



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

CONGESTIÓN Y EQUILIBRIO EN REDES DE TRANSPORTE PÚBLICO

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA MENCIÓN TRANSPORTE

TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

PABLO RODRIGO BELTRÁN CORREA

PROFESOR GUÍA:
ROBERTO COMINETTI COTTI-COMETTI

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
CRISTIÁN CORTÉS CARRILLO
JOAQUÍN DE CEA CHICANO
FRANCISCO MARTÍNEZ CONCHA

SANTIAGO DE CHILE
DICIEMBRE 2012

dedicada a Aline, Francisca y Eduarda...

AGRADECIMIENTOS

Como es natural, les agradezco en primer lugar a mis padres Francisco y Pilar por su paciencia y ejemplo, y por haberme traspasado, conscientes o no, una serie de valores y virtudes que hoy reconozco, transmito, y agradezco profundamente.

A mi familia toda, por el constante cariño y apoyo con que han aportado a mi vida, en especial a mis hijas, por todo el amor que recibo de ellas y por tantas genuinas alegrías que me seguirán dando.

A Roberto Cominetti, por guiarme con dedicación en esta aventura matemática vinculada al transporte público; por compartir tantas horas de reflexión, simulaciones, formulas y demostraciones; y por aceptar que esta tesis tomase un rumbo investigativo no suficientemente justificado, en ese entonces.

A Henry Malbrán, por haberme invitado hace 14 años a unirme a un pequeño grupo de investigación que finalmente generó una serie de trabajos, paper, conocimiento, y esta tesis por cierto; porque con ello probablemente me generaste un vínculo permanente con el transporte público; a partir del cual tanto personal como profesionalmente he podido con alegría contribuir a la sociedad.

A mis amigos, de la vida puedo decir ya, representados por todos quienes con más o menos frecuencia, pero siempre sin reproche, me preguntaban casi sin esperanza: ¿y cuándo te vas a titular?... en particular para quienes hicieron algo por ello...

Finalmente a Karla, por su compañía y cariño en estos años juntos; y por haberme dado el apoyo y la comprensión que necesité para cerrar esta etapa, en éste, el que probablemente hubiese sido, mí último intento.

RESUMEN

El Diseño de Redes de Transporte Público es probablemente una de las materias más interesantes en lo que a optimización de la operación a gran escala se refiere. Si bien el problema puede ser abordado desde distintas perspectivas y con diversas metodologías, hay consenso técnico en la importancia de contar con herramientas que permitan predecir correctamente el comportamiento de la demanda, ante cambios en la oferta.

En este sentido, si bien no se discute la necesidad de contar con modelos de asignación de pasajeros a redes de transporte público, que reproduzcan de buena manera la distribución de flujos, tanto a nivel de ejes como a nivel de los arcos de la Red, no son muchas las herramientas desarrolladas que entregan buenos resultados. Probablemente, la razón principal de lo anterior radica en que solo en los últimos 20 años los investigadores han incorporado en los modelos de asignación de pasajeros, los efectos de la capacidad limitada que poseen los vehículos, tanto en los niveles de servicios que perciben los usuarios como sobre las decisiones que toman.

Incluso hasta estos días, prácticamente la totalidad de los modelos teóricos y prácticos en lo que a asignación de pasajeros se refiere, han tratado la restricción de capacidad de los vehículos de una manera parcial e intuitiva, buscando reproducir la asignación de flujos a nivel estratégico, pero con deficientes resultados a nivel táctico.

El presente trabajo propone un nuevo modelo de equilibrio para la asignación de pasajeros en redes de transporte público, basado en el concepto de *Estrategia* (Spiess, 1983) y en un Modelo de Congestión que se desarrolla a partir de la revisión y análisis de los efectos experimentados por los usuarios, cuando se ven enfrentado a una oferta de transporte público cuya capacidad es limitada. Para lograr lo anterior, con base en simulaciones y en teoría de colas, dichos efectos fueron incorporados en la modelación del tiempo de espera, logrando con ello reproducir desde su génesis las alteraciones tanto en el nivel de servicio como en el comportamiento y decisiones de los usuarios.

ABSTRACT

Public transport network design is probably one of the most interesting large scale optimization problems. This problem can be approached from different perspectives and with diverse methodologies, but there is technical agreement on the importance of having tools to correctly predict passenger behavior after changes in the supply.

Even though the need for public transport passenger assignment models that correctly reproduce the flow distribution on the network is widely recognized, most of the existing tools do not provide good results. Probably the main reason is that only during the last 20 years passenger assignment models have incorporated the effects of vehicle capacity constraints, both on the level of service that users are receiving and on the decisions they make.

And even until today, both the theoretical and the practical passenger assignment models have treated vehicle capacity constraints intuitively or partially, always trying to reproduce only the strategic flow assignment but with deficient results at the tactical level.

This thesis proposes a new equilibrium model for the assignment of public transport passengers, based on the strategy concept (Spiess, 1983) and a congestion model developed as a result of the review and analysis of the effects experienced by users when they face a public transport supply with limited capacity. Based on simulations and queuing theory, those effects were incorporated in the waiting time model, allowing for a reproduction – from the origin of the phenomena – of the alterations in both the level of service and users' behavior and decisions.

ÍNDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS	III
RESUMEN	IV
ABSTRACT	V
ÍNDICE GENERAL	VI
1. INTRODUCCIÓN	1
2. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA	5
2.1 ASPECTOS GENERALES	5
2.2 MODELACIÓN DEL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN	6
2.3 MODELOS DE ASIGNACIÓN DE PASAJEROS	9
2.3.1 De Cea Joaquín y Fernández José E. (1993)	9
2.3.2 Wu Jia Hau, Florian Michael y Marcotte Patrice (1994)	14
2.3.3 Bouzaïene-Ayari Belgacem, Gendreau Michel y Nguyen Sang (1995)	18
2.3.4 Cepeda Manuel, Cominetti Roberto y Florian Michael (2006)	23
2.4 MODELACIÓN DEL TIEMPO DE ESPERA	26
2.4.1 Gendreau Michel (1984)	26
2.4.2 Ceder Avishai y Marguier Philippe (1985)	27
2.4.3 Powell Warren (1986)	28
2.4.4 Bouzaïene-Ayari B., Gendreau M., and Nguyen S. (2001)	29
2.4.5 Cominetti y Correa (2001)	30
2.4.6 Cepeda Manuel (2006)	31
2.5 SÍNTESIS	33
3. FUNDAMENTOS DE LA CONGESTIÓN EN PARADEROS	36
3.1 CONCEPTOS BÁSICOS	36
3.1.1 Generalidades	36
3.1.2 Descripción del Sistema	37
3.1.2.1 Forma de Llegada de los Usuarios	37
3.1.2.2 Mecanismo de Servicio	37
3.1.2.3 Disciplina de Cola	37
3.2 TIEMPOS DE ESPERA EN CONGESTIÓN	38
3.2.1 Reducción de la Frecuencia Nominal	40
3.2.1.1 Intervalos Exponenciales	42
3.2.1.2 Intervalos Determinísticos	43
3.2.2 Análisis Probabilístico del Tiempo de Espera	45
3.3 ASIGNACIÓN DE PASAJEROS EN CONGESTIÓN	50
4. MODELACIÓN DE LA CONGESTIÓN EN PARADEROS	52
4.1 PARADERO SIMPLE	52
4.1.1 Modelos de Congestión	56
4.1.1.1 Modelo de Congestión Lineal	56
4.1.1.2 Modelo de Congestión Cuadrático	57
4.1.1.3 Modelo de Congestión Potencial	57

4.1.1.4	Modelo Aproximado de Congestión	58
4.1.2	Análisis Comparativo de Modelos de Congestión	59
4.2	PARADERO CON USUARIOS HOMOGÉNEOS	64
4.3	PARADEROS CON USUARIOS HETEROGÉNEOS	69
4.3.1	Análisis Discreto	70
4.3.2	Análisis Continuo	72
4.3.3	Modelo Generalizado de Congestión	74
4.3.4	Simulación de un Paradero con Usuarios Heterogéneos	76
5.	PROBLEMA DE LÍNEAS COMUNES Y ASIGNACIÓN DE PASAJEROS	79
5.1	SIMULACIÓN	79
5.1.1	Estructura Conceptual de la Simulación.....	80
5.1.2	Resultados Generales.....	80
5.2	MODELACIÓN.....	83
5.2.1	Método de Asignación.....	84
5.2.2	Tiempos de Viaje.....	84
5.2.3	Valores Críticos	85
5.2.4	Equilibrio	86
5.3	PROBLEMA DE LÍNEAS COMUNES CON CONGESTIÓN.....	91
5.3.1	Hipótesis	92
5.3.2	Resultados Preliminares	93
5.3.3	Existencia y Unicidad del Equilibrio.....	94
5.3.4	Extensión de la Existencia y Unicidad del Equilibrio	100
5.3.4.1	Existencia en el Caso General.....	100
6.	ASIGNACIÓN DE EQUILIBRIO EN REDES GENERALES	102
6.1	CONCEPTO DE ESTRATEGIA LOCAL	102
6.1.1	Comportamiento Local de los Pasajeros	102
6.1.2	Definiciones Básicas.....	104
6.1.3	Supuestos del Modelo de Equilibrio.....	104
6.2	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	105
6.2.1	Restricciones.....	105
6.2.2	Equilibrio de Wardrop bajo Estrategias Locales	107
6.3	DEFINICIÓN DEL PROBLEMA	108
7.	CONCLUSIONES	110
8.	REFERENCIAS	112

1. INTRODUCCIÓN

Las principales ciudades de países en vías de desarrollo presentan, como característica común, una mayoritaria aunque decreciente participación del transporte público en el contexto del total de viajes en ella. A pesar de tal característica, en ellas se observan severos problemas de congestión producto de la insuficiente prioridad e infraestructura destinada a satisfacer esta importante demanda de viajes. Dicho desequilibrio, producto en parte de la carencia de recursos y de restricciones físicas impuestas por la propia escasez del suelo, plantea al menos el desafío y la necesidad de hacer un uso eficiente de la infraestructura disponible. Es en este sentido que la probada eficiencia del transporte público masivo marca las directrices generales de las políticas a ser implementadas por las autoridades competentes a objeto de, al menos, intentar mantener la partición modal.

Del desafío de un Sistema de Transporte Sustentable se desprende el **Problema del Diseño de Redes de Transporte Público (PDRTP)**, que tiene por objeto optimizarlo y con ello hacerlo más atractivo, incentivando su uso y descongestionando en forma directa el sistema de transporte. En efecto, una de las principales preocupaciones de los planificadores de transporte en los últimos años, y por lo tanto una de las principales líneas de investigación, ha sido el diseño de redes de transporte público, dada la importancia de dichas redes en la operación de sistemas de transporte.

En este contexto, es importante cuestionar en primer término si la red física de transporte público de superficie es lo mejor que la ciudad puede brindarle a sus habitantes, es decir, si el conjunto de ejes por sobre los cuales opera corresponde a los ejes capaces de proveer la mejor configuración de este modo. Una vez establecida la red vial física, corresponde la definición de las líneas de transporte público.

En Santiago de Chile, hasta antes de la implementación del proyecto Transantiago, la definición de cada una de las líneas de transporte público provenía de una mirada individual y no de ciudad, gestada como un equilibrio entre los intereses económicos de los empresarios del sector, las posibilidades regulatorias de la autoridad, y la estructura histórica de recorridos heredada de experiencias de libre mercado en la industria, que terminó a fines de la década de los '90 convirtiendo a dichos empresarios en un cartel.

Adicionalmente, la definición de las frecuencias de cada una de las líneas era también planteada como un problema aislado de las frecuencias del resto de ellas, incorporando dicho antecedente operacional en algunos casos como un atributo del nivel de servicio a los usuarios, puntuable en procesos de licitación de recorridos, y sin una racionalidad en el uso de los recursos del sistema.

En resumen, el diseño de la red de transporte público de superficie en la Ciudad de Santiago previo a la implementación de Transantiago, así como el de la mayoría de las ciudades de países en vías de desarrollo, no correspondía al resultado de la aplicación de criterios de optimalidad en cada una de las etapas del **PDRTP**. Más bien, era consecuencia del equilibrio de diversos intereses defendidos por los distintos actores.

Luego, surge de manera natural la necesidad de plantear el problema antes descrito como uno de diseño planificado de un sistema integral de transporte público masivo, que incorpore los siguientes aspectos centrales:

- i. *Diseño Físico de líneas, cuyo objetivo sea establecer, a nivel de sistema, los recorridos óptimos para cada una de las líneas, de manera de satisfacer adecuadamente los requerimientos espaciales de las demandas en los distintos pares O/D.*
- ii. *Diseño Operacional de líneas, cuyo objetivo es resolver el problema de la definición óptima de frecuencias y capacidades de las distintas líneas, considerando el efecto de la restricción de capacidad de los buses y sus consecuencias sobre el comportamiento del usuario, de modo de satisfacer de la mejor forma posible los requerimientos temporales de la demanda.*

Los resultados de ambos aspectos son evidentemente dependientes de los criterios de optimalidad utilizados. En efecto, parece razonable pensar en una red de transporte público que minimice el tiempo total de viaje en el sistema, sin embargo ello podría significar un incremento inaceptable de los costos de prestación de los servicios, y por consiguiente de las tarifas o eventuales subsidios. Por otro lado, una visión medioambientalista procuraría maximizar el número de transferencias con la Red de Metro reduciendo con ello la emisión de contaminantes y la flota total de buses en el sistema. En consecuencia, todos los posibles criterios de optimalidad no necesariamente serán compatibles, por lo que podrían ser considerados ya sea a través de múltiples objetivos o de un macro-objetivo que los integre.

El problema de diseño podría entonces plantearse en términos económicos maximizando el beneficio social asociado a la operación de la red de transporte público, esto es, minimizando los costos sociales de operación experimentados por usuarios y operadores, en consideración a los requerimientos globales del sistema de transporte urbano tales como un número determinado de buses en el sistema, flujos máximos de vehículos, tiempos de espera máximos, emisión de contaminantes acotada, etc.

Una vez conceptualizado el **PDRTP**, es necesario reconocer que la evaluación de diseños requiere, como pieza fundamental, un **Modelo de Asignación de Pasajeros (MAP)** capaz de reproducir adecuadamente el comportamiento de los usuarios, enfrentados a las características propias de la oferta de transporte público.

En este contexto, son pocos los modelos de asignación de pasajeros a redes con tales características e implementados, debido a dificultades teóricas relacionadas con la modelación de los supuestos utilizados para reproducir el comportamiento del usuario, a la formulación matemática del problema de equilibrio con el cual se obtiene la asignación de pasajeros y a sus algoritmos de solución.

Una vez identificada la importancia del **MAP** en el problema de diseño, es necesario reconocer que la formulación matemática de éste depende, en gran medida, de los supuestos utilizados para reproducir el comportamiento de los usuarios. Ello, debido al principal aspecto que diferencia a los usuarios de transporte privado y público en términos de sus modelos de asignación, *el tiempo de espera*. Este aspecto, que al ser aplicado sobre conjuntos de líneas alternativas imposibilita la utilización de la gran cantidad de modelos de asignación desarrollados para los usuarios de transporte privado, introduce no-linealidades en la formulación matemática que impiden la utilización de técnicas clásicas, en lo que a equilibrio de redes se refiere.

Específicamente, respecto a la modelación del comportamiento del usuario, es reconocido el hecho de que, al menos en los modelos de asignación de pasajeros, su tratamiento ha sido bastante simplificado, debido a la imposición de fuertes supuestos en términos de, por ejemplo, el tiempo de espera (**Modelo de Congestión**). Un ejemplo de ello es que los efectos de la restricción de capacidad en el incremento de los tiempos de espera, así como la modelación de los posibles cambios conductuales producto de este fenómeno, han sido estudiados e incorporados en los **MAP** solo en las últimas dos décadas.

En efecto, y como se apreciará en los siguientes capítulos, los modelos de asignación de pasajeros, que son la herramienta fundamental para la evaluación de cualquier diseño de red de transporte público, han incorporado los efectos de la restricción de capacidad de manera más bien intuitiva, tratando de reproducir los flujos observados en el sistema, o de internalizar los efectos experimentados por los usuarios. Para ello, han sido usadas expresiones más bien heurísticas en la determinación de los tiempos medios de espera, a pesar de ser precisamente este aspecto el que distingue a este tipo de modelos de asignación de los desarrollados para usuarios de transporte privado.

La motivación de esta tesis es contribuir al Diseño de Redes de Transporte Público, a través de un nuevo Modelo de Asignación de Pasajeros (**MAP**). Para lograr lo anterior, se han planteado los siguientes objetivos:

El primero de ellos corresponde a la revisión y análisis de los efectos experimentados por los usuarios cuando se ven enfrentados a una oferta de transporte público cuya capacidad es limitada. Una vez identificados dichos efectos, estos serán introducidos en la modelación del tiempo de espera con el propósito de reproducir eventuales alteraciones en el comportamiento del usuario, como replantearse decisiones del tipo: elección de ruta, de líneas atractivas, elección de paradero de acceso a la red y/o zonas de transferencia.

El segundo objetivo es incorporar el análisis anterior en un modelo de equilibrio para la asignación de pasajeros a redes de transporte público, con el cual se obtengan asignaciones de flujos en el sistema, utilizando una mejor modelación de la operación en paraderos.

En relación con la estructura de la tesis, ésta ha sido organizada en 7 capítulos. El Capítulo 1 corresponde a la presente introducción, donde se contextualiza el problema y se presentan los principales objetivos perseguidos en el trabajo.

A continuación, en el Capítulo 2 se realiza una descripción y discusión de los trabajos más relevantes relacionados con la modelación de la asignación de pasajeros en redes de transporte público con restricción de capacidad, así como del análisis de los tiempos de espera en sistemas de atención a usuarios.

En el Capítulo 3 se analizan los fundamentos de la congestión en paraderos. En particular, se estudia la modelación del tiempo de espera y la asignación de pasajeros, además de los efectos inducidos en éstos por la restricción de capacidad de los vehículos de las líneas que conforman el sistema de atención en un paradero. Con esto se persigue obtener fundamentos matemáticamente

sólidos que sustentan la forma en que posteriormente se modelará la congestión. De igual modo, este análisis permitirá contrastar sus resultados respecto a los modelos presentados en la revisión bibliográfica.

En el Capítulo 4, mediante análisis teóricos y simulaciones, son obtenidas importantes características cualitativas relacionadas con el comportamiento de los usuarios en situaciones de congestión, para diversos tipos de paraderos. A partir de dichas características, son discutidas y cuestionadas las aproximaciones usadas para representar el tiempo de espera en los modelos vistos en la revisión bibliográfica, además de proponer otras. También se plantea y desarrolla un **Modelo Generalizado de Congestión**, consistente con dichas características y con las conclusiones obtenidas en el capítulo anterior, siendo además capaz de reproducir los resultados de las simulaciones.

Posteriormente, en el Capítulo 5, se verifican las bondades del Modelo Generalizado de Congestión presentado en el capítulo anterior, mediante simulaciones y análisis teóricos que resuelven el problema de líneas comunes en un ejemplo específico. Luego de ello, se generaliza el problema de líneas comunes, demostrando la existencia y unicidad del equilibrio bajo hipótesis sumamente débiles.

Luego, en el capítulo 6, se plantea el problema de equilibrio en una red desde múltiples orígenes a múltiples destinos para, finalmente en el Capítulo 7, entregar las principales conclusiones del trabajo desarrollado, así como también las líneas de desarrollo abiertas en esta tesis para futuros estudios.

2. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

2.1 ASPECTOS GENERALES

En el caso del transporte público, el problema de la asignación de *usuarios* (pasajeros) a la red es conceptual y operacionalmente diferente al caso del transporte privado. En efecto, para este último, la red vial permite definir caminos o rutas, luego, al conocer los caminos seguidos por los vehículos, se conoce también la asignación de sus usuarios sobre la red. Sin embargo, en el caso del transporte público, no basta con conocer las trayectorias de los *servicios* (líneas) para determinar la asignación de sus pasajeros sobre la red a través de las distintas rutas.

El problema de encontrar la asignación de pasajeros sobre una red de servicios de transporte público ha sido estudiado por diversos autores en los últimos cuarenta y cinco años. Sin embargo, durante los primeros diez, las investigaciones desarrolladas (ver [Dial, 1967](#); [Fearnside y Draper, 1971](#); [Le Clerq, 1972](#)) plantean el problema en forma similar a los clásicos problemas de asignación de tráfico desarrollados, hasta ese entonces, para el transporte privado. Específicamente, se trata de modelos en los que asume que los pasajeros viajan a través del “*itinerario más corto*” entre su origen y su destino, es decir, a través de la línea (o sucesión de líneas) que minimiza su *tiempo total de viaje*.

En los siguientes 10 años, producto del análisis del tiempo de espera, las investigaciones derivaron en suponer que el comportamiento de los usuarios está determinado por la minimización de su *tiempo total esperado de viaje*. Los modelos desarrollados bajo este supuesto pueden agregarse en dos grupos. El primero de ellos considera la asignación de pasajeros a “*rutas mínimas*” (ver [Chriqui, 1974](#); [Chriqui y Robillard, 1975](#); [De Cea et al., 1988](#); [De Cea y Fernández, 1989](#)), es decir, los usuarios optan por la ruta de costo percibido mínimo para alcanzar su destino. Para ello, estos modelos suponen que una ruta es un conjunto de líneas (o sucesión de ellas) que permiten a los viajeros desplazarse entre su origen y su destino a través de una única secuencia de nodos (ruta)¹.

El segundo grupo, basado en suponer que los viajeros pueden optar por un conjunto de rutas (ruta generalizada) para alcanzar su destino, define la elección de ruta en términos de una “*estrategia óptima*” o “*hiper-ruta mínima*” ([Spiess, 1983](#); [Nguyen y Pallotino, 1988](#); [Spiess y Florian, 1989](#)). En estos modelos, los viajeros pueden desplazarse a través de cualquiera de las posibles secuencias de paraderos (rutas) al interior de la estrategia determinada como óptima.

Los modelos desarrollados hasta ese entonces, salvo el de [Spiess y Florian \(1989\)](#), consideran los tiempos de viaje constantes, sin reconocer que los efectos del hacinamiento y congestión en calles y paraderos podrían eventualmente alterar la elección de ruta. Luego, si entendemos la *congestión de transporte público* como el fenómeno experimentado por los usuarios en términos del aumento de su tiempo de espera producto de una oferta de transporte público insuficiente, es posible afirmar que los modelos desarrollados hasta inicio de los años '90, no la habían considerado.

¹ Ya se contaba con eficientes algoritmos para resolver el problema de rutas mínimas en redes de transporte privado.

En efecto, fueron De Cea y Fernández (1993) quienes propusieron un modelo de equilibrio basado en el concepto de ruta, que incorpora la restricción de capacidad de los vehículos y con ello el fenómeno de la congestión, pero manteniendo constantes los tiempos de viaje en vehículo. De igual modo, en Wu *et al.* (1994), Bouzaïene-Ayari *et al.* (1995), Cominetti y Correa (2001) y Cepeda *et al.* (2006) desarrollan modelos de equilibrio bajo el concepto de estrategias óptimas o hiper-rutas mínimas, en los cuales tanto los tiempos de viaje en vehículos como los de espera son dependientes de la demanda.

En una línea distinta, y bajo la premisa de que no es posible que todos los pasajeros tengan una percepción idéntica y precisa de los costos de cada ruta, se desarrollaron los modelos estocásticos de equilibrio. En efecto, Lam *et al.* (1999) propusieron probablemente el primer modelo estocástico de asignación basado en el modelo logit multinomial para las redes de transporte público con congestión. Posteriormente, este tipo de modelos estocásticos siguió desarrollándose con Nielsen (2000); Lam y Xie (2002); y Yang y Lam (2006). Recientemente y en esta misma línea, Cortés *et al.* (2012) proponen una extensión estocástica del modelo de equilibrio de Cominetti y Correa (2001) y Cepeda *et al.* (2006), en donde los pasajeros no buscan minimizar el tiempo esperado de viaje para alcanzar su destino, sino que abandonan cada parada según distribuciones de probabilidad de abordar los buses de cada línea, las cuales dependen de la diferencia entre el tiempo de viaje en ella y el tiempo total esperado de viaje.

Existe por otro lado una significativa, pero menor cantidad de investigación en términos de la modelación de los tiempos de espera. Una de las líneas de investigación en esta materia, iniciada por Welding (1957) y Holroyd y Scraggs (1966), dice relación con el análisis de las variaciones estocásticas de los intervalos de arribo de los buses, la que más tarde fue continuada por Osuna y Newell (1972) y Marguier y Ceder (1985). Asimismo, un análisis del problema orientado a la determinación de los largos medios de cola se hace en Powell (1986).

La capacidad limitada de los buses fue planteada y desarrollada por Gendreau (1984), analizando sus efectos en la distribución de los pasajeros (comportamiento local) y en los tiempos de espera. Trabajos posteriores en esta línea de investigación fueron hechos por Bouzaïene-Ayari *et al.* (2001); Cominetti y Correa 2001, Cepeda (2002) y Cepeda (2006).

2.2 MODELACIÓN DEL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN

Existen diversas formas de agrupar los distintos modelos de asignación de transporte público, dependiendo del aspecto elegido para mostrar sus diferencias. Una clásica forma de segmentar dichos modelos de asignación es distinguir los del tipo “*todo o nada*” y los del tipo “*rutas múltiples*”. Otra forma podría ser distinguirlos entre “*determinísticos*” y “*estocásticos*”. También, y al igual que en la sección anterior, es posible encontrar artículos que presentan la diferenciación en términos de aquellos contruidos sobre los conceptos de “*ruta*” o “*estrategia*”.

Los modelos de asignación denominados del tipo “*todo o nada*” suponen que todos los viajeros que se desplazan entre un par de zonas origen-destino usan la misma ruta, aquella de costo percibido mínimo (Dial, 1967; Fearnside y Draper, 1971). Dicha ruta, definida por una secuencia de nodos constituida por el nodo inicial, nodos de transferencia (si los hay) y nodo final, define

una secuencia de secciones de ruta. En cada una de ellas, se debe determinar el conjunto de líneas comunes constituido por aquellas líneas efectivamente usadas. Dicho procedimiento evolucionó, mediante el análisis del tiempo de espera, desde el concepto de “*itinerario mínimo*” hasta la “*minimización del tiempo esperado de viaje*” (ver Le Clerq, 1972; Chriqui, 1974; Chriqui y Robillard, 1975).

La evaluación de los modelos del tipo “*todo o nada*” no fue positiva, por cuanto no eran capaces de reproducir correctamente las asignaciones entre rutas alternativas observadas en la práctica. Ello, sumado al hecho de que los viajeros no tienen una percepción perfecta del costo generalizado de cada alternativa disponible, generó en su oportunidad la aparición de los llamados modelos de asignación a “*rutas múltiples*”, es decir, modelos en los que se asume que el flujo desde una zona origen a una zona destino se distribuye a través de un *conjunto de rutas* razonables.

Sin embargo, el particular nacimiento de los modelos de “*rutas múltiples*” fue más bien una respuesta a las limitaciones de los modelos de tipo “*todo o nada*” en relación con los problemas de agregación espacial y de acceso. En efecto, varios modelos fueron propuestos bajo esta óptica, en particular, Chriqui (1974) resolvió dichos problemas transformando la matriz de viajes entre zonas origen-destino en una matriz de viaje entre nodos de la red. Más tarde, Last y Leak (1976) y De Cea y Chapleau (1984) recogen la idea antes mencionada y desarrollan procedimientos de acceso basados en el modelo de dispersión logit.

Cabe destacar que, a pesar de que en estos modelos los viajes entre zonas origen-destino se realizan por diversas rutas entre nodos de la red, la asignación particular entre cada par de nodos de la red es hecha de acuerdo al clásico modelo “*todo o nada*”. En consecuencia, es posible afirmar que el nacimiento de los modelos de asignación a rutas múltiples fue, en una primera instancia, el resultado de una metodología de acceso múltiple y no de una modificación a la concepción filosófica de dichos modelos.

El posterior desarrollo de este tipo de modelos (basados en el concepto de rutas), fue generado por De Cea *et al.* (1988, 1989) quienes proponen un modelo de asignación a *Rutas Mínimas* en redes de transporte público. Específicamente, dicho modelo se construye sobre una red virtual en la cual las líneas de transporte público están representadas a través de secciones de ruta. Dicha red es $G(N,S)$, donde N ($N=N' \cup Z$) representa el conjunto de nodos (N') y centroide de zonas (Z), y S ($S=S' \cup A$) representa el conjunto de secciones de ruta (S') y arcos de acceso (A). Las Figuras N°2-1a y 2-1b ilustran la red real y virtual para un ejemplo sencillo.

Existen además otros *métodos de asignación* que podrían clasificarse como del tipo “*rutas múltiples*”, en particular el método de asignación propuesto por Andreasson (1976), posteriormente redefinido por Hasselström (1981) y finalmente mejorado por Jansson y Ridderstolpe (1992), enumera cada una de las rutas y determina cuales de ellas son atractivas, asignando los viajes a través de complejas reglas heurísticas. La asignación, según se reporta, entrega buenos resultados en la práctica a pesar de asignar los flujos entre pares origen-destino en forma separada y de no garantizar la optimalidad (equilibrio) del tiempo total esperado de viaje.

Figura N° 2-1a
Representación de una Red Real de Transporte Público

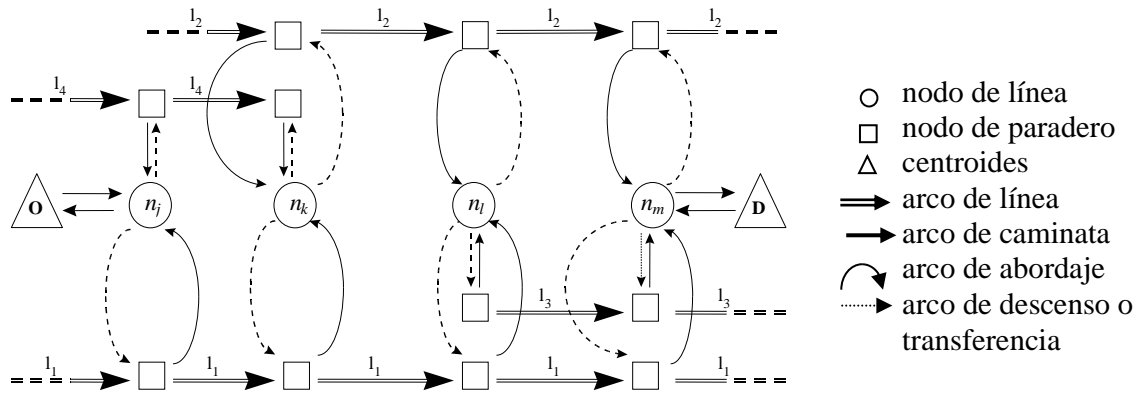
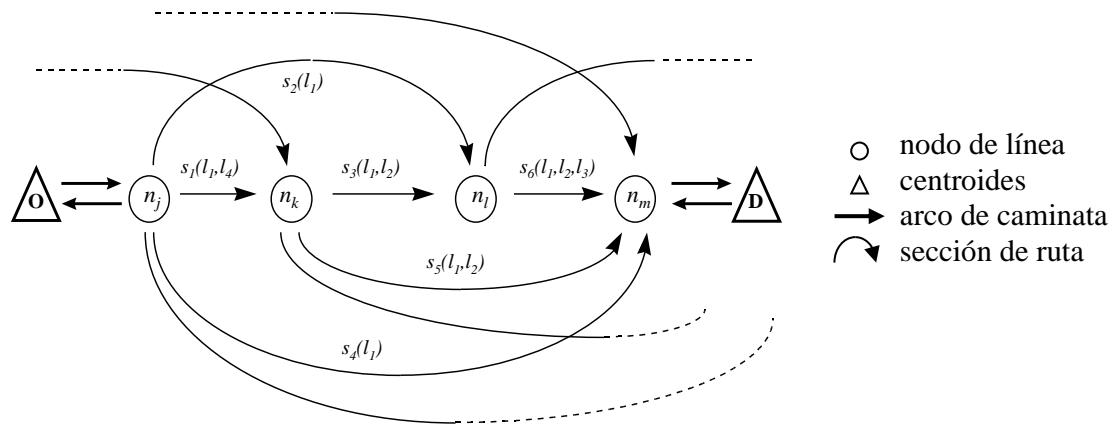


Figura N° 2-1b
Representación de la Red Virtual de Secciones de Ruta



El nacimiento del concepto de *estrategia* fue generado por Spiess (1983) al cuestionar los supuestos usados en relación con el comportamiento de los usuarios y extender el planteamiento original de Chriqui y Robillard (1975). En particular, Spiess reconoce que podrían existir viajeros que, por ejemplo, elijan un set de rutas para alcanzar su destino y aborden el primer vehículo que arribe y que pertenezca a alguna de las líneas que utilicen dichas rutas. Luego, sólo una vez a bordo del vehículo el usuario sabe exactamente la ruta que seguirá.

El concepto de *estrategia* dio origen paralelamente a dos formulaciones de modelos de asignación. Spiess y Florian (1989) generan el modelo de asignación a “*estrategias óptimas*” y Nguyen y Pallotino (1988) desarrollan un modelo de asignación a “*hiper-rutas mínimas*”. Cabe destacar que, si bien estos modelos permiten el desplazamiento entre pares origen-destino a través de varias rutas y podrían, por lo tanto, clasificarse en modelos del tipo “*rutas múltiples*”, se debe tener presente que tanto su generación como posterior desarrollo obedecen supuestos completamente diferentes en relación con el comportamiento del usuario.

Los modelos de Chriqui (1974) y Chapleau (1974), Spiess y Florian (1989) y De Cea y Fernández (1989) dieron origen a los softwares TRANSCOM, EMME/2 y ARTP respectivamente, los cuales fueron ampliamente utilizados por diversas entidades gubernamentales como herramientas de planificación. Sin embargo, algunas aplicaciones en la ciudad de Santiago de Chile (De Cea y Fernández, 1988; 1996) mostraban entre sus resultados porcentajes no despreciables de segmentos de línea transportando cantidades de pasajeros mayores a su capacidad.

En efecto, una de las reconocidas limitaciones de los modelos desarrollados hasta inicios de la década de los 90' era el no considerar los efectos de congestión producto de la capacidad restringida de los buses. De este modo, los tiempos de viaje y espera experimentados por los usuarios eran independientes del flujo en la red, por lo que los modelos podían ser planteados en términos de simples Problemas de Programación Lineal (PPL), con eficientes algoritmos de solución.

Luego, si entendemos la congestión de transporte público como el fenómeno experimentado por los usuarios en términos del aumento de su tiempo de espera producto de una oferta de transporte insuficiente, es posible afirmar que este aspecto fue incorporado en los modelos de asignación de pasajeros a líneas, sólo en los últimos veinte años. A continuación se presenta la descripción y análisis de los desarrollos más relevantes en lo que a modelos de asignación de pasajeros y análisis del tiempo espera se refiere, en los cuales se incorpora la restricción de capacidad de los buses y sus efectos tanto en el comportamiento de los usuarios como en la modelación de la asignación.

2.3 MODELOS DE ASIGNACIÓN DE PASAJEROS

2.3.1 De Cea Joaquín y Fernández José E. (1993)

Basados en el concepto de *ruta*, De Cea y Fernández presentan la formulación y solución de un modelo de equilibrio para resolver el problema de asignación de pasajeros en un sistema congestionado. Los autores interpretan la congestión como el fenómeno experimentado por los usuarios en su tiempo de espera, cuando el volumen de viajes en el sistema se aproxima a la capacidad del mismo. Para ello, suponen que todos los viajeros que se desplazan entre un origen y un destino eligen la ruta de costo percibido mínimo (ruta mínima).

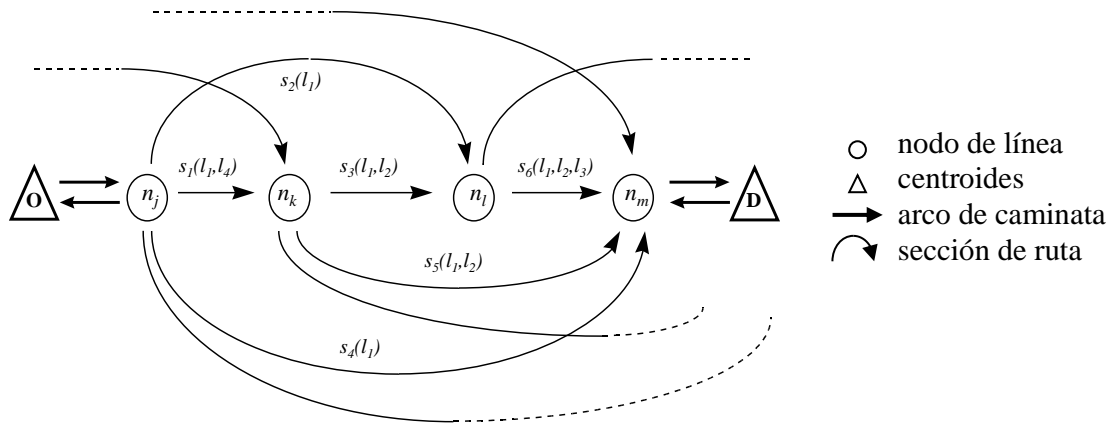
Para entender el modelo es necesario remitirse a la definición de ruta entregada por De Cea *et al.* (1988), quién la define como una secuencia de nodos dada por el nodo inicial, nodos de transferencia (si los hay) y nodo final. En cada nodo de la ruta, existirá un *conjunto de líneas* que le permitirán al usuario alcanzar el nodo siguiente.

De este modo, al definir la *sección de ruta* s como el arco ficticio entre dos nodos consecutivos de una ruta, se estará considerando sobre ella el conjunto (A_s) de líneas disponibles. Sin embargo, el conjunto de líneas efectivamente usadas en una sección de ruta puede ser un

subconjunto (\bar{A}_s) de líneas, denominado *líneas comunes o atractivas* (ver Chriqui, 1974; Chriqui y Robillard, 1975; De Cea y Fernández, 1988).

La red de transporte público está definida por el grafo $G(N, S)$, donde N y S son los conjuntos de nodos y secciones de ruta respectivamente, como se ejemplifica en la Figura N° 2-2. La notación básica del modelo considera a W como el conjunto de pares origen-destino w asociados al grafo $G(N, S)$, mientras que $R_w \subset R$ es el conjunto de rutas r que conectan el par w .

Figura N° 2-2
Representación de la Red Transporte Público a Nivel de Secciones de Ruta



Suponiendo que las llegadas de los usuarios a los paraderos son aleatorias, los autores reconocen que, cuando la capacidad del sistema es limitada, el tiempo de espera w^s asociado a la sección de ruta s dependerá de la capacidad disponible k_l de sus líneas comunes y que, si eventualmente una línea pertenece a más de una sección de ruta, éste tiempo de espera dependerá también de la cantidad de usuarios en aquellas secciones de ruta.

En consecuencia, los autores asumen que el fenómeno de la congestión, en una red de transporte público, está concentrado en los paraderos. De este modo, la función de costo (c_s) en la sección de ruta s , está dada por siguiente expresión:

$$c_s = t_s + \frac{\alpha}{f_s} + \beta \left(\frac{V^s + \tilde{V}_s}{K_s} \right)^n \quad \forall s \in S \quad (2.1)$$

donde el término (t_s) corresponde al tiempo o costo fijo (incluye tarifa) abordaje de los vehículos, y el resto de los términos representa el tiempo de espera, con α, β y n parámetros a calibrar. Cabe destacar que la frecuencia total (f_s) de la sección de ruta s_2 corresponde a la suma de las frecuencias (f_l) de sus líneas comunes:

$$f_s = \sum_{l \in A_s} f_l \quad \forall s \in S. \quad (2.2)$$

El segundo término del tiempo de espera modela explícitamente el incremento de éste, en función del número de usuarios (V^s) que intenta abordar cualquiera de las líneas comunes contenidas en la sección de ruta s , del número de pasajeros (\tilde{V}_s) abordado de estas líneas en secciones de ruta anteriores o paralelas y de la capacidad práctica (K_s) total de la sección de ruta s . En particular, el término \tilde{V}_s puede escribirse de la forma:

$$\tilde{V}_s = \sum_{l \in s} \left[\sum_{j \in S_s^+} v_l^j + \sum_{j \in \bar{S}_s} v_l^j \right] = V_s^+ + \bar{V}_s \quad \forall s \in S \quad (2.3)$$

donde V_s^+ es número total de pasajeros que abordan, en el nodo inicio $i(s)$ de la sección de ruta s , todas las otras secciones de ruta que posean líneas contenidas en la sección de ruta s ; \bar{V}_s es el número de pasajeros que abordaron todas las líneas pertenecientes a la sección de ruta s en un nodo anterior a $i(s)$ para bajarse después de $i(s)$; S_s^+ es el conjunto de todas las secciones de ruta (excepto s) que salen de $i(s)$ y, finalmente, \bar{S}_s es el conjunto de secciones de ruta que comienzan antes de $i(s)$ para terminar después.

El problema de encontrar el conjunto de líneas comunes al interior de una sección de ruta fue anteriormente resuelto por [Le Clerq \(1972\)](#), quien supuso que todas las líneas que unen un par de nodos son equivalente en ese tramo. Más tarde, [Chriqui \(1974\)](#) plantea que este subconjunto de líneas es aquel que minimiza el costo o tiempo esperado de viaje (movimiento + espera). Finalmente, [Chriqui y Robillard \(1975\)](#) proponen un algoritmo simple para el desarrollo general hecho previamente por [Robillard \(1971\)](#), con el que resuelven el problema de programación hiperbólica asociado a una sección de ruta que une un par de nodos, para el caso en que tanto los tiempos de viaje como las frecuencias de las líneas son constantes, esto es:

$$\text{Min } T.V. \equiv \text{Min}_{\substack{x_l=1 \Rightarrow l \in \bar{A}_s \\ x_l=0 \Rightarrow l \notin \bar{A}_s}} \left\{ \frac{\sum_{l \in A_s} t_l f_l x_l}{\sum_{l \in A_s} f_l x_l} + \frac{1}{\sum_{l \in A_s} f_l x_l} \right\} \Rightarrow T_{A_s}^- + W_{A_s}^- \quad (2.4)$$

donde los términos del problema de minimización son los valores esperados de los tiempos de viaje y de espera respectivamente. Se debe notar que los modelos de [Le Clerq \(1972\)](#) y [Chriqui y Robillard \(1975\)](#), suponen que en cada etapa de un viaje (sección de ruta) los usuarios abordan el primer vehículo perteneciente al conjunto de líneas comunes que arriba al paradero. Además, estos modelos asumen que los tiempos de espera ω_l , asociados a las líneas $l \in A_s$ son variables aleatorias independientes con media $(f_l)^{-1}$, distribuidas exponencialmente.

En el caso interesante de existencia de congestión, habrá vehículos que arriben a los paraderos con una capacidad menor que la cantidad usuarios que desean abordarlos. Debido a esto último, [De Cea y Fernández](#) introducen el concepto de *frecuencia efectiva*, la que para el caso de una línea (f_l'), es menor o a lo sumo igual que su frecuencia nominal (f_l).

De este modo, la frecuencia efectiva $f_l^{i,s}$ de una línea l , en el nodo inicio $i(s)$ de la sección de ruta s , dependerá de la tasa de ocupación de ésta, la que a su vez es función de su capacidad (k_l) y del número de pasajeros v_{il}^s que la abordaron antes de $i(s)$ para bajarse después de $i(s)$. Así, al aumentar la congestión, la frecuencia efectiva se reduce incrementando los tiempos de espera e induciendo la probable incorporación, al conjunto de líneas comunes, de otras que inicialmente no lo eran.

Los autores definen en forma consecuente el tiempo de espera (ω_l^i) para una línea l en el nodo $i(s)$ en condiciones de congestión y proponen la forma de su frecuencia efectiva:

$$\omega_l^i = \frac{\alpha_l}{f_l} + \beta_l \left(\frac{\tilde{v}_{il}}{f_l k_l} \right)^n \Rightarrow f_l^{i,s} = \frac{\alpha_l}{\omega_l^i} \wedge f_s' = \sum_{l \in \bar{A}_s} f_l^{i,s} x_l^s = \sum_{l \in \bar{A}_s} f_l^{i,s} \quad \forall s \in S \quad (2.5)$$

La asignación de pasajeros a cada una de las líneas de una sección de ruta s es hecha suponiendo que no existe coordinación entre los intervalos de arribo de los buses de las distintas líneas y que los usuarios abordan el primer bus -del conjunto de líneas comunes- que arriba con capacidad disponible. De este modo, la asignación a cada línea se determina en forma proporcional a su frecuencia efectiva e inversamente proporcional a la frecuencia efectiva de la sección de ruta a la cual pertenece.

$$v_l^s = \begin{cases} \frac{f_l^{i,s}}{f_s'} V^s & \forall l \in \bar{A}_s \\ 0 & \forall l \notin \bar{A}_s \end{cases} \quad (2.6)$$

De este modo, si una línea pertenece al conjunto de líneas comunes de una sección de ruta, al aumentar la congestión seguirá perteneciendo, pues $f_l^{i,s} > 0$. Luego, al definir el tiempo de espera promedio para abordar cualquiera de las líneas de una sección de ruta (ω^s) como el inverso de su frecuencia efectiva, la ecuación (2.6) puede reescribirse de la forma:

$$v_l^s = f_l^{i,s}(\nu) \omega^s(\nu) x_l^s(\nu) V^s \quad \forall l \in \bar{A}_s, s \in S \quad (2.7)$$

Además, si $T = \{T_w\}$ es el vector demandas en los pares $w \in W$, h_r el flujo de pasajeros en la ruta $r \in R$ y v_l^s la cantidad de pasajeros en la línea l de la sección de ruta s , entonces el conjunto de flujos factibles $\{v_l^s\} \in \Omega$ queda definido por las ecuaciones:

$$T_w = \sum_{r \in R_w} h_r \quad \forall w \in W \quad (2.8)$$

$$V^s = \sum_{r \in R} h_r \delta_{rs} \quad \forall s \in S \quad (2.9)$$

$$v_l^s = f_l^{i,s}(\nu) \omega^s(\nu) V^s \quad \forall l \in \bar{A}_s \subseteq A_s, s \in S \quad (2.10)$$

donde $\delta = [\delta_{rs}]$ es la matriz de incidencia ruta – arco (sección de ruta). La ecuación (2.8) muestra la clásica restricción de conservación de flujos por rutas, en tanto que la ecuación (2.9) establece

la relación entre los flujos por ruta y sección de ruta. Finalmente, la ecuación (2.10) reproduce la asignación de flujos a las líneas comunes en las secciones de ruta.

Para resolver el problema de líneas comunes en un sistema congestionado, la utilización de las frecuencias nominales en la ecuación (2.4) en general no ser correcto. Ello, por cuanto a diferencia de lo observado por [De Cea y Fernández \(1988\)](#), no es posible encontrar los conjuntos de líneas comunes en las secciones de ruta y los flujos de equilibrio en forma separada, pues la determinación del conjunto de líneas comunes depende del nivel de congestión (flujos) y, a su vez, la asignación de flujos es función de las frecuencias efectivas de las líneas comunes.

Los autores resuelven el problema probando que el subconjunto de líneas comunes es monótonamente creciente con el flujo. De esta forma, discretizan el conjunto de líneas atractivas en subconjuntos de líneas comunes, generando arcos paralelos entre cada par de nodos consecutivos. Las líneas finalmente usadas están predefinidas en los conjuntos discretos y el flujo total que usa cada uno de estos arcos resulta de la asignación de equilibrio. Si bien no es un objetivo que se plantean los autores, la metodología descrita no asegura que el resultado de equilibrio en el sistema corresponda también a una situación de equilibrio en cada sección de ruta.

La asignación de los flujos, en el estado de equilibrio, satisface las condiciones de [Wardrop \(1952\)](#) sobre la red, de forma tal que el costo C_r de todas las rutas efectivamente utilizadas sea mínimo.

$$C_r \begin{cases} = u_w & , \quad \forall r \in R_w \setminus h_r > 0; \\ > u_w & , \quad \forall r \in R_w \setminus h_r = 0; \end{cases} \quad \forall w \in W \quad (2.11)$$

Finalmente, la formulación del equilibrio es expresada en términos de una desigualdad variacional ([Florian y Spiess, 1982](#)), en la que intervienen los vectores de flujo y costos por secciones de ruta, donde V^* representa la solución de equilibrio:

$$c(V^*)(V^* - V) \leq 0 \quad \forall V \in \Omega \quad (2.12)$$

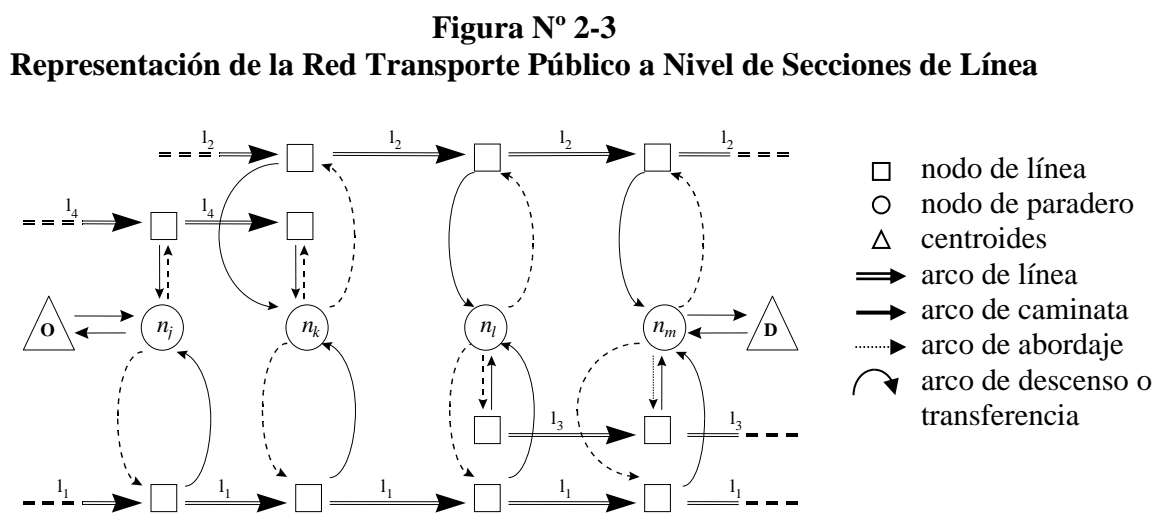
El artículo presenta dos alternativas para resolver el problema. La primera considera la linealización de la restricción de asignación, suponiendo que los pasajeros se asignan a las líneas de acuerdo a sus frecuencias nominales. De este modo, la congestión es sólo considerada en el incremento del tiempo de espera, luego, es usado el método de diagonalización ([Florian y Spiess, 1982](#)) para resolver el problema en forma iterativa, cuya convergencia descansa en la condición de monotonía asegurada por la forma potencial de los costos en las secciones de ruta (ecuación 2.1). La segunda alternativa se basa en que el problema planteado (2.12) se diferencia, de un típico problema de asignación de tráfico con funciones de costo asimétricas, en la no-linealidad de la restricción (2.10), la cual es posible separar para resolver el problema como uno de asignación de tráfico en las variables V^s usando el mismo algoritmo de diagonalización. Sin embargo, la demostración formal de la convergencia y la unicidad de la solución no es provista.

2.3.2 Wu Jia Hau, Florian Michael y Marcotte Patrice (1994)

Los autores definen su trabajo como la extensión no lineal del modelo de asignación a estrategias óptimas (Spiess, 1983; Spiess y Florian, 1989) con funciones de costo (tanto de espera como de viaje) asimétricas dependientes del flujo, cuya formulación está basada en el concepto de estrategia o *hiper-ruta*. Para analizar el modelo es necesario entender la definición de *estrategia* entregada por Spiess (1983), quien la expone como un conjunto de reglas determinísticas que, al ser aplicadas nodo a nodo, permiten al viajero alcanzar su destino por alguna ruta. Tales reglas definen los principios del comportamiento de los usuarios:

- i. cada pasajero considera un conjunto de líneas atractivas para salir de los paraderos posiblemente visitados durante su viaje.
- ii. en cada parada visitada, los pasajeros abordan el primer bus, del conjunto de líneas atractivas, que arriba con capacidad disponible.

La posibilidad de tomar decisiones en cada uno de los posibles nodos de transferencia expande la red a un nivel de *sección de línea*, entendiéndola como un arco ficticio que es servido por sólo una línea entre dos nodos de líneas consecutivos. En este contexto, la red de transporte público queda definida por el grafo $G(N,A)$, donde A representa el conjunto de arcos y N el conjunto de nodos de líneas, de transferencia y centroides. A su vez, el conjunto A posee arcos de cuatro tipos: de vehículos (secciones de línea), de espera, de acceso y de transferencia, como se ejemplifica en la Figura N° 2-3.



El modelo de asignación a estrategias óptimas (Spiess y Florian, 1989) considera, en su versión simplificada, que los tiempos (costos) asociados a los arcos de espera y segmentos de línea, son constantes y conocidos. Además, cada nodo de línea es servido por sólo una línea con una distribución de sus intervalos de arribo conocida, con la que se construye el valor esperado y la distribución del tiempo de espera asociado a los arcos de espera con el que se accede a dicha línea. Luego, el usuario define una estrategia especificando, en cada nodo de transferencia (excepto en el destino), un conjunto no vacío de líneas atractivas con reglas de distribución y, para cada una de ellas, el nodo en el cual se baja.

Las reglas de asignación permiten alcanzar el destino desde cualquier nodo de la red. Una estrategia k , que conecta el origen p con el destino q , es un subgrafo acíclico $G^k(N^k, A^k)$ que permite alcanzar, desde el origen, el destino deseado por diversas rutas. En dicho subgrafo, los arcos divergentes existen sólo en los nodos de transferencia (paraderos). Así, los autores sostienen que la *estrategia óptima* será el subgrafo que minimice el tiempo esperado de viaje. De esta forma, es posible establecer una relación de *equivalencia* entre estrategia e hiper-ruta basada en la teoría de grafos (Nguyen y Pallotino, 1988).

El modelo supone que cada arco $a \in A$ tiene asociado dos atributos, una función de costo de viaje $s_a(v)$ y una frecuencia f_a . Los arcos de espera tienen asociada la frecuencia de la línea a la cual acceden, el resto posee frecuencia infinita. Luego, si se define $\alpha_{t(a)}^k$ como la proporción del flujo de la hiper-ruta k que llega al nodo inicial del arco a ($t(a) \in N$) y p_a^k como la probabilidad de elección del arco a , entonces, la regla de distribución sobre la red satisface las siguientes condiciones:

$$\alpha_p^k = \alpha_q^k = 1 \quad (2.13)$$

$$\delta_a^k = \alpha_{t(a)}^k p_a^k \quad ; \quad \sum_{a' \in F_{t(a)}^k} p_{a'}^k = 1 \quad \forall a \in A^k \quad (2.14)$$

$$\alpha_{h(a)}^k = \sum_{a' \in B_{h(a)}^k} \alpha_{t(a')}^k p_{a'}^k \quad \forall a \in A^k \quad (2.15)$$

donde $h(a)$ es el nodo final del arco a , δ_a^k es la proporción del flujo de la hiper-ruta k que pasa por el arco a , $F_{t(a)}^k$ es conjunto de arcos pertenecientes a la estrategia k cuyo nodo de inicio es $t(a)$ y $B_{h(a)}^k$ es el conjunto de arcos pertenecientes a la estrategia k cuyo nodo final es $h(a)$. Luego, el costo de la hiper-ruta k (S_k) será la suma de los costos de todos los arcos, ponderados por la proporción de flujo de la hiper-ruta que los usa:

$$S_k = \sum_{a \in A} \delta_a^k [s_a(v) + \omega_{ak}] \quad (2.16)$$

$$= \sum_{a \in A} \delta_a^k [s_a(v) + \omega_a p_a^k] \quad (2.17)$$

donde ω_{ak} es el tiempo de espera en el arco de espera a asociado a la hiper-ruta k . Se observa que todos los arcos tienen asociado un costo $s_a(v)$ variable con el nivel de flujo (que no depende de la hiper-ruta) y un costo de espera ω_{ak} (que depende de la hiper-ruta). Este último, será nulo cuando se trate de un arco de vehículos (línea) o de acceso (caminata o abordaje), puesto que siempre es posible asignarles frecuencia infinita.

De este modo, las probabilidades de elección de línea (reglas de distribución) desde un determinado nodo de transferencia, están dadas por las proporciones entre las frecuencias, de los arcos de espera pertenecientes a la hiper-ruta, asociados al conjunto de líneas a las cuales se tiene acceso desde aquel nodo, esto es:

$$p_a^k = \frac{f_a}{\sum_{a' \in F_{t(a)}^k} f_{a'}} \quad ; \quad \omega_a = \frac{1}{f_a} \quad \forall a \in A^k \quad (2.18)$$

La expresión anterior (Spiess y Florian, 1989) supone, tal como se mencionó en la descripción del modelo anterior, que los arribos de los buses de las distintas líneas no son coordinados y que los pasajeros abordan el primer bus que arribe del conjunto de arcos de espera definido por $a \in F_{t(a)}^k$.

Sin embargo, es necesario destacar que el método de asignación representado por las probabilidades de elección (2.18) no varía con el nivel de flujo. Ello, puede ser un supuesto poco realista si se reconoce que la congestión podría no afectar a todas las líneas en la misma proporción, independiente de si tales diferencias son producidas por las demandas de las líneas o simplemente por distintas capacidades de los buses.

Por otro lado, la definición de las funciones de costos y frecuencias, usada por los autores en los distintos tipos de arco, es la siguiente:

- Arcos de Acceso: Se supone que el costo de caminata no depende del flujo y está dado por una constante positiva (valoración) amplificando el tiempo de acceso, de la forma:

$$s_a = \alpha_1 t \quad ; \quad f_a = \infty \quad (2.19)$$

- Arcos de Espera: Se supone que el costo de los arcos de espera depende del número de usuarios que desea abordar la línea asociada (v_a), del número de pasajeros que siguen directo en el bus (v_d) y de la capacidad de la línea a la cual se accede desde dicho arco, de la forma:

$$s_a(v_a, v_d) = \alpha_2 \left[\frac{v_a + \beta_2 v_d}{K_b} \right]^\rho \quad ; \quad f_a \neq \infty \quad ; \quad K_b = f_a k_b \quad (2.20)$$

donde $0 \leq \beta_2 \leq 1$. Además si v_b es el flujo en el vehículo una vez que abandona $t(a)$, entonces $v_b = v_a + v_d$ y la ecuación (2.20) puede reescribirse como:

$$s_a(v_a, v_b) = \alpha_2 \left[\frac{(1 - \beta_2) v_a + \beta_2 v_b}{K_b} \right]^\rho \quad (2.21)$$

- Arcos de Línea o en Vehículos: Se supone que los costos de las secciones de línea están compuestos por dos términos. El primero es el tiempo de viaje (t_b) en movimiento, que es independiente del nivel de flujo, el segundo es una expresión de disconfort que depende de los pasajeros que siguen directo (v_d), de los que esperan (v_a) y de la capacidad de la línea, de la forma:

$$s_b(v_a, v_d) = \alpha_3 t_b + \beta_3 \left[\frac{v_d + \gamma_3 v_a}{K_b} \right]^\rho ; f_b = \infty ; K_b = f_a k_b \quad (2.22)$$

donde $0 \leq \gamma_3 \leq 1$. Además si v_b es el flujo en el vehículo una vez que abandona $t(a)$, entonces $v_b = v_a + v_d$ y la ecuación (2.22) puede reescribirse como:

$$s_b(v_a, v_b) = \alpha_3 t_b + \beta_3 \left[\frac{v_b + (\gamma_3 - 1)v_a}{K_b} \right]^\rho \quad (2.23)$$

- Arcos de Transferencia: Se supone que el costo en este tipo de arcos no depende del flujo y está dado por una constante positiva amplificando este tiempo de transferencia, de la forma:

$$s_a = \alpha_4 t_a ; f_a = \infty \quad (2.24)$$

Retomando la formulación, las ecuaciones (2.16) y (2.17) pueden ser rescritas como se muestra en (2.25), donde δ^k es la k -ésima columna de la matriz de incidencia arco/hiper-ruta, $s(v)$ es el vector de costos en arcos y ω^k es la k -ésima columna de la matriz de demoras (arco/hiper-ruta) con elementos ω_{ak} .

$$S_k = (\delta^k)^T [s(v) + \omega^k] \quad (2.25)$$

Así, el conjunto de flujos factibles $\{h_k\} \in \Omega$ a nivel de hiper-rutas queda definido por:

$$g_i = \sum_{k \in K_i} h_k , h_k \geq 0 \quad k \in K_i \quad \forall i \in I \quad (2.26)$$

donde g_i es la demanda asociada al par $i \in I$ y K_i el conjunto de estrategias que conectan los centroides asociado al par i . La distribución de los flujos, en el estado de equilibrio, satisface las condiciones de [Wardrop \(1952\)](#) sobre la red, de forma tal que el costo de todas las hiper-rutas usadas sea mínimo y único.

$$S_k \begin{cases} = u_i^* & , h_k > 0 \\ \geq u_i^* & , h_k = 0 \end{cases} \quad \forall k \in K_i , i \in I \quad (2.27)$$

donde u_i^* es el costo mínimo asociado al par i y S_k es el costo de equilibrio sobre la hiper-ruta k . Finalmente, el equilibrio es expresado en términos de la desigualdad variacional.

$$VIP(\Omega, S) : S(h^*)^T (h - h^*) \geq 0 , \quad \forall h \in \Omega \quad (2.28)$$

$$\Leftrightarrow s(v^*)^T (v - v^*) + W^T (h - h^*) \geq 0 , \quad \forall v \in \Omega_v \wedge \forall h \in \Omega \quad (2.29)$$

donde h^* y v^* son las distribuciones de los flujos en el estado de equilibrio al nivel de hiper-ruta y arcos respectivamente; Ω_v es el conjunto de flujos factibles al nivel de arcos y W es el vector de tiempos de espera de las hiper-rutas:

$$\Omega_v = \{v \mid v = \delta h, \quad h \in \Omega\} \quad (2.30)$$

$$W_k = \sum_{a \in A} \delta_{ak} \omega_{ak} = (\delta^k)^T \omega^k \quad (2.31)$$

El modelo tiene como característica especial el que la desigualdad variacional no puede ser expresada como un problema sólo en el espacio de los flujos en arcos. Asimismo, si la función $s(v)$ es continua y Ω es compacto y convexo, entonces existe al menos una solución u^* al $VIP(\Omega, S)$ y, si $s(v)$ es estrictamente monótona, entonces v^* y $W^T h^*$ son únicos.

Los autores usan un método de linealización simétrico para resolver el problema, el que dependiendo del tipo de simetrización se puede convertir en el método de linealización de Jacobi o en el método de proyecciones. Finalmente, los autores muestran la convergencia de los algoritmos asociados a los dichos métodos cuando los costos en los arcos son fuertemente monótonos.

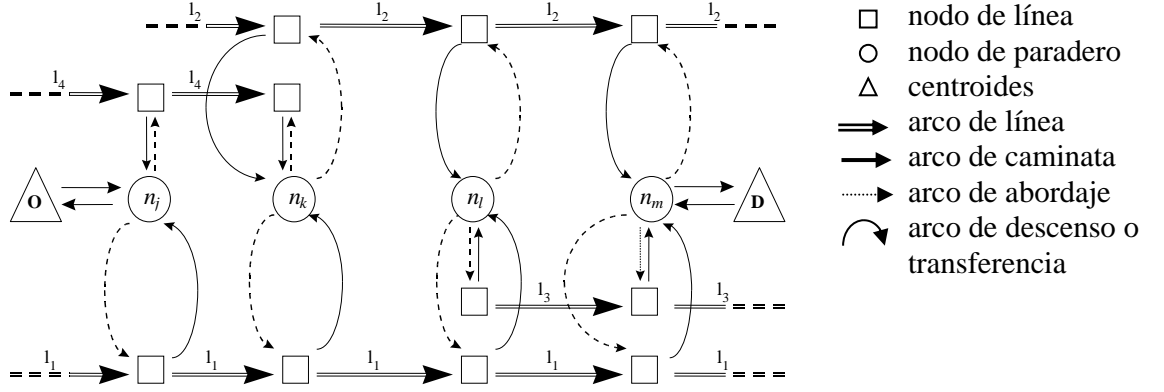
2.3.3 Bouzaiene-Ayari Belgacem, Gendreau Michel y Nguyen Sang (1995)

El trabajo presentado por los autores intenta incorporar, a la formulación del problema de asignación de pasajeros a líneas desarrollado por [Nguyen y Pallotino \(1988\)](#), los aspectos formales en lo que a restricción de capacidad se refiere. El concepto sobre el cual trabajan es la *hiper-ruta* ([Nguyen y Pallotino, 1988](#)) que es definida como la aplicación de las probabilidades de elección a los distintos arcos que conforman una estrategia.

Al igual que en el modelo de [Wu, Florian y Marcotte \(1994\)](#), la red de transporte público queda definida por el grafo $G(N, A)$, donde A es el conjunto de arcos y N el conjunto de nodos. El conjunto de nodos contiene los nodos de líneas (N^T), de parada (N^B) y centroides. Asimismo, el conjunto de arcos contiene arcos de líneas (A^O), de abordaje o de espera (A^B) y de caminata, como se ejemplifica en la Figura N°2-4.

Los costos asociados a los arcos de abordaje representan el tiempo de espera asociado a la línea que conectan y se denotan por W_{ij} ($(i, j) \in A$), a su vez, los costos asociados al resto de los arcos se denotan por C_{ij} . Cabe destacar que, en ambos casos, los costos son dependientes del flujo.

Figura N° 2-4
Representación de la Red Transporte Público al Nivel de Secciones de Línea



El modelo considera un conjunto K de pares origen-destino asociados al grafo $G(N,A)$, y P_k el conjunto de hiper-rutas p que conectan el par $k \in K$. Cada hiper-ruta $p \in P_k$ define un subgrafo $G_p(N_p, A_p)$ que contiene un conjunto de rutas simples Q_p asociadas a k . El vector de demandas de viajes es finito, conocido y se denota $D = \{d_k\}$, luego, si el espacio de vectores de flujos factibles sobre las hiper-rutas es Ω_y , entonces un vector $y = \{y_p^k\}$ pertenece a Ω_y si satisface:

$$\sum_{p \in P_k} y_p^k = d_k, \quad \forall k \in K \quad (3.32)$$

$$y_p^k \geq 0, \quad \forall p \in P_k, \quad k \in K. \quad (3.33)$$

Por otro lado, el espacio de vectores de flujos factibles sobre los arcos es Ω_v , de este modo, un vector $v = \{v_a\}$ pertenece a Ω_v si existen un vector $y = \{y_p^k\} \in \Omega_y$, un vector de flujo arco-hiper-ruta $V = \{v_{ap}^k\} \in \Omega_{VY}$ y un vector de flujo ruta-hiper-ruta $z = \{z_{pq}^k\} \in \Omega_z$ tales que:

$$\sum_{q \in Q_p} z_{pq}^k = y_p^k \quad \forall p \in P_k, \quad \forall k \in K \quad (3.34)$$

$$z_{pq}^k \geq 0 \quad \forall q \in Q_p, \quad \forall p \in P_k, \quad \forall k \in K \quad (3.35)$$

$$y = \{y_p^k\} \in \Omega_y \quad (3.36)$$

$$v_{ap} = \sum_{q \in Q_p} \delta_{aq}^k z_{pq}^k \quad \forall a \in A, \quad \forall p \in P_k, \quad \forall k \in K \quad (3.37)$$

$$\delta_{aq}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in q \\ 0 & \text{si } \text{no} \end{cases}, \quad \forall a \in A, \quad \forall q \in Q_p, \quad \forall k \in K \quad (3.38)$$

$$v_a = \sum_{k \in K} \sum_{p \in P_k} v_{ap}^k \quad \forall a \in A \quad (3.39)$$

donde Ω_{VY} y Ω_Z son los espacios de flujos factibles desagregados por hiper-rutas, a nivel de arcos y rutas respectivamente. Los autores asumen que los individuos se comportan de acuerdo a dos principios. El primero de ellos es el principio del **comportamiento local**, a saber:

- i. en cada parada, el usuario aborda el primer bus, de su conjunto de líneas atractivas, que arriba al paradero con capacidad disponible.*

Dada una asignación $y \in \Omega_y$, la distribución de los pasajeros sobre los arcos (v^y) está dada por algún punto fijo de la ecuación $v^y = \Psi(y, v^y)$, donde la función distribución de flujo $\Psi : \Omega_y \times \Omega_v \rightarrow \Omega_v$ es tal que, para todo $(y, v) \in \Omega_y \times \Omega_v$, se cumple que:

$$\Psi_{ij}(y, v) = \sum_{k \in K} \sum_{p \in P_k} y_p^k \alpha_{ijp}^k(v) \quad \forall (i, j) \in A \quad , \quad \forall v \in \Omega_v \quad (3.40)$$

$$\alpha_{ijp}^k(v) = \sum_{q \in Q_p} \delta_{ijpq}^k \omega_{pq}^k(v) \quad \forall (i, j) \in A \quad , \quad \forall v \in \Omega_v \quad (3.41)$$

donde $\alpha_{ijp}^k(v)$ y $\omega_{pq}^k(v)$ son las proporciones del flujo de la hiper-ruta p asociada a la demanda del par k que usa el arco (i, j) y la ruta simple $q \in Q_p$, respectivamente. Además, la distribución de los pesos de las distintas rutas sobre cada hiper-ruta es positiva, única y satisface:

$$\omega_{pq}^k(v) = \prod_{(i,j) \in q} \pi_{ijp}^k(v) \quad \forall q \in Q \quad , \quad \forall p \in P_k \quad , \quad \forall k \in K \quad (3.42)$$

$$0 < \omega_{pq}^k(v) \leq 1 \quad \forall q \in Q_p \quad tq. \quad \sum_{q \in Q_p} \omega_{pq}^k = 1 \quad \forall p \in P_k \quad , \quad \forall k \in K. \quad (3.43)$$

Para toda hiper-ruta $p \in P_k$, el vector de probabilidades de distribución $\pi_p^k(v) = (\pi_{ijp}^k(v))$ sobre los arcos asigna probabilidades en forma directamente proporcional al inverso del tiempo de espera ($W(\cdot)$) asociado a la línea a la cual se accede, para ello los autores utilizan un modelo general de congestión en el que los usuarios llegan aleatoriamente a los paraderos de acuerdo a procesos de Poisson, los intervalos de arribo de las líneas son generados por distribuciones Erlagian con medias f_l^{-1} y parámetros \mathfrak{T}_l y, la disciplina de atención corresponde a una FIFO (*first in first out*):

$$\pi_{ijp}^k(v) = \begin{cases} 1 & \forall (i, j) \in A_p / A_p^B \\ \frac{[W_{ij}(v)]^{-1}}{\sum_{l \in N_p^+} [W_{il}(v)]^{-1}} & \forall (i, j) \in A_p^B \quad N_{ip}^+ = \{ j \in N_p \mid (i, j) \in A_p \} \quad \forall i \in N_p \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.44)$$

Además, los autores asumen que los tiempos de espera sobre los arcos de abordaje asociados a líneas están dados por la función $W(\cdot) : \Omega_v \subset R^m \rightarrow R^m$, ($m = |A|$), la cual se asume continuamente diferenciable sobre Ω_v satisfaciendo:

$$\begin{cases} 0 < W_a(v) < +\infty, & \forall a \in A^B \\ W_a(v) = 0, & \forall a \in A \setminus A^B \end{cases}, \quad \forall v \in \Omega_v$$

$$\|\nabla W(v)\|_\infty < +\infty, \quad \forall v \in \Omega_v$$

Además, se asume que las líneas poseen capacidades prácticas denotadas por K_l y los costos asociados a los distintos arcos están dados por:

$$C_a(v_a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \in A^B \\ t_a \left[1 + \frac{v_a}{K_a} (\xi_1 + \xi_2 \left(\frac{v_a}{K_a} \right)^\sigma) \right] & \text{si } a \in A^O \\ t_a & \text{si } a \in A \setminus (A^O \cup A^B) \end{cases}, \quad \forall v \in \Omega_v \quad (3.45)$$

$$W_{il} = \begin{cases} \frac{1}{2f_{ij}} \left[\left(1 + \frac{1}{\mathfrak{S}_l} \right) + \left(\varphi \frac{v_{lj}}{K_{lj}} \right)^\tau \right] & (l, j) \in A^O \text{ si } (i, l) \in A^B \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}, \quad \forall v \in \Omega_v \quad (3.46)$$

donde ξ_1 , ξ_2 , σ , φ y τ son parámetros calibrados por los mismos autores a partir de modelos de distribución de pasajeros definidos con supuestos específicos (distribución Erlagian de llegada de vehículos y disciplina de atención *fifo* de los pasajeros) y cuya forma funcional, finalmente, es similar a la del modelo de frecuencias efectivas propuesto por [De Cea y Fernández \(1993\)](#).

Luego, con las propiedades ya enunciadas, para todo $(y, x) \in \Omega_y \times \Omega_v$, $\Psi(y, x)$ puede reescribirse de la forma:

$$\Psi_{ij}(y, v^y) = \sum_{k \in K} \sum_{p \in P_k} \sum_{q \in Q_p} \delta_{ijpq}^k D_{pq}^k(y, v) \quad \forall (i, j) \in A, \quad \forall v \in \Omega_v \quad (3.47)$$

$$D_{pq}^k(y, v) = y_p^k \omega_{pq}^k(v) \quad \forall q \in Q_p, \quad \forall k \in K, \quad \forall v \in \Omega_v \quad (3.48)$$

donde D_{pq}^k es la función de distribución del flujo de una hiper-ruta a través de las distintas rutas que la componen. De este modo, Ψ puede escribirse en forma compacta como:

$$\Psi(y, v) = \alpha(v)y \quad \forall v \in \Omega_v, \quad \forall y \in \Omega_y \quad (3.49)$$

donde $\alpha(v) = [\alpha_{ijp}^k(v)]_{p \in P_k, k \in K}$ es la matriz formada por los vectores de distribución arco - hiper-ruta asociados a v , $\forall v \in \Omega_v$. Por otro lado, la modelación de los tiempos de espera asociados a los costos de los arcos de abordaje, desagregados por hiper-ruta para una distribución $y = \{y_p^k\}$ dada, son computados de la forma:

$$W_{ijp}^k(v^y) = W_{ip}^k(v^y) = \begin{cases} \frac{1}{\sum_{l \in N_{ip}^+} [W_{il}(v^y)]^{-1}} & \forall (i, j) \in A_p^B \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}; \quad \forall p \in P_k, \quad \forall k \in K \quad (3.50)$$

donde v^y es un punto fijo de Ψ en $\Omega_V^y \subseteq \Omega_V$, cuya existencia es demostrada suponiendo que la función $W(\cdot)$ es continua sobre un conjunto Ω_V .

El segundo de los principios del comportamiento del usuario, es el denominado **comportamiento global**, a saber:

ii. los pasajeros usarán la estrategia más corta para viajar desde su origen a su destino.

Para explicitar este principio, se define el vector $F(v) = \{F_p^k(v)\}$ de funciones de costo por hiper-rutas, asociado a algún $v \in \Omega_V$, de la forma:

$$F_p^k(v) = \sum_{(i,j) \in A} \alpha_{ijp}^k(v) [C_{ij}(v) + W_{ijp}^k(v)] \quad \forall p \in P_k, \quad \forall k \in K \quad (3.51)$$

La función $C_{ij} : \Omega_V \subseteq R^{|A|} \rightarrow R^{|A|}$ es estrictamente monótona y continuamente diferenciable sobre Ω_V . Luego, en forma compacta (3.51) puede reescribirse de la forma:

$$F(v) = (\alpha(v))^T C(v) + W(v) \quad \forall v \in \Omega_V \quad \text{donde} \quad W_p^k(v) = \sum_{(i,j) \in A} \alpha_{ijp}^k(v) W_{ijp}^k(v) \quad (3.52)$$

Finalmente, los autores explicitan el segundo principio del comportamiento del usuario mediante el siguiente Problema de Inecuación Variacional *VIP*:

$$\text{encontrar } y^* = \{y_p^k\} \in \Omega_Y \text{ t.q.} \begin{cases} F_p^k(v) = u_p^*, & \text{si } y_p^{k*} > 0, \forall p \in P_k, \forall k \in K \\ u_k^* = \min_{p \in P_k} \{F_p^k(v)\}, & \forall k \in K \end{cases} \quad (3.53)$$

En resumen, el modelo supone que en el estado de equilibrio, las distribuciones de flujos sobre las hiper-rutas y los arcos, $y^* \in \Omega_Y$ y $v^* \in \Omega_V$ respectivamente, satisfacen simultáneamente la condición de punto fijo del modelo de asignación (I^{er} principio) y el 2^{do} principio del comportamiento del usuario. Entonces, y^* y v^* deben resolver el siguiente problema de equilibrio y punto fijo:

$$\text{encontrar } (y^*, v^*) \in \Omega_Y \times \Omega_V \text{ t.q.} \begin{cases} v^* = \Psi(y^*, v^*) = \alpha(v^*) y^* \\ F_p^k(v) = u_p^*, & \text{si } y_p^{k*} > 0, \forall p \in P_k, \forall k \in K \\ u_k^* = \min_{p \in P_k} \{F_p^k(v)\}, & \forall k \in K \end{cases} \quad (3.54)$$

o, equivalentemente, encontrar $(y^*, v^*) \in \Omega_y \times \Omega_v$ tal que:

$$(F(v^*))^T (y^* - y) \leq 0, \quad \forall (y, v) \in \Omega_y \times \Omega_v \mid v = \alpha(v)y \quad (3.55)$$

Dado que $v^* = \alpha(v^*)y^*$, la existencia de $(y^*, v^*) \in \Omega_y \times \Omega_v$ queda demostrada probando la existencia de al menos una solución y^* , bastando para ello la continuidad de $F(\cdot)$. Sin embargo, dicha continuidad es asegurada sólo si la función $W(\cdot)$ es continuamente diferenciable en Ω_v y si la función $C(\cdot)$ es continuamente diferenciable y fuertemente monótona.

Los autores resuelven el problema mediante aproximaciones sucesivas, encontrando en cada iteración un punto fijo v^* en Ω_v para luego demostrar que (y^*, v^*) es solución del modelo (3.54) con $y^* \in \Omega_y$ solución del VIP(v^*). Para ello los autores proponen un algoritmo de solución general que usa el método de Linealización de Jacobi para resolver en cada iteración el VIP. Debido a la complejidad del problema, las propiedades de unicidad de la solución y convergencia del método son probadas bajo fuertes y restrictivas condiciones sobre las funciones $F(\cdot)$ y $C(\cdot)$.

2.3.4 Cepeda Manuel, Cominetti Roberto y Florian Michael (2006)

El trabajo presentado por los autores plantea un modelo de elección de ruta en redes congestionadas, al cual se le incorporaron los efectos de la congestión en la predicción de flujos y tiempos de espera. En efecto, el trabajo se inspira en las investigaciones previas hechas por Correa 1999 y Cominetti R. y Correa J. (2001), que presentaron un modelo de equilibrio en redes para las cuales prueban la existencia de equilibrios. Así, Cepeda *et al.* (2001) plantean una caracterización equivalente del equilibrio, para luego desarrollar un método de solución.

Para su mejor entendimiento, el problema de líneas comunes resuelto en Cominetti *et al.* 2001 considera una red constituida por un origen O conectado a un destino D mediante un conjunto finito de líneas $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, cada una de las cuales posee un tiempo de viaje fijo y una frecuencia efectiva $f_a : [0, \bar{v}_a) \rightarrow (0, \infty)$ decreciente tal que $f_a(v_a) \rightarrow 0$ cuando el flujo en el arco se aproxima a la capacidad del mismo ($v_a \rightarrow \bar{v}_a$). Cabe destacar la similitud conceptual en el tratamiento del tiempo de espera respecto de De Cea y Fernández (1993), sin embargo y como se describe en la sección 2.4.5, los autores proponen un modelo para la frecuencia efectiva $f_a(v_a)$ basado en teoría de colas.

Luego, para viajar entre O y D los pasajeros seleccionan un conjunto de *líneas atractivas o estrategia*, abordando el primer bus de este conjunto con capacidad disponible. De este modo, la demanda o flujo x se reparte (h_s) entre todas las posibles estrategias $s \in S$ de modo que $x = \sum_{s \in S} h_s$. Los autores asumen que los arribos de los buses son independientes y están distribuidos exponencialmente, de modo que los pasajeros que usan la estrategia s abordan las líneas que la componen con probabilidad $\pi_a^s = f_a(v_a) / \sum_{b \in s} f_b(v_b)$, entonces para cada vector de flujos sobre estrategias existe un único vector de flujos sobre los arcos:

$$v_a = \sum_{s \in S; a \in s} h_s \frac{f_a(v_a)}{\sum_{b \in s} f_b(v_b)} \quad \forall a \in A \quad (3.56)$$

Así, el vector de flujos en los arcos determina los tiempos esperados de viaje en cada estrategia:

$$T_s(v) \hat{=} \frac{1 + \sum_{a \in s} t_a f_a(v_a)}{\sum_{a \in s} f_a(v_a)} \quad (3.57)$$

Luego, a partir del principio de [Wardrop \(1952\)](#), un vector de flujos sobre estrategias $h \geq 0$ es un equilibrio si y solo si todos los flujos tienen tiempo mínimo, es decir:

$$h_s > 0 \Rightarrow T_s(v(h)) = \tau(v(h)), \text{ donde } \tau(v) \hat{=} \min_{s \in S} T_s(v) \quad (3.58)$$

Los flujos de equilibrio V_x de este problema fueron caracterizados en [Cominetti et al. \(2001\)](#) como el conjunto solución óptima de un problema de optimización equivalente que implica la existencia de una constante $\alpha_x \geq 0$ tal que $v \in V_x$ sí y solo si $v \geq 0$ con $\sum_{a \in A} v_a = x$, y

$$\frac{v_a}{f_a(v_a)} \begin{cases} = \alpha_x & \text{si } t_a < \tau(\hat{v}(\alpha_x)) \\ \leq \alpha_x & \text{si } t_a = \tau(\hat{v}(\alpha_x)) \\ = 0 & \text{si } t_a > \tau(\hat{v}(\alpha_x)) \end{cases} \quad (3.59)$$

donde $\hat{v}_a(\alpha)$ es la función inversa de $v_a \rightarrow v_a / f_a(v_a)$.

La generalización del problema a una red de transporte público, mantiene la representación gráfica original usada en [Spiess y Florian \(1989\)](#), y luego en [Wu, Florian y Marcotte \(1994\)](#), esto es, que la red de queda definida por el grafo $G(N, A)$, donde A representa el conjunto de arcos y N el conjunto de nodos de líneas (N_l), de transferencia o paraderos (N_s) y centroides. A su vez, el conjunto A posee arcos de cuatro tipo: de vehículos (secciones de línea), de espera, de acceso y de transferencia, como se ejemplificó en la Figura N° 2-3.

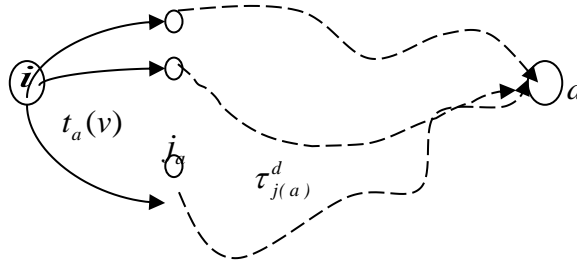
El conjunto de destinos es denominado $D \subseteq N$, y para cada destino $d \in D$ y cada nodo $i \neq d$ existe una demanda dada ($g_i^d \geq 0$). El conjunto $V = [0, \infty)^{AxD}$ denota el espacio de los vectores v de los flujos por destino-arco tal que $v_a^d \geq 0$, mientras que V_0 es el conjunto de flujos $v \in V$ tal que $v_a^d = 0$ para todo $a \in A_d^+$ y satisface la conservación de flujos:

$$g_i^d + \sum_{a \in A_i^-} v_a^d = \sum_{a \in A_i^+} v_a^d \quad \forall i \neq d \quad (3.60)$$

donde $A_d^+ = \{a : i_a = i\}$ y $A_d^- = \{a : j_a = i\}$ son los conjuntos de arcos salientes y entrantes al nodo $i \in N$, donde i_a y j_a denotan los nodos “inicial” y “terminal” del arco $a \in A$.

Conceptualmente, la idea del equilibrio en una red está representada por la Figura 2-4, donde un pasajero con destino d alcanza el nodo intermedio i en su viaje, y para salir de i puede usar los arcos $a \in A_i^+$ para alcanzar el siguiente nodo j_a . Tomando el tiempo de viaje en el arco $t_a(v)$ y el tiempo de desplazamiento $\tau_{j_a}^d$ desde j_a hasta d como fijos, la decisión a tomar en i es un problema de líneas comunes con tiempo de viaje $t_a(v) + \tau_{j_a}^d$ y las frecuencias efectivas corresponden a las de los servicios que operan en los arcos $a \in A_i^+$.

Figura N° 2-4
Representación del Problema de Líneas Comunes entre $i \rightarrow d$



Los autores plantean que la solución de este problema de líneas comunes determina el tiempo de viaje τ_i^d desde i a d , y que puede ser usado recursivamente para resolver los nodos aguas arriba, Luego si todas las variables τ_i^d y v_a^d deben ser determinadas al mismo tiempo, el modelo de asignación a la red está constituido por un conjunto simultaneo de problemas de línea comunes (uno para cada par (i,d)) satisfaciendo la restricción de continuidad de flujo. Es decir, para cada $v \in V$ el flujo que ingresa al nodo i con destino d está definido como $x_i^d(v) \hat{=} g_i^d + \sum_{a \in A_i^-} v_a^d$ mientras que las funciones $\tau_i^d(v)$ son las soluciones únicas de las ecuaciones generalizadas de Bellman:

$$\begin{cases} \tau_d^d = 0 \\ \tau_i^d = \min_{s \in S_i} \frac{1 + \sum_{a \in S} [t_a(v) + \tau_{j_a}^d] f_a(v)}{\sum_{a \in S} f_a(v)} \quad \forall i \neq d, \end{cases}$$

Introduciendo las variables de flujo a nivel de estrategias (h_s^d) el modelo planteado se puede reescribir estableciendo que: un vector $v \in V$ es un equilibrio si y solo si para todo destino $d \in D$ y $i \neq d$ existe $\tau_i^d \in \mathfrak{R}$ y un vector $h_s^d \geq 0$ para $s \in S$, que satisface las siguientes ecuaciones de flujo y equilibrio de Wardrop:

$$\sum_{s \in S_i} h_s^d = x_i^d(v), \quad v_a^d = \sum_{s \ni a} h_s^d \frac{f_a(v)}{\sum_{b \in S} f_b(v)} \quad \forall a \in A_i^+$$

$$T_s^d(v) \begin{cases} = \tau_i^d & \text{si } h_s^d > 0 \\ \geq \tau_i^d & \text{si } h_s^d = 0 \end{cases}$$

donde el costo de la estrategia $s \in S$ está dado por:

$$T_s^f(v) = \frac{1 + \sum_{a \in S} [t_a(v) + \tau_{j_a}^d] f_a(v)}{\sum_{a \in S} f_a(v)}$$

La existencia de un equilibrio puede ser obtenida usando el teorema de punto fijo de Kakutani bajo condiciones apropiadas (ver [Cominetti y Correa 2001](#)). Dicho equilibrio es caracterizado, y de él se desprenden dos casos particulares reconocidos en la revisión bibliográfica: el caso completamente descongestionado que se encuentra en [Spiess \(1984\)](#) y [Nguyen et al. \(1988\)](#); y el caso semicongestionado donde las funciones $f_a(v) \equiv f_a$ son constantes y donde las funciones $t_a(v)$ son usadas para modelar la congestión.

Por último, los autores plantean un algoritmo para resolver el problema, aportan antecedentes numéricos sobre el mismo y reportan resultados para un pequeño ejemplo y para redes grandes, con lo que demuestran su aplicabilidad.

2.4 MODELACIÓN DEL TIEMPO DE ESPERA

2.4.1 Gendreau Michel (1984)

[Gendreau \(1984\)](#) introduce los efectos de la restricción de capacidad en la distribución de los pasajeros y en los tiempos de espera en paraderos. Para ello muestra, vía simulación, que la congestión tiene efectos sobre el comportamiento local de los pasajeros. El autor define un modelo de asignación bajo congestión en el que el comportamiento de los usuarios es descrito por un modelo probabilístico basado en la teoría de colas para un sistema de atención en bloques. La complejidad del modelo le impide estudiar sus propiedades de existencia y unicidad, para el cual propone un algoritmo de solución.

El proceso simulado corresponde al de un sistema de espera en que los usuarios llegan al paradero con una tasa λ en demanda de sólo una línea, que posee buses de capacidad total K_l , pero con capacidad disponible K_l fija, cuyos arribos se producen con una tasa μ . [Gendreau](#) obtiene, para el estado de régimen, el tiempo de espera promedio en un sistema del tipo $M/M^{K_l}/1$, es decir, proceso de arribo Markov / proceso de servicio Markov con atención a K_l clientes fijos / con sólo un servidor, a saber:

$$T_e = \frac{r_0}{(1 - r_0)\lambda} \quad (3.61)$$

donde r_0 es la raíz entre 0 y 1 del polinomio $\mu r^{K_l+1} = (\lambda + \mu)r - \lambda$, el cual para $K_l > 2$ no posee solución explícita.

El autor obtiene aproximaciones analíticas para el tiempo de espera a través de una cota superior y otra inferior. En particular, la cota superior está dada por:

$$T'_e = \frac{K_l + \rho}{\mu(1 - \rho^2)K_l} \quad \text{con} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu K_l} < 1 \quad (3.62)$$

$$\Leftrightarrow T'_e = \frac{K_l + \frac{\lambda}{\mu K_l}}{\mu \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\mu K_l} \right)^2 \right) K_l} = \frac{\mu K_l^2 + \lambda}{\mu^2 K_l^2 - \lambda^2} \quad (3.63)$$

2.4.2 Ceder Avishai y Marguier Philippe (1985)

Los autores reconocen que, cuando los usuarios llegan al paradero en forma aleatoria, el tiempo de espera asociado a una línea no es exactamente la mitad del valor esperado de los intervalos de arribo de los buses de dicha línea. Lo anterior, de acuerdo a la ecuación (2.59) que depende, además, de la variabilidad de los intervalos de arribo de los buses:

$$E(W) = \frac{E(H^2)}{2E(H)} = \frac{E(H)}{2} \left[1 + \frac{Var(H)}{E^2(H)} \right] \quad (2.64)$$

donde $E(H)$ y $Var(H)$ son el valor esperado y la varianza del intervalo de arribo, respectivamente. Luego, definiendo las variables apropiadas la ecuación (2.59) puede reescribirse de la forma:

$$f = \frac{1}{E(H)} ; \quad C^2 = \frac{Var(H)}{E^2(H)} \Rightarrow E(W) = \frac{1 + C^2}{2f} \quad (2.65)$$

donde f es la frecuencia de la línea y C^2 (radio de desviación del intervalo) es un parámetro que representa una medida de la confiabilidad del servicio en el paradero en cuestión. Los autores reconocen que la confiabilidad del servicio se deteriora (variabilidad de los arribos) a lo largo de la ruta por razones estocásticas (ver Bly y Jackson 1974, Beltrán *et. al.* 2012). Dicho deterioro se manifiesta a través de intervalos determinísticos ($C^2 = 0$, llegadas perfectamente regulares) al comienzo de la ruta hasta intervalos exponenciales ($C^2 = 1$, llegadas aleatorias) al final del recorrido.

Frente a lo anterior, los autores proponen dos familias de densidad de probabilidad de los intervalos de arribo de los buses suponiendo que, en cada paradero, la distribución de los intervalos pertenece a una familia de distribuciones que puede aproximarse a los casos determinísticos y exponenciales. Luego, si $f_H(t)$ es la función densidad de probabilidad y $F_H(t)$ la función distribución acumulada del intervalo H respectivamente, se tiene que:

$$i. \quad C^2 = 0 \Rightarrow H(\text{determinístico}) = \frac{1}{f} \quad \wedge \quad \overline{F_H}(t) = 1 - F_H(t) = \begin{cases} 1 & t < 1/f \\ 0 & t \geq 1/f \end{cases} \quad (2.66)$$

$$ii. \quad C^2 = \frac{1}{1 + E^2(H)} \Rightarrow f_H(t) = fe^{-ft} \quad \wedge \quad \overline{F_H}(t) = 1 - F_H(t) = e^{-ft} \quad (2.67)$$

De este modo, para el primer caso, la familia de funciones densidad de probabilidad del intervalo H en función de los parámetros frecuencia (f) y confiabilidad (C^2) en cada paradero, que puede aproximarse a los dos casos extremos (determinístico y exponencial), es de la forma:

$$f_H(t) = \begin{cases} \frac{2fC^2}{1+C^2} \left(1 - \frac{1-C^2}{1+C^2} f \cdot t\right)^{\frac{3C^2-1}{1-C^2}} & 0 \leq t \leq \frac{1+C^2}{(1-C^2)f} \\ 0 & \frac{1+C^2}{(1-C^2)f} \leq t \end{cases} \quad (2.68)$$

A su vez, para el segundo caso, la familia de densidades de probabilidad, que se aproxima a una distribución exponencial de los intervalos en función de los parámetros frecuencia (f) y confiabilidad (C^2) en cada paradero, está dada por una distribución *Gamma*, es decir:

$$f_H(t) = \frac{\left(\frac{f}{C^2}\right)^{\frac{1}{C^2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{C^2}\right)} t^{\left(\frac{1-C^2}{C^2}\right)} e^{-\left(\frac{ft}{C^2}\right)} t \geq 0 \quad (2.69)$$

Por otro lado, la función de densidad de probabilidad del tiempo de espera, en función de la distribución de los intervalos de llegada de los buses, está dada por:

$$f_w(t) = \frac{\int_0^\infty f_H(u) du}{E(H)} = \frac{\bar{F}_H(t)}{E(H)} = f \bar{F}_H(t) \quad (2.70)$$

A partir de la ecuación anterior, son obtenidas distintas expresiones para el valor esperado del tiempo de espera dependiendo del tipo de distribución de los intervalos (determinística o exponencial), específicamente $0,5E(H)$ y $E(H)$ respectivamente. Luego, aplicando la relación mostrada en la ecuación (2.65) a las familias de distribución propuestas se obtienen las densidades de probabilidad del tiempo de espera en cada caso.

$$f_w(t) = \begin{cases} f \left(1 - \frac{1-C^2}{1+C^2} f\right)^{\frac{2C^2}{1-C^2}} & 0 \leq t \leq \frac{1+C^2}{(1-C^2)f} \\ 0 & \frac{1+C^2}{(1-C^2)f} \leq t \end{cases} \quad (2.71)$$

$$f_w(t) = f \sum_{k=0}^{\frac{1-C^2}{C^2}} \frac{\left(\frac{ft}{C^2}\right)^k}{k!} \exp\left(-\frac{ft}{C^2}\right) , \quad t \geq 0 \quad (2.72)$$

2.4.3 Powell Warren (1986)

El análisis tradicional de sistemas de atención en grupos requiere la determinación de los ceros complejos de funciones específicas a través de técnicas especiales. El autor usa los resultados obtenidos con dichas técnicas para encontrar aproximaciones analíticas para la media y la varianza del largo medio de cola en los instantes de salida de los buses desde los paraderos.

En efecto, **Powell (1986)** considera un paradero servido por vehículos cuya capacidad es una variable aleatoria V , para el cual define Q^{n+1} como el número de usuarios esperando inmediatamente antes del arribo del $n+1$ -ésimo vehículo e Y^n como el número de usuarios que llegan durante el período de servicio del n -ésimo vehículo, respectivamente. Suponiendo que las secuencias de variables $\{V^n\}$ e $\{Y^n\}$ son independientes e idénticamente distribuidas y que las salidas son definidas por un proceso de Markov, entonces se puede escribir la ecuación de recurrencia:

$$Q^{n+1} = R^n + Y^n \quad \text{con} \quad R^n = \max\{Q^n - V^n; 0\} \quad (2.73)$$

donde la variable aleatoria R^n representa el número de usuarios que permanecen en cola inmediatamente después de la partida del n -ésimo vehículo. Luego, si $E(Y^n) < E(V^n)$, entonces Q^n tiene una única distribución, para la cual la media está dada por:

$$E(Q^n) = \frac{\text{Var}(V) + \text{Var}(Y) + (E(V) - E(Y))[1 + 2(E(V) - C)] - (E(V) - E(Y))^2}{2(E(V) - E(Y))} + \psi \quad (2.74)$$

donde C es el máximo valor alcanzable por la variable aleatoria V^n y la función ψ es dependiente de las distribuciones de V e Y , y puede ser calculada numéricamente encontrando los ceros de una particular ecuación en el plano complejo.

Sin embargo, a partir de simulaciones, el autor obtiene una expresión de dicha función barriendo todos los parámetros en un sistema en el que los usuarios llegan en grupos, las capacidades de los buses son asumidas binomialmente distribuidas y los arribos de los vehículos se distribuyen según Erlang.

A pesar de la rigurosidad del trabajo, el autor sólo estudia las características generales del sistema que analiza (paradero).

2.4.4 Bouzaiene-Ayari B., Gendreau M., and Nguyen S. (2001)

Los autores realizan un estudio detallado del problema de la parada de bus en redes de transporte público congestionadas. En lo relevante proponen un nuevo modelamiento para una parada de buses en redes de transporte público, basado en el concepto de estrategias (**ver Spiess, 1983**), para el que prueban algunas propiedades y entregan formulaciones equivalentes.

Fundamentan el modelo en el hecho de que la regularidad de los buses tiene impactos en la llegada de los usuarios (procesos no independientes), y en que no todas las líneas son tan irregulares como para suponer distribuciones exponenciales en todas ellas. Asumen que los

tiempos de espera de cada línea l se representan por una función diferenciable y estrictamente decreciente en v_l , que por cierto incluye otros parámetros como la frecuencia, capacidad y distribución de los intervalos. Se define $p_{\delta l}(v_l)$ como la probabilidad de que los pasajeros de tipo δ aborden la línea l , dependientes de *factores de atracción* estrictamente decrecientes con v_l .

$$p_{\delta}(v_L) = \frac{\varepsilon_l(v_l)}{\sum_{j \in L_{\delta}} \varepsilon_j(v_j)} \quad 0 < \varepsilon_l(v_l) < +\infty, \quad \forall v_l \in [0, +\infty[\quad (2.75)$$

Los autores destacan que en su modelo, el tiempo de espera de los pasajeros de tipo δ no corresponde al promedio ponderado de los tiempos de espera de cada una de las líneas atractivas:

$$W_{\delta}(v_L) \neq \sum_{l \in L_{\delta}} p_{\delta} W_l(v_l) \quad (2.76)$$

Lo anterior debido a que si bien asumen aleatoriedad en la llegada de los usuarios, aplican disciplina First In First Out (FIFO) para el vaciado de los paraderos.

Los autores examinan dos casos especiales del modelo. En el primer caso, la capacidad de la línea se considera limitada y por lo tanto no puede ser superado por el flujo de pasajeros a bordo de los buses. En el segundo caso, la restricción de capacidad se flexibiliza, a fin de obtener un modelo de parada que se puede integrar fácilmente en un modelo de asignación con el objeto de predecir el comportamiento global de pasajeros en tránsito redes.

2.4.5 Cominetti y Correa (2001)

Los autores en su trabajo asumen que el tiempo de espera (W_s) hasta abordar algún bus de un conjunto de líneas representado por la estrategia s , corresponde al inverso de la suma de las frecuencias efectivas de las líneas que la componen. Asimismo, asumen que la probabilidad de abordar una línea l responde al clásico modelo proporcional a la frecuencia efectiva de la línea, para lo cual proveen como respaldo un Apéndice basado en teoría de colas.

Para el caso de un paradero cuyos pasajeros arriban de acuerdo a un proceso de renovación Poisson de tasa v , que es servido por una línea con arribos independientes de tasa μ y capacidad variable C , con $\mathbb{P}(C = j) = q_j$ para $j = 0, \dots, K$, la frecuencia efectiva de la línea dependiente de la demanda en ella la representan como:

$$f(v) := \frac{1}{W(v)} = v \left[\frac{1}{\rho(v)} - 1 \right]$$

donde $\rho(v) \in [0, 1)$ es solución de $\mu \sum_{i=1}^C q_i (\rho + \dots + \rho^i) = v$

Para el caso de un paradero cuyos pasajeros arriban de acuerdo a un proceso de renovación Poisson de tasa γ , que es servido por un conjunto de línea $\{l_i: i \in s\}$ con arribos independientes de tasas μ_i y capacidad variable C_i , con $\mathbb{P}(C_i = j) = q_j^i$ para $j = 0, \dots, K_i$, el valor esperado del tiempo de espera utilizando la fórmula de Little se representa como:

$$W(y) = \frac{1}{y} \frac{\rho(y)}{1 - \rho(y)}$$

donde $\rho(v) \in [0,1)$ es solución de $\sum_{i \in s} \mu_i \sum_{j=0}^{K_i} q_j^i (\rho + \dots + \rho^j) = y$.

Los autores denotan $\rho_i(\cdot)$ y $f_i(\cdot)$ las raíces y la frecuencia efectiva de la línea i , y logran demostrar los supuestos iniciales bajo la premisa de que $\rho_i(v_i) = \rho(y)$.

Cuando los autores revisan el caso de un paradero con demanda en varias estrategias superpuestas, consideran el caso anterior con la diferencia de que los pasajeros pueden tener diferentes estrategias $s \in A = \{1, \dots, n\}$ y arriban de acuerdo a procesos Poisson independientes de tasas y_s . En este caso los autores reconocen que las colas asociadas a cada estrategia se interfieren mutuamente por las líneas comunes que poseen entre ellas, y construyen una expresión para el tiempo de espera asociado a cada estrategia suponiendo que todos los procesos de arribo de los buses son Poisson e independientes tal que $E(Y_s) = 1/\mu_s$.

$$W_s = \frac{1}{\mu_s p_s}$$

donde la probabilidad de abordar los buses de la estrategia s , $p_s = p_s(y)$, es función del vector de tasas de arribo de pasajeros $y = (y_s)_s$, y por cierto de la tasas de arribo y capacidades de las líneas.

De este modo, los autores obtienen expresiones analíticas para los tiempos de espera asociados a estrategias en un paradero servido por múltiples líneas, con demandas en una o varias estrategias simultáneamente.

El objetivo era justificar la regla de repartición de flujo proporcional a los inversos de los tiempos de espera, y al mismo tiempo encontrar expresiones analíticas de las funciones de tiempo de espera. Sin embargo, los autores no logran obtener expresiones analíticas y cerradas para las frecuencias efectivas (que intervienen tanto en los tiempos de espera como en la distribución de pasajeros) y logran justificar la regla de reparto de flujos solo cuando existe una única estrategia.

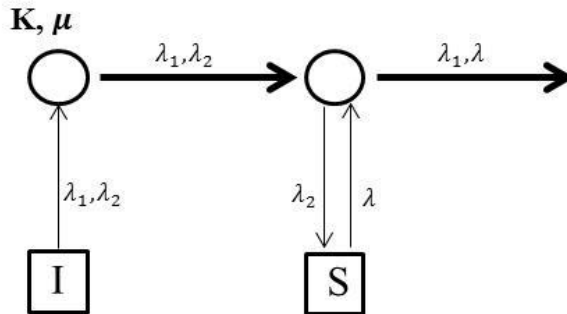
En el caso de coexistir varias estrategias, los autores reconocen en el Apéndice del trabajo que el modelo basado en que las frecuencias efectivas de las líneas individuales dependen exclusivamente del flujo en dicha línea es incorrecto, ya que los tiempos de espera dependen de los flujos en estrategias y no solo de los flujos en líneas, cuestión que se postula, observa en simulaciones y se desarrolla en esta tesis.

2.4.6 Cepeda Manuel (2006)

El autor diferencia su análisis de otros en suponer que modela el segundo paradero de una línea. La Figura 2-6 representa la fracción de línea que estudia: al paradero inicial (I) llegan pasajeros que tienen por destino el segundo paradero (S) y pasajeros que van a cualquier paradero posterior

(pasajeros tipo 1). Se asume que las llegadas de estos tipos de pasajeros se realizan de acuerdo a dos procesos de Poisson independientes de tasa λ_2 y λ_1 , respectivamente.

Figura N°2-6
Paraderos Simples Servidos por solo 1 Línea de tasa de llegada μ y capacidad K



Cepeda señala que si $q_0 = I^i$ es la probabilidad de que un bus que llega al segundo paradero no tenga espacios disponibles, en función de I, donde este último valor corresponde a la solución del paradero inicial, entonces el estimador de dicha probabilidad (\tilde{q}_0) en función del flujo λ_1 , y de los dos valores admisibles para q_i serían:

$$\tilde{q}_0 = \left(\frac{\lambda_1}{\mu K} \right)^{\frac{2K}{K+1}}, \quad q_i = \begin{cases} q_0 & \text{para } i = 0 \\ 1 - q_0 & \text{para } i = K \\ 0 & \text{para otro caso} \end{cases} \quad (2.77)$$

A partir de esto Cepeda obtiene una aproximación del tiempo de espera en el segundo paradero:

$$\tilde{W} = \frac{1}{\mu \left(1 - \left(\frac{\lambda_1}{\mu K} \right)^{\frac{2K}{K+1}} \right) \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\mu K - \lambda_1} \right)^\beta \right)} \quad (2.78)$$

Finalmente, mediante simulaciones Cepeda estima y compara los errores promedio y máximo de su modelo, con los de Gendreau (1984), Bouzaïene-Ayari *et al.* (2001) y uno de los desarrollados en el Capítulo 4 de esta Tesis.

2.5 SÍNTESIS

Si se acepta la definición de congestión en transporte público entregada por [De Cea y Fernández \(1993\)](#), que la establece como el fenómeno experimentado por los usuarios en términos del aumento de su tiempo de espera producto de una oferta limitada, es posible afirmar que este aspecto ha sido incorporado a los modelos de asignación de pasajeros a líneas, sólo en los últimos veinte años.

En efecto, los modelos de asignación que han incorporado este aspecto lo han hecho de distintas formas, introduciendo de paso algunas consecuencias en relación con alteraciones del comportamiento de los usuarios en términos de las líneas o rutas que están dispuestos a usar. Para ello, en cada uno de los modelos antes mostrados, los autores suponen que dada una oferta de transporte, los tiempos de espera son dependientes de la demanda de viajes, es decir, de la cantidad de usuarios a bordo de los buses y esperando en paraderos.

Si bien [Gendreau \(1984\)](#) fue el primero en reconocer y analizar el impacto de la capacidad de los buses en el comportamiento de los pasajeros y en sus tiempos de espera, fueron [De Cea y Fernández \(1993\)](#) los primeros en relacionar directamente la congestión de transporte público con la reducción de las frecuencias reales de los servicios. Para ello introducen el concepto de frecuencia efectiva, y suponen que las funciones de costo a través de las secciones de ruta tienen una forma potencial, tradicionalmente usada en modelos de asignación de transporte privado. El método de asignación del modelo de equilibrio considera que son esas frecuencias las que realmente observan los usuarios.

En efecto, en su trabajo [De Cea y Fernández \(1993\)](#) formulan un modelo de asignación basado en el concepto de ruta, donde los tiempos de espera en los paraderos son dependientes del flujo mediante una función potencial, de forma tal que los costos en una sección de ruta sean estrictamente monótonos. La distribución de los pasajeros a través de las líneas atractivas es afectada por la congestión mediante un modelo de frecuencias efectivas en los paraderos y por la incorporación de nuevas línea en las secciones de ruta. La formulación del problema de equilibrio se manifiesta a través de una desigualdad variacional, sin embargo, los autores estudian y resuelven una versión simplificada del problema, equivalente al modelo de asignación sin congestión propuesto por [De Cea y Fernández \(1988\)](#), para lo cual utilizan un método iterativo con técnicas de linealización.

Por otro lado, [Wu, Florian y Marcotte \(1994\)](#), formulan y resuelven un modelo de asignación basado en el concepto de hiper-ruta, en el que tanto los tiempos de espera en los paraderos como los tiempos a bordo de los buses son dependientes del flujo. A pesar de ello, la distribución de los pasajeros a través de las líneas no es afectada por la congestión, pues la asignación a líneas en términos de sus probabilidades es computada mediante un modelo de frecuencias nominales, desconociendo la posibilidad de que existan líneas más congestionadas que otras.

En este último modelo, el efecto de la capacidad restringida es sólo considerado en la incorporación de nuevas secciones de línea a la hiper-ruta óptima, producto del aumento de los tiempos de espera y de viaje, con consecuencias indirectas en la asignación de los pasajeros. El modelo fue escrito como una desigualdad variacional en el espacio de los vectores de flujo por hiper-ruta factibles y resuelto también a través de técnicas de linealización.

Luego, Bouzaïene-Ayari, Gendreau y Nguyen (1995) formulan y resuelven un modelo de asignación más completo que combina los conceptos de hiper-ruta y de frecuencia efectiva, en el cual tanto los tiempos de espera en los paraderos como los tiempos de viaje a bordo de los buses son dependientes del flujo. Además, la asignación de usuarios varía con el nivel de flujo pues los tiempos de espera asociados a cada línea presentan una forma potencial respecto de la cantidad de pasajeros que usa dicha línea en el segmento de línea inmediatamente posterior al nodo de línea al que se accede. El modelo fue escrito como un problema simultáneo de equilibrio y punto fijo en los espacios de vectores de flujo por hiper-ruta y secciones de línea factibles, cuyas propiedades de existencia y unicidad de la solución fueron probadas, en particular para esta última fueron usados fuertes supuestos.

Más tarde, Cominetti *et al.* (2001) resuelven el problema de líneas comunes en redes congestionadas y plantean un modelo de elección de ruta en redes generales, que incorpora los efectos de la congestión en la predicción de flujos y tiempos de espera (estos últimos mediante frecuencias efectivas). En esta misma línea, Cepeda *et al.* (2006) plantean una extensión del trabajo de recién señalado, obteniendo una nueva caracterización del equilibrio, que permite ser formulado como un problema de optimización equivalente.

Esta nueva formulación del modelo puede tratarse con tiempos de viaje dependientes de los flujos y corresponde a una generalización de las “conocidas” estrategias, originadas en modelos de equilibrio de redes de transporte público. El análisis teórico entregado proporciona una fundamentación sólida para un algoritmo sencillo y robusto, ya que tanto una aproximación como la solución exacta del equilibrio son fácilmente cuantificables.

En resumen, los modelos que han incorporado la congestión lo han hecho de manera intuitiva, tratando de obtener los resultados finales observados en el sistema, o de internalizar los efectos experimentados por los usuarios. Para ello, han sido usadas funciones generales o expresiones más bien heurísticas en la determinación de los tiempos medios de espera, a pesar de ser específicamente éste aspecto el que da origen al concepto de congestión en transporte público.

En efecto, De Cea *et al.* (1993) plantea solo una fundamentación intuitiva para la utilización de las frecuencias efectivas, Wu *et al.* (1994) propone una función potencial genérica a ser calibrada, mientras que Bouzaïene-Ayari *et al.* (2001) fundamenta su expresión analítica del tiempo de espera en teoría de colas, a través de un modelo cuyos supuestos son demasiado específicos y poco aplicables. En particular, el supuesto referido al sistema de atención *fifo* de la demanda no es adecuado para modelar sistemas de transportes masivos, donde mayoritariamente no existe regla de atención de usuarios.

También Cominetti *et al.* (2001) y Cepeda *et al.* (2006) desarrollan y resuelven un modelo de asignación apoyándose en el concepto de frecuencia efectiva, lo cual fundamentan utilizando modelos de tiempo de espera basados en teoría de colas.

A pesar de lo anterior, es necesario destacar que todos los modelos logran, en alguna medida, reproducir los efectos prácticos de la congestión en paraderos. No obstante, las posteriores implementaciones de algunos de ellos han simplificado su aplicación, reduciendo con ello la internalización de dichos efectos. Particularmente importante es el hecho de que la asignación de

pasajeros a líneas no considere las capacidades disponibles de éstas en la regla de distribución finalmente usada (De Cea *et al.* 1993; Wu *et al.* 1994).

Por otro lado, el particular enfoque de los análisis de sistemas de atención para la modelación del tiempo de espera en los paraderos presenta dos características relevantes. La primera de ellas corresponde a lo simplificado de los sistemas estudiados, esto es, paraderos simples servidos por solo una línea demandada por usuarios uniformes que desean acceder solo a ella. La segunda característica, que podría justificar la primera, corresponde a la complejidad matemática en la obtención de los indicadores generales de los sistemas de atención.

Como ya ha sido planteado, el primero de los objetivos perseguidos en esta tesis corresponde a la revisión, análisis y propuestas de modelamiento del comportamiento del usuario enfrentado a una oferta de transporte público cuya capacidad es limitada. Para ello, en el siguiente capítulo se entregará un marco teórico riguroso que permita introducir la restricción de capacidad en la modelación del tiempo de espera, a partir de los principales resultados que arroje el estudio de sistemas de atención a usuarios. Con el propósito de alcanzar el objetivo antes expuesto, en el Capítulo 3 se analizan en profundidad los fundamentos de la congestión en paraderos, en particular, se estudia la modelación del tiempo de espera y de la asignación de pasajeros, además de los efectos introducidos en éstos por la restricción de capacidad de los vehículos de las líneas que conforman el sistema de atención en un paradero.

Con dicho análisis, será posible justificar teóricamente una propuesta de modelación del tiempo de espera, para posteriormente observar los efectos de dicha modelación en la solución del problema de línea comunes. Ello, por cuanto las soluciones al problema de líneas comunes son dependientes tanto del comportamiento de los usuarios como de la modelación del tiempo de espera (ver De Cea *et al.* 1993, Correa 1999, Cominetti y Correa 2001 y Cepeda *et al.* 2006).

3. FUNDAMENTOS DE LA CONGESTIÓN EN PARADEROS

3.1 CONCEPTOS BÁSICOS

3.1.1 Generalidades

El objetivo de este capítulo es entregar un marco teórico para la modelación y análisis del fenómeno de la congestión en paraderos. Para ello, es necesario recordar y tener presente el principio general de la congestión en un sistema de atención a usuarios, el cual establece que *“la congestión depende esencialmente de las irregularidades en el sistema y no solamente de las propiedades en promedio de él”* (Cox y Smith, 1964).

Con el propósito de estudiar el sistema en cuestión (paradero), es necesario especificar las características del mismo, lo que significa generalmente conocer:

- i. *forma de llegada de los usuarios: se refiere a la frecuencia media de llegada de los usuarios y al patrón estadístico de dichas llegadas.*
- ii. *mecanismo de servicio: se refiere a establecer cuándo está disponible el servicio (disponibilidad), cuántos clientes pueden atenderse (capacidad) y cuánto tiempo toma en proporcionar el servicio (tiempo de servicio). Generalmente se especifica mediante la distribución estadística del tiempo de servicio.*
- iii. *disciplina de cola: se refiere al método de selección de los usuarios de entre quienes esperan recibir el servicio.*

Por otro lado, son tres las propiedades con las cuales es posible medir la congestión en sistemas de atención, a saber: media y distribución de la longitud de tiempo de espera hasta recibir el servicio; media y distribución del número de clientes en el sistema en un instante cualquiera y, finalmente, media y distribución de la longitud de los períodos en los que el servidor está ocupado. En particular, interesa conocer la primera de estas, pues es el tiempo de espera el que interviene directamente en el comportamiento de los usuarios en relación con su asignación a la red.

Como complemento a lo anterior es necesario precisar que, dadas las características del sistema en estudio, interesa también conocer la distribución de pasajeros sobre las líneas. En efecto, a partir de la revisión bibliográfica del capítulo anterior se concluye que la regla de distribución que rige las probabilidades de abordaje depende directamente de los tiempos de espera asociados a cada una de las líneas, de allí la importancia de un correcto análisis y modelamiento del tiempo de espera.

3.1.2 Descripción del Sistema

3.1.2.1 Forma de Llegada de los Usuarios

No son pocos los estudios dedicados a la especificación de las llegadas de los usuarios a sistemas en los que el servidor abandona el sistema una vez ofrecido el servicio, en particular a sistemas de espera en paraderos (ver [Jolliffe et al. 1975](#); [Danas, 1980](#); [Sectra, 1998](#)). Dicha especificación ha sido generalmente tratada como un proceso de Poisson.

Entre estos estudios destaca el análisis general de los procesos de arribo en Santiago de Chile desarrollado por [Sectra \(1998\)](#), en el cual se concluye que, de acuerdo a histogramas y test de bondad de ajuste, las llegadas de usuarios a los distintos paraderos pueden ser modeladas razonablemente como un proceso de Poisson, esto es, los tiempos entre las llegadas de los usuarios siguen leyes exponenciales (proceso de arribo de Markov).

3.1.2.2 Mecanismo de Servicio

A diferencia de las llegadas de los usuarios a los paraderos, el tema del arribo o disponibilidad de los buses ha sido tratado de diversas maneras (ver [Gendreau, 1984](#); [Marguier et. al. 1984](#); [Powell, 1986](#); [Sectra, 1998](#)). Específicamente, las diversas formas de tratar dicho tema dicen relación con las particulares características de la operación del sistema estudiado.

Entre estas características, la más importante dice relación con que los buses tienden a salir desde los terminales (o puntos de inicio de ruta) con frecuencias relativamente fijas. Por lo que, sólo en la medida que el observador se aleje de estos lugares, los tiempos de pasada por los diversos paraderos tendrán mayor variabilidad (ver [Ceder et. al., 1985](#); [Beltrán et. al. 2012](#)). Lo anterior se traduce, como es descrito en [Sectra \(1998\)](#) para el caso de Santiago, en la obtención de distribuciones exponenciales o normales para los intervalos de arribo de los buses, dependiendo del paradero estudiado.

Por otro lado, la especificación del tiempo de servicio será relevante en la medida de que éste afecte la elección del servidor (línea), el tratamiento tradicional ha considerado este tiempo despreciable, es decir, los tiempos de abordaje a los buses no constituyen una variable relevante en las decisiones de los usuarios. La capacidad de los paraderos no ha sido en rigor o suficientemente considerada en los modelos de asignación al transporte público, la cual está relacionada directamente con la capacidad y tasa de arribo de los vehículos de los servicios que sirven el paradero estudiado.

3.1.2.3 Disciplina de Cola

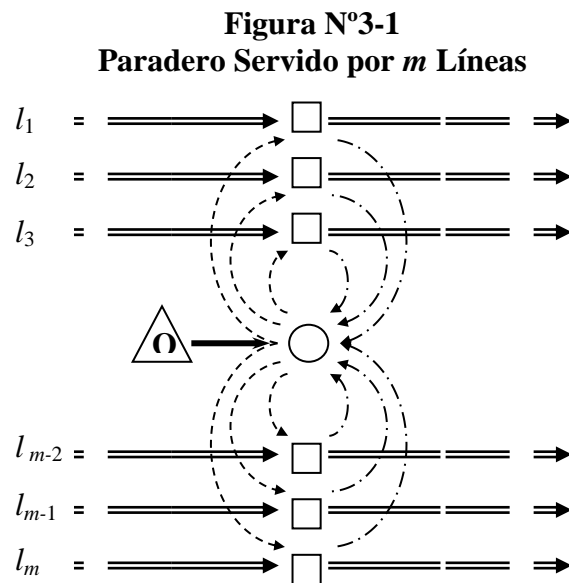
En los diversos modelos de asignación de pasajeros a líneas de transporte público, desarrollados antes de la incorporación de los efectos de congestión, la disciplina de cola usada por los usuarios en los paraderos no era relevante puesto que los buses, al tener capacidad infinita, podían servir a todos quienes estuvieran esperando su servicio.

Posteriormente, en los modelos que han incorporado efectivamente el fenómeno de la congestión en paraderos (ver De Cea *et al.*, 1993; Wu *et al.*, 1994, Cominetti *et al.*, 2001 y Cepeda *et al.*, 2006), la especificación de la disciplina de cola no es proporcionada, sin embargo subyace la inexistencia de alguna regla de atención. Esto último se debe a que se modelan directamente los tiempos de espera a través de la reducción exógena de las frecuencias observadas por los usuarios, o se computan directamente los tiempos de espera asociados a las distintas líneas mediante simulaciones que así lo asumen.

La excepción la constituye el modelo de Bouzaiène-Ayari *et al.* (1995), en el cual son usadas formas funcionales definidas y calibradas suponiendo una disciplina de cola *fifo* (first in first out), la cual por cierto es poco aplicable en sistemas masivos y no confinados.

3.2 TIEMPOS DE ESPERA EN CONGESTIÓN

Para estudiar el fenómeno de la congestión en paraderos, consideremos el conjunto de líneas que sirven un determinado paradero $L = \{ l_1, l_2, l_3, \dots, l_m \}$, como se ejemplifica en la Figura N°3-1.



Cada línea l puede ser descrita mediante un **proceso estocástico** $\{ N^l(t), t \geq 0 \}$ continuo e independiente, el cual representa la cantidad de buses de la línea l que arriba al paradero en el intervalo $[0, t)$. Cada proceso define una secuencia de variables aleatorias $\{ x_l^n \}$ $n=1, 2, 3, \dots$, donde x_l^n denota el intervalo de tiempo transcurrido entre el $n-1$ y el n -ésimo arribo de algún bus de la línea l .

En particular, diremos que el proceso $\{ N^l(t), t \geq 0 \}$ es un **proceso de renovación** si su secuencia $\{ x_l^n \}$ $n=1, 2, 3, \dots$ corresponde a una secuencia de **variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas** (Ross, 1969, 1993). Sin pérdida de generalidad, es posible suponer que los intervalos entre arribos de los buses de cada línea l se distribuyen de acuerdo a una función de

probabilidad acumulada $H_{x_l}(z)$, donde $h_{x_l}(z)$ es la función de densidad de probabilidad de dichos intervalos:

$$H_{x_l}(z) = \text{Prob}\{x_l \leq z\} = P\{x_l \leq z\} = \int_0^z h_{x_l}(u) du \quad (3.1)$$

Denotaremos S_n^l el instante en que ocurre la n -ésima renovación de la línea l , esto es:

$$S_n^l = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \sum_{i=1}^n x_l^i & n \geq 1 \end{cases}, \quad \forall l \in L \quad (3.2)$$

Con esto es posible definir el exceso de vida $e_l(t)$ o *tiempo de espera* hasta la próxima renovación de la línea l , como el tiempo que transcurrirá desde un determinado instante t hasta el instante $S_{N^l(t)+1}^l$ en que arribe el próximo bus de la línea l , esto es:

$$e_l(t) = S_{N^l(t)+1}^l - t \quad (3.3)$$

Puesto que es un proceso de renovación (Ross, 1969), su función densidad de probabilidad es tal que:

$$P(e_l(t) \leq x) = H_{x_l}(t+x) - \int_0^t [1 - H_{x_l}(t+x-y)] dm(y) \quad ; \quad m(y) = E(N(t)) \quad (3.4)$$

de modo que si $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ cuando $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(e_l(t) \leq x) = \frac{\int_0^t [1 - H_{x_l}(y)] d(y)}{\mu}$$

por lo que en el transiente se tiene que:

$$g_{e_l}(x) = \frac{1 - H_{x_l}(x)}{\int_0^{\infty} (1 - H_{x_l}(w)) dw}$$

Retomando el ejemplo, si se escoge un subconjunto de líneas L , el tiempo de espera W_L hasta el arribo del primer bus perteneciente a alguna de las líneas de L estará dado por:

$$W_L = \min \{e_l : l \in L\}. \quad (3.5)$$

Se debe notar que, hasta ahora, no ha sido necesario introducir el fenómeno de la congestión. Ello, debido a que sólo se han definido tiempos de espera hasta *arribos* de buses, los cuales no necesariamente corresponden a los tiempos que deben esperar los usuarios hasta *abordarlos*.

En efecto, dado que se consideran como costos los tiempos gastados en esperar y desplazarse (los únicos beneficios obtenidos a partir de un viaje son los encontrados en el destino del mismo, independientes de la ruta elegida), la única razón por la cual podría existir alguna diferencia entre los tiempos de espera hasta el *arribo* y el *abordaje* dice relación con el fenómeno de la congestión de transporte público². Específicamente, se debe al hecho de que los usuarios podrían ver coartada su posibilidad de abordar el bus al cual desean acceder, debido a que la capacidad disponible en éste es inferior a la cantidad de usuarios que compiten por ella.

Para introducir matemáticamente la congestión de transporte público se debe definir de antemano la forma en que ésta será tratada. La primera alternativa consiste en internalizar el aumento del tiempo de espera a través de la reducción de las tasas de los procesos estocásticos que definen las cantidades de arribos de buses de las líneas. Esta forma ha sido usada o argumentada implícitamente en el desarrollo de la mayoría de los modelos de asignación de transporte público que han incorporado los efectos de la congestión, sin embargo en varios de ellos su justificación es parcial o solo intuitiva.

La segunda alternativa consiste en estudiar los procesos aleatorios intermedios que se traducen, finalmente, en los resultados observados por los usuarios; es decir, estudiar los intervalos de arribo y las probabilidades de abordaje de manera que su interacción permita obtener los tiempos de espera asociados a la reducción observada de las frecuencias nominales de las líneas. Esta última alternativa ha sido abordada por algunos autores tales como [Gendreau \(1984\)](#), [Powell \(1986\)](#), [Bouzaiene-Ayari et al. \(2001\)](#), [Cominetti y Correa \(2001\)](#) y [Cepeda \(2002\)](#), aunque solo este último la consideró en el contexto de modelos de asignación de pasajeros. En efecto, tal como fuera comentado en el capítulo anterior, el primero de ellos estudia un paradero simple servido por sólo una línea, mientras que el segundo analiza un sistema más general. Sin embargo, los objetivos perseguidos en [Powell \(1986\)](#) dicen relación más bien con el análisis local de sistemas de atención, sin incorporar los efectos sobre la asignación de pasajeros a las líneas de transporte público.

A continuación serán exploradas ambas alternativas con el objeto de observar su compatibilidad, la que intuitivamente debiese ser total. En efecto, la reducción de las tasas de arribo de los buses requiere ser fundamentada a través de la modelación de los procesos probabilísticos que intervienen y, a su vez, dicha modelación es correcta en la medida de que reproduzca los tiempos de espera y la asignación de pasajeros, lo que ha sido posible hasta ahora reduciendo las tasas de arribo.

3.2.1 Reducción de la Frecuencia Nominal

La principal ventaja analítica de incorporar la congestión a través de la alteración (reducción) de las tasas medias de arribo de los buses es que no altera el procedimiento para la obtención del valor esperado del tiempo de espera. Ello, por cuanto al hacerlo de esta forma el tiempo de espera hasta el *arribo* del primer bus de un conjunto de líneas es coincidente con el tiempo que debe esperar el usuario hasta *abordar* algún el bus de dicho conjunto de líneas.

² Se asume infinita la capacidad del paradero, y nulos sus efectos en los tiempos de atención al pasajero

Sin embargo, la principal desventaja radica en que la reducción (forma y cantidad) de la frecuencia nominal debe ser estimada y capaz de reproducir los tiempos de espera experimentados por los usuarios, frente a diversos escenarios definidos por las características cualitativas y cuantitativas de la oferta y la demanda de transporte público. Como consecuencia de ello, este enfoque requiere de un estudio detallado de la forma en que se debe reducir la frecuencia nominal en cuestión, además de una demostración que pruebe que el único efecto de la congestión es la reducción de la frecuencia, lo cual no es claro, aunque parezca intuitivo.

Continuando con el análisis, el valor esperado del tiempo de espera hasta el arribo del próximo bus (coincidentemente hasta su abordaje), definido por la ecuación (3.5), satisface:

$$E(W_L) = \int_0^{\infty} z dF_{W_L}(z) = \int_0^{\infty} (1 - F_{W_L}(z)) dz = \int_0^{\infty} \bar{F}_{W_L}(z) dz \quad (3.6)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{F}_{W_L}(z) &= \text{Prob}\{W_L > z\} = P\{\min_{l \in L} e_l > z\} = \prod_{l \in L} P\{e_l > z\} \\ \bar{F}_{W_L}(z) &= \prod_{l \in L} (1 - G_{e_l}(z)) = \prod_{l \in L} \bar{G}_{e_l}(z). \end{aligned}$$

De esta forma, la ecuación (3.6) puede reescribirse de la forma:

$$E(W_L) = \int_0^{\infty} \bar{F}_{W_L}(z) dz = \int_0^{\infty} \prod_{l \in L} \bar{G}_{e_l}(z) dz \quad (3.7)$$

Por otro lado, si suponemos que el conjunto de líneas seleccionadas tiene como destino un nodo único, entonces tiene sentido obtener el valor esperado del tiempo en movimiento a través del subconjunto de líneas (TV_L), el que puede ser escrito de la forma:

$$E(TV_L) = \sum_{l \in L} t_l \pi_l^L \quad (3.8)$$

donde t_l es el tiempo de viaje a través de la línea l y π_l^L es la probabilidad de que el primer bus que arriba al paradero pertenezca a la línea l . Esta última puede escribirse de la forma:

$$\pi_l^L = \int_0^{\infty} g_{e_l}(t) \prod_{\substack{j \in L \\ j \neq l}} \bar{G}_{e_j}(t) dt \quad (3.9)$$

Así, reemplazando en (3.8), el valor esperado del tiempo en movimiento queda de la forma:

$$E(TV_L) = \sum_{l \in L} t_l \int_0^{\infty} g_{e_l}(t) \prod_{\substack{j \in L \\ j \neq l}} \bar{G}_{e_j}(t) dt. \quad (3.10)$$

En definitiva, el *valor esperado del tiempo total de viaje* (movimiento + espera) entre un par de nodos (T_L), a través de un conjunto de líneas que los conectan directamente, depende no solo de las tasas de llegadas y arribos de usuarios y buses respectivamente, sino que además de las distribuciones de éstas. Además, dado que la congestión es introducida exógenamente, la expresión del valor esperado del tiempo total de viaje no depende directamente de la tasa media de llegada de los individuos, como se observa en la ecuación (3.11).

$$E(T_L) = \int_0^{\infty} \prod_{l \in L} \bar{G}_{e_l}(z) dz + \sum_{l \in L} t_l \int_0^{\infty} g_{e_l}(t) \prod_{\substack{j \in L \\ j \neq l}} \bar{G}_{e_l}(t) dt \quad (3.11)$$

En efecto, debido a que la congestión es introducida exógenamente a través de la reducción de las frecuencias nominales, la tasa media de llegada de los usuarios intervendrá indirectamente a través de la función densidad de probabilidad de los tiempos de espera de cada una de las líneas. A continuación se obtendrán las expresiones del valor esperado del tiempo total de viaje para las más usadas formas de arribo de los buses, esto es: intervalos exponenciales y determinísticos.

3.2.1.1 Intervalos Exponenciales

Supongamos que para cada línea l el proceso estocástico $\{N^l(t), t \geq 0\}$, que define la cantidad de arribos de buses de la línea l al paradero en el intervalo $[0, t)$, es un **Proceso de Poisson**, es decir:

- i. $N^l(0) = 0$
- ii. $\{N^l(t), t \geq 0\}$ tiene incrementos independientes.
- iii. el número de arribos en un intervalo Δt tiene una distribución de Poisson con media $f_l \Delta t$. Esto es, para todo $s \geq 0$:

$$P\{N^l(s + \Delta t) - N^l(s) = k\} = \frac{(f_l \Delta t)^k}{k!} e^{-f_l \Delta t} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

La incorporación de la congestión en forma exógena, a nivel de línea, consiste en reemplazar su frecuencia nominal (f_l) por la **frecuencia efectiva** (f'_l) observada por los usuarios. Luego, la distribución de los intervalos $\{x_l^n\}$ $n=1, 2, 3, \dots$ sigue una ley exponencial con media $(f'_l)^{-1}$, es decir, su función distribución está dada por la siguiente expresión:

$$H_{x_l}(z) = P\{x_l \leq z\} = \int_0^z f'_l e^{-f'_l t} dt = 1 - e^{-f'_l z} \quad (3.13)$$

Luego, de acuerdo a la ecuación (3.4), la distribución del tiempo de espera asociado a la línea l también sigue una ley exponencial, esto es:

$$g_{e_l}(t) = f_l' e^{-f_l' t} \Rightarrow G_{e_l}(z) = \int_0^z f_l' e^{-f_l' t} dt = 1 - e^{-f_l' z} \quad (3.14)$$

por lo que, reemplazando en la ecuación (3.7), el valor esperado del tiempo de espera asociado al subconjunto de líneas L está dado por:

$$E(W_L) = \int_0^{\infty} \prod_{l \in L} e^{-f_l' z} dz = \int_0^{\infty} e^{-z \sum_{j \in L} f_j'} dz = \frac{1}{\sum_{l \in L} f_l'} \quad (3.15)$$

Es decir, el valor esperado del tiempo de espera hasta el arribo de algún bus perteneciente a un conjunto de líneas es igual a la esperanza del tiempo de espera hasta el arribo de un bus de una línea equivalente con frecuencia igual a la suma de las frecuencias de las líneas incluidas en dicho conjunto. De igual modo, el valor esperado del tiempo en movimiento, de acuerdo a la ecuación (3.10), está dado por:

$$E(TV_L) = \sum_{l \in L} t_l \int_0^{\infty} f_l' e^{-f_l' z} \prod_{\substack{j \in L \\ j \neq l}} e^{-f_j' z} dz = \frac{\sum_{l \in L} t_l f_l'}{\sum_{l \in L} f_l'} \quad (3.16)$$

de donde se obtiene la clásica expresión del valor esperado del tiempo total de viaje a través de un conjunto L de líneas, con distribuciones de intervalos exponenciales:

$$E(T_L) = E(W_L) + E(TV_L) = \frac{1}{\sum_{l \in L} f_l'} + \frac{\sum_{l \in L} t_l f_l'}{\sum_{l \in L} f_l'}. \quad (3.17)$$

Cabe destacar que, en forma similar a lo utilizado en los modelos de asignación sin congestión (ver Le Clerq, 1972; Chriqui, 1974; Chriqui y Robillard, 1975; Spiess, 1984; Nguyen y Pallotino, 1988; De Cea *et al.*, 1988; De Cea y Fernández, 1989; Spiess y Florian, 1989), la regla de distribución de flujos asociada a las probabilidades de abordaje depende en forma directamente proporcional de las frecuencias, en este caso efectivas:

$$\pi_l^L = \int_0^{\infty} f_l' e^{-f_l' z} \prod_{\substack{j \in L \\ j \neq l}} e^{-f_j' z} dz = \frac{f_l'}{\sum_{l \in L} f_l'}.$$

3.2.1.2 Intervalos Determinísticos

Supongamos que, para cada línea, el proceso $\{N^l(t), t \geq 0\}$, que cuenta la cantidad de arribos de buses de la línea l en el intervalo $[0, t)$, es un proceso determinístico, es decir, los intervalos de arribo son constantes y fijos. Además, supongamos nuevamente que la incorporación de la congestión es realizada en forma exógena reemplazando la frecuencia real (f_l) por la *frecuencia*

efectiva (f_l'). Luego, la distribución de los intervalos $\{x_l^n\}$ $n=1,2,3, \dots$ sigue una ley determinística con media $(f_l')^{-1}$, es decir:

$$H_{x_l}(z) = P\{x_l \leq z\} = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 1/f_l' \\ 1 & \text{si } z \geq 1/f_l' \end{cases} \quad (3.18)$$

De este modo, y de acuerdo a la ecuación (3.4), la distribución del tiempo de espera asociado a la línea l sigue una ley uniforme, esto es:

$$g_{e_l}(t) = \begin{cases} f_l' & \text{si } t < 1/f_l' \\ 0 & \text{si } t \geq 1/f_l' \end{cases} \Rightarrow G_{e_l}(z) = \int_0^z f_l' dt = \begin{cases} f_l' z & \text{si } z < 1/f_l' \\ 1 & \text{si } z \geq 1/f_l' \end{cases} \quad (3.19)$$

por lo que, de acuerdo a la ecuación (3.7), el valor esperado del tiempo de espera está dado por:

$$E(W_L) = \int_0^M \prod_{l \in L} [1 - f_l' z] dz \quad ; \quad M = \min \left\{ \frac{1}{f_l'} : l \in L \right\} \quad (3.20)$$

De igual modo, el valor esperado del tiempo en movimiento está dado por:

$$E(TV_L) = \sum_{l \in L} t_l \int_0^M f_l' \prod_{\substack{j \in L \\ j \neq l}} [1 - f_j' z] dz \quad (3.21)$$

de donde se obtiene la siguiente expresión para el valor esperado del tiempo total de viaje a través de un conjunto L de líneas con arribos determinísticos:

$$E(T_L) = \int_0^M \prod_{l \in L} [1 - f_l' z] dz + \sum_{l \in L} t_l \int_0^M f_l' \prod_{\substack{j \in L \\ j \neq l}} [1 - f_j' z] dz \quad (3.22)$$

Cabe destacar que el valor esperado del tiempo de espera, una vez aplicada la ecuación (3.22) a una sola línea, corresponde exactamente a la mitad del intervalo constante entre arribos de la línea, sin embargo, dicho resultado no es extrapolable a un conjunto de líneas:

$$E(T_{L=\{l\}}) = \frac{1}{2f_l'} + t_l$$

De igual modo, la regla de distribución de flujos asociada a las probabilidades de abordaje, en el caso de intervalos determinísticos, tampoco satisface el clásico modelo proporcional a la frecuencia de la línea en estudio e inversamente proporcional a la frecuencia total del conjunto de líneas.

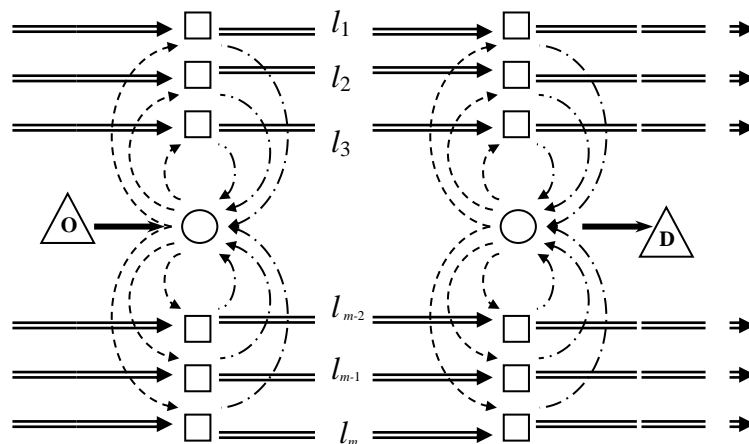
3.2.2 Análisis Probabilístico del Tiempo de Espera

Una vez revisada la incorporación de la congestión a través de la reducción de las frecuencias de las líneas, corresponde ahora estudiar los procesos aleatorios que entregan los resultados observados y experimentados por los usuarios. Es decir, analizar los intervalos de arribo y las probabilidades de abordaje de manera que su interacción permita obtener los tiempos de espera experimentados por los pasajeros.

Cabe destacar que, a diferencia del método de reducción exógena de frecuencias, el análisis de las probabilidades de abordaje introducirá directamente la demanda en la estimación de los tiempos de espera. En lo que sigue de esta tesis, se trabajará suponiendo que las distribuciones de los intervalos de arribo de las líneas tienen leyes exponenciales, salvo ejemplos particulares relacionados con intervalos determinísticos.

Para estudiar en forma genérica el fenómeno de la congestión, observemos un par origen-destino servido por m líneas, cuya principal diferencia es el tiempo de viaje ($t_1 < t_2 < \dots < t_{m-1} < t_m$), como se ejemplifica en la Figura N°3-2. De este modo, a cada línea i se le conoce su tiempo de viaje t_i , su frecuencia f_i y su capacidad promedio disponible c_i .

Figura N° 3-2
Par Origen Destino Servido por m Líneas

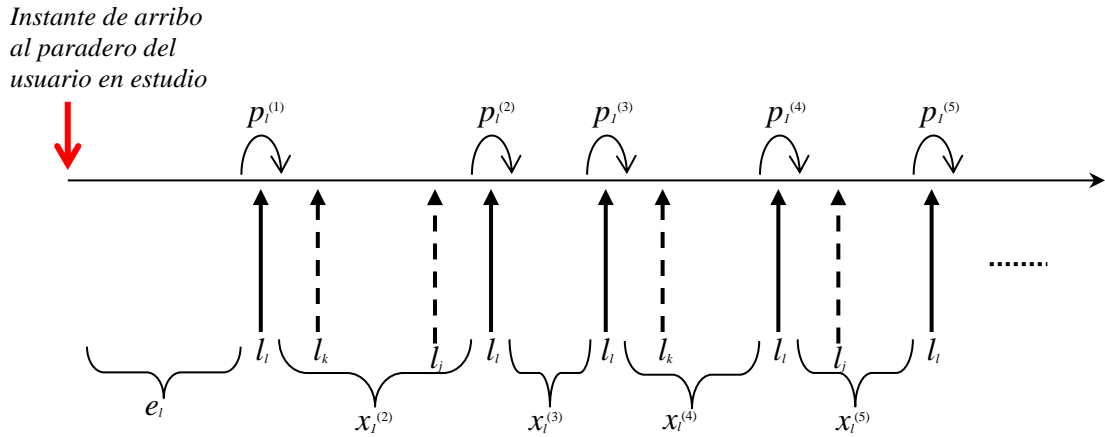


Cabe destacar que cuando los intervalos de arribo de los buses siguen leyes de probabilidad exponencial, el ordenamiento no implica pérdida de generalidad. En efecto, siempre se pueden reordenar las líneas de modo que $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{m-1} \leq t_m$, y en caso de tener líneas con igual tiempo de viaje $t_i = t_{i+1}$, estas se pueden agrupar en una única línea, y el proceso de llegada sigue siendo Poisson con tasa $f_i + f_{i+1}$. Tras esta fusión de líneas se obtiene la situación descrita por $t_1 < t_2 < \dots < t_{m-1} < t_m$.

Para estudiar el problema en términos generales, se puede formular una expresión para el valor esperado del tiempo de espera asociado a una línea l , equivalente al experimentado por los usuarios que estén dispuestos a abordar solo una línea. En efecto, sea $p_l^{(i)}$ la probabilidad de

abordar la línea l una vez que ha arribado el i -ésimo bus de dicha línea, luego, si e_l es el tiempo de espera hasta el arribo del primer bus de la línea l y x_l la duración de los intervalos entre arribos de sus buses, entonces el proceso en estudio puede esquematizarse como se muestra en la Figura N°3-3.

Figura N°3-3
Esquema del Proceso Combinado de Arribos y Probabilidades de Abordaje



De esta forma, el valor esperado del tiempo de espera (W_l) hasta el *abordaje* a algún bus de la línea l , experimentado por los individuos que desean acceder solo a ella, es función del valor esperado del tiempo de espera hasta el arribo del primer bus $E(e_l)$, de las probabilidades de abordaje $\{p_l^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ y del valor esperado de los intervalos de arribo $E(x_l)$, a través de la siguiente expresión:

$$E(W_l) = E(e_l)p_l^{(1)} + (1 - p_l^{(1)})(E(e_l) + E(x_l))p_l^{(2)} + (1 - p_l^{(1)})(1 - p_l^{(2)})(E(e_l) + 2E(x_l))p_l^{(3)} + \dots$$

$$E(W_l) = E(e_l)p_l^{(1)} + \sum_{i=1}^{\infty} \left[p_l^{(i+1)} (E(e_l) + iE(x_l)) \prod_{j=1}^i (1 - p_l^{(j)}) \right] \quad (3.23)$$

Una primera aproximación de la expresión anterior se obtiene de suponer que las probabilidades de abordaje a cada uno de los buses son independientes, de modo que en estado de régimen sean iguales $p_l = p_l^{(i)} = p_l^{(j)} \forall i, j$; y la ecuación (3.23) puede simplificarse de la siguiente manera:

$$E(W_l) \cong \sum_{i=0}^{\infty} p_l (E(e_l) + iE(x_l))(1 - p_l)^i$$

$$E(W_l) \cong p_l E(e_l) \sum_{i=0}^{\infty} (1 - p_l)^i + E(x_l) p_l \sum_{i=0}^{\infty} i(1 - p_l)^i$$

$$E(W_l) \cong E(e_l) + \frac{(1 - p_l)}{p_l} E(x_l) \quad (3.24)$$

Se debe notar que, independiente de la distribución de los intervalos de arribo, si la probabilidad de abordar cada bus de la línea l es 1 ($p_l=1$), una vez que éstos se encuentran en el paradero, entonces se cumple que $E(W_l) = E(e_l)$. Es decir, el tiempo promedio que debe esperar un individuo hasta su abordaje a algún bus de la línea l coincide con el valor esperado del tiempo de espera hasta el arribo del primer bus de dicha línea, esto es:

- i. Para toda distribución H_{x_l} , el valor esperado del tiempo de espera experimentado por los usuarios que están dispuestos a abordar solo la línea l , hasta abordar alguno de sus buses, satisface las siguientes condiciones:

$$\lim_{p_l \rightarrow 1} E(W_l) = E(e_l)$$

$$\lim_{p_l \rightarrow 0} E(W_l) = \infty$$

Sin embargo, dependiendo de la distribución de los intervalos de arribo de los buses de la línea l , se obtendrán distintas expresiones para el valor esperado de su tiempo de espera, mostrado en la ecuación (3.24). En particular, si la distribución de dichos intervalos de arribo es exponencial se tiene que:

$$E(e_l) = \frac{1}{f_l} \quad \wedge \quad E(x_l) = \frac{1}{f_l} \quad \Rightarrow \quad E(W_l) \cong \frac{1}{p_l f_l} \quad (3.25)$$

Es decir, analizados los procesos aleatorios generados a partir de la interacción entre los intervalos (exponenciales) de arribo de los buses y las probabilidades de abordaje de los usuarios, es posible afirmar que una primera aproximación para el valor esperado del tiempo de espera hasta abordar algún bus de la línea l de frecuencia f_l , experimentado por aquellos usuarios que desean abordar solo la línea en cuestión, corresponde al valor esperado del tiempo de espera hasta el arribo de un bus de una línea ficticia con frecuencia $p_l f_l$.

De esta forma se entrega sustento técnico a la creación y utilización del concepto de “frecuencia efectiva” en la modelación de la congestión de transporte público, por cuanto se muestra que bajo el supuesto de independencia de las probabilidades de abordaje, la interacción de ellas con arribos de buses que siguen leyes exponencial, es equivalente a usar frecuencias efectivas. Sin perjuicio de lo anterior, resta analizar si la aplicación de dicho concepto bajo la perspectiva de *ruta* (ver [De Cea y Fernández, 1993](#)) es la que mejor refleja el comportamiento de los usuarios.

Nota: En el caso de arribos determinísticos, el factor de corrección aplicable a la frecuencia nominal, para la obtención de la frecuencia efectiva, no es exactamente la probabilidad de abordar el bus cuando éste se encuentra en el paradero, sino una expresión de dicha probabilidad

$$E(e_l) = \frac{1}{2f_l} \quad \wedge \quad E(x_l) = \frac{1}{f_l} \quad \Rightarrow \quad E(W_l) \cong \frac{1}{f_l} \left(\frac{1}{p_l} - \frac{1}{2} \right) \quad (3.26)$$

Volviendo al caso de estudio (Figura N° 3-2), éste corresponde al clásico problema de líneas comunes al interior de una sección de ruta. De acuerdo al enfoque de Spiess (1983), cuando el individuo determina el conjunto de líneas que está dispuesto a abordar define su estrategia, por lo que potencialmente existirán tantas estrategias como combinaciones de líneas. No sucede lo mismo si se enfoca el problema en términos de ruta (Chriqui, 1974), pues existe sólo una.

Desde la perspectiva de las posibilidades de elección de los usuarios, podría existir más de una estrategia usada para alcanzar el destino, es decir, podría haber particiones de la demanda que tomen diferentes decisiones. Sin embargo, desde la perspectiva de rutas, *todos los individuos se comportan en forma similar al interior de la sección de ruta (aquella determinada por la solución del problema de líneas comunes asociado a la única sección de ruta)*. Luego, si se acepta la posibilidad de que existan usuarios que opten por conjuntos de líneas (estrategias) distintos, se debe reconocer que los modelos basados en el concepto de ruta son más restrictivos, por cuanto su formulación les impide modelar tal posibilidad. Un ilustrativo ejemplo de lo anterior puede observarse en Spiess y Florian (1989).

De lo anterior se desprende que el concepto de estrategia (ver Spiess, 1983) es más general, pues ofrece alternativas que de ser verificadas en condiciones de congestión, mostrarían una mayor capacidad de reproducir el comportamiento de los pasajeros en el sistema en estudio. En consecuencia se supondrá, sin pérdida de generalidad, que existen distintos tipos de usuarios de acuerdo a su comportamiento, esto es, de acuerdo a su elección de transporte.

El análisis de los usuarios que están dispuestos a usar solo una línea no requiere la determinación de la línea a la cual se asignarán, pues su estrategia de abordaje impone directamente, y en forma única, la línea a ser abordada. Sin embargo, su tiempo de espera es función de la probabilidad de abordaje p_l que, a pesar de aún no ser determinada, intuitivamente debiese depender de la asignación de todos los usuarios del paradero.

En efecto, sin pérdida de generalidad es posible suponer que la demanda de una línea l en un paradero determinado, corresponde a todos los individuos que están dispuestos a usarla, esto es, su **demanda potencial**. De este modo, las probabilidades p_l dependerán también de las porciones de la demanda que opten por estrategias combinadas (más de una línea) que contengan la línea l . En consecuencia, en el análisis de los individuos que elijan estrategias combinadas, el valor esperado de su tiempo de espera dependerá, al menos, de las demandas potenciales de cada una de las líneas pertenecientes a su estrategia. Ello, por cuanto podría también haber dependencia respecto de las demandas de líneas no consideradas en la estrategia.

Luego, para aquellos individuos dispuestos a abordar más de un servicio, la determinación de su tiempo total esperado de viaje es **independiente** de la línea finalmente abordada, pero dependiente de las demandas potenciales de esos servicios, a través de las probabilidades de abordaje a cada una de ellas.

Consideremos ahora el caso de pasajeros que están dispuestos a abordar un conjunto de líneas L . Una primera aproximación del valor esperado de su tiempo de espera puede obtenerse de suponer que las probabilidades de abordar los distintos buses, una vez que estos están en el paradero, son independientes y representadas por p_L , de modo que:

$$E(W_L) \cong E(e_L)p_L + (1-p_L)(E(e_L) + E(x_L))p_L + (1-p_L)(1-p_L)(E(e_L) + 2E(x_L))p_L + \dots$$

$$E(W_L) \cong \sum_{i=0}^{\infty} p_L (E(e_L) + iE(x_L))(1-p_L)^i \quad (3.27)$$

donde e_L y x_L están referidos a una línea ficticia que contiene los servicios pertenecientes a L para la cual, de acuerdo a la ecuación (3.15), se cumple que la superposición de procesos Poisson independientes es también Poisson. Es decir, la línea ficticia que tendrá intervalos de arribo exponenciales cuyo valor esperado es $(\sum_{l \in L} f_l)^{-1}$, además satisface la condición $E(e_L) = E(x_L)$.

En consecuencia, la ecuación (3.27) puede ser escrita de la forma:

$$E(W_L) \cong \sum_{i=0}^{\infty} p_L E(x_L)(i+1)(1-p_L)^i = p_L E(x_L) \sum_{i=1}^{\infty} i(1-p_L)^{i-1}$$

$$E(W_L) \cong \frac{p_L E(x_L)}{1-p_L} \sum_{i=1}^{\infty} i(1-p_L)^{i-1}$$

$$E(W_L) \cong \frac{E(x_L)}{p_L} = \frac{1}{p_L (\sum_{l \in L} f_l)} \quad (3.28)$$

De modo que a partir del supuesto planteado, el tiempo de espera hasta *abordar* algún bus perteneciente a las líneas de L , experimentado por aquellos usuarios que están dispuestos a abordar cualquiera de ellas, es equivalente al valor esperado del tiempo de espera hasta el *arribo* de un bus de una línea ficticia con frecuencia efectiva $p_L \sum_{l \in L} f_l$.

Generalizando el supuesto antes mencionado, la probabilidad p_L depende al menos de las demandas potenciales de las líneas pertenecientes a L , pudiendo también depender de toda la demanda del paradero. Sin perjuicio de lo anterior, podemos expresar dicha probabilidad en función de las probabilidades individuales de abordar cada una de ellas, como la probabilidad de abordar el primer bus que arribe al paradero, perteneciente a alguna línea $l \in L$, esto es:

$$p_L = \sum_{l \in L} P(\text{abordar} \mid e_l < \min_{j \in L \setminus \{l\}} e_j) P(e_l < \min_{j \in L \setminus \{l\}} e_j)$$

$$p_L = \sum_{l \in L} p_l \pi_l^L \quad (3.29)$$

donde π_l^L es la probabilidad de que el primer bus que arribe al paradero, perteneciente a alguna línea de L , pertenezca a la línea l .

De la expresión anterior es posible mostrar que la aditividad de frecuencias también es válida como aproximación, más no exacta para las frecuencias ficticias (efectivas) resultantes de la estimación de los valores esperados de los tiempos de espera asociados a cada una de las líneas, en situación de congestión.

En efecto, reemplazando las probabilidades de arribo $\{\pi_i^L\}_{i \in L}$ estimadas a partir de la ecuación (3.9), en (3.29), se tiene que:

$$p_L = \sum_{i \in L} p_i \pi_i^L = \sum_{i \in L} p_i \left(\frac{f_i}{\sum_{j \in L} f_j} \right) \Leftrightarrow p_L \sum_{i \in L} f_i = \sum_{i \in L} p_i f_i$$

Combinando lo anterior con la aproximación establecida en (3.28), se obtiene la propiedad enunciada:

$$E(W_L) \cong \frac{1}{p_L (\sum_{i \in L} f_i)} \Rightarrow E(W_L)^{-1} \cong p_L (\sum_{i \in L} f_i)$$

$$E(W_L)^{-1} \cong \sum_{i \in L} E(W_i)^{-1} \quad (3.30)$$

La igualdad anterior no es exacta, debido al supuesto implícito en (3.27) de que las probabilidades de abordaje sean independientes. Este asunto es verificado en las simulación que se describen en el capítulo siguiente.

3.3 ASIGNACIÓN DE PASAJEROS EN CONGESTIÓN

Corresponde ahora la determinación de la regla de distribución de dicha demanda sobre su conjunto de líneas atractivas. Sea P_i^L la probabilidad que tienen los individuos que escogieron el conjunto L de abordar la línea l .

Así, el flujo asignado a cada línea corresponde a la suma de los individuos que optan sólo por esa línea, más una fracción P_i^L de aquellos que están dispuestos a hacerlo, pero que no la tienen como única alternativa. De este modo, el problema de encontrar el valor esperado del tiempo de espera experimentado por estos usuarios pasa por la determinación de sus probabilidades de abordar a cada línea, a través de la siguiente condición implícita:

$$P_i^L = P(\text{abordar } l / e_l < \min_{j \in L \setminus \{l\}} e_j) P(e_l < \min_{j \in L \setminus \{l\}} e_j) + \sum_{j \in L \setminus \{l\}} P(\text{abordar } l / e_j < \min_{k \in L \setminus \{j\}} e_k) P(e_j < \min_{k \in L \setminus \{j\}} e_k)$$

$$P_i^L = [p_l + (1 - p_l) P_i^L] \pi_i^L + \left[\sum_{j \in L \setminus \{l\}} (1 - p_j) \pi_j^L \right] P_i^L \quad (3.31)$$

luego, despejando y reconociendo que las probabilidades de arribo de los buses satisfacen la condición $\sum_{i \in L} \pi_i^L = 1$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
P_l^L [1 - (1 - p_l)\pi_l^L - \sum_{j \in L \setminus \{l\}} (1 - p_j)\pi_j^L] &= p_l \pi_l^L \\
P_l^L [1 - \sum_{j \in L} (1 - p_j)\pi_j^L] &= P_l^L [1 - \sum_{j \in L} \pi_j^L + \sum_{j \in L} p_j \pi_j^L] = p_l \pi_l^L \\
P_l^L &= \frac{p_l \pi_l^L}{\sum_{j \in L} p_j \pi_j^L} \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Luego, de la ecuación (3.32) se desprende que en un escenario descongestionado ($p_l = 1, \forall l$) la probabilidad de abordar la línea $l \in L$, experimentada por aquellos usuario que están dispuestos a abordar cualquier servicio de L , corresponde exactamente a la probabilidad de que el primer bus que arribe al paradero pertenezca a la línea l .

Un interesante resultado se obtiene reemplazando en (3.32) las probabilidades de arribo $\{\pi_l^L\}_{l \in L}$, por cuanto se demuestra que la regla de distribución de flujos en condiciones de restricción de capacidad corresponde al *método de frecuencias efectivas* usado en De Cea *et al.* (1993), Bouzaïene-Ayari *et al.* (1995), Cominetti y Correa (2001) y en Cepeda *et al.* (2006), a saber:

$$P_l^L = \frac{p_l \pi_l^L}{\sum_{j \in L} p_j \pi_j^L} = \frac{p_l \frac{f_l}{\sum_{k \in L} f_k}}{\sum_{j \in L} \left(p_j \frac{f_j}{\sum_{k \in L} f_k} \right)} = \frac{p_l f_l}{\sum_{j \in L} p_j f_j} = \frac{f_l'}{\sum_{j \in L} f_j'} \tag{3.33}$$

En efecto, independiente de la forma de las probabilidades de abordaje de los buses $\{p_l\}_{l \in L}$ (cuando éstos están en los paraderos), la regla de distribución de flujos sobre un conjunto de líneas $\{P_l^L\}_{l \in L}$ es *directamente proporcional a la frecuencia efectiva* de cada una de ellas.

De este modo queda demostrado que los efectos de la restricción de capacidad no solo son evidentes en los tiempos de espera experimentados por los usuarios, sino que además alcanzan aspectos como la asignación de pasajeros. El modelo de Wu *et al.* (1994) desconoce tal característica y asigna los pasajeros de acuerdo al clásico modelo de frecuencias nominales, mientras que los modelos de De Cea *et al.* (1993) y Bouzaïene-Ayari *et al.* (1995) la asumen, mas no proveen su demostración formal.

4. MODELACIÓN DE LA CONGESTIÓN EN PARADEROS

Una vez estudiadas las características cualitativas del modelo de congestión y del método de distribución de pasajeros en condiciones de capacidad restringida, corresponde la determinación de las probabilidades de abordaje a cada una de las líneas $\{p_i\}_{i \in L}$. Ello, debido a que tanto los tiempos de espera como la asignación de pasajeros son dependientes de dichas probabilidades.

Para lo anterior es posible distinguir dos formas. La *primera* corresponde al modelamiento de un sistema de espera a través de la teoría general de colas, con la cual es posible obtener soluciones analíticas (exactas o aproximadas) para el tiempo de espera. Con dichas soluciones, y utilizando la ecuación (3.25), es posible obtener expresiones analíticas de las probabilidades de abordaje, para luego con ellas obtener expresiones también analíticas para la asignación de pasajeros que sean aplicables a paraderos que sirvan diversos tipos de demanda con distintas líneas.

En efecto, la aparente complejidad en la determinación analítica directa de las probabilidades de abordaje $\{p_i\}$ induce el estudio y determinación (mediante teoría de colas) de las características globales del fenómeno (tiempos de espera) de la congestión en un sistema determinado, a fin de introducirlas posteriormente en algún modelo propuesto para la estimación de los tiempos de espera, que sea consecuente con el concepto de la frecuencia efectiva. Ello, por cuanto los procesos de nacimiento y muerte son *buenos* modelos para estudiar cambios en el tamaño de poblaciones cuyos miembros pueden aparecer y desaparecer; es decir, permiten transiciones no sólo a un estado mayor, sino también a un estado menor.

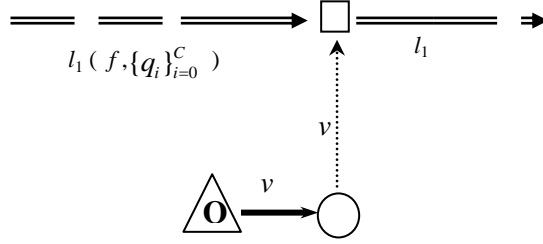
Cabe destacar que el proceso de nacimiento y muerte que se desea modelar debe permitir cambios de estado a niveles no necesariamente adyacentes, es decir, debe ser capaz de permitir reducciones de población correspondientes a la capacidad de los buses. Bajo esta forma son analizados los paraderos simples (una línea) y generales (varias líneas).

La *segunda* forma consiste en intentar determinar directamente las probabilidades de abordaje a través de un análisis más fino de los fenómenos probabilísticos que intervienen en el proceso de arribo y abordaje de buses. Bajo esta forma son analizados los paraderos con distintos conjuntos de líneas atractivas.

4.1 PARADERO SIMPLE

Para alcanzar el objetivo anteriormente planteado se comenzará estudiando un paradero simple mediante la **teoría de colas**. Al igual que en [Gendreau \(1984\)](#), se entenderá por paradero simple a una zona de parada de buses de solo una línea, los cuales sirven a usuarios que llegan al paradero de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa ν que desean acceder solo dicha línea, como se ejemplifica en la Figura N°4-1.

Figura N°4-1
Paradero Simple Servido por solo 1 Línea



Los buses de la línea arriban según un proceso de Poisson (independiente de las llegadas de los pasajeros) a una tasa f con intervalos exponencialmente distribuidos, sin embargo, a diferencia de lo supuesto por [Gendreau \(1984\)](#), la capacidad disponible de los vehículos será una variable aleatoria discreta de distribución genérica $\{q_i\}_{i=0}^C$. Así, las ecuaciones de recurrencia asociadas a las probabilidades $P_\alpha(t+h)$ de largos de cola α en el instante $t+h$, en función de las características operacionales del sistema estudiado $(v, f, \{q_i\}_{i=0}^C)$, son las siguientes:

$$P_n(t+h) = P_{n-1}(t)(vh + o(h)) + (fh + o(h)) \sum_{i=0}^C q_i P_{n+i}(t) + P_n(t)(1 - (v+f)h + o(h)) \quad n \geq 1$$

$$P_0(t+h) = (fh + o(h)) \sum_{i=0}^C q_i \left[\sum_{j=0}^i P_j(t) \right] + P_0(t)(1 - (v+f)h + o(h)) \quad n = 0$$

Las ecuaciones diferenciales asociadas a las ecuaciones de recurrencia que describen el proceso de nacimiento y muerte son:

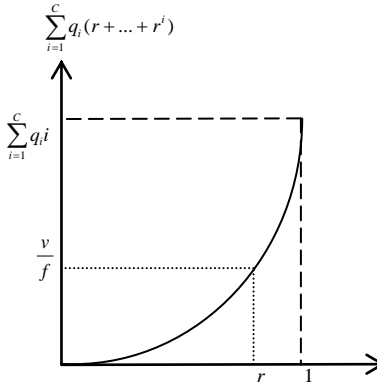
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_n &= vP_{n-1} + f \sum_{i=0}^C q_i P_{n+i} - (v+f)P_n \quad n \geq 1 \\ \frac{d}{dt} P_0 &= f \sum_{i=0}^C q_i \left[\sum_{j=0}^i P_j \right] - (v+f)P_0 \quad n = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

La condición de régimen estacionario impuesta sobre las ecuaciones diferenciales entrega las condiciones generales del proceso de nacimiento y muerte:

$$\frac{d}{dt} P_n = 0 \Leftrightarrow 0 = vP_{n-1} + f \sum_{i=0}^C q_i P_{n+i} - (v+f)P_n \quad n \geq 1 \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_0 = 0 \Leftrightarrow (v+f)P_0 &= f \sum_{i=0}^C q_i \left[\sum_{j=0}^i P_j \right] = f \sum_{i=0}^C q_i \left[P_0 + \sum_{j=1}^i P_j \right] = fP_0 + f \sum_{i=1}^C q_i \left[\sum_{j=1}^i P_j \right] \\ \frac{d}{dt} P_0 = 0 \Leftrightarrow P_0 &= \frac{f}{v} \sum_{i=1}^C q_i \left[\sum_{j=1}^i P_j \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

Luego, dadas las características de las ecuaciones anteriores, se plantea una solución del tipo $P_n = Kr^n$ ($n \geq 1$), en cuyo caso la ecuación (4.2) puede simplificarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
0 &= vKr^{n-1} + f \sum_{i=0}^C q_i Kr^{n+i} - (v+f)Kr^n \quad n \geq 1 \\
\Leftrightarrow 0 &= v + f \sum_{i=0}^C q_i r^{i+1} - (v+f)r \\
\Leftrightarrow 0 &= f \sum_{i=0}^C q_i r^{i+1} - f - (v+f)(r-1) \\
\Leftrightarrow f \sum_{i=0}^C q_i (r^{i+1} - 1) &= (v+f)(r-1) \\
\Leftrightarrow \sum_{i=0}^C q_i \left(\frac{r^{i+1} - 1}{r-1} \right) &= \frac{v}{f} + 1 \\
\Leftrightarrow \sum_{i=0}^C q_i (1 + r + \dots + r^i) &= \frac{v}{f} + 1 \\
\Leftrightarrow \sum_{i=1}^C q_i (r + \dots + r^i) &= \frac{v}{f}
\end{aligned}$$


Es decir, r es solución de la ecuación (4.4):

$$f \sum_{i=1}^C q_i (r + \dots + r^i) = v \quad (4.4)$$

Luego, la condición de borde relacionada con que *el valor esperado de la oferta de transporte sea mayor que su demanda* induce la unicidad de la variable r como solución de (4.4):

$$v < f \sum_{i=0}^C i q_i \Rightarrow \exists! r = r(f, \{q_i\}_{i=0}^C, v) \in (0,1) \text{ t.q. } f \sum_{i=1}^C q_i (r + \dots + r^i) = v$$

Utilizando la condición que satisface la suma de las probabilidades de largos de cola es posible determinar el valor de la constante K en la solución propuesta $P_n = Kr^n$ ($n \geq 1$), esto es:

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{i=0}^{\infty} P_i = P_0 + \sum_{i=1}^{\infty} Kr^i = P_0 + K \frac{r}{1-r} = \frac{Kf}{v} \sum_{i=0}^C q_i r \left(\frac{r-r^i}{1-r} \right) + K \frac{r}{1-r} \\
1 &= \frac{K}{v(1-r)} \left[f \sum_{i=0}^C q_i r - f \sum_{i=0}^C q_i r^{i+1} + vr \right] = \frac{K}{v(1-r)} \left[-f \sum_{i=0}^C q_i r^{i+1} + (v+f)r \right] \\
1 &= \frac{K}{v(1-r)} [v - (v+f)r + (v+f)r] = \frac{K}{(1-r)} \Rightarrow K = 1-r \\
K = 1-r &\Rightarrow P_n = (1-r)r^n \quad (4.5)
\end{aligned}$$

Una vez determinada la constante, es posible encontrar una expresión del largo medio de cola (Q) dependiente de la variable r .

$$Q = \sum_{i=0}^{\infty} iP_i = \sum_{i=1}^{\infty} i(1-r)r^i = (1-r)r \sum_{i=1}^{\infty} ir^{i-1} = (1-r)r \frac{d}{dr} \sum_{i=0}^{\infty} r^i = (1-r)r \frac{d}{dr} \frac{1}{1-r} = \frac{r}{1-r} \quad (4.6)$$

Luego, la expresión analítica del valor esperado del tiempo de espera se obtiene utilizando la fórmula de Little, esto es:

$$Q = vW \Rightarrow W = \frac{1}{v}Q = \frac{1}{v} \frac{r}{1-r} \quad (4.7)$$

De todo lo anterior se desprende que el análisis de un paradero simple, cuando la capacidad de los buses es modelada a través de una variable aleatoria discreta de distribución genérica $\{q_i\}_{i=0}^C$, es similar al caso en que la capacidad es fija (ver [Gendreau 1984](#)), salvo por la condición de régimen estacionario (4.4) que debe satisfacer la variable r .

Antes intentar seguir con la determinación del largo medio de cola y del valor esperado del tiempo de espera es posible obtener un interesante resultado. En efecto, la ecuación (4.4) puede ser replanteada con el objeto de reescribir (4.7) y obtener una expresión para la frecuencia efectiva de la línea, de la cual también se desprende la probabilidad de abordar sus buses, a saber:

$$\begin{aligned} f \sum_{i=1}^C q_i (r + \dots + r^i) &= fr \sum_{i=1}^C q_i (1 + r + \dots + r^{i-1}) = f \frac{r}{1-r} \sum_{i=1}^C q_i (1 - r^i) = v \\ \Leftrightarrow \frac{r}{1-r} &= \frac{v}{f \sum_{i=1}^C q_i (1 - r^i)} \stackrel{(4.7)}{\Rightarrow} W = \frac{1}{f \sum_{i=1}^C q_i (1 - r^i)} \Rightarrow p_l \approx \sum_{i=1}^C q_i (1 - r^i) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\Leftrightarrow p_l \approx \sum_{i=1}^C q_i (1 - r^i) = \sum_{i=0}^C q_i - \sum_{i=0}^C q_i r^i = 1 - \sum_{i=0}^C q_i r^i \quad (4.9)$$

De la ecuación anterior se desprende que la expresión $\sum_{i=0}^C q_i r^i$ representa una aproximación de la probabilidad de no poder abordar los vehículos de la línea cuando ellos se encuentran en el paradero. Asimismo, si se simplifica el tratamiento de la capacidad disponible y se asume que con probabilidad 1 ésta será c , entonces la probabilidad de abordaje a los buses de la línea es $1 - r^c$.

La determinación del largo medio de cola y del valor esperado del tiempo de espera requiere de la solución exacta r de la ecuación (4.4). Sin embargo, la complejidad de ésta (*Modelo Exacto*) induce la utilización de simplificaciones para la obtención de aproximaciones a las características generales (Q, W) del sistema en estudio, como se presenta a continuación.

4.1.1 Modelos de Congestión

4.1.1.1 Modelo de Congestión Lineal

Con el objeto de encontrar una expresión lineal para la frecuencia efectiva de un servicio, dependiente de su frecuencia nominal, capacidad y demanda, es posible plantear una aproximación \bar{r} , de la solución exacta r_* de la ecuación (4.4), como la siguiente:

$$\bar{r} = \frac{v \sum_{i=0}^c q_i i}{f \sum_{i=0}^c q_i i + v \left(\left(\sum_{i=0}^c q_i i \right) - 1 \right)} \Rightarrow Q = \frac{v}{f - \frac{v}{\sum_{i=0}^c q_i i}} \Rightarrow W = \frac{1}{f - \frac{v}{\sum_{i=0}^c q_i i}}$$

Luego, dado que el valor esperado de la capacidad disponible de los buses es $c = \sum_{i=0}^c q_i i$ y entendiéndose que W puede representarse como el inverso de la frecuencia efectiva observada por los usuarios, se obtiene que dicha frecuencia efectiva sea de la forma

$$f' = f - \frac{v}{c} \Leftrightarrow f' = f \left(1 - \frac{v}{fc} \right) = fp \quad (4.10)$$

La principal ventaja de la aproximación planteada es la simpleza con la que se obtiene una expresión analítica para la probabilidad (p) de abordar dicha línea una vez que sus buses se encuentran en los paraderos. En efecto, de la ecuación (4.9) se desprende que **la probabilidad de abordar un bus que se encuentra en el paradero puede ser modelada a través de una expresión lineal decreciente con la razón entre la demanda y la oferta disponible de dicha línea (modelo lineal)**.

Intuitivamente, esta aproximación asume que cada una de las potencias de la ecuación (4.4) es aproximada por r^c , donde c es el valor esperado de la capacidad disponible de los vehículos, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{v}{f} &= \sum_{i=1}^c q_i (r + \dots + r^i) \cong \sum_{i=1}^c q_i (r^c + \dots + r^c) \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^c q_i \left(\sum_{j=1}^i r^c \right) &= r^c \sum_{i=1}^c i q_i = r^c c \cong \frac{v}{f} \Rightarrow \bar{r}^c \cong \frac{v}{cf} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Cuando la capacidad disponible de los buses es fija o relativamente estable, esta aproximación sobrestima la variable r y por lo tanto subestima la probabilidad de abordar los buses, lo que finalmente se traduce en sobrestimaciones de los tiempos de espera. La magnitud de ellas será estudiada más adelante, cuando sean comparadas las diferentes aproximaciones.

4.1.1.2 Modelo de Congestión Cuadrático

Dado que el modelo anterior (lineal) sobrestima la solución r_* , es posible plantear otra aproximación de dicha variable (\bar{r}) que corrija en algún grado esta deficiencia, a saber:

$$\bar{r} = \frac{v \sum_{i=0}^c q_i i}{f \sum_{i=0}^c q_i i + v \left(\left(\sum_{i=0}^c q_i i \right) - \frac{v}{f \sum_{i=0}^c q_i i} \right)} \Rightarrow Q = \frac{v}{f - \frac{v^2}{f \left(\sum_{i=0}^c q_i i \right)^2}} \Rightarrow W = \frac{1}{f - \frac{v^2}{f \left(\sum_{i=0}^c q_i i \right)^2}}$$

$$f' = f - \frac{v^2}{f \left(\sum_{i=0}^c q_i i \right)^2} \Leftrightarrow f' = f \left(1 - \left(\frac{v}{fc} \right)^2 \right) = fp \quad (4.12)$$

Bajo esta aproximación también es directa la obtención de una expresión analítica aproximada para la probabilidad (p), en efecto, **la probabilidad de abordar un bus que se encuentra en el paradero puede ser modelada a través de una expresión decreciente con la razón cuadrática entre la demanda y la oferta disponible de dicha línea (modelo cuadrático).**

Intuitivamente, y a diferencia del modelo anterior, esta aproximación asume que cada una de las potencias de la ecuación (4.4) es aproximada por $r^{c/2}$, donde c es el valor esperado de la capacidad disponible de los buses:

$$\frac{v}{f} = \sum_{i=1}^c q_i (r + \dots + r^i) \cong \sum_{i=1}^c q_i (r^{c/2} + r^{c/2} + \dots + r^{c/2})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^c q_i \left(\sum_{j=1}^i r^{c/2} \right) = r^{c/2} \sum_{i=1}^c i q_i = r^{c/2} c \cong \frac{v}{f} \Rightarrow \bar{r}^c \cong \left(\frac{v}{cf} \right)^2 \quad (4.13)$$

4.1.1.3 Modelo de Congestión Potencial

Otro posible modelo de congestión es el que se obtiene a partir de la aproximación que a continuación se presenta:

$$\frac{v}{f} = \sum_{i=1}^c q_i (r + \dots + r^i) \approx \sum_{i=1}^c q_i (r^{\frac{i+1}{2}} i) = r \sum_{i=1}^c i q_i (\sqrt{r})^{i-1}$$

Luego del cambio variable $x = \sqrt{r}$ y de una nueva aproximación se obtiene una estimación de la solución r :

$$\frac{v}{f} \cong \sum_{i=1}^C i q_i (\sqrt{r})^{i-1} = r \frac{d}{dx} \sum_{i=1}^C q_i x^i \approx r \frac{d}{dx} x^c = r c x^{c-1} = c r^{\frac{c+1}{2}} \Rightarrow \bar{r} = \left(\frac{v}{c f} \right)^{\frac{2}{c+1}} \quad (4.14)$$

Si r_* es la solución de la ecuación (4.4), entonces a partir de una aproximación de la ecuación (4.8) es posible obtener una aproximación para la frecuencia efectiva:

$$W \cong \frac{1}{f \left(1 - \sum_{i=1}^C q_i r^i \right)} \approx \frac{1}{f(1-r_*^c)} \approx \frac{1}{f(1-\bar{r}^c)} \Rightarrow f' = f \left(1 - \left(\frac{v}{c f} \right)^{\frac{2c}{c+1}} \right) = f p \quad (4.15)$$

También en este caso es directa la obtención de una expresión analítica aproximada para la probabilidad (p), en efecto, **la probabilidad de abordar un bus que se encuentra en el paradero puede ser modelada a través de una expresión decreciente con una potencia de la razón entre la demanda y la oferta de dicha línea (modelo potencial).**

4.1.1.4 Modelo Aproximado de Congestión

Finalmente, un modelo más general de congestión se obtiene considerando la variabilidad de la capacidad disponible de los buses, a través de una variable aleatoria discreta de distribución genérica $\{q_i\}_{i=0}^C$, como se presenta a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{v}{f} &= \sum_{i=1}^C q_i (r + \dots + r^i) = r \underbrace{(q_1 + \dots + q_C)}_{\alpha_1} + r^2 \underbrace{(q_2 + \dots + q_C)}_{\alpha_2} + \dots + r^C \underbrace{q_C}_{\alpha_C} = \sum_{i=1}^C \alpha_i r^i \\ &= \bar{\alpha} \sum_{i=1}^C \left(\frac{\alpha_i}{\bar{\alpha}} \right) r^i \geq \bar{\alpha} r^{\sum_{i=1}^C \left(\frac{\alpha_i}{\bar{\alpha}} \right)} \end{aligned}$$

donde $\bar{\alpha} = \sum_{i=1}^C \alpha_i = q_1 + 2q_2 + \dots + Cq_C = c$, la desigualdad está dada por la convexidad y:

$$\sum_{i=1}^C i \left(\frac{\alpha_i}{\bar{\alpha}} \right) = \frac{\sum_{i=1}^C i \binom{i+1}{2} q_i}{\sum_{i=1}^C i q_i} = \frac{E(c^2) + E(c)}{2E(c)} = \frac{E(c) + 1}{2} + \frac{Var(c)}{2E(c)} = \beta$$

Luego, abusando de la notación y reemplazando $c = E(c)$ y $\sigma^2 = Var(c)$ se tiene que el modelo aproximado de congestión es similar al modelo potencial de congestión presentado anteriormente:

$$\frac{v}{f} = \sum_{i=1}^C q_i (r + \dots + r^i) \geq \approx c r^{\frac{c+1+\sigma^2}{2+2c}} = c r^\beta \Rightarrow \bar{r} = \left(\frac{v}{c f} \right)^{\frac{2}{c+1+\frac{\sigma^2}{c}}} = \left(\frac{v}{c f} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (4.16)$$

Si r_* es la solución de la ecuación (4.4), entonces a partir de una aproximación de la ecuación (4.8) es posible obtener una nueva es posible obtener una aproximación para la frecuencia efectiva:

$$f' = f \left(1 - \sum_{i=1}^c q_i r^i \right) \approx f(1 - r_*^c) \approx f(1 - \bar{r}^c) = f \left(1 - \left(\frac{v}{cf} \right)^{\frac{c}{\beta}} \right)$$

$$\Rightarrow f' = f \left(1 - \left(\frac{v}{cf} \right)^{\frac{c}{\beta}} \right) = fp \quad (4.17)$$

También en este modelo *la probabilidad de abordar un bus que se encuentra en el paradero puede ser modelada como una expresión decreciente con la razón potencial entre la demanda y la oferta disponible de dicha línea*. Cabe destacar que cuando la capacidad disponible de los vehículos es constante ($\sigma^2 = 0$), los modelos potencial y aproximado son iguales.

Es posible plantear tantas aproximaciones como se desee, sin embargo, lo importante es verificar con cuál de ellas se modela mejor la probabilidad de abordaje y se estima de forma más exacta el tiempo de espera. Otro elemento importante corresponde a la complejidad del modelo, debido a que es posible que las bondades de un modelo más exacto se pierdan producto de la compleja forma funcional del mismo.

Asimismo, es necesario tener presente que dadas las características del sistema en estudio (paradero simple), tanto la demanda como la oferta están referidas al total del sistema; por lo que la aproximación finalmente utilizada debe ser validada bajo condiciones más generales. En efecto, en un paradero simple servido por sólo una línea, la probabilidad de abordaje y su frecuencia efectiva dependerá de la demanda de esa línea, que corresponde exactamente a los pasajeros que la abordan. Sin embargo, en paraderos más generales (varias líneas y/o usuarios con distintos conjuntos de líneas atractivas), es necesario determinar si dicha dependencia está referida a todos los usuarios del sistema, a los usuarios que desean abordar cada línea o a los usuarios que finalmente la abordan.

4.1.2 Análisis Comparativo de Modelos de Congestión

Con el propósito de analizar los modelos antes expuestos, a continuación se presenta una breve comparación de los distintos enfoques desarrollados en el modelamiento de la congestión. Estos últimos serán comparados con los resultados empíricos obtenidos de simulaciones simples. El caso práctico a ser estudiado es el de un paradero simple, en el que tanto sus usuarios como los buses que operan en él, arriban de acuerdo a procesos Poisson con tasas conocidas, además, los buses poseen una capacidad disponible constante c .

Dado que en estricto rigor la variable que se desea estimar con precisión es el tiempo de espera, de la ecuación (4.8) se concluye que ello es equivalente a la expresión $1 / f(1 - \sum_{i=1}^c q_i r^i)$. Luego, a partir del análisis de las modelaciones del tiempo de espera desarrolladas por [Gendreau \(1984\)](#) y

De Cea *et al.* (1998), es posible determinar las aproximaciones utilizadas para esta expresión, las cuales son comparadas en el Cuadro N°4-1 con las usadas en los distintos modelos de congestión anteriormente presentados.

Cuadro N°4-1
Aproximaciones a la Expresión: $1/f(1 - \sum_{i=1}^C q_i r^i)$

Modelo de Gendreau	Modelo de DeCea ³	Modelo Lineal
$\frac{1}{f \left(1 - \frac{1 + \frac{v}{f}}{1 + \frac{fc^2}{v}} \right)}$	$\frac{1}{f} + \left(\frac{\alpha + \beta \left(\frac{C-c}{c} \right)^\delta}{f} \right) \left(\frac{v + (c-C)f}{fC} \right)^{\gamma + \theta \left(\frac{C-c}{c} \right)}$	$\frac{1}{f \left(1 - \frac{v}{cf} \right)}$
Modelo Cuadrático	Modelo Potencial	Modelo Aproximado
$\frac{1}{f \left(1 - \left(\frac{v}{cf} \right)^2 \right)}$	$\frac{1}{f \left(1 - \left(\frac{v}{cf} \right)^{\frac{2c}{c+1}} \right)}$	$\frac{1}{f \left(1 - \left(\frac{v}{cf} \right)^{c+1 + \frac{\sigma^2}{c}} \right)}$

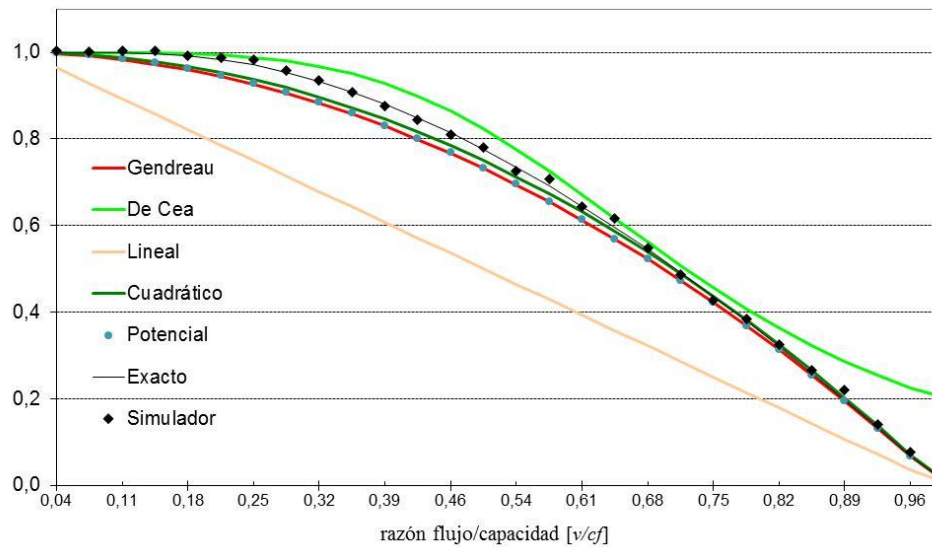
Del Cuadro N°4-1 se desprende que el modelo de De Cea *et al.* (1998) no intenta encontrar una aproximación de la solución r_* , sino directamente del tiempo de espera, mediante la calibración de una compleja función potencial. A diferencia del modelo de De Cea, el modelo de Gendreau y el resto de los modelos planteados en este capítulo no requieren calibración, por cuanto explican el fenómeno en estudio mediante las variables que intervienen en él. Ello puede ser relevante si se considera que un modelo será más robusto en la medida que posee más modelación y menos calibración, por cuanto en este último caso sus resultados podrían estar limitados a las condiciones y contexto bajo las cuales se calibra.

En el Gráfico N° 4-1 se muestran los modelos de congestión (frecuencias efectivas) postulados por De Cea *et al.* (1998) y Gendreau (1984), además de los resultados de las simulaciones y los obtenidos a partir de los modelos de congestión exacto, Lineal, Cuadrático y Potencial, para un paradero simple servido por un servicio de 7 buses/hr con buses que poseen 20 pasajeros como capacidad disponible. De este gráfico se observa que el simulador reproduce correctamente los resultados obtenidos de la solución al modelo exacto o “teórico”, validando de paso su utilización posterior para reproducir el comportamiento del sistema en estudio.

Se observa que, para demandas inferiores al 30% de la capacidad del sistema, la frecuencia efectiva asumida implícitamente en el modelo de De Cea *et al.* (1998) es la que mejor se aproxima al modelo exacto, sin embargo, para demandas mayores al 70%, dicho modelo presenta una importante sobre-estimación de la frecuencia efectiva, provocada posiblemente por un “efecto de borde” asociado a las simulaciones respecto de las cuales se calibró dicho modelo.

³ Con los parámetros calibrados $\alpha = 4,016$; $\beta = 1,027$; $\delta = 0,3174$; $\gamma = 4,22$ y $\theta = 6,18$.

Gráfico N°4-1
Modelos de Congestión $p = f'/f$ vs v/cf



Este efecto se redujo en las simulaciones, sin embargo, a pesar de que desde el punto de vista teórico el tiempo de espera tiende a infinito cuando la demanda se aproxima a la capacidad, es necesario tener presente que en la práctica el sistema en estudio no corresponde necesariamente al modelo exacto producto de que la demanda es dinámica, es decir, no es constante al interior de cada periodo.

Se observa también una gran semejanza entre el modelo Potencial y el de Gendreau (1984), sin embargo, es el modelo cuadrático el que se asemeja sistemáticamente al modelo exacto o teórico. Particularmente esto último se presenta cuando la demanda se encuentra entre el 30% y el 90% de la capacidad del sistema, convirtiéndolo en un interesante modelo de congestión como se observará más adelante.

Finalmente, el modelo de reducción lineal planteado para describir el comportamiento de la frecuencia efectiva, tal como fuera mencionado en la sección anterior, la subestima de manera severa respecto de la observada en las simulaciones, lo que se traduce en sobrestimaciones de los tiempos de espera experimentados en los paraderos. En efecto, el tiempo de espera promedio en dicho modelo corresponde aproximadamente a 2,2 veces el tiempo de espera promedio simulado, factor muy cercano al ponderador del tiempo de espera (2,18) calibrado para los modos bus y taxi-colectivo en la ciudad de Santiago (Sectra, 1998).

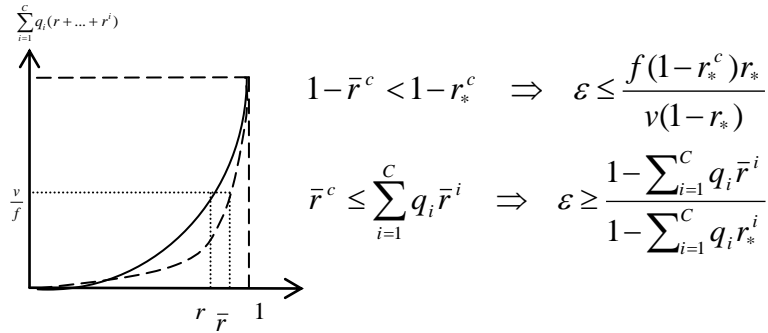
Sin embargo, un factor promedio de amplificación puede ser poco representativo cuando se comparan valores muy distintos de tiempos de espera, por esta razón se obtuvo el factor promedio ponderado de sobrestimación de los tiempos de espera para valores de demanda entre el 10% y el 90% de la capacidad total del sistema en estudio, obteniéndose el valor 2, idéntico a la razón entre los ponderadores del tiempo de espera (2,18) y del tiempo de viaje (1,09) calibrados en Sectra (1998). Lo anterior se podría interpretar como *que el modelo de reducción lineal de frecuencias internaliza la percepción del tiempo de espera experimentado por los*

usuarios, a través de la sobrestimación de los tiempos de espera, sin embargo se trata de una cuestión meramente fortuita.

En rigor, la calidad de cada una de las aproximaciones debe ser medida de acuerdo al error porcentual (ε) en la estimación del tiempo de espera, de modo que si W_* es tiempo de espera calculado con la solución exacta r_* de la ecuación (4.4), entonces el error de cada modelo puede ser expresado de la siguiente forma:

$$\varepsilon = \frac{W_*}{\bar{W}} = \frac{f'}{f_*} = \frac{f(1-\bar{r}^c)}{v \frac{(1-r_*)}{r_*}} = \frac{(1-\bar{r}^c)}{\left(1 - \sum_{i=1}^c q_i r_*^i\right)} = \frac{(1-\bar{r}^c)}{(1-r_*^c)} \quad (4.18)$$

A partir de algunas propiedades es posible encontrar cotas para el error ε , a saber:



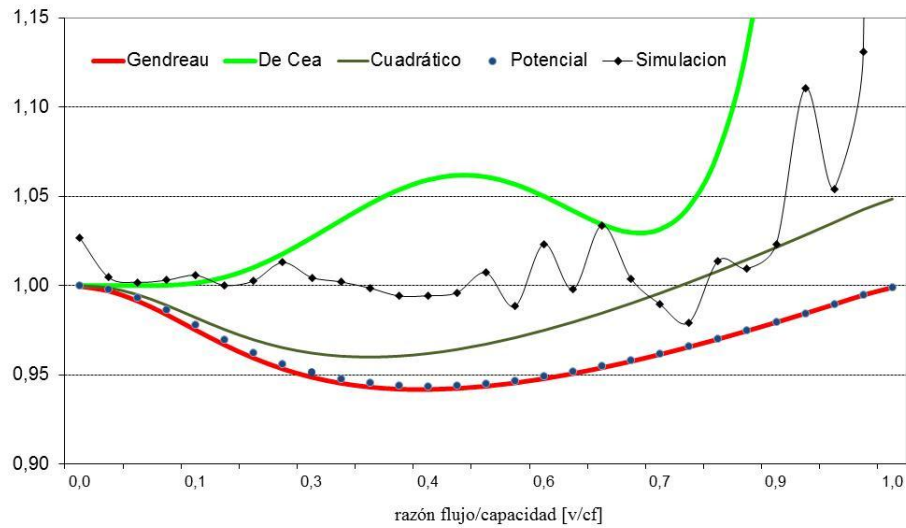
Se puede probar que la condición $1-\bar{r}^c < 1-r_*^c$ es siempre cierta para los modelos Lineal, Potencial y Aproximado, mientras en el modelo Cuadrático no es válida para valores de c (capacidad disponible) pequeños.

Considerando la similitud en la estimación de las frecuencias efectivas de los modelos (salvo el lineal), en el Gráfico N°4-2 se presentan los errores de los modelos, expresados como la razón entre los tiempos de espera obtenidos por ellos y en las simulaciones, respecto al que se obtiene usando el modelo exacto o teórico, tal como fuera planteado en la ecuación (4.18). A partir de esta información es posible hacer un diagnóstico más preciso de la calidad de los modelos presentados en esta sección, basado precisamente en el tiempo de espera.

Se observa en términos generales que hasta niveles de demanda de aproximadamente 70% de la oferta, los errores máximos en las estimaciones son del 6%, destacando el máximo 4% de error que presenta el modelo cuadrático. También los errores del modelo de [De Cea](#) son menores al 4% cuando la capacidad de los buses es semejante a su capacidad disponible (bajos niveles de congestión).

Gráfico N°4-2

Error en la Estimación de los Tiempos de Espera $\varepsilon = \frac{W_*}{\bar{W}}$ vs v/cf



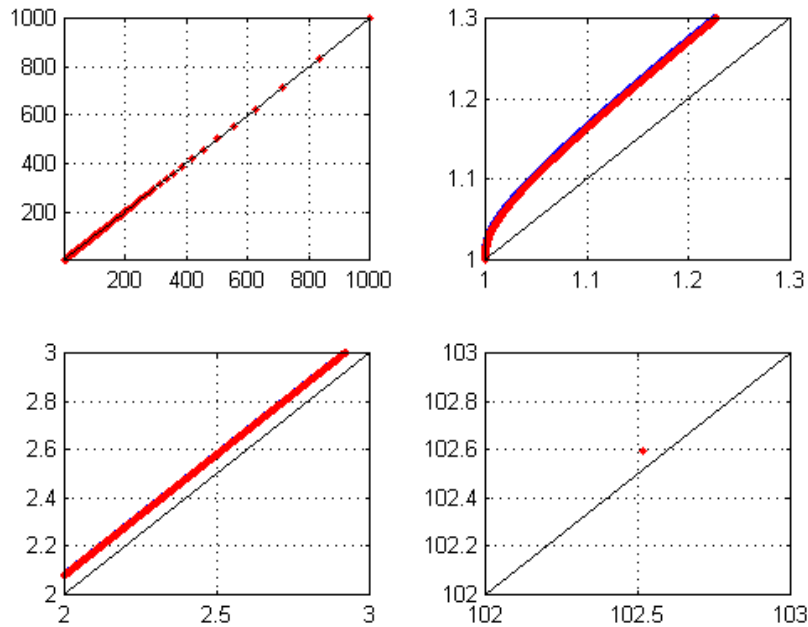
Para demandas cercanas a la oferta del sistema, el modelo cuadrático presenta subestimaciones del tiempo de espera crecientes de hasta el 5%, sin embargo, los modelos de **Gendreau** y **Potencial** presentan errores decreciente, mostrando los mejores comportamientos en situaciones de saturación. Asimismo, para estos niveles de demanda se observan resultados diversos en las simulaciones, explicados fundamentalmente por la inestabilidad que presentan los sistemas saturados, en los cuales pequeñas variaciones del flujo producen importantes diferencias en los tiempos de espera.

Para complementar el análisis, a continuación, en las figuras del Gráfico N°4-3, se presentan distintos zoom a los incrementos de los tiempos de espera, normalizados respecto a la situación sin congestión, que presentan los modelos **Potencial** y de **Gendreau** respecto del modelo exacto (diagonal).

De la superposición de las curvas presentadas en las figuras anteriores se desprende la innegable similitud entre los modelos de **Gendreau** y **Potencial**, además de sus excelentes aproximaciones al modelo exacto. En efecto, dichas figuras muestran en distintas escalas, la aproximación de ambos modelos a la solución exacta. Sin embargo, se observa una pequeña pero sistemática diferencia respecto de esta última, la que puede ser explicada observando que en el modelo exacto la probabilidad de abordaje a los buses permanece invariable frente a demandas bajas.

Es decir, los modelos de **Gendreau** y **Potencial** podrían ser mejorados desfasando el impacto de la congestión en la estimación de las frecuencias efectivas, debido a que los efectos de la congestión son menos percibidos cuando las demandas son bajas.

Gráfico N°4-3
Incrementos Normalizados de los Tiempos de Espera \overline{Wf} v/s W_*f



4.2 PARADERO CON USUARIOS HOMOGÉNEOS

Consideremos ahora el caso de un paradero un poco más general, que es servido por un conjunto L de líneas y cuyos usuarios (homogéneos) están dispuestos a abordar cualquiera de ellas. La tasa de llegada de los usuarios que optan por este conjunto de líneas es $y_{s=L} = \nu$. A diferencia de un paradero simple, en el que la demanda total del sistema corresponde exactamente al flujo asignado a la única línea, en este caso, dado que todos los usuarios se comportan de igual modo, sólo se debe cumplir que la suma de los pasajeros asignados a cada línea corresponda a la demanda de la estrategia constituida por ese conjunto de líneas, a saber:

$$y_{s=L} = y_s = \sum_{l \in L} \nu_l$$

Dada la similitud de los análisis para los casos de capacidad aleatoria o fija, se plantea a continuación la ecuación de recurrencia y la condición de régimen estacionario para el caso de capacidad fija, cuando $n \geq 1$:

$$P_n(t+h) = P_{n-1}(t)y_s h + \sum_{l \in L} P_{n+c_l}(t)f_l h + P_n(t)(1 - (y_s + \sum_{l \in L} f_l)h) \quad n \geq 1$$

$$\frac{d}{dt} P_n = 0 \Leftrightarrow 0 = y_s P_{n-1} + \sum_{l \in L} P_{n+c_l}(t)f_l - (y_s + \sum_{l \in L} f_l)P_n$$

Se observa que, nuevamente, es posible plantear una solución del tipo $P_n = Kr^n$ ($n \geq 1$), donde la condición de régimen estacionario sobre la variable r está dada por la ecuación (4.2):

$$\begin{aligned}
0 &= y_s + \sum_{l \in L} f_l r^{c_l+1} - (y_s + \sum_{l \in L} f_l)r \\
\Leftrightarrow \sum_{l \in L} f_l (r^{c_l+1} - 1) &= (y_s + \sum_{l \in L} f_l)(r - 1) \Leftrightarrow \sum_{l \in L} f_l \left(\frac{r^{c_l+1} - 1}{r - 1} \right) = y_s + \sum_{l \in L} f_l \\
\sum_{l \in L} f_l (1 + r + r^2 + \dots + r^{c_l}) - \sum_{l \in L} f_l &= \sum_{l \in L} f_l (r + r^2 + \dots + r^{c_l}) = \sum_{l \in L} f_l \left(\sum_{i=1}^{c_l} r^i \right) = y_s \quad (4.19)
\end{aligned}$$

La ecuación de recurrencia y su condición de régimen estacionario, para el caso en que $n=0$, son las siguientes:

$$\begin{aligned}
P_0(t+h) &= \sum_{l \in L} (P_0 + \dots + P_{c_l}) f_l h + P_0(t) (1 - (y_s + \sum_{l \in L} f_l)h) \\
\frac{d}{dt} P_0 &= 0 \Leftrightarrow 0 = \sum_{l \in L} (P_0 + \dots + P_{c_l}) f_l - P_0 y_s
\end{aligned}$$

Utilizando la condición $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$ se determina el valor de la constante K en $P_n = Kr^n$ ($n \geq 1$):

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k = \frac{Kr}{y_s} \sum_{l \in L} f_l \left(\frac{1 - r^{c_l}}{1 - r} \right) + \frac{Kr}{1 - r} \\
1 &= \frac{K}{y_s(1-r)} \left[\sum_{l \in L} (f_l r - f_l r^{c_l+1}) + y_s r \right] = \frac{K}{(1-r)} \Rightarrow K = 1 - r
\end{aligned}$$

Antes de intentar seguir con la determinación del largo medio de cola y del valor esperado del tiempo de espera es posible obtener un interesante resultado. En efecto, la ecuación (4.15) puede ser replanteada con el objeto de reescribir (4.7) y obtener una expresión para la frecuencia efectiva de un conjunto de líneas, de la cual también se desprende una primera aproximación de la probabilidad de abordar sus buses, a saber:

$$\begin{aligned}
y_s &= \sum_{l \in L} r f_l (1 + r + \dots + r^{c_l-1}) = \sum_{l \in L} r f_l \left(\frac{1 - r^{c_l}}{1 - r} \right) = \left(\frac{r}{1 - r} \right) \sum_{l \in L} f_l (1 - r^{c_l}) \\
\Leftrightarrow \frac{r}{1 - r} &= \frac{y_s}{\sum_{l \in L} f_l (1 - r^{c_l})} \stackrel{(4.7)}{\Rightarrow} W_L = \frac{1}{\sum_{l \in L} f_l (1 - r^{c_l})} \approx \frac{1}{\sum_{l \in L} f_l P_l} \quad (4.20)
\end{aligned}$$

De la aproximación anterior se desprende la condición de aditividad de frecuencias, expuesta en (3.30) y que, como se demostró en (3.33), interviene directamente en la asignación de pasajeros a líneas.

Dado que todos los usuarios se comportan de la misma forma, para cada usuario las probabilidades de abordar los buses de las líneas son las mismas, adicionalmente, si las capacidades disponibles promedio de los buses son similares y asumimos independencia de los eventos, se tiene que $p_L = p_l \forall l \in L$. De lo anterior se desprende que no es posible que las probabilidades de abordar cada línea dependan sólo de la cantidad de pasajeros que finalmente la abordan, por lo que dichas probabilidades deben depender de las variables globales del sistema, es decir:

$$p_L = p_l = 1 - r_l^{c_l} \quad \forall l \in L$$

$$\Rightarrow p_L = p_l(y_s; (f_1, \dots, f_m); (c_1, \dots, c_m)) \quad \forall l \in L$$

Los modelos propuestos para el caso de un paradero simple presentan un mismo patrón funcional, dependiente de las características de la única línea que en él opera. Luego, si el problema se replantea agregando todas las líneas en una sola, se obtiene una “gran línea” de alta frecuencia con buses de capacidad aleatoria, en la que su demanda es la demanda total del paradero, es decir:

$$p_L = \left(1 - \left(\frac{y_s}{\sum_{l \in L} f_l c_l} \right)^\alpha \right) \Rightarrow r^{c_l} = \left(\frac{y_s}{\sum_{l \in L} f_l c_l} \right)^\alpha \quad \forall l \in L \quad (4.21)$$

donde α puede ser 1 (lineal), 2 (cuadrático), $\frac{2c}{c+1}$ (potencial) o $\frac{c}{\beta}$ (aproximado), dependiendo de cual modelo se adopte. En efecto, para obtener una expresión analítica del valor esperado del tiempo de espera (W_L) hasta el abordaje a alguno de los buses del conjunto L de líneas es necesario asumir algún modelo de congestión de los anteriormente planteados. Manteniendo la generalidad, se puede estimar el valor esperado del tiempo de espera:

$$y_s = \sum_{l \in L} f_l (r + \dots + r^{c_l}) = \sum_{l \in L} f_l \sum_{i=1}^{c_l} r^i \cong \sum_{l \in L} f_l \sum_{i=1}^{c_l} r^\alpha = \sum_{l \in L} f_l r^\alpha \sum_{i=1}^{c_l} 1 = \sum_{l \in L} f_l r^\alpha c_l$$

$$\text{si } c = \frac{\sum_{l \in L} f_l c_l}{\sum_{l \in L} f_l} \Rightarrow y_s \cong r^\alpha \sum_{l \in L} f_l c_l \Leftrightarrow r^\alpha \cong \frac{y_s}{\sum_{l \in L} f_l c_l} \Leftrightarrow r^c \cong \left(\frac{y_s}{\sum_{l \in L} f_l c_l} \right)^\alpha$$

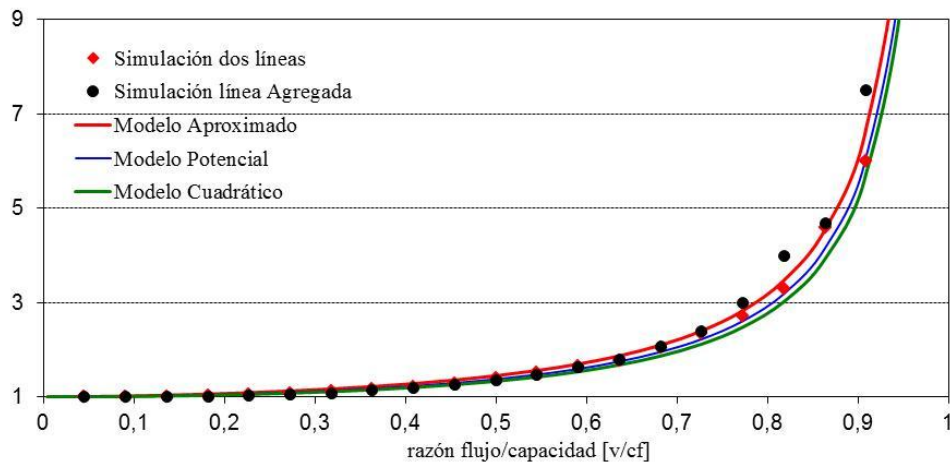
De este modo, si se acepta que la capacidad (c^s) de una estrategia s corresponde a la suma de las capacidades de transporte de las líneas que la conforman, se obtiene que su frecuencia corresponde a la suma de las frecuencias efectivas de sus líneas, las que a su vez **son independientes de las cantidades de pasajeros que les son asignados**, a saber:

$$f_s \equiv f_L = \sum_{l \in L} f_l' = \sum_{l \in L} f_l (1 - r^{c_l}) \cong \sum_{l \in L} f_l \left(1 - \left(\frac{y_s}{\sum_{l \in L} f_l c_l} \right)^\alpha \right) \equiv \sum_{l \in L} f_l \left(1 - \left(\frac{y_s}{c^s} \right)^\alpha \right)$$

$$\Rightarrow f_s \equiv f_L = \sum_{l \in L} f_l' \quad \text{donde} \quad f_l' = f_l \left(1 - \left(\frac{y_s}{c_s} \right)^\alpha \right) = f_l p_l \quad (4.22)$$

Con el objeto de ilustrar y verificar el análisis anterior, a continuación se presentan los resultados modelados y simulados en un paradero servido por dos líneas de características $l_1(c; f)$ y $l_2(0,5c; 1,14f)$. En particular, a continuación en Gráfico N°4-4 se muestran los tiempos de espera simulados (normalizados según el tiempo de espera sin congestión), considerando las dos líneas y sólo una agregada, además de los modelados con los modelos Cuadrático, Potencial y Aproximado.

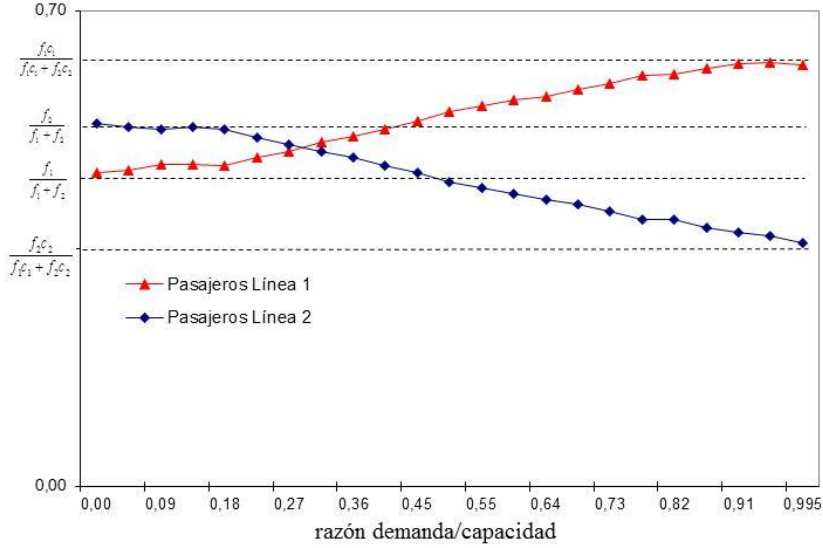
Gráfico N°4-4
Tiempos de Espera W/W_0 vs v/C_T



Del gráfico se observa que el Modelo Aproximado es el que mejor reproduce los tiempos de espera simulados, tanto para la agregación de las líneas como en la simulación de las dos líneas por separado. Lo anterior se debe a que incorpora la variabilidad de las capacidades disponibles de los buses. Esto último es definitivamente importante a la luz de las diferencias observadas entre los tiempos de espera simulados en ambas situaciones. Otro aspecto interesante de observar son las asignaciones de pasajeros en las líneas simuladas, ello es posible hacerlo en el siguiente Gráfico N°4-5 apreciando que, para demandas bajas, la asignación de pasajeros es similar a la resultante de un modelo proporcional a las frecuencias nominales (pues para estos niveles de demanda son similares a las frecuencias efectivas), y para demandas altas, es directamente proporcional a las ofertas de transporte de las líneas.

Del gráfico se desprende que la asignación de pasajeros (en términos porcentuales) es variable dependiendo del nivel de demanda, por cuanto la restricción de capacidad comienza a ser activa en la medida que la demanda crece. Esto último es importante considerarlo cuando se asume que las probabilidades de abordaje son independientes de las líneas ($p_L = p_l \forall l \in L$). En efecto, el supuesto anterior asume implícitamente que las capacidades disponibles promedio de las líneas son similares, obteniendo con ello asignaciones de pasajeros directamente proporcionales a las frecuencias nominales, las cuales como se muestra en el ejemplo podrían ser sustancialmente diferentes a las que efectivamente se observan.

Gráfico N°4-5
Asignación de Pasajeros [%] vs v/C_T



Particularmente, cuando todos los usuarios optan por un mismo conjunto de líneas, al usar los modelos propuestos en paraderos con usuarios homogéneos, las frecuencias efectivas son dependientes de la demanda potencial e independientes de las diferencias entre las capacidades de las líneas, por lo que las probabilidades de abordaje son las mismas para todas las líneas.

Este aspecto es superado por los modelos que son dependientes de la cantidad de pasajeros que abordan las líneas, por cuanto ella si está directamente relacionada con la capacidad de las líneas. Luego, es posible plantear una expresión alternativa (a la entregada en la ecuación 3.33) para la asignación de pasajeros a líneas, que recoja el fenómeno en comento cuando las probabilidades de abordaje son dependientes de las demandas por estrategias:

$$P_l^L = P_l^{s=L} = \frac{f_l \left(1 - \frac{y_s}{C_s}\right) + f_l \left(\frac{c_l y_s}{C_s}\right)}{\sum_{j \in L} f_j \left(1 - \frac{y_s}{C_s}\right) + f_j \left(\frac{c_j y_s}{C_s}\right)} = \frac{f_l \left(1 + \frac{y_s}{C_s} (c_l - 1)\right)}{\sum_{j \in L} f_j \left(1 + \frac{y_s}{C_s} (c_j - 1)\right)} \quad (4.23)$$

Cabe destacar que la expresión que acompaña a las frecuencias nominales en la ecuación anterior no puede ser interpretada como una probabilidad de abordaje, por cuanto es sólo un ponderador que permite una transición de la asignación de pasajeros, desde una directamente proporcional a la frecuencia nominal a una directamente proporcional a la oferta de transporte.

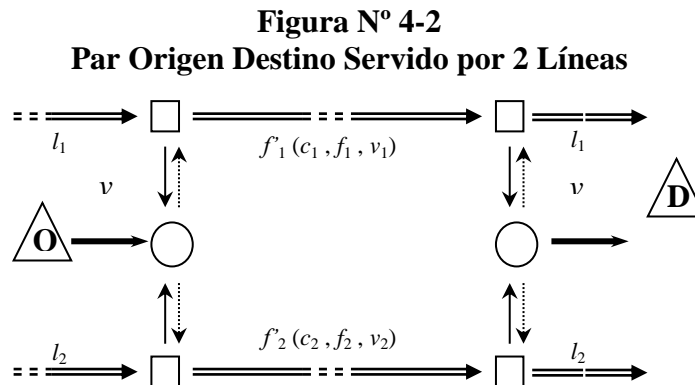
Los ejemplos estudiados (paradero simple y general) consideran que todos los usuarios toman las mismas decisiones y se comportan de igual forma, por lo que la demanda puede perfectamente interpretarse como una demanda a nivel de estrategia única. Luego, el análisis de las probabilidades de abordaje cuando los usuarios no son uniformes, es decir, cuando escogen distintas estrategias o conjuntos de líneas atractivas, se entrega a continuación.

4.3 PARADEROS CON USUARIOS HETEROGÉNEOS

El objetivo de esta sección es estudiar las propiedades generales de la congestión en un paradero servido por n líneas, en el que los usuarios no son uniformes, es decir, optan por distintos conjuntos de líneas atractivas o estrategias. Nos proponemos determinar los tiempos de espera W_s para cada estrategia, sin embargo, para simplificar la presentación se utilizará un par origen-destino servido por dos líneas. Cabe hacer presente que el supuesto de existencia de distintos tipos de usuarios será usado como dato en esta sección y no se pretende verificar su validez en este capítulo, por cuanto ello debe ser resultado del equilibrio en la asignación de pasajeros a líneas y no la imposición en el modelo de congestión.

Se sabe que las probabilidades de abordaje a cada una de las líneas $\{p_l\}_{l \in L}$ dependen de las características de la oferta y de la demanda del sistema, sin embargo, antes de estimarlas se debe definir su tratamiento e interpretación. Por ejemplo, se pueden tratar dichas probabilidades en términos continuos utilizando las características medias del sistema estudiado y en cuyo caso, dichas probabilidades serán función de la demanda, aun cuando ésta última sea significativamente menor que la oferta. Por otro lado, estas probabilidades podrían ser obtenidas de forma discreta al interior de particulares intervalos de ciertas variables explicativas.

Cualquiera sea el caso, para la determinación de las características generales de las probabilidades de abordaje, se estudiará un par origen-destino servido por solo dos líneas, como el ejemplificado en la Figura N°4-2.



En este caso existen 3 estrategias posibles, (i) estar dispuesto a abordar sólo la línea l_1 , (ii) estar dispuesto a abordar sólo la línea l_2 y (iii) estar dispuesto a abordar cualquiera de ellas. La distribución de la demanda a nivel de flujos por estrategias es tal que:

$$\sum_{s \in S} y_s = y_{s_1} + y_{s_2} + y_{s_3} = v \quad (4.24)$$

De la ecuación anterior se desprende que el conjunto de líneas seleccionadas por los y_{s_1} individuos considera sólo la línea l_1 , los y_{s_2} individuos consideran sólo la línea l_2 y los y_{s_3} individuos están dispuestos a abordar cualquiera de ellas.

4.3.1 Análisis Discreto

Un posible enfoque para el análisis discreto de las probabilidades de abordaje, consiste en definir las variables n_{s_1} y n_{s_2} como los valores medios máximos del número de individuos, pertenecientes a los conjuntos y_{s_1} y y_{s_2} respectivamente, esperando en el paradero dispuestos a abordar sólo las línea l_1 y l_2 . De igual modo, n_{s_3} será el valor medio máximo del número de individuos esperando, pertenecientes al conjunto y_{s_3} , en los instantes de arribo de los vehículos de cualquiera de las líneas. Por “valor medio máximo” nos referiremos al entero más cercano al valor medio de los largos medios de cola en los instantes previos a los arribos de los vehículos que sirven a la cola en cuestión.

De este modo, la probabilidad p_{l_1} de abordar un bus de línea l_1 experimentado por todos los usuarios que desean abordarlo ($n_{s_1} + n_{s_3}$) una vez que se encuentra en el paradero, puede ser escrita para el caso en que la capacidad disponible de los vehículos es c_1 , de la forma:

$$p_{l_1} = \min \left\{ 1; \frac{\binom{1}{1} \binom{n_{s_1} + n_{s_3} - 1}{c_1 - 1}}{\binom{n_{s_1} + n_{s_3}}{c_1}} \right\} \quad (4.25)$$

Es decir, bajo un análisis discreto la probabilidad de abordar un bus que se encuentra en el paradero es la misma para todos los tipos de usuarios y dependiente solo de la magnitud de su **demanda potencial**, y no de su estructura. En efecto, si en el instante de arribo de un bus perteneciente a la línea l_1 el largo medio de cola de su demanda potencial corresponde a $n_{s_1} + n_{s_3}$, entonces la probabilidad de abordaje experimentada por cada uno de ellos será la misma, debido a que en el sistema en estudio no son utilizadas las colas de prioridad. De este modo, la ecuación (4.25) puede ser reescrita de la forma:

$$p_{l_1} = \min \left\{ 1; \frac{c_1}{n_{s_1} + n_{s_3}} \right\} \quad (4.26)$$

Cabe destacar que la ecuación (4.26) incorpora la posibilidad de que la capacidad disponible del bus de la línea l_1 sea mayor que el número de usuarios pertenecientes a su demanda potencial que lo esperan. Luego, reproduciendo el procedimiento anterior para la estimación de la probabilidad p_{l_2} y usando la ecuación (3.30), se obtiene la probabilidad de abordaje asociada a los individuos que optaron por la estrategia combinada, esto es:

$$p_{L=\{l_1, l_2\}} = \min \left\{ 1; \frac{c_1}{n_{s_1} + n_{s_3}} \right\} \frac{f_1}{(f_1 + f_2)} + \min \left\{ 1; \frac{c_2}{n_{s_1} + n_{s_3}} \right\} \frac{f_2}{(f_1 + f_2)}$$

Del análisis anterior se desprende que las esperanzas de los tiempos de espera, para cada tipo de usuario, pueden ser estimadas en función de la demanda potencial de cada una de las líneas, expresadas en términos de los largos medios máximos de cola de cada tipo de usuario.

Luego, corresponde estimar los valores medios máximos de cola. Para ello, a continuación se plantean las condiciones de conservación de flujos asociadas a las variables n_{s_1} , n_{s_3} y n_{s_2} para el estado de régimen estacionario, es decir:

$$\begin{aligned}
 n_{s_1} - \min\left\{1; \frac{c_1}{n_{s_1} + n_{s_3}}\right\} \frac{f_1}{(f_1 + f_2)} n_{s_1} + y_{s_1} \frac{1}{(f_1 + f_2)} &= n_{s_1} \\
 n_{s_3} - \left[\min\left\{1; \frac{c_1}{n_{s_1} + n_{s_3}}\right\} \frac{f_1}{(f_1 + f_2)} + \min\left\{1; \frac{c_2}{n_{s_3} + n_{s_2}}\right\} \frac{f_2}{(f_1 + f_2)} \right] n_{s_3} + y_{s_3} \frac{1}{(f_1 + f_2)} &= n_{s_3} \quad (4.27) \\
 n_{s_2} - \min\left\{1; \frac{c_2}{n_{s_2} + n_{s_3}}\right\} \frac{f_2}{(f_1 + f_2)} n_{s_2} + y_{s_2} \frac{1}{(f_1 + f_2)} &= n_{s_2}
 \end{aligned}$$

Con dichas ecuaciones de conservación se puede intentar encontrar expresiones analíticas para los valores medios. Para ello es necesario identificar las diversas combinaciones de situaciones, estados y condiciones que son posibles, independiente de sus probabilidades de ocurrencia.

Sin embargo, una vez resuelto el sistema de ecuaciones para los diferentes escenarios, es posible afirmar que las ecuaciones de conservación permiten obtener estimaciones de los valores medios de las cantidades de individuos esperando, solo en algunas situaciones. Es decir, sólo en los casos en que algunas de las líneas posean capacidades menores que sus demandas es posible estimar los tiempos de espera experimentados por los usuarios. No obstante, dichas estimaciones están circunscritas a los supuestos implícitos en las ecuaciones de conservación.

En efecto, la utilización de las ecuaciones de conservación impone el uso de variables medias del sistema, y no medias máximas. De esta forma, el supuesto de *régimen permanente* impide recoger los efectos de la congestión producto de las irregularidades del sistema, cuando las capacidades son mayores que las demandas promedio.

A partir de lo anterior es posible concluir que el tratamiento discreto de las probabilidades de abordaje no modela correctamente el fenómeno en estudio, debido principalmente a que no es posible introducir los efectos de la congestión mediante la utilización de las propiedades promedio del sistema. Lo anterior ha sido reconocido en algunos estudios, en particular [Powell \(1986\)](#) plantea directamente su análisis en función de las cantidades de usuarios en cola en los instantes inmediatamente anteriores y posteriores de los arribos de los buses.

4.3.2 Análisis Continuo

El análisis continuo de las probabilidades de abordaje incorpora los efectos de la congestión a través de la inclusión de las irregularidades del sistema, mediante de un análisis probabilístico más riguroso. Luego, a diferencia del análisis discreto, n_{s_1} , n_{s_2} y n_{s_3} son variables aleatorias que representan las cantidades de usuarios en espera, asociadas a las demandas y_{s_1} , y_{s_2} e y_{s_3} , respectivamente.

De este modo, la probabilidad (p_{l_1}) de abordar un bus de línea l_1 cuando éste se encuentra en el paradero, es la misma para cualquier usuario dispuesto a abordarla y puede ser escrita para el caso en que la capacidad disponible es c_1 , de la forma:

$$p_{l_1} = \sum_{n_{s_1}, n_{s_3}} P_{n_{s_1}, n_{s_3}} \left(\min \left\{ 1; \frac{c_1}{n_{s_1} + n_{s_3}} \right\} \right) \quad (4.28)$$

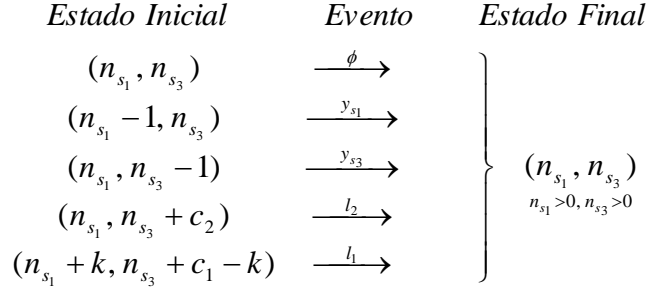
donde $P_{n_{s_1}, n_{s_3}}$ es la probabilidad de que, en un instante determinado, se encuentren esperando en el paradero n_{s_1} individuos pertenecientes a la demanda y_{s_1} y n_{s_3} individuos pertenecientes a la demanda y_{s_3} . Cabe destacar que si bien la probabilidad p_{l_1} expresada en la ecuación (4.28) no depende de n_{s_2} , ello no significa que sea independiente de la demanda y_{s_2} de la estrategia s_2 . Esto último, debido a que las variables n_{s_1} , n_{s_2} y n_{s_3} son dependientes de las demandas y de las características operativas de las líneas $\{f_l, c_l\}_{l \in L}$.

Luego, si se asume $y_{s_2} = 0$, para la determinación de la probabilidad $P_{n_{s_1}, n_{s_3}}$ es necesario observar que existen cinco situaciones (la última de ellas genérica) que pueden presentarse en el instante t y durante el intervalo Δt , que conducen a que en el instante $t + \Delta t$ el sistema tenga esperando n_{s_1} individuos del tipo y_{s_1} y n_{s_3} del tipo y_{s_3} , las que se esquematizan en la Figura N°4-3.

Desde el punto de vista matemático, el problema en estudio corresponde a un **proceso estocástico general a tiempo continuo** en el que sólo interviene una cantidad numerable de estados, pero que depende de un parámetro continuo del tiempo.

Se observa que las probabilidades del proceso no son función solamente de la duración del intervalo de tiempo Δt , pues también lo son de su posición en el eje del tiempo. Es decir, las probabilidades de transición no son las mismas en todos los intervalos de tiempo Δt . A continuación se identifican las posibles combinaciones Estado Inicial + Evento que generan un mismo Estado Final (n_{s_1} , n_{s_3}).

Figura N°4-3
Esquema de los Eventos Posibles con Estado Final (n_{s_1}, n_{s_3})



A partir de los eventos posibles ilustrados en la Figura N°4-3, y utilizando teoría de colas, se obtienen sistemas de ecuaciones diferenciales para las probabilidades condicionales $P_{n_{s_1}, n_{s_3}}$, de las cuales es posible obtener interesantes resultados. Previo a ello es necesario encontrar una expresión genérica de la probabilidad $P_{n_{s_1}, n_{s_3}}$, para $n_{s_1} \geq 1$ y $n_{s_3} \geq 1$, a saber:

$$\begin{aligned}
 P_{n_{s_1}, n_{s_3}}(t + \Delta t) = & P_{n_{s_1}, n_{s_3}}(t)(1 - y_{s_1} \Delta t)(1 - y_{s_3} \Delta t)(1 - f_1 \Delta t)(1 - f_2 \Delta t) + \\
 & P_{n_{s_1} - 1, n_{s_3}}(t) y_{s_1} \Delta t (1 - y_{s_3} \Delta t)(1 - f_1 \Delta t)(1 - f_2 \Delta t) + \\
 & P_{n_{s_1}, n_{s_3} - 1}(t) y_{s_3} \Delta t (1 - y_{s_1} \Delta t)(1 - f_1 \Delta t)(1 - f_2 \Delta t) + \\
 & P_{n_{s_1}, n_{s_3} + c_2}(t) f_2 \Delta t (1 - y_{s_1} \Delta t)(1 - y_{s_3} \Delta t)(1 - f_1 \Delta t) + \\
 & \left[\sum_{k=0}^{c_1} P_{n_{s_1} + k, n_{s_3} + c_1 - k}(t) f_1 \Delta t (1 - y_{s_1} \Delta t)(1 - y_{s_3} \Delta t)(1 - f_2 \Delta t) \frac{\binom{n_{s_1} + k}{k} \binom{n_{s_3} + c_1 - k}{c_1 - k}}{\binom{n_{s_1} + n_{s_3} + c_1}{c_1}} \right]
 \end{aligned}$$

El último de los términos corresponde al conjunto de casos en los que un bus de la línea l_1 arriba al paradero y es abordado por todas las clases de usuarios que están dispuestos a hacerlo (y_{s_1}, y_{s_3}) . Cabe destacar que la expresión anterior supone necesariamente que los valores n_{s_1} y n_{s_3} son positivos. En efecto, la única posibilidad de encontrar n_{s_3} individuos del tipo y_{s_3} , después del arribo de un bus de la línea l_2 , es que antes del arribo hubiesen estado esperando $n_{s_3} + c_2$ individuos. Luego, despreciando los términos de orden $o(\Delta t)$, la ecuación anterior puede ser reescrita de la forma:

$$\begin{aligned}
 P_{n_{s_1}, n_{s_3}}(t + \Delta t) = & P_{n_{s_1}, n_{s_3}}(t)(1 - y_{s_1} - y_{s_3} - f_1 - f_2) \Delta t + P_{n_{s_1} - 1, n_{s_3}}(t) y_{s_1} \Delta t + P_{n_{s_1}, n_{s_3} - 1}(t) y_{s_3} \Delta t + \\
 & P_{n_{s_1}, n_{s_3} + c_2}(t) f_2 \Delta t + f_1 \Delta t \sum_{k=0}^{c_1} P_{n_{s_1} + k, n_{s_3} + c_1 - k}(t) \frac{\binom{n_{s_1} + k}{k} \binom{n_{s_3} + c_1 - k}{c_1 - k}}{\binom{n_{s_1} + n_{s_3} + c_1}{c_1}} \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

Para determinar las probabilidades $P_{n_{s_1}, n_{s_3}}$ se consideran las ecuaciones diferenciales del proceso estocástico imponiendo la condición de régimen permanente:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{n_{s_1}, n_{s_3}}(t + \Delta t) - P_{n_{s_1}, n_{s_3}}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} P_{n_{s_1}, n_{s_3}}(t) = 0 \quad (4.30)$$

De este modo, la ecuación (4.29) se transforma en un sistema de ecuaciones recurrentes uniformado a un mismo instante t , que satisface la condición de régimen permanente:

$$P_{n_{s_1}, n_{s_3}}(y_{s_1} + y_{s_3} + f_1 + f_2) = P_{n_{s_1}-1, n_{s_3}} y_{s_1} + P_{n_{s_1}, n_{s_3}-1} y_{s_3} + P_{n_{s_1}, n_{s_3}+c_2} f_2 + \sum_{k=0}^{c_1} P_{n_{s_1}+k, n_{s_3}+c_1-k} f_1 \frac{\binom{n_{s_1}+k}{k} \binom{n_{s_3}+c_1-k}{c_1-k}}{\binom{n_{s_1}+n_{s_3}+c_1}{c_1}} ; \quad n_{s_1}, n_{s_3} \geq 1$$

La solución de este sistema de ecuaciones requiere de la determinación de las ecuaciones de balance en sus estados básicos. Sin embargo, la cantidad de estados básicos producto del último término de la ecuación anterior presenta una complejidad extraordinaria al problema. A modo de ejemplo, la ecuación de balance para el estado $P_{0,0}$ ($n_{s_1} = n_{s_3} = 0$), está dada por:

$$P_{0,0}(y_{s_1} + y_{s_3} + f_1 + f_2) = \sum_{k=0}^{c_2} P_{0,k} f_2 + \sum_{k=0}^{c_1} P_{k, c_1-k} f_1$$

Es decir, sólo la ecuación de balance para el estado (0,0) requiere de otras $c_1 + c_2$ ecuaciones para la solución del sistema. Luego, dada la complejidad que requiere la solución del proceso de nacimiento y muerte aplicado a un sistema de atención a usuarios no uniformes (con distintas estrategias), se procederá a construir un modelo general de congestión en paraderos con usuarios heterogéneos que sea consecuente con las características observadas en paraderos más simples, para posteriormente utilizar simulaciones que verifiquen el cumplimiento de las características cualitativas y cuantitativas del fenómeno de la congestión en este tipo de paraderos.

4.3.3 Modelo Generalizado de Congestión

El objetivo es determinar los tiempos de espera W_s de diversos tipos de usuarios con distintos conjuntos de líneas atractivas o estrategias. Sin embargo, dado que en (3.30) se demostró que estos pueden ser encontrados a partir de los tiempos de espera de las líneas que las componen, entonces el problema se reduce a estimar los tiempos de espera de dichas líneas.

$$W_s^{-1} = \sum_{i \in s} W_i^{-1}$$

En lo que sigue de la este trabajo, y para evitar confundir al lector con la notación, denotaremos la frecuencia nominal de una línea i como \bar{f}_i , de modo que si adoptásemos un modelo de congestión como el usado tradicionalmente en el tratamiento de la congestión en transporte público, entonces se tendría que $W_i^{-1} = f_i' = f_i(v_i, \bar{f}_i)$, con v_i el flujo que aborda la línea i . Luego, existen dos inconvenientes en la generalización del modelo, a saber:

- i. *Los flujos v_i no son conocidos y existe evidencia para pensar que las frecuencias efectivas de líneas son dependientes de la demanda potencial de dicha línea y no solamente del flujo que la aborda.*
- ii. *Aun conociendo los v_i , las frecuencias efectivas son difíciles de calcular.*

En las secciones anteriores fue resuelto el punto *ii* en paraderos simples y en los que los usuarios son homogéneos, requiriendo para ello de aproximaciones en la determinación de los tiempos de espera. Para el caso de un paradero simple, el resultado de lo anterior lo constituyeron diversas formas funcionales del tipo:

$$f_i(v_i) \approx g_i\left(\frac{v_i}{c_i \bar{f}_i}\right)$$

Para el caso de un paradero un poco más general (varias líneas) con usuarios homogéneos, las formas funcionales eran dependientes del flujo total, asociado a la única estrategia permitida, a saber:

$$\frac{v_i}{c_i \bar{f}_i} \approx \frac{y_s \left(\frac{c_i \bar{f}_i}{\sum_{j \in S} c_j \bar{f}_j} \right)}{c_i \bar{f}_i} = \frac{y_s}{\sum_{i \in S} c_i \bar{f}_i} = \frac{y_s}{c_s} \Rightarrow f_i(v_i) \approx g_i\left(\frac{y_s}{c_s}\right)$$

Es decir, se asume que el flujo asignado a cada una de las líneas es directamente proporcional a la oferta de transporte de ellas, luego, es posible usar este mismo principio en el caso de un paradero con usuarios heterogéneos. En efecto, sabemos que el flujo que aborda una línea está compuesto por parte de las demandas que tienen a dicha línea en su estrategia, a saber:

$$v_i = \sum_{s \ni i} y_s \pi_i^s \approx \sum_{s \in S; s \ni i} y_s \left(\frac{c_i \bar{f}_i}{\sum_{j \in S} c_j \bar{f}_j} \right) = c_i \bar{f}_i \sum_{s \in S; s \ni i} \frac{y_s}{c_s} \Rightarrow f_i(v_i) \approx g_i\left(\sum_{s \in S; s \ni i} \frac{y_s}{c_s}\right)$$

donde $g_i(\cdot)$ pueden ser las formas funcionales estudiadas en la sección 4.2 (modelos lineal, cuadrático, potencial y aproximado) para determinar la forma en que se comportan las frecuencias efectivas de las líneas, a partir de una estructura de demanda.

Definición: Sea $f_i(y)$ la frecuencia efectiva de la línea i observada por sus usuarios en un paradero, dependiente de la elección de estrategias de estos:

$$f_i(y) = \bar{f}_i \left(1 - \left(\sum_{s \in S: s \ni i} \frac{y_s}{c^s} \right)^\alpha \right)$$

de manera que el tiempo de espera asociado a los usuarios de cada estrategia está dado por:

$$W_s(y) = \frac{1}{\sum_{i \in S} f_i(y)}$$

El modelo generalizado de congestión propuesto es función de la estructura de la demanda a nivel de estrategias y no de líneas, ello, con el propósito de incluir la demanda potencial de cada línea en la determinación de su frecuencia efectiva.

Tal como fuera mencionado anteriormente, el modelo de congestión supone, para la obtención de la frecuencia observada, que el flujo proveniente de las estrategias combinadas asignado a una línea, corresponde a una fracción proporcional a su oferta nominal de transporte, es decir, **el modelo supone que los niveles de congestión están determinados en una primera aproximación por una asignación de pasajeros teórica que considera la capacidad de los vehículos**. Esto ocurre para altos niveles de congestión (ver análisis de sección anterior) y se justifica por el hecho de que interesa modelar de mejor forma la situación congestionada, es decir, aquella en que la restricción de capacidad se hace activa.

4.3.4 Simulación de un Paradero con Usuarios Heterogéneos

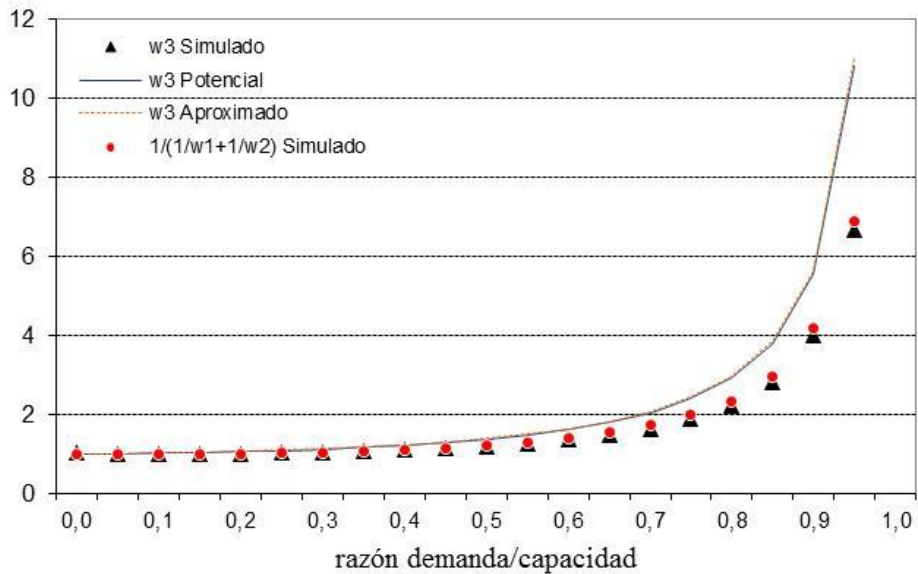
Tal como ha sido tratado en el desarrollo de esta tesis, un **modelo de congestión** corresponde a la formulación matemática del comportamiento de las frecuencias efectivas observadas por los usuarios. De este modo, la bondad de un particular modelo de este tipo podrá ser medida en términos de su capacidad para reproducir la asignación de pasajeros y los tiempos de espera experimentados por éstos en el estado de equilibrio.

Para efectos de la simulación de un paradero con demanda heterogénea, se ha supuesto que las características operativas de las líneas ilustradas en la Figura N°4-2 son $l_1(c; f)$ y $l_2(0,75c; 1,3\bar{f})$, y que coexisten tres tipos de estrategias ($y_1 = v/3$; $y_2 = v/3$; $y_3 = v/3$). Luego, a continuación en Gráfico N°4-6, se muestran los tiempos de espera asociados a la estrategia combinada (normalizados según el tiempo de espera sin congestión) simulados y modelados con los modelos potencial y aproximado.

Del gráfico se verifica que la aditividad de frecuencias es válida como aproximación (ecuación 3.30), respecto de las frecuencias efectiva que se desprenden de los tiempos de espera asociados a cada una de las líneas. Asimismo, se observa que los modelos de congestión Potencial y Aproximado tienden a sobrestimar los tiempos de espera de la estrategia combinada, respecto de

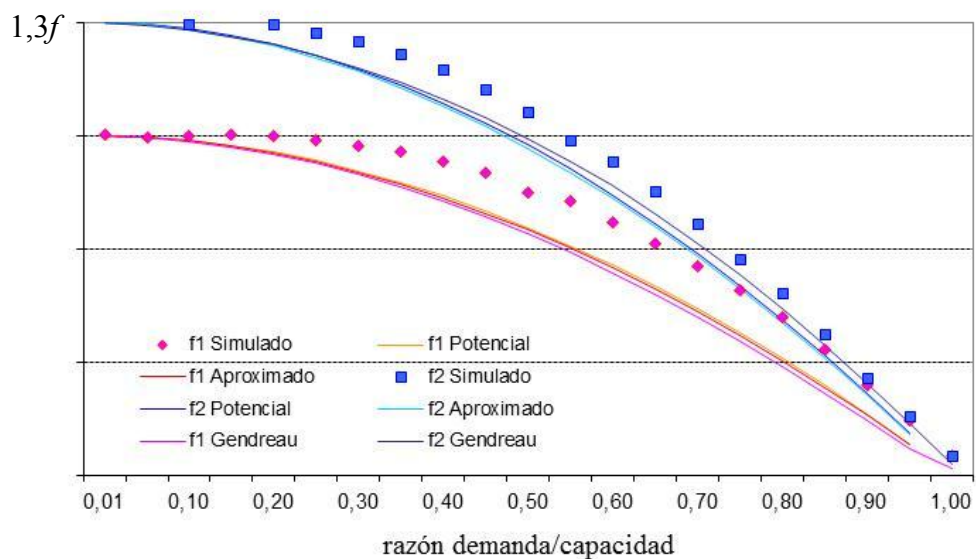
las simulaciones. En efecto, se aprecia que los modelos arrojan resultados para los cuales las simulaciones requieren de aproximadamente un 5% más de demanda.

Gráfico N°4-6
Tiempos de Espera Estrategia Combinada W/W_0 vs v/C_T



Coherente con lo anterior, en el caso de las estrategias simples, las frecuencias efectivas mostradas en el Gráfico N°4-7 también presentan el mismo tipo de diferencias entre las simulaciones y los modelos, incluido el de Gendreau, el cual solo depende de la cantidad de pasajeros que finalmente abordan la línea.

Gráfico N°4-7
Frecuencias Efectivas f'/\bar{f} vs v/C_T



En consecuencia, los modelos generalizados de congestión “reaccionan” prematuramente sobrestimando los tiempos de espera, sin embargo, ello no es consecuencia de que ellos dependan de la asignación de pasajeros a nivel de estrategias, por cuanto el modelo de [Gendreau](#) también muestra la misma sobrestimación.

Finalmente, lo que refuerza la idea de que la frecuencia efectiva de una línea depende de su demanda potencial y no estrictamente de la cantidad de pasajeros que la abordan, es justamente el resultado de las simulaciones, en las que distintas asignaciones de pasajeros se presentan con similares tiempos de espera. En efecto, dada una demanda fija, que opta íntegramente por la estrategia combinada, se obtienen sistemáticamente tiempos de espera estadísticamente semejantes y asignaciones de pasajeros significativamente distintas.

5. PROBLEMA DE LÍNEAS COMUNES Y ASIGNACIÓN DE PASAJEROS

El objetivo de este capítulo consiste en plantear y resolver el problema de líneas comunes (ver [Chriqui, 1974](#); [Chriqui y Robillard, 1975](#); [De Cea y Fernández, 1988](#); [De Cea y Fernández, 1993](#); [Cominetti y Correa, 2001](#)) incorporando en él los principales resultados obtenidos en el capítulo anterior, en relación con la modelación del tiempo de espera y con el método de asignación de pasajeros a las líneas, además de otros aspectos aún no considerados formalmente en esta tesis, como la posibilidad de que existan variados tipos de usuarios con distintos conjuntos de líneas atractivas y las condiciones para que ello ocurra. En efecto, las condiciones de equilibrio podrían mostrar la existencia de grupos de usuarios con conjuntos de líneas atractivas que posean líneas en común, esto es, distintos tipos de usuarios compitiendo por las mismas líneas.

En la primera parte de este capítulo, se hará uso de simulaciones para la obtención de las características cualitativas más importantes de este tipo de situaciones. Los resultados obtenidos en las simulaciones servirán para fundamentar el Modelo Generalizado de Congestión presentado en el capítulo anterior.

Finalmente, se generalizará el clásico problema de líneas comunes resuelto inicialmente por [Chriqui y Robillard \(1975\)](#). Las principales características de dicha generalización dicen relación con los aspectos antes mencionados, es decir, con la posibilidad de que existan distintos tipos de usuarios y con la variabilidad de los tiempos de espera de acuerdo al modelo generalizado de congestión. De esta forma, el problema de líneas comunes deja de ser un problema de optimización y se transforma en un problema de equilibrio, para el cual se demuestra la existencia y unicidad de su solución.

5.1 SIMULACIÓN

Es frecuente encontrar en la literatura el análisis de procesos mediante la reconstrucción de su comportamiento usando tiempos de servicio, tiempos de llegada, etc., derivados de números aleatorios. Este tratamiento es particularmente frecuente cuando el proceso es tan complicado que la solución matemática resulta difícil o imposible, y cuando el comportamiento se requiere bajo condiciones muy especiales. En particular, el término simulación es usado cuando el proceso que se modela es bastante aproximado al real, para el cual los resultados dan una impresión cualitativa de lo que sería el comportamiento real del sistema bajo las condiciones simuladas.

La simulación ha sido profusamente usada como elemento de apoyo en el análisis de la operación de sistemas de transporte público. En particular, [Andersson *et al.* \(1979\)](#) simula la operación de buses a través de una ruta; [Powell \(1981\)](#) y [Gendreau \(1984\)](#) obtienen a través de simulaciones, ecuaciones que reproducen los efectos locales de la restricción de capacidad en la distribución de los pasajeros y en sus tiempos de espera en paraderos simples.

En el capítulo anterior fueron utilizadas simulaciones para computar los tiempos de espera de los pasajeros en distintos tipos de paraderos, una vez conocida su elección de líneas atractivas. Sin

embargo, en este capítulo, las simulaciones serán usadas para determinar tanto el comportamiento de los pasajeros como los fenómenos por ellos experimentados.

Para el proceso de simulación se ha elegido el ejemplo ilustrado en la sección 4.3, en el cual un par origen-destino es servido por dos líneas (ver Figura N° 4-2). El problema consiste en determinar vía simulación las frecuencias efectivas resultantes, en el estado de equilibrio, para la distribución $\{v_1, v_2\}$ del flujo total v a través de las líneas l_1 y l_2 . La determinación de la asignación de pasajeros y de las frecuencias efectivas observadas por éstos debe hacerse en forma simultánea, pues la asignación de flujos en el estado de equilibrio está determinada en parte por los tiempos de espera, que a su vez son dependientes de las frecuencias efectivas.

Se debe notar, tal como fuera explicado en el capítulo anterior, que *las estrategias posibles de ser definidas en este ejemplo básico, son equivalentes a las eventuales soluciones del problema de líneas comunes asociado al par origen/destino estudiado.*

5.1.1 Estructura Conceptual de la Simulación

La simulación consiste en un proceso de aprendizaje a partir del cual cada individuo define, en función de su experiencia acumulada, la estrategia óptima para alcanzar su destino. Para ello, la estructura conceptual del simulador considera un proceso en el cual, cada individuo, incorpora una línea a su conjunto de líneas atractivas solo si su tiempo de viaje (en movimiento) es menor que el valor medio de su tiempo total de viaje (espera + movimiento) experimentado hasta ese instante.

Los supuestos considerados en relación con el comportamiento del usuario son los siguientes: (i) los usuarios conocen los tiempos de viaje de los servicios; (ii) cada individuo elige una y sólo una estrategia (conjunto de líneas atractivas) para alcanzar su destino.

Desde el punto de vista de las condiciones del sistema, el proceso de simulación considera llegadas exponenciales de los buses y de los usuarios. La asignación de pasajeros a un bus, cuando su capacidad es inferior a la cantidad de usuarios que desean abordarlo, se realiza en forma aleatoria. Esto es, *todos los individuos tienen igual probabilidad de abordar el bus*. La estimación de los tiempos totales de viaje a través de las estrategias simples se realiza en función del tiempo de viaje y frecuencia efectiva de la línea asociada a cada una de ellas.

5.1.2 Resultados Generales

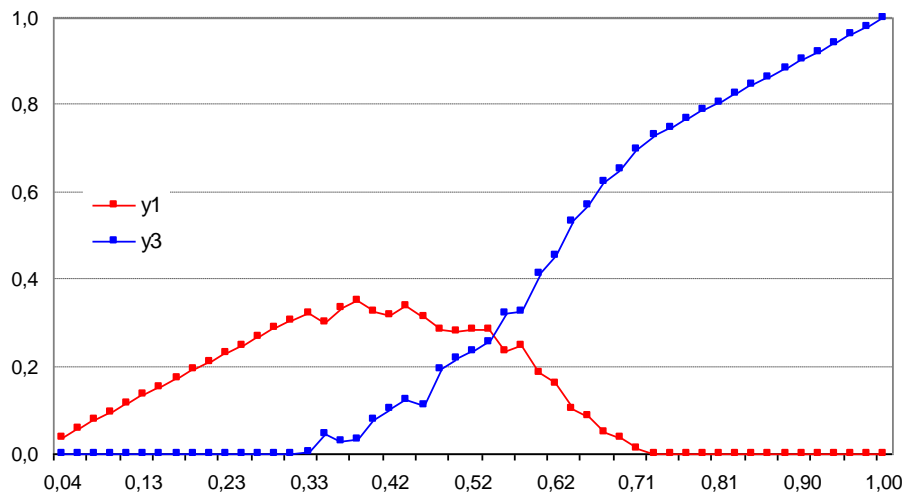
A continuación se presenta un breve análisis de los resultados entregados por el simulador frente a un escenario específico ($t_1 < t_2$; $t_2 - t_1 > 1/\bar{f}_1$). El simulador fue aplicado barriando todo el espectro de flujos factibles para distintos escenarios definidos principalmente por la diferencia entre los tiempos de viaje de las líneas.

En primer término, se verificó la existencia de intervalos de niveles de flujos, en los que se presentan características específicas relacionadas con el comportamiento de los usuarios del

sistema. En particular, dichos intervalos están definidos por niveles de demanda puntuales, $z = \alpha \bar{c}$ y $u = \beta \bar{c}$ ($0 < \alpha < \beta < 1$), y donde \bar{c} es la capacidad del sistema, es decir $\bar{c} = C_T = \bar{f}_1 c_1 + \bar{f}_2 c_2$.

En efecto, en la elección de estrategia mostrada en el Gráfico N° 5-1, se observa que para demandas menores a z ($0,33 \bar{c}$ aproximadamente) todos los usuarios usan sólo la estrategia s_1 . Luego, a partir de z y hasta u ($0,7 \bar{c}$ aproximadamente), las estrategias s_1 y s_3 coexisten. Finalmente, todos los usuarios optan por la estrategia combinada s_3 para demandas mayores que u .

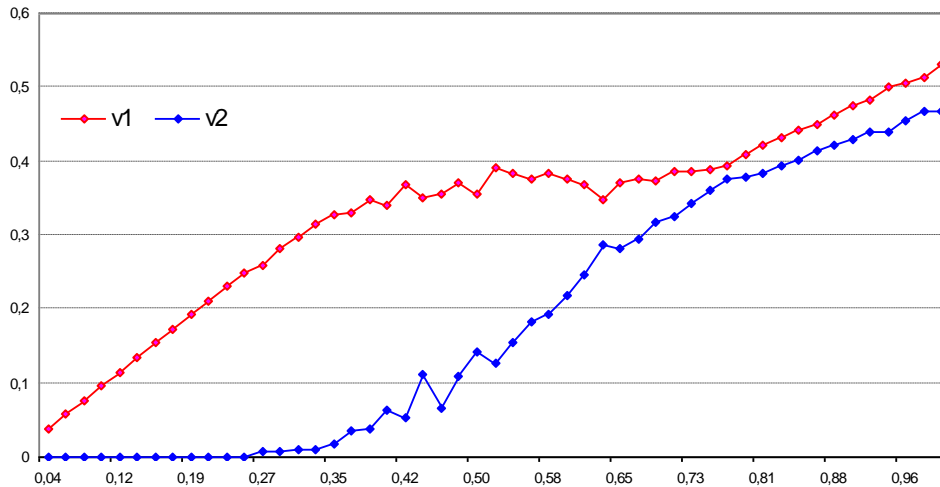
Gráfico N° 5-1
Asignación de Pasajeros a Estrategias (y_s / \bar{c}) v/s (x / \bar{c})



En forma paralela a la identificación de estrategias por parte de los usuarios, se obtiene la distribución de la demanda a través de las líneas, presentada en el Gráfico N° 5-2. Se observa de manera consistente que para niveles de demanda hasta z , los usuarios usan sólo la línea l_1 , luego, desde este nivel de demanda y hasta u , la cantidad de flujo asignado a esta línea crece muy poco, por cuanto la mayor parte del incremento de la demanda es absorbido por la línea l_2 . Específicamente se trata de usuarios que, usando la estrategia combinada, abordan la línea más lenta. Finalmente, para demandas mayores a u , los pasajeros asignados a ambas líneas crecen manteniendo una relación semejante a la razón entre sus ofertas de transportes, aspecto ya identificado en la sección 4.2 del capítulo anterior.

En materia de tiempos de viaje, cuando el flujo total a transportar es menor que z , el tiempo total de viaje a través de la estrategia s_1 es naturalmente menor que el de la estrategia combinada. Luego, desde z y hasta u no sólo los tiempos de viaje a través de las estrategias s_1 y s_3 son coincidentes, sino que además constantes. Se debe notar que dicha igualdad es justamente la condición necesaria para la coexistencia de dos estrategias. Finalmente, más allá de u , el tiempo de viaje asociado a la estrategia combinada s_3 es el menor.

Gráfico N° 5-2
Asignación de Pasajeros a Líneas (v_i / \bar{c}) v/s (x / \bar{c})



En primer término, la coexistencia de estrategias indica que la solución del problema de líneas comunes, bajo el concepto de ruta De Cea *et al.* (1993) y aplicado a este particular ejemplo, no sería una solución de equilibrio. En efecto, una de sus hipótesis es que todos los individuos se comportan de igual modo al interior de cada sección de ruta, este aspecto es justamente el que impide, en ciertos casos, que dicha solución sea de equilibrio.

La coexistencia de estrategias radica justamente en la posibilidad de que dos estrategias posean un mismo tiempo total esperado de viaje. Esta condición es precisamente la que define los valores críticos z y u , pues entre estos niveles de demanda en el sistema, se presenta dicha igualdad. Como es natural, los valores específicos de los niveles de flujo críticos (z y u) y de la estabilización de los tiempos por estrategia dependerán de las características del escenario simulado. A modo de ejemplo, si el tiempo de viaje de la línea más rápida aumenta en un Δt_1 tal que $\Delta t_1 > 1 / (\bar{f}_1 - f'_1(z))$, entonces sin importar que tan baja sea la demanda a transportar en el sistema, la estrategia combinada siempre es usada. Además, a partir de la simulación de diversos escenarios es posible afirmar que, independiente de las características particulares de la oferta, siempre existirá al menos uno de los intervalos del ejemplo mostrado.

Intuitivamente, y de acuerdo a los modelos que han incorporado la restricción de capacidad, los tiempos de espera asociados a cada línea deberían ser función de su flujo asignado. Sin embargo, y como se aprecia en el Gráfico N° 5-2, la cantidad de pasajeros transportados por la línea l_1 , crece en el intervalo medio de demanda, a pesar de que la frecuencia efectiva f'_1 se debería mantener constante. Recordemos que entre los niveles de demanda z y u , no sólo los tiempos de viaje a través de las estrategias s_1 y s_3 son coincidentes, sino que además constantes.

Es decir, la frecuencia efectiva de una línea depende no sólo de quienes la abordan.

5.2 MODELACIÓN

A continuación, y con el propósito de reproducir los principales efectos introducidos por el fenómeno de la congestión en los tiempos de espera y en la asignación de pasajeros cuando el comportamiento de la demanda es función de niveles de servicio variables, se desarrolla el Modelo Generalizado de Congestión presentado en el capítulo anterior, aplicado al ejemplo simulado.

Para la aplicación del modelo generalizado de congestión propuesto se ha elegido el ejemplo usado en las simulaciones antes presentadas, en el cual un par origen-destino es servido por sólo dos líneas ($L = \{l_1, l_2\}$) cuya principal diferencia es el tiempo de viaje ($t_1 < t_2$). De este modo, a cada línea i se le conoce su tiempo de viaje t_i , su frecuencia nominal \bar{f}_i , el promedio de su capacidad disponible c_i , y la distribución (exponencial) de sus intervalos de arribo H_{x_i} . Luego, si se asume que cada individuo elige **sólo una estrategia**, la distribución de la demanda x sobre el conjunto de estrategias $\{y_s\}_{s \in S}$ satisface la continuidad de flujos:

$$\sum_{s \in S} y_s = y_{s_1} + y_{s_2} + y_{s_3} = x \quad (5.1)$$

En lo que sigue denominaremos por y al vector de flujos en estrategias, a saber: $y = \{y_s\}_{s \in S} = (y_{s_1}, y_{s_2}, y_{s_3})$, y en consecuencia el modelo generalizado de congestión presentado en el capítulo anterior queda de la forma:

$$f'_i = f_i(y) = \bar{f}_i \left(1 - \left(\sum_{s \in S: s \ni i} \frac{y_s}{c^s} \right)^\alpha \right)$$

donde \bar{f}_i es la frecuencia nominal de la línea i y c^s es la **capacidad nominal** asociada la estrategia s , es decir, el flujo máximo capaz de transportarse en ellas, a saber: $c^{s_1} = \bar{f}_1 c_1$, $c^{s_2} = \bar{f}_2 c_2$ y $\bar{c} = c^{s_3} = c^{s_1} + c^{s_2} = \bar{f}_1 c_1 + \bar{f}_2 c_2$. Se debe notar que el modelo propuesto **reduce la frecuencia nominal** de cada servicio (en términos de buses por unidad de tiempo) a través de una **expresión de tipo potencia** dependiente de su **demanda potencial**, es decir, de todos los usuarios están dispuestos a abordarlo.

Estas características son consistentes con los resultados de los análisis teóricos y empíricos, obtenidos anteriormente, pues el modelo propuesto es función de la estructura de la demanda a nivel de estrategias y no de líneas, con el propósito de incluir la demanda potencial de cada línea en la determinación de su frecuencia efectiva.

5.2.1 Método de Asignación

La asignación de pasajeros a líneas puede obtenerse a partir de la asignación (elección) de demandas a estrategias $\{y_s\}_{s \in S}$ y en función de las frecuencias efectivas observadas por los usuarios. En efecto, tal como fuera demostrado en el Capítulo 3, la asignación de los usuarios que eligen estrategias combinadas (optan por más de una línea) se realiza de acuerdo al **método de frecuencias efectivas**. De acuerdo a esto, se propone el siguiente método de asignación:

$$v_i(y) = \sum_{s \in S: s \ni i} y_s \frac{f_i(y)}{\sum_{j \in s} f_j(y)} = \sum_{s \in S: s \ni i} y_s \frac{\bar{f}_i \left(1 - \left(\sum_{\tilde{s} \in S: \tilde{s} \ni j} \frac{y_{\tilde{s}}}{c^{\tilde{s}}} \right)^\alpha \right)}{\sum_{j \in s} \bar{f}_j \left(1 - \left(\sum_{\tilde{s} \in S: \tilde{s} \ni j} \frac{y_{\tilde{s}}}{c^{\tilde{s}}} \right)^\alpha \right)} \quad (5.2)$$

De este modo, en el ejemplo en análisis, la cantidad de flujo asignado a una línea corresponde a la cantidad de usuarios que la tiene como única alternativa, más un porcentaje (directamente proporcional a su frecuencia efectiva) de los usuarios que están dispuestos a abordarla pero que no la tienen como única opción, a saber:

$$v_1 = y_{s_1} + \frac{f_1(y)}{f_1(y) + f_2(y)} y_{s_3}, \quad v_2 = y_{s_2} + \frac{f_2(y)}{f_1(y) + f_2(y)} y_{s_3}$$

Cabe destacar que la asignación resultante del método propuesto satisface la condición de continuidad de flujos sobre líneas, es decir:

$$v_1 + v_2 = y_{s_1} + \frac{f_1(y)}{f_1(y) + f_2(y)} y_{s_3} + y_{s_2} + \frac{f_2(y)}{f_1(y) + f_2(y)} y_{s_3} = y_{s_1} + y_{s_2} + y_{s_3} = x$$

5.2.2 Tiempos de Viaje

El valor esperado del tiempo total de viaje asociado a cada estrategia puede escribirse como la suma de los valores esperados de los tiempos de espera y en movimiento de las líneas que la componen:

$$T_s(y) = \frac{1}{\sum_{i \in s} f_i(y)} + \frac{\sum_{i \in s} t_i f_i(y)}{\sum_{i \in s} f_i(y)} \quad (5.3)$$

De acuerdo al principio de **Wardrop (1952)**, diremos que la distribución $y^* = (y_s^*)_{s \in S}$ es un *equilibrio* si y solo $y_s^* > 0 \Rightarrow T_s(y^*) = \min_{s \in S} T_s(y^*)$, es decir, si las estrategias usadas son aquellas de tiempo mínimo.

A partir de (5.3) es posible demostrar que el valor esperado del tiempo total de viaje (T_{s_3}) a través de la estrategia combinada s_3 es una combinación convexa (promedio ponderado) del tiempo total de viaje a través de la estrategia s_1 y el tiempo de viaje a través de la línea l_2 . En efecto, T_{s_3} puede reescribirse de la siguiente forma:

$$T_{s_3}(y) = \frac{1+t_1f_1(y)+t_2f_2(y)}{f_1(y)+f_2(y)} = \frac{f_1(y)}{f_1(y)+f_2(y)} \left[t_1 + \frac{1}{f_1(y)} \right] + \frac{f_2(y)}{f_1(y)+f_2(y)} t_2$$

$$T_{s_3} = \alpha T_{s_1} + (1-\alpha)t_2 \equiv \theta T_{s_2} + (1-\theta)t_1 \quad (5.4)$$

De lo anterior se desprende que, independiente de la estructura de la demanda, el tiempo total de viaje (T_{s_2}) a través de la estrategia s_2 es siempre mayor que el obtenido a través de la estrategia combinada, en efecto,

$$T_{s_3} = \theta T_{s_2} + (1-\theta)t_1 < \theta T_{s_2} + (1-\theta)t_2 \leq \theta T_{s_2} + (1-\theta)T_{s_2} = T_{s_2} \quad \blacksquare$$

Se concluye entonces que la estrategia s_2 jamás es usada en el equilibrio ($y_{s_2} = 0$), cuestión que es lógica pues de existir algún usuario que opte por esta estrategia, al intentar minimizar su tiempo total esperado de viaje abordará la línea más rápida si tiene la posibilidad de hacerlo.

5.2.3 Valores Críticos

Para la posterior obtención de la asignación de flujos en el estado de equilibrio, es necesario verificar la existencia del par de valores críticos asociados a la demanda x , observados en las simulaciones mostradas en la sección 5.1. En efecto, la existencia de estos valores críticos posibilita la coexistencia de estrategias a través de la igualdad de sus tiempos totales esperados de viaje. En consecuencia, es justamente esta condición la que permitirá obtener dichos valores críticos. De la propiedad enunciada por la ecuación (5.4) se desprende que dicha condición es equivalente a imponer la igualdad entre el tiempo de viaje a través de la línea más lenta l_2 y el tiempo total esperado de viaje a través de la estrategia s_1 , esto es:

$$T_{s_1} = t_2 \Leftrightarrow t_1 + \frac{1}{\bar{f}_1 \left(1 - \left(\frac{y_{s_1}}{c^{s_1}} + \frac{y_{s_3}}{c^{s_3}} \right)^\alpha \right)} = t_2 \Leftrightarrow \frac{y_{s_1}}{c^{s_1}} + \frac{y_{s_3}}{c^{s_3}} = \left(1 - \frac{1}{\bar{f}_1(t_2 - t_1)} \right)^{1/\alpha} \quad (5.5)$$

Además, si se reconoce que la asignación a estrategias satisface que $y_{s_1} + y_{s_3} = x$, pues $y_{s_2} = 0$, entonces los valores críticos se obtienen imponiendo las condiciones de asignación extremas sobre la recta definida por la ecuación (5.5), a saber:

- z se obtiene al imponer $y_{s_3} = 0$, luego $z = y_{s_1} = c^{s_1} \left(1 - \frac{1}{\bar{f}_1(t_2 - t_1)} \right)^{1/\alpha}$
- u se obtiene al imponer $y_{s_1} = 0$, luego $u = y_{s_3} = c^{s_3} \left(1 - \frac{1}{\bar{f}_1(t_2 - t_1)} \right)^{1/\alpha}$

Entre las características particulares de los valores críticos obtenidos a partir del modelo de congestión, destaca el hecho de que no dependan de la magnitud y estructura de la demanda, es decir, dependen sólo de las características operacionales de la oferta de transporte (tiempos de viaje, frecuencias y capacidades). Además, dada la expresión matemática, ambos valores son positivos o negativos en forma simultánea. Ello, depende básicamente de si el exceso de tiempo de viaje de la línea más lenta (t_2) respecto de la más rápida (t_1), es mayor que el valor esperado del tiempo de espera asociado a esta última, bajo sus condiciones operativas nominales (frecuencia nominal).

5.2.4 Equilibrio

Una vez determinados los valores críticos, es posible encontrar y describir la asignación de pasajeros en el estado de equilibrio a partir del Modelo de Congestión Generalizado propuesto. Para ello es necesario distinguir dos casos, a saber:

CASO 1: Se presenta cuando los valores críticos z y u son negativos, esto es, cuando el tiempo de viaje a través de la línea más lenta (l_2) es menor que el tiempo total de viaje asociado a la estrategia s_1 considerando la frecuencia nominal de su línea asociada:

$$t_2 < t_1 + \frac{1}{f_1} \Rightarrow t_2 < t_1 + \frac{1}{f_1(y)} = T_{s_1} \stackrel{(5.4)}{\Leftrightarrow} T_{s_3} < T_{s_1}$$

luego, se tiene que para cualquier nivel de flujo x , la única estrategia usada es la combinada ($y_{s_3} = x$). En estos casos (estrategia única), el Modelo Generalizado de Congestión da paso a que la distribución de flujos a través de las líneas se realice en forma proporcional a las frecuencias nominales.

$$v_1 = x \frac{f_1(y)}{f_1(y) + f_2(y)} = x \frac{\bar{f}_1 \left(1 - \left(\frac{0}{c^{s_1}} + \frac{x}{c^{s_3}} \right)^\alpha \right)}{\bar{f}_1 \left(1 - \left(\frac{0}{c^{s_1}} + \frac{x}{c^{s_3}} \right)^\alpha \right) + \bar{f}_2 \left(1 - \left(\frac{0}{c^{s_2}} + \frac{x}{c^{s_3}} \right)^\alpha \right)} = x \frac{\bar{f}_1}{\bar{f}_1 + \bar{f}_2}$$

$$v_2 = x \frac{f_2(y)}{f_1(y) + f_2(y)} = x \frac{\bar{f}_2}{\bar{f}_1 + \bar{f}_2}$$

De lo anterior se desprende que, para este caso, la asignación de usuarios a líneas se realiza de acuerdo al clásico *modelo de frecuencias nominales*, aspecto que fuera observado en las simulaciones cuando las capacidades promedio de las líneas son similares y todos los usuarios optan por el mismo conjunto de líneas. Luego, el valor esperado del tiempo de viaje está dado por el asociado a la única estrategia usada, a saber:

$$T_{s_3} = \frac{1}{f_1(y) + f_2(y)} + \frac{t_1 f_1(y) + t_2 f_2(y)}{f_1(y) + f_2(y)} = \frac{1}{(\bar{f}_1 + \bar{f}_2) \left(1 - \left(\frac{x}{c^{s_3}} \right)^\alpha \right)} + \frac{t_1 \bar{f}_1 + t_2 \bar{f}_2}{\bar{f}_1 + \bar{f}_2}$$

De la expresión anterior se desprende que la congestión, en el CASO 1, sólo altera el valor esperado del tiempo de espera, por cuanto el valor esperado del tiempo de viaje es obtenido finalmente a partir de las frecuencias nominales.

CASO 2: Se presenta cuando los valores críticos z y u son positivos, en cuyo caso aparecen los tres intervalos de demanda observados en las simulaciones, con especiales condiciones cada uno, a saber:

Subcaso 2.1: Se presenta cuando la demanda total a transportar x pertenece al intervalo $[0, z]$ y se tiene que:

$$T_{s_1}(y) = t_1 + \frac{1}{\bar{f}_1 \left(1 - \left(\frac{y_{s_1}}{c^{s_1}} + \frac{y_{s_3}}{c^{s_3}} \right)^\alpha \right)} \leq t_1 + \frac{1}{\bar{f}_1 \left(1 - \left(\frac{y_{s_1} + y_{s_3}}{c^{s_1}} \right)^\alpha \right)} \leq t_1 + \frac{1}{\bar{f}_1 \left(1 - \left(\frac{x}{c^{s_1}} \right)^\alpha \right)} \leq t_1 + \frac{1}{\bar{f}_1 \left(1 - \left(\frac{z}{c^{s_1}} \right)^\alpha \right)} = t_2$$

$$\Rightarrow T_{s_1} \leq T_{s_3} \text{ con desigualdad estricta si } y_{s_3} > 0$$

En consecuencia, el equilibrio solamente puede cargar flujo en la estrategia s_1 . Es fácil chequear que $y = (x, 0, 0)$ es entonces el único equilibrio. En este caso, todos los usuarios son asignados a la línea l_1 , es decir: $v_1 = y_{s_1} = x$, y el tiempo de viaje de equilibrio es:

$$T_{s_1} = t_1 + \frac{1}{\bar{f}_1 \left(1 - \left(\frac{x}{c^{s_1}} \right)^\alpha \right)}$$

Subcaso 2.2: Se presenta cuando la demanda total a transportar x pertenece al intervalo (z, u) , para el cual se cumplen las siguientes proposiciones:

Proposición 5.1: La condición $y_{s_1} = 0$ no puede darse en el estado de equilibrio.

Demostración: Supongamos que en el estado de equilibrio $y_{s_1} = 0$, en cuyo caso todos los usuarios escogen la estrategia combinada ($y_{s_3} = x$), luego se tiene que:

$$T_{s_1} = t_1 + \frac{1}{\bar{f}_1 \left(1 - \left(\frac{x}{c^{s_3}} \right)^\alpha \right)} < t_1 + \frac{1}{\bar{f}_1 \left(1 - \left(\frac{u}{c^{s_3}} \right)^\alpha \right)} = t_2 \stackrel{(5.4)}{\Rightarrow} T_{s_1} < T_{s_3} \quad \text{contradicción!} \quad \blacksquare$$

Proposición 5.2: *La condición $y_{s_3} = 0$ no puede darse en el estado de equilibrio.*

Demostración: Supongamos que en el estado de equilibrio $y_{s_3} = 0$, en cuyo caso todos los usuarios escogen la estrategia ($y_{s_1} = x$), luego se tiene que:

$$T_{s_1} = t_1 + \frac{1}{\bar{f}_1 \left(1 - \left(\frac{x}{c^{s_1}} \right)^\alpha \right)} > t_1 + \frac{1}{\bar{f}_1 \left(1 - \left(\frac{z}{c^{s_1}} \right)^\alpha \right)} = t_2 \stackrel{(5.4)}{\Rightarrow} T_{s_3} < T_{s_1} \quad \text{contradicción!} \quad \blacksquare$$

Proposición 5.3: *El estado de equilibrio existe y es único. Este se alcanza con $y_{s_3} > 0$ e $y_{s_1} > 0$, y además $T_{s_1} = T_{s_3} = t_2$.*

Demostración: De las proposiciones 5.1 y 5.2 se tiene que todo equilibrio debe satisfacer $y_{s_3} > 0$ e $y_{s_1} > 0$, y por lo tanto $T_{s_1} = T_{s_3}$, o equivalentemente $T_{s_1} = t_2$, lo cual conduce a la ecuación:

$$\frac{y_{s_1}}{c^{s_1}} + \frac{y_{s_3}}{c^{s_3}} = \left(1 - \frac{1}{\bar{f}_1(t_2 - t_1)} \right)^{1/\alpha}$$

Como además $y_{s_1} + y_{s_3} = x$, se obtiene como único equilibrio posible:

$$y_{s_1} = (u - x) \frac{c^{s_1}}{c^{s_2}} \quad ; \quad y_{s_3} = (x - z) \frac{c^{s_3}}{c^{s_2}} \quad \blacksquare$$

La asignación de flujos a líneas se computa de acuerdo al equilibrio obtenido al nivel de estrategias $\{y_s\}_{s \in S}$, en efecto, tal como fuera demostrado en la sección 3.2.3 la distribución de pasajeros al interior de cada estrategia es directamente proporcional a las frecuencias efectivas:

$$\begin{aligned} v_1 &= y_{s_1} + \frac{f_1(y)}{f_1(y) + f_2(y)} y_{s_3} = (u - x) \frac{c^{s_1}}{c^{s_2}} + (x - z) \frac{c^{s_3}}{c^{s_2}} \left(\frac{f_1(y)}{f_1(y) + f_2(y)} \right) \\ &= (u - x) \frac{c^{s_1}}{c^{s_2}} + (x - z) \frac{c^{s_3}}{c^{s_2}} \left(\frac{\bar{f}_1 \left(1 - \left(\frac{u - z}{c^{s_2}} \right)^\alpha \right)}{\bar{f}_1 \left(1 - \left(\frac{u - z}{c^{s_2}} \right)^\alpha \right) + \bar{f}_2 \left(1 - \left(\frac{x - z}{c^{s_2}} \right)^\alpha \right)} \right) \end{aligned}$$

$$v_2 = \frac{f_2(y)}{f_1(y) + f_2(y)} y_{s_3} = (x - z) \frac{c^{s_3}}{c^{s_2}} \left(\frac{\bar{f}_2 \left(1 - \left(\frac{x - z}{c^{s_2}} \right)^\alpha \right)}{\bar{f}_1 \left(1 - \left(\frac{u - z}{c^{s_2}} \right)^\alpha \right) + \bar{f}_2 \left(1 - \left(\frac{x - z}{c^{s_2}} \right)^\alpha \right)} \right)$$

Subcaso 2.3: Se presenta cuando la demanda total a transportar pertenece al intervalo $[u, \bar{c}]$, en cuyo caso se tiene que:

$$T_{s_1} = t_1 + \frac{1}{\bar{f}_1 \left(1 - \left(\frac{y_{s_1}}{c^{s_1}} + \frac{y_{s_3}}{c^{s_3}} \right)^\alpha \right)} \geq t_1 + \frac{1}{\bar{f}_1 \left(1 - \left(\frac{u}{c^{s_3}} \right)^\alpha \right)} = t_2 \stackrel{(5.4)}{\Rightarrow} T_{s_1} \geq T_{s_3}$$

$$\Rightarrow T_{s_3} \leq T_{s_1} \text{ con desigualdad estricta si } y_{s_1} > 0$$

por lo que para cualquier nivel de flujo en el intervalo, la única estrategia usada es la combinada $y_{s_3} = x$. Al igual que en el CASO 1, la asignación de flujos a líneas es hecha de acuerdo al **modelo de frecuencias nominales** y el tiempo corresponde al de la estrategia combinada. Ello, si bien parece un contrasentido, es resultado del modelo de congestión adoptado, pudiendo ser corregido usando la expresión (4.23), asignando a ofertas nominales o definitivamente asignando en términos proporcionales a las ofertas efectivas, es decir:

$$v_i(y) = \sum_{s \in S: s \ni i} y_s \frac{c_i f_i(y)}{\sum_{j \in S} c_j f_j(y)}$$

A objeto de conocer el grado de aproximación de los resultados obtenidos con los Modelos de Congestión Potencial y Aproximado, respecto de las simulaciones, se presentan los siguientes Gráficos N°s 5-3, 5-4 y 5-5. En ellos se observan diferencias (desfases) entre los modelos (Potencial y Aproximado) y las simulaciones, las que dicen relación básicamente con la estimación de los tiempos de espera. En efecto, a pesar de lo leves que son las sobrestimaciones de los tiempos de espera por parte de los modelos, inducen a que el nivel de demanda (z) a partir del cual comienza a ser atractiva la línea más lenta sea menor que el observado en las simulaciones. Ello se transmite hacia demandas mayores por lo que el valor crítico u también es subestimado.

Se observa también una diferencia en la asignación de pasajeros cuando coexisten las estrategias. En efecto, a pesar de que los modelos muestran que la cantidad de pasajeros que abordan la línea más rápida se reduce a favor de la más lenta, ello no es ratificado en las simulaciones, donde se aprecia un estancamiento o un leve aumento de esa cantidad de pasajeros. Esto último puede corregirse asignando los pasajeros en términos proporcionales a las ofertas efectivas, como fuera antes mencionado.

Gráfico N° 5-3
Asignación de Pasajeros a Estrategias (y_s / \bar{c}) v/s (x / \bar{c})

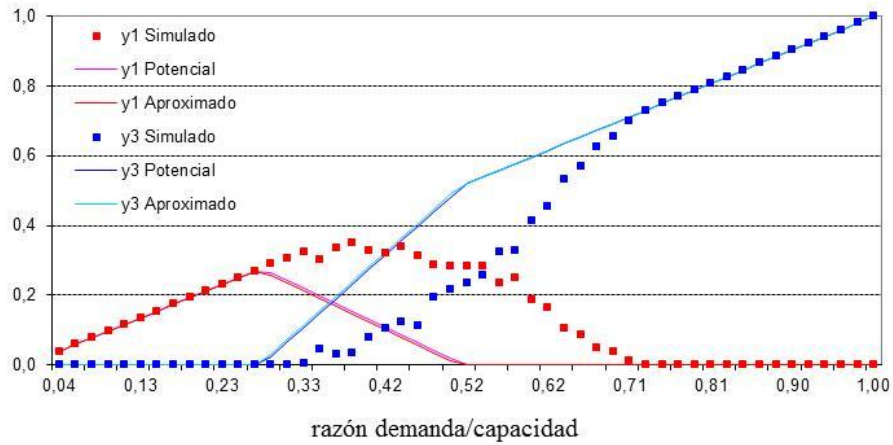


Gráfico N° 5-4
Asignación de Pasajeros a Líneas (v_i / \bar{c}) v/s (x / \bar{c})

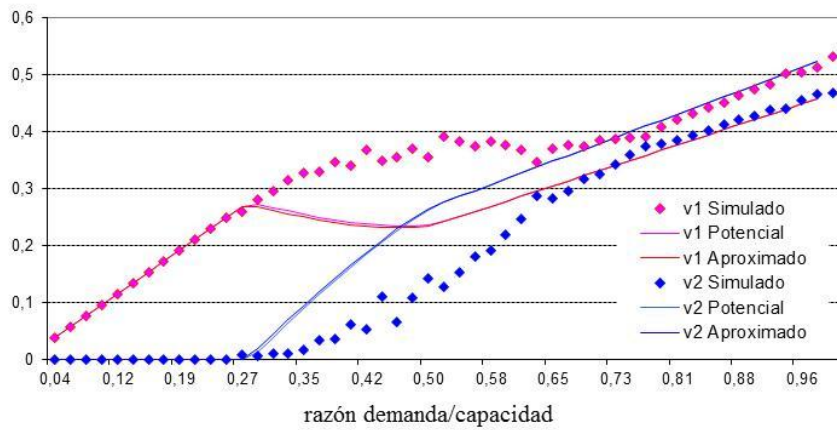
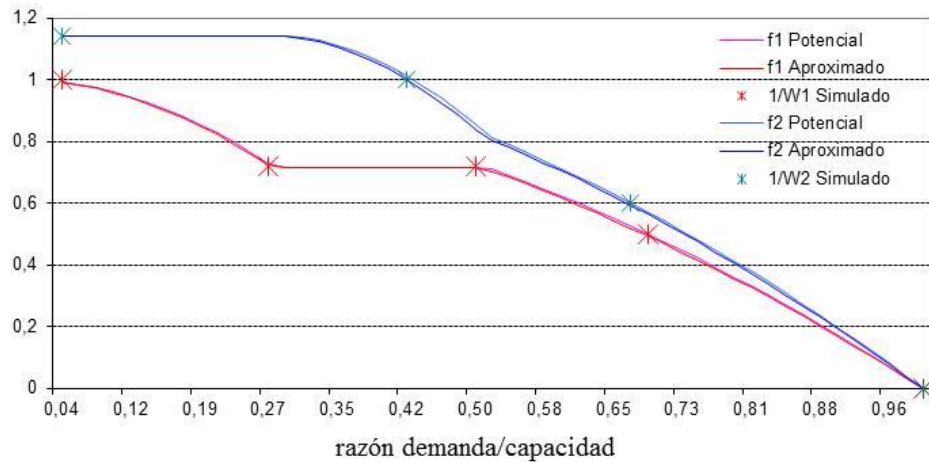


Gráfico N° 5-5
Frecuencias Efectivas (f_1, f_2) v/s (x / \bar{c})



5.3 PROBLEMA DE LÍNEAS COMUNES CON CONGESTIÓN

Con el propósito de generalizar el problema de líneas comunes bajo congestión, consideremos ahora un par origen-destino servido por un conjunto de m líneas $L = \{l_1, \dots, l_m\}$, cada una de las cuales está caracterizada a través de su tiempo de viaje (en movimiento) t_i y su frecuencia nominal \tilde{f}_i , ordenadas de tal modo que $t_1 < t_2 < \dots < t_{m-1} < t_m$.

Considerando el conjunto de posibles estrategias $S := \{s \subset \{1, \dots, m\} : s \neq \emptyset\}$, la demanda total $x > 0$ se distribuirá entre las estrategias $y_s \geq 0$ de forma tal que $\sum_{s \in S} y_s = x$. De este modo, el valor esperado del tiempo total de viaje a través de una estrategia $s \in S$ será función de la distribución de la demanda $y = \{y_s\}_{s \in S}$ a través de las estrategias y estará compuesto por el valor esperado del tiempo de espera (W_s) y del tiempo en movimiento (t_s), los cuales a su vez dependen de las frecuencias efectivas de las líneas que componen la estrategia:

$$T_s(y) = \frac{1 + \sum_{i \in S} t_i f_i(y)}{\sum_{i \in S} f_i(y)}$$

Con el objeto de generalizar el problema de líneas comunes e independizarlo de cualquier modelo de congestión específico, diremos que las frecuencias efectivas son simplemente funciones continuas $f_i : D \rightarrow (0, \infty)$ donde el dominio $D \subset [0, \infty)^S$ es un convexo tal que $0 \in D$. La distribución de flujos a través de las líneas se realiza de acuerdo al método de frecuencias efectivas, satisfaciendo la condición de continuidad de flujos sobre líneas, es decir:

$$v_i(y) = \sum_{s \in S: s \ni i} y_s \frac{f_i(y)}{\sum_{j \in S} f_j(y)} \quad \text{tal que} \quad \sum_{i \in L} v_i(y) = \sum_{i \in L} \sum_{s \in S: s \ni i} y_s \frac{f_i(y)}{\sum_{j \in S} f_j(y)} = \sum_{s \in S} y_s \frac{\sum_{i \in S} f_i(y)}{\sum_{j \in S} f_j(y)} = x$$

Dado que los tiempos de viaje en las estrategias dependen de los flujos en ellas, y éstos a su vez son dependientes de los tiempos de viaje de las líneas, el problema de líneas comunes deja de ser un problema de optimización y se transforma en un problema de equilibrio. Luego, de acuerdo al principio de [Wardrop \(1952\)](#), diremos que la distribución $y^* = (y_s^*)_{s \in S} \in D$ es un *equilibrio* si y solo si las estrategias usadas son aquellas de tiempo mínimo, esto es:

$$y_s^* > 0 \quad \Rightarrow \quad T_s(y^*) = \min_{s' \in S} T_{s'}(y^*) \quad (5.6)$$

Tal condición puede expresarse en forma equivalente a través de una ecuación variacional. En efecto, sea Ω_x el conjunto de estrategias factibles dado por $\Omega_x \equiv \Omega(x) := \{y \in D : \sum_{s \in S} y_s = x\}$ y $T(y) := \{T_s(y)\}_{s \in S}$ el vector de tiempos por estrategias, entonces $y^* = \{y_s^*\}_{s \in S}$ satisface (5.6) ssi:

$$\langle T(y^*), y - y^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in \Omega(x) \quad (5.7)$$

Lema 5.1: La condición de equilibrio (5.6) es equivalente a la ecuación variacional (5.7):

Demostración: \Rightarrow) Sea y^* un equilibrio. Si $y_s^* = 0$ entonces $T_s(y^*) \geq \min_{s' \in S} T_{s'}(y^*)$ e $y_s - y_s^* \geq 0$. Si $y_s^* > 0$ entonces $T_s(y^*) = \min_{s' \in S} T_{s'}(y^*)$, por lo tanto se tiene:

$$\sum_{s \in S} T_s(y^*)(y_s - y_s^*) \geq \min_{s \in S} T_s(y^*) \sum_{s \in S} (y_s - y_s^*) = 0$$

\Leftarrow) Para probar que (5.7) implica (5.6), supongamos que esta última falla, es decir:

$$y_{s'}^* > 0 \text{ y } T_{s'}(y^*) > \min_{s \in S} T_s(y^*) \text{ para alguna estrategia } s'.$$

Sea \bar{s} una estrategia de tiempo mínimo ($T_{\bar{s}}(y^*) = \min_{s \in S} T_s(y^*)$). Definiendo el vector y mediante:

$$y_s := \begin{cases} y_{s'}^* - \varepsilon & \text{si } s = s' \\ y_{\bar{s}}^* + \varepsilon & \text{si } s = \bar{s} \\ y_s^* & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y dado que se supuso que $y_{s'}^* > 0$ y que $\sum_{s \in S} y_s = \sum_{s \in S} y_s^* = x$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño se tendrá que $y \in \Omega(x)$. Dado que y e y^* solo difieren en sus componentes s y s' , se tiene que:

$$0 \leq \sum_{s \in S} T_s(y^*)(y_s - y_s^*) = T_{s'}(y^*)(y_{s'} - y_{s'}^*) + T_{\bar{s}}(y^*)(y_{\bar{s}} - y_{\bar{s}}^*) = \varepsilon(T_{\bar{s}}(y^*) - T_{s'}(y^*))$$

con lo cual $T_{s'}(y^*) = T_{\bar{s}}(y^*) = \min_{s \in S} T_s(y^*)$, y tenemos una contradicción. ■

5.3.1 Hipótesis

Para cada estrategia s se denotará por $y^s(x)$ el vector que asigna el total de la demanda x a la estrategia s , es decir, $y_s^s = x$ e $y_{s'}^s = 0$ para todo $s' \neq s$. De esta forma, las hipótesis de monotonía que requiere $T_s(x)$ son las siguientes:

Hipótesis 1: $\forall s$ el conjunto $\{x : y^s(x) \in D\}$ es un intervalo que supondremos de la forma $[0, c^s)$. El valor $c^s = \sum_{i \in s} c_i f_i$ sabemos es la capacidad nominal de la estrategia s , de tal forma que cuando solo se carga un conjunto de líneas y $x \rightarrow c^s$, se tiene que $f_i(y^s(x)) \rightarrow 0 \forall i \in s$.

Hipótesis 2: $\forall s \subset s', \forall x \in [c^s, c^{s'})$ el conjunto $\{\varepsilon : y^s(\varepsilon) + y^{s'}(x - \varepsilon) \in D\}$ es un intervalo de la forma $[0, \varepsilon_x)$ y supondremos que cuando $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_x$ se tiene que $f_i(y^s(\varepsilon) + y^{s'}(x - \varepsilon)) \rightarrow 0 \forall i \in s$ y $f_i(y^s(\varepsilon) + y^{s'}(x - \varepsilon))$ crece $\forall i \in s' \setminus s$.

Las hipótesis anteriores reflejan la idea intuitiva de que un incremento en el flujo de la estrategia s induce un aumento en los tiempos de espera de las líneas que la componen, y que dicho efecto será tanto más marcado cuando más pequeña sea s . Dichas hipótesis pueden expresarse en términos resumidos como que las frecuencias efectivas son funciones derivables tal que:

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_s}(y) < \frac{\partial f_i}{\partial y_{s'}}(y) < 0 \quad (5.8)$$

5.3.2 Resultados Preliminares

El objetivo es probar que, dada una demanda total x en el sistema, existe un único vector $y^* = (y_s^*)_{s \in S}$ que es un equilibrio de [Wardrop \(1952\)](#) en el sentido de la inecuación variacional (5.7), para lo cual en esta sección se probarán algunos lemas que servirán más adelante. A este efecto, una combinación convexa en que todos los coeficientes son positivos se dirá una *combinación estrictamente convexa* (cec).

Lema 5.2: Sea $y \in D$ un vector de demandas sobre estrategias y $s, s' \in S$ un par de estrategias tales que $s \subset s'$. Para $\forall j \in s' \setminus s$ el tiempo total esperado de viaje a través de $T_{s \cup \{j\}}(y)$ es cce entre $T_s(y)$ y t_j , es decir, existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que $T_{s \cup \{j\}}(y) = \alpha T_s(y) + (1 - \alpha)t_j$.

Demostración: Basta generalizar la propiedad mostrada en la ecuación (5.4), esto es:

$$T_{s \cup \{j\}}(y) = \left(\frac{\sum_{i \in s} f_i(y)}{\sum_{i \in s \cup \{j\}} f_i(y)} \right) T_s(y) + \left(\frac{f_j(y)}{\sum_{i \in s \cup \{j\}} f_i(y)} \right) t_j \quad \blacksquare$$

Con lo anterior es fácil demostrar que las únicas estrategias utilizadas en el estado de equilibrio son de la forma $\underline{k} = \{1, \dots, k\}$, y que puede existir demanda por, a lo más, dos estrategias consecutivas de este tipo.

Proposición 5.4: Sea $y \in D$ un vector de demandas sobre estrategias. Las estrategias s que minimizan $T_s(y)$ son de la forma $s = \underline{k} = \{1, \dots, k\}$. Más precisamente, existe $k = k(y) \in \{1, \dots, m\}$ tal que:

$$T_1(y) > T_2(y) > \dots > T_k(y) \leq T_{k+1}(y) < T_{k+2}(y) < \dots < T_m(y)$$

de modo que las únicas estrategias de tiempo mínimo son \underline{k} y eventualmente $\underline{k+1}$.

Demostración: Sea s una estrategia de tiempo mínimo. Para $j \notin s$ el tiempo $T_{s \cup \{j\}}(y)$ es cce de $T_s(y)$ y t_j , luego, como $T_{s \cup \{j\}}(y) \geq T_s(y)$ entonces $t_j \geq T_s(y)$. De igual modo, si $i \in s$ el tiempo $T_s(y)$ es cce de $T_{s \setminus \{i\}}(y)$ y t_i , luego, dado que $T_{s \setminus \{i\}}(y) \geq T_s(y)$ se tiene que $t_i \leq T_s(y)$. Así, $t_i \leq t_j \quad \forall i \in s, j \notin s$ y en consecuencia s es de la forma \underline{k} para algún k .

Ahora, sea k el menor entero tal que $T_{k+1}(y) \geq T_k(y)$, dado que $T_{k+1}(y)$ es cce entre $T_k(y)$ y t_{k+1} se tiene que $T_{k+1}(y) \leq t_{k+1} < t_{k+2}$. Luego, dado que $T_{k+2}(y)$ es a su vez cce entre $T_{k+1}(y)$ y t_{k+2} se deduce que $T_{k+2}(y) > T_{k+1}(y)$. Repitiendo lo anterior de manera inductiva se concluye que $T_l(y)$ crece estrictamente a partir de $l=k+1$. ■

Corolario: Sea $y \in D$. La estrategia $s \in S$ minimiza $T_s(y)$ si y solo si $t_i \leq T_s(y) \leq t_j$ para todo $i \in s, j \notin s$.

Demostración: \Rightarrow) Sea s una estrategia que minimiza $T_s(y)$. Para $j \notin s$ sabemos que el tiempo $T_{s \cup \{j\}}(y)$ es cce entre $T_s(y)$ y t_j , y como $T_s(y) \leq T_{s \cup \{j\}}(y)$ se tiene que $t_j \geq T_s(y)$. Análogamente, para $i \in s$, $T_s(y)$ es cce de $T_{s \setminus \{i\}}$ y t_i , y puesto que $T_{s \setminus \{i\}}(y) \geq T_s(y)$ entonces $t_i \leq T_s(y)$.

\Leftarrow) Sea s tal que $t_i \leq T_s(y) \leq t_j$ para todo $i \in s, j \notin s$. Sea s' una estrategia de tiempo mínimo y definamos $u = s \cap s'$ de tal modo que $T_{s'}(y)$ es una combinación convexa entre $T_u(y)$ y $\{t_j\}_{j \in s' - s}$. Estos últimos tiempos son mayores que $T_s(y)$, y también $T_u(y) > T_s(y)$ pues $T_s(y)$ es combinación convexa entre $T_u(y)$ y $\{t_i\}_{i \in s - u}$ los cuales son menores que $T_s(y)$. En consecuencia, $T_{s'}(y) \geq T_s(y)$ probando que s es una estrategia óptima. ■

5.3.3 Existencia y Unicidad del Equilibrio

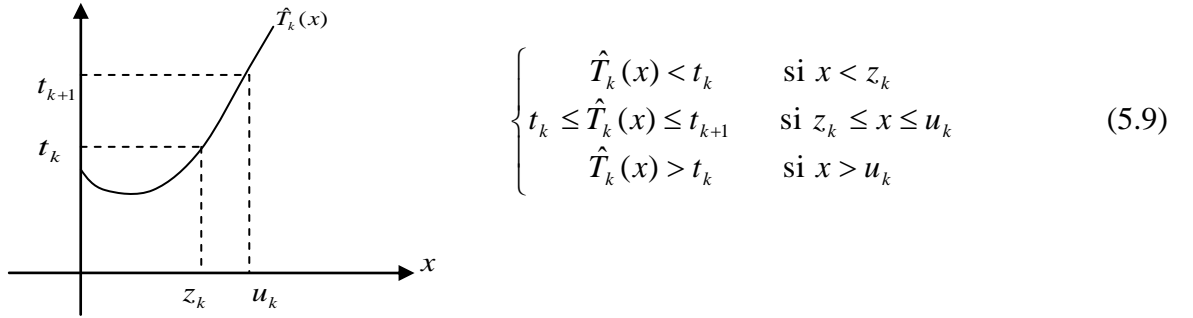
De la proposición 5.4 y de su corolario resulta que las estrategias s que minimizan $T_s(y)$ son del tipo $s_k = \{1, \dots, k\}$ con $t_k \leq T_{s_k}(y) \leq t_{k+1}$, de modo que todo equilibrio es de la forma $y^* = y^{s_k}(x)$ con $t_k \leq T_{s_k}(y^{s_k}(x)) \leq t_{k+1}$, o bien $y^* = y^{s_k}(\varepsilon) + y^{s_{k+1}}(x - \varepsilon)$ con $\varepsilon \in (0, x)$ y $T_{s_k}(y^{s_k}(\varepsilon) + y^{s_{k+1}}(x - \varepsilon)) = t_{k+1}$.

Para determinar en qué situaciones ocurre cada equilibrio, consideremos la función auxiliar $\hat{T}_k = T_{s_k}(y^{s_k}(x))$ definida para $x \in (0, c^{s_k})$ con $\hat{T}_k(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow c^{s_k}$. Definiendo $I_k = \{x : \hat{T}_k(x) \geq t_k\}$, para todo $x \in I_k$ se tiene:

$$\frac{d\hat{T}_k}{dx} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial T_k}{\partial \mathcal{F}_i} \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial y^k} = \sum_{i=1}^k \frac{[t_i - \hat{T}_k(x)]}{\sum_{j=1}^k f_j} \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial y^k} > 0$$

de modo que $\hat{T}_k = T_{s_k}(y^{s_k}(x))$ es estrictamente creciente en I_k . Así, denotando $z_k = \inf\{x: \hat{T}_k(x) \geq t_k\}$ y $u_k = \inf\{x: \hat{T}_k(x) \geq t_{k+1}\}$ tenemos que $z_k \leq u_k$ con desigualdad estricta a menos que $u_k = z_k = 0$.

En el caso no trivial en que $z_k < u_k$ se tiene que:



y por lo tanto $y^{s_k}(x)$ es un equilibrio si y solo si $x \in [z_k, u_k]$. De igual modo, dado que $x \in [0, c^{s_{k+1}})$ consideremos una segunda función auxiliar $Z_k^x(\varepsilon) = T_k(y^{s_k}(\varepsilon) + y^{s_{k+1}}(x - \varepsilon))$ definida para $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}_x)$ donde $\bar{\varepsilon}_x = \sup\{\varepsilon : y^{s_k}(\varepsilon) + y^{s_{k+1}}(x - \varepsilon) \in D\}$.

$$\frac{dZ_k^x}{d\varepsilon} = \sum_{i=1}^k \frac{[t_i - Z_k^x(\varepsilon)]}{\sum_{j=1}^k f_j} \left[\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial y^k} - \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial y^{k+1}} \right]$$

de donde resulta que

$$Z_k^x(\varepsilon) \geq t_k \Rightarrow \frac{dZ_k^x}{d\varepsilon}(\varepsilon) > 0 \Rightarrow Z_k^x(\cdot) \text{ es creciente en } [\varepsilon, \bar{\varepsilon}_x) \quad (5.10)$$

y por consiguiente la ecuación $Z_k^x(\varepsilon) = t_{k+1}$ admite una única solución $\varepsilon \in (0, x)$ siempre que se tenga $Z_k^x(0) < t_{k+1} < Z_k^x(\bar{\varepsilon}_x)$. En efecto, la desigualdad $Z_k^x(0) < t_{k+1}$ corresponde a $T_k(y^{s_{k+1}}(x)) < t_{k+1}$, lo que a su vez equivale a $\hat{T}_{k+1}(x) < t_{k+1}$, es decir $x < z_{k+1}$. Por su parte, $t_{k+1} < Z_k^x(\bar{\varepsilon}_x) = \bar{T}_k(\bar{\varepsilon}_x)$ equivale a $x > u_k$. Combinando ambas condiciones resulta que $y^k(\varepsilon) + y^{k+1}(x - \varepsilon)$ es un equilibrio si y solo si $x \in (u_k, z_{k+1})$ y $\varepsilon \in (0, x)$ es la única solución de la ecuación $Z_k^x(\varepsilon) = t_{k+1}$.

Para finalizar el análisis y probar que a cada x le corresponde un único equilibrio de la forma anterior, bastará demostrar que los intervalos $[z_k, u_k]$ no se traslapan. Para lo anterior, sea

$c^k = \sum_{i=1}^k c_i \bar{f}_i$ la capacidad máxima de la estrategia \underline{k} , luego, para $k \in \{1, \dots, m-1\}$ se definen las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} Z_k(x) &:= T_{\underline{k}}(y^k(x)) \\ U_k(x) &:= T_{\underline{k}}(y^{k+1}(x)) \end{aligned}$$

que están definidas en los intervalos $[0, c^k)$ y $[0, c^{k+1})$ respectivamente, y que satisfacen los siguientes resultados.

Proposición 5.5:

- (a) Si $x \in [0, c^k)$ es tal que $Z_k(x) \geq t_k$ entonces $Z_k(\cdot)$ es estrictamente creciente en $[x, c^k)$ con $Z_k(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow c^k$.
- (b) Si $x \in [0, c^{k+1})$ es tal que $U_k(x) \geq t_k$ entonces $U_k(\cdot)$ es estrictamente creciente en $[x, c^{k+1})$ con $U_k(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow c^{k+1}$.

Demostración:

$$\begin{aligned} Z_k(x) := T_{\underline{k}}(y^k(x)) &= \frac{1 + \sum_{i=1}^k t_i f_i(y^k(x))}{\sum_{i=1}^k f_i(y^k(x))} = \frac{1 + \sum_{i=1}^k t_i \bar{f}_i \left(1 - \left(\frac{x}{c^k}\right)^\alpha\right)}{\sum_{i \in S} \bar{f}_i \left(1 - \left(\frac{x}{c^k}\right)^\alpha\right)} \\ &= \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{x}{c^k}\right)^\alpha\right) \sum_{i \in S} \bar{f}_i} + \sum_{i=1}^k \frac{t_i \bar{f}_i}{\sum_{i=1}^k \bar{f}_i} \end{aligned}$$

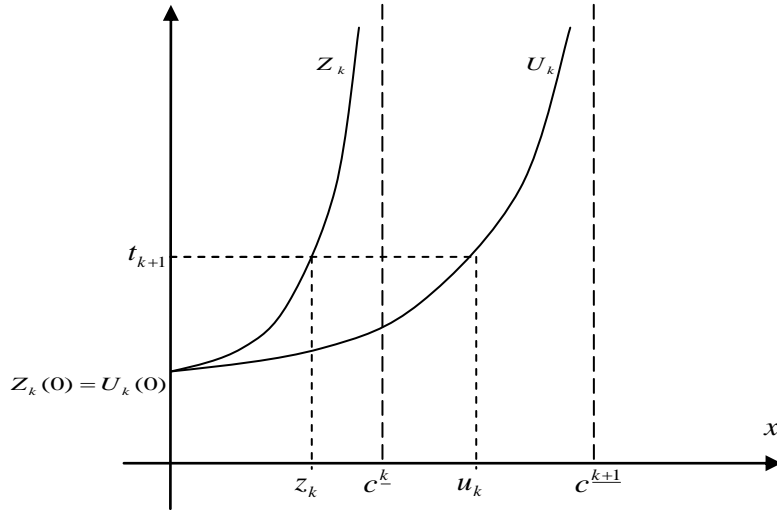
$\Rightarrow Z_k(x)$ es continua y creciente, en $[0, c^k)$, variando desde $Z_k(0) = \frac{1 + \sum_{i=1}^k t_i \bar{f}_i}{\sum_{i \in S} \bar{f}_i}$ hasta $+\infty$. Por

otro lado,

$$\begin{aligned} U_k(x) := T_{\underline{k}}(y^{k+1}(x)) &= \frac{1 + \sum_{i=1}^k t_i f_i(y^{k+1}(x))}{\sum_{i=1}^k f_i(y^{k+1}(x))} = \frac{1 + \sum_{i=1}^k t_i \bar{f}_i \left(1 - \left(\frac{x}{c^{k+1}}\right)^\alpha\right)}{\sum_{i=1}^k \bar{f}_i \left(1 - \left(\frac{x}{c^{k+1}}\right)^\alpha\right)} \\ &= \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{x}{c^{k+1}}\right)^\alpha\right) \sum_{i=1}^k \bar{f}_i} + \sum_{i=1}^k \frac{t_i \bar{f}_i}{\sum_{i=1}^k \bar{f}_i} \end{aligned}$$

$\Rightarrow U_k(x)$ es continua y creciente, en $[0, c^{k+1})$, variando desde $Z_k(0) = \frac{1 + \sum_{i=1}^k t_i \bar{f}_i}{\sum_{i \in S} \bar{f}_i}$ hasta $+\infty$. ■

Figura N° 5-1
Formas Funcionales curvas $U_k(x)$ y $Z_k(x)$



De la proposición anterior se obtienen dos importantes lemas, a saber:

Lema 5.3: $U_k(x) < Z_k(x)$ con desigualdad estricta si $x > 0$.

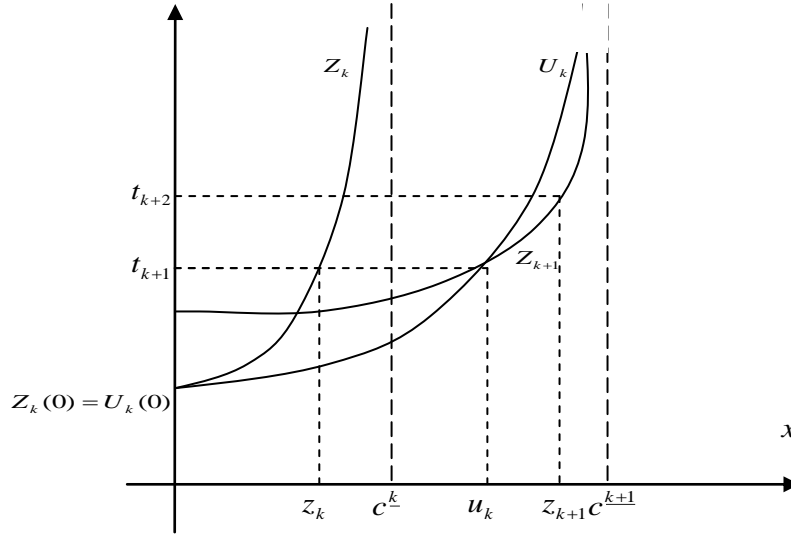
Demostración: Inmediata de las expresiones de $U_k(x)$ y $Z_k(x)$, tomando en cuenta que $c^{k+1} > c^k$. ■

Lema 5.4: Para $x \in [0, c^{k+1})$ se tiene que $Z_{k+1}(x) = \alpha_k(x)U_k(x) + (1 - \alpha_k(x))t_{k+1}$ con $\alpha_k(x) \in (0,1)$.

Demostración: Rescribiendo $Z_{k+1}(x)$.

$$\begin{aligned}
 Z_{k+1}(x) &:= T_{k+1}(y^{k+1}(x)) = \frac{1 + \sum_{i=1}^{k+1} t_i f_i(y^{k+1}(x))}{\sum_{i=1}^{k+1} t_i f_i(y^{k+1}(x))} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^k f_i(y^{k+1}(x))}{\sum_{i=1}^{k+1} f_i(y^{k+1}(x))} \left(\frac{1 + \sum_{i=1}^k t_i f_i(y^{k+1}(x))}{\sum_{i=1}^k f_i(y^{k+1}(x))} \right) + \left(\sum_{i=1}^{k+1} f_i(y^{k+1}(x)) - \sum_{i=1}^k f_i(y^{k+1}(x)) \right) \frac{t_{k+1}}{\sum_{i=1}^{k+1} f_i(y^{k+1}(x))} \\
 &= \alpha_k(x)U_k(x) + (1 - \alpha_k(x))t_{k+1} \quad \text{con} \quad \alpha_k(x) = \frac{\sum_{i=1}^k f_i(y^{k+1}(x))}{\sum_{i=1}^{k+1} f_i(y^{k+1}(x))}
 \end{aligned}$$

Figura N° 5-2
Propiedades Funcionales de $U_k(x)$, $Z_k(x)$ y $Z_{k+1}(x)$



De los Lemas anteriores se tiene que, para $k \in \{1, \dots, m-1\}$, las ecuaciones $Z_k(x) = t_{k+1}$ y $U_k(x) = t_{k+1}$ tienen exactamente una solución $z_k \in (0, c^k)$ y $u_k \in (0, c^{k+1})$ respectivamente, a menos que $Z_k(0) \geq t_{k+1}$ y/o $U_k(x) \geq t_{k+1}$, casos en los que se define $z_k = 0$ y/o $u_k = 0$. Luego, adoptando la convención $u_0 = 0$ y $z_m = c^m$ y definiendo las sucesiones:

$$z_k = \inf \{x : Z_k(x) \geq t_{k+1}\}$$

$$u_k = \inf \{x : U_k(x) \geq t_{k+1}\}$$

Lema 5.5: Los elementos de las sucesiones $\{u_k\}_k$ y $\{z_k\}_k$ se ordenan de la forma

$$0 = z_1 \leq u_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_k \leq u_k \leq z_{k+1} \leq \dots \leq z_{m-1} \leq u_{m-1} \leq z_m < c^m$$

con desigualdades estrictas a partir del primer valor positivo.

Demostración: Del Lema 5.3 se tiene directamente que $z_k \leq u_k$ con desigualdad estricta si $z_k > 0$ (Ver Figura 5-1). Por otra parte, del Lema 5.4 $Z_{k+1} \leq t_{k+1}$ para todo $x \in [0, u_k]$, de modo tal que $z_{k+1} \geq u_k$ con desigualdad estricta si $u_k > 0$ (Ver Figura 5-2) ■

Cabe destacar que los elementos de las sucesiones $\{u_k\}_k$ y $\{z_k\}_k$ corresponden precisamente a los valores críticos observados en las simulaciones de la sección 5.1 y posteriormente identificados en el modelo de congestión estudiado en la sección 5.2. En efecto, para el ejemplo analizado en esta última sección se tiene que $u_0 = 0$, $z_1 = z$, $u_1 = u$ y $z_2 = c^{s_3} = \bar{c}$, de modo que la obtención de $z_1 = z$ nace de la condición de igualdad $Z_1(x) = t_2$ y la obtención de $u_1 = u$ nace de la condición de igualdad $U_1(x) = t_2$. Luego, con todo lo anterior se está en condiciones de entregar el principal resultado de esta sección:

Teorema 5.1: Para toda demanda $x \in (0, \bar{c})$ existe un único equilibrio de Wardrop y^* , solución de la inecuación variacional (5.7). En tal equilibrio, las únicas estrategias s para las cuales $y_s^* > 0$ son de la forma $s_{\underline{k}}$. En particular, dependiendo del rango de la demanda total x :

- Para $x \in [u_{k-1}, z_k]$ dicho equilibrio está dado por $y_{\underline{k}}^* = x$ e $y_s^* = 0$ para $s \neq \underline{k}$.
- Para $x \in (z_k, u_k)$ el equilibrio es $y_{\underline{k}}^* = \left(\frac{c^{\underline{k}}}{c^{\underline{k}+1} - c^{\underline{k}}} \right) (u_k - x)$, $y_{\underline{k}+1}^* = \left(\frac{c^{\underline{k}+1}}{c^{\underline{k}+1} - c^{\underline{k}}} \right) (x - z_k)$, $y_s^* = 0$ para $s \neq \underline{k}, \underline{k}+1$.

Demostración: Para $x \in [u_{k-1}, z_k]$ se tiene que $T_{\underline{k}}(y^k(x)) = Z_k(x) \leq t_{k+1}$ y además

$$\begin{aligned} T_{\underline{k}}(y^k(x)) &= Z_k(x) \leq t_{k+1} \\ &= \alpha_{k-1}(x)T_{k-1}(y^k(x)) + (1 - \alpha_{k-1}(x))t_k \\ &= \alpha_{k-1}(x)U_{k-1}(x) + (1 - \alpha_{k-1}(x))t_k \\ &\geq t_k \end{aligned}$$

de modo que $t_i \leq T_{\underline{k}}(y^k(x)) \leq t_j \quad \forall i \in \underline{k}, \forall j \notin \underline{k}$. Del Corolario de la Proposición 5.4 se desprende que la estrategia \underline{k} es de tiempo mínimo de modo que $y^k(x)$ es un equilibrio. Consideremos ahora el caso $x \in [u_k, z_k]$ y el vector $y^k(\varepsilon)$ dado por:

$$\begin{aligned} y_{\underline{k}} &= \varepsilon \\ y_{\underline{k}+1} &= x - \varepsilon \\ y_s &= 0 \quad s \neq \underline{k}, \underline{k}+1 \end{aligned}$$

de modo tal que $\varepsilon \mapsto T_{\underline{k}}(y(\varepsilon))$ es una función creciente:

$$T_{\underline{k}}(y(\varepsilon)) = \frac{1 + \sum_{i=1}^k t_i \bar{f}_i \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{c^{\underline{k}}} + \frac{x - \varepsilon}{c^{\underline{k}+1}} \right)^\alpha \right)}{\sum_{i=1}^k \bar{f}_i \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{c^{\underline{k}}} + \frac{x - \varepsilon}{c^{\underline{k}+1}} \right)^\alpha \right)} = \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{c^{\underline{k}}} + \frac{x - \varepsilon}{c^{\underline{k}+1}} \right)^\alpha \right) \sum_{i=1}^k \bar{f}_i} + \frac{\sum_{i=1}^k t_i \bar{f}_i}{\sum_{i=1}^k \bar{f}_i}$$

y se tiene

$$\begin{aligned} T_{\underline{k}}(y(0)) &= T_{\underline{k}}(y^{k+1}(x)) = U_k(x) \leq t_{k+1} \\ T_{\underline{k}}(y(x)) &= T_{\underline{k}}(y^k(x)) = Z_k(x) \geq t_{k+1} \end{aligned}$$

de modo que existe un único $\varepsilon > 0$ tal que $T_{\underline{k}}(y(\varepsilon)) = t_{k+1}$, más exactamente, ε es la solución de la ecuación:

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{\varepsilon}{c^k} + \frac{x - \varepsilon}{c^{k+1}} \right)^\alpha} = \sum_{i=1}^k \bar{f}_i(t_{k+1} - t_{k+1})$$

$$\left(\frac{\varepsilon}{c^k} + \frac{x - \varepsilon}{c^{k+1}} \right)^\alpha = 1 - \frac{1}{\sum_{i=1}^k \bar{f}_i(t_{k+1} - t_{k+1})} \Rightarrow \varepsilon = \frac{c^{k+1}c^k}{c^{k+1} - c^k} \left(\frac{x}{c^{k+1}} + \left(1 - \frac{1}{\sum_{i=1}^k \bar{f}_i(t_{k+1} - t_{k+1})} \right)^{1/\alpha} \right) \quad \blacksquare$$

5.3.4 Extensión de la Existencia y Unicidad del Equilibrio

En esta sección se estudiará la existencia y unicidad del equilibrio relajando la condición de ordenamiento estricto supuesta en la sección anterior, es decir, los tiempos de viaje (en movimiento) de cada una de las líneas satisfacen un ordenamiento normal de la forma $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{m-1} \leq t_m$.

Pues bien, [Correa \(1999\)](#) observó que en este caso no se tiene en general unicidad del equilibrio de Wardrop, más usando argumentos intuitivos se puede establecer que de tener un ordenamiento del tipo $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k < t_{k+1} = \dots = t_{k+i} \dots \leq t_n$ sería natural pensar que las estrategias del tipo $\{1, \dots, k\} \cup \{k+j : j \in J\}$ con $J \neq \{1, \dots, i\}$ y $J \neq \emptyset$ no serán usadas.

Al igual que en [Correa \(1999\)](#), se puede demostrar en el caso de frecuencias efectivas dependientes de elección de estrategias, dada una demanda x , que el conjunto de flujos en líneas que son resultado de alguna distribución de equilibrio y , es convexo. En lo que sigue probaremos que, a pesar de la no unicidad del equilibrio, la existencia de tales está garantizada.

5.3.4.1 Existencia en el Caso General

Para demostrar la existencia en el caso general, supongamos una perturbación de los tiempos de viaje tal que $t_1^n < t_2^n < \dots < t_{m-1}^n < t_m^n$, con lo cual se tiene que $\forall n \exists!$ equilibrio $y^n = (y_s^n)_{s \in S}$. Dado que $\sum_{s \in S} y_s^n = x$, la sucesión $\{y^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada. Pasando a una subsucesión en caso de ser necesario, podemos suponer que esta subsucesión converge a un vector $y^* = (y_s^*)_{s \in S}$, el cual demostraremos es equilibrio.

Teorema 5.2: Sea \bar{c} la capacidad total de todas las líneas, es decir c^m en la notación anterior. Luego, para toda demanda $x \in (0, \bar{c})$ existe al menos un equilibrio de Wardrop y^* .

Demostración: Si $y_s^* > 0 \Rightarrow y_s^n > 0$ para n grande y por lo tanto se tiene que:

$$T_s^n(y^n) = \frac{1 + \sum_{i \in s} t_i^n f_i(y^n)}{\sum_{i \in s} f_i(y^n)} \leq \frac{1 + \sum_{i \in s'} t_i^n f_i(y^n)}{\sum_{i \in s'} f_i(y^n)} \quad \forall s'$$

Pasando al límite, haciendo $n \rightarrow \infty$ se tiene:

$$T_s(y^*) = \frac{1 + \sum_{i \in s} t_i f_i(y^*)}{\sum_{i \in s} f_i(y^*)} \leq \frac{1 + \sum_{i \in s'} t_i f_i(y^*)}{\sum_{i \in s'} f_i(y^*)} \quad \forall s'$$

lo que equivale a $T_s(y^*) = \min_{s'} T_{s'}(y^*)$, bastando encontrar una cota mayor que $T_s^n(y^n)$:

$$T_s^n(y^n) \leq T_{\{1, \dots, m\}}^n(y^n) \leq \frac{1}{f_m(y^n)} + t_n < \frac{1}{f_m(y^{s_m}(x))} \quad \blacksquare$$

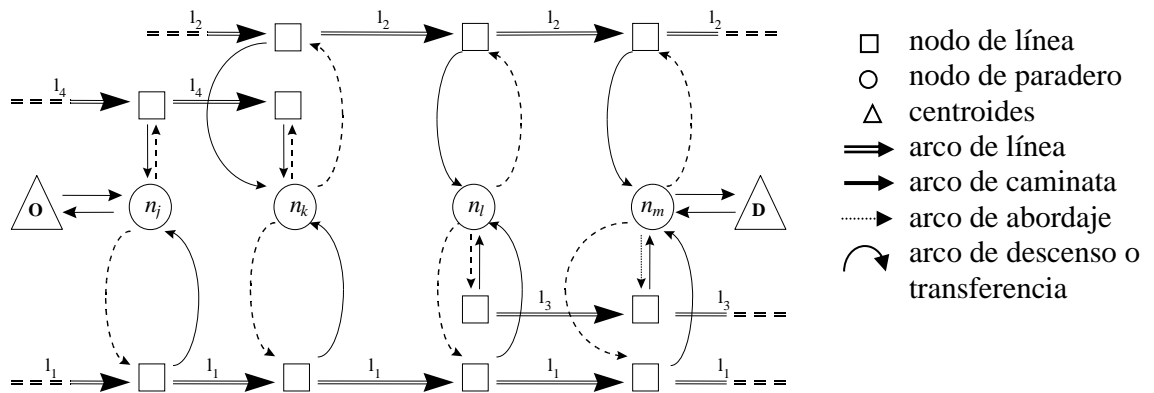
6. ASIGNACIÓN DE EQUILIBRIO EN REDES GENERALES

En este capítulo se planteará el problema de equilibrio de flujos en una red general de transporte público, desde múltiples orígenes a múltiples destinos. Para ello, en primer lugar, se definirá el concepto de estrategia local, y con ello el equilibrio de Wardrop bajo dicho concepto de estrategia.

En lo que se refiere a la modelación del problema, la red de transporte público será representada por el grafo $G(N,A)$, constituido por un conjunto de nodos (N) y un conjunto de arcos o enlaces (A), con $n=|N|$ y $m=|A|$. El conjunto de nodos contiene los centroides N_Z , los paraderos N_P y los nodos de línea N_L , estos últimos creados en cada paradero por cada línea que en él opera, conectándose bidireccionalmente (subida y bajada hacia y desde los vehículos) desde los nodos de línea, al paradero que los origina.

De igual modo, el conjunto de arcos está constituido por los arcos de acceso o abordaje A_A , de transferencia o bajada A_T , los arcos de caminata A_C y los arcos de línea A_L (entre nodos de línea adyacentes), tal como se muestra en la Figura N°6-1. Cada arco tiene asociado un costo t_a fijo, que representa el tiempo de recorrido o el costo del viaje, y una frecuencia $f_a(\cdot)$ que puede depender del flujo en la red.

Figura N° 6-1
Representación de una Red Real de Transporte Público



6.1 CONCEPTO DE ESTRATEGIA LOCAL

6.1.1 Comportamiento Local de los Pasajeros

Desde la perspectiva de la modelación del comportamiento del usuario, Spiess (1983) definió una *estrategia* como un conjunto de reglas determinísticas que, al ser aplicadas nodo a nodo sobre una colección de rutas que conectan un origen a un destino predeterminado, permiten al viajero alcanzar su destino por alguna de esas rutas. En consecuencia, el concepto clásico de estrategia corresponde a la forma *global* de viajar desde el origen al destino.

Tal como fuera detalladamente reportado en el Capítulo 2, los modelos de asignación de pasajeros inicialmente construidos bajo esta idea básica fueron los de [Spiess y Florian \(1989\)](#) y [Nguyen y Pallotino \(1988\)](#), en los cuales la elección de ruta y la asignación de pasajeros se efectuaban bajo la *estrategia óptima* o *hiper-ruta mínima*, respectivamente. Más tarde, la extensión del concepto de estrategia a escenarios que consideraban la restricción de capacidad de los buses, presentó dificultades en relación con la modelación de la congestión en redes de transporte público (ver [Wu et al. 1994](#)) y con la gran cantidad de estrategias a considerar. En efecto, a modo de ejemplo, el número de estrategias en un par origen-destino conectado a través de un conjunto de h rutas, corresponde a $2^h - 1$.

Por otro lado, es necesaria la existencia en el grafo de árboles cubridores de capacidad infinita que tenga a los destinos como antirraíces, a través de los cuales sea posible acceder a los destinos desde cualquier nodo, con un tiempo también finito. En la práctica, este árbol existe y está constituido por arcos de caminata, ya que siempre existe la opción de acceder al destino caminando. Lo anterior se representa en el grafo con arcos que conectan los nodos pertenecientes al conjunto de paraderos (N_P) con los nodos centroides (N_Z), con tiempo de viaje muy alto y frecuencia infinita.

Alternativamente a lo tradicionalmente usado, y en la misma línea de [Cominetti y Correa \(2001\)](#) y [Cepeda et al. \(2006\)](#), el concepto de estrategia sobre el cual se construirá el modelo de equilibrio que se presenta corresponde al de *estrategia local*.

Este concepto fue utilizado por primera vez en [Bouzaiene-Ayari et al. \(1995\)](#) denominándolo *comportamiento local de los usuarios*. La principal diferencia de este tipo de estrategia es que no distingue el origen de los viajeros, sino que sólo su destino. De esta manera, formalmente una estrategia local queda definida sobre un grafo como:

- Conjunto de arcos $s \subset A$, si todos ellos nacen de un mismo nodo paradero (N_P).
- Singleton $s = \{a\} \subset \{A_L \cup A_T\}$, si el nodo inicio de a es un nodo de línea (N_L) o centroide (N_Z).

Es decir, las estrategias son simplemente agrupaciones de arcos que nacen del mismo nodo, de modo que una misma estrategia puede conducir a nodos distintos. Lo anterior, debido a que las estrategias así definidas son locales, es decir, son simplemente la forma de salir del nodo en el cual se está localizado. En efecto, si se denota E_i^+ al conjunto de arcos que salen del nodo i (conjunto estrella), entonces el conjunto de estrategias (locales) A_i^+ que son posibles de definir en dicho nodo queda definido por:

$$A_i^+ := \begin{cases} P(E_i^+) \setminus \{\phi\} & \text{si } i \in N_P \\ \text{singletons de } E_i^+ & \text{si } i \in N_L \cup N_Z \end{cases}$$

6.1.2 Definiciones Básicas

Con el propósito de uniformar la notación con la cual se estructurará el modelo de equilibrio, a continuación se precisan las definiciones relevantes de dicho modelo:

N_Z	:=	conjunto de nodos centroides
N_P	:=	conjunto de nodos paraderos
N_L	:=	conjunto de nodos de línea
N	:=	$N_Z \cup N_P \cup N_L$ conjunto de nodos del grafo
A_A	:=	conjunto de arcos de acceso o abordaje
A_T	:=	conjunto de arcos de transferencia
A_C	:=	conjunto de arcos de caminata
A_L	:=	conjunto de arcos de línea
A	:=	$A_A \cup A_T \cup A_C \cup A_L$ conjunto de todos los arcos
M	:=	matriz de incidencia del grafo $[\delta_a^i]_{ N \times A }$ $a \in A; i \in N$
E_i^+	:=	conjunto de arcos que salen del nodo i
E_i^-	:=	conjunto de arcos que entran al nodo i
$t(\cdot)$:=	función que entrega el nodo de inicio de un arco (cola)
$h(\cdot)$:=	función que entrega el nodo final de un arco (cabeza)
v	:=	vector de flujos en arcos
y	:=	vector de flujos en estrategias
v_a^s	:=	flujo de estrategia s en el arco a
$W_a(\cdot)$:=	tiempo de espera en el arco a
\bar{f}_a	:=	frecuencia nominal del arco a
$f_a(\cdot)$:=	frecuencia efectiva en el arco a
c_a	:=	capacidad disponible del arco a
c^s	:=	$\sum_{a \in s} c_a \bar{f}_a$ capacidad disponible de la estrategia s
t_a	:=	tiempo de viaje o costo generalizado en el arco a
d_i^k	:=	demanda de viajes desde el nodo i hasta el destino k

6.1.3 Supuestos del Modelo de Equilibrio

El modelo de equilibrio supondrá que los tiempos de viaje (t_a) en cualquier tipo de arco son constantes y conocidos y, por lo tanto, independientes de la estructura de la demanda y de la asignación de pasajeros a las líneas. Asimismo, la matriz de demanda de viajes desde todos los orígenes a todos los destinos es también conocida e independiente de los niveles de servicio (tiempo de espera y viaje) en la red, por lo tanto fija.

Cada arco tiene asociado un tiempo de viaje y una frecuencia, de este modo, los arcos de línea, transferencia y caminata tendrán frecuencias infinitas e independientes de los niveles de

demanda. Los tiempos de espera $\{W_a(\cdot)\}_{a \in A}$ en cada arco a serán modelados a través del inverso de la frecuencia efectiva de la línea a la cual pertenece el nodo final de dicho arco ($h(a)$). Esto último, en consideración a que dicha forma de modelar el tiempo de espera fue validada en el Capítulo 3 de esta tesis.

A cada árbol del grafo, que tenga como antirraíz el destino k , podemos asociarle un vector $T^k(f(y))$, compuesto por los tiempos de viaje necesarios para llegar desde cada nodo i del árbol hasta el destino, cuando toda la demanda usa los arcos de dicho grafo. Suponiendo que existe solo una ruta C^k para alcanzar el destino k desde el nodo $i \in N$, entonces las componentes $T_i^k(f(y))$ de dicho vector representan los tiempos totales de viaje sobre esta ruta, desde los nodos i . Las componentes de $T_i^k(f(y))$ pueden calcularse de la forma:

$$T_i^k(f(y)) = \sum_{a \in C^k} \left(\frac{1}{f_a(y)} + t_a \right) \quad (6.1)$$

6.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

6.2.1 Restricciones

Dado que los flujos que llegan al nodo i son distribuidos a través de algunas estrategias $s \in A_i^+$ y, a su vez, el flujo de cada estrategia es asignado a cada línea (arco) en forma directamente proporcional a las frecuencias efectivas de los arcos que la componen, entonces el flujo hacia un destino k en un arco a asociado a la estrategia s , $\forall s \in A_i^+ \forall a \in s$, es de la forma:

$$v_a^{sk} = y_s^k \frac{f_a(y)}{\sum_{a' \in s} f_{a'}(y)}$$

$$v_a^k = \sum_{s \ni a} v_a^{sk}$$

Además, la suma de las porciones de flujo asociadas a todas las estrategias que contengan al arco a será el flujo total en dicho arco $v_a = \sum_{s \ni a; k \in K} v_a^{sk}$, de este modo, el flujo total del arco a esta dado por:

$$v_a = \sum_{s \ni a; k \in K} y_s^k \frac{f_a(y)}{\sum_{a' \in s} f_{a'}(y)} \quad \forall a \in A \quad (6.2)$$

Si se define $V := [0, \infty)^A$ como el espacio de flujos en arcos, y $\mathcal{V} := V^K$ es el espacio de los flujos en arcos asociados a los destinos $k \in K \subset N_Z$, entonces un vector de flujos $v = (v^k)_{k \in K} \in \mathcal{V}$ será factible si $v_a^k = 0$ para todo $a \in E_k^+$, satisfaciendo la ley de conservación de flujos, que en cada

nodo liga la asignación de pasajeros a líneas con la asignación de la demanda a nivel de estrategias, que se denota por:

$$d_i^k + \sum_{a \in E_i^-} v_a^k = \sum_{s \in A_i^+} y_s^k \quad \forall i \in N \quad (6.3)$$

Notemos que $d_i^k \geq 0$ para todo $i \neq k$, y $d_k^k = -\sum_{i \neq k} d_i^k$, con sus componentes positivas sólo en los nodos centroides (N_Z), además, producto de la continuidad de flujos en arcos se tiene el siguiente conjunto de restricciones. La primera de ellas es consecuencia de (6.2) y (6.3):

$$Mv = d \Leftrightarrow \sum_{a \in E_i^+} v_a^k = \sum_{a \in E_i^-} v_a^k + d_i^k \quad (6.4)$$

donde M es la matriz de incidencia nodo-arco del grafo, es decir:

$$\begin{bmatrix} \delta_1^1 & \cdots & \delta_{|A|}^1 \\ & \delta_a^i & \\ \delta_1^{|N|} & \cdots & \delta_{|A|}^{|N|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^1 & \cdots & v_1^{|N|} \\ v_a^1 & v_a^i & v_a^{|N|} \\ v_{|A|}^1 & \cdots & v_{|A|}^{|N|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1^1 & \cdots & d_1^{|N|} \\ d_i^1 & d_i^i & d_i^{|N|} \\ d_{|N|}^1 & \cdots & d_{|N|}^{|N|} \end{bmatrix} \quad \text{donde } \delta_a^i = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in E_i^+ \\ -1 & \text{si } a \in E_i^- \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Luego, si se define la variable x_i^k como el flujo que se debe despachar desde el nodo $i \in N$ con destino k , entonces se tienen las siguientes restricciones:

$$x_i^k = \sum_{s \in A_i^+} y_s^k \quad \forall i \in N \quad (6.5)$$

$$x_i^k = d_i^k + \sum_{a \in E_i^-} v_a^k \quad \forall i \in N \quad (6.6)$$

Es decir, el conjunto de restricciones que posee el problema son las definidas en (6.2), (6.4), (6.5) y (6.6), sin embargo, es posible demostrar que la restricción (6.4) es implicada de (6.2), (6.5) y (6.6). Es decir, el conjunto de restricciones queda completamente definido a partir de estas últimas restricciones.

Proposición 7.1: Un par de vectores (v, y) satisface (6.2) y (6.4) si y solo si satisface (6.2), (6.5) y (6.6).

Demostración:

\Rightarrow) De las ecuaciones (6.2) y (6.4) se tiene que:

$$d_i^k + \sum_{a \in E_i^-} v_a^k = \sum_{a \in E_i^+} v_a^k = \sum_{a \in E_i^+} \sum_{s \ni a} y_s^k \frac{f_a(y)}{\sum_{a' \in s} f_{a'}(y)} = \sum_{s \in A_i^+} \sum_{a \in s} y_s^k \frac{f_a(y)}{\sum_{a' \in s} f_{a'}(y)} = \sum_{s \in A_i^+} y_s^k \frac{\sum_{a \in s} f_a(y)}{\sum_{a' \in s} f_{a'}(y)} = \sum_{s \in A_i^+} y_s^k$$

Luego, dado que $x_i^k = d_i^k + \sum_{a \in E_i^-} v_a^k$, se satisfacen las ecuaciones (6.5) y (6.6).

\Leftrightarrow Sumando sobre todos los arcos que salen del nodo i en la formula con la que se obtiene la distribución de flujos en arcos a partir de la elección de estrategia, usando el mismo cambio de índices anterior, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \sum_{a \in E_i^+} v_a^k &= \sum_{a \in E_i^+} y_s^k \frac{f_a(y)}{\sum_{a' \in s} f_{a'}(y)} = \sum_{s \in A_i^+, a \in s} y_s^k \frac{f_a(y)}{\sum_{a' \in s} f_{a'}(y)} = \sum_{s \in A_i^+} y_s^k \sum_{a \in s} \frac{f_a(y)}{\sum_{a' \in s} f_{a'}(y)} \\ &= \sum_{a \in E_i^+} v_a^k = \sum_{s \in A_i^+} y_s^k \end{aligned}$$

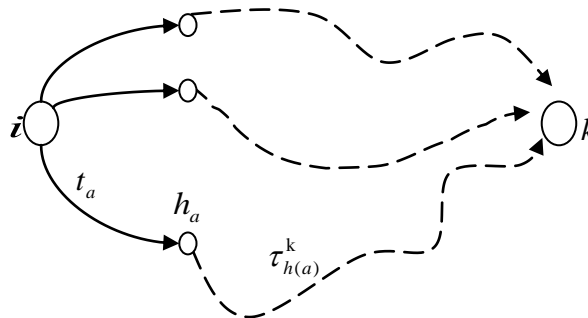
Luego, combinando las ecuaciones (6.5) y (6.6) se obtiene la ecuación (6.4). ■

6.2.2 Equilibrio de Wardrop bajo Estrategias Locales

Para formular la condición de equilibrio de Wardrop desde todos los orígenes a todos los destinos, bajo el concepto de estrategia local, es necesario definir la matriz $\{\tau_i^k\}_{k,i \in N}$ de tiempos mínimos de viaje desde los nodos $i \in N$ hasta del destino k . Los componentes $\tau_i^k(f, t)$ serán función de las frecuencias efectivas $\{f_a(y)\}_{a \in A}$ y de los tiempos de viaje $\{t_a\}_{a \in A}$. De esta forma, el tiempo de viaje entre el nodo i y el destino k será la solución al problema de líneas comunes aplicado a los tiempos $t_a + \tau_{h(a)}^k$ con frecuencias efectivas correspondientes a los arcos E_i^+ , el cual puede ser resuelto recursivamente.

En efecto, los términos τ_i^k y los flujos de equilibrio deben ser determinados simultáneamente para cada origen i y destino k . De esta manera, el modelo de asignación a la red estará constituido por una familia de modelos de equilibrio (uno para cada par origen destino) acoplados por las ecuaciones de conservación de flujos.

Figura N° 6-1
Representación del Problema de Líneas Comunes con Estrategias Locales



Tal como en [Spiess y Florian \(1989\)](#), si las frecuencias $\{f_a\}_{a \in A}$ y los tiempos de viaje $\{t_a\}_{a \in A}$ son constantes, dependiendo del tipo de nodo en el que se esté ubicado, el tiempo al destino k es la única solución $\{\tau_i^k(f, t)\}_{i \in N}$ de la ecuación generalizada de Bellman (6.7), a saber:

$$\begin{aligned} \tau_k^k &= 0 \\ \tau_i^k &= \min_{s \in A_i^+} \frac{1 + \sum_{a \in s} (t_a + \tau_{h(a)}^k) f_a}{\sum_{a \in s} f_a} \quad \forall i \in N, i \neq k \end{aligned} \quad (6.7)$$

Para que la ecuación anterior sea válida incluso para los nodos de línea, es suficiente con suponer que las frecuencias son cantidades grandes, en virtud de lo cual es posible asumir la convención $f_a / f_a = 1$ incluso para $f_a \rightarrow \infty$. La demostración de existencia y unicidad de la solución $\{\tau_i^k(f, t)\}_{i \in N}$ puede encontrarse en [Cominetti y Correa \(2001\)](#), además de la demostración de su continuidad en (f, t) y sobre todos los destinos.

Luego, al igual que en la sección 5.3, si consideramos ahora las frecuencias efectivas simplemente como funciones continuas $f_a : D \rightarrow (0, \infty)$ donde el dominio $D \subset [0, \infty)^S$ es un convexo tal que $0 \in D$, y asumimos como válidas las hipótesis allí formuladas, se tiene que las frecuencias efectivas son funciones derivables tal que: $[\partial f_i(y) / \partial y_s] < 0$, y se puede definir en forma precisa lo que se entenderá por equilibrio de Wardrop, a partir de las funciones:

$$\tau_i^k(y) := \tau(f(y), t) \quad (6.8)$$

$$T_s^k(y) := \frac{1}{\sum_{a \in s} f_a(y)} + \sum_{a \in s} \frac{f_a(y)}{\sum_{a' \in s} f_{a'}(y)} (t_a + \tau_{h(a)}^k(y)) \quad (6.9)$$

Con las cuales se define la condición de equilibrio de Wardrop en la red planteada.

Definición 6.1: Una asignación y^* que satisface (6.2), (6.4) y (6.5) es equilibrio de Wardrop ssi:

$$(\forall i \in N, k \in K) (\forall s \in A_i^+) \quad y_s^{k*} > 0 \Rightarrow T_s(y^{k*}) = \min_{s' \in A_i^+} T_{s'}(y^{k*}) \quad (6.10)$$

6.3 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Del planteamiento del problema hecho en la sección anterior se desprende que éste se reduce a encontrar una matriz de flujos por estrategias $y^* \in \mathbb{R}^{|A_i^+| \times |K|}$ tal que se cumplan las condiciones (6.2), (6.5), (6.6) y (6.10), es decir:

$$(\forall i \in N, k \in K) (\forall s \in A_i^+) \quad y_s^{k*} > 0 \Rightarrow T_s(y^{k*}) = \min_{s' \in A_i^+} T_{s'}(y^{k*})$$

$$\begin{aligned}
v_a &= \sum_{s \ni a; k \in K} y_s^k \frac{f_a(y)}{\sum_{a' \in s} f_{a'}(y)} \quad \forall a \in A \\
x_i^k &= \sum_{s \in A_i^+} y_s^k \quad \forall i \in N \\
x_i^k &= d_i^k + \sum_{a \in E_i^-} v_a^k \quad \forall i \in N
\end{aligned}$$

donde la función frecuencia efectiva $f_a(\cdot): \mathbf{R}^{|A_i^+| |x| |K|} \rightarrow [0, +\infty)$ es continua y decreciente, de acuerdo al modelo generalizado de congestión:

$$f_a(y) = \bar{f}_a \left(1 - \left(\sum_{\substack{s \in A_i^+ : s \ni a \\ k \in K}} \frac{y_s^k}{c^s} \right)^\alpha \right)$$

la función tiempo de viaje de una estrategia $T_s(\cdot): \mathbf{R}^{|A_i^+| |x| |K|} \rightarrow [0, +\infty)$ es dependiente de las frecuencias efectivas y de los tiempos mínimos $\{\tau_i\}_{i \in N}$, a saber:

$$T_s^k(y) := \frac{1}{\sum_{a \in s} f_a(y)} + \sum_{a \in s} \frac{f_a(y)}{\sum_{a' \in s} f_{a'}(y)} (t_a + \tau_{h(a)}^k(y))$$

donde los tiempos mínimos de viaje desde los nodos i hasta los destinos k están definidos como la solución de:

$$\begin{aligned}
\tau_k^k &= 0 \\
\tau_i^k &= \min_{s \in A_i^+} \frac{1 + \sum_{a \in s} (t_a + \tau_{h(a)}^k) f_a(y)}{\sum_{a \in s} f_a(y)} \quad \forall i \in N, i \neq k
\end{aligned}$$

La existencia y unicidad del equilibrio no son desarrolladas, quedando como problema abierto para futuras investigaciones. No obstante ello, para resolver el problema planteado se podría construir una multiaplicación cuyo dominio sería el conjunto de flujos por estrategias, tal que sus puntos fijos satisfagan las ecuaciones (6.2), (6.5), (6.6) y (6.10). Para ello, se deberían definir una serie de aplicaciones que, al componerlas entregarán la multiaplicación buscada, lo que esquemáticamente sería de la forma:

$$y \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v(y) \\ \tau(y) \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(v(y)) \\ t(\tau(y)) \end{array} \right\} \longrightarrow Y$$

7. CONCLUSIONES

Si se acepta la definición de congestión en transporte público entregada por [De Cea y Fernández \(1993\)](#), que la establece como el fenómeno experimentado por los usuarios en términos del incremento de su tiempo de espera producto de una oferta limitada, es posible afirmar que este aspecto ha sido incorporado a los modelos de asignación de pasajeros a líneas, sólo en los últimos veinte años.

En efecto, los modelos de asignación que han incorporado este aspecto lo han hecho de distintas formas, introduciendo de paso algunas consecuencias en relación con alteraciones del comportamiento de los usuarios en términos de las líneas o rutas que están dispuestos a usar. Para ello, en los modelos revisados en el Capítulo 2 los autores suponen que dada una oferta de transporte, los tiempos de espera son dependientes de la demanda de viajes, es decir, de la cantidad de usuarios a bordo de los buses y esperando en paraderos.

A modo de ejemplo, [Wu *et al.* \(1994\)](#), [Bouzaïene-Ayari *et al.* \(1995\)](#), [Cominetti y Correa \(2001\)](#) y [Cepeda *et al.* \(2006\)](#) desarrollan modelos de equilibrio bajo el concepto de estrategias óptimas o hiper-rutas mínimas, en los cuales tanto los tiempos de viaje en vehículos como los de espera son dependientes de la demanda.

Sin embargo, gran parte de los modelos que han incorporado la congestión lo han hecho de manera intuitiva, tratando de obtener los resultados finales observados en el sistema, o de internalizar los efectos experimentados por los usuarios. Para ello, han sido usadas funciones generales o expresiones más bien heurísticas en la determinación de los tiempos medios de espera, a pesar de ser específicamente éste aspecto el que da origen al concepto de congestión en transporte público.

En efecto, [De Cea *et al.* \(1993\)](#) plantean solo fundamentaciones intuitiva para la utilización de las frecuencias efectivas, [Wu *et al.* \(1994\)](#) propone una función potencial genérica a ser calibrada y [Bouzaïene-Ayari *et al.* \(2001\)](#) fundamenta su expresión analítica del tiempo de espera a través de un modelo cuyos supuestos son demasiado específicos y no aplicables en la mayoría de los casos.

Sobre el asunto, en esta Tesis se demuestra que analizando el proceso generado a partir de la interacción entre los intervalos (exponenciales) de arribo de los buses y las probabilidades de abordaje de los usuarios, es posible afirmar que una primera aproximación para el valor esperado del tiempo de espera hasta abordar algún bus de la línea l de frecuencia f_l , experimentado por aquellos usuarios que desean abordarla, corresponde al valor esperado del tiempo de espera hasta el arribo de un bus de una línea ficticia con frecuencia $p_l f_l$, donde p_l corresponde a la probabilidad de abordar la línea l cuando un bus de ella se encuentra en el paradero.

Con lo anterior se validó como aproximación el concepto de frecuencia efectiva, y luego se verificaron una serie de convenientes propiedades usualmente asumidas en investigaciones previas. En particular, se verifica que la propiedad aditiva de los inversos de las frecuencias efectivas cuando se trata de un conjunto de líneas es correcta (pero no exacta), y el uso de dichas frecuencias efectivas en la distribución de los pasajeros. En efecto, se demuestra que independiente de la forma de las probabilidades de abordaje de los buses $\{p_i\}_{i \in L}$, la regla de

distribución de flujos sobre un conjunto de líneas L es directamente proporcional a la frecuencia efectiva de cada una de ellas. De este modo, queda demostrado que los efectos de la restricción de capacidad no solo son evidentes en los tiempos de espera experimentados por los usuarios, sino que además alcanzan aspectos como la asignación de pasajeros.

Luego, y con el objeto de determinar las probabilidades de abordaje a los buses, se obtienen y testean diversas aproximaciones para modelar los tiempos de espera, tanto en paraderos simples (solo una línea) como complejos (varias líneas y tipos de usuarios), que son posteriormente usadas para proponer un Modelo Generalizado de Congestión, en donde el tiempo de espera de cada línea depende de la demanda a nivel de estrategias y no de líneas, con el propósito de incluir la demanda potencial de cada línea en la determinación de su frecuencia efectiva. La idea de que la frecuencia efectiva de una línea dependa de su demanda potencial y no solo de la cantidad de pasajeros que la abordan, fue constatada vía simulaciones, en las que distintas asignaciones de pasajeros se presentan con similares tiempos de espera. En efecto, dada una demanda fija, que opta íntegramente por la estrategia combinada, se obtuvieron sistemáticamente tiempos de espera estadísticamente semejantes con asignaciones de pasajeros significativamente distintas.

Posteriormente, con el objeto de plantear y resolver el problema de líneas comunes (ver [Chriqui y Robillard, 1975](#); [De Cea y Fernández, 1988](#); [De Cea y Fernández, 1993](#); [Cominetti y Correa, 2001](#)) se usaron simulaciones para entender y observar las características cualitativas más importantes de la solución de equilibrio, para un ejemplo específico. Una de estas características, fue la existencia de grupos de usuarios con conjuntos de líneas atractivas que poseen líneas en común, esto es, distintos tipos de usuarios compitiendo por las mismas líneas. En este ámbito, se demostró que el Modelo Generalizado de Congestión replica las características cualitativas de los estados de equilibrio simulados (aunque con diferencias cuantitativas), en aspectos como: la existencia de rangos de demanda con diferentes soluciones de equilibrio; la coexistencia de usuarios con distintos conjuntos de líneas atractivas; el comportamiento de los tiempos esperados de viaje; y la asignación de pasajeros a líneas.

En efecto, se generalizó y resolvió el clásico problema de líneas comunes planteado inicialmente por [Chriqui y Robillard \(1975\)](#), considerando frecuencias efectivas dependientes de los flujos a nivel en estrategias, demostrando la existencia y unicidad de la solución de equilibrio, e identificando las condiciones para las cuales se alcanza.

Finalmente, se planteó un Modelo de Equilibrio en Redes de Transporte Público Generales (desde múltiples orígenes a múltiples destinos) haciendo uso del concepto de estrategia ([Spiess, 1983](#)), que denominamos *comportamiento global*; del concepto estrategia local ([Bouzaïene-Ayari et al. 1995](#)) que denominamos *comportamiento local de los usuarios*; del Modelo Generalizado de Congestión desarrollado y testeado en esta tesis; y del Problema de Líneas Comunes resuelto también en esta tesis. Así, el Modelo de Equilibrio en la Red está constituido por una familia de modelos de equilibrio (uno para cada par origen destino), acoplados por las ecuaciones de conservación de flujos.

De este modo se establecieron las definiciones básicas del Modelo de Equilibrio, sus supuestos y restricciones, además de detallar el conjunto de condiciones que debe satisfacer el equilibrio de Wardrop. La existencia y unicidad del equilibrio no son desarrolladas, quedando como problema abierto para futuras investigaciones, junto con el desarrollo del algoritmo de solución y su posterior implementación.

8. REFERENCIAS

Andersson P., Hermansson A., Tengvald E. y Scalia G.P. (1979) Analysis and simulation of an urban bus route. *Transpn. Res.* **13A**, 439-466.

Beltrán P., Gschwender A., Munizaga M., Palma C. y Zuñiga M. (2012) Desarrollo de indicadores de nivel de servicio de Transantiago utilizando datos pasivos. Presentado en: XVII Congreso Panamericano de Ingeniería de Transito Transporte y Logística. Santiago, Chile.

Bly P. H. y Jackson R. L. (1974) Evaluation of bus control strategies by simulation. Report **LR637**. Transport and Road Research Laboratory, Crowthorne.

Bouzaïene-Ayari B., Gendreau M. y Nguyen S. (1995) An equilibrium – fixed point model for passenger assignment in congested transit networks. Pub. N° **95-57** C.R.T. Université de Montréal.

Bouzaïene-Ayari B., Gendreau M., and Nguyen S. (2001) Modeling bus stops in transit networks: a survey and new formulations. *Transpn. Sci.* **35(3)**, 304-321.

Ceder A. y Marguier P. H. J. (1985) Passenger waiting time at transit stop. *Traffic Engng. Control* 327-329.

Cepeda M. (2002) Modelè d'équilibre dans les réseaux de transport en commun: le cas des capacités explicites des services. Ph.D. thesis, Département d'informatique et de recherche opérationnelle. Pub. N° **2002-43** C.R.T. Université de Montreal.

Cepeda M. (2006) Un Nuevo Modelo para la Estimación del Tiempo de Espera en Paraderos de Transporte Público. Revista Obras y Proyectos N°2, 34-42. Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile.

Cepeda M., Cominetti R. y Florian F. (2006) A frequency-based assignment model for congested transit networks with strict capacity constraints: characterization and computation of equilibria *Transportation Research B* 40(6), pp. 437-459.

Chapleau (1974) Reseaux de transport en commun: Estructure informatique et affectation. Pub. N° **13** C.R.T. Université de Montréal.

Chriqui C. (1974) Reseaux de transports en comun: les problemes de cheminement et d'accès. Pub. N° **11** C.R.T. Université de Montreal.

Chriqui C. y Robillard P. (1975) Common bus lines. *Transpn. Sci.* **9**, 115-121.

Cominetti R. y Correa J. (2001) Common-Lines and Passenger Assignment in Congested Transit Networks. *Transpn. Sci.* **35**, 250-267.

Cortés C., Jara P. y Moreno E. 2012. Stochastic Transit Equilibrium. Submitted at Transportation Research Part B: Methodological.

Correa J. (1999) Asignación de flujos de pasajeros en redes de transporte público congestionadas. Memoria de Título, Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Chile.

Cox D. y Smith W. (1964) Estudio matemático de las colas. Uteha, México.

Danas A. (1980) Arrivals of passengers and buses at two London bus-stops. *Traffic Engng. Control* 472-475.

De Cea J. y Chapleau R. (1984) MADITUC: Un modelo de asignación a rutas múltiples en redes de transporte público. *Apuntes de Ingeniería* **15**, 113-140.

De Cea J. (1984) Análisis de los distintos tipos de modelos de asignación a redes de transporte público. Presentado en: 1er Congreso Chileno de Ingeniería en Transporte. Santiago, Chile.

De Cea J., Bunster J. P., Zubieta L. y Florian M. (1988) Optimal strategies and optimal routes in public transit assignment models: an empirical comparison. *Traffic Engng. Control*, 519-526.

De Cea J. y Fernández J.E. (1989) Transit assignment to minimal routes: an efficient new algorithm. *Traffic Engng. Control* 520-526.

De Cea J. y Fernández J.E. (1993) Transit assignment for congested public transport system: an equilibrium model. *Transpn. Sci.* **27**, 133-147.

De Cea J. y Fernández J.E. (1996) An empirical comparison of equilibrium and non-equilibrium transit assignment models. *Traffic Engng. Control*, 441-445.

De Cea, J., Fernández, J. E., Salgado, A. y Fernández J. M (1998) Calibración de Funciones Flujo-Costo para un Modelo de Asignación de Transporte Público con Restricción de Capacidad. Actas del X Congreso Panamericano de Ingeniería de Tránsito y Transporte, Santander, España.

Dial R. B. (1967) Transit pathfinder algorithm. *Highway Res. Rec.* **Nº205**, 67-85.

Fearnside y Draper (1971) Public transport assignment: A new approach. *Traffic Engng. Control*, 298-299.

Florian M. y Spiess H. (1982) The convergence of diagonalization algorithms for asymmetric network equilibrium problems. *Transpn. Res.* **16B**, 447-483.

Gendreau M. (1984) Etude approfondie d'un modèle d'équilibre pour l'affectation des passagers dans les. Pub. **Nº 384** C.R.T. Université de Montreal.

Hasselström (1981) Public transportation planning: A mathematical programming approach. Ph.D. Thesis Department of Business Administration, University of Gothenburg, Suecia.

Holroyd E. M. y Scraggs D. A. (1966) Waiting times for buses in Central London, *Traffic Engineering and Control* 8, 158-160.

- Jansson K. y Ridderstolpe B. (1992) A method for the route-choice problem in public transport system. *Transpn. Sci.* **26**, 246-251
- Jolliffe J. K. y Hutchinson T. P. (1975) A behavioural explanation of the association between bus and passengers arrivals at a bus-stop. *Transpn. Sci.* **9**, 248-282.
- Last A. y Leak S. E. (1976) Transept: a bus model. *Traffic Engng. Control* , **V17**. 14-20.
- Lam W., Gao Z. y Yang N. (1999) A Stochastic User Equilibrium Assignment Model for Congested Transit Networks. *Transportation Research*, **33B**, 351-68.
- Le Clerq F. (1972) A public transport assignment method. *Traffic Engng. Control* , **V14**. 91-96.
- Marguier P.H. y Ceder A. (1984) Passagers waiting strategies for overlapping bus router. *Transpn. Sci.* **18**, 207-230.
- Nielsen, O. A. (2000) A Stochastic Transit Assignment Model Considering Differences in Passengers Utility Functions. *Transportation Research*, **34B**, 377-402.
- Nguyen S. y Pallotino S. (1988) Equilibrium traffic assignment for large scale transit networks. *Eur. J. Oper. Res.* **37**, 176-186.
- Osuna E. E. y Newell G. F. (1972) Control strategies for an idealized public transportation system, *Transportation Science* **6**, 57-72.
- Powell W. (1981) Stochastic delay transportation terminals: New results in theory and application of bulk queues. Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology. EE.UU.
- Powell W. (1986) Approximate, closed form moment formulas for bulk arrival, bulk service queues. *Transpn. Sci.* **20**, 13-23.
- Robillard P. (1971) 0,1 Hiperbolic programming problems. *Naval Res. Logist. Quart.* **18**, 47-57.
- Ross S. M. (1969) Applied probability models with optimization application. Dover Publication, New York.
- Ross S. M. (1993) Introduction to probability models. Academic Press, San Diego.
- Sectra (1998) Análisis y Calibración de Modelos de Asignación de Transporte Publico con Restricción de Capacidad, Ministerio de Planificación y Cooperación, Chile.
- Spiess H. (1983) On optimal route choice strategies in transit networks. Pub. N° **286** C.R.T. Université de Montreal.
- Spiess H. (1984). Contributions à la théorie et aux outils de planification de réseaux de transport urbain. Ph.D. thesis, Département d'informatique et de recherche opérationnelle, Pub. N° **382** C.R.T. Université de Montreal.

Spiess H. y Florian M. (1989) Optimal strategies: a new assignment model for transit networks. *Transpn. Res.* **23B**, 83-102.

Wardrop J. G. (1952) Some theoretical aspects of road traffic research. *Proceedings of the Institute of Civil Engineers, Part II.* **1**, 325-378.

Welding P. I. (1957) The instability of a close-interval service, *Operational Research Quarterly*, **8**, 133-148.

Wu J. H., Florian M. y Marcotte P. (1994) Transit equilibrium assignment: a model and solution algorithms. *Transpn. Sci.* **28**, 193-203.

Yang L. y Lam W. (2006) Probit-Type Reliability-Based Transit Network Assignment. *Transportation Research Record*, 1977, 154-163.