



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

PROCESOS GENERADOS POR LAS INVERSAS DE LAS POTENCIAS DE  
HADAMARD DEL OPERADOR DE GREEN DEL MOVIMIENTO BROWNIANO.

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

GONZALO ANDRÉS CONTADOR REVETRIA.

PROFESOR GUÍA:  
JAIME SAN MARTÍN ARISTEGUI.

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
SERVET MARTÍNEZ AGUILERA.  
JOAQUÍN FONTBONA TORRES.

Santiago de Chile, Diciembre 2012

RESUMEN DE LA MEMORIA  
PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO  
POR: GONZALO CONTADOR REVETRIA  
FECHA:  
PROF. GUÍA: JAIME SAN MARTÍN

DIFUSIONES GENERADAS POR LAS INVERSAS DE LAS POTENCIAS DE  
HADAMARD DEL OPERADOR DE GREEN DEL MOVIMIENTO BROWNIANO

El presente trabajo de Memoria de Título para la carrera *Ingeniería Civil Matemática* consiste en el estudio de difusiones en la recta real. Se pretende caracterizar la familia de procesos estocásticos generada por los operadores inversos de las  $n$ -ésimas potencias de Haddamard del operador de Green del Movimiento Browniano.

En una primera instancia, se estudian las potencias de Haddamard del operador de Green asociado al movimiento Browniano en un intervalo acotado. Con ciertas propiedades encontradas para estos operadores, se obtienen propiedades que impiden la existencia de una inversa continua. Luego, se calcula una fórmula para un operador diferencial en  $L^2$ , demostrando que corresponde a una inversa para la potencia del operador de Green.

Posteriormente, se estudia la familia de procesos estocásticos cuyo semigrupo generador está dado por los operadores anteriormente obtenidos truncados en el coeficiente lineal. Este estudio permite obtener ciertas propiedades para el posterior estudio de la familia de procesos generada por los operadores obtenidos en la primera etapa, y además entrega una caracterización que resulta en sí misma interesante de una familia de procesos estocásticos.

Luego, se caracteriza la familia de procesos estocásticos cuyo semigrupo generador está dado por los operadores obtenidos en la etapa inicial, en función de la familia de procesos obtenida en la parte anterior. Se demuestra la igualdad en ley con un proceso que es idéntico al anterior hasta un instante aleatorio de muerte y se obtienen cotas para la probabilidad de muerte en función del tiempo elapsado y de la potencia de Haddamard que genera el proceso, que se verifica una ecuación de semigrupo, que el generador de dicho proceso efectivamente corresponde a la inversa de una potencia de Hadamard del operador de Green del Movimiento Browniano, y que el Kernel de Green para estos procesos corresponde a una potencia de Hadamard de dicho operador.

Finalmente, se presentan métodos numéricos desarrollados para simular ambas familias de procesos estocásticos, sus limitaciones, posibles errores, y se muestran un par de resultados obtenidos junto con una discusión acerca de la sensibilidad de los parámetros y los errores de aproximación.

# AGRADECIMIENTOS

Agradezco en primer lugar a mi Madre, a quién va dedicado este trabajo. Por todo.

A los profesores Servet Martínez y Nancy Lacourly, a quienes además de haberme entregado las primeras herramientas para entender y apasionarme por la teoría de probabilidades y la aleatoriedad como objeto de estudio, reconozco como los profesores que confiaron en mí desde un principio. Mi gratitud con ellos va mucho más allá de lo académico.

A mi profesor guía, Jaime San Martín, quien me otorgó libertad plena para desarrollar este trabajo y tuvo siempre disposición para ayudarme e incommensurable paciencia. También a Joaquín Fontbona, por su valiosa ayuda en este trabajo.

A los grandes amigos que conocí en mi paso por la carrera, especialmente a Matías, Orlando, Gonzalo, Andrés F., Johan, Sebastián R., Andrés Z., Pedro, Sandra, Javiera, Mauro, Sebastián B.. Que entre las muchas citas que reciban a futuro, esta no quede en el olvido.

A la comunidad DIM, no sólo por su formación sino también por su apoyo y acogida. En especial a Eterin Jaa, María Inés Rivera, Marcos Kiwi, Manuel del Pino y Nikolas Tapia.

A mis amigos Osmar, Franco, Isabel Margarita, César, Ariel, Álvaro, Tania, María Paz, Domingo, Kimie, Isabel Beatriz, Daniela, Natalia, Nicole, Gisella, Rocío, Istvan, Loreto, Martina, y Bruno, por apoyarme en lo malo y compartir lo bueno.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Preliminares . . . . .	1
1.2. Definiciones . . . . .	2
1.3. Clasificación de puntos extremos de Feller . . . . .	4
<b>2. Inversa para el operador de Green</b>	<b>6</b>
2.1. Compacidad en $L^2$ , inexistencia de una inversa continua. . . . .	6
2.2. Inversa del operador $G_n$ . . . . .	8
2.2.1. Restricción a polinomios . . . . .	8
2.2.2. Operador Diferencial Inverso . . . . .	9
<b>3. Estudio del proceso dado por <math>dX_t = \sqrt{2a_n(X_t)}dW_t + b_n(X_t)dt</math></b>	<b>11</b>
3.1. Clasificación de los puntos extremos . . . . .	12
3.2. Medidas de tendencia para el proceso . . . . .	13
3.3. Estudio del proceso dado por $dV_t = \sqrt{2a_n(X_t)}dW_t - b_n(X_t)dt$ . . . . .	14
3.3.1. Clasificación de los puntos extremos . . . . .	15
3.3.2. Medidas de tendencia para el proceso . . . . .	16
3.3.3. Distribuciones estacionarias para el proceso . . . . .	17
<b>4. Procesos generados por las potencias de Hadamard del operador de Green</b>	<b>20</b>
4.1. Definición del proceso . . . . .	20
4.2. Distribución del proceso . . . . .	21
4.3. Generador del semigrupo dado por (14) . . . . .	25

---

4.4. Kernel de Green para el proceso . . . . .	26
<b>5. Simulaciones numéricas de los procesos estudiados</b>	<b>28</b>
5.1. Simulación de las trayectorias del proceso $(X_t)_{t \geq 0}$ . . . . .	28
5.2. Simulación de las trayectorias del proceso $(V_t)_{t \geq 0}$ . . . . .	30
5.3. Simulación de la integral de las trayectorias. . . . .	31
5.4. Simulación de las trayectorias del proceso $(Y_t)_{t \geq 0}$ . . . . .	32
5.5. Resultados de las simulaciones . . . . .	33
5.5.1. Resultados para el proceso $(X_t)_{t \geq 0}$ . . . . .	33
5.5.2. Resultados para el proceso $(V_t)_{t \geq 0}$ . . . . .	37
5.5.3. Resultados para el proceso $(Y_t)_{t \geq 0}$ . . . . .	39
<b>6. Conclusiones</b>	<b>43</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>45</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Preliminares

Dado un operador de semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  definimos su *generador infinitesimal*  $A$  como

$$Af = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)f - f}{t}.$$

Para toda función  $f$  tal que este límite exista.

En el caso de un proceso de Markov a tiempo continuo, el semigrupo asociado  $P(t)$  verifica una ecuación de semigrupo  $P(t+s) = P(t)P(s)$  y denotamos a su generador infinitesimal por  $Q$ , verificándose la ecuación

$$P(t) = e^{Qt}$$

En el estudio de este tipo de procesos, el comportamiento del proceso estocástico define propiedades sobre el generador infinitesimal, e inversamente se pueden conocer propiedades del proceso estocástico (instantaneidad, conservatividad) en base al estudio del generador infinitesimal. Más aún, dado un operador con determinadas propiedades, el define un semigrupo continuo y contractante (ver teorema 2.1.12 [2]) Markoviano de la manera canónica

$$P(t) = e^{Qt}.$$

La pregunta que surge, entonces, es si acaso se puede generalizar este razonamiento a una difusión cualquiera. ¿Qué tipo de operadores generan un semigrupo? ¿Qué características tienen los procesos asociados a un determinado semigrupo infinitesimal? ¿Podemos caracterizar de alguna manera a los operadores candidatos a generador infinitesimal de alguna difusión con determinadas características?

En este trabajo se pretende responder a estas preguntas analizando el caso de las potencias de Hadamard de la función de Green del Movimiento Browniano. Se estudian los operadores asociados a estas potencias y la familia de procesos estocásticos que ellas generan.

## 1.2. Definiciones

Dada una Ecuación Diferencial Estocástica

$$dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt, \quad (1.1)$$

donde las trayectorias de  $X_t$  se encuentran al interior de un intervalo acotado  $(a, b)$ , para  $c \in (a, b)$  definimos la *función escala* mediante

$$p(x) = \int_c^x \exp \left\{ -2 \int_c^z \frac{b(y)}{\sigma^2(y)} dy \right\} dz, \quad (1.2)$$

la cual verifica

$$p''(x) = \frac{-2b(x)}{\sigma^2(x)} p'(x). \quad (1.3)$$

La *medida de velocidad* como aquella medida en el intervalo  $(a, b)$  cuya densidad respecto a Lebesgue está dada por

$$dm(x) = \frac{2dx}{p'(x)\sigma^2(x)}. \quad (1.4)$$

El *kernel de Green* mediante

$$g_{a,b}(x, y) = \frac{(p(x \wedge y) - p(a))(p(b) - p(x \vee y))}{p(b) - p(a)}. \quad (1.5)$$

Definimos la *función de Green* como la integral del Kernel de Green respecto a la medida de velocidad, esto es

$$G_{a,b}(x, y) = \int_0^1 \frac{2(p(x \wedge y) - p(a))(p(b) - p(x \vee y))}{(p(b) - p(a))p'(x)\sigma^2(x)} dx. \quad (1.6)$$

Con la letra  $M$  denotamos a la solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{aligned} bM' + \frac{\sigma^2}{2}M'' &= -1 \\ M(a) &= M(b) = 0 \end{aligned}$$

La cual queda dada por la función de Green

$$M(x) = \int_a^b g_{a,b}(x, y) dm(y). \quad (1.7)$$

Para asegurar las condiciones de integrabilidad de Feller (5.5.C [2]) se define el tiempo de parada

$$\tau_n = \inf \left\{ t \geq 0 : \int_0^t \sigma^2(X_s) ds \geq n \right\} \quad (1.8)$$

y el tiempo de salida del intervalo  $(a, b)$  como

$$T_{a,b} = \inf\{t \geq 0 : X_t \notin (a, b)\} \quad (1.9)$$

El interés que tienen estos objetos para el estudio de los procesos estocásticos se basa en la aplicación de la fórmula de Ito a  $M_{a,b}(X_{t \wedge \tau_n \wedge T_{a,b}})$  para obtener

$$M_{a,b}(X_{t \wedge \tau_n \wedge T_{a,b}}) = M_{a,b}(x) - (t \wedge \tau_n \wedge T_{a,b}) + \int_0^{t \wedge \tau_n \wedge T_{a,b}} M'_{a,b}(X_s) \sigma(X_s) dW_s$$

Tomando valor esperado y luego haciendo  $n \rightarrow \infty$  se observa que

$$\mathbb{E}(t \wedge T_{a,b}) = M_{a,b}(x) - \mathbb{E}(M_{a,b}(X_{t \wedge \tau_n \wedge T_{a,b}})) \leq M_{a,b}(x)$$

Y, haciendo  $t \rightarrow \infty$ , se observa que  $T_{a,b}$  será finito casi seguramente cuando la función de Green lo sea.

Se define también el *Producto de Hadamard* de un operador  $L$  y un operador  $\hat{L}$  como en producto puntual o "coordenada a coordenada" de los operadores, esto es

$$(L \times \hat{L})(x, y) = L(x, y) \hat{L}(x, y),$$

y la  $n$ -ésima *Potencia de Hadamard* de un operador como el producto de Hadamard consigo mismo  $n$  veces.

En lo sucesivo, se utilizará la notación del producto usual para el producto de Haddamard.

En el caso del Movimiento Browniano, se le identifica con el proceso con drift 0 y difusión 1. Las definiciones introducidas anteriormente en este caso son:

- Función de escala

$$p(x) = x - c$$

- Densidad de velocidad

$$dm(x) = 2dx$$

- Kernel de Green

$$(x \wedge y)(1 - x \vee y)$$

- Función de Green

$$2(x \wedge y)(1 - x \vee y)$$

- $n$ -ésima potencia de Hadamard de la función de Green

$$2^n(x \wedge y)^n(1 - x \vee y)^n$$

Definimos el operador de Green  $G_n$  como la integral del producto puntual entre la  $n$ -ésima potencia de Hadamard de la función de Green y una función, esto es

$$G_n f(x) = \int_0^1 2^n(x \wedge y)^n(1 - x \vee y)^n f(y) dy$$

### 1.3. Clasificación de puntos extremos de Feller

En este trabajo, se utilizará el criterio de William Feller descrito en [4] para el estudio del comportamiento de una difusión en los extremos del intervalo en el cual está definida.

Dado un proceso como en la sección anterior definido en el interior de un intervalo de  $\mathbb{R}$ , para estudiar el tiempo que demora este proceso en alcanzar un borde  $l$  partiendo desde un punto  $x$  al interior del intervalo, se define la siguiente cantidad

$$T_o(l, x) = \int_l^x \int_l^z p(y) dy dm(z)$$

donde  $p$  es la función de escala para el proceso y  $dm$  es la medida de velocidad del mismo. En [4], Wei Xie demuestra que la finitud de este tiempo es independiente de la elección de  $x$  al interior del intervalo de definición del proceso y, por ende, se puede usar la notación  $T_o(l)$  cuando  $x$  se asuma conocido, o hablar de  $T_o(l, x)$  sin especificar  $x$ .

De manera análoga, se define el tiempo esperado que demora un proceso en alcanzar un borde  $l$  partiendo desde  $x$  como

$$T_i(l, x) = \int_l^x \int_z^x p(y) dy dm(z)$$

y, con similares consideraciones que en el caso anterior, se puede hablar de  $T_i(l)$  cuando  $x$  se asuma conocido. William Feller realiza una clasificación del comportamiento de los procesos en un borde  $l$  dependiendo de la finitud de estos elementos, definiendo cuatro tipos de bordes:

1. **Barrera regular:** Una difusión puede tanto entrar al intervalo de definición como salir de él por el borde  $l$  si corresponde a este tipo de barrera. Para una caracterización completa del proceso, deben imponerse condiciones de borde sobre  $l$ . Si las cantidades  $p(x) - p(l)$  y  $\int_l^x dm(z)$  son ambas finitas, entonces  $l$  corresponde a una barrera regular para el proceso.
2. **Barrera de entrada:** Una barrera de entrada  $l$  no puede ser alcanzada en tiempo finito cuando el proceso parte al interior del intervalo, pero es posible (y de interés en varias aplicaciones) considerar un proceso con condición inicial  $X_0 = l$ . Dicho proceso entrará rápidamente al intervalo de definición y no podrá volver al estado  $l$  en tiempo finito. Si la cantidad  $p(x) - p(l)$  es infinita pero  $T_i(l, x) < \infty$ , entonces  $l$  corresponde a una barrera de entrada para el proceso.
3. **Barrera de salida:** Una barrera de salida  $l$  puede ser alcanzada en tiempo finito cuando el proceso parte al interior del intervalo y, cuando se encuentra en ella, no puede regresar a este, observándose una pérdida de trayectorias para el proceso. Si la cantidad  $\int_l^x dm(z)$  (la medida de velocidad de un intervalo) es infinita pero  $T_o(l, x) < \infty$ , entonces  $l$  corresponde a una barrera de salida para el proceso.

4. **Barrera natural:** Como su nombre lo sugiere, el borde  $l$  será una barrera natural si un proceso no puede alcanzar dicho estado estando en el interior y no puede alcanzar el interior teniendo condición inicial en él. Si  $T_o(l, x) = \infty$  y  $T_i(l, x) = \infty$ , entonces  $l$  corresponde a una barrera natural para el proceso.

En la misma referencia, se verifican las siguientes propiedades asociadas a las cantidades involucradas en la clasificación de puntos extremos, entregando condiciones suficientes para determinar a que tipo de barrera corresponde un intervalo:

- $p(x) - p(l) = \infty \implies T_o(l, x) = \infty$
- $\int_l^x dm(z) = \infty \implies T_i(l, x) = \infty$
- $T_o(l, x) < \infty \implies p(x) - p(l) < \infty$
- $T_i(l, x) < \infty \implies \int_l^x dm(z) < \infty$
- $T_i(l, x) + T_o(l, x) = (p(x) - p(l)) \int_l^x dm(z)$

Esta clasificación de puntos extremos entrega una mejor comprensión del tipo de proceso que se estudia. Algunas propiedades (transiente, no conservativo) son inmediatas al obtener esta clasificación, y dependiendo de esta misma se sabe que condiciones se pueden o deben imponer en un borde para tener un proceso bien definido. De acuerdo a estos objetos matemáticos se realizará un estudio de los bordes en todas las familias de procesos estudiadas.

# Capítulo 2

## Inversa para el operador de Green

### 2.1. Compacidad en $L^2$ , inexistencia de una inversa continua.

Se busca una inversa para el operador  $G_n$  descrito en el primer capítulo, de manera de caracterizar el semigrupo generado por este operador y describir el proceso estocástico asociado. Dada la naturaleza del operador, se verá que esto no es posible si buscamos una inversa continua. Para ello, introduciremos un par de conceptos.

**Definición 2.1.1.** Sea  $T : H \rightarrow H$  un operador lineal continuo en un Hilbert. Diremos que  $T$  es un Operador de Hilbert-Schmidt si, para cualquier base hilbertiana  $(e_i)_{i \in \mathbb{I}}$  se verifica

$$\|T\|_{HS} = \sum_{i \in \mathbb{I}} \|T(e_i)\|_H < \infty.$$

Se tiene, en este contexto, que la cantidad  $\|T\|_{HS}$  no depende de la base hilbertiana electa <sup>1</sup> y que  $\|T\|_{L^2} \leq \|T\|_{HS}$ . Mas aún, dada esta última cota superior, se tiene que  $T$  es uniformemente aproximable por operadores a rango finito (precisamente, la proyección de  $T$  en el subespacio generado por los primeros  $n$  elementos de la base hilbertiana) y, por lo tanto, un operador compacto. A continuación, veremos que un caso importante de operadores de Hilbert-Schmidt son funciones conocidas como *kernel integral*, entre las cuales se encuentran los operadores  $G_n$  definidos al principio.

**Teorema 2.1.2.** Dado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto conexo y  $k(x, y) \in L^2(\Omega \times \Omega)$  función a valores reales, se tiene que el operador lineal  $U : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  definido como

$$Uf(x) = \int_{\Omega} k(x, y)f(y)dy.$$

es de Hilbert-Schmidt y, mas aún,

$$\|U\|_{HS} = \|k\|_{L^2}.$$

---

<sup>1</sup>Ver, por ejemplo, Functional Analysis de Brezis

Para una demostración, ver [6].

Este último teorema descarta la existencia de inversas continuas para los operadores  $G_n$ , identificando para cada  $n \in \mathbb{N}$   $k(x, y) = \min(x, y)^n (1 - \max(x, y))^n$ , pues 0 siempre es un valor espectral para un operador compacto. Combinando las desigualdades  $\|G_n\|_{L^2} \leq \|G_n\|_{HS} = \|k_n\|_{L^2}$  podemos obtener una cota para la norma de los operadores  $G_n$  pues

$$\begin{aligned} \|k_n\|_{L^2}^2 &= 4^n \int_0^1 \int_0^1 (x \wedge y)^{2n} (1 - (x \vee y))^{2n} dy dx \\ &= 4^n \int_0^1 \int_0^x y^{2n} (1-x)^{2n} dy dx + 4^n \int_0^1 \int_x^1 x^{2n} (1-y)^{2n} dy dx \\ &= 4^n \int_0^1 \left( \frac{(1-x)^{2n} x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(1-x)^{2n+1} x^{2n}}{2n+1} \right) dx \\ &= 4^n \int_0^1 \frac{(1-x)^{2n} x^{2n}}{2n+1} dx. \end{aligned}$$

y notando que esta integral corresponde, salvo constante, a la densidad de probabilidad de una distribución *Beta* de parámetros  $2n+1$  y  $2n+1$  se tiene que lo anterior es igual a

$$\begin{aligned} &= 4^n \frac{\Gamma(2n+1)^2}{\Gamma(4n+2)(2n+1)} \\ &= 4^n \frac{(2n)!^2}{(4n+1)!(2n+1)} \\ &= \frac{4^n}{\binom{4n+1}{2n}(2n+1)^2}. \end{aligned}$$

Utilizando la fórmula de Stirling, el denominador se puede aproximar por

$$\binom{4n+1}{2n} (2n+1)^2 \approx \frac{4^{2n+1} (2n+1)^2}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Cantidad que diverge más rápido que el numerador, concluyéndose así que

$$= \frac{4^n}{\binom{4n+1}{2n} (2n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Así pues, se descarta la idea de una inversa de tipo lineal continua para los operadores de Green definidos al principio. De esta cota y del hecho que las estimaciones son finitas en  $n \geq 2$  se deduce a priori que un proceso cuyo generador corresponda a una potencia de Hadamard del operador de Green del Movimiento Browniano necesariamente estará tiempo finito en el intervalo  $(0, 1)$  (inclusiones de los espacios  $L^p$  para medida finita). El hecho de que tiendan en norma a cero hace pensar en algún operador que "explote" en  $n$ , buscándose una inversa de tipo operador diferencial.

## 2.2. Inversa del operador $G_n$

Con las consideraciones de la parte anterior, se busca una inversa de tipo operador diferencial de segundo orden. Esta elección no es arbitraria y se debe fundamentalmente a que los generadores infinitesimales asociados a los semigrupos soluciones de la EDE (1) conocidos son todos operadores diferenciales de orden dos, por lo que sería útil poder encontrar una inversa de ese tipo para cada  $G_n$ , a saber, un operador del tipo

$$L_n = a_n \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b_n \frac{\partial}{\partial x} + c_n.$$

Donde  $a_n$ ,  $b_n$  y  $c_n$  son funciones (eventualmente constantes).

Antes de resolver el problema como tal, se intentará tener un mejor conocimiento del operador  $G_n$  al restringir su dominio a polinomios, calculando la imagen de cada monomio en cada potencia de Hadamard para luego tener una expresión general para la evaluación de un polinomio.

### 2.2.1. Restricción a polinomios

La idea en esta sección es tratar de calcular una inversa para  $G_n$  que se comporte bien para funciones de tipo polinomial. Debido a la forma del operador  $G_n$ , es claro que la imagen de cualquier polinomio será otro polinomio, por lo que basta con calcular, para cada par  $m, n$  el resultado de  $G_n(x^m) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k x^k$ . Tenemos:

$$\begin{aligned} G_n(x^m) &= \int_0^x y^n (1-x)^n y^m dy + \int_x^1 x^n (1-y)^n y^m dy \\ &= (1-x)^n \frac{x^{n+m+1}}{n+m+1} + x^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \int_x^1 y^{k+m} dy \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^{k+n+m+1}}{n+m+1} + x^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k+m+1} - \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^{k+n+m+1}}{k+m+1} \end{aligned}$$

De donde se observa que  $G_n(x^m)$  es un polinomio con coeficientes no nulos en la potencia  $n$  y en las potencias desde  $n+m+1$  hasta  $2n+m+1$  donde

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{n!m!}{(n+m+1)!} \\ \alpha_{n+m+k+1} &= (-1)^k \binom{n}{k} \frac{k-n}{(k+m+1)(n+m+1)}; 0 \leq k \leq n \end{aligned}$$

Dado que la menor potencia de  $G_n(x^m)$  siempre es de orden  $n$ , la idea de un operador diferencial de orden 2, o de cualquier orden, a coeficientes constantes se descarta de manera inmediata. Buscamos entonces  $a, b, c$  funciones de  $L^2$  para la construcción de la inversa de  $G_n$ .

Lo engorroso de los cálculos para un monomio hacen pensar que no se tendrá una expresión para la eventual evaluación de un polinomio, más aún para un sistema del tipo  $L_n \circ G_n(\sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k x^k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k x^k$ .

La propuesta de analizar el comportamiento en polinomios no resultó tan fructífera. Sin embargo, el análisis en el caso general resulta sorprendentemente sencillo.

### 2.2.2. Operador Diferencial Inverso

Como se dijo al principio de este capítulo, se buscan funciones  $a_n$ ,  $b_n$  y  $c_n$  tales que  $L_n f(x) = a_n(x) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + b_n(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x} + c_n(x) f(x)$  sea la inversa de  $-G_n$ , esto es, que

$$L_n \circ G_n f(x) = -f(x)$$

para toda función  $f$ .

Desmenucemos esta igualdad. Tenemos

$$G_n f(x) = 2^n (1-x)^n \int_0^x y^n f(y) dy + 2^n x^n \int_x^1 (1-y)^n f(y) dy$$

Derivando en  $x$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} G_n f(x) &= -2^n n (1-x)^{n-1} \int_0^x y^n f(y) dy + 2^n (1-x)^n x^n f(x) \\ &\quad - 2^n (1-x)^n x^n f(x) + 2^n n x^{n-1} \int_x^1 (1-y)^n f(y) dy \\ &= -2^n n (1-x)^{n-1} \int_0^x y^n f(y) dy + 2^n n x^{n-1} \int_x^1 (1-y)^n f(y) dy \end{aligned}$$

y nuevamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} G_n f(x) &= 2^n n (n-1) (1-x)^{n-2} \int_0^x y^n f(y) dy - 2^n n (1-x)^{n-1} x^n f(x) \\ &\quad - 2^n (1-x)^n x^{n-1} f(x) + 2^n n (n-1) x^{n-2} \int_x^1 (1-y)^n f(y) dy \end{aligned}$$

Con esto, tenemos ecuaciones para  $a_n$ ,  $b_n$  y  $c_n$  en  $f(x)$ ,  $\int_0^x y^n f(y) dy$  y  $\int_x^1 (1-y)^n f(y) dy$  para que se verifique  $L_n \circ G_n f(x) = -f(x)$ . Estas ecuaciones son:

En  $f(x)$ :

$$a_n(x) 2^n n x^{n-1} (1-x)^{n-1} = 1$$

En  $\int_0^x y^n f(y) dy$ :

$$a_n(x) n (n-1) - n(1-x) b_n(x) + (1-x)^2 c_n(x) = 0$$

En  $\int_x^1 (1-y)^n f(y) dy$ :

$$a_n(x)n(n-1) + nxb_n(x) + x^2c_n(x) = 0$$

Despejando en estas tres ecuaciones, se concluye que

$$a_n(x) = \frac{1}{2^n n x^{n-1} (1-x)^{n-1}}$$

$$b_n(x) = -\frac{(n-1)(1-2x)}{2^n n x^n (1-x)^n}$$

$$c_n(x) = -\frac{(n-1)}{2^n x^n (1-x)^n}$$

De esta forma, se tiene que el operador inverso para la  $n$ -ésima potencia de Hadamard de la función de Green del Movimiento Browniano está dada por

$$L_n(f)(x) = \frac{f''(x)}{2^n n x^{n-1} (1-x)^{n-1}} - \frac{(n-1)(1-2x)f'(x)}{2^n n x^n (1-x)^n} - \frac{(n-1)f(x)}{2^n x^n (1-x)^n}$$

Para el resto de este trabajo, consideraremos el dominio del operador  $L_n$  como el conjunto

$$A_n = \left\{ f \in \mathcal{C}^2([0, 1]) : \lim_{x \rightarrow 0,1} \frac{f(x)}{c_n(x)} = 0, \lim_{x \rightarrow 0,1} \frac{f'(x)}{b_n(x)} = 0, \lim_{x \rightarrow 0,1} \frac{f''(x)}{a_n(x)} = 0 \right\}$$

En términos más coloquiales, serán aquellas funciones continuas dos veces diferenciables tal que la función y sus derivadas se anulen más rápido que los correspondientes coeficientes en la frontera. Todas estas condiciones son suficientes para que se pueda calcular la imagen  $L_n$  de  $f$  y que esta sea acotada al interior del intervalo  $(0, 1)$ . Acá es importante resaltar que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{C}_K \subset A_n$ , por lo cual será suficiente siempre considerar funciones a soporte compacto al interior del intervalo  $(0, 1)$  para analizar la estructura funcional de  $L_n$ .

El interés de este trabajo en adelante será caracterizar el proceso estocástico cuyo generador corresponde a este operador.

# Capítulo 3

## Estudio del proceso dado por

$$dX_t = \sqrt{2a_n(X_t)}dW_t + b_n(X_t)dt$$

En esta sección, estudiaremos la familia de procesos dados por las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

$$dX_t^n = \sqrt{2a_n(X_t^n)}dW_t + b_n(X_t^n)dt \quad (3.1)$$

En adelante, se omitirá el superíndice  $n$ , explicitándose en los resultados obtenidos si estos son para toda la familia o corresponden a un subconjunto de ella. También, al referirse a propiedades o cálculos hechos de manera general, se hablará de “el proceso”.

El interés de este estudio es que, mediante una aplicación de la formula de Ito, se obtiene la igualdad

$$f(X_{t \wedge T_\epsilon}) - f(X_0) = \int_0^{t \wedge T_\epsilon} [a_n(X_s)f''(X_s) + b_n(X_s)f'(X_s)]ds + \int_0^{t \wedge T_\epsilon} \sqrt{2a_n(X_s)}f'(X_s)dW_s.$$

$$T_\epsilon = \inf\{t \geq 0 | X_t \notin [\epsilon, 1 - \epsilon]\}.$$

La cual corresponde a una solución para la EDE (10) en el intervalo  $[\epsilon, 1 - \epsilon]$ . Notando que en el interior de este intervalo la función  $a_n$  es acotada para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que el proceso  $\int_0^{t \wedge T_\epsilon} \sqrt{2a_n(X_s)}f'(X_s)dW_s$  es una martingala y por tanto su valor esperado es 0, obteniéndose así la igualdad

$$\mathbb{E}(f(X_{t \wedge T_\epsilon}) - f(X_0)) = \mathbb{E}\left(\int_0^{t \wedge T_\epsilon} [a_n(X_s)f''(X_s) + b_n(X_s)f'(X_s)]ds\right)$$

Y, haciendo  $\epsilon \rightarrow 0$ , se concluye que la solución para (10) al interior de  $(0, 1)$  queda dada por

$$\mathbb{E}(f(X_t) - f(X_0)) = \mathbb{E}\left(\int_0^t [a_n(X_s)f''(X_s) + b_n(X_s)f'(X_s)]ds\right). \quad (3.2)$$

El generador asociado al semigrupo  $P(t)f = \mathbb{E}_x(f(X_t))$  queda dado por un operador que coincide con  $L_n$  en los coeficientes para las derivadas de primer y segundo orden, pero no tiene el coeficiente lineal en  $f$ . En el capítulo siguiente se verá cómo relacionar este proceso con el que se definió como objetivo central de este estudio. En el resto de este capítulo, se estudiarán las propiedades de la solución de la EDE dada por (10).

### 3.1. Clasificación de los puntos extremos

Se estudiarán las propiedades de los puntos extremos 0 y 1 en los procesos descritos, de acuerdo a la clasificación de Feller [3.5.4]. Esta familia de procesos cumple las condiciones de no degeneración y local integrabilidad pues

$$2a_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}n^2x^{n-1}(1-x)^{n-1}} \geq \frac{1}{n8^{n-1}} > 0.$$

$$\int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} \frac{1 + |b_n(x)|}{2a_n(x)} dx = \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} \frac{nx^{n-1}(1-x)^{n-1}}{2^{n+1}} dx + \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} \frac{(n-1)|1-2x|}{2x(1-x)} dx.$$

donde el primer integrando es obviamente acotado y el segundo es acotado eligiendo  $\epsilon$  menor a la mitad de la distancia entre un punto interior  $c$  arbitrario y los bordes del intervalo, concluyéndose que para cualquier  $n$  el proceso es no degenerado y localmente integrable en cualquier punto interior de  $[0, 1]$ .

La función escala para estos procesos en el punto interior  $c = \frac{1}{2}$  está dada por

$$\begin{aligned} p(x) &= \int_{\frac{1}{2}}^x \exp \left\{ \int_{\frac{1}{2}}^z \frac{(n-1)(1-2y)}{y(1-y)} dy \right\} dz \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^x \exp \{ (n-1) \ln(4z(1-z)) \} dz \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^x 4^{n-1} z^{n-1} (1-z)^{n-1} dz. \end{aligned}$$

Para  $x < \frac{1}{2}$ , el integrando en la función de escala queda acotado superiormente por

$$p(x) \leq \int_{\frac{1}{2}}^x 4^{n-1} z^{n-1} dz.$$

Cantidad acotada cuando  $x \rightarrow 0$  para  $n \geq 1$ . Por simetría, se concluye que  $p(0) = p(1) < \infty$  para todas las potencias mayores o iguales a uno.

Para  $n$  fijo, la medida de velocidad de un intervalo de la forma  $I(x) = [\frac{1}{2}, x)$  queda dada por la expresión

$$S(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{2^n n z^{n-1} (1-z)^{n-1} dz}{\exp \left\{ - \int_{\frac{1}{2}}^z \frac{-(n-1)(1-2y)}{y(1-y)} dy \right\}}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{2^n n z^{n-1} (1-z)^{n-1} dz}{\exp \{ (n-1) \{ \log(x(1-x)) - \log 4 \} \}} \\
&= 2^{3n-2} \int_{\frac{1}{2}}^x dz.
\end{aligned}$$

Siguiendo con la clasificación hecha por William Feller en [4, 8], el tiempo para alcanzar el estado  $\frac{1}{2}$  partiendo desde  $x$  (la elección de  $\frac{1}{2}$  como condición inicial no afecta la finitud en ningún punto, ver [4.5.15]) queda dado por la expresión

$$\begin{aligned}
T(x) &= \int_{\frac{1}{2}}^x p(w) dS(w) \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^x 2^{5n-2} \int_{\frac{1}{2}}^w \frac{dz}{z^n (1-z)^n} dw \\
&= 2^{5n-2} \int_{\frac{1}{2}}^x \int_z^x \frac{1}{z^n (1-z)^n} dw dz \\
&= 2^{5n-2} \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{x-z}{z^n (1-z)^n} dz
\end{aligned}$$

El cuál es fácil observar que es no acotado cuando  $x \rightarrow 1$  o cuando  $x \rightarrow 0$  para  $n \geq 2$ . Para  $n = 1$ , este tiempo es acotado (pues se trata del Movimiento Browniano).

El estudio de estas dos funciones permiten concluir que los bordes del intervalo  $(0, 1)$  para  $n \geq 2$  corresponden a *barreras de salida* para la familia de procesos. Este tipo de bordes, según la clasificación dada por Feller, corresponde a aquellas en las que el proceso no puede tener condición inicial. Con una condición inicial al interior del intervalo, la clasificación de Feller asegura que estos bordes se alcanzan en tiempo finito con probabilidad estrictamente positiva y que, una vez que esto sucede, el proceso muere. Así pues, las inversas para las potencias no triviales generan semigrupos que corresponden a una familia de procesos que pueden perder masa, al contrario del Movimiento Browniano que corresponde a la potencia 1.

En las siguientes dos secciones se pretende lograr una mejor caracterización de esta familia de procesos.

## 3.2. Medidas de tendencia para el proceso

En esta sección, se estudiarán las tasas de cambio infinitesimales del proceso (media y varianza). Asumiremos que el proceso se encuentra en  $x \in (0, 1)$  en un tiempo  $t > 0$ . Debido a las características de las funciones  $a_n$  y  $b_n$ , las aproximaciones que se realizarán no son muy buenas en los bordes del intervalo; mientras que en puntos  $x$  cercanos al centro son de orden lineal, aunque su error aumenta exponencialmente en  $n$ .

Considerando  $f = id$ , se obtiene en (11)

$$\mathbb{E}(X_{t+h} - X_t | X_t = x) = \mathbb{E}\left(\int_t^{t+h} b_n(X_s) ds | X_t = x\right)$$

Para  $h$  pequeño, aproximamos  $b_n(X_s)$  por  $b_n(x)$  en todo el intervalo  $(t, t+h)$ , obteniéndose

$$\mathbb{E}(X_{t+h} - X_t | X_t) \approx b_n(X_t)h = -\frac{(n-1)(1-2X_t)}{2^n n (X_t)^n (1-X_t)^n} h.$$

Se aprecia que la posición esperada de una trayectoria para el tiempo  $t+h$  conocida su posición en el tiempo  $t$  corresponde a una proporción del desfase  $h$  igual al drift en el instante  $t$ . Este drift es negativo cuando el proceso se encuentra en  $(0, \frac{1}{2})$  y positivo cuando éste se encuentra en  $(\frac{1}{2}, 1)$ , y su magnitud aumenta cuando la posición es cercana a los bordes del intervalo. Luego, se espera que la trayectoria se aleje del centro del intervalo de manera cada vez más drástica a medida que se encuentra próxima a los bordes de éste.

De manera análoga a lo anterior, para calcular la varianza en los incrementos del proceso, tenemos

$$E((X_{t+h} - X_t)^2 | X_t = x) = \mathbb{E}\left(\int_t^{t+h} (X_s)^2 d\langle W_s \rangle | X_t = x\right).$$

Realizando la misma aproximación que en el caso de la media (con similares consideraciones de error de aproximación), se obtiene

$$E((X_{t+h} - X_t)^2 | X_t = x) \approx a_n(X_t)h + (b_n(X_t)h)^2.$$

De donde la varianza de los incrementos corresponde a una proporción del tiempo de incremento  $h$  igual a la difusión en el instante  $t$ . Esta variabilidad es mínima cuando  $X_t$  se encuentra en el centro del intervalo, y aumenta en dirección a los bordes, donde se vió que los incrementos iban en media hacia el centro.

Este comportamiento corrobora la clasificación de Feller para los puntos extremos. Se aprecia que, en media, el proceso tiende a explotar hacia afuera del intervalo  $(0, 1)$  a medida que se acerca a sus bordes. Más aún, considerando que el cociente entre el drift y la difusión crece a medida que aumenta  $n$ , es natural pensar que el proceso tiende a escapar con mayor intensidad para potencias mayores.

### 3.3. Estudio del proceso dado por $dV_t = \sqrt{2a_n(X_t)}dW_t - b_n(X_t)dt$

Para finalizar esta sección, se estudiará la familia de procesos dados por las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

$$dX_t^n = \sqrt{2a_n(X_t^n)}dW_t - b_n(X_t^n)dt \quad (3.3)$$

Estos procesos corresponden a las mismas difusiones y drift apuntando en el sentido contrario en la dirección anterior. La idea es ver qué sucede cuando el drift, intuitivamente, hace al proceso mantenerse en torno al centro del intervalo en vez de salir del mismo. Se estudiará nuevamente el comportamiento en la frontera y las medidas de tendencia para constatar este hecho, y se obtendrán propiedades asintóticas para esta familia de procesos.

### 3.3.1. Clasificación de los puntos extremos

Se estudiarán las propiedades de los puntos extremos 0 y 1 en los procesos descritos, de acuerdo a la clasificación de Feller [3.5.4]. Tal como en el caso anterior, esta familia cumple las condiciones de no degeneración y local integrabilidad pues

$$2a_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}n^2x^{n-1}(1-x)^{n-1}} \geq \frac{1}{n8^{n-1}} > 0$$

$$\int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} \frac{1 + |b_n(x)|}{2a_n(x)} dx = \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} \frac{nx^{n-1}(1-x)^{n-1}}{2} dx + \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} \frac{(n-1)|1-2x|}{2x(1-x)} dx$$

La función escala para estos procesos en el punto interior  $c = \frac{1}{2}$  está dada por

$$p(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x \exp \left\{ - \int_{\frac{1}{2}}^z \frac{(n-1)(1-2y)}{y(1-y)} dy \right\} dz$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^x \exp \{ -(n-1) \ln(4z(1-z)) \} dz$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{1}{4^{n-1}z^{n-1}(1-z)^{n-1}} dz$$

Para  $x < \frac{1}{2}$ , el integrando en la función de escala queda acotado inferiormente por

$$p(x) \geq \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{1}{4^{n-1}z^{n-1}}$$

Cantidad que diverge cuando  $x \rightarrow 0$  para  $n \geq 2$ . Por simetría, se concluye que  $p(0) = p(1) = \infty$  para todas las potencias distintas de uno.

Para  $n$  fijo, la medida de velocidad de un intervalo de la forma  $I(x) = [\frac{1}{2}, x)$  queda dada por la expresión

$$S(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{nz^{n-1}(1-z)^{n-1}dz}{\exp \left\{ - \int_{\frac{1}{2}}^z \frac{(n-1)(1-2y)}{y(1-y)} dy \right\}}$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^x n4^{n-1}z^{2n-2}(1-z)^{2n-2}$$

Siguiendo con la clasificación hecha por William Feller en [4, 8], el tiempo para alcanzar el estado  $x$  partiendo desde  $\frac{1}{2}$  (la elección de esta condición inicial no afecta la finitud en ningún punto, ver [4.5.15]) queda dado por la expresión

$$\begin{aligned} T(x) &= \int_{\frac{1}{2}}^x p(w)dS(w) \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^x nw^{2n-2}(1-w)^{2n-2} \int_{\frac{1}{2}}^w \frac{dz}{z^{n-1}(1-z)^{n-1}} dw \end{aligned}$$

El cuál es fácil observar que es acotado en  $x = 1$  y, nuevamente por simetría del integrando, en  $x = 0$ .

El estudio de estas dos funciones permiten concluir que los bordes del intervalo corresponden a *barreras de entrada* para la familia de procesos. La principal propiedad de este tipo de límites dice que estos procesos con probabilidad 1 nunca alcanzaran dichos puntos al encontrarse inicialmente al interior del intervalo; sin embargo, podrían aceptar condiciones iniciales en estos bordes (lo cual podría tener relevancia en el estudio de un fenómeno aplicado) o distribuciones iniciales que asignen medida no nula a los bordes y, en tales casos, el proceso se encontraría en  $(0, 1) \forall t > 0$  (es decir, podría partir en la frontera pero “entra” inmediatamente al intervalo abierto y no vuelve a salir). En particular, se concluye de esta sección que, para toda potencia de Haddamard distinta de 1, el proceso se encontrará al interior del intervalo  $(0, 1)$  en todo tiempo positivo  $\mathbb{P}$ -casi seguramente.

### 3.3.2. Medidas de tendencia para el proceso

En esta sección, se estudiarán las tasas de cambio infinitesimales del proceso (media y varianza). Asumiremos que el proceso se encuentra en  $x \in (0, 1)$  en un tiempo  $t > 0$ . Debido a las características de las funciones  $a_n$  y  $b_n$ , las aproximaciones que se realizarán no son muy buenas en los bordes del intervalo; mientras que en puntos  $x$  cercanos al centro son de orden lineal, aunque su error aumenta exponencialmente en  $n$ .

Considerando  $f = id$ , se obtiene en (10)

$$\mathbb{E}(V_{t+h} - V_t | V_t = x) = \mathbb{E}\left(\int_t^{t+h} b_n(V_s) ds | V_t = x\right)$$

Para  $h$  pequeño, aproximamos  $b_n(V_s)$  por  $b_n(x)$  en todo el intervalo  $(t, t+h)$ , obteniéndose

$$\mathbb{E}(V_{t+h} - V_t | V_t = x) \approx b_n(X_t)h = \frac{(n-1)(1-2X_t)}{2^n n (X_t)^n (1-X_t)^n} h$$

Se aprecia que la posición esperada de una trayectoria para el tiempo  $t+h$  conocida su posición en el tiempo  $t$  corresponde a una proporción del desfase  $h$  igual al drift en el instante  $t$ . Este drift es positivo cuando el proceso se encuentra en  $(0, \frac{1}{2})$  y negativo cuando éste se encuentra en  $(\frac{1}{2}, 1)$ , y su magnitud aumenta cuando la posición es cercana a los bordes del

intervalo. Luego, se espera que la trayectoria se acerque al centro del intervalo de manera cada vez más drástica a medida que se encuentra próxima a los bordes de éste.

De manera análoga a lo anterior, para calcular la varianza en los incrementos del proceso, tenemos

$$E((V_{t+h} - V_t)^2 | V_t = x) = \mathbb{E}\left(\int_t^{t+h} (V_s)^2 ds \mid V_t = x\right)$$

y realizando la misma aproximación que en el caso de la media (con similares consideraciones de error de aproximación), se obtiene

$$E((V_{t+h} - V_t)^2 | V_t = x) \approx a_n(x)h + (b_n(x)h)^2$$

De donde la varianza de los incrementos corresponde a una proporción del tiempo de incremento  $h$  igual a la difusión en el instante  $t$ . Esta variabilidad es mínima cuando  $X_t$  se encuentra en el centro del intervalo, y aumenta en dirección a los bordes, donde se vio que los incrementos iban en media hacia el centro.

Este comportamiento genera dudas que hacen inferir sobre la existencia de un comportamiento asintótico en el proceso. En la siguiente sección, se analizará la posible existencia de una distribución estacionaria.

### 3.3.3. Distribuciones estacionarias para el proceso

Salvo en el caso de  $n = 1$  donde el drift es nulo y la difusión es unitaria, se vio con anterioridad que el proceso nunca sale del intervalo  $(0, 1)$ . Es natural en este caso preguntarse si existe un partón para el comportamiento asintótico del proceso, ya sea un límite (en cuyo caso, por lo visto anteriormente, tendría que ser el centro del intervalo) o una distribución asintótica para el proceso.

El primer caso no parece, en primera instancia, tan razonable, dado que los incrementos del proceso se aproximaban a una cantidad que sólo se relacionaba con la posición en un determinado momento  $V_t$  y no con el momento  $t$  en sí mismo. En esta sección, se intentará emular el trabajo en [5] para difusiones en un intervalo acotado con bordes del tipo natural. La diferencia entre estos dos tipos de bordes radica en que el caso natural no permite una condición inicial en el borde mientras que el borde de entrada, objeto de este estudio, es que las permite haciendo al proceso entrar al intervalo de manera instantánea; luego, en todo tiempo positivo (en particular de manera asintótica) ambos bordes no pueden ser alcanzados, lo que de manera preliminar hace suponer que el comportamiento asintótico debiese ser semejante en ambos casos.

Si  $p(t, x, y)$  denota la densidad de transición del proceso (su existencia por el momento se asumirá) en tiempo  $t$  desde  $x$  hacia  $y$ , la densidad de una eventual distribución estacionaria debiese satisfacer para todo tiempo  $t$

$$\psi(y) = \int \psi(x)p(t, x, y)dx$$

Derivando respecto al tiempo y utilizando la estacionariedad se obtiene

$$0 = \int \psi(x) \frac{\partial p(t, x, y)}{\partial t} dx$$

Como la densidad de transición satisface las ecuaciones Backward de Kolmogorov descritas en [5.15], el integrando queda

$$0 = \int \psi(x) \left\{ a_n(x) \frac{\partial^2 p(t, x, y)}{\partial x^2} + b_n(x) \frac{\partial p(t, x, y)}{\partial x} \right\} dx$$

Integración por partes y un argumento de localización entregarían una candidata a distribución estacionaria. Sin embargo, y a pesar de que  $p(t, 0, y) = p(t, 1, y) = 0$  por ser estos dos últimos estados inalcanzables en tiempo finito desde el interior, el comportamiento de las funciones  $a_n$  y  $b_n$  en la frontera no permite despreciar sus aportes en la integración por partes. Se procederá de esta manera sólo para obtener un candidato a distribución estacionaria, el cual deberá posteriormente ser verificado.

Integrando por partes, se obtiene

$$0 = \int p(t, x, y) \left\{ \frac{\partial^2 a_n(x) \psi(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial b_n(x) \psi(x)}{\partial x} \right\} dx$$

Y como  $p(t, x, y)$  es positivo se concluye que

$$\frac{\partial^2 a_n(x) \psi(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial b_n(x) \psi(x)}{\partial x} = 0$$

Implicando que la cantidad

$$\frac{\partial a_n(x) \psi(x)}{\partial x} - b_n(x) \psi(x)$$

Es una constante en  $x$ .

$$\frac{\partial a_n(x) \psi(x)}{\partial x} - b_n(x) \psi(x) = C$$

Observando que  $a'_n(x) = -b_n(x)$  y multiplicando por  $a_n(x)$  queda

$$\frac{\partial a_n(x) \psi(x)}{\partial x} a_n(x) + a_n(x) \psi(x) a'_n(x) = C a_n(x)$$

O bien

$$\frac{\partial a_n(x)^2 \psi(x)}{\partial x} = C a_n(x)$$

Integrando una vez más

$$a_n(x)^2 \psi(x) = C \int_0^x a_n(z) dz + D$$

Concluyéndose así que la candidata a distribución estacionaria sería

$$\psi(x) = \frac{C \int_0^x a_n(z) dz + D}{a_n(x)^2}$$

Para calcular los coeficientes  $C$  y  $D$ , primero se observa que

$$p(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x \exp \left\{ - \int_{\frac{1}{2}}^z \frac{-b_n(y)}{a_n(y)} dy \right\} dz$$

Y como  $a'_n(x) = -b_n(x)$ , la primitiva para la integral en el interior es  $\ln(a_n(x))$ . Esto quiere decir que la cantidad que acompaña a  $C$  es, salvo constante, la función de escala. Al tener el proceso condiciones de borde de entrada, esta cantidad es muy negativa a medida que  $x$  se aproxima a 0 y muy positiva a medida que  $x$  se aproxima a 1, de manera que para que  $\psi$  pueda ser una densidad de probabilidad, necesariamente  $C = 0$ . Imponiendo que  $\psi$  debe ser una distribución de probabilidad, se concluye fácilmente que

$$\begin{aligned} D &= \int_0^1 a_n(x)^{-2} dx \\ &= n \int_0^1 x^{2n-2} (1-x)^{2n-2} dx \end{aligned}$$

Es directo observar que, para cualquier  $n \geq 2$ , los aportes de la frontera de  $\psi$  y  $\psi'$  tienden a cero más rápido que los de los coeficientes  $a_n(x)$  y  $b_n(x)$ . Luego, para este candidato los aportes de la frontera en la integración por partes son efectivamente nulos.

Se concluye así que la distribución estacionaria para el proceso es una *beta* con ambos parámetros iguales a  $2n-1$ . En particular, esto confirma que en tiempo grande el proceso tendrá un valor esperado de  $\frac{1}{2}$  con variabilidad igual a  $\frac{1}{8n-2}$ , implicando que mientras más rápido exploten los coeficientes de drift y difusión en los bordes, más estable será el comportamiento del proceso en el largo plazo en torno a  $\frac{1}{2}$ .

# Capítulo 4

## Procesos generados por las potencias de Hadamard del operador de Green

Como se mencionó en la sección introductoria, el objetivo de este trabajo es estudiar aquellos procesos generados por los operadores  $L_n$  que corresponden a las inversas de las potencias de Haddamard del operador de Green del Movimiento Browniano. Hasta el momento, se tiene estudiado el caso que corresponde al operador  $L_n$  sin el coeficiente lineal en  $f$ ; y en esta sección se utilizará el teorema de Feynman-Kac para estudiar el proceso cuyo generador corresponde al operador anteriormente descrito, y se ligarán sus propiedades con las del proceso estudiado en la sección anterior.

### 4.1. Definición del proceso

En esta sección, se estudiará un caso particular de la familia de procesos  $(X_t)_{t \geq 0}$  de la sección anterior, que consiste en la introducción de una tasa de muerte para el proceso.

Para una función  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  como en el capítulo anterior, definimos la función

$$\hat{f} : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\hat{f}(t, X_t) = \exp\left\{\int_0^t c_n(X_s) ds\right\} f(X_t)$$

Aplicando la fórmula de Ito a  $\hat{f}$  en la EDE (10) (de la cuál se sabe que  $(X_t)$  es una familia de soluciones), se obtiene

$$\exp\left\{\int_0^{t \wedge T_\epsilon} c_n(X_s) ds\right\} f(X_{t \wedge T_\epsilon}) - f(X_0)$$
$$= \int_0^{t \wedge T_\epsilon} \exp\left\{\int_0^s c_n(X_s) ds\right\} [a_n(X_s) f''(X_s) + b_n(X_s) f'(X_s) + c_n f(X_s)] ds$$

$$+ \int_0^{t \wedge T_\epsilon} \sqrt{2a_n(X_s)} f'(X_s) dW_s.$$

Donde nuevamente

$$T_\epsilon = \inf\{t \geq 0 | X_t \notin [\epsilon, 1 - \epsilon]\}.$$

Observando que en el interior de  $[\epsilon, 1 - \epsilon]$  el segundo integrando es acotado, la integral estocástica resulta una martingala y, por tanto, de esperanza nula y se obtiene así

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(f(X_{t \wedge T_\epsilon}) \exp\{\int_0^t c_n(X_s) ds\}) = f(x) \\ & + \mathbb{E}(\int_0^{t \wedge T_\epsilon} \exp\{\int_0^s c_n(X_r) dr\} [a_n(X_s) f''(X_s) + b_n(X_s) f'(X_s) + c_n(X_s) f(X_s)] ds) \end{aligned}$$

Y, haciendo  $\epsilon \rightarrow 0$ , se concluye que en el interior de  $(0, 1)$  es válida la siguiente fórmula

$$\mathbb{E}(f(X_t) \exp\{\int_0^t c_n(X_s) ds\}) = f(x) + \mathbb{E}(\int_0^t \exp\{\int_0^s c_n(X_r) dr\} L_n f(X_s) ds). \quad (4.1)$$

La idea de este capítulo es estudiar, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , un proceso (que por simplicidad nuevamente se prescindirá de  $n$  en su notación)  $(Y_t)_{t \geq 0}$  tal que su generador corresponda al operador  $L_n$  ponderado por una función estocástica. Esto es

$$\mathbb{E}(f(Y_t)) = f(x) + \mathbb{E}(\int_0^t \exp\{\int_0^r c_n(X_s) ds\} [a_n(X_r) f''(X_r) + b_n(X_r) f'(X_r) + c_n(X_r) f(X_r)] dr) \quad (4.2)$$

El proceso  $(Y_t)_{t \geq 0}$  quedará entonces definido mediante

$$f(Y_t) = g(t, X_t) = \exp\{\int_0^t c_n(X_s) ds\} f(X_t)$$

En el resto de la sección, se estudiarán las propiedades del proceso  $(Y_t)_{t \geq 0}$ .

## 4.2. Distribución del proceso

En el estudio anterior, se concluyó que  $(X_t)_{t \geq 0}$  pierde masa en los bordes del intervalo  $(0, 1)$  pero nunca en su interior. Esta propiedad no será compartida por  $(Y_t)_{t \geq 0}$

Al considerarse una aproximación por funciones continuas a soporte compacto a la función  $f(x) = \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$  (que es idénticamente 1 al evaluarse en  $X_t$  dado que este aún no escapa del intervalo) se obtiene que

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(0,1)}(Y_{t \wedge T_\epsilon})) = 1 + \mathbb{E}(\int_0^{t \wedge T_\epsilon} \exp\{\int_0^r c_n(X_s) ds\} c(X_r) dr)$$

Obteniéndose así

$$\mathbb{P}(Y_{t \wedge T_\epsilon} \notin (0, 1)) = \mathbb{E}\left(-\int_0^{t \wedge T_\epsilon} \exp\left\{\int_0^r c_n(X_s) ds\right\} c(X_r) dr\right)$$

En el intervalo  $(0, 1)$ , el integrando anterior es negativo, de donde el valor esperado de la indicatriz, que corresponde a la probabilidad de que el proceso  $Y_t$  se encuentre en  $\mathbb{R}$ , es menor que uno, concluyéndose que este proceso tiene trayectorias que desaparecen con probabilidad positiva sin necesidad de alcanzar los bordes del intervalo y, mas aún, esta probabilidad está relacionada con el coeficiente del operador  $L_n$  que hasta el momento no se ha estudiado.

Si se define un estado  $\delta \notin \mathbb{R}$  fuera de los reales, una variable aleatoria  $U$  con distribución uniforme en  $[0, 1]$  independiente del proceso  $X_t$  y se considera el proceso  $(Z_t)_{t \geq 0}$  definido como

$$Z_t = \begin{cases} X_t & \exp\left\{\int_0^t c_n(X_s) ds\right\} \geq U \\ \delta & \exp\left\{\int_0^t c_n(X_s) ds\right\} < U \end{cases}$$

Se obtiene un proceso que tiene la misma ley que el proceso  $(Y_t)_{t \geq 0}$ .

**Proposición 4.2.1.** *Los procesos  $(Y_t)_{t \geq 0}$  y  $(Z_t)_{t \geq 0}$  tienen la misma ley*

Para demostrar este hecho, basta con demostrar que sus leyes finito dimensionales son iguales.

En primera instancia, observemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(Z_t), Z_t \in \mathbb{R}) &= \mathbb{E}(f(Z_t), \exp\left\{\int_0^t c(X_s) ds\right\} \geq U) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(f(Z_t), \exp\left\{\int_0^t c_n(X_s) ds\right\} \geq U | X_s, 0 \leq s \leq t)) \\ &= \mathbb{E}(f(X_t) \mathbb{E}(\exp\left\{\int_0^t c_n(X_s) ds\right\} \geq U | X_s, 0 \leq s \leq t)) \end{aligned}$$

Y, dado que  $U$  es independiente del proceso, el valor de la esperanza condicional corresponde a la probabilidad de que una uniforme acote inferiormente a un valor conocido, obteniéndose

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}(f(X_t) \exp\left\{\int_0^t c_n(X_s) ds\right\}) \\ &= \mathbb{E}(f(Y_t)) \end{aligned}$$

Luego, cuando  $Z_t \in (0, 1)$ , las variables aleatorias  $Y_t$  y  $Z_t$  tienen el mismo valor esperado para cualquier  $f$ . Tomando funciones que se anulen fuera de  $(0, 1)$  se concluye que

$$Y_t \cong Z_t$$

Para lo siguiente, es conveniente observar que  $\forall n \geq 2$  y  $\forall x \in (0, 1)$   $c_n(x) = -\frac{(n-1)}{n^2 x^n (1-x)^n} < 0$  y, dado que  $X_t \in (0, 1)$   $\mathbb{P}$ -casi seguramente, la exponencial de la integral estocástica será una función decreciente de  $t$ , de donde

$$Z_t \in \mathbb{R} \implies Z_r \in \mathbb{R} \forall r \leq t$$

$$Z_t \notin \mathbb{R} \implies Z_r \notin \mathbb{R} \forall r \geq t$$

También, por lo expuesto en 3.2, el proceso tiene trayectorias continuas por la derecha (tomando  $h \rightarrow 0$ ) y, por lo tanto, verifica la propiedad de Markov fuerte.

Para funciones  $f_1 \dots f_k$  se tiene, asumiendo sin pérdida de generalidad que  $t_1 < t_2 \dots < t_k$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(f_1(Z_{t_1})f_2(Z_{t_2})\dots f_k(Z_{t_k}), Z_{t_1} \in \mathbb{R}, Z_{t_2} \in \mathbb{R}, \dots Z_{t_k} \in \mathbb{R}) = \\ & \mathbb{E}(\mathbb{E}(f_1(Z_{t_1})f_2(Z_{t_2})\dots f_k(Z_{t_k}), Z_{t_1} \in \mathbb{R}, Z_{t_2} \in \mathbb{R}, \dots Z_{t_k} \in \mathbb{R} | X_s, 0 \leq s \leq t_k)) \\ & = \mathbb{E}(\mathbb{E}(f_1(Z_{t_1})f_2(Z_{t_2})\dots f_k(Z_{t_k}), Z_{t_k} \in \mathbb{R} | X_s, 0 \leq s \leq t_k)) \end{aligned}$$

Donde, siguiendo un razonamiento análogo al de la parte anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} & = \mathbb{E}(f_1(X_{t_1})f_2(X_{t_2})\dots f_k(X_{t_k})\mathbb{E}(Z_{t_k} \in \mathbb{R} | X_s, 0 \leq s \leq t_k)) \\ & = \mathbb{E}(f_1(X_{t_1})f_2(X_{t_2})\dots f_k(X_{t_k}) \exp\left\{\int_0^{t_k} c_n(X_s) ds\right\}) \end{aligned}$$

Para probar que esta es efectivamente la esperanza de las funciones en el proceso  $(Y_t)_{t \geq 0}$ , el caso de una coordenada es trivial. En el caso de dos coordenadas, observese primero que

$$\mathbb{E}(|Y_{t+h} - Y_t| | Y_t = y) = \mathbb{E}(|X_{t+h} \exp\left\{\int_0^{t+h} c(X_s) ds\right\} - X_t \exp\left\{\int_0^t c(X_s) ds\right\}| | Y_t = y)$$

$$\mathbb{E}(|X_{t+h} \exp\left\{\int_0^{t+h} c(X_s) ds\right\} - X_{t+h} \exp\left\{\int_0^t c(X_s) ds\right\}|$$

$$+ X_{t+h} \exp\left\{\int_0^t c(X_s) ds\right\} - X_t \exp\left\{\int_0^t c(X_s) ds\right\} | | Y_t = y)$$

$$\leq \mathbb{E}(|X_{t+h} \exp\left\{\int_0^{t+h} c(X_s) ds\right\} - X_{t+h} \exp\left\{\int_0^t c(X_s) ds\right\}| | Y_t = y)$$

+

$$\mathbb{E}(|X_{t+h} \exp\left\{\int_0^t c(X_s) ds\right\} - X_t \exp\left\{\int_0^t c(X_s) ds\right\}| | Y_t = y)$$

El primer término de la desigualdad queda acotado (dado que  $X_{t+h} \in (0, 1)$ ) por la diferencia de las exponenciales, que es una función continua de  $h$ . En el segundo término, factorizando por la exponencial (que es siempre menor que 1) queda el valor esperado del incremento de  $X$ , que en (3.3.2) se vió que era de orden  $b(X_t)h$ . Con todo esto, se deduce que el proceso  $(Y_t)_{t \geq 0}$  tiene trayectorias continuas por la derecha y, por lo tanto, cumple la propiedad de Markov Fuerte [5.4].

Haciendo uso de lo anterior, para dos coordenadas se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f_1(Y_{t_1})f_2(Y_{t_2})) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(f_1(Y_{t_1})f_2(Y_{t_2})|\mathcal{F}_{t_1})) \\
&= \mathbb{E}(f_1(Y_{t_1})\mathbb{E}(f_2(Y_{t_2})|\mathcal{F}_{t_1})) \\
&= \mathbb{E}(f_1(Y_{t_1})\mathbb{E}_{\Theta_{t_1}}(f_2(Y_{t_2-t_1}))) \\
&= \mathbb{E}(f_1(X_{t_1})\exp\{\int_0^{t_1} c_n(X_s)ds\}\mathbb{E}_{\Theta_{t_1}}(f_2(X_{t_2-t_1})\exp\{\int_0^{t_2-t_1} c_n(X_{s-t_1})ds\})) \\
&= \mathbb{E}(f_1(X_{t_1})\exp\{\int_0^{t_1} c_n(X_s)ds\}f_2(X_{t_2})\exp\{\int_{t_1}^{t_2} c_n(X_s)ds\}) \\
&= \mathbb{E}(f_1(X_{t_1})f_2(X_{t_2})\exp\{\int_0^{t_2} c_n(X_s)ds\})
\end{aligned}$$

Para el caso de  $k$  coordenadas, basta con iterar este proceso de manera análoga.

Barrer con una de las primeras  $k-1$  coordenadas equivale a tomar en la igualdad anterior  $f_i = 1$ , y barrer con la última coordenada equivale a tomar en la igualdad anterior  $f_k = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ .

Probada la igualdad de las leyes finito dimensionales para  $k$  instantes y satisfechas las condiciones del Teorema de Consistencia de Kolmogorov, se concluye que los procesos  $(Y_t)_{t \geq 0}$  y  $(Z_t)_{t \geq 0}$  tienen la misma ley. ■

Con el resultado del lema anterior, se puede estudiar empíricamente el proceso  $(Y_t)_{t \geq 0}$  simulando las trayectorias del proceso  $(X_t)_{t \geq 0}$  hasta un tiempo de muerte en función de cada trayectoria y de una variable aleatoria independiente de lo anterior. Sobre el comportamiento de la integral estocástica se pueden hacer ciertas afirmaciones procedentes de cotas deterministas, que permiten caracterizar el proceso, a saber:

$$\frac{1}{x^n(1-x)^n} \geq 4^n \implies c_n(x) = -\frac{(n-1)}{2^n x^n (1-x)^n} \leq -\frac{(n-1)4^n}{2^n}$$

y, dado que el proceso se encuentra casi seguramente en  $(0, 1)$  hasta el instante  $t$ , se tiene

$$\int_0^t c(X_s)ds \leq -(n-1)2^n t$$

De donde

$$\mathbb{P}(Y_t \in \mathbb{R}) \leq \exp\{-(n-1)2^n t\}$$

Y se puede deducir, haciendo crecer  $t$

*Observación 4.2.2.* Para  $n \geq 2$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = \delta$

### 4.3. Generador del semigrupo dado por (14)

En esta sección, se mostrará que el proceso estudiado en esta sección corresponde efectivamente a un semigrupo cuyo generador está dado por el operador encontrado en el capítulo 2.

Para ver que efectivamente  $T(t)f = \mathbb{E}_x(f(Y_t))$  corresponde a un semigrupo, se considera la equivalencia probada en 4.2 para  $f$  nula en  $\delta$ , esto es

$$T(t)f = \mathbb{E}_x(f(X_t), \exp\{\int_0^t c_n(X_s)ds\} \geq U)$$

Ahora, utilizando Markov Fuerte

$$\begin{aligned} T(t+s)f(x) &= \mathbb{E}_x(f(X_{t+s}), \exp\{\int_0^{t+s} c_n(X_r)dr\} \geq U) \\ &= \mathbb{E}_x(\mathbb{E}(f(X_{t+s}), \exp\{\int_0^{t+s} c_n(X_r)dr\} \geq U | \mathcal{F}_t)) \end{aligned}$$

Notando que  $\exp\{\int_0^t c_n(X_r)dr\} \geq U$  equivale a  $-\int_0^t c_n(X_r)dr \leq -\ln(U)$  y que la ley de  $-\ln(U)$  corresponde a una exponencial de parámetro 1, se tiene que la ley condicional de

$$-\int_0^{t+s} c_n(X_r)dr \leq -\ln(U) | -\int_0^t c_n(X_r)dr \leq -\ln(U)$$

es la misma ley de

$$-\int_0^s c_n(X_r)dr \leq -\ln(U)$$

gracias a la propiedad de pérdida de memoria para la distribución exponencial. Con esto, se tiene que la esperanza condicional

$$\mathbb{E}(\exp\{\int_0^{t+s} c_n(X_r)dr\} \geq U | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\exp\{\int_0^s c_n(X_r)dr\} \geq U)$$

Utilizando esto, se calcula  $T(t+s)f$  como

$$\begin{aligned} T(t+s)f(x) &= \mathbb{E}_x(\mathbb{E}(f \circ \Theta_t(X_s), \exp\{\int_0^{t+s} c_n(X_r)dr\} \geq U \wedge \exp\{\int_0^t c_n(X_r)dr\} \geq U | \mathcal{F}_t)) \\ &= \mathbb{E}_x(\mathbb{E}(f \circ \Theta_t(X_s), \exp\{\int_0^s c_n(X_{r+t})dr\} \geq \bar{U} | \mathcal{F}_t), \exp\{\int_0^t c_n(X_r)dr\} \geq U) \end{aligned}$$

$$= \mathbb{E}_x(\mathbb{E}_{X_t}(f(X_s), \exp\{\int_0^s c_n(X_r)dr\} \geq \bar{U}), \exp\{\int_0^t c_n(X_r)dr\} \geq U) = T(t)(T(s)f)(x)$$

Concluyéndose así que  $T(t)f = \mathbb{E}_x(f(Y_t))$  corresponde a un semigrupo.

Para ver que  $L_n$  efectivamente corresponde a su generador, basta notar que

$$T(t)f(x) - f(x) = \mathbb{E}_x\left(\int_0^t \exp\left\{\int_0^s c_n(X_r)dr\right\} L_n f(X_s) ds\right).$$

De donde

$$\frac{T(t)f(x) - f(x)}{t} = \mathbb{E}_x\left(\frac{\int_0^t \exp\left\{\int_0^s c_n(X_r)dr\right\} L_n f(X_s) ds}{t}\right).$$

Tomando límite cuando  $t \rightarrow 0$  y usando el teorema fundamental del cálculo, se obtiene que

$$Af(x) = \mathbb{E}_x(\exp\{\int_0^t c_n(X_r)dr\} L_n f(X_t)|_{t=0}) = L_n f(x).$$

Que es lo que se quería probar. Se concluye así esta sección mostrando que la familia de procesos estudiada corresponde efectivamente a los procesos generados por la inversa de la enésima potencia de Hadamard del operador de Green del Movimiento Browniano.

## 4.4. Kernel de Green para el proceso

Para concluir este capítulo, se observa que el Kernel de Green del proceso corresponde a la inversa de la enésima potencia de Hadamard del Operador de Green del Movimiento Browniano.

Para  $f \in L_n(A_n)$  y  $u \in A_n$  tal que  $L_n u = -f$ , se verificará que  $u$  corresponde efectivamente al Kernel de Green asociado al proceso para  $f$ . Para ello, se aplica la fórmula de Ito a  $u$  definiendo  $T$  como el tiempo de muerte del proceso (dado por la integral de la exponencial de  $c_n$ ) y se obtiene

$$\mathbb{E}_x(u(Y_t), t < T) = u(x) + \mathbb{E}_x \int_0^{t \wedge T} -f(Y_s) ds.$$

Como  $u \in A_n$ , en particular es nula en la frontera y acotada al interior del intervalo  $(0, 1)$ , y en virtud de la observación 4.2.2, que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x(u(Y_t), t < T) = 0.$$

Y así, se concluye que

$$u(x) = \mathbb{E}_x \int_0^T f(Y_s) ds$$

Esto es,  $u$  corresponde a la función de Green para el proceso  $(f(Y_t))_{t \geq 0}$ , o bien  $u = G_n(f)$ .

Estudiadas todas estas propiedades teóricas del proceso, en el siguiente capítulo se mostrarán simulaciones para las tres familias de procesos expuestas en este trabajo.

# Capítulo 5

## Simulaciones numéricas de los procesos estudiados

En esta sección, se describirán los métodos para simular numéricamente el comportamiento de los procesos  $(X_t)_{t \geq 0}$ ,  $(Y_t)_{t \geq 0}$  y también  $(V_t)_{t \geq 0}$ . Como ya se vió anteriormente, el proceso  $(Y_t)_{t \geq 0}$  sigue las mismas trayectorias del proceso  $(X_t)_{t \geq 0}$  hasta un tiempo de muerte que depende de esta misma trayectoria, por tanto el trabajo de esta sección se dividirá en:

- Simular las trayectorias del proceso  $(X_t)_{t \geq 0}$  hasta un tiempo determinista mediante la simulación numérica de la EDE (9).
- Simular las trayectorias del proceso  $(V_t)_{t \geq 0}$ .
- Aproximar numéricamente la integral estocástica que define el tiempo de muerte del proceso  $(Y_t)_{t \geq 0}$ .
- Simular las trayectorias del proceso  $(Y_t)_{t \geq 0}$ , utilizando los dos resultados anteriores.

### 5.1. Simulación de las trayectorias del proceso $(X_t)_{t \geq 0}$

Para simular las trayectorias del proceso  $(X_t)_{t \geq 0}$ , se discretiza la EDE (9) como

$$\Delta X_t = \sqrt{2a_n(X_t)}\Delta W_t + b_n(X_t)\Delta t \quad (5.1)$$

Obteniéndose

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \sqrt{2a_n(X_t)}\Delta W_t + b_n(X_t)\Delta t$$

Dado que el Movimiento Browniano tiene incrementos independientes y estacionarios, la simulación requiere de poder generar variables independientes e idénticamente distribuidas con ley Normal de media 0 y varianza  $\Delta t$ . Esto se realizará utilizando variables aleatorias con módulo  $\Delta t$  y signo equiprobable, para obtener una mejor visualización de los resultados.

El método propuesto genera en el software MATLAB, a partir de una manera iterativa, las aproximaciones para un paso de largo  $\Delta t$  dependiente del largo y de la cantidad de iteraciones (este último un parámetro fijo en los modelos), y cuyas variables son  $n$  (correspondiente a la potencia de Haddamard que se quiera simular), *largo* (correspondiente al tiempo total que se quiera simular) y  $x$  (condición inicial para el proceso).

```
function [X,T,i] = simularx(n,largo,x)
%bernoulli con paso +- raiz de dt, acortar largo paso
l=100000; %cantidad de iteraciones
dt=largo/l; %largo del paso
X=zeros(1,1);
T=zeros(1,1);
W=rand(1,1);
W=-2*floor(2*W)+1;
X(1)=x; %condicion inicial
i=1;

%asegurar que no escape del intervalo (0,1)
while X(i)*(1-X(i))>0 && i<=l;
    i=i+1;
    X(i)=X(i-1)+
        sqrt(2*dt/(n*X(i-1)^(n-1)*(1-X(i-1))^(n-1)))*W(i-1)-
        (((n-1)*(1-2*X(i-1)))/(n*X(i-1)^n*(1-X(i-1))^n))*dt;
    T(i)=T(i-1)+dt;
end

%se queda con los tiempos hasta el fin del proceso
X=X(1:i-2);
T=T(1:i-2);

plot(T,X);
hold on;
scatter(T(i-2),X(i-2),'red');
ylabel('Trayectoria')
xlabel('Tiempo')
end
```

El método genera las iteraciones del proceso hasta un tiempo  $t$ , que se define como largo, de manera iterativa.

La función  $\text{rand}(x,y)$  genera un arreglo de  $x \times y$  celdas, cada una de ellas con un valor generado de manera aleatoria de una variable uniforme en el intervalo  $(0,1)$  de media 0, la cual después es llevada a valores 1 y  $-1$  de manera equiprobable. Por ende, al usar estos incrementos ponderados por la raíz de  $\Delta t$  se obtiene una simulación de los incrementos del Movimiento Browniano [Referencia para esto].

Al generar la simulación, se verifica que el proceso  $X_t$  no escape en ningún instante del

intervalo  $(0, 1)$ . Si esto sucediese, el proceso teóricamente alcanza una barrera de salida, por lo cual la simulación se detiene.

El método devuelve un vector  $X$ , con las posiciones en cada iteración de la simulación, y dos variables con los tiempos y la cantidad de iteraciones, que en este caso sirven sólo como control. Además, se entrega un gráfico de las trayectorias del proceso hasta su tiempo de salida del intervalo o hasta el fin de las iteraciones.

## 5.2. Simulación de las trayectorias del proceso $(V_t)_{t \geq 0}$

Para simular las trayectorias del proceso  $(V_t)_{t \geq 0}$ , se utiliza la misma discretización que en el caso anterior, dado que se trata de un proceso con generador idéntico salvo un cambio de signo. Los métodos son casi idénticos, con la salvedad de que el método para este proceso asegura la permanencia de las simulaciones al interior del intervalo  $(0, 1)$ , en concordancia con las fronteras de entrada que el proceso posee, truncando cualquier posible salida de este intervalo en las simulaciones.

El método propuesto genera en el software MATLAB, a partir de una manera iterativa, las aproximaciones de las trayectorias de manera análoga al anterior, no permitiendo que escapen estas numéricamente del intervalo  $(0, 1)$ .

```
function [X,T,i] = simularv(n,largo,x)
%bernoulli con paso +- raiz de dt, acortar largo paso
l=100000; %cantidad de iteraciones
dt=largo/l; %largo del paso
X=zeros(1,1);
T=zeros(1,1);
W=rand(1,1);
W=-2*floor(2*W)+1;
X(1)=x; %condicion inicial
i=2;

while X(i)*(1-X(i))>0 && i<=l;
    X(i)=X(i-1)+
        sqrt(2*dt/(n*X(i-1)^(n-1)*(1-X(i-1))^(n-1)))*W(i-1)
        -(((n-1)*(1-2*X(i-1)))/(n*X(i-1)^n*(1-X(i-1))^n))*dt;
    T(i)=T(i-1)+dt;
%recalculo si escapan del intervalo
if X(i)*(1-X(i))<=0.001
    i=i;
else
    i=i+1;
end
end
```

```

plot(T,X);
hold on;
ylabel('Trayectoria')
xlabel('Tiempo')
end

```

En caso de que numéricamente una trayectoria esté a punto de alcanzar un valor menor que 0 o mayor que 1, se recalcula dicha iteración hasta que vuelva al intervalo  $(0, 1)$ . Al finalizar la cantidad de iteraciones pedida, se grafica la trayectoria completa.

### 5.3. Simulación de la integral de las trayectorias.

Para simular el proceso  $(Y_t)_{t \geq 0}$ , se necesita el trabajo de la subsección anterior (simulación del proceso  $(X_t)_{t \geq 0}$ ) y una simulación de la integral de la función de la trayectoria que define el tiempo de muerte del proceso  $(Y_t)_{t \geq 0}$ , de acuerdo a lo visto en el capítulo anterior.

Para esto último, aproximamos el valor de la integral mediante suma de Riemman. A pesar de que el comportamiento del integrando  $c_n$  y sus derivadas no es muy bueno cerca de los bordes, ningún método mas sofisticado para hacer esta aproximación proporciona un error significativamente menor cerca de estos. Además, dado que el proceso  $(Y_t)_{t \geq 0}$  tiende a salir del intervalo  $(0, 1)$  cuando se aproxima a sus bordes, la pérdida de masa se producirá numéricamente de igual forma pese a subestimar la integral estocástica, por lo que errores de este tipo sólo influyen en el tipo de muerte que se asigna al proceso pero no en el tiempo que éste demora ni en la trayectoria que éste describe. De esta forma, la aproximación queda dada por

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right)$$

Dado que en la integral que define el tiempo de muerte del proceso el límite superior va cambiando a medida que el tiempo (y por ende las iteraciones en la simulación transcurren), la aproximación queda de la forma

$$\int_0^t c_n(X_s)ds \approx -\frac{(n-1)dt}{2^n} \sum_{j=1}^i \frac{1}{X_{jdt}^n (1 - X_{jdt})^n}$$

Donde  $i$  corresponde a la cantidad de iteraciones acumuladas en la simulación del proceso  $(X_t)_{t \geq 0}$  y  $dt$  es como el la programación de la simulación anterior.

Esta integral deberá simularse hasta alcanzarse una cota definida por una variable uniforme independiente del proceso o hasta que se produzca una salida del intervalo  $(0, 1)$  y, en caso de alcanzarse dicha cota, terminar con la simulación de  $(Y_t)_{t \geq 0}$ .

## 5.4. Simulación de las trayectorias del proceso $(Y_t)_{t \geq 0}$

Con los dos procedimientos anteriores, se pueden simular las trayectorias del proceso  $(Y_t)_{t \geq 0}$  como sigue:

- Simular una variable aleatoria con distribución Uniforme en el intervalo  $(0, 1)$ .
- Aproximar la integral estocástica como 0.
- En cada iteración
  - Simular una realización del proceso  $(X_t)_{t \geq 0}$ .
  - Actualizar la aproximación de la integral estocástica.
  - Verificar si la exponencial de esta integral es mayor que la variable Uniforme generada al principio. En caso contrario, terminar las iteraciones y acusar la muerte del proceso.

A continuación, se adjunta el código del método de simulación, también hecho con el programa MATLAB.

```
function [X,T,i,Int] = simulary(n,largo,x)
%bernoulli con paso +- raiz de dt, acortar largo paso.
l=100000; %cantidad de iteraciones
dt=largo/l; %largo del paso
X=zeros(1,1);
T=zeros(1,1);
W=rand(1,1);
W=-2*floor(2*W)+1;
U=rand %variable uniforme que define el tiempo de muerte
Int=0; %integral estocastica
X(1)=x; %condicion inicial
i=2;

%ientras no escape, se alcance el max de iteraciones o muela
while X(i-1)*(1-X(i-1))>0 && i<=l && exp(Int)>U;
    X(i)=X(i-1)+
    sqrt(2*dt/(n*X(i-1)^(n-1)*(1-X(i-1))^(n-1)))*W(i-1)-
    (((n-1)*(1-2*X(i-1)))/(n*X(i-1)^n*(1-X(i-1))^n))*dt;
    T(i)=T(i-1)+dt;
    Int=Int-((n-1)*dt/(2^n*n*X(i-1)^n*(1-X(i-1))^n));
    i=i+1;
end

%quedarse con valores hasta fin del proceso
X=X(1:i-2);
T=T(1:i-2);
```

```

plot(T,X);
hold on;
%verde si muere, rojo si escapa
if exp(Int)>U
    scatter(T(i-2),X(i-2),'red ');
else
    scatter(T(i-2),X(i-2),'green ');
end
ylabel('Trayectoria ');
xlabel('Tiempo ');
end

```

A grosso modo, se simula el proceso  $(X_t)_{t \geq 0}$  hasta un tiempo determinado en la función o hasta que se cumpla la condición para la muerte del proceso  $(Y_t)_{t \geq 0}$ . Si esto último sucede, se acorta la trayectoria hasta el último tiempo antes de la muerte y en dicho punto aparece un círculo de color (verde indicando si la pérdida de masa se produce por alcanzarse la cota uniforme para la integral estocástica y rojo si esta se produce porque el proceso sale del intervalo  $(0, 1)$ ). La ausencia de coma en la décima línea de comandos permite visualizar, al generarse el gráfico, la magnitud que alcanzó (o debió haber alcanzado) la exponencial de la integral estocástica para detener el proceso.

## 5.5. Resultados de las simulaciones

Para las tres familias de procesos estudiadas en este trabajo, se realizaron diversas simulaciones con el objetivo de visualizar como difería el comportamiento al variar  $n$ , la codición inicial, y para hacerse una idea global del comportamiento del proceso.

### 5.5.1. Resultados para el proceso $(X_t)_{t \geq 0}$

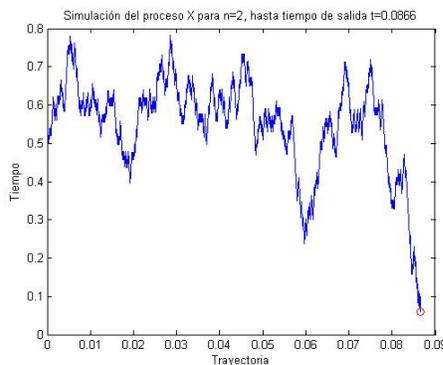


Figura 5.1: Simulación para  $n = 2$ ,  $t = 1$  y condición inicial  $x_0 = 0,5$

En las figuras 1 y 2, se observan dos simulaciones para el proceso con  $n = 2$ , con tiempo máximo  $t = 1$  y partiendo en el centro del intervalo. Ambas simulaciones escapan de éste

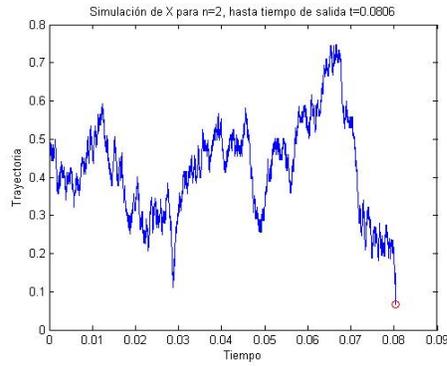


Figura 5.2: Simulación para  $n = 2$ ,  $t = 1$  y condición inicial  $x_0 = 0,5$

bastante antes de alcanzar la última iteración. Cuando la condición inicial se ubica mas cerca de los bordes del intervalo, este efecto es aún más notorio, como se observa en las figuras 3, 4 y 5.

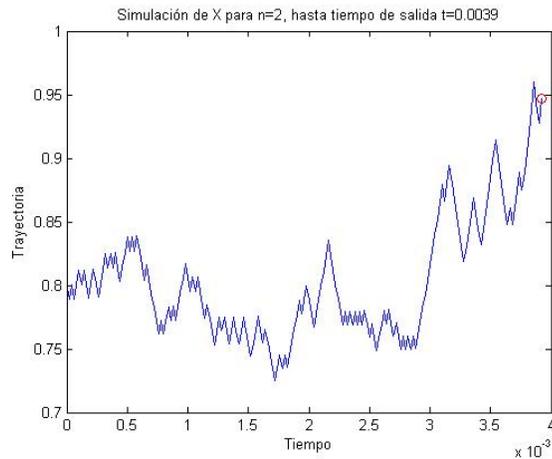


Figura 5.3: Simulación para  $n = 2$ ,  $t = 1$  y condición inicial  $x_0 = 0,8$

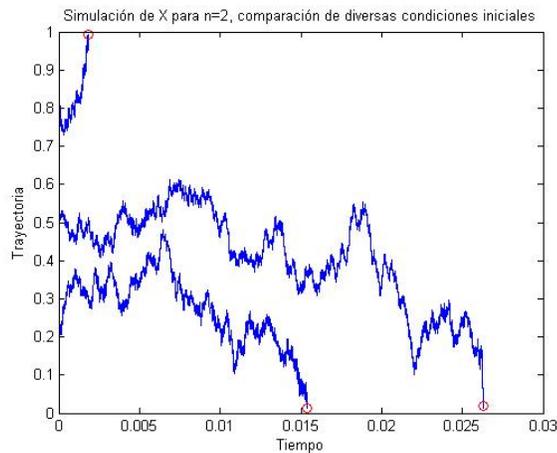


Figura 5.4: Simulaciones para  $n = 2$ ,  $t = 1$  y condiciones iniciales diversas

En las figura 4 se aprecian los tiempos de salida para tres simulaciones con condición

inicial  $x_0 = 0,5$ ,  $x_0 = 0,8$  y  $x_0 = 0,2$ . Al compararlas, se observa que las trayectorias con la primera condición inicial demoran mucho más en salir del intervalo  $(0, 1)$  que las dos últimas.

A continuación, se muestran resultados para distintos valores de  $n$

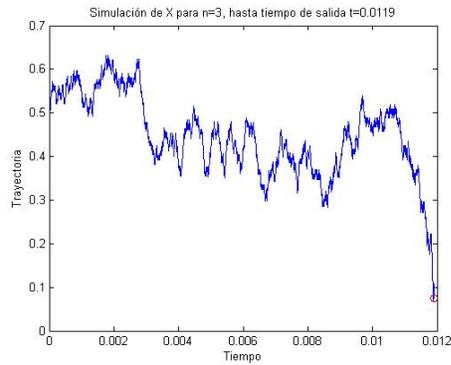


Figura 5.5: Simulación para  $n = 3$ ,  $t = 1$  y condición inicial  $x_0 = 0,5$

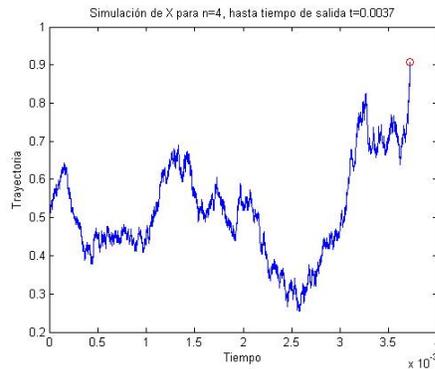


Figura 5.6: Simulación para  $n = 4$ ,  $t = 0,1$  y condición inicial  $x_0 = 0,5$

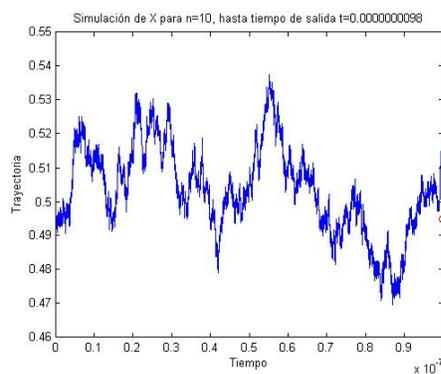


Figura 5.7: Simulación para  $n = 10$ ,  $t = 0,001$  y condición inicial  $x_0 = 0,5$

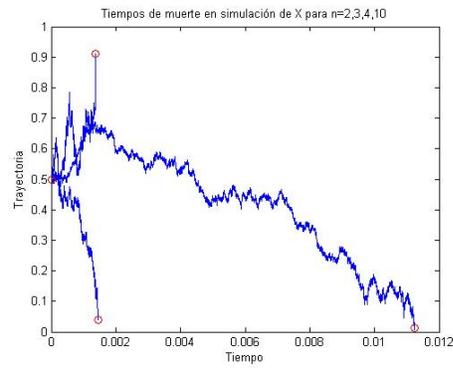


Figura 5.8: Simulaciones para diversos  $n$  y condición inicial  $x_0 = 0,5$

La diferencia entre la magnitud del drift versus la difusión es notoria a medida que aumenta  $n$  y se observa en las trayectorias de las figuras antecesoras. En la figura 8 es visible cómo disminuye el tiempo de salida del intervalo al aumentar el valor de  $n$  desde 2 a 10 en 5 órdenes de magnitud. También es visible cómo al aumentar  $n$ , y debido al mismo efecto, las trayectorias escapan del interior con mayor fuerza, acercándose de manera cada vez más drástica a la frontera.

### 5.5.2. Resultados para el proceso $(V_t)_{t \geq 0}$

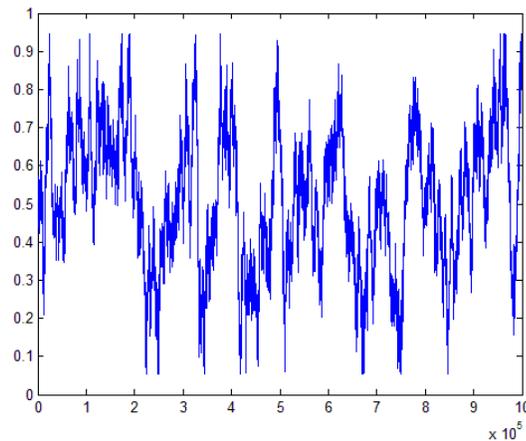


Figura 5.9: Simulación para  $n = 2$ ,  $t = 1$  y condición inicial  $x_0 = 0,5$

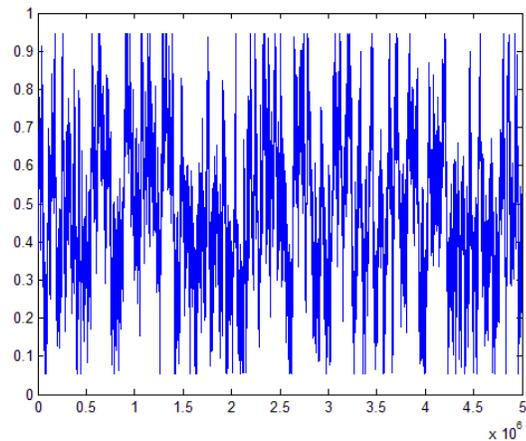


Figura 5.10: Simulación para  $n = 2$ ,  $t = 5$  y condición inicial  $x_0 = 0,5$

Para  $n = 2$  ya se aprecian los efectos del drift, cuya magnitud domina a la de la difusión cuando el proceso se acerca a los bordes, donde vuelve a centrar el proceso de manera brusca. Cuando el proceso está cerca del centro, el drift se anula y la difusión es la que gobierna las trayectorias del proceso, mostrando pequeños cambios similares al ruido blanco en esta situación.

Al aumentar  $n$ , se aprecia con mayor intensidad este efecto, al aumentar más rápido la magnitud del denominador el proceso se queda cada vez más cerca del centro.

Al hacer variar la condición inicial por una más cercana a los bordes del intervalo  $(0, 1)$ , se aprecia la convergencia a la distribución estacionaria más rápido al aumentar  $n$  debido a que los aportes del drift hacia el centro son cada vez más significativos que los de la difusión, constatándose empíricamente también que la varianza de la distribución estacionaria decrece con  $n$ .

En todas las figuras anteriores se aprecia el dominio del coeficiente de drift por sobre el de la difusión, ya que los polos del primero en los bordes son de orden  $\frac{n}{2}$  más grandes que

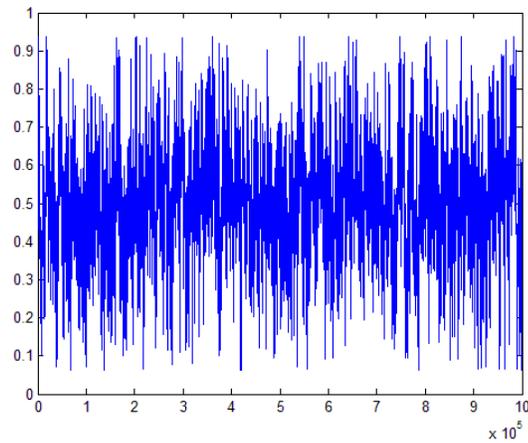


Figura 5.11: Simulación para  $n = 4$ ,  $t = 1$  y condición inicial  $x_0 = 0,5$

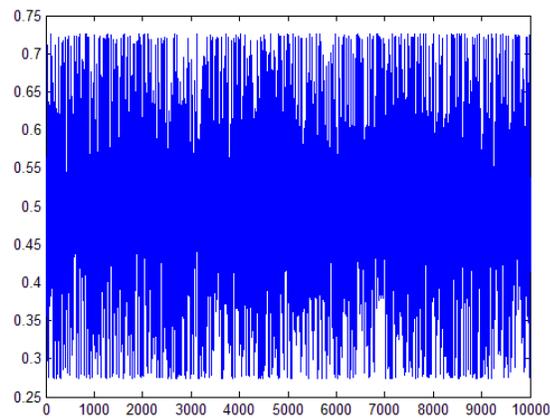


Figura 5.12: Simulación para  $n = 8$ ,  $t = 0,01$  y condición inicial  $x_0 = 0,5$

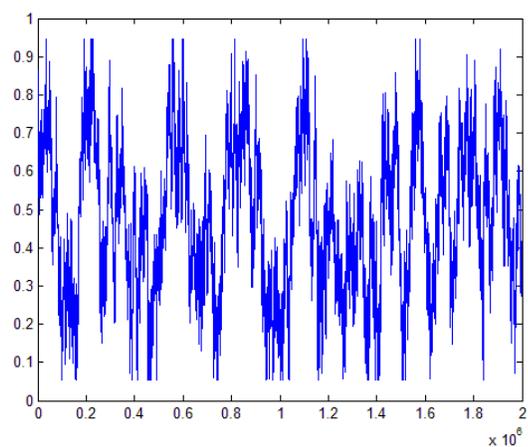


Figura 5.13: Simulación para  $n = 2$ ,  $t = 2$  y condición inicial  $x_0 = 0,8$

los análogos para el segundo, haciendo que el proceso vuelva al centro al despegarse cada vez menos de este mismo.

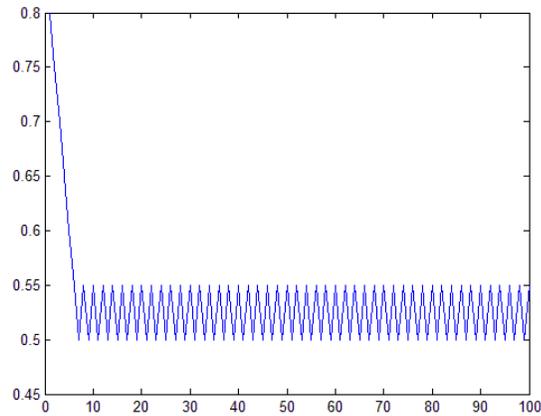


Figura 5.14: Simulación para  $n = 15$ ,  $t = 0,001$  y condición inicial  $x_0 = 0,8$

### 5.5.3. Resultados para el proceso $(Y_t)_{t \geq 0}$

Para visualizar gráficamente el proceso, se utiliza un marcador rojo cuando el proceso escapa del intervalo  $(0, 1)$  y un marcador verde cuando muere dentro de él. A continuación, se adjuntan simulaciones variando  $n$ , la cantidad de tiempo máxima y la condición inicial.

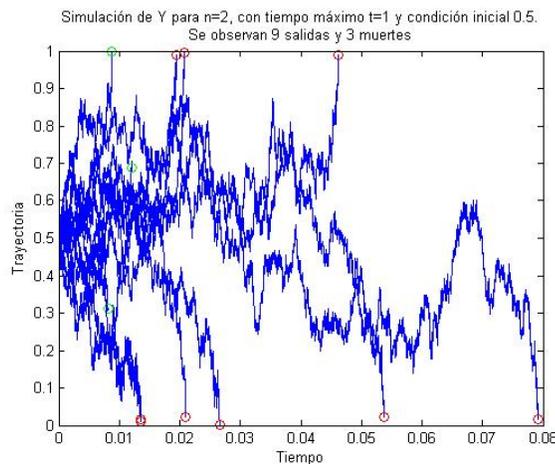


Figura 5.15: Simulaciones para  $n = 2$ ,  $t = 1$  y condición inicial  $x_0 = 0,5$

En las figuras 15 y 16 se observan las trayectorias para condiciones iniciales distintas. En la figura 15, cuyas condiciones iniciales corresponden todas a  $x_0 = 0,5$ , se observan 9 salidas y 3 muertes al interior del intervalo. Cabe destacar que estas están dentro de las 4 simulaciones que arrojaron  $U \geq 0,78$ . No obstante, también se aprecia que de las 3 muertes, dos se producen en torno al centro del intervalo pero una se produce en el borde, por lo que esta muerte se podría atribuir a un aumento explosivo del integrando que define el tiempo de muerte (coeficiente  $c_n$  en torno al borde) más que al valor entregado a la variable  $U$ . La diferencia entre las trayectorias que salen por ambos extremos no es tan notoria como para descartar la equiprobabilidad (4 versus 6)

En la figura 16 se muestran 12 simulaciones con condición inicial a distancia 0,2 del borde del intervalo. Se producen 11 salidas y sólo una muerte, posiblemente debido a que el

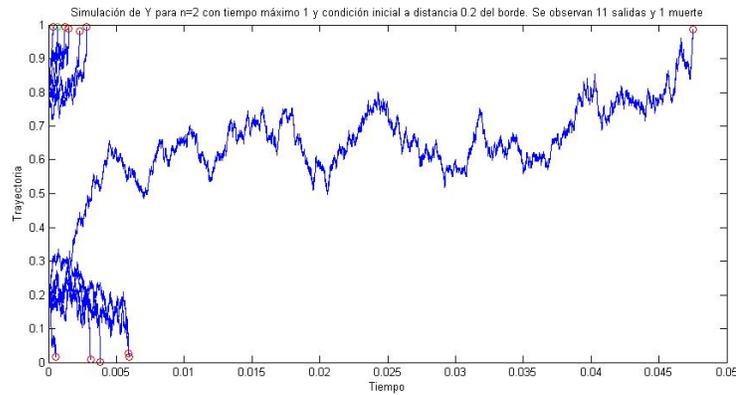


Figura 5.16: Simulación para  $n = 2$ ,  $t = 1$  y condición inicial  $x_0 = 0,8$

drift empuja a las trayectorias hacia afuera antes de que la integral alcance a acumular una magnitud significativa, como sí podía suceder cuando las trayectorias partían en el centro y tenían mas tiempo para acumular magnitud en el integrando. De las 11 salidas, 10 se producen por el extremo en el cual la condición inicial estaba más cerca y sin nunca pasar por el centro, otro factor que permite corroborar la influencia del drift al acercarse a la frontera por sobre la difusión.

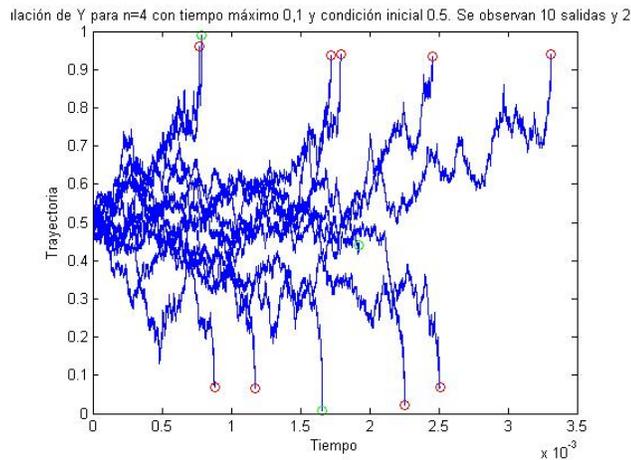


Figura 5.17: Simulaciones para  $n = 4$ ,  $t = 0,1$  y condición inicial  $x_0 = 0,5$

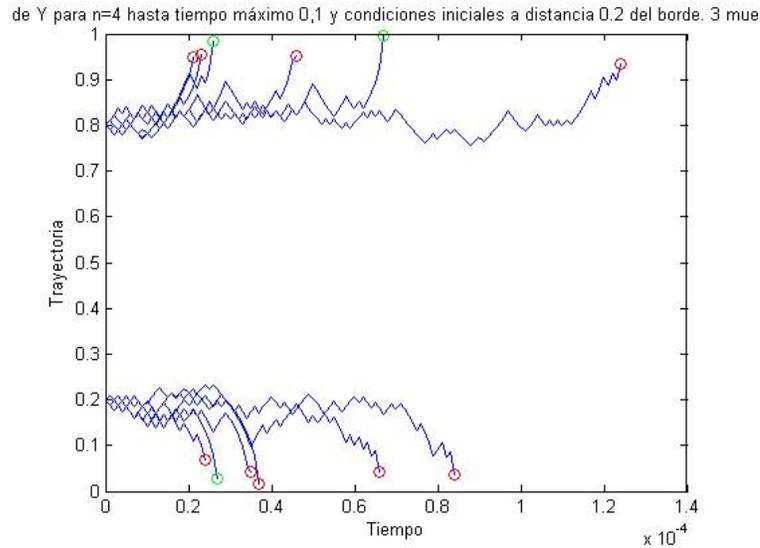


Figura 5.18: Simulación para  $n = 4$ ,  $t = 0,1$  y condición inicial  $x_0 = 0,8$

Las simulaciones en las figuras 17 y 18 muestran nuevamente el efecto de las condiciones de borde sobre los tiempos de salida y los extremos por donde se produce la salida para  $n = 4$ . Sin embargo, en la cantidad de muertes versus salidas existe una leve diferencia al producirse en este caso mas muertes cuando la condición inicial está cerca de los bordes, pero manteniendose una relación similar en la razón muertes versus salidas.

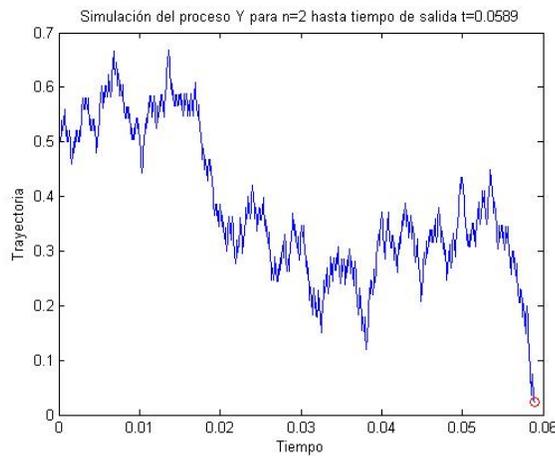


Figura 5.19: Simulaciones para  $n = 2$ ,  $t = 1$  y condición inicial  $x_0 = 0,5$

A pesar de que en este trabajo no se concluye teóricamente sobre el comportamiento de las trayectorias que determina si terminarán en una salida del intervalo o en una muerte en su interior, los resultados parecen alentar la tesis de que una salida se produce principalmente por un acercamiento drástico al borde, mientras que una muerte ocurrirá en una trayectoria que se mantenga en vecindades del centro del intervalo, donde es menos intenso el drift, por el tiempo suficiente para que la magnitud de la integral sobre su trayectoria aumente lo suficiente. Las figuras 19 y 20 muestran, respectivamente, una trayectoria que escapa rápidamente al acercarse mucho al borde y una trayectoria que muere después de haber

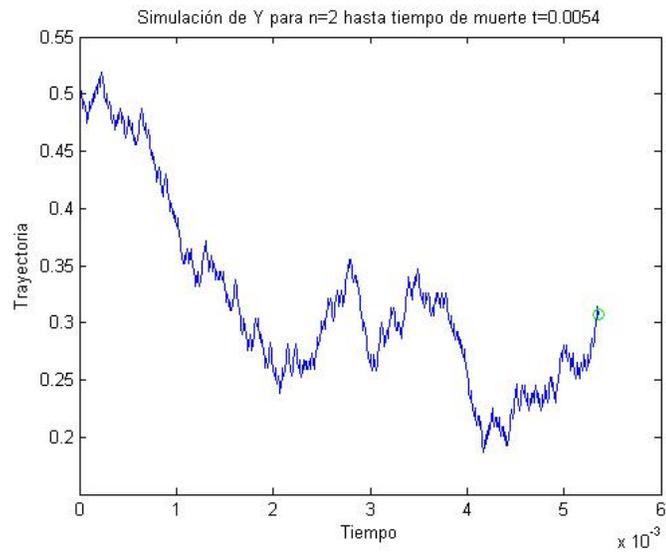


Figura 5.20: Simulación para  $n = 2$ ,  $t = 1$  y condición inicial  $x_0 = 0,5$

estado a mayor distancia del borde.

# Capítulo 6

## Conclusiones

De este trabajo, se concluye que es posible caracterizar una familia de procesos cuyos generadores correspondan a los operadores inversos de las potencias de Hadamard del operador de Green de un proceso estocástico bien conocido y estudiado, en este caso el Movimiento Browniano. Se entrega una primera intuición sobre la existencia de propiedades que son compartidas con toda la familia de procesos y otras propiedades que aparecen en los procesos generados por las inversas de algunas potencias positivas y que no corresponden al proceso original como estudio anexo.

El estudio de este trabajo, por razones de tiempo, no consideró ciertas propiedades que son de interés, como la existencia de una distribución cuasiestacionaria para los procesos encontrados en el capítulo 3 que correspondían a soluciones de esa misma ecuación diferencial, como sí se encontró una distribución estacionaria para los procesos con los que se concluye dicho capítulo. Tampoco se hizo un estudio más exhaustivo sobre la forma en que los procesos del capítulo 4 pierden trayectorias, estudiando la relevancia que tienen tanto el escape del intervalo de definición como la muerte al interior de él en la pérdida de masa de esta familia de procesos. Queda entonces abierto para futuros estudios caracterizar estas distribuciones cuasiestacionarias, en caso de que existan, y analizar los conjuntos de trayectorias que desaparecen escapando del intervalo  $(0, 1)$  versus las que desaparecen al interior del mismo al alcanzarse el tiempo de muerte del proceso, de manera de lograr una mejor idea del comportamiento asintótico de la familia de procesos  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y adquirir mejores nociones sobre la forma en la que ciertas trayectorias desaparecen sobre que tan acentuado es este comportamiento al modificar variables como  $n$  y la condición inicial.

Se realiza una descripción exhaustiva del comportamiento de los procesos resultantes para un proceso original cuyo drift y difusión son conocidos (y bastante fáciles de calcular), pero el trabajo constituye un primer acercamiento para una meta más ambiciosa: eventualmente, replicar esta misma clasificación para un proceso con drift y difusión cualesquiera, y analizar las condiciones sobre estas funciones para que los procesos generados tengan determinadas propiedades. Este trabajo responde a dicha lógica para un caso particular, mas tiene componentes que lo hacen bastante generalizable para un estudio más avanzado y que tenga mayores aspiraciones que ser una memoria de pregrado.

En cuanto a las simulaciones numéricas, si bien los métodos utilizados no son para nada

sofisticados y la simulación resulta bastante sencilla conocidas las leyes de todos los procesos involucrados y sus respectivas ecuaciones diferenciales estocásticas, el hecho de que la simulación de la integral de las trayectorias de  $(Y_t)_{t \geq 0}$  se haya hecho con el método de Sumas de Riemman afecta su precisión cerca de los bordes, donde las funciones calculadas divergen rápidamente para  $n \geq 2$ . Si bien esto no es un impedimento para la visualización de las trayectorias de un determinado proceso (puesto que cerca de los bordes ocurrirá una salida o una muerte dados los coeficientes del generador), sí afecta a la forma en la que se visualiza el tipo de pérdida que tuvo la trayectoria. El trabajo de las simulaciones, no obstante, resulta satisfactorio para estudiar el comportamiento de una trayectoria condicionado a que se encuentra en el interior del intervalo  $(0, 1)$ .

Ciertamente, todos los elementos definidos en el capítulo 1 están en función de un proceso determinado por una ecuación estocástica general, y en función de ello se podría hacer un futuro trabajo, mucho mas general que este, que aporte al conocimiento de los procesos estocásticos cuyo generador de semigrupo corresponda a inversas de potencias de Hadamard de un operador de Green para una difusión cualquiera.

# Bibliografía

- [1] P. Collet, S. Martínez, and J. San Martín. *Quasi-Stationary Distributions: Markov Chains, Diffusions and Dynamical Systems*. Probability and Its Applications Series. Springer-Verlag GmbH, 2012.
- [2] Stewart N. Ethier and Thomas G. Kurtz. *Markov processes – characterization and convergence*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, 1986.
- [3] J.I. Gichman, A.V. Skorochod, and K. Wickwire. *I.I. Gihman, A.V. Skorohod. Stochastic differential equations (Stochastičeskie diferencialnye uravnenija, engl. - Transl.: Kenneth Wickwire.)*. 1972.
- [4] I. Karatzas and S. E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, Berlin, 2nd edition, 2000.
- [5] S. Karlin and H.M. Taylor. *A Second Course in Stochastic Processes*. Number v. 2. Acad. Press, 1981.
- [6] M. Renardy and R.C. Rogers. *An Introduction to Partial Differential Equations*. Texts in Applied Mathematics. Springer, 2004.
- [7] D. Revuz and M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 2004.
- [8] W.C. Xie. *Dynamic Stability of Structures*. Dynamic Stability of Structures. Cambridge University Press, 2006.
- [9] K. Yosida. *Functional Analysis: Reprint of the 1980 Edition*. Classics in Mathematics Series. Springer-Verlag GmbH, 1980.