



**UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

FENÓMENOS DEL FORZAMIENTO A ALTA FRECUENCIA

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS, MENCIÓN FÍSICA**

CRISTIAN FERNÁNDEZ OTO

**PROFESOR GÚIA:
MARCEL CLERC GAVILÁN**

**MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
RENÉ ROJAS CORTÉS
ENRIQUE CERDA VILLABLANCA
DANIEL ESCAFF DIXON
SALIYA COULIBALY**

**SANTIAGO DE CHILE
JUNIO 2012**

RESUMEN DE LA TESIS
PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS,
MENCIÓN FÍSICA
POR: CRISTIAN FERNÁNDEZ OTO
FECHA: 25/06/2012
PROF. GUÍA: MARCEL CLERC

FENÓMENOS DEL FORZAMIENTO A ALTA FRECUENCIA

El principal objetivo de esta tesis es estudiar diversos fenómenos generados a partir del forzamiento de alta frecuencia. Entre estos destacan: la resonancia paramétrica efectiva inducida por el forzamiento de alta frecuencia, la inestabilidad espacial en un sistema unidimensional de osciladores acoplados, el fenómeno bloqueo-desbloqueo entre ondas estacionarias y su extensión a sistemas que presenten patrones monoestables con advección.

Para cumplir con los objetivos se utilizaron diferentes técnicas de la física no lineal. Las más relevantes son: la condición de solubilidad o alternativa de Fredholm, el método de ecuaciones de amplitud, la estrategia de formas normales y una estrategia de multi-escalas propuesta por Kapitza. Así mismo, fue de gran valor recurrir a la bibliografía actual sobre fenómenos como la resonancia en el límite de baja inyección y disipación de energía, la generación de sistemas efectivos y la dinámica de frentes.

En el caso de un sistema sin acoplamiento espacial, se mostró que un forzamiento de alta frecuencia puede inducir un oscilador efectivo. Este puede resonar con el forzamiento externo y la resonancia existir para diferentes niveles de disipación de energía. A este fenómeno se le denominó resonancia paramétrica efectiva (EPR por sus siglas en inglés), el cual pudo ser verificado experimentalmente por medio de un péndulo de rodamiento. A lo largo de esta tesis, se obtuvo la curva de inestabilidad generada por la EPR, confirmada con simulaciones numéricas.

En un sistema unidimensional de osciladores acoplados, se probó la aparición de una inestabilidad espacial para un forzamiento de alta frecuencia. La curva de inestabilidad fue obtenida mediante una estrategia de expansión modal truncada. Se caracterizó el crecimiento de las ondas estacionarias exhibidas después de la bifurcación. Ambos resultados fueron comprobados numéricamente.

Por otra parte, se observó la existencia de biestabilidad entre ondas estacionarias para una cadena de péndulos. Fue posible comprobar la existencia de una región de anclaje o bloqueo del frente que conecta ambos estados. En un modelo prototipo, se caracterizó la región de bloqueo, la velocidad del frente cerca de la bifurcación y la existencia de ondas localizadas. Se verificaron numéricamente estos resultados en ambos sistemas.

También se observó el fenómeno de bloqueo en patrones monoestables con advección. Esto se realizó en un modelo prototipo de patrones, logrando entender el origen del fenómeno. El acoplamiento entre el patrón y las variaciones de su envolvente, generadas por los bordes o por el cambio de los parámetros en el espacio, es el que genera anclaje. Las predicciones teóricas y los resultados numéricos fueron comprobados experimentalmente en un sistema óptico con retroinyección.

THESIS ABSTRACT FOR
MASTER'S DEGREE
IN SCIENCE,
PHYSICS MENTION
BY: CRISTIAN FERNÁNDEZ OTO
DATE: 06/25/2012
ADVISOR: MARCEL CLERC

HIGH FREQUENCY FORCING PHENOMENA

The main objective of this thesis is to study different phenomena generated from high-frequency forcing. Among these are: the effective parametric resonance induced by high-frequency forcing, the spatial instability in a one-dimensional system of coupled oscillators, the pinning-depinning phenomenon between waves and its extension to drifting monostable patterns.

To achieve the objectives were used different techniques of nonlinear physics. The most relevant are: the condition of solubility or Fredholm alternative, the method of amplitude equations, the normal forms strategy and a strategy of multi-scales proposed by Kapitza. It also was of great value the current literature on the phenomena of resonance in the limit of small injection and dissipation of energy, generation of effective systems and fronts dynamics.

In the case of a system without space, it was shown that high frequency forcing may induce an effective oscillator. This may resonate with the external forcing and resonance exist for different levels of energy dissipation. This phenomenon is called effective parametric resonance (EPR for its initials in English), which was verified experimentally with a pendulum bearing. Throughout this thesis, it was obtained the curve of instability generated by the EPR, confirmed by numerical simulations.

In a one-dimensional system of coupled oscillators, it was tested the appearance of a spatial instability to a high frequency forcing. The instability curve was obtained using a truncated modal expansion strategy. It was characterized the growth of the standing wave after the bifurcation. Both results were verified numerically.

Moreover, we observed the existence of bistability between stationary waves for a chain of pendulums. It was verified the existence of a pinning region of the front that connect the two states. In a prototype model, it was characterized the pinning region, the front speed near to the bifurcation and the existence of localized waves. These results were checked numerically in both systems.

It was also observed the pinning phenomenon in drifting monostable patterns. This was done in a prototype model of patterns, to understand the origin of the phenomenon. The coupling between the pattern and its envelope, generated by borders condition or by changing the parameters in space, is what generates pinning. The theoretical predictions and numerical results were verified experimentally in an feedback optical system.

Agradecimientos

Quiero agradecer especialmente a Marcel Clerc por su apoyo constante y motivación. Sin él este trabajo no hubiese sido posible.

Agradezco a mi familia y amigos por su invaluable respaldo, en particular a Pablo Cancino, por su gran aporte en la redacción final, y a Mónica García, por su ayuda en el desarrollo de este trabajo.

Deseo dar las gracias a quienes me ayudaron durante las pasantías realizadas en el extranjero. En Chicago, me gustaría destacar a Pegg Anderson, por ser el soporte de todos los chilenos en USA, y a Tom Witten, por su paciencia y enseñanza de nuevas formas para ver los problemas. En mi paso por Lille, es imposible no mencionar el apoyo y los conocimientos entregados por Saliya Coulibaly y Eric Louvergneaux.

A los miembros de la comisión, dada su buena disposición con las fechas de esta tesis.

Finalmente, agradecer el financiamiento de “Becas de Magíster nacional” de Conicyt y “Ayudas para estadías cortas de investigación” del Departamento de Postgrado y Postítulo de la Vicerrectoría de Asuntos Académicos de la Universidad de Chile.

Índice

1. Introducción	1
1.1. Introducción general	1
1.2. Objetivos	1
1.2.1. Objetivo general	1
1.2.2. Objetivos específicos	1
2. Marco Conceptual	1
2.1. Forzamiento y Resonancia	1
2.2. Osciladores con términos no lineales	6
2.3. Resonancia en osciladores no lineales	7
2.4. Forzamiento y Resonancia Paramétrica	10
2.5. Efecto Kapitza	13
2.6. Resonancia paramétrica extendida espacialmente	16
2.7. Velocidad de un frente homogéneo	20
3. Metodología	24
4. Resonancia paramétrica efectiva	24
4.1. Introducción	24
4.2. Sistema prototipo de EPR	25
4.3. Resonancia paramétrica efectiva en un péndulo forzado	30
4.4. Conclusiones	33
5. Inestabilidad espacial en un sistema forzado a alta frecuencia	34
5.1. Introducción	34
5.2. Curvas de inestabilidad en una cadena de péndulos forzados paraméricamente	34
5.3. Crecimiento del patrón después de la inestabilidad supercrítica	39
5.4. Conclusiones	43
6. Transición bloqueo-desbloqueo entre ondas estacionarias y ondas localizadas disipativas	44
6.1. Introducción	44
6.2. Frente que conecta ondas estacionarias entre los péndulos verticales e invertidos	45
6.3. Un modelo sencillo para un frente que conecte ondas estacionarias.	46
6.4. Ondas localizadas disipativas	52
6.5. Conclusiones	56
7. Origen del fenómeno <i>pinning-depinning</i> en patrones monoestables con advección	57
7.1. Introducción	57
7.2. <i>Pinning-depinning</i> en un modelo prototipo de patrones	58
7.3. Verificación en un sistema experimental	63
7.4. Conclusiones	64
8. Conclusion	65
9. Referencias	68

10. Anexos	72
10.1. Anexo A	72
10.2. Anexo B	79
10.3. Anexo C	91

1. Introducción

1.1. Introducción general

En la naturaleza existe gran cantidad de sistemas fuera del equilibrio [1, 2, 3]. Esto significa que permanentemente están recibiendo y disipando energía, manteniéndose fuera del equilibrio termodinámico. Esta situación genera fenómenos de alta complejidad, donde muchas veces las condiciones microscópicas son irrelevantes [1]. Dicho de otra forma, la física subyacente no es fundamental para entender estos fenómenos. Al contrario, son las leyes macroscópicas aquellas que gobiernan la evolución de los sistemas. La física no lineal se caracteriza por estudiar este tipo de fenómenos, .

Los sistemas fuera del equilibrio suelen exhibir auto-organización con el fin de minimizar energía o momentum [1]. De esta forma, se generan patrones, ondas y otras estructuras complejas. A estos fenómenos se les denomina robustos, debido a que existen en diversos contextos sin tener variaciones cualitativas al aplicarse pequeñas diferencias en los parámetros del sistema observado.

En la mecánica, la inyección y disipación de energía resulta fundamental para poder tener control sobre los sistemas. Una manera natural de inyectar energía es por medio de forzamiento a frecuencias propias del sistema. También es posible hacerlo mediante forzamiento paramétrico, al variar alguno de los parámetros del sistema en el tiempo o el espacio [4].

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Estudiar diversos fenómenos generados a partir del forzamiento de alta frecuencia, enfocado desde el punto de vista de la física no lineal.

1.2.2. Objetivos específicos

- Estudiar el fenómeno de resonancia paramétrica efectiva en un sistema simple. Es decir, entender la resonancia producida por un forzamiento de alta frecuencia.
- Entender, predecir y caracterizar la inestabilidad espacial surgida en un sistema unidimensional de osciladores acoplados.
- Comprender el fenómeno de bloqueo-desbloqueo de ondas estacionarias generadas por un forzamiento a alta frecuencia.
- Extender el entendimiento del fenómeno bloqueo-desbloqueo para sistemas que presenten patrones monoestables con advección.

2. Marco Conceptual

2.1. Forzamiento y Resonancia

El forzamiento y la resonancia han sido estudiados durante muchos años. El mismo Galileo dedicó parte de su vida a investigar este fenómeno [5]. El forzamiento consiste en entregar energía a un

sistema. Este traspaso puede ser a un solo cuerpo, como es el caso de un péndulo [6], o a un sistema más complejo, como lo es una cadena de péndulos o un cristal líquido [7]. La resonancia es la amplificación de un modo de oscilación. Esto sucede al maximizar la energía recibida por un oscilador por efecto del forzamiento. Dicho de otra manera, la resonancia consiste en aplicar una fuerza relativamente pequeña (equivalente a poca inyección de energía), de forma periódica, para generar una gran amplitud de movimiento [4]. Un ejemplo sencillo de forzamiento es un péndulo al cual se le aplica una fuerza periódica como se ilustra en la figura 1. Otro ejemplo sencillo y presente en la vida cotidiana es un adulto empujando a un niño pequeño en un columpio como se puede apreciar en la figura 2.

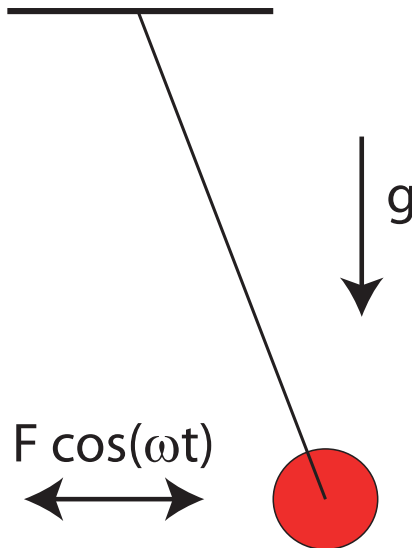


Figura 1: Imagen de un péndulo forzado, este está formado por una masa e hilo ideales. El péndulo está sujeto a una fuerza periódica $F \cos(\omega t)$ y a la gravedad g .



Figura 2: Imágenes de adultos empujando niños en un columpio.

Con el fin comprender lo descrito anteriormente, consideremos un oscilador armónico, de frecuencia ω_0 , donde x da cuenta del desplazamiento del oscilador con respecto a su largo natural, agregando un forzamiento externo oscilatorio de frecuencia ω_f . Como se ilustra en la siguiente ecuación,

la variable satisface

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f \cos(\omega_f t + \beta),$$

donde f es la amplitud de la fuerza de forzamiento y β una fase que depende del tiempo inicial.

Además se puede escribir la misma ecuación de forma análoga:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_1 e^{i\omega_f t} + f_2 e^{-i\omega_f t}, \quad (1)$$

donde $f_1 = f_2^* = f e^{i\beta} / 2$.

De esta forma, la solución de la ecuación (1) es la solución homogénea x_h más la solución particular x_p , las cuales tienen la forma

$$x_h = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t} = a \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

$$x_p = \frac{f_1 e^{i\omega_f t} + f_2 e^{-i\omega_f t}}{\omega_0^2 - \omega_f^2} = \frac{f \cos(\omega_f t + \beta)}{\omega_0^2 - \omega_f^2},$$

donde α y a están dadas por las condiciones iniciales. Luego

$$x = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t} + \frac{f_1 e^{i\omega_f t} + f_2 e^{-i\omega_f t}}{\omega_0^2 - \omega_f^2}$$

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{f \cos(\omega_f t + \beta)}{\omega_0^2 - \omega_f^2}. \quad (2)$$

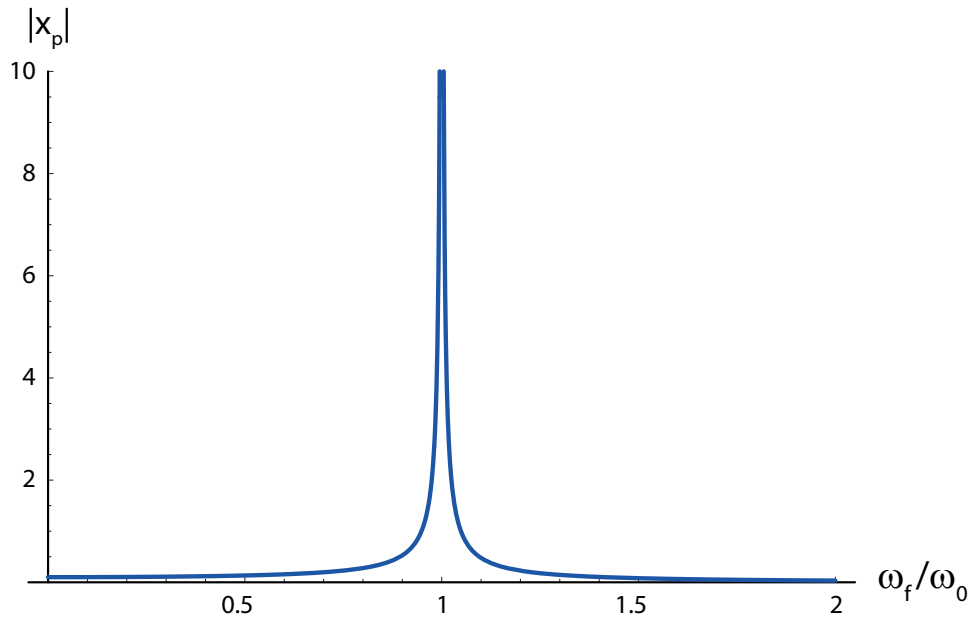


Figura 3: Máxima amplitud de x_p con $f/\omega_0 = 0.1$.

Se puede observar que la amplitud de la solución particular, usualmente llamada respuesta, crece rápidamente al acercar ω_f a ω_0 . En efecto, esto permite entender que la solución particular tiene

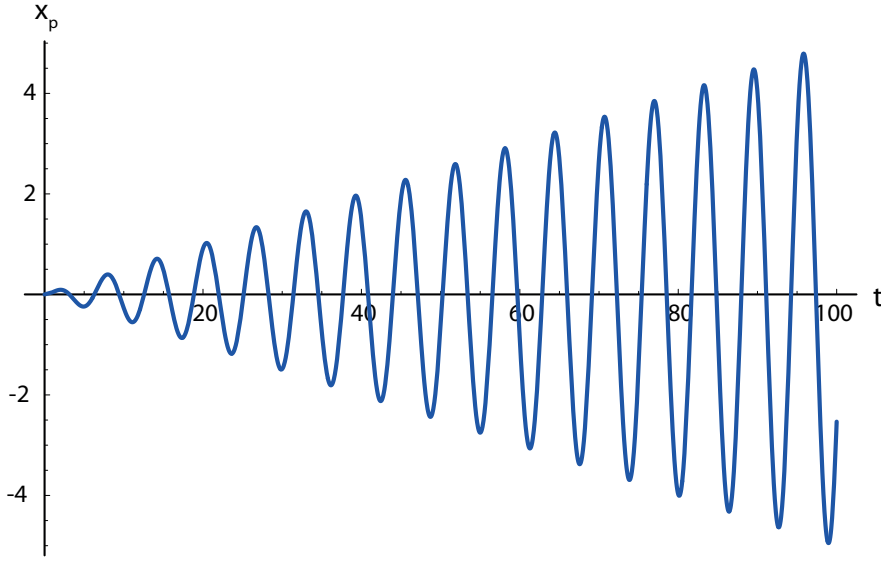


Figura 4: $x_r(t)$, con $\omega_0 = 1$, $f = 0.1$, $a = 0.001$ y sin fases.

una magnitud que tiende a infinito cuando las frecuencias son iguales. A esto se llama comúnmente resonancia.

En la figura 3, es posible apreciar el crecimiento de la amplitud de la respuesta al acercarse ω_f a ω_0 . Sin embargo, sabemos que, físicamente no puede divergir de forma instantánea, por esto se sugiere una solución, para el caso $\omega_f = \omega_0$, de la forma

$$x = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t} + \frac{f_1 e^{i\omega_f t} - f_1 e^{i\omega_0 t} + f_2 e^{-i\omega_f t} - f_2 e^{-i\omega_0 t}}{\omega_0^2 - \omega_f^2}.$$

La solución anterior no está definida cuando las frecuencias son iguales. Luego, es necesario evaluar el límite cuando existe resonancia, de esta manera se puede obtener el resultado siguiente:

$$x_r = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t} + t \left(\frac{f_1 e^{i\omega_0 t} - f_2 e^{-i\omega_0 t}}{2\omega_0} \right),$$

$$x_r = a \cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{ft \sin(\omega_0 t + \beta)}{2\omega_0}. \quad (3)$$

De esta forma, se ha podido comprender que la amplitud de las oscilaciones crece linealmente con el tiempo, luego se puede considerar que la solución diverge. En la figura 4, se puede observar cómo varía la respuesta en función del tiempo.

El aumento continuo de la amplitud cuando $\omega_f = \omega_0$ se produce porque la energía inyectada promedio es mayor que 0. Con el fin de comprobar lo anterior, se multiplicará la ecuación (1) por \dot{x}_r (obtenido de (3)), para luego escribirla como la derivada de la energía $E = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x^2}{2}$.

Se considerará, para simplificar los cálculos, las fases $\beta = 0$ y $\alpha = 0$. Luego

$$\ddot{x}_r \dot{x}_r + \omega_0^2 x_r \dot{x}_r = f \cos(\omega_0 t) \dot{x}_r$$

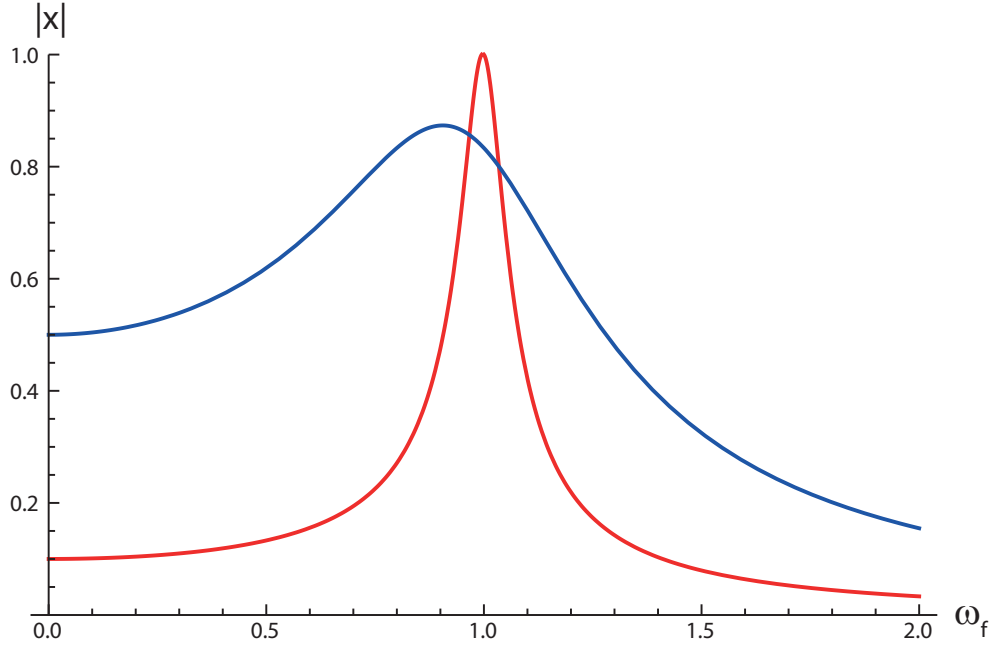


Figura 5: Amplitud máxima para un t inicial suficientemente grande con $\omega_0 = 1$. La curva roja es para los parámetros $f = 0.1$ y $\mu = 0.1$. La curva azul es para los parámetros $f = 0.5$ y $\mu = 0.6$.

es equivalente a

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}_r^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x_r^2}{2} \right) = f \cos(\omega_0 t) \dot{x}_r,$$

siendo $\frac{dE}{dt}$ la energía inyectada. Al sacar promedio en el tiempo,

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle \equiv \frac{1}{2t} \int_0^t f \cos(\omega_0 t') \dot{x}_r dt',$$

y al tomar la integral en n períodos, con $t = \frac{2\pi n}{\omega}$ suficientemente grande, se obtiene

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{f^2 t}{16}. \quad (4)$$

Lo que significa que la inyección promedio de E crece linealmente, esto se traduce en que la amplitud de la oscilación crecerá indefinidamente de forma lineal.

Es importante mencionar que en presencia de amortiguamiento μ , la solución será de la forma:

$$x = A_1 e^{-(\mu + \sqrt{\mu^2 - 4\omega_0^2})t/2} + A_2 e^{-(\mu - \sqrt{\mu^2 - 4\omega_0^2})t/2} + \frac{f \cos(t\omega_f + \phi)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + \mu^2 \omega_f^2}}. \quad (5)$$

Es claro que con el paso del tiempo los dos primeros términos de (5) convergen a 0, por lo que el único relevante para tiempos suficientemente grandes es el último (la solución particular). En este caso, la resonancia no diverge y tampoco decae, como sucede con los otros términos en presencia de viscosidad. De esta manera, su máximo no se ubica cuando la frecuencia de forzamiento es igual a la frecuencia natural del sistema. En la figura 5, se muestra la amplitud máxima de las oscilaciones al variar ω_f en la presencia de amortiguamiento.

2.2. Osciladores con términos no lineales

Se ha explicado anteriormente que la resonancia se produce de acuerdo a la distancia a la que se encuentra la frecuencia natural de la frecuencia de forzamiento. Sin embargo, hemos considerado sólo una ecuación lineal, mientras que la mayoría de los osciladores físicos, como el ilustrado en la figura 1, son no lineales. En este subcapítulo, se buscará encontrar la frecuencia de oscilación de un oscilador al considerar el primer término no lineal [4]. Además el cálculo desarrollado será de utilidad para las próximas secciones.

De esta forma se considerará un péndulo. La ecuación de este será

$$\partial_{tt}\theta = -\omega_0^2 \sin(\theta). \quad (6)$$

Luego, para ángulos pequeños se puede expandir hasta orden cúbico, obteniendo

$$\partial_{tt}\theta = -\omega_0^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right). \quad (7)$$

Si bien para ángulos muy pequeños el término cúbico puede ser despreciable, es de interés en esta sección comprender qué genera este término no lineal en la solución de la ecuación. Despreciando el orden cúbico, el resultado para el ángulo es

$$\theta = \theta_0 e^{i\omega_0 t} + \theta_0^* e^{-i\omega_0 t},$$

donde θ_0 es un valor constante arbitrario que representa la amplitud y la fase de la oscilación. En el caso no lineal este tipo de solución no es correcta, por esto se permitirá que la amplitud sea una variable dependiente del tiempo, pero en forma más lenta que la oscilación original. Así la solución del ángulo se supondrá como

$$\theta = A(t)e^{i\omega_0 t} + A(t)^* e^{-i\omega_0 t} + W(A, t), \quad (8)$$

con A pequeño, W mucho menor que A y las derivadas temporales de A cada vez más pequeñas. Dicho de otra forma, la amplitud sigue siendo pequeña y sus variaciones son lentas. Al utilizar el *ansatz* anterior en la ecuación (7), y despreciando los términos muy pequeños, se puede obtener

$$(\partial_{tt} + \omega_0^2)W = (-2i\omega_0 \partial_t A + \frac{\omega_0^2}{2} A |A|^2) e^{i\omega_0 t} + \frac{\omega_0^2}{6} A^3 e^{3i\omega_0 t} + c.c.,$$

de donde se puede definir el operador $L = \partial_{tt} + \omega_0^2$ que se aplica a la corrección W . De esta forma, se define el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f^*(t') g(t') dt', \quad (9)$$

con $T = 2\pi/\omega_0$. Es importante recordar que el operador adjunto de L (L^+) es aquel que cumple $\langle f, Lg \rangle = \langle L^+ f, g \rangle$, de esta forma $L = L^+$ a lo que se le llamará auto-adjunto. Los elementos que

pertenecen al Ker de L^+ son $\{e^{i\omega_0 t}, e^{i\omega_0 t}\}$, esto significa que al realizar un producto punto que incluya uno de estos elementos y al operador L^+ o L el resultado será siempre nulo. Si se considera $\langle f | = e^{i\omega_0 t}$ y $|g\rangle = (\partial_{tt} + \omega_0^2)W = (-2i\omega_0\partial_t A + \frac{\omega_0^2}{2}A|A|^2)e^{i\omega_0 t} + \frac{\omega_0^2}{6}A^3 e^{3i\omega_0 t} + c.c$, al utilizar el producto interno entre $\langle f |$ y $|g\rangle$ se deduce que a la ecuación resultante es

$$\partial_t A = -i\frac{\omega_0}{4}A|A|^2. \quad (10)$$

A este procedimiento se le llama condición de solubilidad o Alternativa de Fredholm [2].

De la ecuación (10) se puede concluir que la amplitud A no es constante. Al escribir la representación polar de $A = Re^{i\phi}$, donde R representa el módulo y ϕ la fase de A , se puede reescribir

$$\partial_t R + iR\partial_t \phi = -i\frac{\omega_0}{4}R^3.$$

De aquí se puede concluir que, separando la ecuación en parte real e imaginaria, el módulo de A es constante. Sin embargo, la fase varía de forma constante en el tiempo. De esta forma

$$\partial_t \phi = v_0 = -\frac{\omega_0}{4}R^2.$$

Luego, a primer orden, el valor del ángulo es

$$\theta = A_0 e^{i(\omega_0 + v_0)t},$$

donde A_0 está definido por las condiciones iniciales del problema, ω_0 es la frecuencia natural y v_0 es el desfase con la frecuencia natural producto de las no linealidades del sistema. Se puede concluir que la amplitud de las oscilaciones generan una diferencia en el período que crece como el módulo de la amplitud al cuadrado. Como se ilustra en la figura 6, una amplitud máxima en la oscilación mayor a 2.0 puede generar cerca de catorce períodos en 150 unidades de tiempo, mientras que una oscilación del orden de 0.2 puede generar cerca de 24 períodos en el mismo tiempo, lo que permite confirmar que la amplitud de las oscilaciones puede generar cambios en el período debido a los términos no lineales en la ecuación de partida.

2.3. Resonancia en osciladores no lineales

Los términos no lineales, en un oscilador forzado, pueden generar fenómenos más complejos que el simple cambio en la frecuencia del sistema. En efecto se estudiará la posibilidad de tener dos soluciones estables distintas para este caso [4]. Para esto se presentará un péndulo forzado, dejando hasta los términos cúbicos. De esta forma el modelo a considerar será

$$\partial_{tt}\theta = -\omega_0^2\left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right) - \mu\partial_t\theta + fe^{i\omega t} + f^*e^{-i\omega t}, \quad (11)$$

donde ω_0 es la frecuencia natural del sistema, μ da cuenta de la disipación y $fe^{i\omega t} + f^*e^{-i\omega t}$ es el forzamiento externo. Al igual que en el subcapítulo de oscilaciones no lineales, se considera

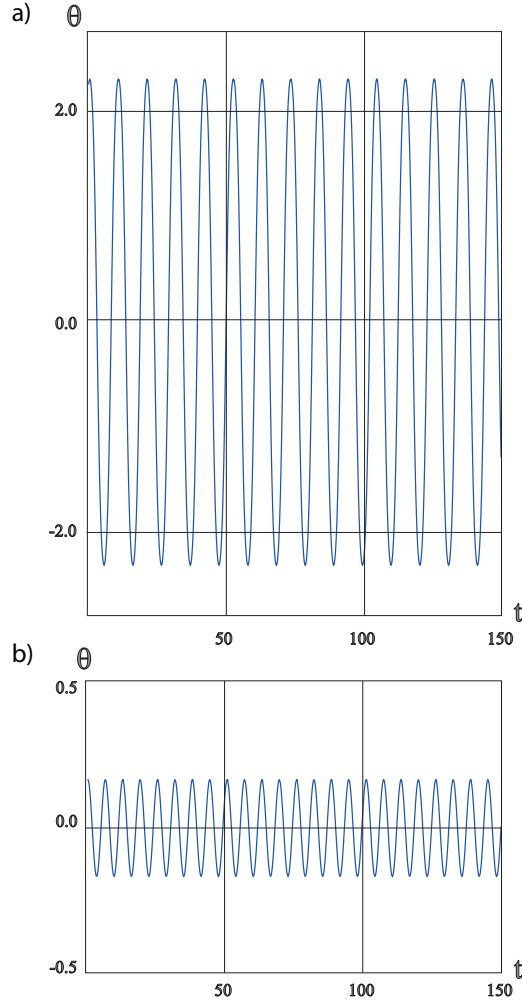


Figura 6: Los gráficos muestran la simulación numérica para un péndulo simple, sin roce, con dos condiciones iniciales distintas. Ambas simulaciones se realizaron bajo los mismos parámetros del modelo (6), donde $\omega_0 = 1$.

nuevamente el *ansatz* (8) con las mismas condiciones sobre la amplitud, es decir $\theta = A(t)e^{i\omega_0 t} + A(t)^*e^{-i\omega_0 t} + W(A, t)$. Volviendo a considerar el producto interno (9), al aplicar la condición de solubilidad, se puede obtener la dinámica para la amplitud

$$\partial_t A = -i\frac{\omega_0}{4}A|A|^2 - \frac{\mu}{2}A + \frac{f}{2\omega_0}e^{i\nu t}, \quad (12)$$

donde $\nu = \omega - \omega_0$. La ecuación (12) sólo es válida cuando $\nu \ll \omega_0$. Ahora bien, si se realiza la rotación $A = Be^{i\nu t}$, la ecuación (12) se transforma en

$$\partial_t B = -i\nu B - i\frac{\omega_0}{4}B|B|^2 - \frac{\mu}{2}B + \frac{f}{2\omega_0}. \quad (13)$$

Considerando que $f = f_0 e^{i\delta}$, donde f_0 es el módulo y δ es la fase del forzamiento, se puede reescribir $A = Re^{i\phi}$, obteniendo una ecuación para la fase y el módulo de la amplitud:

$$\partial_t R + iR\partial_t \phi = -i\nu R - i\frac{\omega_0}{4}R^3 - \frac{\mu}{2}R + \frac{f}{2\omega_0}\cos(\delta - \phi) + i\frac{f}{2\omega_0}\sin(\delta - \phi).$$

Al definir la fase como $\eta = \phi - \delta$ y separando entre parte real e imaginaria se obtiene

$$\partial_t R = -\frac{\mu}{2}R + \frac{f_0}{2\omega_0}\cos(\eta)$$

y

$$R\partial_t \eta = -\nu R - \frac{\omega_0}{4}R^3 - \frac{f_0}{2\omega_0}\sin(\eta).$$

Si se busca la solución estacionaria para la fase y el modulo se tiene que

$$f_0\cos(\eta) = \mu\omega_0 R$$

y

$$f_0\sin(\eta) = -2\omega_0\nu R - \frac{\omega_0^2}{2}R^3,$$

lo que nos permite obtener la ecuación sólo para R

$$f_0^2 = (2\omega_0\nu R + \frac{\omega_0^2}{2}R^3)^2 + \mu^2\omega_0^2 R^2. \quad (14)$$

La ecuación (14) es de orden cúbica en R^2 , lo que permite decir que pueden llegar a existir 3 soluciones de R siempre positivo. En la figura 7, se puede ver como varía de 1 a 3 soluciones al cambiar el f , pues al aumentar la magnitud de la inyección se aumenta el tamaño permitido a la oscilación, lo que hace relevante los términos no lineales. De esta manera, cuando f es pequeño existe sólo una solución, por lo que el resultado es cualitativamente el mismo que en el oscilador lineal. Sin embargo, cuando f aumenta, emergen nuevos equilibrios, lo que es un fenómeno debido a los términos no lineales de la ecuación. Por lo anterior el sistema exhibe coexistencia entre diferentes equilibrios como se observa en la figura 7 a) y b). Cuando existen 3 soluciones distintas al menos una debe ser un equilibrio inestable. Por continuidad se puede concluir que siempre serán estables las que tienen el mayor y menor R , dejando inestable a la solución de R intermedio.

Con los resultados obtenidos en este subcapítulo, es posible concluir que la inyección constante de energía, en conjunto con las no linealidades del sistema, pueden generar la aparición de fenómenos más complejos e interesantes que lo que se obtiene con cada uno de los resultados por sí solos, tales como la coexistencia de equilibrios estables.

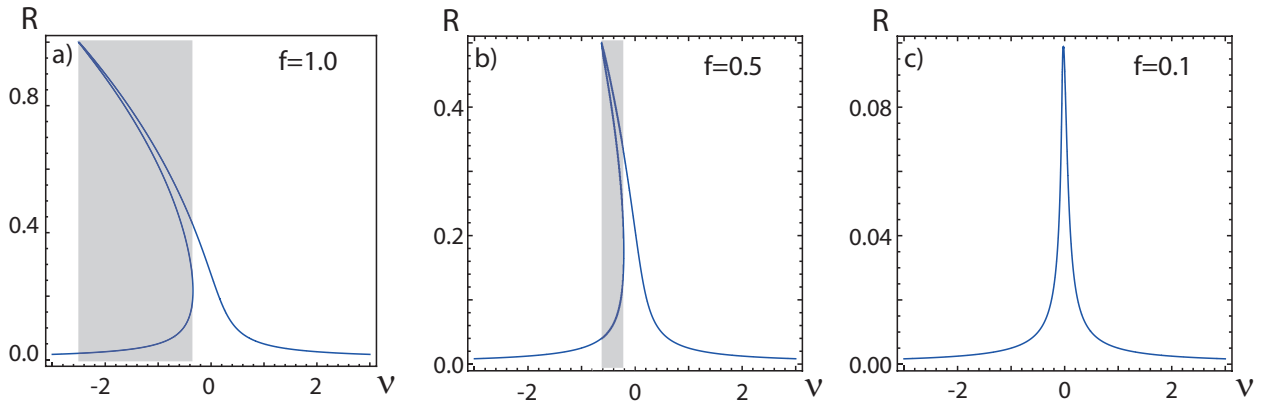


Figura 7: Solución de R en función de v para la ecuación (14), con $\omega_0 = 10$, $\mu = 0.01$ y tres valores diferentes de f . El área oscurecida corresponde a la zona donde existen 3 soluciones.

2.4. Forzamiento y Resonancia Paramétrica

El tipo de forzamiento estudiado en la sección anterior no es el único que genera algún tipo de resonancia o fenómeno de amplificación de la respuesta. En esta sección, se estudiará otro tipo de forzamiento: el forzamiento paramétrico. Se denomina forzamiento paramétrico a aquella inyección de energía que puede entenderse como una variación de los parámetros [4]. Esta variación podría ser en el tiempo o en el espacio. Un ejemplo de este tipo de forzamiento lo constituye un péndulo, cuyo pivote se mueve sobre el eje vertical de forma armónica en el tiempo, tal como se ilustra en la figura 8. Un ejemplo de la vida cotidiana es una persona jugando en un columpio, inyectando energía al mover sus piernas en forma sincronizada con su frecuencia natural, tal como se ilustra en la figura 9.

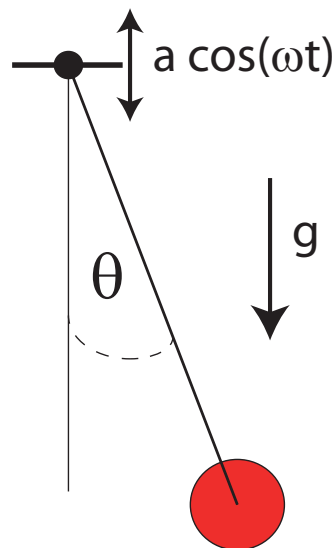


Figura 8: Ilustración de un péndulo forzado paramétricamente, como en el modelo (15).

Siendo a la amplitud normalizada del desplazamiento del pivote del péndulo, μ la disipación, ω_0 la frecuencia natural del péndulo y ω la frecuencia del desplazamiento del pivote, la ecuación para un péndulo como el de la figura 8 es



Figura 9: Imágenes de dos personas balanceándose solos en un columpio.

$$\ddot{\theta} = -(a\omega^2 \cos(\omega t) + \omega_0^2) \sin(\theta) - \mu \dot{\theta}. \quad (15)$$

Si se considera que el forzamiento y la disipación son pequeños, se pueden realizar cálculos analíticos que permiten comprender la resonancia paramétrica. De esta forma la ecuación (15), para ángulos pequeños, se puede aproximar por

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \theta + \frac{\omega_0^2}{6} \theta^3 - a\omega^2 \cos(\omega t) \theta + -\mu \dot{\theta}. \quad (16)$$

En (16) se ilustra la ecuación de un oscilador armónico junto con correcciones por la disipación, la inyección de energía y un término cúbico. En este caso se volverá a utilizar como *ansatz*

$$\theta = A(t)e^{i\omega_0 t} + A(t)^* e^{-i\omega_0 t} + W(A, t),$$

donde A es pequeño, W es mucho menor que A y las variaciones temporales de A son lentas. Luego, al introducir el *ansatz* en la ecuación y despreciando los términos más pequeños se obtiene

$$\begin{aligned} (\partial_{tt} + \omega_0^2)W &= (-2i\omega_0 \partial_t A + \frac{\omega_0^2}{2} A |A|^2 - i\mu \omega_0 A - \frac{a\omega^2}{2} A^* e^{2iv\omega_0 t}) e^{i\omega_0 t} \\ &+ \frac{\omega_0^2}{6} A^3 e^{3i\omega_0 t} + c.c., \end{aligned}$$

donde $v = (\omega - 2\omega_0)/2\omega_0$.

Se utilizará nuevamente el producto interno definido en (9) para un período $T = 2\pi/\omega_0$. Al aplicar la condición de solubilidad, considerando que $v \ll 1$, se puede obtener la dinámica para la amplitud

$$\partial_t A = -i\frac{\omega_0}{4} A |A|^2 - \frac{\mu}{2} A + i\frac{a\omega^2}{4\omega_0} A^* e^{2iv\omega_0 t}. \quad (17)$$

Realizando el cambio de variable $A = B\sqrt{\frac{4}{\omega_0}} e^{iv\omega_0 t}$, la ecuación (17) se transforma en

$$\partial_t B = -i\nu\omega_0 B - \frac{\mu}{2}B + i\frac{a\omega^2}{4\omega_0}B^* - iB|B|^2. \quad (18)$$

La deducción de esta ecuación es válida en el límite cuasi reversible y cerca de la región de resonancia [8, 9]. Es decir, el resultado (18) es certero cuando $A \ll 1, a \ll 1, \mu \ll 1$ y $\nu \ll 1$. De esta forma se pueden buscar las soluciones estacionarias para B , donde la solución trivial es $B = 0$. Para el resto de las posibles soluciones se utilizará el cambio de variable $B = Re^{i\phi}$. Con el fin de encontrar estas soluciones, puede ser útil reescribir (18), separando en parte real e imaginaria. De esto se obtendrá

$$\mu R = \frac{a\omega^2}{2\omega_0} R \sin(2\phi)$$

y

$$R^3 + \nu\omega_0 R - \frac{a\omega^2}{4\omega_0} R \cos(2\phi) = 0.$$

Con estos resultados se puede concluir que

$$\sin(2\phi) = \frac{2\mu\omega_0}{a\omega^2}$$

y

$$R = \sqrt{-\nu\omega_0 \pm \sqrt{\frac{a^2\omega^4}{16\omega_0^2} - \frac{\mu^2}{4}}},$$

dando un total de hasta 5 soluciones considerando la solución $R = 0$ (las soluciones para $R \neq 0$ tienen dos ϕ distintos).

En la figura 10, se puede observar el número de soluciones en el espacio de parámetros $a - \omega$. La zona (A) está delimitada por $\nu > \sqrt{\frac{a^2\omega^4}{16\omega_0^2} - \frac{\mu^2}{4}}$ para $\nu > 0$ y por $\frac{a^2\omega^4}{16\omega_0^2} < \frac{\mu^2}{4}$ cuando $\nu < 0$, mientras que la zona (B) lo está por $\frac{a^2\omega^4}{16\omega_0^2} > \frac{\mu^2}{4}$ y por $\nu < -\sqrt{\frac{a^2\omega^4}{16\omega_0^2} - \frac{\mu^2}{4}}$. La zona (C) está limitada por $\nu^2 < \frac{a^2\omega^4}{16\omega_0^2} - \frac{\mu^2}{4}$. De esta forma en la zona (A) y (B) la solución $R = 0$ es estable, mientras que

en (C) es inestable. La solución $R = \sqrt{-\nu\omega_0 + \sqrt{1 - \frac{4\mu^2\omega_0^2}{a^2\omega^4}}}$ existe en (B) y (C), siendo siempre

estable. Por último la solución $R = \sqrt{-\nu\omega_0 - \sqrt{1 - \frac{4\mu^2\omega_0^2}{a^2\omega^4}}}$ existe sólo en (B), siendo esta una solución inestable. La estabilidad de estas soluciones son sencillas de obtener al separar en parte real e imaginaria de la amplitud B . En particular se mostrará el cálculo de estabilidad para la solución 0 en la sección 2.6

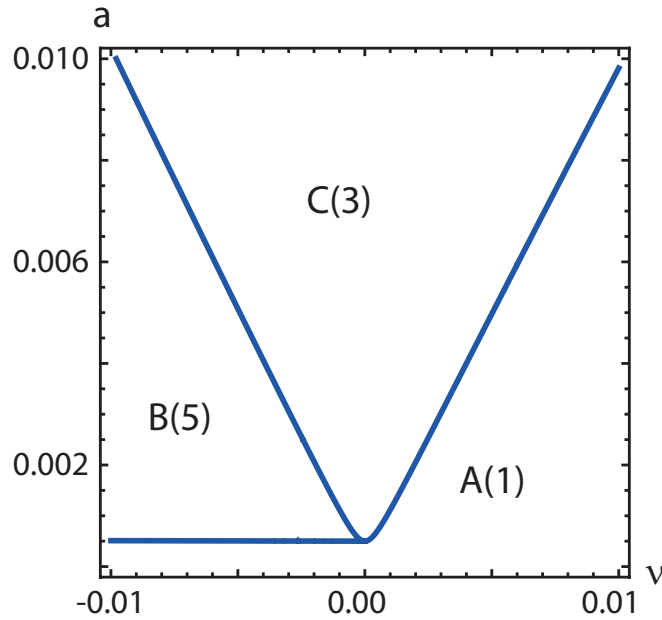


Figura 10: Diagrama para las soluciones de un péndulo forzado paramétricamente proveniente del modelo (18). Se consideraron los parámetros $\mu = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $\omega = 2\omega_0(1 + \nu)$.

Luego, se concluye que el forzamiento paramétrico puede generar resonancia paramétrica y traer consigo hasta 5 posibles soluciones estacionarias para un A , siendo sencillo establecer las regiones de existencia de las soluciones en el llamado “límite cuasi-reversible”, es decir en el límite con poca disipación e inyección de energía. Estas soluciones de A corresponden a ciclos límites del péndulo en torno a la posición vertical.

2.5. Efecto Kapitza

Anteriormente se estudió el efecto del forzamiento paramétrico a una frecuencia similar a la natural de un oscilador, generando una amplificación de la respuesta del sistema. Otra región interesante de explorar es aquella donde la frecuencia de forzamiento es mucho mayor que la natural del oscilador [4].

De esta forma se vuelve a considerar una ecuación como (15) para un péndulo forzado

$$\ddot{\theta} = -(a\omega^2 \sin(\omega t) + \omega_0^2) \sin(\theta) - \mu \dot{\theta}, \quad (19)$$

donde a es la amplitud normalizada del desplazamiento del pivote del péndulo, μ la disipación, ω_0 la frecuencia natural del péndulo y ω la frecuencia del desplazamiento del pivote. Esto se ilustra en la figura 8.

Para un forzamiento de alta frecuencia, con o sin disipación, se puede ver la estabilización del péndulo en la posición invertida, como también se puede mantener estable el péndulo en la posición vertical. En la figura 11, se puede observar el ángulo en función del tiempo para el péndulo en torno a la posición vertical, mientras que en la figura 12 se puede observar el ángulo en función del tiempo para el péndulo en la posición invertida. En ambos casos el sistema no tiene disipación. De acuerdo

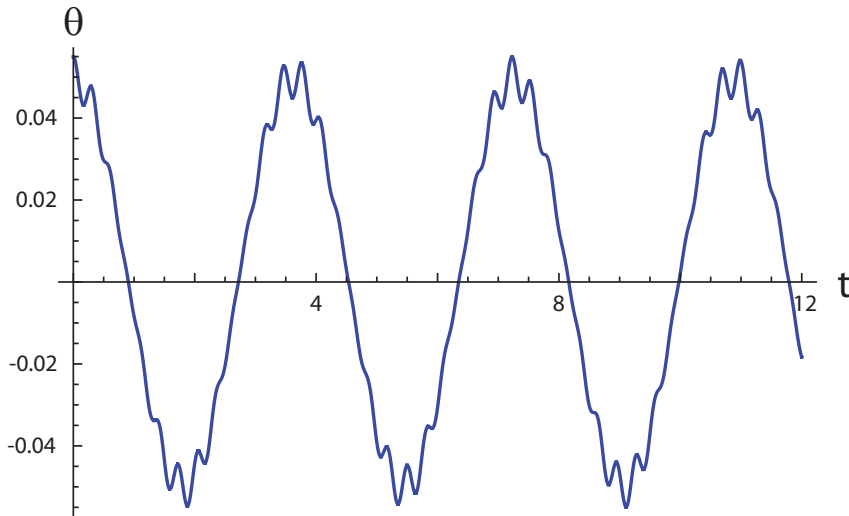


Figura 11: Diagrama ilustrativo para la evolución del ángulo en el modelo (19) en torno a la posición vertical. Se considera $\omega_0 = 1$, $\mu = 0$, $\omega = 20$ y $a = 0.1$.

a estas dos figuras, es posible concluir que el péndulo forzado a alta frecuencia posee al menos dos escalas temporales, una rápida y una lenta. Además, es factible inferir que la variable rápida (aquella con dependencia temporal en la escala rápida) es pequeña. De esta forma, se utilizará el *ansatz* de Kapitza [10]

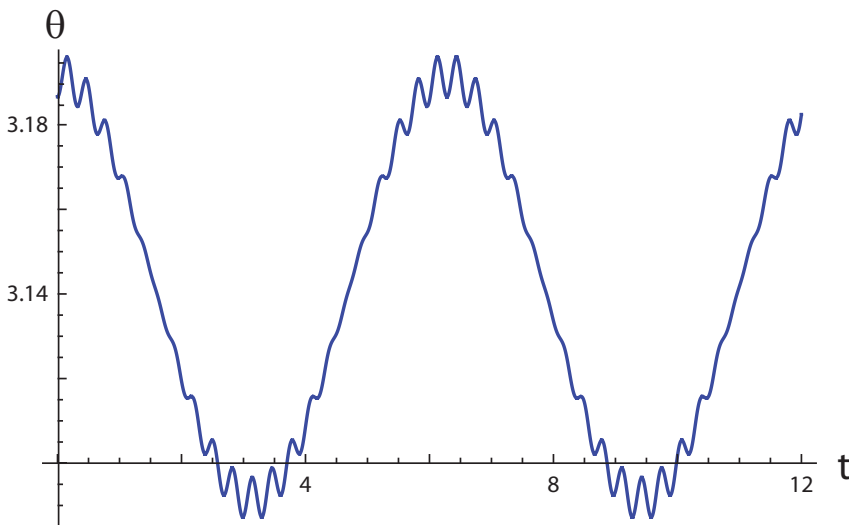


Figura 12: Diagrama ilustrativo para la evolución del ángulo en el modelo (19), en torno a la posición invertida. Se considera $\omega_0 = 1$, $\mu = 0$, $\omega = 20$ y $a = 0.1$.

$$\theta(t) = z(t) + y(t), \quad (20)$$

donde $y(t)$ será la variable rápida y pequeña, mientras que $z(t)$ será la variable lenta. De esta forma, al introducir el *ansatz* (20) en la ecuación (19) y despreciando términos más pequeños, se obtiene

$$\ddot{y} + \ddot{z} = -\omega_0^2 \sin(z) - \omega_0^2 \cos(z)y - a\omega^2 \sin(\omega t) \sin(z) - a\omega^2 \sin(\omega t) \cos(z)y - \mu \dot{z} - \mu \dot{y}. \quad (21)$$

En (21), cuando $\mu \ll \omega$, los términos más grandes son \ddot{y} y $a\omega^2 \sin(\omega t) \sin(z)$, lo que permite escribir una ecuación para los términos dominantes

$$\ddot{y} = -a\omega^2 \sin(\omega t) \sin(z). \quad (22)$$

Considerando que las escalas temporales de z e y son independientes (es decir que la variable z es mucho más lenta que y , por lo que no varía en su escala de tiempo), se puede obtener la solución para la variable rápida

$$y \approx a \sin(\omega t) \sin(z).$$

Introduciendo el resultado para y en la ecuación (21) y sacando promedio sobre un período rápido $T = 2\pi/\omega$, se puede obtener una ecuación para la dinámica de la variable lenta

$$\ddot{z} \approx -\omega_0^2 \sin(z) - \frac{a^2 \omega^2}{4} \sin(2z) - \mu \dot{z}, \quad (23)$$

donde la variable lenta z es equivalente a hablar de la variable promedio.

Definiendo la energía potencial para z

$$U = -\omega_0^2 \cos(z) - \frac{a^2 \omega^2}{8} \cos(2z), \quad (24)$$

se puede concluir que, cuando

$$\sqrt{2}\omega_0 < a\omega, \quad (25)$$

la posición invertida se vuelve estable, además aparecen dos nuevos equilibrios inestables. En la figura 13, se puede observar el potencial (24) que indica los equilibrios estables.

Es posible concluir que el forzamiento paramétrico no sólo genera resonancia, también puede generar nuevos equilibrios en el oscilador. Este resultado lo obtuvo por primera Stephenson en el año 1908 [11].

En el desarrollo de esta tesis, se estudiará como generar resonancia con un forzamiento de alta frecuencia.

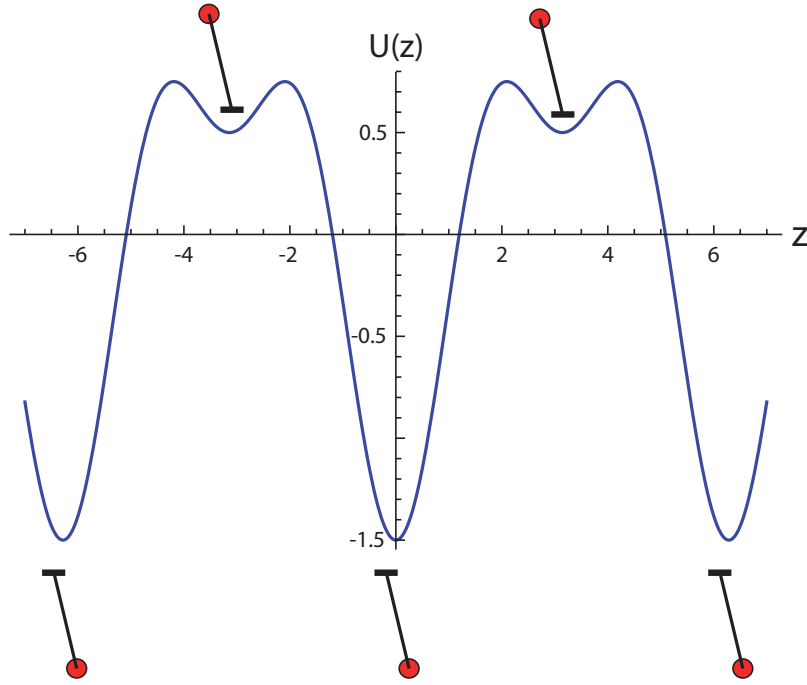


Figura 13: Diagrama ilustrativo para el potencial U , definido por (24), en función de z . Se considera $\omega_0 = 1$, $\omega = 20$ y $a = 0.1$.

2.6. Resonancia paramétrica extendida espacialmente

Previamente se ha explicado qué sucede con un péndulo forzado a alta frecuencia y a una frecuencia cercana a dos veces la frecuencia natural, sin embargo aún es necesario entender el comportamiento de un sistema constituido por muchos péndulos acoplados [9]. Para esto se considerará una cadena de péndulos forzada paraméricamente, donde los péndulos están acoplados entre sí por un resorte de torsión, y el forzamiento es debido a que el pivote de la cadena se desplace con un movimiento armónico, tal como se ilustra en la figura 14.

Se puede escribir la ecuación para este sistema de forma continua, con lo que se obtiene

$$\ddot{\theta} = -(a\omega^2 \cos(\omega t) + \omega_0^2) \sin(\theta) - \mu \dot{\theta} + \kappa \partial_{xx} \theta, \quad (26)$$

donde a es el desplazamiento normalizado del pivote de la cadena, ω es la frecuencia del forzamiento, ω_0 es la frecuencia natural de los péndulos, μ representa la disipación y κ es la constante que da cuenta del acoplamiento elástico (se considerará $\kappa = 1$, que es equivalente a normalizar en el espacio). Se puede observar que la ecuación (26) es igual a la ecuación (15), más el término producto del acoplamiento.

De una forma equivalente a la utilizada para obtener (18), utilizando como *ansatz*

$$\theta = \frac{2}{\sqrt{\omega_0}} A(x, t) e^{i\omega_0(1+\nu)t},$$

donde $\nu = (\omega - 2\omega_0)/2\omega_0$, se puede llegar a la dinámica para la amplitud A cuando $\mu, \nu, a \ll 1$. Lo anterior significa que la introducir el *ansatz* en (26) y despreciando los términos de orden superior,

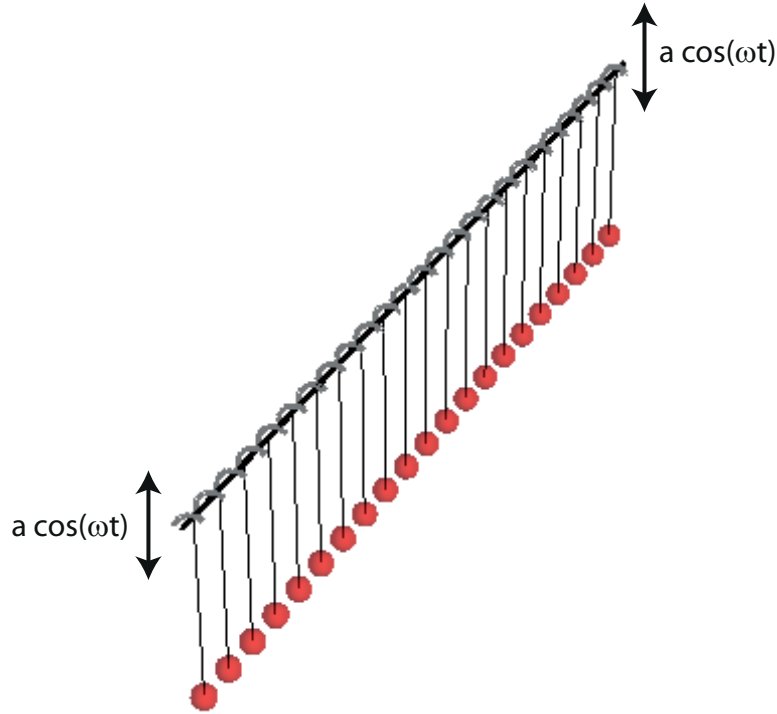


Figura 14: Figura ilustrativa para una cadena de péndulos forzados paraméricamente descrita por el modelo (26).

definiendo el mismo producto interno que en (9) con período $T = 2\pi/\omega_0$, al aplicar la condición de solubilidad se obtiene

$$\partial_t A = -i\nu\omega_0 A - \frac{\mu}{2}A + i\frac{a\omega^2}{4\omega_0}A^* - iA|A|^2 - i\partial_{xx}A. \quad (27)$$

La ecuación (27) tiene como soluciones estacionarias y homogéneas las mismas que (18), es decir si se escribe $A = Re^\phi$ las soluciones serán

$$\sin(2\phi) = \frac{2\mu\omega_0}{a\omega^2}$$

y

$$R = \sqrt{-\nu\omega_0 \pm \sqrt{\frac{a^2\omega^4}{16\omega_0^2} - \frac{\mu^2}{4}}}.$$

En esta ocasión, el estudio de estabilidad debe considerar el espacio. De esta manera, para la solución $A = 0$, se hará una pequeña perturbación

$$A(x,t) = u(x,t) + iv(x,t),$$

donde $|A| \ll 1$.

De esta modo, lienalizando en u y v , se puede obtener

$$\dot{u} + i\dot{v} = -iv\omega_0 u + v\omega_0 v - \frac{\mu}{2}u - i\frac{\mu}{2}v + i\frac{a\omega^2}{4\omega_0}u + \frac{a\omega^2}{4\omega_0}v - i\partial_{xx}u + \partial_{xx}v,$$

y separando en parte real e imaginaria se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{\mu}{2}u + (v\omega_0 + \partial_{xx} + \frac{a\omega^2}{4\omega_0})v \\ \dot{v} &= (-v\omega_0 - \partial_{xx} + \frac{a\omega^2}{4\omega_0})u - \frac{\mu}{2}v. \end{aligned}$$

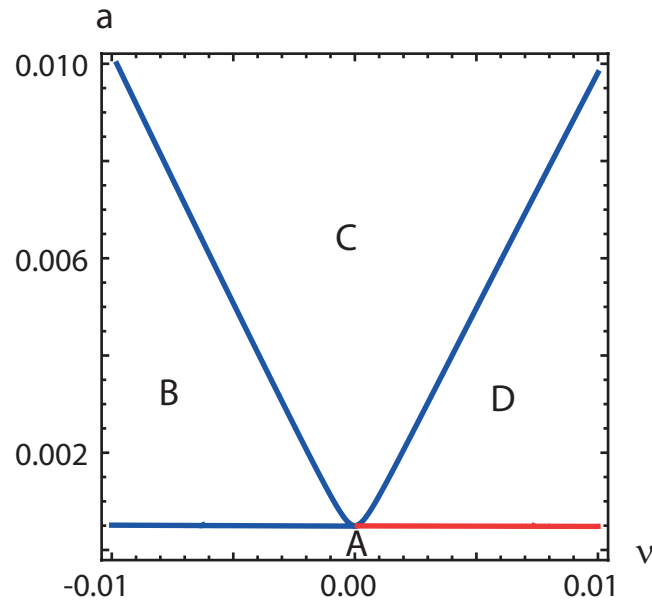


Figura 15: Diagrama para las soluciones de la cadena de péndulos forzados paraméricamente. Las curvas vienen de la existencia de equilibrios obtenidos en (27). Se consideraron los parámetros $\mu = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $\omega = 2\omega_0(1 + v)$.

Si se considera la perturbación de la forma

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{\lambda t + ikx}$$

se llega a la ecuación

$$\lambda \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{2} & (v\omega_0 - k^2) + \frac{a\omega^2}{4\omega_0} \\ -(v\omega_0 - k^2) + \frac{a\omega^2}{4\omega_0} & -\frac{\mu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{\lambda t + ikx},$$

de donde se obtienen los valores propios

$$\lambda_{\pm} = -\frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 \omega^4}{16 \omega_0^2} - (v \omega_0 - k^2)^2}. \quad (28)$$

Este resultado dice que los valores propios dependen de la longitud de onda con la que se perturban, luego es importante determinar el valor crítico de k que desestabilice primero la solución homogénea. El valor propio relevante para ver la inestabilidad será el mayor, por lo que sólo se analizará λ_+ . En la figura 16, se puede observar $\lambda_+(k)$ poco antes de volverse positivo, es decir antes de que la solución homogénea se vuelva inestable.

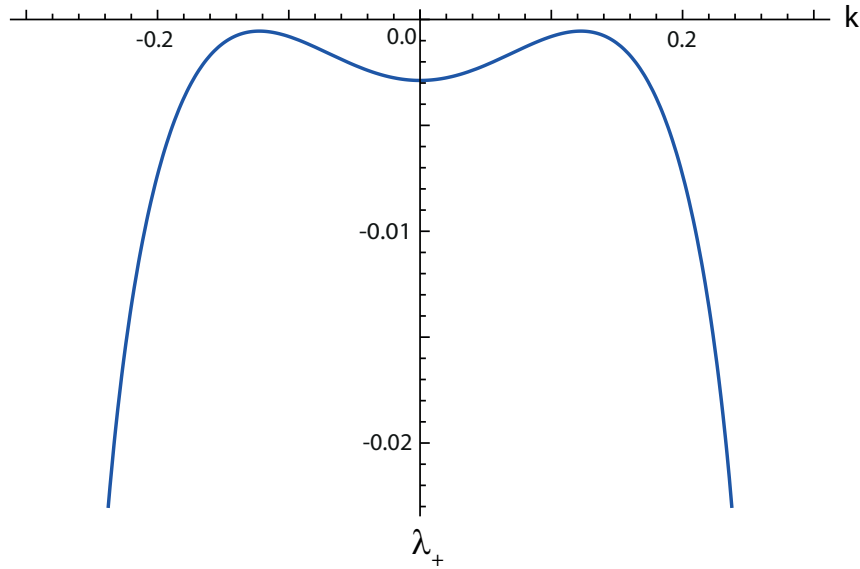


Figura 16: La curva representa $\lambda_+(k)$. Este valor fue obtenido de (28) para $\omega = 2.03$, $\mu = 0.1$, $\omega_0 = 1$ y $a = 0.48$.

Es evidente que cuando $v < 0$ el k_c es igual a 0, luego $\lambda_+ = -\frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 \omega^4}{16 \omega_0^2} - v^2 \omega_0^2}$. Para el caso en que $v > 0$ el k_c es igual a $\pm \sqrt{v}$, luego $\lambda_+ = -\frac{\mu}{2} + \frac{a \omega^2}{4 \omega_0}$.

De este modo el diagrama $v - a$ equivalente a la figura 10, pero que ahora incluye la zona (D), donde la solución $A = 0$ se vuelve inestable y surgen ondas estacionarias. Se puede observar este diagrama en la figura 15. En esta ocasión, la solución $A = 0$ es estable y única entre $a = 0$ y la primera recta, donde comienzan las zonas (B) y (D).

Es posible realizar el mismo cálculo para obtener la estabilidad de un solo péndulo. En este caso, se debe considerar $k = 0$, pues no hay espacio.

Por otro lado, numéricamente se puede comprobar que las ondas estacionarias son estables cuando la solución $A = 0$ se vuelve inestable. Se puede observar una ilustración de ondas estacionarias estables en la figura 17.

Además, se puede observar un diagrama espacio-temporal de las ondas estacionarias en la figura 18.

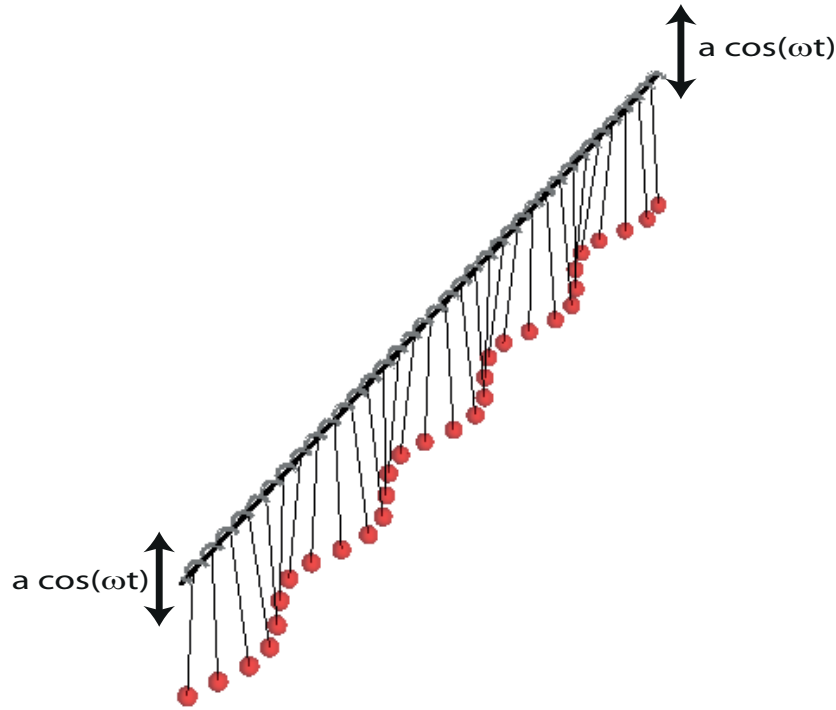


Figura 17: Figura ilustrativa para una cadena de péndulos descrita por el modelo (26). Los parámetros de la simulación fueron $\omega_0 = 1$, $\mu = 0.1$, $\omega = 2.1$ y $a = 0.0483$.

En el caso de un sistema de osciladores extendidos y forzados paraméricamente, se puede concluir que existe un umbral en el parámetro de forzamiento que permite la emergencia de ondas estacionarias. En particular, se ha caracterizado el umbral para el límite de baja disipación y baja inyección de energía.

Más adelante se buscará caracterizar el umbral para el caso general, incluyendo alta inyección y disipación.

2.7. Velocidad de un frente homogéneo

En el subcapítulo 2.5, se mostró que pueden coexistir en la misma región de parámetros dos estados estables (posición vertical e invertida), para un péndulo forzado paraméricamente. Esta coexistencia de estados estables puede darse en numerosos sistemas y modelos. En esta sección se considerará el caso donde en un sistema extendido exhibe dos estados estables, los cuales pueden conectarse, llamando a la solución que conecta dos estados frente. Por simplicidad se utilizará el modelo ϕ^4 [12]

$$\partial_t u = \eta + u - u^3 + \partial_{xx} u, \quad (29)$$

el cual puede tener dos soluciones homogéneas estables y una inestable o sólo una estable.

El modelo (29) puede conectar ambas soluciones estables, en particular para el caso $\eta = 0$ las soluciones estables serán $u = 1$ y $u = -1$, mientras que la solución inestable será $u = 0$.

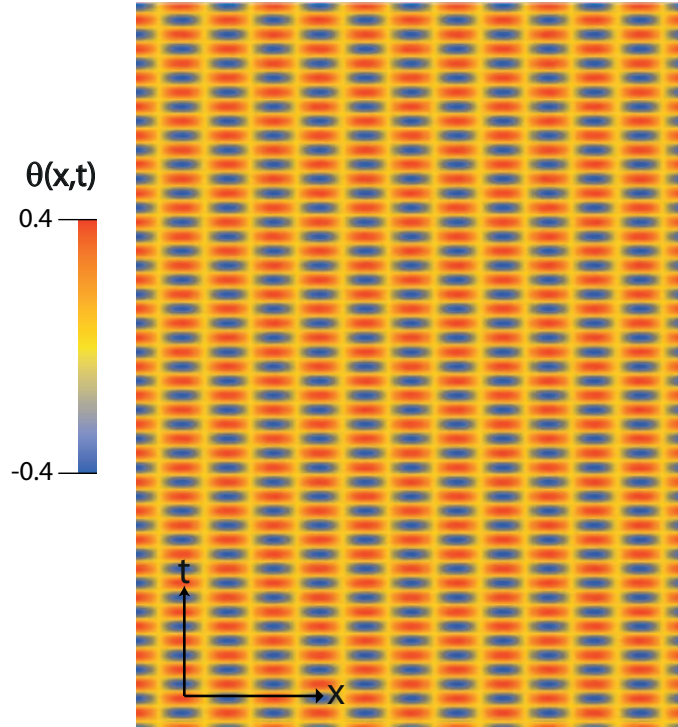


Figura 18: Diagrama espacio-temporal para una cadena de péndulos descrita por el modelo (26). Los parámetros de la simulación fueron $\omega_0 = 1$, $\mu = 0.1$, $\omega = 2.1$ y $a = 0.0483$.

Es posible encontrar una energía potencial sin espacio que generaría la dinámica del sistema sin acoplamiento. Esta energía potencial se define como

$$U = -\eta u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4}. \quad (30)$$

Luego se puede reescribir la dinámica para u como

$$\partial_t u = -\frac{\partial U}{\partial u} + \partial_{xx} u.$$

De este modo, al comprender que el potencial U tiene dos mínimos de energía que serán distintos si $\eta \neq 0$, se puede deducir que habrá un estado energéticamente más favorable que otro. En la figura 19, es posible observar el valor de $U(u)$ para cinco valores diferentes de η .

Dado lo anterior se concluye que, en un sistema extendido, un estado debe invadir al otro cuando existe diferencia de energía entre ellos. En este caso la diferencia de energía está dada por η .

En esta sección se estudiará, para simplificar los cálculos, el caso cuando $|\eta| \ll 1$. Así, se obtendrá primero la solución del frente para el caso $\eta = 0$. Este frente debe tener velocidad cero pues ambos estados tienen la misma energía. De esta forma, al imponer en la ecuación (29) que $\partial_t u = 0$, se puede obtener

$$u_k(x - x_0) = +\tanh\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{2}}\right), \quad (31)$$

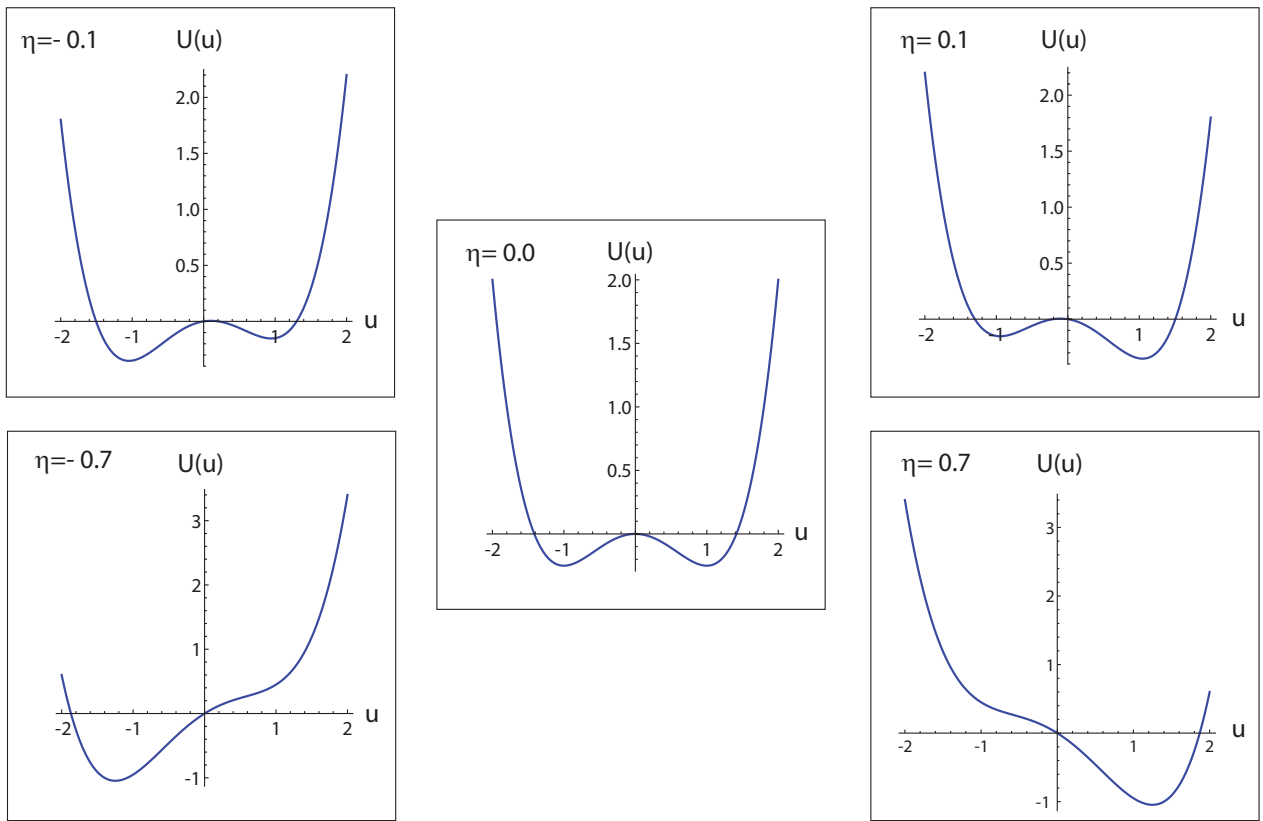


Figura 19: Potencial U de la fórmula (30) para cinco valores distintos de η indicados en las figuras.

y

$$u_a(x - x_0) = -\tanh\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{2}}\right), \quad (32)$$

donde la solución que parte en $-1(1)$ desde $-\infty(\infty)$ y va hasta $1(-1)$ en $\infty(-\infty)$ es $u_k(u_a)$. Además a x_0 se le llamará corazón del frente, el cual da cuenta de la posición donde el campo $u(x)$ cruza el cero. En la figura 20, se puede ver un ejemplo de un frente u_a .

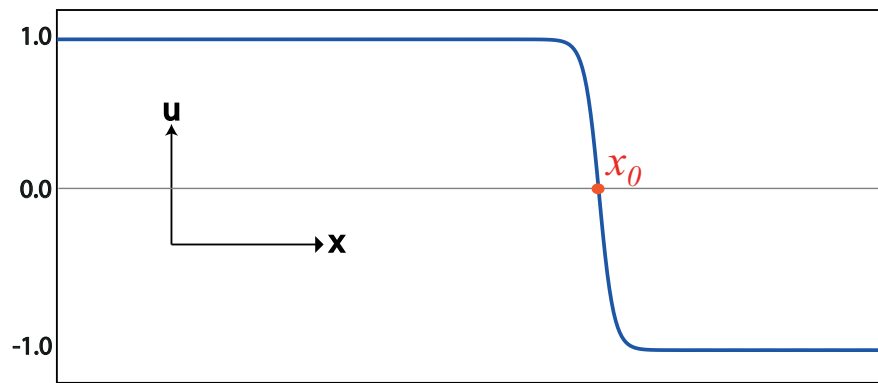


Figura 20: Campo $u(x, t)$ del modelo (29), con $\eta = 0$.

Ahora, si se considera η pequeño, es decir $|\eta| \ll 1$, se puede suponer perturbativo. Luego es correcto considerar el *ansatz*

$$u(x,t) = u_{k,a}(x - x_0(t)) + W(x, x_0), \quad (33)$$

donde W es una pequeña corrección y $\dot{x}_0 \ll 1$.

Introduciendo (33) en (29) y despreciando los términos más pequeños se obtiene

$$LW = -\dot{x}_0 \partial_x u_{k,a} - \frac{3}{2} \eta (1 - u_{k,a}^2),$$

donde $L = 1 - 3u_{k,a}^2 + \partial_{xx}$.

Definiendo el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x') g(x') dx',$$

se puede aplicar la condición de solubilidad para obtener la dinámica del corazón del frente [13]

$$\dot{x}_0 = -\frac{3}{\sqrt{2}} \eta.$$

En la figura 21, es factible observar la evolución del frente, donde efectivamente existe una velocidad constante.



Figura 21: Diagrama espacio-temporal para el campo $u(x,t)$ del modelo (29), con $\eta = -0.1$.

Se concluye que, para una pequeña diferencia de energía, la velocidad del frente es proporcional a esta que se ha denominado η . Luego, se puede inferir que para la cadena de péndulos, cuando existe un frente entre dos estados homogéneos estables (péndulos verticales e invertidos en el límite de Kapitza), el estado más estable (péndulos verticales) invadirá a los péndulos invertidos. Sin embargo, surge la interrogante de qué debe suceder cuándo existen ondas estacionarias.

3. Metodología

Para lograr los objetivos específicos definidos anteriormente se realizarán los siguientes pasos:

- Se estudiará un sistema forzado a alta frecuencia, que permita la existencia del fenómeno de resonancia paramétrica efectiva. Con el fin de comprender este fenómeno, primero se trabajará teóricamente siguiendo la estrategia de generalizada de Kapitza . Luego se aplicará la técnica usual de ecuaciones de amplitud para obtener las regiones de resonancia paramétrica. Se efectuarán simulaciones numéricas y experimentos para comprobar las predicciones teóricas.
- Se caracterizará la inestabilidad producida al aplicar un forzamiento paramétrico de alta frecuencia a un sistema de osciladores acoplados en una dimensión. Para lo anterior, se buscará teóricamente la curva de inestabilidad mediante un método de expansión modal. Posteriormente, se calculará el crecimiento de las ondas estacionarias generadas después de la inestabilidad, utilizando la estrategia de formas normales. Con el fin de confirmar los resultados teóricos se llevarán a cabo simulaciones numéricas.
- Se comprenderá el fenómeno de bloqueo-desbloqueo de ondas estacionarias generadas por un forzamiento de alta frecuencia. Con el fin de comprender este fenómeno, se propondrá un modelo más sencillo que permita estudiarlo. Se mostrará que el sistema forzado a alta frecuencia que genera ondas estacionarias tiene el mismo tipo de comportamiento que el modelo propuesto. Se realizarán cálculos analíticos para predecir la región de bloqueo de este. Se obtendrá de forma usual la velocidad del frente con estrategias perturbativas y aplicando la condición de solubilidad. Luego, se utilizará una estrategia tipo Kapitza para encontrar la velocidad promedio. También se estudiará la aparición de estructuras localizadas que conectan ambos estados. Se comprobarán los resultados teóricos numéricamente .
- Con el fin de extender el entendimiento del fenómeno de bloqueo-desbloqueo, se estudiará un sistema que presenta un patrón monoestable en presencia de una fuerza de arrastre. En específico se estudiará un modelo con estas características, encontrando su ecuación de amplitud enmendada. De esta ecuación se concluirá la existencia de una región de bloqueo y su velocidad promedio cerca de esta. Se confirmarán las predicciones teóricas con resultados numéricos. También se estudiará un sistema experimental que permita comprobar el fenómeno.

4. Resonancia paramétrica efectiva

4.1. Introducción

Como se mencionó en el marco conceptual, la resonancia es un fenómeno bien conocido y relevante en diferentes sistemas físicos, desde de la mecánica clásica a la cuántica, de lo microscópico a lo macroscópico y de lo determinista a lo estocástico [14, 15, 16]. En esta ocasión, se considerarán sistemas con forzamiento paramétrico. Es decir, aquellos en donde el forzamiento se genera por medio de la variación de parámetros en el tiempo o el espacio. La amplificación de la oscilación es producto de este forzamiento. Ya se ha explicado en el capítulo 2.4 que esto es válido para el límite de baja disipación, baja inyección de energía y a una frecuencia cercana a dos veces la frecuencia

natural del sistema.

El efecto Kapitza, explicado en 2.5, permite entender como mediante el forzamiento paramétrico se logra generar un oscilador efectivo donde antes no existía. Como ejemplo de esto se estudió la estabilidad para el péndulo en la posición invertida, que sin forzamiento no es un equilibrio estable. Se encontró una relación entre los parámetros del problema, que permite tener un oscilador en torno a la posición invertida del péndulo bajo forzamiento de alta frecuencia.

La pregunta que surge a continuación es la posibilidad de generar resonancia en el oscilador inducido por el forzamiento. Esto ha sido respondido por diferentes medios, por ejemplo una expansión modal truncada [17] (también llamado método de Galerkin [18]) o mediante funciones de Mathieu [19]. En esta ocasión, se buscará explicar esta resonancia mediante la conexión entre el efecto Kapitza y la bien entendida resonancia paramétrica en el límite cuasi reversible. A este fenómeno se le llamará “Resonancia Paramétrica Efectiva” (EPR por sus siglas en ingles).

4.2. Sistema prototipo de EPR

Con el objeto de caracterizar la EPR, se considerará un modelo sencillo y prototipo que permita comprender este efecto. La dinámica del modelo en cuestión está descrita por

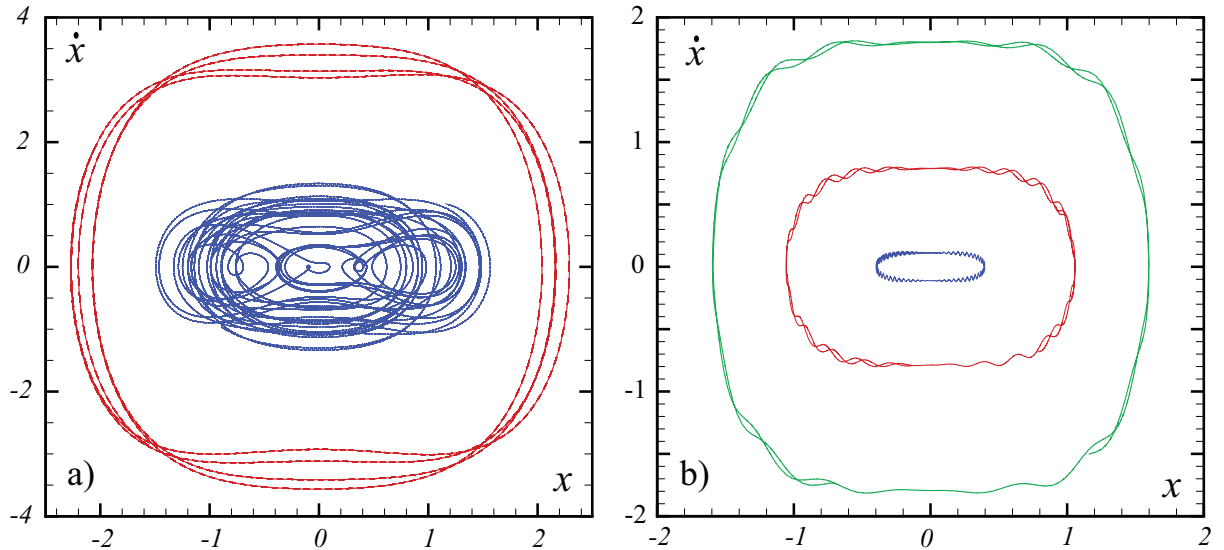


Figura 22: a) es el espacio de fase del modelo (34) para $\alpha = 1$, $\gamma = 1$, $\mu = 0$ y $\omega = 0.5$. b) es el espacio de fase del modelo (34) para $\alpha = 1$, $\gamma = 1$, $\mu = 0$ y $\omega = 20$.

$$\ddot{x} = -\gamma \sin(\omega t)x - \mu \dot{x} - \alpha x^3, \quad (34)$$

donde $x(t)$ es la variable que describe el estado del sistema, \dot{x} es la velocidad, \ddot{x} es la aceleración, μ es la viscosidad, α caracteriza la no linealidad del sistema, γ la intensidad del forzamiento paramétrico y ω la frecuencia del forzamiento. Otros sistemas permiten la existencia de oscilaciones permanente generadas por la EPR, sin embargo el modelo (34) tiene los ingredientes míni-

mos para describir el fenómeno.

Para estudiar la fenomenología del modelo (34) se han realizado simulaciones numéricas, usando el método de Runge-Kutta de orden cuatro con un paso temporal $\Delta t = 0.02$, para diferentes parámetros.

En el límite no disipativo o hamiltoniano ($\mu = 0$), para $\alpha > 0$, el modelo presenta comportamiento caótico cerca del origen y cuasi periódico lejos de este. Esto se ilustra para ω de orden 1 en la figura 22a). Al aumentar el valor de ω este escenario cambia, acercando la dinámica a la de un oscilador y construyendo la región caótica hasta hacerla casi desaparecer en torno a el origen. En la figura 22b), se puede observar este cambio en la dinámica.

Continuando con $\alpha > 0$, pero en el límite de baja disipación ($\mu \ll 1$), se puede observar que manteniendo el resto de los parámetros aparece un atractor caótico [20], como se ilustra en la figura 23a). Al aumentar lo suficiente la disipación μ y la frecuencia de forzamiento ω , se puede observar que la dinámica se hace muy similar a la de un simple oscilador con disipación. Esto se observa en el espacio de fase en la figura 23b).

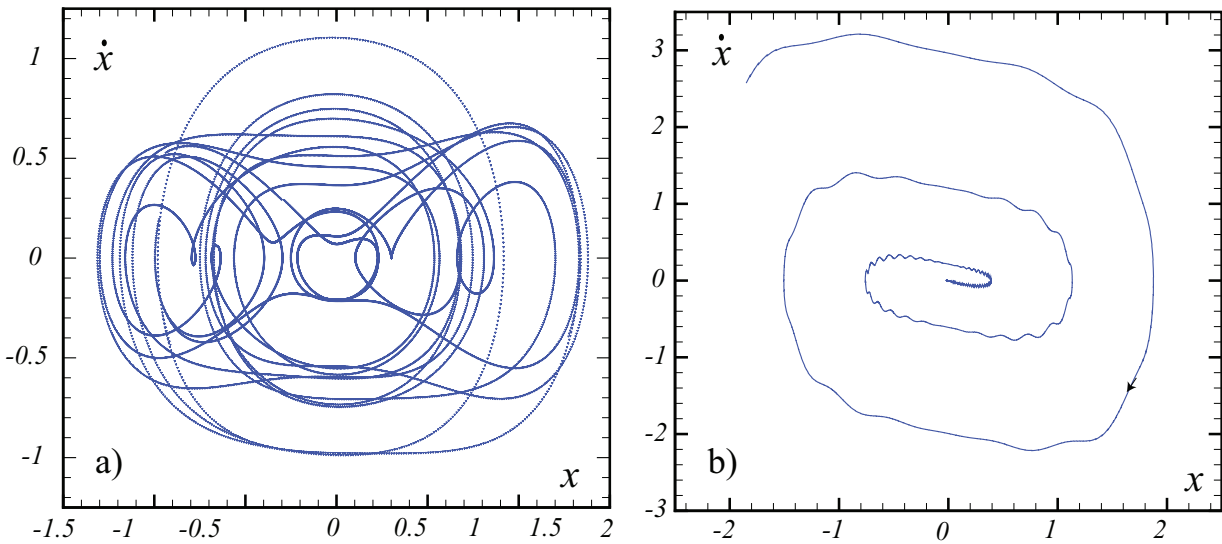


Figura 23: a) es el espacio de fase del modelo (34) para $\alpha = 1$, $\gamma = 1$, $\mu = 0.02$ y $\omega = 0.5$. b) es el espacio de fase del modelo (34) para $\alpha = 1$, $\gamma = 0.3$, $\mu = 0.2$ y $\omega = 10$.

Es importante recordar que para $\alpha > 0$ y sin forzamiento se tiene un oscilador no lineal. Sin embargo, para $\alpha < 0$ y sin forzamiento se tiene a 0 como un punto inestable. Con la existencia de forzamiento y $\alpha > 0$, para ω grande, el sistema puede estabilizarse tanto con o sin disipación. En la figura 24a), se pueden ver trayectorias divergentes para el modelo (34). Mientras, en la figura 24b), se puede ver la estabilización del sistema para un γ y ω suficientemente grandes, induciendo un oscilador.

Ahora bien, la pregunta que se quiere resolver en este capítulo es si este modelo, forzado a gran amplitud y alta frecuencia, exhibe algún tipo de resonancia efectiva. Para esto se pueden utilizar diferentes métodos. En esta ocasión, se utilizará una estrategia similar a la propuesta por Kapitza

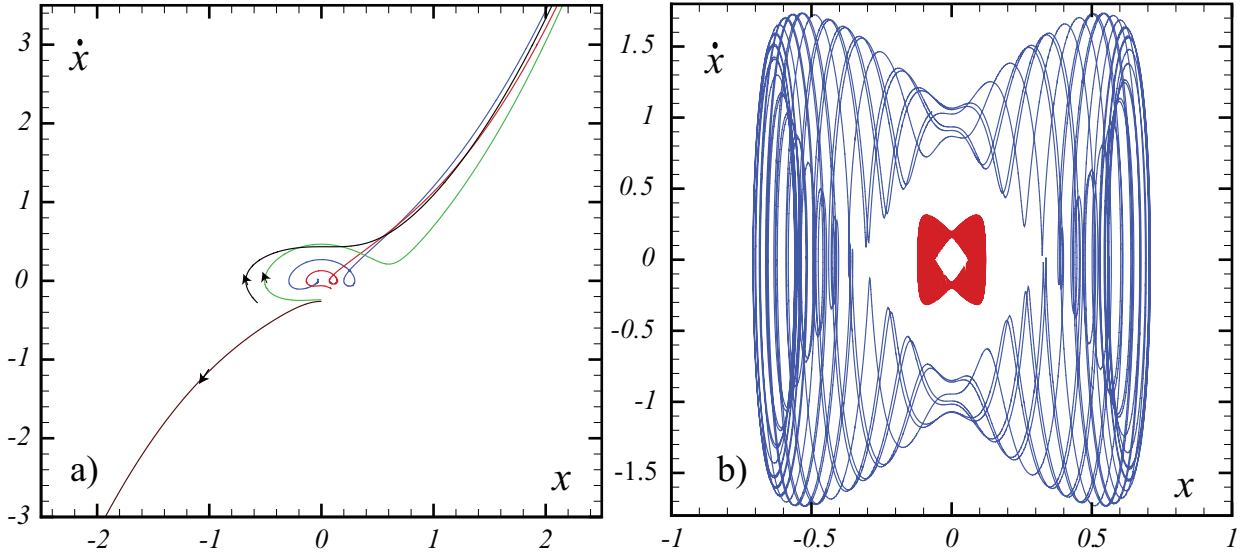


Figura 24: a) es el espacio de fase del modelo (34) para $\alpha = -2$, $\gamma = 46.5$, $\mu = 0.0$ y $\omega = 1$. b) es el espacio de fase del modelo (34) para $\alpha = -2$, $\gamma = 46.5$, $\mu = 0.0$ y $\omega = 20$.

[10] y descrita en el marco conceptual 2.5. En el caso estudiado previamente, la dinámica efectiva se podía calcular mediante la separación de escalas. En el problema estudiado en este capítulo, esta separación no es posible, ya que, al aumentar suficiente el forzamiento, la frecuencia efectiva puede ser del mismo orden que la frecuencia de forzamiento.

De esta forma, se utilizará como *ansatz* la solución de Kapitza para la variable rápida cuando $\mu \ll \omega$. Luego, el cambio de variable propuesto es

$$x(t) = z(t) + \frac{\gamma}{\omega^2} \sin(\omega t) z(t), \quad (35)$$

donde $z(t)$ daba cuenta de la variable lenta a alta frecuencia. En este caso no es tan simple su interpretación. Sin embargo, la variable z permitirá entender la dinámica del sistema de forma mucho más sencilla. Introduciendo el *ansatz* (35) en el modelo (34), se obtiene

$$\ddot{z} = -\frac{\gamma^2}{2\omega^2} z - \mu \dot{z} - \frac{2\gamma}{\omega} \cos(\omega t) \dot{z} - \frac{\gamma}{\omega^2} \ddot{z} + \frac{\gamma^2}{2\omega^2} \cos(2\omega t) z - \frac{\mu\gamma}{\omega} \cos(\omega t) z - \frac{\mu\gamma}{\omega^2} \sin(\omega t) \dot{z} - \alpha z^3 \left(1 + \frac{\gamma}{\omega^2} \sin(\omega t)\right)^3. \quad (36)$$

Si se considera el límite de alta frecuencia con $\omega \gg 1$, $\frac{\gamma}{\omega^2} \ll 1$ y sacando promedio en un período $\frac{2\pi}{\omega}$, se puede obtener la ecuación

$$\ddot{z} = -\frac{\gamma^2}{2\omega^2} z - \mu \dot{z} - \alpha z^3, \quad (37)$$

la cual es equivalente a la obtenida en el marco conceptual 2.5.

Por otro lado, si se considera $\frac{\gamma}{\omega^2} < 1$, pero no tanto menor que 1, al dejar sólo los términos más relevantes y resonantes, la ecuación (36) toma la forma

$$\ddot{z} = -\frac{\gamma^2}{2\omega^2}z - \mu\dot{z} - \alpha z^3 - \frac{2\gamma}{\omega}\cos(\omega t)\dot{z}. \quad (38)$$

En la ecuación (38), la variable z da cuenta de la dinámica efectiva de la variable x en el límite de alta frecuencia. Este modelo corresponde a un oscilador con una frecuencia inducida $\omega_I \equiv \frac{\gamma}{\sqrt{2}\omega}$, con disipación μ , un término cúbico y forzamiento paramétrico proporcional a \dot{z} . De esta forma, cuando el término de forzamiento es despreciable por separación de escalas, la solución 0 es estable tanto para $\alpha > 0$ como para $\alpha < 0$. Cuando el forzamiento empieza a ser relevante, se podría obtener una región de resonancia paramétrica. Esto es equivalente al caso del límite estudiado en 2.4. Dicho de otra forma, la dinámica efectiva está dada por un oscilador de frecuencia $\omega_I = \frac{\gamma}{\sqrt{2}\omega}$, forzado paraméricamente a una frecuencia ω , que podría tener las características de la resonancia paramétrica al variar el valor de la frecuencia inducida ω_I .

En el caso de ω grande (pero fijo), al incrementar el valor de γ , la frecuencia inducida del oscilador efectivo del modelo (38) crece. De esta manera, el término de forzamiento que se despreciaba en la estrategia de Kapitza, por estar en una escala temporal diferente, se hace relevante al incrementar su tamaño y al mismo tiempo pasar a ser un término resonante.

Tal como se explicó en el marco conceptual, cuando $\omega_I \sim \frac{\omega}{2}$, la combinación de estos efectos puede generar el fenómeno de resonancia paramétrica efectiva (EPR). Es decir, la disipación e inyección de energía se pueden balancear para obtener amplificación en la respuesta. Esto sucede por la resonancia entre la frecuencia de forzamiento con la frecuencia inducida también por el forzamiento.

Al variar γ de forma apropiada, el sistema puede mostrar el fenómeno de EPR cuando $\gamma \sim \frac{\sqrt{2}}{2}\omega^2$, haciendo inestable la solución previamente estable en torno a $x = 0$ y permitiendo que las no linealidades saturen el crecimiento de la solución. En la figura 25a) se puede observar un ciclo límite inducido para α positivo, mientras que en la figura 25b) se puede ver un ciclo límite para α negativo.

Es importante notar que, para ω y γ suficientemente grandes, el modelo (34) induce simultáneamente una frecuencia natural de oscilación y un forzamiento paramétrico, generando la resonancia paramétrica efectiva a la mitad de la frecuencia de forzamiento incluso para alta disipación. En las simulaciones, se puede inferir para el caso de α positivo, que el ciclo límite está dominado simplemente por el primer modo. Por otro lado, para el caso de α negativo, el ciclo límite está dominado por los dos primeros modos. Ambos ejemplos de ciclos límites se pueden observar en la figura 25.

Para resolver de forma más precisa el modelo (38), se puede hacer una expansión modal hasta el primer modo para dar cuenta de la envolvente, lo que es equivalente a utilizar un *ansatz* para la variable efectiva

$$z(t) = Ae^{i\omega_I(1+\nu)t} + W(A, t) + c.c., \quad (39)$$

con $\nu \ll 1$, $\partial_t A \ll A \ll 1$ y $W \ll A$.

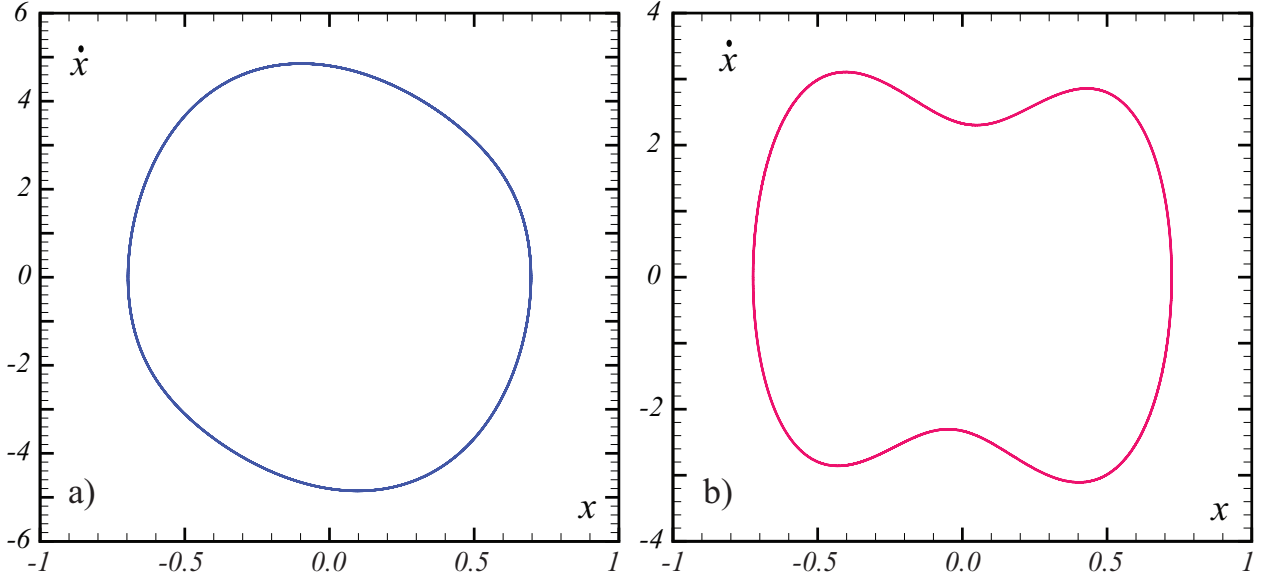


Figura 25: Espacios de fase del modelo (34). En a) para $\alpha = 200$, $\gamma = 48$, $\mu = 1$ y $\omega = 14$. En b) para $\alpha = -1$, $\gamma = 47$, $\mu = 1$ y $\omega = 10$.

Luego, al introducir (39) en (38), linealizando en la corrección W y despreciando términos más pequeños se obtiene

$$\begin{aligned}
 (\partial_{tt} + \omega_I^2)W &= (-2i\omega_I\partial_t A + 2\omega_I^2\nu A + i\frac{\gamma}{\omega}\omega_I A^* - \alpha 3A|A|^2 - i\mu\omega_I A)e^{i\omega_I(1+\nu)t} \\
 &+ (-\alpha A^3 - i\frac{\gamma}{\omega}\omega_I A + \omega_I^2 A)e^{3i\omega_I(1+\nu)t} + h.o.t..
 \end{aligned} \tag{40}$$

Al aplicar la condición de solubilidad, para el operador $L_0 = \partial_{tt} + \omega_I^2$, se puede obtener la ecuación para la dinámica de la amplitud

$$\partial_t A = -i\omega_I\nu A + \frac{\gamma}{2\omega}A^* - \frac{\mu}{2}A + i\frac{3\alpha}{2\omega_I}A|A|^2. \tag{41}$$

Esta ecuación se puede resolver de la misma forma que la ecuación (18) en el capítulo 2.4, obteniendo la curva de inestabilidad para la solución $x = z = 0$

$$\left(\frac{\gamma}{2\omega}\right)^2 = \left(\frac{\mu}{2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\gamma}{\omega\sqrt{2}}\right)^2. \tag{42}$$

Para confirmar la predicción (42), se realizaron simulaciones numéricas del modelo (34) que permitieron encontrar la curva de inestabilidad. En la figura 26, se puede observar gran concordancia entre la predicción teórica de (42) y las simulaciones numéricas de (34). Además, se muestra el espacio de fase para trayectorias típicas de cada región.

Por otro lado, cuando el desarrollo anterior se realiza directamente de la ecuación (36), la curva de inestabilidad es

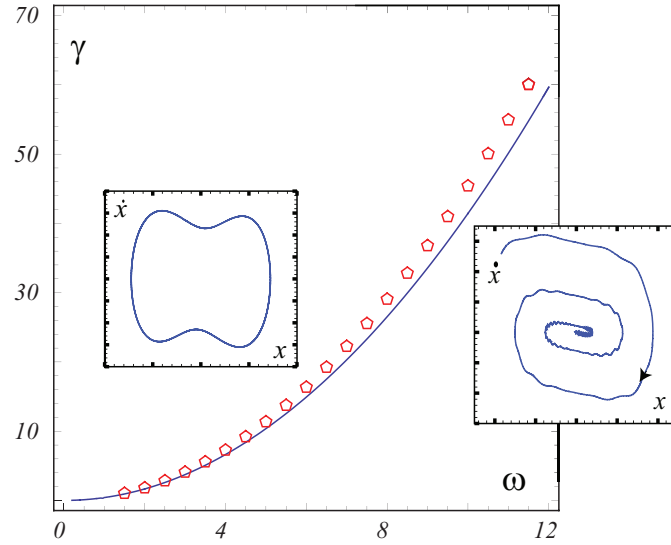


Figura 26: Curva de la resonancia paramétrica efectiva en el espacio $\omega - \gamma$ para $\mu = 0.1$ y $\alpha = -1.0$. La línea sólida es obtenida de (42) y sobre esta se espera observar resonancia paramétrica efectiva. Los pentágonos se obtienen de la simulación numérica del modelo (34). Las figuras dentro del gráfico representan un espacio de fase típico para cada región de parámetros.

$$\left(\frac{\gamma}{2\omega}\left(1 - \frac{\omega_I}{2\omega}\right)\right)^2 + \left(\frac{\mu\gamma}{4\omega\omega_I}\left(1 - \frac{\omega_I}{\omega}\right)\right)^2 = \left(\frac{\mu}{2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\gamma}{\omega\sqrt{2}}\right)^2. \quad (43)$$

Al comparar este resultado con las simulaciones numéricas se puede observar que el error disminuye a menos del 3%. En la figura 27, se puede ver que en este caso, al considerar todos los términos resonantes de forzamiento, el resultado es mucho más preciso.

4.3. Resonancia paramétrica efectiva en un péndulo forzado

Como se ha visto anteriormente, la EPR resulta del efecto producido por el forzamiento paramétrico de un sistema a alta amplitud y frecuencia. Un mecanismo sencillo que puede tener este tipo de comportamiento es un péndulo forzado paraméricamente, como el estudiado en el marco conceptual en 2.4 y en 2.5.

La ecuación de un péndulo forzado paraméricamente es

$$\ddot{\theta} = -(a\omega_{ex}^2 \cos(\omega_{ext}) + \omega_0^2) \sin(\theta) - \mu \dot{\theta},$$

donde la gravedad es $g = l\omega_0^2$ (siendo l el largo del péndulo), el desplazamiento del pivote normalizado es a , la frecuencia de forzamiento es ω_{ex} y la disipación está dada por μ . Esta ecuación es equivalente a la estudiada previamente y posee EPR cuando $\omega_0 \ll \omega$ y $a \sim 1$. En efecto, este sistema tiene un equilibrio estable en la posición vertical, $\theta = 0$, y un equilibrio inestable para la posición invertida, $\theta = \pi$. En el marco conceptual, se mostró que ambos equilibrios pueden volverse estables para forzamiento a alta frecuencia y pequeña amplitud. Esto se ha mostrado experimentalmente en diferentes trabajos [21, 22]. Sin embargo, ambos equilibrios se vuelven inestables al

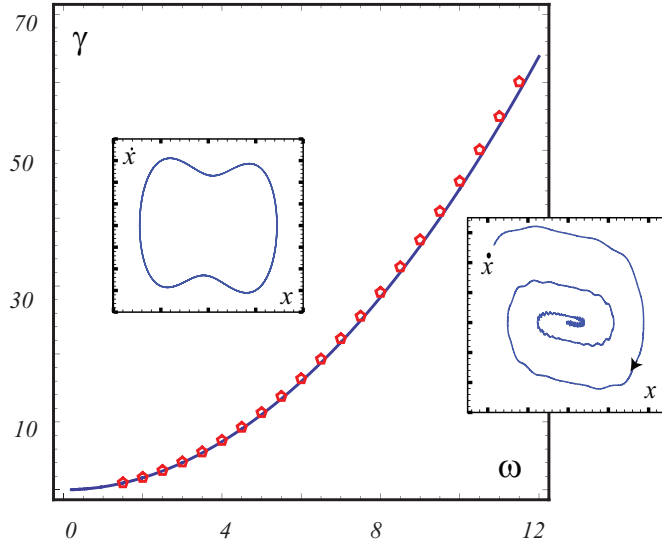


Figura 27: Curva de la resonancia paramétrica efectiva en el espacio $\omega - \gamma$ para $\mu = 0.1$ y $\alpha = -1.0$. La línea sólida es obtenida de (43) y sobre esta se espera observar resonancia paramétrica efectiva. Los pentágonos se obtienen de la simulación numérica del modelo (34). Las figuras dentro del gráfico representan un espacio de fase típico para cada región de parámetros.

aumentar lo suficiente el forzamiento, generando un ciclo límite, del mismo modo como sucedía para la ecuación 34. Esta inestabilidad ha sido observada numérica [23] y experimentalmente [22]. Para el cálculo de la curva de inestabilidad, provocada por la EPR, basta con repetir el mismo procedimiento realizado anteriormente, con lo que se puede obtener un resultado tan preciso como en el modelo estudiado previamente.

Con el fin de mostrar experimentalmente este fenómeno, se estudió un péndulo físico basado en un rodamiento.

El péndulo del experimento consiste en un rodamiento de un radio interior de $8mm$ y un radio exterior de $15mm$, el cual se encuentra montado de forma vertical sobre un paralelepípedo de acrílico de medidas $10 \times 14 \times 4mm^2$. Un trozo cilíndrico de acrílico está fijo de forma solidaria con el rodamiento, rotando suavemente en el mismo plano. Una barra masiva de bronce, de $60cm$ de largo y $3mm$ de diámetro, está posicionada a $2cm$ del centro del cilindro de acrílico, desplazando de esta forma el centro de masa para generar un péndulo de frecuencia natural $f_0 \approx 10Hz$ ($\omega_0 \approx 30rad/s$) y radio de oscilación de $l = 2mm$. El péndulo físico se puede observar en la figura 28.

Todo el sistema está montado sobre un vibrador electromecánico, forzado de forma sinusoidal por un generador de frecuencia a través de un amplificador. La modulación de la aceleración entregada por el vibrador es $a_{ex}\omega_{ex}^2\cos(\omega_{ext})$. Esta es medida directamente por un acelerómetro pizoeléctrico y un amplificador de carga. De esta forma, $a = a_{ex}/l$.

El movimiento del péndulo es capturado por una cámara rápida a $500fps$ en una ventana de $800 \times 600pixels$.

En el experimento, se quiere explorar el límite de alta frecuencia ($\omega_{ex} \gg \omega_0$) cuando $a \sim 1$. Para

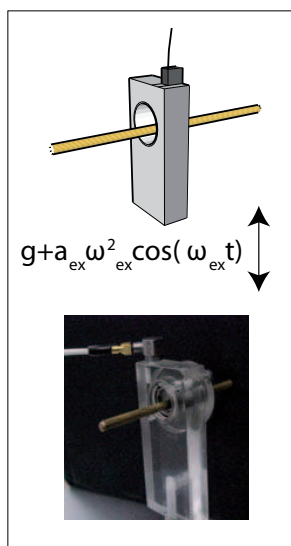


Figura 28: Representación esquemática y fotografía del péndulo físico en consideración.

esto se parte con una alta frecuencia y una amplitud muy pequeña, donde la inyección de energía es casi irrelevante, para luego aumentar la amplitud a hasta estabilizar el péndulo en la posición invertida (efecto Kapitza). Posteriormente, se sigue aumentando la amplitud de forzamiento hasta que emerge un nuevo equilibrio de frecuencia $\omega_{ex}/2$. Este nuevo equilibrio es un ciclo límite en torno a la posición invertida ($\theta = \pi$). El tipo de ciclo límite mencionado, también aparecer en torno a la posición vertical ($\theta = 0$). Estas oscilaciones permanentes no pueden existir sin la presencia de forzamiento, ni tampoco en el caso de baja inyección de energía pues es un sistema con alta disipación.

En la figura 29a), se puede ver una trayectoria típica del centro de masa del péndulo experimental para $\omega_{ex} \approx 5\omega_0$ y $a \approx 2$. En la figura 29b), se puede observar una trayectoria típica para la simulación numérica a alta frecuencia, después de ocurrir la inestabilidad productor de la EPR.

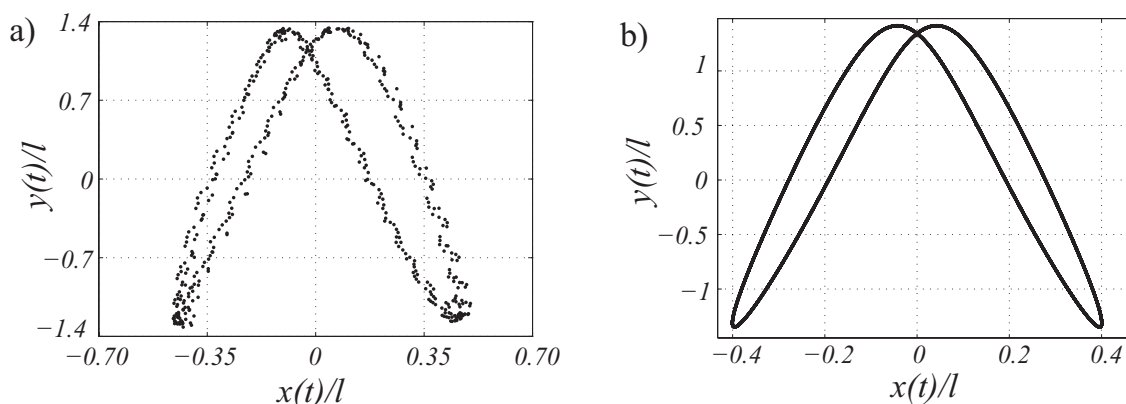


Figura 29: Trayectoria experimental (a) y numérica (b)) del péndulo invertido.

Para confirmar que se está observando el mismo fenómeno, se puede ver en la figura 30a) el espacio de fase del experimento, mientras que en la figura 30b), se puede observar el espacio de fase

para la simulación numérica. Es importante notar que los ciclos límites están en torno a la posición invertida del péndulo ($\theta = \pi$).

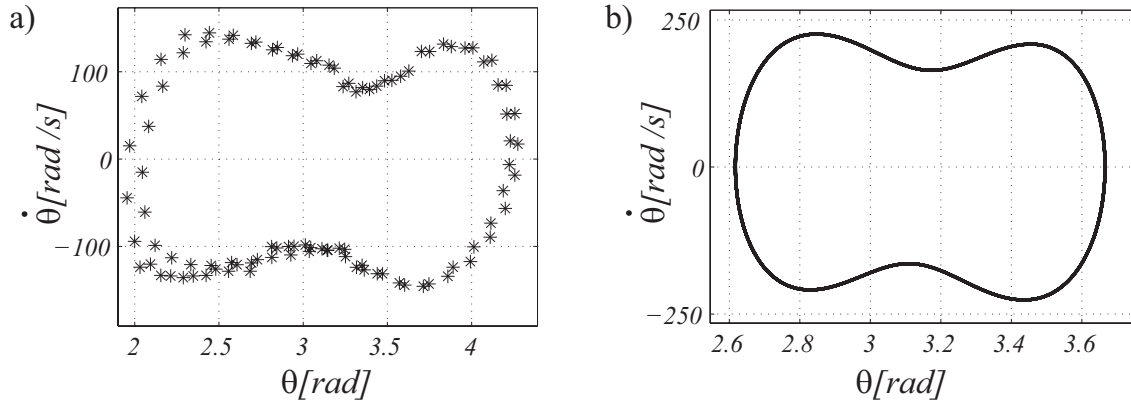


Figura 30: Espacio de fase de los resultados experimentales (a)) y numéricos (b)) del péndulo invertido.

4.4. Conclusiones

La estrategia usual para generar oscilaciones mediante forzamiento paramétrico es con una frecuencia de forzamiento del orden de la natural. En este capítulo, se ha mostrado cómo con un forzamiento de alta frecuencia, es decir con períodos de forzamiento que son mucho menores que cualquier otra escala temporal característica del sistema, se puede inducir una frecuencia natural efectiva y al mismo tiempo inducir una resonancia paramétrica con esta frecuencia efectiva, incluso para alta disipación.

Para ilustrar este fenómeno, se consideró un modelo sencillo: la ecuación (34). Basándose en una generalización de la estrategia propuesta por Kapitza, se tuvo éxito explicando el efecto de resonancia paramétrica efectiva. A su vez, se ha logrado predecir la curva de inestabilidad con precisión. Sin embargo, este fenómeno es mucho más general que un solo modelo. Es por esto que se ha estudiado numérica y experimentalmente el caso de un péndulo forzado paramétricamente, comprobando así la existencia de la resonancia paramétrica efectiva en este sistema físico.

Finalmente, es posible concluir que el fenómeno estudiado se podría presentar en cualquier sistema, de al menos dos variables, al forzarlo paramétricamente a alta frecuencia. Este sistema debería ser capaz de generar un oscilador inducido por el forzamiento, sin importar que el sistema original fuese o no un oscilador, para luego generar una resonancia entre el oscilador efectivo y el forzamiento que le dio origen. Conociendo la frecuencia efectiva del sistema, se puede predecir cerca de qué valores de parámetros probablemente existirá resonancia paramétrica efectiva.

5. Inestabilidad espacial en un sistema forzado a alta frecuencia

5.1. Introducción

En la naturaleza, se suelen observar ondas tipo Faraday en sistemas con forzamiento paramétrico [24]. Existen estudios que los caracterizan en diferentes contextos, como es el caso de medios granulares, fluidos, etc. [24, 25]. Es bien conocido que un sistema extendido espacialmente, forzado de forma paramétrica a una frecuencia cercana a dos veces la natural, puede exhibir inestabilidad espacial [9].

Existen estudios que permiten encontrar curvas de inestabilidad en sistemas que no están extendidos espacialmente lejos de la región usual de resonancia [19]. Sin embargo, el estudio de estos sistemas extendidos espacialmente, bajo forzamientos lejanos de la frecuencia natural, no han sido caracterizados a cabalidad. Este tipo de estudio es fundamental para poder comprender de forma genérica estas inestabilidades, generando un entendimiento profundo sobre estos fenómenos.

Como se vio en el capítulo anterior, existe la posibilidad de generar nuevos equilibrios por forzamientos de alta frecuencia. Estos equilibrios, cuando no se considera el espacio, se pueden volver inestables al resonar con la misma frecuencia de forzamiento que los indujo [26]. Hasta el momento no se ha caracterizado completamente la inestabilidad espacial de equilibrios inducidos por el efecto Kapitza [10]. Sin embargo, en este capítulo se mostrarán observaciones numéricas de esto. Resulta razonable pensar que al aumentar la energía inyectada, estos equilibrios deben desestabilizarse.

En este capítulo, se buscará caracterizar la inestabilidad espacial de un sistema forzado paramétricamente a diferentes frecuencias. También se espera entender qué sucede con el sistema después de esta bifurcación, determinando el crecimiento de la onda estacionaria que surge a partir de la inestabilidad.

5.2. Curvas de inestabilidad en una cadena de péndulos forzados paramétricamente

Para poder encontrar las curvas de inestabilidad de una cadena de osciladores forzados paramétricamente, descritos por

$$\ddot{\theta}(x,t) = -(a\omega^2 \cos(\omega t) + \omega_0^2) \sin(\theta) - \mu \dot{\theta} + \kappa \partial_{xx} \theta, \quad (44)$$

donde $\theta(x,t)$ es el ángulo del péndulo en la posición x en el tiempo t , ω_0 representa la frecuencia natural del sistema, a es el desplazamiento normalizado del pivote de toda la cadena que genera el forzamiento, ω es la frecuencia del forzamiento, κ es el acoplamiento (que consideraremos 1 al normalizar el espacio) y μ da cuenta de la disipación.

Se puede observar numéricamente que el modelo (44) tiene una inestabilidad espacial, tanto para forzamientos cerca de la región de resonancia usual, estudiada en 2.6, cómo para forzamientos a

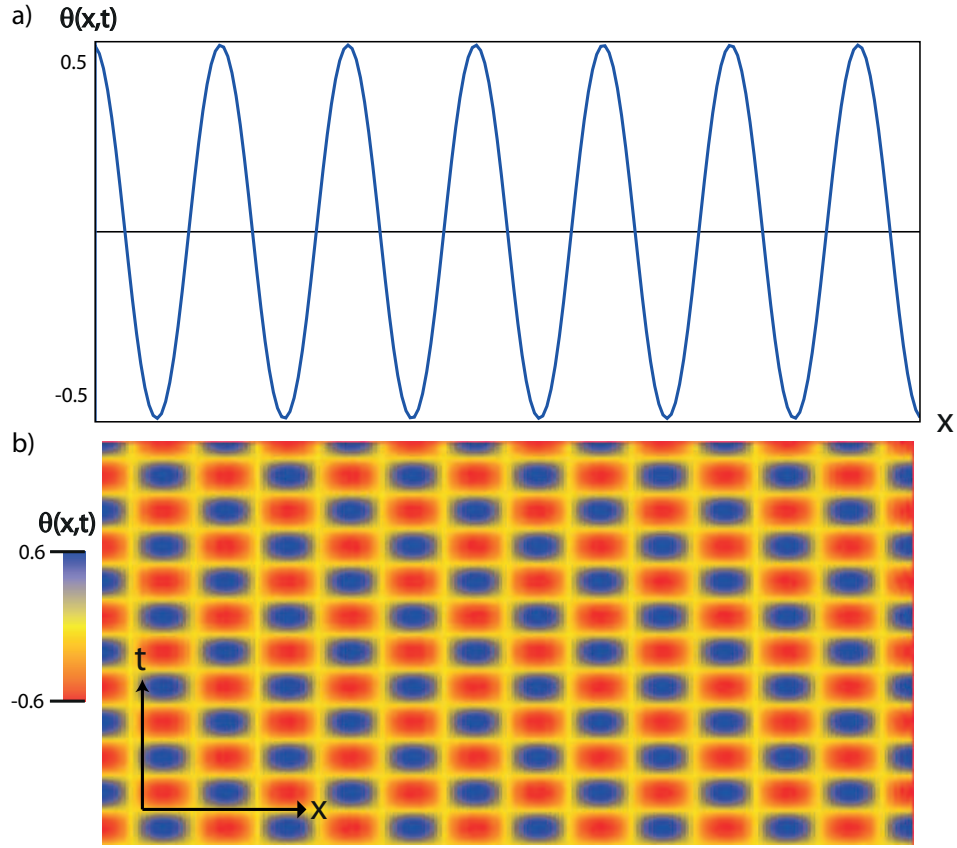


Figura 31: Inestabilidad espacial de una cadena de péndulos descrita por (44) en torno a la posición vertical. Los parámetros de la simulación son $\omega_0 = 1$, $\mu = 3$, $\omega = 40$, $a = 0.08$. a) muestra el perfil de θ para un tiempo determinado, mientras que en b) se puede observar el diagrama espacio-temporal.

alta frecuencia. En la figura 31, se puede ver la inestabilidad espacial en torno a la posición vertical para un forzamiento de alta frecuencia. Por otro lado, al existir la posibilidad de estabilizar la cadena de péndulos en la posición invertida, como se observa en la figura 32a), también se puede desestabilizar y obtener una solución de ondas estacionarias (como se ve en la figura 32b y 33).

Para estudiar esta inestabilidad es posible seguir la misma estrategia que permitió explicar la resonancia paramétrica efectiva en el capítulo 4. Sin embargo, en esta ocasión se realizará una generalización del método utilizado por Butikov para un solo péndulo [17]. La misma estrategia se empleará para volver a obtener, sin mayor complicación, las curvas de inestabilidad de un solo péndulo.

De esta forma, se aplicará un *ansatz* para el ángulo con los dos primeros modos en torno a la posición vertical, pues se puede observar numéricamente que el resto son muy pequeños para todos los casos y su aporte en el cálculo de las curvas es irrelevante. Luego, se considerará el *ansatz*

$$\theta = A_1(x,t)e^{i\omega t/2} + A_3(x,t)e^{3i\omega t/2} + c.c., \quad (45)$$

donde A_1 es la amplitud de oscilación del primer modo excitado por la resonancia y A_3 es el segundo. El resto de los modos son mucho más pequeños e irrelevantes, por lo que no se considerarán.

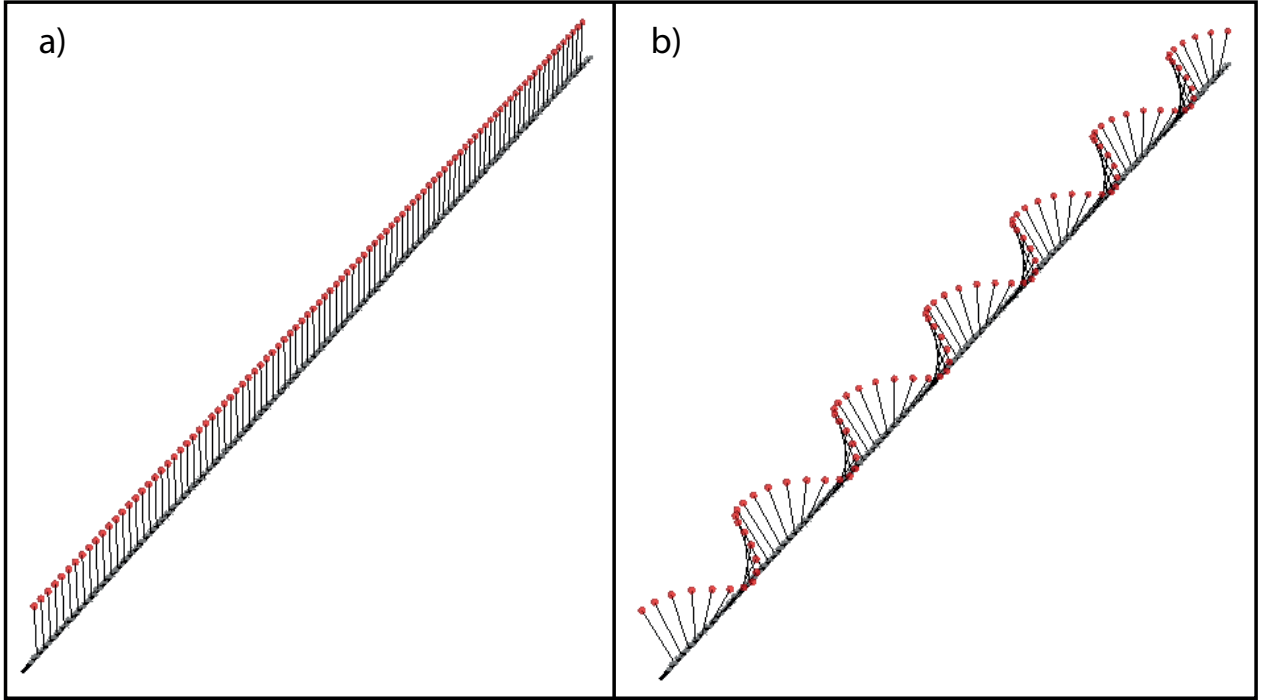


Figura 32: Cadena de péndulos descrita por el modelo (44). a) muestra a los péndulos estables en la posición invertida para los parámetros $\omega_0 = 1$, $\mu = 3$, $\omega = 40$, $a = 0.0a$. b) ilustra los péndulos al existir una inestabilidad espacial en torno la posición invertida para los parámetros $\omega_0 = 1$, $\mu = 3$, $\omega = 40$, $a = 0.08$.

Además A_1 y A_3 son mucho menores que uno. Es posible identificar este cambio de variable no lineal y periódico como aquel necesario para poder utilizar la teoría de Floquet [27].

Introduciendo (45) en (44), separando por modos de oscilación en la ecuación y despreciando términos más pequeños se obtiene

$$\begin{aligned}
\ddot{A}_1 + \mu \dot{A}_1 + i\omega \dot{A}_1 &= \left(\frac{\omega^2}{4} - \omega_0^2\right)A_1 - \frac{a\omega^2}{2}A_1^* - \frac{a\omega^2}{2}A_3 - i\frac{\mu\omega}{2}A_1 + \partial_{xx}A_1 \\
&+ \frac{\omega_0^2}{2}A_1|A_1|^2 + \frac{a\omega^2}{2}A_1(A_3A_1^* + \frac{A_1A_3^*}{2}) \\
&+ A_1^*\left(\frac{\omega_0^2}{2}A_3A_1^* + \frac{a\omega^2}{4}|A_1|^2\right) + \frac{a\omega^2}{12}A_1^3
\end{aligned} \tag{46}$$

y

$$\begin{aligned}
\ddot{A}_3 + \mu \dot{A}_3 + 3i\omega \dot{A}_3 &= \left(\frac{9\omega^2}{4} - \omega_0^2\right)A_3 - \frac{a\omega^2}{2}A_1 - 3i\frac{\mu\omega}{2}A_3 + \partial_{xx}A_3 \\
&+ \omega_0^2A_3|A_1|^2 + \frac{a\omega^2}{4}A_1|A_1|^2 \\
&+ \frac{a\omega^2}{4}A_3A_1^{*2} + \frac{\omega_0^2}{6}A_1^3.
\end{aligned} \tag{47}$$

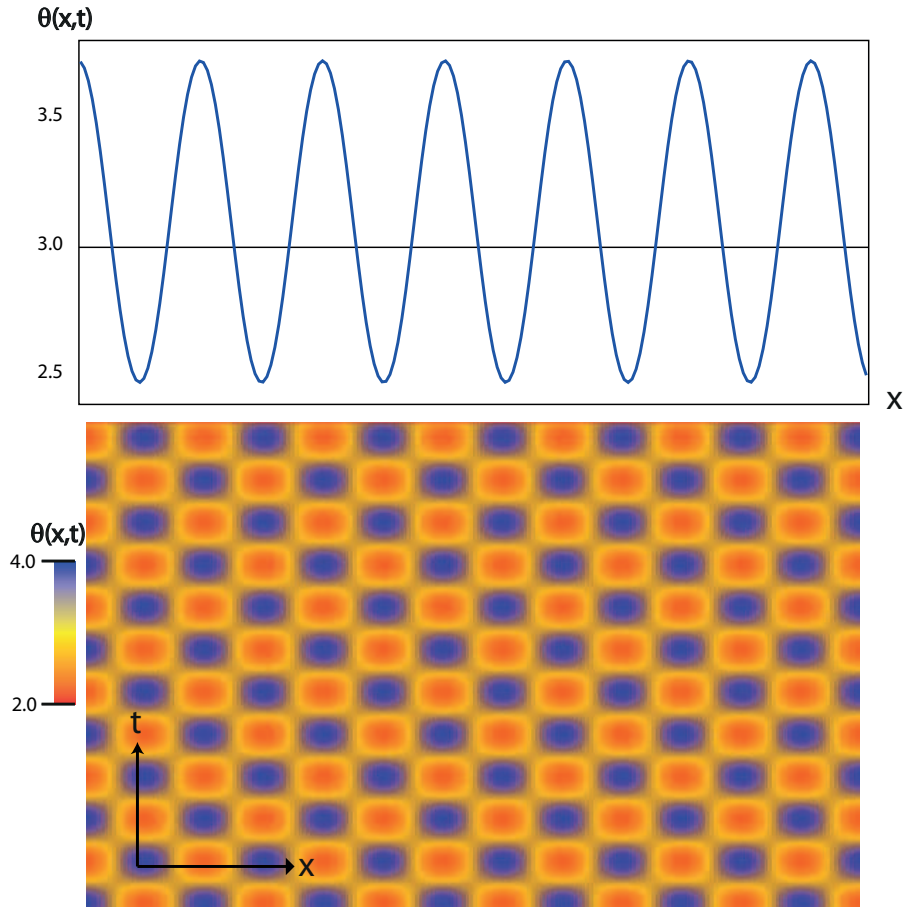


Figura 33: Inestabilidad espacial de una cadena de péndulos descrita por (44) en torno a la posición invertida. Los parámetros de la simulación son $\omega_0 = 1$, $\mu = 3$, $\omega = 40$, $a = 0.08$. a) muestra el perfil de θ para un tiempo determinado, mientras que en b) se puede observar el diagrama espacio-temporal.

Las ecuaciones (46) y (47) se pueden utilizar para determinar la inestabilidad espacial. Para esto se supondrá que la dinámica de A_3 y de A_1 están dadas por $A_3 = A_{0,3}e^{ikx+\lambda t}$ y $A_1 = A_{0,1}e^{ikx+\lambda t}$, pues de otra forma los términos lineales serían contradictorios al suponer que un modo decae más rápido que el otro o que tienen diferentes longitudes de onda. Al realizar el análisis lineal y buscar el punto crítico cuando $\lambda = 0$, se pueden obtener las ecuaciones

$$0 = \left(\frac{\omega^2}{4} - \omega_0^2\right)A_{0,1} - \frac{a\omega^2}{2}A_{0,1}^* - \frac{a\omega^2}{2}A_{0,3} - i\frac{\mu\omega}{2}A_{0,1} - k^2A_{0,1} \quad (48)$$

y

$$0 = \left(\frac{9\omega^2}{4} - \omega_0^2\right)A_{0,3} - \frac{a\omega^2}{2}A_{0,1} - 3i\frac{\mu\omega}{2}A_{0,3} - k^2A_{0,3}. \quad (49)$$

Luego de (49)

$$A_{0,3} = \frac{a\omega^2}{2\left(\frac{9}{4}\omega^2 - \omega_0^2 - k^2 - i\frac{3\mu\omega}{2}\right)}A_{0,1},$$

e introduciendo este resultado de $A_{0,3}$ en (48) se obtiene la ecuación para $A_{0,1}$ y para su conjugado

$$0 = \left(\frac{\omega^2}{4} - \omega_0^2 - i\frac{\mu\omega}{2} - k^2 - \frac{a^2\omega^4}{4\left(\frac{9}{4}\omega^2 - \omega_0^2 - k^2 - i\frac{3\mu\omega}{2}\right)} \right) A_{0,1} - \frac{a\omega^2}{2} A_{0,1}^*. \quad (50)$$

Del marco conceptual en 2.6, la ecuación para determinar la inestabilidad es equivalente a (50), por lo que sabemos que el k crítico deberá cumplir

$$\frac{\omega^2}{4} - \omega_0^2 - k_c^2 - \frac{a^2\omega^4\left(\frac{9}{4}\omega^2 - \omega_0^2 - k_c^2\right)}{4\left(\left(\frac{9}{4}\omega^2 - \omega_0^2 - k_c^2\right)^2 + \frac{9\mu^2\omega^2}{4}\right)} = 0, \quad (51)$$

mientras que el a crítico deberá cumplir

$$\mu + \frac{3a_c^2\omega^4\mu}{4\left(\left(\frac{9}{4}\omega^2 - \omega_0^2 - k_c^2\right)^2 + \frac{9\mu^2\omega^2}{4}\right)} = a_c\omega. \quad (52)$$

De esta forma, cuando $\omega \gg \mu, \omega_0$ se puede obtener un valor aproximado para

$$k_c^2 \approx \frac{\omega^2}{4} - \omega_0^2 \quad (53)$$

y

$$a_c \approx \frac{\mu}{\omega}. \quad (54)$$

El valor aproximado de a_c , calculado recientemente para alta frecuencia, es el mismo que si sólo se considera el primer modo para todas las regiones. Además, según el marco conceptual, sabemos que para una frecuencia de forzamiento cercana a la frecuencia natural sólo es relevante el primer modo. Podemos concluir que el resultado, con un solo modo, es una excelente aproximación para la curva de inestabilidad espacial.

Es fácil verificar que, para un solo péndulo (equivalente a considerar $k = 0$), la inestabilidad se produce cuando

$$a_c^2\omega^4 - \left(\frac{\omega^2}{2} - 2\omega_0^2 - \frac{a_c^2\omega^4\left(\frac{9}{4}\omega^2 - \omega_0^2\right)}{2\left(\frac{9}{4}\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \frac{9}{2}\mu^2\omega^2}\right)^2 = \left(\mu\omega + \frac{3a_c^2\mu\omega^5}{\left(\frac{9}{2}\omega^2 - 2\omega_0^2\right)^2 + 9\mu^2\omega^2}\right)^2. \quad (55)$$

Este resultado es, en el caso de alta frecuencia, muy similar al encontrado en el capítulo de resonancia paramétrica efectiva 4.

En la figura 34, se pueden observar las curvas (54) y (55).

Del mismo modo se pueden obtener las curvas para la posición invertida, para esto basta cambiar ω_0 por $i\omega_0$.

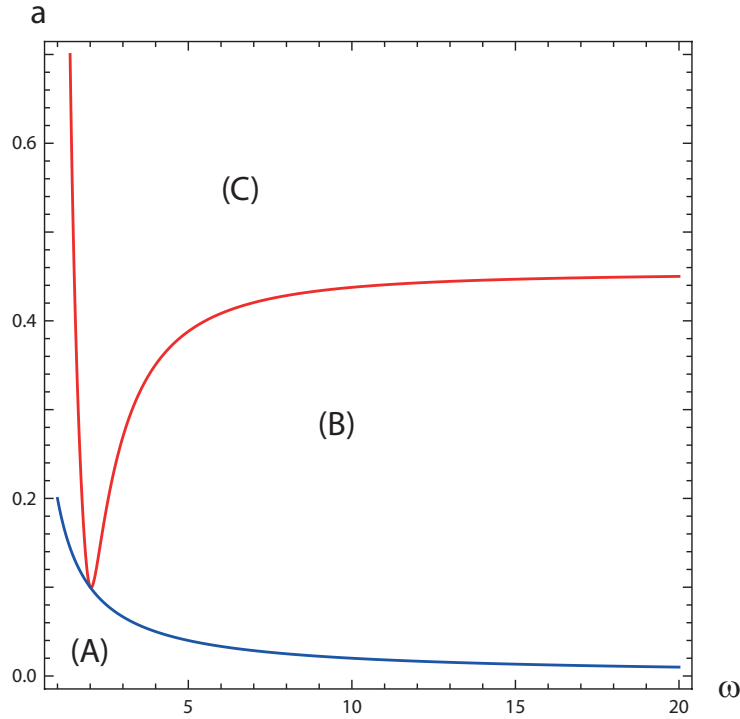


Figura 34: Curvas de inestabilidad para los péndulos en torno a la posición vertical para los parámetros $\omega_0 = 1$ y $\mu = 0.2$. La región (A) está acotada superiormente por la curva azul (54). En este sector, la cadena de péndulos en la posición vertical es estable. La posición vertical de la cadena se volvió inestable sobre la curva azul (54), dando origen a ondas estacionarias. Por encima de la curva roja (55), un péndulo sin acoplamiento se vuelve inestable en la posición vertical, tal como se describió en el capítulo anterior.

En la figura 35, se pueden observar las curvas de inestabilidad para la posición invertida. También se observa la estabilización mediante el efecto Kapitza cuando se traspasa (25). Esto se obtuvo en el marco conceptual 2.5:

$$a_k = \frac{\sqrt{2}\omega}{\omega_0} \quad (56)$$

Es importante destacar que, en la figura 35, la región (B) sólo existe cuando $\omega_0 < \sqrt{2}\mu$. De otra forma, la solución invertida cruza el umbral de la inestabilidad espacial antes de estabilizarse por el efecto Kapitza. Es decir, la solución invertida homogénea nunca existe.

5.3. Crecimiento del patrón después de la inestabilidad supercrítica

En el apartado anterior se estableció el punto crítico, luego donde comienza la inestabilidad espacial en la cadena de péndulos. Sin embargo, falta calcular cómo crece la onda estacionaria al sobrepasar el punto mencionado recientemente. Como se indicó previamente, para determinar la inestabilidad espacial basta considerar el primer modo. De esta forma, la ecuación para la dinámica de la amplitud de A_1 es

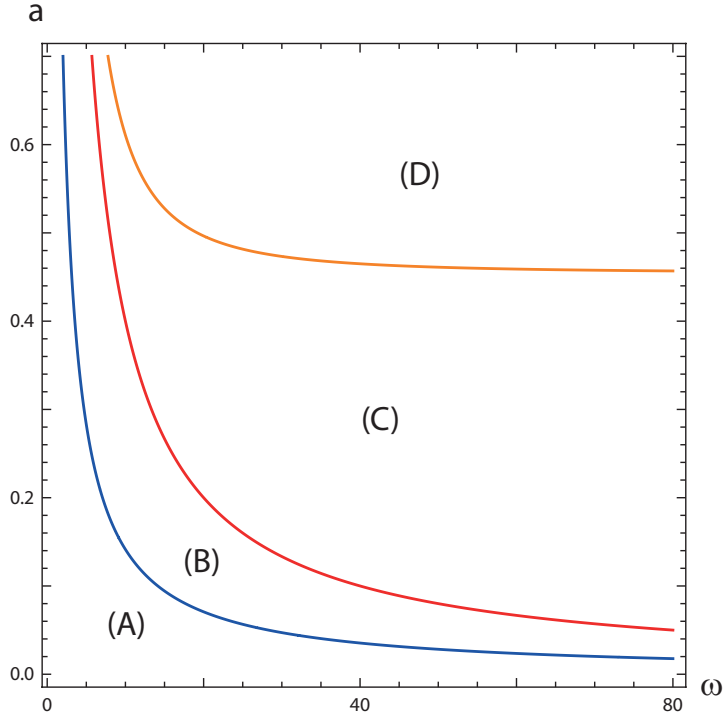


Figura 35: Curvas de inestabilidad para los péndulos descritos por (44) en torno a la posición invertida, para los parámetros $\omega_0 = 1$ y $\mu = 4$. En la región (A), bajo la curva azul (56), los péndulos son inestables en torno a la posición invertida. Sobre esta región, en (B), y acotada por la curva roja (57) la posición invertida de la cadena de péndulos se vuelve estable. Al traspasar la curva roja la cadena de péndulos en torno a la posición invertida sufre una inestabilidad espacial dando origen a ondas estacionarias en torno a esta posición. (D) muestra la región donde un solo péndulo invertido se vuelve inestable al sobrepasar la curva (55) con $\omega_0 = i$.

$$\begin{aligned} \ddot{A}_1 + \mu \dot{A}_1 + i\omega \dot{A}_1 &= \left(\frac{\omega^2}{4} - \omega_0^2\right)A_1 - \frac{a\omega^2}{2}A_1^* - i\frac{\mu\omega}{2}A_1 + \partial_{xx}A_1 \\ &+ \frac{\omega_0^2}{2}A_1|A_1|^2 + A_1^* \frac{a\omega^2}{4}|A_1|^2 + \frac{a\omega^2}{12}A_1^3. \end{aligned} \quad (57)$$

Al escribir la dinámica a primer orden y separando la amplitud en parte real e imaginaria ($A_1 = Z + iY$, $\dot{A}_1 = P + iQ$), se obtiene que la ecuación (57) es equivalente a

$$\dot{\vec{X}} = (L_0 + L_\varepsilon)\vec{X} + \vec{N}L, \quad (58)$$

donde

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} Z \\ P \\ Y \\ Q \end{pmatrix},$$

$$L_0 = \begin{pmatrix} (0) & (1) & (0) & (0) \\ (\frac{\omega^2}{4} - \omega_0^2 - \frac{a_c \omega^2}{2} + \partial_{xx}) & (-\mu) & (\frac{\mu \omega}{2}) & (\omega) \\ (0) & (0) & (0) & (1) \\ (-\frac{\mu \omega}{2}) & (-\omega) & (\frac{\omega^2}{4} - \omega_0^2 - \frac{a_c \omega^2}{2} + \partial_{xx}) & (-\mu) \end{pmatrix}, \quad (59)$$

$$L_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad (60)$$

$$\vec{N}L = \begin{pmatrix} 0 \\ (\frac{\omega_0^2}{2} + \frac{a\omega^2}{4})(Z^2 + Y^2)Z + \frac{a\omega^2}{12}(Z^3 - 3ZY^2) \\ 0 \\ (\frac{\omega_0^2}{2} - \frac{a\omega^2}{4})(Z^2 + Y^2)Y + \frac{a\omega^2}{12}(3Z^2Y - Y^3) \end{pmatrix}, \quad (61)$$

$\varepsilon = (a - a_c)\omega^2/2 \ll 1$ y $a_c = \mu\omega/2$ como se concluyo en (54).

De esta forma, siguiendo la estrategia empleada por [28], es posible concluir que el único vector propio de L_0 con valor propio 0 (modo marginal) es

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\pm ik_c x}.$$

Luego se puede considerar el siguiente *ansatz* para \vec{X}

$$\vec{X} = \vec{U}^{[1]} + \vec{U}^{[2]} + \vec{U}^{[3]} + \dots$$

y su respectiva dinámica

$$\dot{\vec{X}} = \vec{f}^{[1]} + \vec{f}^{[2]} + \vec{f}^{[3]} + \dots,$$

donde $\vec{U}^{[1]} = C\vec{v}_1$ y $^{[n]}$ representa el orden polinomial en C al que se esta trabajando.

De esta forma, se obtiene que $\vec{f}^{[1]} = \vec{f}^{[2]} = \vec{U}^{[2]} = 0$.

Luego, para orden $^{[3]}$ se tiene

$$\vec{f}^{[3]} = L_0 \vec{U}^{[3]} + \vec{N}L^{[3]},$$

con $\vec{f}^{[3]} = \dot{C}\vec{v}_1$. Al aplicar la condición de solubilidad, definiendo el producto interno de forma equivalente a como se ha hecho previamente, se obtiene

$$\dot{C} = -a_c\omega C|C|^2.$$

Si bien esta ecuación satura, no se ha considerado el aporte del forzamiento sobre el punto crítico. Para esto se considerará aquel término a primer orden en C y primer orden en ε (usualmente llamado *unfloding*). De esta forma, la ecuación que se consigue es

$$\vec{f}^{[3]} = L_0\vec{U}^{[3]} + L_\varepsilon\vec{U}^{[1]} + \vec{N}L^{[3]}.$$

Aplicando la condición de solubilidad a esta, finalmente se obtiene una ecuación para la dinámica de C

$$\dot{C} = \frac{\varepsilon}{\omega}C - a_c\omega C|C|^2. \quad (62)$$

Luego la solución estacionaria para $|C|$, la cual evidentemente es un equilibrio estable, es

$$|C_0| = \sqrt{\frac{a - a_c}{2a_c}}.$$

Para tiempos largos, cerca de la bifurcación, la amplitud de la oscilación A_1 va a crecer como

$$A_1 = 2\sqrt{(a - a_c)/a_c}\cos(kx + \phi)e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Lo que permite encontrar el valor para el ángulo

$$\theta = 4\sqrt{(a - a_c)/a_c}\cos(kx + \phi)\cos\left(\frac{\omega}{2}t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Con lo anterior se puede obtener el valor máximo que puede tomar θ :

$$\theta_M = 4\sqrt{(a - a_c)/a_c} \quad (63)$$

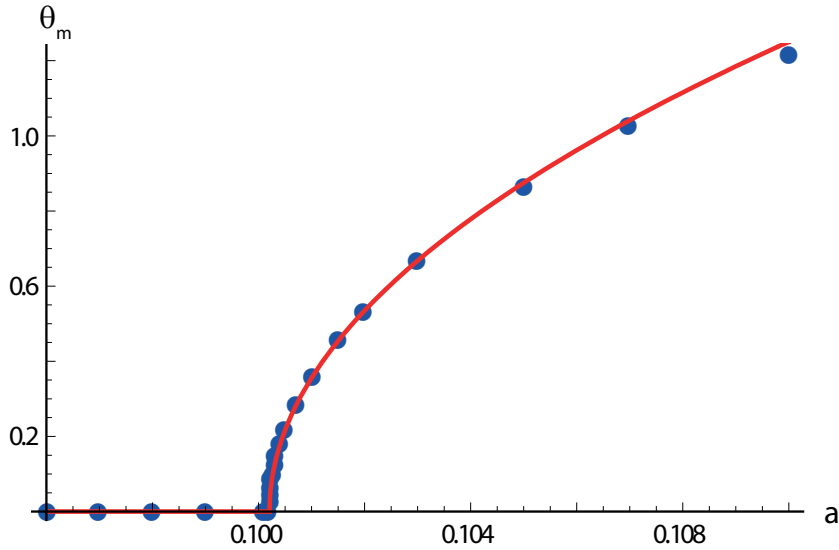


Figura 36: Ángulo máximo en función de a . Los puntos azules dan cuenta de los resultados numéricos del modelo (44) para los parámetros $\omega = 30$, $\omega_0 = 1$ y $\mu = 3$. La curva roja está dada por la función (63) para $a_c = a_N$.

La última fórmula es muy sensible al valor de a_c . El k crítico real puede no ser el k_c obtenido en (53) o en (51) por tener el sistema un tamaño finito. De esta forma, para que el resultado de θ_M tenga sentido, se considerará el a crítico obtenido en forma numérica (a_N). Este valor se obtiene al ajustar los datos numéricos a la fórmula (63). En la figura 36, se puede observar que el a_N numérico tiene un error menor al 0,3% considerando (54). En esta misma figura, se puede observar que la fórmula (63) tiene un excelente resultado al considerar el a_N .

5.4. Conclusiones

En este capítulo, se concluye que un sistema extendido espacialmente exhibe inestabilidades. Esto sucede bajo forzamiento paramétrico. El análisis de expansión de modos posibilita caracterizar con precisión las curvas de inestabilidad, tanto con espacio como sin este. Para el caso de forzamiento de alta frecuencia, es posible generar equilibrios estables o transformar equilibrios inestables a estables. Posteriormente, también se puede producir su desestabilización espacial por medio del mismo forzamiento (equivalente a EPR para un sistema extendido). Esta inestabilidad puede existir cuando previamente el estado se estabilizó. Para esto se necesita que la frecuencia natural sea menor que raíz de dos veces la disipación.

Se pueden observar ondas estacionarias al desestabilizar un estado extendido. El crecimiento de estas se caracteriza gracias a la estrategia usual de formas normales. Si bien este cálculo es válido cerca de la bifurcación, se puede observar numéricamente que el resultado es preciso muy lejos del punto crítico, llegando incluso a tener una buena predicción para ángulos de orden uno.

6. Transición bloqueo-desbloqueo entre ondas estacionarias y ondas localizadas disipativas

6.1. Introducción

De acuerdo a lo visto en el marco conceptual 2.6 y en el capítulo 5, los sistemas fuera del equilibrio se caracterizan por ser capaces de auto-organizarse como respuesta a la optimización del transporte de energía [1, 2, 3]. En la naturaleza, generalmente estos sistemas forman estructuras periódicas desarrolladas desde la inestabilidad de estados homogéneos presentes en el sistema. En las últimas décadas, muchos esfuerzos han ido enfocados en estudiar la formación de patrones en diferentes contextos. Entre ellos se encuentran las reacciones químicas, de catálisis, cavidades de óptica no lineal, medios magnéticos, hidrodinámica, cristales líquidos, medios granulares, dinámica de población vegetal [29, 30, 31].

Para las estructuras con periodicidad espacial, cuando están situadas cerca de las bifurcaciones, una descripción unificada de la dinámica es desarrollada mediante ecuaciones de amplitud para los modos críticos [2, 3]. Esta descripción es válida en el caso de no linealidades débiles y variaciones espacio-temporales lentas en el patrón de partida.

Tal como se observó en el capítulo 2.5, es usual que los sistemas fuera del equilibrio puedan exhibir multiestabilidad, es decir la coexistencia de más de un estado de equilibrio en la misma región de parámetros. Esto implica que un sistema puede exhibir dos estados al mismo tiempo. Los estados de equilibrio estarán separados por paredes, interfaces o frentes [2]. La dinámica de estos últimos es caracterizada por los atributos de los estados conectados. En el caso de sistemas extendidos en una dimensión espacial, existe una buena descripción teórica. De este modo, los frentes se entienden como la solución heteroclina del sistema dinámico que conecta diferentes estados de equilibrio [32, 33]. El caso de un frente que conecta dos estados uniformes se puede caracterizar. En efecto, el estado más favorable invade al estado menos favorable con velocidad constante, tal como se mostró en 2.7. Esta velocidad es proporcional a la diferencia de energía cuando el sistema es variacional, [32, 34]. Luego, se puede concluir que dos estados simétricos deben formar un frente estacionario, dado que tienen la misma energía. Sin embargo, esto sólo es cierto para un sistema variacional. Para otros sistemas puede existir un quiebre espontáneo de simetría, generando que el frente se propague con velocidad constante [35].

En el caso de los frentes que conectan patrones, la descripción anterior varía. Estos pueden mantenerse con velocidad nula incluso para estados con diferente energía, permitiéndose estados estacionarios para una región del espacio de parámetros [32]. En estos sistemas, la posibilidad de tener una región de bloqueo (a la que se llamará región de *pinning*) se debe a una barrera de nucleación que se produce por el acoplamiento entre la envolvente y el patrón subyacente [36]. Al cambiar los parámetros, existe un valor crítico para el cual el frente comienza a moverse con una velocidad oscilatoria. A este fenómeno se le denomina transición bloqueo-desbloqueo (*pinning-depinning*). Esta descripción es válida para los sistemas que conectan patrón-patrón y patrón-estado uniforme.

Cuando los estados del sistema son ondas estacionarias en lugar de patrones, la existencia de una región de *pinning* no es clara. Por un lado, la existencia de una longitud de onda establecida hace pensar que debe existir una región de *pinning* debido a esta longitud característica del sistema. Sin

embargo, la barrera de nucleación mencionada debe ser en promedio nula debido a la oscilación, por lo que no se esperaría obtener una región de *pinning*. Este capítulo buscará entender y predecir la existencia de regiones de parámetros donde los frentes entre ondas estacionarias sean estacionarios. Para esto se estudiará una cadena de péndulos forzados paramétricamente y un modelo tipo ϕ^4 disipativo.

6.2. Frente que conecta ondas estacionarias entre los péndulos verticales e invertidos

En el marco conceptual, se explicó que, mediante el desarrollo de Kapitza, un péndulo pueden ser estable tanto en la posición vertical como también en la invertida. Por otro lado, en el capítulo sobre inestabilidades espaciales, se mostró que la cadena de péndulos puede exhibir ondas estacionarias, tanto en los péndulos en la posición vertical como en la posición invertida. La existencia de ondas estacionarias en la posición vertical puede ocurrir para cualquier nivel de disipación, sin embargo para los péndulos en la posición invertida es necesario un valor mínimo de disipación que permita que estas ondas estacionarias sean estables. Luego, existen regiones de coexistencia entre las ondas estacionarias en la posición vertical e invertida, tal como se muestra en la figura 37. En esta misma figura se muestra la existencia de frentes que conectan ambos estados.

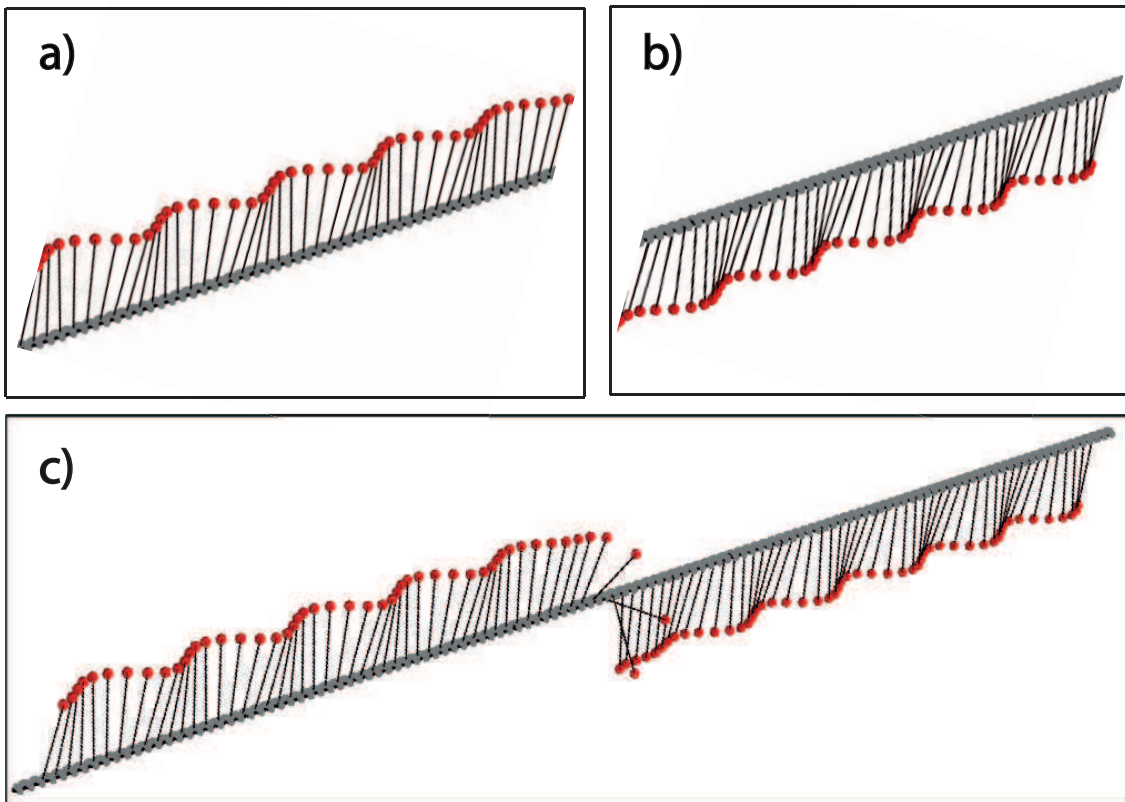


Figura 37: a) y b) muestran ondas estacionarias para la posición invertida y vertical respectivamente. c) muestra un frente conectando ambos estados. Los datos son numéricos del modelo (44), donde los parámetros son $k = 1$, $\omega_0 = 0.01$, $a = 1.17$, $\omega = 1$ y $\mu = 1$.

En este sistema, confirmada la existencia de frentes entre ondas estacionarias, se ilustrará la presencia de regiones de velocidad nula (*pinning*) y movimiento (*depinning*) de los frentes. Debido a la gravedad, se espera que los péndulos en torno al estado vertical invadan a aquellos en torno al estado invertido [37]. En la figura 38 a), se puede observar un diagrama espacio-temporal donde el frente es estacionario. En la figura 38 b), un diagrama espacio temporal donde el frente se propaga. Esto significa que para dos estados de ondas estacionarias, con diferentes energías, el frente que las conecta puede estar bloqueado para cierta región de parámetros.

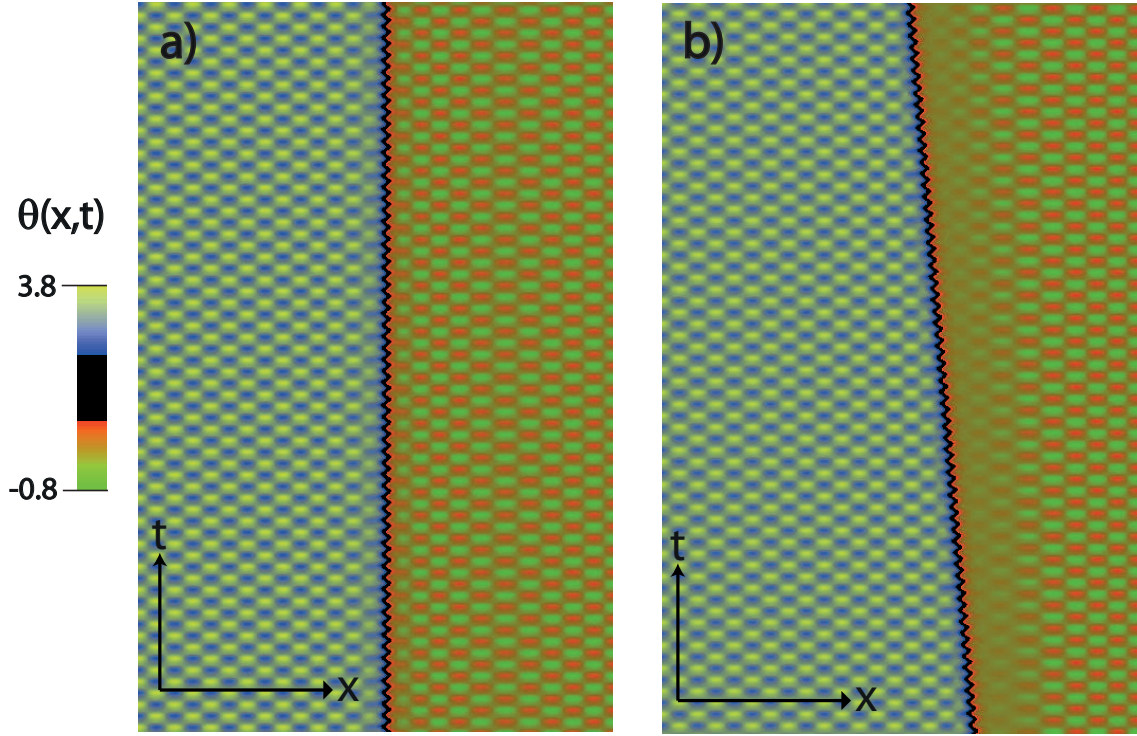


Figura 38: Diagrama espacio-temporal de la solución frente que conecta los péndulos invertidos y verticales en el modelo (44), para los parámetros $k = 1$, $a = 1.17$, $\omega = 1$ y $\mu = 1$. a) se obtiene para $\omega_0 = 0.01$ y b) para $\omega_0 = 0.2$.

En este sistema, gracias a la confirmación numérica de la transición *pinning-depinning*, surge la pregunta de cuál es mecanismo que genera el bloqueo del frente que conecta dos ondas estacionarias de diferente energía. Debido a la complejidad exhibida por la cadena de péndulos, se ha preferido estudiar analíticamente un modelo sencillo que permita entender el fenómeno. De esta manera, aplicaremos estos resultados a la cadena con el fin de comprobar algunas predicciones en el sistema original.

6.3. Un modelo sencillo para un frente que conecte ondas estacionarias.

Se considerará el siguiente modelo generalizado de ϕ^4 :

$$\partial_{tt}u + \mu \partial_t u = u - u^3 + \partial_{xx}u + \eta + v \sin(kx) \cos(\omega t). \quad (64)$$

Para $v = 0$ y $\eta = 0$, la ecuación anterior es simplemente el modelo ϕ^4 [12]. Este modelo se caracteriza por tener dos soluciones estables para $u = \pm 1$, una solución inestable para $u = 0$ y una solución frente que conecta los dos estados estables (a esta última se le suele llamar solución *Kink* [38]). La figura 39a) muestra una solución *Kink* para este modelo. En (64), μ representa la disipación de energía, v un forzamiento espacio-temporal que permite generar ondas estacionarias sobre los estados homogéneos y η da cuenta de un forzamiento que quiebra la simetría, equivalente a la gravedad en la cadena de péndulos.

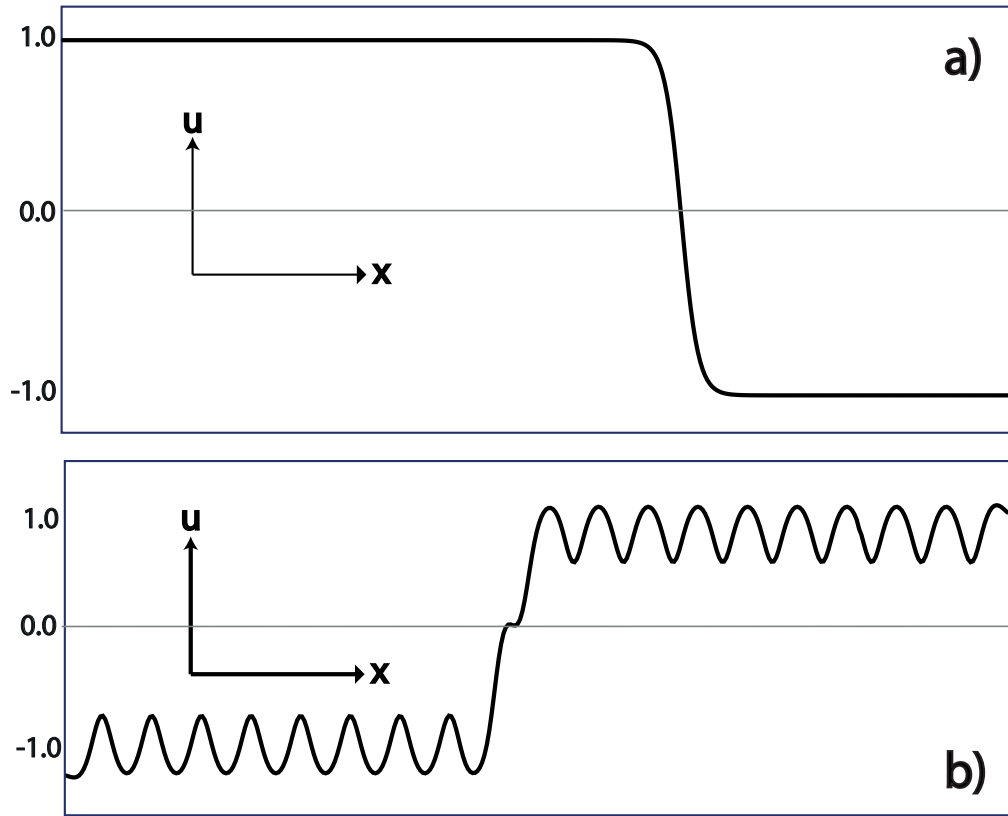


Figura 39: Simulación del Modelo generalizado den ϕ^4 (64). a) es la solución *Kink* obtenida para $\eta = 0$, $\omega = 1$, $\mu = 0.5$, $k = 1$ y $v = 0$. b) es la solución frente obtenida para $\eta = 0.001$, $\omega = 1$, $\mu = 1$, $k = 1$ y $v = 0.6$.

Para $v = 0$ y $\eta \neq 0$ la solución *Kink* tiene una velocidad bien definida, donde el estado más favorable invade al estado menos favorable. Para η pequeño, es fácil mostrar que la velocidad es proporcional a η [32]. Cuando $v \neq 0$ se pueden observar ondas estacionarias en el *Kink* como se ilustra en la figura 39b). Además, cuando $v \neq 0$ y $\eta \neq 0$ se pueden observar regiones de parámetros donde la solución *Kink* está bloqueada o tiene velocidad. En la figura 40, se ve un diagrama espacio-temporal para cada una de estas opciones. Al fijar todos los parámetros excepto η se observa un punto crítico donde existe la transición *pinning-depinning*, de forma equivalente al aumentar la gravedad en la cadena de péndulos.

Volviendo al modelo ϕ^4 usual, es decir con $v = \eta = 0$, las soluciones de los frentes son

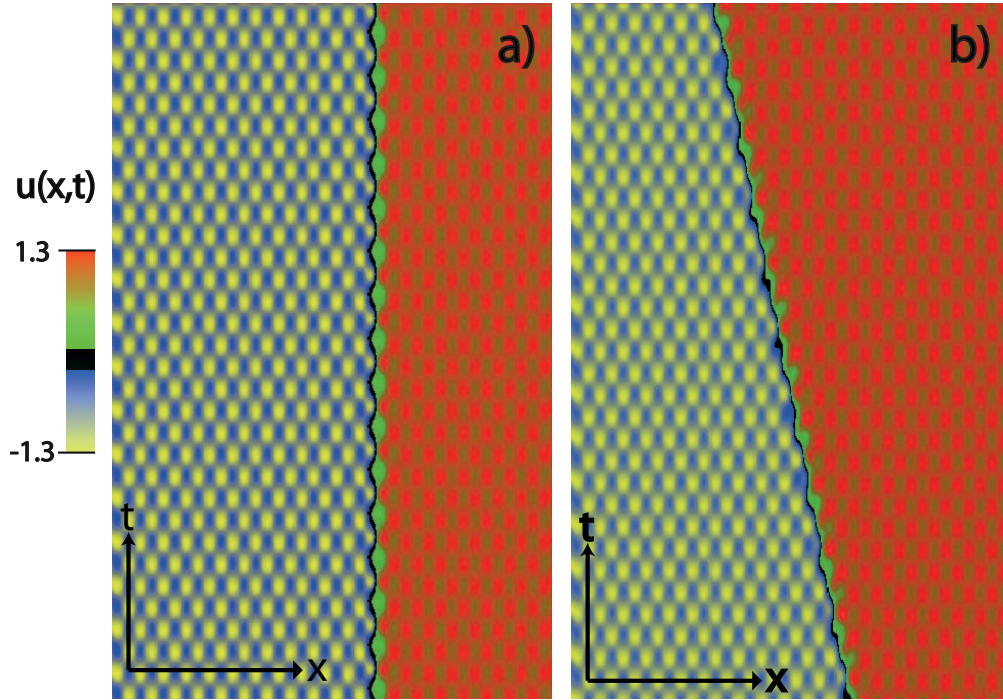


Figura 40: Diagrama espacio-temporal para el Modelo generalizado de ϕ^4 (64). a) es el resultado para $\eta = 0.001$, $\omega = 1$, $\mu = 1$, $k = 1$ y $\nu = 0.6$. b) es el resultado para $\eta = 0.14$, $\omega = 1$, $\mu = 1$, $k = 1$ y $\nu = 0.6$.

$$u_k(x - x_k) = \tanh\left(\frac{x - x_k}{\sqrt{2}}\right)$$

y

$$u_a(x - x_a) = -\tanh\left(\frac{x - x_a}{\sqrt{2}}\right),$$

donde u_k (u_a) representa la solución que parte en -1 (1) desde $-\infty$ y va hasta 1 (-1) en ∞ , cruzando el cero en x_k (x_a). En la figura 39a) se puede ver la solución x_a . Usualmente, se denomina corazón del frente tanto a x_k como a x_a , mientras que a u_k (u_a) se le llama *Kink* (*anti-Kink*). Si se considera que ν , μ y η son pequeños (términos perturbativos), se puede seguir el *ansatz* para la solución *Kink* (basado en el método de variación de parámetros)

$$u(x - x_k) = u_k(x - x_k(t)) + W(u_k, x, t),$$

donde $x_k(t)$ ahora tiene dependencia temporal y W es una función de corrección pequeña. Ambas tienen variaciones temporales lentas, es decir $\partial_t W \ll \partial_x W$, $\partial_t W \ll 1$ y $\partial_t x_0 \ll 1$. Introduciendo el *ansatz* anterior en la ecuación (64) y linealizando en W , se obtiene al orden dominante

$$-LW = \partial_x u_k (\mu \partial_t x_k + \partial_{tt} x_k) + \eta + \nu \sin(kx) \cos(\omega t), \quad (65)$$

donde $L = (1 - 3u_k^2 + \partial_{xx})$ es un operador lineal del tipo Sturm-Liouville [39]. Introduciendo el producto interno

$$\langle f|g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx, \quad (66)$$

el operador lineal definido anteriormente es auto-adjunto.

Para resolver la ecuación (65) se utilizará la condición de solubilidad o alternativa de Fredholm [2]. Esto significa multiplicar la ecuación por $\partial_x u_k$ e integrar en todo el espacio. Después de algunos cálculos se obtiene

$$\partial_{tt}x_k = -\mu\partial_t x_k - \frac{3\eta}{\sqrt{2}} - \frac{3\pi k v \cos(\omega t)}{2\text{Sinh}(\pi k/\sqrt{2})} \sin(kx_k). \quad (67)$$

Lo que es equivalente a

$$\partial_{tt}x_k = -\mu\partial_t x_k - \frac{\partial U}{\partial x_k},$$

donde el potencial del corazón del frente (U) tiene la forma

$$U = \frac{3\eta}{\sqrt{2}}x_k - \frac{3\pi v \cos(\omega t)}{2\text{Sinh}(\pi k/\sqrt{2})} \cos(kx_k),$$

al definir $\bar{\eta} = \frac{3\eta}{\sqrt{2}}$ y $\gamma = \frac{3\pi k v}{2\text{Sinh}(\pi k/\sqrt{2})}$.

En resumen, el corazón del frente satisface una ecuación de Newton. Esta posee disipación, una fuerza constante y una periódica tanto en el tiempo como en la variable x_k . La solución analítica de la ecuación (67) no es sencilla de obtener. Intuitivamente, se podría pensar que el frente siempre se debería propagar, ya que al promediar en un periodo $2\pi/\omega$ el término oscilatorio será cero, mientras que el constante se quedará igual. Dicho de otra forma, el frente es como una partícula que está en un potencial oscilatorio y decreciente en promedio, tal como se puede ver en la figura 41. Esta conclusión concuerda con lo observado previamente en la figura 40. Es por esto que se buscará una forma alternativa de solucionar el problema.

En el caso de gran frecuencia y forzamiento, con respecto a la dinámica característica del sistema sin forzamiento ($v = 0$), se puede usar nuevamente la estrategia de Kapitza para intentar resolver el problema. Siguiendo esta estrategia, se puede separar la dinámica del corazón del frente en una variable rápida y pequeña ($y(t)$) junto con otra variable lenta ($z(t)$). Esto es

$$x_k(t) = z(t) + y(t),$$

donde $y \ll 1$, $y \ll \partial_t y \ll \partial_{tt} y$ y $\partial_{tt} z \ll \partial_{tt} y$. Al usar el *ansatz* anterior en la ecuación (67) y linealizando hasta el primer orden en y , se obtiene

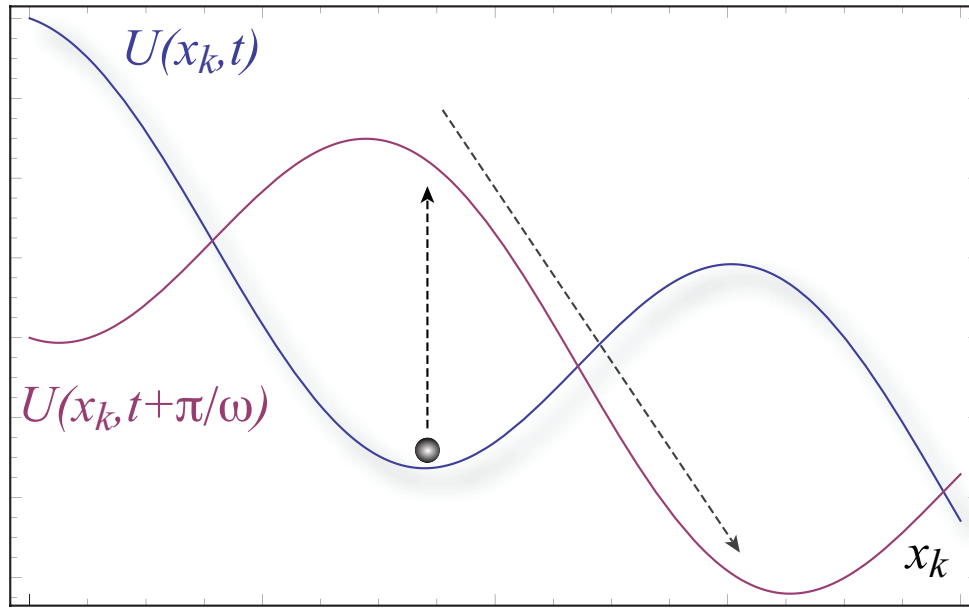


Figura 41: Representación esquemática del mecanismo de propagación del frete. Las curvas dan cuenta del potencial para un tiempo dado $U(x_k, t)$ y para medio período posterior $U(x_k, t + \pi/\omega)$.

$$\partial_{tt}y + \partial_{tt}z = -\mu\partial_t y - \mu\partial_t z - \bar{\eta} - \gamma\sin(kz)\cos(\omega t) - \gamma k\cos(kz)\cos(\omega t)y. \quad (68)$$

Luego, tomando los términos dominantes de la ecuación anterior

$$\partial_{tt}y = -\gamma\sin(kz)\cos(\omega t).$$

Considerando que la escala de z es mucho más lenta que la de $\cos(\omega t)$, se obtiene la variable rápida

$$y = \frac{\gamma}{\omega^2}\sin(kz)\cos(\omega t).$$

Con este resultado, sacando promedio en un periodo de la variable rápida ($2\pi/\omega$) y considerando que la variable lenta casi no cambia en este período, se obtiene que $z(t)$ es el valor promedio de $x(t)$, al mismo tiempo en la ecuación (68) se transforma en

$$\partial_{tt}z = -\mu\partial_t z - \bar{\eta} - \bar{\gamma}\sin(2kz), \quad (69)$$

donde $\bar{\gamma} = k\gamma^2/4\omega^2$.

Nuevamente se obtiene una ecuación tipo Newton. Sin embargo, en esta ocasión no hay dependencia temporal explícita, por lo que se pueden obtener resultados de forma más sencilla. Ahora se tiene un forzamiento espacial de media longitud de onda con respecto al forzamiento original del problema. Además, existe una fuerza constante, la disipación y la inercia. Luego, se puede concluir que, como resultado de las oscilaciones rápidas, el potencial efectivo (“promedio”) del corazón del

frente tiene una longitud de la mitad que el forzamiento original. La conclusión anterior es natural, ya que un mínimo y máximo en el espacio son equivalentes al tener oscilaciones también en el tiempo.

De la ecuación (69) se puede concluir que cuando $\bar{\eta} > \bar{\gamma}$ existen equilibrios de forma periódica en el espacio. Es decir, existe una transición *pinning-depinning* para un valor crítico de η :

$$\eta_c = \pm \frac{3\pi k^3 v^2}{8\sqrt{2}\omega^2 \text{Sinh}^2(\pi k/\sqrt{2})} \quad (70)$$

En la figura 42, el valor teórico η_c se puede comparar con las simulaciones numéricas. En esta figura, a pesar de las diferentes aproximaciones consideradas, se puede verificar que el resultado teórico es correcto, ya que existe gran acuerdo entre este y los resultados numéricos.

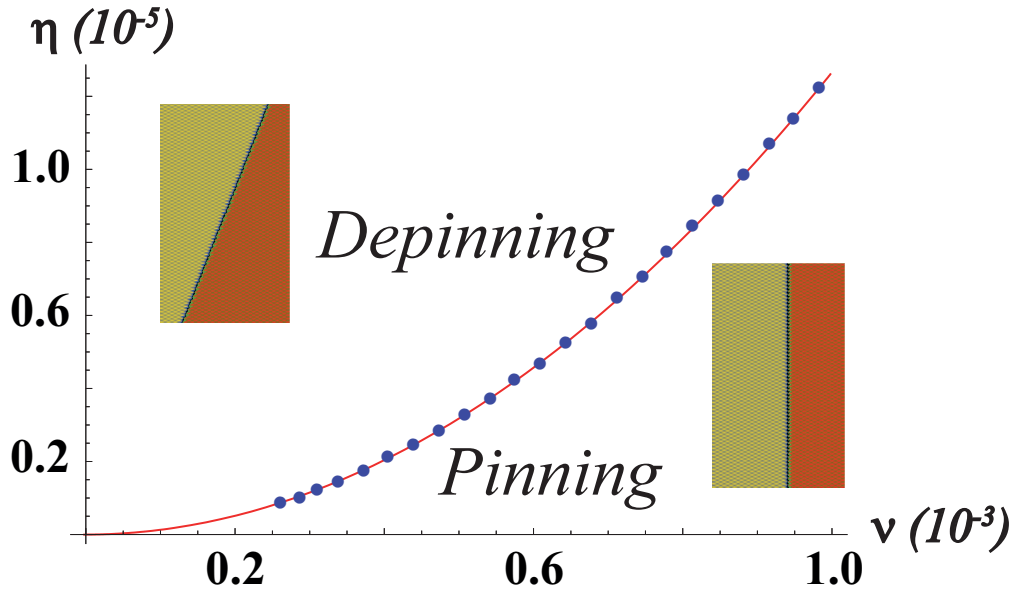


Figura 42: Transición *pinning-depinning*. La curva sólida es obtenida de (70) para el signo “+” y los círculos fueron obtenidos numéricamente en el modelo (64). En ambos, los parámetros casos son $\mu = 0.01$, $\omega = 0.1$ y $k = 1.0$. Los diagramas espacio-temporales, con el tiempo avanzando en la dirección vertical, representan dinámicas típicas observadas en ambas regiones.

En la zona de *pinning*, pasado el punto crítico, el corazón se propaga con una velocidad promedio representativa de la dinámica. Cuando $\partial_{tt}z \ll \mu \partial_{tz}$, el valor promedio de la velocidad se puede calcular [40, 41] desde la ecuación (69), obteniendo

$$\langle \partial_{tz} \rangle = \frac{\sqrt{\bar{\eta}^2 - \bar{\gamma}^2}}{\mu}, \quad (71)$$

donde $\langle \partial_{tz} \rangle$, en tiempos largos, representa el valor promedio para ∂_{tz} [13].

De este resultado se puede inferir que, para valores de η cercanos a η_c , la velocidad promedio crece como $\sqrt{\eta - \eta_c}$. Mientras que para valores de η muchos mayores que η_c , la velocidad promedio crece linealmente con η . En la figura 43, se encuentra la predicción de la fórmula (71), como también el resultado numérico. Se puede apreciar una gran concordancia entre ambos resultados. En la misma figura, en los tres diagramas espacio temporales presentes, se puede observar el movimiento del corazón para diferentes valores de η .

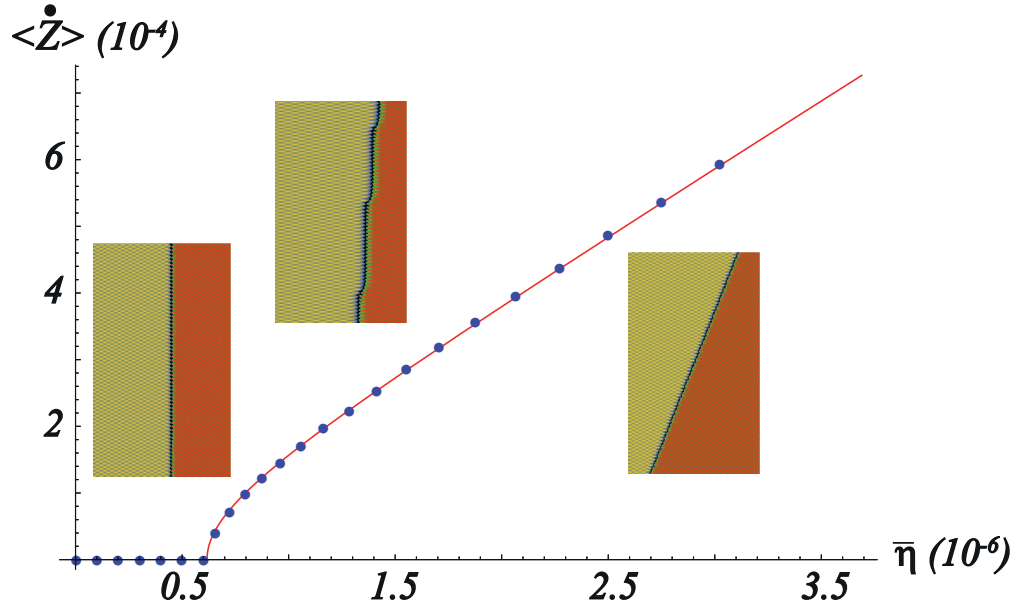


Figura 43: Diagrama de bifurcación de la velocidad promedio del frente que conecta ondas estacionarias en el modelo (64) como función de $\bar{\eta}$. La curva sólida se obtiene desde (43), mientras que los círculos se obtienen de la simulación del modelo. Para ambos casos, los parámetros son $\omega = 0.05$, $\mu = 0.005$, $k = 2.0$ y $\nu = 0.00025$. Los diagramas espacio-temporales, donde el tiempo avanza en el eje vertical, muestran la evolución del frente para las diferentes regiones.

De esta forma, el modelo (64) muestra la transición *pinning-depinning* que exhibía la cadena de péndulos. Además, en este modelo, se ha podido predecir esta transición, como también la velocidad promedio del corazón cuando se cruza el valor crítico del parámetro de bifurcación. La caracterización analítica de la dinámica promedio del frente, nos permite comprender cómo el acoplamiento entre las variaciones de la envolvente y las ondas estacionarias generan una región de *pinning* en este sistema.

Para el sistema físico original se obtuvieron resultados numéricos para la velocidad promedio del frente. Luego se buscó un ajuste que permitiese obtener una fórmula de la misma forma que (71). En la figura 44, se observan los resultados numéricos y el ajuste asociado para el frente en la cadena. Además, se puede ver la dinámica del corazón para tres valores distintos de la gravedad. Los resultados numéricos para la cadena de péndulos coinciden con el ajuste, también el movimiento en un período del corazón es cualitativamente el mismo que para el modelo (64).

6.4. Ondas localizadas disipativas

En sistemas extendidos espacialmente, las estructuras localizadas se pueden ver como patrones extendidos sobre dominios espaciales restringidos. Estas estructuras se suelen caracterizar por una

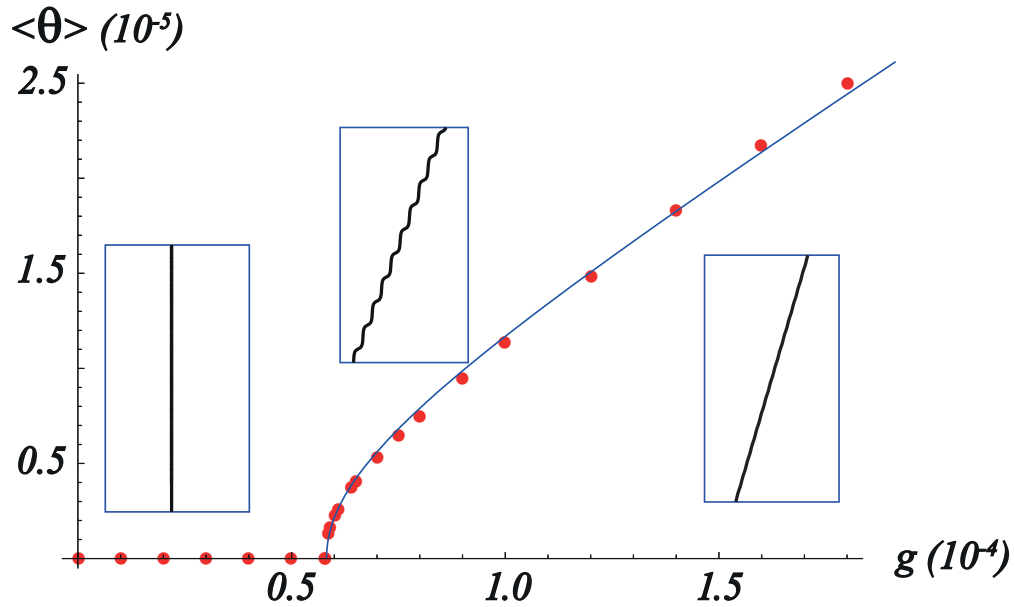


Figura 44: Diagrama de bifurcación de la velocidad promedio del frente que conecta ondas estacionarias en la cadena de péndulos, descrita por el modelo (44), como función de la gravedad. La curva sólida se obtiene desde buscando el ajuste de una función como 43, mientras que los círculos se obtienen de la simulación de la cadena. Los parámetros son $\omega = 4.0$, $\mu = 3.5$, y $a = 0.985$. Los diagramas espacio-temporales, donde el tiempo avanza en el eje vertical, muestran la evolución del frente para las diferentes regiones.

familia continua de parámetros, como posición, amplitud y ancho. En la naturaleza, existen muchos ámbitos diferentes donde se puede observar este tipo de soluciones: materiales magnéticos, cristales líquidos, reacciones químicas, fluidos, medios granulares y óptica no-lineal [42, 43, 44]. Es posible comprender las estructuras localizadas como partículas formadas por cierto número de células. Muchos trabajos experimentales y teóricos han estado dedicados a estudiar las estructuras localizadas, adicionalmente, la interacción entre diferentes estructuras han sido reportadas. También se han concentrado grandes esfuerzos en identificar diferentes mecanismos que generen estos estados. Por otro lado, se han desarrollado métodos de control con el fin de poder obtener nuevas aplicaciones, buscando utilizar estructuras localizadas primarias (borrables y reescribibles) como unidades o bits de almacenamiento [45].

En muchos de los trabajos, las estructuras localizadas se entienden como órbitas homoclinas en su correspondiente sistema dinámico espacial asociado (al considerar este sistema estacionario), el cual es reversible [46, 47, 48, 49]. En este contexto, se predice su existencia en una región de parámetros cerca de la zona de *pinning*, que exhibe biestabilidad entre un patrón y un estado uniforme [32]. Dentro de la región de *pinning*, el diagrama de bifurcación suele mostrar una secuencia infinita de bifurcaciones del tipo nodo-silla con forma de serpenteo. Cada bifurcación genera una estructura localizada con cierto número de células u oscilaciones que la constituyen [48]. Extensiones del mismo escenario se muestran en diferentes trabajos [50, 51, 52]. Recientemente, las estructuras localizadas han sido descritas como la interacción de frentes [53] y su existencia ha sido generalizada al caso de órbitas homoclinas que conectan dos estados patrones [54].

En la cadena de péndulos, cerca de la región de *pinning* en frentes que conectan ondas estacionarias en torno a la posición vertical y a la invertida, se observa una familia de estructuras localizadas con diferentes anchos. Los anchos de estas estructuras van aumentando en media longitud de onda de las ondas estacionarias del sistema. En la figura 45, se pueden observar dos estructuras localizadas de anchos diferentes para los mismos parámetros. Este comportamiento se repite para diferentes parámetros en torno a la región de *pinning* de los frentes.

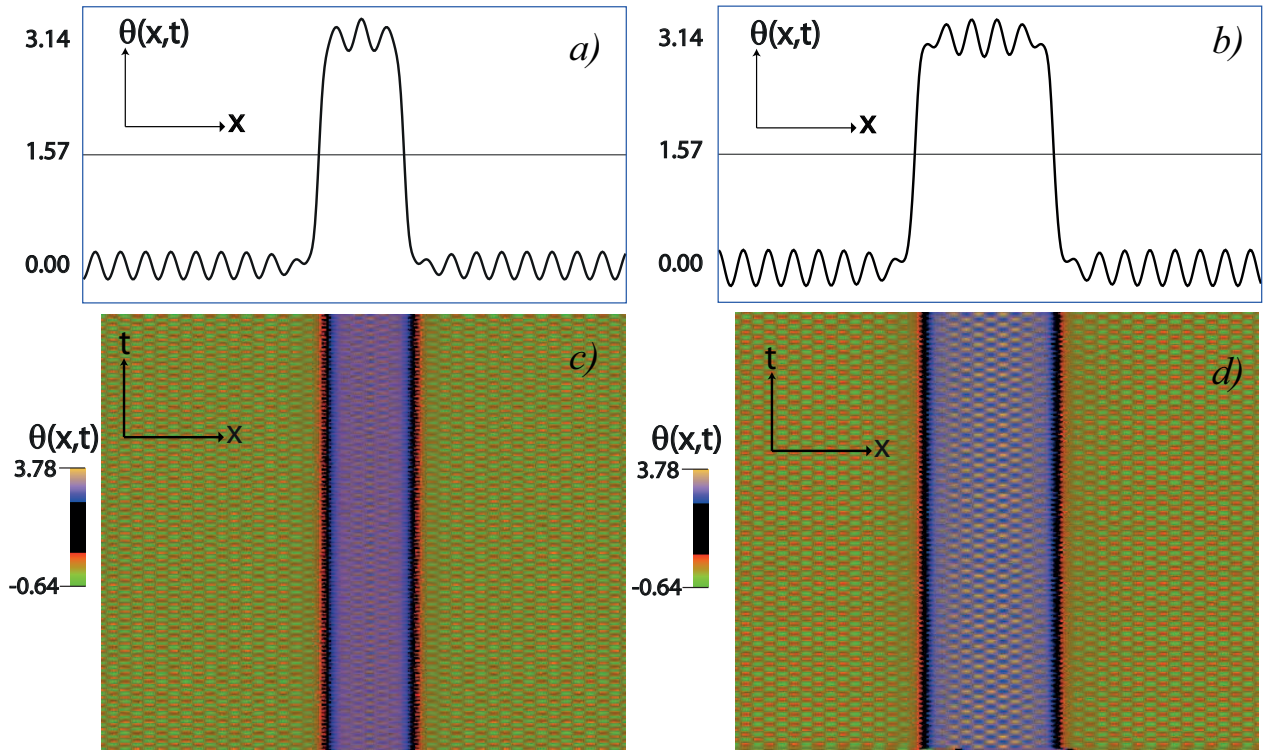


Figura 45: Ondas localizadas en la cadena de péndulos, descrita por el modelo (44). a), b), c) y d) son, respectivamente, perfiles y diagramas espacio-temporales de ondas localizadas en la cadena de péndulos, obtenidos para los parámetros $a = 0.83$, $\omega = 4.0$, $\mu = 3.0$, y $\omega_0^2 = 0.0001$.

Nuevamente, este sistema puede resultar muy complejo de estudiar. Por eso se buscó este nuevo tipo de estructuras localizadas en el modelo (64). En este modelo prototipo, que presenta frentes entre ondas estacionarias, también se han podido observar familias de estructuras localizadas para parámetros cerca de la zona de *pinning*. En la figura 46, se puede observar dos estructuras localizadas de anchos diferentes para los mismos parámetros. En este modelo, se repite el mismo fenómeno observado previamente en la cadena de péndulos.

Para entender la existencia, evolución dinámica y diagrama de bifurcación de estas estructuras localizadas, utilizaremos la estrategia de comprender estas estructuras como el resultado de la interacción de dos frentes. A estas les llamaremos ondas localizadas por tratarse se ondas y no de patrones. Por simplicidad, se considerará sólo el modelo (64), porque permite realizar un desarrollo analítico de este problema. Esto permitirá entender la dinámica universal del fenómeno en estudio. Así mismo, junto con poca disipación se considerará el límite de pequeño η y ν . De esta forma, se puede utilizar como *ansatz* para describir las ondas localizadas

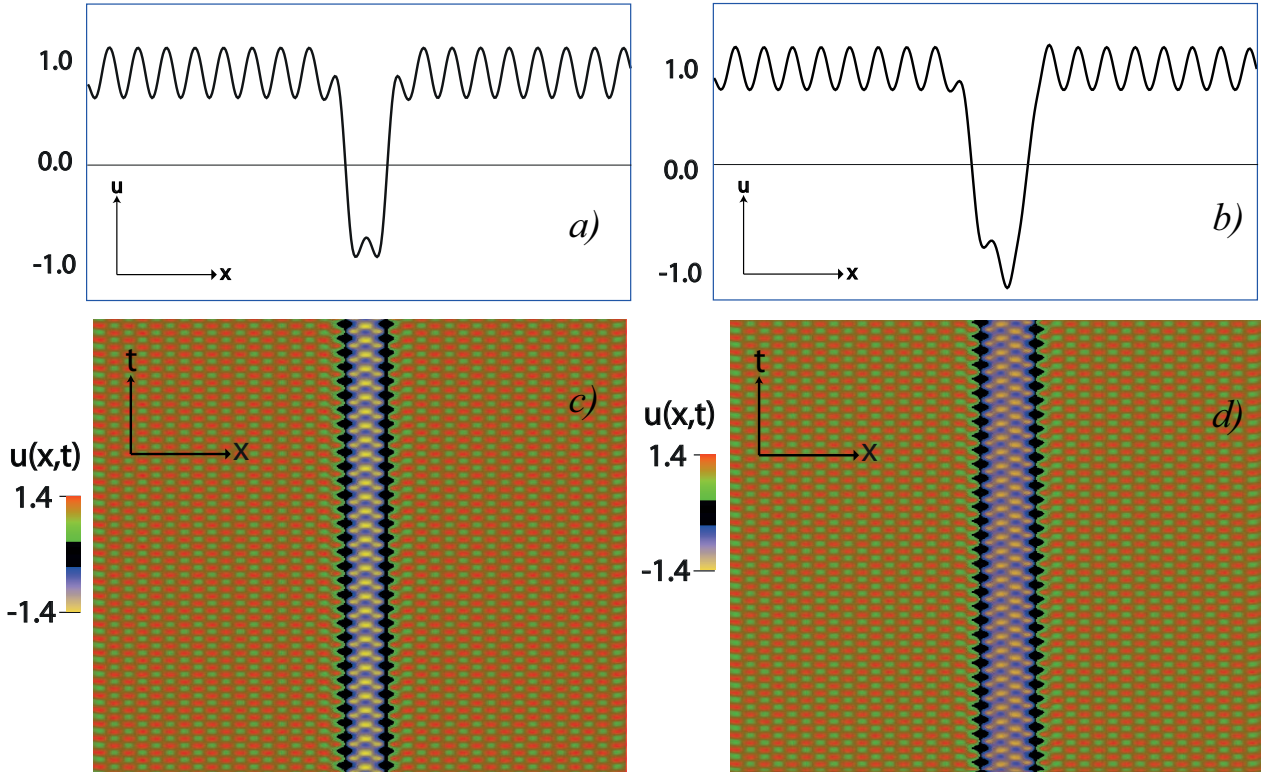


Figura 46: Ondas localizadas en el modelo (64). a), b), c) y d) son, respectivamente, perfiles y diagramas espacio-temporales de ondas localizadas en el modelo, obtenidos para los parámetros $\eta = 0.001$, $\omega = 1.0$, $\mu = 1.0$, $k = 1.0$ y $\nu = 0.6$.

$$u(x, t) = u_k(x + \delta(t)) + u_a(x - \delta(t)) - 1 + W,$$

donde W es una función correctiva pequeña ($W \ll 1$) y $2\delta(t)$ representa el ancho de la estructura localizada. Asumiremos que, la distancia entre los dos frentes es mucho más grande que el ancho del corazón de un frente ($\delta \gg 1$). Introduciendo este *ansatz* en la ecuación (64) y linealizando en W se puede obtener

$$\begin{aligned} & -(1 - 3(u_k + (u_a - 1))^2 + \partial_{xx})W = \\ & -\partial_x u_k (\mu \partial_t \delta + \partial_{tt} \delta) + \partial_x u_a (\mu \partial_t \delta + \partial_{tt} \delta) + (1 - 3u_k^2 + \partial_{xx})(u_a - 1) \\ & - 3u_k(u_a - 1)^2 - (u_{ak} - 1)^3 + \eta + \nu \sin(kx + \phi) \cos(\omega t). \end{aligned}$$

Introduciendo el producto interno definido en (66), el operador lineal aplicado sobre W es auto-adjunto. Para resolver esta ecuación, se utilizará la condición de solubilidad [2] en forma similar a la utilizada para obtener la ecuación (67). En esta ocasión, u_k no pertenece al kernel del operador (no es auto-vector), sin embargo resulta ser un cuasi auto-vector. Después de algunos cálculos se puede obtener

$$\begin{aligned} \langle \partial_x u_k | \partial_x u_k \rangle (\mu \partial_t \delta + \partial_{tt} \delta) &= \langle \partial_x u_k | -3u_k(u_a - 1)^2 - (u_a - 1)^3 \rangle \\ &+ \langle \partial_x u_k | \partial_x u_k \rangle \left(\frac{3\eta}{\sqrt{2}} - \gamma \sin \left[k\delta + \frac{\phi}{2} \right] \text{Cos}(\omega t) \right), \end{aligned}$$

donde ϕ puede ser 0 o π debido a la simetría que existe cada π en las ondas estacionarias. Usando la solución de u_k y u_a , después de realizar diferentes cálculos, se obtiene

$$\ddot{\delta} = -\mu\dot{\delta} - 12e^{-2\sqrt{2}\delta} + \frac{3\eta}{\sqrt{2}} - \gamma \sin\left(k\delta + \frac{\phi}{2}\right) \cos(\omega t).$$

Luego, la dinámica de dos frentes interactuando satisface una ecuación muy similar a (67), agregando un término exponencial de interacción, dando cuenta del efecto de un frente sobre el otro. De esta forma, los frentes están sujetos a una fuerza de atracción entre ellos que decae exponencialmente con la distancia. De forma similar a lo realizado para obtener la ecuación (69), se puede obtener una ecuación promedio para la distancia entre los dos frentes. Es decir, una ecuación para el ancho promedio de la onda localizada:

$$\ddot{\zeta} - \mu\dot{\zeta} = f(\zeta) = -12e^{-2\sqrt{2}\zeta} + \bar{\eta} - \bar{\gamma} \sin(2k\zeta + \phi), \quad (72)$$

donde

$$\zeta \equiv \frac{\omega}{2\pi} \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}} \delta dt.$$

La figura 47 muestra los puntos de equilibrio como función de $\bar{\eta}$. Estas curvas se obtienen directamente de (72). De esta ecuación y figura se puede concluir que, para valores grandes de η , no existen ondas localizadas de equilibrio, mientras que, para valores pequeños de η , pueden haber muchos estados de equilibrio.

6.5. Conclusiones

En la últimas décadas, se han desarrollado importantes esfuerzos en entender la existencia, evolución dinámica y diagrama de bifurcaciones de estados localizados en sistemas fuera del equilibrio. En una dimensión espacial, una forma sencilla de entender las estructuras localizadas es considerando que ellas están compuestas por dos frentes. En este contexto, se suelen observar estas estructuras en regiones de biestabilidad, estando bien caracterizadas cuando están presentes estados patrones.

En este capítulo, se ha desarrollado el caso en que los estados conectados mediante frentes son ondas estacionarias. Se ha concluido que estos frentes presentan regiones de bloqueo, es decir transición *pinning-depinning*. A su vez, existe una dinámica promedio que permite obtener una caracterización adecuada de esta transición, como también la velocidad promedio de los frentes. Por otro lado, estos frentes bloqueados permiten la existencia de ondas localizadas, el equivalente a estructuras localizadas entre patrones. Todos estos fenómenos se han podido caracterizar analíticamente en el modelo (64). Además, estos resultados han sido comprobados numéricamente. En la cadena de péndulos, se han podido obtener resultados numéricos. Estos permiten extender la comprensión en un modelo sencillo a cualquier sistema que presente coexistencia entre dos ondas estacionarias.

Existen muchos sistemas que presentan ondas estacionarias, sin embargo la existencia de biestabilidad entre estas no es tan frecuente en la naturaleza. En consideración de los capítulos previos, se puede concluir que en sistemas forzados paramétricamente a alta frecuencia es posible obtener biestabilidad de ondas estacionarias. Además, en el caso de la cadena de péndulos, este mismo forzamiento podría generar regiones de bloqueo y ondas localizadas.

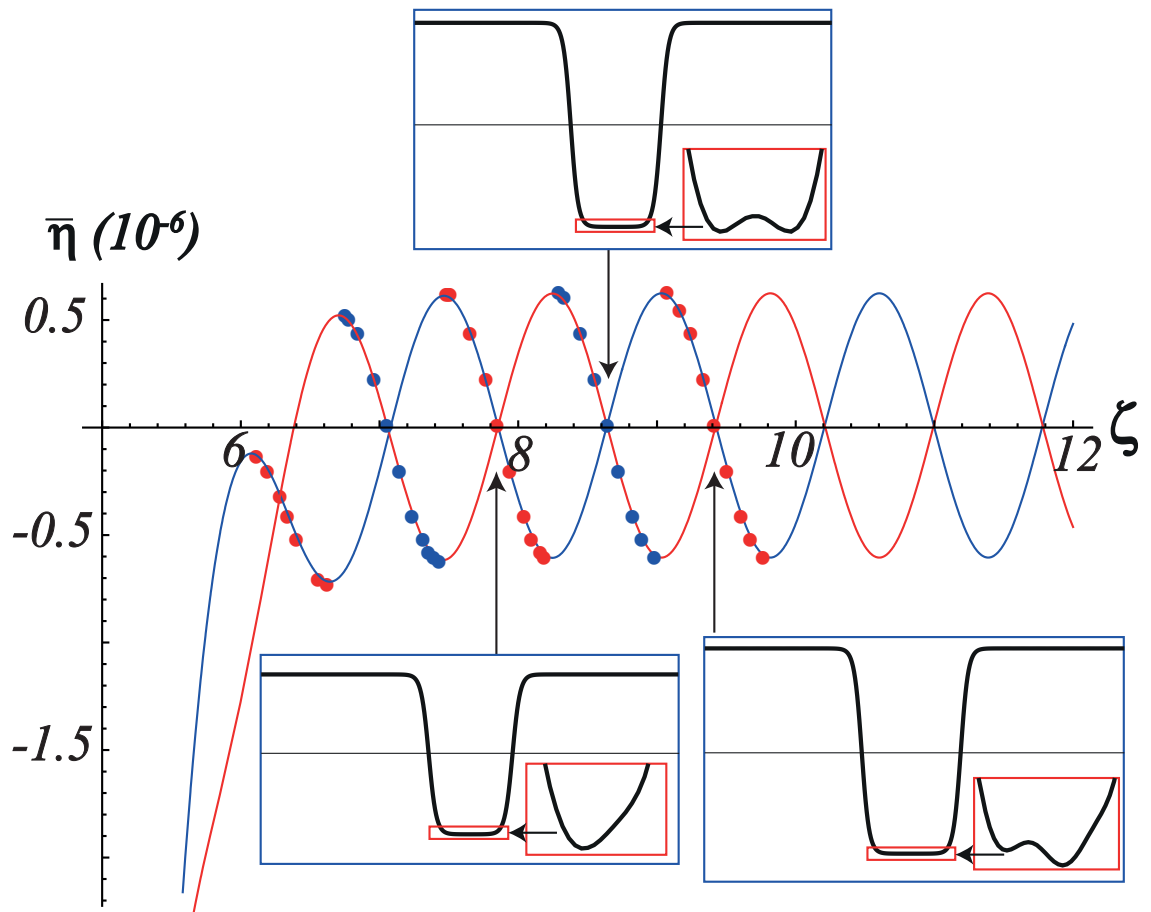


Figura 47: Diagrama de bifurcación tipo serpiente para el modelo (64). ζ representa la mitad del ancho de las ondas localizadas en función de $\bar{\eta}$. Las curvas solidas (punteadas) representan las estructuras localizadas estables (inestables), obtenidas de la ecuación (72). Los círculos representa la mitad del ancho de las ondas localizadas obtenidas numéricamente.

7. Origen del fenómeno *pinning-depinning* en patrones monoestables con advección

7.1. Introducción

De acuerdo a lo indicado anteriormente, la formación de patrones lejos del equilibrio ocurre en diversos dominios de las ciencias naturales [1]. Estructuras generadas en el primer umbral de inestabilidad espacial pueden ser estacionarias o del tipo oscilatorias.

En algunos casos particulares, los patrones continuamente se propagan. Este suele ser el caso de estructuras estacionarias en sistemas con coexistencia de varios estados. Las estructuras localizadas que conectan un estado con otro suelen propagarse debido a la diferencia de energía entre los estados. Para el caso de estructuras periódicas, un flujo advectivo genera de forma continua un arrastre de estas [55, 56]. Sin embargo, en ambas situaciones se ha observado que las estructuras pueden estar quietas pese a la existencia de fuerzas de arrastre [57, 58, 59, 60, 61, 62, 63].

En los sistemas con multiestabilidad, este fenómeno se ha denominado *pinning* y se había previsto

por Y. Pomeau hace más de 20 años [32, 64]. Como ya se mencionó, este es el caso de sistemas que conectan patrones con estados homogéneos [65, 66] y sistemas que conectan dos estados patrones [67]. En estos sistemas, el *pinning* es el resultado de una competición. Esta es provocada por la advección generada por la diferencia de energía entre los estados y la modulación espacial. La primera produce propagación, la segunda tiende a bloquear el movimiento. De esta forma se genera una barrera de potencial periódico para el corazón del frente [57]. Dependiendo del efecto dominante, el frente puede estar bloqueado para una región de parámetros denominada región de *pinning*. Sobre un valor crítico en los parámetros de control, se produce la transición *pinning-depinning* y la estructura localizada (frente o muro de dominios en este contexto) se propaga con saltos periódicos. Esto se realiza de forma equivalente a como se mostró en el capítulo 6. La velocidad del frente tiende asintóticamente a una constante en el tiempo y el espacio al aumentar aún más el parámetro de control .

En sistemas monoestables, un patrón puede fluir por un efecto espontáneo de una fuerza de arrastre [68] o puede ser forzado a propagarse [61, 62, 69]. En este último caso, el efecto *pinning* está también presente. Trabajos teóricos sobre el *pinning* han discutido el efecto del quiebre espontáneo de la simetría de traslación [70].

En el capítulo anterior, se estudió el fenómeno de *pinning* en sistemas con multiestabilidad entre ondas estacionarias, avanzando un paso más en la comprensión de este fenómeno. Sin embargo, aún no es claro que exista un marco conceptual general que permita dilucidar el mecanismo de bloqueo subyacente en los sistemas monoestables. Por lo anterior, es necesario un trabajo teórico que permita unificar la comprensión de este fenómeno con el conocido efecto de *pinning* en sistemas multiestables.

7.2. *Pinning-depinning* en un modelo prototipo de patrones

En sistemas extendidos unidimensionales con advección, un patrón se forma después del primer umbral de inestabilidad. Este fluye a causa de la asimetría producto de la interacción no local. El modelo prototipo utilizado para estudiar este efecto será la ecuación de Swift-Hohenberg convectivo [3]:

$$\partial_t u = \varepsilon u - u^3 - (\partial_{xx} + q^2)^2 u + \gamma \partial_x u + \delta u^2, \quad (73)$$

donde $u(x, t)$ es un campo escalar, ε es el parámetro de bifurcación, q es el parámetro que controla el número de onda del patrón, γ da cuenta de la advección que induce la advección o fuerza de arrastre del patrón y δ es el coeficiente de la respuesta no lineal.

El modelo de Swift-Hohenberg se introdujo para describir la aparición de la convección de Rayleigh-Benard, aunque recientes generalizaciones han sido utilizadas intensivamente para dar cuenta de la formación de patrones en diversos sistemas [3].

La ecuación (73) describe una bifurcación supercrítica, donde la variable y los parámetros escalan como $u \sim \varepsilon^{1/2}$, $q \sim O(1)$, $\partial_x \sim \varepsilon^{1/2}$ y $\partial_t \sim \varepsilon \ll 1$. Para $\varepsilon < 0$ el sistema presenta un estado de equilibrio uniforme $u(x, t) = 0$. En $\varepsilon = 0$, el sistema bifurca. El estado uniforme se vuelve inestable, dando lugar a la formación de patrones. Para $\varepsilon > 0$ la amplitud del patrón, de número de onda

$k_c = \pm q$, crece como raíz cuadrada de ε .

Para develar el fenómeno *pinning-depinning* en el modelo (73), se realizaron simulaciones numéricas con dos tipos distintos de condiciones de borde. La condición de borde tipo Neumann ($\partial_x u = 0$ en los bordes) y condiciones de borde periódicas.

Primero se estudió el sistema con condiciones de borde tipo Neumann. En este caso, la figura 48 muestra la velocidad media del patrón $\langle v \rangle$ para diferentes valores del parámetro de advección γ . Sorprendentemente, bajo estas condiciones, el sistema exhibe una región de *pinning*. Dentro de esta región el patrón es empujado hacia un lado, hasta llegar a un estado estacionario después de un transiente. En la figura 48b), se puede observar el estado final de esta dinámica. Como se ilustra en la figura 48a) y 48d), el patrón se mueve a saltos periódicos justo después de la región de *pinning*. Esta condición de borde impone una variación espacial fuerte cerca de ellos, tal como se puede observar en la figura 48c).

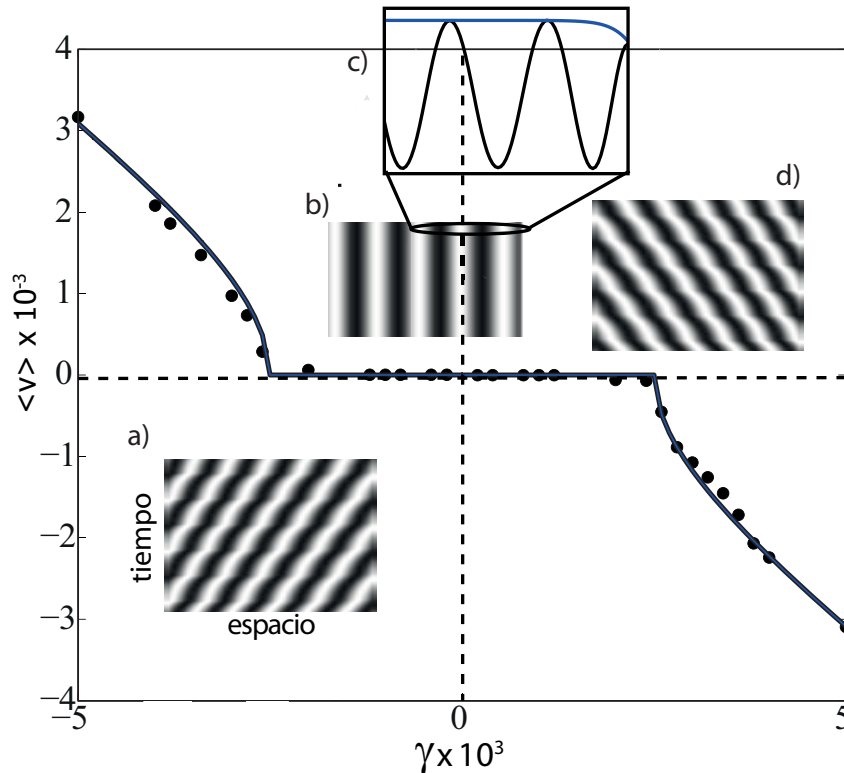


Figura 48: Velocidad promedio de fase del patrón versus el parámetro de arrastre, bajo condiciones de borde tipo Neumann. Se utilizaron los parámetros $\varepsilon = 0.09$, $q = 0.5$, $\delta = 1$. Los puntos corresponden a los resultados numéricos obtenidos del modelo (73), mientras que la línea sólida corresponde al ajuste de la ecuación (78). Las figuras a) ($\gamma = -0.0032$), b) ($\gamma = -0.002$) y d) ($\gamma = 0.0032$) corresponden a diagramas espacio-temporales del campo u . La figura esquemática c) da cuenta de la envolvente del patrón en b).

Por otro lado, para condiciones de borde periódicas, la figura 49 muestra la velocidad media del patrón $\langle v \rangle$ para diferentes valores del parámetro de advección γ . Con este tipo de condiciones de

borde, el sistema no exhibe región de *pinning*, pues para cualquier γ distinto de cero el sistema tiene velocidad. Como se ilustra en las figuras 49a) y 49c), el sistema se mueve con velocidad constante c . En este caso, el patrón muestra una envolvente constante en todo el espacio (ver figura 49b).

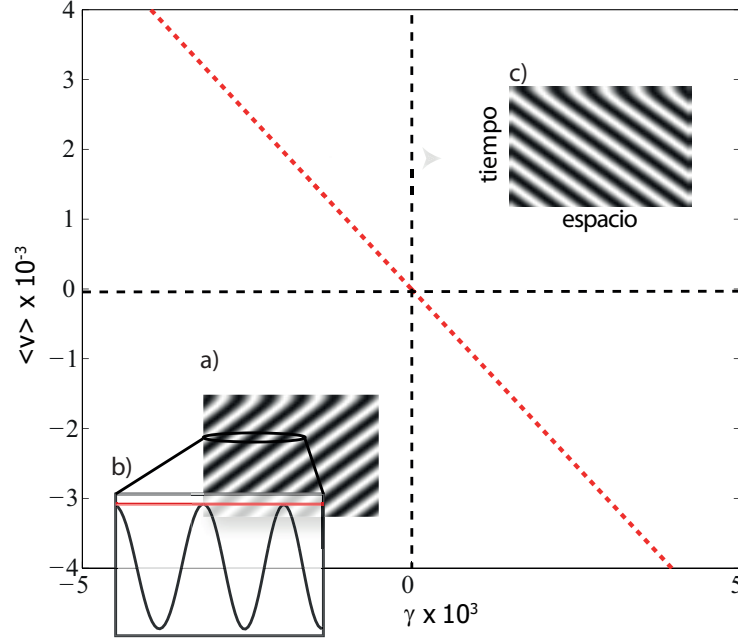


Figura 49: Velocidad promedio de fase del patrón versus el parámetro de advección, bajo condiciones de borde periódicas para la ecuación (73). Se utilizaron los parámetros $\varepsilon = 0.09$, $q = 0.5$, $\delta = 1$. Las figuras a) ($\gamma = -0.001$) y c) ($\gamma = 0.001$) corresponden a diagramas espacio-temporales del campo u . La figura esquemática b) da cuenta de la envolvente del patrón en a).

Es importante notar que estas variaciones, producidas por las condiciones de borde tipo Neumann, también puede ser generadas por cambios de los parámetros en el espacio. Por ejemplo, una descripción gaussiana del parámetro $\varepsilon = \varepsilon_0 + a_0 e^{-(x-x_0)}$ impone variaciones suaves de la amplitud en los bordes. Simulaciones numéricas muestran que este tipo de cambios en los parámetros, permite observar el mismo tipo de comportamiento que las condiciones de borde tipo Neumann, es decir una clara región de *pinning*.

De los resultados anterior, se deduce que las condiciones de borde pueden inducir variaciones de la envolvente del patrón. Estas son comparables con la modulación su la amplitud. Como consecuencia, el sistema exhibe un acoplamiento modulación-envolvente cerca de los bordes. Esto genera el efecto *pinning-depinning*, tal como los mostrados en medios modulados espacialmente [65, 66, 67].

Para comprobar lo mencionado anteriormente, se considerará un enfoque de ecuaciones de amplitud en el modelo (73). Cerca de la bifurcación ($|\varepsilon| \ll 1$), se utilizará el *ansatz*

$$u(x, t) = A(y = \sqrt{\varepsilon}x, T = \varepsilon t) e^{ik_c x / \sqrt{3-2\delta}} + c.c. + W. \quad (74)$$

Al introducir este en la ecuación (73) y aplicando condición de solubilidad de la forma usual, se puede obtener

$$\varepsilon \partial_T A = \varepsilon A - |A|^2 A + i\beta A + \alpha \varepsilon^{1/2} \partial_y A + \varepsilon \partial_{yy} A, \quad (75)$$

donde $\beta = q\gamma$ representa la velocidad de fase y $\alpha = \gamma/2q$ representa la velocidad de grupo. Esta ecuación de amplitud usual no exhibe ningún bloqueo de la velocidad de fase. Es decir, no presenta el fenómeno de *pinning*.

En efecto, la forma usual de utilizar ecuaciones de amplitud tiene como base la separación de las escalas [71] entre las oscilaciones del patrón y las variaciones de la envolvente. Esta separación es fundamental al utilizar la condición de solubilidad. Para esto se consideró el producto interno

$$\langle f|g \rangle = \frac{1}{\tau} \int_y^{y+\tau} f(y') g^*(y') dy',$$

con $\tau = \frac{2\pi}{q^2} \sqrt{\varepsilon}$.

Cuando se considera que ε tiende a 0, se obtiene sin mayores dificultades (75), lo que es equivalente a suponer que $\partial_x A = \sqrt{\varepsilon} \partial_y A \ll k_c A$. Sin embargo, condiciones de borde como las de Neumann puede romper esta separación de escalas, ya que hacen que la envolvente varíe. Esto hace necesario realizar un cálculo más preciso para obtener la ecuación de amplitud correspondiente.

Para esto es necesario considerar que, si $f(y) = h(A(y)) e^{iny/\tau}$ y $g(x) = e^{iy/\tau}$, el producto interno entre ambos ya no será 0 para $n \neq 1$, como si lo era al considerar separación de escalas. De esta forma, se puede considerar que el producto interno para este caso es [18]

$$\begin{aligned} \langle h(A(y)) e^{iny/\tau} | e^{iy/\tau} \rangle &= \frac{1}{\tau} \int_y^{y+\tau} h(A(y')) e^{i(n-1)y'/\tau} dy' \\ &= \tau \left[\frac{h(A(y+\tau)) e^{i(n-1)y/\tau} - h(A(y)) e^{i(n-1)y/\tau}}{i\tau(n-1)} \right] + h.o.t. \\ \langle h(A(y)) e^{iny/\tau} | e^{iy/\tau} \rangle &\approx \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{i(n-1)q^2} \partial_y h(A) e^{i(n-1)yq^2/(2\pi\sqrt{\varepsilon})}. \end{aligned} \quad (76)$$

De este modo, al introducir (74) en (73) y aplicar la condición de solubilidad, considerando (76), se obtiene la siguiente ecuación corregida:

$$\begin{aligned} \varepsilon \partial_T A &= \varepsilon A - |A|^2 A + i\beta A + \alpha \varepsilon^{1/2} \partial_y A + \varepsilon \partial_{yy} A \\ &\quad - i\rho \sqrt{\varepsilon} (\partial_y A^2 e^{ik_c y/\sqrt{\varepsilon}} - \partial_y |A|^2 e^{-ik_c y/\sqrt{\varepsilon}} - \frac{1}{3} \partial_y (A^*)^2 e^{-3ik_c y/\sqrt{\varepsilon}}), \end{aligned} \quad (77)$$

donde $\rho = \frac{2\delta\pi}{q^2\sqrt{3-2\delta}}$.

Es importante notar que los términos no resonantes de la ecuación (77) se vuelven relevantes cuando la derivada espacial de la envolvente deja de ser despreciable, es decir cerca de los bordes. Esto lleva a un acoplamiento entre la envolvente y la modulación espacial. Este tipo de término aparece naturalmente cuando se tienen condiciones de borde finitas o variaciones espaciales en los parámetros, el cual es un caso usual en la realidad. Hay que destacar que, cuando ε tiende a 0, el aporte de estos términos a la dinámica es exponencialmente pequeño, tal como fue predicho por Y. Pomeau [64].

Para enfatizar los efectos de estos términos correctivos recientemente encontrados, se han realizado simulaciones numéricas de la ecuación (77). Se consideraron dos condiciones de borde diferentes: condiciones tipo Neumann ($\partial_x A = 0$) y condiciones tipo Dirichlet ($A = 0$). Esta última corresponde a una condición de borde absorbente.

Se considerará la velocidad promedio del patrón v como la variación temporal de la de fase promedio en el espacio, es decir

$$v = \frac{d \langle \phi(x, t) \rangle_x}{dt},$$

donde

$$\langle \phi(x, t) \rangle_x \equiv \frac{1}{L} \int_0^L \phi(x, t) dx.$$

La fase es $\phi(x, t)$ y $L = 600$ es el largo del sistema. El promedio temporal de v será $\langle v \rangle$.

En la figura 50, se pueden ver los resultados numéricos de $\langle v \rangle$ para el modelo (77) con condiciones de borde tipo Neumann. En este caso, la envolvente de la amplitud es homogénea en el espacio. Entonces, los términos no resonantes son 0 y la velocidad promedio crece proporcional al parámetro de advección β . Esto se debe a que la condición de Neumann en la ecuación de amplitud no equivale a esta misma condición en la ecuación de partida (73). Es por esto se requiere de otra condición de borde.

En la figura 50, se pueden ver los resultados numéricos de la velocidad promedio para el mismo modelo con condiciones de borde tipo Dirichlet. Con estas condiciones, la envolvente de la amplitud varía de forma importante en los bordes. Lo anterior genera que los términos no resonantes sean relevantes, ejerciendo un rol muy importante en la evolución temporal del sistema. Esto significa que existe una región de *pinning* para el parámetro β . En las figuras 50a, 50b y 50c, se muestra la reconstrucción del campo $u(x, t) = A(x, t)e^{ik_c x} + c.c..$ El patrón se mueve con saltos periódicos sobre el punto crítico β_c , tal como se ilustra en la figura 50a y 50c. Mientras en la figura 50b, se puede observar al patrón en la región de *pinning*.

Así mismo, se sabe que la velocidad promedio cerca del punto crítico debe crecer como raíz cuadrada. Esto se debe a que surge por una bifurcación del tipo nodo-silla. Además, esto se observa en los gráficos presentados previamente en este capítulo. Sin embargo, lejos del punto crítico ($\beta \gg \beta_c$) sabemos que la velocidad promedio debe crecer proporcional a β , ya que en este régimen el mecanismo dominante es la fuerza de arrastre. Esto se ve en los gráficos y también se puede deducir al

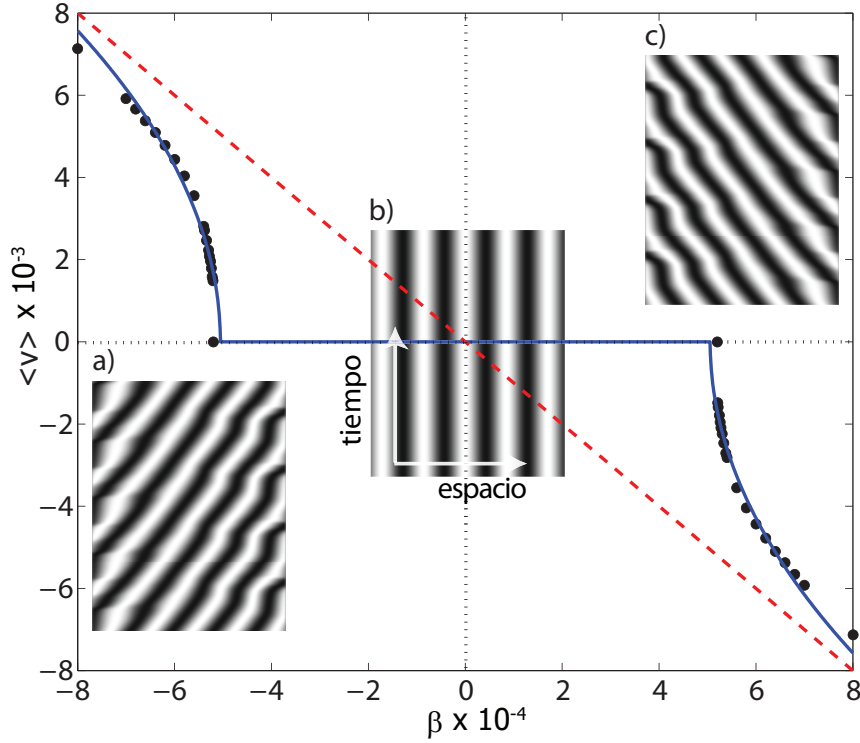


Figura 50: Velocidad de fase promedio del patrón versus el parámetro de advección para la ecuación (77), con los parámetros $\varepsilon = 0.4$, $\rho = 0.1$ y $L = 600$. La línea roja discontinua representa la velocidad para condiciones de borde tipo Neumann. Los puntos son los resultados numéricos para condición de borde de Dirichlet, mientras que la línea sólida es el ajuste de la fórmula (78) con $\beta_c = 0.00045$. Las figuras a ($\gamma = -0.0007$), b ($\gamma = 0.0003$) y c ($\gamma = 0.0007$) corresponden a diagramas espacio-temporales del campo u reconstruido desde A .

evaluar la ecuación (75) o en (77), despreciando los términos no resonantes. De esta manera, la velocidad promedio será de la misma forma que en el capítulo anterior,

$$\langle v \rangle = \sqrt{\beta^2 - \beta_c^2}. \quad (78)$$

Con este resultado, se han podido ajustar todas las curvas en los gráficos de velocidad versus el parámetro de control.

7.3. Verificación en un sistema experimental

Para probar experimentalmente el fenómeno de *pinning-depinning* en un patrón monoestable con advección, se considera el sistema óptico con retroinyección descrito en las referencias [72, 73, 74, 75]. Este consiste en un medio Kerr sujeto a una retroinyección óptica debido a un espejo inclinado en un ángulo θ (Ver figura 51). Este sistema está formado por un cristal líquido (LC) irradiado por el haz de un láser (F), el cual es reflejado nuevamente a la muestra (B) por un espejo plano (M), que se encuentra a una distancia d . El haz B llega a una distancia h del haz incidente F , tal como se ilustra en la misma figura. El haz reflejado es monitoreado después de la muestra (B_{out}).

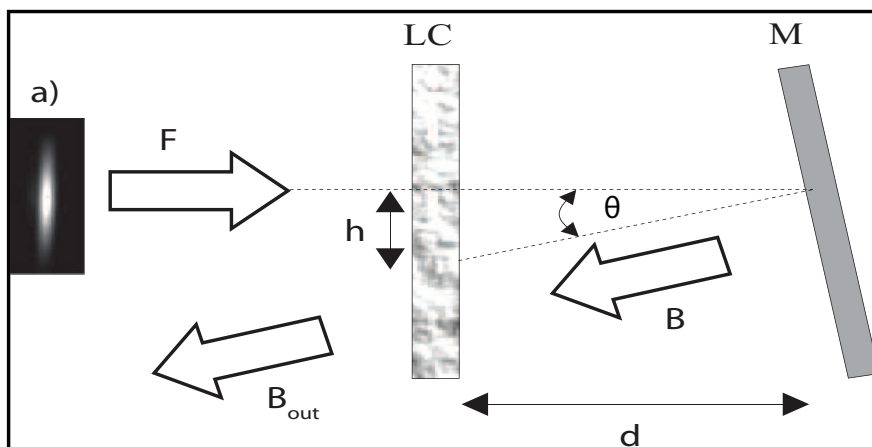


Figura 51: Montaje experimental de un medio Kerr con retroinyección óptica. LC es el cristal líquido, M el espejo, F el haz inicial del láser, B el haz reflejado, B_{out} el haz de salida enviado a una cámara, d es la distancia de LC a M , θ es el ángulo de inclinación del espejo y h es la distancia a la que es reinyectado B con respecto a F . En a) se puede observar el haz del láser.

La intensidad del láser tiene un perfil transversal gaussiano, lo cual se puede interpretar como una especie de condición de borde de Dirichlet suavizada. Esta intensidad, correspondiente a B_{out} , se ilustra en la figura 51a. Lo anterior, sumado a la advección inducida por la traslación en la retroinyección h , dan los ingredientes necesarios para observar el fenómeno *pinning-depinning* en un patrón monoestable.

Del modelo de este sistema es posible obtener una ecuación de amplitud como (75), tal como ha sido propuesto por Dalessandro y Firth [76]. Es evidente que, al considerar los términos no resonantes, se debe obtener una ecuación como (77). De esta forma, se puede esperar obtener una velocidad promedio equivalente a la del modelo (73).

Como se puede ver en la figura 52, las predicciones teóricas realizadas previamente concuerdan de buena forma con los resultados experimentales. Es decir, la velocidad media de la fase es proporcional a $\sqrt{h^2 - h_c^2}$ cerca de la región de *pinning*. Este resultado confirma las observaciones reportadas por Ackemann et ál [63]. Esto permite afirmar que las variaciones espaciales de los parámetros son capaces de generar el fenómeno *pinning-depinning* experimentalmente y que las ecuaciones de la forma (78) son correctas para este tipo de fenómenos.

Para este caso particular, las variaciones de la envolvente, que se acoplan con el patrón, se deben al perfil gaussiano del láser (Figura 52a). En efecto, el acoplamiento está presente en todo el espacio, debido a que continuamente hay variaciones de la envolvente. En la figura 52b, se puede ver una grabación espacio-temporal del perfil del patrón en la región de *pinning*. Después del punto de transición se espera ver un movimiento a saltos, como el que se ilustra en la figura 52c. La periodicidad no exacta se debe al ruido del sistema.

7.4. Conclusiones

Se puede concluir que, bajo la presencia de una fuerza de arrastre, un sistema que posee un patrón monoestable puede tener una región de *pinning* siempre que existan variaciones de la envolvente

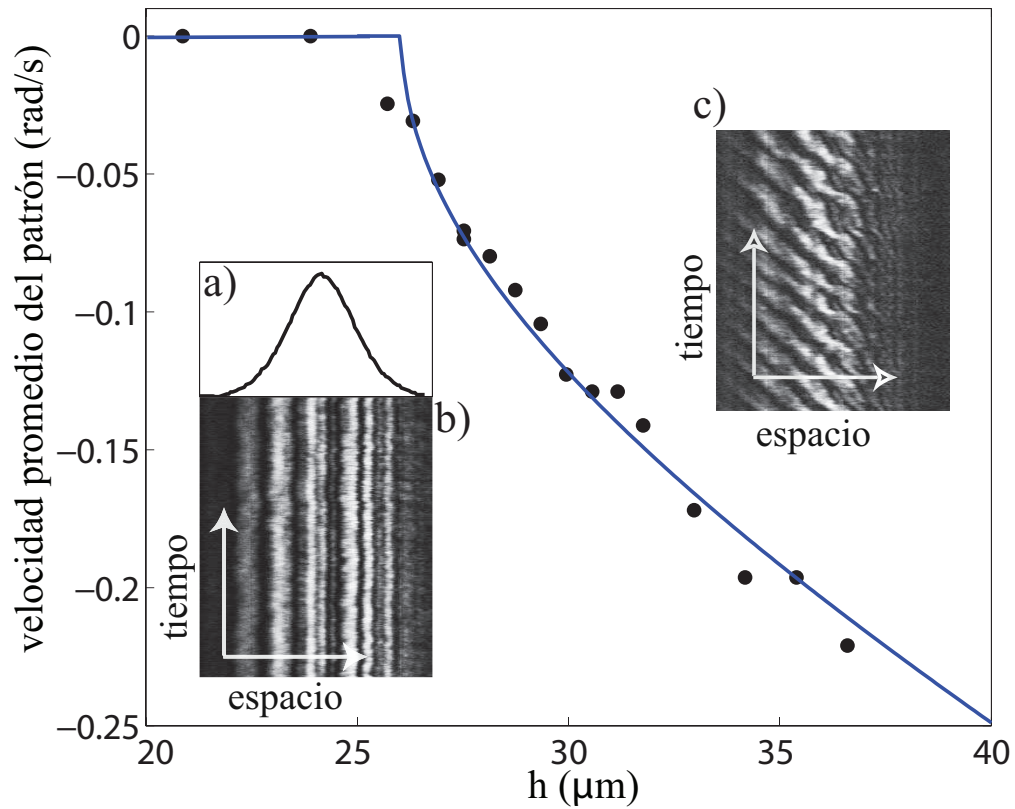


Figura 52: Velocidad de fase promedio versus h , en un medio Kerr sujeto a retroinyección óptica. El montaje corresponde al de la figura 51. Los potencia del láser es $I = 634W/cm^2$ y $d = 5mm$. Los puntos corresponden a los resultados experimentales, mientras que la línea sólida es el ajuste de la ecuación (78). En a) se puede ver el perfil del láser. En b) y c) se observa el diagrama espacio-temporal para el patrón antes y después de la transición *pinning-depinning*, respectivamente.

del patrón. Esto se traduce en una generalización de la teoría sobre el efecto *pinning-depinning* en sistemas con multiestabilidad hacia sistemas monoestables. Lo anterior permite completar el fenómeno de *pinning* estudiado en el capítulo previo, ayudando a comprender que este no sólo existe en sistemas con multiestabilidad.

8. Conclusion

Los sistemas fuera del equilibrio pueden exhibir diferentes estructuras, como es el caso de ciclos límites, patrones y ondas estacionarias. Estas estructuras suelen emerger cuando el forzamiento (energía inyectada) supera un valor crítico, generando dinámicas complejas. En esta tesis, se estudiaron fundamentalmente sistemas con forzamiento de alta frecuencia.

En el caso de un sistema sin acoplamiento espacial, un forzamiento de alta frecuencia es capaz de inducir un oscilador efectivo. Al mismo tiempo, este oscilador puede entrar en resonancia con el forzamiento externo. Esta resonancia paramétrica efectiva (EPR), puede existir para baja o alta disipación, como también en sistemas que originalmente eran un oscilador o aquellos que no.

La EPR se caracterizó para un modelo prototipo, encontrando la curva de inestabilidad gracias a la utilización del efecto Kapitza y al método de ecuaciones de amplitud. Se comprobó la predicción realizada por medio de simulaciones numéricas. Este fenómeno fue confirmado experimentalmente por un péndulo físico forzado a alta frecuencia.

Al extender el sistema, mediante acoplamiento en el espacio, se observó una inestabilidad espacial que precede a la EPR sin espacio. La caracterización de esta inestabilidad se puede realizar con una estrategia equivalente a la utilizada en la EPR.

Se predijo la curva de inestabilidad de este sistema al realizar una expansión modal. Con esta se lograron resultados precisos en una cadena de péndulos forzada paramétricamente.

Para obtener el crecimiento de las ondas estacionarias generadas al cruzar el umbral de estabilidad, es posible utilizar la estrategia de formas normales para un solo modo. El resultado de este desarrollo se pudo comprobar numéricamente, mostrando una precisión incluso para ángulos cercanos a uno.

Es importante destacar que, bajo la existencia de dos ondas estacionarias con diferente energía, se encontró una región de bloqueo para el frente que conecta ambos estados. Dicho de otra forma, se observa la existencia de regiones donde una onda estacionaria no invade a otra, pese a tener una ventaja energética.

La curva de la transición bloqueo-desbloqueo se calcula analíticamente para un modelo sencillo de ondas estacionarias, verificando de forma numérica este resultado. En sistemas más complejos, se puede comprobar su validez de forma numérica.

La velocidad promedio del frente que conecta ambas ondas estacionarias se calcula analíticamente para el modelo propuesto, comprobando esto de forma numérica. Resulta sencillo verificar numéricamente los resultados obtenidos para modelos complejos.

Con la existencia del fenómeno de bloqueo-desbloqueo, es factible caracterizar las estructuras localizadas que conecten diferentes ondas estacionarias. Este cálculo permite predecir un diagrama de bifurcación tipo serpiente, el cual se comprueba numéricamente.

Es posible concluir que, para sistemas con dos ondas estacionarias, existe una región de bloqueo equivalente a las ya conocidas para sistemas con patrones.

Este fenómeno de bloqueo no sólo existe en sistemas de multiestabilidad. Se mostró que para un sistema que exhibe un patrón monoestable con advección también existe la región de bloqueo.

En este caso, se comprendió que es fundamental el acoplamiento entre el patrón y la envolvente para generar este fenómeno, siendo los bordes los que permitieron el acoplamiento en cuestión. También se evidenció que las variaciones espaciales de los parámetros pueden generar el mismo tipo de fenómeno.

El desarrollo de ecuaciones de amplitud enmendadas es una herramienta útil para predecir este tipo de soluciones. Esto permite encontrar una región de bloqueo y la velocidad del patrón cerca del

punto de bifurcación. Los resultados se han podido comprobar experimentalmente, concluyendo que el fenómeno esta presente en diferentes contextos.

Finalmente, se concluye que los sistemas forzados paraméricamente exhiben gran riqueza de comportamientos y permiten la existencia de estructuras y fenómenos de alta complejidad. Algunos de estos se han caracterizado en esta tesis, sin embargo queda un amplio camino por recorrer en el estudio de estos sistemas. Además, muchos efectos producidos por este tipo de forzamientos existen bajo diferentes condiciones, como es el caso del fenómeno de bloqueo-desbloqueo.

Referencias

- [1] G. Nicolis and I. Prigogine, *Self-Organization in Non Equilibrium Systems* (J.Wiley & Sons, New York, 1977).
- [2] L. M. Pismen *Patterns and Interfaces in Dissipative Dynamics*, (Springer Series in Synergetics, Berlin Heidelberg 2006).
- [3] M. C. Cross, and P. C. Hohenberg , *Rev. Mod. Phys.* 65, 851 (1993).
- [4] Landau L. D. and Lifshitz E. M., *Mechanics, Vol. 1 (Course of Theoretical Physics)* (Pergamon Press) 1976.
- [5] Froya A. and Marenzana M., *Thus Spoke Galileo: The Great Scientist's Ideas and their Relevance to the Present Day* (Oxford University Press) 2006.
- [6] G. L. Baker and J. A. Blackburn, *Pendulum* (Oxford University Press, New York, 2005).
- [7] Residori, S. 2003. *Frontsmet Structures Spatiales dans unes Valve a Cristal Liquide avec retro-action optique. Habilitaci3n a dirigir investigaci3n.* Nice, Universit3 de Nice Sophia Antipolis, Facult3 de Sciences.
- [8] M. Clerc, P. Couillet, and E. Tirapegui, *Phys. Rev. Lett.* 83, 3820 (1999).
- [9] M. G. Clerc, S. Coulibaly and D. Laroze, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 19, 3525-3532 (2009).
- [10] Kapitza P. L., *Sov. Phys. JETP*, 21 (1951) 588; in *Collected Papers of P. L. Kapitza*, edited by Ter Haar D. (Pergamon Press) 1965.
- [11] Stephenson A., *Philos. Mag.*, 15 (1908) 233; *Mem. Proc. Manch. Lit. Phil. Soc.*, 52 (1908) 1.
- [12] P. Ramon, *Field Theory : A Modern Primer* (Westview Press, *Frontiers in Physics Series*, Vol 74, 1989).
- [13] Rojas, R. 2005. *Sur des Gouttes, Cristaux Liquides et Fronts.* Tesis para optar al grado de doctor en fisica. Nice, Universit3 de Nice Sophia Antipolis, Facult3 de Sciences.
- [14] French A. P., *Vibrations and Waves (The M.I.T. Introductory Physics Series)* (W. W. Norton & Company) 1971; Buzs'aki G., *Rhythms of the Brain* (Oxford University Press) 2006.
- [15] Gammaitoni L., Hanggi P., Jung P. and Marchesoni F., *Rev. Mod. Phys.*, 70 (1998) 223.
- [16] Andronov A. A. and Chaikin C. E., *Theory of Oscillations* (Princeton University Press) 1949.
- [17] E. I. Butikov, *J. Phys. A: Math. Gen.* 35 6209 (2002); *Am. J. Phys.* 69, 755 (2001).

- [18] C.M. Bender and S.A. Orzag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, (McGraw-Hill, Inc, New York, 1978).
- [19] McLachlan N. W., *Theory and Application of Mathieu Functions* (Oxford University Press) 1951.
- [20] Jackson A., *Perspectives of Nonlinear Dynamics*, Vol. 2 (Cambridge University Press) 1960.
- [21] Kalmus H. P., *Am. J. Phys.*, 38 (1970) 874; Michaelis M. M., *Am. J. Phys.*, 53 (1985) 1079; Friedman M. H., Campana J. E. and Yergey A. L., *Am. J. Phys.*, 50 (1982) 924.
- [22] Smith H. J. T. and Blackburn J. A., *Am. J. Phys.*, 60 (1992) 909.
- [23] Blackburn J. A., Smith H. J. T. and Grønbech- Jensen N., *Am. J. Phys.*, 60 (1992) 903.
- [24] M. Faraday, *Philos. Trans. R. Soc. London* 52, 319 (1831).
- [25] I. Ortega, M. G. Clerc, C. Falcón and N. Mujica, *Phys. Rev. E*. 81, 046208 (2010).
- [26] M.G. Clerc, C. Falcon and C. Fernandez-Oto, *EPL*. 98, 30006 (2012)
- [27] Hale J. K., *Ordinary Differential Equations* (John Wiley & Sons) 1969.
- [28] C. Elphick, E. Tirapegui, M. Brachet, P. Couillet, G. Iooss, *Physica D* 29, 95 (1987).
- [29] M. I. Rabinovich, A. B. Ezersky, P. D. Weidman, *The dynamics of patterns* (World Scientific, Singapore, 2000).
- [30] M. Cross, H. Greenside, *Pattern Formation and Dynamics in Nonequilibrium Systems*, (Cambridge University Press, New York, 2009).
- [31] P. Ball *The Self-Made Tapestry: Pattern formation in nature*, (Oxford University Press, New York, 1999).
- [32] Y. Pomeau, *Physica D*, 23, 3 (1986).
- [33] W. van Saarloos, *Phys. Rep.* 386, 29 (2003).
- [34] S. Residori, A. Petrossian, T. Nagaya, C. Riera, and M.G. Clerc, *Physica D* 199, 149-165 (2004).
- [35] P. Couillet, J. Lega, B. Houchmanzadeh, and J. Lajzerowicz, *J. Phys. Rev. Lett.* 65, 1352 (1990). D. Michaelis, U. Peschel, F. Lederer, D.V. Skryabin, and W.J. Firth, *Phys. Rev. E* 63, 066602 (2001).
- [36] D. Bensimon, B. I. Shraiman, and V. Croquette, *Phys. Rev. A* 38, 5461 (1988).
- [37] Y. S. Kivshar, N. Gronbech-Jensen and M. R. Samuelsen, *Phys. Revi. B.* 45, 14 (1992).

- [38] N. Manton and P. Sutcliffe, *Topological Solitons* (Cambridge University Press, Cambridge, 2004).
- [39] P.M. Morse, and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics* (MacGraw Hill, New York, 1953).
- [40] M.G. Clerc, R.G. Elias, and R. G Rojas, *Phil. Trans. R. Soc. A* 369, 412 (2011).
- [41] F. Haudin, R.G. Elias, R.G. Rojas, U. Bortolozzo, M.G. Clerc and S. Residori *Phys. Rev. Lett.* 103, 128003 (2009).
- [42] O. Descalzi, M. Clerc, S. Residori, and G. Assanto, *Localized States in Physics: Solitons and Patterns* (Springer, New York, 2011).
- [43] H. G. Purwins, H. U. Bodeker, and Sh. Amiranashvili, *Adv. Phys.* 59, 485 (2010).
- [44] T. Ackemann, W. J. Firth, and G. L. Oppo, *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* 57, 323 (2009)
- [45] S. Barland, J.R. Tredicce, M. Brambilla, L.A. Lugiato, S. Balle, M. Giudici, T. Maggipinto, L. Spinelli, G. Tissoni, T. Knodlk, M. Millerk and R. Jagerk, *Nature*, 419, 699 (2002)
- [46] P. Couillet, C. Riera, and C. Tresser, *Phys. Rev. Lett.* 84, 3069 (2000).
- [47] W. van Saarloos, and P.C. Hohenberg, *Phys. Rev. Lett.* 64, 749 (1990).
- [48] P.D. Woods, and A.R. Champneys, *Physica D* 129, 147 (1999).
- [49] G.W. Hunt, G.J. Lord, and A.R. Champneys, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 170, 239 (1999).
- [50] P. Couillet, C. Riera, and C. Tresser, *Phys. Rev. Lett.* 84, 3069 (2000).
- [51] J. Burke, and E. Knobloch *Phys. Rev. E* 73, 056211 (2006).
- [52] J. Burke, and E. Knobloch, *Chaos* 17, 037102 (2007).
- [53] M.G. Clerc, and C. Falcon, *Physica A* 356, 48 (2005).
- [54] U. Bortolozzo, M.G. Clerc, C. Falcon, S. Residori, and R. Rojas, *Phys. Rev. Lett.* 96, 214501 (2006).
- [55] R. Briggs, *Electron-stream interaction with plasmas* (MIT Press, Cambridge, Mass., 1964).
- [56] P. Huerre and P. Monkewitz, *Ann. Rev. Fluid. Mech.* 22, 473 (1990).
- [57] D. Bensimon, B. Shraiman, and V. Croquette, *Phys. Rev. A* 38, 5461 (1988).
- [58] B. Malomed, A. Nepomnyashchy, and M. Tribelsky, *Physical Review A* 42, 7244 (1990).
- [59] O. Jensen, V. Pannbacker, and G. Dewel, *Physics Letters A* 179, 91 (1993), ISSN 03759601.

- [60] M. Schwartz and T. Solomon, *Physical Review Letters* 100, 1 (2008), ISSN 0031-9007.
- [61] I. Rehberg, E. Bodenschatz, B. Winkler, and F. Busse, *Physical review letters* 59, 282 (1987), ISSN 1079-7114.
- [62] D. Ohlsen, S. Yamamoto, and C. Surko, *Journal of statistical* 64, 903 (1991).
- [63] T. Ackemann, B. Schapers, J. P. Seipenbusch, Y. A. Logvin., and W. Lange, *Chaos, Solitons and Fractals* 10, 665 (1999), ISSN 0960-0779.
- [64] Y. Pomeau, in *Cellular Structures in Instabilities.*, edited by J. E. Wesfreid and S. Zaleski (Springer, Berlin, Germany, 1984), vol. 210 of *Lecture Notes in Physics*.
- [65] F. Haudin, R. G. Elas, R. G. Rojas, U. Bortolozzo, M. G. Clerc, and S. Residori, *Physical Review E* 81, 1 (2010).
- [66] M. G. Clerc, C. Falcon, D. Esca, and E. Tirapegui, *The European Physical Journal Special Topics* 143, 171 (2007).
- [67] U. Bortolozzo, M. G. Clerc, F. Haudin, R. G. Rojas, and S. Residori, *Advances in Nonlinear Optics* 2009, 1 (2009).
- [68] S. Alwyn, ed., *Encyclopedia in Nonlinear Sciences* (New York, 2005).
- [69] J. Seipenbusch, T. Ackemann, B. Schapers, B. Berge, and W. Lange, *Physical Review A* 56, R4401 (1997), ISSN 1050-2947.
- [70] E. Knobloch, J. Hettel, and G. Dangelmayr, *Phys. Rev. Lett.* 74, 4839 (1995).
- [71] J. Kevorkian, *Multiple Scale and Singular Perturbation Methods* , vol. 114 of *Applied Mathematical Sciences* (Springer-Verlag, Inc., New York, 1996), 1st ed.
- [72] E. Louvergneaux, *Phys. Rev. Lett.* 87, 244501 (2001).
- [73] E. Louvergneaux, C. Szwaj, G. Agez, P. Glorieux, and M. Taki, *Phys. Rev. Lett.* 92, 043901 (2004).
- [74] G. Agez, P. Glorieux, M. Taki, and E. Louvergneaux, *Phys. Rev. A* 74, 043814 (2006).
- [75] G. Agez, P. Glorieux, C. Szwaj, and E. Louvergneaux, *Opt. Commun.* 245, 243 (2005).
- [76] G. Dalessandro and W. J. Firth, *Phys. Rev. A* 46, 537 (1992).

10. Anexos

10.1. Anexo A

Este anexo es el artículo “Effective-parametric resonance in a non-oscillating system”, publicado en EPL.



A LETTERS JOURNAL EXPLORING
THE FRONTIERS OF PHYSICS

OFFPRINT

**Effective-parametric resonance in a
non-oscillating system**

MARCEL G. CLERC, CLAUDIO FALCÓN, CRISTIÁN FERNÁNDEZ-OTO
and ENRIQUE TIRAPEGUI

EPL, **98** (2012) 30006

Please visit the new website
www.epljournal.org

Effective-parametric resonance in a non-oscillating system

MARCEL G. CLERC, CLAUDIO FALCÓN, CRISTIÁN FERNÁNDEZ-OTO and ENRIQUE TIRAPEGUI

Departamento de Física, Universidad de Chile - Casilla 487-3, Santiago, Chile

received 26 December 2011; accepted in final form 5 April 2012
published online 11 May 2012

PACS 05.45.-a – Nonlinear dynamics and chaos
PACS 02.30.0z – Bifurcation theory

Abstract – We present a mechanism for the generation of oscillations and nonlinear parametric amplification in a non-oscillating system, which we term *effective-parametric resonance*. Sustained oscillations appear at a controlled amplitude and frequency, related directly to the external forcing parameters. We present an intuitive explanation for this phenomenon, based on an effective equation for a driven oscillation and discuss its relation to other approaches. More precisely, a high-frequency forcing can generate an effective oscillator, which may have a parametric resonance with the applied forcing. We point out the main ingredients for the development of effective-parametric resonance in non-oscillating systems and show its existence in a simple model. Theoretically, we calculate the appearance of this nonlinear oscillation by computing its stability curve, which is confirmed by numerical simulations and experimental studies on a vertically driven pendulum.

Copyright © EPLA, 2012

Introduction. – An oscillator displays resonances due to its ability to store and transfer energy coming from a forcing source into an internal oscillation mode, Galileo Galilei being one of the first to recognize them [1]. Resonance is at the core of physics, ranging from microscopic to macroscopic, from quantum to classical, and from deterministic to stochastic [2–4]. Resonances have been classified mainly in two different ways depending on the type of forcing acting on the oscillator. The most well-known type is characterized by the independence of the forcing from the oscillator state, which is termed as *resonance* [5]. The other type is known as *parametric resonance* [5]. The latter appears as an instability of a dissipative oscillatory system where one or more parameters are modulated in time or space, injecting energy into the system. As one of the control parameters of the system overcomes a certain threshold, a coherent oscillatory response develops with an amplitude that depends on the the nonlinear saturation of the instability. The oscillation frequency is given by a resonance condition relating injection and dissipation of energy with the mismatch between forcing and natural frequencies. It must be noticed that the idea of energy storing and transferring due to resonances can be even generalized to fluctuating systems [3].

In this work, we present a phenomenon arising from parametric amplification with revealing potential applications: the generation of *effective-parametric resonance* (EPR) which induces oscillations in a non-oscillating system, that is, a system that without parametric forcing

cannot present permanent oscillations. The appearance of oscillations is known in the parametrically forced upside-down pendulum [6]. Parametric instabilities have been explained by the introduction of Mathieu functions. We present an alternative explanation allowing a simple interpretation, which can be intuitively extended to other physical contexts. We study EPR in a simple prototype model that allows us to build a description based on a forced system with an effective potential and apply these results to a parametrically amplified over-damped pendulum. In this simple system, we show theoretically, numerically, and experimentally the appearance of sustained oscillations with a given frequency and amplitude, controlled externally by the parametric forcing.

Prototype EPR system. – In order to characterize the EPR phenomenon, let us consider the following simple prototypical dynamical system:

$$\ddot{x} = -\gamma \sin(\omega t)x - \mu\dot{x} - \alpha x^3, \quad (1)$$

where $x(t)$ is the variable that describes the state of the system, \ddot{x} is the respective acceleration, μ is a viscous damping parameter accounting for energy dissipation, α characterizes the nonlinearity of the system, and γ and ω are, respectively, the intensity and frequency of the external parametric forcing. Other models can be chosen to describe the emergence of permanent oscillations by EPR; however, eq. (1) possesses the main ingredients necessary to describe this phenomenon.

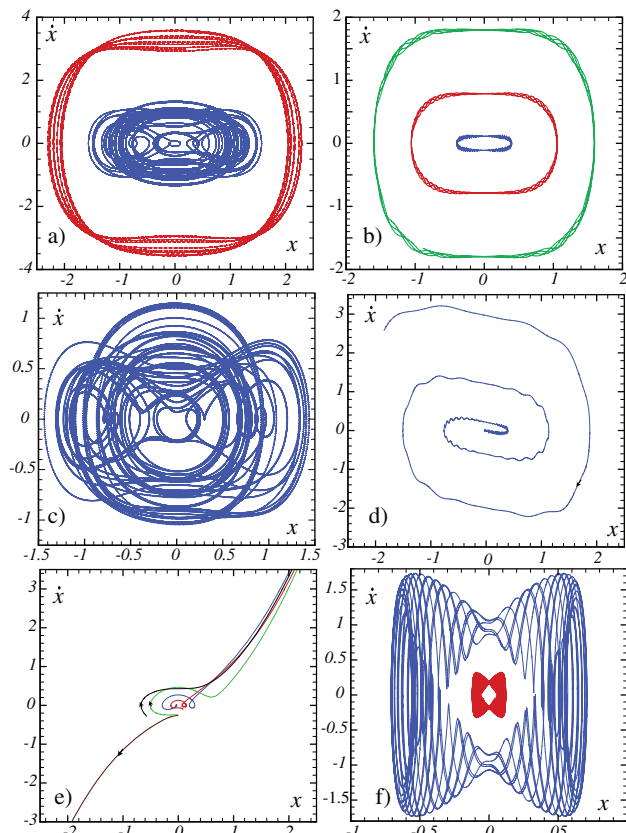


Fig. 1: (Color online) Phase portrait of model (1) for $\alpha = 1.0$, $\gamma = 1.0$, $\mu = 0$ and $\omega = 0.5$ a); $\alpha = 1.0$, $\gamma = 1.0$, $\mu = 0$ and $\omega = 20.0$ b); $\alpha = 1.0$, $\gamma = 1.0$, $\mu = 0.02$ and $\omega = 0.5$ c); $\alpha = 1.0$, $\gamma = 0.3$, $\mu = 0.2$ and $\omega = 10.0$ d); $\alpha = -2.0$, $\gamma = 46.5$, $\mu = 0.0$ and $\omega = 1.0$ e); $\alpha = -2.0$, $\gamma = 46.5$, $\mu = 0.0$ and $\omega = 20.0$ f).

To study the phenomenology of EPR, we have performed numerical simulations of model (1) using a fourth order Runge-Kutta algorithm with time step $\Delta t = 0.02$ for several values of the control parameters. In the non-dissipative limit ($\mu = 0$) for $\alpha > 0$, model (1) exhibits chaotic behavior near the origin and quasi-periodic behavior away from it when ω is of order 1, as illustrated in fig. 1a)). However, as ω increases sufficiently, the former scenario changes and the phase portrait described before is changed to the equivalent phase portrait of a simple oscillator, *i.e.*, chaotic behavior is transformed into quasi-periodic behavior (cf. fig. 1b)). In the dissipative regime ($\mu > 0$), the dynamics of the system is characterized by the appearance of a chaotic attractor [7], as depicted in fig. 1c). As ω increases sufficiently, the phase portrait displays the equivalent of a damped oscillator, as illustrated in fig. 1d). Even, the effect of large ω can even stabilize a non-oscillating system with divergent trajectories ($\alpha < 0$) with or without dissipation. Figure 1e) shows the phase portrait of model (1) for small ω displaying divergent trajectories. As ω increases, there is a qualitative change in the trajectories

as oscillations develop around the fixed point $x = \dot{x} = 0$ and trajectories do not diverge, as is shown in fig. 1f). Therefore, for large ω and γ of order 1, model (1) shows the emergence of oscillations.

Forced systems with explicit temporal dependence, as the one displayed in model (1), are usually studied in terms of first return maps using the time-dependent forcing period as the iteration period between two successive values of the map [8]. This approach will be of benefit in the case of low-frequency forcing, where the dominant time scale is the forcing scale. In the case of high-frequency forcing, first return maps describe basically the same dynamics as model (1). Furthermore, first return maps, although useful for calculations of stability of fixed points, and hence limit cycles, do not give an insight into the physical mechanism for the generation of the high-frequency dynamics explained above. Another way to study the high-frequency dynamics of eq. (1) that can present a way to interpret and understand the dynamics is the strategy proposed by Kapitza [9]: the previous high-frequency dynamics can be understood as a result caused by the separation of time scales between the forcing and the state variable $x(t)$ itself, which can explain the appearance of an effective force. Unlike the linear analysis based on Mathieu functions, this strategy allows a global description that contains the nonlinear response of the system. Therefore, a generalization of this type of strategy may allow us to glimpse into non-trivial phenomena arising from the original forced system. Following the strategy proposed by Kapitza, in the limit $\omega \gg \mu$, the dynamics is decomposed as

$$x(t) = z(t) + \frac{\gamma}{\omega^2} \sin(\omega t) z(t), \quad (2)$$

where z accounts for the slow dynamics and the second term on the right-hand side stands for the small fast dynamics [9]. Introducing the above Ansatz in eq. (1), we obtain

$$\begin{aligned} \ddot{z} = & -\frac{\gamma^2}{2\omega^2} z - \mu \dot{z} - \frac{2\gamma}{\omega} \cos(\omega t) \dot{z} - \frac{\gamma}{\omega^2} \sin(\omega t) \ddot{z} \\ & + \frac{\gamma^2}{2\omega^2} \cos(2\omega t) z - \frac{\mu\gamma}{\omega} \cos(\omega t) z - \frac{\mu\gamma}{\omega^2} \sin(\omega t) \dot{z} \\ & - \alpha z^3 \left[1 + \frac{\gamma}{\omega^2} \sin(\omega t) \right]^3. \end{aligned} \quad (3)$$

If one considers the limit, $\omega \gg 1$ and $\gamma/\omega^2 \ll 1$ averaging over a period $2\pi/\omega$, we obtain

$$\ddot{z} = -\gamma^2/2\omega^2 z - \alpha z^3 - \mu \dot{z}, \quad (4)$$

which is the Kapitza dynamics. On the other hand, in the case of small z and considering that $\gamma/\omega^2 < 1$ but not small, the dominant order of eq. (3) takes the form

$$\ddot{z} = -\frac{\gamma^2}{2\omega^2} z - \alpha z^3 - \mu \dot{z} - \frac{2\gamma}{\omega} \cos(\omega t) \dot{z}, \quad (5)$$

up to leading-order resonant terms in γ/ω . In this effective dynamical system $z(t)$ is a variable that accounts for

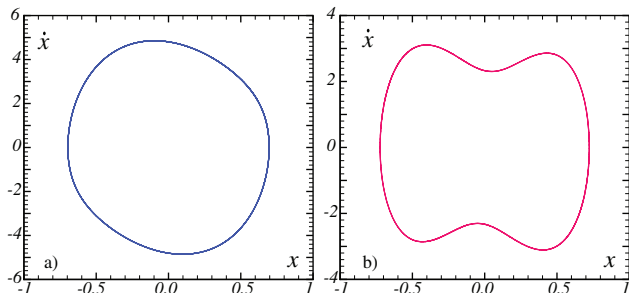


Fig. 2: (Color online) Phase portrait of prototype model (1) for $\alpha = 200.0$, $\gamma = 48.0$, $\mu = 1.0$ and $\omega = 14.0$ (a) and $\alpha = -1.0$, $\gamma = 47.0$, $\mu = 1.0$ and $\omega = 10.0$ (b).

slow dynamics of $x(t)$. The above model corresponds to an oscillator with an induced natural frequency $\omega_I \equiv \gamma/\sqrt{2}\omega$. In the limit of high frequencies ($\gamma \ll \omega^2$), the last term is neglected as a result of the separation of scales between $z(t)$ and the forcing, which corresponds to Kapitza analysis [5]. Hence, using this approach, the first term of the right-hand side is an effective force that leads the dynamics. Independently, if at moderate frequencies model (1) has divergent trajectories ($\alpha > 0$) or not ($\alpha < 0$), in the above limit the system can be described as an oscillator. Model (5) allows us to intuitively understand the dynamics exhibited by model (1) in this limit providing a way to understand the emergence of oscillations in non-oscillating systems submitted to high-frequency forcing. In brief, the non-oscillating system subjected to a high-frequencies forcing (eq. (1)) is equivalent to a parametrically driven oscillator with a well-defined natural frequency ($\gamma^2/2\omega^2$). Therefore, one expects intuitively that changing the value of the induced natural frequency one can observe the well-known characteristics of parametric resonance.

Appearance of EPR. For large but fixed ω , as we increase γ , the induced natural frequency increases. Furthermore, the terms neglected in the strategy of Kapitza grow in their amplitudes. The combination of these effects can generate the phenomenon of *effective-parametric resonance*: as ω_I approaches $\omega/2$ and the forcing and dissipative terms can be balanced, the system can resonate by parametrically amplifying itself. Hence, by modifying γ appropriately, the system can display this phenomenon when $\gamma \sim \sqrt{2}\omega^2/2$. Therefore, $x = \dot{x} = 0$ becomes unstable and nonlinearity saturates this instability leading to attractive periodic solutions. Figures 2a) and b) show the stable limit cycle generated by EPR for both positive and negative α . Thus, for large ω and γ which satisfy the above resonance condition, model (1) induces simultaneously a natural frequency of oscillation and a parametric forcing, giving rise to effective-parametric resonance at half the forcing frequency even for large dissipation. From these simulations, we can infer that in the case of positive (negative) α , the observed limit cycle is dominated by the first dominant mode (first two

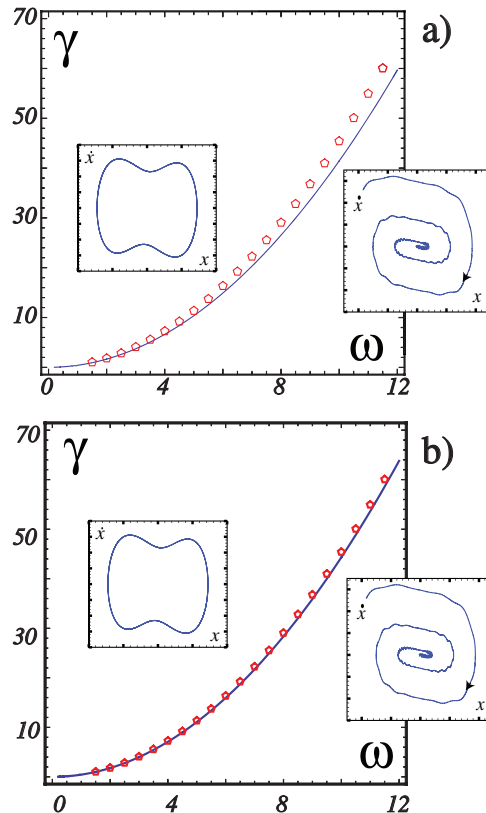


Fig. 3: (Color online) Effective-parametric resonance curve in γ - ω space for $\mu = 0.1$ and $\alpha = -1.0$. Above the line, the system shows effective-parametric resonance. Pentagon symbols are obtained by numerical simulation of model (1). The solid line in a) and b) is, respectively, deduced from models (5) and (3). Left insets: limit cycle. Right insets: damped oscillations towards $x = 0$.

dominant modes). This explains the different limit cycles in the x - \dot{x} phase portrait displayed in fig. 2.

We perform a modal expansion for eq. (5) and, keeping the dominant terms of modal expansion up to order γ/ω , one finds the curve $(\gamma/2\omega)^2 = (\mu/2)^2 + (\omega/2 - \gamma/\omega\sqrt{2})^2$ for the stability of $x = 0$. To corroborate this prediction we have performed numerical simulations of model (1) in the ω - γ space, showing good agreement with the predicted curve. In fig. 3a) we show both theoretical and numerical results. On the other hand, using the same modal expansion in eq. (3) allows us compute an amended instability curve, which improves the accuracy to within 3% from the previous expression as is shown in fig. 3b), although the qualitative shape of the curve is the same. Thus, our first-order approximation agrees consistently with numerical simulations of the instability curve. Above the curve a stable limit cycle in the x - \dot{x} phase portrait develops (fig. 3, left inset), whereas outside of it damped oscillations towards $x = \dot{x} = 0$ appear (fig. 3, right inset). In the case of $\alpha < 0$, for small (large) μ compared with ω , effective-parametric

resonance develops as a super(sub)-critical instability, that is, when one increases γ the system shows the appearance of a infinitesimal (finite) limit cycle. In the other case ($\alpha > 0$), one observes the opposite behavior.

EPR in a vertically driven pendulum. – As we have noted before, EPR results from the effect of the parametric amplification of a system by a large-amplitude and high-frequency forcing. As mentioned above, a simple mechanical system that shows this effect is a vertically driven pendulum. The upside-down state becomes stable at high frequencies even for small displacement amplitudes of the support point, as a result of the emergence of an oscillator where the upside-down position is a stable fixed point [5]. This counterintuitive fact was first predicted analytically in the pioneering work of Stephenson [10] which spanned a large amount of theoretical [5] and experimental discussions [11,12] of the phenomenon. As the displacement amplitude is increased, it was observed numerically [13] and experimentally [12] the appearance of a nonlinearly saturated oscillation around the upside-down position. This is a limit cycle in the ϕ - $\dot{\phi}$ phase portrait, where ϕ is the angle of the pendulum with respect to the vertical axis and $\dot{\phi}$ is the angular velocity. This phenomenon was associated with a Hopf bifurcation [7], which is related to a time-independent linear operator. This statement is inadequate for the upside-down position because the linear stability analysis of this state is related to a periodic time-dependent linear operator which requires the use of Floquet theory [14]. On the other hand, this behavior can be inferred as a consequence of the linear analysis based on Mathieu functions for negligible dissipation showing that the upside-down state is unstable. Alternatively, using a weakly nonlinear analysis, one finds that the dynamics around the upside-down state is similar to model (1) with negative α . Therefore, the appearance of permanent oscillations with respect to the vertical state is the result of EPR. It is important to note that in the study of the Faraday instability for strong viscous fluid a similar resonant condition is established in ref. [15].

Experimental study. A parametrically excited pendulum is built to explore EPR. A stainless-steel cylindrical roller bearing (internal diameter 8 mm, external diameter 15 mm) is mounted vertically into a plexiglass plate ($10 \times 15 \times 4 \text{ mm}^3$), see fig. 4. A plexiglass cylinder is fixed solidary to a cylindrical roller bearing, which enables it to rotate smoothly in a plane. A massive bronze bar (length 60 mm, diameter 3 mm) is eccentrically positioned 2 mm from the center of the cylinder (cf. fig. 4), displacing the center of mass from the center of the plexiglass cylinder. This asymmetry generates a physical pendulum with a natural frequency $f_0 \approx 10 \text{ Hz}$ ($\omega_0 \approx 30 \text{ rad/s}$) and oscillating radius $l \approx 2 \text{ mm}$. The whole system is then mounted over an electromechanical shaker driven sinusoidally by a frequency generator via a power amplifier. The modulation of the acceleration of gravity $a_{ex}\omega_{ex}^2 \cos(\omega_{ex}t)$ with $\omega_{ex} = 2\pi f_{ex}$ is measured directly by a piezoelectric

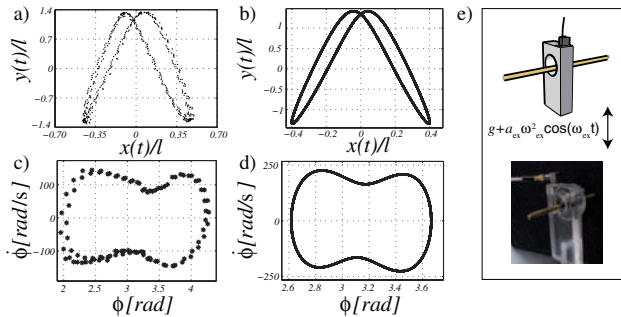


Fig. 4: A Lissajous figure of the nonlinear oscillations around the inverted pendulum position is obtained experimentally (a) and numerically (b). The limit cycle oscillating around the inverted position of a physical pendulum is found experimentally (c) and numerically (d). e) Schematic representation and snapshot of the physical pendulum under consideration.

accelerometer and a charge amplifier. The control parameters are then ω_{ex} and a_{ex} ($\gamma_{ex} = a_{ex}\omega_{ex}^2/l$). The motion of the pendulum is acquired with a high-speed camera at 500 fps in a 800×600 pixel window.

We explore the large-frequency limit $\omega_{ex}/\omega_0 \gg 1$ in the particular case of $a_{ex}/l \sim 1$, which corresponds $\gamma_{ex} \sim \omega_{ex}^2$. For a given ω_{ex} , by increasing the amplitude of modulation a_{ex} the inverted pendulum is stabilized. As a_{ex} continues to increase, new equilibria appear, namely a limit cycle, which oscillates at $f_{ex}/2$ around the inverted position $\phi = \pi$. This type of limit cycle also appears oscillating around $\phi = 0$. These oscillations cannot occur in the unforced system, due to its highly dissipative nature. In fig. 4a), we show a typical trajectory of the center of mass of the pendulum found experimentally for $\omega_{ex}/\omega_0 \approx 5$ and $a_{ex}/l \approx 2$, and in fig. 4b) the numerically computed trajectory. They display Lissajous figures with two frequencies, one being f_{ex} and the other one being $f_{ex}/2$. We also show in figs. 4c) and d) the phase portrait. Notice that the limit cycle is surrounding the inverted position $\phi = \pi$.

Conclusions. – The usual strategy to induce oscillations is done by exciting the natural frequencies (or entire multiples of these frequencies) of a system under study. We show here that the use of high-frequency forcing—the forcing periods are smaller than any characteristic time scale of the system under study in non-oscillating systems—can induce an effective natural frequency of oscillation and simultaneously induce parametric amplification through resonance even for large dissipation. Both effects are responsible for the appearance of permanent oscillations. We have considered a simplest model, eq. (1), to illustrate these behaviors. Analytically based on a generalization of the strategy proposed by Kapitza, we have succeeded in explaining this effective-parametric resonance. However, the obtained results are quite general. It suffices to consider a system of at least two variables

forced parametrically at high frequencies, which can induce an effective oscillator and that in a suitable parameter region can exhibit effective-parametric resonance. Recent studies showed that the shape of the forcing, contrary to common wisdom, can qualitatively change the scenario of the expected dynamic behavior [16,17]. Theoretical, numerical and experimental studies on effective-parametric resonance for non-harmonic forcing are currently in progress.

MGC, CF and ET acknowledge the financial support of FONDECYT grants 1120320, 11090449 and 1120329, respectively, and the financial support of the ACT127 grant. CF-O acknowledges the financial support of CONICYT by Beca Magister Nacional.

REFERENCES

- [1] FROVA A. and MARENZANA M., *Thus Spoke Galileo: The Great Scientist's Ideas and their Relevance to the Present Day* (Oxford University Press) 2006.
- [2] FRENCH A. P., *Vibrations and Waves (The M.I.T. Introductory Physics Series)* (W. W. Norton & Company) 1971; BUZSÁKI G., *Rhythms of the Brain* (Oxford University Press) 2006.
- [3] GAMMAITONI L., HANGGI P., JUNG P. and MARCHESONI F., *Rev. Mod. Phys.*, **70** (1998) 223.
- [4] ANDRONOV A. A. and CHAIKIN C. E., *Theory of Oscillations* (Princeton University Press) 1949.
- [5] LANDAU L. D. and LIFSHITZ E. M., *Mechanics, Vol. 1 (Course of Theoretical Physics)* (Pergamon Press) 1976.
- [6] McLACHLAN N. W., *Theory and Application of Mathieu Functions* (Oxford University Press) 1951.
- [7] JACKSON A., *Perspectives of Nonlinear Dynamics, Vol. 2* (Cambridge University Press) 1960.
- [8] OTT E., *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge University Press) 2002.
- [9] KAPITZA P. L., *Sov. Phys. JETP*, **21** (1951) 588; in *Collected Papers of P. L. Kapitza*, edited by TER HAAR D. (Pergamon Press) 1965.
- [10] STEPHENSON A., *Philos. Mag.*, **15** (1908) 233; *Mem. Proc. Manch. Lit. Phil. Soc.*, **52** (1908) 1.
- [11] KALMUS H. P., *Am. J. Phys.*, **38** (1970) 874; MICHAELIS M. M., *Am. J. Phys.*, **53** (1985) 1079; FRIEDMAN M. H., CAMPANA J. E. and YERGEY A. L., *Am. J. Phys.*, **50** (1982) 924.
- [12] SMITH H. J. T. and BLACKBURN J. A., *Am. J. Phys.*, **60** (1992) 909.
- [13] BLACKBURN J. A., SMITH H. J. T. and GRØNBECH-JENSEN N., *Am. J. Phys.*, **60** (1992) 903.
- [14] HALE J. K., *Ordinary Differential Equations* (John Wiley & Sons) 1969.
- [15] CERDA E. A. and TIRAPEGUI E. L., *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1997) 859; *J. Fluid Mech.*, **368** (1998) 368.
- [16] WEI M. D. and HSU C. C., *Opt. Commun.*, **285** (2012) 1366.
- [17] CHACON R., ULEYSKY M. Y. and MAKAROV D. V., *EPL*, **90** (2010) 40003.

10.2. Anexo B

Este anexo es el artículo “Pinning-depinning transition between standing waves and dissipative localized waves”, en proceso de arbitraje en PRE.

Pinning-depinning transition between standing waves and dissipative localized waves.

Marcel G. Clerc¹, Saliya Coulibaly² and Cristian Fernández-Oto¹

¹*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas,
Universidad de Chile, Casilla 487-3, Santiago Chile. and*

²*Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, CNRS UMR 8523,
Université de Lille 1 Sciences et Technologies - 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France, EU.*

(Dated: June 12, 2012)

Dynamic behaviors of fronts connecting standing waves such as locking phenomenon, pinning-depinning transition, propagation, and interaction is studied. Two simple systems are considered, a driven vertically chain of pendulums and a generalized ϕ^4 -model. Both models exhibit in appropriate region of parameters bistability between standing waves. For pendula chain, we characterize the region of bistability between sub-harmonic waves for upright and upside-down pendulums by using the Galerkin method obtaining a quite good agreement between theoretical and numerical results. We characterize analytically the front dynamics in the generalized ϕ^4 -model, showing regions where fronts are oscillatory or propagative. We also characterize the mechanism of pinning-depinning transition between these behaviors. These results are verified numerically for both models. The front interaction allows us to predict the emergence of dissipative localized waves and characterize their respective homoclinic snaking bifurcation diagram. Numerical simulations are in a quite agreement with the analytical findings.

PACS numbers: 05.45.-a, 47.20.Ky, 47.54.-r,

I. INTRODUCTION

Far from equilibrium or non-equilibrium systems, namely systems with injection and energy dissipation are characterized by their ability to exhibit self-organized structures in response to the optimization of energy transport [1–3]. Usually, non equilibrium processes in nature lead to the formation of spatial periodic structures developed from an homogeneous state through the spontaneous breaking of the symmetries present in the systems [1]. In the course of recent decades, much efforts has been devoted to the study of pattern formation arising in systems such as chemical or catalytic reaction systems, gas discharge systems, nonlinear optics, magnetic media, liquid crystals, hydrodynamic, granular media, vegetation population, to mention a few (see [4–6] and the references therein). Hence, it is commonplace to use an unified description to study the dynamics of spatially periodic structures. Indeed in most of the aforementioned physical systems, spatially periodic structures can be described at the onset of the bifurcation by mean of amplitude equations for the critical modes [1–5]. And in general, such a description is valid in the case of weak nonlinearities and for both slow spatial and temporal modulation of the base pattern.

Another typical feature of non-equilibrium system is their capacity to exhibit multistability, yielding to coexistence of different equilibria in the system. Consequently, a disturbance in these systems undergoes an evolution that ends with the formation of different domains separated by *walls* or *fronts* or *interfaces* [2]. Later, the dynamics of these fronts ensues from the attributes of connected states. For one-dimensional spatially extended systems, the theoretical description of front is rather well established. Indeed, in this case fronts are understood

as heteroclinic solutions connecting different equilibria states [7, 8]. From dynamical point of view, a front that connects two stable uniform states is characterized by more favorable state invades the less favorable one at a constant speed [7], which is proportional to the energy difference between these states when systems are variational [7, 9]. Hence, one may expect a front connecting two symmetric states to be stationary or motionless—*kink solution*. This statement is correct for variational systems, i.e when the dynamical evolution minimizes a Lyapunov functional. However, for non-variational systems by means of a spontaneous breaking of spatial reflection symmetry kink solutions can propagate with constant speed [10].

The above scenario changes, when one considers a front connecting a stable pattern with a stable uniform state. The main trait in this case is the emergence of a *pinning range*, i.e a region of parameter space where fronts are motionless [7]. That is, although one state is more favorable than the other one, it can not invade due to a nucleation barrier as a resulting from the coupling of the envelope variations and the underlying pattern [11]. Then, moving in the parameters space one may reach a critical value—the *pinning-depinning transition*—beyond which the front travels with a oscillatory speed. This propagative behavior is characterized by two regimes, i) an oscillatory motion of the front characterized by periodic leaps with a large period and ii) an harmonic oscillatory motion. These regimes are observed, for values of the parameters close to and far from the Maxwell point [12], respectively. Recently, an experimental evidence of the dynamical behavior of these type of fronts has been achieved in Ref. [13]. In the case of fronts connecting patterns with patterns, one observes qualitatively the same scenario. This is also a consequence of coupling between the envelope variations and the underlying pattern,

which induces a the nucleation barrier at the interface of the front. However, all the above scenario is still incomplete, since to our knowledge, the properties of a front between standing-waves has not been characterized. The behavior of these fronts is not obvious, since as a result of the wavelength one would expect to observe the pinning phenomenon. On the other hand, the oscillations of the waves should destroy nucleation barrier resulting from the coupling between the envelope variations and the underlying pattern. Then, one would expect the dissolution of the locking phenomenon.

The purpose of this manuscript is to clarify the existence, stability properties, dynamical evolution and bifurcation diagram of front connecting two standing waves in one-dimensional extended systems. Two simple systems are considered, a driven vertically chain of pendula and a generalized ϕ^4 -model. Both models possess region of parameters where a bistability between standing waves can be observed. In the case of vertically driven chain of pendula we have characterized analytically the region of bistability between sub-harmonic waves supported by both upright and inverted pendula states by means of the Galerkin method. Next, numerical simulations of the parametrically driven sine-Gordon equation describing the motion of the pendula chain display a good agreement with the theoretical result. We have also characterized analytically the front dynamics in the generalized ϕ^4 -model, showing regions where fronts are oscillatory or propagative. The pinning-depinning transition mechanism between these behaviors have been singled out with a good agreement with the numerical simulations. In the two systems under consideration, the interaction of observed front leads to emergence of dissipative localized waves. The derivation of the non-equilibrium potential underlying this interaction allows us to describe accurately their respective homoclinic snaking bifurcation diagram.

The manuscript is organized as follows: the characterization of the bistability regions and existence of front solutions for a vertically driven chain of pendulums is presented in Section II. For sufficiently large frequencies and amplitudes the system exhibits coexistence between sub-harmonic waves for vertical and inverted pendulums. In Section III, the existence, stability properties, dynamical evolution and bifurcation diagram of front connecting two standing waves in the generalization ϕ^4 -model is presented. Based on fronts interaction, in Section IV the existence and the bifurcations diagrams of localized waves are studied. Finally, the conclusions are presented in Section V.

II. FRONT SOLUTION BETWEEN STANDING WAVE IN A VERTICALLY DRIVEN CHAIN OF PENDULA

A simple physical system exhibiting a standing wave is a vertically driven damped chain of pendulums, which is

described in the continuum limit by the parametrically driven sine-Gordon equation:

$$\ddot{\theta}(z, t) = - [\omega_o^2 + \gamma \sin(\omega t)] \sin \theta - \mu \dot{\theta} + \kappa \partial_{zz} \theta, \quad (1)$$

where $\theta(z, t)$ is the angle formed by the pendulum and the vertical axis in the z -position at time t ; ω_o is the pendulum natural frequency, $\{\mu, \kappa, \gamma, \omega\}$ are the damping, elastic coupling, amplitude and frequency of the parametric forcing, respectively. Hence, the terms proportional to γ and μ , respectively, describe the injection and dissipation of energy. Let us introduce the parameter $a \equiv \gamma/\omega^2$ which accounts for the displacement of pendulum pivot in units of the pendulum natural length. Without forcing and damping ($\gamma = \mu = 0$) the above model is a conservative Hamiltonian system, that present time reversal invariance. Hence, the inclusion of injection and dissipation of energy can leads to complex spatio-temporal dynamics which are usually observed in non-equilibrium systems. Notice that Eq. (1) has also the reflection symmetry $\theta \rightarrow -\theta$.

A simple homogeneous state of Eq. (1) is $\theta(z, t) = 0$, which stands for a uniform vertical oscillation of pendula. It is well known that when the pendula chain is forced close to twice the natural frequency— $\omega = 2(\omega_0 + \nu)$, where $\nu \ll 1$ is the detuning parameter—the vertical solution becomes unstable at $\nu^2 + \mu^2/4 = \gamma^2/16$ for small $\{\nu, \gamma, \mu\}$ [14]. In the $\nu\gamma$ -space or equivalently ωa -space, this curve is know as the *Arnold tongue* as shown in Fig. 1. In this figure, the solid curve Γ_1 corresponds the Arnold tongue to small (Fig. 1a and 1b) and large dissipation (Fig. 1c). In the limit of small dissipation, one intuitively expects that when the system is forced at $2\omega_0$ the term $\gamma \sin(\omega t) \sin \theta$ oscillates with a mode at the natural frequency ω_0 and thus forces the oscillator at its natural frequency. This generates an efficient mechanism of energy injection, which is responsible of parametric resonance. Elsewhere, one expects that for any frequency ω it might exist a value of γ for which the vertical solution is unstable, just because the injection of energy in a period of oscillation is greater than the corresponding energy dissipation. To characterize this parametric resonance curve in the case of a single pendulum ($\kappa = 0$), we use the following expansion as proposed in Ref. [15]: $\theta(t) = A_1 e^{i\omega t/2} + A_3 e^{i3\omega t/2} + \dots + c.c.$ (where the symbol *c.c.* stands for complex conjugate); introducing this expansion in Eq. (1) with $\kappa = 0$, and linearized in the complex amplitude A_n , one gets a set of equations for A_n with constant coefficients. The instability curve is derived by means of imposing this linear system has a nonzero solution. As shown in Ref. [15] with a small number of the first modes—*Galerkin method* [27]—one obtains a quite good approximation to the instability curve. For instance, considering the first two modes $\{A_1, A_3\}$,

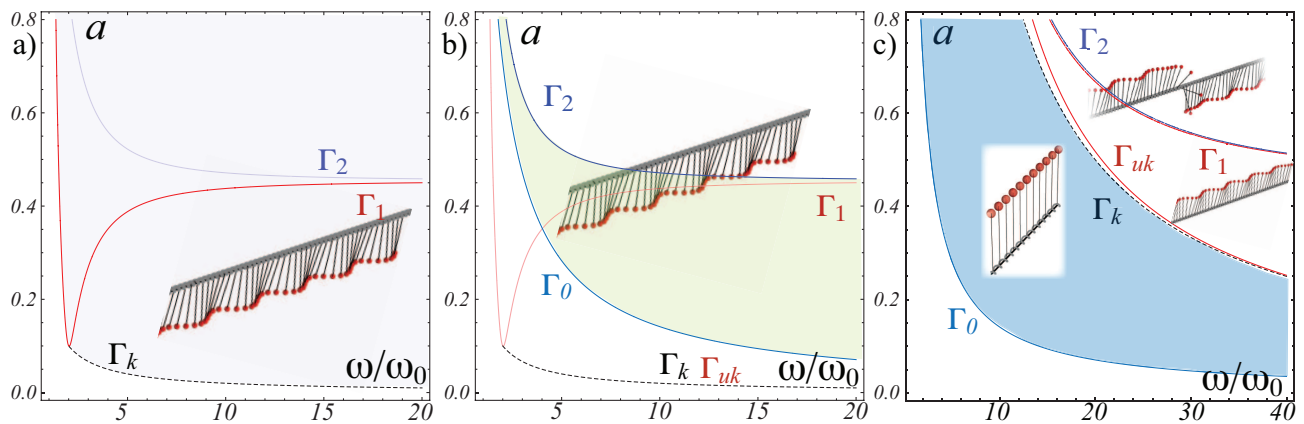


FIG. 1. (color online) Bifurcation diagram of parametrically driven chain of pendula. a) Bifurcation diagram for vertical uniform solution $\theta(x, t) = 0$ for small dissipation $\mu = 0.2$. Γ_k and Γ_1 curves are stationary instability with and without space, respectively, of the uniform upright pendulums oscillation. The overshadowed region represents the region where standing waves are observed. The inset picture illustrates the standing wave typically observed. b) and c) Bifurcation diagram for upside-down pendulums $\theta(x, t) = \pi/2$, respectively, for small ($\mu = 0.2$) and large ($\mu = 10$) dissipation. Γ_0 and Γ_{uk} are, respectively, the curve that accounts for the inverted pendulum stabilization through the Kapitza effect and spatial instability curve for uniform inverted pendulums. Γ_2 stands for the stationary instability curve for a single upside-down pendulum. In shaded regions, b) and c), are observed, respectively, stable single upside-down and stable uniform upside-down pendulum.

one obtains the marginal curve

$$\begin{aligned} & \frac{9\mu^4\omega^4}{16} + \frac{45\mu^2\omega^6}{32} - \frac{3}{16}a^2\mu^2\omega^6 + \frac{81\omega^8}{256} - \frac{99a^2\omega^8}{64} \\ & + \frac{a^4\omega^8}{16} - \frac{9}{4}\mu^2\omega^4\omega_0^2 - \frac{45\omega^6\omega_0^2}{16} + \frac{19}{8}a^2\omega^6\omega_0^2 \\ & + \frac{5}{2}\mu^2\omega^2\omega_0^4 + \frac{59\omega^4\omega_0^4}{8} - \frac{3}{4}a^2\omega^4\omega_0^4 - 5\omega^2\omega_0^6 \\ & + \omega_0^8 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Figure 1 shows this curve, which is denominated as Γ_1 . Above the Γ_1 -curve the uniform vertical solution is unstable.

To study the stability of the uniform vertical oscillation ($\kappa \neq 0$), we consider an extension of the previous expansion. Thus, we use the following *ansatz*

$$\theta(x, t) \approx A_1 e^{i\omega t/2 + ikx + \lambda t} + A_3 e^{i3\omega t/2 + ikx + \lambda t} + c.c. \quad (3)$$

Introducing this *ansatz* in Eq. (1), linearized in the complex amplitudes, and imposing this linear system has a nonzero solution, one finds the expression of the growth rate $\lambda(k)$. Spatial instability curve is derived by imposing that the global maximum of $\lambda(k)$ is zero with $k \neq 0$. We obtain the expression

$$\begin{aligned} & 36\mu^3\omega^2 - 36a\mu^2\omega^3 + 81\mu\omega^4 + 12a^2\mu\omega^4 - 81a\omega^5 \\ & - 72\mu\omega^2\omega_0^2 + 72a\omega^3\omega_0^2 + 16\mu\omega_0^4 - 16a\omega\omega_0^4 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

This curve is represented by dashed curve Γ_k in Fig. 1. Below (above) this curve the uniform oscillation ($\theta = 0$) is stable (unstable). Then the system exhibits a spatial instability giving rise to standing waves with wavelength $k_c^2 = \omega^2/4 - \omega_0^2 - a^2\omega^4(9\omega^2 - 4\omega_0^2)/[(9\omega^2 - 4\omega_0^2)^2 + 36\mu^2\omega^2]$ at frequency $\omega/2$. In the inset of Fig. 1a we have illustrated the typical pattern observed above the Γ_k -curve.

The overshadowed region represents the region where standing waves around the uniform upright pendulums are observed.

On the other hand, it is well known that a vertically driven chain of pendulums at high frequencies can stabilize the inverted pendulum, *kapitza effect* [16]. It is important to note that the upside-down state becomes stable at high frequencies even for small displacement of the support point. This counter-intuitive fact was first predicted analytically in a simple driven pendulum by the pioneering work of Stephenson [19] which spanned a large amount of theoretical [16, 42] and experimental discussions [20, 21] of the phenomenon. The stabilization of the inverted state can be understood as a result of time scales separation between the forcing and the state variable θ itself, producing the appearance of an effective force. Using the strategy proposed by Kapitza [22], which is based on the decomposition of the evolution of θ into a slow and rapid dynamics, one finds that the vertical solution is stabilized when [16, 22]

$$a^2 \geq 2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}. \quad (5)$$

The overshadowed region in Fig. 1b represents the region where the uniform inverted pendulums state is stable and the curve $a^2 = 2\omega_0^2/\omega^2$ is represented by Γ_0 . To study the stability of an upside-down pendulum, we proceed as for the upright pendulum, with the only difference that in the linear equation for θ should be replaced ω_0 by $i\omega_0$ and $\kappa = 0$, which changes the sign of the first term of

Eq. (1). One obtains the marginal curve [15].

$$\begin{aligned} & \frac{9\mu^4\omega^4}{16} + \frac{45\mu^2\omega^6}{32} - \frac{3}{16}a^2\mu^2\omega^6 + \frac{81\omega^8}{256} - \frac{99a^2\omega^8}{64} \\ & + \frac{a^4\omega^8}{16} + \frac{9}{4}\mu^2\omega^4\omega_0^2 + \frac{45\omega^6\omega_0^2}{16} - \frac{19}{8}a^2\omega^6\omega_0^2 \\ & + \frac{5}{2}\mu^2\omega^2\omega_0^4 + \frac{59\omega^4\omega_0^4}{8} - \frac{3}{4}a^2\omega^4\omega_0^4 + 5\omega^2\omega_0^6 \\ & + \omega_0^8 = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

This curve is represented by Γ_2 In Fig. 1b.

In a similar manner ($\kappa \neq 0$), for the the spatial stability of uniform upside-down pendulums, we derivate the following spatial marginal curve for uniform upright pendulums

$$\begin{aligned} & 36\mu^3\omega^2 - 36a\mu^2\omega^3 + 81\mu\omega^4 + 12a^2\mu\omega^4 - 81a\omega^5 \\ & + 72\mu\omega^2\omega_0^2 - 72a\omega^3\omega_0^2 + 16\mu\omega_0^4 - 16a\omega\omega_0^4 = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

This curve is represented by Γ_{uk} In Fig. 1. Above this curve we observe that the uniform inverted pendulums exhibit a supercritical spatial bifurcation, which gives rise to the emergence of standing wave with wavelength $k_{c1}^2 = \omega^2/4 + \omega_0^2 - a^2\omega^4(9\omega^2 + 4\omega_0^2)/[(9\omega^2 + 4\omega_0^2)^2 + 36\mu^2\omega^2]$ at the frequency $\omega/2$. It is important to note that the difference between the curves Γ_{uk} and Γ_k are only noticeable for large dissipation (cf. Fig. 1). Γ_{uk} curve may be below or above the Kapitza curve Γ_0 depending on whether the dissipation is large or small, respectively. Therefore, one would not expect to observe standing waves around upside-down state for small dissipation because the spatial instability anticipates stabilization for high frequencies. Conversely, for large dissipation one expects to see region of parameters where the upside-down state and the standing waves around the inverted pendulum are stable (cf. Fig. 1c).

A. Front solutions connecting vertical and inverted pendula waves

It is worthy to note that for large dissipation in the region above the Γ_2 -curve, the vertically driven pendula chain has coexistence between standing waves for upright and upside-down states. Hence, one can find solutions which connect these two standing waves—*front solution*. Figure 1 and 2 show the standing wave solution of vertical, inverted pendulums, and the front solution connecting these states for the same parameters. Because of gravity the vertical pendulums wave is always more stable than the inverted one. Then one expects that the front propagates such that the vertical pendulums wave invades inverted pendulums waves. Figure 2e shows the propagation of this front through the spatiotemporal diagram of the field θ . Surprisingly, when one modifies the parameters, the front becomes motionless although vertical pendulums wave is more stable—*locking phenomenon*. This behavior is observed in a wide region of parameters.

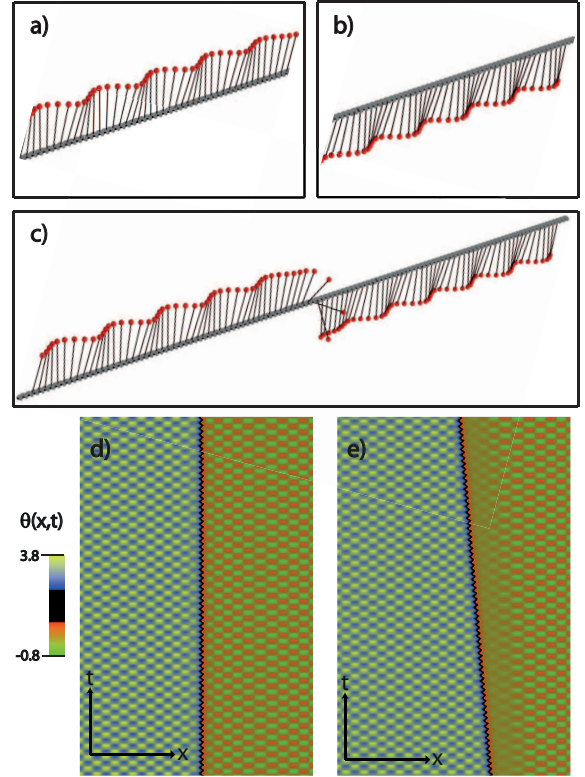


FIG. 2. (color online) Front solution connecting standing wave in a vertically driven pendula chain. a) standing wave of vertical pendulums, b) standing wave of upside-down pendulums, c) front solution connecting these states obtained from model (1), $\omega_0 = 0.01$, $\gamma = 1.17$, $\omega = 1.0$, $\mu = 1.0$ and $\kappa = 1.0$. Spatiotemporal diagram of front solution connecting vertical and inverted pendulums waves obtained from model (1), $\gamma = 1.7$, $\mu = 1.0$, $\omega = 1.0$, $\kappa = 1.0$, d) $\omega_0 = 0.001$, and e) $\omega_0 = 0.2$.

The spatiotemporal diagram of Fig. 2d shows a motionless front.

From these numerical observations arise the query, what is the mechanism that causes the locking of the front propagation—*pinning effect*. Due to the lack of analytical expressions for the waves of upside-down and upright pendulums, and their respective front, it is troublesome to understand the front dynamics and the mechanism that generates the locking phenomenon. Then for the sake of simplicity, we shall consider a simpler model that allows us to infer analytically the front dynamics and then verify these properties in the vertically driven pendula chain.

III. SIMPLIFIED MODEL FOR FRONT CONNECTING STANDING WAVE

Let us consider the following **generalized** ϕ^4 -model

$$\partial_{tt}u = \eta + u - u^3 + \partial_{xx}u + \mu\partial_tu + \nu \sin(kx) \cos(\omega t). \quad (8)$$

For $\eta = \mu = \nu = 0$ the above equation is the well-known ϕ^4 -model [23]. This model is characterized by having two stable symmetric uniform states $u = \pm 1$ and front solutions that connect these states—usually called *kink solutions*. Figure 3a shows a kink solution of Eq. (8). μ is the damping parameter which accounts for the energy dissipation and η is a parameter that breaks the reflection symmetry of above model. In that sense this parameter plays the similar role that gravity in a vertically driven chain of pendulums. For $\eta \neq 0$, the most favorable state invade the less favorable one, then the front propagates ($\nu = 0$). For small η , it is easy to show that speed is proportional to η [7]. Then, for $\eta = 0$ the system has a Maxwell point. The term proportional to ν measures the strength of the spatiotemporal forcing, which makes the uniform states to become standing waves with amplitudes proportional to ν . Figure 3b shows how the fronts are modified in the presence of spatiotemporal forcing and spatiotemporal diagrams 3c and 3d illustrate the front dynamics between the standing waves [24]. Numer-

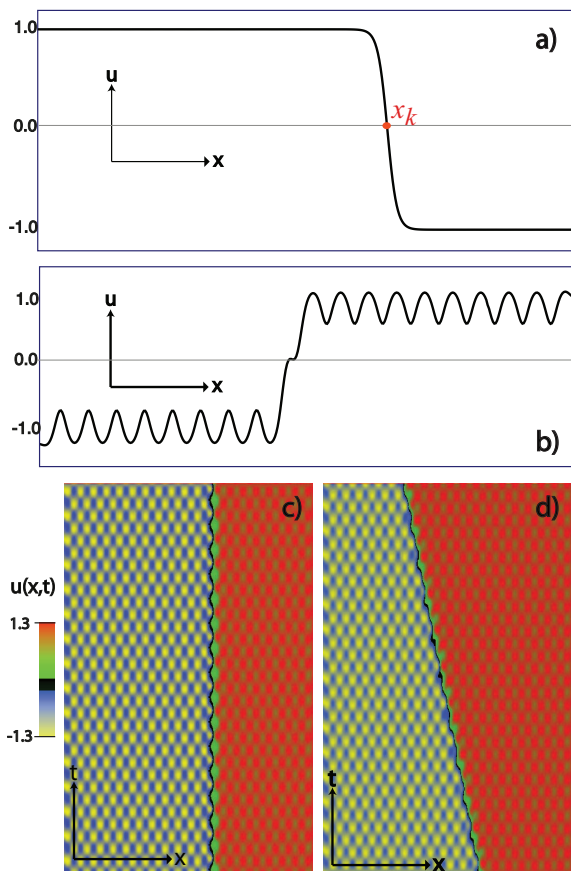


FIG. 3. (color online) Front solution of generalization ϕ^4 model (8). a) Kink solution obtained for by $\eta = 0.0$, $\mu = 0.5$, $k = 1.0$, $\omega = 1.0$, and $\nu = 0.0$. b) Front solution obtained for by $\eta = 0.001$, $\omega = 1.0$, $\mu = 1.0$, and $\nu = 0.6$. Spatiotemporal diagram of front solution connecting standing waves obtained from model (8), $\omega = 1.0$, $\mu = 1.0$, $k = 1.0$, $\nu = 0.6$ c) $\eta = 0.001$, and d) $\eta = 0.14$.

ically, in presence of spatiotemporal forcing we observe that for $\eta \neq 0$ the front is motionless in a wide region of parameters (cf. Fig. 3c) and when one increases η from a critical value the fronts become propagative (cf. Fig. 3d), which is qualitatively dynamic that we have observed in the parametrically driven chain of pendulums at high forcing frequencies and amplitudes.

A. Analytical description of the front dynamics

For $\nu = \eta = 0$, the kink solution of model (8) may be written as

$$u_k(x, x_k) = \tanh \left[\frac{x - x_k}{\sqrt{2}} \right], \quad (9)$$

where x_k is a continuous parameter that parameterized the family of kink solutions, which is consequence of the spatial translation invariance of the system. x_k represents the point where the derivative of the kink solution has its global maximum (cf. Fig. 3a), usually denominated *core of the front*. Because of the reflexion symmetry of ϕ^4 -model, the system has anti-kink solutions $u_{ak}(x, x_k) = -u_k(x, x_k)$. If ν , μ and η are small (perturbative terms), then one can consider the following ansatz for the kink solution

$$u(x, t) = u_k(x - x_k(t)) + W(u_0, x_k, x, t), \quad (10)$$

where $x_k(t)$ has been promoted to temporal function and W is a small correction function, both functions have slow temporal variation, i.e. $W \ll 1$, $\partial_t W \ll 1$, and $\partial_t x_0 \ll 1$. Introducing the above ansatz in Eq. (8) and linearized in W , we obtain at the leading order

$$-\mathcal{L}W = \partial_x u_k (\mu \partial_t x_0 + \partial_{tt} x_0) + \eta + \nu \sin(kx) \cos(\omega t), \quad (11)$$

where $\mathcal{L} \equiv 1 - 3u_k^2 + \partial_{xx}$ is a linear operator of the Sturm-Liouville type [25]. Introducing the inner product

$$\langle f | g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx \quad (12)$$

the above linear operator is self-adjoint. To solve the Eq. (11), we use the solvability condition or Fredholm alternative [2]. That is, we multiply by $\partial_x u_k$ and integrate in the whole space Eq. (11). After straightforward calculations based on residues integration we obtain

$$\begin{aligned} \ddot{x}_k &= -\mu \dot{x}_k - \frac{3\eta}{\sqrt{2}} - \frac{3\pi k \nu \cos(\omega t)}{2 \sinh(\pi k / \sqrt{2})} \sin(kx_k), \\ &= -\mu \dot{x}_k - \frac{\partial U}{\partial x_k}, \end{aligned} \quad (13)$$

where the core of the front potential has the form

$$U(x_k, t) = \frac{3\eta}{\sqrt{2}} x_k - \frac{3\pi \nu \cos(\omega t)}{2 \sinh(\pi k / \sqrt{2})} \cos(kx_k), \quad (14)$$

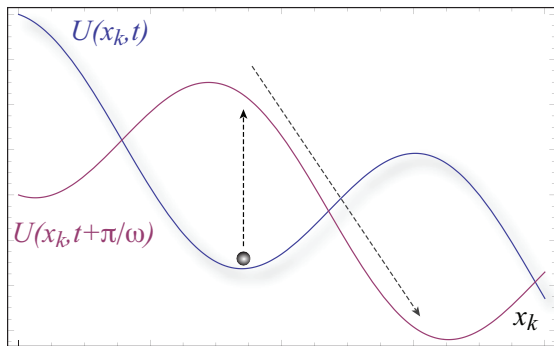


FIG. 4. (color online) Schematic representation of mechanism of the front core propagation. The curves account for the core of the front potential a given time $U(x_k, t)$ and half period latter $U(x_k, t + \pi/\omega)$.

which is a temporal $2\pi/\omega$ -periodic function. Therefore, the core of the front satisfies a Newtown type equation. This equation is characterized, respectively, by a damping, constant and periodic force with oscillatory amplitude. The derivation of analytical solutions of model (13) is a thorny task. Intuitively for $\eta \neq 0$ and small ν , one expects the front core propagates. Indeed, if at the beginning of a period x_k is located in a minimum of the potential (see Fig.4), at half the period it will be located close to the maximum, then will move toward the nearest global potential minimum in order to minimize the energy (c.f. Fig.4). Hence, x_k propagates toward a given direction determine by the sign of η .

The above mechanism of propagation can be interrupted in the case that the forcing ν is large enough. Since, the core of the front fails to move to the next minimum leading to oscillation of the core of the front around a given equilibrium position—*pinning phenomenon*.

B. Front dynamics at high frequency and large amplitude

In the case of large frequency and forcing amplitude with respect to the characteristic dynamics of the unforced system ($\nu = 0$), we can use the Kapitza method to obtain an effective dynamic for Eq. (13). Consequently, the dynamics of core of the front is composed by a rapid and slow evolutions, that is

$$x_k(t) = z(t) + y(t), \quad (15)$$

where the rapid dynamics is small ($y \ll z$, and $1 \ll \dot{y} \ll \ddot{y}$). Using the above ansatz in Eq. (13) and linearized in the fast variable y , we get

$$\ddot{z} + \ddot{y} \approx -\mu\dot{z} - \mu\dot{y} - \frac{\partial U(z, t)}{\partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} y. \quad (16)$$

Hence, when we assume $\omega \gg \mu$ the leading terms of the above equation takes the form

$$\partial_{tt} y = -\frac{3\pi k \nu \sin(kz)}{2 \sinh(\pi k/\sqrt{2})} \cos(\omega t). \quad (17)$$

Integrating in the rapid scale, we obtain $y(t) = 3\pi k \nu \sin(kz) \cos(\omega t)/2\omega^2 \sinh(\pi k/\sqrt{2})$. Next, considering the average of x_k in a period $2\pi/\omega$ and using the Laplace integral method [27], one obtains

$$\langle x_k \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_t^{t+2\pi/\omega} x_k dt \approx z(t). \quad (18)$$

Therefore, z and y describe the mean dynamics and the oscillations around it, respectively. Replacing the expression of $y(t)$ in Eq. (16) and averaging in a period $2\pi/\omega$, this equation reads

$$\ddot{z} = -\mu\dot{z} - \frac{3\eta}{\sqrt{2}} - \frac{9\pi^2 k^3 \nu^2}{16\omega^2 \sinh^2(\pi k/\sqrt{2})} \sin(2kz). \quad (19)$$

Consequently, the mean variable satisfies also a Newton type equation, with the same damping and constant force of Eq. (13). However, the periodic force with oscillatory amplitude becomes a periodic force with half spatial period for mean variable z . As result of rapid oscillations—high frequency limit—the effective potential for core of the front has a half spatial period (cf. Fig. 4).

The locking phenomenon, the pinning range and the pinning-depinning transition of model (8) are simple to understand from Eq. (19); the locking phenomenon is obtained when mean variable of the core of the front $z(t)$ has stable equilibria, which correspond to the different equilibria positions of the fronts. On the other hand, the pinning range and the pinning-depinning transition are the region of parameters where the system has equilibrium points and the bifurcation point of these equilibria, respectively. Let us introduce the parameter

$$\Delta \equiv \frac{8\sqrt{2}\eta\omega^2 \sinh^2(\pi k/\sqrt{2})}{3\pi^2 k^3 \nu^2}, \quad (20)$$

which accounts for the ratio between the coefficients of the constant and periodic forcing of model (19). Notice that Δ is proportional to η , thus change Δ is equivalent to modified η . If $\Delta < 0$ and $|\Delta| > 1$, the model (19) does not have equilibrium points. Then, the core of the front moves backward and its acceleration increases and decreases periodically, hence the upper state ($u \approx 1$) invades the lower one ($u \approx -1$) with an oscillatory speed. Figure 3d shows the spatiotemporal evolution of the front in this region of parameters. Increasing Δ (η), the system exhibits a simultaneous infinite number of saddle-nodes bifurcation for $\Delta = \Delta_- \equiv -1$. For $\Delta > \Delta_-$ and $|\Delta| < 1$, the system has an infinite number of stable equilibria. Each equilibrium point represents an oscillatory front around a fixed position (cf. Fig. 3c). Increasing further Δ , all critical points disappear simultaneously

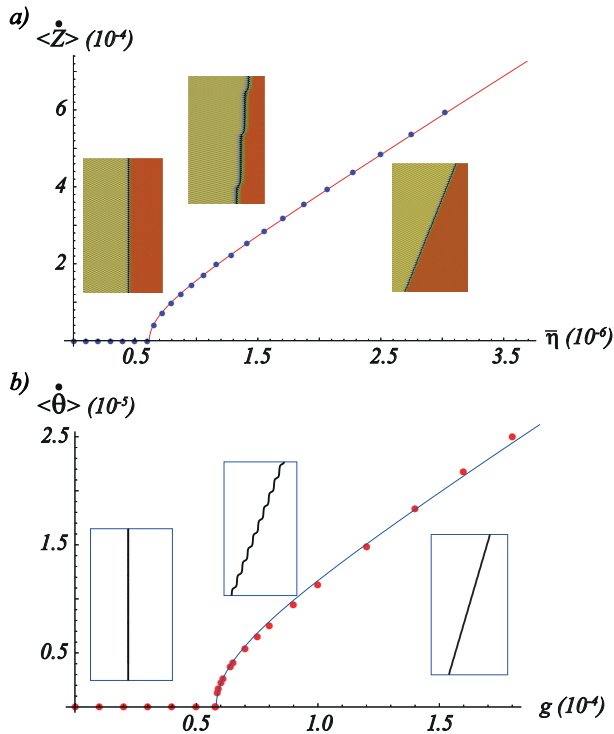


FIG. 5. (color online) Bifurcation diagram of front connecting standing waves. a) average speed as function of $\bar{\eta} \equiv 3\eta/\sqrt{2}$ for model (8) by $\omega = 0.05$, $\mu = 0.005$, $k = 2.0$ and $\nu = 0.00025$. The circles stand for the values obtained numerically integrating model (13) and the solid curve is obtained using formula (22). b) average speed as function of g for the vertically driven chain of pendulums model (1) by $\omega = 4.0$, $\mu = 3.5$, and $\gamma = 15.76$. The circles stand for the values obtained numerically integrating model (1) and the solid curve is obtained using formula (22) as a fitting function. The spatiotemporal diagrams inset with time running up depict the front dynamics in the different regions.

by saddle-node when $\Delta > 0$ and $\Delta = \Delta_+ \equiv 1$. For $\Delta > \Delta_+$ the front core moves forward, hence the lower state invades the upper state with an oscillatory speed. Fig. 5a shows the average speed of model (8) as a function of η , which illustrates the above scenario. Therefore, for $\Delta_- < \Delta < \Delta_+$ (pinning range) the system exhibits the locking phenomenon and the pinning-depinning takes place when $|\Delta| = 1$. From this condition, we found the pinning-depinning transition relation

$$\eta = \pm \frac{3\pi^2 k^3}{8\sqrt{2}\omega^2 \sinh^2(\pi k/\sqrt{2})} \nu^2, \quad (21)$$

which correspond to a parabolic curve between η and ν . Figure 6 shows this pinning-depinning transition curve contrasted with the numerical results obtained from model (8). The above theoretical prediction has a quite good agreement with the numerical observations. It is important to note that in the $\{\eta, \nu\}$ -space the pinning region exhibits a cusp. One can infer that this behavior is consequence of the cusp catastrophe of the bistability

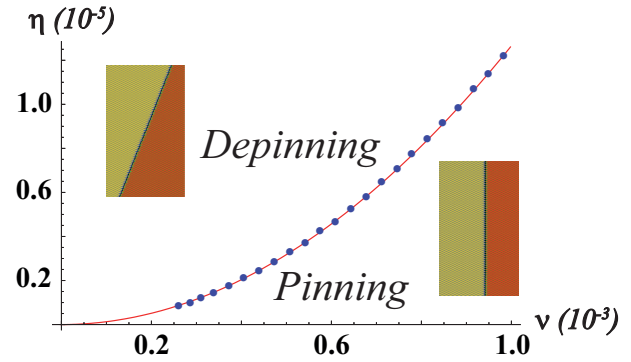


FIG. 6. (color online) Pinning-depinning transition curve. The solid curve is obtained using formula (21) for "+" sing and the circles stand for the values obtained numerically integrating model (8) by $\mu = 0.01$, $\omega = 0.1$, and $k = 1.0$. The spatiotemporal diagram inset with time running up represent, respectively, the typical observed dynamics.

region [26], where the pinning region is circumscribed.

As we have mentioned before, front propagation is characterized by an oscillatory behavior of the speed. In the overdamping limit of model (19), after straightforward calculations one can compute analytically the average speed [12, 13]

$$\begin{aligned} \langle \dot{z} \rangle &= \sqrt{\Delta^2 - 1}, \\ &= \sqrt{\left(\frac{8\sqrt{2}\eta\omega^2 \sinh^2(\pi k/\sqrt{2})}{3\pi^2 k^3 \nu^2} \right)^2 - 1}. \end{aligned} \quad (22)$$

Therefore, for $|\Delta| < 1$ the average speed is zero, $\Delta \gtrsim 1$ grows with a square root law, and $\Delta \gg 1$ increases accompanied by a linear law. In Fig. 5a, the solid curve is obtained using the above formula (22). This curve has a quite good agreement with the numerical observations as shown in Fig. 5a. The spatiotemporal diagrams inset with time running up depict the front dynamics in the respective different regions. It is worthy to note that for a front connecting a pattern with a uniform state or pattern state, one can obtain a similar formula for the average front speed [12, 13].

The dynamics of front core is composed by a slow and a rapid dynamics. The slow dynamics describes the average behavior of the front core and the rapid dynamics accounts for the oscillations with respect of the main dynamics. Hence, in the pinning range the front core dynamics is characterized by oscillation around to fixed position. The left-hand side inset in Fig. 5a depicts this oscillatory dynamics.

The simplified model (8) exhibits front connecting two standing waves. These front solutions present locking phenomenon in a broad region of parameters. Using an adequate limit, we have characterized analytically the coupling between envelope variations and the underlying waves. This is manifested in the equation of the front core (cf. Eqs. 13 and 19). Hence, this simpli-

fied model allows to elucidate the mechanism of front dynamics that is summarized in Eq. (22). So, we have also applied this formula (22) to characterize the front dynamics in a vertically driven pendula chain. Figure (5)b shows average speed of front connecting standing waves for the vertically driven pendula chain as function of the gravity. The circles stand for the values obtained by numerical integration of model (1) and the solid curve is obtained using formula (22) as fitting function. As can be seen from this figure, we have a good agreement between the two results. Hence, we have recognized two different regimes for a front connecting standing waves in a vertically driven pendula chain: the locking and the propagation region. This last region is initially characterized by front propagation with periodic leaps that are distinctive of saddle-node bifurcations and latter by front propagation with periodic oscillation.

IV. LOCALIZED STATES

Localized states arise in dissipative and spatially extended systems and can be seen as patterns extended over a restricted spatial domain, which represents a single or multicells units. They are characterized by a family of continuous parameters, as position, amplitude and width. Formally, localized states can be described as particle-like objects, even though made of a large number of fundamental constituents—atoms or molecules. Their universal nature have been demonstrated by observation in many field of physics, with examples including magnetic materials, liquid crystals, gas discharge systems, chemical reactions, fluids, granular media, nonlinear optics, and Bose-Einstein condensates, to mention a few (see the reviews [28–30] and reference therein). Many experimental and theoretical works have been devoted to the study of localized structures, and different mechanisms have been identified as being responsible for their appearance. Additionally, intriguing dynamical behaviors, displaying mutual interaction of localized structures, have been reported and control methods have been developed in view of potential applications, these mainly aimed at using single-cell localized structures as elementary, erasable and rewritable, storage bits [31].

All these intriguing observations have inspired many theoretical works on the origin of localized structures. Most of them are based onto a one-dimensional geometrical description, in which localized structures are understood as the homoclinic orbits in the Poincaré section of the corresponding spatial-reversible dynamical system [32–35]. In this framework, localized structures are predicted to exist in region of parameters where the system exhibits bistability between a pattern and an uniform stable state. Localized spatial states are, thus, understood as macroscopic particle-like objects realizing the spatial connection between two metastable states and appearing—*homoclinic curve*—close to the *pinning range* of the front solution [7]. Inside the pinning range, the

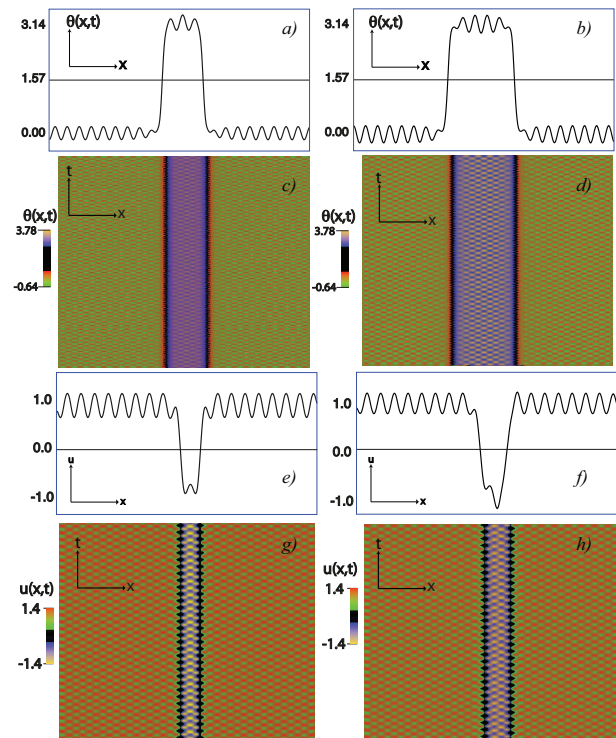


FIG. 7. (color online) Localized waves. a), b), c) and d) are profiles and spatiotemporal diagrams of localized waves, respectively, obtain from model (1), $a = 0.83$, $\omega = 4.0$, $\mu = 3.0$, and $\omega_0^2 = 0.0001$. e), f), g) and h) are profiles and spatiotemporal diagrams of localized waves, respectively, obtain from model (8), $\eta = 0.001$, $\omega = 1.0$, $\mu = 1.0$, $k = 1.0$ and $\nu = 0.6$.

bifurcation diagram displays a *snaking* shape with an infinite sequence of saddle-node bifurcations, each bifurcation creating a cell of the localized pattern solution [34]. Extensions of the same scenario have been given in later papers [36–38]. More recently, localized structures have been described in terms of front interactions [39] and their existence has been generalized to the case when the homoclinic orbits connect two pattern states, thus leading to *localized peaks* [40].

Close to the pinning range of vertically driven pendula chain as well as the simplified model exhibit a family of localized structures with different widths. The widths of the localized structures are roughly multiples of that of the half of the wavelength of standing waves. Figure 7 shows the typical localized structure and the respective spatiotemporal evolution observed in the vertically driven chain of pendulums model (1) and the simplified model (8).

A. Front interaction

To understand the existence, stability properties, dynamical evolution and bifurcation diagram of localized waves, we consider the localized wave as bound state of two fronts [39]. For the sake of simplicity, we study the

front interaction of model (8) in the limit of small η and ν . Thus, the localized structure can be describe by

$$u(x, t) = u_k(x + \delta(t)) + u_{ak}(x - \delta) - 1 + W, \quad (23)$$

where $2\delta(t)$ stands for the distance between fronts, which is assumed to be larger than the characteristic length of the front ($\delta \gg \sqrt{2}$) and W is small correction function. Introducing the above ansatz in Eq. (8) and linearized in W , we obtain at dominate order

$$\begin{aligned} & - (1 - 3(u_k + (u_{ak} - 1))^2 + \partial_{xx})W = \\ & -\partial_x u_k(\mu\partial_t\delta + \partial_{tt}\delta) + \partial_x u_{ak}(\mu\partial_t\delta + \partial_{tt}\delta) \\ & + (1 - 3u_k^2 + \partial_{xx})(u_{ak} - 1) - 3u_k(u_{ak} - 1)^2 \\ & - (u_{ak} - 1)^3 + \eta + \nu \sin(kx + \phi) \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (24)$$

Introducing the inner product (12), the linear operator applying over W is self-adjoint. To solve the above linear equation, we use the solvability condition or Fredholm alternative [2], in a similar manner to that used to derive the front core equation (13). After straightforward cumbersome calculations we obtain

$$\begin{aligned} & \langle \partial_x u_k | \partial_x u_k \rangle (\mu\partial_t\delta + \partial_{tt}\delta) = \\ & \langle \partial_x u_k | -3u_k(u_{ak} - 1)^2 - (u_{ak} - 1)^3 \rangle + \\ & \langle \partial_x u_k | \partial_x u_k \rangle \left(\frac{3\eta}{\sqrt{2}} - \gamma \sin \left[k\delta + \frac{\phi}{2} \right] \text{Cos}(\omega t) \right), \end{aligned} \quad (25)$$

where ϕ can be 0 or π as consequence of the discrete translational symmetry and $\gamma \equiv 3\pi k\nu/2 \sinh(\pi k/\sqrt{2})$. Using the kink and anti-kink solution (formula 9), the above equation explicitly reads

$$\begin{aligned} \ddot{\delta} = & -\mu\dot{\delta} - 12e^{-2\sqrt{2}\delta} + \frac{3\eta}{\sqrt{2}} \\ & - \frac{3\pi k\nu}{2 \sinh(\pi k/\sqrt{2})} \sin \left(k\delta + \frac{\phi}{2} \right) \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (26)$$

The dynamics between the fronts also satisfies a Newton-type equation, with the additional term $e^{-2\sqrt{2}\delta}$, which accounts for the effect of a front over the other. Therefore, a front exponentially affects the dynamics of the other through this attractive force. In a similar way as we have done for the front dynamics (kapitza strategy), we may consider the high frequency and amplitude limit. Then, we obtain the following equation for the mean variable

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta} - \mu\dot{\zeta} = f(\zeta) = & -12e^{-2\sqrt{2}\zeta} + \frac{3\eta}{\sqrt{2}} \\ & - \frac{9\pi^2 k^3 \nu^2}{16\omega^2 \sinh^2(\pi k/\sqrt{2})} \sin(2k\zeta + \phi), \end{aligned} \quad (27)$$

where

$$\zeta \equiv \frac{\omega}{2\pi} \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}} \delta dt, \quad (28)$$

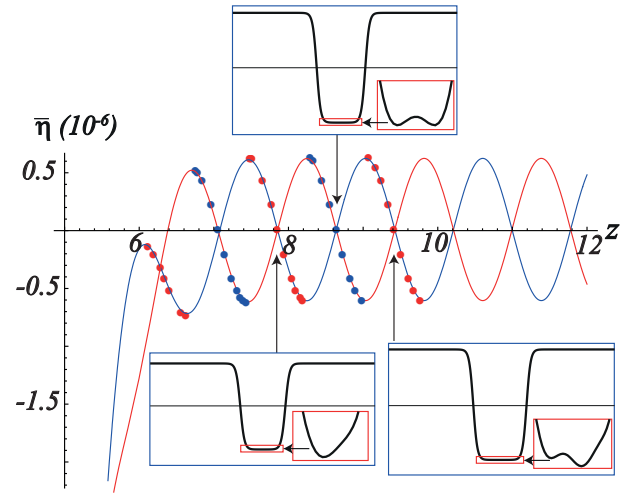


FIG. 8. (color online) Homoclinic snaking bifurcation diagram of localized waves of model (8). ζ_e is the half width of localized waves and $\bar{\eta} \equiv 3\eta/\sqrt{2}$. The solid (dashed) lines represent the stable (unstable) localized waves, which was obtained from Eq.(27). The circles account for numerical equilibrium widths of localized states.

and $f(\zeta)$ describes the respective force in the Newton-type equation (27). Figure 8 shows the equilibria as function of $\bar{\eta} \equiv 3\eta/\sqrt{2}$, deduced from above force (Eq. 27). From this force, we conclude that for large η system has no bound states, while for small η system there is no bound states. More precisely, for sufficiently large and negative η , the fronts move away from each other (ζ increases as a function of time), then the upper standing wave invades the system. When η increase ($\eta < 0$), a series of successive saddle-node bifurcations occurs for $\eta \approx -3\pi^2 k^3 \nu^2 / 8\sqrt{2}\omega^2 \sinh^2(\pi k/\sqrt{2})$. These bifurcations generate the appearance of localized structures by pairs, one stable and another unstable, and each time with a smaller number of bumps. That is, this sequence of bifurcations is characterized by localized states with large width appear first and later the states with small one. These infinite number of bifurcations occur in an exponential small region as shown in Fig. 8.

For small η , and close to the Maxwell point ($\eta = 0$), the system has an infinite number of localized waves with all the possible number of bumps. The lengths of the localized wave are roughly multiples of that of the shortest localized state. In contrast, for $\eta \approx 3\pi^2 k^3 \nu^2 / 8\sqrt{2}\omega^2 \sinh^2(\pi k/\sqrt{2})$ the localized waves disappear by saddle-node bifurcations and with increasing η the larger localized patterns disappear one after the other. Hence, the shortest localized state is the last to disappear (cf. Fig. 8). Thus for sufficiently large and positive η , fronts attract each other (ζ decreases as a function of time), then the lower standing wave invades the system. The above complex scenario is known as the homoclinic snaking bifurcation diagram [34]. Recently, this dynamics have been reported in an experimental work [41].

V. CONCLUSION

In past decades it has been devoted a great effort to understand existence, stability properties, dynamical evolution and bifurcation diagram of localized states in systems out of equilibrium. A simple way to understand these localized states is by considering that they are composed of a bound state of two fronts. Hence, in this framework localized states must be observed in a bistability region. Indeed, in such a region one can observe fronts between the respective states. The dynamical properties of these fronts allow to understand the corresponding features of the localized structures. In the present work, we have characterized the possibility of fronts and dissipative localized states in systems that exhibit bistability between standing waves. More precisely, we have characterized the locking phenomenon, the pinning-depinning transition, propagation, and interaction of this type of fronts. We have considered two systems: a driven vertically chain of pendulums and a generalized ϕ^4 -model. Both exhibit in some regions of parameters bistability between standing waves. In the case of the parametrically driven chain of pendulums, we have characterized the region of bistability between sub-harmonic waves for up-right and upside-down pendulums by using the Galerkin method, obtaining a good agreement between theoretical and numerical results. Fronts exhibit a rich dynamics, which have been characterized analytically in the gen-

eralization ϕ^4 -model showing regions where the front is oscillatory and propagative. These results are verified numerically for the vertically driven chain of pendulums and the generalized ϕ^4 -model. The analytical characterization of the fronts interaction allows us to predict the emergence of dissipative localized waves and the derivation of their respective homoclinic snaking bifurcation diagram.

Parametrically driven systems generically exhibit standing waves, Faraday waves, however they not necessarily coexist with other standing waves. One possible strategy to induce coexistence of standing waves is by consider the effects of high frequencies, which can stabilize unstable state and induces its respective *self-parametric resonance* [42]. The results found in this work are general and we expect them to be observed in other physical systems exhibiting bistability of standing waves such as fluids submitted to parametric forcing and forcing magnetic systems, work in this direction are in progress.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors acknowledge financial support by the ANR-CONICYT 39, "Colors". M.G.C. acknowledges the financial support of FONDECYT grant 1120320 and the ACT127 grant. C.F.O. acknowledges the financial support of CONICYT by *Beca Magister Nacional* and Program of *Ayuda de Estadías Cortas de Investigación* of University of Chile.

-
- [1] G. Nicolis and I. Prigogine, *Self-Organization in Non Equilibrium Systems* (J.Wiley & Sons, New York, 1977).
 - [2] L. M. Pismen *Patterns and Interfaces in Dissipative Dynamics*, (Springer Series in Synergetics, Berlin Heidelberg 2006).
 - [3] M. C. Cross, and P. C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851 (1993).
 - [4] M. I. Rabinovich, A. B. Ezersky, P. D. Weidman, *The dynamics of patterns* (World Scientific, Singapore, 2000).
 - [5] M. Cross, H. Greenside, *Pattern Formation and Dynamics in Nonequilibrium Systems*, (Cambridge University Press, New York, 2009).
 - [6] P. Ball *The Self-Made Tapestry: Pattern formation in nature*, (Oxford University Press, New York, 1999).
 - [7] Y. Pomeau, *Physica D*, **23**, 3 (1986).
 - [8] W. van Saarloos, *Phys. Rep.* **386**, 29 (2003).
 - [9] S. Residori, A. Petrossian, T. Nagaya, C. Riera, and M.G. Clerc, *Physica D* **199**, 149-165 (2004).
 - [10] P. Coulet, J. Lega, B. Houchmanzadeh, and J. Lajzerowicz, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1352 (1990). D. Michaelis, U. Peschel, F. Lederer, D.V. Skryabin, and W.J. Firth, *Phys. Rev. E* **63**, 066602 (2001). M.G. Clerc, S. Coulibaly and D. Laroze *Int. J. Bifurcation and Chaos* **19**, 2717 (2009).
 - [11] D. Bensimon, B. I. Shraiman, and V. Croquette, *Phys. Rev. A* **38**, 5461 (1988).
 - [12] M.G. Clerc, R.G. Elias, and R. G Rojas, *Phil. Trans. R. Soc. A* **369**, 412 (2011).
 - [13] F. Haudin, R.G. Elias, R.G. Rojas, U. Bortolozzo, M.G. Clerc and S. Residori *Phys. Rev. Lett.* **103**, 128003 (2009); *Phys. Rev. E* **81**, 056203 (2010).
 - [14] M.G. Clerc, S. Coulibaly and D. Laroze *Int. J. Bifurcation and Chaos* **19** 3525 (2009).
 - [15] E. I. Butikov, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** 6209 (2002); *Am. J. Phys.* **69**, 755 (2001).
 - [16] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Mechanics* (Pergamon Press, Oxford, 1976).
 - [17] A. Jackson, *Perspectives of Nonlinear dynamics, Vol.2* (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).
 - [18] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge University Press, 2002)
 - [19] A. Stephenson, *Phil. Mag.* **15**, 233 (1908); *Mem. Proc. Manch. Lit. Phil. Soc.* **52**, 1 (1908).
 - [20] H. P. Kalmus, *Am. J. Phys.* **38**, 874 (1970); M. M. Michaelis, *Am. J. Phys.* **53**, 1079 (1985). M. H. Friedman, J. E. Campana, and A. L. Yergey, *Am. J. Phys.* **50**, 924 (1982).
 - [21] H.J.T. Smith, J.A. Blackburn, *Am. J. Phys.* **60**, 909 (1992)
 - [22] P. L. Kapitza, *Sov. Phys. JETP* **21**, 588 (1951); see also *Collected Papers of P. L. Kapitza*, edited by D. Ter Haar (Pergamon, London, 1965).
 - [23] P. Ramon, *Field Theory : A Modern Primer* (Westview Press, *Frontiers in Physics Series*, Vol 74, 1989).

- [24] R. E. Goldstein, G. H. Gunaratne, L. Gil, and P. Couillet, Phys. Rev. A **43**, 6700 (1991).
- [25] P.M. Morse, and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics* (MacGraw Hill, New York, 1953).
- [26] R. Gilmore, *Catastrophe theory, for scientists and engineers* (John Wiley and Sons, New York, 1981).
- [27] C.M. Bender and S.A. Orzag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, (McGraw-Hill, Inc, New York, 1978).
- [28] O. Descalzi, M. Clerc, S. Residori, and G. Assanto, *Localized States in Physics: Solitons and Patterns* (Springer, New York, 2011).
- [29] H. G. Purwins, H. U. Bodeker, and Sh. Amiranashvili, Adv. Phys. **59**, 485 (2010).
- [30] T. Ackemann, W. J. Firth, and G. L. Oppo, Adv. At. Mol. Opt. Phys. **57**, 323 (2009)
- [31] S. Barland, J.R. Tredicce, M. Brambilla, L.A. Lugiato, S. Balle, M. Giudici, T. Maggipinto, L. Spinelli, G. Tissoni, T. Knodlk, M. Millerk and R. Jagerk, Nature, **419**, 699 (2002)
- [32] P. Couillet, C. Riera, and C. Tresser, Phys. Rev. Lett. **84**, 3069 (2000).
- [33] W. van Saarloos, and P.C. Hohenberg, Phys. Rev. Lett. **64**, 749 (1990).
- [34] P.D. Woods, and A.R. Champneys, Physica D **129**, 147 (1999).
- [35] G.W. Hunt, G.J. Lord, and A.R. Champneys, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **170**, 239 (1999).
- [36] P. Couillet, C. Riera, and C. Tresser, Phys. Rev. Lett. **84**, 3069 (2000).
- [37] J. Burke, and E. Knobloch Phys. Rev. E **73**, 056211 (2006).
- [38] J. Burke, and E. Knobloch, Chaos **17**, 037102 (2007).
- [39] M.G. Clerc, and C. Falcon, Physica A **356**, 48 (2005).
- [40] U. Bortolozzo, M.G. Clerc, C. Falcon, S. Residori, and R. Rojas, Phys. Rev. Lett. **96**, 214501 (2006).
- [41] F. Haudin, R. G. Rojas, U. Bortolozzo, S. Residori and M.G. Clerc, Phys. Rev. Lett. **107**, 264101 (2011).
- [42] M.G. Clerc, C. Falcon and C. Fernandez-Oto, to appear EPL.

10.3. Anexo C

Este anexo es el artículo “Origin of the Pinning of Drifting Monostable Patterns”, en proceso de arbitraje en PRL.

Origin of the Pinning of Drifting Monostable Patterns

Marcel G. Clerc¹, C. Fernandez-Oto¹, M. A. García-Ñustes¹, and E. Louvergneaux²

¹ *Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Casilla 487-3, Santiago, Chile and*

² *Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, UMR CNRS 8523, Université Lille 1, 59655 Villeneuve d'Ascq Cédex, France*

Under drift forces a monostable pattern propagates. However, examples of non propagative dynamics have been observed. We show that the origin of this pinning effect comes from the coupling between the slow scale of the envelope to the fast scale of the modulation of the underlying pattern. We evidence that this effect stems from spatial inhomogeneities in the system. Experiments and numerics on drifting pattern-forming systems subjected to inhomogeneous spatial pumping or boundary conditions confirm this results.

PACS numbers: 42.65.Sf, 05.45.-a, 47.54.-r

Pattern formation far from equilibrium occurs in all domains of sciences through the spontaneous symmetry breaking of a ground state [1]. Structures, generated at first threshold of spatial instability, are generally stationary and can be either of (i) localized or of (ii) extended-periodic type. In some particular cases, such patterns continuously drift at their onset, for instance, when the system either (i) possess multiple coexisting states or (ii) is subjected to cross advection/flow. In the first context, spatially localized interfaces connecting different states propagate due to the interplay between state energies. In the second one, the induced cross convection forces the global patterns to drift [2, 3]. However, in both situations, it has been observed that the structure could remain motionless or pinned [4–12].

In multistable systems, this phenomenon is denominated “pinning effect” and was envisaged by Y. Pomeau more than 20 years ago [13, 14]. This is the case for e.g., an homogeneous and a patterned state [15, 16] or else two patterned states [17]. Pinning of systems is a result of a competition between different energetic states that produces front propagation and spatial modulations that tend to block the motion by introducing periodic potential barriers in the dynamics of the front core [4, 8]. Depending on the dominant effect, the front can stay motionless (locked) over a region of parameter, called the pinning range. Above a critical value of the control parameter, the pinning-depinning transition occurs and the localized pattern (front or domain wall) propagates with periodic leaps. Increasing further the control parameter, the velocity of the interface becomes constant in space and time.

In monostable systems, a pattern can be drift by a spontaneous drifting effect [18] or can be forced to propagate [9–12]. In the latter, the pinning effect is also present. Theoretical works on pinning behavior have discussed the effects of the spontaneous translation symmetry breaking for a second order transition system [19] or else “nonadiabaticity” for a first order transition system [4]. However, no general framework has been de-

veloped to elucidate the underlying locking mechanism in the class of monostable systems. Hence, a theoretical work is required for drifting monostable pattern systems that can be unified with the pinning theory developed in multistable systems.

In the present letter, we show theoretically, numerically and experimentally that pinning-depinning transitions induced by spatial inhomogeneities in monostable systems come from the coupling between the small scale of the pattern modulation and the large scale of its amplitude envelope. This coupling, which is in contradiction with the standard multiple scale development assumption, appears as non-resonant terms in the amplitude equation. The analytical averaged phase velocity of the pattern agrees quite well with experimental dynamics of drifting patterns in a convective Kerr optical feedback system subject to a Gaussian transverse inhomogeneity.

In one-dimensional spatially extended convective systems a well established pattern formed after a first instability threshold drifts as a consequence of a spatial asymmetric non-local interaction [1]. A prototype model used to describe this effect is the convective Swift-Hohenberg (SH) equation [20],

$$\partial_t u = \varepsilon u - u^3 - (\partial_{xx} + q^2)^2 u + \gamma \partial_x u + \delta u^2 \quad (1)$$

where $u(x, t)$ is a scalar field, ε is the bifurcation parameter, q is the pattern wavenumber, γ accounts for convection that induces the drift of the pattern and δ is the nonlinear response coefficient. SH model was introduced to describe the onset of Rayleigh-Benard convection, however, recent generalizations have been used intensively to account for pattern formation in several systems [20]. Equation (1) describes a supercritical bifurcation where the variable and parameters scale as $u \sim \varepsilon^{1/2}$, $q \sim \mathcal{O}(1)$, $\partial_x \sim \varepsilon^{1/2}$, and $\partial_t \sim \varepsilon$ where $\varepsilon \ll 1$. For $\varepsilon < 0$, the system presents a stable uniform state $u(x, t) = 0$. At $\varepsilon = 0$ the system bifurcates, the uniform solution becomes unstable, giving rise to pattern formation. For $\varepsilon > 0$, the pattern amplitude, at wavenumber $k_c = \pm q$, grows as the square root of ε .

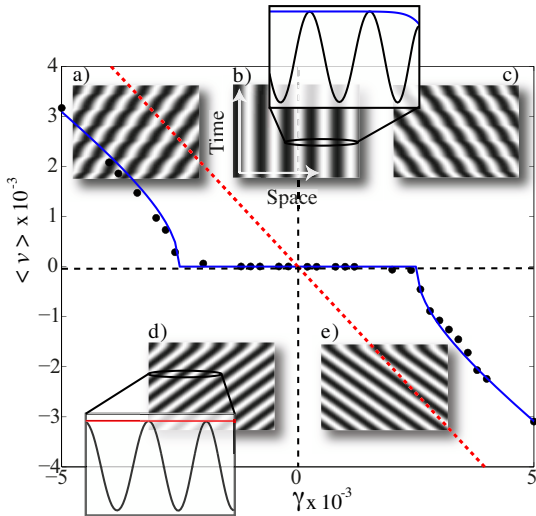


Figure 1: (color online) Numerical pattern phase velocity $\langle v \rangle$ versus drifting parameter γ (black dots) from Eq. (1). Blue solid and red dashed line correspond to the velocity for Neumann boundary conditions (fitting obtain using Eq.6) and periodic conditions, respectively. Insets: Spatiotemporal pattern evolution is shown. A schematic image (zoom) of the pattern and the envelope close to the borders are also included (solid line). a-c) null flux boundary conditions and d,e) periodic boundary conditions. System parameters are $\varepsilon = 0.09$, $q = 0.5$, $\delta = 1$ and a) $\gamma = -3.2 \times 10^{-3}$, b) $\gamma = 2 \times 10^{-3}$, c) $\gamma = 3.2 \times 10^{-3}$, d) $\gamma = -1 \times 10^{-3}$, e) $\gamma = 1 \times 10^{-3}$.

To reveal pinning–depinning phenomenon in the SH model, we performed numerical simulations with two different boundary conditions i) Neumann condition ($\partial_x u = 0$) and ii) periodic. Fig. 1 displays the pattern mean speed $\langle v \rangle$ for different values of the drift parameter γ . *Neumann boundary conditions* (black dots) impose a strong spatial variation of the amplitude close to borders (Fig.1a). Remarkably, under these conditions, the system exhibits a pinning range. Within it, the drifting pattern is pushed to one side reaching a stationary state after a transient. Figure 1b shows the final steady state for this dynamics. Just above pinning–depinning transition, the pattern moves with periodic leaps (Fig.1a,c). On the other hand, for *periodic boundary conditions*, the system displays a constant envelope over the whole space. Insets of Fig.1(d,e) show this feature. For this case, the pattern drifts with non-zero velocity for any value of parameter $\gamma \neq 0$ (dotted line in Fig.1). The system moves with almost a constant speed. It is important to note that spatial inhomogeneities can be also induced by a parameter variation. For instance, a Gaussian variation of parameter ε , i.e. $\varepsilon = \varepsilon_0 + a_0 e^{-(x-x_0)/2\sigma^2}$, imposes smooth amplitude variations at borders. Numerical simulations performed with such spatial inhomogeneity display a similar behavior to those observed for Neumann boundary condition. A pinning region is clearly also observed.

It is straightforward from these results that boundary conditions induce spatial variations for the pattern envelope even comparable to its modulation amplitude. As a consequence, the system displays a pattern envelope–modulation coupling close to borders leading to the pinning–depinning of the front as demonstrated in spatially modulated media [15–17].

To assess the above proposition, let us consider an amplitude equation approach of Eq. (1). Close to the bifurcation ($\varepsilon \ll 1$), using the Ansatz: $u(x, t) = A(y = \sqrt{\varepsilon}x, T = \varepsilon t) \exp(ik_c x) / \sqrt{3 - 2\delta} + c.c.$ in Eq. (1) and imposing a solvability condition to calculate nonlinear corrections [20], we get

$$\partial_T A = \varepsilon A - |A|^2 A + i\beta A + \alpha \partial_y A + \partial_{yy} A, \quad (2)$$

where $\beta \equiv q\gamma$ stands for the phase velocity at q , $\alpha \equiv \gamma/2q$ accounts for the group velocity and considering an appropriate spatial scaling. This conventional convective amplitude equation does not exhibit any phase velocity locking behavior [14]. Indeed, the amplitude equation approach is based on the separation of evolution scales [21]. Such separation become relevant in the solvability condition which implies a inner product of the form, $\langle f|g \rangle = (\sqrt{\varepsilon}k_c/2\pi) \int_y^{y+2\sqrt{\varepsilon}\pi/k_c} f(y, x/\sqrt{\varepsilon})g^*(y, x/\sqrt{\varepsilon})dx$ where y refers to the slow scale (amplitude), x is fast scale (pattern) and $\{f, g\}$ are periodic functions in x . Considering, $\sqrt{\varepsilon} \rightarrow 0$, the spatial variation of the pattern envelope is slow enough with respect to the underlying pattern modulation wavelength ($\partial_x A \ll k_c A / \sqrt{\varepsilon}$). However, the coupling between the pattern envelope and its modulation close to borders, in the case of Neumann boundary conditions, breaks the validity of this scale separation assumption which turns to be no longer satisfied [14]. Following the asymptotic expansion of Laplace Integral [22], we obtain the corrective—non-resonant—terms to the amplitude equation (Eq. 2) in the limit $\sqrt{\varepsilon} \rightarrow 0$ [17, 22]. The resulting amended amplitude equation then reads,

$$\partial_T A = \varepsilon A - |A|^2 A + i\beta A + \alpha \partial_y A + \partial_{yy} A - \frac{i\rho}{3\sqrt{\varepsilon}} \times \left[3\partial_y A^2 e^{\frac{ik_c y}{\sqrt{\varepsilon}}} - 3\partial_y |A|^2 e^{\frac{-ik_c y}{\sqrt{\varepsilon}}} - \partial_y \bar{A}^2 e^{\frac{-3ik_c y}{\sqrt{\varepsilon}}} \right], \quad (3)$$

where $\rho = \delta\pi/\sqrt{3-2\delta}q^2$. Notice that non-resonant terms—three last terms of Eq. (3)—become relevant when the spatial derivative of the envelope are no more negligible, e.g., close to borders. This leads to a coupling between the envelope and the spatial modulation forcing. These terms appear as soon as the system has finite transverse size (boundary conditions) or possess inhomogeneous parameters which is quite often the case in reality.

To emphasize the effects of the corrective terms, we performed numerical simulations of Eq.(3). We considered two different boundary conditions: i) Neumann con-

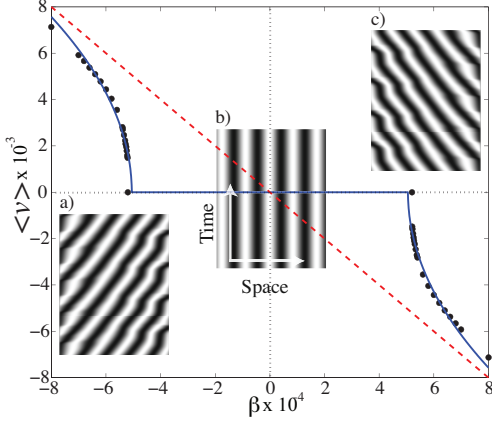


Figure 2: (Color online) Numerical computed pattern phase velocity $\langle v \rangle$ versus drifting parameter β from Eq. (3) for Dirichlet (black dots) and periodic conditions (red dashed line). Curve fitting (blue solid line) with Eq.(6), $\beta_c = 4.5 \times 10^{-4}$. Insets: Spatio-temporal pattern evolution of reconstruct field $u(x, t)$ from $A(x, t)$ with $\varepsilon = 0.4$, $\rho = 0.1$, $L = 600$, and a) $\beta = -7.0 \times 10^{-4}$, b) $\beta = 3.0 \times 10^{-4}$, and c) $\beta = 7.0 \times 10^{-4}$.

dition, $\partial_x A = 0$ and ii) Dirichlet condition, $A = 0$. Measuring the time variation of the spatially averaged phase $d \langle \phi(x, t) \rangle_x / dt$, where $\langle \phi(x, t) \rangle_x \equiv 1/L \int_0^L \phi(x, t) dx$, we get the averaged phase speed of the pattern $\langle v \rangle$. Figure 2, summarizes our numerical results for a system size of $L = 600$. For Neumann boundary conditions, the amplitude envelope is homogeneous in space. Then, non-resonant terms are equal to zero. The averaged phase speed $\langle v \rangle$ increases linearly with the drift parameter β (Fig. 2, red dashed line). On the other hand, for Dirichlet conditions, we obtain large amplitude variations as A goes to zero at the borders, so that terms such as $\partial_x A^2$ (i.e. non-resonant terms) play a prominent role. There exists a pinning region over a large interval of values of β . Figure 2b shows the spatiotemporal diagram of the reconstruct field $u(x, t)$ from $A(x, t)$. It is clear that pattern remains stationary even for non zero values of β . Above a critical value β_c , the pattern drifts with periodical leaps (Fig. 2c).

To understand analytically the above dynamical behavior, we derive an explicit expression for the pattern speed $\langle v \rangle$ as a function of parameter β . Let us consider Madelung representation $A(x, t) = R(x, t)e^{i\phi(x, t)}$, where $R(x, t)$ and $\phi(x, t)$ are the envelope modulus and phase, respectively. Replacing in Eq.(3), and taking the imaginary part, we obtain,

$$\begin{aligned} R\partial_t\phi &= R\partial_{xx}\phi + 2R\partial_x\phi\partial_x R + \beta R + \alpha R\partial_x\phi \\ &+ 2\rho R\partial_x R \cos(k_c x + \phi) \\ &- 2\rho R^2\partial_x\phi \sin(k_c x + \phi) - 2\rho R\partial_x R \sin(k_c x). \end{aligned} \quad (4)$$

The real part determines the dynamics of $R(x, t)$ which

a dominant order is stationary and independent of ρ . As depicted in Fig.3, $\phi(x, t)$ is composed by two different superimposed temporal dynamic behaviors: *i*) a periodic-like and *ii*) a monotonically increasing one. Based on this observation, we propose the following Ansatz: $\phi(x, t) = \phi_\omega(x, t) + \psi(t)$ where ϕ_ω and ψ , respectively, account for the periodic (with dominant frequency ω) and the linear dynamics. Averaging on space Eq.(4), we obtain an expression time dependent only. Next, let us take a time average $\langle \phi(x, t') \rangle_t \equiv \frac{\omega}{T} \int_t^{t+T} \phi(x, t') dt'$. Denoting $\langle \langle f(x, t) \rangle_x \rangle_t \equiv \langle f(x, t) \rangle_{x,t}$, it is clear that the terms of the form $\langle R\partial_x R F(\phi_\omega) \rangle_{x,t}$ where $F(\phi_\omega)$ is a periodic function, are equal to zero from periodicity arguments. Meanwhile, terms of the form $\langle R^2\partial_x\phi_\omega F(\phi_\omega) \rangle_{x,t}$ remains. Close to pinning-depinning transition, $d \langle \phi \rangle_x / dt$ has a slow dynamics. Therefore, the slope of $\psi(t)$ remains invariant on time, i.e. $\psi(t) \cong \langle \psi(t') \rangle_t$. Subsequently, using trigonometric relations, Eq. (4) reads

$$\dot{\psi}(t) = \beta - 2\rho\sqrt{A_0^2 + B_0^2} \cos(\psi + \xi) \quad (5)$$

where $A_0 = \langle R^2\partial_x\phi_\omega \sin(kx + \phi_\omega) \rangle_{x,t} / \langle R(x) \rangle_{x,t}$, $B_0 = \langle R^2\partial_x\phi_\omega \cos(kx + \phi_\omega) \rangle_{x,t} / \langle R(x) \rangle_{x,t}$ and $\cos(\xi) = B_0 / \sqrt{A_0^2 + B_0^2}$. Equation (5) can be interpreted as an overdamping particle under the influence of a periodical and constant force. Integrating Eq. (5) over a spatial period, we get [15],

$$\langle v \rangle = \sqrt{\beta^2 - \beta_c^2} \quad (6)$$

where $\beta_c \equiv |2\rho\sqrt{A_0^2 + B_0^2}|$ locates the pinning-depinning transition. Close to β_c , the system exhibits a saddle-node bifurcation with pattern velocity increasing as the square

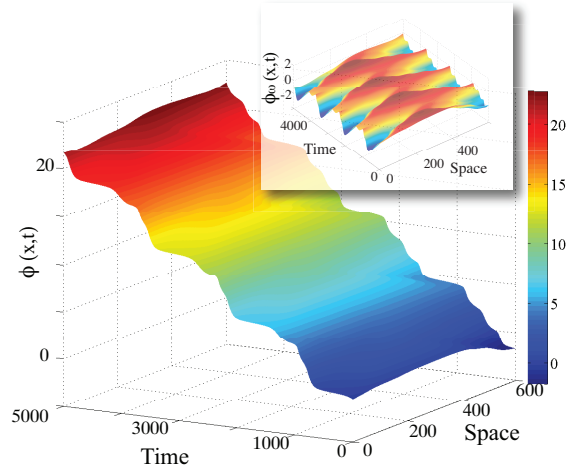


Figure 3: (Color online) Spatiotemporal diagram for $\phi(x, t)$ with $\varepsilon = 0.4$, $\rho = 0.1$, $k_c = 0.1$ and $\beta = 7.0 \times 10^{-4}$. Inset: spatio-temporal diagram for $\phi_\omega(x, t)$.

root of β^2 whereas for larger values of β , it behaves as a linear function of β . Relation (6) has been derived initially in the context of front propagation in patterned systems [4]. Figure 2 shows the excellent fitting (blue solid line) of $\langle v \rangle$ using Eq.(6) in the case of Dirichlet boundary conditions. Using the same fitting we have a good agreement for SH model with $\beta_c = 2.6 \times 10^{-3}$ (see Fig.1). Note that, from Eq. (5) it is also clear that if ρ is equals to zero, the non-resonant terms vanish. Therefore, the appearance of the pinning effect in the system is not longer observed, despite of the presence of amplitude variations induced by the boundary conditions. Hence, the phase velocity is linearly proportional to β in good agreement with Neumann conditions.

To provide an experimental verification of pinning-depinning phenomenon in drifting monostable pattern system, we consider the feedback optical system described in Ref. [23–25] which consists of a Kerr medium subjected to optical feedback provided by a mirror tilted by an angle θ (see Fig. 4(a)). It consists in a nematic liquid crystal (LC) layer irradiated by a laser beam (F) which is reflected back onto the sample (B) by a simple plane mirror placed at a variable distance d from the LC layer (Fig. 4(a)). It is straightforward to derive a similar amended amplitude equation as equation (3) from the model [26] which describes this experimental system. The full and lengthy expressions of these coefficients, as a function of the experiment parameters, will be reported elsewhere [27].

The nonlinear medium is a $50 \mu\text{m}$ thick layer of E_7 LC homeotropically anchored with response time τ and diffusion length l_d are equal to 2.3 s and $10 \mu\text{m}$ respectively [28]. The beam is delivered by a monomode frequency doubled $\text{Nd}^{3+}:\text{YVO}_4$ laser ($\lambda_0 = 532 \text{ nm}$) which is shaped by means of two cylindrical telescopes in order to achieve a transverse quasi-monodimensional (1D) pumping (beam diameters $\approx 93 \mu\text{m} \times 650 \mu\text{m}$). The optical feedback length d is equal to 5 mm . The reflected beam B is shifted transversely with respect to the incoming forward beam F . The translational shift h accounts for the distance between the two beams on the LC sample. For a typical feedback length $d = 5 \text{ cm}$, the angle θ is of order of 4 mrad , $h \approx 2l_d = 20 \mu\text{m}$ (to be compared with the pattern wavelength - $103 \mu\text{m}$ - in the conditions of a uniform pump profile). In the following, h will be given in units of l_d to keep the same units as for analytical predictions. The reflected beam is monitored after its second passage through the LC layer B_{out} on Fig. 4(a). The pumping has a Gaussian shape, as a sort of Dirichlet boundary conditions. Associated with the pattern drift induced by the translational shift h , the system presents all the ingredients for pinning-depinning transition. We then focus on the phase velocity evolution of the convective modes versus the lateral shift h .

As we can see on Fig 4, there is a good agreement between the predictions and the experimental observa-

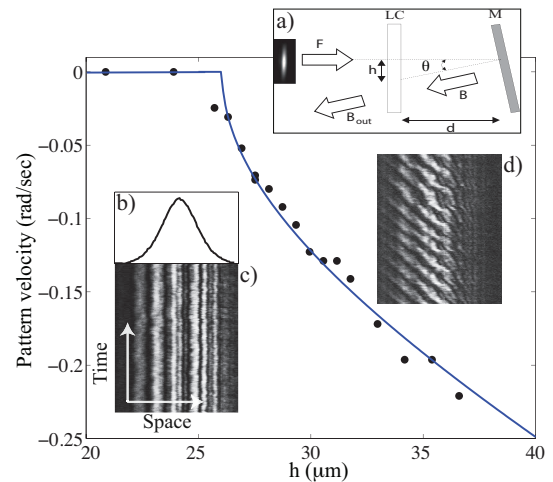


Figure 4: Experimental phase velocity of a Kerr media subject to an optical feedback (black dots) and its respectively theoretical fitting (Eq.6) (a) Experimental setup. LC liquid crystal layer; M feedback mirror; F input optical field; B backward optical field; B_{out} output optical field sent to CCD cameras; θ mirror tilt angle; d feedback length. (b) Laser intensity profile. Evolution of the experimental phase velocity versus the translational shift h . $d = 5 \text{ mm}$. $I = 634 \text{ W/cm}^2$, (c) $h=2.09$ and (d) $h=2.7$.

tions on all the points. More specifically, the spatial dependence of the convective systems leads to pinning phenomenon. The measured phase velocity evolves as $\sqrt{h^2 - h_c^2}$ close to the pinning frontier $h \approx 2.8l_d$. This confirms the observations reported in [12]. In addition, Eq. (6) accurately describes the pinning-depinning transition. For this particular case, the spatial coupling between the pattern and the envelope variations is produced by the gaussian profile of the pump beam (Fig.4b). In fact, the coupling is present in almost all the space, given the few number of pattern wavelengths close to the maximum of the profile of the beam (aspect ratio ~ 6). Figure 4c displays spatiotemporal recording of the optical pattern profile exhibiting a pinned behavior. Above the pinning-depinning transition, we observe the expected pattern propagation with almost periodic leaps (Fig. 4d). The aperiodicity comes from internal noise.

In conclusion, our work generalizes the pinning theory developed in multistable systems to all systems: Pinning phenomenon comes from the coupling between the slow scale of the pattern envelope to the fast scale of its modulation.

The authors acknowledge financial support by the ANR-CONICYT 39, “Colors”. M.G.C. and M.A.G-N. thank for the financial support of FONDECYT projects 1120320 and 3110024, respectively. This research was supported in part by the centre de la Recherche Scientifique (CNRS) and by the ‘Conseil Régional Nord-Pas de Calais’, ‘The Fonds Européen de développement

The authors acknowledge financial support by the ANR-CONICYT 39, “Colors”. M.G.C. and M.A.G-N. thank for the financial support of FONDECYT projects 1120320 and 3110024, respectively. This research was supported in part by the centre de la Recherche Scientifique (CNRS) and by the ‘Conseil Régional Nord-Pas de Calais’, ‘The Fonds Européen de développement Economique de régions’. C. F. O. acknowledges the financial support of CONICYT by Beca Magister Nacional and Program of Ayuda de Estadías Cortas de Investigación of University of Chile.

-
- [1] G. Nicolis and I. Prigogine, *Self-Organization in Nonequilibrium Systems: From Dissipative Structures to Order through Fluctuations* (John Wiley and Sons, New York, 1977).
- [2] R. Briggs, *Electron-stream interaction with plasmas* (MIT Press, Cambridge, Mass., 1964).
- [3] P. Huerre and P. Monkewitz, *Ann. Rev. Fluid. Mech.* **22**, 473 (1990).
- [4] D. Bensimon, B. Shraiman, and V. Croquette, *Phys. Rev. A* **38**, 5461 (1988).
- [5] B. Malomed, A. Nepomnyashchy, and M. Tribelsky, *Physical Review A* **42**, 7244 (1990).
- [6] O. Jensen, V. Pannbacker, and G. Dewel, *Physics Letters A* **179**, 91 (1993), ISSN 03759601.
- [7] M. Schwartz and T. Solomon, *Physical Review Letters* **100**, 1 (2008), ISSN 0031-9007.
- [8] L. Pismen, *Springer Series in Synergetics* (2006).
- [9] I. Rehberg, E. Bodenschatz, B. Winkler, and F. Busse, *Physical review letters* **59**, 282 (1987), ISSN 1079-7114.
- [10] D. Ohlsen, S. Yamamoto, and C. Surko, *Journal of statistical* **64**, 903 (1991).
- [11] J. Seipenbusch, T. Ackemann, B. Schäpers, B. Berge, and W. Lange, *Physical Review A* **56**, R4401 (1997), ISSN 1050-2947.
- [12] T. Ackemann, B. Schapers, J. P. Seipenbusch, Y. A. Logvin., and W. Lange, *Chaos, Solitons and Fractals* **10**, 665 (1999), ISSN 0960-0779.
- [13] Y. Pomeau, in *Cellular Structures in Instabilities.*, edited by J. E. Wesfreid and S. Zaleski (Springer, Berlin, Germany, 1984), vol. 210 of *Lecture Notes in Physics*.
- [14] Y. Pomeau, *Physica D* **23**, 3 (1986).
- [15] F. Haudin, R. G. Elías, R. G. Rojas, U. Bortolozzo, M. G. Clerc, and S. Residori, *Physical Review E* **81**, 1 (2010).
- [16] M. G. Clerc, C. Falcon, D. Escaff, and E. Tirapegui, *The European Physical Journal Special Topics* **143**, 171 (2007).
- [17] U. Bortolozzo, M. G. Clerc, F. Haudin, R. G. Rojas, and S. Residori, *Advances in Nonlinear Optics* **2009**, 1 (2009).
- [18] S. Alwyn, ed., *Encyclopedia in Nonlinear Sciences* (New York, 2005).
- [19] E. Knobloch, J. Hettel, and G. Dangelmayr, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4839 (1995).
- [20] M. Cross and P. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851 (1993).
- [21] J. Kevorkian, *Multiple Scale and Singular Perturbation Methods*, vol. 114 of *Applied Mathematical Sciences* (Springer-Verlag, Inc., New York, 1996), 1st ed.
- [22] C. M. Bender and S. A. Orzag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers* (McGraw-Hill, Inc, New York, 1978), 1st ed.
- [23] E. Louvergneaux, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 244501 (2001).
- [24] E. Louvergneaux, C. Szwaj, G. Agez, P. Glorieux, and M. Taki, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 043901 (2004).
- [25] G. Agez, P. Glorieux, M. Taki, and E. Louvergneaux, *Phys. Rev. A* **74**, 043814 (2006).
- [26] G. Dalessandro and W. J. Firth, *Phys. Rev. A* **46**, 537 (1992).
- [27] M. G. Clerc, C. Fernandez-Oto, M. A. García-Ñustes, and E. Louvergneaux, In preparation (????).
- [28] G. Agez, P. Glorieux, C. Szwaj, and E. Louvergneaux, *Opt. Commun.* **245**, 243 (2005).