



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**ESTUDIO EXPERIMENTAL DE LA ESTADÍSTICA ESPACIAL EN
TURBULENCIA DE ONDAS CAPILARES**

**TRABAJO PARA OPTAR AL TÍTULO DE
MAGISTER EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN FÍSICA**

ANDRÉS FERNANDO FRANCO GÓMEZ

PROFESOR GUÍA:

CLAUDIO FALCÓN BEAS

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:

MARCEL CLERC GAVILAN

RODRIGO HERNÁNDEZ PELLICER

SERGIO RICA MERY

GUSTAVO DÜRING HIDALGO

SANTIAGO DE CHILE

MAYO DE 2012

Resumen

Este trabajo se dedica a la medición de la estadística espacial de la Turbulencia de Ondas Capilares, que puede ser definida como un sistema estadístico fuera del equilibrio de ondas aleatorias no lineales. El trabajo presenta inicialmente los aspectos teóricos en el Capítulo 1 y constituyen la base del análisis. El sistema ondulatorio estudiado experimentalmente es abordado en el Capítulo 2 donde se usa una interfaz que se forma entre dos fluidos inmiscibles de densidades similares (agua y aceite de silocona) y dispuestos con alturas iguales induciendo una simetría en el eje vertical ($z \rightarrow -z$). En la interfaz son excitadas fluctuaciones de ondas superficiales de capilaridad a través de la aplicación de un forzado aleatorio de baja frecuencia. De este sistema se extraen datos de potencia inyectada promedio $\langle I(t) \rangle$ a los fluidos con el fin de controlar la amplitud de forzado con la que se excitan las ondas, y secuencias de perfiles de onda en una dimensión $\eta(x)$ que proveen la información de amplitudes y longitudes de las ondas excitadas.

Como punto de partida del análisis, detallado en el Capítulo 3, inicialmente se corrobora el comportamiento lineal de la propagación de ondas en la interfaz midiendo la relación de dispersión al aplicar un forzado de baja amplitud y frecuencia sinusoidal. Esto también permite determinar el rango en los números de onda k donde se desarrollan las ondas capilares propias del sistema, a saber, entre 0.105 mm^{-1} y 1.0 mm^{-1} . Finalmente, los resultados al crear un estado de Turbulencia de Ondas son analizados a través de la Función de Densidad de Probabilidad $P(\eta(x))$ que muestra un comportamiento cuasi-gaussiano de las amplitudes de ondas capilares, y la Densidad de Potencia Espectral $S(k)$ que muestra el comportamiento de una ley de potencia en función de los números de onda k ($S(k) \sim k^{-\alpha}$). El mejor ajuste a la pendiente da como resultado $\alpha = -4.39$ el cual esta en buen acuerdo con las predicciones teóricas cuya potencias espectrales son proporcionales a $S(k) \sim k^{-19/4}$ (interacción tres ondas) y $S(k) \sim k^{-9/2}$ (interacción de cuatro ondas). Estableciendo una comparación más precisa permite concluir que se trata de un sistema donde la interacción no lineal es débil, y debido a la simetría impuesta en el sistema se trata de un mecanismo de interacción no lineal donde intervienen cuatro ondas principalmente.

Agradecimientos

Inicialmente debo agradecer a mi familia quienes han hecho un esfuerzo excepcional para que yo haya accedido a la oportunidad de realizar estudios de posgrado fuera de mi país natal, Colombia. Particularmente agradezco a mi Tío Jorge Iván Franco, quien siempre me apoyo para llevar a cabo este proyecto, y a mis Abuelos maternos, quienes en su momento fueron fundamentales para mi formación personal y apoyo en mi formación profesional.

Quiero dar gracias al profesor Marcel Clerc quien fue el primero en abrirme las puertas de la manera más cordial para ingresar al programa de Magister en Ciencias con Mención en Física en la Universidad de Chile, y posteriormente dar gracias por haber encontrado en mi director de tesis, Claudio Falcón, una persona amable, sensata, responsable y muy optimista, quien me dió la oportunidad de participar en este proyecto excepcional poniendo siempre mucha fe y paciencia en mi.

Quiero agradecer a mis compañeros de Laboratorio en especial a Leonardo Gordillo por el buen intercambio académico, y al personal del taller de Mecánica siempre por su amable disposición y profesionalismo para solucionar detalles técnicos del montaje experimental.

Finalmente, agradecer al destino por haberme guiado correctamente y dispuesto las cosas para crecer personalmente y profesionalmente en Chile, país que siempre me ha dado excelentes oportunidades, amigos y experiencias.

Índice general

Introducción	1
1. Marco Teórico	9
1.1. Ondas propagadas en una interfaz formada por dos líquidos inmiscibles . . .	10
1.1.1. Cálculo de la relación de dispersión de gravedad	16
1.1.2. Cálculo de la relación de dispersión de capilaridad	17
1.1.3. Longitud capilar	19
1.1.4. Efecto de la viscosidad en la relación de dispersión	21
1.2. Introducción al concepto de Turbulencia	22
1.2.1. Fundamentos de la Turbulencia Hidrodinámica	23
1.3. Turbulencia de Ondas	26
1.3.1. Formalismo Hamiltoniano para ondas	28
1.3.1.1. Hamiltoniano de interacción para no-linealidad débil	32
1.3.2. Balance de energía en el rango inercial	36
1.3.3. Análisis dimensional de la Densidad de Potencia Espectral PSD	38
1.3.3.1. Unidades de la PSD	38
1.3.3.2. PSD para ondas de gravedad en función de ω	39
1.3.3.3. PSDs para ondas de capilaridad en función de ω	40
1.3.3.4. PSD para ondas de gravedad en función de k	41

1.3.3.5. PSD para ondas de capilaridad en función de k	42
2. Sistema experimental	43
2.1. Montaje experimental	43
2.1.1. Excitación de ondas	44
2.1.2. Generación de ondas	48
2.2. Sistemas de medida	51
2.2.1. Determinación de la Potencia Inyectada $I(t)$	51
2.2.2. Hoja láser para la observación del perfil de onda	62
2.2.2.1. Captura de imágenes del perfil de onda capilar	63
3. Estadística espacial de la Turbulencia de Ondas	67
3.1. Principios de los códigos de procesamiento	68
3.1.1. Detección de borde del perfil de onda	68
3.1.2. Extracción de la amplitud de onda	70
3.2. Relaciones de dispersión	73
3.2.1. Relación de dispersión gravito-capilar	74
3.2.2. Relación de dispersión de la interfaz agua-aceite	75
3.2.3. Longitudes de decaimiento de interfaces agua-aire y agua-aceite	78
3.3. Estudio preliminar de la Turbulencia de Ondas en interfaz Agua-Aire	81
3.3.1. Función de densidad de probabilidad de las ondas PDF	82
3.3.2. Densidad de potencia espectral de las ondas PSD	84
3.4. Desarrollo de la Turbulencia de Ondas Capilares en interfaz Agua-Aceite	86
3.4.1. Amplitudes rms de las ondas capilares para diferentes amplitudes de forzajes	86
3.4.2. Funciones de densidad de probabilidad de las ondas PDF	87
3.4.3. Desarrollo de la cascada turbulenta en función de la potencia inyectada	89

Conclusiones	93
3.5. Conclusiones del trabajo de tesis	93
3.6. Limitaciones y perspectivas	94
Bibliografía	95

Indice de tablas

1.1. Valores para el número de onda capilar k_c y la longitud capilar λ_c en superficies libres formadas por diferentes líquidos.	20
1.2. Valores teóricos para la magnitud relación de dispersión gravito-capilar inviscida para diferentes interfaces calculado con $k = 1.0 \text{ mm}^{-1}$ y la magnitud correspondiente a la corrección de la relación de dispersión debida a la viscosidad.	22
1.3. Unidades de los parámetros de la PSD de gravedad en función de la frecuencia angular ω	39
1.4. Unidades de los parámetros de la PSD de capilaridad en función de la frecuencia angular ω	40
2.1. Comparación entre valores calculados de la relación de dispersión gravito-capilar con valores de la relación de dispersión capilar en una interfaz agua-aceite.	47
2.2. Kurtosis y Skewness para las PDFs de Fuerza y Velocidad.	54
2.3. Resultados de σ_F , σ_V , $\langle I \rangle$ y el parámetro de correlación ρ calculados usando las trazas medidas de Fuerza y Velocidad para cada amplitud de voltaje de forzaje.	59
3.1. Skewness y la Kurtosis de las PDFs calculadas en interfaz agua-aire.	84
3.2. Amplitud rms de las ondas capilares como función de la potencia inyectada a la interfaz agua-aceite para un forzaje aleatorio filtrado en 3 Hz.	87

3.3. Skewness y Kurtosis de las PDFs en una interfaz agua-aceite para las diferentes potencias inyectadas de forzaje aleatorio filtrado en 3 Hz.	89
3.4. Tendencia de la pendiente de la PSD como función de la potencia inyectada a la interfaz agua-aceite.	91
3.5. Estimación del orden no-lineal ϵ de las ondas generadas en la interfaz agua-aceite en función de la potencia inyectada promedio.	92

Índice de figuras

1.	Esquema de un flujo turbulento realizado por Leonardo da Vinci.	1
2.	Izquierda: Flujo laminar y flujo turbulento en una columna de humo. Derecha: Turbulencia en la atmósfera de la Tierra.	2
3.	Gran mancha roja de Júpiter y sus alrededores, tomada por la sonda Voyager 1, en Febrero 25, 1979. También se observan grandes óvalos blancos observados desde la década de 1930. Se aprecian inmensas áreas de Turbulencia a la izquierda de la gran mancha roja.	3
4.	Imagen de ondas superficiales donde se observa una gran diversidad de longitudes de onda.	5
1.1.	Esquema de una interfaz. Se muestra en el sistema coordenado asociado la elevación en un punto de la interfaz $\zeta(x, y, t)$, la dirección de la aceleración de la gravedad y la condición de presión continua en un punto a lo largo de la interfaz P_0 . Figura tomada de [31].	15
1.2.	Advección caótica a número de Reynolds alrededor de $R = 240$ a través de dos obstáculos. Figura tomada de [44].	24
1.3.	Figura tomada de http : //fdrc.iit.edu/research/nagibResearch.php Grid Turbulence IV. Flujo de un fluido a número de Reynolds alrededor de $R = 1800$ a través de una grilla de obstaculos.	24

1.4. Fenomenología de la Turbulencia Hidrodinámica Completamente Desarrollada representada por la cascada de Richardson. Figura tomada de [44]. Esta imagen puede entenderse a través de la *cascada de Richardson* ilustrada en la Figura 1.4, la cual presenta una imagen esquemática del estado turbulento provocada por un flujo de energía ε , que recorre todas las escalas posibles de tal forma que si la energía se introduce en una escala L el sistema responderá generando escalas mas pequeñas dadas por $l_n = l_0 r^n$ donde r es un número entre cero y uno, y n un número natural que representa todas las escalas siguientes más pequeñas a L . En la fenomenología de Richardson, las escalas l_n representan el tamaño de los vortices de orden n (ilustrados como figuras irregulares). Estos vortices están agrupados en tamaños decrecientes porque el flujo de energía se dirige hacia la escala de disipación, que en este sistema corresponde a una escala límite η de tal forma que $\eta < l_0 r^n$ para todo n donde la energía se disipa por otros mecanismos diferentes a la formación de vortices. 26

1.5. Geometría de una relación de dispersión del tipo $\omega(\vec{k}) \propto k^\alpha$ con $\alpha > 1$ donde se ilustra que bajo esta condición ambas interacciones de tres y cuatro ondas son resonantes. Figura tomada de [53]. 34

1.6. Esquema que ilustra el balance de energía en el rango inercial. 37

2.1. **a)** Esquema del sistema experimental. **b)** Imagen de perfil del sistema experimental. 44

2.2. Relación de dispersión Gravito-capilar (línea a trazos negra). **a)** interfaz agua-aire. **b)** interfaz agua-aceite. En cada una de las figuras la línea a trazos roja (- -) corresponde a la contribución de la gravedad a la relación de dispersión y la línea a trazos azul (- -) a la contribución capilar. La línea vertical continua negra indica el crossover entre las ondas de gravedad y capilares, para la Figura **a)** $k_{cross-w} = 0.370 \text{ mm}^{-1}$ y en **b)** $k_{cross-wo} = 0.105 \text{ mm}^{-1}$ 45

2.3. Figura **a)** velocidad de fase teórica para una interfaz *agua-aire*. Figura **b)** Velocidad de fase teórica para interfaz *agua-aceite*. En ambas Figuras las curvas de línea a trazos roja (- -) corresponde a la contribución de la gravedad donde la relación de dispersión es *normal* y las curvas de línea a trazos azul (- -) corresponde a la contribución capilar donde la relación de dispersión es *anómala*. 46

2.4. Montaje experimental: el vibrador electromecánico ubicado en la parte superior de la estructura metálica. En la parte interior a la estructura se observa la celda experimental con agua que ha sido teñida con fluoresceína lo que explica su color rojizo. También se observa el acoplamiento entre el pistón y el eje del vibrador a través del eje que atraviesa el retén por la parte superior de la caja. 48

2.5. Izquierda: traza de la señal aleatoria de forzaje que alimenta al vibrador tomada con una desviación estándar $\sigma_{V_{forz}} = 0.522$ V. Derecha: PDF de la misma traza de voltaje tomada en un intervalo de 300 s. 50

2.6. Densidad de potencia espectral de la señal aleatoria. 50

2.7. Sensores de fuerza y aceleración acoplados entre el eje del vibrador y el eje-pistón. 52

2.8. Esquema de conexión de los sensores. (a) Sensor de fuerza. (b) Sensor de aceleración. (c) amplificador de carga del sensor de aceleración. (d) Conciacionador de señal del sensor de fuerza. (e) Tarjeta de adquisición. (f) PC. . 52

2.9. Muestras de las trazas de Fuerza (rojo) y Velocidad (azul) capturadas por los sensores. 53

2.10. *PDFs* Fuerza normalizadas para seis diferentes voltajes de forzaje en el vibrador $\sigma_{V_{forz}}$. Para cada curva el color corresponde al $\sigma_{V_{forz}}$ como sigue: 0.52 V ($\square \square \square$), 0.71 V ($\nabla \nabla \nabla$), 1.14 V ($\triangleright \triangleright \triangleright$), 1.55 V ($+$ $+$ $+$), 2.03 V ($\triangleleft \triangleleft \triangleleft$), 2.70 V ($*$ $*$ $*$). El inset muestra las *PDFs* no normalizadas siguiendo la misma convención de marcadores a los datos. Se observan grandes discrepancias con respecto a la forma de una distribución gaussiana para los voltajes de 2.03 V y 2.70 V. Las discrepancias se producen porque el vibrador electromecánico esta sometido a una gran amplitud de oscilación que superan su rango óptimo de operación. 54

2.11. PDFs Velocidad normalizadas para seis diferentes voltajes de forzaje en el vibrador $\sigma_{V_{forz}}$. Para cada curva el color corresponde al $\sigma_{V_{forz}}$ como sigue: 0.52 V ($\square \square \square$), 0.71 V ($\nabla \nabla \nabla$), 1.14 V ($\triangleright \triangleright \triangleright$), 1.55 V ($++ +$), 2.03 V ($\triangleleft \triangleleft \triangleleft$), 2.70 V ($***$). El inset muestra las PDFs no normalizadas siguiendo la misma convención de marcadores a los datos. 55

2.12. PDFs de la potencia inyectada cuando el pistón se vibra sin fluidos (negro) y cuando el pistón se vibra sumergido en aceite de silicona de 5 cSt (rojo). 57

2.13. Distribución de Craig para diferentes valores del parámetro de correlación ρ . Para cada curva el color corresponde al parámetro ρ como sigue: azul $\rho = 0$, magenta $\rho = 0.25$, verde $\rho = 0.50$, negra $\rho = 0.75$, roja $\rho = 0.90$ 58

2.14. Muestra de la traza de potencia inyectada $I(t)$ calculada al tomar el producto de las trazas de $F_{vib}(t)$ y $V(t)$. La línea a trazos es el cero de la potencia inyectada. La línea negra continua corresponde a la potencia inyectada promedio, en este caso, $\langle I(t) \rangle = 6.4 \times 10^{-4}$ W. 58

2.15. PDFs de Potencias Inyectadas experimentales ajustadas con PDFs teóricas. Izquierda: $\langle I \rangle = 0.64$ mW. Derecha: $\langle I \rangle = 1.30$ mW. 60

2.16. PDFs de Potencias Inyectadas experimentales ajustadas con PDFs teóricas. Izquierda: $\langle I \rangle = 3.50$ mW. Derecha: $\langle I \rangle = 6.20$ mW. 60

2.17. PDFs de Potencias Inyectadas experimentales ajustadas con PDFs teóricas. Izquierda: $\langle I \rangle = 9.90$ mW. Derecha: $\langle I \rangle = 18.50$ mW. La colas de estas PDFs presentan discrepancias con el ajuste teórico provenientes del error experimental en la medida de la traza de Fuerza. 60

2.18. Desviación estandar de la Fuerza σ_F y Desviación estandar de la Velocidad σ_V contra voltaje de forzaje $\sigma_{V_{forz}}$. El es ajuste empírico, para la curva en la izquierda da una pendiente de 0.17 N/V y para la curva de la derecha la pendiente es de 0.035 (m/s)/V. 61

2.19. Derecha: Desviación estandar de la Fuerza σ_F contra Desviación estandar de la Velocidad σ_V . El ajuste empírico tiene una pendiente de 4.70 N/(m/s). Izquierda: Potencia inyectada promedio $\langle I(t) \rangle$ contra desviación estandar al cuadrado de la Fuerza σ_F^2 . El ajuste empírico tiene una pendiente de 90.37 mW/N². 61

2.20. Posición del sistema óptico debajo de la celda experimental.	62
2.21. Posición de la cámara para la captura del perfil de onda en la interfaz agua-aceite.	63
2.22. Montaje experimental para la medida de la interfaz agua-aceite $\eta(x)$	64
2.23. Perfiles de interfaz agua-aceite de mediana amplitud y forzaje aleatorio con espectro filtrado en 3 Hz.	65
2.24. Perfil de interfaz agua-aceite de gran amplitud y forzaje aleatorio con espectro filtrado en 1 Hz.	66
2.25. Perfil de interfaz agua-aceite de gran amplitud y forzaje aleatorio con espectro filtrado en 1 Hz.	66
3.1. Ejemplo numérico de la función $\eta(x)$ que se espera obtener de las imágenes crudas y que contiene la información de las amplitudes y longitudes de onda.	68
3.2. Ejemplo de un perfil de onda extraído por detección de borde superpuesto con la imagen bruta de interfaz agua-aceite. La longitud de este perfil es de 250 mm.	69
3.3. Perfil de onda extraído por detección de borde superpuesto con su imagen bruta correspondiente. La longitud de este perfil es de 170 mm.	69
3.4. Obtención de la amplitud de onda de escala de gris a un valor numérico. La curva en puntos negros (•••) es el cambio de contraste entre la zona clara y la zona oscura de la interfaz. La línea formada por los puntos rojos (•••) es el promedio de gris en la interfaz, en este caso es de 0.27. La línea negra (—) es el ajuste al gradiente de la interfaz. La línea azul a trazos (---) es el equivalente en el número de subpixel al promedio en escala de grises.	71
3.5. Aspecto de la altura del perfil de onda extraído solamente por detección de borde. El inset muestra un acercamiento de una sección del mismo perfil donde se puede apreciar con mayor detalle la discretización.	71
3.6. Amplitud de onda de la interfaz agua-aceite extraída de la imagen bruta y el perfil de onda. La escala inferior esta en unidades de mm.	72
3.7. Amplitud de onda de la interfaz agua-aceite extraída de la imagen bruta y el perfil de onda. La escala inferior esta en unidades de mm.	72

3.8. Amplitud de onda de la interfaz agua-aceite superpuesta con la imagen bruta. La escala inferior esta en unidades de mm. 72

3.9. Imagen del perfil de onda de un sistema agua-aire donde se ha aplicado una frecuencia de forzaje de 9 Hz. El pistón que genera la excitación sinusoidal de la interfaz se ha delineado en rojo. 75

3.10. Relación de dispersión gravito-capilar. Datos experimentales (+), error experimental (|−+−|), ajuste teórico de la relación de dispersión gravito-capilar (—), curva teórica relación de dispersión capilar (---), curva teórica relación de dispersión de gravedad (----) y crossover entre gravedad y capilaridad (—) tiene un valor de 0.367 mm^{-1} 75

3.11. Imagen del perfil de onda de un sistema agua-aceite donde se ha aplicado una frecuencia de forzaje de 10 Hz. El pistón que genera la excitación sinusoidal de la interfaz se ha delineado en rojo. 76

3.12. Relación de dispersión para un sistema agua y aceite de silicona de 5 cSt. Datos experimentales (+), error experimental (|−+−|), ajuste teórico de la relación de dispersión gravito-capilar (—), ajuste teórico de la relación de dispersión capilar (---) y relación de dispersión de gravedad teórica (---). El inset muestra la misma curva en escala loglog donde la pendiente medida del ajuste a los datos experimentales es de 1.45 mm/s, en teoría es de 1.5 mm/s. 78

3.13. Longitud de decaimiento en mm contra frecuencia de forzaje aplicada al vibrador en Hz para una interfaz agua-aire. El inset muestra la misma curva en escala loglog donde se presentan dos ajustes lineales: uno para gravedad (—) con pendiente de -2.02 y uno para capilaridad (—) con pendiente de -0.61, la línea vertical del inset (----) corresponde al crossover en frecuencia temporal y tiene un valor de 13.61 Hz. 79

3.14. Longitud de decaimiento en mm contra frecuencia de forzaje aplicada al vibrador en Hz para una interfaz agua-aceite. El inset muestra la misma curva en escala loglog donde se presenta un ajuste lineal con pendiente de -1.21. 80

3.15. Posición de la camara para la captura del perfil de onda en la interfaz agua-aire. 82

- 3.16. PDFs normalizadas de las amplitudes de onda en una interfaz agua-aire para las potencias inyectadas de 1.50 mW (* * *), 8.90 mW (< < <), 13.10 mW (+ + +), 21.90 mW (□ □ □) y el ajuste teórico (o o o). El inset muestra las PDFs no normalizadas siguiendo la misma convención de signos. 83
- 3.17. Izquierda: PSD de los datos de amplitudes de ondas en una interfaz agua-aire donde el promedio de la potencia inyectada al sistema $\langle I \rangle$ es de 21.9 mW. La curva presenta la PDS experimental y ajuste lineal de gravedad y capilaridad. La cascada de energía experimental se presenta en negro (—), el ajuste a la cascada de gravedad $\sim k^{-\alpha_g}$ en rojo (- - -) con una pendiente medida de $\alpha_g = 3.67$, y el ajuste a la cascada de capilaridad $\sim k^{-\alpha_c}$ en azul (- - -) con una pendiente de $\alpha_c = 4.24$. Derecha: acercamiento del crossover teórico (- - -) calculado en 0.37 mm^{-1} , mientras que el crossover calculado (línea vertical —) se encuentra en 0.47 mm^{-1} 85
- 3.18. Amplitud promedio rms de las ondas calculada con un conjunto de 1000 imagenes por cada punto. Datos experimentales ($\Delta \Delta \Delta$) y ajuste lineal (- - -) La pendiente del ajuste corresponde a 0.088 mm/mW 87
- 3.19. PDFs normalizadas de las amplitudes de onda en una interfaz agua-aceite para las potencias inyectadas de 0.64 mW (x x x), 1.30 mW (+ + +), 3.50 mW ($\triangleright \triangleright \triangleright$), 6.20 mW (< < <), 9.90 mW (* * *), 18.5 mW (□ □ □) y el ajuste teórico (o o o). El inset muestra las PDFs no normalizadas siguiendo la misma convención de signos. 88
- 3.20. PSDs de las amplitudes de onda para la potencia inyectada de 0.64 mW (x x x), 1.30 mW (+ + +), 3.50 mW ($\triangleright \triangleright \triangleright$), 6.20 mW (< < <), 9.90 mW (* * *), 18.5 mW (□ □ □) el forzaje es aleatorio con frecuencia de corte en 3 Hz. 90

Introducción

El fenómeno de la turbulencia fue reconocido como un comportamiento particular propio de fluidos en movimiento desde hace al menos 500 años gracias a las observaciones sistemáticas de Leonardo da Vinci (1452–1519) plasmadas en sus bocetos como el que se presenta en la Figura 1. En ésta, da Vinci también describió una observación en palabras académicas de su época:

*”Observe el movimiento de la superficie del agua, el cual se asemeja al cabello y el cual tiene dos movimientos, uno es causado por el peso del cabello y el otro por la dirección de los rizos; así el agua tiene movimientos que se arremolinan, una parte es debida a la corriente principal, el otro debido a un movimiento aleatorio y revertido.”*¹

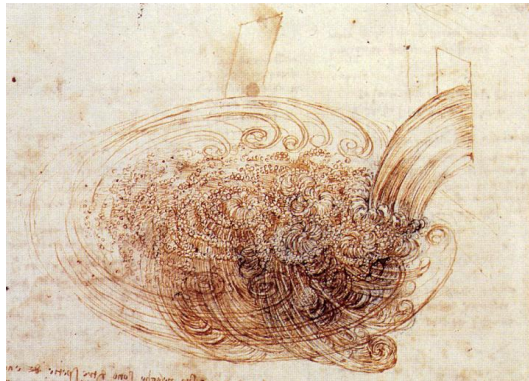


Figura 1: Esquema de un flujo turbulento realizado por Leonardo da Vinci.

Este fenómeno fue denominado *”turbolenza”* por da Vinci y de aquí el origen de la palabra moderna para este comportamiento robusto de la agitación de los fluidos.

Un flujo turbulento es un fenómeno complejo no lineal que abarca un gran rango de escalas físicas en el Universo conocido y ha sido descrito por Richard Feynman como uno

¹Trans. Piomelli in Lumley, J.L., 1997. Some comments on turbulence. Phys. Fluids A 4, 203-211.

de los problemas más importantes no resueltos en la Física Clásica [1]. En este campo, el entendimiento del comportamiento de flujos turbulentos en fluidos Newtonianos esto es, fluidos donde la relación entre el esfuerzo aplicado y la velocidad de deformación es lineal, es uno de los problemas más intrigantes y desafiantes en toda la Física Clásica. Es un hecho que gran parte de los flujos que vemos son turbulentos. Ejemplos de estos se pueden presentar en la transferencia de calor en reactores nucleares [2], en conducción de petróleo en oleoductos [3], en fenómenos geofísicos como el clima², circulación del aire atmosférico y de las aguas de los océanos [40], en flujos piroplásticos [4], y en astrofísica como explosión de supernovas y la dinámica de las nubes de polvo interestelares. Ejemplos de este fenómeno en la naturaleza se pueden apreciar en la Figura 2 donde una columna de humo de cigarrillo presenta un flujo laminar, es decir cuando el flujo es ordenado, estratificado³ y suave, y turbulento cuando el movimiento del fluido se da en forma caótica, de tal forma que las partículas se mueven desordenadamente y sus trayectorias se encuentran formando vórtices; o la turbulencia generada en la atmósfera terrestre evidenciada a través de la dinámica de las nubes. En la Figura 3 se observa el aspecto de los vórtices turbulentos en la atmósfera de Júpiter en las cercanías de la gran mancha roja cuyas dimensiones son del orden de $40000 \text{ km} \times 14000 \text{ km}$ la cual es lo suficientemente grande para contener dos o tres planetas con un diámetro de la Tierra.

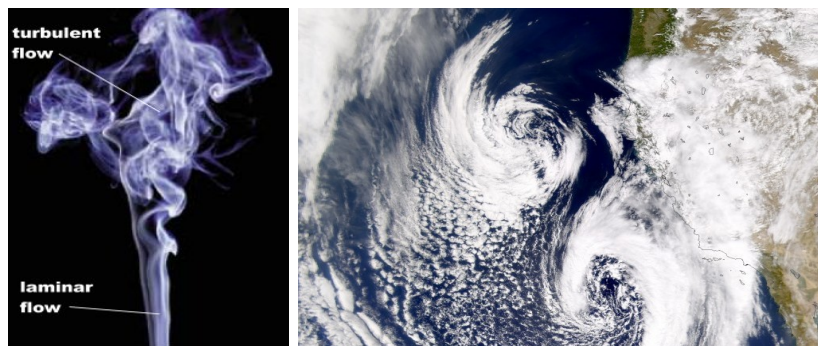


Figura 2: Izquierda: Flujo laminar y flujo turbulento en una columna de humo. Derecha: Turbulencia en la atmósfera de la Tierra.

²El clima es el resultado de la interacción de varios factores atmosféricos, biofísicos y geográficos que pueden cambiar en el tiempo y en el espacio. Estos factores son la temperatura, presión atmosférica, viento, humedad y lluvia. Así mismo, algunos factores geográficos y biofísicos que determinan el clima en diferentes partes del mundo son: latitud, altitud, las masas de agua, la distancia al mar, las corrientes oceánicas, los ríos y la vegetación.

³En un flujo laminar el fluido se mueve en láminas paralelas sin intersectarse y cada partícula de fluido sigue una trayectoria suave, llamada línea de corriente.



Figura 3: Gran mancha roja de Júpiter y sus alrededores, tomada por la sonda Voyager 1, en Febrero 25, 1979. También se observan grandes óvalos blancos observados desde la década de 1930. Se aprecian inmensas áreas de Turbulencia a la izquierda de la gran mancha roja.

En el estudio de la Turbulencia, sorprendentemente dos aspectos de las observaciones de da Vinci permanecen aún en los estudios modernos. Primero, la separación del flujo en una parte principal y en una fluctuante la cual fue retomada en la ciencia moderna 400 años después en los trabajos de Osborne Reynolds (1894) [9]. Segundo, la identificación de da Vinci de los vórtices como elementos intrínsecos del movimiento turbulento que fue abordada por Lewis Richardson (1922) [10]. Históricamente, las investigaciones acerca de la Turbulencia progresaron alternadamente a partir de medidas experimentales y descripciones teóricas, y últimamente a través de la introducción de simulaciones numéricas a partir del desarrollo de computadores de alta velocidad [5, 6]. A mediados del siglo XX las investigaciones en Turbulencia fueron motivadas por dos problemas prácticos importantes: predicción del clima [7] y la construcción de aviones cada vez más sofisticados [8]. El desarrollo de aviones permitió la construcción de túneles de viento en donde las medidas de arrastre y sustentación sobre un modelo a escala fueron usados para el diseño industrial de aviones a gran escala.

La descripción teórica de la Turbulencia parte de la descripción del flujo en fluidos Newtonianos con las ecuaciones de Navier-Stokes [33] propuestas en el siglo XIX por Claude-Louis Navier y George Gabriel Stokes. Estas ecuaciones son deterministas en el sentido que una vez son especificadas las condiciones iniciales y las condiciones de contorno, la evolución del estado queda completamente determinado, al menos, en principio. Pero debido a que estas ecuaciones son no lineales, las soluciones dependen sensiblemente de las

condiciones iniciales de tal manera que, después de un tiempo corto dos soluciones del flujo con condiciones iniciales infinitesimalmente diferentes pueden volverse totalmente impredecibles. Cambios en el forzamiento externo del fluido o variaciones de las condiciones de contorno pueden producir flujos que varían desde laminares a movimientos más complicados y de ellos el flujo más complejo es denominado *Turbulencia Completamente Desarrollada* donde la velocidad del flujo fluctúa sobre un gran rango de escalas espaciales y temporales. El desarrollo teórico más importante de la Turbulencia completamente desarrollada fue descrita por A. N Kolmogorov en 1941 [45] quien propuso la noción de un "rango inercial" donde el flujo turbulento es isótropo y homogéneo: la energía cinética es inyectada a grandes escalas L a una razón de flujo promedio de energía ε con unidades $\frac{[L]^{5-d}}{[T]^3}$ donde d es la dimensionalidad del sistema⁴. Esta energía se transmite a las escalas más pequeñas debido a un proceso inercial no lineal (conservando la energía) hasta que finalmente se llega a escalas donde la disipación viscosa es dominante y la energía se disipa en calor.

Los desarrollos teóricos en la Turbulencia Hidrodinámica han sido de gran importancia para el completo entendimiento de los fenómenos en fluidodinámica. Ahora, se tiene conocimiento que a través de los fluidos también se pueden propagar ondas [31–33] con un gran rango de longitudes dinámicas que pueden interactuar cuando se encuentran en el régimen no-lineal. La conexión entre estos fenómenos es de gran importancia y radica en que ambos poseen elementos físicos que existen en un gran rango de escalas, en el primero vórtices y en el segundo ondas. Además, en ambas situaciones estos elementos interactúan no linealmente de tal forma que se desarrolla una cascada entendida como el transporte de energía desde las grandes escalas hacia las pequeñas o viceversa, de tal manera que este transporte es local, es decir, debido solamente a escalas dinámicas adyacentes. En contraste, la diversidad de fenómenos en donde se producen ondas por diferentes mecanismos es más amplia que los mecanismos para generar un flujo de un fluido Newtoniano convirtiéndose en una gran área en donde es necesario estudiar primero, las características individuales del tipo de ondas, segundo, determinar en detalle sus mecanismos de interacción y finalmente encontrar la regla que rige la cascada de energía o de otras cantidades conservadas. Por lo tanto, esta situación da origen a la *Turbulencia de Ondas*.

La presencia de fenómenos ondulatorios en la naturaleza abarca desde las escalas cuánticas hasta las astrofísicas. En fluidodinámica, estas incluyen ondas internas producidas por la

⁴Se ha normalizado la densidad del fluido ($\rho = 1$) de tal manera que dimensionalmente la masa se reemplaza por unidades de longitud al cubo $[M] = [L]^3$

estratificación de la densidad y ondas inerciales debidas a la rotación que son importantes en la mezcla entre una atmósfera planetaria y sus océanos [13, 14]; ondas de Kelvin presentes en vórtices cuantizados los cuales son importantes para entender la Turbulencia en el Helio superfluido [15, 16]; ondas de Alfvén las cuales son importantes en Turbulencia del viento solar y el medio interestelar [17–20]; ondas planetarias de Rossby que son importantes para la meteorología y la evolución del clima [21, 40]; ondas en condensados de Bose-Einstein y en óptica no-lineal [22, 23]; ondas en plasmas en dispositivos de fusión [25–27], por nombrar algunos.

En este trabajo se presta especial interés a ondas superficiales de gravedad y capilaridad. Estas son importantes para el entendimiento de la transferencia de momento y energía desde el viento al océano, así como de su transferencia por mecanismos internos a través de las escalas de este tipo de ondas [11, 12, 52, 63, 71, 79–82, 85]. La Figura 4 muestra el aspecto de estas ondas propagadas en el mar en una situación de calma.



Figura 4: Imagen de ondas superficiales donde se observa una gran diversidad de longitudes de onda.

En general, para todos estos ejemplos de sistemas ondulatorios se tiene en común que las ondas presentan amplitudes y fases altamente aleatorias. De manera más específica, en el desarrollo teórico de la Turbulencia de Ondas se tratan campos de ondas dispersivas [31, 32] aunque es aplicable a ondas no dispersivas que interactúan en un gran rango de escalas de amplitudes y longitudes de onda, y puede ser definida como *un sistema estadístico fuera del equilibrio de ondas aleatorias no lineales*. Esta definición es a menudo simplificada tratando ondas débilmente no lineales para los casos cuando la descripción matemática de la Turbulencia de Ondas es más sistemática.

La Turbulencia de Ondas se abordó teóricamente desde la década de 1960 partiendo en la física de plasmas [51] y en ondas en la superficie del agua [52]. Al mismo tiempo el enfoque se desplazó desde la termodinámica del equilibrio a estados turbulentos forzados fuertemente fuera del equilibrio, dependientes del tiempo y del espacio. Las preguntas entonces se enfocaron en cómo la Turbulencia de Ondas contribuye al transporte de la energía y el transporte de partículas a lo largo del plasma en un Tokamak [26, 27], y sobre cómo se produce la transferencia de momento desde el viento al océano [12, 13]. La mayor parte del desarrollo teórico en la Turbulencia de Ondas fue descubierto por Vladimir Zakharov en 1965 de un nuevo tipo de soluciones a la ecuación que describe la evolución del espectro de energía en una ecuación denominada *la ecuación cinética* [72] y correspondiente a un flujo de energía constante a través de las escalas [66]. Estas soluciones son llamadas espectro de Kolmogorov-Zakharov (KZ) porque ellas son análogas al espectro de energía de Kolmogorov de la Turbulencia Hidrodinámica Completamente Desarrollada [44]. Estas soluciones KZ colocaron firmemente a la Turbulencia de Ondas en el dominio de la Turbulencia en general, es decir, *sistemas estadísticos fuertemente fuera del equilibrio con muchos grados de libertad cuyo estado está determinado por un flujo de una cantidad conservada a través del espacio de fase*. Los resultados obtenidos por Vladimir Zakharov fueron publicados en 1965 en [42], y posteriormente un libro de 1992 por Zakharov, Lvov y Falcovich (ZLF) [52]. Recientemente (2011), los resultados teóricos en el área fueron publicados de una manera más comprensiva por S. Nazarenko [53].

Nuevos estudios experimentales han sido conducidos en ondas de gravedad [82] y capilaridad [84] en la superficie de un fluido. En estos experimentos, una sonda capacitiva adquiere la amplitud local de las fluctuaciones de las ondas $h(t)$ en la superficie agua-aire excitadas por medio de un forzado a baja frecuencia. En estos estudios, se calcula la Densidad de Potencia Espectral (PSD) en función de la frecuencia angular ω y la Función Densidad de Probabilidad (PDF) de las amplitudes de las ondas. En otros estudios, también se midió ópticamente la interfaz agua-aire adquiriendo imágenes de ésta [81, 83]. Para ello, se usa una hoja láser que atraviesa el fluido iluminando en la interfaz una línea. Usando un método de binarización de imágenes, se logró detectar la interfaz para adquirir el perfil de la interfaz $\eta(x)$ y a partir de ella estudiar la estadística espacial de ondas de gravedad. Aplicar esta técnica para obtener un perfil de la interfaz $\eta(x)$ donde se desarrollan ondas capilares no se ha realizado antes, lo que podría ayudar a entender el rol de la inyección de energía en las propiedades estadísticas espaciales en la Turbulencia de Ondas Capilares.

Por lo tanto, el estudio que se presenta en este trabajo está dedicado al análisis detallado de la *estadística espacial de Turbulencia de Ondas Capilares*. Su objetivo principal es determinar la respuesta experimental de las Potencias Espectrales y las Funciones de Densidad de Probabilidad en Turbulencia de Ondas Capilares que se generan en una interfaz entre agua y aceite donde ambos líquidos tienen densidades similares. A diferencia de usar una interfaz libre, la particularidad de esta interfaz permite despreciar la propagación de ondas de gravedad de tal manera que las ondas capilares son las dominantes [63].

A pesar de que este estudio es experimental el marco teórico [62, 65–69, 71, 72] se coloca en primer lugar porque constituye la base para comprender los mecanismos de la Turbulencia de Ondas con los cuales se entenderán los resultados posteriores. De tal manera, el Capítulo 1 presenta los aspectos teóricos, donde primero se aborda la teoría de ondas lineales para entender el comportamiento base del sistema experimental. Luego, se introducen los fundamentos de la teoría de la Turbulencia Hidrodinámica Completamente Desarrolla lo cual ofrecerá mayor comprensión para presentar la Turbulencia de Ondas centrándose en sistemas de ondas superficiales de gravedad y capilaridad.

El Capítulo 2 presenta los detalles acerca de la construcción de la interfaz agua-aceite y la técnica para excitar ondas en ella. Estas ondas generadas constituyen el objeto de estudio. También se detallan los sistemas de medida utilizados. El primero para la determinación de la potencia inyectada a los fluidos durante la excitación de las ondas donde además se expone en detalle el comportamiento estadístico de la potencia inyectada al sistema. El segundo es un sistema óptico desarrollado con el fin de capturar imágenes de perfiles transversales a la interfaz y que contienen la información de amplitud y longitudes de onda de las ondas excitadas.

Una vez expuestos los fundamentos teóricos y los métodos experimentales, el capítulo final inicia con los métodos de procesamiento de las imágenes capturadas de las cuales se extraen los datos de amplitud y longitudes de onda, su importancia radica en que la calidad del procesamiento además de la calidad de las imágenes obtenidas garantiza que los resultados obtenidos son de plena confianza. Una vez es determinado que los métodos de procesamiento son fiables, el capítulo presenta la caracterización de las relaciones de dispersión en el régimen lineal con el objetivo de verificar los parámetros de este sistema comparados con las predicciones teóricas de propagación de ondas lineales. Finalmente, la última sección esta dedicada a analizar el desarrollo de la Turbulencia de Ondas variando la amplitud de forzaje con la cual se excitan las ondas desde el régimen lineal al no-lineal. Con esto se podrá determinar el comportamiento estadístico de la amplitud de las ondas a

través de la función de densidad de probabilidad, y también determinar como se desarrolla el espectro de energía para medir últimamente la ley que caracteriza el espectro cuando las ondas están en el régimen turbulento completamente desarrollado. Con estos resultados se establecen comparaciones con las predicciones teóricas. Como conclusión, se encuentra que los resultados experimentales muestran un excelente acuerdo con las predicciones teóricas lo que permite asegurar que los mecanismos de interacción supuestos en la teoría de Turbulencia de Ondas Capilares describen el fenómeno acertadamente en este sistema de estudio.

Capítulo 1

Marco Teórico

En este capítulo se entregan los fundamentos teóricos del estudio de la Turbulencia de Ondas Capilares necesarios para abordar el trabajo desarrollado en esta tesis. Las secciones que se encuentran en este capítulo están organizadas de la siguiente forma. Primero se trata la teoría de propagación de ondas lineales en una interfaz entre dos líquidos inmiscibles y de allí se deducen las relaciones de dispersión de ondas que se propagan en dicha interfaz. Luego se introduce el concepto de Turbulencia por medio de la Turbulencia Hidrodinámica Completamente Desarrollada; su objetivo es plantear los fundamentos y propiedades de un estado fuera del equilibrio llamado de la Turbulencia que pueden ser extendidos a la Turbulencia de Ondas. La teoría de Turbulencia de Ondas estudia estadísticamente en un conjunto de ondas dispersivas no-lineales que interactúan débilmente y esto constituye la base de la dinámica turbulenta. Esta teoría es desarrollada a partir del formalismo Hamiltoniano que describe la energía que se transmite entre las escalas de los modos ondulatorios no-lineales. El paso de las ecuaciones de Hamilton a la descripción estadística de la Turbulencia de Ondas se lleva a cabo al tomar los promedios estadísticos de las ecuaciones dinámicas. Finalmente, para el análisis estadístico se hace uso de la Función de Densidad de Probabilidad (PDF) para describir la estadística de las longitudes en el espacio real y también se deducen por argumentos dimensionales las Densidades de Potencia Espectral (PSD) que ésta teoría predice con el objetivo de tomar estos resultados como base para analizar y concluir sobre los resultados del estudio experimental.

1.1. Ondas propagadas en una interfaz formada por dos líquidos inmiscibles

Se consideran dos líquidos inmiscibles¹ de diferentes densidades, ρ y ρ' (donde $\rho > \rho'$) que se colocan uno sobre el otro de tal manera que forman capas de espesor h y h' respectivamente. En este caso se formará entre estos líquidos una interfaz bien definida que en estado de equilibrio es plana y horizontal debido a la aceleración de la gravedad. Si por el contrario, se perturba esta interfaz, se formarán y propagarán ondas que se originan debido dos fenómenos naturales: la tensión superficial y la aceleración de la gravedad.

Para entender el movimiento de las ondas en la interfaz entre líquidos desde el punto de vista teórico más fundamental es necesario desarrollar las ecuaciones hidrodinámicas que describen el movimiento de los fluidos. En principio el problema de la propagación de ondas también debe abordarse teniendo en cuenta la viscosidad de los fluidos, pero para simplificarlo se tomarán en cuenta solamente fluidos ideales. En tal caso, las ecuaciones hidrodinámicas que describen este movimiento son las ecuaciones de *Euler* de conservación de momento y de masa, junto con las condiciones de borde en la interfaz. Este desarrollo teórico se explicará con detalle a continuación.

Existen dos maneras equivalentes de describir el movimiento de un fluido. En el *método Euleriano*, se describe un aspecto del fluido en términos de lo que sucede observando en un punto fijo \vec{r}_0 cuando el fluido pasa a través de este punto, de tal forma que se están observando continuamente nuevas partículas cuando éstas pasan el punto de observación. En el segundo, llamado *método Lagrangiano* se escoge y observa lo que le sucede a una sola partícula del fluido y se analiza su trayectoria dentro del movimiento del fluido. De tal forma que para construir las ecuaciones de movimiento se toma en consideración una propiedad escalar cualquiera del fluido $F(x, y, z, t)$, como por ejemplo su densidad o su velocidad en un punto \vec{r}_0 y se analiza F en una vecindad diferencial y temporal, es decir, $F(x_0 + d\xi, y_0 + d\eta, z_0 + d\zeta, t_0 + dt)$ y de aquí se obtiene el cálculo de la razón de cambio total $\frac{dF}{dt}$ en este punto,

$$\frac{DF}{Dt} = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0 \frac{d\xi}{dt} + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0 \frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_0 \frac{d\zeta}{dt} + \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_0 \quad (1.1)$$

¹La inmiscibilidad se puede definir aseverando que dos líquidos son *totalmente inmiscibles* si en ninguna proporción forman una mezcla homogénea [29], tal es el caso de los líquidos que se toman en consideración.

que de una manera más compacta se puede presentar en la forma más ampliamente conocida,

$$\frac{DF}{Dt} = \vec{v} \cdot \nabla F + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (1.2)$$

donde la velocidad del fluido es $\vec{v} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \mathbf{i} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \mathbf{j} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \mathbf{k}$ y las funciones $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ representan los desplazamientos en x , y y z del fluido, respectivamente. La ecuación (1.2) es denominada derivada material o lagrangiana. Si bien no se define exactamente cual es la propiedad F su aplicación para describir el comportamiento cinemático de un fluido se extiende a cualquier propiedad escalar de manera general y para todo punto del espacio \vec{r} . En este desarrollo es de interés tomar la propiedad F como la velocidad del fluido en cada coordenada, es decir v_i , donde $i = 1, 2, 3$ corresponden las coordenadas cartesianas x , y , z , respectivamente. De tal manera que la ecuación (1.2) resulta en,

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \vec{v} \cdot \nabla v_i + \frac{\partial v_i}{\partial t} \quad (1.3)$$

En ese caso $\frac{Dv_i}{Dt}$, denominada derivada material, es la aceleración del fluido en cualquier punto del espacio y en cualquier tiempo. Para entender mejor esta relación, si el fluido es estacionario significa que las velocidades v_i para todo i son solo dependientes de la posición, entonces $\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0$ y sin embargo aún hay una contribución a la aceleración total del fluido debida al término $\vec{v} \cdot \nabla v_i$ que es denominado comúnmente término de *advección*.

Un comportamiento adicional que es posible observar en los fluidos es su capacidad de rotar sobre si mismo. En el caso de los fluidos ideales esta propiedad conserva el momentum angular local debido a que no se considera la viscosidad que finalmente provoca su disipación, esto esta establecido a través del teorema de circulación de Kelvin [28]. Este comportamiento de flujo rotacional se describe a través de la vorticidad $\vec{\omega}$, que es la velocidad angular promedio en la vecindad de un punto en el fluido y se calcula como el rotacional de la velocidad,

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}. \quad (1.4)$$

Volviendo a la descripción teórica de las ondas que se propagan en una interfaz entre dos fluidos inmiscibles, es común describir su dinámica teniendo en cuenta que $\vec{\omega} \equiv 0$, lo que significa que el fluido no rota al generarse ondas en la interfaz. Esta *primera aproximación*

tiene una consecuencia indispensable en este desarrollo teórico. Si la vorticidad es cero $\vec{\omega} = 0$, esto constituye una condición necesaria y suficiente para que la velocidad², pueda escribirse como el gradiente de una función escalar denominada potencial de velocidad ϕ que es en general dependiente de las coordenadas espaciales y del tiempo,

$$\vec{v} = -\nabla\phi \quad (1.5)$$

También se toma en consideración la ecuación de continuidad que establece que en un sistema cerrado la cantidad total del fluido que entra en cualquier porción de volumen del sistema debe salir de esta misma porción de volumen. Por ejemplo en el caso más general de un fluido compresible, en un instante de tiempo es posible que en un pequeño volumen entre más fluido del que sale, pero este principio establece que a pesar de esta dinámica la cantidad de fluido se conserva en todo momento y por lo tanto en otro instante la totalidad fluido comprimido debe salir de dicho volumen. La relación teórica que establece este principio es la ecuación de continuidad de la masa,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}) = 0 \quad (1.6)$$

Donde $\rho(\vec{r}, t)$ es la densidad del fluido y puede depender tanto de las coordenadas espaciales como del tiempo. Por lo tanto, *la segunda aproximación* radica en considerar que el fluido confinado es incompresible. La incompresibilidad es una característica que queda bien determinada a través del número de *Mach*, el cual es el cociente entre la velocidad relativa entre una partícula del fluido con respecto al fluido mismo y la velocidad del sonido en el fluido³, $Ma = \frac{U_R}{c}$. Para todos los propósitos prácticos un flujo con número de Mach, $Ma < 0.2$ puede ser tratado como incompresible [30], esto significa que las variaciones de densidad en el fluido alrededor de la partícula son despreciables. En el experimento el número de Mach se estima en $\frac{9 \text{ m/s}}{800 \text{ m/s}} \approx 0.01$ donde 9 m/s es la velocidad máxima estimada del fluido y 800 m/s la velocidad del sonido en aceite de silicona⁴. En otras palabras significa que la densidad no cambia en el tiempo y por lo tanto $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$. Entonces la ecuación (1.6) queda reducida a,

²Esto es formalmente el teorema de Kelvin de la conservación de la circulación.

³Debido a que las partículas del fluido están vibrando (transmitiendo el sonido) a velocidades comparables a las que fluye.

⁴Se utiliza la velocidad del sonido en el aceite de silicona (800 m/s) porque es menor que la del agua 1493 m/s, esto da entonces una cota máxima para el número de Mach en el experimento.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.7)$$

Ahora, sustituyendo la ecuación (1.4) en (1.7) se obtiene,

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (1.8)$$

La ecuación (1.8) determina que la ecuación para el potencial de velocidad de un fluido incompresible debe satisfacer la ecuación de *Laplace*.

La última ecuación necesaria para la descripción de ondas en la interfaz es la ecuación de *Bernoulli*, que es una consecuencia de la ecuación de *Euler*. De tal forma, aplicando la segunda ley de Newton a un elemento de masa del fluido de densidad ρ , las fuerzas totales que actúan sobre el elemento le dan a este una aceleración $\frac{dv_i}{dt}$ en cada coordenada expresada en la ecuación (1.3). El subíndice $i = 1, 2, 3$ se usa aquí también para hacer la correspondencia a los vectores unitarios cartesianos, \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} , respectivamente.

Las fuerzas por unidad de volumen que se asumirán presentes son debidas a la aceleración de la gravedad $\rho \vec{g}$ que es una constante y por lo tanto para su descripción matemática se escoge la coordenada z , de tal forma que esta fuerza se simplifica a $\rho g \mathbf{k}$, más aún, será de utilidad escribir esta fuerza constante como el menos gradiente de un potencial gravitacional, $-\rho \nabla U_g$. Además, el fluido presenta una densidad de fuerza interna debida a la variación de presión de punto a punto en el fluido, es decir, $-\nabla P$. Esto da origen a la conocida ecuación de *Euler* o de continuidad del momentum lineal,

$$\rho \left(\vec{v} \cdot \nabla v_i + \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) = -\rho \nabla_i U_g - \nabla_i P \quad (1.9)$$

Esta ecuación puede simplificarse usando el hecho que en este caso se están tomando fluidos con flujos irrotacionales, es decir que $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ y $\vec{v} = -\nabla \phi$. Entonces, por medio de la identidad, $(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} = \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} - \nabla \vec{v} \cdot \vec{v}$ que es cero por la condición irrotacional se tiene que,

$$\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = (\nabla \vec{v}) \cdot \vec{v} = \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right), \quad (1.10)$$

y además usando la expresión $\frac{\partial v_1}{\partial t} \mathbf{i} + \frac{\partial v_2}{\partial t} \mathbf{j} + \frac{\partial v_3}{\partial t} \mathbf{k} = -\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}$ la ecuación de Euler (1.9)

queda,

$$\rho \left[-\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \right] = -\rho \nabla U_g - \nabla P \quad (1.11)$$

La ventaja de esta ecuación radica en que cada uno de sus términos se puede expresar como un gradiente, de tal forma que esta ecuación se puede integrar dado que el gradiente de una función escalar $\vec{\nabla} F$ multiplicado producto punto por un diferencial vectorial $d\vec{r}$ es un diferencial de la misma función escalar, es decir, $\vec{\nabla} F \cdot d\vec{r} = dF$. Reorganizando los términos de (1.11) agrupándolos en un solo gradiente y multiplicando por $d\vec{r}$ queda $\nabla \left[-\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{1}{2} v^2 + \rho U_g + P \right] \cdot d\vec{r} = 0$. Ahora, integrando y dividiendo por la densidad del fluido resulta,

$$-\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{1}{2} v^2 - \rho g \zeta + P = C(t) \quad (1.12)$$

Donde se ha usado el hecho que $U_g = -g\zeta$ y ζ es la diferencia altura en la coordenada z con respecto a la posición de equilibrio que se asumira en $z = 0$ para que la elevación de la interfaz sea directamente ζ . La constante $C(t)$ en la ecuación (1.12) es dependiente del tiempo y puede ser absorbida por el término $\frac{\partial \phi}{\partial t}$.

Hasta aquí se completan todas las ecuaciones hidrodinámicas necesarias para encontrar el potencial de velocidad en la interfaz, es decir $\phi(x, y, z, t)$ a través de la ecuaciones (1.8) y (1.12) y con estas la dinámica de la propagación de ondas en la interfaz. Al problema también deben asociarse las condiciones de borde, a saber, una debida a la continuidad de la constante de Bernoulli $C(t)$ en cualquier punto de la interfaz y la segunda es la continuidad de la velocidad en el eje \mathbf{k} , es decir la velocidad v_3 . La Figura 1.1 presenta un esquema de la interfaz.

Para simplificar el problema sin perdida de generalidad se considerarán ondas en la interfaz solamente en un plano, es decir, solo usando las coordenadas vertical (\mathbf{k}) y una horizontal (\mathbf{i}). Entonces, la ecuación (1.8) queda reducida a,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad (1.13)$$

Inicialmente, la experiencia en este tipo de problemas permite separar el potencial como el producto de cada una de sus variables, $\phi(x, z, t) = X(x)Z(z)T(t)$. Sustituyendo esta

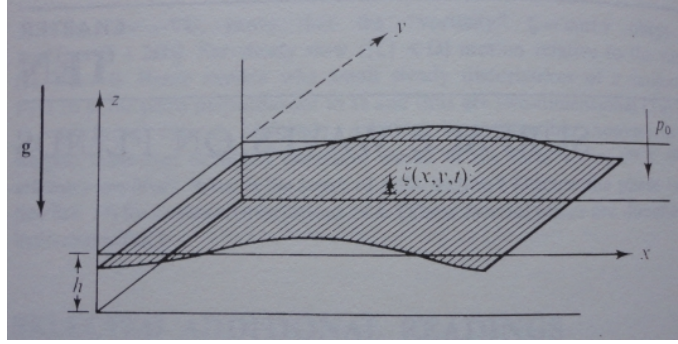


Figura 1.1: Esquema de una interfaz. Se muestra en el sistema coordenado asociado la elevación en un punto de la interfaz $\zeta(x, y, t)$, la dirección de la aceleración de la gravedad y la condición de presión continua en un punto a lo largo de la interfaz P_0 .
Figura tomada de [31].

expresión en (1.13) permite determinar que las ecuaciones de $X(x)$ y $Z(z)$ tienen la forma,

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 X(x) = 0 \quad y \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z(z) = 0, \quad (1.14)$$

cuyas soluciones generales están dadas por $X(x) = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx)$ y $Z(z) = C \exp(ikz) + D \exp(-ikz)$. Claramente, la ecuación (1.13) no expresa la evolución temporal de las ondas interfaciales y tampoco su relación con los parámetros del fluido como la densidad y su profundidad, pero las soluciones de las ecuaciones (1.14) y la experiencia en problemas ondulatorios sugieren que el potencial de velocidad se puede construir [31] como,

$$\phi(x, z, t) = A' \cosh[k(z + h)] \cos(kx - \omega t). \quad (1.15)$$

Donde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ con λ la longitud de onda, ω la frecuencia angular y h la profundidad del fluido. En la siguiente sección los resultados aquí obtenidos se emplearán para encontrar la relación de dispersión $\omega(k)$ la cual es fundamental para describir la *dinámica lineal* de las ondas. La descripción lineal es necesaria para entender el comportamiento de la propagación de ondas de bajas amplitudes en el sistema, y constituye la base para comprender la *dinámica no-lineal*.

1.1.1. Cálculo de la relación de dispersión de gravedad

Partiendo de la solución para las ondas en el liquido inferior y superior con densidades ρ y ρ' respectivamente ($\rho > \rho'$) que se obtienen al imponer las soluciones al potencial de velocidad más generales de la ecuación de *Laplace* en la interfaz,

$$\phi = A \cosh[k(z + h)] \cos(kx - \omega t) \quad y \quad \phi' = B \cosh[k(z - h')] \cos(kx - \omega t) \quad (1.16)$$

Y a través del Principio de Bernoulli (1.12) aplicado a la interfaz de los fluidos usando el hecho que la presión que ejerce el fluido superior sobre el fluido inferior es la misma se obtiene que,

$$\rho g \zeta + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho \frac{1}{2} v^2 = \rho' g \zeta + \rho' \frac{\partial \phi'}{\partial t} - \rho' \frac{1}{2} v'^2 \quad (1.17)$$

Aquí se toma $z = 0$ la posición de la interfaz en el equilibrio y por lo tanto ζ constituye su elevación en el eje vertical \mathbf{k} . El término $\rho \frac{1}{2} v^2$ es no lineal y diferente de $\rho' \frac{1}{2} v'^2$ (debido a que la velocidad tangencial en el eje \mathbf{i} puede ser diferente arriba y abajo de la interfaz), por lo tanto es necesario despreciar estos términos para obtener resultados lineales. Una vez dicho esto, y reorganizando los términos de la ecuación anterior resulta,

$$g(\rho - \rho') \zeta = \rho' \frac{\partial \phi'}{\partial t} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (1.18)$$

Ahora recordando la condición de borde para la velocidad vertical en la interfaz ($z = 0$) se tiene que,

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi'}{\partial z} \quad (1.19)$$

Entonces, derivando la ecuación (1.18) con respecto al tiempo, y sustituyendo $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$ resulta,

$$g(\rho - \rho') \frac{\partial \phi}{\partial z} = \rho' \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} - \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (1.20)$$

Sustituyendo (1.16) en (1.19), se encuentra que $A = -B$ si $h = h'$, y tras substituir (1.16) en (1.20) y posteriormente simplificar se obtiene la relación de dispersión,

$$\omega^2 = \frac{\sinh(kh)(\rho - \rho')gk}{\rho \cosh(kh) + \rho' \cosh(-kh')} \quad (1.21)$$

A partir esta ecuación es posible tomar dos límites, primero cuando $kh \ll 1$, $kh' \ll 1$ lo que significa que la profundidad de las capas de líquidos es mucho menor que la longitud de onda, entonces la ecuación se simplifica a $\omega^2 = \left(\frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'}hg\right) k^2$, e implica que la relación entre la frecuencia angular y el número de onda es lineal, es decir, en este límite las ondas que se generan no son dispersivas. De otra manera si $kh \gg 1$, $kh' \gg 1$, lo que significa que ambas capas de líquidos son mucho más profundas comparados con las longitudes de onda que se generan en la interfaz, la relación se reduce a,

$$\omega^2 = \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'}gk \quad (1.22)$$

Esta relación de dispersión tiene una dependencia particular en la densidad, $\frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'}$ y significa que si los fluidos tienen densidades iguales pero aún así son inmiscibles entonces en su interfaz no se propagarán ondas debidas a la aceleración de la gravedad. De otra manera, cuando la densidad del fluido con menor densidad ρ' es mucho menor que la del fluido con mayor densidad ρ , se recupera la relación de dispersión de gravedad en agua profunda para una *superficie libre*, es decir $\omega^2 = gk$ de aquí se puede observar que la relación de dispersión de gravedad para una interfaz libre no depende de la densidad dicho fluido.

1.1.2. Cálculo de la relación de dispersión de capilaridad

El análisis anterior de la relación de dispersión solo tiene en cuenta las ondas debidas a la aceleración de la gravedad, pero la tensión superficial también juega un papel fundamental en la propagación de ondas en la interfaz. En este caso la producción de ondas proviene de tratar a la interfaz como una membrana, de tal manera que bajo esta teoría [31] se encuentra que la fuerza por unidad de área debida a la tensión superficial esta dada por,

$$\frac{F_{surface\ tension}}{Area} = \sigma \nabla^2 \zeta \quad (1.23)$$

Donde se ha escogido ζ como la amplitud de las ondas y σ la tensión superficial. De nuevo se supone una solución a estas ondas de manera general como las ecuaciones (1.16), se desprecian los términos no lineales $\rho \frac{1}{2}v^2$ y $\rho' \frac{1}{2}v'^2$, y la presión ejercida por la aceleración

de la gravedad se debe reemplazar adecuadamente por la presión generada por la tensión superficial al curvarse la interfaz. En tal caso, la condición de borde para la presión ya no es continua debido a que la presión es diferente a cada lado de la interfaz cuando esta se curva. Entonces, considerando una curvatura cóncava hacia abajo se tiene que en el lado superior de la interfaz la presión es $P = P_0$ mientras que en el otro lado será $P' = P_0 + \sigma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$. Por lo tanto, el punto de partida para hallar la relación de dispersión de tensión superficial a través de esta condición y la ecuación de Bernoulli en la interfaz es,

$$-\sigma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho' \frac{\partial \phi'}{\partial t} \quad (1.24)$$

Derivando este resultado con respecto a t ,

$$-\sigma \frac{\partial^3 \zeta}{\partial t \partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \rho' \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} \quad (1.25)$$

y usando el hecho que $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$ resulta,

$$\sigma \frac{\partial^3 \phi}{\partial z \partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \rho' \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} \quad (1.26)$$

Utilizando la misma condición de continuidad de la velocidad $\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi'}{\partial z}$ en ($z = 0$) implica de nuevo que las constantes de (1.16) están relacionadas por $A = -B$, y luego sustituyendo las ecuaciones (1.16) en (1.26), se obtiene que la relación de dispersión capilar es,

$$\omega^2 = \frac{\sinh(kh)\sigma k^3}{\rho \cosh(kh) + \rho' \cosh(-kh')} \quad (1.27)$$

De igual manera aquí se suelen tomar dos límites, cuando $kh \ll 1$, $kh' \ll 1$ equivalente a capas de líquidos superficiales, la ecuación se simplifica a $\omega^2 = \frac{h\sigma}{\rho + \rho'} k^4$, lo que significa que la relación entre la frecuencia angular y el número de onda es como $\omega \propto k^2$ y se generan ondas dispersivas. Para el límite cuando, $kh \gg 1$, $kh' \gg 1$, de nuevo para capas de líquido profundas, la relación de dispersión de tensión superficial es,

$$\omega^2 = \frac{\sigma}{\rho + \rho'} k^3 \quad (1.28)$$

En este caso, y a diferencia de la relación de dispersión de gravedad (1.22), sin importar la diferencia de densidades de los fluidos siempre se propagarán ondas debidas a la tensión superficial en la interfaz. Ahora bien, igual que en el caso en gravedad, si la densidad del líquido con menor densidad es mucho menor que la densidad del líquido con mayor densidad ($\rho' \ll \rho$) entonces el resultado corresponde a una superficie libre $\omega^2 = \frac{\sigma}{\rho} k^3$ donde la densidad del líquido sigue siendo un parámetro de la relación de dispersión, lo que no ocurre en el caso de la relación de dispersión de gravedad en una superficie libre.

En las descripciones anteriores se ha calculado la relación de dispersión, de cada fenómeno por separado. En la interfaz realmente se generan los dos tipos de ondas simultáneamente, lo que se describe a través de la relación de dispersión gravito-capilar. Esta relación se calcula directamente al seguir el mismo procedimiento anterior pero teniendo en cuenta ambas interacciones en la ecuación de Bernoulli,

$$g(\rho' - \rho)\zeta - \sigma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho' \frac{\partial \phi'}{\partial t} \quad (1.29)$$

De tal forma que el resultado de la relación de dispersión gravito-capilar cuando $kh' \gg 1$ y $kh \gg 1$, es decir, para agua profunda esta dada por,

$$\omega^2 = \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'} gk + \frac{\sigma}{\rho + \rho'} k^3. \quad (1.30)$$

1.1.3. Longitud capilar

Comparando las relaciones de dispersión obtenida en las ecuaciones (1.22) y (1.28) se observa que la frecuencia angular al cuadrado (ω^2) en relación de dispersión de gravedad es proporcional al número de onda k , mientras que en la relación de dispersión capilar esta es proporcional a k^3 . Por lo tanto, independientemente de los valores de los parámetros en (1.22) y (1.28) se puede establecer un punto de cruce entre las ondas producidas por estos dos fenómenos igualando ambas ecuaciones,

$$\frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'} gk_c = \frac{\sigma}{\rho + \rho'} k_c^3$$

Donde k_c es el valor del número de onda en la intersección y se denomina *número de onda de Laplace*. Despejando k_c este número esta dado por,

$$k_c = \sqrt{\frac{(\rho - \rho')g}{\sigma}} \quad (1.31)$$

y de manera equivalente la longitud de onda en este punto o *longitud de Laplace* y se calcula como $\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c}$, es decir,

$$\lambda_c = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{(\rho - \rho')g}} \quad (1.32)$$

Ahora bien, debido a la forma funcional de las relaciones (1.22) y (1.28), el número de onda capilar k_c se puede interpretar como el punto a partir del cual (para $k > k_c$) la tensión superficial empieza a dominar en la formación de ondas en la interfaz [37]. Para tener un conocimiento más exacto del significado físico del valor de k_c y λ_c , la Tabla 1.1 ilustra estos valores para superficies libres formadas por diferentes líquidos donde $k_c = \sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}}$.

Interfaz	densidad del fluido [gr/cm ³]	tensión superficial [mN/m]	k_c [mm ⁻¹]	λ_c [mm]
Agua-Aire	1.0	71.97	0.37	17.02
Mercurio-Aire	7.6	487.00	0.39	16.06
Aceite vegetal-Aire	0.922	41.77	0.47	13.51
Etanol-Aire	0.789	22.27	0.59	10.66
Nitrógeno líquido-Aire	0.808	8.85	0.95	6.640

Tabla 1.1: Valores para el número de onda capilar k_c y la longitud capilar λ_c en superficies libres formadas por diferentes líquidos.

En la Tabla 1.1 los valores de k_c y consecuentemente λ_c son todos de ordenes similares. Es debido a que en estos líquidos la densidad y la tensión superficial están correladas, por ejemplo, en el caso más extremo en el mercurio, su densidad es la más alta al igual que su tensión superficial, y en el caso mínimo de los líquidos estables a temperatura ambiente, el etanol posee la mínima densidad al igual que su tensión superficial. Para el caso del nitrógeno líquido este corresponde a un líquido que se está evaporando y por lo tanto, la interfaz se está mezclando constantemente con el aire a su alrededor. De lo anterior se puede extrapolar diciendo que la longitud de onda de Laplace λ_c tiende a cero cuando la interfaz se está mezclando con el medio circundante por evaporación o por mecanismos químicos de tal manera que la tensión superficial también empieza a disminuir drásticamente.

1.1.4. Efecto de la viscosidad en la relación de dispersión

En las deducciones anteriores siempre se ha considerado un fluido inviscido, pero la viscosidad también tiene un efecto en la relación de dispersión. Este efecto se origina considerando el comportamiento de la frecuencia angular en un oscilador armónico amortiguado, recordando su expresión básica $\omega_d(k)^2 = \omega(k)^2 - \gamma^2$ donde $\omega(k)$ es la relación de dispersión inviscida de la ecuación (1.30), y γ es el coeficiente de disipación del oscilador relacionado directamente con la viscosidad. El problema entonces es como calcular el coeficiente γ en una interfaz formada por dos líquidos viscosos. Esto se puede solucionar de forma aproximada asumiendo que el efecto de amortiguamiento es pequeño, es decir, $\lambda^2\omega \gg \nu$ con λ la longitud de onda y ν la viscosidad cinemática, y que la deformación de la interfaz es también pequeña ($\zeta \ll \lambda$) esto permite utilizar los resultados de relación de dispersión inviscidos. Por otro lado, el coeficiente de disipación se puede hallar a través de la relación $\gamma = |\dot{\bar{E}}|/2\bar{E}$ donde $\dot{\bar{E}}$ y \bar{E} son los valores promediados en el tiempo de la razón de disipación de la energía mecánica total debida a la viscosidad y a la energía mecánica total, respectivamente⁵ de lo que resulta entonces $\gamma = 2\frac{\mu+\mu'}{\rho+\rho'}k^2$. De tal forma, se encuentra que la corrección a la relación de dispersión gravito-capilar [38] esta dada por,

$$\omega_k^2 = \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'}gk + \frac{\sigma}{\rho + \rho'}k^3 - \left(2\frac{\mu + \mu'}{\rho + \rho'}k^2\right)^2, \quad (1.33)$$

en el límite de aguas profundas y donde μ es la viscosidad dinámica⁶. Con el objetivo de verificar que la viscosidad puede ser despreciable en este sistema se calculan en teoría algunos valores de la relación de dispersión inviscida (ecuación 1.30) en diferentes interfaces (agua, aceite y agua-aceite) utilizando el número de onda capilar máximo típico de una interfaz (el orden máximo de la Tabla 1.1) $k = 1.0 \text{ mm}^{-1}$ y comparándolo con la magnitud respectiva a la corrección viscosa, es decir, el tercer término a la derecha de la ecuación (1.33).

Los resultados de la Tabla 1.2 dan la máxima diferencia posible que se puede encontrar, porque se han calculado con un número de onda típico máximo (1.0 mm^{-1}). Ya que ésta diferencia no supera el 0.1 % es posible despreciar el efecto que provoca la viscosidad en la relación de dispersión gravito-capilar en un rango⁷ de números de onda entre $0 < k < 0.1$

⁵L.D. Landau y E.M. Lifshitz (1987). Fluid Mechanics. Vol 6, página 92.

⁶La viscosidad dinámica μ esta relacionada con la viscosidad cinemática ν a través de la relación $\nu = \mu/\rho$. Las unidades de la viscosidad cinemática ν son los centistokes (cSt). 1 cSt=1 mm²/s.

⁷Se analizará en el Capitulo 2 que este rango en los números de onda k corresponden a los típicos del experimento.

Tipo de interfaz	Relación dispersión inviscida ω^2 [(rad/s) ²]	corrección viscosa [(rad/s) ²]	porcentaje de la corrección [%]
Agua-Aire	8.17×10^4	100.0	0.12
Aceite-Aire	5.51×10^4	4.0	0.01
Agua-Aceite	3.06×10^4	38.0	0.12

Tabla 1.2: Valores teóricos para la magnitud relación de dispersión gravito-capilar inviscida para diferentes interfaces calculado con $k = 1.0 \text{ mm}^{-1}$ y la magnitud correspondiente a la corrección de la relación de dispersión debida a la viscosidad.

mm^{-1} y por lo tanto, se predice que la propagación de ondas lineales en el experimento se comportará de la misma manera que en fluidos inviscidos, es decir, la ecuación (1.30) es valida en el sistema que se aborda.

1.2. Introducción al concepto de Turbulencia

En todos los desarrollos anteriores se han considerado siempre ondas de superficie lineales y toda la teoría en ella involucrada es bien conocida⁸ [31, 32, 36]. Ahora bien, si se generan ondas en cualquier sistema ondulatorio de tal forma que sus amplitudes sobrepasan los límites lineales lo cual depende de cada sistema en particular, entonces la dinámica de éstas ondas dejar de ser lineal y pueden tener, por ejemplo, crestas mas anchas que sus valles, o adquirir formas con crestas agudas como las ondas superficiales en el oceano durante una tormenta [39, 40]. Cuando un conjunto de ondas no-lineales de diversas escalas espaciales y temporales se generan, a diferencia de lo que sucede en el régimen lineal, estas ondas empiezan a interactuar no-linealmente [41] transfiriéndose energía entre ellas.

Este fenómeno es de particular interés en este trabajo, por lo tanto, las siguientes secciones están dedicadas a describir en detalle como este tipo de ondas interactuan y forman un estado estacionario fuera del equilibrio. Este estado se forma debido a la inyección constante de energía desde el exterior. Dicho estado es conocido como Turbulencia de Ondas el cual es la base teórica que establece los mecanismos de interacción de las ondas bajo estas condiciones no-lineales y las leyes que rigen su transferencia de energía. Inicialmente, al hablar de Turbulencia siempre se tiene la idea de la Turbulencia Hidrodinámica, de tal forma que antes de entrar al tema de Turbulencia de Ondas se describirán brevemente los fundamentos de la Turbulencia Hidrodinámica aplicados de manera directa a un sistema

⁸En el trabajo experimental de los capítulos siguientes se abordara de una manera más detallada esta prueba experimental del régimen lineal como verificación inicial.

ondulatorio lo cual permitirá tener un entendimiento más completo y claro del fenómeno.

1.2.1. Fundamentos de la Turbulencia Hidrodinámica

Una imagen acerca de lo que es la Turbulencia puede entenderse al abordar la Turbulencia Hidrodinámica [44], en esta descripción parte del hecho que al igual que toda la dinámica del movimiento de fluidos se describe a través de la ecuación de Navier-Stokes sujeta a condiciones iniciales y de contorno apropiadas. Se asume que la Turbulencia también está contenida en esta ecuación porque el término de advección, el cual es no-lineal, representa la interacción las fluctuaciones de las velocidades lo que permite un flujo de energía a través de sus escalas. La ecuación de Navier-Stokes está expresada como,

$$\rho \left(\vec{v} \cdot \nabla v_i + \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) = -\nabla_i P + \mu \nabla^2 v_i, \quad (1.34)$$

donde el subíndice $i = 1, 2, 3$ corresponde a cada coordenada x, y, z , respectivamente y μ es la viscosidad dinámica. La ecuación (1.34) es la extensión de la ecuación (1.9) incluyendo el término que describe las fuerzas producidas por la viscosidad.

Ahora, considerando un flujo confinado de un fluido incompresible, el parámetro que controla la advección del flujo con respecto a su difusión, considerando una geometría determinada por las condiciones de frontera dadas está determinado por el número de Reynolds,

$$R = \frac{Lv}{\nu} \quad (1.35)$$

donde L es la escala característica de dicha geometría, v es la velocidad típica a dicha escala y $\nu = \mu/\rho$ es la viscosidad cinemática. El número de Reynolds R es un parámetro útil para describir la aparición de la Turbulencia por el hecho de que es proporcional a la velocidad (que es usualmente el parámetro de control del sistema) [52]. Experimentalmente [9] se observa que a medida que se incrementa el número de Reynolds al aumentar la velocidad del flujo, se encuentra que a partir de $R = 240$ este flujo empieza a tornarse caótico lo que se conoce como *advección caótica* [43]. Un ejemplo de esta situación se muestra en la Figura 1.2 donde se ilustra un flujo que atraviesa dos obstáculos paralelos. El flujo caótico tiene la particularidad que las simetrías que caracterizan a un flujo laminar simple, es

decir, uno en el cual la advección es despreciable, empiezan a desaparecer, a saber,

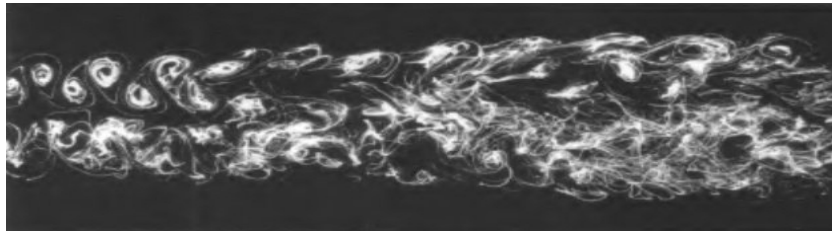


Figura 1.2: Advección caótica a número de Reynolds alrededor de $R = 240$ a través de dos obstáculos. Figura tomada de [44].

- Inversión en cada uno de los ejes coordenados x , y y z .
- Traslación temporal o invarianza en el tiempo.

Cuando el número de Reynolds es mayor a $R = 1800$ se forma un flujo turbulento como el ilustrado en la Figura 1.3. Este flujo turbulento parece recobrar de nuevo las simetrías perdidas pero solo en términos estadísticos, debido a que su aspecto no parece cambiar bajo rotaciones y traslaciones. Por lo tanto, se define que un flujo a números de Reynolds altos, donde todas o algunas de las simetrías se restauran en un sentido estadístico es un estado conocido como *Turbulencia Hidrodinámica Completamente Desarrollada* [44].

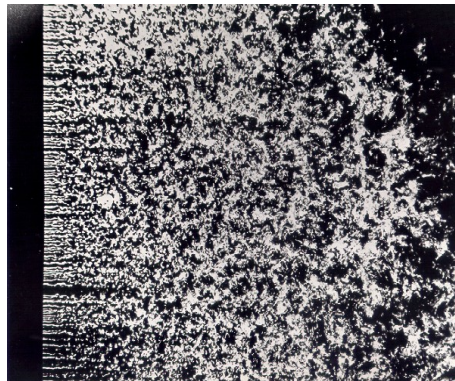


Figura 1.3: Figura tomada de [http : //fdrc.iit.edu/research/nagibResearch.php](http://fdrc.iit.edu/research/nagibResearch.php) Grid Turbulence IV. Flujo de un fluido a número de Reynolds alrededor de $R = 1800$ a través de una grilla de obstáculos.

Al observar la Figura 1.3 y tomando una pequeña porción lejos de las fronteras se observará que ésta es similar al flujo turbulento total. Este es el sentido en el que se debe

entender que las simetrías se restauran bajo rotaciones y traslaciones. Además, se observarán vortices de diferentes tamaños o escalas que se forman por la dinámica rotacional del fluido y que se desarrollan en un amplio rango de escalas, como los que se aprecian en la Figura 1.2. Esta imagen puede entenderse a través de la *cascada de Richardson* ilustrada en la Figura 1.4, la cual presenta una imagen esquemática del estado turbulento generada por un flujo de energía ε a través del fluido y que recorre todas las escalas posibles. De tal forma, si la energía se introduce en una escala L el sistema responderá generando escalas más pequeñas dadas por $l_n = l_0 r^n$ donde r es un número entre cero y uno, y n un número natural que representa todas las escalas siguientes más pequeñas a L . En la fenomenología de Richardson, las escalas l_n representan el tamaño de los vortices de orden n (ilustrados como figuras irregulares en la Figura 1.4). Estos vortices están agrupados en tamaños decrecientes porque el flujo de energía se dirige hacia la escala de disipación, que en este sistema corresponde a una escala límite η de tal forma que $\eta < l_0 r^n$ para todo n donde la energía se disipa por otros mecanismos diferentes a la formación de vortices.

El desarrollo teórico de la Turbulencia Hidrodinámica completamente desarrollada fue elaborado por Kolmogorov inicialmente en 1941 [45] para flujos isótropos, homogéneos y autosimilares. Su teoría se basa en tres hipótesis fundamentales. La primera es la *invarianza de escala* dentro del rango inercial, es decir el rango entre de las escalas de inyección L y disipación $\eta \equiv \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}$. Establece que el número de vortices que llenan el espacio crecen como r^{-3n} donde el 3 viene del hecho que el sistema se describe en un espacio de tres dimensiones (r y n definidos de la misma manera que en el párrafo anterior) para asegurar que los vortices pequeños ocupan todo el espacio así como los grandes vortices. Esta dinámica del flujo turbulento donde los vortices llenan todo el espacio y además que se desarrollan en orden de escalas decrecientes significa que el sistema es similar en si mismo, esta característica se denomina *autosimilitud* del sistema en todas las escalas del rango inercial [46]. La segunda hipótesis es la *localidad*⁹ de las interacciones, esto implica que en el rango inercial el flujo de energía en escalas l_n involucra predominantemente escalas de tamaño comparable, es decir, escalas entre rl_n y $r^{-1}l_n$. La tercera y última hipótesis establece que el flujo de energía ε es una constante. Bajo estas hipótesis Kolmogorov encuentra en su teoría un resultado fundamental que establece que la cascada de energía a través del flujo turbulento responde a una ley de potencia del número de onda k ,

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}, \quad (1.36)$$

⁹En Turbulencia, la localidad se refiere siempre a las escalas, no a las posiciones.

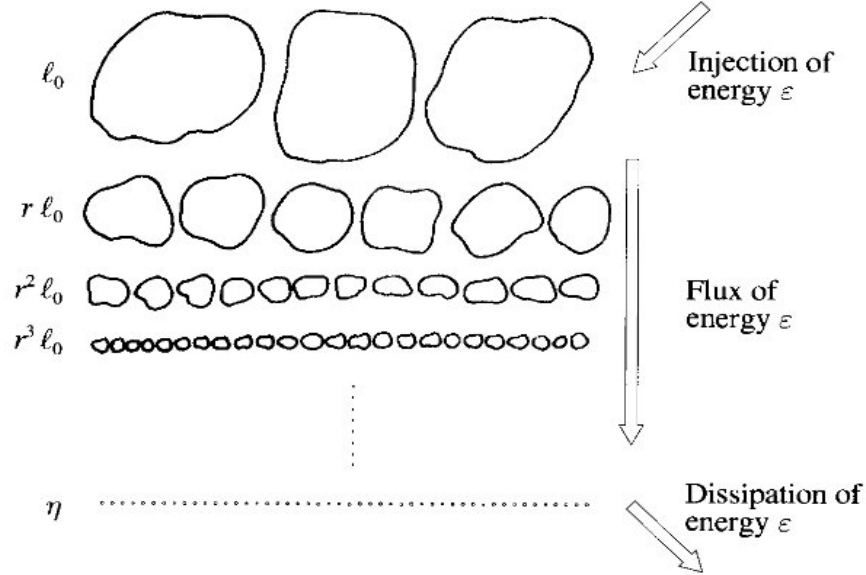


Figura 1.4: Fenomenología de la Turbulencia Hidrodinámica Completamente Desarrollada representada por la cascada de Richardson. Figura tomada de [44]. Esta imagen puede entenderse a través de la *cascada de Richardson* ilustrada en la Figura 1.4, la cual presenta una imagen esquemática del estado turbulento provocada por un flujo de energía ε , que recorre todas las escalas posibles de tal forma que si la energía se introduce en una escala L el sistema responderá generando escalas más pequeñas dadas por $l_n = l_0 r^n$ donde r es un número entre cero y uno, y n un número natural que representa todas las escalas siguientes más pequeñas a L . En la fenomenología de Richardson, las escalas l_n representan el tamaño de los vórtices de orden n (ilustrados como figuras irregulares). Estos vórtices están agrupados en tamaños decrecientes porque el flujo de energía se dirige hacia la escala de disipación, que en este sistema corresponde a una escala límite η de tal forma que $\eta < l_0 r^n$ para todo n donde la energía se disipa por otros mecanismos diferentes a la formación de vórtices.

donde C es la constante de Kolmogorov. Este resultado está soportado por gran cantidad de confirmaciones experimentales [47–50] con números de Reynolds R_λ ¹⁰ desde 10^3 hasta 10^7 donde se ha encontrado que la constante de Kolmogorov tiene un valor de 2 ± 0.4 .

1.3. Turbulencia de Ondas

El nombre *Turbulencia de Ondas*, de ahora en adelante WT (Wave Turbulence), puede parecer extraño porque tradicionalmente el concepto está más asociado con los vórtices generados en la Turbulencia Hidrodinámica. Pero al contrario, un sistema ondulatorio débilmente no-lineal también se comporta muy similar a un sistema turbulento clásico, incluso

¹⁰ R_λ es llamado número de Reynolds de la escala de Taylor y es comúnmente usado en medidas experimentales y cálculos numéricos. Está dado por $\frac{v_{rms}\lambda}{\nu}$ donde λ es la escala de Taylor definida como $\frac{1}{\lambda^2} \equiv \frac{\langle (\partial_1 v_1)^2 \rangle}{v_{rms}^2}$, v_{rms} es la fluctuación rms de una componente de velocidad, en este caso v_1 .

en la ausencia de vórtices. La Turbulencia Hidrodinámica es bien descrita estadísticamente, no en el sentido de temperaturas o potenciales químicos, sino en el sentido estadístico de un flujo de energía local a través de las escalas características del sistema. En la Turbulencia de Ondas al igual que un sistema de Turbulencia Hidrodinámica también existe un flujo de energía, pero no a través elementos físicos como los vórtices hidrodinámicos sino a través de los modos ondulatorios de tal forma que estos modos intercambian energía de modo en modo. Aún así, estos elementos son de forma equivalente escalas características de su sistema. Por lo tanto, todos los postulados de la teoría de Kolmogorov que se han descrito en la sección anterior (isotropía, homogeneidad y autosimilitud) pueden ser aplicados para construir la teoría WT que es la de principal interés en este trabajo. En este orden de ideas se espera que la cascada de energía en la Turbulencia de ondas también se comporte como una ley de potencia (ecuación 1.36), pero naturalmente el objetivo es encontrar cualitativamente la forma funcional que corresponde en este caso.

La Turbulencia de Ondas se define entonces como un estado fuera del equilibrio de ondas aleatorias interactuando no linealmente [52, 53] que es descrito estadísticamente en el límite de tiempos largos¹¹. Esta definición tiene dos características en común con todos los sistemas turbulentos: el carácter aleatorio y que es un sistema fuera del equilibrio estacionario. La aleatoriedad en la Turbulencia de Ondas se entiende como el conjunto de modos de onda excitados en el sistema con un gran rango de longitudes dinámicas y escalas de tiempo cuyas condiciones iniciales son desconocidas. Sin embargo, las cantidades promediadas en Turbulencia están bien definidas [54, 55] y por lo tanto pueden ser estudiadas. Esto explica porque la descripción del sistema se realiza estadísticamente.

Ahora bien, al igual que en la Turbulencia Hidrodinámica el flujo de una cantidad conservada se supone constante a través de todas las escalas, lo mismo se aplicará a la teoría WT. La descripción teórica de ondas superficiales lineales se ha realizado utilizando la ecuación de Euler (1.9) lo cual es suficiente para entender el comportamiento desde un punto de vista lineal. Incluso sería viable utilizar la misma descripción teórica para ondas débilmente no-lineales, pero el problema actual requiere tener en cuenta la interacción entre un gran conjunto de modos de distintas longitudes características y por lo tanto la mejor manera de abordar el problema bajo estas condiciones es a través del Formalismo Hamiltoniano para ondas [56] por dos razones principales. Primero porque matemáticamente es una teoría adecuada para describir conjuntos estadísticos debido al gran número de grados de libertad (modos ondulatorios) y segundo, porque existe una cantidad con-

¹¹Se hace referencia a tiempos mucho más largos que los periodos de las ondas.

servada en el sistema. En este desarrollo se asume que es la energía (no necesariamente puede ser la única, pero es bien conocido que en los casos donde el Hamiltoniano es independiente del tiempo explícitamente, éste representa la energía del sistema [57]). Con esto en mente, las siguientes secciones están dedicadas a mostrar en detalle el desarrollo de la teoría WT.

1.3.1. Formalismo Hamiltoniano para ondas

El formalismo hamiltoniano describe gran cantidad de sistemas dinámicos [58, 59]. Su utilidad consiste en que provee un marco teórico que se extiende a muchas áreas de la Física fundamental. Inicialmente, este marco aborda los sistemas de la Mecánica Newtoniana pero también provee gran parte del lenguaje con el cual la Mecánica Estadística, la Mecánica Cuántica y ampliamente en la Electrodinámica han sido construidas.

Como ya se ha mencionado, este formalismo se usará para describir un sistema estadístico de ondas no-lineales que interactúan débilmente. Ahora bien, como el sistema ondulatorio se puede describir en un rango de longitudes y escalas de tiempo continuas entonces el formalismo hamiltoniano correspondiente también será continuo y con dimensión d . Por lo tanto, se parte desde la definición general de un Hamiltoniano como función de las variables canónicas $p(\vec{r}, t)$ y $q(\vec{r}, t)$ donde estas variables a través de las ecuaciones de Hamilton describen las ecuaciones dinámicas del sistema, estas son,

$$\frac{\partial q(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p(\vec{r}, t)} \quad ; \quad \frac{\partial p(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q(\vec{r}, t)} \quad (1.37)$$

donde q y p son las coordenadas y momentos generalizados respectivamente y \mathcal{H} es el Hamiltoniano. A partir de las ecuaciones (1.37) el problema de describir ondas en este formalismo se puede abordar de una manera más adecuada si se transforman las variables q y p de tal manera que las nuevas variables representen las *amplitudes de onda*. Para ello, primero se usa una transformación intermedia donde las variables canónicas queden con las mismas dimensiones. Se introducen entonces los factores λ_q y λ_p de tal forma que $Q = \lambda_q q$ y $P = \frac{p}{\lambda_p}$. Con estas variables, se construye una nueva transformación de variables conjugadas,

$$a = \frac{(Q + iP)}{\sqrt{2}} \quad ; \quad a^* = \frac{(Q - iP)}{\sqrt{2}} \quad (1.38)$$

Es importante notar que las variables a y a^* solo son útiles cuando se están tratando ondas, esto se puede ver de manera simple calculando (aa^*) lo cual es proporcional al Hamiltoniano para ondas lineales [56]. Esto da como resultado $\frac{Q^2}{2} + \frac{P^2}{2}$, el primer término es el potencial restitutivo (lo que implica un Hamiltoniano solo para ondas lineales) y el segundo término la energía cinética de la onda. Continuando con la deducción, las ecuaciones de Hamilton en estas nuevas variables (a y a^*) se transforman a,

$$i\frac{\partial a(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a^*(\vec{r}, t)} \quad ; \quad -i\frac{\partial a^*(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a(\vec{r}, t)} \quad (1.39)$$

Las ecuaciones (1.39) son complejas conjugadas lo cual es natural observando que la transformación de las variables p y q se han llevado a un par de variables complejas conjugadas a y a^* . De tal manera, en vez dos ecuaciones reales se obtiene una sola ecuación de Hamilton compleja que describe la dinámica de la amplitud de onda a través de la forma particular del Hamiltoniano.

El Hamiltoniano que se quiere encontrar para describir la dinámica turbulenta debe tener en cuenta las interacciones no-lineales en su totalidad lo cual lo hace un problema complejo de resolver. Por lo tanto, se asume que el Hamiltoniano se puede expandir en serie de potencias de las variables a y a^* con un factor de expansión ϵ que es un valor pequeño ($\ll 1$). Y como aproximación se toman solamente los primeros términos que dan cuenta de las interacciones entre las ondas que tienen más peso según el factor ϵ ,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 + \epsilon \mathcal{H}_{int} \quad (1.40)$$

Esto implica que las interacciones consideradas son débilmente no-lineales. A partir de acá se debe entender la descripción teórica como Turbulencia de ondas débilmente no-lineal (Weak Wave Turbulence WWT) [53]. En la ecuación (1.40) se tiene en cuenta un término que describe la dinámica lineal de las ondas \mathcal{H}_2 y el término de interacción débilmente no-lineal \mathcal{H}_{int} . A continuación se describirá la forma funcional de estos primeros términos del Hamiltoniano. La forma mas general del \mathcal{H}_2 se puede escribir como,

$$\mathcal{H}_2 = \int d\vec{r}d\vec{r}' \{A(\vec{r}, \vec{r}')a(\vec{r})a^*(\vec{r}') + \frac{1}{2}[B^*(\vec{r}, \vec{r}')a(\vec{r})a(\vec{r}') + c.c]\} \quad (1.41)$$

Donde el primer término del integrando de esta ecuación corresponde a los osciladores

desacoplados a través de la función $A(\vec{r}, \vec{r}')$, el segundo término del integrando son los términos que dan cuenta del acoplamiento lineal de los osciladores a través de la función $B(\vec{r}, \vec{r}')$ y *c.c* es el complejo conjugado de este último término, estos dos coeficientes representan las propiedades del medio de propagación y se asumen independientes del tiempo que es el caso de la mayoría de los sistemas clásicos. Por la experiencia adquirida en problemas lineales, para resolver la ecuación dinámica con mayor facilidad, el Hamiltoniano puede ser simplificado expresándolo en el espacio de Fourier. Primero se debe expresar la forma de la variable $a(\vec{r})$ en este espacio para reconstruir el Hamiltoniano como una expansión ahora de $a(\vec{k})$, es decir, la amplitud de onda en el espacio de Fourier, $a_k = a(\vec{k}) = \frac{1}{V} \int a(\vec{r}) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) d\vec{r}$ con V el volumen del medio de propagación. Las ecuaciones de Hamilton (1.39) en el espacio de Fourier quedan expresadas como,

$$V\mathcal{H}(a_k, a_k^*) = \mathcal{H}(a(\vec{r}), a^*(\vec{r}))$$

$$i \frac{\partial a(\vec{k}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a^*(\vec{k}, t)} \quad (1.42)$$

Esto significa que las ecuaciones siguen teniendo la forma canónica pero además que el Hamiltoniano (1.39) en el espacio de Fourier difiere por la constante V . Para transformar el Hamiltoniano es necesario suponer que el espacio de propagación es *homogéneo*, esto hace que las funciones $A(\vec{r}, \vec{r}')$ y $B(\vec{r}, \vec{r}')$ dependan solamente de la diferencia de los argumentos $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ y además también se tiene que el Hamiltoniano \mathcal{H}_2 es Hermitico, ambos hechos implican que $A(\vec{R}) = A^*(-\vec{R})$ y $B(\vec{R}) = B(-\vec{R})$. Por lo tanto, el Hamiltoniano \mathcal{H}_2 se transforma a,

$$\mathcal{H}_2 = \int d\vec{k} \{ A(\vec{k}) a(\vec{k}, t) a^*(\vec{k}, t) + \frac{1}{2} [B(\vec{k}) a(\vec{k}, t) a(-\vec{k}, t) + B^*(\vec{k}) a^*(\vec{k}, t) a^*(-\vec{k}, t)] \} \quad (1.43)$$

Calculando la ecuación (1.39) con este Hamiltoniano \mathcal{H}_2 se puede ver que la matriz $A(\vec{k})$ corresponden a las frecuencias de las oscilaciones de los modos de onda del sistema $\omega(\vec{k})$, pero la matriz $B(\vec{k})$ sigue indicando que el sistema esta aun acoplado. Por lo tanto, para solucionarlo se debe encontrar una transformación lineal adecuada para que el Hamiltoniano puede ser diagonalizado. Es decir, encontrar una transformación $a_k, a_k^* \rightarrow b_k, b_k^*$ que satisfaga,

$$\begin{aligned} \{b(q), b(q')\} &= 0 \\ \{b(q), b^*(q')\} &= \delta(q - q') \end{aligned} \quad (1.44)$$

donde $\{ \}$ son los corchetes de Poisson¹². Esto es para que las ecuaciones de Hamilton sigan conservando la forma canónica. De tal forma, se puede plantear una transformación lineal general que se expresa como $a^*(\vec{k}, t) = u(\vec{k})b(\vec{k}, t) + v(\vec{k})b(-\vec{k}, t)$, y encontrar $u(\vec{k})$ y $v(\vec{k})$ con el fin que el Hamiltoniano \mathcal{H}_2 quede reescrito como,

$$\mathcal{H}_2 = \int d\vec{k} \omega(\vec{k})b(\vec{k}, t)b^*(\vec{k}, t) \quad (1.45)$$

La canonicidad de la transformación lineal propuesta para $a^*(\vec{k}, t)$ se halla sustituyendo esta relación en la ecuación (1.39). De lo que se puede establecer que las funciones $u(\vec{k})$ y $v(\vec{k})$ deben satisfacer las relaciones [52],

$$|u(\vec{k})|^2 - |v(\vec{k})|^2 = 1 \quad ; \quad u(\vec{k})v(-\vec{k}) = u(-\vec{k})v(\vec{k}) \quad (1.46)$$

Escogiendo $u(\vec{k})$ y $v(\vec{k})$ funciones reales, las condiciones de canonicidad (1.46) se satisfacen igualmente si se escogen estas funciones a ser $u(\vec{k}) = \cosh[\zeta(\vec{k})]$ y $v(\vec{k}) = \sinh[\zeta(\vec{k})]$ y usando el Hamiltoniano \mathcal{H}_2 de la ecuación (1.43) y la transformación al Hamiltoniano \mathcal{H}_2 diagonalizado (1.45) se puede encontrar que las frecuencias de oscilación del sistema $\omega(\vec{k})$ estan dadas por [52],

$$\omega(\vec{k}) = A_2(\vec{k}) + \text{sign}A_1(\vec{k})\sqrt{A_1^2(\vec{k}) - B^2(\vec{k})} \quad (1.47)$$

Se puede observar que esta ecuación solo es valida para $\omega(\vec{k})$ reales, por lo que se puede asociar inmediatamente a la relación de dispersión.

Finalmente, la ecuación de movimiento en las variables $b(\vec{k}, t)$ para ondas lineales [52] se puede encontrar al utilizar la ecuación de Hamilton en estas mismas variables, es decir, $i\frac{\partial b_{\vec{k}}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial b_{\vec{k}}^*}$ de lo que se obtiene,

¹²Los corchetes de Poisson están definidos entre dos funciones escalares u y v con respecto a las variables canónicas (q, p) como $\{u, v\}_{q,p} = \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i}$.

$$\frac{\partial b(\vec{k}, t)}{\partial t} + i\omega(\vec{k})b(\vec{k}, t) = 0 \quad (1.48)$$

1.3.1.1. Hamiltoniano de interacción para no-linealidad débil

Hasta aquí, el primer termino del Hamiltoniano es \mathcal{H}_2 y completamente cuadrático de tal forma que las ondas en diferentes medios se distinguen solo por su relación de dispersión $\omega(\vec{k})$. Ahora, toda la información de la interacción no-lineal de las ondas está contenida en los términos de orden mayor a 2 de la expansión del Hamiltoniano \mathcal{H} (ecuación 1.40). En general el término enésimo de la expansión significa que N ondas están interactuando localmente¹³ de tal manera que satisfacen condiciones resonantes para los vectores de onda \vec{k} y las frecuencias $\omega(\vec{k})$ simultáneamente para un conjunto no trivial de vectores de onda,

$$\omega(\vec{k}_1) \pm \omega(\vec{k}_2) \pm \dots \pm \omega(\vec{k}_N) = 0 \quad (1.49)$$

$$\vec{k}_1 \pm \vec{k}_2 \pm \dots \pm \vec{k}_N = 0 \quad (1.50)$$

donde $\omega(\vec{k})$ es la relación de dispersión y siempre toma un valor mayor que cero ($\omega(\vec{k}) > 0$). Como se ha mencionado antes, este tratamiento teórico es para las primeras interacciones entre ondas, en específico, se tratarán las interacciones de tres ó cuatro ondas por separado. Despreciar los ordenes más altos tiene sentido porque las interacciones siguientes son de intensidades más pequeñas de orden ϵ^n con $n \geq 5, 6 \dots N$. Entonces el Hamiltoniano de interacción en la Turbulencia de Ondas Débilmente No-lineal (WWT) aproximado esta dado por $\mathcal{H}_{int} \approx \epsilon \mathcal{H}_3$ para 3 ondas ó $\mathcal{H}_{int} \approx \epsilon^2 \mathcal{H}_4$ para cuatro ondas.

El Hamiltoniano \mathcal{H}_3 describe un proceso de interacción de tres ondas y por lo tanto deben satisfacer las resonancias $\vec{k}_1 \pm \vec{k}_2 \pm \vec{k}_3 = 0$ y $\omega(\vec{k}_1) \pm \omega(\vec{k}_2) \pm \omega(\vec{k}_3) = 0$. Su forma funcional esta dada por,

¹³Localidad entendida de la misma manera que en la Turbulencia Hidrodinámica Completamente Desarrollada, es decir, localidad de interacción en los vectores de onda \vec{k} .

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_3 &= \frac{1}{2} \int d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 (V_b b_1 b_2 b_3 + c.c) \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3) \\
&+ \frac{1}{6} \int d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 (U_q b_1^* b_2^* b_3^* + c.c) \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3)
\end{aligned} \tag{1.51}$$

El integrando en su conjunto tiene solo grupos de términos no conjugados b_i ó conjugados b_i^* , esto se puede interpretar con analogía a la mecánica cuántica como operadores de creación y destrucción de ondas [60]. En este sentido, el primer integrando corresponde a decaimiento de $1 \rightarrow 2$ y su complejo conjugado a un proceso de confluencia $2 \rightarrow 1$, y el segundo integrando corresponde a aniquilación mutua $3 \rightarrow 0$. Esto está incluido en la Delta de dirac de cada integrando, es decir, cada integral adquiere el valor del integrando cuando se satisfacen los procesos de resonancia $\vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3 = 0$ y $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 = 0$, respectivamente. Finalmente, las matrices V_b y U_q representan el peso de la interacción de tres ondas según cada proceso específico de interacción.

Ahora, para el Hamiltoniano de interacción de un proceso de cuatro ondas \mathcal{H}_4 , la integral puede ser expresada cómo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_4 &= \frac{1}{4} \int d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 d\vec{k}_4 W_p b_1^* b_2^* b_3 b_4 \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4) \\
&+ \int d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 d\vec{k}_4 (G'_p b_1 b_2^* b_3^* b_4^* + c.c) \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4) \\
&+ \int d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 d\vec{k}_4 (R'_p b_1 b_2 b_3 b_4 + c.c) \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 + \vec{k}_4)
\end{aligned} \tag{1.52}$$

En este caso, las matrices W_p , G'_p y R'_p representan el peso de la interacción local de cuatro ondas que satisfacen las resonancias $\vec{k}_1 \pm \vec{k}_2 \pm \vec{k}_3 \pm \vec{k}_4 = 0$. La interpretación de los procesos de decaimiento, confluencia y aniquilación mutua son simitales al proceso de interacción de tres ondas. Decaimiento $1 \rightarrow 3$, confluencia $3 \rightarrow 1$, indistintamente decaimiento o confluencia $2 \rightarrow 2$ y aniquilación mutua $4 \rightarrow 0$. Aquí es importante notar que para que los procesos de interacción ya sean de tres o cuatro ondas sean independientes de la dirección de la cual confluyen o decaen necesario suponer que el espacio sea *isotropo*, esto implica que las matrices de interacción V_b , U_q , W_p , G'_p y R'_p solamente dependerán de los módulos de los vectores de onda, así como la relación de dispersión $\omega(\vec{k}) = \omega(k)$.

Ahora bien, un proceso de tres ondas puede volverse no-resonante si su condición espacio-temporal de sincronización, es decir, $\omega(\vec{k}_1) \pm \omega(\vec{k}_2) \pm \omega(\vec{k}_3) = 0$ no puede ser satisfecha. En general, para analizar si una condición es resonante se debe analizar la forma funcional de la relación de dispersión. Para una relación de dispersión de ley de potencia $\omega(\vec{k}) \propto k^\alpha$ con $\alpha > 1$ siempre hay resonancia. Esto sucede porque la relación de dispersión $\omega(\vec{k})$ es convexa, es decir si $\frac{d^2\omega}{dk^2} > 0$ lo que se puede visualizar al considerar la relación de dispersión como un paraboloide interceptado con otro de tal forma que el mínimo de uno se hace coincidir con algún punto del otro paraboloide así entonces siempre es posible encontrar un conjunto de tres o cuatro vectores de onda que satisfacen la condición de resonancia. La Figura 1.5 ayuda a comprender esta condición. Si en caso contrario la relación de dispersión tiene una potencia $\alpha < 1$ la forma geométrica que corresponde a una hipérbola permitiendo menor libertad para satisfacer la condición resonante, entonces solo un proceso de cuatro ondas será permitido [53]. Por completitud en el caso en que $\alpha = 1$ solo hay resonancia si los vectores \vec{k} son colineales.

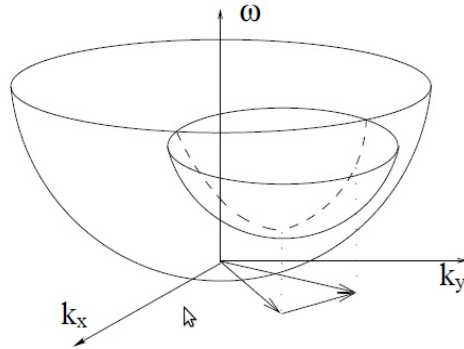


Figura 1.5: Geometría de una relación de dispersión del tipo $\omega(\vec{k}) \propto k^\alpha$ con $\alpha > 1$ donde se ilustra que bajo esta condición ambas interacciones de tres y cuatro ondas son resonantes. Figura tomada de [53].

Para tener en consideración ambos procesos de interacción de 3 ó 4 ondas se puede generalizar el problema de un Hamiltoniano de interacción de N ondas siguiendo la misma lógica de las ecuaciones (1.51) y (1.52) y utilizando de nuevo la ecuación de Hamilton sobre \mathcal{H}_N se puede encontrar que la ecuación dinámica completa con una interacción de N ondas esta dada por,

$$\frac{\partial b_k^s}{\partial t} + i\omega_k b_k^s = \sum_{s_i} \int d\vec{k}_{123\dots N} L_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 \dots \vec{k}_N}^{s_1 s_2 s_3 \dots s_N} b_{\vec{k}_1}^{s_1} b_{\vec{k}_2}^{s_2} b_{\vec{k}_3}^{s_3} \dots b_{\vec{k}_N}^{s_N} \delta(\vec{k}_1 \pm \vec{k}_2 \pm \vec{k}_3 + \dots \pm \vec{k}_N) \quad (1.53)$$

Donde s_i puede ser \pm de tal manera que $b_{\vec{k}}^+ = b_{\vec{k}}$ y $b_{\vec{k}}^- = b_{\vec{k}}^*$ son ondas que se mueven hacia la derecha o izquierda respectivamente. En la deducción de esta ecuación nunca se tuvo en cuenta la disipación al menos en el rango inercial entendido de la misma manera que en la Turbulencia Hidrodinámica. En Turbulencia de Ondas es usual referirse a la escala de inyección en $\vec{k} = 0$ y la disipación en $\vec{k} \rightarrow \infty$. En este sentido, todo el rango de vectores de onda en consideración es el rango donde ocurren las interacciones de los modos ondulatorios. Ahora, debido a que las interacciones no-lineales son débiles [63] se puede suponer una separación de las escalas de tiempo rápida (lineales) y lenta (no-lineales) en la ecuación (1.53). Esta separación de escalas se realiza a través del cambio de variable de $b_{\vec{k}} = c_{\vec{k}} \exp(-i\omega_{\vec{k}}t)$ lo cual elimina la dinámica rápida y solo deja en consideración la dinámica lenta.

La fortaleza de la teoría viene de la posibilidad de describir la evolución de la amplitud de onda en términos de la *densidad de potencia espectral* $n_{\vec{k}}$ definida como,

$$\langle b_{\vec{k}_1}^{s_1} b_{\vec{k}_2}^{s_2} \rangle = n_{\vec{k}_1} \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2). \quad (1.54)$$

donde $\langle \rangle$ es un promedio estadístico en el espacio del vector de onda \vec{k} . Es importante notar que a pesar de que la evolución de la amplitud de onda puede ser construida a partir del segundo momento, la estadística de momentos superiores dados por $\langle b_{\vec{k}_1}^{s_1} b_{\vec{k}_2}^{s_2} b_{\vec{k}_3}^{s_3} \dots b_{\vec{k}_N}^{s_N} \rangle$ pueden ser encontrados a partir del segundo momento $\langle b_{\vec{k}_1}^{s_1} b_{\vec{k}_2}^{s_2} \rangle$ solo porque existe una cerradura asintótica al problema [61]. Esto significa que los momentos superiores quedan determinados en función del primer y segundo momento $\langle b_{\vec{k}_1}^{s_1} b_{\vec{k}_2}^{s_2} b_{\vec{k}_3}^{s_3} \dots b_{\vec{k}_N}^{s_N} \rangle = \Phi(\langle b_{\vec{k}_1}^{s_1} \rangle, \langle b_{\vec{k}_1}^{s_1} b_{\vec{k}_2}^{s_2} \rangle)$ Entonces, a partir de la ecuaciones (1.53), (1.54) se puede construir una ecuación cinética para $n_{\vec{k}}$ [63] que tiene la forma,

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{\vec{k}}}{\partial t} = c_o \pi \sum_{s_1, s_2, \dots, s_N} \int d\vec{k}_{12\dots N} |L_{\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_N}^{s, s_1, s_2, \dots, s_N}|^2 n_{\vec{k}_1} n_{\vec{k}_2} \dots n_{\vec{k}_N} \left(\frac{1}{n_{\vec{k}}} + s_1 \frac{1}{n_{\vec{k}_1}} + s_2 \frac{1}{n_{\vec{k}_2}} + \dots + s_N \frac{1}{n_{\vec{k}_N}} \right) \\ \delta(\omega_{\vec{k}} + s_1 \omega_{\vec{k}_1} + s_2 \omega_{\vec{k}_2} + \dots + s_N \omega_{\vec{k}_N}) \delta^{(2)}(\vec{k} + s_1 \vec{k}_1 + s_2 \vec{k}_2 + \dots + s_N \vec{k}_N) \end{aligned} \quad (1.55)$$

Un punto importante de este desarrollo teórico es el hecho de que la ecuación cinética puede entregar soluciones no triviales diferentes de las que se pueden obtener al asumir

equilibrio termodinámico¹⁴ [66–71]. Zakharov [72] demostró que existen estas soluciones fuera del equilibrio que describen el transporte de cantidades conservadas como la energía desde las escalas de inyección a las escalas donde la energía es disipada. Dentro del rango inercial de los números de onda es posible encontrar que la densidad de potencia espectral tiene una solución dada por $n_k \sim k^{-\beta}$ donde β depende del tipo de relación de dispersión y el tipo de interacciones no-lineales débiles, para este caso en particular de tres o cuatro ondas. Por analogía con la cascada de energía en la Turbulencia Hidrodinámica (ecuación 1.36) estas soluciones son denominadas espectro de Kolmogorov-Zakharov (KZ). El espectro KZ predicho para ondas superficiales de gravedad y capilaridad que es el de interés en este trabajo puede encontrarse en [70, 71].

1.3.2. Balance de energía en el rango inercial

Las interacciones débilmente no-lineales son las responsables de la redistribución de la energía en todas las escalas de los modos de onda, pero sin afectar el contenido total de energía. Para observar esto, se analiza el balance de energía por unidad de área o volumen $\mathcal{E}_{K<}$ en donde el subíndice $K<$ significa que esta cantidad es la energía acumulada de todas las escalas k menores que algún K , de forma equivalente un subíndice $K>$ representa la energía acumulada de escalas k mayores que el mismo K . El balance de energía total se expresa como,

$$\partial_t \mathcal{E}_{K<} + \Pi_{K>} = I_{ki} - D_{kf} \quad (1.56)$$

En ésta ecuación el término I_{ki} corresponde a la inyección de potencia, D_{kf} corresponde a la disipación, ambos términos considerados fuera del rango inercial, es decir, los números de onda ki y kf están fuera de las escalas $K<$ y $K>$. La Figura 1.6 ayuda a comprender la situación. El término $\Pi_{K>}$ es el flujo de energía (energía por unidad de área ó volumen y unidad de tiempo) debido a las interacciones no-lineales para escalas k mayores que $K>$. Ahora bien, en el estado estacionario, el promedio de la potencia inyectada es igual al promedio de la potencia disipada y por lo tanto $\langle I_{ki} \rangle = \langle D_{kf} \rangle$ (este promedio es temporal), entonces la ecuación (1.56) queda expresada como,

$$\langle \partial_t \mathcal{E}_{K<} \rangle + \langle \Pi_{K>} \rangle = 0 \quad (1.57)$$

¹⁴Soluciones diferentes a $n_k \omega_k = c$ donde c es una constante.

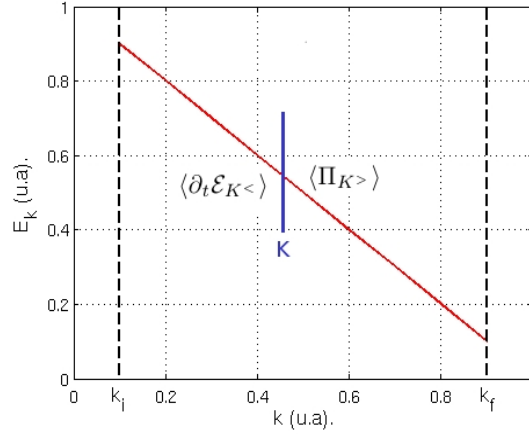


Figura 1.6: Esquema que ilustra el balance de energía en el rango inercial.

Esto significa que la energía por unidad de área o volumen acumulada en las escalas menores que una escala dada K se transmite totalmente a las escalas siguientes, es decir, en el rango inercial se tiene en cuenta solo la transferencia de energía debida a las interacciones no-lineales entre las escalas sin pérdidas debidas a la disipación. Ahora, como la ecuación (1.57) es válida para todo número de onda K *siempre que se considere en el rango inercial*, se puede generalizar removiendo la notación de la separación de escalas $K^<$ y $K^>$ y dejando solamente una notación de un número de onda arbitrario k . Para reescribir la ecuación en términos de la energía total en el espacio de número de onda $E(k)$ se toma la derivada parcial con respecto a k de (1.57) por lo que resulta,

$$\partial_k \langle \partial_t \mathcal{E}_k \rangle + \partial_k \langle \Pi_k \rangle = 0 \quad (1.58)$$

Primero como el promedio es temporal, la derivada en k puede entrar dentro del promedio. Ahora, como \mathcal{E}_k es la energía por unidad de área o volumen (unidades $\frac{[E]}{[L]^d}$) dada por la relación $\mathcal{E} = \int E(k) dk$, se puede usar de manera equivalente que $\partial_k \mathcal{E}_k = E(k)$ (con unidades $\frac{[L]^{6-d}}{[T]^2}$)¹⁵ por lo tanto la ecuación (1.58) queda expresada como,

$$\langle \partial_t E(k) \rangle + \partial_k \langle \Pi_k \rangle = 0 \quad (1.59)$$

Esta es la ecuación del balance de energía total en el rango inercial y de aquí se deduce que $\langle \Pi_k \rangle$ tiene unidades $\frac{[L]^{5-d}}{[T]^3}$ y corresponde al flujo de energía ε .

¹⁵Por simplicidad se han tomado las unidades de la densidad igual a la unidad ($[\rho] \equiv 1$), de tal manera que todas las dimensiones de masa se reemplazan por unidades de volumen $[M] = [L]^3$.

1.3.3. Análisis dimensional de la Densidad de Potencia Espectral PSD

El cálculo teórico completo de los espectro de energía a partir de la ecuación (1.55) se escapa de los objetivos de este trabajo, pero a pesar de ello se ofrece una deducción alternativa por medio del análisis dimensional de los parámetros del sistema y las relaciones de dispersión de gravedad y capilaridad [73]. La siguiente subsección se dedica a mostrar estas deducciones en detalle. Primero se obtendrán las unidades de la densidad de potencia espectral (PSD) tanto en frecuencia angular como espacial. Luego se obtendrá la PSD en función de la frecuencia angular ω y con estos los espectros en función del número de onda k que son los de principal interés para el análisis experimental.

1.3.3.1. Unidades de la PSD

Las unidades de la PSD se pueden obtener a través del teorema de *Wiener-Khinchin* [74, 75], que establece que la PSD puede ser calculada tomando la transformada de Fourier de la función de autocorrelación $g(\tau)$ en el tiempo o en el espacio $g(l)$ bajo el supuesto que la señal puede ser tratada totalmente como un proceso aleatorio estacionario,

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \quad ; \quad S(k) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} g(l) \exp(-ikl) l^{d-1} dl, \quad (1.60)$$

donde d es el la dimensión del espacio y α una constante que depende de la dimensionalidad¹⁶. Ahora, considerando la transformada inversa, es decir, obtener de la PSD la función de autocorrelación en el tiempo o en espacio,

$$g(\tau) = \int_0^{\infty} S(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega \quad ; \quad g(l) = \alpha \int_0^{\infty} S(k) \exp(ikl) k^{d-1} dk. \quad (1.61)$$

Imponiendo en estas ecuaciones $\tau = 0$ y $l = 0$ las integrales se reducen a $g(\tau = 0) = \langle \eta^2(t) \rangle$ y $g(l = 0) = \langle \eta^2(x) \rangle$. Suponiendo ergodicidad [74] que permite relacionar los promedios temporales con los promedios espaciales se tiene que $\langle \eta^2(t) \rangle = \langle \eta^2(x) \rangle$ o de otra manera,

$$S(\omega) d\omega = \alpha S(k) k^{d-1} dk, \quad (1.62)$$

¹⁶Con $d = 1$, $\alpha = 1$, con $d = 2$ la transformada de Fourier se toma en coordenadas polares entonces $\alpha = 2\pi$ y con $d = 3$ la transformada se toma en coordenadas esféricas entonces $\alpha = 4\pi$.

lo cual será de vital importancia para transformar los espectros en frecuencia temporal ω a frecuencia espacial k . De la ecuación (1.60) se puede observar directamente que las unidades de la potencia espectral son, $[L]^2[T]$ y $[L]^{2+d}$, en el tiempo y en el espacio, respectivamente.

1.3.3.2. PSD para ondas de gravedad en función de ω

Recordando la relación de dispersión para ondas de gravedad (ecuación 1.22) se puede observar que la potencia del número de onda k es $\frac{1}{2}$ y por lo tanto la interacción no-lineal dominante es de cuatro ondas. Para encontrar la potencia espectral PSD, en función de la frecuencia angular ω por análisis dimensional se debe construir una función utilizando los parámetros g , ω y ε . Las dimensiones de estos parámetros se deben considerar en dos *dimensiones* debido a que esta es la dimensionalidad de la interfaz. Estos se muestran en la Tabla 1.3,

gravedad	flujo de energía	frecuencia angular
g	ε	ω
$\frac{L}{T^2}$	$\frac{L^3}{T^3}$	$\frac{1}{T}$

Tabla 1.3: Unidades de los parámetros de la PSD de gravedad en función de la frecuencia angular ω .

Primero se construye una combinación monomial que debe tener las mismas unidades de la potencia espectral en frecuencia angular $S(\omega)$, es decir, L^2T . De tal forma se pueden construir dos combinaciones para obtener las unidades requeridas de la PSD, una combinando ε con ω y la segunda combinando g con ω ,

$$S(\omega) = \varepsilon^{2/3}\omega^{-3} \quad ; \quad S(\omega) = g^2\omega^{-5} \quad (1.63)$$

El resultado total debe ser una combinación de estas dos últimas expresiones, por lo tanto,

$$\phi_1 = \frac{S(\omega)}{\varepsilon^{2/3}\omega^{-3}} = f\left(\frac{g^2\omega^{-5}}{\varepsilon^{2/3}\omega^{-3}}\right) \quad (1.64)$$

De la teoría de Turbulencia de Ondas indica que para un sistema donde interactúan N ondas la potencia espectral debe ser proporcional a $S(\omega) \sim \varepsilon^{\frac{1}{N-1}}$. Entonces, ya que las

ondas de gravedad interactúan cuatro ondas la proporcionalidad con el flujo de energía debe ser $\varepsilon^{\frac{1}{3}}$. De aquí,

$$S_g(\omega) = \varepsilon^{2/3} \omega^{-3} f\left(\frac{g^2 \omega^{-2}}{\varepsilon^{2/3}}\right) \quad (1.65)$$

Para satisfacer la regla de proporcionalidad del flujo de energía, el argumento de la función f debe estar elevado a una potencia ν , que satisfaga $\varepsilon^{\frac{1}{3}}$,

$$S_g(\omega) = \varepsilon^{2/3} \omega^{-3} \left(\frac{g \omega^{-1}}{\varepsilon^{1/3}}\right)^\nu \quad (1.66)$$

la ecuación de potencias de ε es $\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\nu = \frac{1}{3}$, de aquí se obtiene el valor de $\nu = 1$ y la potencia espectral es entonces,

$$S_g(\omega) = \varepsilon^{1/3} g \omega^{-4} \quad (1.67)$$

Para interacción de cuatro ondas.

1.3.3.3. PSDs para ondas de capilaridad en función de ω

De la misma manera que el análisis dimensional de la sección anterior, en este caso la potencia espectral debe ser función de los parámetros σ , ω y ε . En este caso la PSD capilar es posible la interacción de tres ondas y la de cuatro ondas. Los parámetros y sus correspondientes unidades se muestran en la Tabla 1.4,

tensión superficial	flujo de energía	frecuencia angular
σ	ε	ω
$\frac{L^3}{T^2}$	$\frac{L^3}{T^3}$	$\frac{1}{T}$

Tabla 1.4: Unidades de los parámetros de la PSD de capilaridad en función de la frecuencia angular ω .

Se pueden realizar dos combinaciones, para obtener las unidades de la PSD, $\varepsilon^{2/3} \omega^{-3}$ y $\sigma^{2/3} \omega^{-7/3}$, por lo tanto,

$$S_\sigma(\omega) = \varepsilon^{2/3} \omega^{-3} f\left(\frac{\sigma^{2/3} \omega^{-7/3}}{\varepsilon^{2/3} \omega^{-3}}\right) = \varepsilon^{2/3} \omega^{-3} f\left(\frac{\sigma \omega}{\varepsilon}\right) \quad (1.68)$$

Para la interacción de cuatro ondas, $S(\omega) \sim \varepsilon^{1/3}$ y de nuevo suponiendo que la función f es una potencia de ν se obtiene,

$$S_\sigma(\omega) = \varepsilon^{2/3} \omega^{-3} \sigma^\nu \omega^\nu \varepsilon^{-\nu} \quad (1.69)$$

La ecuación para ν es en este caso $\frac{2}{3} + \nu = \frac{1}{3}$ entonces $\nu = \frac{1}{3}$ de donde se concluye que la potencia espectral de una interacción de cuatro ondas esta dada por,

$$S_\sigma(\omega) = \varepsilon^{1/3} \sigma^{1/3} \omega^{-8/3} \quad (1.70)$$

Para el caso de tres ondas $S_\sigma(\omega) \sim \varepsilon^{1/2}$, la ecuación de ν es, $\frac{2}{3} + \nu = \frac{1}{2}$, por lo que $\nu = \frac{1}{6}$, la potencia espectral es entonces,

$$S_\sigma(\omega) = \varepsilon^{1/2} \sigma^{1/6} \omega^{-17/6} \quad (1.71)$$

1.3.3.4. PSD para ondas de gravedad en función de k

A partir de la potencia espectral para gravedad en función de ω , $S_g(\omega) = \varepsilon^{1/3} g \omega^{-4}$, se puede deducir la potencia espectral en función de k . La transformación se realiza por medio de la ecuación (1.62) y dado que el sistema de la interfaz agua-aire donde se propagan las ondas tiene dimensionalidad $d = 2$ se tiene que,

$$S(k) = \frac{1}{2\pi} S(\omega) k^{-1} \frac{d\omega}{dk} \quad (1.72)$$

Entonces, recordando la relación de dispersión de ondas de gravedad, $\omega = (gk)^{1/2}$, su derivada es $\frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} g^{1/2} k^{-1/2}$ y el espectro de ondas de gravedad en las frecuencias espaciales queda [62],

$$S_g(k) = \frac{1}{2\pi} \varepsilon^{1/3} g [(gk)^{1/2}]^{-4} (k^{-1}) \left(\frac{1}{2} g^{1/2} k^{-1/2}\right) = \frac{1}{4\pi} \varepsilon^{1/3} g^{-1/2} k^{-7/2} \quad (1.73)$$

Para interacción de cuatro ondas.

1.3.3.5. PSD para ondas de capilaridad en función de k

Las potencias espectrales en capilaridad en función de k se deducen de la misma forma. La relación de dispersión es $\omega = \sigma^{1/2}k^{3/2}$, y por lo tanto su derivada $\frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2}\sigma^{1/2}k^{1/2}$. Sustituyendo estas expresiones, la PSD para una interacción a cuatro ondas resulta [63],

$$S_\sigma(k) = \frac{1}{2\pi}\varepsilon^{1/3}\sigma^{1/3}[\sigma^{1/2}k^{3/2}]^{-8/3}(k^{-1})\left(\frac{3}{2}\sigma^{1/2}k^{1/2}\right) = \frac{3}{4\pi}\varepsilon^{1/3}\sigma^{-1/2}k^{-9/2} \quad (1.74)$$

Para interacción de tres ondas. Ahora, de la misma manera para una interacción de tres ondas [65],

$$S_\sigma(k) = \frac{1}{2\pi}\varepsilon^{1/2}\sigma^{1/6}[\sigma^{1/2}k^{3/2}]^{-17/6}(k^{-1})\left(\frac{3}{2}\sigma^{1/2}k^{1/2}\right) = \frac{3}{4\pi}\varepsilon^{1/2}\sigma^{-3/4}k^{-19/4} \quad (1.75)$$

Analizando los resultados de las ecuaciones (1.73), (1.74) y (1.75) se puede observar que la ley de potencia del espectro de gravedad ($-7/2 = -3.5$) y es menos inclinada que las leyes de potencia de ambos espectros de capilaridad ($-9/2 = -4.5$ y $-19/4 = -4.75$). Ahora bien, los espectros de las ecuaciones (1.74) y (1.75) corresponden a leyes de potencia en donde se desarrollan ondas capilares con interacciones de cuatro ondas ó tres ondas por separado. Por otra parte, en teoría se tiene que si el sistema es completamente simétrico con respecto al eje perpendicular de la interfaz (eje z), es decir, las profundidades de los líquidos y sus densidades son idénticas, significa directamente que la contribución de ondas de gravedad es cero. Pero además, la imposición de esta simetría también implica que el Hamiltoniano de la interacción de tres ondas \mathcal{H}_3 se elimina [64] ya que las ondas capilares no distinguen la diferencia entre arriba o abajo. En síntesis, bajo esta condición de simetría, la cascada de potencia es debida solamente a la interacción de cuatro ondas (ecuación 1.74). A partir de este análisis se puede argumentar que en el experimento donde las alturas de los fluidos iguales ($h = h'$) y las densidades son similares, se espera que el mecanismo de interacción sea principalmente de cuatro ondas y el espectro capilar tenga una ley de potencia del orden de $\sim k^{-9/2}$.

Capítulo 2

Sistema experimental

Con el fin de excitar un estado turbulento de ondas capilares, se ha construido un montaje experimental que permite generar este tipo de ondas en una interfaz agua-aceite en un amplio rango de longitudes y amplitudes de onda. Este capítulo inicia presentando los detalles del montaje en la primera sección. En una segunda sección se detalla la calibración de los sensores de Fuerza $F(t)$ y Velocidad $V(t)$ que se usan para medir y controlar la potencia inyectada a las ondas en la interfaz. Finalmente, se explica como a través de un sistema óptico es posible extraer con una cámara rápida imágenes de perfiles de onda que se pueden observar en una sección transversal en la interfaz agua-aceite. Estos datos contienen la información de las amplitudes y longitudes de onda requeridos para el análisis estadístico de la Turbulencia de Ondas Capilares. Los resultados del procesamiento y análisis de la dinámica turbulenta a través de la extracción de estos datos se presenta en el Capítulo 3.

2.1. Montaje experimental

El sistema experimental mostrado en la Figura 2.1 es una caja de acrílico transparente con dimensiones interiores 37 cm de largo por 29 cm de ancho y 10 cm de altura que se llena hasta una altura de 5 cm con agua destilada (densidad $\rho_w = 1.0 \text{ gr/cm}^3$, viscosidad cinemática $\nu_w = 1.0 \text{ cSt}$) teñida con un colorante fluorescente (tetrabromo-fluoresceína, 5 mg por litro). El resto de la celda se llena con aceite de silicona (PDMS de ABCR GmbH con densidad $\rho_o = 0.918 \text{ gr/cm}^3$, viscosidad cinemática $\nu_o = 5 \text{ cSt}$). La celda queda

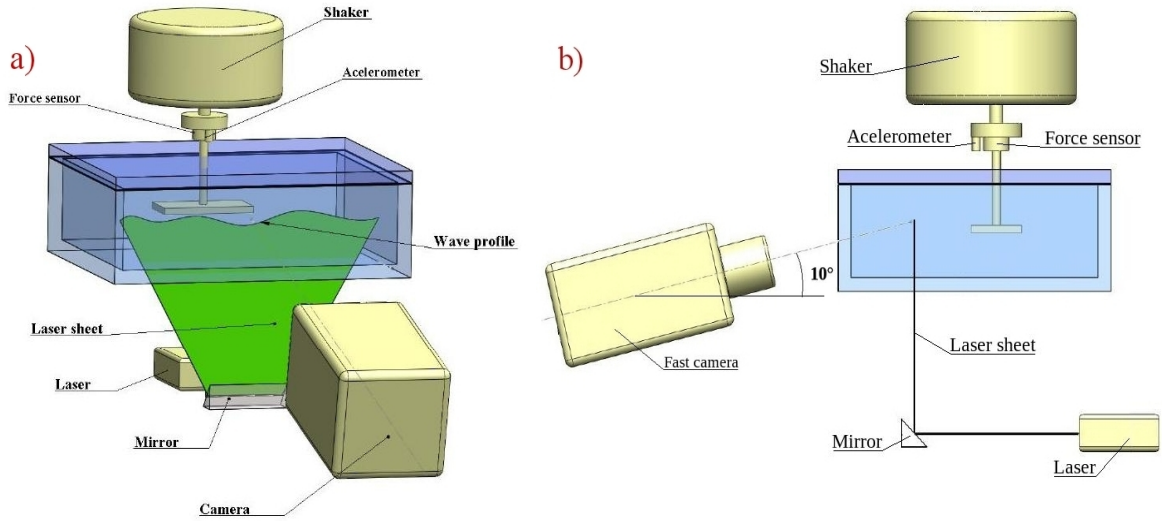


Figura 2.1: a) Esquema del sistema experimental. b) Imagen de perfil del sistema experimental.

totalmente llena de estos dos líquidos: se han removido todas las burbujas de aire que queden en su interior para asegurar que solo exista un bloque de aceite de 5.36 l sobre uno de agua de igual cantidad. Esto se realiza con el objetivo de definir el sistema con una sola interfaz agua y aceite [63].

2.1.1. Excitación de ondas

Como se ha concebido el sistema a diferencia de uno de interfaz agua-aire, las densidades de los dos líquidos son comparables de tal forma que la relación de dispersión esta dada por¹ [32],

$$\omega^2 = \frac{\rho_w - \rho_o}{\rho_w + \rho_o} gk + \frac{\sigma_{wo}}{\rho_w + \rho_o} k^3, \quad (2.1)$$

en el límite de agua profunda, donde g es la aceleración de gravedad y σ_{wo} la tensión superficial de la interfaz agua-aceite² que es del orden de 73.6×10^{-3} N/m.

La Figura 2.2 ilustra las relaciones de dispersión teóricas para una interfaz agua-aire (Figura a), y para una interfaz agua-aceite (Figura b). En el primer tipo de interfaz ($\rho_w = 1.0$

¹La deducción completa se encuentra en el Capítulo 1.

²El detalle de la medida de este valor se encuentra en el Capítulo 3.

gr/cm^3) el crossover entre las ondas de gravedad y las ondas capilares se encuentra en $k_{cross-w} = \sqrt{\frac{\rho_w g}{\sigma_w}}$ con $\sigma_w = 72.75 \times 10^{-3}$ N/m éste es igual a 0.37 mm^{-1} , es decir, a partir de este valor, para $k > k_{cross-w}$, las ondas capilares dominan sobre las ondas de gravedad, en longitud de onda $\lambda_{cross-w}$ este valor equivale a 16.98 mm. De otra manera, en una interfaz agua-aceite ($\rho_w = 1.0 \text{ gr/cm}^3$ y $\rho_o = 0.918 \text{ gr/cm}^3$) el crossover utilizando el valor de la tensión superficial de 73.6×10^{-3} N/m esta en $k_{cross-wo} = \sqrt{\frac{(\rho_w - \rho_o)g}{\sigma}}$ y su valor es de 0.105 mm^{-1} lo que equivale a $\lambda = 59.8$ mm.

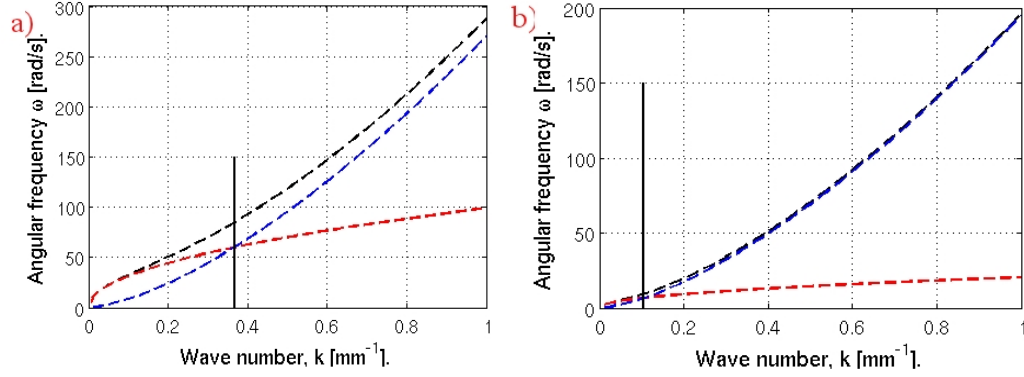


Figura 2.2: Relación de dispersión Gravito-capilar (línea a trazos negra). **a)** interfaz agua-aire. **b)** interfaz agua-aceite. En cada una de las figuras la línea a trazos roja (- -) corresponde a la contribución de la gravedad a la relación de dispersión y la línea a trazos azul (- -) a la contribución capilar. La línea vertical continua negra indica el crossover entre las ondas de gravedad y capilares, para la Figura **a)** $k_{cross-w} = 0.370 \text{ mm}^{-1}$ y en **b)** $k_{cross-wo} = 0.105 \text{ mm}^{-1}$.

En la ecuación (2.1) el primer término de la derecha corresponde a la contribución de la gravedad a la relación de dispersión y el segundo término de la derecha a la contribución capilar a la relación de dispersión. Observando la estructura de los términos de la ecuación (2.1), es claro que las ondas de gravedad y de tensión superficial son dispersivas porque la dependencia de la frecuencia angular ω con el número de onda k no es lineal, es decir, la velocidad de fase definida como $c_\phi(k) = \frac{\omega(k)}{k}$ es dependiente del número de onda k [36],

$$c_\phi(k) = \left(\frac{\rho_w - \rho_o}{\rho_w + \rho_o} \right)^{1/2} g^{1/2} k^{-1/2} \quad \text{para ondas de gravedad.} \quad (2.2)$$

$$c_\phi(k) = \left(\frac{\sigma}{\rho_w + \rho_o} \right)^{1/2} k^{1/2} \quad \text{para ondas capilares.} \quad (2.3)$$

De las ecuaciones anteriores se puede decir adicionalmente que la relación de dispersión

para gravedad es denominada *normal* debido a que la velocidad de fase disminuye con k (ó aumenta con la longitud de onda λ), mientras que para la relación de dispersión de tensión superficial es denominada *anómala* porque su velocidad de fase aumenta con k (ó disminuye con la longitud de onda λ). La Figura 2.3, muestra un gráfico de esta situación.

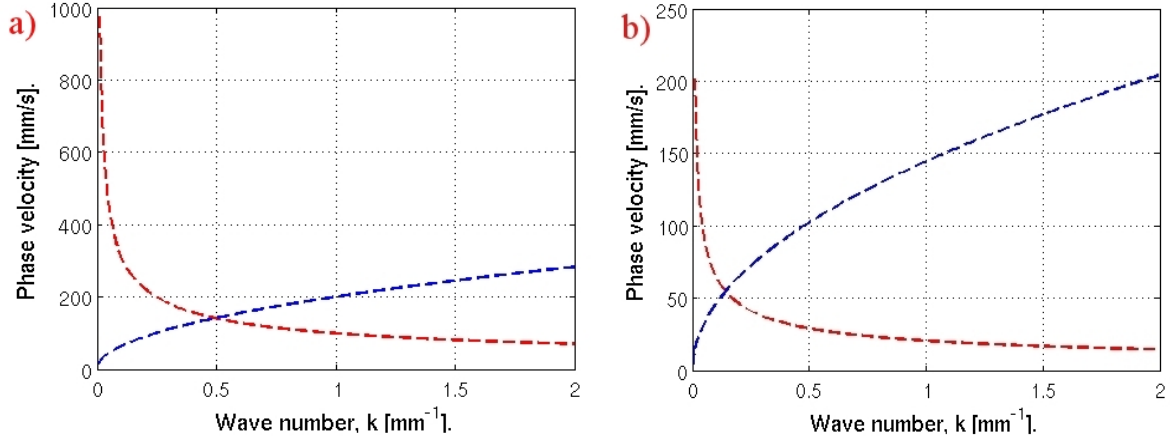


Figura 2.3: Figura a) velocidad de fase teórica para una interfaz *agua-aire*. Figura b) Velocidad de fase teórica para interfaz *agua-aceite*. En ambas Figuras las curvas de línea a trazos roja (--) corresponde a la contribución de la gravedad donde la relación de dispersión es *normal* y las curvas de línea a trazos azul (--) corresponde a la contribución capilar donde la relación de dispersión es *anómala*.

Cuando un grupo de estas ondas con diferentes números o longitudes de onda ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$) se propaga, cambia su forma a medida que la superposición progresa en el espacio debido a que sus componentes viajarán a distintas velocidades. Esto se hace claro al observar la velocidad de grupo $c_g(k)$ de las ondas de gravedad y capilaridad,

$$c_g(k) = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_w - \rho_o}{\rho_w + \rho_o} \right)^{1/2} g^{1/2} k^{-1/2} \quad \text{para ondas de gravedad.}$$

$$c_g(k) = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2} \left(\frac{\sigma}{\rho_w + \rho_o} \right)^{1/2} k^{1/2} \quad \text{para ondas capilares.}$$

De igual forma que la velocidad de fase, estas ecuaciones indican que la velocidad de grupo de ondas de gravedad aumenta cuando disminuye k , mientras que para ondas capilares la velocidad aumenta si k lo hace de igual manera. Además se puede establecer que para ondas de gravedad $c_g(k) = \frac{1}{2}c_\phi(k)$ y para ondas capilares $c_g(k) = \frac{3}{2}c_\phi(k)$. El comportamiento de las velocidades de grupo y fase para ondas superficiales explica porque

pequeñas ondas capilares se mueven rápidamente dentro de ondas de longitudes más largas.

El término $(\Delta\rho) = \frac{\rho_w - \rho_o}{\rho_w + \rho_o}$ en la ecuación (2.1) es denominado número de Atwood y explica porque las densidades de los líquidos se han escogido lo mas similares posibles. Con la densidad del agua de $\rho_w = 1.000 \text{ gr/cm}^3$ y del aceite de $\rho_o = 0.918 \text{ gr/cm}^3$, el número de Atwood es de $(\Delta\rho) = 0.042$, esto hace que la contribución a la relación de dispersión debida a la gravedad se convierta en un término de microgravedad³. La Tabla 2.1 compara valores calculados de frecuencia angular ω de la relación de dispersión gravito-capilar de la interfaz agua-aceite (Figura 2.2 b)) con respecto a los valores correspondientes de la relación de dispersión capilar para los números de onda $k_{cross-wo} = 0.105 \text{ mm}^{-1}$, 0.37 mm^{-1} y 1.0 mm^{-1} . Se observa que la mayor desviación de ω ocurre en el valor del crossover de la interfaz agua-aceite $k_{cross-wo}$ porque allí el efecto de la gravedad es del mismo orden que el capilar, pero para valores mayores de k esta diferencia se hace mucho menor, de tal forma se puede considerar que la contribución de gravedad se hace despreciable en dicha relación de dispersión gravito-capilar. Por lo tanto, el estudio experimental se enfocará en la propagación e interacción de las ondas debidas a la capilaridad utilizando la interfaz agua-aceite.

Número de onda [mm^{-1}]	Frecuencia angular gravito-capilar $\omega_{grav-cap}$ [rad/seg]	Frecuencia angular capilar ω_{cap} [rad/seg]	Desviación relativa $\frac{ \omega_{gra-cap} - \omega_{cap} }{\omega_{cap}} \cdot 100$ [%]
0.105	9.37	6.62	41.5
0.37	45.57	43.83	3.9
1.00	195.8	194.8	0.5

Tabla 2.1: Comparación entre valores calculados de la relación de dispersión gravito-capilar con valores de la relación de dispersión capilar en una interfaz agua-aceite.

Naturalmente, las ondas que se propagan en la interfaz viajan a través de la celda, se reflejan en las paredes y tras reflexiones sucesivas finalmente se disiparán. Esto hace necesario excitar ondas constantemente para asegurar un estado estacionario. De tal forma, se dispone de un vibrador electromecánico (Brüel & Kjær tipo 4824). Teniendo en cuenta que la caja debe ser siempre hermética, una manera de generar ondas sin filtraciones de líquidos es a través de un pistón ubicado en el interior de la celda. Esto se logra al conectar el vibrador electromecánico ubicandolo en la parte superior a la celda y soportado por una estructura metálica (ver la Figura 2.4). El vibrador se conecta desde el exterior por

³El análisis experimental de este hecho se explica con detalle en el Capítulo 3.

medio de un eje que atraviesa la caja por la tapa superior. Las ondas serán generadas empujando la interfaz verticalmente con un pistón de dimensiones $6 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$ y espesor 8 mm , que se ubica paralelo sobre la interfaz a una distancia mínima, entre 5 mm y 10 mm , pero sin que entre en contacto con ésta mientras se excitan las ondas.

Durante la excitación de ondas la interfaz no se debe romper y permitir que se mezclen los líquidos. Esta condición se ha impuesto porque provocaría un cambio en la dinámica del sistema: cuando los líquidos se mezclan la energía que se suministra ya no solamente se distribuye en la generación de ondas, que es lo que se desea, si no en la formación de burbujas que se van depositando en la interfaz como subproducto de la ruptura. Este proceso continuado resultará en la destrucción de la interfaz, que, al contrario, siempre debe ser suave.

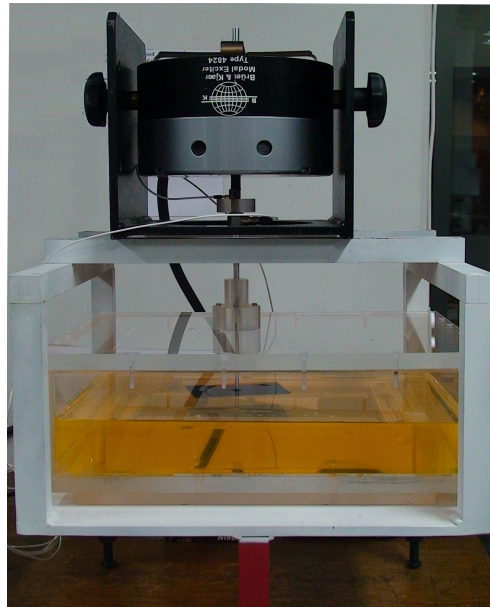


Figura 2.4: Montaje experimental: el vibrador electromecánico ubicado en la parte superior de la estructura metálica. En la parte interior a la estructura se observa la celda experimental con agua que ha sido teñida con fluoresceína lo que explica su color rojizo. También se observa el acoplamiento entre el pistón y el eje del vibrador a través del eje que atraviesa el retén por la parte superior de la caja.

2.1.2. Generación de ondas

Para excitar ondas en la celda, el pistón empuja la interfaz por medio de oscilaciones que produce el vibrador electromecánico. El tipo de oscilación queda determinada por señales de onda externas alimentadas al vibrador debido a su respuesta monomodal. Esta

característica garantiza que el vibrador reproducirá mecánicamente la señal con la que es alimentado. Las señales de onda se generan en forma digital haciendo uso de códigos programados en LabView⁴ y debido a que el vibrador funciona con señales en forma análoga se dispone de una tarjeta de adquisición (NI USB-6212 BNC 16bits) para realizar la conversión. El voltaje de salida de la tarjeta debe ser amplificada para excitar el vibrador, por lo que se dispone de un amplificador tipo *SKP_{pro-audio}* MAX300 de 150 W salida máxima.

Las señales de excitación utilizadas para el experimento son de dos tipos: una sinusoidal con frecuencias que pueden variar entre 2 Hz y 35 Hz, y una aleatoria con distribución gaussiana, promedio cero y espectro filtrado hasta 3 Hz. Es importante hacer mención que el objetivo de excitar ondas con un forzaje aleatorio con espectro en bajas frecuencias es inyectar energía a bajas escalas, ó lo que es equivalente, generar ondas con longitudes de ondas comparables a longitud del sistema que en este caso corresponde a la menor longitud física de la celda experimental que es de 29 cm. La inyección de energía a grandes escalas (longitudes de onda grandes) provoca a través de las interacciones no lineales de las ondas el desarrollo de una cascada de energía hacia las escalas más pequeñas, es decir, generando longitudes de onda más pequeñas que desaparecen hasta que llegan a la escala de disipación⁵.

Además del tipo de señal con el que se alimenta el vibrador también es necesario controlar su amplitud. Para esto se mide el voltaje de salida del amplificador de potencia, que es el mismo que alimenta al vibrador. Para cualquiera de los dos tipos de onda consideradas el parámetro de control será la desviación estándar de la señal que alimenta al vibrador ($\sigma_{V_{forz}}$). Las Figuras 2.5 y 2.6 muestran un ejemplo cuando la señal aplicada es aleatoria con distribución gaussiana y espectro plano filtrado en 3 Hz. Para verificar esto se ha calculado la distribución de probabilidad $PDF(V)$ (Probability Density Function) de tal manera que $PDF(V) dV$ da cuenta de la probabilidad de encontrar un valor de voltaje V entre el intervalo $[V, V + dV]$. La PDF se calcula con una traza adquirida durante un tiempo de 300 s y $\sigma_{V_{forz}} = 0.52$ V, y sobre ella se ha ajustado una distribución gaussiana teórica que se ajusta bastante bien a los datos experimentales entre el rango $[-3 - 3]$ lo que demuestra que efectivamente la señal aleatoria es de tipo gaussiana. Además se presenta la potencia espectral PSD (Power Spectral Density) que describe como la potencia de la señal es distribuida en función de la frecuencia. Por lo tanto, en la Figura 2.6 se observa

⁴LabView es un software gráfico para pruebas, control y diseño, desarrollado por National Instruments. En el experimento la versión de LabView utilizada es la 8.5.

⁵El detalle experimental de esta fenomenología se presentará en el Capítulo 3.

que el mayor valor de potencia inyectada, el cual es del orden de 10^{-1} V^2/Hz , se encuentra entre el intervalo $[1 - 3]$ Hz como se requiere. Fuera de este intervalo se aprecia el efecto que tienen los filtros que truncan la señal de tal forma que la intensidad de la potencia con frecuencias mayores a 3 Hz empiezan a atenuarse y cae a 10^{-3} V^2/Hz en 5 Hz donde se puede considerar que su efecto es mínimo porque es 100 veces menor que la potencia en las frecuencias de interés.

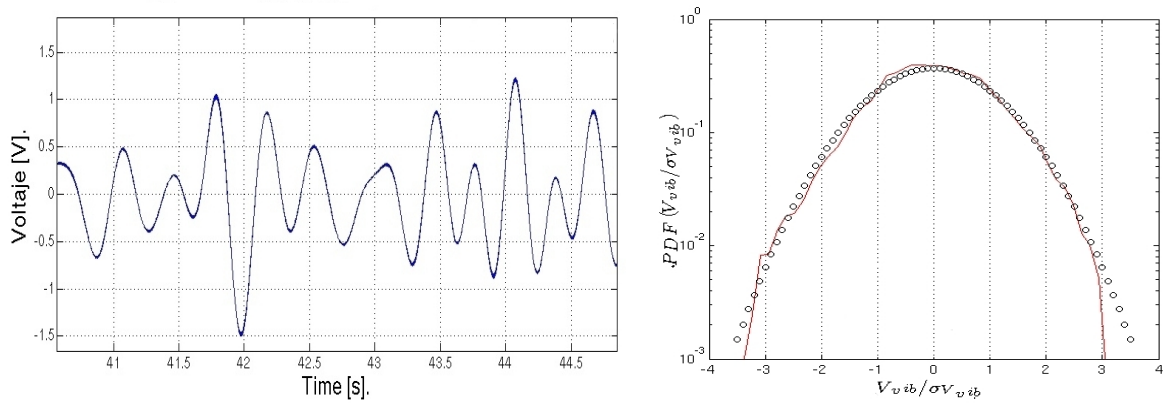


Figura 2.5: Izquierda: traza de la señal aleatoria de forzaje que alimenta al vibrador tomada con una desviación estándar $\sigma_{V_{forz}} = 0.522$ V. Derecha: PDF de la misma traza de voltaje tomada en un intervalo de 300 s.

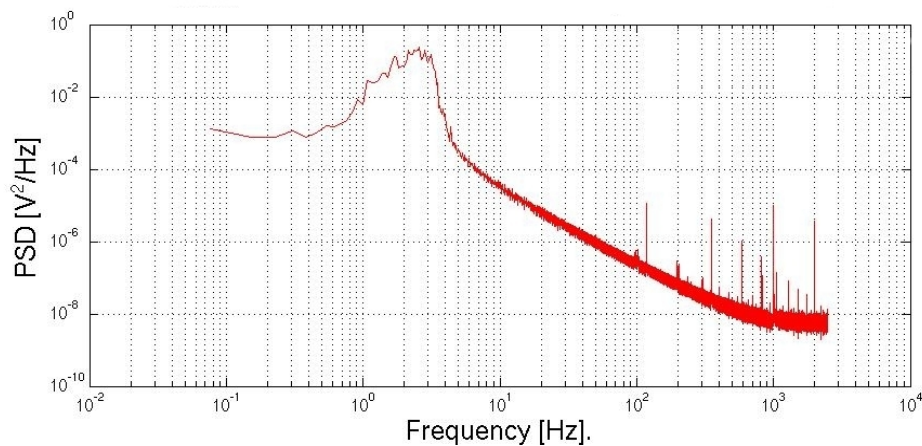


Figura 2.6: Densidad de potencia espectral de la señal aleatoria.

2.2. Sistemas de medida

Las ondas en la interfaz se propagan en todas direcciones, se reflejan en las paredes e interactúan entre ellas por efectos no lineales⁶. Ya que el problema experimental se centra en el estudio de la propagación e interacción de ondas capilares en la interfaz agua-aceite, para esto se debe implementar un método con el fin de detectar las amplitudes y longitudes de las ondas presentes mientras se excita el sistema ondulatorio. Además, se debe cuantificar la potencia inyectada que provee directamente el vibrador y se entrega a través del pistón a los líquidos para observar como a través de esta medida cambia el comportamiento de las ondas cuando la potencia inyectada se incrementa.

Por lo tanto, esta sección explica en detalle el funcionamiento de los sistemas de medida con los cuales se controla y se extraen datos experimentales. Para tal efecto, se requieren dos tipos de sistemas, uno de control a la potencia inyectada $I(t)$, y un sistema óptico que permite medir las amplitudes y longitudes de las ondas presentes en la interfaz en una dirección coordenada.

2.2.1. Determinación de la Potencia Inyectada $I(t)$

Para medir la potencia inyectada al sistema $I(t)$ se utilizan dos sensores, uno de fuerza (modelo PCB 208C01) y un acelerómetro (Brüel & Kjær 4393). Los sensores están ubicados entre el eje del vibrador y el eje del pistón, mostrados en la Figura 2.7. Estos sensores son de tipo piezoeléctrico, lo que los convierte en sensores dinámicos sensibles únicamente a los cambios de fuerza o aceleración. El sensor de fuerza está conectado a un acondicionador de señal (PCB, Modelo 480C02 ICP) el cual es una fuente de poder para sensores tipo ICP (Integrated Circuit Piezoelectric sensor), mientras que el acelerómetro está conectado a un amplificador de carga (Modelo Brüel & Kjær 2635) que también funciona como fuente de poder para este sensor pero además tiene la capacidad de convertir las medidas de aceleración en medidas de velocidad por medio de la acumulación (integración) de la carga que se almacena durante un ciclo. Obtener la medida de velocidad tanto la medida de la fuerza constituyen la base para calcular $I(t)$ ya que esta puede obtenerse a través del producto de $F(t)$ y $V(t)$. La siguiente discusión está dedicada a exponer en detalle como se calcula la potencia inyectada a los $I(t)$ al sistema.

La calibración del sensor de fuerza (PCB208C01) establece que tiene una sensibilidad

⁶Esto se aborda extensivamente en el Capítulo 1.

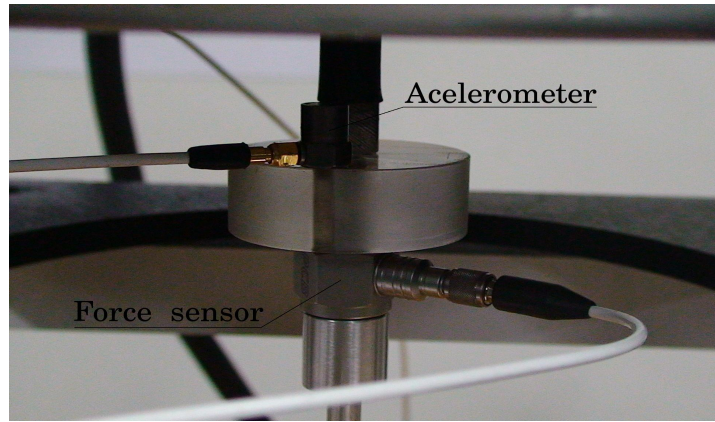


Figura 2.7: Sensores de fuerza y aceleración acoplados entre el eje del vibrador y el eje-pistón.

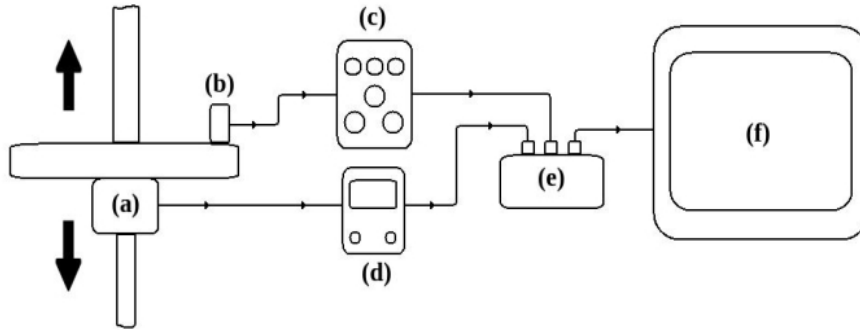


Figura 2.8: Esquema de conexión de los sensores. (a) Sensor de fuerza. (b) Sensor de aceleración. (c) amplificador de carga del sensor de aceleración. (d) Concionador de señal del sensor de fuerza. (e) Tarjeta de adquisición. (f) PC.

de 112.41 mV/N [$\pm 15\%$] ($8.9 \pm 1.3 \text{ N}$). Para el acelerómetro su sensibilidad es de 3.19 pC/ms^{-2} [$\pm 2\%$] (ó $0.317 \pm 0.006 \text{ m/s}$ por cada 1000 mV).

Para la captura de datos de Fuerza $F_{vib}(t)$ y Velocidad $V(t)$ se utilizan los canales de entrada de la tarjeta de adquisición (NI USB-6212 BNC). Los datos que provienen de los sensores en forma analoga se guardan en el PC en forma digital a una frecuencia de adquisición de 5 KHz utilizando un programa diseñado en LabView.

Durante el experimento, se guardan trazas de $F_{vib}(t)$ y $V(t)$ para un intervalo de 600 s , que con una frecuencia de adquisición de 5 KHz se capturan trazas con 3×10^6 puntos. Simultáneamente a la captura de datos se generan ondas en la interfaz con forzaje aleatorio de distribución gaussiana y espectro filtrado en 3 Hz . Una muestra de éstas trazas, la de más baja amplitud que se ha obtenido, se ilustra en la Figura 2.9, donde $\sigma_{F_{vib}}$ es 0.32 N

y σ_V es 0.08 m/s.

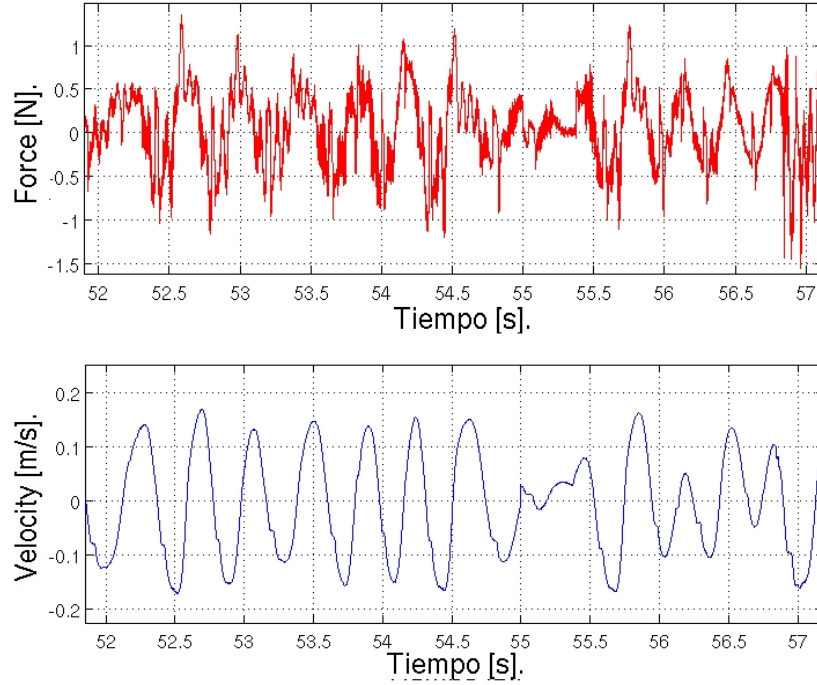


Figura 2.9: Muestras de las trazas de Fuerza (rojo) y Velocidad (azul) capturadas por los sensores.

Cuando se excitan ondas en la interfaz del agua y el aceite con señales de onda aleatorias de distribución gaussiana, se hace con el objetivo de que la respuesta de la Fuerza $F_{vib}(t)$ y la Velocidad $V(t)$ se comporten también como una distribución gaussiana. Para esto se ha inyectado potencia a la interfaz seleccionando seis señales aleatorias de diferentes amplitudes de forzaje, cada una da como resultado que su parámetro de control $\sigma_{V_{forz}}$ es 0.52 V, 0.71 V, 1.14 V, 1.55 V, 2.03 V y 2.70 V. Las curvas de las Figuras 2.10 y 2.11 muestran cada una de las PDFs normalizadas resultantes de esta secuencia de forzamiento donde se ha superpuesto una distribución gaussiana teórica. En estas curvas se observa que la Velocidad se ajusta a la distribución teórica, pero en cambio, en las distribuciones de la Fuerza se observan grandes discrepancias, por lo que el análisis cualitativo no es suficiente para determinar estas desviaciones con respecto a una distribución teórica. Para determinar cuantitativamente la desviación de las PDFs de Fuerza y Velocidad se han calculado la Skewness y la Kurtosis definidos como $\mu_3 = \frac{\langle(\Gamma(t)-\langle\Gamma(t)\rangle)^3\rangle}{\sigma_\Gamma^3}$ y $\mu_4 = \frac{\langle(\Gamma(t)-\langle\Gamma(t)\rangle)^4\rangle}{\sigma_\Gamma^4}$, respectivamente [34], y donde $\Gamma(t)$ representa la Fuerza o la Velocidad en función del tiempo. Estos valores dan cuenta de que tan plana es cada PDF (Kurtosis) y el valor de su asimetría (Skewness). Los valores se calculan a través de las trazas temporales de

Fuerza y Velocidad. Los resultados se muestran en la Tabla 2.2.

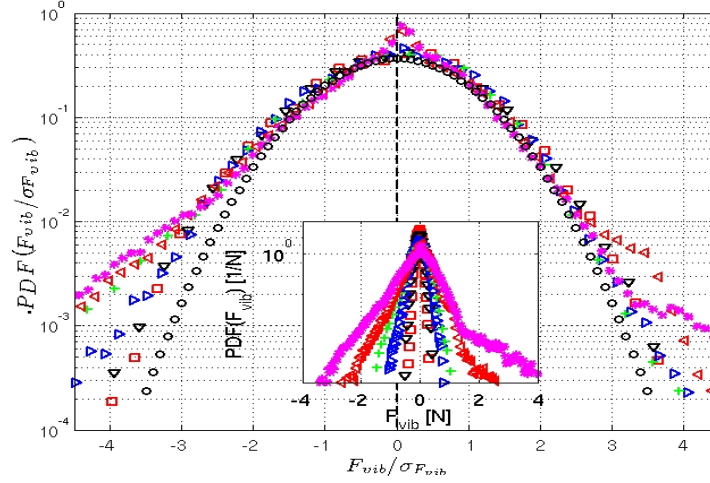


Figura 2.10: PDFs Fuerza normalizadas para seis diferentes voltajes de forzaje en el vibrador $\sigma_{V_{forz}}$. Para cada curva el color corresponde al $\sigma_{V_{forz}}$ como sigue: 0.52 V ($\square\square\square$), 0.71 V ($\nabla\nabla\nabla$), 1.14 V ($\triangleright\triangleright\triangleright$), 1.55 V ($+++$), 2.03 V ($\triangleleft\triangleleft\triangleleft$), 2.70 V ($***$). El inset muestra las PDFs no normalizadas siguiendo la misma convención de marcadores a los datos. Se observan grandes discrepancias con respecto a la forma de una distribución gaussiana para los voltajes de 2.03 V y 2.70 V. Las discrepancias se producen porque el vibrador electromecánico esta sometido a una gran amplitud de oscilación que superan su rango óptimo de operación.

$\sigma_{V_{forz}}$ [V]	Kurtosis Fuerza	Skewness Fuerza	Kurtosis Velocidad	Skewness Velocidad
0.52	3.117	-0.105	3.322	-0.195
0.71	3.127	-0.103	3.095	-0.213
1.14	3.254	-0.209	2.972	-0.117
1.55	3.864	-0.439	2.791	-0.019
2.03	6.421	-0.386	2.897	-0.058
2.70	8.282	-0.251	2.609	-0.101

Tabla 2.2: Kurtosis y Skewness para las PDFs de Fuerza y Velocidad.

En teoría una distribución gaussiana $\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ tiene una Kurtosis de 3 y el valor de su Skewness es de 0, y comparando con los valores de Kurtosis de la Fuerza se puede determinar que para los tres primeros voltajes de forzaje el ajuste de las PDFs es más fiable a una gaussiana con una discrepancia máxima de 6.6%. Los tres últimos valores con voltajes de forzaje $\sigma_{V_{forz}}$ 1.55 V, 2.03 V y 2.70 V presentan una gran desviación que se incrementa con la amplitud de forzaje según se aprecia en la Tabla 2.2. De igual forma, la desviación se observa en las PDFs correspondientes de la Figura 2.10. Las discrepancias son provocadas porque el vibrador electromecánico esta sometido a una gran amplitud de oscilación

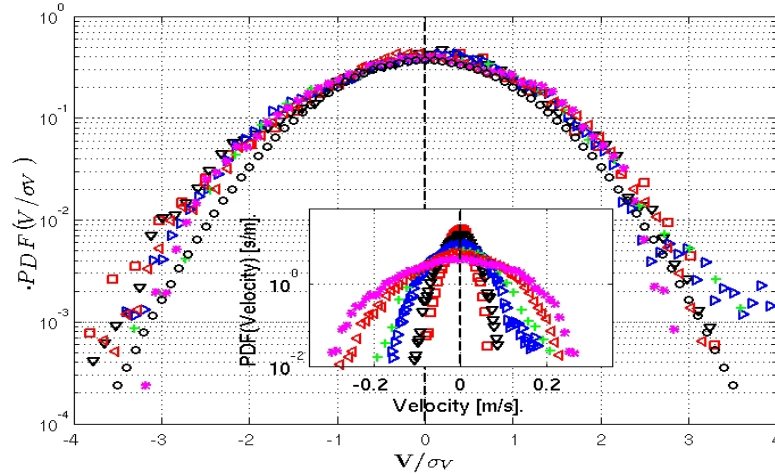


Figura 2.11: PDFs Velocidad normalizadas para seis diferentes voltajes de forzaje en el vibrador $\sigma_{V_{forz}}$. Para cada curva el color corresponde al $\sigma_{V_{forz}}$ como sigue: 0.52 V ($\square\square\square$), 0.71 V ($\nabla\nabla\nabla$), 1.14 V ($\triangleright\triangleright\triangleright$), 1.55 V ($+++$), 2.03 V ($\triangleleft\triangleleft\triangleleft$), 2.70 V ($***$). El inset muestra las PDFs no normalizadas siguiendo la misma convención de marcadores a los datos.

que superan su rango óptimo de operación⁷. En contraste, este hecho no se observa en las PDFs de Velocidad, porque el amplificador de carga esta integrando las medidas, es decir, filtra las frecuencias altas que resultan de las grandes amplitudes del vibrador. En síntesis, las distribuciones de Fuerza obtenidas con voltajes de forzaje de 1.55 V, 2.03 V y 2.70 V no corresponden a distribuciones gaussianas. En cuanto a las PDFs de velocidad se verifica que su comportamiento gaussiano es mas exacto para todas los voltajes de forzaje, a pesar que se observa una clara tendencia de disminución de la Kurtosis a medida que aumenta el voltaje de forzaje $\sigma_{V_{forz}}$, esto significa que estas PDFs se vuelven ligeramente más planas en su parte superior con respecto a una gaussiana.

En cuanto a los valores de la Skewness todos son negativos pero cercanos a cero. La coincidencia de que todos estos valores posean el mismo signo no se puede explicar argumentando que son pequeñas fluctuaciones de la medidas, en vez de eso esto significa que es ligeramente más probable medir valores negativos de Fuerza y Velocidad, lo que se puede argumentar por una asimetría en la medida al empujar el líquido circundante al pistón que cuando éste retrocede porque una cara del pistón se encuentra conectada al eje, mientras la otra esta libre.

Para determinar la potencia inyectada a los líquidos $I(t)$, se debe analizar la ecuación

⁷La parte interna del vibrador, la cual oscila, choca contra la estructura que la contiene introduciendo ruido en la medida.

de movimiento del pistón el cual es el que transmite la potencia desde el vibrador a los líquidos [76]. Esta es,

$$M\dot{V}(t) = F_{vib}(t) + F_{fl}(t), \quad (2.4)$$

donde M es la suma de la masa del pistón y el eje (aproximadamente de 150 g), $F_{vib}(t)$ es la fuerza aplicada por el vibrador al pistón y $F_{fl}(t)$ es la fuerza que los fluidos ejercen sobre el pistón. El peso del pistón esta también presente, pero ya que el sensor de fuerza está diseñado para registrar solamente medidas dinámicas, el peso no es capturado porque es naturalmente una constante. Adicionalmente, se diseño un retén acoplado a la tapa de la caja y que permite el paso del eje que conecta al pistón con el vibrador, éste retén tiene un agujero con perforación de un diámetro mayor que el eje del pistón (diámetro del eje de 4 mm, diámetro de la perforación del retén de 8 mm). De esta manera el eje puede moverse libremente sin introducir fuerza de fricción a la ecuación de movimiento.

La potencia inyectada a los fluidos esta dada por $I(t) = F_{vib}(t)V(t)$. El signo más viene del hecho que $F_{vib}(t)$ es la fuerza que ejercen el pistón sobre los fluidos, mientras que $V(t)$ es la velocidad a la cual se mueve el pistón. Ahora bien, debido a la inercia del pistón-eje dada por el término $M\dot{V}(t)$, la potencia inyectada instantánea no se puede calcular directamente por la medida de la fuerza $F_{vib}(t)$, es decir, multiplicando la ecuación de movimiento (2.4) por $V(t)$ y sustituyendo el valor de $I(t)$, se obtiene que,

$$I(t) = F_{vib}(t)V(t) - M\dot{V}(t)V(t) \quad (2.5)$$

Es claro que el factor $M\dot{V}(t)V(t)$ no es en principio despreciable y por lo tanto $I(t) \neq F_{vib}(t)V(t)$ donde $F_{vib}(t)$ es la fuerza medida por el sensor. Aún así, el promedio de la potencia inyectada a los fluidos $\langle I(t) \rangle$ es igual a la potencia medida $\langle F_{vib}(t)V(t) \rangle$. Para mostrar esto se toma el promedio de la ecuación (2.5),

$$\langle I(t) \rangle = \langle F_{vib}(t)V(t) \rangle - M\langle \dot{V}(t)V(t) \rangle \quad (2.6)$$

El segundo término a la derecha de la ecuación (2.6) es la energía por unidad de tiempo promedio $\langle \dot{E} \rangle = M\langle \dot{V}(t)V(t) \rangle$ la cual es *cero* debido que en el estado estacionario la energía no cambia. Por lo tanto, la potencia promedio calculada con los datos que proveen los sensores es equivalente a la potencia inyectada promedio a los líquidos,

$$\langle I(t) \rangle = \langle F_{vib}(t)V(t) \rangle = \langle D(t) \rangle = \langle F_{fl}(t)V(t) \rangle, \quad (2.7)$$

donde $\langle D(t) \rangle$ es la potencia disipada. Para mostrar la influencia de los líquidos sobre el pistón, se ha medido la potencia inyectada cuando en la caja no tiene líquidos, es decir, solamente $F_{vib}(t)V(t)$, y también la potencia inyectada a los líquidos cuando el pistón esta sumergido completamente en el aceite de silicona (viscosidad 5 cSt), esto es, $[F_{vib}(t) - M\dot{V}(t)]V(t) = -F_{fl}(t)V(t)$. La Figura 2.12 muestra las PDFs de estas dos situaciones, en negro, cuando el pistón esta oscilando libremente y en rojo bajo la influencia del aceite. La parte negativa de las PDFs corresponde a la potencia que el fluido retorna al pistón y la parte positiva es la potencia que se inyecta a los líquidos. La PDF bajo la influencia del aceite es asimétrica y esta inclinada hacia la derecha, lo que muestra que efectivamente se inyecta potencia al fluido, en este caso $\langle I(t) \rangle = 1.30$ mW.

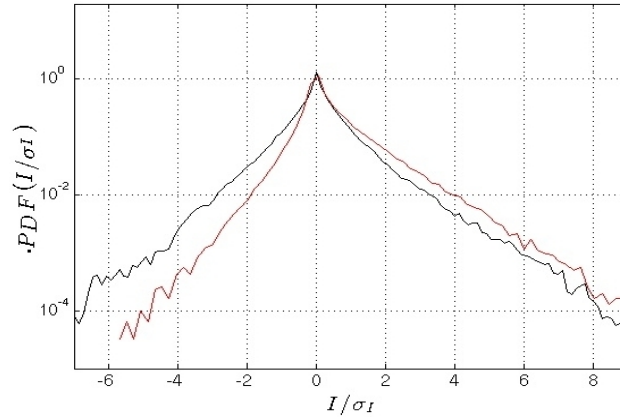


Figura 2.12: PDFs de la potencia inyectada cuando el pistón se vibra sin fluidos (negro) y cuando el pistón se vibra sumergido en aceite de silicona de 5 cSt (rojo).

Las PDFs de la Potencia Inyectada como las presentadas en la Figura 2.12 son el resultado del producto de dos variables aleatorias correladas cada una con distribución gaussiana, el resultado se conoce como la distribución de Craig [77, 78] y esta dada por la ecuación,

$$\Pi_{FV}(I) \sim \begin{cases} \sqrt{\frac{\Lambda^+ \Lambda^-}{\pi(\Lambda^+ + \Lambda^-)}} \frac{\exp(-\Lambda^+ I)}{\sqrt{I}} & \text{para } I > 0 \\ \sqrt{\frac{\Lambda^+ \Lambda^-}{\pi(\Lambda^+ + \Lambda^-)}} \frac{\exp(-\Lambda^- I)}{\sqrt{|I|}} & \text{para } I < 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

donde $\Lambda^+ = \frac{1}{\sigma_F \sigma_V (1+\rho)}$ y $\Lambda^- = \frac{1}{\sigma_F \sigma_V (1-\rho)}$ y ρ es el coeficiente de correlación dado por $\frac{\langle I \rangle}{\sigma_F \sigma_V}$.

De la ecuación (2.8) se observa que el modelo teórico de las PDFs de Potencia Inyectada

exhibe una singularidad en cero y un decaimiento exponencial para valores absolutos de $I(t)$, la asimetría de esta PDF es debida al coeficiente de correlación. La Figura 2.13 muestra un gráfico del cálculo numérico simulado de la ecuación (2.8) para diferentes valores de ρ .

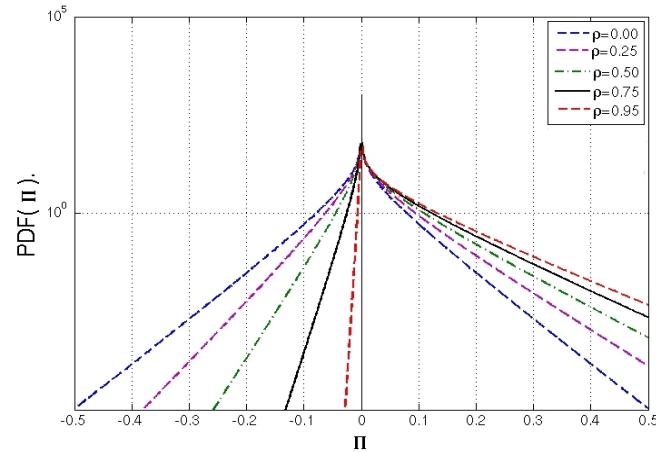


Figura 2.13: Distribución de Craig para diferentes valores del parámetro de correlación ρ . Para cada curva el color corresponde al parámetro ρ como sigue: azul $\rho=0$, magenta $\rho=0.25$, verde $\rho=0.50$, negra $\rho=0.75$, roja $\rho=0.90$.

En este estudio, las variables aleatorias son precisamente $F_{vib}(t)$ y $V(t)$ capturadas en intervalos iguales de tiempo y además ya se ha mostrado que cada una tiene aproximadamente una distribución gaussiana con excepción en los valores de $\sigma_{V_{forz}}$ 1.55 V, 2.03 V y 2.70 V en los valores de Fuerza. Entonces, la potencia inyectada $I(t)$ se calcula al multiplicar estas trazas. La Figura 2.14 ilustra el resultado de $I(t)$ calculado usando los datos de Fuerza y Velocidad de la Figura 2.9 donde $\sigma_{F_{vib}}$ es 0.08 N y σ_V es 0.02 m/s.

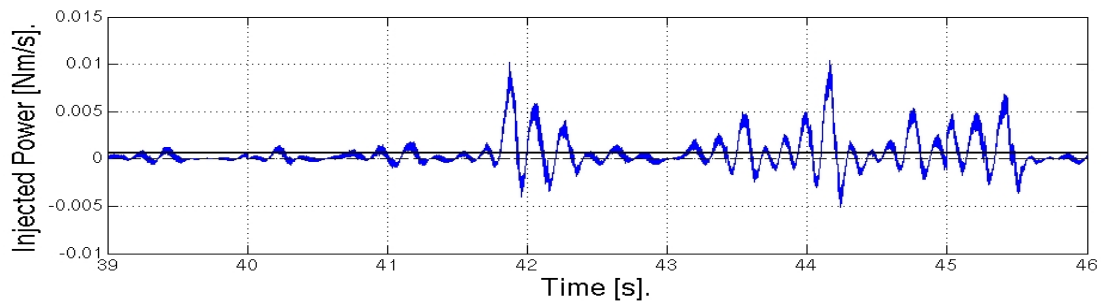


Figura 2.14: Muestra de la traza de potencia inyectada $I(t)$ calculada al tomar el producto de las trazas de $F_{vib}(t)$ y $V(t)$. La línea a trazos es el cero de la potencia inyectada. La línea negra continua corresponde a la potencia inyectada promedio, en este caso, $\langle I(t) \rangle = 6.4 \times 10^{-4}$ W.

A través de las trazas de Fuerza y Velocidad para cada voltaje de forzaje, se calculan las desviaciones estandar, σ_F , σ_V , el promedio de la potencia inyectada $\langle I \rangle$ y el parámetro de correlación ρ lo que se muestran en la Tabla 2.3. Con estos resultados, se ajusta la PDF teórica a cada una de las PDFs de Potencias Inyectadas experimentales para los diferentes valores de amplitudes de forzaje, estos resultados se muestran en la Figuras 2.15 a 2.17. En estas gráficas se observa que la curva teórica se ajusta correctamente a la curva experimental, salvo para las potencias promedio de 9.90 mW y 18.50 mW observadas en la Figura 2.17, donde las colas de las PDFs se desvían de la predicción teórica. Esta discrepancia es originada porque el vibrador goplea su base debido a que es sometido a grandes amplitudes de oscilación para los voltajes de forzaje de $\sigma_{V_{forz}} = 2.03$ V y 2.70 V. Esto se observa en las PDFs correspondientes de Fuerza (Figura 2.10) y la consecuencia es que a estos voltajes las colas de la PDF de potencia inyectada (Figura 2.17) presentan discrepancias con respecto al cálculo teórico.

Volviendo al conjunto de las gráficas, la línea vertical a trazos es el cero de potencia y la línea vertical continua corresponde a la potencia inyectada promedio $\langle I(t) \rangle$. El parámetro de correlación ρ en cada curva es muy similar, lo que se puede ver en la Tabla 2.3 donde su promedio es de $\langle \rho \rangle = 0.424$ y una desviación estandar de $\sigma_\rho = 0.014$, de tal forma la inclinación de las PDFs de potencia inyectada son similares a la PDF de potencia inyectada teórica con $\rho = 0.5$ (curva de color verde) presentada en la Figura 2.13.

$\sigma_{V_{forz}}$ [V]	σ_F [N]	σ_V [m/s]	$\langle I \rangle$ [mW]	$\rho = \frac{\langle I \rangle}{\sigma_F \sigma_V}$
0.52	0.0807	0.0196	0.64	0.436
0.71	0.1109	0.0273	1.30	0.429
1.14	0.1828	0.0456	3.50	0.419
1.55	0.2441	0.0581	6.20	0.437
2.03	0.3260	0.0761	9.90	0.399
2.70	0.4497	0.0970	18.5	0.424

Tabla 2.3: Resultados de σ_F , σ_V , $\langle I \rangle$ y el parámetro de correlación ρ calculados usando las trazas medidas de Fuerza y Velocidad para cada amplitud de voltaje de forzaje.

De la Tabla 2.3 se puede observar que el voltaje de forzaje aplicado al vibrador, $\sigma_{V_{forz}}$, es proporcional a la desviación estandar de la Fuerza y la Velocidad. Las Figuras 2.18 muestran que este comportamiento es lineal. Según esta observación y debido a que $\sigma_{V_{forz}}$ es el parámetro de control en el vibrador electromecánico, entonces de igual manera se puede controlar de manera lineal la amplitud de las trazas de Fuerza y Velocidad en el

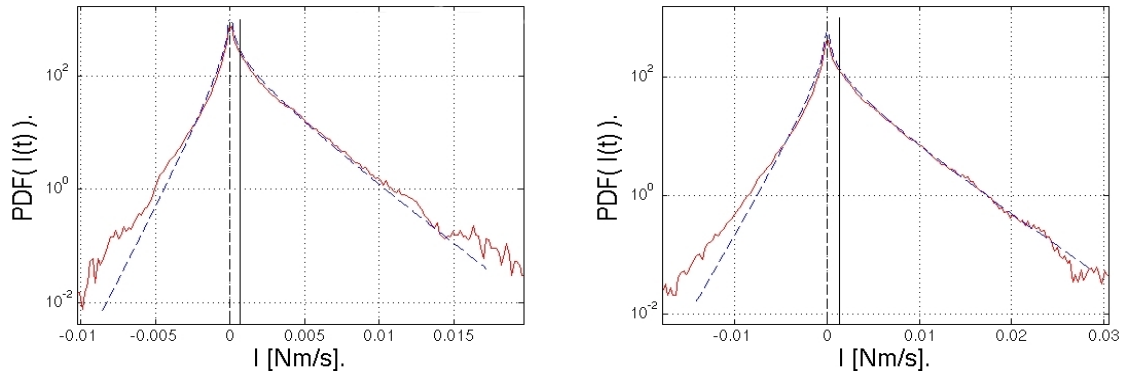


Figura 2.15: PDFs de Potencias Inyectadas experimentales ajustadas con PDFs teóricas. Izquierda: $\langle I \rangle = 0.64 \text{ mW}$. Derecha: $\langle I \rangle = 1.30 \text{ mW}$.

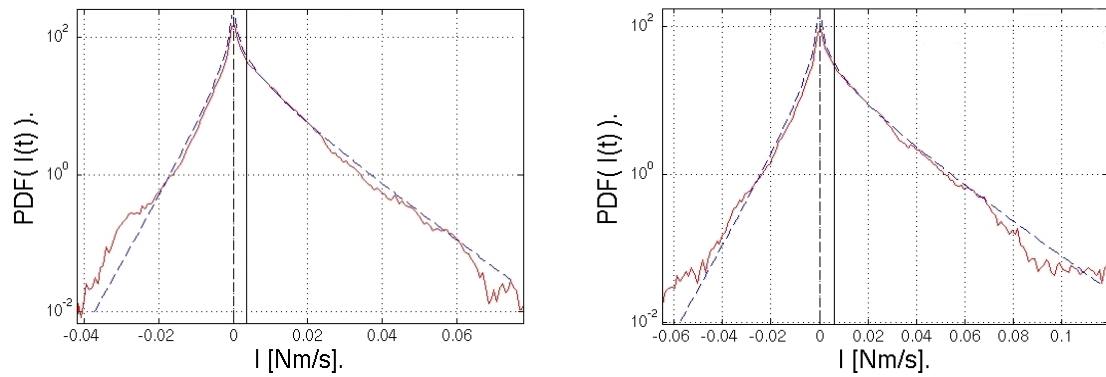


Figura 2.16: PDFs de Potencias Inyectadas experimentales ajustadas con PDFs teóricas. Izquierda: $\langle I \rangle = 3.50 \text{ mW}$. Derecha: $\langle I \rangle = 6.20 \text{ mW}$.

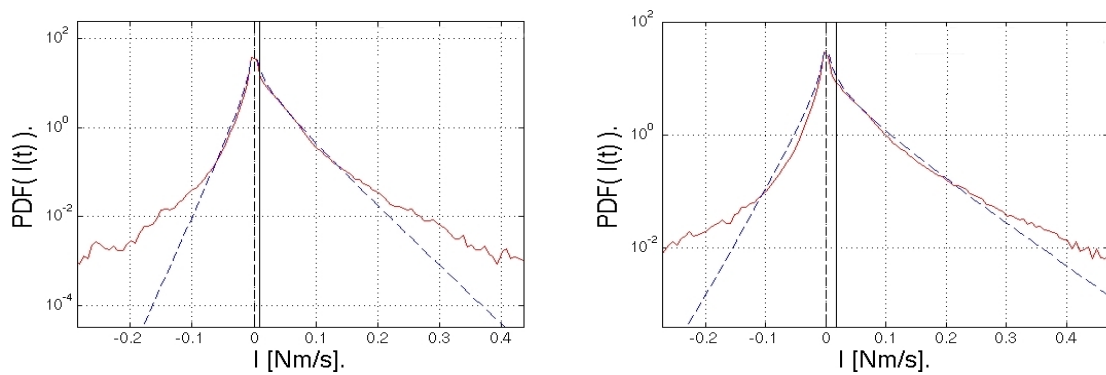


Figura 2.17: PDFs de Potencias Inyectadas experimentales ajustadas con PDFs teóricas. Izquierda: $\langle I \rangle = 9.90 \text{ mW}$. Derecha: $\langle I \rangle = 18.50 \text{ mW}$. La colas de estas PDFs presentan discrepancias con el ajuste teórico provenientes del error experimental en la medida de la traza de Fuerza.

rango de operación de voltaje entre [0.52 V – 2.70 V].

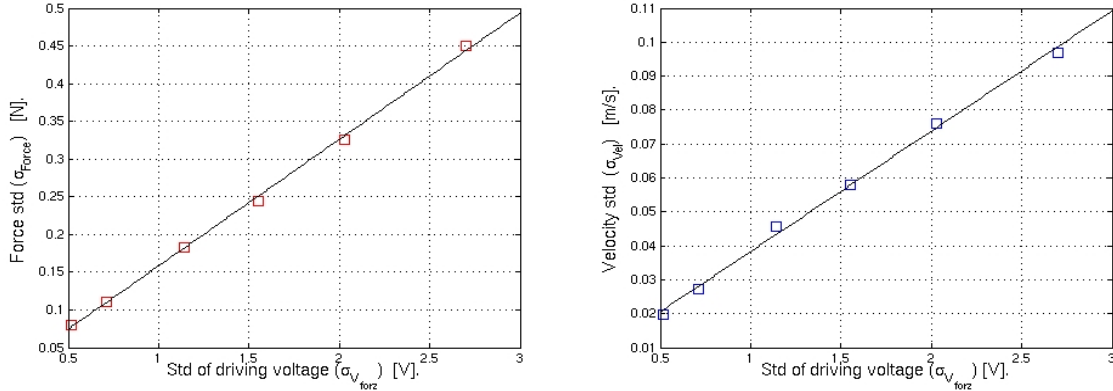


Figura 2.18: Desviación estandar de la Fuerza σ_F y Desviación estandar de la Velocidad σ_V contra voltaje de forzaje $\sigma_{V_{forz}}$. El ajuste empírico, para la curva en la izquierda da una pendiente de 0.17 N/V y para la curva de la derecha la pendiente es de 0.035 (m/s)/V.

También en la Tabla 2.3, se aprecia que la desviación estandar de la Fuerza σ_F es proporcional a la desviación estandar de la Velocidad σ_V , esto se ilustra mejor en la Figura 2.19 a) donde se ha ajustado una línea recta empírica cuya pendiente es de 4.70 N/(m/s). Ahora bien, debido a que $\langle I(t) \rangle = \langle F(t)V(t) \rangle \propto \sigma_F \sigma_V$ y haciendo uso de la relación anterior ($\sigma_F \propto \sigma_V$) se puede determinar que $\langle I(t) \rangle \propto \sigma_F^2$ lo que se demuestra en la Figura 2.19 b) donde el ajuste coincide de buen acuerdo con una línea recta y su pendiente empírica es de 90.37 mW/N².

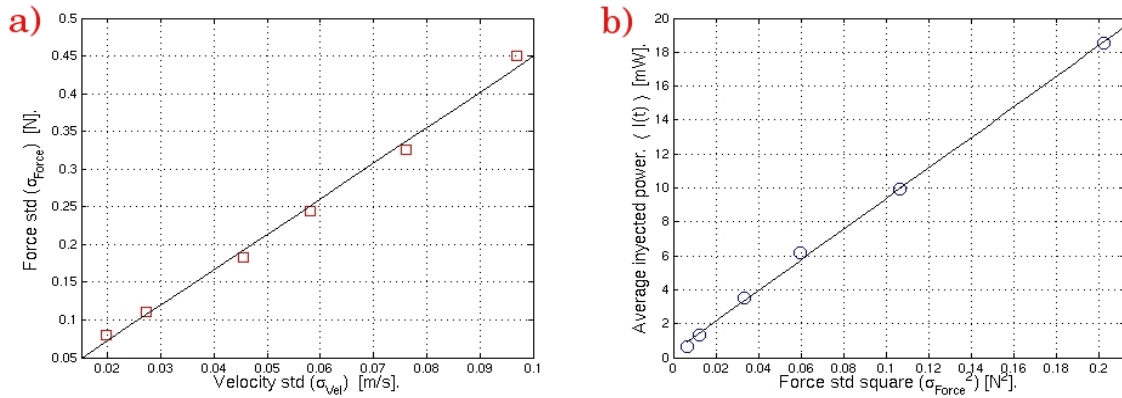


Figura 2.19: Derecha: Desviación estandar de la Fuerza σ_F contra Desviación estandar de la Velocidad σ_V . El ajuste empírico tiene una pendiente de 4.70 N/(m/s). Izquierda: Potencia inyectada promedio $\langle I(t) \rangle$ contra desviación estandar al cuadrado de la Fuerza σ_F^2 . El ajuste empírico tiene una pendiente de 90.37 mW/N².

En [76] se encuentra que el valor σ_V es siempre proporcional al valor rms de forzaje aplicado al vibrador $\sigma_{V_{forz}}$ independiente de la densidad donde este inmerso el pistón. Pero el valor de σ_F sí depende de la densidad del fluido ρ donde esta inmerso el pistón, así como también del área del pistón A_p . Entonces la proporcionalidad entre estos dos valores esta mejor descrita por $\sigma_F \propto \rho A_p \sigma_V$. De igual manera, la potencia inyectada promedio es proporcional a $\langle I(t) \rangle \propto \rho A_p \sigma_V^2$, esto significa que la potencia inyectada puede modificarse variando también los valores de la densidad del fluido y el área del pistón lo cual representa una ventaja técnica para el control de la potencia necesaria para generar ondas de gran amplitud.

2.2.2. Hoja láser para la observación del perfil de onda

Esta sección describe el método por el cual se puede capturar la información de las fluctuaciones espaciales $\eta(x)$ (ver Figura 1.1) de las ondas que se producen en la interfaz entre ambos fluidos. Para esto se dispone de una hoja láser que ilumina una sección transversal a la interfaz formada por el agua y el aceite de tal forma que la intersección resultante entre la hoja láser y la interfaz resulta en el *perfil de onda* que se desea capturar.

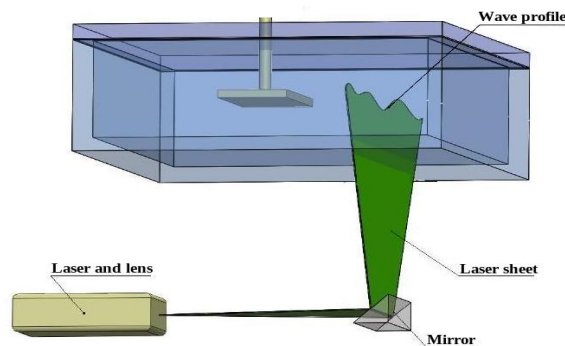


Figura 2.20: Posición del sistema óptico debajo de la celda experimental.

La hoja láser se genera enfocando el haz de un láser He-Ne verde (tipo MGL-III-532 de 532 nm de longitud de onda y 450 mW de potencia) transversalmente al diámetro de una pequeña lente cilíndrica (Edmund Optics NT54-087, 2 mm de diámetro y 4 mm de altura, material N-BK7), de tal forma que las reflexiones internas en la lente son emitidas al exterior en todas direcciones, lo que forma un plano de luz con un espesor similar al del diámetro del haz láser (0.67 mm). La hoja se coloca bajo la celda y con un espejo plano de primera reflexión (Edmund Optics NT32-442, dimensiones 38 mm × 150 mm R > 90 %

desde 400-650 nm) se redirecciona 45° de tal forma que entra por la parte inferior de la celda. Esto se ilustra en la la Figura 2.20.

El bloque de agua se ha teñido previamente con un colorante fluorescente (tetrabromofluorecina, 5 mg por litro) que no se difunde en el aceite y que fluoresce al excitarlo con luz verde de 532 nm. Así, cuando la hoja láser ilumina una sección plana transversal en el interior de los bloques de agua y aceite solo la porción de agua iluminada fluoresce a la longitud de onda emitida por el laser mientras que el bloque de aceite permanece incoloro, formando un alto contraste de luz que divide con claridad las regiones del agua y el aceite lo que permite diferenciar el *perfil de onda* [79, 81].

2.2.2.1. Captura de imágenes del perfil de onda capilar

El perfil de onda observado en la interfaz es capturado con una cámara rápida (IDT X-Stream X3 con un sensor CMOS de resolución 1280×1024 px). La cámara es ubicada bajo la línea del agua y en un ángulo de visión aproximadamente de 10° lo que se ilustra en la Figura 2.21. Esto significa que la luz proveniente de los perfiles son refractados a través del agua y luego a través de la placa de acrílico de la celda. Estas refracciones solo alteran en una constante la observación de la amplitud del perfil ya que cada punto capturado por la cámara es desviado para efectos prácticos desde el mismo ángulo de la interfaz, por lo tanto esta alteración se corrige fácilmente multiplicando la amplitud por un factor de calibración que se ha obtenido por comparación directa del alto del pistón (8 mm) obsevandolo a través del agua cuando está sumergido en el aceite (altura de 4 mm), de tal forma que este factor es de 2 para todas las medidas en la interfaz agua-aceite.

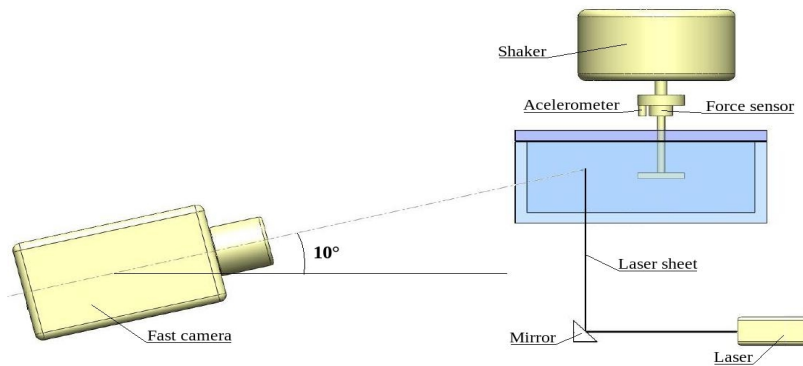


Figura 2.21: Posición de la cámara para la captura del perfil de onda en la interfaz agua-aceite.

En la práctica también es posible colocar la cámara con ángulo de visión por encima de la interfaz, pero con esta configuración aparecen reflexiones no deseadas sobre la interfaz que la cámara captura y que provienen de la región anterior a la hoja láser. Esto ocurre así porque una cantidad de luz de la hoja también alcanza a iluminar una área a su alrededor de tal forma sus reflexiones contaminan la calidad de la imagen que se puede capturar. De otra manera, al observar el perfil bajo la línea de la interfaz, estas reflexiones no deseadas quedan superpuestas con la iluminación producida por la hoja láser quedando ocultas. Por tal razón se ha escogido colocar la cámara bajo la línea de la interfaz. La Figura 2.22 muestra una fotografía del experimento donde se aprecia el aspecto del perfil en la línea de visión escogida (Figura 2.21). En esta Figura se observa que la iluminación de la hoja laser no es homogénea a lo largo del perfil y es más brillante en el centro que en los bordes. Esto es debido a que el haz laser tiene una distribución de iluminación gaussiana, es decir, el haz laser es mas intenso en el centro que en su periferia lo que se evidencia directamente en la hoja laser. Esta situación no provoca errores en las medidas experimentales porque lo que se desea es capturar un contraste entre la región iluminada y la oscura del perfil de onda sin importar que pueda presentar inhomogeneidades.

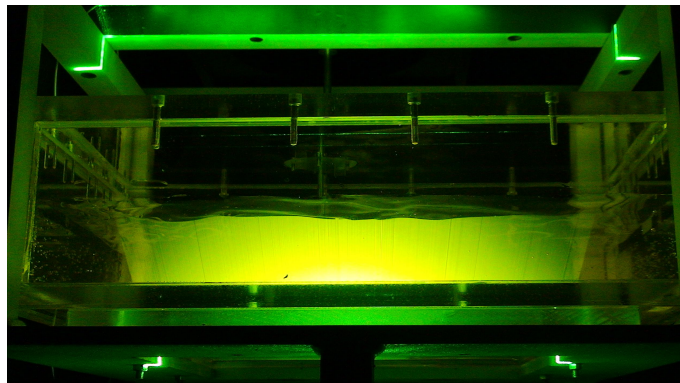


Figura 2.22: Montaje experimental para la medida de la interfaz agua-aceite $\eta(x)$.

Durante el experimento se usaron frecuencias de adquisición en la cámara de 50 fps, 100 fps y 120 fps y capturando alrededor de 3000 imágenes por cada tasa de adquisición. Una muestra de estas se puede observar en las figuras 2.23 y 2.24. La captura se realiza en escalas de grises debido a que solo es necesario detectar un cambio de contraste, y adicionalmente cada pixel del sensor de la cámara queda dedicado a capturar una pequeña área de la interfaz lo que permite utilizar la resolución de la cámara al máximo para resolver los perfiles con mayor detalle. La longitud de los perfiles fotografiados oscila entre 170 mm y 250 mm y dado que la resolución efectiva de las imágenes es del orden

de 1200 px de largo se determina entonces que el parámetro de conversión de px a mm se encuentra entre 7.0 px/mm y 4.5 px/mm respectivamente.

Al fijar la frecuencia de adquisición de la cámara determina automáticamente el tiempo de exposición del sensor y por lo tanto la intensidad luminosa que entra al mismo con el efecto de realzar o disminuir el contraste de las imágenes. Para la detección del perfil es deseable tener el mayor contraste posible para diferenciar los líquidos. Esto ocurre si la frecuencia de adquisición es baja porque entonces el tiempo de exposición por cada imagen sería mayor, pero por el movimiento de las ondas disminuir la frecuencia de adquisición causaría que un perfil de onda se observara borroso, de tal manera que estos dos parámetros se comprometen. Las frecuencias de adquisición mencionadas tienen en cuenta este hecho para obtener imágenes bien definidas y sus tiempos de exposición se encuentran entre 8 ms para tasas de adquisición del orden de 100 fps y 120 fps y 15 ms para tasas del orden de 50 fps. Esto ocurre así porque una vez que en la cámara es fijada esta tasa, el tiempo máximo de exposición queda determinado por defecto.

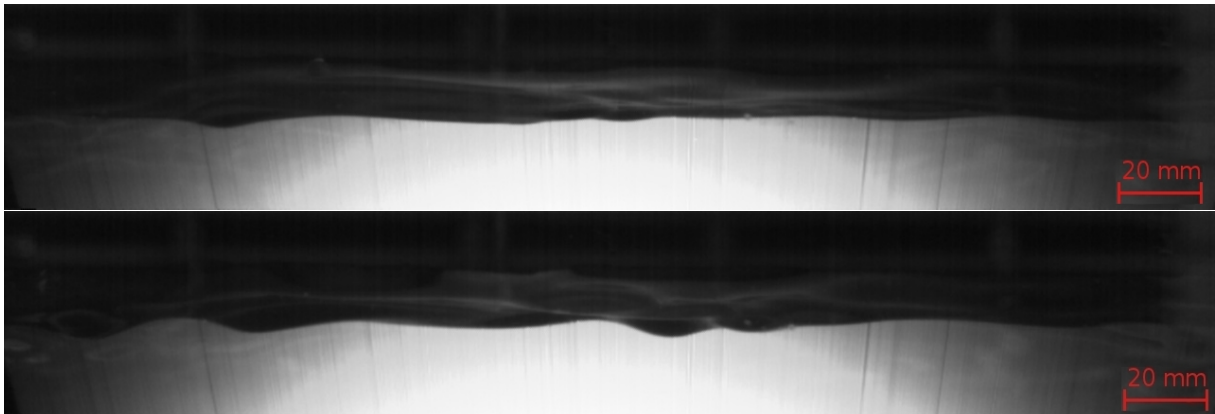


Figura 2.23: Perfiles de interfaz agua-aceite de mediana amplitud y forzaje aleatorio con espectro filtrado en 3 Hz.

Las imágenes de la Figura 2.23 tienen una resolución de 1280×200 px y las imágenes 2.24 y 2.25 tienen una resolución de 1280×350 px. La diferencia en resolución en ambas imágenes se ha ajustado para dar cabida a la amplitud de las ondas generadas. En el primer caso, el forzaje ha sido aleatorio con espectro filtrado en 3 Hz y el rango de amplitud es del orden de 8 mm, para el segundo caso, el forzaje también aleatorio con espectro filtrado en 1 Hz y el rango de amplitud es del orden de 25 mm.

La dinámica de estas ondas depende de su longitud de onda a través de su relación de dispersión. De acuerdo al cálculo teórico de la velocidad de fase $c_g(k)$ (ecuación 2.1.1), se

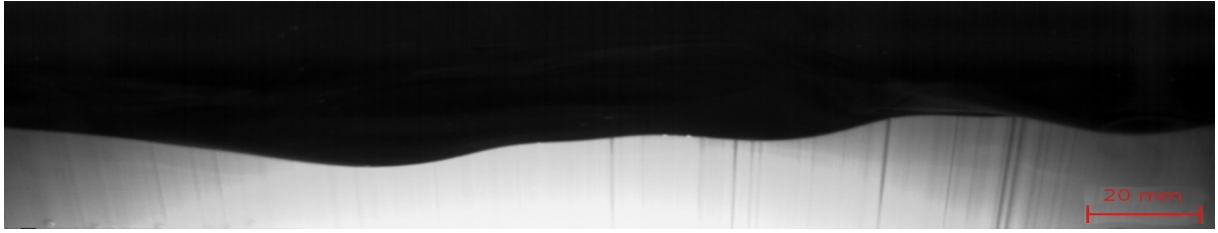


Figura 2.24: Perfil de interfaz agua-aceite de gran amplitud y forzaje aleatorio con espectro filtrado en 1 Hz.

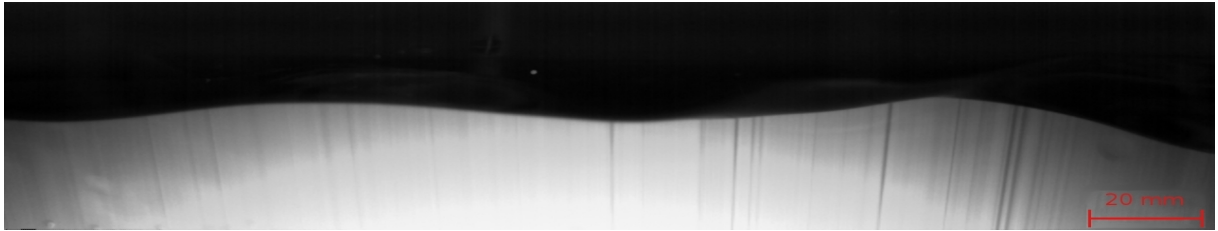


Figura 2.25: Perfil de interfaz agua-aceite de gran amplitud y forzaje aleatorio con espectro filtrado en 1 Hz.

puede determinar que la velocidad de las ondas capilares aumenta al hacerlo su número de onda, al observar de nuevo la Figura 2.2 en la gráfica para la interfaz agua-aceite, la velocidad de una onda con $k = 0.1 \text{ mm}^{-1}$ ($\lambda \sim 62 \text{ mm}$) es del orden de 45 mm/s , mientras que una onda con $k = 1.0 \text{ mm}^{-1}$ o longitud de un orden mas pequeña ($\lambda \sim 6 \text{ mm}$) su velocidad se incrementa hasta los 145 mm/s . En el experimento, se observa que las ondas con longitudes de onda comparables al largo del perfil son más lentas que las ondas de longitudes de ondas más pequeñas, de tal forma que se aprecia como éstas últimas se desplazan a mayor velocidad entre longitudes más grandes.

Capítulo 3

Estadística espacial de la Turbulencia de Ondas

Este capítulo se centra en el análisis estadístico de la Turbulencia de Ondas a través de la Función de Densidad de Probabilidad (PDF) y la Densidad de Potencia Espectral (PSD) de las fluctuaciones espaciales de amplitud $\eta(x)$ que caracterizan este estado fuera del equilibrio. Ahora, con el fin de sustentar que los resultados calculados a través de los métodos de procesamiento de datos (imagenes crudas) son confiables, la primera sección esta dedicada a detallar su funcionamiento. La exposición del método también deja en claro el rango medible sobre las imágenes y por lo tanto los límites de los resultados finales. En la segunda sección se caracterizan las relaciones de dispersión propias de este sistema para una interfaz agua-aire y uno de interfaz agua-aceite con dos objetivos. Primero, constatar que las ondas generadas para esta medida son lineales y segundo, verificar que los parámetros involucrados en las relaciones de dispersión teóricas son efectivamente las de este sistema. Así entonces, este capítulo esta organizado en tres secciones principales. La primera sección presenta en detalle el método de procesamiento de los datos para dar una base confiable a los resultados. En la segunda sección se analizan las relaciones de dispersión del sistema físico para entender el comportamiento lineal de este sistema y cuantificar sus parámetros, y la tercera y última sección esta dedicada al analizar el desarrollo de la Turbulencia de Ondas variando la amplitud de forzaje para pasar del regimen lineal al no-lineal. La PDF y la PSD permitirá, entonces medir como se desarrolla la cascada de energía en el regimen no-lineal, cuantificar el rango del número de onda k donde es posible observarla y medir la pendiente que caracteriza la cascada en este sistema

experimental.

3.1. Principios de los códigos de procesamiento

Los códigos de procesamiento son algoritmos programados en MatLab¹ con el fin extraer de las imágenes una función numérica $\eta(x)$ (como el ejemplo simulado en la Figura 3.1) que contiene la información de amplitudes y longitudes de ondas que se desarrollan en la interfaz a lo largo de la línea donde se ubica la hoja láser². Para tal fin se programaron dos algoritmos: uno del cual se obtiene un perfil de onda utilizando subrutinas de detección de borde, y un segundo código que toma un perfil de onda y su imagen bruta correspondiente y entrega la amplitud de onda $\eta(x)$. Las siguientes secciones están dedicadas a exponer los fundamentos del funcionamiento de cada algoritmo de procesamiento y a mostrar como estos arrojan un resultado fiel de la información contenida en cada imagen bruta.

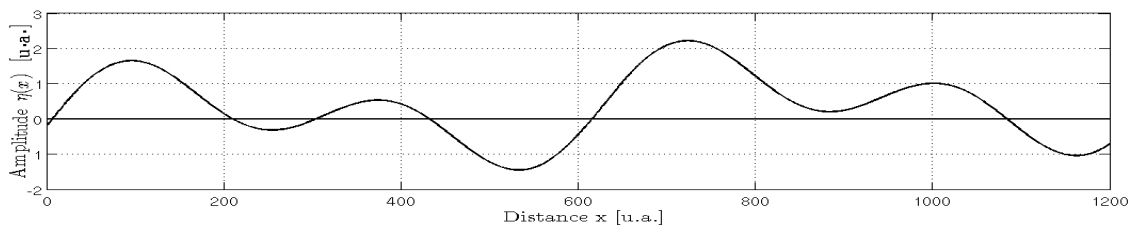


Figura 3.1: Ejemplo numérico de la función $\eta(x)$ que se espera obtener de las imágenes crudas y que contiene la información de las amplitudes y longitudes de onda.

3.1.1. Detección de borde del perfil de onda

El primer paso es extraer una imagen que contenga solamente el *perfil de onda* observado entre la zona clara y oscura de una imagen bruta por medio de la detección numérica de su borde. Esto se realiza a través de la función *edge* de MatLab que se basa en la medida del gradiente entre las zonas claras y oscuras de la imagen. Para ilustrar la eficiencia de este método se superpone el perfil filtrado con la imagen bruta lo que se ilustra en la Figura 3.2. Allí se observa que el perfil de onda se encuentra superpuesto sobre la interfaz de la imagen original. También se observa que los bordes del perfil no se han detectado lo que

¹MatLab es un software de análisis de datos desarrollado por Mathworks. En el procesamiento de datos se utilizó la versión 7.7 de este software.

²El detalle experimental se encuentra en el Capítulo 2.

es debido a que la hoja láser tiene por defecto una iluminación que no es completamente homogénea a lo largo de la imagen y disminuye precisamente en los bordes lo que resulta en que estos no son completamente detectados. Esto debe realizarse así para mantener la mayor longitud posible en el perfil y abarcar la mayor cantidad de longitudes de ondas que permiten las condiciones experimentales, la longitud máxima efectiva, es decir, la que se recupera con los perfiles, es de 250 mm. Otro ejemplo de otra captura de datos con el perfil de onda superpuesto se puede apreciar en las Figura 3.3, para esta última la longitud de la imagen cruda es de 170 mm y por lo tanto el perfil se superpone sobre toda la interfaz.

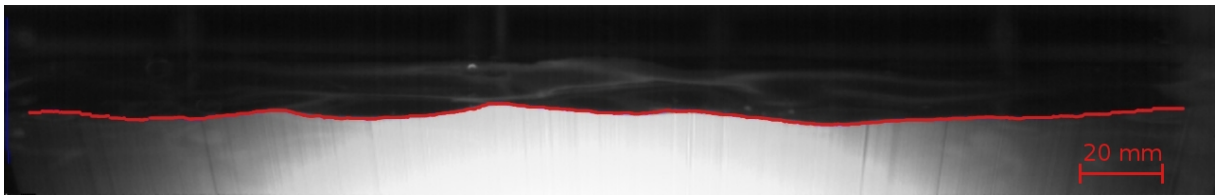


Figura 3.2: Ejemplo de un perfil de onda extraído por detección de borde superpuesto con la imagen bruta de interfaz agua-aceite. La longitud de este perfil es de 250 mm.

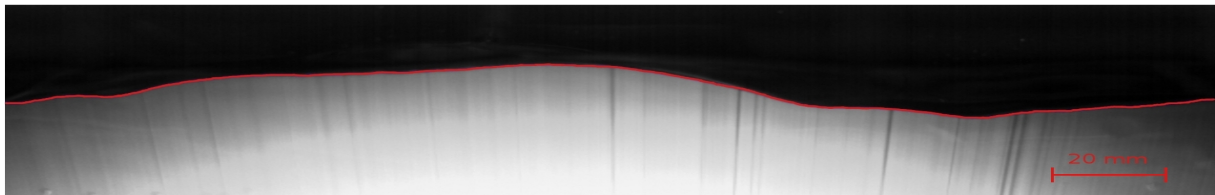


Figura 3.3: Perfil de onda extraído por detección de borde superpuesto con su imagen bruta correspondiente. La longitud de este perfil es de 170 mm.

Una explicación mas detallada de las subrutinas del programa de detección de borde se entrega a continuación:

- La primer subrutina importa las imagenes para ser procesadas. Las imágenes brutas del experimento son leídas de forma recursiva almacenadas en una matriz, en donde cada elemento es un número entre cero y uno donde blanco es uno (1), negro es cero (0) y los valores entre cero y uno (0, 1) representan un tono de gris de tal forma que la intensidad del tono de gris es proporcional a este valor. Es decir, si son valores cercanos a cero el tono es un gris oscuro, mientras que si el valor es cercano a uno el color es un gris claro.

- En la segunda subrutina, para cada imagen importada, se incrementa el contraste según el rango inicial de las imágenes crudas lo requiera. Calcula el número máximo y el mínimo de la escala de grises de la imagen, (e.g, mínimo 0.3 y máximo 0.7) y luego lo reescala entre (0 , 1).
- La tercera subrutina del programa es el corazón del procedimiento y aquí es donde se detecta el borde de la imagen bruta a la cual se le ha mejorado el contraste por medio de la función *edge* de MatLab.
- Finalmente, la imagen de perfil de onda es guardada y también la imagen bruta con el contraste mejorado sin compresión.

3.1.2. Extracción de la amplitud de onda

El segundo programa de procesamiento toma las imágenes crudas con el contraste mejorado y las imágenes de perfil de onda. Utilizando esta última como referencia, extrae de la primera la *amplitud de onda* midiendo el gradiente entre los tonos claros (valores entre 0.5 y 1) y oscuros (valores ente 0 y 0.5)³, y convirtiendo el promedio del gradiente a un valor numérico flotante.

Para ilustrar esto con mayor claridad, se toma como ejemplo una sección de la imagen de la Figura 3.3. En la Figura 3.4 donde se toma en consideración el gradiente de una línea horizontal y que corresponde a la línea roja vertical de la imagen cruda. Para obtener con mayor precisión la altura de la amplitud primero se calcula el promedio del gradiente (en este ejemplo es de 0.27 en escala de gris) y luego se realiza un ajuste al gradiente para calcular el equivalente de 0.27 al número de altura de pixel (denominado subpixel por ser una interpolación). Este es, en otras palabras, la amplitud de la onda en ese punto, que en este caso equivaldría a 189.32.

Sin este procedimiento la amplitud tendría simplemente valores discretos dados por la altura que se extrae directamente del perfil de onda: la amplitud estaría pixelada. El aspecto de esto se ilustra en la Figura 3.5. Por otro lado, ejemplos de amplitudes de onda calculadas por esta interpolación se presentan en las Figuras 3.6 y 3.7. Estas amplitudes de onda se entregan en unidades de mm y centradas en cero. Con el fin centrar la imagen en cero, se resta el promedio de la amplitud de onda de cada imagen que se ha calculado.

³El criterio para definir numéricamente tonos claros y oscuros puede variar ligeramente, ya que la correspondencia de color a números es una asignación subjetiva.

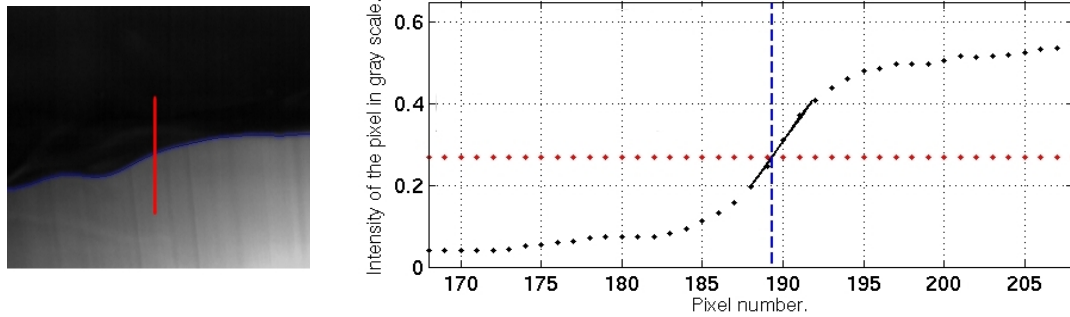


Figura 3.4: Obtención de la amplitud de onda de escala de gris a un valor numérico. La curva en puntos negros (•••) es el cambio de contraste entre la zona clara y la zona oscura de la interfaz. La línea formada por los puntos rojos (•••) es el promedio de gris en la interfaz, en este caso es de 0.27. La línea negra (—) es el ajuste al gradiente de la interfaz. La línea azul a trazos (- - -) es el equivalente en el número de subpixel al promedio en escala de grises.

Para hacer la conversión de pixeles a milímetros, durante el experimento se han tomado imagenes cuando la interfaz se encuentra en equilibrio (plana) superpuesta con una escala en unidades conocidas lo que permite hacer el equivalente directo entre px a mm al dividir la cantidad del largo efectivo en pixeles de la imagen entre su longitud en milímetros, en el caso de las Figuras 3.6 y 3.7 es de $\frac{1240}{170} = 7.3 \text{ px/mm}$. La imagen en la Figura 3.8 muestra la amplitud de onda superpuesta con las imagen cruda para verificar la fidelidad del resultado.

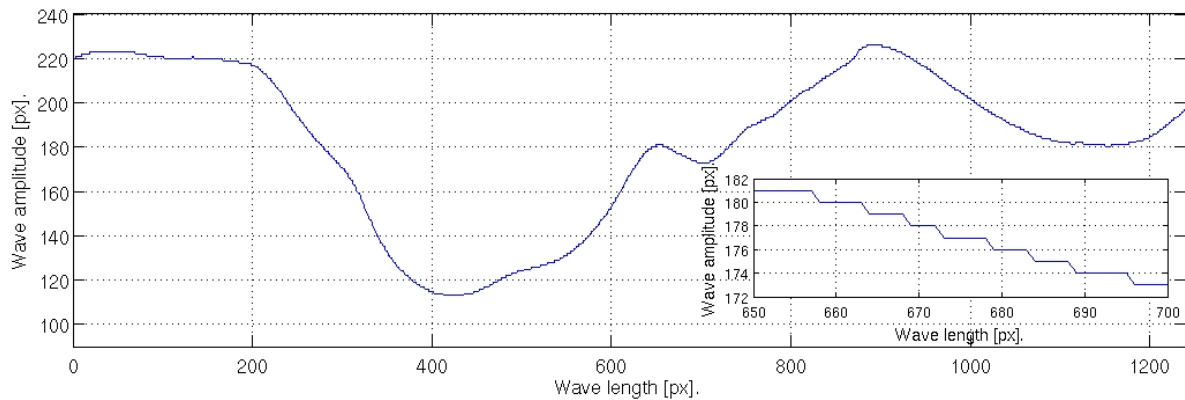


Figura 3.5: Aspecto de la altura del perfil de onda extraído solamente por detección de borde. El inset muestra un acercamiento de una sección del mismo perfil donde se puede apreciar con mayor detalle la discretización.

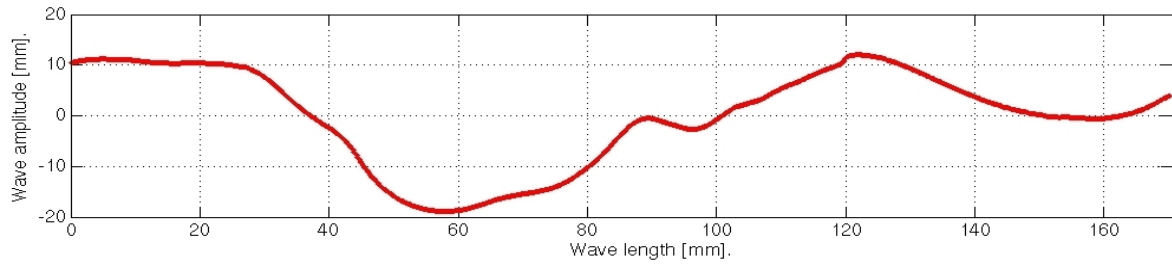


Figura 3.6: Amplitud de onda de la interfaz agua-aceite extraída de la imagen bruta y el perfil de onda. La escala inferior esta en unidades de mm.

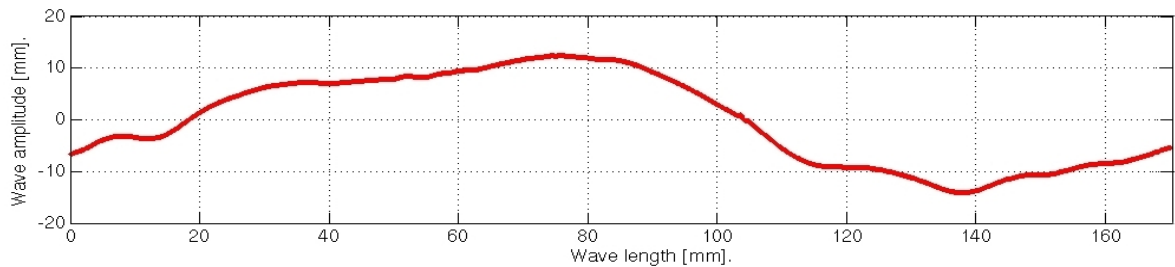


Figura 3.7: Amplitud de onda de la interfaz agua-aceite extraída de la imagen bruta y el perfil de onda. La escala inferior esta en unidades de mm.

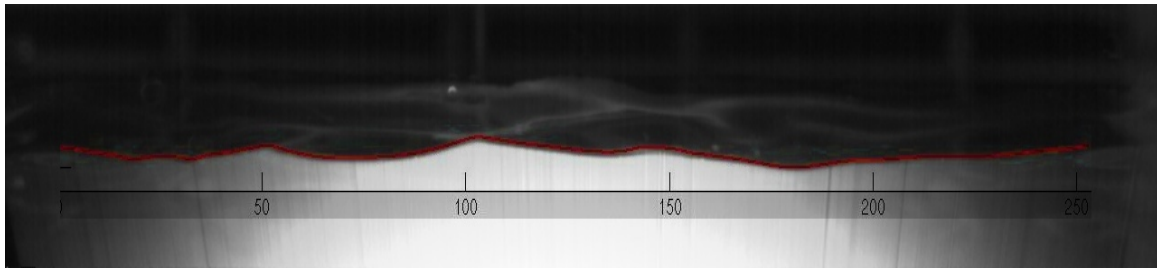


Figura 3.8: Amplitud de onda de la interfaz agua-aceite superpuesta con la imagen bruta. La escala inferior esta en unidades de mm.

Finalmente, se presenta en detalle el funcionamiento del programa, el cual esta dividido en seis subrutinas principales:

- La primera importa la imagen cruda y su imagen de perfil de onda correspondiente de tal forma que puede procesarlas recursivamente una a una para extraer la amplitud de onda.
- La segunda subrutina calcula el gradiente de la interfaz de la imagen, esto lo hace sobre todo el perfil de onda. El resultado de esto es una amplitud de onda bruta en unidades de subpíxeles.

- En ocasiones algunos de los puntos de la amplitud de onda son incorrectos debido a defectos de la imagen en esa región, es decir, un punto puede estar totalmente fuera de la amplitud, entonces, esta subrutina los elimina y los interpola usando los puntos vecinos del perfil.
- En la subrutina cuatro del programa es un filtro pasabajos aplicado sobre las amplitudes de onda y deja pasar números de onda por debajo de 1.5 mm^{-1} que es el límite de lo físicamente detectable según el parámetro de resolución de px a mm. Esto equivale en longitud a $\frac{2\pi}{1.5 \text{ mm}^{-1}} = 4,1 \text{ mm}$. Aplicar este filtro tendrá una consecuencia importante en la PSD, significa automáticamente que el rango físico que se detecta estará dado solo para números de onda menores a 1.5 mm^{-1} , mientras que para números de onda mayores el decaimiento será el típico de un filtro numérico, es decir, del orden de k^{-2} .
- En la subrutina cinco se elimina el promedio de cada amplitud de onda y luego se convierten sus unidades de pixeles a milímetros como se ha explicado anteriormente. El hecho de restar el promedio de cada amplitud, elimina una longitud de onda de baja frecuencia que se origina por el tamaño finito de la celda, esto ocurre porque durante la generación de ondas también se excita el modo fundamental de la celda que es del orden de $\frac{2\pi}{290 \text{ mm}} = 0.02 \text{ mm}^{-1}$, donde 290 mm es el ancho de la celda. Esto se observa como el bloque de agua subiendo y bajando constantemente en todo su conjunto debido a que la longitud del perfil es comparable al tamaño de la celda.
- En la parte final del programa se almacenan los datos de todas las amplitudes $\eta(x)$ de onda extraídas de las imágenes crudas y calcula toda la estadística de las ondas, a saber, la Función de Densidad de Probabilidad *PDF* y Densidad de Potencia Espectral *PDS*.

3.2. Relaciones de dispersión

El procesamiento de los datos de las imágenes anteriores se realizaron siempre a un forzaje aleatorio filtrado en 3 Hz. El método también es completamente aplicable a un forzaje sinusoidal que es el tipo de forzaje con el cual es posible extraer la información para construir las relaciones de dispersión gravito-capilares. Para cada frecuencia de forzaje $f = \frac{\omega}{2\pi}$ se pueden medir las longitudes de onda λ de las ondas generadas en un perfil de la

interfaz y con ellas calcular sus números de onda $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ correspondientes y así construir la gráfica ω contra k .

3.2.1. Relación de dispersión gravito-capilar

La relación de dispersión gravito-capilar presentada en la Figura 3.10 fue calculada a partir de imágenes como las de la Figura 3.9 la cual corresponde a una frecuencia de forzaje de 9 Hz⁴. En la imagen se observan las cúspides de la onda, y a través sus posiciones se mide la longitud de onda como la distancia entre cúspides consecutivas. Para obtener un mejor resultado por cada imagen se miden dos longitudes de onda, es decir, la distancia entre la primera y segunda cúspide, y entre la segunda y la tercera cúspide. Se tomaron aproximadamente 100 imágenes por cada frecuencia de forzaje, de tal manera que el resultado es un promedio entre 200 datos aproximadamente. Para el ajuste se ha usado la relación de dispersión teórica dada por,

$$\omega^2 = gk + \frac{\sigma_w}{\rho_w} k^3. \quad (3.1)$$

donde g es la aceleración de la gravedad, ρ_w la densidad del agua y σ_w la tensión superficial de la interfaz agua-aire que tiene un valor de 72.75×10^{-3} N/m para agua destilada y desionizada⁵. El resultado de la Figura 3.10 muestra que la relación de dispersión gravito-capilar experimental está en excelente acuerdo con la teórica dentro del intervalo de números de onda $0.06-0.82 \text{ mm}^{-1}$ obtenidos forzando con frecuencias entre 4 Hz y 35 Hz, y dentro del rango de error medido que corresponde al error calculado a través de la medida de la longitud de onda λ y su propagación al número de onda k , razón por la cual son errores en barras horizontales. Este resultado permite calcular el crossover entre ondas de gravedad y capilaridad $k_{cross-w} = \sqrt{\frac{g\rho_w}{\sigma_w}}$ el cual es igual a 0.37 mm^{-1} lo que equivale en longitud de onda a $\frac{2\pi}{0.37 \text{ mm}^{-1}} = 16.98 \text{ mm}$.

⁴El factor de calibración de todas las imágenes que se utilizaron para medir la relación de dispersión agua-aire corresponde a $\frac{1000 \text{ px}}{100 \text{ mm}} = 10 \text{ px/mm}$, donde la imagen tiene una longitud de 1000 px equivalentes a 100 mm.

⁵Este valor puede disminuir al orden de 60.0×10^{-3} N/m por presencia de impurezas en la interfaz y porque las moléculas de agua se degradan naturalmente en la superficie [35].

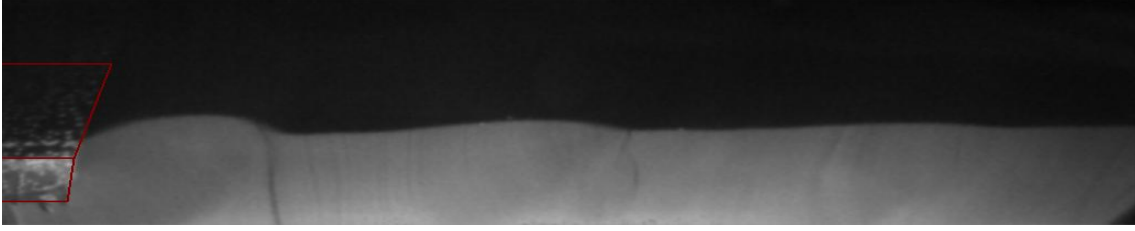


Figura 3.9: Imagen del perfil de onda de un sistema agua-aire donde se ha aplicado una frecuencia de forzaje de 9 Hz. El pistón que genera la excitación sinusoidal de la interfaz se ha delineado en rojo.

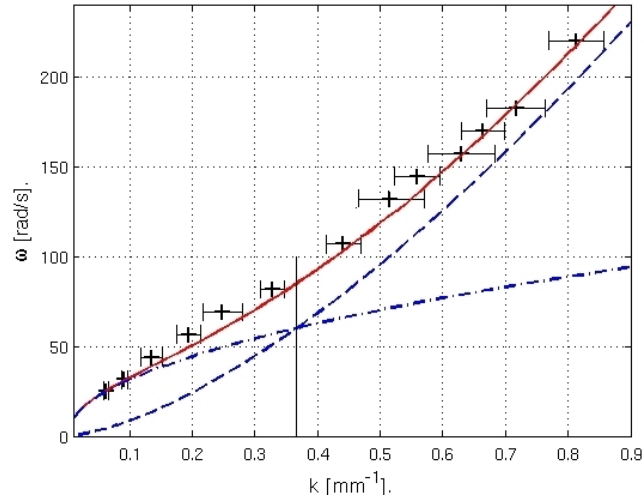


Figura 3.10: Relación de dispersión gravito-capilar. Datos experimentales (+), error experimental (|-+|), ajuste teórico de la relación de dispersión gravito-capilar (—), curva teórica relación de dispersión capilar (- - -), curva teórica relación de dispersión de gravedad (- · - ·) y crossover entre gravedad y capilaridad (—) tiene un valor de 0.367 mm^{-1} .

3.2.2. Relación de dispersión de la interfaz agua-aceite

Como se menciona en el Capítulo 2, el objetivo es utilizar dos fluidos con densidades similares para que la contribución debida a la gravedad sea despreciable con respecto a la contribución de la tensión superficial y se generen principalmente ondas capilares. Por lo tanto, la medida de la relación de dispersión para el sistema agua-aceite es de gran importancia porque permite cuantificar en que rangos del número de onda k la contribución de la gravedad es despreciable o de otra manera a partir de que nuevo valor de crossover en k las ondas capilares son dominantes.

La Figura 3.11 muestra una imagen experimental de un perfil de onda de este sistema para

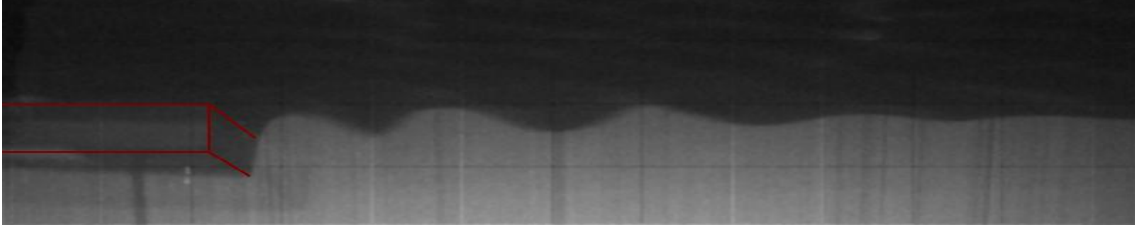


Figura 3.11: Imagen del perfil de onda de un sistema agua-aceite donde se ha aplicado una frecuencia de forzaje de 10 Hz. El pistón que genera la excitación sinusoidal de la interfaz se ha delineado en rojo.

una frecuencia de forzaje de 10 Hz⁶. El método para extraer los datos de las imágenes es idéntico al caso gravito-capilar. La Figura 3.12 muestra la medida de la relación de dispersión del sistema agua-aceite. El intervalo en el número de onda medido esta entre 0.26-0.96 mm⁻¹ forzando con frecuencias entre 4 Hz y 30 Hz. Para el ajuste se ha usado la relación de dispersión dada por,

$$\omega^2 = \frac{\rho_w - \rho_o}{\rho_w + \rho_o} gk + \frac{\sigma_{wo}}{\rho_w + \rho_o} k^3 \quad (3.2)$$

donde g es la aceleración de la gravedad, ρ_w la densidad del agua, ρ_o la densidad del aceite y σ_{wo} la tensión superficial entre el agua y el aceite. El valor σ_{wo} es el único valor desconocido para este sistema por lo que el procedimiento para encontrarlo es realizar el ajuste de los datos de la relación de dispersión para el sistema agua-aceite. El ajuste (inset de la Figura 3.12) resulta tener entonces una pendiente medida de 1.45, este valor se desvia del exponente de la relación de dispersión puramente capilar que es de 1.5 en un 3.33%. Este pequeño error se debe a que aún la gravedad contribuye a la relación de dispersión total (ecuación 3.2) en el rango medido entre 0.26-0.96 mm⁻¹, pero aún así la magnitud del error permite asumir que el efecto capilar es dominante dentro del rango de número de onda medido. De tal forma, se calculará el valor de σ_{wo} a través de la relación de dispersión capilar,

$$\omega^2 = \frac{\sigma_{wo}}{\rho_w + \rho_o} k^3 \quad (3.3)$$

El valor de σ_{wo} se calculará a través del uso del intersepto calculado del ajuste de los datos con la ecuación 3.3 y su valor es necesario para calcular el crossover entre gravedad

⁶El factor de calibración de todas las imágenes que se utilizaron para medir la relación de dispersión agua-aceite corresponde a 10 px/mm.

y capilaridad para la interfaz agua-aceite. Dicho ajuste experimental en loglog esta dado por,

$$\log(\omega) = 5,277 + 1,45 \log(k) \quad (3.4)$$

donde 5.277 es el intersepto y 1.45 es la pendiente (inset de la Figura 3.12). Por comparación directa, de la ecuación (3.3) se tiene que $\log(\omega) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{\sigma_{wo}}{\rho_w + \rho_o}\right) + \frac{3}{2} \log(k)$. Entonces, igualando sus interseptos con el fin de despejar la incognita σ_{wo} ,

$$\frac{1}{2} \log\left(\frac{\sigma_{wo}}{\rho_w + \rho_o}\right) = 5,277 \quad (3.5)$$

y de aquí se obtiene que $\sigma_{wo} = 73.62 \times 10^{-3}$ N/m, es decir, que la tensión superficial entre el agua y el aceite es muy similar a la de la interfaz agua-aire cuando el agua es destilada y desionizada. El intervalo de confianza en un 95 % de este valor esta entre 67.92×10^{-3} N/m y 79.40×10^{-3} N/m. Al realizar el ajuste teórico de la relación de dispersión puramente capilar a los datos experimentales se va a encontrar por definición que ajustan de muy buen acuerdo, pero el objetivo es realmente ajustar la relación de dispersión gravito-capilar usando el valor σ_{wo} medido indirectamente. Esto se muestra en la Figura 3.12 a través de la curva roja (—), donde se observa nuevamente los datos están en buen acuerdo con el ajuste dentro de los rangos de error.

El crossover en este caso esta dado por $k_{cross-wo} = \sqrt{\frac{g(\rho_w - \rho_o)}{\sigma_{wo}}}$ y tiene un valor de 0.105 mm^{-1} lo que equivale a una longitud $\lambda_{cross-wo} = 59.78 \text{ mm}$. Con este valor se puede estimar la frecuencia de corte del forzaje mínima a la cual se tiene seguridad que el regimen capilar empieza a ser dominante sobre el término de gravedad remanente. Esto se puede calcular a través de la ecuación,

$$f_{c-wo} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\sigma_{wo}}{\rho_w + \rho_o}} k_{c-wo}^{3/2} \quad (3.6)$$

donde el factor 2 que acompaña a σ_{wo} viene del hecho que la relación de dispersión gravito-capilar calculada en k_{c-wo} es dos veces la relación de dispersión capilar⁷. El cálculo de f_{c-wo} con los parámetros conocidos da como resultado que éste valor debe ser de 1.49 Hz ó mayor ya que en este corte de frecuencia de forzaje se exitarán ondas en el regimen

⁷Esto es porque por definición del número de onda capilar la contribución a la relación de dispersión de gravedad tiene el mismo valor que la contribución capilar.

dominado por la relación de dispersión capilar.

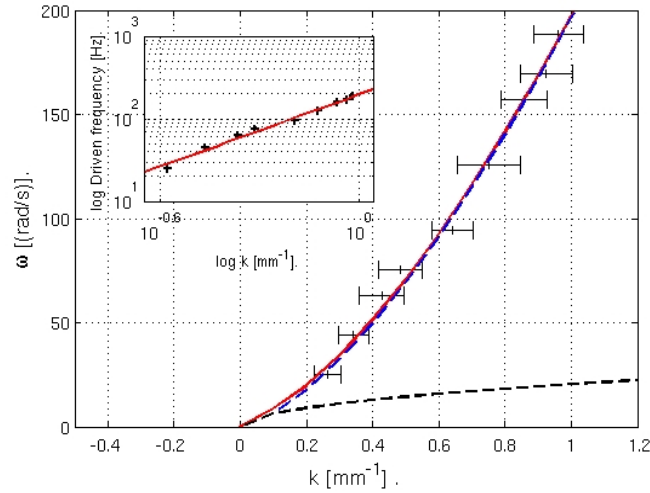


Figura 3.12: Relación de dispersión para un sistema agua y aceite de silicona de 5 cSt. Datos experimentales (+), error experimental (|+|), ajuste teórico de la relación de dispersión gravito-capilar (—), ajuste teórico de la relación de dispersión capilar (---) y relación de dispersión de gravedad teórica (—). El inset muestra la misma curva en escala loglog donde la pendiente medida del ajuste a los datos experimentales es de 1.45 mm/s, en teoría es de 1.5 mm/s.

3.2.3. Longitudes de decaimiento de interfaces agua-aire y agua-aceite

Las imágenes del perfil de onda capturado (Figuras 3.9 y 3.11) permiten apreciar que la amplitud de las ondas van decayendo a medida que se propagan alejándose del pistón. Esto permite también cuantificar el decaimiento de las ondas que se produce porque el sistema es disipativo, es decir, las ondas se amortiguarán debido a la disipación que existe entre el roce viscoso de los fluidos [33] (en el caso de interfaz agua-aceite) o el roce entre el fluido y las paredes de la celda experimental. Para este análisis se supone que la amplitud de estas ondas es tal que se encuentran en el régimen lineal, así entonces, se puede aplicar el modelo de ondas lineales monocromáticas amortiguadas [36],

$$A(x) = A_0 \exp\left(-\frac{x}{2\kappa}\right) \cos(kx), \quad (3.7)$$

donde se ha definido la longitud de decaimiento κ como la distancia que recorre un máximo de la onda hasta que ésta misma decae en un factor $\exp(-\frac{1}{2}) = 0.607$. Esta constante se

calcula a partir dos máximos consecutivos y la longitud de onda λ correspondiente, usando la siguiente expresión,

$$|\kappa_i| = \frac{\lambda}{2 \log \left[\frac{A_i}{A_{i+1}} \right]}. \quad (3.8)$$

Para cada imagen se tienen tres cuspides o máximos de una curva amortiguada A_1 , A_2 y A_3 , de la cual se pueden extraer dos datos de κ . Ahora, al igual que para las relaciones de dispersión se usaron de 100 imágenes aproximadamente por lo que cada punto de la curva es un promedio del orden de 200 datos.

Las Figura 3.13 muestra las curva de longitud de decaimiento contra la frecuencia de forzaje para las interfaces agua-aire donde se observa que se han realizado dos ajustes uno para el regimen de gravedad (pendiente -2.02) y el otro para el regimen de capilaridad (pendiente -0.61), lo que muestra que la disipación es diferente para cada mecanismo de propagación de las ondas. La Figura 3.14 muestra la longitud de decaimiento para la interfaz agua-aceite, en este caso el ajuste es una sola recta con pendiente -1.20. La tendencia de ambas curvas muestra que la longitud de decaimiento es menor a medida que la frecuencia crece. Esto significa en otras palabras que las ondas de longitud de onda más corta decaen en distancias menores que ondas con longitudes de onda más largas. Los errores del valor κ son originados por las variaciones de los máximos de la curva amortiguada y posiblemente a efectos no-lineales en las ondas.

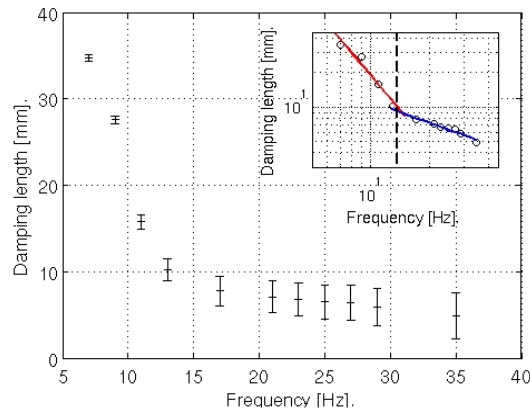


Figura 3.13: Longitud de decaimiento en mm contra frecuencia de forzaje aplicada al vibrador en Hz para una interfaz agua-aire. El inset muestra la misma curva en escala loglog donde se presentan dos ajustes lineales: uno para gravedad (—) con pendiente de -2.02 y uno para capilaridad (—) con pendiente de -0.61, la línea vertical del inset (---) corresponde al crossover en frecuencia temporal y tiene un valor de 13.61 Hz.

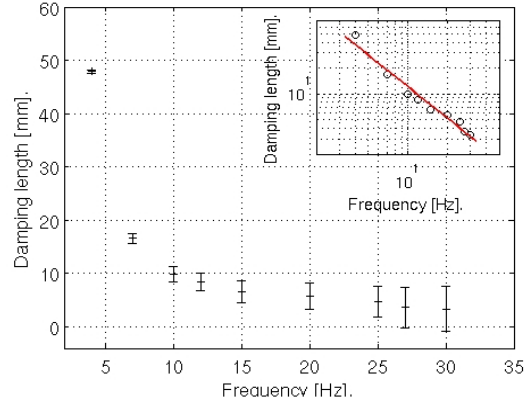


Figura 3.14: Longitud de decaimiento en mm contra frecuencia de forzaje aplicada al vibrador en Hz para una interfaz agua-aceite. El inset muestra la misma curva en escala loglog donde se presenta un ajuste lineal con pendiente de -1.21.

Los resultados anteriores de las relaciones de dispersión gravito-capilares y las curvas de longitudes de decaimiento respectivas proveen la caracterización cualitativa del comportamiento lineal clásico del sistema en estudio, es decir, la verificación de las magnitudes de los parámetros físicos del sistema: densidad de los líquidos, tensión superficial entre las dos interfaces agua-aire y agua-aceite, y sus dos puntos de crossover respectivos. Además, se determina el rango en el cual es posible medir las longitudes de onda λ , o equivalentemente el número de onda k , a saber, un rango del orden de 0.1 mm^{-1} hasta 1.0 mm^{-1} .

La precisión de estos resultados dan confianza de las técnicas de medida experimentales y los métodos de procesamiento para extraer la información de las imágenes crudas. Aún así, lo anterior constituye la base para el entendimiento del comportamiento de las ondas monocromáticas lineales en el sistema. Como se ha descrito en el Capítulo 1 el comportamiento lineal es diferente del estado de Turbulencia de Ondas y su estudio constituye la motivación principal de este trabajo. Por lo tanto, las secciones siguientes muestran los resultados obtenidos de la estadística espacial de la Turbulencia de Ondas a través del cálculo de la PDF y la PSD con los datos de las amplitudes de ondas extraídas de las imágenes crudas.

3.3. Estudio preliminar de la Turbulencia de Ondas en interfaz Agua-Aire

El primer análisis experimental sobre la Turbulencia de Ondas que se aborda en este trabajo se realizó como un ensayo inicial para observar el comportamiento turbulento en una interfaz agua-aire donde las ondas que se propagan debido a la aceleración de la gravedad y a la tensión superficial son ambas dominantes. La celda experimental⁸ fue llenada a la mitad de la altura (5 cm) con agua mientras que la altura restante de la celda (5 cm) se dejaba libre y naturalmente llena de aire a presión atmosférica. La celda se tapa de tal forma que no permite la fuga de agua con el fin de mantener su cantidad constante durante el experimento.

Para la toma de imágenes y a diferencia del sistema agua-aceite la cámara se posiciona de tal forma que enfoca el perfil por encima de la interfaz. La Figura 3.15 ilustra esta situación. Esta posición de la cámara se diferencia de la interfaz agua-aceite porque el único obstáculo más ópticamente denso una vez que la luz atraviesa el bloque de agua, es la placa de acrílico de la celda lo que permite capturar mayor intensidad de luz. Esto es debido a que el índice de refracción del aire (~ 1.00) es menor que el del aceite (~ 1.46) y por lo tanto las desviaciones producidas al atravesar el aire son menores. Para generar las ondas en la interfaz la técnica es idéntica a la de agua-aceite, es decir, un pistón de dimensiones $12 \times 6 \text{ cm}^2$ empuja la interfaz con un forzaje aleatorio de espectro plano filtrado en 3 Hz.

El número de imágenes tomadas para calcular la PDF y PSD de este sistema es ~ 1000 y corresponden a los perfiles extraídos por detección de borde como los ilustrados en la Figuras 3.6 y 3.7. Inicialmente se contaba con una secuencia temporal de 1350 imágenes tomadas a una frecuencia de adquisición de 12.5 fps, es decir, un tiempo de adquisición del orden de 100 s, pero debido a que algunas de estas resultan con defectos que no permiten identificar correctamente el perfil se debieron eliminar. Esto no afecta la medida de la PDF y PSD porque los resultados que se buscan son espaciales y no temporales. Además se encontró que los resultados no se alteran cualitativamente al promediar con una cantidad de imágenes igual o mayor a 1000. Todas las imágenes tienen una longitud de 280 cm y el factor de calibración de píxeles a milímetros es de $\frac{1280 \text{ px}}{280 \text{ mm}} = 4.6 \text{ px/mm}$.

⁸El detalle de las dimensiones de la celda experimental esta descrito en el Capítulo 2.

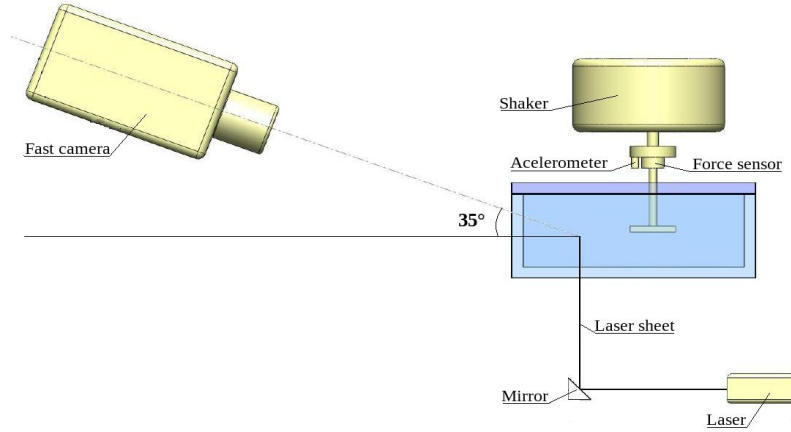


Figura 3.15: Posición de la cámara para la captura del perfil de onda en la interfaz agua-aire.

3.3.1. Función de densidad de probabilidad de las ondas PDF

Cada una de las PDFs de la Figura 3.16 son calculadas al usar el conjunto de 1000 amplitudes de onda de la interfaz agua-aire correspondientes a cada amplitud de forzaje: 1.5 mW, 8.90 mW, 13.10 mW y 21.90 mW. Cualitativamente, las ondas en este régimen no-lineal muestran una gran distribución de amplitudes que varían entre -18.1 mm y 24.2 mm para el caso de mayor amplitud de forzaje (21.90 mW), el valor promedio es cero porque a todas las amplitudes se les ha restado este valor durante el tratamiento de los datos. El resultado muestra que las amplitudes de onda son asimétricas, y además se observa cualitativamente en las curvas que esta tendencia es mayor a medida que la amplitud de las ondas aumenta. Esto es debido a que los eventos en donde las ondas tienden a elevarse más sobre la interfaz son más probables que los eventos para alcanzar amplitudes mínimas. Este comportamiento también se ha reportado con anterioridad en [81, 82].

Con el fin de analizar cuantitativamente la forma de las PDFs se calculan su tercer y cuarto momento, conocidos más comúnmente como Skewness μ_3 y Kurtosis μ_4 , respectivamente. Estos están definidos como,

$$\mu_3 = \frac{\langle (\eta(x) - \langle \eta(x) \rangle)^3 \rangle}{\sigma_\eta^3} \quad ; \quad \mu_4 = \frac{\langle (\eta(x) - \langle \eta(x) \rangle)^4 \rangle}{\sigma_\eta^4} \quad (3.9)$$

Para tener una idea de su significado, la Skewness mide la asimetría y dice que tan cargada

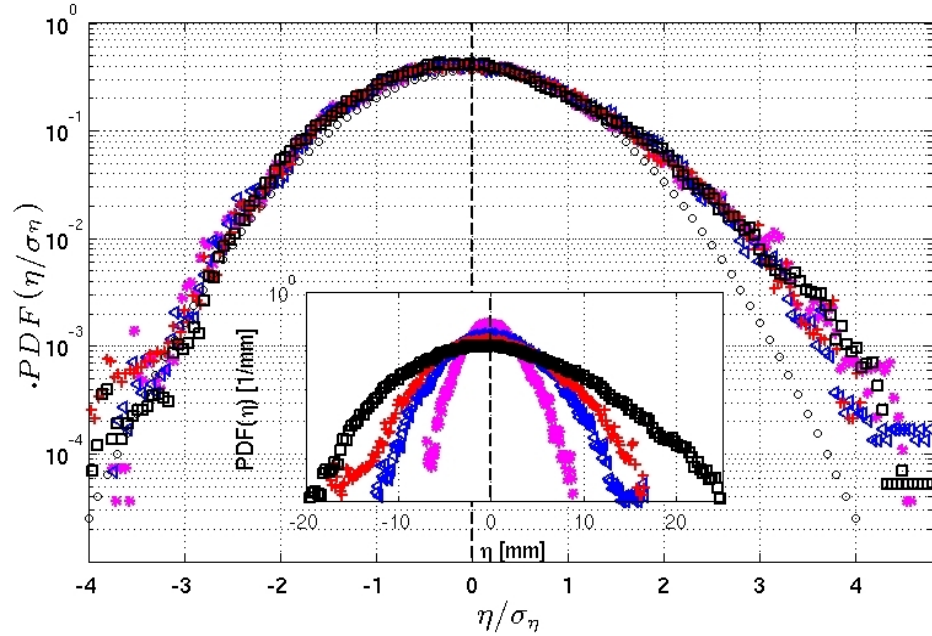


Figura 3.16: PDFs normalizadas de las amplitudes de onda en una interfaz agua-aire para las potencias inyectadas de 1.50 mW (***), 8.90 mW (<<<), 13.10 mW (+++), 21.90 mW (□□□) y el ajuste teórico (o o o). El inset muestra las PDFs no normalizadas siguiendo la misma convención de signos.

hacia un lado es la distribución siendo un valor positivo si esta cargada hacia la derecha o negativo en caso contrario. La Skewness indica que si la distribución esta cargada a la derecha (o izquierda) la mayor cantidad de los datos se encuentran a la izquierda (o derecha). La Kurtosis o Flatness mide que tan plana o picuda es la PDF. Una Kurtosis de valor alto significa que la desviación estandar σ es el resultado de desviaciones extremas poco frecuentes, en caso contrario una Kurtosis de valor pequeño indica que la desviación estandar . Para tener una idea de sus valores, la Skewness de una distribución normal estandar, $\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, es cero lo que significa que es completamente simétrica. La Kurtosis es de tres la cual es la curvatura característica en el máximo de esta distribución. Si la Kurtosis de una distribución fuera mayor a tres significa que la curvatura es mayor (más picuda) ó menor a tres (más plana).

En la Tabla 3.1, se han calculado las Skewness y Kurtosis de las PDFs de la Figura 3.16. Se puede deducir que estas PDFs son asimétricas y ligeramente cargadas hacia la derecha y efectivamente a medida que la amplitud de las ondas aumenta su asimetría también lo hace. En cuanto a la Kurtosis indica que las PDFs son ligeramente más picudas que una gaussiana de distribución normal, por ejemplo con la de mayor desviación (potencia

inyectada de 13.10) se desvia en un 9.8%. Además se puede hacer notar que a diferencia de la tendencia de la Skewness, no se puede concluir nada acerca de la tendencia de la Kurtosis, simplemente que esta fluctúa alrededor de un valor un poco mayor a 3.

Potencia inyectada [mW]	Skewness	Kurtosis
1.50	0.218	3.126
8.90	0.221	3.075
13.10	0.244	3.294
21.90	0.303	3.219

Tabla 3.1: Skewness y la Kurtosis de las PDFs calculadas en interfaz agua-aire.

3.3.2. Densidad de potencia espectral de las ondas PSD

La PSD de interfaz agua-aire se muestra en la Figura 3.17 calculada con los datos de las amplitudes de onda a la mayor potencia inyectada de 21.9 mW. En esta se observa el desarrollo de una cascada de energía entre el intervalo del número de onda $0.1\text{-}1.2\text{ mm}^{-1}$ que presenta a primera vista una ley de potencia. Es importante recordar que se aplicó un filtro en 1.5 mm^{-1} porque más allá no es posible detectar longitudes de onda más pequeñas debido a las características de la cámara adecuadas al arreglo experimental que dan un límite de detección de $\frac{2\pi}{1.5\text{ mm}^{-1}} = 4.1\text{ mm}$ en las longitudes de onda. De trabajos anteriores [81, 82] y de las exposiciones teóricas abordadas en este trabajo se puede interpretar que a partir del un forzaje aplicado filtrado en 3 Hz implica que la cascada se empieza a desarrollar desde el rango donde las ondas de gravedad son dominantes. Según la relación de dispersión gravito-capilar un forzaje a 3 Hz se estima que empieza en un número de onda igual a 0.04 mm^{-1} pero se observa que la cascada empieza a desarrollarse a partir de 0.09 mm^{-1} , esto sucede porque el algoritmo de la PSD necesita ver al menos tres longitudes de onda para calcular su potencia espectral, el valor 0.04 mm^{-1} equivale $\lambda = 157.1\text{ mm}$ que es poco más de la mitad del largo del perfil de la imagen (280 mm). Ahora, cuando la energía empieza a transmitirse en números de onda equivalentes al valor del crossover ($k_{c-w} = 0.37\text{ mm}^{-1}$), la cascada cambia de pendiente debido a que el efecto capilar empieza a dominar sobre el de gravedad.

Para cuantificar el efecto de cambio de régimen, en la Figura 3.17 se ha realizado un ajuste lineal en el rango de gravedad tomado entre $0.1\text{-}0.37\text{ mm}^{-1}$ y para el ajuste en

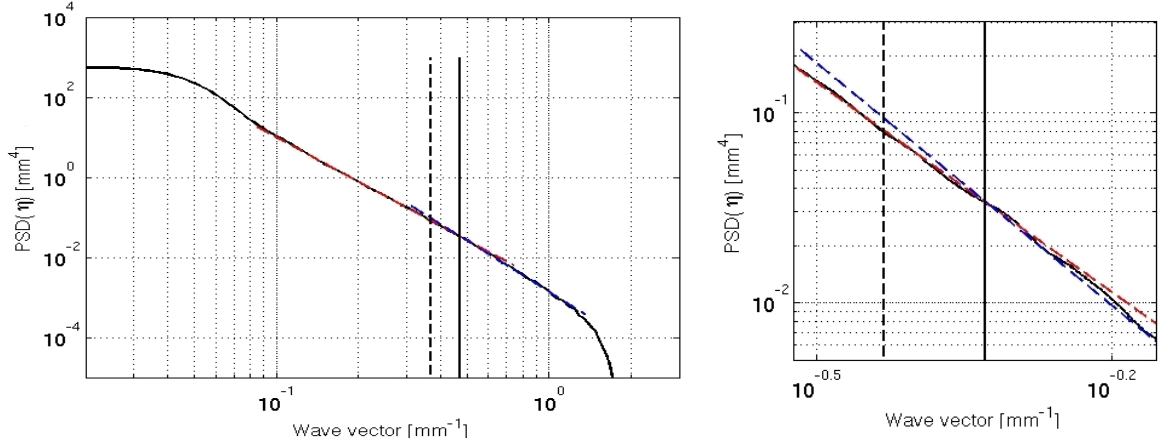


Figura 3.17: Izquierda: PSD de los datos de amplitudes de ondas en una interfaz agua-aire donde el promedio de la potencia inyectada al sistema $\langle I \rangle$ es de 21.9 mW. La curva presenta la PDS experimental y ajuste lineal de gravedad y capilaridad. La cascada de energía experimental se presenta en negro (—), el ajuste a la cascada de gravedad $\sim k^{-\alpha_g}$ en rojo (---) con una pendiente medida de $\alpha_g = 3.67$, y el ajuste a la cascada de capilaridad $\sim k^{-\alpha_c}$ en azul (---) con una pendiente de $\alpha_c = 4.24$. Derecha: acercamiento del crossover teórico (---) calculado en 0.37 mm^{-1} , mientras que el crossover calculado (línea vertical —) se encuentra en 0.47 mm^{-1} .

capilaridad se ha tomado entre $0.37\text{-}1.2 \text{ mm}^{-1}$. Se encuentra que la pendiente de la ley de potencia en el regimen de gravedad $\sim k^{-\alpha_g}$ es $\alpha_g = 3.67$ y para el regimen capilar $\sim k^{-\alpha_c}$ es de $\alpha_c = 4.24$. En teoría, estas pendientes deben ser en el regimen de gravedad de 3.5, y en el regimen capilar 4.5 (interacción de cuatro ondas) o 4.75 (interacción de tres ondas). La discrepancia es entonces de 5 % en gravedad, y en ondas capilares de 6 % (cuatro ondas) y 11 % (tres ondas). Los resultados concuerdan dentro del rango de error con las predicciones teóricas. Aún así, con la información experimental encontrada en esta sección no es posible determinar una explicación más detallada del fenómeno porque las medidas se realizaron para un solo valor de potencia inyectada donde se observa la cascada desarrollada, pero precisamente su objetivo es acercarse a la respuesta experimental de este sistema al fenómeno de Turbulencia de Ondas gravito-capilar el cual se ha abordado con mayor detalle anteriormente en [81, 82]. En cuanto al crossover medido, que corresponde al punto donde se intersectan las leyes de potencia ajustadas, se encuentra un valor de 0.47 mm^{-1} este difiere en un 27 % del valor teórico. Para comprender el origen del error es necesario notar que cada una de las leyes de potencia abarcan menos que media década y por lo tanto no es posible determinar con mayor precisión este valor.

3.4. Desarrollo de la Turbulencia de Ondas Capilares en interfaz Agua-Aceite

En esta sección se abordan los resultados experimentales del sistema de interfaz agua-aceite donde se ha demostrado que se propagan ondas principalmente capilares a partir de $k_{cross-wo} = 0.105 \text{ mm}^{-1}$. Este análisis se realiza con más detalle al aplicar una rampa ascendente de forzaje de seis puntos medida a través de la potencia inyectada promedio $\langle I(t) \rangle$. Cada forzaje aplicado corresponde a una señal aleatoria con espectro plano filtrado en 3 Hz. Como referencia, los detalles experimentales del montaje del sistema de la interfaz agua-aceite y la medida de la rampa ascendente de potencia inyectada se encuentra descrita en el Capítulo 2. Para el presente análisis y de igual manera que en la sección anterior, las herramientas estadísticas empleadas son la PDF y PSD para cada valor de potencia inyectada. Para calcular cada una de ellas se utilizaron del orden de 1000 imágenes, donde cada imagen procesada tiene una longitud de 210 mm y el factor de calibración correspondiente es de 6.1 px/mm.

3.4.1. Amplitudes rms de las ondas capilares para diferentes amplitudes de forzajes

El primer resultado estadístico que se aborda es el valor rms de las amplitudes de las ondas capturadas en 1000 imágenes para cada potencia inyectada. Esto se presenta en la Tabla 3.2. Naturalmente, las amplitudes se incrementan a medida que la potencia inyectada lo hace. Para determinar la tendencia se grafican los datos de la Tabla 3.2 lo cual se muestra en la Figura 3.18. Los seis puntos se ajustan a una línea recta. La pendiente del ajuste lineal indica que bajo las condiciones establecidas del forzaje filtrado en 3 Hz, la amplitud rms se incrementa en 0.088 mm por cada mW de potencia agregado. La confiabilidad del ajuste es del 99.1 %

A través de la Figura 3.18 se puede establecer una proporcionalidad directa para el rango medido de potencia inyectada entre 0.64 mW y 18.5 mW y el valor rms amplitudes de las ondas $\langle I(t) \rangle \propto \eta_{rms}$. Esto significa que existe una ley de escalamiento entre la potencia inyectada y la amplitud de las ondas y, más importante, este escalamiento es igual para ondas lineales y no-lineales porque el rango de potencia aplicado genera ondas precisamente en ambos regimenes.

Potencia inyectada promedio [mW].	amplitud rms promedio de las ondas [mm].
0.64	0.357
1.30	0.429
3.50	0.603
6.20	0.822
9.90	1.188
18.5	1.829

Tabla 3.2: Amplitud rms de las ondas capilares como función de la potencia inyectada a la interfaz agua-aceite para un forzaje aleatorio filtrado en 3 Hz.

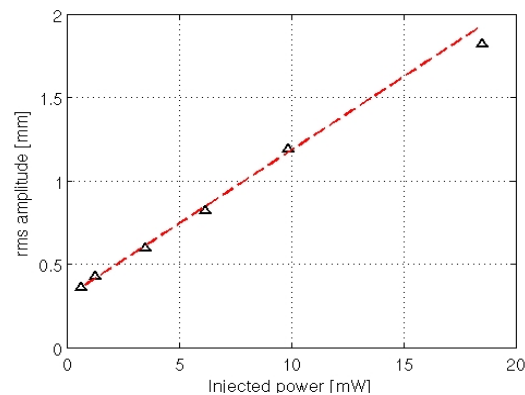


Figura 3.18: Amplitud promedio rms de las ondas calculada con un conjunto de 1000 imágenes por cada punto. Datos experimentales ($\Delta \Delta \Delta$) y ajuste lineal (---) La pendiente del ajuste corresponde a 0.088 mm/mW.

3.4.2. Funciones de densidad de probabilidad de las ondas PDF

Con las amplitudes de ondas obtenidas de las 1000 imágenes para cada potencia inyectada, se calcula una PDF para los seis valores de forzaje. La Figura 3.19 presenta un gráfico de todas las PDFs normalizadas con respecto a la desviación estándar de cada una de ellas σ_η y también se ha ajustado una distribución normal teórica para efectos de comparación. En el inset se presentan las mismas PDFs sin normalizar donde se observan que las variaciones máximas de amplitud de las ondas se encuentran entre -10 mm y 10 mm. Se observa en las curvas normalizadas que el promedio para todas de nuevo es cero porque numéricamente el promedio fue removido de las amplitudes de onda, y más importante, cada PDF es a primera vista simétrica incluso para amplitudes grandes que se desvían de una distribución normal. Esto implica que en el sistema agua-aceite la probabilidad de que las ondas se eleven sobre la interfaz puede ser igual a alcanzar amplitudes mínimas.

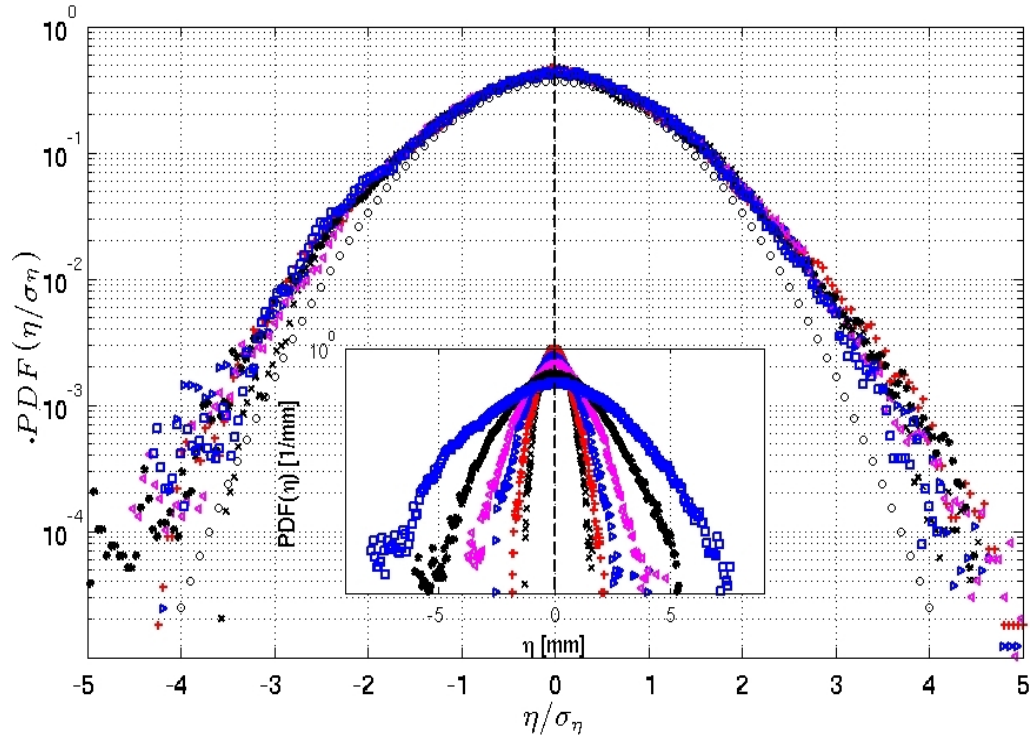


Figura 3.19: PDFs normalizadas de las amplitudes de onda en una interfaz agua-aceite para las potencias inyectadas de 0.64 mW (x x x), 1.30 mW (+ + +), 3.50 mW (>>>), 6.20 mW (<<<), 9.90 mW (* * *), 18.5 mW (□ □ □) y el ajuste teórico (o o o). El inset muestra las PDFs no normalizadas siguiendo la misma convención de signos.

Con el objetivo de cuantificar la simetría de las PDFs y por tanto de las ondas se calcula la Skewness para cada una de ellas. Además se calcula la Kurtosis para determinar cuantitativamente la desviación del sistema de una estadística gaussiana. Esto se presenta en la Tabla 3.19. La Skewness presenta fluctuaciones alrededor de cero, lo que se puede entender experimentalmente porque las colas de las PDF presentan un error debido a que la estadística para ondas de gran amplitud es más escasa que para las ondas de mediana o pequeñas amplitudes. Entonces según esta observación se puede asegurar que dentro de los rangos de error las ondas en la interfaz agua-aceite dominadas principalmente por ondas capilares son simétricas. La Kurtosis se desvía entre un 2.5 % y 16.3 % con respecto a una gaussiana, los resultados muestran que no hay ninguna tendencia clara que pueda estar correlacionada con el aumento de la potencia inyectada, pero aún así se puede notar que para las PDFs calculadas con forzaje filtrado en 3 Hz la Kurtosis siempre es ligeramente mayor a tres es decir un poco más picudas que una gaussiana, de igual forma que para las PDFs del sistema agua-aire.

Potencia inyectada promedio [mW]	Skewness	Kurtosis
0.64	0.1975	3.0758
1.30	0.0498	3.4921
3.50	-0.0031	3.3783
6.20	0.0622	3.2011
9.90	0.0089	3.3312
18.5	-0.0875	3.1844

Tabla 3.3: Skewness y Kurtosis de las PDFs en una interfaz agua-aceite para las diferentes potencias inyectadas de forzaje aleatorio filtrado en 3 Hz.

3.4.3. Desarrollo de la cascada turbulenta en función de la potencia inyectada

La transición del régimen lineal al régimen turbulento en el sistema agua-aceite se puede estudiar a través de las PSDs, cada una calculada para un valor de potencia de forzaje aleatorio con distribución gaussiana y espectro filtrado en 3 Hz. Estas se presentan en las Figuras 3.20 donde se grafica la potencia espectral $S(k)$ contra el número de onda k en una escala log-log. Para las potencias de forzajes 0.64 mW y 1.30 mW las ondas aún se encuentran en el régimen lineal. Luego, para las potencias 3.50 mW, 6.20 mW y 9.90 mW las ondas empiezan a interactuar desde la zona de inyección de potencia, es decir, con el forzaje aplicado filtrado 3 Hz que en número de onda k es del orden de 0.15 mm^{-1} . A partir de este valor se observa que a medida que la potencia inyectada crece las PSDs aumentan en magnitud hacia la derecha, lo que significa que más ondas con k 's mayores empiezan a interactuar. Para la mayor potencia inyectada de 18.5 mW la cascada turbulenta ya se presenta desarrollada, es decir, corresponde a una ley de potencia $\sim k^{-\alpha_c}$. Experimentalmente se observó que para la potencia de 18.5 mW en la interfaz se empiezan a generar algunas gotas de agua inmersas en el aceite lo cual permite determinar que para potencias mayores con las condiciones de forzaje impuestas se empieza a producir un rompimiento de la interfaz cerca de la zona donde se ubica el pistón y consecuentemente un proceso de mezcla de los líquidos lo cual cambia completamente la dinámica turbulenta. La energía inyectada se desvía entonces hacia un proceso de rompimiento de la interfaz y mezcla de los líquidos y ya no hay una interfaz continua. Finalmente, se observa que para números de onda mayores a 1.0 mm^{-1} no es posible detectar longitudes de onda más pequeñas, es decir, longitudes del orden de $\frac{2\pi}{1.0 \text{ mm}^{-1}} = 6.28 \text{ mm}$. La razón es porque a partir de este valor se encuentra el límite de lo que es posible detectar con las técnicas de

medida y de procesamiento utilizadas.

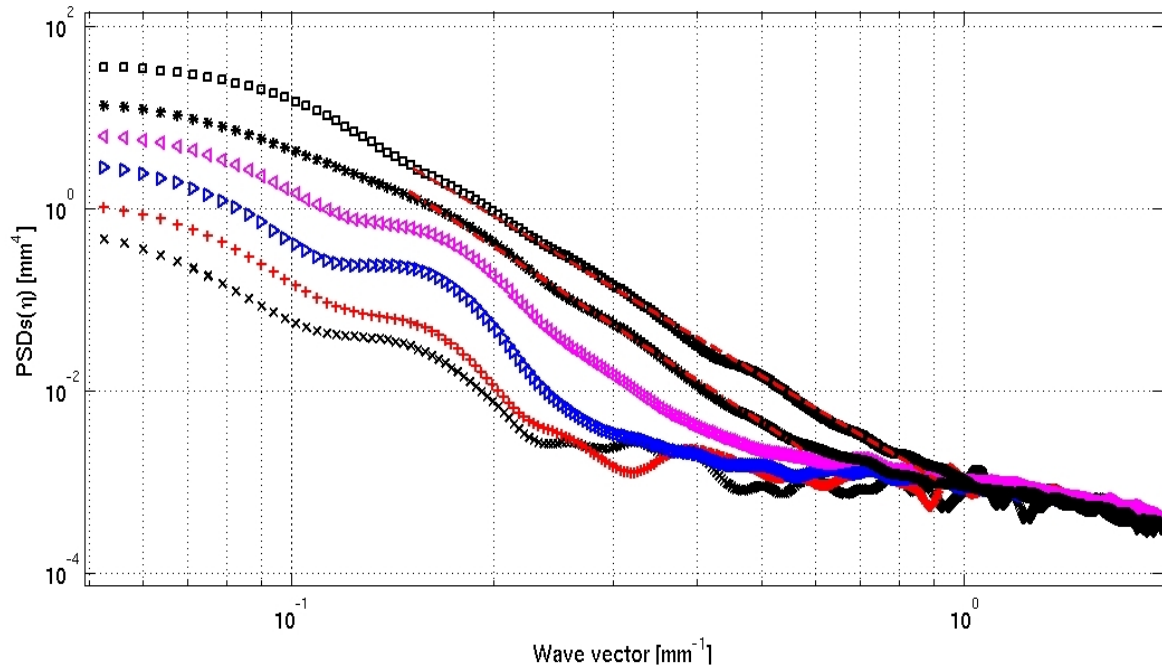


Figura 3.20: PSDs de las amplitudes de onda para la potencia inyectada de 0.64 mW (x x x), 1.30 mW (+ + +), 3.50 mW (▷ ▷ ▷), 6.20 mW (◁ ▷ ▷), 9.90 mW (* * *), 18.5 mW (□ □ □) el forzaje es aleatorio con frecuencia de corte en 3 Hz.

Sobre las PSDs de las potencias de 9.90 mW y 18.5 mW de la Figura 3.20 es posible ajustar una recta porque la cascada de energía se presenta desarrollada. La Tabla 3.4 muestra la pendiente calculada y la región en k donde se hizo el ajuste. La PSD de la potencia inyectada de 9.90 mW tiene pendiente de $\alpha_{cexp} = 4.83$ y para 18.50 mW la pendiente disminuye a $\alpha_{cexp} = 4.39$. La fenomenología de la tendencia de disminución de la pendiente a medida que se aumenta la potencia de forzaje (Tabla 3.4) también se ha reportado en [81] pero en este reporte para el régimen donde las ondas de gravedad son dominantes. Para la potencia de 6.90 mW y 3.50 mW a partir de 0.15 mm^{-1} aparece una cúspide (donde empieza el forzamiento) y en un pequeño rango de k del orden de 0.10 mm^{-1} y 0.20 mm^{-1} , respectivamente, la tendencia es una recta pero ésta decae rápidamente. De aquí se puede deducir que las ondas interactúan pero lo hacen aún muy débilmente y más importante, que al incrementar la potencia inyectada, se observa que el rango en donde aparece la cascada empieza a aumentar siempre hacia los k 's más grandes lo que indica que la cascada se desarrolla hacia la zona de disipación. En las PSDs restantes se observan máximos singulares lo que indica que las ondas no interactúan.

Potencia inyectada promedio [mW]	Pendiente de tendencia de la PSD α_c	Intervalo en el que se mide la pendiente [mm]
9.90	4.83	0.15-0.60
18.5	4.39	0.15-0.90

Tabla 3.4: Tendencia de la pendiente de la PSD como función de la potencia inyectada a la interfaz agua-aceite.

En este sistema agua-aceite ya se ha demostrado que las ondas dominantes son ondas capilares, ahora, en teoría según las ecuaciones (1.74) y (1.75) se predice que para una dinámica turbulenta débilmente no-lineal, las pendientes deben ser de $\alpha_{cte04} = 4.5$ (interacción de cuatro ondas) y $\alpha_{cte03} = 4.75$ (interacción de tres ondas). Se sabe que para un sistema que es simétrico con respecto al eje perpendicular a la interfaz agua-aceite (eje z) [63] la interacción de tres ondas se anula. En el experimento, las alturas de los líquidos en la celda es igual dentro de un rango de error de 2 mm (lo que porcentualmente corresponde al 4%) entonces el tipo de interacción dominante en el sistema experimental construido debe ser de cuatro ondas, es decir, se espera que la medida experimental posea una pendiente más cercana a 4.5. De tal forma, comparando con los resultados de la Tabla 3.4, el error con $\alpha_{cep} = 4.83$ es del 7% y con el mínimo valor encontrado, el cual corresponde a la cascada completamente desarrollada $\alpha_{cep} = 4.39$, es del 3%. La interpretación de la discrepancia puede entonces atribuirse a errores netamente experimentales y por lo tanto el resultado esta en buen acuerdo, aún así hay que recordar que la teoría esta hecha para interacciones débilmente lineales y de ninguna manera se ha mencionado o probado que el valor experimental de la pendiente sea débilmente lineal.

Para cuantificar la no-linealidad de la Turbulencia hay que recordar que en el desarrollo teórico de la Turbulencia de Ondas débilmente no-lineal se estableció que la condición de la expansión y truncamiento del Hamiltoniano a orden cuatro es valida siempre que el parametro de dicha expansión ϵ sea mucho menor que uno. En la práctica este valor se puede estimar al calcular $\epsilon \sim k_m \eta_{km}$ donde se ha escogido k_m el número de onda k cuando η_k es máximo. Este parámetro es del orden del gradiente normalizado de la transformada de fourier de η y por lo tanto es una medida de la suavidad de las ondas ($\epsilon \ll 1$). Al observar los resultados de la Figura 3.20 este corresponde a un orden de 0.1 mm^{-1} . Entonces, para estimar el valor de la no-linealidad ϵ se utiliza $k_m = 0.1 \text{ mm}^{-1}$ y los valores rms de amplitud dados en la Tabla 3.2. Los resultados se presentan en la Tabla 3.5.

Potencia inyectada promedio [mW].	estimación del orden no-lineal ϵ .
3.50	0.057
6.20	0.078
9.90	0.112
18.5	0.174

Tabla 3.5: Estimación del orden no-lineal ϵ de las ondas generadas en la interfaz agua-aceite en función de la potencia inyectada promedio.

Se observa que para todos los valores de potencia inyectada el estimativo de ϵ no es con exactitud un valor mucho menor que uno como se supone en teoría., pero sigue siendo menor que la unidad en todos los casos, lo que garantiza que los ordenes superiores de la expansión del Hamiltoniano (ecuación (1.40)) son de ordenes menores que ϵ y se puede asumir entonces que los términos no lineales son debiles. Para finalizar, la teoría exige además que el espacio donde se propagen las ondas sea infinito de tal manera que el espacio de los números de onda k' s sean continuos y en consecuencia los mecanismos de interacción (ecuación (1.50)) de las ondas sean igualmente continuos. En realidad, la celda experimental tiene una discretización de los números de onda debido a su tamaño finito. Este esta dado por $k_{min} = \frac{2\pi}{L}$ donde L es el largo de la caja (370 mm), es decir, en el sistema de estudio las ondas pueden interactuar a intervalos de $k_{min} = 0.017 \text{ mm}^{-1}$. Ahora, el mínimo valor de k detectado es del orden de 0.1 mm^{-1} el cual es mayor que la discretización de la caja lo que permite asegurar que en el rango medido las interacciones de los modos ondulatorios pueden observarse como un continuo.

Conclusiones

3.5. Conclusiones del trabajo de tesis

En este trabajo de tesis, el objetivo central ha sido determinar experimentalmente la estadística espacial de la Turbulencia de Ondas Capilares. A partir del sistema diseñado se ha demostrado que es posible generar un estado turbulento donde las ondas capilares son dominantes. Para tal fin, inicialmente se realizó una verificación del comportamiento del sistema experimental como un medio donde se propagan ondas superficiales en el régimen lineal. En este, se han medido con precisión las relaciones de dispersión en una interfaz agua-aire y una interfaz agua-aceite junto con los parámetros característicos de este sistema, determinando así exactamente el rango donde se desarrollan las ondas capilares. Los resultados principales del estado turbulento generado se analizan a través de la función de densidad de probabilidad PDF y la densidad de potencia espectral PSD y estableciendo comparaciones con los desarrollos teóricos se encuentra que:

- Al variar la potencia inyectada $\langle I(t) \rangle$ a la interfaz en una rampa ascendente se observa en la potencia espectral medida para ondas capilares (Figura 3.20) el desarrollo de una cascada de energía desde una escala de $k = 0.15 \text{ mm}^{-1}$ hasta $k = 1.0 \text{ mm}^{-1}$. Dicha cascada se desarrolla de tal forma que para potencias bajas se observan inicialmente armónicos correspondientes a las frecuencias de las ondas lineales excitadas y a medida que la magnitud de la potencia $\langle I(t) \rangle$ se incrementa y las ondas pasan al régimen no-lineal, estos armónicos desaparecen transformándose en una ley del tipo $k^{-\alpha}$ en el valor de potencia máxima aplicada a los fluidos que corresponde a 18.5 mW. Esto es una evidencia directa de la observación de Turbulencia de Ondas porque el desarrollo de una cascada de este tipo implica que existe un flujo de energía a través de las escalas de los modos ondulatorios en un régimen inercial, que en este caso corresponde al rango en k mencionado.

- De igual forma, al variar la potencia inyectada, se puede reportar que las ondas capilares presentan una simetría en el eje vertical $z \rightarrow -z$. Este resultado se demuestra a través de las PDFs calculadas para las ondas capilares (Figura 3.19) donde en cada valor de potencia inyectada desde el régimen lineal hasta el no-lineal las PDFs son simétricas. Esto se explica porque al sistema experimental se le han impuesto simetrías donde la altura de los líquidos son iguales y las densidades similares provocando que las ondas capilares que se propagan no distinguan diferencias entre el medio superior e inferior, lo que es equivalente a intercambiar $z \rightarrow -z$.
- En el proceso para que la cascada de energía se desarrolle completamente es necesario superar un umbral de no-linealidad. La pregunta es si este umbral requiere superar un valor débilmente no-lineal. Para esto se estimó el parámetro que cuantifica la no-linealidad ϵ y que debe ser mucho menor que la unidad para que la teoría de turbulencia débilmente no-lineal adquiera sentido en este análisis. El valor máximo encontrado para ϵ es de 0.17 el cual corresponde al valor de potencia inyectada de 18.5 mW y donde la cascada ya esta completamente desarrollada. Este valor no es precisamente mucho menor que uno pero garantiza que las interacciones superiores que van como ϵ^n con n un número entero son de ordenes menores a ϵ . Por lo tanto, se determina experimentalmente que es posible que la cascada se desarrolle completamente en el régimen débilmente no-lineal.
- Se mencionó al final del capítulo teórico que la ley de potencia $\sim k^{-\alpha}$ esperada en los resultados experimentales debe ser principalmente la debida a una interacción de los modos ondulatorios para cuatro ondas, debido que las simetría en el impuestas en el sistema experimental ($z \rightarrow -z$). De lo anterior, y el buen acuerdo obtenido entre los resultados experimentales y las predicciones teóricas para las leyes de potencia del espectro de energía que rigen la Turbulencia de Ondas Capilares, permite concluir que se trata de un sistema en donde la interacción de las ondas capilares es principalmente de cuatro ondas.

3.6. Limitaciones y perspectivas

Las conclusiones anteriores permiten asegurar que los resultados encontrados en esta tesis son satisfactorios dentro de las hipótesis en las que se fundamenta la teoría de Turbulencia de Ondas débilmente no-lineal. Aún así, estos resultados dejan preguntas abiertas

que orientan la investigación hacia una perspectiva más amplia, la cual, propone medir constantes en el sistema que aún no se han determinado y probar los rangos de validez de la teoría. Para mencionar las más relevantes se encuentran las siguientes:

- Realizar un estudio más detallado de los efectos de la viscosidad de los líquidos en el desarrollo de la cascada de energía (*variar la viscosidad del aceite de silicona*).
- *Variar el tamaño de la caja* con el fin de verificar el efecto que tiene la discretización de los números de onda en el resultado de la cascada de energía turbulenta.
- Variar la altura de los líquidos *rompiendo la simetría* $z \rightarrow -z$ lo que permitiría una mayor influencia de la interacción de tres ondas.
- En todo el desarrollo teórico se supone constante el *flujo de energía* ε , el cual es un parámetro fundamental en las leyes de potencia de la cascada de energía. La medida de este parámetro es aún un problema no resuelto.
- Estudiar el grado de *intermitencia del sistema*, el cual es la variación a través de las escalas físicas de la predicción autosimilar del espectro de Kolmogorov-Zakharov. Este grado de intermitencia y su naturaleza puede ser estudiado como la desviación de la tendencia lineal de los exponentes en las funciones de estructura $S_p(l_o)$, las cuales se pueden calcular a partir de los incrementos de las amplitudes de onda $\delta_\eta(l_o) = \eta(x + l_o) - \eta(x)$ donde l_o es la distancia entre dos puntos espaciales. Así, definimos $S_p(l_o) = \langle |\delta_\eta(l_o)|^p \rangle$. Estudios sobre este problema están fuera del alcance de esta tesis.

Bibliografía

- [1] Nobel Lectures, Physics 1963-1970, Elsevier Publishing Company, Amsterdam, (1972).
- [2] G.A. Greene, Nuclear Reactor Safety, Volume 29: Volume 29: Heat Transfer in Nuclear Reactor Safety (Advances in Heat Transfer), Academic Press; 1st edition (1997).
- [3] R. P. Benedict, Fundamentals of Pipe Flow, John Wiley & Sons Inc (1980).
- [4] Baer EM, Fisher RV, Fuller M, Valentine G (1997) Turbulent transport and deposition of the Ito pyroclastic flow: determinations using anisotropy of magnetic susceptibility, J. Geophys. Res. 102:22565-22586.
- [5] T. Dubis, F. Juaberteau, R. Temam, Dynamic Multilevel Methods and the Numerical Simulation of Turbulence, Cambridge University Press; 2 edition (1999).
- [6] E. Garnier, N. Adams, P. Sagaut, Large Eddy Simulation for Compressible Flows (Scientific Computation), Springer; 1 edition (2009).
- [7] T. T. Warner, Numerical Weather and Climate Prediction, Cambridge University Press (2011).
- [8] J. Zukowsky, Building for Air Travel: Architecture and Design for Commercial Aviation (Architecture & Design), Prestel (1996).
- [9] O. Reynolds, On the dynamical theory of turbulent incompressible viscous fluids and the determination of the criterion, Phil. Trans. R. Soc. London A **186**, 123-161. (1894).
- [10] L. F. Richardson, Weather Prediction by Numerical Process, Cambridge (1922).
- [11] S. Annenkov, V. Shrira, New numerical method for surface waves hydrodynamics based on the Zakharov equation J. Fluid Mech. **449**, 341-371. (2001)

- [12] P. Janssen, *Ocean-atmosphere interaction* (Cambridge University Press), (2004).
- [13] P. Caillol and V. Zeitlin, Kinetic equations and stationary energy spectra of weakly nonlinear internal gravity waves. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 32, 81. (2000).
- [14] Y.V. Lvov, and E.G. Tabak, 2001: Hamiltonian formalism and the Garrett and Munk spectrum of internal waves in the ocean. *Phys. Rev. Lett.*, 87, 169501.
- [15] V.S. Lvov, S.V. Nazarenko and O. Rudenko, 2007, Bottleneck crossover between classical and quantum superfluid turbulence. *Phys. Rev. B* 76, 024520.
- [16] S. Nazarenko, 2005, Differential approximation for Kelvin-wave turbulence, *JETP Letters* vol 83, No 5 (2005) pp 198-200
- [17] Bigot B., Galtier S. and Politano H. An Anisotropic Turbulent Model for Solar Coronal Heating *Astron. Astrophys.* 490, pp 325-337 (2008)
- [18] Falgarone, E. and T. Passot (Eds), 2003. *Turbulence and Magnetic Fields in Astrophysics* (Lecture Notes in Physics, Springer)
- [19] S. Galtier, S.V. Nazarenko, A.C. Newell and A. Pouquet, 2000, A weak turbulence theory for incompressible MHD, *Journal of Plasma Phys.* 63, 447.
- [20] Iroshnikov R.S., 1963, Turbulence of a conducting fluid in a strong magnetic field, *Astron Zh* 40, 742 (English trans.: 1964, *Sov. Astron.* 7, 566).
- [21] V.E. Zakharov and L.I. Piterbarg, 1988. Canonical variables for Rossby waves and plasma drift waves, *Phys. Lett. A* **126** (8-9), 497
- [22] S. Nazarenko and M. Onorato, Wave turbulence and vortices in Bose-Einstein condensation, *Physica D*, vol. 219 (2006) pp 1-12.
- [23] S. Nazarenko and M. Onorato, Freely decaying turbulence and Bose-Einstein condensation in Gross-Pitaevski model, *J. Low Temp Phys.* vol. 146 (1/2) pp 31-46 (Jan 2007).
- [24] G. Düring, C. Josserand and S. Rica, Weak turbulence for a vibrating plate: can one hear a Kolmogorov spectrum?, *Phys. Rev. Lett.* 97, 025503 (2006).

- [25] R. Z. Sagdeev and A. A. Galeev, 1969, Nonlinear plasma theory (Rev. and edited by T. M. O'Neil and D. L. Book) New York, W. A. Benjamin, Frontiers in physics series, 122 pages.
- [26] A. A. Galeev and R. Z. Sagdeev: Review of Plasma Physics, ed. M. A. Leontovich (Consultants Bureau, New York, 1979) Vol. 7, p. 307.
- [27] A.A. Vedenov, 1967, Theory of weakly turbulent plasma. In Reviews of plasma physics (ed. M. A. Leontovich). New York, Consultants Bureau 3, 229.
- [28] W. F. Hughes, Teoría y problemas de dinámica de fluidos, (1991). McGraw-Hill, Serie Schaum.
- [29] P. Atkins, J. De Paula, Physical Chemistry, Oxford University Press (2006) Eight Edition.
- [30] R. Clift, Bubbles, Drops and Particles, Academic Press (1978).
- [31] L. Fetter, J Walecka, Theoretical Mechanics of Particles and Continua, Diver (2003).
- [32] W. Elmore, M. Heald, Physics of waves. McGraw-Hill, (1969).
- [33] L. D. Landau, Fluid Mechanics, Pergamon Press, 2nd Edition, (1987).
- [34] A. Papoulis, Probability, Randoms Variables and Stochastic Processes, 3rd Edition.
- [35] Adamson, *Physical Chemistry of Surfaces* Wiley-Interscience, Sixth Edition (1997).
- [36] F. Crawford, Ondas, berkeley physics course, Reverte (1994).
- [37] P-G de Gennes, F Brochard-Wyart, David Quéré Capillarity and Wetting Phenomena, Drops, Bubbles, Pearls, Waves, Springer (2003).
- [38] K. Kumar L.S. Tuckerman, Parametric instability of the interface between two fluids, J. Fluid. Mech. **279**, pp 49-68 (1994).
- [39] J. Eggers, Nonlinear dynamics and breakup of free-surface flows, Rev. Mod. Phys., Vol. 69, No. 3, July (1997) Universität Gesamthochschule Essen, Fachbereich Physik, 45117 Essen, Germany.
- [40] Bigg, G.R., Ocean-atmosphere interaction (Cambridge University Press) 273 pages, (2003).

- [41] D.J. Benney and P.Saffman, Nonlinear interaction of random waves in a dispersive medium, Proc Royal. Soc, A (1966), 289, 301-320
- [42] V.E. Zakharov, Weak turbulence in media with decay spectrum, Zh.Priklad.Tech.Fiz, No.4 pp35-39 (1965) [J.Appl.Mech.Tech.Phys No 4 pp22-24, (1965)]
- [43] H. Aref, Stirring by chaotic advection, J. Fluid Mech. **143**, 1 (1984).
- [44] U. Frish, Turbulence, The Legacy of A.N. Kolmogorov, Cambridge University Press (1995).
- [45] A. N. Kolmogorov. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 30;4:3201, (1941).
- [46] G. Barenblatt, Scaling Phenomena in Fluid Mechanics. Cambridge (1993).
- [47] H.L. Grant,R.W. Stewart,A. Moilliet, Turbulent spectra from a tidal channel, J. Fluid Mech. **12**, 241-268. (1962).
- [48] F.H. Champagne, The fine-scale structure of the turbulent velocity field, J. Fluid Mech. **86**, 67-108 (1978).
- [49] T. Sanada, Cluster statistics of homogeneous fluid turbulence, Phys. Rev. A **44**, 6480-6489 (1991).
- [50] J. Maurer, P. labeling, G. Zocchi, Statistics of turbulence between two counter-rotating disks in low temperature helium gas, Europhys. Lett. **26**, 31-36 (1994).
- [51] V.E. Zakharov, Kolmogorov spectra in weak turbulence problems: in Handbook of Plasma Physics, Vol. 2, Basic Plasma Physics, eds. A.A. Galeev, R.N. Sudan (Elsevier, North-Holland, 1984), pp. 3-36.
- [52] V. E. Zakharov, V. S. L'vov, and G. Falkovich, Kolmogorov Spectra of Turbulence I (Springer, Berlin, 1992).
- [53] S. Nazarenko, Wave Turbulence (Lectures Notes in Physics), Springer-Verlag (2011).
- [54] Taylor G.I. 1935. Statistical Theory of Turbulence, Proc. R. Soc. Lond. A **151**, 421-478.
- [55] Taylor G.I. 1938. The spectrum of turbulence, Proc. R. Soc. Lond. A **164**, 476-490.

- [56] B. Gershgorina, Y.V. Lvovb, and S. Nazarenko, Canonical Hamiltonians for waves in inhomogeneous media, *J. Math. Phys.* **50**, 013527 (2009).
- [57] H. Goldstein, C. Poole, J. Saftko, *Classical Mechanics*, 3rd Edition, Addison Wesley.
- [58] W. Greiner, *Classical mechanics "System of particles and Hamiltonian Dynamics"*, springer (2003).
- [59] M.G. Calkin, *Lagrangian and Hamiltonian mechanics*, World Scientific.
- [60] J. J. Sakurai, S. F. Tuan, *Modern quantum mechanics*, Addison-Wesley Pub. Co. (1994).
- [61] A.C. Newell, *Rev. Geophys.* **6** (1968) 131.
- [62] A.I Dyachenko, A.O. Korotkevich and V.E. Zakarov, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 13 (2004).
- [63] G. Düring, C. Falcón, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 174503 (2009).
- [64] W. Craig, P. Guyenne, and H. Kalisch, *Comm. Pure Appl. Math.* **58**, 1587 (2005).
- [65] A.N. Pushkarev, V.E. Azkarov, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 18 (1996).
- [66] V.E. Zakharov, N.N. Filonenko, *Zh. Prikl. Mekh. I Tekn. Fiz.* **5** (1967) 62-67
- [67] E. Kuznetsov, A.C. Newell, and V. E. Zakharov, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 3243 (1991).
- [68] S. Dyachenko, A. C. Newell, A. Pushkarev and V. E. Zakharov, *Physica D* **57**, 96 (1992)
- [69] G. Düring, C. Josserand and S. Rica, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 025503 (2006)
- [70] K. Hasselmann, *J. Fluid Mech.* **12**, 481-500 (1962); *J. Fluid Mech.* **15**, 73-281 (1963).
- [71] V.E. Zakharov, N.N. Filonenko, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **170** (6) (1966) 1292-1295.
- [72] V.E. Zakharov, *Zh. Eksper. Teoret. Fiz.* **51**, 686 (1966).
- [73] C. Connaughton, S. Nazarenko and A.C. Newell, *Physica D* **184**, 86 (2003).
- [74] C. Kittel, *Elementary statistical physics*, Dover, (2004).
- [75] B. T. Lathi, Z. Ding. *Modern Digital and Analog Communication Systems*, 4th Edition, Oxford. University Press.

- [76] E. Falcon, et. al. Phys. Rev. Lett. **100**, 064503 (2008).
- [77] C. Craig Ann. Math. Stat. **7**, 1 (1936).
- [78] M. Bandi, C. Connaughton. Phys. Rev. E. **77**, 036318 (2008).
- [79] M. A. Mutko, M. A. Atame, M. R. Loewen. Exp Fluids (2007), **42**:131-142.
- [80] P. Denissenko, S. Lukaschuk and S. Nazarenko, 2007, Gravity surface wave turbulence in a laboratory flume, Phys. Rev. Lett. **99**, 014501.
- [81] S. Lukaschuk et al., Phys. Rev. Lett. **103**, 044501 (2009).
- [82] E. Falcon, C. Laroche, and S. Fauve, Phys. Rev. Lett. **98**, 094503 (2007);
- [83] S. Nazarenko et al., J. Fluid Mech. (2010), **642**, pp. 395-420.
- [84] C. Falcón, U. Bortolozzo, E. Falcon and S. Fauve, EPL, **86** (2009) 14002
- [85] S. V Nazarenko, J. Stat. Mech. 2, L02002 (2006).
- [86] E. Herbert, N. Mordant, and E. Falcon, Phys. Rev. Lett. **105**, 144502 (2010).