, C_v es la capacidad calorífica a volumen constante y T es la temperatura [K].

Se aplicarán estas condiciones, pero sin considerar la ecuación de energía y la dependencia de las propiedades con la temperatura y sin transferencia de calor.

$$\rho(\nabla \cdot v) = 0$$

$$\rho \frac{dv}{dt} + \rho v \cdot \nabla v - \nabla \cdot \tau = f^B$$

Donde v es la velocidad del fluido, τ es vector de esfuerzo y f^B es fuerza de cuerpo (peso por gravedad), con:

$$\tau = -PI$$

Donde I es matriz identidad.

2.6.3.2 Integración de tiempo

Se asume que se tiene la solución para el tiempo t y se resolverá para el siguiente tiempo $t+\Delta t$, con Δt el tamaño del paso de tiempo. La condición inicial se fija en el tiempo $t=0$. El algoritmo usado para obtener la solución en el tiempo $t+\Delta t$ es el procedimiento básico para obtener sucesivamente las soluciones para todos los tiempos requeridos.

ADINA tiene implementado dos métodos de integración de tiempo para el fluido:

- Método de Euler (α -Euler) de primer orden
- Método *Composite* de ADINA de segundo orden

En comparación, Euler requiere de menos recursos computacionales por cada paso de tiempo que el método *Composite*, aunque este último tiene mejor precisión.

Se trabajará con el primero de éstos. Con este método, la ecuación $(\partial u / \partial t)$ puede ser calculada como:

$${}^{t+\Delta t}u = {}^t u + \Delta t \cdot f({}^{t+\alpha\Delta t}u)$$

Donde:

$${}^{t+\alpha\Delta t}u = (1 - \alpha) \cdot {}^{t+\Delta t}u + \alpha \cdot {}^t u$$

Este método tiene una precisión de primer orden y es incondicionalmente estable si $1/2 < \alpha < 1$. Teniendo cuidado del hecho que aunque éste da una precisión de segundo orden en el tiempo, la regla trapezoidal ($\alpha=1/2$) es numéricamente inestable a menos que la velocidad sea extremadamente pequeña. El valor por defecto de este método es $\alpha=1$.

2.6.3.3 Ecuaciones Discretizadas

El método de elementos finitos es usado para discretizar las ecuaciones que gobiernan al fluido. Las ecuaciones de elementos finitos son obtenidas usando una forma simplificada de las ecuaciones gobernantes con el procedimiento de Galerkin. Las ecuaciones de continuidad, momento y energía son ponderadas con las cantidades virtuales de presión, velocidad y temperatura, Las ecuaciones gobernantes son integradas en un dominio computacional V . El teorema de la divergencia es usado para disminuir el orden de las derivadas del esfuerzo y flujo de calor, resultando las expresiones de condiciones de borde naturales.

La forma de las ecuaciones gobernantes depende del modelo del fluido, sistema de coordenadas y dimensiones geométricas. Como ejemplo, la forma conservativa en tres dimensiones de las ecuaciones puede ser integrada y expresada en forma compacta como:

$$\int_V (h^f G^f + Q^f \cdot \nabla h^f) dV = \oint h^f Q^f \cdot dS$$

Donde f representa p , v y T para las ecuaciones de continuidad, momento y energía, respectivamente. Las variables h^p , h^v y h^T son cantidades virtuales de presión, velocidad y temperatura, y las demás variables se definen como:

$$G^p = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v)$$

$$G^v = \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v v) - f^B$$

$$G^T = \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v E - \tau \cdot v) - f^B \cdot v - q^B$$

$$Q^p = 0$$

$$G^v = \tau$$

$$G^T = -q$$

En el caso particular en que los h^f sean funciones de paso, el método de Galerkin se torna el método de volúmenes finitos (según definición convencional). Para estos elementos se deben usar un grupo de funciones FCBI (*flow condition based interpolation*: interpolación basada en las condiciones del fluido).

Dejando de lado los términos de energía y temperatura se tiene:

$$G^p = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v)$$

$$G^v = \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v v) - f^B$$

$$Q^p = 0$$

$$G^v = \tau$$

2.6.3.4 Procedimiento de Solución

El procedimiento general de solución para fluidos incompresibles es el siguiente.

Se empieza con una solución inicial X , que corresponde al tiempo t . En el primer paso de tiempo se utilizan las condiciones iniciales, que por defecto son cero para todas las variables. El vector de solución contiene los valores de v , P y T definidos en todos los nodos

Se sigue el siguiente procedimiento iterativo para alcanzarla solución de equilibrio de $t+\Delta t$:

- a) Se forma un sistema de ecuaciones linealizadas, usando el vector de solución actual, elementos seleccionados, materiales especificados y todas las condiciones de borde asociadas.
- b) Se resuelven las ecuaciones linealizadas usando el método de resolución presentado en 2.6.2, actualizándose el vector solución $X+\Delta X \rightarrow X$.
- c) Se calculan los residuos de la velocidad, presión y temperatura y se comprueba si son menores que una tolerancia predefinida ε_N .

Si

$$\max_f \left\{ \frac{\|\Delta X_f\|}{X_f} \right\} \leq \varepsilon_N \quad \text{Donde } f = \{v, P \text{ y } T\}$$

X es la solución, sino se vuelve al paso a) continuando las iteraciones hasta alcanzar el máximo número de iteraciones definido a priori.

Se resolverán los modelos utilizando el método iterativo de Newton, con una tolerancia de 0,01 para los grados de libertad.

2.6.3.5 Interface Fluido-Estructura (FSI)

En los análisis FSI, las fuerzas del fluido son aplicadas al sólido, y las deformaciones de éste influyen en el dominio fluido. El dominio computacional es dividido en un dominio fluido y un dominio sólido, los cuales son definidos

respectivamente con sus configuraciones correspondientes (información de materiales, condiciones de borde, ect), La interacción ocurre en la interface entre estos dominios. Teniendo los dominios acoplados se puede ejecutar las simulaciones para predecir muchos fenómenos físicos.

El modelo estructural está basado en un sistema de coordenadas Lagrangiano y los desplazamientos en primera instancia son desconocidos. Un modelo de sólo fluido siempre es analizado con un sistema de coordenadas Euleriano. Por lo tanto, en problemas con una interacción fluido-estructura el modelo del fluido debe basarse en un sistema coordinado arbitrario ALE (*Arbitrary-Lagrangian-Eulerian*) dado que la interface fluido-estructura es deformable. Así las soluciones para el fluido son las variables usuales (P, v y T) además de los desplazamientos.

En interacciones fluido-estructura son aplicadas las condiciones:

- Compatibilidad de desplazamientos: $\underline{d}_F = \underline{d}_S$
- Compatibilidad de esfuerzos: $n \cdot \underline{\tau}_F = n \cdot \tau_S$

Donde \underline{d}_F y \underline{d}_S son los desplazamientos del fluido y del sólido respectivamente, mientras que $\underline{\tau}_F$ y τ_S son los esfuerzos del fluido y del sólido respectivamente. El subrayado indica que estas variables están evaluadas sólo en la interface.

La condición de velocidad del fluido resulta de la compatibilidad de desplazamientos, sin considerar la condición de deslizamiento:

$$v = \dot{\underline{d}}_S$$

Por su parte, si se aplica la condición de deslizamiento se tiene:

$$n \cdot v = n \cdot \dot{\underline{d}}_S$$

La posición de los nodos del fluido en la interface fluido-estructura es determinada por la compatibilidad de desplazamientos. Los desplazamientos de los otros nodos del fluido son determinados automáticamente por el programa para preservar la calidad de la malla. Las ecuaciones que rigen al flujo de fluido en sus formulaciones ALE son entonces resueltas.

De acuerdo a las condiciones dinámicas, por otra parte, la tracción del fluido es integrada a través de la interface fluido-estructura para obtener la fuerza del fluido aplicada a los nodos de la estructura.

$$\underline{F}(t) = \int h^d \cdot \underline{\tau}_F \cdot dS$$

Donde h^d es el desplazamiento virtual del sólido.

Dado que hay mallas independientes para los dominios fluido y sólido, es probable que éstas sean incompatibles en la interface. La distancia entre las dos interfaces discretizadas debe ser pequeña. Se define así, la distancia relativa de los nodos del fluido a la interface sólida como:

$$r_F = \max \left\{ \frac{d_F}{D_S} \right\}$$

Donde d_F es la distancia de los nodos del fluido a la interface discretizada del sólido, D_S es el largo de la interface del elemento del sólido. Esta distancia relativa siempre es chequeada. Para $r_F \geq 1$ el programa aborta y se muestra que hay un error. Para $0,001 \leq r_F \leq 1$ el programa continua y se muestra una advertencia respecto r_F . Como apoyo se muestran estas dimensiones en la siguiente figura:

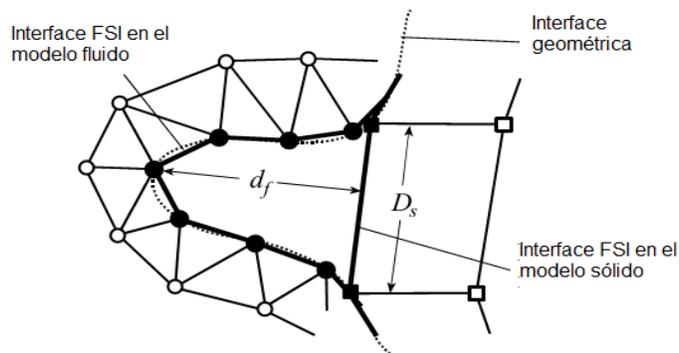


Figura 2.20: Medida de las distancias entre las interfaces del sólido y del fluido

Si hay espacios entre los nodos del fluido y las interface FSI del sólido, estos nodos son automáticamente trasladados a la interface FSI del sólido, mientras que los demás nodos del fluido más lejanos a la interface FSI del sólido son desplazados según la formulación ALE.

Análogamente se define la distancia relativa entre los nodos del sólido y la interface FSI del fluido como:

$$r_S = \max \left\{ \frac{d_S}{D_F} \right\}$$

Donde d_S es la distancia de los nodos del sólido a la interface discretizada del fluido, D_F es el largo de la interface del elemento del fluido

ADINA ofrece dos métodos de acoplamiento para las ecuaciones de los dominios fluido y sólido: acoplamiento directo y acoplamiento iterativo. También se tiene acoplamiento de dos vías (en el que tanto las deformaciones del sólido influyen en el dominio del fluido como los esfuerzos en el fluido afectan la deformación en el sólido) y acoplamiento de una vía (donde las deformaciones del sólido no afectan al dominio fluido).

En los modelos que se desarrollarán se usará un acoplamiento directo de dos vías.

A continuación se describe el procedimiento computacional del acoplamiento seleccionado. Se resuelven las ecuaciones que gobiernan sobre el fluido y el sólido en un sistema combinado y linealizado como sigue:

- a) Se inicia el proceso de solución definiendo $X^t=X_0$ como punto de partida para la encontrar la solución en $t+\Delta t$. Para las iteraciones desde $k=1$ a N_T se sigue el procedimiento presentado desde b) a d).
- b) Se ensambla la matriz acoplada

$$\begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FS} \\ A_{SF} & A_{SS} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta X_F^k \\ \Delta X_S^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_F \\ B_S \end{bmatrix}$$

Donde A_{FF} , ΔX_F^k y B_F corresponden a la matriz del sistema, el vector de solución y la fuerza externa aplicada al dominio fluido, respectivamente. Análogamente A_{SS} , ΔX_S^k y B_S corresponde a la matriz del sistema, el vector de solución y la fuerza externa aplicada al dominio sólido. Las matrices A_{FS} y A_{SF} representan las matrices acopladas del sistema.

Esto para la iteración k .

- c) Resolver la ecuación linealizada del sistema acoplado y actualizar la solución.

$$X^{k+1} = X^k + \Delta X^k$$

Luego calcular y comprobar que los criterios de esfuerzo y de desplazamiento sean satisfechos respecto a las tolerancias predefinidas. Tanto el criterio de esfuerzo como el criterio de desplazamiento se describen como:

$$r_\tau \equiv \frac{\left\| \underline{\tau}_F^k - \underline{\tau}_F^{k-1} \right\|}{\max \left\{ \left\| \underline{\tau}_F^k \right\|, \varepsilon_0 \right\}} \leq \varepsilon_\tau$$

$$r_d \equiv \frac{\|\underline{d}_S^k - \underline{d}_S^{k-1}\|}{\max\{\|\underline{d}_S^k\|, \varepsilon_0\}} \leq \varepsilon_d$$

Donde r_τ y r_d corresponden a las razones de los criterios de esfuerzo y de desplazamiento respectivamente, mientras que ε_τ y ε_d son las tolerancias para cada criterio. En cuanto a ε_0 , ésta es una constante predeterminada con el valor de 10^{-8} con el propósito de neutralizar los esfuerzos y/o desplazamientos en caso de que éstos se vuelvan muy pequeños para medir la convergencia. Por defecto, los métodos de acoplamiento FSI tienen que satisfacer ambos criterios.

- d) Si no se cumple la convergencia de los criterios se vuelve al paso b) con punto de partida para la próxima iteración.

$$X^{k+1} = X^k + \Delta X^k$$

Este proceso continua hasta completar el número máximo de iteraciones N_T predefinido por el usuario. Si no se alcanza la convergencia dentro de N_T el problema diverge.

En el caso de resolver el sistema acoplado de ecuaciones con el método de Newton-Raphson se tiene:

$$\begin{aligned} B_F &= -F_F^k \equiv -F_F \left[X_F^k, \lambda_d \underline{d}_S^k + (1 - \lambda_d) \underline{d}_S^{k-1} \right] \\ B_S &= -F_S^k \equiv -F_S \left[X_S^k, \lambda_\tau \underline{\tau}_F^k + (1 - \lambda_\tau) \underline{\tau}_F^{k-1} \right] \\ A_{ij} &= \frac{\partial F_i^k}{\partial X_j} \quad (i, j = \{f, s\}) \end{aligned}$$

Donde λ_d y λ_τ son los factores de relajación para el criterio de desplazamiento y de esfuerzo respectivamente. Ha sido probado que estos factores son bastantes útiles para resolver muchos problemas difíciles. También se utilizan para el método iterativo.

2.6.3.6 Opciones de paso de tiempo

Se sabe que los métodos explícitos son inestables si el tamaño del paso de tiempo no satisface la condición CFL (Courant-Friedrichs-Lewy):

$$\Delta t \leq \min \left\{ \frac{\Delta x}{w + 2\mu / \rho \Delta x} \right\} \equiv \Delta t_c$$

Donde w es la magnitud de la velocidad del fluido $|v|$ exceptuando flujos compresibles a altas velocidades en que $w = |\Delta u| + c$, con c la velocidad del sonido.

El tamaño del elemento está representado por Δx y como se ha mencionado μ y ρ son la viscosidad y la densidad del fluido.

Para los métodos implícitos Δt no tiene límite. Como sea, la condición CFL es sólo una condición necesaria obtenida de un análisis de estabilidad lineal. Aunque los problemas relacionados con fluidos son no lineales, y los términos no lineales predominan en muchos problemas prácticos. Es más, las experiencias han mostrado que un tamaño de paso de tiempo razonable no sólo puede acelerar la convergencia, sino que es crucial para la estabilidad.

La opción de paso de tiempo CFL se configura con un factor de relajación λ_{CFL} . Así, los términos dinámicos de las ecuaciones que gobiernan al fluido son discretizadas:

$$\frac{\partial}{\partial t} f^{k,t+\alpha\Delta t} = \frac{f^{k,t+\alpha\Delta t} - f^{k,t}}{\alpha\Delta t} + \frac{f^{k,t+\alpha\Delta t} - f^{k-1,t+\alpha\Delta t}}{\Delta\xi}$$

Donde $\Delta\xi$ es el tamaño de paso de tiempo ficticio y el superíndice k representa el número de iteración que se esté ejecutando. A la derecha de la igualdad, el primer término representa un término del método de α -Euler y el segundo corresponde como “una derivada” del tiempo ficticia que tiende a cero cuando la iteración converge. También es claro que los incrementos de los pasos de tiempo ficticios incrementan el predominio diagonal de la matriz global, que mejora su condicionamiento.

Centrándose en la magnitud de los términos de la diagonal (coeficientes de la variable actual $f^{k,t+\alpha\Delta t}$) se elige $\Delta\xi$ de forma de cumplir la siguiente relación:

$$\frac{1}{\lambda_{CFL}\Delta t_C} \leq \frac{1}{\alpha\Delta t} + \frac{1}{\Delta\xi}$$

Si esta opción no es configurada para el paso de tiempo, el número CFL (λ_{CFL}) tiende a ∞ . En general, a mayores números CFL, hay menor estabilidad del método y mayor dificultad para alcanzar convergencia. Mientras que para menores CFL, se tienen mayor estabilidad y menos dificultades de convergencia. Sin embargo, para CFL bajos la convergencia es más lenta. Para métodos implícitos, el valor más bajo que puede tener CFL es 1.

Adicionalmente el paso de tiempo se puede configurar con una opción de paso de tiempo automático (ATS: *Automatic Time Step*). Esta opción es útil para asegurar la convergencia a la solución cuando las iteraciones de equilibrio fallan debido a un paso de tiempo demasiado largo.

En caso de que la convergencia no se alcance, el programa automáticamente subdivide el tamaño del paso de tiempo actual según la cantidad de subdivisiones que el usuario predetermine con antelación (por defecto subdivide en dos sub-pasos iguales en tamaño), tratando de calcular la solución para la iteración correspondiente. Este procedimiento continúa si las iteraciones aún no convergen hasta un paso de tiempo apropiado sea encontrado o el máximo número de subdivisiones permitidas (predefinido) sea alcanzado.

En el primer caso, una vez completado el paso de tiempo definido por el usuario se puede volver a evaluar a la siguiente iteración el paso de tiempo original, y nuevamente se puede subdividir éste en caso de no alcanzar convergencia. Así, puede crecer o bajar el tamaño de paso de tiempo según la mejor tasa de convergencia.

En el segundo caso, el programa para, informando de la divergencia del problema.

Las soluciones obtenidas se guardan siempre en el paso de tiempo definido por el usuario, independiente del número de subdivisiones que se hayan hecho.

En análisis transientes los tamaños de paso de tiempo pequeños mejoran el condicionamiento de la matriz.

Se debe tener precaución al seleccionar el paso de tiempo. En caso de definir un paso demasiado grande, siempre se necesitará dividir el paso original, gastándose recursos computacionales innecesarios al calcular para pasos que no convergen.

2.6.3.7 Modelo de cavitación

La cavitación en fluido-dinámica es resuelta a través de algoritmos de cambio de fase líquido-gas. ADINA ofrece dos métodos de resolución para este tipo de cambio de fase. El primero, es un modelo general de cambio de fase, en el que las interfaces con el cambio de estado son determinadas por la distribución de temperatura en el fluido. El segundo, es un modelo de cavitación, en el que las interfaces con cambio de estado son determinadas por la distribución de presión en el fluido. Ambos métodos están disponibles para todos los modelos de fluido que ofrece el programa, así como todos los elementos fluidos disponibles.

El balance de masas del dominio fluido en virtud de la fracción de vapor f es:

$$m = m_L + f(m_v - m_L)$$

Donde m es la masa total del dominio fluido, m_L es la masa correspondiente al fluido en estado líquido y m_V es la masa correspondiente al fluido en estado gaseoso. Notar que para $f=1$ $m=m_V$, luego todo el fluido es gaseoso, y para $f=0$ $m=m_L$.

Se utilizará el modelo simplificado de cavitación que entrega una distribución de las fases fluidas definida por la fracción de vapor f , definiendo la razón de presiones \bar{P} :

$$\bar{P} = \frac{P_{LV} - P}{P_{LV} - P_{VL}}$$

Donde P_{LV} es la presión de evaporización del fluido (aceite), P_{VL} es la presión de condensación del fluido y P es la presión del fluido en un punto de evaluación. Entonces la distribución será:

$$f = \bar{f}(\bar{P}, \alpha) = \begin{cases} 0 & \bar{P} \leq 0 \\ \bar{P}^2 / d & 0 \leq \bar{P} \leq \alpha \\ (2\alpha\bar{P} - \alpha^2) / d & \alpha \leq \bar{P} \leq 1 - \alpha \\ 1 - (\bar{P} - 1)^2 / d & 1 - \alpha \leq \bar{P} \leq 1 \\ 1 & \bar{P} > 1 \end{cases}$$

Donde $d=2\alpha(1-\alpha)$, y el valor por defecto de α es 0,1.

2.6.4 Sólido

2.6.4.1 Consideraciones globales

Basado en que se trabajará con elementos sólidos 3D, las suposiciones para los ejes coordenados y los desplazamientos son:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^q h_i x_i & y &= \sum_{i=1}^q h_i y_i & z &= \sum_{i=1}^q h_i z_i \\ dx &= \sum_{i=1}^q h_i dx_i & dy &= \sum_{i=1}^q h_i dy_i & dz &= \sum_{i=1}^q h_i dz_i \end{aligned}$$

Donde

- $h_i(r,s,t)$: Funciones de interpolación correspondientes al nodo i
- r, s y t : Coordenadas iso-paramétricas
- q : Número de nodos del elemento ($8 \leq q \leq 27$)
- x_i, y_i, z_i : Coordenadas del nodo i

- dx_i, dy_i, dz_i : Desplazamiento del nodo i

Todos los materiales usados en los modelos a desarrollar son elásticos e isotrópicos. En este caso, el esfuerzo es determinado absolutamente por la deformación.

Los modelos considerarán pequeñas deformaciones y grandes desplazamientos, por lo que la formulación corresponderá a Lagrangiana total.

La relación entre esfuerzo y deformación para esta formulación corresponde a:

$${}^tS = C {}^t\varepsilon$$

Donde tS el segundo esfuerzo de Piola-Kirchhoff y ${}^t\varepsilon$ Esfuerzo de Green-Lagrange.

Las dos constantes usadas para definir la la relación constitutiva (matriz C) son:

- Módulo de elasticidad E
- Razón de Poisson ν

Las mismas constantes son usadas tanto para pequeños desplazamientos como para grandes desplazamientos.

2.6.4.2 Integración de tiempo

El software ofrece tres métodos de integración temporal:

- Newmark
- Wilson- θ
- Bathe Composite

Se usará el método de Newmark que se detalla a continuación. Primero se tienen los siguientes supuestos:

$$\dot{x}(t + \Delta t) = \dot{x}(t) + [(1 - \delta) \cdot \ddot{x}(t) + \delta \cdot \ddot{x}(t + \Delta t)]\Delta t$$

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \dot{x}(t)\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \delta \right) \cdot \ddot{x}(t) + \alpha \cdot \ddot{x}(t + \Delta t) \right] \Delta t^2$$

Donde α y δ son parámetros que determinan la estabilidad y precisión del método de integración temporal. Cuando $\delta=1/2$ y $\alpha=1/6$, las ecuaciones anteriores corresponden al método de aceleraciones lineales (equivalente al método de Wilson- θ , para $\theta=1$).

La ecuación de equilibrio gobernante al tiempo $t+\Delta t$ está dada por:

$$M \cdot \ddot{x}(t + \Delta t) + C \cdot \dot{x}(t + \Delta t) + K \cdot x(t + \Delta t) = R(t + \Delta t)$$

El algoritmo se describe como:

Cálculos Iniciales

- a) Creación de las matrices M (matriz de masa), C (matriz de amortiguamiento) y K (matriz de rigidez).
- b) Inicializar $\ddot{x}(0), \dot{x}(0), x(0)$. Condiciones iniciales
- c) Seleccionar Δt y los parámetros α y δ . Calcular constantes de integración.

$$\delta \geq 0,5 \wedge \alpha \geq 0,25 \cdot (0,5 + \delta)^2$$

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}; \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}; \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}; \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1; \quad a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1$$

$$a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right); \quad a_6 = \Delta t(1 + \delta); \quad a_7 = \delta \Delta t$$

- d) Formar la matriz de rigidez efectiva

$$\hat{K} = K + a_0 M + a_1 C$$

Para cada Paso de Tiempo

- a) Cálculo de la fuerza efectiva en $t+\Delta t$

$$\hat{R}(t + \Delta t) = R(t + \Delta t) + M(a_0 x(t) + a_2 \dot{x}(t) + a_3 \ddot{x}(t)) + C(a_1 x(t) + a_4 \dot{x}(t) + a_5 \ddot{x}(t))$$

- b) Se determinan los desplazamientos

$$x(t + \Delta t) = \hat{K}^{-1} \cdot \hat{R}(t + \Delta t)$$

- c) Evaluar velocidades y aceleraciones

$$\dot{x}(t + \Delta t) = \dot{x}(t) + a_6 \ddot{x}(t) + a_7 \ddot{x}(t + \Delta t)$$

$$\ddot{x}(t + \Delta t) = a_0 (x(t + \Delta t) - x(t)) - a_2 \dot{x}(t) - a_3 \ddot{x}(t)$$

2.6.4.3 Procedimiento de Solución

Los métodos de iteración pueden ser:

- Método completo de Newton
- Método modificado de Newton
- Método de matriz actualizada BFGS

El usado es el primero, que sigue un procedimiento al presentado en la sección 2.6.3.4.

Capítulo 3

Metodología

3.1 Definición del descanso y de los modelos a desarrollar

La Tabla 3.1 especifica las dimensiones del descanso hidrodinámico modelado, detallando las propiedades relevantes de los elementos fluidos como de los elementos sólidos. Estas propiedades corresponden a las de un descanso hidrodinámico disponible en el laboratorio de sólidos.

Tabla 3.1: Dimensiones relevantes del sistema-rotor

Notación	Dimensión	Magnitud [mm]
C	Holgura	0,1651
D _d	Diámetro del descanso	25,4000
D _r	Diámetro del rotor	25,7302
D _p	Diámetro pared descanso	30,7302
L	Largo del descanso	25,4000

Tabla 3.2: Propiedades del aceite

Propiedad \ Estado aceite	Líquido	Gas
Viscosidad [Pa*s]*10 ⁻⁶	25056	8,97
Densidad [m ³ /kg]	870	0,029

Tabla 3.3: Propiedades del sólido (rotor y soporte del descanso)

Propiedad \ Sólido	Acero	Babbitt	Acrílico
Modulo de elasticidad [GPa]	200	52	6
Densidad [kg/m ³]	7600	7400	1200
Razón de Poisson	0,30	0,33	0,33

El Babbitt de la Tabla 3.3, corresponde a una aleación especial para descansos. A continuación se presenta una tabla con algunas composiciones de esta aleación:

Tabla 3.4: Algunas composiciones para Babbitt

Aleación \ Fase	Primaria	Secundaria	Terciaria
1	90%Sn	10%Cu	
2	89%Sn	7%Cu	4%Sb
3	80%Pb	15%Sb	5%Sn
4	76%Cu	24%Pb	
5	75%Pb	10%Sn	
6	67%Cu	28%Sn	5%Pb

Donde Sn:estaño, Cu:cobre, Sb: Antimonio y Pb: Plomo

Además como apoyo se muestran dos figuras que ilustran las dimensiones presentadas en la Tabla 3.1

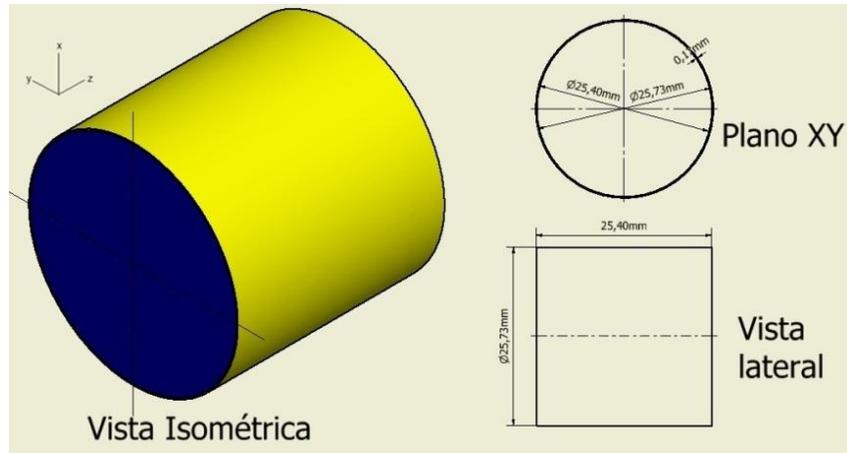


Figura 3.1: Diagrama de modelo sin pared flexible

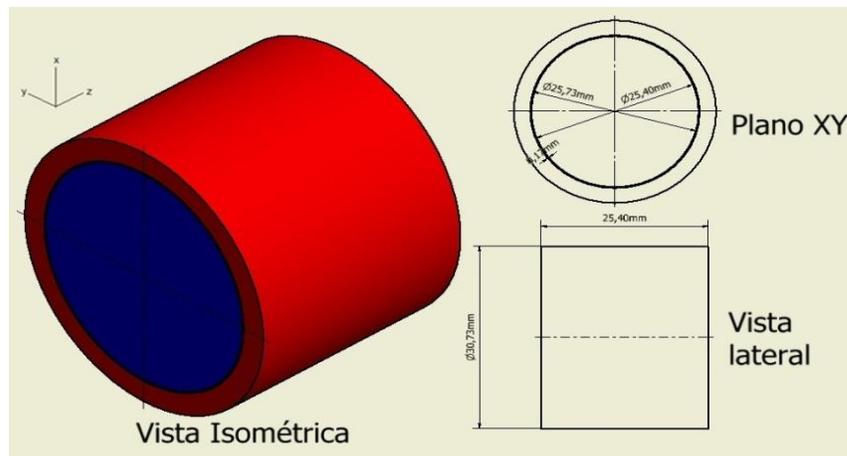


Figura 3.2: Diagrama de modelo con pared flexible

La representación de colores mostrada en las vistas isométricas de ambas figuras distinguen tres cuerpos: rotor (sólido rígido) en azul, aceite (fluido) en amarillo y, pared (sólido flexible-deformable) en rojo. En la Figura 3.1 se omite el cuerpo pared, dado que para los modelos representados por esta figura lo consideran rígido y se reemplaza el cuerpo por una condición de borde aplicada sobre el fluido.

El rotor es de acero, se considera rígido y está concéntrico al descanso como condición inicial de simulación. La carga estática aplicada equivale a la mitad del peso total del rotor, 9,61 [N]. Esta corresponde a la carga de cuerpo.

El fluido puede presentar tanto la fase líquida como gaseosa dependiendo si el modelo considera la ruptura del fluido (cavitación). En caso de no considerarla sólo presenta la fase líquida.

El material de la pared se estudiará con tres materiales distintos: acero, material compuesto y acrílico. La consideración de la pared sólo se aplica para modelos con pared flexible tal como muestra la Figura 3.2.

Se desarrollarán tres modelos fundamentales:

- a) Modelo sin cavitación y pared rígida: Se simulará la operación del descanso para 9 velocidades de rotación comprendidas entre las 1000rpm y las 5000rpm, con un intervalo entre mediciones de 500rpm.
- b) Modelo con cavitación y pared rígida: En este caso se trabajará con velocidades entre 1000 y 5000rpm, con un intervalo entre mediciones de 1000rpm.
- c) Modelo con cavitación y pared flexible: Para cada material de la pared en estudio, se obtendrán resultados para tres velocidades: 1000rpm, 2000rpm. Para el caso del acrílico se considerará además la velocidad 4000rpm ($v_t=5,32$ m/s)

La superficie externa de la pared del descanso su movimiento se restringe totalmente.

Como condición de borde para la presión se considera que en las paredes laterales la presión P es 0.

3.2 Configuración de modelo computacional

Se harán simulaciones transientes ejecutadas en el software ADINA versión 8.5.

La integración temporal para el fluido se hará por medio del método de α -Euler explicado en la sección 2.6.3.2 y para el sólido se trabajó con el método de Newmark detallado en la sección 2.6.4.2. El método de iteración usado es el de Newton Raphson, con un método de resolución directo basado en el método de eliminación de Gauss (*Sparse Solver*), que reduce bastante el almacenamiento y el tiempo de simulación de la computadora. Ambos métodos son explicados en 2.6.1 y 2.6.2 respectivamente. Para cada uno de los métodos señalados arriba se utilizó la configuración dada por defecto

La interacción FSI se resuelve mediante un método de resolución de acoplamiento directo de dos vías, descrito en 2.6.3.5. Se utilizaron los criterios de convergencia de desplazamientos y de esfuerzos, con ϵ_0 dado por defecto, tolerancias relativas a desplazamientos y a esfuerzos iguales a 0,02 y con un número máximo de iteraciones de 300. Los factores de relajación para desplazamientos y esfuerzos se conservaron en 1.

Se considera tanto para el rotor como para la pared del descanso grandes desplazamientos y pequeñas deformaciones. En todos los casos estudiados se considera como condición inicial la posición, velocidad y aceleración del rotor iguales a cero. Se asoció el movimiento de un punto del rotor al movimiento de su volumen completo (formulación Lagrangiana).

El primer modelo fundamental, sin cavitación y pared del descanso rígida, se trabajará con una densidad de malla y un paso de tiempo idénticos al modelo de

descansos dinámicos desarrollado por Meruane, V. (2006). Este modelo presenta la base, modelo sin cavitación y con pared rígida (a) de los modelos siguientes, con cavitación y pared rígida (b) y con cavitación y pared flexible (c). A continuación se muestra la validación de la malla, del paso de tiempo y de las presiones de cambio de fase necesarias para el modelo computacional de ADINA, para los modelos (b) y (c).

3.2.1 Validación Malla

Se realizó un análisis de sensibilidad de la malla, variando el número de divisiones en la dirección radial, tangencial y axial. Así, para la dirección radial se trabajo con las divisiones {4, 5 y 6}, para la dirección tangencial {60, 80 y 100} y para la dirección axial {14, 16 y 18}. Se muestran una serie de mediciones respecto a una malla de referencia asumida como ideal (6x100x18), además de análisis para el número de elementos, relaciones de aspecto y paso de tiempo según condición CFL.

Tabla 3.5: Error porcentual de presión máxima respecto valor de malla 6x100x18

dr	4			5			6		
	14	16	18	14	16	18	14	16	18
60	0,170	-0,586	-0,384	0,399	-0,541	-0,320	0,538	-0,556	-0,208
80	0,044	-0,752	-0,488	0,256	-0,742	-0,320	0,409	-0,735	-0,208
100	0,224	-0,523	-0,295	0,451	-0,495	-0,123	0,587	-0,496	0,000

Tabla 3.6: Error porcentual de presión mínima respecto valor de malla 6x100x18

dr	4			5			6		
	14	16	18	14	16	18	14	16	18
60	-6,352	-6,673	-6,581	-6,639	-7,043	-1,669	-6,789	-7,257	-1,814
80	-1,174	-2,212	-1,390	-1,433	-1,823	-1,669	-1,561	-2,011	-1,814
100	0,642	0,332	0,798	0,383	-0,023	0,146	0,248	-0,219	0,000

Tabla 3.7: Error porcentual de razón de excentricidad respecto valor de malla 6x100x18

dr	4			5			6		
	14	16	18	14	16	18	14	16	18
60	3,439	3,049	3,215	2,626	2,117	3,003	2,205	1,606	2,582
80	4,053	3,664	3,818	3,265	2,761	3,003	2,861	2,266	2,582
100	1,492	1,095	1,256	0,692	0,175	0,429	0,280	-0,330	0,000

Tabla 3.8: Raíz de los cuadrados de los errores porcentuales respecto valor de malla 6x100x18

dr	4			5			6		
	14	16	18	14	16	18	14	16	18
60	7,225	7,360	7,334	7,151	7,374	3,451	7,158	7,454	3,162
80	4,220	4,346	4,092	3,575	3,390	3,451	3,285	3,118	3,162
100	1,640	1,258	1,517	0,911	0,526	0,469	0,696	0,635	0,000

Tabla 3.9: Cantidad de elementos por malla

dr	4			5			6			
	dθ\dz	14	16	18	14	16	18	14	16	18
60		3360	3840	4320	4200	4800	5400	5040	5760	6480
80		4480	5120	5760	5600	6400	7200	6720	7680	8640
100		5600	6400	7200	7000	8000	9000	8400	9600	10800

Tabla 3.10: Relaciones de aspecto del volumen finito ($2\pi R_d/d\theta$) / (L/dz)

dr	4-5-6			
	dθ\dz	14	16	18
60		0,733	0,838	0,942
80		0,550	0,628	0,707
100		0,440	0,503	0,565

Se representa el número de divisiones por dirección (en sistema coordenado cilíndrico) como dr, dθ y dz (radial, tangencial y axial).

En consideración de la opción de paso de tiempo CFL expuesta en 2.6.3.6, basada en la condición de Courant-Friedrichs-Lewy, se tiene el siguiente análisis:

$$\Delta t \leq \min \left\{ \frac{\Delta x}{w + 2\mu / \rho \Delta x} \right\} \equiv \Delta t_c$$

Con $w=v_t=2,66$ [m/s] (correspondiente a 2000rpm), calculado con las propiedades del fluido en estado líquido y gaseoso según Tabla 3.2 . El tamaño del elemento se calcula en base a las dimensiones del descanso y el número de divisiones por dirección que se estime según la densidad de malla trabajada. Así se tienen los siguientes resultados ara la fase líquida y gaseosa de Δt_c .

Tabla 3.11: Calculo de límite de paso de tiempo según división

Divisiones	ΔX	$\Delta t_{c,liq}$ [s]	$\Delta t_{c,gas}$ [s]
14	1,81E-03	6,74E-04	6,05E-04
16	1,59E-03	5,89E-04	5,21E-04
18	1,41E-03	5,22E-04	4,55E-04
60	1,33E-03	4,92E-04	4,26E-04
80	9,97E-04	3,67E-04	3,04E-04
100	7,98E-04	2,92E-04	2,32E-04

En virtud de las tablas presentadas, se observa que se cuantificaron los errores porcentuales (desviaciones) respecto a la malla de referencia (6x100x18), en cuanto a presión máxima y presión mínima en el dominio fluido, y la razón de excentricidad exhibida por el rotor. La Tabla 3.8 combina estos tres errores, y se observa que para dθ=100 se tienen menores errores. Sin embargo estas mallas tienen muchos elementos (Tabla 3.9). En virtud de este factor, la malla (5x80x16) se vuelve competitiva a las mallas (4x100x14) y (4x100x16), con un número

similar de elementos. Considerando la razón de aspecto y el límite del paso de tiempo para cada una de estas mallas, la malla (5x80x16) se torna más conveniente, dado que para $d\theta=100$ se tiene un $\Delta t_{c, \text{gas}}$ bajo para tener un modelo estable.

Para la malla del sólido se realizó un procedimiento similar, fijando la malla de referencia en (5x80x16), igual a la densidad de malla seleccionada para el fluido. Para una malla (3x40x16) se obtuvo una desviación de la deformación máxima en el sólido por debajo del 2%, por lo que se optó por esta malla. En consideración a que hay concordancia nodal entre los dominios fluido y sólido, y que la malla seleccionada al tener un número de divisiones par en las direcciones tangencial y axial, se pueden observar simetrías en los resultados.

3.2.2 Validación del Paso de tiempo

Esta validación se realizó a una velocidad de rotación de 2000rpm, equivalente a una velocidad tangencial de 2,66 [m/s]. Se trabajó con una densidad de malla de $(r \times \theta \times z) = (4 \times 60 \times 10)$, con presiones de evaporación de 0[kPa] y de condensación de -10[kPa].

Se muestran la órbita desarrollada para simulaciones con pasos de tiempo de (0,1), (0,2) y (0,5)[s], y una tabla que muestra cómo varía las presiones máximas y mínimas, y la razón de excentricidad κ respecto a los pasos de tiempo señalados.

Gráfico 3.1: Órbita a 2000rpm para distintos pasos de tiempo

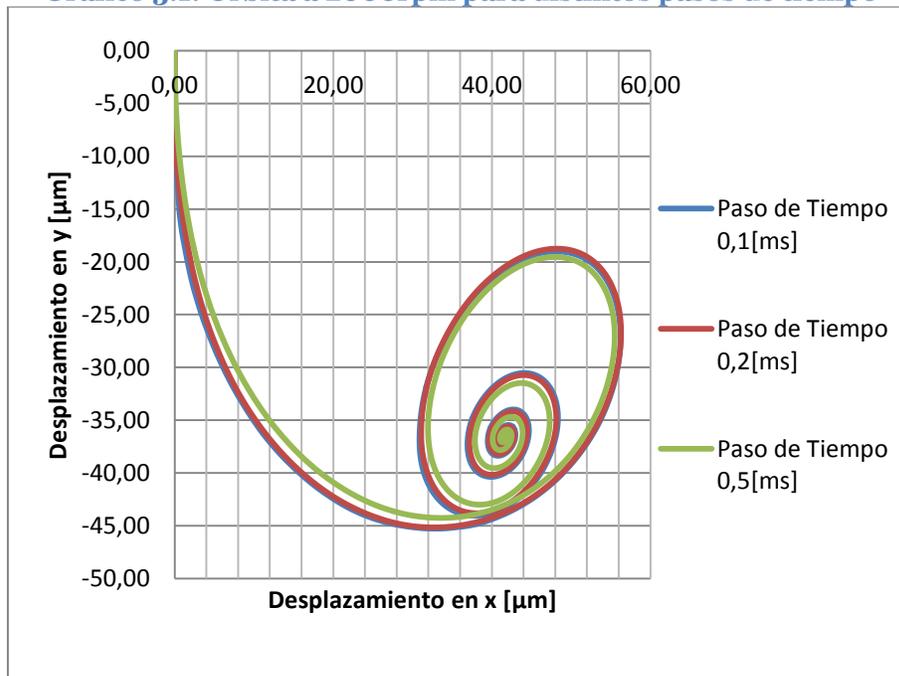


Tabla 3.12: Órbitas a 2000rpm para distintos pasos de tiempo

Paso de tiempo (ms)	P (kPa)		K	e% (r/k)
0.1	max	34,146	0,3356	0
	min	-5,062		
0.2	max	31,564	0,3356	0,0093
	min	-5,049		
0.5	max	28,988	0,3357	0,0173
	min	-5,017		

De forma análoga al procedimiento para el cálculo del paso de tiempo límite según condición CFL se tienen los siguientes resultados presentados en las tablas a continuación:

Tabla 3.13: Obtención de Δt_c para la malla usada para esta validación (4x60x10)

	Dirección	Dimensión	N° Divisiones	Δx	Relación de aspecto	$\Delta t_{c,liq}$	$\Delta t_{c,gas}$
malla primaria	Radial	1,65E-04	4	4,13E-05	1,000	1,02E-05	2,34E-06
	Tangencial	8,08E-02	60	1,35E-03	32,640	4,98E-04	4,32E-04
	Axial	2,54E-02	10	2,54E-03	61,538	9,47E-04	8,75E-04

Tabla 3.14: Obtención de Δt_c para la malla seleccionada en sección 3.2.1

	Dirección	Dimensión	N° Divisiones	Δx	Relación de aspecto	$\Delta t_c liq$	$\Delta t_c gas$
malla definitiva	Radial	1,65E-04	5	3,30E-05	0,800	7,50E-06	1,54E-06
	Tangencial	8,08E-02	80	1,01E-03	30,600	3,72E-04	3,09E-04
	Axial	2,54E-02	16	1,59E-03	38,462	5,89E-04	5,21E-04

Notar que el Δt_c definitivo se obtiene al encontrar el mínimo para los presentados en las tablas. En la dirección radial se encuentran los valores más pequeños, pero estos no serán considerados dado que en esta dirección las dimensiones son demasiado pequeñas respecto a las demás (visto en la relación de aspecto). Incluso si no se dividiera esta dirección el tamaño del elemento sería $1,65 \cdot 10^{-4}$ [m], que arroja un valor mínimo de $\Delta t_c 2,58 \cdot 10^{-5}$ [s], que es un paso de tiempo excesivamente pequeño. Entonces excluyendo la dirección en la cual está el espesor de aceite que da lubricación al rotor, se tiene que el mínimo para la malla primaria usada en esta validación es $\Delta t_c = 4,32 \cdot 10^{-4}$ [s], mientras que para la malla definitiva se tiene un paso de tiempo máximo de $\Delta t_c = 3,09 \cdot 10^{-4}$ [s].

Entonces, en virtud de la órbita que desarrollan los pasos de tiempo 0,1[ms], 0,2[ms] y 0,5[ms], que entregan resultados casi indistinguibles entre los dos primeros pasos de tiempo; las variaciones en las variables presión y razón de excentricidad respecto al paso de tiempo menor que tienen el segundo y tercer paso de tiempo que son mínimas y que sitúan lógicamente los resultados para $t_s = 0,2$ [ms] más cercanos a la referencia 0,1[ms] y; el análisis con la condición

CFL que indica que el paso de tiempo no puede superar $\Delta t_c = 4,32 \cdot 10^{-4} [s]$, se decide que el mayor paso de tiempo que sigue la mejor órbita (es importante debido a la dependencia de la determinación de coeficientes con ésta), con menores variaciones en presión y excentricidad y que cumple la condición CFL es el paso de tiempo $t_s = 0,2 [ms]$.

3.2.3 Determinación Presiones de Cambio de Fases

Se presentan a continuación una serie de gráficos que muestran la trayectoria del rotor, la variación de las presiones extremas y la variación de la razón de excentricidad con la presión de condensación para las cinco velocidades de análisis.

Gráfico 3.2: Trayectoria del rotor a 1000rpm en modelo con cavitación

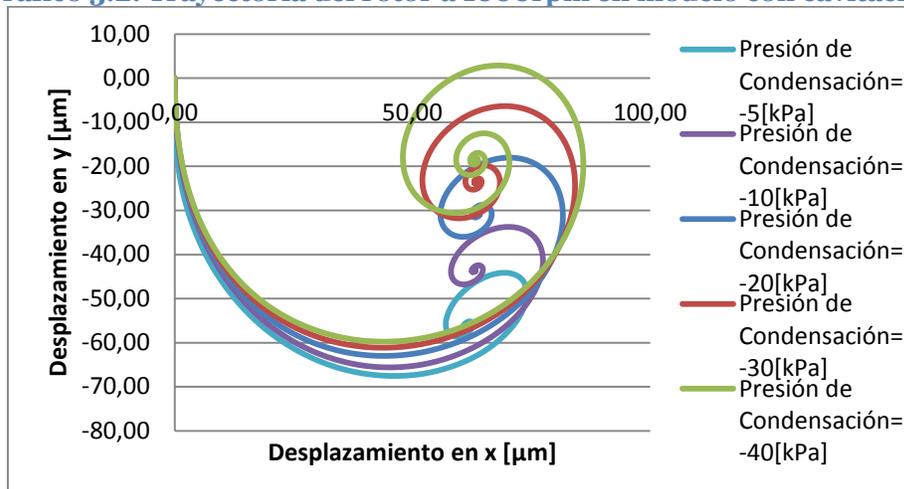


Gráfico 3.3: Trayectoria del rotor a 2000rpm en modelo con cavitación

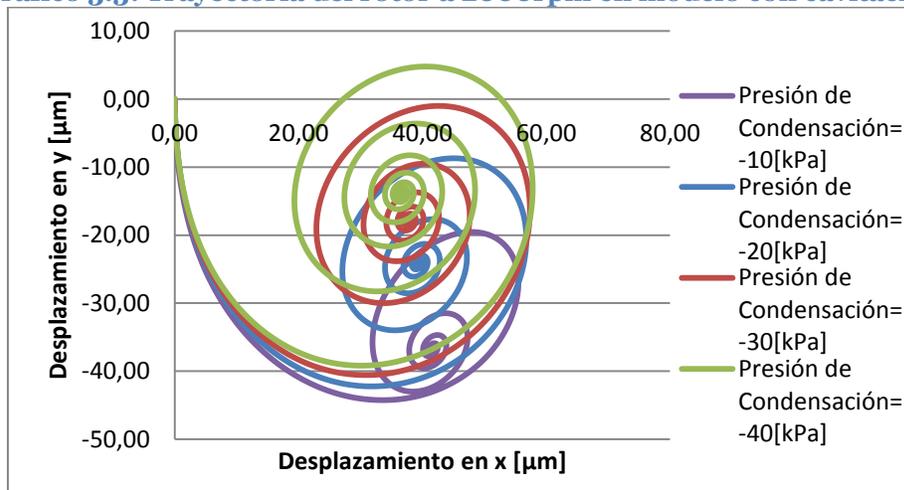


Gráfico 3.4: Trayectoria del rotor a 3000rpm en modelo con cavitación

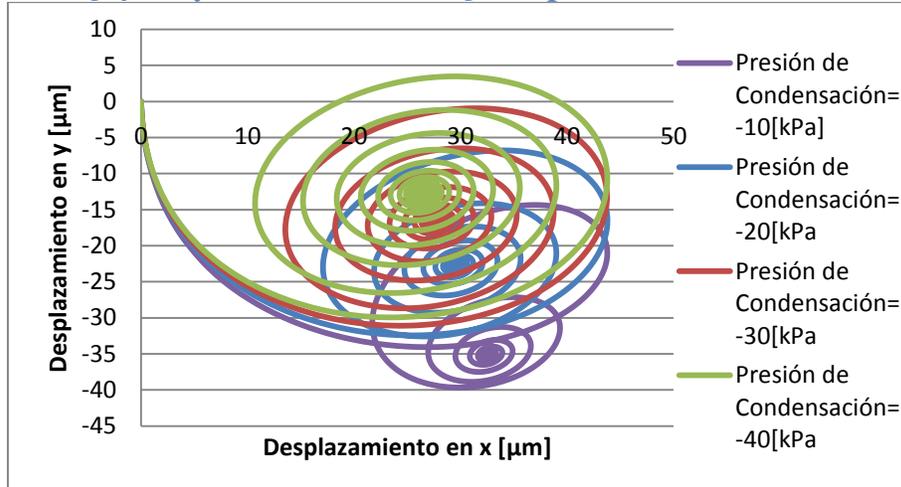


Gráfico 3.5: Trayectoria del rotor a 1000rpm en modelo con cavitación

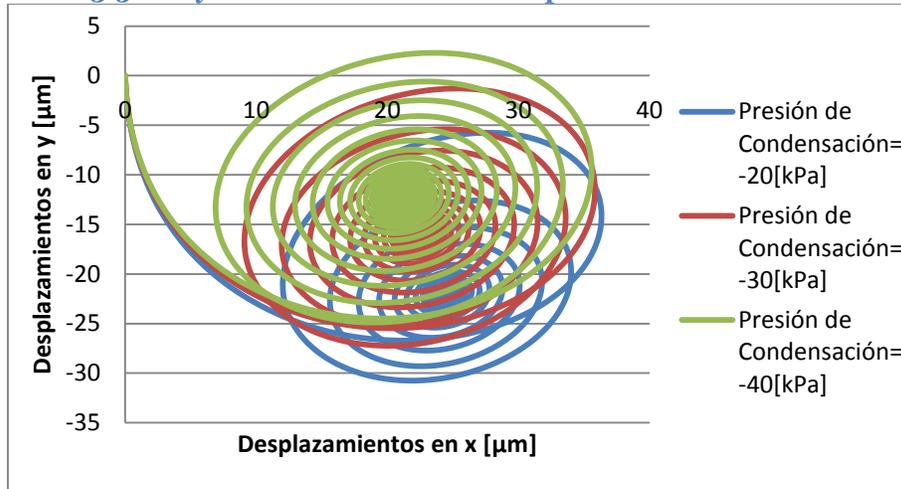


Gráfico 3.6: Trayectoria del rotor a 500rpm en modelo con cavitación

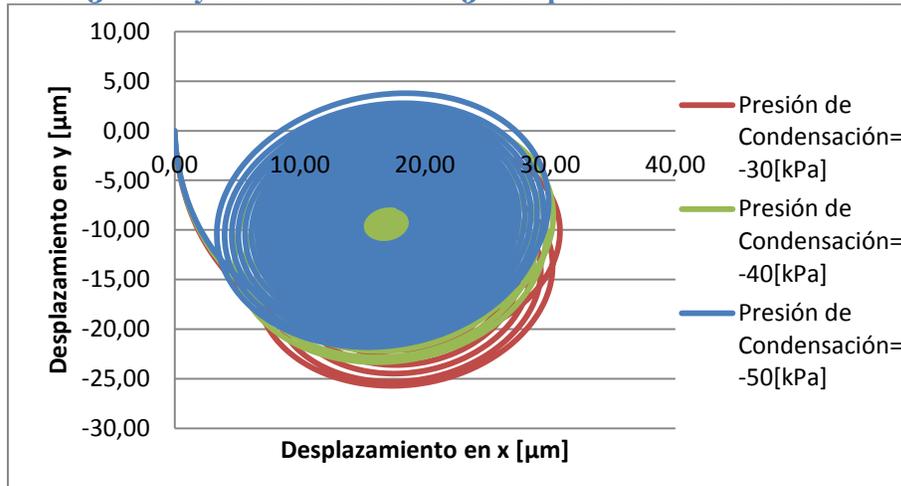


Gráfico 3.7:

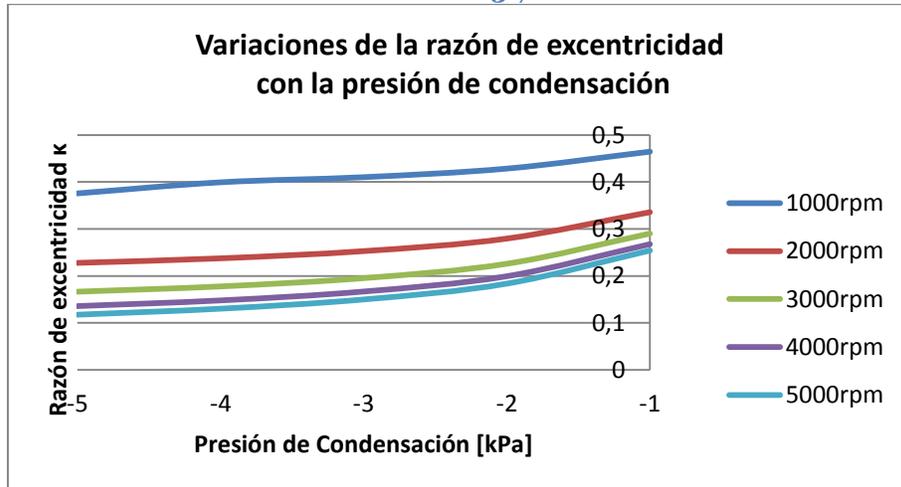


Gráfico 3.8:

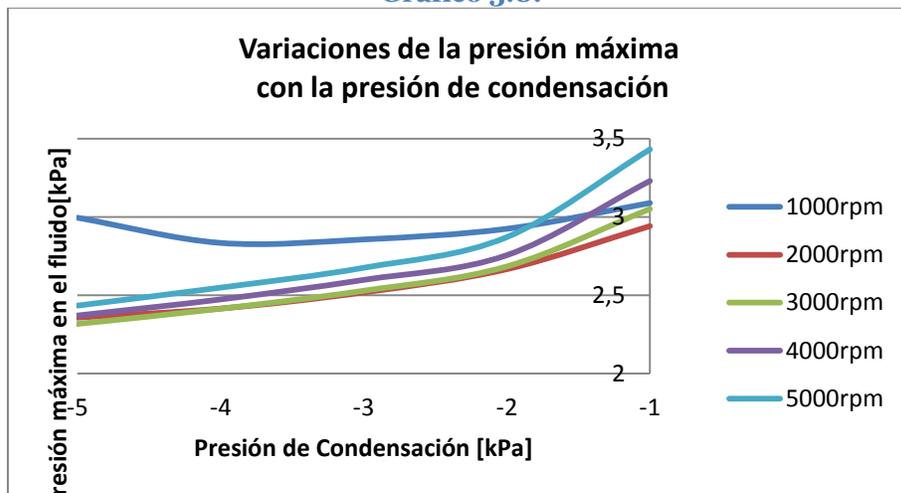
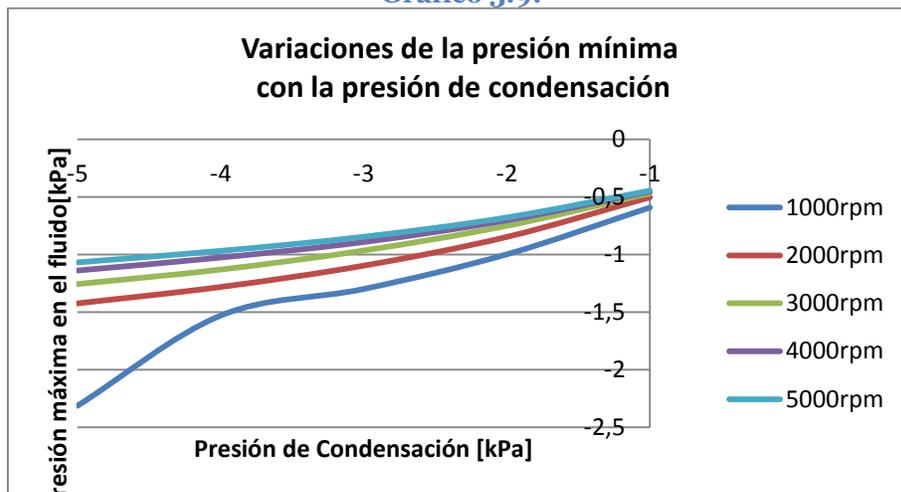


Gráfico 3.9:



Basado en la órbita que describe el centro del rotor para cada presión de condensación a las velocidades de rotación con las que se trabajará, a la variación de la razón de excentricidad κ y la variación de las presiones extremas en el fluido, se busca determinar la presión de condensación a utilizar. La presión de evaporización se configura para todos los casos en 0 [kPa] (Huiping *et al.*, 2010).

Se observa que a medida que la presión de condensación se torna más negativa tanto las razones de excentricidad como las presiones extremas descienden. Las órbitas tienden a ser más estables para menores presiones de condensación. Respecto a las presiones mínimas que se desarrollan en el fluido, es preferible que sus módulos tiendan a cero.

Se tiene así, para presiones de condensación más negativas, variaciones menores en cuanto a presiones extremas y razones de excentricidad, pero se presentan presiones mínimas más negativas. En contraparte se tienen órbitas más estables. De esta forma, se determino la presión de condensación del fluido encontrando la órbita más estable que generase una presión mínima más cercana a cero. Se optó trabajar con una presión de condensación “óptima” para cada velocidad, dada la imposibilidad de tener buenos resultados con una global en el rango de velocidades en el que se está trabajando.

En la siguiente tabla se muestran los valores estimados como óptimos para cada velocidad:

Tabla 3.15: Presiones de Condensación según velocidad

Velocidad de Rotación [rpm]	1000	2000	3000	4000	5000
Presión de Condensación [kPa]	-5	-10	-20	-30	-30

3.3 Método de determinación de coeficientes dinámicos

Como se mencionó en el primer capítulo el método utilizado para determinar los coeficientes dinámicos es el de dominio temporal. En consideración del equilibrio de fuerzas entre la reacción de fluido y la fuerza de excitación aplicada en el punto de equilibrio, según las direcciones x e y, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones cuando se alcanza el estado estacionario:

$$\begin{aligned}
 m \cdot \ddot{x} + F_x &= \alpha \cdot F_0 \cdot \text{sen}(2\pi \cdot f_e \cdot t) = R_x \\
 m \cdot \ddot{y} + F_y &= \alpha \cdot F_0 \cdot \text{cos}(2\pi \cdot f_e \cdot t) = R_y
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Donde m es la masa de la carga aplicada en el descanso, F_0 es la magnitud de la carga (fuerza), F_x y F_y son las reacciones del fluido en las direcciones x e y, \ddot{x} y \ddot{y} son las aceleraciones en x e y, t es tiempo y las constantes α y f_e son la razón de amplitud

y la frecuencia de la fuerza de excitación respectivamente. Se mencionó que los coeficientes dinámicos no son afectados por la magnitud de la fuerza de excitación, por lo que α no está restringido. Sin embargo f_e si afecta la magnitud de los coeficientes, por lo que se debe tener cuidado que esta frecuencia sea lo suficientemente pequeña respecto a la velocidad de rotación, es más debe estar por debajo de la velocidad de *whirl* ($\omega/2$).

Para todos los modelos a desarrollar, la fuerza de excitación usada cumple:

$$\alpha \cdot F_0 = 1 \text{ [N]}$$

$$f_e = 1000 \text{ [}^\circ/\text{s]} = 2,78 \text{ [Hz]}$$

Respecto a la velocidad más baja con la que se simulará, 1000rpm, esta frecuencia de excitación representa un 16,67% de la velocidad de rotación. Para las demás velocidades este porcentaje baja.

F_x y F_y se expresan en función de los coeficientes dinámicos que se buscan determinar. La forma en que se relacionan estos coeficientes con los desplazamientos y velocidades en x e y depende del modelo adoptado (lineal o no lineal).

Se definen las respuestas temporales del sistema en las direcciones X e Y como:

$$\begin{aligned} f_x &= R_x - m \cdot \ddot{x} \\ f_y &= R_y - m \cdot \ddot{y} \end{aligned} \tag{3.2}$$

El método de dominio temporal resuelve el sistema de ecuaciones de (3.1) con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \text{Min} \sum_{n1=1}^{n2} (F_x - f_x)^2 & \quad \text{Min} \sum_{n1=1}^{n2} (F_y - f_y)^2 \\ \text{s.a} & \quad \text{s.a} \\ c_{xx}, c_{xy} \geq 0 & \quad c_{yx}, c_{yy} \geq 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Donde $n1$ es el primer paso de tiempo en que se alcanza el estado estacionario y $n2$ es el último paso de tiempo, en el cual se alcanza el periodo de evaluación de simulación T.

La resolución de la ecuación (3.3) debe considerar como variables de optimización los coeficientes dinámicos adimensionales definidos en ecuación (3.7).

A continuación se muestra la representación de la fuerza de reacción que ejerce el fluido sobre el rotor por medio de un modelo de parámetros concentrados:

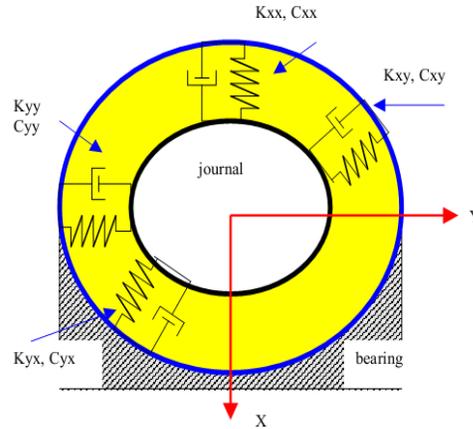


Figura 3.3: Modelo de parámetros concentrados (lineal)

En un modelo con coeficientes lineales

$$\begin{aligned} F_{x,L} &= k_{xx} \cdot \Delta x + k_{xy} \cdot \Delta y + c_{xx} \cdot \dot{x} + c_{xy} \cdot \dot{y} \\ F_{y,L} &= k_{yx} \cdot \Delta x + k_{yy} \cdot \Delta y + c_{yx} \cdot \dot{x} + c_{yy} \cdot \dot{y} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Para un modelo con coeficientes no lineales según lo desarrollado por Sawiki & Rao (2004) se tiene:

$$\begin{aligned} F_{i,NL} &= F_{i,L} + (k_{ixx} \cdot \Delta x^2 + k_{ixy} \cdot \Delta x \Delta y + k_{iyy} \cdot \Delta y^2) \quad \text{Con } i = \{x, y\} \\ &+ (c_{ixx} \cdot \Delta x \cdot \dot{x} + c_{ixy} \cdot \Delta x \cdot \dot{y} + c_{iyx} \cdot \Delta y \cdot \dot{x} + c_{iyy} \cdot \Delta y \cdot \dot{y}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Los coeficientes dinámicos se definen como:

$$\begin{aligned} k_{ij} &= -\frac{\partial F_i}{\partial X_j} & C_{ij} &= -\frac{\partial F_i}{\partial \dot{X}_j} \\ k_{ijk} &= -\frac{\partial^2 F_i}{\partial X_j \partial X_k} & c_{ijk} &= -\frac{\partial^2 F_i}{\partial X_j \partial \dot{X}_k} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Donde (i, j, k)={x,y}, es decir i, j y k pueden ser tanto x como y. Y las variables X_m y \dot{X}_m con $m=\{i,j,k\}$, así $X_x = x$ y $\dot{X}_x = \dot{x}$, y $X_y = y$ y $\dot{X}_y = \dot{y}$.

Para simplificar la ejecución de las minimizaciones presentadas en la ecuación (3.3), se definen los coeficientes dinámicos adimensionales como:

$$\begin{aligned} K_{ij} &= k_{ij} \cdot \frac{c}{F_0} & C_{ij} &= k_{ij} \cdot \frac{\omega c}{F_0} \\ K_{ijk} &= k_{ijk} \cdot \frac{c^2}{F_0} & C_{ijk} &= k_{ijk} \cdot \frac{\omega c^2}{F_0} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Es necesario resolver los coeficientes dinámicos lineales en primera instancia. Así se tiene que:

$$F_x = F_{x,L} \quad F_y = F_{y,L}$$

Una vez obtenidos los coeficientes dinámicos lineales, $F_{x,L}$ y $F_{y,L}$ se consideran constantes en la ecuación (3.5) respectivamente y se resuelven la ecuación (3.3) teniendo:

$$F_x = F_{x,NL} \quad F_y = F_{y,NL}$$

Los coeficientes lineales obtenidos a partir del procedimiento antes descrito deben ser cercanos a los coeficientes dados por los modelos analíticos. En el caso de coeficientes lineales, se tienen los siguientes resultados analíticos al aplicar las aproximaciones de descanso corto y largo, y considerar la condición de Sommerfeld:

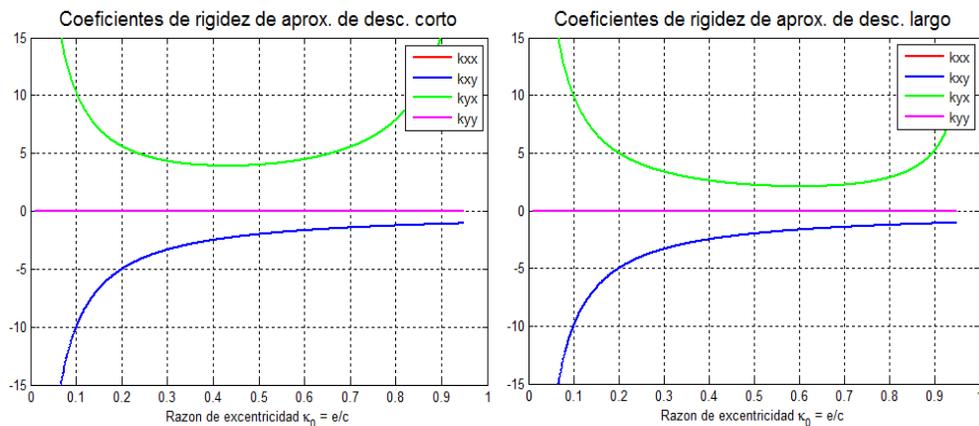


Figura 3.4: Coeficientes de Rigidez para condición de Sommerfeld

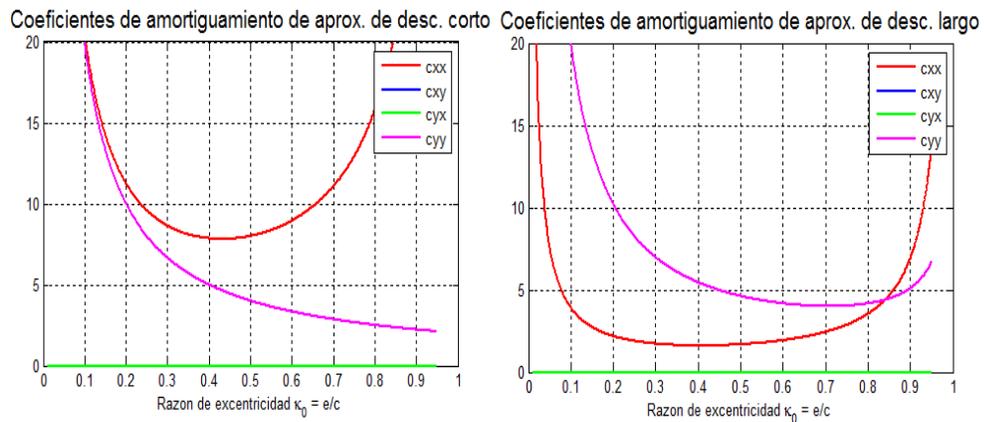


Figura 3.5: Coeficientes de Amortiguamiento para condición de Sommerfeld

En el caso de aplicar la condición de Gumbel, los coeficientes del modelo analítico son los siguientes:

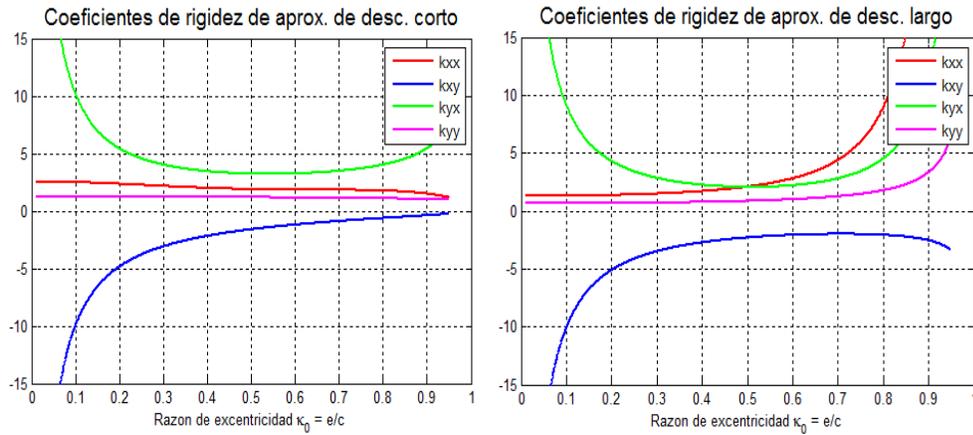


Figura 3.6: Coeficientes de Rigidez para condición de Gumbel

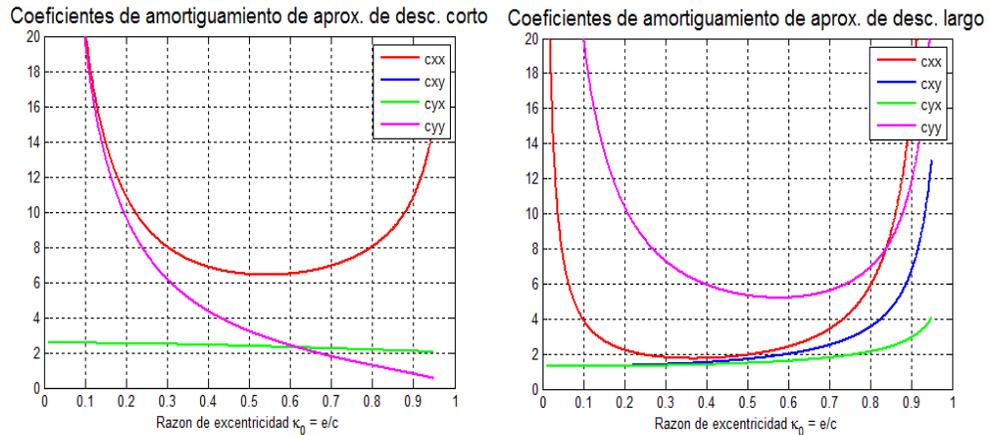


Figura 3.7: Coeficientes de Amortiguamiento para condición de Gumbel

El método de determinación de coeficientes dinámicos cambia al tener un descanso flexible. La deformación en la pared del descanso afecta directamente la presión desarrollada en el fluido, que determina un cambio en las condiciones dinámicas que desarrolla el rotor. Entonces hay un cambio en la magnitud de los coeficientes dinámicos. San Andrés & De Santiago (2004-2005) propusieron un modelo de parámetros concentrados que involucra coeficientes dinámicos relativos a la pared del descanso. En este modelo, se consideraron tanto coeficientes de rigidez como coeficientes de amortiguamiento en las direcciones x e y, con una carga estática aplicada en la dirección x y cargas dinámicas R_x y R_y en la dirección correspondiente al sub-índice. El modelo fue desarrollado para la identificación experimental de coeficientes dinámicos y se consideran lineales.

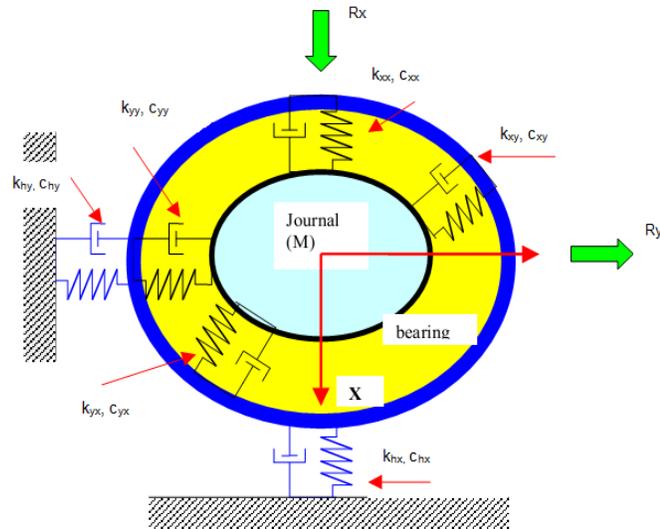


Figura 3.8: Modelo propuesto por San Andrés & De Santiago

El efecto de flexibilidad en la pared debiese verse reflejado en el campo de presiones que se desarrolla en la película de aceite. La deformación de la pared genera un cambio en el espesor del aceite h , que está directamente relacionado con la magnitud de la presión del fluido.

Dependiendo de la condición de borde aplicada a la pared del descanso la magnitud de los esfuerzos del descanso, y por consiguiente las deformaciones que se asocian a éstos, varían. En el caso del modelo que se desarrolla para pared flexible, la superficie externa del descanso está restringida de movimiento. Esto provoca que la deformación en la dirección tangencial sea limitada. Luego sólo es considerable la deformación radial, que se debe al aumento de presión del fluido en las zonas en las que decrece el espesor, dado el movimiento del rotor en el fluido.

A su vez, la pared del descanso deformada busca recuperar su condición inicial (material elástico) generando una fuerza de restitución al fluido.

En la pared se encuentran los coeficientes dinámicos K_{hi} y C_{hi} (con $i=\{x, y\}$). No existen términos cruzados para los coeficientes en la pared. Para los sólidos se tiene que la amortiguación es prácticamente despreciable, por lo que en el modelo a desarrollar se considerarán C_{hx} y C_{hy} iguales a cero.

El equilibrio de fuerzas representado en la ecuación (3.1) cambia levemente integrando los coeficientes de rigidez de la pared. Así se puede observar un cambio en la reacción del fluido, que se especificaba en la ecuación (3.4), al agregar los coeficientes k_{hx} y k_{hy} en cada ecuación respectivamente:

$$\begin{aligned} F_{x,L} &= (k_{xx} + k_{hx}) \cdot \Delta x + k_{xy} \cdot \Delta y + c_{xx} \cdot \dot{x} + c_{xy} \cdot \dot{y} \\ F_{y,L} &= k_{yx} \cdot \Delta x + k_{yy} (k_{yy} + k_{hy}) \cdot \Delta y + c_{yx} \cdot \dot{x} + c_{yy} \cdot \dot{y} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Notar que $F_{x,L}$ y $F_{y,L}$ equivalen a las reacciones de los modelos con pared rígida. De este modo, la función de los coeficientes de rigidez de la pared es complementar la reacción del fluido para alcanzar iguales magnitudes que con pared rígida.

Se ejecuta de forma similar la configuración de optimización ya descrita, sin embargo para este caso sólo son variables los coeficientes de rigidez directos lineales, los demás coeficientes, tanto lineales como no lineales se conservan de la solución encontrada en el modelo con pared rígida y cavitación. Además se restringe la magnitud de estos coeficientes, k_{xx} y k_{yy} , a valores menores o iguales a las magnitudes obtenidas en el modelo con pared rígida y con cavitación. Se utilizarán los resultados obtenidos relativos a la cinemática del rotor para dos velocidades de operación para la determinación de los coeficientes k_{hx} y k_{hy} , y se incluirá una nueva restricción por dirección que determina que el coeficiente de rigidez del material de la pared sea único.

De esta forma el problema de optimización para el modelo con pared flexible queda definido según:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \sum_{n1=1}^{n2} (F_x - f_x)^2 & \text{Min} \sum_{n1=1}^{n2} (F_y - f_y)^2 \\
 & \text{s.a} & \text{s.a} \\
 & (k_{xx})_{PF} \leq (k_{xx})_{PR} & (k_{yy})_{PF} \leq (k_{yy})_{PR} \\
 & (k_{hx})_{N1} = (k_{hx})_{N2} & (k_{hy})_{N1} = (k_{hy})_{N2}
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Donde los sub-índices PR y PF indican si el modelo es de pared rígida o flexible, mientras N1 y N2, son las dos velocidades de operación usadas para la optimización.

El algoritmo de optimización usado para minimizar las ecuaciones (3.3) es el código para problemas no lineales y suavizados GRG2 (*Generalized Reduced Gradient*) desarrollado por Lasdon & Waren (1978), disponible en el programa Microsoft Excel ®.

Capítulo 4

Presentación y Análisis de Resultados

4.1 Deformación de malla

Como condición inicial el centro del rotor está concéntrico con el centro. Cuando inicia la simulación el fluido comienza a desplazarse debido a la rotación del eje. La malla del fluido debe adaptarse al movimiento del sólido. Para esto el software posee el procedimiento de malla adaptativa.

En las figuras a continuación se muestra la deformación de la malla presentada en el dominio del fluido y del sólido a 1000rpm en el modelo con cavitación y pared flexible de acrílico.

En el fluido se representa la malla original en azul oscuro, mientras que la malla deformada está en celeste. La malla se comprime y expande adaptándose a la posición del sólido. La deformación de la malla no se debe a la rotación, sino que a los desplazamientos del rotor.

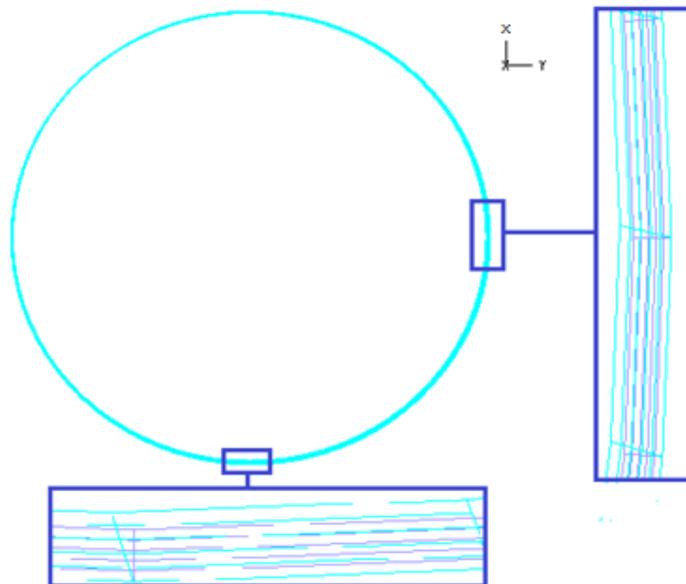


Figura 4.1: Malla deformada dominio fluido

Para el dominio del sólido se distinguen dos grupos: en rojo la pared del descanso, y en verde eje el rotor.

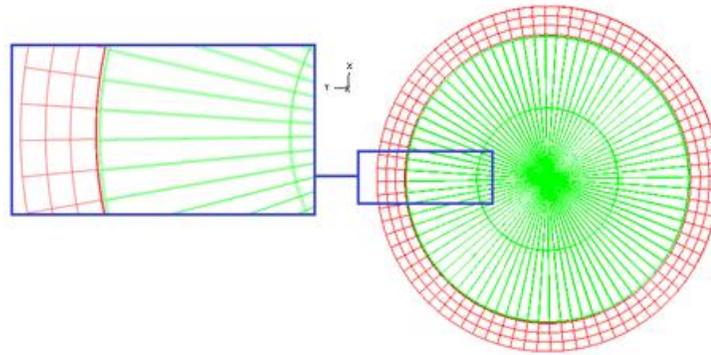


Figura 4.2: Malla deformada para el dominio sólido

Dado que la pared exterior del descanso tiene restringido su movimiento en toda dirección, sólo este cuerpo del dominio sólido experimenta deformación. El rotor se define como un cuerpo rígido.

4.2 Campo de Velocidades

El fluido exhibe un campo de velocidades que varía en forma lineal a través del espesor de aceite. La magnitud de la velocidad al contacto con el rotor corresponde a la velocidad de rotación de éste. Luego decrece hasta llegar a o al contacto con la pared (

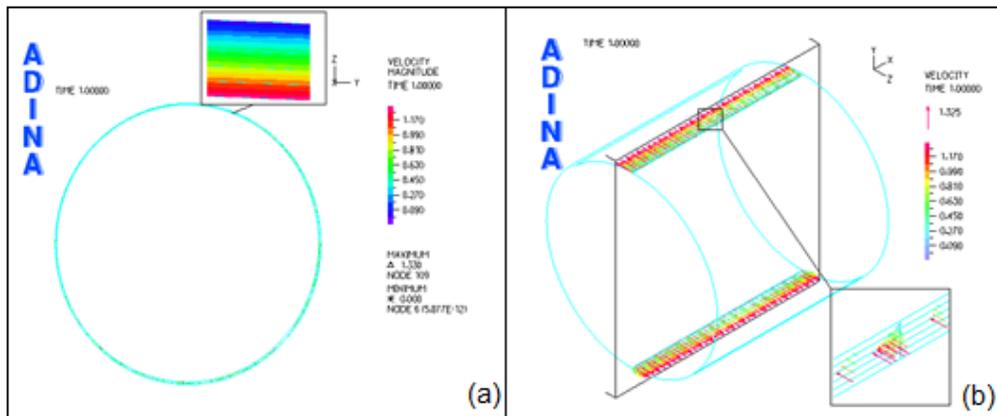


Figura 4.3 (a)). El campo no es homogéneo en la dirección tangencial debido a que el espesor de aceite, h , varía en esta dirección, teniéndose altas velocidades para las zonas con espesores bajos y viceversa.

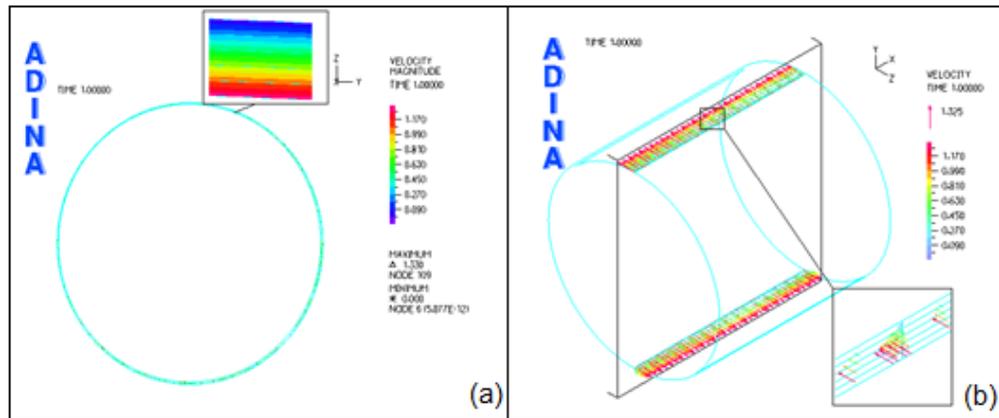


Figura 4.3: Velocidad del fluido, (a) A través del espesor, (b) En la dirección axial

En la dirección axial la velocidad presenta magnitudes con máximos a la mitad del largo del descanso. Las magnitudes de la velocidad en la película de aceite tienen estrecha relación con el espesor, y por lo tanto con la presión desarrollada en el fluido. A continuación se describirá cómo varía la presión según el modelo y la velocidad de rotación del eje.

4.3 Distribución de Presiones

En esta sección se mostrará la distribución de presiones según la velocidad de rotación del eje y además se compararán los resultados numéricos respecto las predicciones teóricas dadas por las aproximaciones de descanso largo y de descanso corto y las condiciones de borde para la presión, Sommerfeld y Gumbel.

Este análisis se hará diferenciando los resultados para los tres tipos de modelos desarrollados.

4.3.1 Modelo sin cavitación y con pared rígida

Como se mencionó en la sección 3.1 se obtuvieron resultados para 9 velocidades comprendidas entre 1000rpm y 5000rpm.

La Figura 4.4 muestra la distribución de presiones para 2000rpm, que está comparada con las predicciones teóricas presentadas en la sección 2.3.

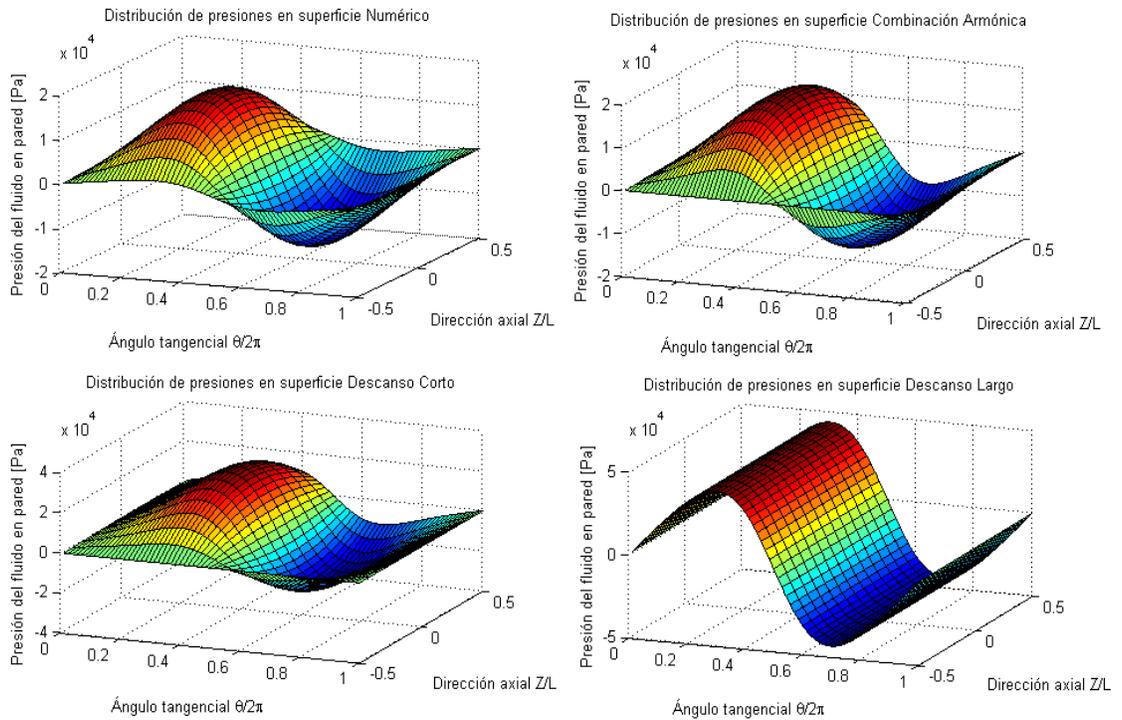


Figura 4.4: Distribución de presión numérica 2D sin cavitación respecto predicciones teóricas

Estos gráficos se pueden comparar según la dirección tangencial, al considerar la curva de presión correspondiente a $z=0$ (donde se obtienen las presiones máxima y mínima en la dirección axial). Así se tiene:

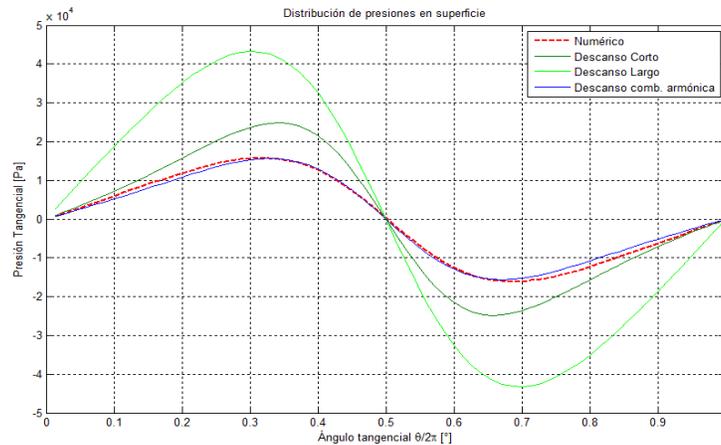


Figura 4.5: Distribución de presiones tangencial sin cavitación comparada con aproximaciones teóricas a 2000rpm

Se observa que la aproximación de combinación armónica se ajusta bastante bien a la obtenida numéricamente, y la aproximación de descanso corto la sigue en cuanto a aproximación a la curva numérica.

Para las demás velocidades se tiene un comportamiento análogo al presentado por 2000rpm.

Ahora se mostrará la dependencia de la presión con la velocidad de rotación, según la dirección tangencial:

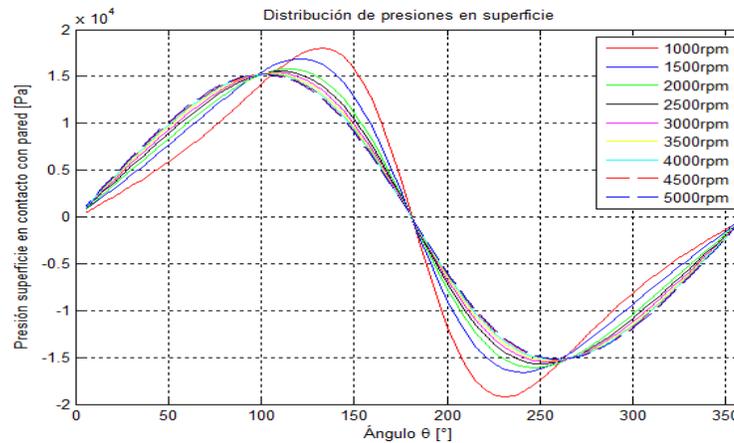


Figura 4.6: Distribución de presiones tangencial modelo sin cavitación a distintas velocidades

Las curvas de la Figura 4.6 corresponden también para $z=0$. Son simétricas respecto al ángulo $\theta=180^\circ$, siguiendo la condición de Sommerfeld.

Con el aumento de velocidad las presiones extremas del fluido (máxima y mínima) tienden a disminuir y para ángulos bajo aproximadamente 90° se tienen magnitudes de presión mayores. Por sobre los 120° este comportamiento en la presión se invierte.

En la sección 2.3 se mostró la dependencia que tiene la magnitud de la presión con bastantes variables. Además de la variación de presión con la velocidad, ésta depende de la geometría del descanso, las propiedades del fluido, la flexibilidad del rotor y el espesor de la película de aceite (h), entre otras.

Precisamente, h tiene una relación proporcional con la magnitud de la presión. En virtud de la ecuación (2.13) se tiene la siguiente distribución de espesor de película de aceite:

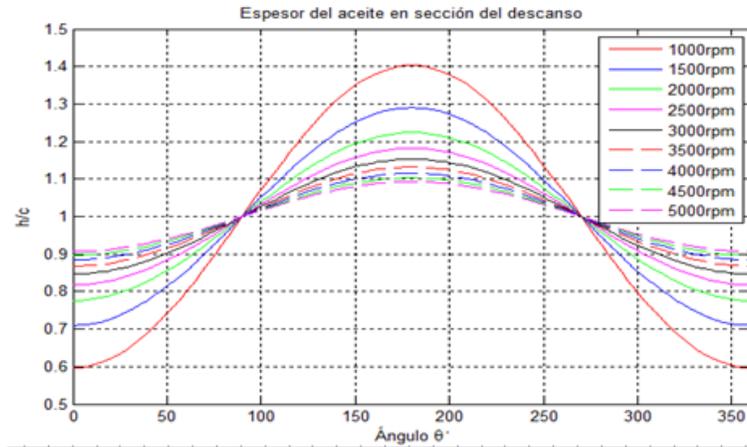


Figura 4.7: Distribución de h en el descanso sin cavitación

El ángulo θ' se mide desde el espesor mínimo $h=1$, superficies del rotor y descanso en contacto directo ($\theta'=0^\circ$), pasando por $\theta'=180^\circ$ donde el espesor alcanza su máximo ($h=2c$), para luego volver nuevamente a 0° . Esta distribución es simétrica respecto a 180° , y depende exclusivamente de la razón de excentricidad κ correspondiente con la velocidad de rotación. Estas curvas se obtienen al remplazar las κ numéricas, obtenidas en los modelos desarrollados, en la ecuación (2.13). Se debe acotar que el mínimo de presión no coincide necesariamente con el máximo espesor, y viceversa, dada la influencia de las demás variables señaladas, aunque siempre $\theta_{\min,\max}$ está cerca de $\theta'_{\max,\min}$.

Este modelo y los demás deben cumplir, además de la condición de borde en la dirección tangencial (Condición de borde de presión de Sommerfeld), la condición de borde para las dos paredes laterales.

En los bordes ($z=\pm L/2$) se tiene una presión igual a 0, y al centro del descanso ($z=0$) se tiene una presión máxima en magnitud:

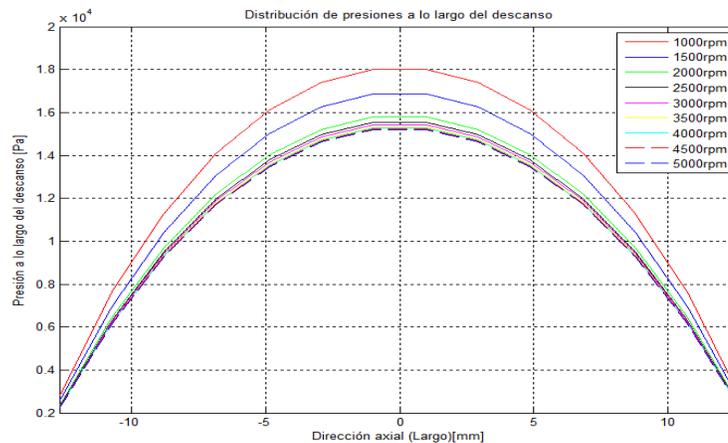


Figura 4.8: Distribución de presiones axial para distintas velocidades en descansos sin cavitación

Se observa que las magnitudes de la presión son menores para velocidades de rotación mayores. Claramente las curvas son simétricas respecto a $z=0$.

4.3.2 Modelo con cavitación y con pared rígida

Tal como se hizo en la sección anterior, en la Figura 4.4 y la Figura 4.5, se presenta la distribución de presiones numérica asociada a 2000rpm comparada con las predicciones numéricas bajo aproximación de descanso corto, de descanso largo y de combinación armónica. Eso sí, ahora bajo la condición de Gumbel (representación de la distribución de presión en la dirección tangencial más simple que considera zonas de presión sub-atmosféricas).

Se observa que existen diferencias entre los resultados del modelo numérico y las predicciones teóricas basadas en Gumbel. Bajo la condición de Gumbel sólo se llevan las presiones negativas a cero, teniéndose las mismas curvas teóricas presentadas en la sección anterior, pero sólo entre 0 y 180° , por sobre 180° la presión es cero

La distribución de presión numérica no sigue la condición de Gumbel, dado que el software para el análisis de cavitación se basa en el algoritmo de Elrod, presentado en la sección 2.4.2.3.

La curva numérica presenta una presión máxima del orden a la presión máxima bajo la aproximación de combinación armónica. Sin embargo la curvatura de la gráfica difiere, tal como se muestra en las figuras Figura 4.9 y Figura 4.10.

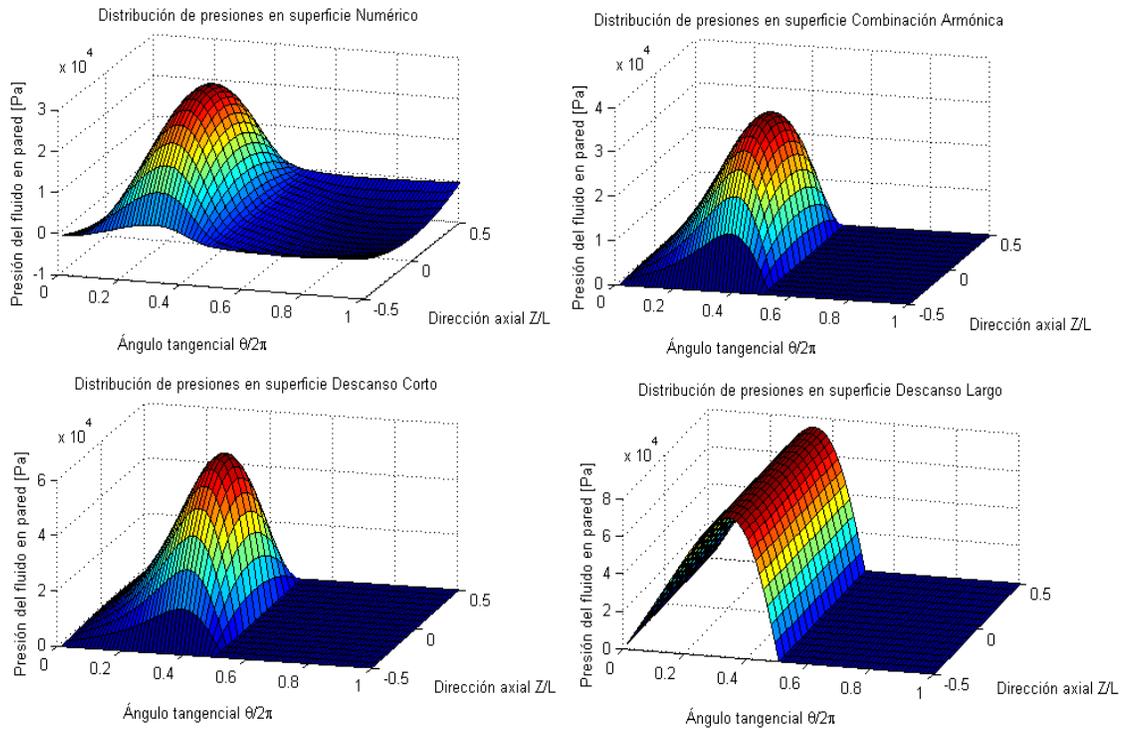


Figura 4.9: Distribución de presión numérica 2D con cavitación respecto predicciones teóricas

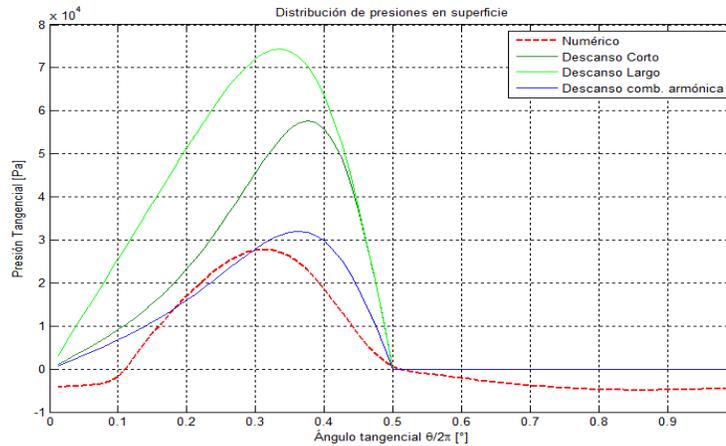


Figura 4.10: Distribución de presiones tangencial con cavitación comparada con aproximaciones teóricas a 2000rpm

La distribución de presión numérica obtenida es similar a la presentada en la Figura 2.18 (b), con la diferencia que la zona de presiones positivas en los casos simulados está comprendida entre los 40° a 180° para 2000rpm. Este rango varía con la velocidad de rotación, creciendo hasta 180° . En la Figura 4.11 se muestra este comportamiento y se puede llegar a las mismas conclusiones respecto a la magnitud de las presiones según velocidades. Se puede observar que tanto los modelos sin cavitación como los con cavitación experimentan un desplazamiento

del ángulo θ óptimo para la presión máxima, desde ángulos cercanos a 120° hacia los 90° .

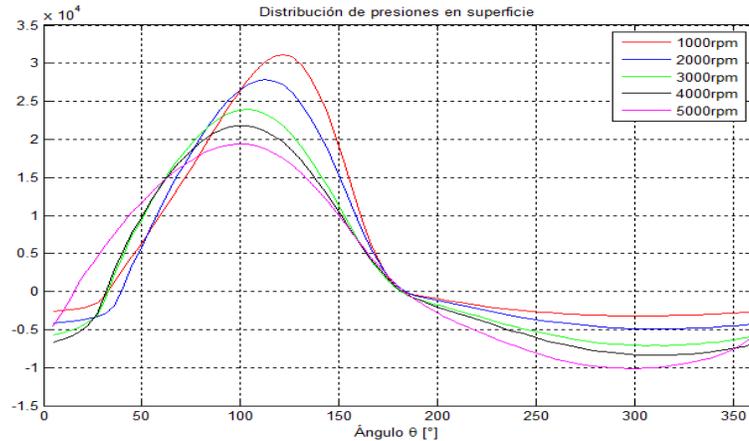


Figura 4.11: Distribución de presiones tangencial modelo sin cavitación a distintas velocidades

El espesor h se puede representar tal como en el modelo sin cavitación para las velocidades seleccionadas en este modelo.

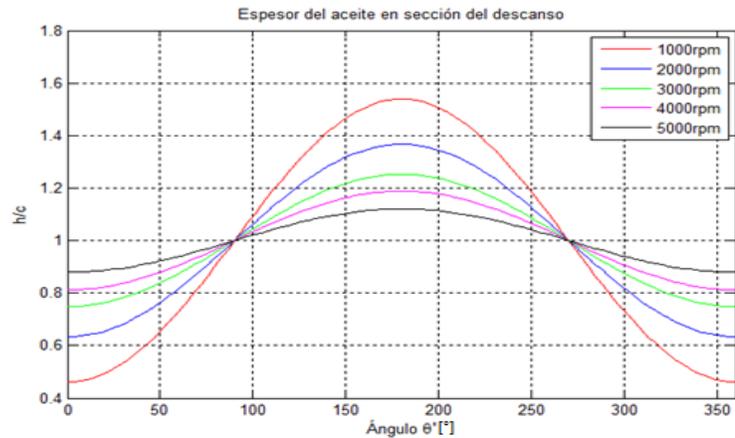


Figura 4.12: Distribución de h en el descanso con cavitación

Tanto para modelos sin cavitación como con cavitación, a mayores velocidades se tienen variaciones más bruscas del espesor de aceite.

Las diferencias presentadas entre las curvas correspondientes a las velocidades de rotación 1000, 2000, 3000, 4000 y 5000rpm de los modelos sin y con cavitación son debidas al cambio en las excentricidades del descanso por considerar la cavitación. Se mencionarán las causas de los cambios en excentricidades más adelante.

Finalmente se presenta en la Figura 4.13 la variación de presión en la dirección axial. La relación entre las magnitudes de la presión y la velocidad de rotación se conserva.

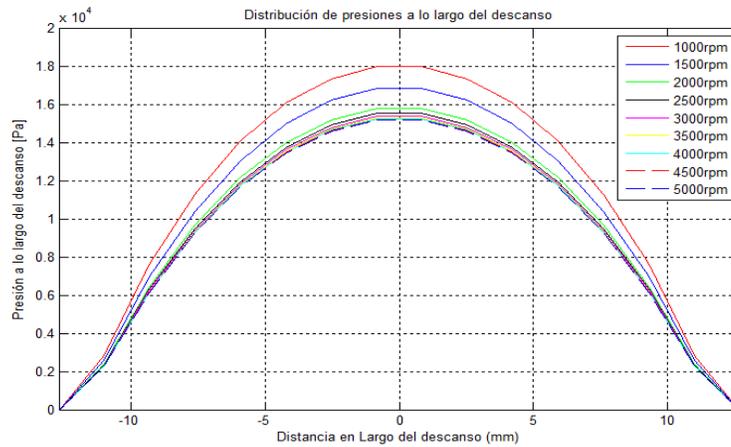


Figura 4.13: Distribución de presiones axial para distintas velocidades en descansos con cavitación

4.3.3 Modelo con cavitación y con pared flexible

Se analizará el efecto que tiene la deformación de la pared en la presión desarrollada en el fluido. Se espera que debido a la deformación de la pared la presión no alcance las mismas magnitudes. Se compararán las presiones alcanzadas bajo los tres tipos de modelos desarrollados, se verá el efecto que tiene la variación de velocidad del rotor en la magnitud de la presión, se entregarán las distribuciones de presiones en el eje axial y cómo varía el espesor según la dirección tangencial. Además se buscará encontrar una relación entre las propiedades del material y las presiones desarrolladas en el fluido.

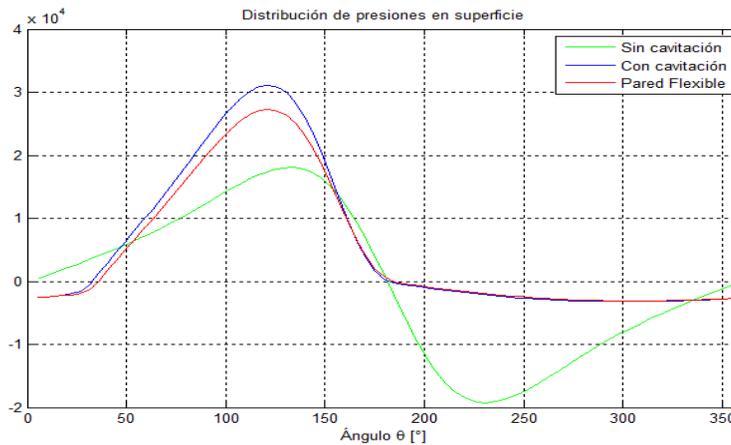


Figura 4.14: Distribución de presiones para los tres tipos de modelos a 1000rpm

En la Figura 4.14 se distinguen las curvas de cada modelo desarrollado. Pero en el caso de los modelos con pared flexible no se logra diferenciar las curvas de cada material. Los sólidos de todos los modelos son considerados elásticos, y se definen sólo por tres variables: el módulo de elasticidad E , la densidad del material ρ y el coeficiente de Poisson ν . Entonces sólo verificando la magnitud de estas variables se puede concluir el porqué de este comportamiento. A continuación se muestra la variación de presión para todos los modelos a 2000 y 4000rpm.

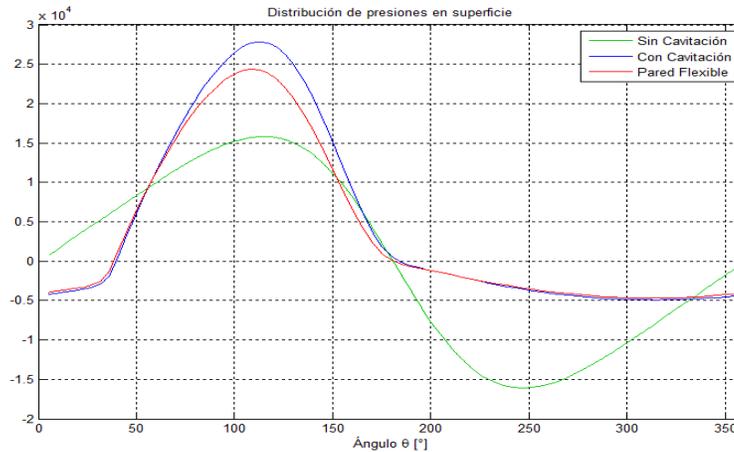


Figura 4.15: Distribución de presiones para los tres tipos de modelos a 2000rpm

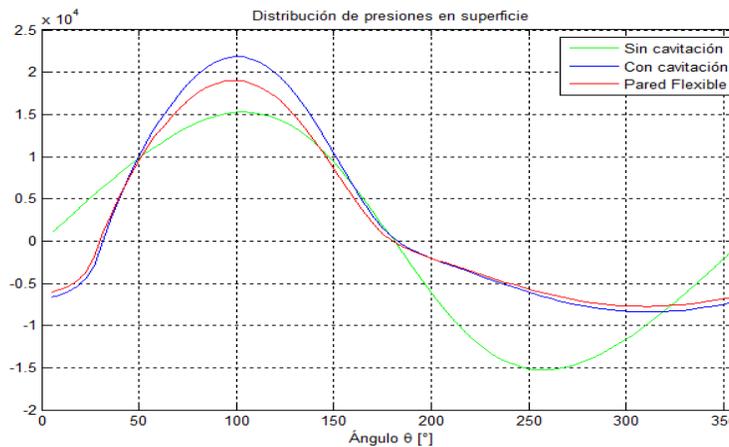


Figura 4.16: Distribución de presiones para los tres tipos de modelos a 4000rpm

No se logra apreciar la diferencia de presiones entre los modelos de pared flexible para cada material. Para 2000rpm existe una pequeña diferencia entre las presiones, que es apreciable en la Figura 4.17 entre el acero y, el acrílico y el babbitt. Para la pared de acero se tienen presiones levemente menores que las de los otros materiales, que son iguales.

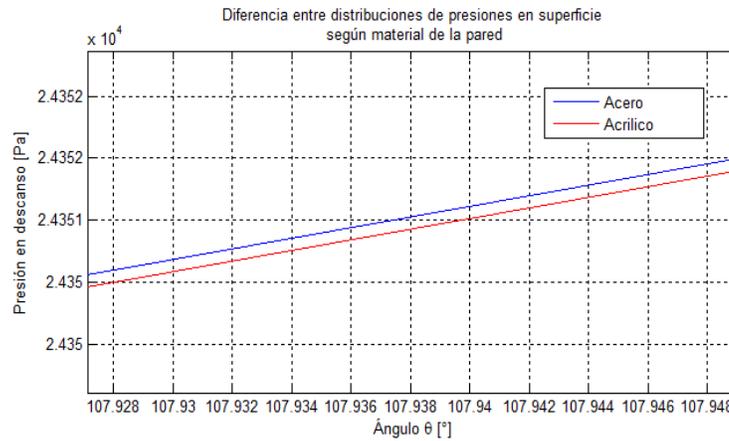


Figura 4.17: Diferencia de presiones para materiales modelo pared flexible

Para 4000 rpm, en la zona negativa se distancian las presiones de los modelos de pared rígida respecto de los de pared flexible.

Se muestra a continuación la variación de presión respecto a la velocidad de operación para el acrílico.

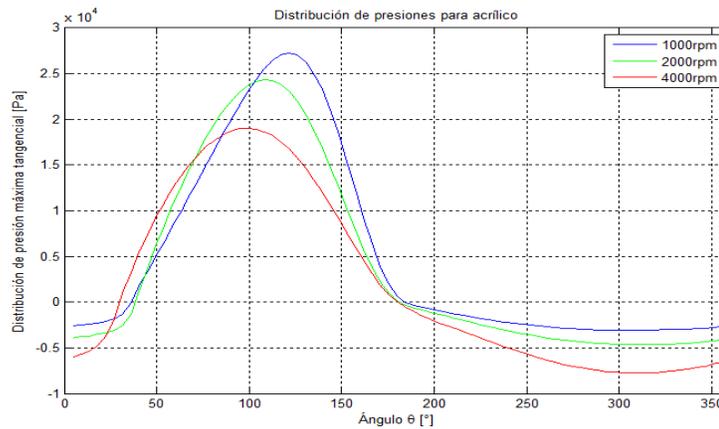


Figura 4.18: Variación de presión para el acrílico con la velocidad de rotación.

Las curvas tienen la misma forma que las resultantes del modelo con pared rígida. La flexibilidad de pared sólo afecta la magnitud de las presiones.

Finalmente se muestra la variación de presión en la dirección axial y el cálculo del espesor h , que siguen los mismos patrones que los resultados de los modelos de pared rígida. Tan sólo hay cambios en cuanto a las magnitudes.

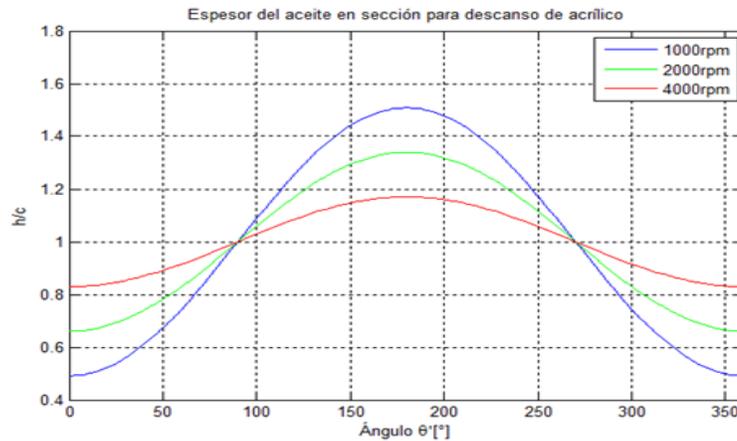


Figura 4.19: Distribución de h en el descanso de acrílico

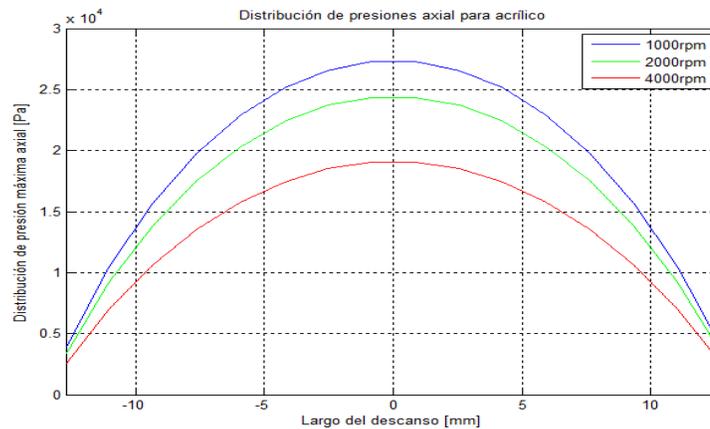


Figura 4.20: Distribución de presiones axial para distintas velocidades en descansos de acrílico

4.4 Posición de Equilibrio del Rotor

La excentricidad se calcula como la distancia que tiene el centro del rotor respecto al centro del descanso. Esta depende de las dimensiones del descanso, la magnitud de la carga, la velocidad de rotación y las propiedades del fluido, entre otras variables. Es independiente de la carga dinámica a la que esté sometido el descanso, por lo tanto en modelos sin excitación externa se alcanzarían los mismos puntos de equilibrio que para modelos con sólo carga estática. Se analizará la posición de equilibrio según el tipo de modelo aplicado y la variación de esta posición respecto a la velocidad de rotación.

4.4.1 Modelo sin cavitación y con pared rígida

La posición de equilibrio alcanzada para las velocidades de rotación usadas para las simulaciones de este tipo de modelo se presenta en la siguiente figura:

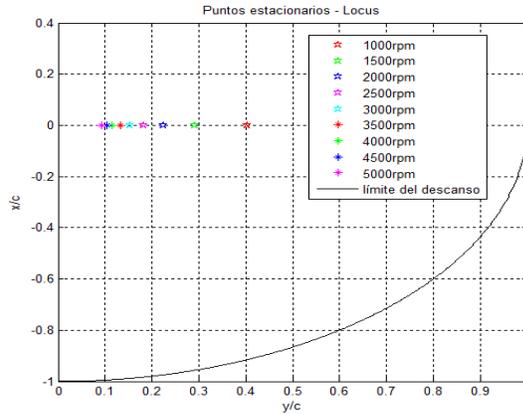


Figura 4.21: Puntos estacionarios modelo sin cavitación y pared rígida

Los puntos de equilibrio se muestran referenciados al límite físico del descanso, determinado por la holgura disponible entre el rotor y la pared del descanso.

Se observa que los puntos de equilibrio se alcanzan por sobre el eje y , y que con el aumento de velocidad tienden a acercarse hacia el centro del descanso. Este efecto puede verse en el gráfico de razón de excentricidad vs la velocidad de rotación:

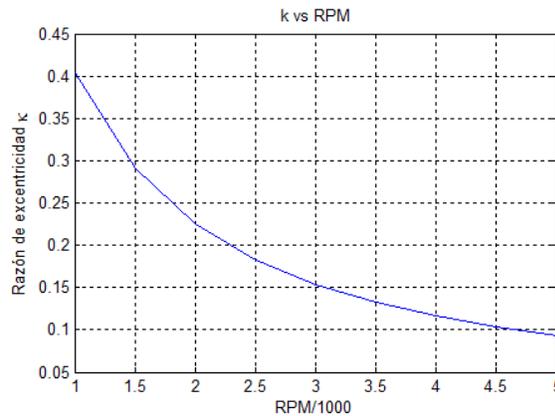


Figura 4.22: Razón de excentricidad vs RPM en descanso sin cavitación

4.4.2 Modelo con cavitación y con pared rígida

Para este modelo se observan cambios respecto al modelo anterior. Las posiciones de equilibrio se mueven a través del plano XY y no sólo en el eje Y , las κ aumentan para una velocidad fija respecto al modelo anterior y respecto a predicciones teóricas basadas en las aproximaciones de descanso corto y largo se puede observar que el rotor alcanza equilibrios cercanos a los predichos por la aproximación de descanso corto.

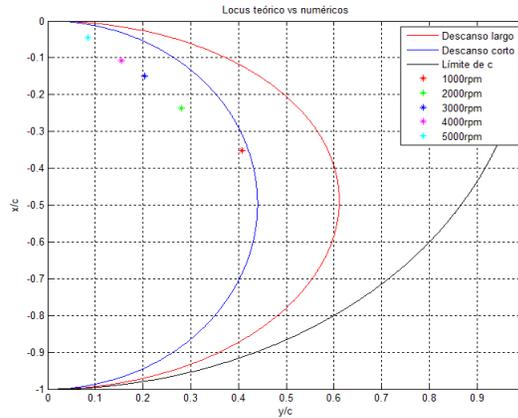


Figura 4.23: Posiciones de equilibrio según velocidad comparada con teóricas

Las curvas de predicción del locus se obtienen de las siguientes relaciones:

$$\tan(\theta) = \frac{\pi(1 - \kappa^2)}{2\kappa} \tag{4.1}$$

$$\tan(\theta) = \frac{\pi(1 - \kappa^2)}{4\kappa} \tag{4.2}$$

Donde la ecuación (4.1) representa la aproximación de descanso largo y la ecuación (4.2) la aproximación de descanso corto. Estas expresiones resultan de equilibrar la fuerza del fluido F con la carga estática sobre el rotor, bajo la condición de Gumbel. Luego es aplicable esta predicción sólo para descansos con cavitación. De forma análoga, para descansos sin cavitación, utilizando la aproximación de Sommerfeld se predice que la posición final del rotor se encuentra por sobre el eje Y .

La variación de la razón de excentricidad con la rotación del eje se muestra a continuación.

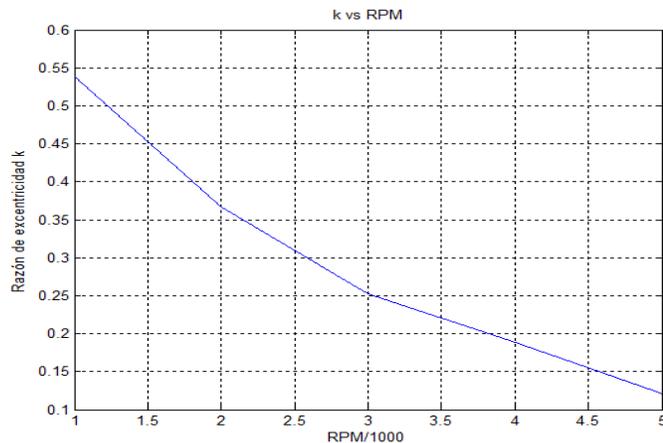


Figura 4.24: Razón de excentricidad vs RPM en descanso con cavitación

4.4.3 Modelo con cavitación y con pared flexible

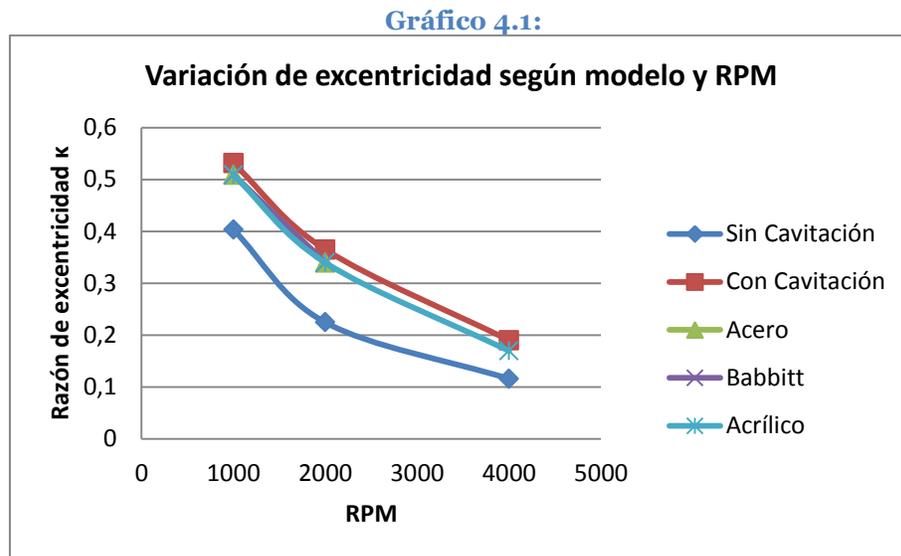
Para las velocidades de rotación se muestran los resultados obtenidos en todos los modelos.

Tabla 4.1: Razones de excentricidad para velocidades comunes según tipo de modelo

RPM\Modelo	Sin cavitación	Con Cavitación	Pared flexible de Acero	Pared flexible de Babbitt	Pared flexible de Acrílico
1000	0,4030	0,5311	0,5086	0,5086	0,5086
2000	0,2244	0,3648	0,3396	0,3396	0,3396
4000	0,1157	0,1900	0,1695	0,1695	0,1695

Se observa que κ no varía para los modelos de pared flexible, tal como ocurrió para la presión. Respecto al modelo con cavitación hay menores κ , debido a que la elasticidad de los materiales es finita (en los modelos con pared rígida la pared es indeformable, con un módulo de elasticidad tendiente a infinito).

La variación de κ gráficamente es.



Donde Sin Cavitación y Con Cavitación son modelos con pared rígida y Acero, Babbitt y Acrílico son los materiales usados para el modelo con pared flexible y cavitación.

Respecto a las curvas teóricas presentadas en la Figura 4.23, la curva de razón de excentricidad para pared flexible se aleja levemente más de la curva de descanso corto.

4.5 Órbitas Temporales y Análisis de Frecuencias

La trayectoria descrita por el rotor dentro del descanso es fundamental para la determinación de los coeficientes dinámicos del descanso. Dependiendo del alcance del estado estacionario, se puede distinguir si se está en presencia de *oil whirl*. Cuando el rotor no alcanza una posición de equilibrio, y oscila en torno a una órbita permanente (alrededor de un pseudo punto de equilibrio) se está en presencia del fenómeno auto-excitado. Se puede realizar un análisis de frecuencias a la respuesta del fluido, para determinar la frecuencia del *oil whirl*, a que velocidad se produce y si el sistema está en peligro de alcanzar *oil whip*. Tal como se ha hecho con la presión y la posición de equilibrio, se analizarán las órbitas temporales y las frecuencias según el tipo de modelo aplicado.

4.5.1 Modelo sin cavitación y con pared rígida

Se muestran en la Figura 4.25 las trayectorias descritas por el rotor para alcanzar la posición de equilibrio. Se observa que tanto para 1000rpm como para 2000rpm se da una oscilación importante en torno al punto de equilibrio presentado en la sección anterior para este modelo y estas velocidades.

En conjunto con las órbitas temporales mostradas en la Figura 4.26, se puede corroborar que la efectivamente la respuesta en desplazamiento para las velocidades 1000rpm y 2000 rpm quedan oscilando en un órbita permanente en torno a un punto de equilibrio.

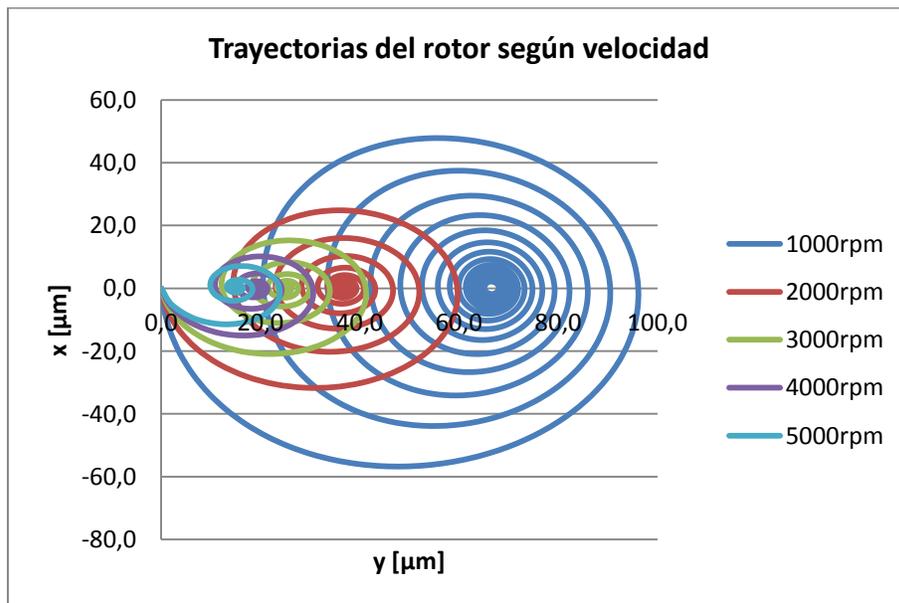


Figura 4.25: Trayectorias en modelo sin cavitación

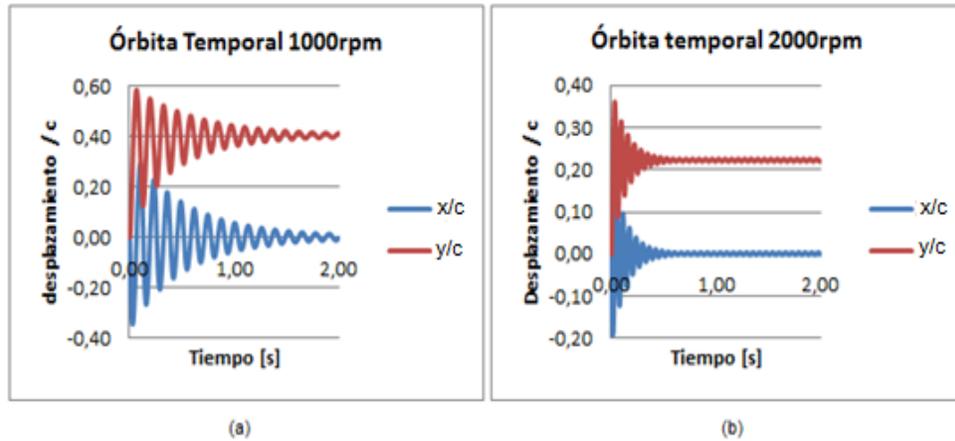


Figura 4.26: Órbitas Temporales modelo sin cavitación a rpm con *Oil Whirl*

Para confirmar que el *Oil Whirl* se da para estas velocidades se realiza el siguiente análisis de frecuencias:

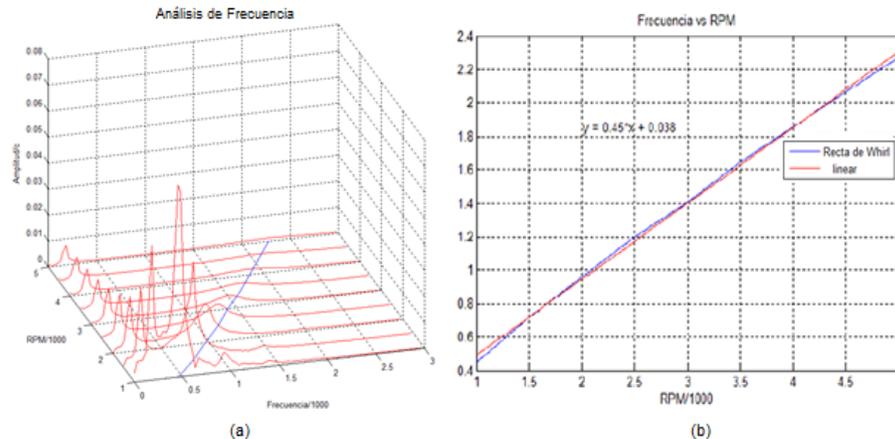


Figura 4.27: Análisis de frecuencias para modelo sin cavitación:
(a) Diagrama de cascada, (b) Frecuencia de *Whirl*

En Figura 4.27 (a) se grafica la amplitud de la respuesta para cada velocidad y frecuencia. La relación entre la frecuencia y la velocidad de rotación se presenta en la gráfica (b). La pendiente de la recta de esta gráfica representa la frecuencia típica del *Oil Whirl*, que en este caso es 0,45X (dentro del rango propuesto por Muszynska (1987), 0,38X-0,49X).

Viendo la gráfica (a) sólo en las direcciones frecuencia y amplitud se tiene lo siguiente:

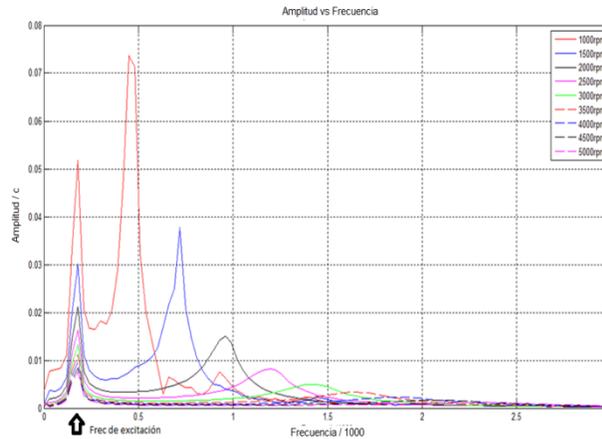


Figura 4.28: Amplitud del espectro en función de la frecuencia

En Figura 4.28 se tiene un sistema excitado a una frecuencia de aproximadamente 2,78[Hz]. Dadas las amplitudes del espectro, las órbitas temporales y lo observado en el gráfico de trayectoria se concluye que el *Oil Whirl* en este caso se presenta a 1000rpm conservándose hasta las 2000rpm por lo menos.

4.5.2 Modelo con cavitación y con pared rígida

En el caso con cavitación el *Oil Whirl* se presenta a lo menos a una velocidad de 4000rpm y persiste por sobre las 5000rpm. Esto se comprueba tanto en las trayectorias del rotor, como en las órbitas temporales para estas dos velocidades.

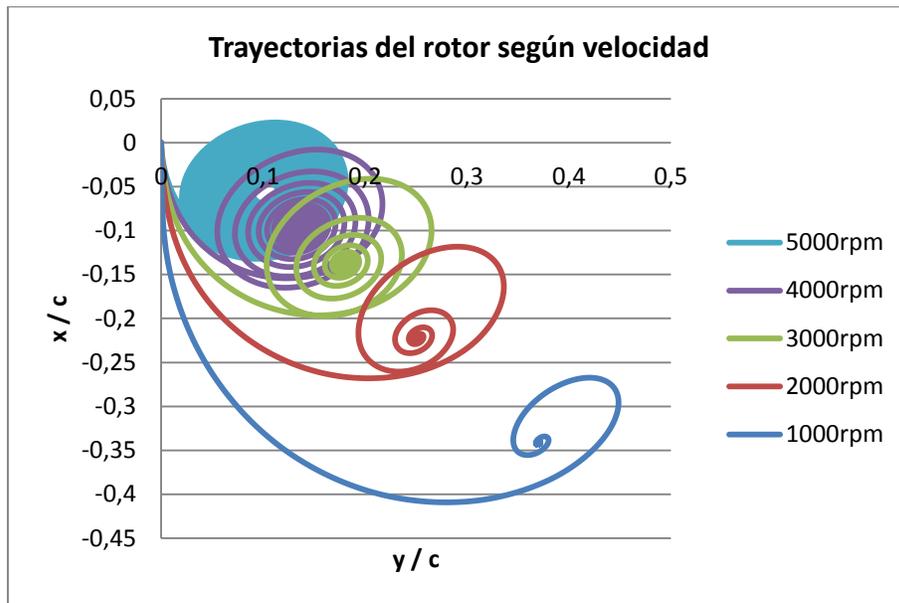


Figura 4.29: Trayectorias en modelo con cavitación

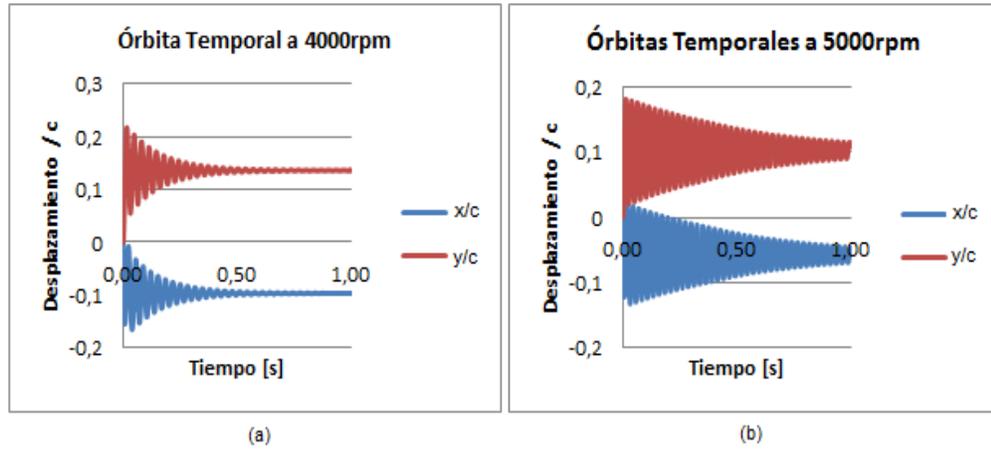


Figura 4.30: Órbitas Temporales modelo con cavitación a rpm con *Oil Whirl*

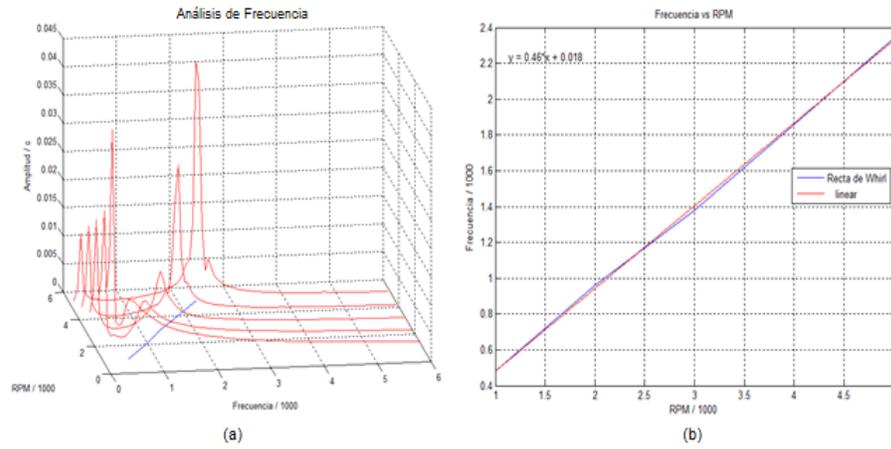


Figura 4.31: Análisis de frecuencias para modelo con cavitación: (a) Diagrama de cascada, (b) Frecuencia de *Whirl*

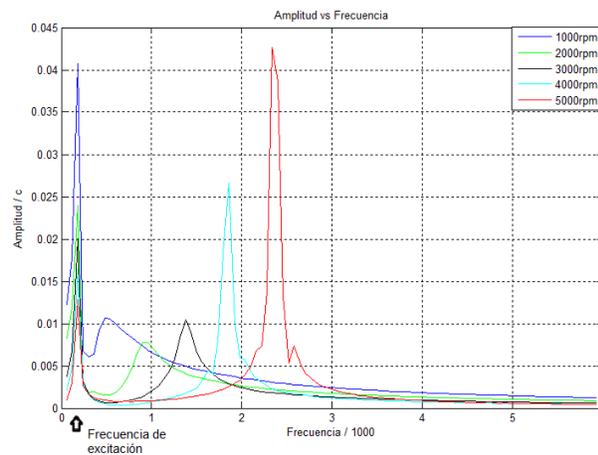


Figura 4.32: Amplitud del espectro en función de la frecuencia en modelo con cavitación

Se aprecia que para la velocidad 4000rpm comienza el *Oil Whirl*, y para 5000rpm la amplitud de la oscilación crece prácticamente al doble. Al tiempo de evaluación está respuesta se acerca a una órbita estable.

4.5.3 Modelo con cavitación y con pared flexible

Para este tipo de modelo se realizaron sólo simulaciones con excitación externa. En el gráfico de trayectoria se observa que en la cercanía del punto de equilibrio el rotor comienza a oscilar a la frecuencia de excitación definida.

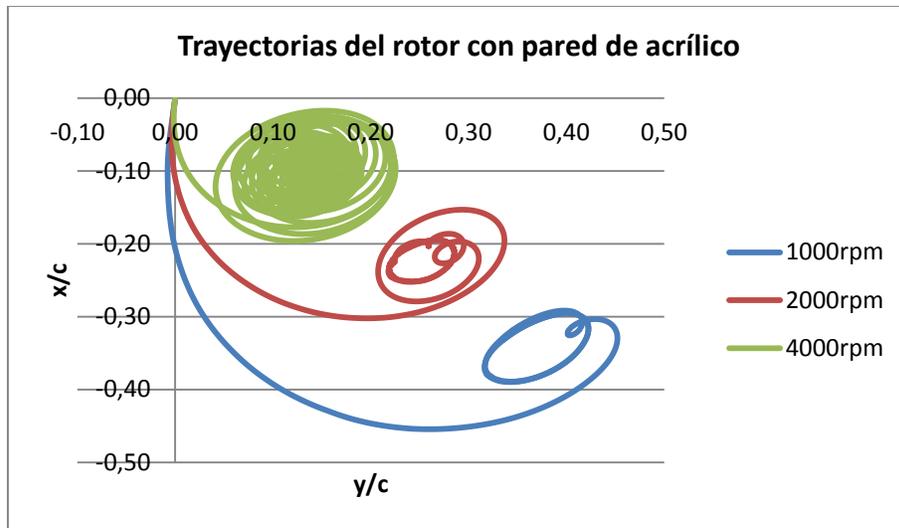


Figura 4.33: Trayectorias rotor modelo con pared flexible y con fuerza de excitación aplicada

En consideración de la variación de la órbita respecto a la flexibilidad de la pared:

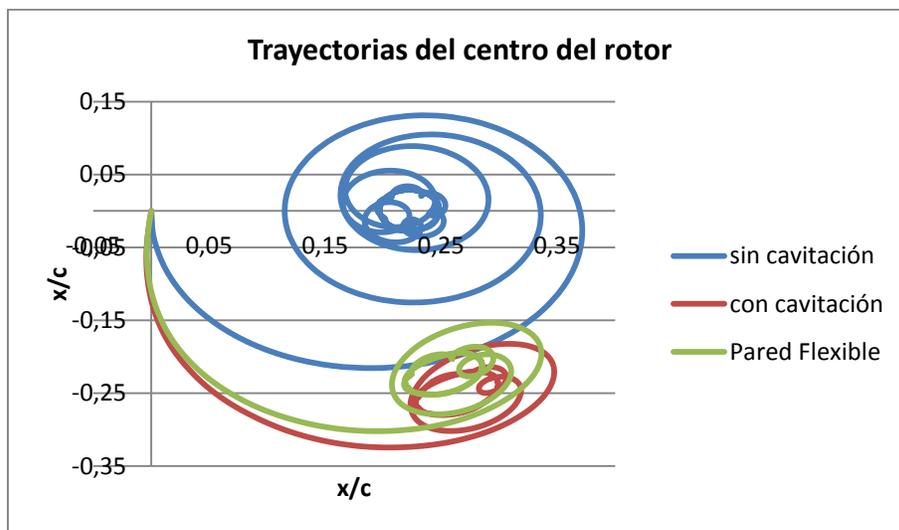


Figura 4.34: Comparación de trayectorias según modelo

Se observa que tal como con la presión y la posición de equilibrio los resultados obtenidos para los distintos modelos de pared flexible son indistinguibles a simple vista. Se tiene una trayectoria similar a la obtenida con el modelo de cavitación, menos excéntrica.

Para este modelo, tal como se da en el modelo con cavitación y pared rígida a 4000rpm se da el *Oil Whirl*. Esto se comprueba en la Figura 4.35 y en la Figura 4.36.

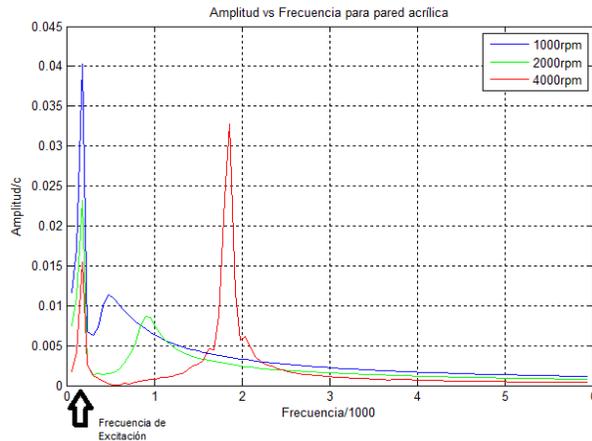


Figura 4.35: Amplitud del espectro en función de la frecuencia en modelo pared acrílica

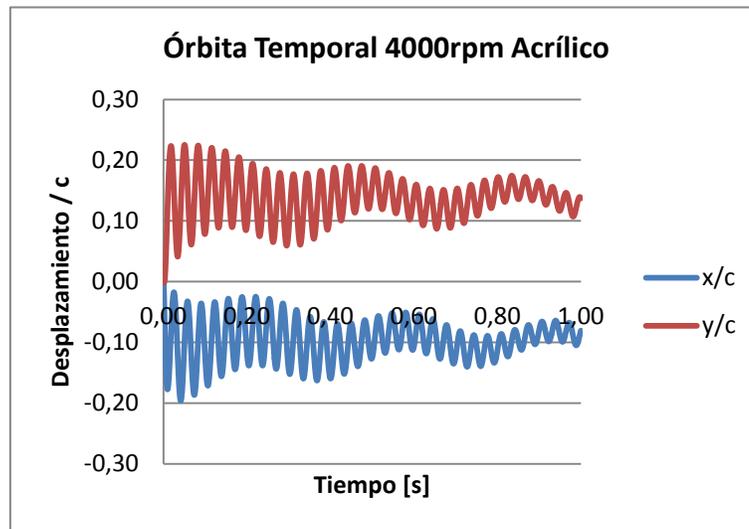


Figura 4.36: Órbita Temporal a 4000rpm, indicio de Oil Whirl

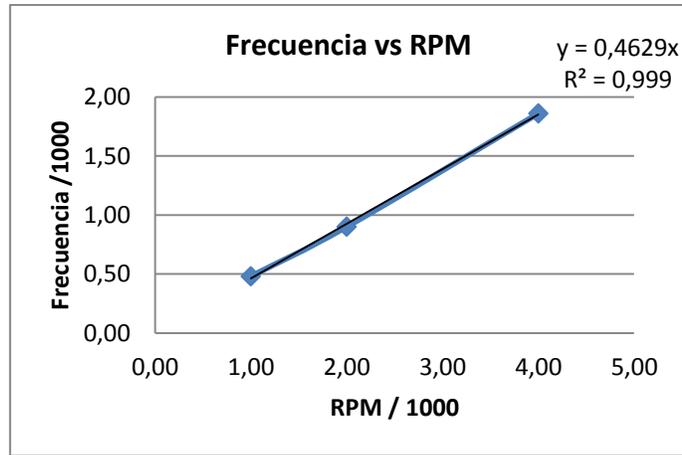


Figura 4.37: Frecuencia de *Whirl* modelo pared flexible

La frecuencia de *Whirl* no cambia significativamente respecto a los modelos anteriores, tal como se aprecia en Figura 4.37.

Además se comparan las órbitas estacionarias entre los modelos con pared de rígida y con pared flexible en la Figura 4.38, ambos con cavitación. Se obtienen órbitas bastantes similares en cuanto a fase, frecuencia y amplitud.

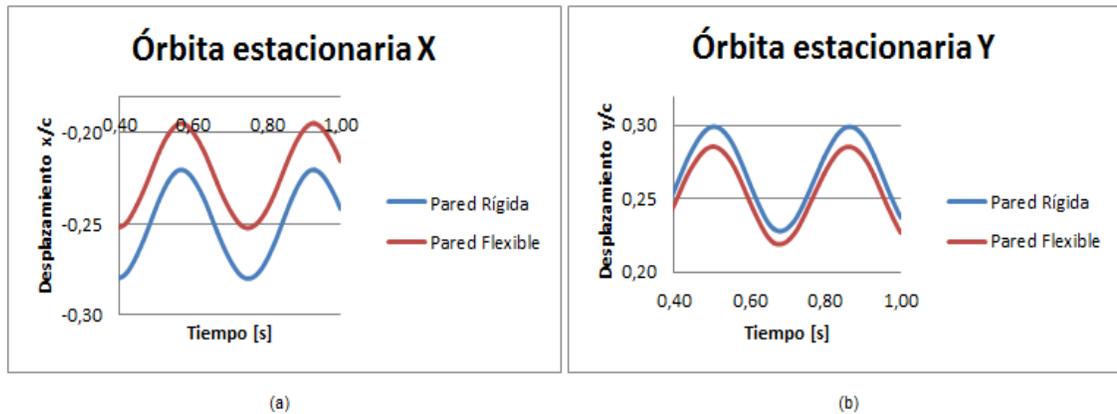


Figura 4.38: Comparación entre órbitas de modelos con pared rígida y pared flexible

Tabla 4.2: Variación amplitud respuesta entre modelos con pared rígida y pared flexible

Respuesta del Fluido	x/c	y/c
Amplitud Pared Rígida	0,0298	0,0357
Amplitud Pared Flexible	0,0287	0,0333
Variación de Amplitud [%]	3,7683	6,6610

Se observa una diferencia no mayor al 7% para la dirección y, que en términos prácticos es baja.

4.6 Fracción de vapor

Para los modelos que consideran cavitación se muestran los siguientes gráficos de contorno que describen el cambio de fase en el líquido.

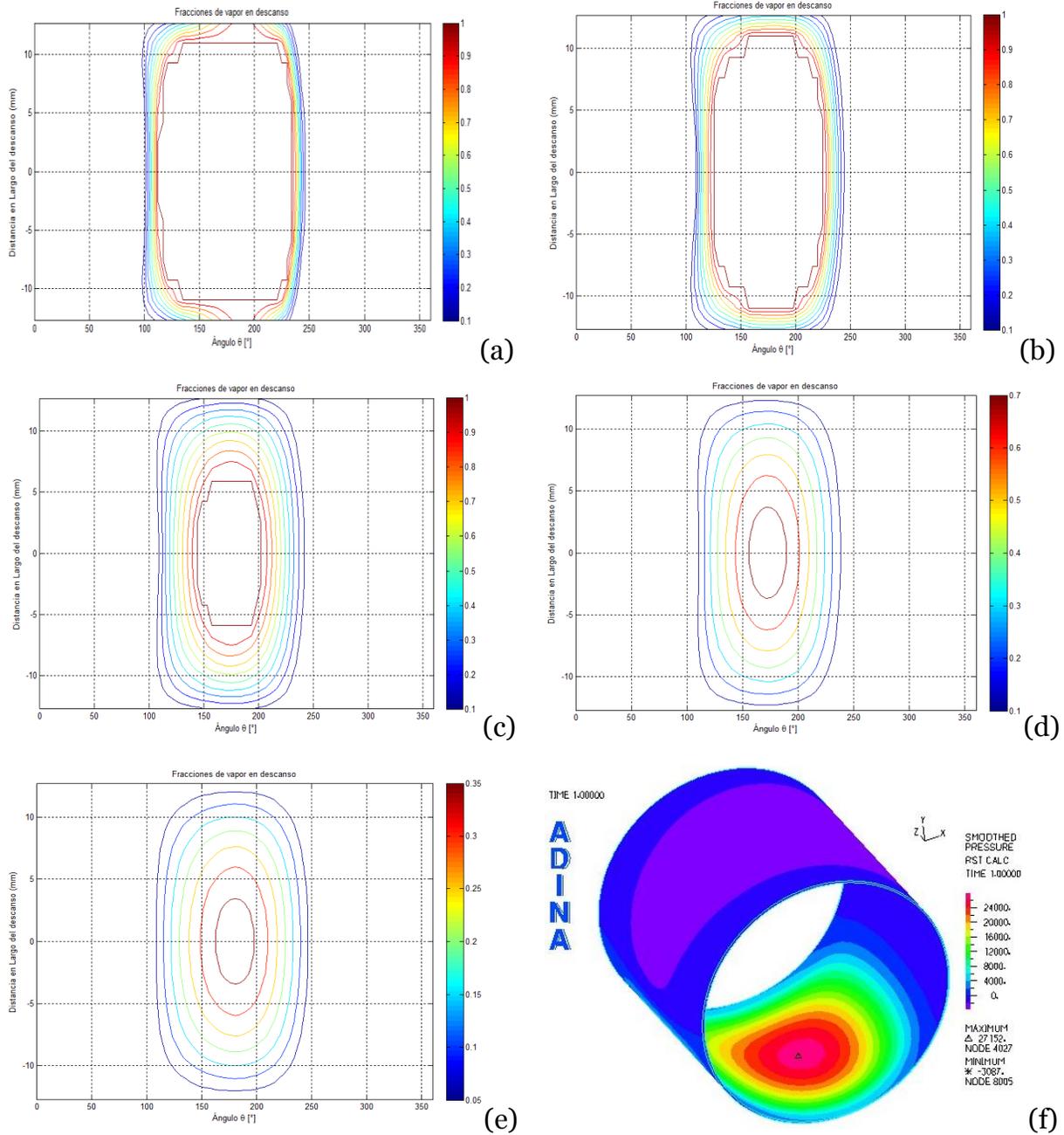


Figura 4.39: Contorno de cambio de fase por cada velocidad, (a) 1000rpm, $P_c = -5000$ [Pa], (b) 2000rpm, $P_c = -10000$ [Pa], (c) 3000rpm, $P_c = -20000$ [Pa], (d) 4000rpm, $P_c = -30000$, (e) 5000rpm, $P_c = -30000$ [Pa], (f) Distribución de Presión en fluido

Dado que la presión del fluido no cambia significativamente al tener una pared flexible, estos contornos representan también el cambio de fase en los modelos que consideran la pared deformable (casos (a), (b) y (d)).

4.7 Deformaciones y Esfuerzos en Pared

En esta sección se mostrarán los esfuerzos y deformaciones que sufre la pared del descanso por efecto de la presión.

A continuación se muestran los esfuerzos y las deformaciones que experimenta la pared.

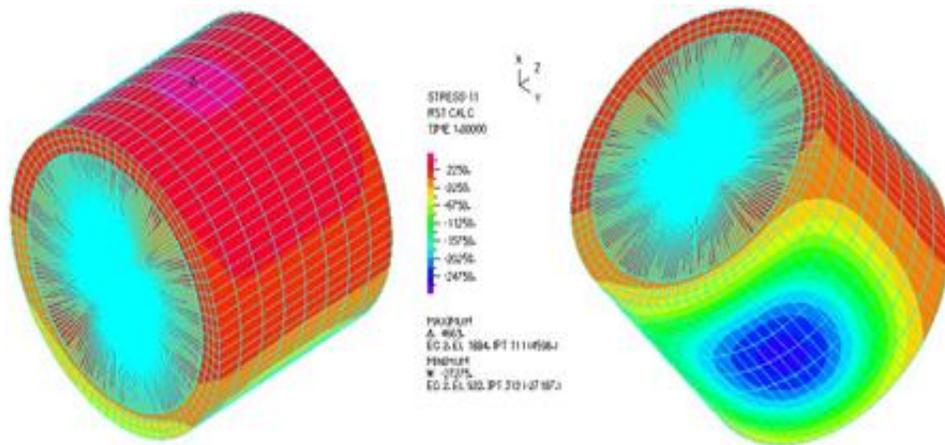


Figura 4.40: Distribución de esfuerzo radial en el dominio sólido a 1000rpm

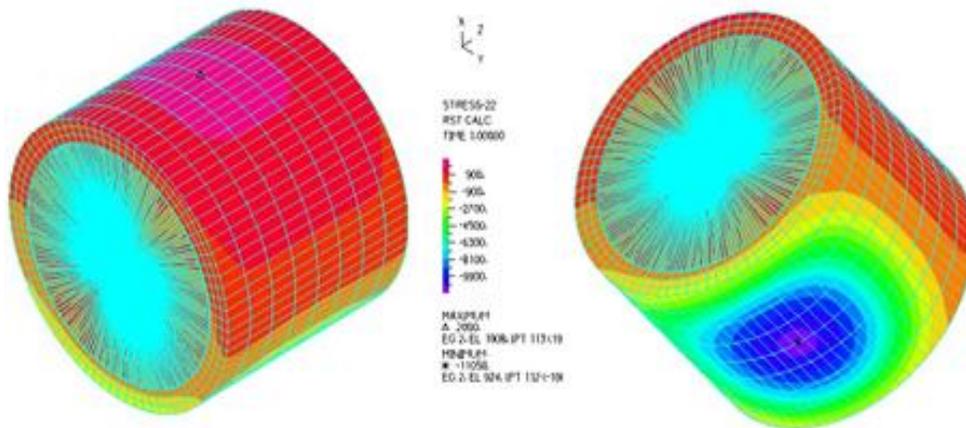


Figura 4.41: Distribución de esfuerzo tangencial en el dominio sólido a 1000rpm

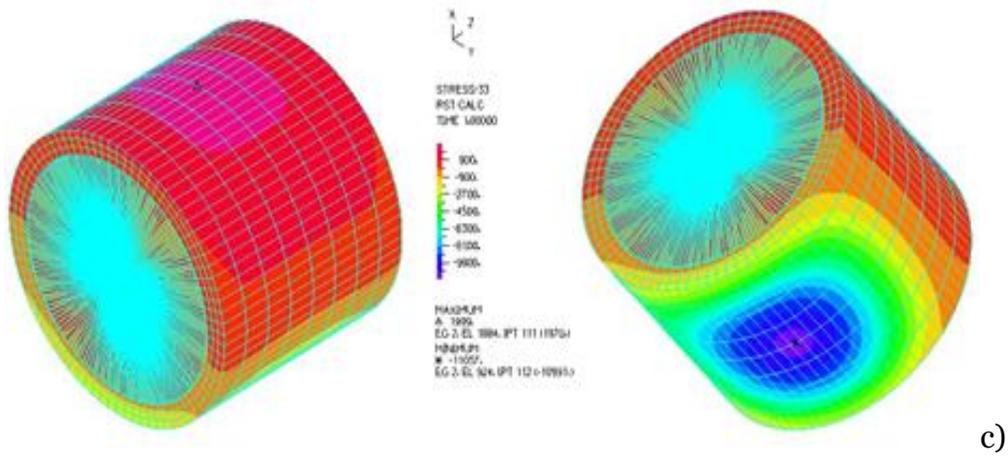


Figura 4.42: Distribución de esfuerzo axial en el dominio sólido a 1000rpm

Los resultados tanto para esfuerzos como deformaciones no varían según el material utilizado para simular la pared, de ahí que sean válidos para los modelos de pared flexible independiente del material.

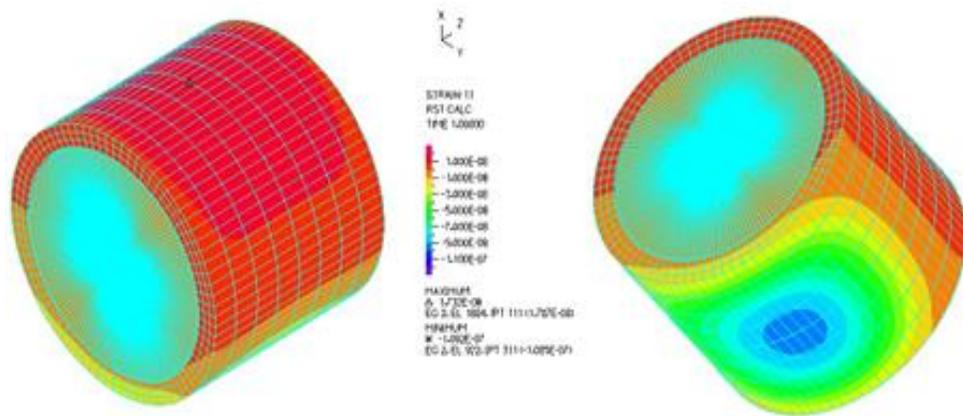


Figura 4.43: Distribución de deformación radial en el dominio sólido a 1000rpm

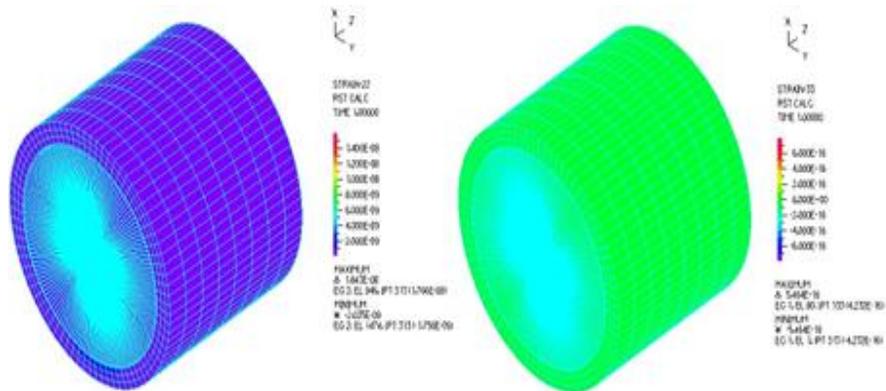


Figura 4.44: Distribuciones de deformaciones tangenciales y axiales en el dominio sólido a 1000rpm

Los esfuerzos en las direcciones radial, tangencial y axial siguen una distribución similar a la que se obtiene con la presión. En la zona de alta presión de fluido (cerca al espesor mínimo) se obtienen los esfuerzos con magnitud más alta y con signos negativos (compresión). La zona diametralmente opuesta presenta esfuerzos de módulos bastante pequeños, y de signos positivos (tracción).

Se observa que las deformaciones son despreciables tanto en la dirección tangencial y como la axial. En el eje tangencial la deformación es baja debido a la condición de borde aplicada a la pared del descanso. En la superficie externa de la pared se restringe totalmente el movimiento de los elementos sólidos. De forma análoga, se restringió el movimiento en la dirección axial de todo el volumen del grupo 2 (pared del descanso).

Es así como la única dirección con deformaciones no nulas es la radial, con distribuciones acordes a la distribución del esfuerzo principal, que sin embargo poseen magnitudes despreciables respecto a las dimensiones de la lubricación. La holgura entre rotor y pared del descanso es del orden de 0,016[mm], y las deformaciones son del orden de la milésima de c.

4.8 Determinación de coeficientes

Se presentan los resultados obtenidos para cada velocidad de operación utilizada, separando los coeficientes lineales de los no lineales. Para los primeros, se comprobarán sus valores con predicciones teóricas.

Todos los resultados se presentan de forma adimensional, a menos que se diga la contrario.

4.8.1 Modelo sin cavitación y con pared rígida

Se presentan las magnitudes de los coeficientes lineales de rigidez y de amortiguamiento para 9 velocidades comprendidas entre 1000 y 5000rpm, con un intervalo de 500rpm.

Se logra observar en las Figura 4.46 y Figura 4.46 que hay gran concordancia entre los coeficientes lineales numéricos y las predicciones numéricas basadas en las aproximaciones de descanso corto y largo.

Tan sólo el coeficiente de amortiguamiento C_{yy} posee mayor distancia a las curvas teóricas. Sin embargo, sigue una tendencia similar a las predicciones. Se puede observar que esta diferencia es prácticamente una constante, cercana a 5.

Respecto a qué tipo de aproximación tiende a representar mejor los coeficientes no es posible definir una opción concluyente.

Gráfico 4.2:

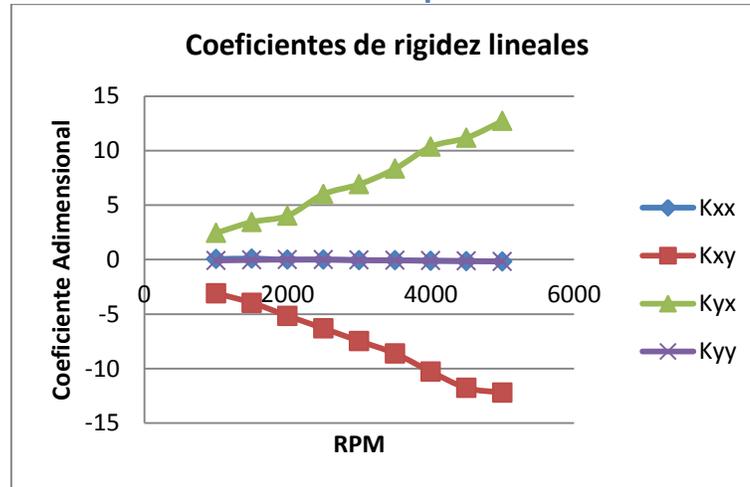
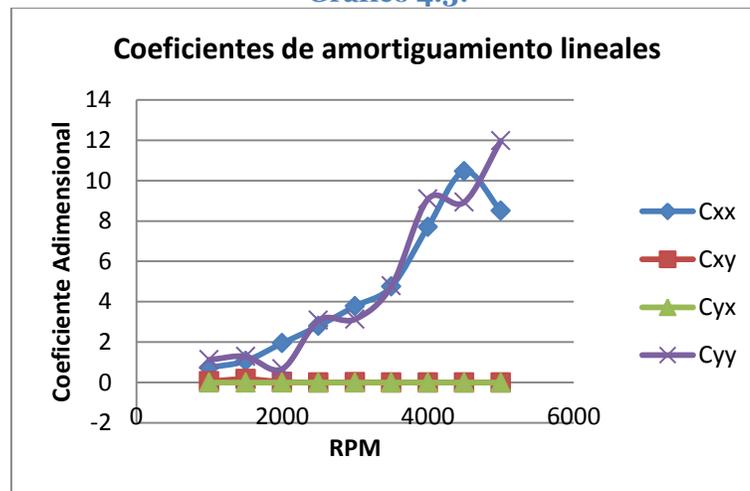


Gráfico 4.3:



Para razones de excentricidad bajas correspondientes a velocidades elevadas, por sobre los 3500 rpm, se observa que los coeficientes de rigidez tienden a alejarse más de las curvas teóricas, mientras que los coeficientes de amortiguamiento poseen una comportamiento contrario, para κ elevadas (velocidades bajas) se tiene mayor diferencia entre predicciones y valores obtenidos numéricamente.

Como se mencionó en la sección 3.3, una vez determinados los coeficientes dinámicos lineales, se procede a realizar el mismo procedimiento de cálculo para los coeficientes no lineales. Se usó la propuesta de coeficientes lineales hecha por Sawiki & Rao (2004).

En ésta, se consideran coeficientes dinámicos no lineales de rigidez de segundo orden, que consideran términos cruzados. Además se consideran los coeficientes dinámicos no lineales de amortiguamiento, a diferencia de lo propuesto por Choy *et. al* (1991), que no considera estos términos y además sus términos de rigidez son de orden superior.

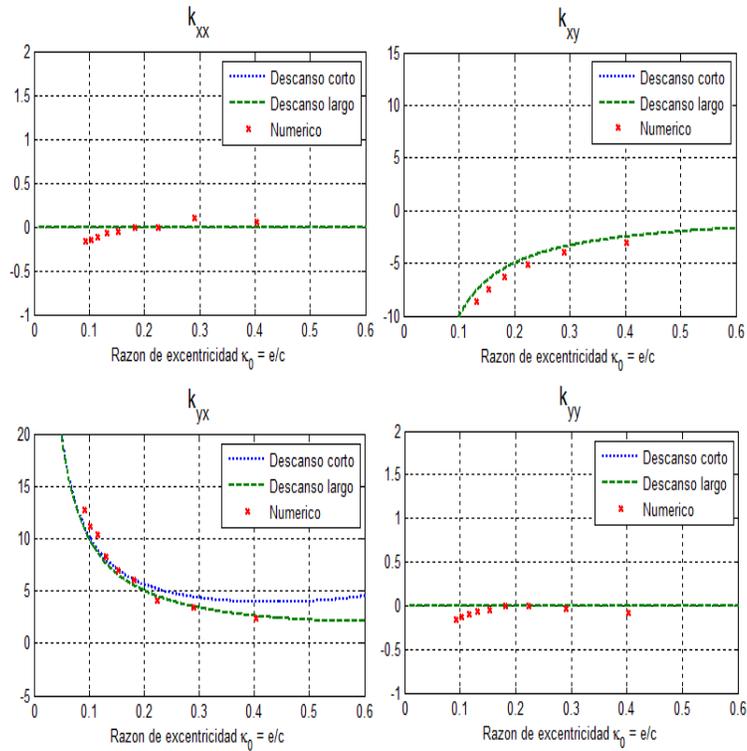


Figura 4.45: Validación de coeficientes lineales de rigidez con predicciones teóricas en modelo sin cavitación

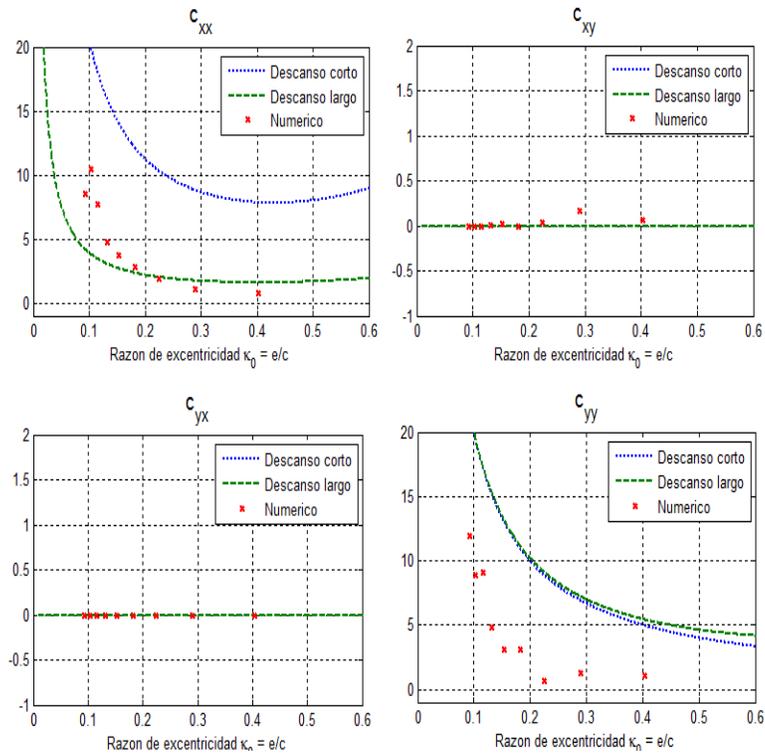


Figura 4.46: Validación de coeficientes lineales de amortiguamiento con predicciones teóricas en modelo sin cavitación

En los Gráfico 4.4 y Gráfico 4.5 se muestran los coeficientes de rigidez no lineales variando la velocidad de rotación y según la dirección en la que actúan.

Gráfico 4.4:

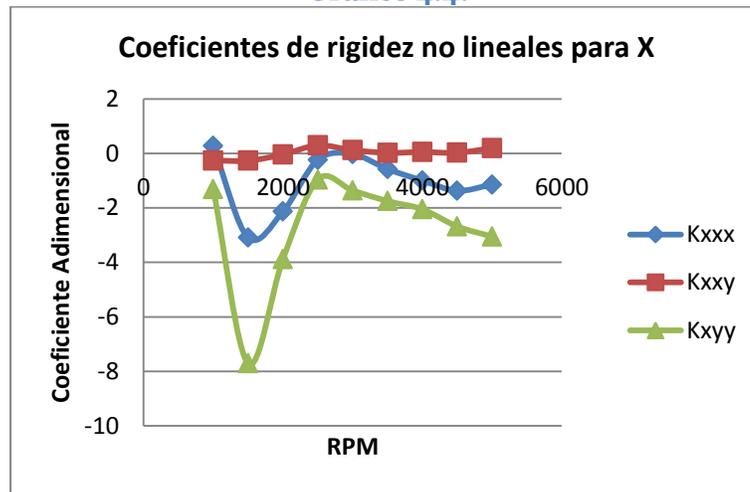
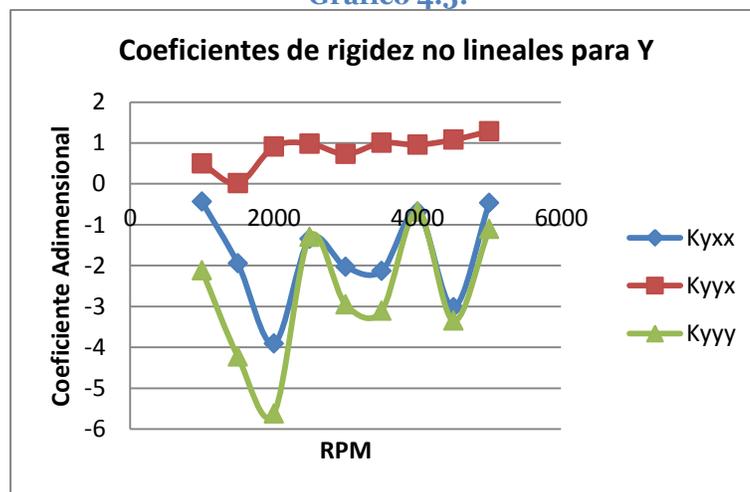


Gráfico 4.5:



Se observa que existe una clara dependencia de la velocidad de rotación, que se expresa en el incremento de las magnitudes de todos los coeficientes de rigidez no lineales para velocidades elevadas.

Hasta 3500rpm las magnitudes de los coeficientes están restringidas a aproximadamente valores absolutos menores a 5. Por sobre 4000rpm las magnitudes crecen exponencialmente, sobre todo las relacionadas a los cuadrados del desplazamiento en x y en y en la dirección x, es decir K_{xxx} y K_{xyyy} . Con incrementos igual de apreciables, se da lo mismo en la dirección y para los coeficientes K_{yxx} y K_{yyyy} .

Prácticamente todos los coeficientes son negativos a excepción de los términos cruzados en las direcciones x e y (K_{xyx} y K_{yxy}), que salvo para 2000rpm son cero.

Los términos directos exhiben una pequeña oscilación en su magnitud. Para toda velocidad el término directo con mayor magnitud es el asociado al desplazamiento al cuadrado en la dirección y, tanto para el equilibrio de fuerzas en x como en y. El término cruzado K_{yxy} es mayor en magnitud que K_{xyx} para toda velocidad de operación.

Gráfico 4.6:

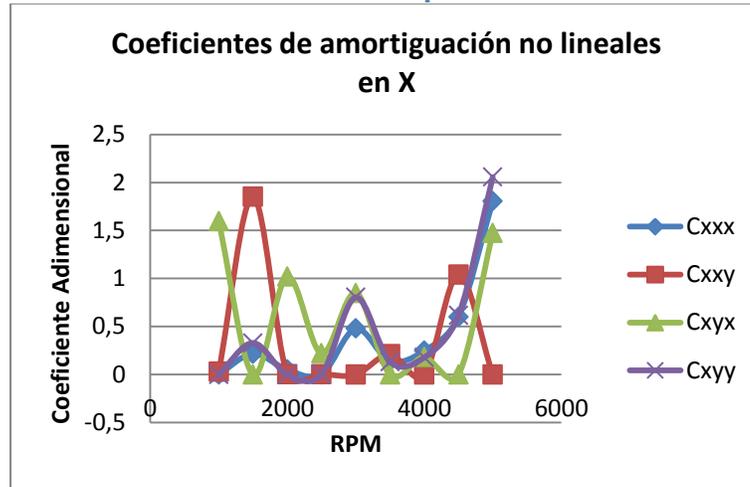
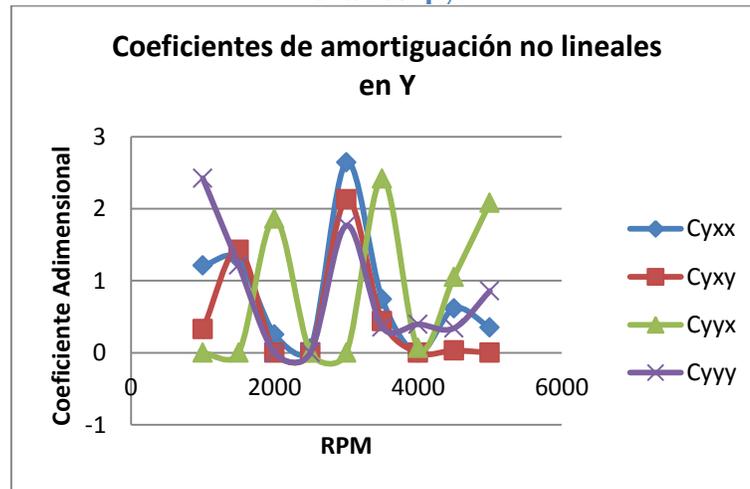


Gráfico 4.7:



Entre 1000 y 3000rpm los coeficientes cruzados decrecen por debajo a -2, alejándose de la tendencia que tienen las curvas de estos coeficientes respecto a la velocidad de operación. Precisamente en esta zona se presenta el *Oil Whirl* para el modelo sin cavitación.

Se aprecia en los Gráfico 4.6: y Gráfico 4.7: que los coeficientes de amortiguamiento no lineales poseen magnitudes bajas, para la mayoría de las velocidades estos son cero salvo puntos aislados. Además se observa que estos coeficientes no poseen una tendencia clara, tienen alta dispersión y simplemente se les puede limitar en un rango acotado de acción.

4.8.2 Modelo con cavitación y con pared rígida

Se presentan los resultados para los coeficientes lineales para 5 velocidades comprendidas entre 1000 y 5000rpm, con intervalos de 1000rpm.

Gráfico 4.8:

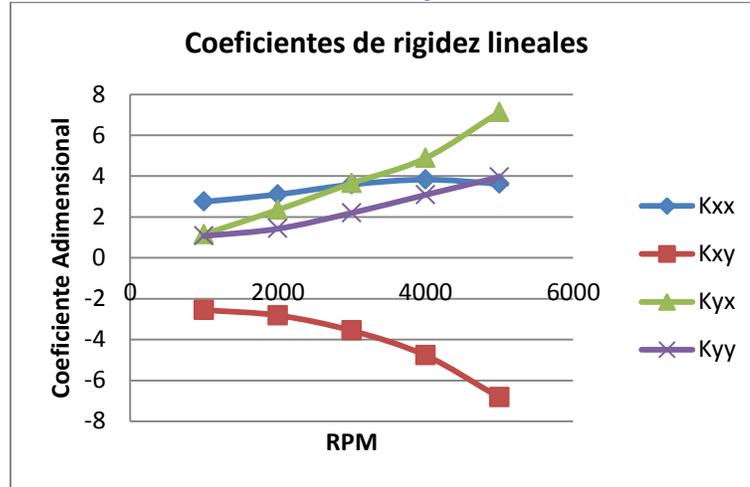
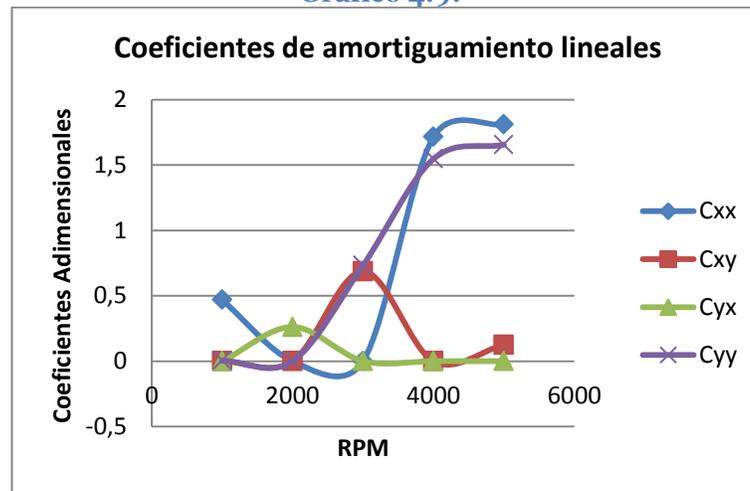


Gráfico 4.9:



Se tiene que los coeficientes de rigidez lineales crecen en magnitud con el aumento de la velocidad. Salvo el coeficiente K_{xy} , todos son positivos. Las magnitudes de K_{xy} y K_{yx} tienden a ser iguales, mientras que los coeficientes directos crecen levemente y sitúan sus valores entre 2 y 4 para el rango de velocidades simulado.

Los coeficientes de amortiguamiento cruzados tienden a mantenerse nulos, tal como en el caso sin cavitación, mientras que los directos tienden a crecer con la velocidad, por sobre 3000rpm, dado que también se obtuvieron valores cercano a cero para 1000 y 2000rpm.

Para las velocidades 4000 y 5000rpm determinación de los coeficientes fue inestable.

El ajuste de la reacción del fluido F , representada por la combinación lineal de coeficientes dinámicos, con la fuerza resultante entre la excitación externa y la masa por la aceleración del rotor, se ve de la siguiente forma:

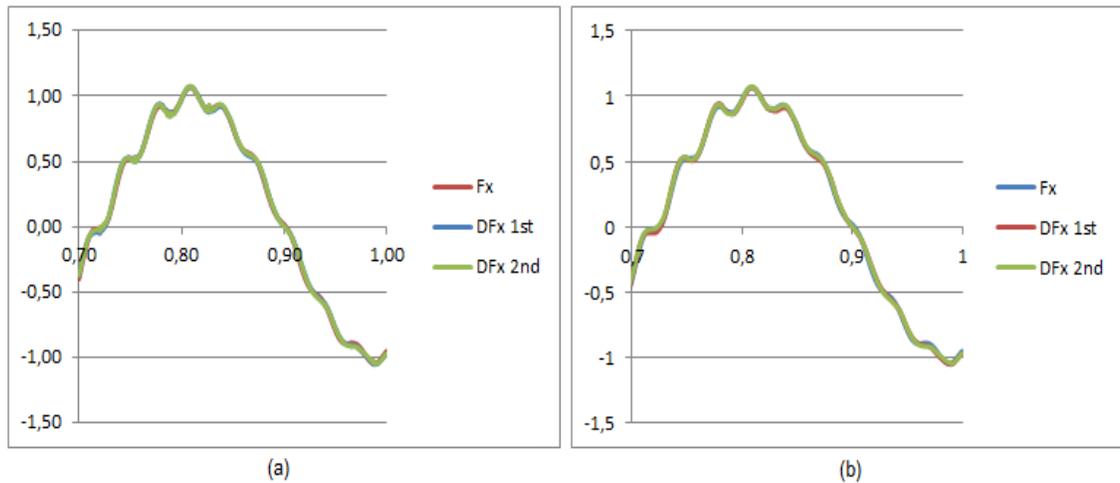


Figura 4.47: Equilibrio de fuerzas a 4000rpm en x: (a) Sin Inercias Virtuales, (b) Con Inercias Virtuales

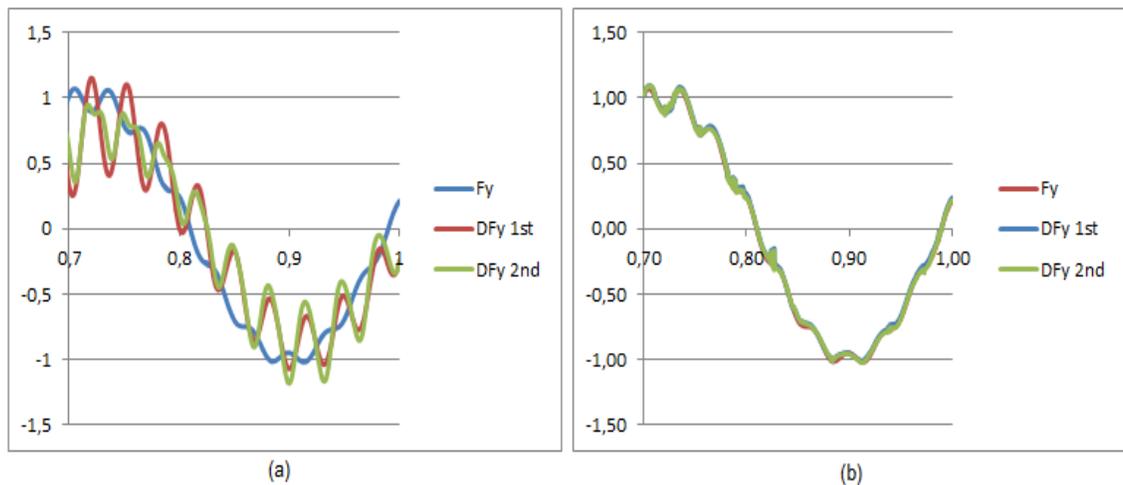


Figura 4.48: Equilibrio de fuerzas a 4000rpm en y: (a) Sin Inercias Virtuales, (b) Con Inercias Virtuales

Donde F_i es la respuesta a la reacción del fluido en la dirección i , siendo la diferencia entre la fuerza de excitación externa y la masa por la aceleración en i . DF_i corresponde a la reacción del fluido en i , cuando es seguido de 1st se trata de una representación con coeficientes lineales mientras que cuando le sigue 2nd se tiene una representación de coeficientes no lineales ($i = \{x, y\}$).

No se consideran las inercias virtuales con términos asociados a las aceleraciones que no correspondan a la dirección del equilibrio de fuerzas, debido a que su aporte en la optimización de mínimos cuadrados de las curvas de fuerzas es despreciable. Con la inclusión de estos términos de inercias virtuales se tiene:

$$F_{x,L} = k_{xx} \cdot \Delta x + k_{xy} \cdot \Delta y + c_{xx} \cdot \dot{x} + c_{xy} \cdot \dot{y} + m_x \cdot \ddot{x}$$

$$F_{y,L} = k_{yx} \cdot \Delta x + k_{yy} \cdot \Delta y + c_{yx} \cdot \dot{x} + c_{yy} \cdot \dot{y} + m_y \cdot \ddot{y}$$

Se observa que con la inclusión de estos coeficientes el ajuste en x mejora levemente, mientras que para la dirección se aprecia una importante mejoría en la concordancia de curvas. Esto se aprecia la Tabla 4.3:

Tabla 4.3: Variación de magnitud de función objetivo respecto a inercias virtuales a 4000rpm

	S _x Lineal	S _y Lineal
Sin Inercias virtuales	0,43	145,38
Con Inercias Virtuales	0,37	0,63

Se utilizaron coeficientes de inercia virtuales para poder determinar los coeficientes lineales de forma más estable y mejorar el ajuste de curvas.

De esta forma se tienen los siguientes coeficientes de inercias virtuales:

$$m_x = 5,535 \quad m_y = 7,041 \quad A \quad 4000rpm$$

$$m_x = 3,745 \quad m_y = 5,911 \quad A \quad 5000rpm$$

Una vez determinados los coeficientes lineales con la inclusión de estas inercias virtuales, el procedimiento para la obtención de los coeficientes dinámicos no lineales es idéntico al ya utilizado.

En las figuras Figura 4.49 y Figura 4.50 se muestra la validación de los resultados numéricos respecto a las predicciones teóricas basadas en las aproximaciones de descanso corto y de descanso largo, y aplicando la condición de Gumbel, mostrada en muestra que las diferencias más significativas se dan para los coeficientes de amortiguamiento. En general estos términos tienen una distancia más menos constante respecto a las predicciones teóricas. En cuanto a los coeficientes de rigidez, se notan mayores diferencias para los términos directos. En particular, el coeficiente K_{yy} a bajas κ muestra un crecimiento en su magnitud.

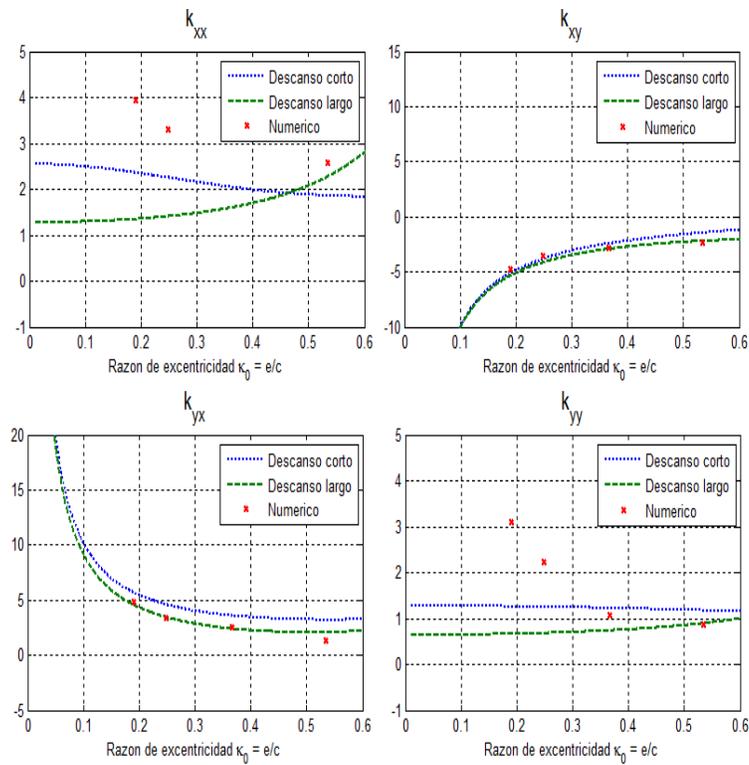


Figura 4.49: Validación de coeficientes lineales de rigidez con predicciones teóricas en modelo con cavitación

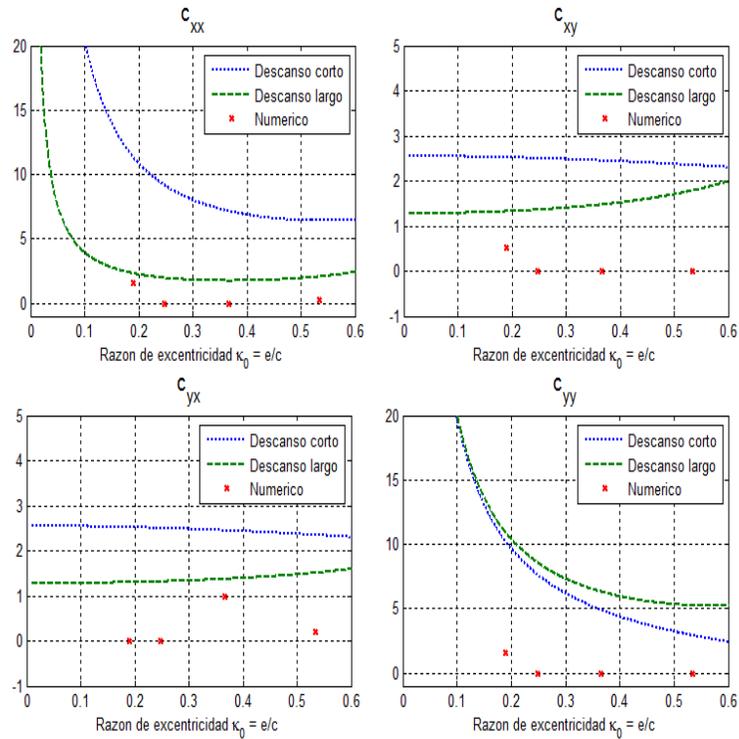


Figura 4.50: Validación de coeficientes lineales de amortiguamiento con predicciones teóricas en modelo con cavitación

En base a los coeficientes lineales obtenidos se determinan los no lineales:

Gráfico 4.10:

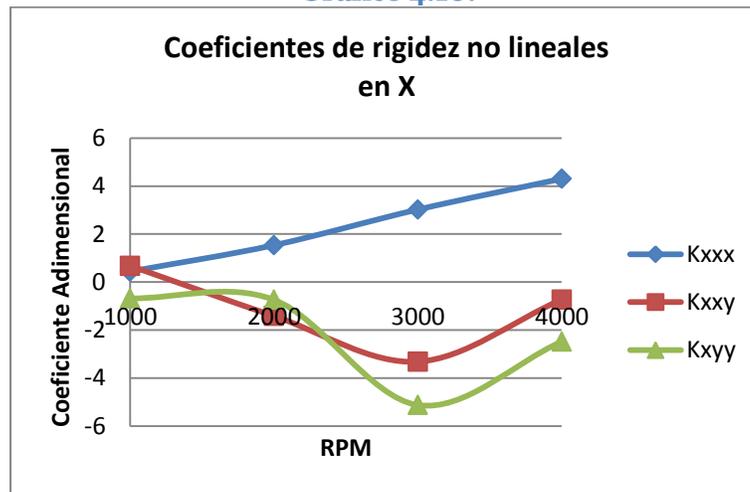
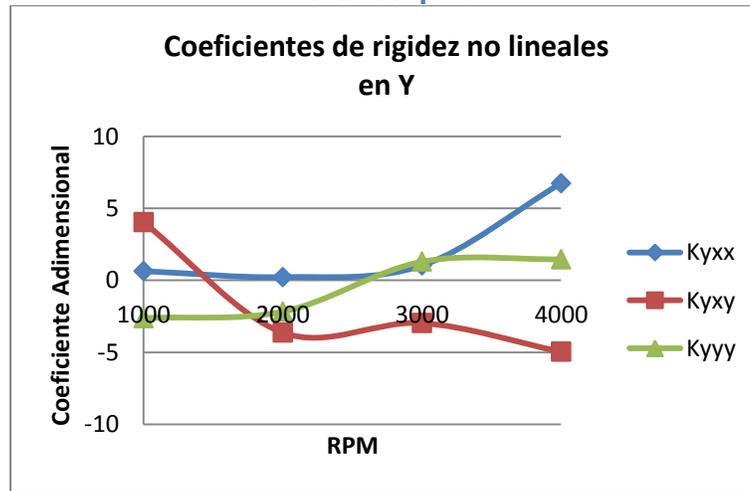


Gráfico 4.11:



Se observa que los coeficientes de rigidez no lineales asociados al cuadrado del desplazamiento en x (K_{xxx} y K_{yxx}) son positivos para todas las velocidades simuladas. En el caso de los términos asociados a desplazamientos en y , en general tienen signo negativo.

Los términos K_{xxx} y el K_{yxx} crecen con la velocidad de operación, mientras los términos asociados al desplazamiento en y poseen un comportamiento algo irregular, con un cambio de curvatura alrededor de 3000rpm.

Los coeficientes de amortiguamiento no lineales poseen magnitudes bajas, prácticamente nulos, a excepción algunos puntos aislados. El equilibrio en x muestra que para 3000rpm estos términos dejan de ser cercanos a cero, aumentando drásticamente los coeficientes asociados a los desplazamientos de x (C_{xxx} y C_{xyx}). Mientras que para el equilibrio en y se tiene que la mayoría de los

resultados están acotados entre 0 y 2, salvo algunos de los coeficientes que presentan magnitudes que se escapan de este rango.

Gráfico 4.12:

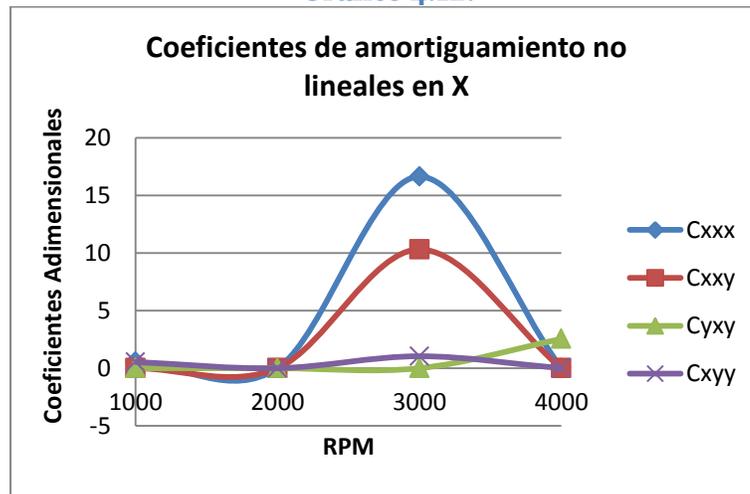
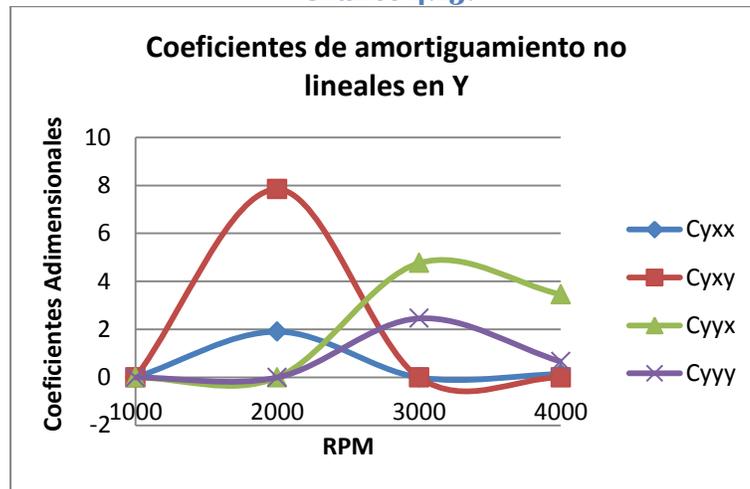


Gráfico 4.13:



4.8.3 Modelo con cavitación y con pared flexible

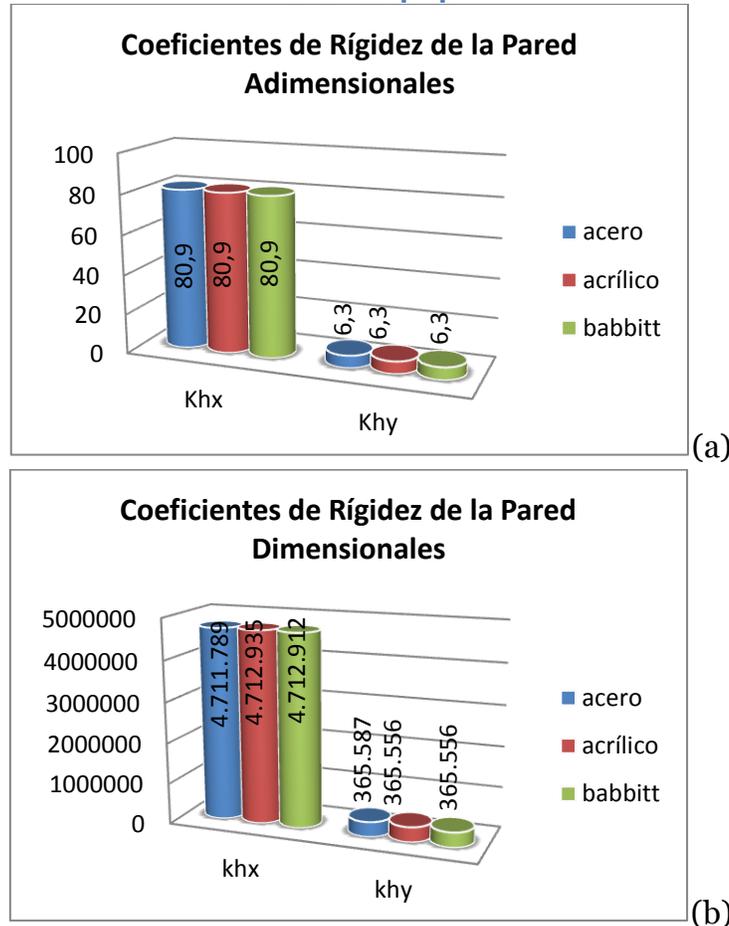
En el Gráfico 4.14 se muestran las magnitudes de los coeficientes de rigidez del material de la pared, obtenidos según la descripción hecha al final de la sección 3.3. Se muestran las magnitudes adimensionales (a) como las dimensionales (b).

Se puede observar que las magnitudes obtenidas para los tres materiales son idénticas según la dirección de los coeficientes de rigidez. Se aprecia que la magnitud es significativa en la dirección x, en la que se aplica la carga estática.

Estos resultados fueron obtenidos al optimizar los resultados de la cinemática del rotor para las velocidades de operación 1000rpm y 2000rpm. Al incluir los resultados obtenidos a 4000rpm prácticamente estos coeficientes no varían pero

el ajuste de curvas entre las fuerzas de excitación y de respuesta para esta velocidad es malo, obteniéndose unas funciones objetivos S_x y S_y no óptimas (debido a las limitaciones impuestas a los coeficientes de rigidez lineales directos).

Gráfico 4.14:



4.8.4 Comparación de coeficientes dinámicos

En esta sección se compararán los resultados para los coeficientes dinámicos bajo tres análisis:

- Según la consideración del fenómeno cavitación
- Según la consideración de flexibilidad de la pared del descanso.
- Según la aproximación de coeficientes dinámicos

En el primer análisis se presentarán resultados tanto para coeficientes lineales como no lineales, para modelos que consideran la pared rígida y para los resultados obtenidos para velocidades de operación iguales (1000 a 4000 rpm). Los coeficientes no lineales comparados son los de rigidez debido a que ya se ha

observado que el efecto que tienen los coeficientes de amortiguamiento en la respuesta no es determinante, más aún los coeficientes no lineales.

En el segundo análisis se compararán los coeficientes de rigidez lineales directos, K_{xx} y K_{yy} , para los tres materiales usados y las velocidades de operación 1000 y 2000rpm. Los demás coeficientes coinciden con los obtenidos en el modelo con cavitación y pared rígida.

En el tercer análisis se medirá el aporte que genera la utilización de coeficientes dinámicos no lineales.

4.8.4.1 Comparación según cavitación

A continuación en la Figura 4.51 se muestran las diferencias de magnitud obtenidas para los coeficientes dinámicos lineales.

Al considerar la cavitación los coeficientes de rigidez directos dejan de ser nulos y las magnitudes de los coeficientes de rigidez cruzados bajan. Se puede observar que los coeficientes de amortiguamiento poseen magnitudes bajas, cercanas a cero, por lo que desde ya se puede considerar el aporte de estos coeficientes no tan relevante respecto a los de rigidez.

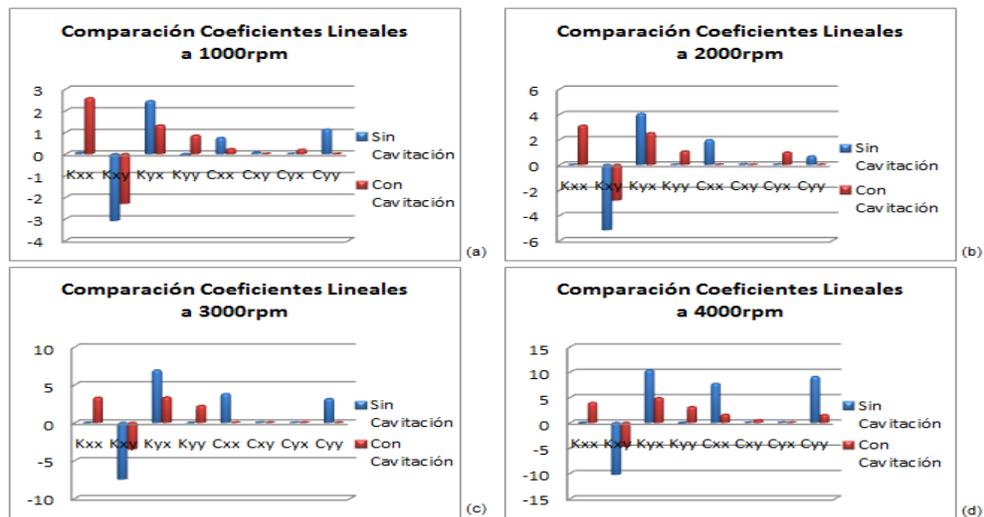


Figura 4.51: Comparación de coeficientes lineales según consideración de la cavitación

En la Figura 4.52 se muestra la variación de los coeficientes de rigidez no lineales. Se omite la comparación entre coeficientes de amortiguamiento no lineales debido a que el aporte de estos coeficientes no es determinante en el ajuste de las curvas de excitación y respuesta del fluido, debido a que estos coeficientes poseen magnitudes pequeñas y en muchos casos despreciables y

que no siguen una clara tendencia respecto a la velocidad de operación y presentan gran dispersión.

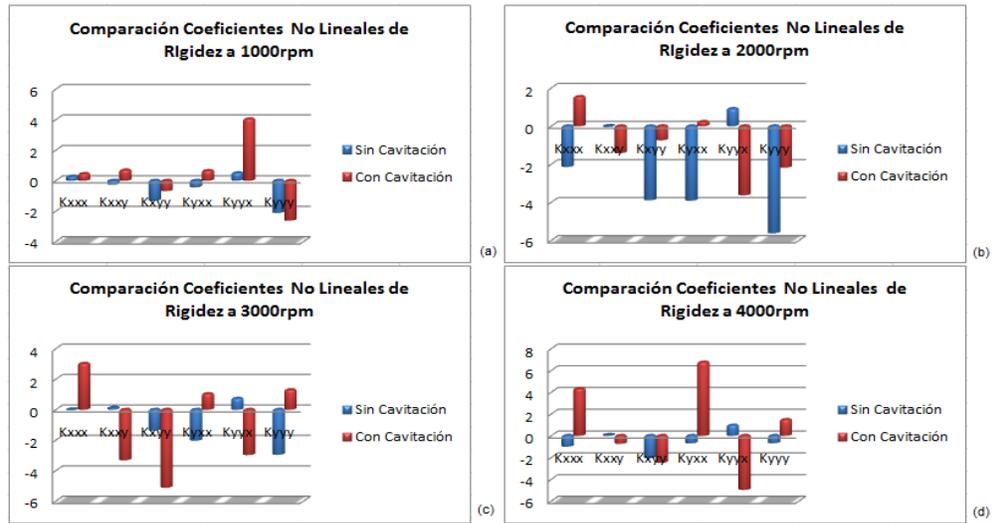


Figura 4.52: Comparación de coeficientes de rigidez no lineales según la consideración de cavitación

4.8.4.2 Comparación según flexibilidad de la pared

Se muestran en la Figura 4.53 los coeficientes de rigidez directos obtenidos en el modelo con pared rígida y los modelos con pared flexible, ambos considerando cavitación. La magnitud de éstos baja al considerar la flexibilidad del material del descanso y no se logran distinguir diferencias entre los coeficientes de los distintos materiales usados para caracterizar la pared del descanso, tal como pasa con los coeficientes de rigidez de la pared.

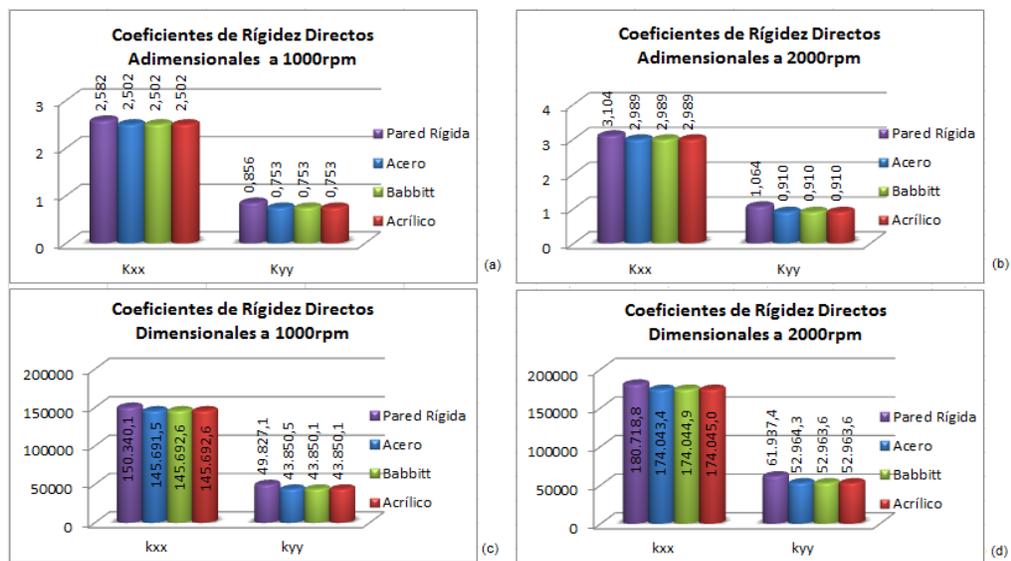


Figura 4.53: Comparación de coeficientes de rigidez lineales directos modelo con pared rígida (y cavitación) versus modelos con pared flexible

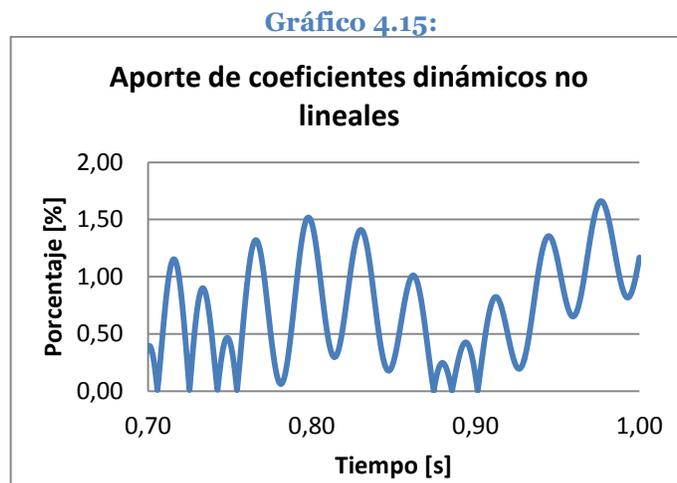
4.8.4.3 Comparación según aproximación de descansos dinámicos

La utilización de aproximaciones no lineales de coeficientes dinámicos ayuda a un mejor ajuste de curvas de fuerzas de excitación y de respuesta.

Se puede cuantificar el porcentaje de aporte de los términos no lineales en la rigidez total de la fuerza que ejerce el fluido frente a la excitación externa aplicada al descanso.

El Gráfico 4.15 corresponde a un modelo que incluye el fenómeno de cavitación y a 4000rpm. Para este caso se tiene el mayor aporte de los coeficientes no lineales, y como se observa del gráfico anterior este no alcanza un 2%.

En las Tabla 4.4 y Tabla 4.5 se comparan los valores alcanzados por las funciones objetivos S_x y S_y al minimizar. Se muestran los resultados tanto lineales como no lineales, para cuatro velocidades comunes entre ambos modelos.



Se puede observar que para el modelo sin cavitación se tienen funciones objetivos menores al incluir términos no lineales, tanto de rigidez como de amortiguamiento. En este modelo el aporte de coeficientes de amortiguamiento no lineales genera este efecto de mejoramiento del valor de la función objetivo. En el caso con cavitación se tiene que la minimización no genera funciones objetivos tan pequeñas como en el caso sin cavitación, pero tal como se ha mostrado en Gráfico 4.15 para este modelo y a 4000rpm se obtiene el mayor aporte de los coeficientes de rigidez no lineales.

En el modelo sin cavitación los coeficientes lineales de amortiguamiento, directos, poseen un peso considerable en la magnitud de la respuesta del fluido, que determina que también los términos no lineales sean considerables. Esto no pasa en los modelos con cavitación, en los que se imponen los términos de rigidez. Esto justifica que para modelos sin cavitación se obtengan

minimizaciones con funciones objetivos ínfimas, debido al aporte de los coeficientes no lineales de amortiguamiento que si aporta a la respuesta deñl fluido.

De los valores de la Tabla 4.5, se observa que a medida que aumenta la velocidad de operación la función objetivo correspondiente a modelos con coeficientes dinámicos no lineales crece. Se interpretan estos resultados en virtud del escaso aporte de los términos no lineales de amortiguamiento, que prácticamente se mantienen cercanos a cero. Probablemente con otro modelo de coeficientes no lineales de orden superior, que considerasen a estos términos relacionados sólo con velocidades, y no con el producto de velocidades por desplazamiento con el modelo propuesto por Sawiki & Rao, se podrían haber tenido resultados mejores a mayores velocidades en los modelos que consideran cambio de fase.

Hay que agregar, que a la vista de las magnitudes de las funciones objetivo de las Tabla 4.4 y Tabla 4.5, a pesar de la mejora que se tiene con la inclusión de los términos lo lineales, bastaría con una aproximación lineal para tener resultados confiables. Esto se refleja mejor para los resultados obtenidos en los modelos con cavitación, y que son resultados más apegados a las condiciones reales de operación del descanso.

Tabla 4.4: Funciones objetivos modelo sin cavitación

RPM	1000	2000	3000	4000
Sx lineal	3,995	0,250	0,003	0,002
Sx no lineal	1,060	0,003	9E-6	2E-6
Sy lineal	3,214	0,657	0,018	0,001
Sy no lineal	1,833	0,013	3E-4	8E-6

Tabla 4.5: Funciones objetivos modelo sin cavitación

RPM	1000	2000	3000	4000
Sx lineal	0,103	0,262	0,184	0,371
Sx no lineal	0,048	0,049	0,058	0,289
Sy lineal	4,387	0,796	0,214	0,630
Sy no lineal	0,162	0,098	0,057	0,316

Capítulo 5

Discusión y Conclusión

Se obtuvo coeficientes dinámicos de rigidez y de amortiguamiento a partir de un modelo CFD, basado en el descanso hidrodinámico disponible en el laboratorio de sólidos de la Facultad. Se desarrollaron tres modelos fundamentales: sin cavitación y pared rígida, con cavitación y pared rígida y, con cavitación y pared flexible. En cada uno de éstos se consideraron coeficientes dinámicos no lineales. Se trabajó en un rango de velocidad de rotación comprendido entre los 1000rpm y 5000rpm, que generaron órbitas con excentricidades de hasta un 50% de la holgura del descanso aproximadamente. Los coeficientes dinámicos se estimaron gracias a un método de identificación de parámetros basado en el dominio temporal y los coeficientes lineales son validados a través de predicciones analíticas.

Para el primer modelo se logró obtener coeficientes lineales bastante concordantes respecto a las predicciones teóricas basadas en aproximaciones de descanso largo y de descanso corto, con la condición de Sommerfeld utilizada sobre la presión del fluido.

Luego, para el segundo modelo, con cavitación, se validaron los coeficientes lineales bajo las mismas aproximaciones basadas en la geometría del descanso, pero aplicando esta vez la condición de Gumbel para representar de una forma más aproximada la distribución de presiones en el descanso. Si bien esta no es la mejor condición para la presión, es bastante útil dada su simplicidad. Así, se obtuvieron coeficientes de rigidez cruzados bastante apegados a las aproximaciones, mientras que los directos siguen la tendencia de las curvas teóricas desplazados de éstas levemente. Los coeficientes de amortiguamiento en este caso no se ajustan bien, dado que para las velocidades simuladas estos se mantenían cercanos a cero, y sólo a altas velocidades tendían a crecer. Idealmente se esperaría que los coeficientes estuviesen bien apegados a las curvas de predicción, pero hay que considerar que estas se construyen bajo el supuesto de Gumbel, que sólo lleva a cero a las presiones negativas dadas en el fluido. El modelo CFD utiliza el algoritmo de Elrod para caracterizar la ruptura del fluido y la cavitación del descanso. Esto se pudo comprobar al graficar la distribución de presiones a través del eje tangencial y verificar que se obtenían distribuciones similares a las que se presentaron en conjunto con el algoritmo en la sección de antecedentes.

Se observó un cambio en las excentricidades al considerar la cavitación. Se produjo un desplazamiento del locus desde el eje y, para los modelos sin cavitación, a una zona intermedia en el plano XY. Se verificó bajo las aproximaciones de descanso corto y largo, si la posición de equilibrio alcanzada por el rotor estaba acorde con la predicción del

locus de estas aproximaciones, concluyéndose que la predicción de aproximación de descanso corto es más efectiva.

Además se analizó la zona de cambio de fase en el fluido, basado en el cambio de velocidad de rotación y la configuración de las presiones de cambio de estado necesarias por el modelo computacional para cavitación. Se determinó que a mayores diferencias entre las presiones de condensación y de evaporización del fluido hay mayor estabilidad en la zona de cambio de fase, y el gas se presenta como una zona de transición bien definida (de contorno suave), en la que no se alcanza a formar una burbuja de puro gas. Para diferencias menores de las presiones de cambio de fase, se forma una vasta zona en la que se desarrolla una burbuja de gas. Se observó que a mayores velocidades se tiene mayor estabilidad. Esto se podría explicar debido a que la presión a velocidades altas está mejor distribuida tangencialmente (se alcanzan máximos de presión menores, y la zona de presiones negativas se reduce).

Se pueden observar los efectos provocados por el *Oil Whirl* en los tres modelos desarrollados. Entre 1000 a 2000rpm para el primer modelo, desde 4000rpm para los modelos con cavitación. La aparición de este fenómeno afecta directamente la magnitud de los coeficientes no lineales. Además la determinación de los coeficientes lineales se volvió un tanto más inestable.

Se introdujeron inercias virtuales a la reacción del fluido para el modelo con cavitación a 4000rpm. Con la inclusión de los coeficientes asociados a estas se logró minimizar de mejor forma la diferencia entre las curvas de excitación y de respuesta. Estos coeficientes son recomendados a velocidades altas de operación (números de Reynolds altos), por sobre 4000rpm.

Las magnitudes de los coeficientes no lineales bajo condiciones normales son bajas, y siguen cierta tendencia a crecer con la velocidad de operación. Al aparecer el *Oil Whirl* se produce un incremento en las magnitudes de los coeficientes. Para modelos con cavitación se pueden discriminar los términos no lineales de amortiguamiento usados, debido a su escaso aporte. A mayores velocidades adquieren mayor protagonismo estos términos no lineales, y se propone incluir coeficientes de amortiguamiento no lineales sólo a altas velocidades y asociados sólo a potencias de la velocidad.

En consideración de la flexibilidad del descanso se puede concluir que esta es determinante para la determinación del punto de equilibrio del rotor y los máximos de presión desarrollados por el fluido en el descanso. Sin embargo, para la determinación de coeficientes dinámicos la flexibilidad de la pared no tiene mayor influencia, tal como se muestra en la Figura 4.38 y la Tabla 4.2. Las órbitas temporales obtenidas entorno al punto de equilibrio para los modelos con pared rígida y flexible son prácticamente iguales. Se recomienda encontrar el punto de equilibrio considerando la flexibilidad del descanso, para luego simular con pared rígida al buscar la determinación de coeficientes dinámicos.

Bibliografia

- ADINA. 2008. *Theory and Modeling Guide*. ADINA R & D, Inc.
- Attia, M.; Bouaziz, S.; Maatar, M.; Fakhfakh, T. & Haddar, M.; 2010. Hydrodynamic and Elastohydrodynamic Studies of a cylindrical journal bearing, *Mechanics Modelling and Production Research Unit*, 155-163
- Braun, M. J.; Hannon, W. M. 2010, *Cavitation formation and modeling for fluid film bearing: A Review, Proc. Inst. Mech. Engrs., Part J*, 224, 839-863
- Choy, F. K.; Braun, M. J. & Hu, Y. 1991. *Nonlinear effects in a plain journal bearing: part 1 – analytical study. ASME Journal Tribology*, 113, 555-562
- Funakawa, M. & Tataru, A. 1964. *Stability criterion of an elastic rotor in journal bearings. Trans. JSME*, 218, 1238-1244
- Hirani, H. ,Athre, K. , & Biswas, S. 1998. *Rapid and globally convergent method for dynamically loaded journal bearing design. Proc. Inst. Mech. Engrs. Part J*, 212, 207-214
- Hori, Y. 1959. *A theory of oil whip. Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 26(2), 189-198
- Hori, Y., 2006, *Hydrodynamic Lubrication*, Springer-Verdag Tokyo
- Lasdon, L.S., & Waren, A.D. 1978. *Design and Testing of a Generalized Reduced Gradient Code for Nonlinear Programming. ACM Transactions and Mathematical Software*, 4, 34-50
- Liu, H.; Xu H.; Ellison, P. J. & Jin Z. 2010. *Application of Computational Fluid Dynamics and Fluid-Structure Interaction Method to the Lubrication Study of a Rotor-Bearing System, Journal of Tribology*, 38, 325-336
- Lund, J.W. 1987. *Review of the concept for dynamic coefficients for fluid films journal bearings. ASME Journal of Tribology*, 109, 38-41
- Meruane, V.; Pascual, R. 2008. *Identification of nonlinear Dynamic Coefficients in plain Journal Bearings, Tribol. Int* 42(10), 1478-1486
- Muszynska, A. 1987. *Tracking the mystery of oil whirl. Sound Vib.*, 8-11
- Newkirk, B.L. 1924. *Shaft Whipping. General Electric Review*, 169
- Newkirk, B.L. & Taylor, H.D. 1925. *Shaft whipping due to oil action in journal bearing. General Electric Review*, 559-568

- Rao, T. V. V. L. N. & Sawiki, J. 2002. *Linear stability analysis for a hydrodynamic journal bearing considering cavitation effects*. *Tribology Transactions*, 45(4), 450-456
- Rao, T. V. V. L. N. & Sawiki, J. 2002. *Dynamic coefficient prediction in multi-lobe journal bearings using a mass conservation algorithm*. *Tribology Transactions*, 46(3), 414-420
- San-Andrés, L. & De-Santiago, O. 2004. *Forced response of a squeeze film damper and identification of forcé coefficients from large orbitals motions*. *Journal of Tribology*, 126, 292-300
- San-Andrés, L. & De-Santiago, O. 2005. *Identification of Journal Bearing Force Coefficients under high dynamic loading centered static operation*. *Tribology of Transactions*, 48, 9-17
- Sawiki, J. & Rao, T. V. V. L. N. 2001. *Nonlinear prediction of rotordynamic coefficients for a hydrodynamic journal bearing*. *Tribology of Transactions*, 44(3), 367-374
- Sawiki, J. & Rao, T. V. V. L. N. 2004. *A Nonlinear Model for prediction of dynamic coefficients for a hydrodynamic journal bearing*. *International Journal of Rotating Machinery*, 10(6), 507-513.