



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE GEOFÍSICA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

ESTUDIO TEÓRICO DEL *RUNUP* DE TSUNAMIS EN UNA BATIMETRÍA SIMPLE CON APLICACIÓN A LA SUBDUCCIÓN CHILENA

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS, MENCIÓN EN GEOFÍSICA
MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

MAURICIO ANTONIO FUENTES SERRANO

PROFESOR GUÍA:
JAVIER RUIZ PAREDES

PROFESOR CO-GUÍA:
ARMANDO CISTERNAS SILVA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JAIME CAMPOS MUÑOZ
CARLOS CONCA ROSENDE

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la beca de CONICYT de Magíster nacional

SANTIAGO DE CHILE
MARZO 2013

Resumen

Las alturas máximas del tsunami (alturas de *runup*) son unos de los parámetros de mayor interés, ya que su predicción estima el peligro al cual se ve expuesta la población. Bajo esta perspectiva, el objetivo principal de este trabajo es estudiar, desde un punto de vista teórico, el comportamiento del *runup* a lo largo de la costa. Se ha escogido una batimetría simple, del tipo *sloping beach*, para aproximar a primer orden la geometría de la subducción chilena, bajo la cual se aplicó la teoría de la mecánica de fluidos. Se ha hecho una revisión exhaustiva de la teoría clásicamente utilizada, en los casos unidimensional (lineal y no lineal) y bidimensional lineal, que corresponden a las ecuaciones de aguas poco profundas.

Para el cálculo del *runup* en el caso unidimensional se han utilizado formas de ondas iniciales incidentes de tipo solitarias, que corresponden a la solución más regular de la ecuación de Korteweg-De Vries. También se han usado otras formas de onda iniciales, como las llamadas *N-waves*, que son una solución particular de la ecuación de generación de tsunamis linealizada en una dimensión. En el caso no lineal, se presenta un método de resolución basado en la teoría de los invariantes de Riemann para sistemas hiperbólicos, conciliando con los resultados de la teoría lineal, y obteniéndose así el ya conocido resultado que, a primer orden, el *runup* es bien estimado por la teoría lineal.

En el caso bidimensional, se ha encontrado una solución para la altura de la ola en el caso de una batimetría de *sloping beach*, donde se han resuelto las ecuaciones bajo las hipótesis de la teoría lineal. Se ha verificado que el núcleo de las ecuaciones y la geometría, generaliza adecuadamente el caso unidimensional bajo condiciones de borde idénticas. Para ello, se ha hecho un análisis de sus polos y ceros en el plano complejo, para su posterior tratamiento integral, obteniéndose los resultados esperados. Para situaciones especiales, considerando algunas simplificaciones, se ha encontrado una generalización del cálculo analítico aproximado del *runup* en dos dimensiones tomando en cuenta el ángulo de incidencia de la ola inicial sobre la costa. Se ha encontrado una dependencia explícita con este factor, y así, en este estudio se propone un modelo analítico de la distribución de *runup* a lo largo de la costa, del que sólo existían modelos empíricos basados en observaciones y simulaciones numéricas.

El modelo teórico analítico propuesto ha sido, además, comparado con el modelo numérico NEOWAVE, encontrándose que en el dominio de validez de la solución teórica, ésta estima adecuadamente el máximo *runup*, concluyendo así la generalización buscada. Para esta verificación, se exploraron varios valores de los parámetros (pendiente de la playa, ángulo de incidencia y altura de la ola inicial, etc.), que inciden directamente en el valor final del *runup*.

Como última aplicación a datos reales, se ha utilizado el modelo teórico propuesto en este trabajo para estudiar la distribución de *runup* en la costa del tsunami generado por el terremoto del Maule, Mw 8.8 del 27 de febrero del 2010, obteniéndose mejoras en la curva que ajusta dicha distribución, en comparación con otros modelos empíricos preexistentes.

Abstract

The maximum heights of the tsunami along the shore (*runup*) are one of most important parameters because its prediction quantifies the tsunami threat to the population. Under this perspective, the main goal of this work is to study, from a theoretical point view, the *runup* distribution along the coast. A simple sloping beach bathymetry was chosen to approximate to the first order the Chilean subduction seabed geometry. In this domain the fluid mechanics theory was applied. First a detailed review was made of the classical theory used for the one-dimensional (linear and nonlinear), and linear two-dimensional cases, that corresponds to shallow water wave equations. In order to compute the *runup* in the one-dimensional case, we used a solitary wave type as initial incident waveform, which correspond to the most regular solution of Korteweg-De Vries equation. We also used other type of initial waveform, such as the so called N-waves, which are a particular solution of the linearized tsunami generation equation in one dimension. In the nonlinear case, we present a method based on the theory of Riemann invariants for hyperbolic systems, which is not very different from the results obtained by the linear theory, and thus, we establish the already well known fact that to the first order, the *runup* is well estimated by the linear theory. In the two-dimensional case, we found a solution for the tsunami wave height in a sloping beach bathymetry, where the equations have been solved by using the linear theory. We verified the kernel of the equations and the geometry that generalize the one-dimensional case with identical boundary conditions. To do this, an analysis of the poles and zeros in the complex plane was made, for a posterior integral treatment, obtaining the expected results. For particular cases, under some simplifications, was found, a generalization of the approximate analytical solution for the *runup* in two dimensions, by taking into account the incidence angle of the initial wave on the coast. An explicit dependence of this factor has been found, therefore, in this study we propose a model and an analytical solution, able to describe the *runup* distribution along the coast, for which only empirical models based on observations, and numerical simulations, existed. The theoretical model proposed here has also been compared against the numerical model NEOWAVE, we find that, under the validity domain of the theoretical solution, the latter one estimates properly the maximum *runup*, obtaining then the generalization looked for. To verify it, several parameter values - that affect directly in the final *runup* value - were explored. Among which, the beach slope, the incidence angle and the initial wave height. A last application performed on real data, was to use the theoretical model proposed in this work to study the *runup* distribution along the coast generated by the tsunami of the February 27th, 2010, Mw 8.8, Maule earthquake. We found an improved curve that fits better the *runup* along the coast, in comparison with other existing empirical models.

Agradecimientos

Quiero agradecer al profesor Javier Ruiz por todo el apoyo que me brindó en esta tesis, en todo ámbito, ya que siempre se dio el tiempo de discutir los avances teniendo interacciones muy favorables para este trabajo y por otra parte, el apoyo financiero a través de su proyecto Fondecyt. Agradezco al profesor Jaime Campos, que en conjunto con la embajada de Francia en Chile, me brindaron la posibilidad de hacer una pasantía en ese hermoso país, y conocer a brillantes sismólogos, como el profesor Luis Rivera. Además agradezco al profesor Armando Cisternas, quien fue el que me hizo considerar la posibilidad de entrar en el apasionante mundo de las ciencias de la tierra, particularmente en el área de sismología, al cual le agradezco también su increíble hospitalidad y la de su esposa cuando visité Francia, y por supuesto, le agradezco sus magníficos aportes y comentarios en lo que a este trabajo concierne. Le agradezco la compañía y buenos momentos a mis amigos matemáticos, especialmente a: Franco (Basso), César (Chanco mayor), Francisco B. (Tata) y Félipe, quienes hicieron que estudiar una carrera tan dura, se hiciera muy entretenido, también a los muchachos del quinto piso de geofísica: Sergio, Patricio (Benford) y Sebastián (Bon Jovi o Brady). En particular le agradezco a Sebastián su apoyo y ayuda al conseguir información, artículos y contactos. También le doy las gracias al profesor Carlos Conca por sus muy interesantes comentarios y además por brindarme el honor de trabajar con él en múltiples oportunidades como profesor auxiliar.

Le agradezco al Departamento de Postgrado y Postítulo de la Vicerrectoría de Asuntos Académicos la beca de “Ayudas para estadías cortas de investigación” con la cual tuve la inigualable experiencia de conocer y trabajar en Honolulu, en la universidad de Hawaii en Manoa, donde, le doy las gracias al Dr. Cheung por facilitarme los documentos necesarios para la postulación a la beca y al Dr. Yoshiki Yamazaki por ayudarme a finalizar mi tesis con su modelo numérico, además de su hospitalidad y ayuda, que me permitió adaptarme rápidamente.

Le doy profundamente las gracias a la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT) quien financió mis estudios de postgrado e hizo todo esto posible.

Finalmente, quiero agradecer a mi familia: Mis padres (Mary y CJ) y a mi hermana (clari), quienes siempre creyeron en mí, y me dieron su apoyo incondicional.

Tabla de contenido

Resumen	i
Abstract	ii
<i>Agradecimientos</i>	iii
Tabla de contenido	iv
Índice de Tablas	vii
Índice de Figuras	x
1. Introducción	1
2. Ecuaciones Preliminares	9
2.1. Ecuaciones de Movimiento	9
2.2. Condiciones de Borde	10
2.2.1. En la superficie	10
2.2.2. En el fondo	11
2.3. Deducción del sistema <i>Shallow Water Equations</i>	11
2.4. Versión para la generación de Tsunamis	12
2.5. Caso de vorticidad despreciable	13
3. Generación de Tsunamis	15
3.1. Generación Activa - Pasiva	16
3.1.1. Generación Activa	16
3.1.2. Generación Pasiva	19
3.1.3. Comparación entre generación activa y pasiva	20
3.2. Función de Green para la generación lineal	21

4. Estudio Unidimensional	23
4.1. Caso Lineal	23
4.1.1. Formalismo Alternativo: Uso de la Transformada de Fourier Tiempo-Espacio	25
4.1.2. Continuidad de las soluciones	29
4.1.3. Cálculo de espectro de Fourier de una onda solitaria	30
4.1.4. Cálculo del máximo <i>runup</i> de una onda solitaria	35
4.1.5. Cálculo del espectro de Fourier de una <i>N-wave</i>	40
4.1.6. Cálculo del máximo <i>runup</i> de una <i>N-wave</i>	44
4.1.7. <i>N-waves</i> Isósceles	49
4.2. Teoría no lineal	52
4.2.1. Solución de la teoría no lineal	59
4.2.2. Comparación entre la teoría lineal y no lineal	60
4.2.3. Validación de la teoría no lineal: <i>Breaking point</i>	62
5. Generalización al caso Bidimensional	64
5.1. Uso de la Transformada de Fourier Tiempo - Espacio	67
5.2. Continuidad de las soluciones	68
5.3. Cálculo del espectro de Fourier de una onda solitaria 2D	69
5.4. Cálculo del máximo <i>runup</i> para una onda solitaria 2D	70
5.4.1. Validación de la generalización	71
5.4.2. Sobre los ceros de la función $X(\cdot) \pm \frac{i}{k_x} X'(\cdot)$	72
5.4.3. Cálculo del <i>runup</i>	75
5.5. Solución Particular	76
6. Comparación numérica y con datos reales	89
6.1. El modelo NEOWAVE	89
6.1.1. Configuración del modelo	90
6.1.2. Resultados	94
6.2. Modelos empíricos	116
6.3. Caso emblemático: Tsunami del Maule, 2010	117
6.3.1. Relación con la deformación inicial: Fórmulas de Okada	118
7. Conclusiones	123
7.1. Perspectivas y desarrollos futuros	125
Bibliografía	126
Apéndice	129

A. La ecuación de Korteweg - de Vries	129
A.1. Solución solitaria de la ecuación KdV	129
B. La ecuación de Boussinesq	132
B.1. Solución solitaria de la ecuación de Boussinesq	132
B.2. Ecuación de Boussinesq 2D y solución solitaria	134
C. La función hipergeométrica	135
C.1. Expansiones asintóticas	136
D. La ecuación de Sharpe	137
E. Representaciones Integrales	139
F. Teoremas del Argumento y de Rouché	141
F.1. Teorema del argumento	141
F.2. Teorema de Rouché	143

Índice de Tablas

1.1. Catálogo de tsunamis de Chile.	3
---	---

Índice de Figuras

1.1. Esquema gráfico del nombre de las variables asociadas a un tsunami	3
1.2. Mapa de la zona afectada por el tsunami del Maule (2010) y su <i>runup</i>	6
1.3. Distribución del <i>runup</i> producido por el terremoto del Maule, 2010.	7
1.4. Un ajuste para el <i>runup</i> del terremoto del Maule, 2010.	7
2.1. Esquema de coordenadas y variables a usar.	10
2.2. Esquema de coordenadas y variables a usar en el caso de la generación.	12
3.1. Ejemplo de generación de tsunami.	15
3.2. Mareogramas sintéticos.	21
4.1. Modelo “Sloping beach”.	23
4.2. Contorno de integración para la onda solitaria.	31
4.3. Contorno de integración para integral de <i>runup</i>	35
4.4. Serie $S(\chi)$	39
4.5. Comparación entre éste trabajo y el de Synolakis, variando H	40
4.6. Comparación entre éste trabajo y el de Synolakis, variando β	40
4.7. Tipos de N -waves.	41
4.8. Dependencia de ϵ con γ	43
4.9. Dependencia del <i>runup</i> con L	49
4.10. Serie $S(\chi)$	51
4.11. Comparación del <i>runup</i> predicho por N -waves isósceles.	52
5.1. Esquema de batimetría para el problema 2D.	64
5.2. Comparación entre las funciones J_0 y X	73
5.3. Geometría básica para la solución particular.	76
5.4. Ejemplo de forma inicial de la ola.	81
5.5. <i>Runup</i> encontrado en el modelo bidimensional, $\theta = 80^\circ$	86
5.6. <i>Runup</i> encontrado en el modelo bidimensional, $\theta = 60^\circ$	86
5.7. <i>Runup</i> encontrado en el modelo bidimensional, $\theta = 30^\circ$	87

5.8. <i>Runup</i> encontrado en el modelo bidimensional, $\theta = 10^\circ$	87
5.9. Dependencia de la incidencia oblicua.	88
6.1. Condición geométrica.	93
6.2. Ola inicial con amortiguamiento Gaussiano, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 90^\circ$	95
6.3. Comparación de <i>runup</i> , $\beta = 2^\circ$, $\theta = 90^\circ$	95
6.4. Ola inicial con amortiguamiento Gaussiano, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 60^\circ$	96
6.5. Comparación de <i>runup</i> , $\beta = 2^\circ$, $\theta = 60^\circ$	96
6.6. Ola inicial con amortiguamiento Gaussiano, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 30^\circ$	97
6.7. Comparación de <i>runup</i> , $\beta = 2^\circ$, $\theta = 30^\circ$	97
6.8. Ola inicial con amortiguamiento Gaussiano, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 10^\circ$	98
6.9. Comparación de <i>runup</i> , $\beta = 2^\circ$, $\theta = 10^\circ$	98
6.10. Ola inicial con amortiguamiento Lorentziano, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 90^\circ$	99
6.11. Comparación de <i>runup</i> , $\beta = 2^\circ$, $\theta = 90^\circ$	99
6.12. Ola inicial con amortiguamiento Lorentziano, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 60^\circ$	100
6.13. Comparación de <i>runup</i> , $\beta = 2^\circ$, $\theta = 60^\circ$	100
6.14. Ola inicial con amortiguamiento Lorentziano, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 30^\circ$	101
6.15. Comparación de <i>runup</i> , $\beta = 2^\circ$, $\theta = 30^\circ$	101
6.16. Ola inicial con amortiguamiento Lorentziano, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 10^\circ$	102
6.17. Comparación de <i>runup</i> , $\beta = 2^\circ$, $\theta = 10^\circ$	102
6.18. Ola inicial con amortiguamiento Lorentziano, $\beta = 1.5^\circ$, $\theta = 80^\circ$	103
6.19. Comparación de <i>runup</i> , $\beta = 1.5^\circ$, $\theta = 80^\circ$	103
6.20. Ola inicial con amortiguamiento Lorentziano, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 80^\circ$	104
6.21. Comparación de <i>runup</i> , $\beta = 2^\circ$, $\theta = 80^\circ$	104
6.22. Ola inicial con amortiguamiento Lorentziano, $\beta = 2.5^\circ$, $\theta = 80^\circ$	105
6.23. Comparación de <i>runup</i> , $\beta = 2.5^\circ$, $\theta = 80^\circ$	105
6.24. Ola inicial con amortiguamiento Lorentziano, $\beta = 3^\circ$, $\theta = 80^\circ$	106
6.25. Comparación de <i>runup</i> , $\beta = 3^\circ$, $\theta = 80^\circ$	106
6.26. Ola inicial finita sin amortiguamiento, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 90^\circ$	107
6.27. Comparación de <i>runup</i> , $\beta = 2^\circ$, $\theta = 90^\circ$	107
6.28. Ola inicial finita sin amortiguamiento, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 75^\circ$	108
6.29. Comparación de <i>runup</i> , $\beta = 2^\circ$, $\theta = 75^\circ$	108
6.30. Ola inicial finita sin amortiguamiento, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 60^\circ$	109
6.31. Comparación de <i>runup</i> , $\beta = 2^\circ$, $\theta = 60^\circ$	109
6.32. Ola inicial finita sin amortiguamiento, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 45^\circ$	110
6.33. Comparación de <i>runup</i> , $\beta = 2^\circ$, $\theta = 45^\circ$	110
6.34. Ola inicial finita sin amortiguamiento, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 30^\circ$	111
6.35. Comparación de <i>runup</i> , $\beta = 2^\circ$, $\theta = 30^\circ$	111

6.36. Ola inicial finita sin amortiguamiento, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 25^\circ$	112
6.37. Comparación de <i>runup</i> , $\beta = 2^\circ$, $\theta = 25^\circ$	112
6.38. Ola inicial finita sin amortiguamiento, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 20^\circ$	113
6.39. Comparación de <i>runup</i> , $\beta = 2^\circ$, $\theta = 20^\circ$	113
6.40. Ola inicial finita sin amortiguamiento, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 10^\circ$	114
6.41. Comparación de <i>runup</i> , $\beta = 2^\circ$, $\theta = 10^\circ$	114
6.42. Comparación del máximo <i>runup</i>	116
6.43. Modelo de distribución de <i>runup</i> propuesto por Okal & Synolakis (2004). . .	116
6.44. Modelo de distribución de <i>runup</i> para el tsunami del Maule.	118
6.45. Modelo de falla finita USGS	118
6.46. Verificación modelo de falla finita USGS	119
6.47. Deformación en superficie y plano de falla	119
6.48. Visión en planta de la deformación en superficie	120
6.49. Modelo de distribución de <i>runup</i> para el tsunami del Maule.	121
6.50. Modelo de distribución de <i>runup</i> para el tsunami del Maule.	121

Capítulo 1

Introducción

Situándose en el contexto sismotectónico, Chile es uno de los países que presenta una de las mayores tasas de actividad sísmica en el mundo, siendo el país donde se produjo el terremoto más grande registrado a la fecha (Valdivia 1960, $M_w = 9,5$). A menudo una se genera gran diversidad de terremotos con distinto origen tectónico, muchos de los cuales son tsunamigénicos (terremoto con alta probabilidad de ocasionar un tsunami, por lo general de magnitud mayor o igual a 7.5). Puesto que Chile posee una larga zona de subducción, dada principalmente por la convergencia de las placas de Nazca y Sudamericana, se hace indispensable contar con la mayor cantidad de conocimiento relativo a la generación, propagación y *runup* (altura máxima de la ola en la costa) de los tsunamis. En lo que a Chile concierne, cuando un terremoto tsunamigénico se genera en la zona de contacto entre las placas de Nazca y Sudamericana, se habla de un tsunami local o de campo cercano. Sin embargo, no es el único tipo de tsunami que puede causar daños en las costas chilenas, pues no necesariamente debe originarse por un terremoto chileno. Debido a la poca pérdida de energía que sufren las ondas en el mar, tsunamis producidos, por ejemplo en Japón, tienen alto riesgo de causar daños en las costas chilenas, los cuales son llamados tsunamis de campo lejano o transoceánicos.

Entre los últimos tsunamis, podemos mencionar los de Sumatra (2004, 2009), del Maule (2010) y el de Tohoku-Oki (2011), todos ellos destructivos, causando muchas pérdidas humanas y materiales, lo cual hace esencial comprender este fenómeno al mayor detalle, en particular en Chile, que a lo largo de su historia ha sido asolado por varios de estos fenómenos (ver tabla 1.1). El último tsunami importante producido por un terremoto chileno, fue el del Maule, 2010 (Se observa de la figura 1.3, que el terremoto del maule produjo un *runup* cercano a 30m).

Fuente	Lugar	Fecha	Magnitud
Terremoto	Bío-Bío	28/10/1562	8.5

Terremoto	Bío-Bío	08/02/1570	7.5
Terremoto	Los Lagos	16/12/1575	8.5
Terremoto	Tarapacá	16/09/1615	7.5
Terremoto	Bío-Bío	15/03/1657	8
Terremoto	Tarapacá	10/03/1681	7.5
Terremoto	Tarapacá	22/08/1715	7.5
Terremoto	Valparaíso	08/07/1730	8.7
Terremoto	Los Lagos	24/12/1737	8
Terremoto	Bío-Bío	23/05/1751	8.5
Terremoto	Atacama	11/04/1819	8.5
Terremoto	Valparaíso	19/11/1822	8.5
Terremoto	Bío-Bío	20/02/1835	8.5
Terremoto	Tarapacá	07/07/1836	7.5
Terremoto	Los Lagos	07/11/1837	8
Terremoto	Coquimbo	17/11/1849	7.5
Terremoto	Atacama	26/05/1851	7.5
Terremoto	Atacama	05/10/1859	7.7
Terremoto	Bío-Bío	13/08/1868	8.5
Terremoto	Tarapacá	19/08/1869	7.7
Terremoto	Tarapacá	24/08/1869	7.5
Terremoto	Valparaíso	25/03/1871	7.5
Terremoto	Tarapacá	09/05/1877	8.5
Terremoto	Punta Arenas	02/11/1879	7.5
Terremoto	Valparaíso	16/08/1906	8.5
Terremoto	Atacama	18/12/1918	7.5
Terremoto	Atacama	10/11/1922	8.5
Terremoto	Atacama	04/05/1923	7
Terremoto	Aisén	21/11/1927	7.1
Terremoto	Maule	01/12/1928	8.4
Terremoto	Coquimbo	06/04/1943	8.3
Terremoto	Punta Arenas	07/12/1949	7.5
Terremoto	Coquimbo	12/04/1955	7.1
Terremoto	Valdivia	22/05/1960	9.5
Terremoto	Antofagasta	20/07/1995	8.1
Landslide	Tocopilla	21/04/2007	7.7

Terremoto	Maule	27/02/2010	8.8
-----------	-------	------------	-----

Tabla 1.1: Catalogo de tsunamis de Chile en los últimos 100 años

(Fuente: <http://www.ngdc.noaa.gov/nndc/struts/form?t=101650&s=70&d=7>).

Un aspecto importante en el modelamiento de tsunamis es la estimación del *runup* y las alturas de inundación.

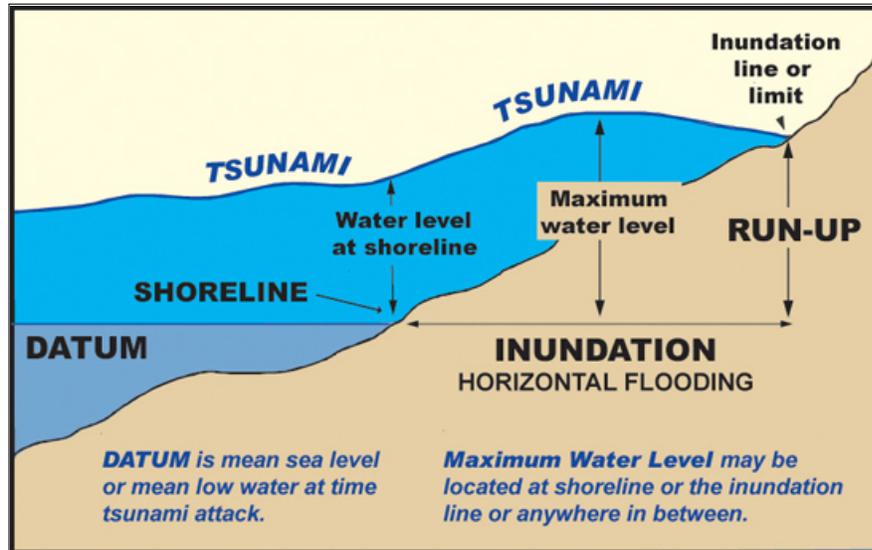


Figura 1.1: Esquema gráfico del nombre de las variables asociadas a un tsunami.

(Fuente: <http://go2add.com/paleo/Tsunamis.php>)

En términos prácticos, el *runup* es la distancia mínima que una persona que se encuentra en la playa debiese subir para estar a salvo del tsunami.

Sin embargo, la resolución de este problema es extremadamente complejo, debido a que las ecuaciones que rigen el movimiento son altamente no-lineales. En este estudio se propone una estrategia de análisis teórico, con especial énfasis en resolver el problema de propagación bidimensional, para el caso de una batimetría simplificada usada ampliamente en la literatura. Este problema presenta interés no sólo aplicado al caso de las costas chilenas, sino que también desde un punto de vista físico-matemático, ya que no existen muchos resultados analíticos al respecto.

El trabajo comienza haciendo una revisión detallada de la teoría clásica de la mecánica de fluidos, tanto lineal como no lineal, de la generación y propagación de tsunamis, basadas en las ecuaciones de Euler para fluidos, en su aproximación de “*shallow water equations*”. (aproximación de agua poco profunda), para después generalizar los resultados teóricos y

analíticos existentes de *runup* unidimensionales, al caso bidimensional. En ambos casos, considerando una batimetría simple, para obtener así, una función de *runup* analítica a lo largo de la playa. Esto permitirá realizar estudios comparativos de cálculo de *runup* teóricos con simulaciones numéricas y con datos observados del tsunami asociado al terremoto del Maule 2010, $M_w = 8,8$.

Se comenzará realizando un estudio de las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos para resolver el problema de la generación y propagación tanto en una como en dos dimensiones espaciales (Ecuaciones de Euler para fluidos). Para esto se recurrirá a técnicas clásicas en el estudio y resolución de ecuaciones diferenciales con derivadas parciales, tales como el uso de los invariantes de Riemann y transformaciones integrales (como la transformada de Laplace y la Transformada de Fourier en tiempo y espacio).

La estrategia está en considerar una batimetría simplificada, que en primera aproximación, pueda tener sentido para la configuración geométrica de la zona de subducción en la costa chilena, por lo cual se escoge una batimetría muy usada en la literatura conocida como “*sloping beach*”, es decir, profundidad constante hasta un cierto dominio, unida a un plano inclinado desde la fosa hasta la costa. A pesar de lo simple que resulta esta batimetría, presenta altos niveles de complejidad matemática en la resolución del problema de propagación de ondas en el agua, pero es una buena aproximación para las costas de Chile, debido a la geometría de la subducción.

A grandes rasgos, el problema comienza cuando un terremoto, con las características adecuadas para producir un tsunami, genera una perturbación en la superficie del agua (ola inicial), debido a las deformaciones y desplazamientos producidos en el fondo marino, esto es lo que se conoce como “generación” y es el proceso que está ligado directamente con la parte sísmológica del problema (Kajiura, 1970). Cuando nace la perturbación inicial, por acción de la gravedad, pasa a ser propagada hacia la costa, y, al encontrarse con la fosa, en donde se produce el cambio de pendiente, se genera una onda reflejada y una transmitida, siendo esta última, la de mayor interés para este problema ya que es la responsable del *runup* en la costa.

El problema en una dimensión ha sido modelado teóricamente considerando como perturbación inicial una onda solitaria, por ejemplo Synolakis (1987) encuentra una expresión analítica para el caso lineal del problema. Las ecuaciones han sido tratadas también en su forma no lineal (Carrier & Greenspan, 1958; Kanaglu, 2004) y se ha visto que la teoría lineal se aproxima muy bien a la no lineal (Synolakis, 1991). En el caso bidimensional, han habido algunos resultados de la teoría lineal que incluyen la incidencia oblicua de las ondas (Carrier & Noiseux, 1983; Zhang & Wu, 1999), sin embargo es muy poca la investigación existente al respecto y aún no se ha encontrado o propuesto alguna solución a este último caso, salvo las clásicas soluciones numéricas o los modelos empíricos (Okal & Synolakis, 2004, ver figuras 1.2, 1.4 para el caso del Maule, 2010. Este modelo empírico, por ejemplo, trata de explicar

la variación del *runup* con una función simple que la describa globalmente). Todas estas investigaciones han sido revisadas y serán incluidas en este trabajo.

En el análisis 2D, se asumirá la misma batimetría de “*sloping beach*” extendida en la dirección “*y*”. En el caso de Chile, este modelo se aproxima en primer orden bastante bien, debido a la geometría de la línea costera del país, la cual sigue una tendencia “lineal” norte-sur.

Se pretende llegar al límite del modelo y obtener soluciones analíticas que den cuenta cómo se relacionan los distintos parámetros y cómo éstos influyen en la solución, permitiendo comprender de manera más profunda la física del problema. Una vez alcanzado este límite, se procederá a la parte final que corresponde a comparar la solución analítica con simulaciones numéricas utilizando softwares existentes que resuelven de manera numérica (esquemas de diferencias finitas por lo general) el problema completo, incluyendo términos no lineales y otros factores que usualmente son despreciados en los cálculos analíticos, y se espera entonces obtener consistencia de ambas ramas.

Como ya se ha mencionado, el problema completo es altamente complejo, debido a efectos locales, irregularidades en la batimetría, resonancia en bahías, etc. Por lo que los modelos numéricos existentes que simulan un tsunami desde su inicio pueden tardar muchas horas de cálculo para simular pocos minutos del tsunami. Esto significa que en una situación real no es factible ejecutar el programa computacional que simula el tsunami, pues no habría tiempo suficiente para alertar a la población. Lo que se hace es contar con una batería de miles de “escenarios” (situaciones hipotéticas pre calculadas que representan algunas de las infinitas configuraciones con las que un terremoto tsunamigénico podría ocurrir). Cuando un evento ocurre, se selecciona el escenario más parecido al evento real dando la respuesta de alarma correspondiente. Sin embargo, las soluciones analíticas obtenidas para casos especiales no requieren de un esfuerzo computacional mayor para ser evaluadas y tener, en primer orden, las alturas máximas de *runup* en la costa, y es por lo cual se hace esencial comparar estos resultados con las soluciones numéricas, pues al ser validadas, podrán ser utilizadas en aplicaciones reales.

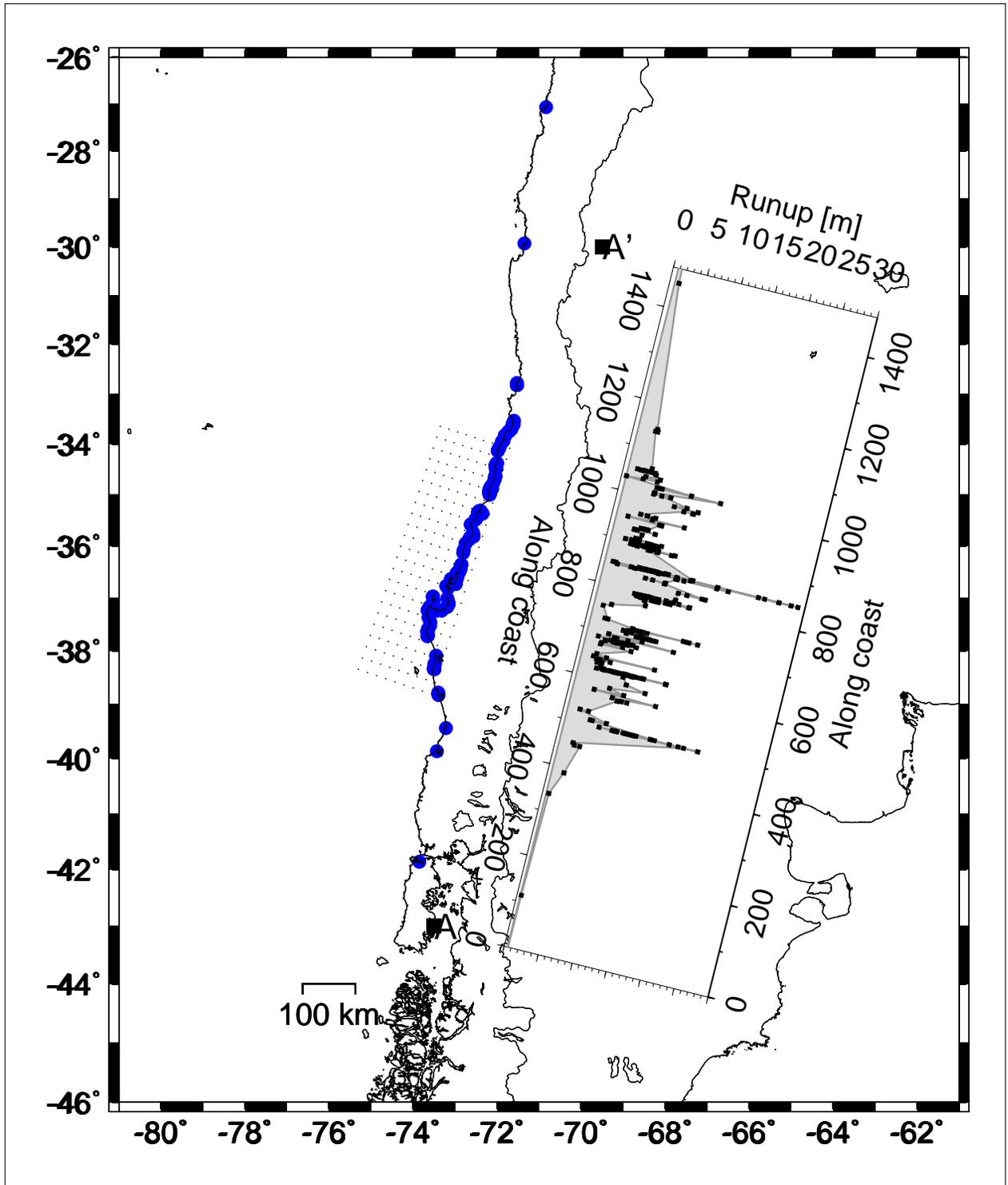


Figura 1.2: Mapa de la zona afectada por el tsunami del Maule (2010) y su *runup*.

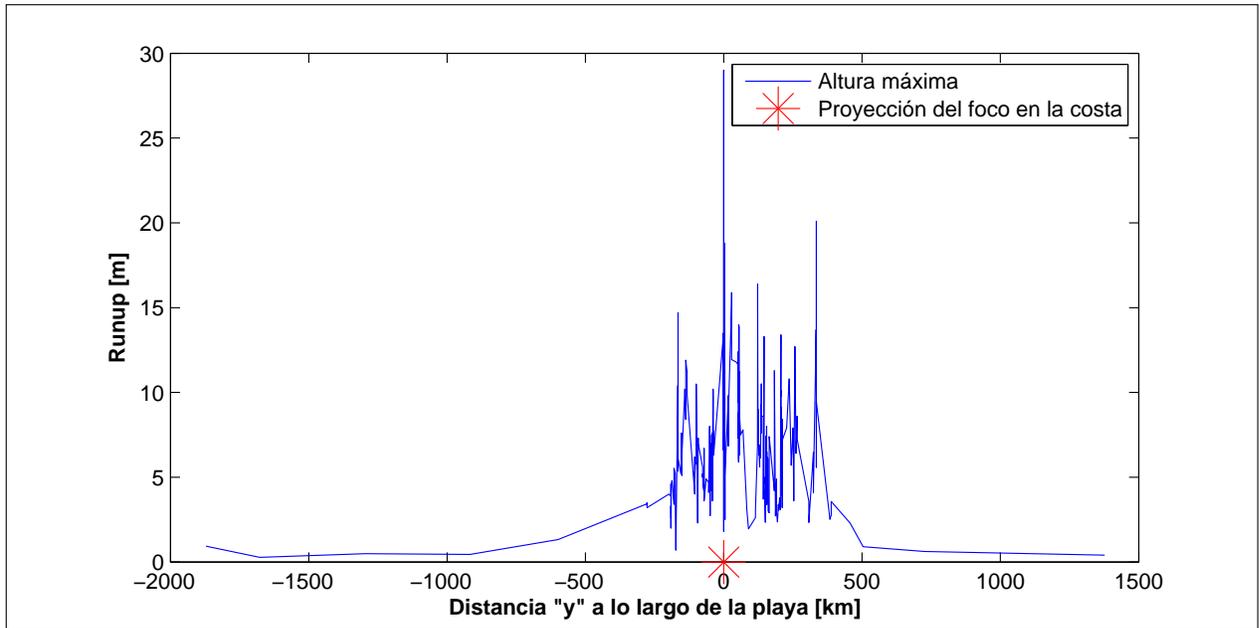


Figura 1.3: Distribución del *runup* producido por el terremoto del Maule, 2010. Su epicentro fue $(-36.1220^\circ, -72.898^\circ)$.

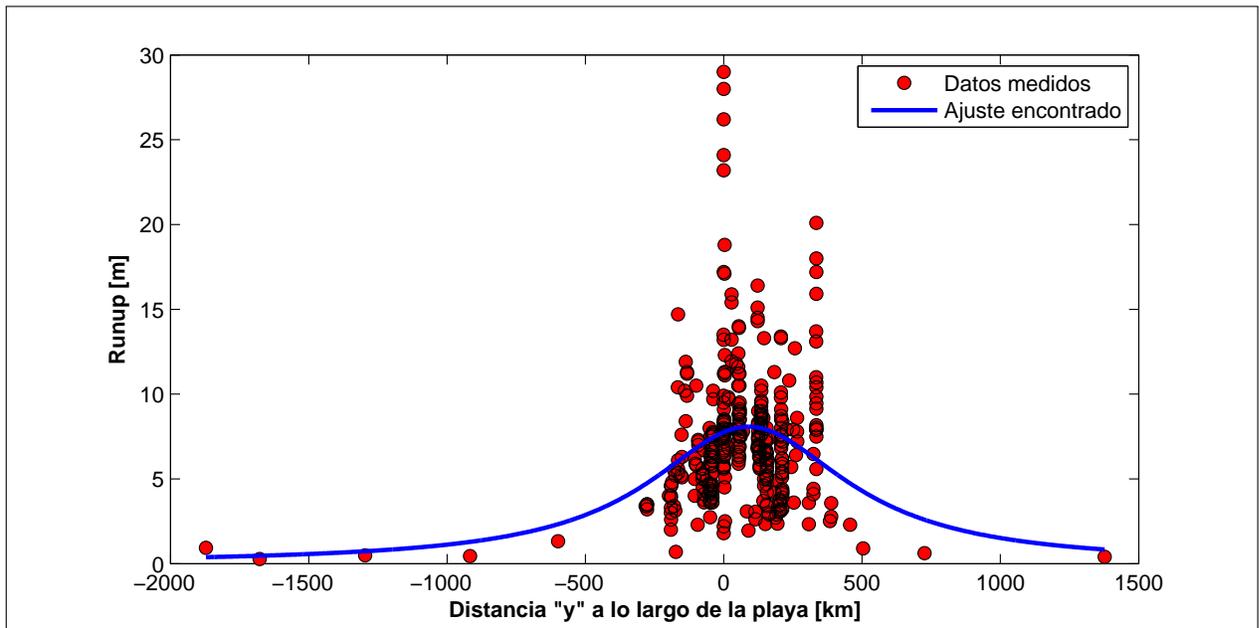


Figura 1.4: Un ajuste para el *runup* del terremoto del Maule, 2010, según el propuesto por Okal & Synolakis. La función propuesta por los autores es del tipo

$$\mathcal{R}(y) = \frac{b}{1 + \left(\frac{y-c}{a}\right)^2}.$$

En el capítulo 2 se ha hecho una deducción de las ecuaciones básicas de la hidrodinámica para la generación y propagación de tsunamis. El capítulo 3 está destinado a la revisión

de las características físicas y matemáticas que desembocan en la generación de tsunamis, verificando la común práctica de propagar la deformación estática del fondo marino en la superficie del agua. En el capítulo 4, se presentan los resultados existentes para el *runup* en una dimensión para onda larga, discutiendo las ecuaciones matemáticas y leyes físicas que definen el problema. Las ondas de un tsunami son de longitudes de onda comparativamente muy superiores a la profundidad del océano, siendo la razón de por qué este trabajo estudia el *runup* de este tipo de ondas. En el caso unidimensional se presenta una comparación entre la teoría lineal y no lineal, verificando que los efectos costeros del *runup* son suficientemente bien estimados con la teoría lineal. En el capítulo 5, se pasa al caso bidimensional de la teoría lineal, desarrollando las ecuaciones del caso y comparando con resultados existentes para luego proponer un modelo bidimensional que dé cuenta de los efectos de la oblicuidad de la incidencia. Modelos de distribución de *runup* a lo largo de la costa existen de manera empírica, siendo uno de los objetivos de este trabajo dar un contraste analítico. Las comparaciones con simulaciones numéricas, datos reales y modelos empíricos, pueden encontrarse en el capítulo 6. Finalmente, las conclusiones del presente trabajo están desarrolladas en el capítulo 7.

Capítulo 2

Ecuaciones Preliminares

Existen muchas ecuaciones que describen el movimiento de fluidos dependiendo de la modelación, ya sea para fluidos de alta o baja viscosidad, turbulentos, de flujo laminar o de agua poco profunda.

En el caso de tsunamis, el fluido en cuestión es agua salada, la cual, por tanto, posee variación de densidad, debido a su salinidad y temperatura en función de la posición. Para hacer posible, o al menos, dar el máximo acercamiento, a la resoluciones de las ecuaciones, se darán algunos supuestos que se irán mencionando y discutiendo a medida que aparezcan en el desarrollo.

Se comienza entonces por describir las ecuaciones de movimiento y los supuestos asociados a éstas y también las condiciones de borde que se deben satisfacer.

2.1. Ecuaciones de Movimiento

Se va a considerar el agua como un fluido no viscoso satisfaciendo las ecuaciones de Euler. Este supuesto es bastante aceptable ya que la viscosidad del agua, ν_w , es en este caso despreciable y es del orden de 0.0091 P medida a 25°C.

Sea $\mathbf{u} = (u, v, w)$ el campo de velocidades, p la presión, ρ la densidad del fluido y g la gravedad:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} + \nabla p + \rho g \hat{k} = 0, \quad (2.1)$$

Donde el operador $\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$ se conoce como *derivada material, total o substancial*.

Por otra parte, se supondrá un fluido incompresible, lo que permite trabajar con un campo solenoidal,

$$\text{div}(\mathbf{u}) = 0,$$

esta ecuación es obtenida directamente de la ecuación de continuidad o de conservación de masa.

2.2. Condiciones de Borde

Para abordar el problema, se pondrá el nivel $z = 0$ a nivel del mar, positivo hacia fuera del agua (Figura 2.1). Se llamará $\eta = \eta(x, y, z)$ a la función que describe la elevación del agua en cada posición (x, y) e instante de tiempo t , siendo la variable más importante para este problema, y es la que se desea obtener. La función $h = h(x, y)$ representa la batimetría, la cual en principio, es una función cualquiera.

Para efectos de cálculo, supondremos que estas funciones son lo suficientemente regulares para poder manipularlas.

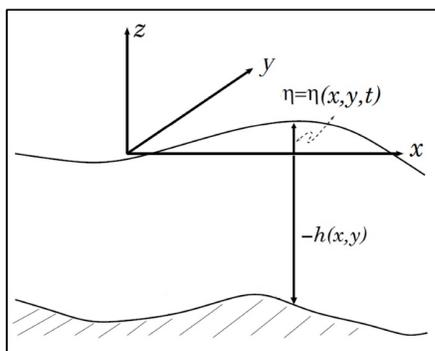


Figura 2.1: Esquema de coordenadas y variables a usar.

Las condiciones de borde que se utilizarán, son de tipo cinemática debido al hecho que se impondrá cierta condición sobre las partículas del fluido.

2.2.1. En la superficie

En la superficie debe cumplirse que,

$$z = \eta(x, y, t)$$

Aplicando derivada material a la ecuación anterior se obtiene,

$$0 + u \cdot 0 + v \cdot 0 + w \cdot 1 = \eta_t + u\eta_x + v\eta_y + w \cdot 0,$$

luego,

$$w(x, y, \eta) = \eta_t + u(x, y, \eta)\eta_x + v(x, y, \eta)\eta_y, \quad (2.2)$$

Cabe hacer notar que de aquí en adelante se adoptará la siguiente notación para derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial s} =: f_s.$$

2.2.2. En el fondo

Similar a lo anterior, en el fondo se debe satisfacer que,

$$z = -h(x, y).$$

Aplicando derivada material,

$$0 + u \cdot 0 + v \cdot 0 + w \cdot 1 = 0 - uh_x - vh_y + w \cdot 0,$$

despejando w ,

$$w(x, y, -h) = -u(x, y, -h)\eta_x - v(x, y, -h)\eta_y \quad (2.3)$$

2.3. Deducción del sistema *Shallow Water Equations*

Se comienza con la ecuación de conservación de masa

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$$

Se integra en z entre $-h$ y η

$$\int_{-h}^{\eta} u_x dz + \int_{-h}^{\eta} v_y dz + w(x, y, \eta) - w(x, y, -h) = 0.$$

Utilizando (2.2) y (2.3)

$$\int_{-h}^{\eta} u_x dz + \int_{-h}^{\eta} v_y dz + \eta_t + u(x, y, \eta)\eta_x + v(x, y, \eta)\eta_y + u(x, y, -h)\eta_x + v(x, y, -h)\eta_y = 0$$

$$\eta_t + \left(\int_{-h}^{\eta} u_x dz + u(x, y, \eta)\eta_x + u(x, y, -h)\eta_x \right) + \left(\int_{-h}^{\eta} v_y dz + v(x, y, \eta)\eta_y + v(x, y, -h)\eta_y \right) = 0$$

Recordando la regla de Leibniz para diferenciación bajo el signo integral, la regla de la cadena y el teorema fundamental del cálculo se llega a,

$$\eta_t + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} v dz = 0. \quad (2.4)$$

En esta aproximación de *shallow water*, supone a u, v independientes de z con una presión puramente hidrostática, es decir,

$$p(x, y, z) = p_0 + \rho g(\eta(x, y, t) - z)$$

donde p_0 es la presión atmosférica.

Con esto, la ecuación 2.4 se reduce a

$$\eta_t + (u(\eta + h))_x + (v(\eta + h))_y = 0 \quad (2.5)$$

Reemplazando la ecuación (2.3) en la expresión (2.1), y reteniendo sólo las dos primeras ecuaciones, y agregando la ecuación (2.5), finalmente se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales acopladas,

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vv_y + g\eta_x &= 0 \\ v_t + uv_x + vv_y + g\eta_y &= 0 \\ \eta_t + ((\eta + h)u)_x + ((\eta + h)v)_y &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.4. Versión para la generación de Tsunamis

Para este caso, se debe considerar una pequeña variación a la deducción previa, y es que se debe incluir una deformación en el fondo marino con dependencia temporal.

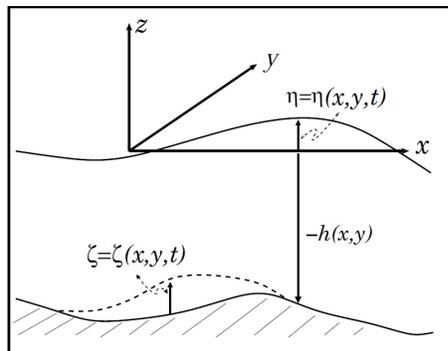


Figura 2.2: Esquema de coordenadas y variables a usar en el caso de la generación.

Se introduce una elevación, o deformación del fondo marino dada por $\zeta = \zeta(x, y, t)$.

El análisis es análogo al descrito en la sección anterior.

La condición de borde cinemática en la superficie del agua es igual que antes, es decir

$$w(x, y, \eta) = \eta_t + u(x, y, \eta)\eta_x + v(x, y, \eta)\eta_y$$

Sin embargo, la condición en el fondo, es diferente, pues ahí la superficie del fluido en el fondo está dada por la ecuación,

$$z = -h(x, y) + \zeta(x, y, t)$$

Aplicando derivada material a la ecuación previa,

$$0 + u \cdot 0 + v \cdot 0 + w \cdot 1 = \zeta_t + u \cdot (-h + \zeta)_x + v \cdot (-h + \zeta)_y + w \cdot 0$$

despejando w ,

$$w(x, y, -h + \zeta) = \zeta_t + u \cdot (-h + \zeta)_x + v \cdot (-h + \zeta)_y.$$

Finalmente, reuniendo todas las ecuaciones, al igual que antes, se obtiene el siguiente sistema,

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vv_y + g\eta_x &= 0 \\ v_t + uv_x + vv_y + g\eta_y &= 0 \\ \eta_t - \zeta_t + ((\eta + h - \zeta)u)_x + ((\eta + h - \zeta)v)_y &= 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

2.5. Caso de vorticidad despreciable

Cuando se considera vorticidad despreciable, se tiene entonces que,

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0$$

Debido a que \mathbf{u} es irrotacional, trabajando sobre un espacio conexo, se tiene que \mathbf{u} proviene de un campo escalar. Sea éste φ , luego,

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi$$

Dado que el campo \mathbf{u} es solenoidal, el campo escalar satisface la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2\varphi = 0.$$

Reemplazando $\mathbf{u} = \nabla\varphi$ en la ecuación (2.1),

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla\varphi \cdot \nabla \right) \nabla\varphi + \nabla p + \rho g \nabla(z) &= 0, \\ \nabla \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla\varphi|^2 + \frac{p}{\rho} + gz \right) &= 0. \end{aligned}$$

Lo anterior puede escribirse de la siguiente manera,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla\varphi|^2 + \frac{p - p_0}{\rho} + gz = 0$$

es decir, se ha introducido una constante de integración junto a la presión, donde $p(z = \eta) = p_0$, es la presión atmosférica. Para que lo anterior sea válido, debe cumplirse que,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla\varphi|^2 + g\eta = 0 \quad \text{en } z = \eta$$

y esta relación es una condición de borde dinámica en la superficie.

Recopilando todas las condiciones se cumple entonces:

- Ecuación de Continuidad

$$\nabla^2\varphi = 0$$

- Condición Cinemática en el fondo

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + \nabla\varphi \cdot \nabla(-h + \zeta) \quad \text{en } z = -h + \zeta$$

- Condición Cinemática en la superficie

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \nabla\varphi \cdot \nabla\eta \quad \text{en } z = \eta$$

- Condición Dinámica en la superficie

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla\varphi|^2 + g\eta = 0 \quad \text{en } z = \eta$$

Capítulo 3

Generación de Tsunamis

En este capítulo, se estudiará cómo se genera un tsunami desde la deformación del fondo marino. En el caso que un terremoto se produzca por la subducción entre una placa oceánica y una continental, por ejemplo, dependiendo del tamaño y las características del evento, existe la posibilidad que éste provoque un tsunami. El campo de tensiones que actúa en la región circundante a la zona sismogénica, sujeto a una liberación súbita de energía, debido a procesos de ruptura en la fuente sísmica genera una deformación del suelo, pudiendo variar en escala de centímetros a decenas de metros. Una práctica común en el modelamiento de tsunamis es aproximar el proceso dinámico de deformaciones copiando el desplazamiento estático del fondo directamente en la superficie del océano.

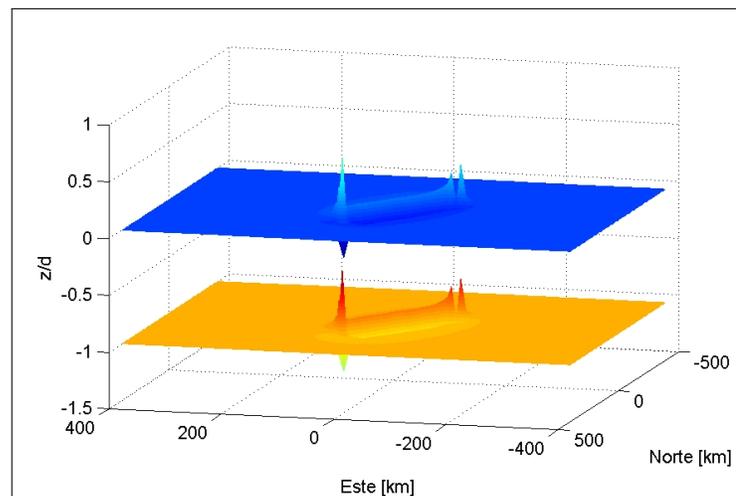


Figura 3.1: Ejemplo de deformación en el fondo marino transmitida directamente a la superficie del agua.

Tal como lo discute, por ejemplo Kervella et al. (2007), la generación de tsunamis puede modelarse de forma activa o pasiva.

Despreciando la vorticidad, el sistema de ecuaciones (página 14) linealizado es

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \varphi &= 0 \\
 \varphi_z &= \zeta_t \quad \text{en } z = -h \\
 \varphi_z &= \eta_t \quad \text{en } z = 0 \\
 \varphi_t &= -g\eta \quad \text{en } z = 0
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Notar que al combinar las ecuaciones en la superficie libre, se obtiene

$$\varphi_{tt} + g\varphi_z = 0$$

por lo que el sistema 3.1, puede ser reescrito como,

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \varphi &= 0 \\
 \varphi_z &= \zeta_t \quad \text{en } z = -h \\
 \varphi_t &= -g\eta \quad \text{en } z = 0 \\
 \varphi_{tt} &= -g\varphi_z \quad \text{en } z = 0
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

3.1. Generación Activa - Pasiva

Dependiendo de cómo se tomen las condiciones iniciales, es posible definir dos formas distintas de generación de tsunamis. Sendas generaciones son discutidas en las siguientes secciones.

3.1.1. Generación Activa

Aquí se asume causalidad, es decir, nada ocurre antes de $t > 0$, y entonces, tanto el fondo como la superficie están en reposo, luego el sistema 3.2 está sujeto a las condiciones,

$$\begin{aligned}
 \eta(x, y, t) &= 0, \quad t < 0 \\
 \zeta(x, y, t) &= 0, \quad t < 0
 \end{aligned}$$

y lo mismo ocurre para las velocidades.

El problema es atacado utilizando las transformadas de Fourier en espacio y Laplace en tiempo. Se denota la transformada de Laplace de un función $g(t)$ como,

$$\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \bar{g}(s) = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-st} dt$$

Mientras que para una función $f(\vec{x})$, con $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, la transformada de Fourier espacial se denota

$$\mathcal{F}\{f(\vec{x})\}(\vec{k}) = \widehat{f}(\vec{k}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d\vec{x}$$

Aplicando estas transformaciones integrales al sistema 3.2 se obtiene,

$$\begin{aligned} \overline{\widehat{\varphi}}_{zz} &= (k_x^2 + k_y^2)\overline{\widehat{\varphi}} \\ \overline{\widehat{\varphi}}_z(k_x, k_y, -h, s) &= s\overline{\widehat{\zeta}}(k_x, k_y, s) \\ s^2\overline{\widehat{\varphi}}(k_x, k_y, 0, s) &= -g\overline{\widehat{\varphi}}_z(k_x, k_y, 0, s) \\ s\overline{\widehat{\varphi}}(k_x, k_y, 0, s) &= -g\overline{\widehat{\eta}}(k_x, k_y, s) \end{aligned}$$

Notar que la última ecuación es la que permite encontrar la elevación de la superficie del agua. El resto de las ecuaciones define una ecuación diferencial ordinaria en z con condiciones iniciales.

Como es usual, definiendo $k := \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, se obtiene,

$$\begin{aligned} \overline{\widehat{\varphi}} &= A \cosh(kz) + B \sinh(kz) \\ \overline{\widehat{\varphi}}_z(k_x, k_y, -h, s) &= s\overline{\widehat{\zeta}}(k_x, k_y, s) \\ \overline{\widehat{\varphi}}(k_x, k_y, 0, s) &= -\frac{g}{s^2}\overline{\widehat{\varphi}}_z(k_x, k_y, 0, s) \end{aligned}$$

Debido a las condiciones, es posible obtener un sistema para las constantes A, B :

$$\begin{aligned} k[-A \sinh(kh) + B \cosh(kh)] &= \frac{s\overline{\widehat{\zeta}}}{k} \\ A &= -\frac{g}{s^2}kB \end{aligned}$$

De aquí, es fácil despejar las constantes,

$$A = \frac{-gs\widehat{\zeta}}{\cosh(kh)[s^2 + \omega^2]}$$

$$B = \frac{s^3\widehat{\zeta}}{k \cosh(kh)[s^2 + \omega^2]}$$

donde se ha definido la frecuencia angular ω como,

$$\omega^2 = gk \tanh(kh)$$

notar que ω depende del número de onda k .

Recordando que,

$$s\widehat{\varphi}(k_x, k_y, 0, s) = -g\widehat{\eta}(k_x, k_y, s)$$

La elevación de la superficie del agua, en el espacio de Fourier-Laplace es,

$$\widehat{\eta}(k_x, k_y, s) = \frac{s^2\widehat{\zeta}}{\cosh(kh)[s^2 + \omega^2]}$$

Se considera en este estudio, la deformación vertical del suelo marino en la forma

$$\zeta(x, y, t) = \zeta_0(x, y)T(t)$$

Hay dos buenas razones para lo anterior. La separación en funciones independientes de espacio y tiempo facilita el cálculo analítico de las integrales, pero otra razón es debido a que no es tan sencillo obtener modelos de deformación dinámica, sin embargo, Okada (1985), provee soluciones estáticas para el campo de desplazamientos en la superficie de un semi-espacio elástico debido a una dislocación generada a una cierta profundidad. De esta manera, es posible escribir

$$\zeta(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\zeta}_0(k_x, k_y)}{\cosh(kh)} e^{-ik_x x - ik_y y} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2 \overline{T}(s)}{s^2 + \omega^2} \right\} (t) dk_x dk_y$$

Suponiendo que la deformación ocurre de manera instantánea, se considera $T(t) = H(t)$, y sabiendo que la transformada de Laplace de,

$$\overline{H(t)}(s) = \frac{1}{s}$$

$$\overline{\cos(\omega t)H(t)}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

se obtiene entonces que la elevación del agua, transmitida desde el fondo a la superficie por la deformación es,

$$\eta(x, y, t) = H(t) \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\zeta}_0(k_x, k_y)}{\cosh(kh)} \cos(\omega t) e^{-ik_x x - ik_y y} dk_x dk_y$$

3.1.2. Generación Pasiva

Para esta situación, la condición en el fondo es distinta, y el sistema queda

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= 0 \\ \varphi_z &= 0 \quad \text{en } z = -h \\ \varphi_t &= -g\eta \quad \text{en } z = 0 \\ \varphi_{tt} &= -g\varphi_z \quad \text{en } z = 0, \end{aligned}$$

además, se asumen velocidades iniciales nulas y que la deformación en el fondo es exactamente la perturbación inicial en la superficie del agua:

$$\eta(x, y, 0) = \zeta_0(x, y)$$

De esta manera, esta vez sólo basta aplicar la transformada de Fourier espacial al sistema de ecuaciones anterior,

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_{zz} &= (k_x^2 + k_y^2) \widehat{\varphi} \\ \widehat{\varphi}_z &= 0 \quad \text{en } z = -h \\ \widehat{\varphi}_t &= -g\widehat{\eta} \quad \text{en } z = 0 \\ \widehat{\varphi}_{tt} &= -g\widehat{\varphi}_z \quad \text{en } z = 0 \end{aligned}$$

De aquí es posible obtener un sistema para el potencial $\widehat{\varphi}$

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi} &= A \cosh(kz) + B \sinh(kz) \\ \widehat{\varphi}_z(k_x, k_y, -h, t) &= 0 \\ \widehat{\varphi}_{tt}(k_x, k_y, 0, t) &= -g\widehat{\varphi}_z(k_x, k_y, 0, t) \end{aligned}$$

donde la primera ecuación es la solución para $\widehat{\varphi}$, siendo A, B constantes a calcular.

Las constantes A, B se determinan de las condiciones que debe satisfacer $\widehat{\varphi}$ en el fondo y en la superficie, generando un sistema

$$\begin{aligned} k[-A \sinh(kh) + B \cosh(kh)] &= 0 \\ A_{tt} &= -gkB \end{aligned}$$

Este sistema define una ecuación diferencial para A , a saber,

$$A_{tt} + \omega^2 A = 0$$

cuya solución general es del tipo

$$A = A(k_x, k_y, 0) \cos(\omega t) + \frac{A_t(k_x, k_y, 0)}{\omega} \sin(\omega t)$$

Como además,

$$\widehat{\varphi}_t = -g\widehat{\eta} \quad \text{en } z = 0, \tag{3.3}$$

o bien,

$$A_t = -g\widehat{\eta},$$

sumado a las condiciones iniciales, entonces se encuentra que,

$$A = -\frac{g}{\omega} \widehat{\zeta}_0 \sin(\omega t),$$

y el potencial transformado es,

$$\widehat{\varphi} = -\frac{g}{\omega} \widehat{\zeta}_0 \sin(\omega t) [\cosh(kz) + \tanh(kh) \sinh(kz)].$$

Finalmente, la elevación transmitida, gracias a 3.3 es

$$\eta(x, y, t) = H(t) \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\zeta}_0(k_x, k_y) \cos(\omega t) e^{-ik_x x - ik_y y} dk_x dk_y$$

3.1.3. Comparación entre generación activa y pasiva

Del mismo estudio dado por Kervella, se puede observar que las formas de onda producidas por la generación de tsunamis activa y pasiva son muy similares.

La figura 3.2 presenta la comparación numérica de las generaciones activas y pasivas para distintas deformaciones del fondo. Se aprecia que ambas generaciones no presentan una diferencia significativa.

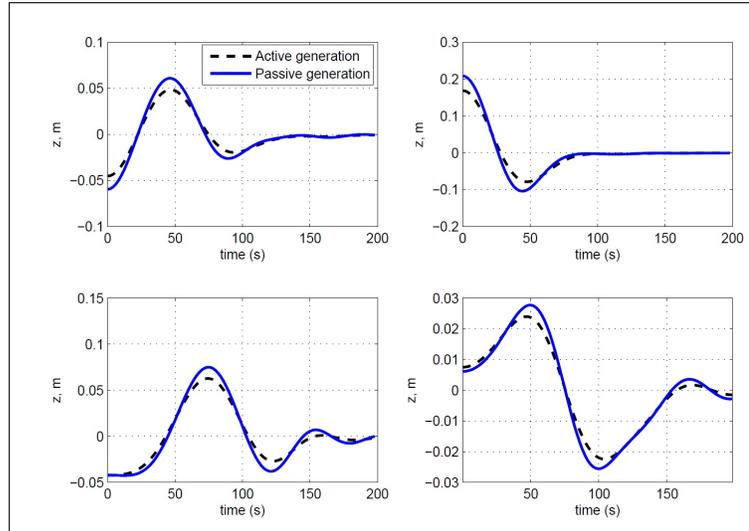


Figura 3.2: Mareogramas sintéticos producidos por las generaciones activa y pasiva (Kervella et al. 2007).

Algunos puntos que se deben rescatar del análisis de Kervella et al. (2007), con ayuda de las ecuaciones anteriores son:

- El campo de velocidades inicial es despreciable: $\mathbf{u}(x, y, z, 0) = 0$
- Las características dinámicas de la ruptura así como las características temporales de la fuente no son tomadas en cuenta.
- La amplitud de la onda siempre excede ligeramente la deformación instantánea del fondo.
- El efecto del agua hace las veces de un filtro pasa-bajo debido a la presencia de $\cosh(kh)$, en el caso de generación activa.

3.2. Función de Green para la generación lineal

En esta sección, se comienza con el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales dado por 2.7. Considerando la linealización de dicho sistema, eliminando las variables u, v , suponiendo que las amplitudes η, ζ son pequeñas frente a la profundidad, es posible escribir, el sistema en forma aproximada como una sola ecuación equivalente,

$$\eta_{tt} - \zeta_{tt} - g(h\eta_x)_x - g(h\eta_y)_y = 0$$

Para simplificar este análisis se estudia la generación en mar abierto, considerando $h(x, y) = d$ (profundidad constante). Así, definiendo $c_0 = \sqrt{gd}$, que corresponde a la ve-

locidad de propagación, se puede reconocer la ecuación de ondas inhomogenea al reescribir la ecuación anterior

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} - \frac{1}{c_0^2}\eta_{tt} = -\frac{1}{c_0^2}\zeta_{tt}$$

La función de Green para la ecuación de ondas en un medio infinito es bien conocida (Morse & Feshbach, 1953), y en el caso de dos dimensiones es

$$G(\vec{r}, t|\vec{r}_0, t_0) = \frac{2c_0 H(c_0(t - t_0) - |\vec{r} - \vec{r}_0|)}{\sqrt{c_0^2(t - t_0)^2 - |\vec{r} - \vec{r}_0|^2}}$$

Donde el subíndice 0 denota las cantidades en la fuente, $\vec{r} = (x, y)$ es el vector posición y como siempre, $H(\cdot)$ denota la función de Heaviside.

Por convolución entonces, la elevación fundamental está dada por,

$$\eta(x, y, t) = \frac{1}{4\pi c_0^2} \int_0^t dt_0 \iint_S G(\vec{r}, t|\vec{r}_0, t_0) \zeta_{tt}(\vec{r}_0, t_0) ds_0,$$

donde S corresponde a la superficie de la fuente y ds_0 denota el elemento de superficie.

Este método es utilizado por Kajiura (1970) para casos particulares de ζ y este autor estudia distintos modelos de formas de área de ruptura, de ahí, él define una función asociada a la directividad de la fuente del tsunami con respecto al observador. Uno de los resultados más importantes de su estudio, ya que la directividad en la radiación de la energía del tsunami está ligada completamente a la geometría de la fuente sísmica y es entonces un factor determinante en el comportamiento evolutivo del tsunami.

Capítulo 4

Estudio Unidimensional

En este capítulo se presenta con el sistema de ecuaciones en el caso 1D. Sea $\eta = \eta(x, t)$, $u = u(x, t)$ y $h = h(x)$:

$$\begin{aligned}\eta_t + ((h + \eta) u)_x &= 0 \\ u_t + uu_x + g\eta_x &= 0\end{aligned}\tag{4.1}$$

La figura 4.1 muestra la batimetría a tratar en el caso 1D. El origen de coordenadas $x \times z$ está ubicado en la costa a nivel del mar. d representa la profundidad y \mathcal{R} es el *runup*.

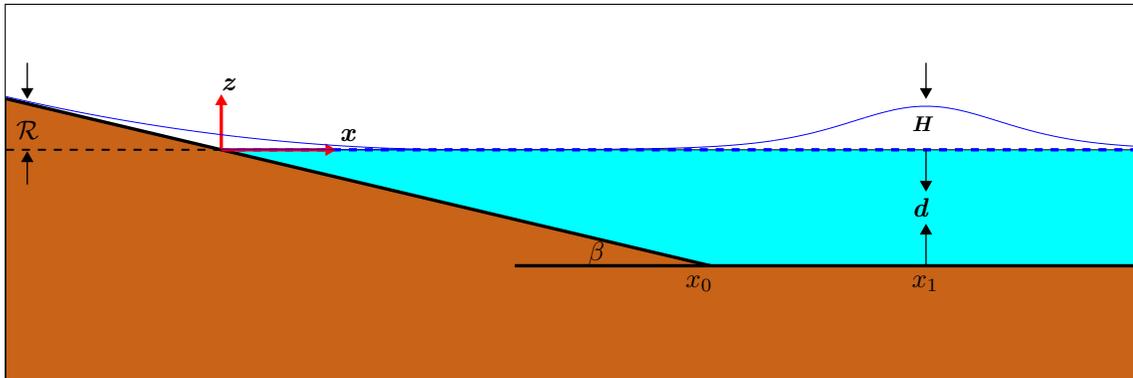


Figura 4.1: Esquema del perfil de la batimetría modelo a tratar en el caso 1D.

donde $x_0 = d \cot(\beta)$, y la batimetría de este modelo es la función dada por,

$$h(x) = \begin{cases} \tan(\beta)x & \text{si } x \leq x_0 \\ d & \text{si } x > x_0 \end{cases}\tag{4.2}$$

4.1. Caso Lineal

En este caso, se considera el sistema (4.1), reteniendo sólo términos de primer orden,

$$\begin{aligned}\eta_t + (hu)_x &= 0 \\ u_t + g\eta_x &= 0\end{aligned}$$

Este sistema puede reducirse eliminando u , y la ecuación que gobierna el movimiento es

$$\eta_{tt} - g(h\eta_x)_x = 0.$$

Se deben distinguir dos casos:

- $x > x_0$

En este caso la profundidad es constante, luego $h(x) = d$ y por lo tanto, la ecuación resultante es

$$\eta_{tt} - gd\eta_{xx} = 0 \tag{4.3}$$

la cual corresponde a la ecuación de ondas con $c_0^2 = gd$, por lo que la velocidad de propagación c_0 es constante y depende sólo de la profundidad.

Se utilizará la transformada de Fourier, sobre una función de tiempo, definida por

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

y su correspondiente antitransformada

$$\check{g}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

Entonces la ecuación (4.3) transformada queda,

$$-\omega^2 \widehat{\eta} = c_0^2 \widehat{\eta}_{xx},$$

definiendo $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$,

$$\widehat{\eta}_{xx} + k_0^2 \widehat{\eta} = 0,$$

cuya solución general puede escribirse como,

$$\widehat{\eta} = A_i(\omega)e^{ik_0x} + A_r(\omega)e^{-ik_0x}$$

donde A_i corresponde al coeficiente de la onda incidente y A_r a la amplitud de la onda reflejada en $x = x_0$.

- $x \leq x_0$

En este caso, la profundidad decrece linealmente con x , luego $h(x) = x \tan(\beta)$ y por lo tanto, la ecuación queda,

$$\eta_{tt} - g \tan(\beta)(x\eta_x)_x = 0$$

desdoblado la derivada con respecto a x ,

$$\eta_{tt} - g \tan(\beta)(x\eta_{xx} + \eta_x) = 0 \quad (4.4)$$

Aplicando transformada de Fourier $\widehat{\eta}(x, \omega) = \widehat{\eta}$

$$-\omega^2 \widehat{\eta} - g \tan(\beta)(x\widehat{\eta}_{xx} + \widehat{\eta}_x) = 0$$

$$x\widehat{\eta}_{xx} + \widehat{\eta}_x + \frac{\cot(\beta)}{g}\omega^2 \widehat{\eta} = 0$$

$$x\widehat{\eta}_{xx} + \widehat{\eta}_x + \frac{d \cot(\beta)}{gd}\omega^2 \widehat{\eta} = 0$$

$$x\widehat{\eta}_{xx} + \widehat{\eta}_x + \frac{x_0}{c_0^2}\omega^2 \widehat{\eta} = 0$$

$$x\widehat{\eta}_{xx} + \widehat{\eta}_x + x_0 k_0^2 \widehat{\eta} = 0$$

Utilizando el cambio de variables $z = 2k_0\sqrt{x_0x}$, la solución finita de la ecuación en el límite $x \rightarrow 0$, es

$$\widehat{\eta} = B(\omega)J_0(2k_0\sqrt{x_0x})$$

donde $J_0(\cdot)$ es la función de Bessel de primer tipo de orden 0 y $B(\omega)$ se interpreta como el coeficiente transmitido.

Notar que este cambio de variables sólo es válido cuando $x \geq 0$. Si se quiere conocer el comportamiento para $x < 0$ se debe estudiar el sistema no lineal.

4.1.1. Formalismo Alternativo: Uso de la Transformada de Fourier Tiempo-Espacio

Para una función $f(\vec{x}, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la transformada de Fourier en tiempo y espacio (T-E), está definida por,

$$\bar{f}(\vec{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} d\vec{x} dt \quad (4.5)$$

y su correspondiente transformada inversa

$$f(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}(\vec{k}, \omega) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\omega t} d\vec{k} d\omega,$$

es común llamar k al módulo del vector número de onda: $k =: |\vec{k}|$.

Obsérvese que de esta definición, es directo que,

$$\frac{\partial}{\partial k_j} \bar{f}(\vec{k}, \omega) = i \overline{(x_j f)}(\vec{k}, \omega),$$

Aplicando la transformada T-E a la ecuación 4.3 se obtiene

$$(-\omega^2 + c_0^2 k^2) \bar{\eta} = 0$$

para obtener soluciones no triviales, se obtiene la relación de dispersión $|\omega| = kc_0$. Así, la solución general de 4.3 es

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_i(\omega) e^{i\omega t - ik_0(\omega)x} + A_r(\omega) e^{i\omega t + ik_0(\omega)x} d\omega.$$

Para el caso interesante, si se aplica el cambio de variables $z = \lambda\sqrt{x}$, con $x \geq 0$ y siendo λ un parámetro por determinar, entonces al definir la función,

$$T(z, t) = \begin{cases} \eta(x, t) & x \geq 0 \\ \eta(-x, t) & x < 0 \end{cases}$$

como la extensión par de η (para poder usar la transformada de Fourier), se tiene que

$$\begin{aligned} \eta_x &= \frac{\partial z}{\partial x} T_z \\ &= \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} T_z \\ &= \frac{\lambda^2}{2z} T_z \end{aligned}$$

y la derivada segunda de η respecto de x ,

$$\begin{aligned} \eta_{xx} &= \frac{\lambda^2}{2z} \cdot \frac{\lambda^2}{2} \left(\frac{T_z}{z} \right)_z \\ &= \frac{\lambda^4}{4z^3} (z T_{zz} - T_z) \end{aligned}$$

$$\eta_{tt} = T_{tt}$$

Así, reemplazando η_x, η_{xx} y η_{tt} en la ecuación (4.4), ésta se transforma en,

$$\begin{aligned} \left(\frac{z}{\lambda}\right)^2 \frac{\lambda^4}{4z^3} (zT_{zz} - T_z) + \frac{\lambda^2}{2z} T_z - \frac{\cot(\beta)}{g} T_{tt} &= 0 \\ zT_{zz} + T_z - \frac{4x_0}{\lambda^2 c_0^2} zT_{tt} &= 0 \end{aligned}$$

Escogiendo $\lambda = \frac{2}{c_0} \sqrt{x_0}$, se obtiene finalmente

$$zT_{zz} + T_z - zT_{tt} = 0 \quad (4.6)$$

Puesto que la variable z es real, de la teoría clásica de ecuaciones diferenciales, en este caso de segundo orden, se sabe que si se encuentra una solución compleja, entonces la solución general es una combinación lineal de las partes real e imaginarias. En efecto, si se considera la ecuación

$$zy_{zz} + y_z - zy_{tt} = 0$$

Si $y(z, t) = u(z, t) + iv(z, t)$, entonces

$$\begin{aligned} z(u + vi)_{zz} + (u + vi)_z - z(u + vi)_{tt} &= 0 \\ zu_{zz} + u_z - zu_{tt} + i(zv_{zz} + v_z - zv_{tt}) &= 0 \end{aligned}$$

que en el sentido complejo significa que

$$zu_{zz} + u_z - zu_{tt} = 0 \quad zv_{zz} + v_z - zv_{tt} = 0$$

Ahora, aplicando transformada T-E y gracias a sus propiedades, la ecuación (4.6) se convierte en

$$\begin{aligned} -i \frac{\partial}{\partial k} (-k^2 \bar{y}) - ik \bar{y} + i \frac{\partial}{\partial k} (-\omega^2 \bar{y}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial k} (-k^2 \bar{y}) + k \bar{y} + \omega^2 \bar{y}_k &= 0 \\ -k^2 \bar{y}_k - k \bar{y} + \omega^2 \bar{y}_k &= 0 \\ \bar{y}_k &= \frac{k}{\omega^2 - k^2} \bar{y} \end{aligned}$$

e integrando,

$$\bar{y} = \frac{C}{\sqrt{w^2 - k^2}}$$

donde C es una constante independiente de k . Separando partes real e imaginarias,

$$\bar{y} = \frac{C}{\sqrt{w^2 - k^2}} H(|w| - |k|) - i \frac{C}{\sqrt{k^2 - w^2}} H(|k| - |w|)$$

Invirtiendo,

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{C}{\sqrt{w^2 - k^2}} H(|w| - |k|) - i \frac{C}{\sqrt{k^2 - w^2}} H(|k| - |w|) \right) e^{i\omega t - ikz} dk d\omega \\ y &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} C e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{w^2 - k^2}} H(|w| - |k|) - i \frac{1}{\sqrt{k^2 - w^2}} H(|k| - |w|) \right) e^{-ikz} dk d\omega \\ y &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} C e^{i\omega t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(|w| - |k|)}{\sqrt{w^2 - k^2}} e^{-ikz} dk - i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(|k| - |w|)}{\sqrt{k^2 - w^2}} e^{-ikz} dk \right) d\omega \\ y &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} C e^{i\omega t} \left(\int_{-|\omega|}^{|\omega|} \frac{e^{-ikz} dk}{\sqrt{w^2 - k^2}} - i \int_{\{|k| > |\omega|\}} \frac{e^{-ikz} dk}{\sqrt{k^2 - w^2}} \right) d\omega \end{aligned}$$

Aprovechando la paridad de los integrandos,

$$y = \frac{2}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} C e^{i\omega t} \left(\int_0^{|\omega|} \frac{\cos(kz) dk}{\sqrt{w^2 - k^2}} - i \int_{|\omega|}^{\infty} \frac{\cos(kz) dk}{\sqrt{k^2 - w^2}} \right) d\omega$$

Aplicando el cambio de variables $k = |\omega|s$ en ambas integrales

$$y = \frac{2}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} C e^{i\omega t} \left(\int_0^1 \frac{\cos(|\omega|zs) ds}{\sqrt{1 - s^2}} - i \int_1^{\infty} \frac{\cos(|\omega|zs) ds}{\sqrt{s^2 - 1}} \right) d\omega$$

Gracias a ñas representaciones integrales de las funciones de Bessel de orden 0 de primer y segundo tipo $J_0(\cdot)$ y $Y_0(\cdot)$ respectivamente, (E.1) y (E.2)

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{(2\pi)^2} \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} C e^{i\omega t} (J_0(|\omega|z) - iY_0(|\omega|z)) d\omega \\ y &= \frac{2}{(2\pi)^2} \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} C e^{i\omega t} (J_0(\omega z) - iY_0(\omega z)) d\omega \end{aligned}$$

Siendo equivalente, podemos escribir las soluciones generales como,

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) e^{i\omega t} J_0(\omega z) d\omega \\ y_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D(\omega) e^{i\omega t} Y_0(\omega z) d\omega \end{aligned}$$

En este caso, para la función $T(z, t)$ se buscan soluciones convergentes en $x = 0$, así,

$$T(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) e^{i\omega t} J_0(|\omega|z) d\omega,$$

y regresando a la variable original,

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) e^{i\omega t} J_0\left(|\omega| \frac{2}{c_0} \sqrt{x_0} \sqrt{x}\right) d\omega \\ \eta(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) e^{i\omega t} J_0(2k_0 \sqrt{x x_0}) d\omega \end{aligned}$$

Lo anterior sólo es válido para $x > 0$, pero se puede aprovechar la continuidad de la función J_0 para poder tener la solución válida en $x = 0$ también.

De este modo se llega al mismo resultado obtenido por el camino de la transformada de Fourier en tiempo. La ventaja de este formalismo, es que tiene una clara aplicación a la hora de extender el problema a más dimensiones espaciales.

4.1.2. Continuidad de las soluciones

Para conciliar las soluciones obtenidas en los casos $x > x_0$ y $0 < x < x_0$, se impone continuidad en x_0 tanto de las soluciones encontradas, como de sus derivadas primeras,

$$\begin{aligned} A_i(\omega) e^{ik_0 x_0} + A_r(\omega) e^{-ik_0 x_0} &= B(\omega) J_0(2k_0 \sqrt{x_0 x_0}) \\ -ik_0 A_i(\omega) e^{ik_0 x_0} - ik_0 A_r(\omega) e^{-ik_0 x_0} &= -B(\omega) J_1(2k_0 \sqrt{x_0 x_0}) \frac{2k_0 \sqrt{x_0}}{2\sqrt{x_0}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_i(\omega) e^{ik_0 x_0} + A_r(\omega) e^{-ik_0 x_0} &= B(\omega) J_0(2k_0 x_0) \\ A_i(\omega) e^{ik_0 x_0} - A_r(\omega) e^{-ik_0 x_0} &= -iB(\omega) J_1(2k_0 x_0) \end{aligned}$$

De aquí, es fácil despejar los coeficientes transmitido, $B(\omega)$ y reflejado, $A_r(\omega)$, en función de la amplitud de la onda incidente $A_i(\omega)$.

$$\begin{aligned} B(\omega) &= \frac{2A_i(\omega)e^{ik_0x_0}}{J_0(2k_0x_0) + iJ_1(2k_0x_0)} \\ A_r(\omega) &= A_i(\omega)e^{2i(k_0x_0 - \arctan(\frac{J_1(2k_0x_0)}{J_0(2k_0x_0)}))} \end{aligned}$$

Es interesante notar que el coeficiente reflejado mantiene la amplitud incidente pero presenta un cambio de fase, mientras que en el caso del coeficiente transmitido, este presenta un cambio de fase y de amplitud, a saber,

$$\left| \frac{B(\omega)}{A_i(\omega)} \right| = \frac{2}{|J_0(2k_0x_0) + iJ_1(2k_0x_0)|}$$

Por ejemplo, si se da el valor incidente en x_0 , se puede definir

$$\hat{\eta}(x_0, \omega) = \Phi(\omega)$$

lo que significa que

$$A_i(\omega) = e^{-ik_0x_0}\Phi(\omega)$$

Aplicando la antitransformada a la solución transmitida se obtiene entonces

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2A_i(\omega)e^{ik_0x_0}}{J_0(2k_0x_0) + iJ_1(2k_0x_0)} J_0(2k_0\sqrt{x_0x})e^{i\omega t} d\omega \\ \eta(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) \frac{J_0(2k_0\sqrt{x_0x})e^{i\omega t}}{J_0(2k_0x_0) + iJ_1(2k_0x_0)} d\omega \end{aligned} \quad (4.7)$$

el valor máximo en la costa ($x = 0$), define entonces, la integral de *runup*

$$\eta(0, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(\omega)e^{i\omega t}}{J_0(2k_0x_0) + iJ_1(2k_0x_0)} d\omega \quad (4.8)$$

cuya expresión integral es esencialmente la misma propuesta por Synolakis (1987). Las pequeñas diferencias aparecen de las distintas elecciones en la definición de la transformada de Fourier y esta trabajo, así como el trabajar con sistemas adimensionales y dimensionales.

4.1.3. Cálculo de espectro de Fourier de una onda solitaria

Se considera la solución de la ecuación de Boussinesq (Ver Anexo B), para el caso de una onda solitaria incidente, centrada en x_1 , y que se propaga con velocidad c , es decir de B.2, se puede escribir

$$\eta(x, t) = H \operatorname{sech}^2(\gamma(x - x_1 + ct))$$

con $\gamma = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{3H}{4d}}$, siendo H la altura de la onda.

En la sección anterior se definió $\Phi(\omega) = \widehat{\eta}(x_0, \omega)$, así, se debe calcular simplemente una transformada de Fourier. Se define la función $s(t)$ como

$$s(t) = \operatorname{sech}^2(t)$$

entonces, su transformada de Fourier es

$$\widehat{s}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(t) e^{-i\omega t} dt$$

Evaluando esta integral tomando la extensión analítica al plano complejo, se define

$$w(z) = \operatorname{sech}^2(z) e^{-i\omega z}$$

y el contorno \mathcal{C} mostrado en la figura 4.2. y el contorno cerrado \mathcal{C} mostrado en la figura 4.2

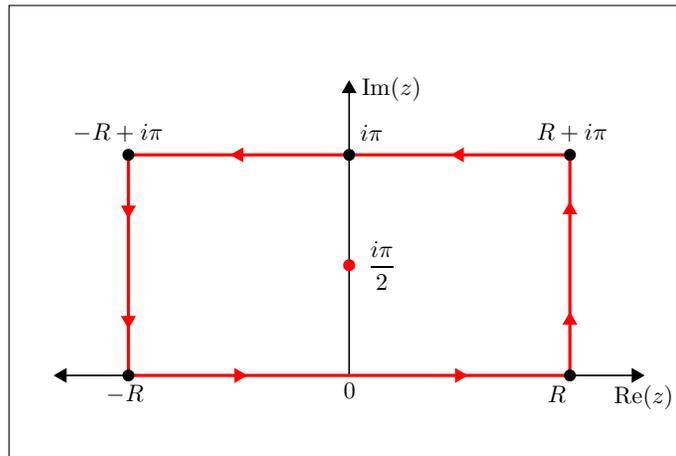


Figura 4.2: Contorno de integración \mathcal{C} .

La función w tiene sólo un polo de orden 2, $z_0 = \frac{\pi i}{2}$, así que por el teorema de los residuos,

$$\oint_{\mathcal{C}} w(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(w(z), z_0)$$

El residuo que se obtiene es,

$$\operatorname{Res}(w(z), z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} (z - z_0)^2 \operatorname{sech}^2(z) e^{-i\omega z}$$

derivando con respecto a z ,

$$\begin{aligned} \text{Res}(w(z), z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} [2(z - z_0)\text{sech}^2(z)e^{-i\omega z} - 2(z - z_0)^2\text{sech}^2(z)\tanh(z)e^{-i\omega z} \\ &\quad - i\omega(z - z_0)^2\text{sech}^2(z)e^{-i\omega z}] \end{aligned}$$

Notar que,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)\text{sech}(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)}{\cosh(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{\sinh(z)} \\ &= \frac{1}{\sinh\left(\frac{\pi i}{2}\right)} \\ &= -i \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(z - z_0)} - \tanh(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1 - (z - z_0)\tanh(z)}{(z - z_0)} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\cosh(z) - (z - z_0)\sinh(z)}{(z - z_0)\cosh(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\sinh(z) - (z - z_0)\cosh(z) - \sinh(z)}{(z - z_0)\sinh(z) + \cosh(z)} \\ &= - \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)\cosh(z)}{(z - z_0)\sinh(z) + \cosh(z)} \\ &= - \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)\sinh(z) + \cosh(z)}{(z - z_0)\cosh(z) + 2\sinh(z)} \\ &= \frac{0 + 0}{0 + 2i} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Con estos resultados, el residuo entonces es,

$$\begin{aligned} \text{Res}(w(z), z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} e^{-i\omega z} ((z - z_0)\text{sech}(z))^2 \left[2 \left(\frac{1}{(z - z_0)} - \tanh(z) \right) - i\omega \right] \\ &= e^{-i\omega z_0} (-i)^2 (2 \cdot 0 - i\omega) \\ &= i\omega e^{\frac{\omega\pi}{2}} \end{aligned}$$

Así, la integral de contorno queda

$$\underbrace{\int_{-R}^R w(t)dt}_{I_1} + i \underbrace{\int_0^\pi w(R+iy)dy}_{I_2} + \underbrace{\int_R^{-R} w(t+i\pi)dx}_{I_3} + i \underbrace{\int_\pi^0 w(-R+iy)dy}_{I_4} = -2\pi\omega e^{\frac{\omega\pi}{2}}$$

Notar que para I_3 ,

$$\begin{aligned} I_3 &= - \int_{-R}^R \operatorname{sech}^2(t+i\pi) e^{-i\omega(t+i\pi)} dt \\ &= -e^{\pi\omega} \int_{-R}^R \operatorname{sech}^2(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= -e^{\pi\omega} I_1 \end{aligned}$$

Y además, para R suficientemente grande, la integral I_2 ,

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \int_0^\pi |\operatorname{sech}^2(R+iy) e^{-i\omega(R+iy)}| dy \\ &\leq \int_0^\pi \left| \left(\frac{2}{e^{R+iy} + e^{-(R+iy)}} \right)^2 \right| e^{\omega y} dy \\ &\leq \int_0^\pi \left(\frac{2}{||e^{R+iy}| - |e^{-(R+iy)}||} \right)^2 e^{\omega y} dy \\ &\leq \int_0^\pi \left(\frac{2}{e^R - e^{-R}} \right)^2 e^{\omega y} dy \\ &\leq \pi \max(1, e^{\omega\pi}) \operatorname{cosech}^2(R) \end{aligned}$$

mientras que para la integral I_4 ,

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq \int_0^\pi |\operatorname{sech}^2(-R+iy) e^{-i\omega(-R+iy)}| dy \\ &\leq \int_0^\pi \left| \left(\frac{2}{e^{-R+iy} + e^{-(-R+iy)}} \right)^2 \right| e^{\omega y} dy \\ &\leq \int_0^\pi \left(\frac{2}{||e^{-R+iy}| - |e^{-(-R+iy)}||} \right)^2 e^{\omega y} dy \\ &\leq \int_0^\pi \left(\frac{2}{e^R - e^{-R}} \right)^2 e^{\omega y} dy \\ &\leq \pi \max(1, e^{\omega\pi}) \operatorname{cosech}^2(R) \end{aligned}$$

y estas cotas van a 0 cuando $R \rightarrow +\infty$, así que tomando este límite se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(t)e^{-i\omega t} dt + 0 - e^{\pi\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(t)e^{-i\omega t} dt + 0 &= -2\pi\omega e^{\frac{\omega\pi}{2}} \\ (1 - e^{\pi\omega}) \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(t)e^{-i\omega t} dt &= -2\pi\omega e^{\frac{\omega\pi}{2}} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(t)e^{-i\omega t} dt &= -2\pi\omega \frac{e^{\frac{\omega\pi}{2}}}{(1 - e^{\pi\omega})} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(t)e^{-i\omega t} dt &= \pi\omega \operatorname{cosech}\left(\frac{\omega\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Con lo que se ha encontrado la transformada de Fourier

$$\widehat{s}(\omega) = \pi\omega \operatorname{cosech}\left(\frac{\omega\pi}{2}\right)$$

Finalmente, gracias a las propiedades de traslación y de cambio de escala de la transformada de Fourier se puede calcular $\widehat{\eta}(x_0, \omega)$ fácilmente, es decir,

$$\begin{aligned} \widehat{\eta}(x_0, \omega) &= H\mathcal{F}(s(\gamma(x_0 - x_1 + ct)))(\omega) \\ \widehat{\eta}(x_0, \omega) &= H\mathcal{F}\left(s\left(\gamma c\left(t + \frac{x_0 - x_1}{c}\right)\right)\right)(\omega) \\ \widehat{\eta}(x_0, \omega) &= H e^{i(x_0 - x_1)\frac{\omega}{c}} \frac{1}{\gamma c} \widehat{s}\left(\frac{\omega}{\gamma c}\right) \\ \widehat{\eta}(x_0, \omega) &= H e^{ik_c(x_0 - x_1)} \frac{1}{\gamma c} \widehat{s}\left(\frac{k_c}{\gamma}\right) \\ \widehat{\eta}(x_0, \omega) &= H e^{ik_c(x_0 - x_1)} \frac{1}{\gamma c} \pi \left(\frac{k_c}{\gamma}\right) \operatorname{cosech}\left(\left(\frac{k_c}{\gamma}\right) \frac{\pi}{2}\right) \\ \widehat{\eta}(x_0, \omega) &= H e^{ik_c(x_0 - x_1)} \frac{\pi}{\gamma^2 c} k_c \operatorname{cosech}\left(\frac{\pi}{2\gamma} k_c\right) \\ \widehat{\eta}(x_0, \omega) &= H \frac{4d^3}{3H} \frac{\pi}{c} e^{ik_c(x_0 - x_1)} k_c \operatorname{cosech}\left(\frac{\pi}{2\gamma} k_c\right) \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\Phi(\omega) = \frac{4d^3}{3} \frac{\pi}{c} e^{ik_c(x_0 - x_1)} k_c \operatorname{cosech}(\alpha k_c)$$

con $\alpha = \frac{\pi}{2\gamma}$ y $k_c = \frac{\omega}{c}$.

4.1.4. Cálculo del máximo *runup* de una onda solitaria

De 4.7, usando el espectro recién calculado y al recordar que $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$, se tiene

$$\begin{aligned}\eta(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4d^3}{3} \frac{\pi}{c} e^{ik_c(x_0-x_1)} k_c \operatorname{cosech}(\alpha k_c) \frac{J_0(2k_0\sqrt{x_0x}) e^{i\omega t}}{J_0(2k_0x_0) - iJ_1(2k_0x_0)} d\omega \\ \eta(x, t) &= \frac{4d^3}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_c(x_0-x_1)} k_c \operatorname{cosech}(\alpha k_c) \frac{J_0(2k_0\sqrt{x_0x}) e^{i\omega t}}{J_0(2k_0x_0) + iJ_1(2k_0x_0)} \frac{d\omega}{c}\end{aligned}$$

Notar que $k_0 = \frac{\omega}{c_0} = \frac{\omega}{c} \frac{c}{c_0} = ak_c$, donde $a =: \frac{c}{c_0} = \sqrt{1 + \frac{H}{d}}$.

Haciendo el cambio de variables $\omega = k_c c$

$$\eta(x, t) = \frac{4d^3}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} k_c \operatorname{cosech}(\alpha k_c) \frac{J_0(2ak_c\sqrt{x_0x}) e^{ik_c(x_0-x_1+ct)}}{J_0(2ak_cx_0) + iJ_1(2ak_cx_0)} dk_c$$

Se debe evaluar en $x = 0$ (en la costa) para buscar la máxima altura

$$\eta(0, t) = \frac{4d^3}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_c \operatorname{cosech}(\alpha k_c)}{J_0(2ak_cx_0) + iJ_1(2ak_cx_0)} e^{ik_c(x_0-x_1+ct)} dk_c \quad (4.9)$$

Ahora, debemos atacar esta integral desde el análisis complejo, para ello, consideraremos el contorno mostrado en la figura 4.3.

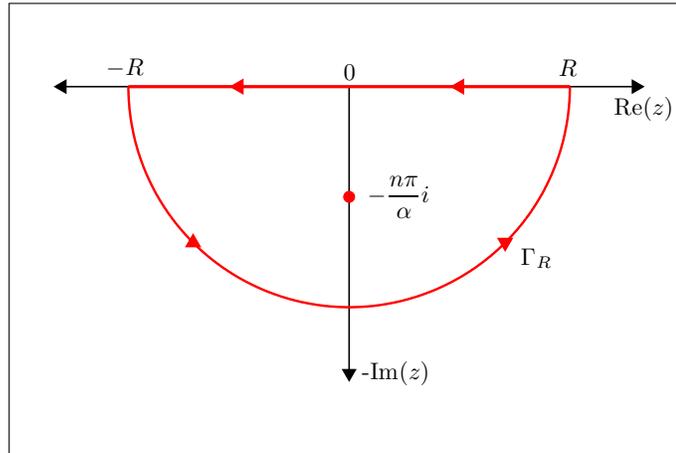


Figura 4.3: Contorno de integración \mathcal{C} .

El contorno \mathcal{C} consiste del segmento de recta $[-R, R]$ y el arco de circunferencia Γ_R . Se debe calcular

$$I_{\mathcal{C}}(t) = \oint_{\mathcal{C}} \frac{z \operatorname{cosech}(\alpha z)}{J_0(\delta z) + iJ_1(\delta z)} e^{imz} dz$$

con $m = x_0 - x_1 + ct$ y $\delta = 2ax_0$.

En $\Gamma_R, z = Re^{i\theta}, \theta \in [\pi, 2\pi]$. Notar que la cosech(\cdot) se puede acotar,

$$\begin{aligned} |\operatorname{cosech}(z)| &= \left| \frac{2}{e^z - e^{-z}} \right| \\ &\leq \frac{2}{||e^z| - |e^{-z}||} \\ &= \frac{2}{|e^{\operatorname{Re}(z)} - e^{-\operatorname{Re}(z)}|} \\ &= \frac{2}{e^{|\operatorname{Re}(z)|} - e^{-|\operatorname{Re}(z)|}} \\ &= \operatorname{cosech}(|\operatorname{Re}(z)|) \end{aligned}$$

y así, usando las expansiones asintóticas de las funciones de Bessel,

$$\begin{aligned} J_0(w) + iJ_1(w) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi w}} \cos\left(w - \frac{\pi}{4}\right) + i\sqrt{\frac{2}{\pi w}} \cos\left(w - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi w}} \cos\left(w - \frac{\pi}{4}\right) + i\sqrt{\frac{2}{\pi w}} \sin\left(w - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi w}} e^{i\left(w - \frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$

Luego

$$|J_0(w) + iJ_1(w)| \approx \sqrt{\frac{2}{\pi|w|}} e^{-\operatorname{Im}(w)}$$

el valor principal de Cauchy (VP) debido a la singularidad en $\frac{3\pi}{2}$, se puede escribir como,

$$\begin{aligned} |I_{\Gamma_R}(t)| &\leq R^2 \sqrt{\frac{\pi\delta R}{2}} VP \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{cosech}(\alpha R |\cos(\theta)|) e^{-(m-\delta)R \sin(\theta)} d\theta \\ &= 2R^2 \sqrt{\frac{\pi\delta R}{2}} \int_{\frac{3\pi}{2}-\epsilon(R)}^{2\pi} \operatorname{cosech}(\alpha R |\cos(\theta)|) e^{-(m-\delta)R \sin(\theta)} d\theta \\ &\leq 2R^2 \sqrt{\frac{\pi\delta R}{2}} \operatorname{cosech}(\alpha R \sin(\epsilon)) \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} e^{-(m-\delta)R \sin(\theta)} d\theta \\ &\leq 2R^2 \sqrt{\frac{\pi\delta R}{2}} \operatorname{cosech}(\alpha R \sin(\epsilon)) \frac{\pi}{2(\delta - m)R} (1 - e^{-(\delta-m)R}) (*) \\ &\leq \frac{\pi R}{(\delta - m)} \sqrt{\frac{\pi\delta R}{2}} \operatorname{cosech}\left(\frac{2}{\pi} \alpha R \epsilon\right), \end{aligned}$$

donde (*) proviene del lema de Jordan sólo cuando $\delta - m > 0$.

Así, tomando $\epsilon(R) = R^\nu, \nu \in (-1, 0)$,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_{\Gamma_R} = 0,$$

siempre que $\delta - m > 0$.

Synolakis (1988) probó que la función $J_0(z) - iJ_1(z)$ no tiene ceros en el semiplano superior (F.1), y debido a que $\overline{J_n(z)} = J_n(\bar{z})$, los ceros de $J_0(z) - iJ_1(z)$ son la reflexión de los ceros de $J_0(z) + iJ_1(z)$, con lo que los únicos polos son los del numerador, es decir $p_n = -\frac{n\pi}{\alpha}i$ con $n = 1, 2, 3, \dots$, luego, del teorema de los residuos y del desarrollo anterior, la integral 4.9

$$\eta(0, t) = -\frac{4d^3}{3} 2\pi i \sum_{n=1}^{+\infty} \text{Res} \left(\frac{z \text{cosech}(\alpha z)}{J_0(\delta z) + iJ_1(\delta z)} e^{izm}, p_n \right)$$

Al observar que,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow p_n} (z - p_n) \text{cosech}(\alpha z) &= \frac{1}{\alpha \cosh(\alpha p_n)} \\ &= \frac{(-1)^n}{\alpha}. \end{aligned}$$

Entonces, dado que J_0 es par y J_1 es impar,

$$\eta(0, t) = -\frac{8d^3}{3} \frac{\pi^2}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(-1)^n}{J_0(2n\gamma\delta i) - iJ_1(2n\gamma\delta i)} e^{2n\gamma m}$$

Las funciones de Bessel y las Funciones modificadas de Bessel están vinculadas por la relación:

$$J_k(ix) = i^k I_k(x)$$

con lo que se obtiene

$$\eta(0, t) = \frac{8d^3}{3} \frac{\pi^2}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(-1)^{n+1}}{I_0(2n\gamma\delta) + I_1(2n\gamma\delta)} e^{2n\gamma m}$$

Además, cuando $x \gg \left|k^2 - \frac{1}{4}\right|$, las funciones modificadas tienen una aproximación asintótica

$$I_k(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$$

obteniéndose

$$\begin{aligned} \eta(0, t) &= \frac{8d^3 \pi^2}{3 \alpha^2} \sqrt{\pi\gamma\delta} \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\frac{3}{2}} (-1)^{n+1} e^{-2n\gamma(\delta-m)} \\ \eta(0, t) &= \frac{8d^3 \pi^2}{3} \frac{4\gamma^2}{\pi^2} \sqrt{\pi\gamma\delta} \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\frac{3}{2}} (-1)^{n+1} e^{-2n\gamma(\delta-m)} \\ \eta(0, t) &= \frac{8d^3}{3} 4 \frac{3H}{4d^3} \sqrt{\pi\gamma\delta} \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\frac{3}{2}} (-1)^{n+1} e^{-2n\gamma(\delta-m)} \\ \eta(0, t) &= 8H \sqrt{\pi\gamma\delta} \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\frac{3}{2}} (-1)^{n+1} e^{-2n\gamma(\delta-m)} \\ \eta(0, t) &= 8H \sqrt{\pi\gamma\delta} \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\frac{3}{2}} (-1)^{n+1} (e^{-2\gamma(\delta-m)})^n \\ \eta(0, t) &= 8H \sqrt{\pi \frac{1}{d} \sqrt{\frac{3H}{4d}} 2x_0 \sqrt{1 + \frac{H}{d}}} \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\frac{3}{2}} (-1)^{n+1} (e^{-2\gamma(\delta-m)})^n \\ \eta(0, t) &= 8\sqrt{\pi\sqrt{3}H} \left(\frac{H}{d}\right)^{\frac{1}{4}} \left(1 + \frac{H}{d}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\cot(\beta)} \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\frac{3}{2}} (-1)^{n+1} (e^{-2\gamma(\delta-m)})^n \end{aligned}$$

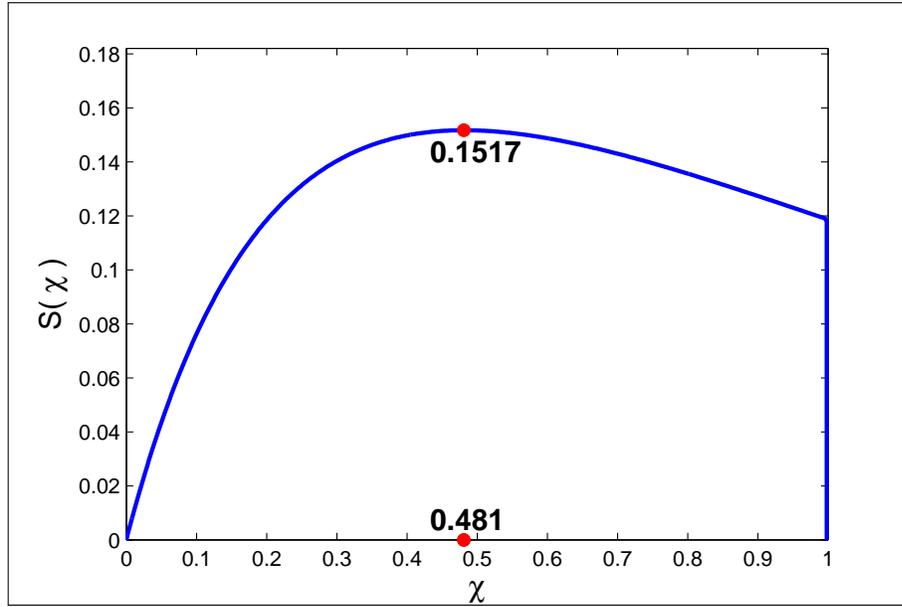
Se puede observar que la serie es de la forma,

$$S(\chi) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\frac{3}{2}} (-1)^{n+1} \chi^n$$

cuyo gráfico se muestra en la figura 4.4. $S(\chi)$ ha sido calculada numéricamente para distintos valores de χ y el valor máximo se alcanza en $\chi = 0,481 = e^{-0,732}$. Lo cual define el tiempo máximo de acuerdo a las variables m y S definidas previamente, luego,

$$t_{max} = \frac{1}{c} \left(x_1 + (2a - 1)x_0 - \frac{0,366}{\gamma} \right)$$

El valor máximo de la serie es $S(0,481) = 0,15173$, y evaluando el término $8\sqrt{\pi\sqrt{3}}$ el *runup*, \mathcal{R} , es

Figura 4.4: Serie $S(\chi)$.

$$\mathcal{R} = 2,831H \left(\frac{H}{d}\right)^{\frac{1}{4}} \left(1 + \frac{H}{d}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\cot(\beta)}$$

$$\frac{\mathcal{R}}{d} = 2,831 \left(\frac{H}{d}\right)^{\frac{5}{4}} \left(1 + \frac{H}{d}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\cot(\beta)}$$

y en primer orden, se obtiene que la "Ley de *runup*" es

$$\frac{\mathcal{R}}{d} = 2,831 \left(\frac{H}{d}\right)^{\frac{5}{4}} \sqrt{\cot(\beta)} + 0,7078 \left(\frac{H}{d}\right)^{\frac{9}{4}} \sqrt{\cot(\beta)}$$

Es interesante notar la dependencia de las variables H y β en el *runup*, las cuales concuerdan con la intuición. A mayor altura inicial y/o mientras menos empinada sea la pendiente de la playa, mayor será el *runup*. La dependencia puede observarse en los gráficos 4.5 y 4.6.

A pesar de existir diferencias muy leves, en esencia, el *runup* analítico es el mismo obtenido por Synolakis (1987). Las diferencias son debidas a que Synolakis resolvió el problema de condición inicial, mientras que acá se ha resuelto un problema de condición de borde en x_0 . Esto significa que este caso incluye los efectos producto del viaje que la onda realiza desde x_1 a x_0 , lo cual hace a una velocidad ligeramente superior a la velocidad c_0 . Gracias a las propiedades de la onda solitaria, que le permiten viajar preservando su forma, en este caso,

ambos caminos conducen al mismo *runup*, pero esto no es cierto en general para cualquier tipo de onda.

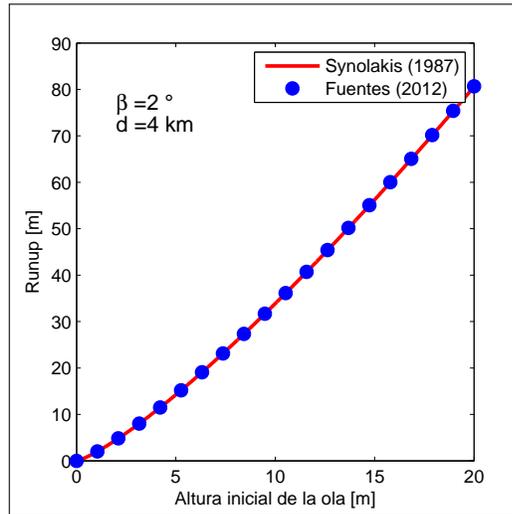


Figura 4.5: Comparación entre el *runup* propuesto en éste trabajo y el de Synolakis (1987), variando H , usando $\beta = 2^\circ$ y $d = 4km$.

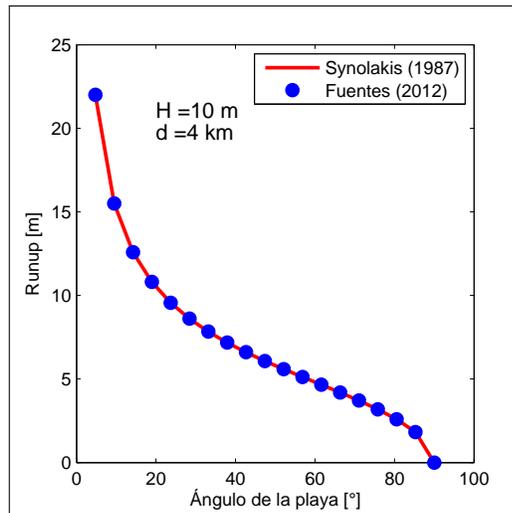


Figura 4.6: Comparación entre el *runup* calculado en éste trabajo y el de Synolakis (1987), variando β , usando $H = 10m$ y $d = 4km$.

4.1.5. Cálculo del espectro de Fourier de una *N-wave*

A diferencia de la onda solitaria, que sólo representa una elevación de la superficie del agua, la *N-wave*, tal como lo indica su nombre, se asemeja a la forma de una letra *N*, y por tanto, incluye una subsidencia (depresión) y una elevación. Es importante destacar que algunas *N-waves* no provienen de alguna ecuación diferencial especial que dé cuenta de la

dinámica del fluido, a diferencia de la onda solitaria que proviene de la ecuación KdV, sino que son usadas para modelar de manera más realista la situación de un tsunami producido por un terremoto. De todos modos, es posible obtener algunas *N-waves* como soluciones de ecuaciones asociadas a la creación de un tsunami. Las usando *N-waves* fueron introducidas por Tadepalli & Synolakis (1994).

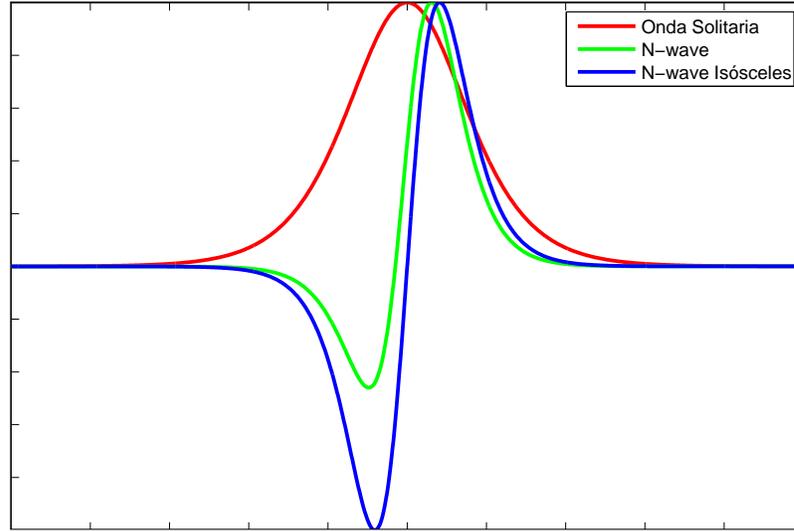


Figura 4.7: Formas iniciales de onda tratadas en esta sección.

La diferencia 4.7 presenta la comparación entre las formas de onda de una onda solitaria y de dos casos de *N-waves*. Notar que las *N-waves*, en general, no son simétricas ni anti-simétricas y que dependiendo de la dirección de propagación de propagación la amplitud incidente puede corresponder a la parte deprimida o elevada de la *N-wave*.

Como se ha visto en el capítulo sobre generación de tsunamis, la ecuación que gobierna la generación lineal de tsunamis, en el caso de propagación en una dimensión, está dada por,

$$\eta_{xx} - \frac{1}{c_0^2} \eta_{tt} = -\frac{1}{c_0^2} \zeta_{tt},$$

donde $\zeta(x, t)$ representa la deformación del fondo marino.

Consideremos una solución en la forma $\eta(x, y) = f(x)g(\xi)$, donde $\xi = x - x_1 + c_0 t$ y x_1 es el centro de la onda en $t = 0$.

Reemplazando en la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} (f''g + 2f'g' + fg'') - \frac{c_0^2}{c_0^2} fg'' &= -\frac{1}{c_0^2} \zeta_{tt} \\ f''g + 2f'g' &= -\frac{1}{c_0^2} \zeta_{tt} \end{aligned}$$

Modelando la deformación como una función ζ de la forma $\zeta = 2h(\xi)$ y para lograr obtener soluciones simples, se escoge $f(x) = x - x_2$. Con estas consideraciones es fácil ver que

$$\begin{aligned} 2g' &= -2\frac{c_0^2}{c_0^2}h'' \\ g' &= -h'' \\ g &= -h' + C^{te} \end{aligned}$$

Así, por simplicidad, basta escoger $g(\xi) = -h'(\xi)$, es decir, para una deformación en el fondo dada por $\zeta = h(\xi)$, la elevación instantánea transmitida a la superficie es $\eta = -(x - x_2)h'(\xi)$.

Tadepalli & Synolakis (1996) modelan una *N-wave* usando

$$h(\xi) = -\frac{\epsilon H}{\gamma} \tanh(\gamma\xi)$$

Con lo cual, la onda inicial está dada por,

$$\eta(x, t) = \epsilon(x - x_2)H \operatorname{sech}^2(\gamma(x - x_1 + c_0t)),$$

donde $\gamma = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{3H}{4d} p_0}$ y p_0 es un parámetro que controla la longitud de onda.

La constante $\epsilon > 0$ controla la amplitud de la onda, que normaliza la amplitud máxima en H .

Debido a que la solución representa una onda viajera, sin pérdida de generalidad, ϵ puede ser calculado en $t = 0$. Se debe resolver la ecuación $\frac{\partial \eta(x, 0)}{\partial x} = 0$, la que define la relación,

$$\frac{2\gamma(x^* - x_2)}{x_2} = \coth(\gamma(x^* - x_1))$$

donde x^* es una solución de la ecuación anterior. Con esto, es fácil determinar que,

$$\epsilon = \max_{x^*} \left| \frac{x^* - x_2}{(x^* - x_2)^2 - \left(\frac{x_2}{2\gamma}\right)^2} \right|$$

Como Tadepalli & Synolakis (1994) discuten ϵ exhibe, en un amplio rango, una variación lineal con $L = x_1 - x_2$. Sin embargo, también puede verse la variación de ϵ con respecto a γ . (Figura 4.8).

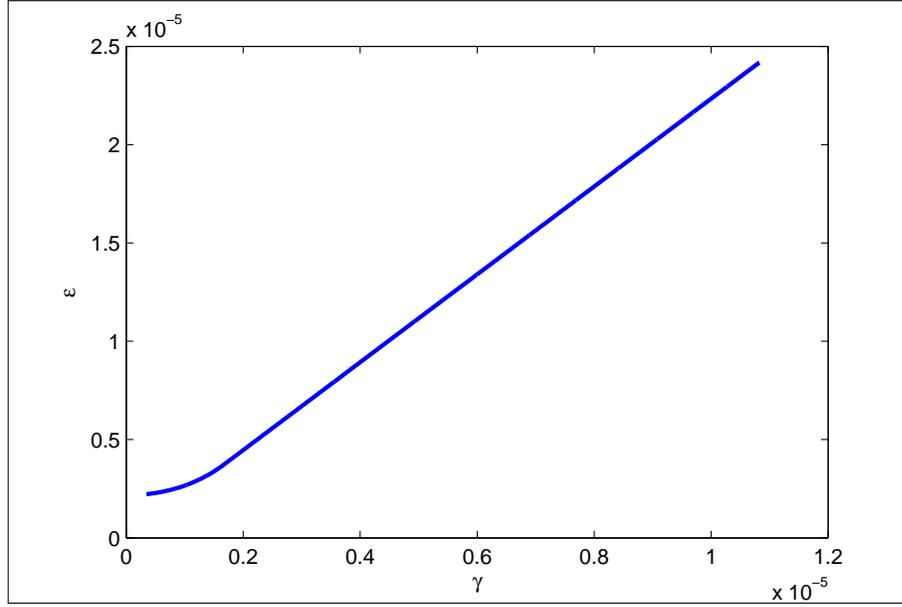


Figura 4.8: Dependencia de ϵ con γ , con $p_0 = 1$, $d = 4 \text{ km}$, $\beta = 2^\circ$.

Ahora bien, reordenando, la solución obtenida para esta geometría en la zona de decrecimiento lineal de la profundidad se tenía que (ecuación (4.7))

$$\begin{aligned}\eta(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2A_i(\omega)e^{ik_0x_0}}{J_0(2k_0x_0) + iJ_1(2k_0x_0)} J_0(2k_0\sqrt{x_0x})e^{i\omega t} d\omega \\ \eta(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_i(k_0)J_0(2k_0\sqrt{x_0x})}{J_0(2k_0x_0) + iJ_1(2k_0x_0)} e^{ik_0(x_0+c_0t)} dk_0\end{aligned}$$

donde, ahora, $A_i(k_0)$ representa el espectro de Fourier del perfil inicial.

Recordando que la transformada de Fourier de la onda solitaria es,

$$\mathcal{F}(H\text{sech}^2(\gamma(x-x_1)))(k_0) = \frac{4d^3}{3p_0} \pi k_0 \text{cosech}(\alpha k_0) e^{-ik_0x_1}$$

con $\alpha = \frac{\pi}{2\gamma}$. El perfil inicial de la *N-wave* puede escribirse en $t = 0$ como,

$$\eta(x, 0) = \epsilon [xH\text{sech}^2(\gamma(x-x_1)) - x_2H\text{sech}^2(\gamma(x-x_1))]$$

y entonces gracias a las propiedades de la transformada de Fourier, $\mathcal{F}\{\eta(x, 0)\}(k_0)$ puede calcularse fácilmente,

$$\begin{aligned}
 A(k_0) &= \epsilon \left[i \frac{d}{dk_0} \left(\frac{4d^3}{3p_0} \pi k_0 \operatorname{cosech}(\alpha k_0) e^{-ik_0 x_1} \right) - x_2 \frac{4d^3}{3p_0} \pi k_0 \operatorname{cosech}(\alpha k_0) e^{-ik_0 x_1} \right] \\
 A(k_0) &= \frac{4d^3}{3p_0} \pi \epsilon \left[i \frac{d}{dk_0} (k_0 \operatorname{cosech}(\alpha k_0) e^{-ik_0 x_1}) - x_2 k_0 \operatorname{cosech}(\alpha k_0) e^{-ik_0 x_1} \right] \\
 A(k_0) &= \epsilon \frac{4d^3}{3p_0} \pi \operatorname{cosech}(\alpha k_0) e^{-ik_0 x_1} [Lk_0 + i(1 - \alpha k_0 \coth(\alpha k_0))]
 \end{aligned}$$

donde $L = x_1 - x_2$.

4.1.6. Cálculo del máximo *runup* de una *N-wave*

Puesto que el espectro de Fourier de la *N-wave* está calculado, basta reemplazarlo en la fórmula para η :

$$\eta(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_i(k_0) J_0(2k_0 \sqrt{x_0 x})}{J_0(2k_0 x_0) + iJ_1(2k_0 x_0)} e^{ik_0(x_0 + c_0 t)} dk_0$$

Al evaluar en $x = 0$ se tiene entonces,

$$\eta(0, t) = \epsilon \frac{4d^3}{3p_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{cosech}(\alpha k_0) [Lk_0 + i(1 - \alpha k_0 \coth(\alpha k_0))]}{J_0(2k_0 x_0) + iJ_1(2k_0 x_0)} e^{ik_0(x_0 - x_1 + c_0 t)} dk_0.$$

La integral anterior, puede escribirse separadamente como

$$\eta(0, t) = \epsilon \frac{4d^3}{3p_0} (LE_1 + iE_2 - i\alpha E_3)$$

con

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_0 \operatorname{cosech}(\alpha k_0)}{J_0(2k_0 x_0) + iJ_1(2k_0 x_0)} e^{ik_0(x_0 - x_1 + c_0 t)} dk_0 \\
 E_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{cosech}(\alpha k_0)}{J_0(2k_0 x_0) + iJ_1(2k_0 x_0)} e^{ik_0(x_0 - x_1 + c_0 t)} dk_0 \\
 E_3 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_0 \operatorname{cosech}(\alpha k_0) \coth(\alpha k_0)}{J_0(2k_0 x_0) + iJ_1(2k_0 x_0)} e^{ik_0(x_0 - x_1 + c_0 t)} dk_0
 \end{aligned}$$

Para calcular las integrales, se utilizará el contorno de la figura 4.3, debido a que el denominador no tiene ceros en el semiplano inferior. Vemos que la primer y segunda integral

tienen polos simples dados por $p_n = -\frac{n\pi i}{\alpha}$ mientras que la tercera integral tiene los mismos polos, salvo que son de orden 2.

Aunque el cálculo de residuos puede ser algo largo y tedioso, es posible hacer algunas consideraciones generales: Suponiendo que $f(z)$ tiene un cero simple en z_0 , entonces

$$\begin{aligned}\text{Res}(f^{-1}, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{f(z)} \\ &= \frac{1}{f'(z_0)}\end{aligned}$$

Si se desea buscar el residuo para el cuadrado de f , entonces, con ayuda de la regla de L'Hôpital se calcula como sigue,

$$\begin{aligned}\text{Res}(f^{-2}, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z - z_0}{f(z)} \right)^2 \\ &= 2 \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{z - z_0}{f(z)} \right) \frac{f(z) - (z - z_0)f'(z)}{f^2(z)} \\ &= \frac{2}{f'(z_0)} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z) - f'(z) - (z - z_0)f''(z)}{2f(z)f'(z)} \\ &= -\frac{1}{f'(z_0)} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{f(z)} \frac{f''(z)}{f'(z)} \\ &= -\frac{f''(z_0)}{[f'(z_0)]^3}\end{aligned}$$

Con esto, para el caso de $f(z) = \sinh(\alpha z)$, es directo ver que el límite anterior es nulo, y notando que $\cosh(\alpha p_n) = (-1)^n$, se puede evaluar las integrales una a una.

Notar que E_1 , es la misma integral de *runup* de la onda solitaria, así que, aplicando el teorema de los residuos y la expansión asintótica de las funciones modificadas de Bessel

$$E_1 = 8\gamma^{5/2} \sqrt{2\pi x_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{3/2} e^{-2\gamma n(2x_0 - \phi_0)}$$

El caso de E_2 es muy similar, con la salvedad que posee un polo real en el origen, donde el expansión asintótica de las funciones modificadas de Bessel no es válida. De todos modos, en el primer orden de aproximación el aporte que realiza este polo es despreciable, con lo que se obtiene

$$E_2 = 4i\gamma^{3/2} \sqrt{2\pi x_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{1/2} e^{-2\gamma n(2x_0 - \phi_0)}$$

El caso E_3 es mucho más difícil, ya que ahí los polos son dobles. Calculemos el residuo a_n exacto. Llamando $\theta = x_0 - x_1 + c_0 t$:

$$\begin{aligned} a_n &= \lim_{z \rightarrow p_n} \frac{d}{dz} \left[\left(\frac{z - p_n}{\sinh(\alpha z)} \right)^2 \left(\frac{z \cosh(\alpha z) e^{iz\theta}}{J_0(2x_0 z) + iJ_1(2x_0 z)} \right) \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow p_n} \left[\left(\frac{z \cosh(\alpha z) e^{iz\theta}}{J_0(2x_0 z) + iJ_1(2x_0 z)} \right) \frac{d}{dz} \left(\frac{z - p_n}{\sinh(\alpha z)} \right)^2 + \left(\frac{z - p_n}{\sinh(\alpha z)} \right)^2 \frac{d}{dz} \left(\frac{z \cosh(\alpha z) e^{iz\theta}}{J_0(2x_0 z) + iJ_1(2x_0 z)} \right) \right] \end{aligned}$$

Debido al comentario sobre cálculo de residuos, el primer sumando es nulo, de modo que,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\alpha^2} \lim_{z \rightarrow p_n} \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{z \cosh(\alpha z) e^{iz\theta}}{J_0(2x_0 z) + iJ_1(2x_0 z)} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \lim_{z \rightarrow p_n} \left[\frac{(J_0(2x_0 z) + iJ_1(2x_0 z)) \frac{d}{dz} (z \cosh(\alpha z) e^{iz\theta}) - (z \cosh(\alpha z) e^{iz\theta}) \frac{d}{dz} (J_0(2x_0 z) + iJ_1(2x_0 z))}{(J_0(2x_0 z) + iJ_1(2x_0 z))^2} \right] \end{aligned}$$

Notar que

$$\frac{d}{dz} (z \cosh(\alpha z) e^{iz\theta}) = \cosh(\alpha z) e^{i\theta} + \alpha z \sinh(\alpha z) e^{i\theta} + i\theta z \cosh(\alpha z) e^{i\theta}$$

Pero el segundo término, en el límite, es nulo. Por otra parte, de las propiedades de las funciones de Bessel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} (J_0(2x_0 z) + iJ_1(2x_0 z)) &= 2x_0 \left(-J_1(2x_0 z) + i \left(J_0(2x_0 z) - \frac{1}{2x_0 z} J_1(2x_0 z) \right) \right) \\ &= i \left(2x_0 (J_0(2x_0 z) + iJ_1(2x_0 z)) - \frac{1}{z} J_1(2x_0 z) \right) \end{aligned}$$

Así, definiendo

$$K(z) = \frac{iJ_1(2x_0 z)}{J_0(2x_0 z) + iJ_1(2x_0 z)}.$$

Se obtiene que el residuo es,

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{e^{ip_n\theta} \cosh(\alpha p_n)}{\alpha^2} \left[\frac{(1 + i\theta p_n) - ip_n \left(2x_0 - \frac{K(p_n)}{ip_n}\right)}{J_0(2x_0 p_n) + iJ_1(2x_0 p_n)} \right] \\
 &= \frac{e^{ip_n\theta} (-1)^n}{\alpha^2} \left[\frac{(1 + K(p_n)) + ip_n(\theta - 2x_0)}{J_0(2x_0 p_n) + iJ_1(2x_0 p_n)} \right]
 \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente la aproximación asintótica de las funciones de Bessel modificadas para grandes valores del argumento, y notando que,

$$\begin{aligned}
 K(p_n) &= \frac{I_1(4\gamma n x_0)}{I_0(4\gamma n x_0) + I_1(4\gamma n x_0)} \\
 &\approx \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

se obtiene entonces que

$$E_3 = \frac{4i}{\alpha} \gamma^{3/2} \sqrt{2\pi x_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{1/2} \left(\frac{3}{2} + 2n\gamma(\theta - 2x_0) \right) e^{2\gamma n(\theta - 2x_0)}$$

Definiedo la fase $\phi = x_0 + x_1 - c_0 t = 2x_0 - \theta$.

Finalmente, se puede escribir que la elevación producto de una *N-wave* en la costa, en función del tiempo, es

$$\eta(0, t) = \epsilon \frac{16d^3}{3p_0} \gamma^{3/2} \sqrt{2\pi x_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{1/2} \left(\frac{1}{2} + 2n\gamma(L - \phi) \right) e^{-2\gamma n\phi}$$

Para calcular el *runup*, se debe hallar la fase óptima ϕ_m (lo que define el tiempo máximo). De la condición de optimalidad de primer orden, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{3/2} \left(\frac{3}{2} + 2n\gamma(L - \phi_m) \right) e^{-2\gamma n\phi_m} = 0$$

Pero, reordenando la ecuación

$$\begin{aligned}
 \frac{4\gamma}{3}(L - \phi_m) &= -\frac{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{3/2} e^{-2\gamma n\phi_m}}{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{5/2} e^{-2\gamma n\phi_m}} \\
 \frac{2}{3}(L - \phi_m) &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{3/2} e^{-2\gamma n\phi_m}}{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{3/2} (-2n\gamma) e^{-2\gamma n\phi_m}}
 \end{aligned}$$

Llamando $S(\phi_m) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{3/2} e^{-2\gamma n \phi_m}$, se encuentra una ecuación diferencial para $S(\phi_m)$,

$$\frac{2}{3}(L - \phi_m) = \frac{S(\phi_m)}{S'(\phi_m)}$$

y separando variables

$$\frac{3}{2} \frac{1}{L - \phi_m} = \frac{dS}{S}$$

se obtiene que (para $L - \phi_m > 0$)

$$S(\phi_m) = S_0(L - \phi_m)^{-3/2}$$

Evaluando en $\phi_m = \frac{0,366}{\gamma}$, se encuentra $S_0 = 0,1517 \left(L - \frac{0,366}{\gamma}\right)^{3/2}$.

Gracias a esto, puede obtenerse también que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{1/2} e^{-2\gamma n \phi_m} &= -2\gamma \int S(\phi_m) d\phi_m + 2C \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{1/2} e^{-2\gamma n \phi_m} &= -4\gamma S_0(L - \phi_m)^{-1/2} + 2C \end{aligned} \quad (4.10)$$

Con esto, el *runup* es,

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \epsilon \frac{16d^3}{3p_0} \gamma^{3/2} \sqrt{2\pi x_0} \left[\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{1/2} e^{-2\gamma n \phi_m} + 2\gamma(L - \phi_m) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{3/2} e^{-2\gamma n \phi_m} \right] \\ \mathcal{R} &= \epsilon \frac{16d^3}{3p_0} \gamma^{3/2} \sqrt{2\pi x_0} \left[\frac{1}{2} (-4\gamma S_0(L - \phi_m)^{-1/2} + 2C) + 2\gamma(L - \phi_m) S_0(L - \phi_m)^{-3/2} \right] \\ \mathcal{R} &= \epsilon \frac{16d^3}{3p_0} \gamma^{3/2} \sqrt{2\pi x_0} C \end{aligned}$$

Para determinar la constante de integración, basta evaluar 4.10 en $\phi_m = \frac{0,366}{\gamma}$

$$\begin{aligned} 0,2772 &= -0,6068\gamma \left| L - \frac{0,366}{\gamma} \right| + 2C \\ C &= 0,1386 + 0,3034\gamma \left| L - \frac{0,366}{\gamma} \right| \end{aligned}$$

Realizando los reemplazos correspondientes, finalmente se obtiene

$$\mathcal{R} = 2,831\epsilon\sqrt{\cot(\beta)}H\left(\frac{H}{d}\right)^{\frac{1}{4}}p_0^{\frac{1}{4}}\left(\left|L - \frac{0,366}{\gamma}\right| + \frac{0,4586}{\gamma}\right)$$

Es interesante notar que una *N-wave* de depresión dominante, tiene un *runup* superior al de una *N-wave* de elevación dominante, y de hecho la sensibilidad del *runup* respecto a L , puede apreciarse en la figura 4.9.

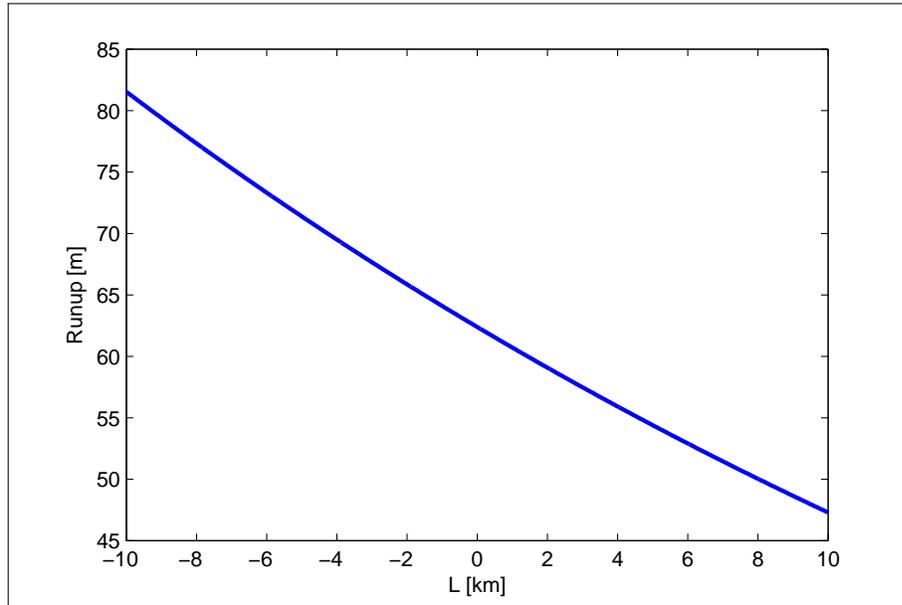


Figura 4.9: Dependencia del *runup* de una *N-wave* con la separación L , con $H = 10$, $d = 4$ km, $\beta = 2^\circ$.

4.1.7. *N-waves* Isósceles

En el caso particular de una *N-wave* de igual amplitud de elevación y depresión, se hablará de *N-wave* isósceles. Tadepalli & Synolakis (1996) proponen una *N-wave* inicial de elevación-depresión dada por,

$$\eta(x, 0) = -\epsilon H \operatorname{sech}^2(\gamma(x - x_1)) \tanh(\gamma(x - x_1))$$

$$\text{con } \gamma = \frac{3}{2d} \sqrt{\sqrt{\frac{3}{4}} \frac{H}{d}}.$$

En este caso, es posible determinar explícitamente ϵ . De la condición de optimalidad,

$$\begin{aligned} 2\operatorname{sech}^2(\gamma(x^* - x_1)) \tanh^2(\gamma(x^* - x_1)) &= \operatorname{sech}^4(\gamma(x^* - x_1)) \\ \sinh^2(\gamma(x^* - x_1)) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Obviamente las dos soluciones corresponden al punto mínimo y máximo. Reemplazando en la *N-wave*,

$$\eta(x^*, 0) = \epsilon H \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

puesto que el objetivo del parámetro ϵ es escalar la función de modo que la altura máxima sea H , se obtiene entonces que $\epsilon = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Para calcular el espectro de Fourier de este perfil inicial, basta notar que

$$\eta(x, 0) = \frac{\epsilon}{2\gamma} H \frac{d}{dx} \operatorname{sech}^2(\gamma(x - x_1))$$

Por tanto, la transformada de Fourier es

$$\begin{aligned} A(k_0) &= -\frac{\epsilon}{2\gamma} (ik_0) \frac{\pi H}{\gamma^2} k_0 \operatorname{cosech}(\alpha k_0) e^{-ik_0 x_1} \\ A(k_0) &= -i \frac{\epsilon \pi H}{2\gamma^3} k_0^2 \operatorname{cosech}(\alpha k_0) e^{-ik_0 x_1} \end{aligned}$$

Así, la integral de *runup* está dada por,

$$\eta(0, t) = -i \frac{\epsilon H}{2\gamma^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_0^2 \operatorname{cosech}(\alpha k_0)}{J_0(2k_0 x_0) + iJ_1(2k_0 x_0)} e^{ik_0(x_0 - x_1 + c_0 t)} dk_0$$

Como se ha hecho antes, aplicando el teorema de los residuos en el semi-círculo inferior se obtiene,

$$\begin{aligned} \eta(x, 0) &= 2\pi \frac{\epsilon H}{2\gamma^3} \frac{4\gamma^2}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (-1)^{n+1}}{I_0(4\gamma n x_0) + I_1(4\gamma n x_0)} e^{2n\gamma(x_0 - x_1 + c_0 t)} \\ \eta(x, 0) &= 8\epsilon H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (-1)^{n+1}}{I_0(4\gamma n x_0) + I_1(4\gamma n x_0)} e^{2n\gamma(x_0 - x_1 + c_0 t)} \end{aligned}$$

Aplicando las aproximaciones asintóticas de las funciones modificadas de Bessel

$$\begin{aligned}\eta(x, 0) &= 8\epsilon H \sqrt{2\pi d \gamma} \sqrt{\cot(\beta)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{5}{2}} (-1)^{n+1} e^{-2n\gamma(x_0+x_1-c_0t)} \\ &= 8\epsilon H \sqrt{3\pi} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{8}} \left(\frac{H}{d}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\cot(\beta)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{5}{2}} (-1)^{n+1} e^{-2n\gamma(x_0+x_1-c_0t)}\end{aligned}$$

Esta es una serie de la forma $S(\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{5}{2}} (-1)^{n+1} \chi^n$, que alcanza su valor máximo en $\chi = 0,1605 = e^{-1,828}$, el cual es $S(\chi) = 0,06273$. La figura 4.10 muestra el cálculo numérico de esta serie en función de χ mostrando claramente que ésta alcanza un máximo.

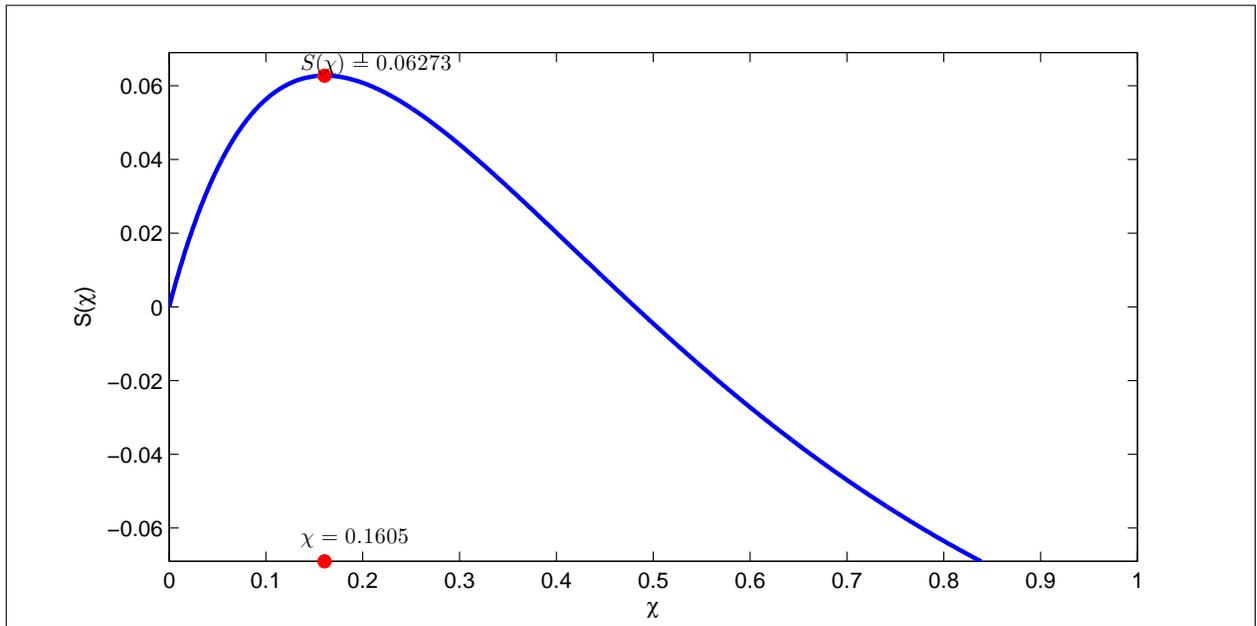


Figura 4.10: Serie $S(\chi)$.

Con esto, el *runup* y el tiempo máximo, queda

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= 3,861H \left(\frac{H}{d}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\cot(\beta)} \\ t_{\max} &= \frac{1}{c_0} \left(x_0 + x_1 - \frac{0,914}{\gamma}\right)\end{aligned}$$

Comparando ahora este resultado con el *runup* de la onda solitaria, se verifica que el cociente entre ambos es,

$$\frac{\mathcal{R}(\text{N-wave})}{\mathcal{R}(\text{Solitary wave})} = 1,364$$

y la diferencia de los tiempos máximos,

$$t_{\max}(\text{Solitary wave}) - t_{\max}(\text{N-wave}) = 0,203 \frac{d}{c_0} \sqrt{\frac{d}{H}}$$

es decir, una *N-wave* de la misma altura que una onda solitaria, produce un *runup* un 36 % mayor y éste se alcanza antes que el que produce la onda solitaria. Tal como lo discuten Tadepalli & Synolakis (1994,1996) la forma de la *N-wave* parece ser más estable, lo que la hace más eficiente que la onda solitaria al propagarse.

Para analizar esta sección, se observa que, de la sección 4.1.6, una *N-wave* isósceles puede obtenerse al escoger $L = 0$, por lo que el *runup* predicho por ambos tipos de *N-waves* isósceles debería ser muy similar. Esto puede apreciarse con claridad en la figura 4.11, pero para adaptarlas a la misma longitud de onda, se ha tomado $p_0 = \frac{2\sqrt{3}}{9}$, con el fin de realizar una comparación consistente. Dicha figura muestra que ambos *runup* son similares para valores de H pequeños y sólo divergen localmente cuando H crece.

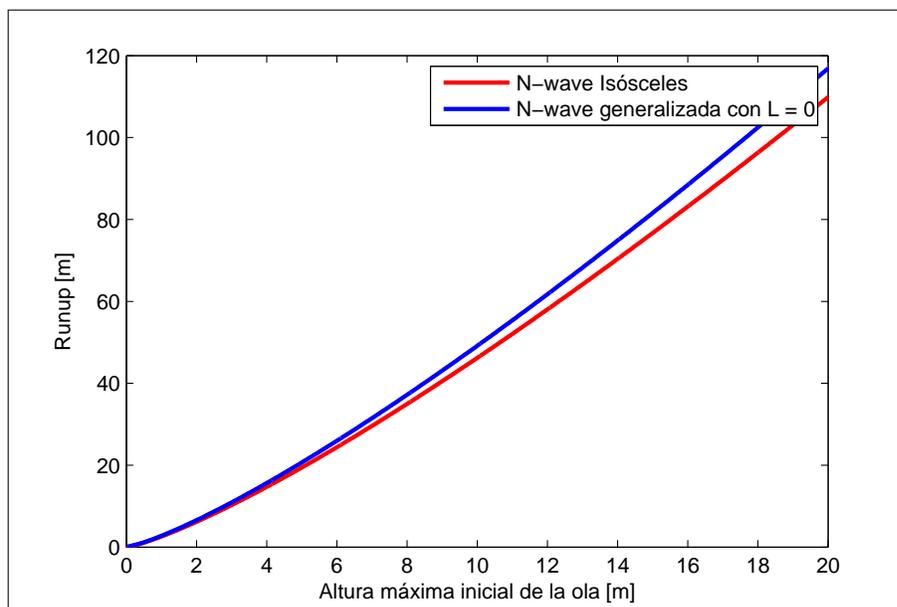


Figura 4.11: Comparación del *runup* predicho por *N-waves* isósceles con la *N-wave* generalizada ($L = 0$) en función de H .

4.2. Teoría no lineal

En esta sección, se estudiarán las ecuaciones en su versión no lineal para buscar una expresión analítica de las soluciones.

Recordando que el sistema (4.1) antes de ser linealizado, es

$$\begin{aligned}\eta_t + ((h + \eta) u)_x &= 0 \\ u_t + uu_x + g\eta_x &= 0\end{aligned}$$

Definiendo la función $h_0(x, t) = h(x) + \eta(x, t)$ y recordando que en el caso de *sloping beach* $h(x) = \tan(\beta)x$, luego el sistema anterior se reduce a,

$$\begin{aligned}\eta_t + h_0 u_x + h_0 u_x &= 0 \\ u_t + uu_x + gh_{0x} - gh_x &= 0\end{aligned}$$

El sistema no lineal que gobierna la elevación y velocidad del fluido, puede reescribirse como una única ecuación vectorial que representa un sistema hiperbólico que puede escribirse como,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\begin{pmatrix} h_0 \\ u \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}} + \underbrace{\begin{pmatrix} u & h_0 \\ g & u \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} h_0 \\ u \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -gh_x \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las direcciones características, en la notación clásica, se obtienen del problema de autovalores:

$$\mathbf{l} \left(\mathbf{a} \frac{dx}{dt} - \mathbf{b} \right) = 0$$

Así, en este caso, las velocidades características son

$$\frac{dx}{dt} =: c_{1,2} = u \pm \sqrt{gh_0},$$

mientras que los vectores propios del sistema son,

$$\mathbf{l}_{1,2} = \begin{pmatrix} g & \pm \sqrt{gh_0} \end{pmatrix}$$

Cada valor propio, define en el espacio (x, t) una curva llamada *característica*. Cada característica, tiene asociada una abscisa curvilínea σ^* definida por el diferencial,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\sigma^*} &= \frac{dt}{d\sigma^*} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{d\sigma^*} \frac{\partial}{\partial x} \\ &= \frac{dt}{d\sigma^*} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

lo que define las ecuaciones características,

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{d\sigma^*} + \frac{dt}{d\sigma^*} \cdot \mathbf{l} \cdot \mathbf{c} = 0$$

En este caso,

$$\begin{aligned}\left(g \pm \sqrt{gh_0}\right) \left(\frac{dh_0}{d\sigma^*}\right) + \left(g \pm \sqrt{gh_0}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ -g \tan(\beta) \end{pmatrix} \frac{dt}{d\sigma^*} &= 0 \\ \frac{d(gh_0)}{d\sigma^*} \pm \sqrt{gh_0} \frac{du}{d\sigma^*} \mp \sqrt{gh_0} g \tan(\beta) t \frac{dt}{d\sigma^*} &= 0 \\ \frac{d(\sqrt{gh_0})^2}{d\sigma^*} \pm \sqrt{gh_0} \frac{du}{d\sigma^*} \mp \sqrt{gh_0} g \tan(\beta) t \frac{dt}{d\sigma^*} &= 0 \\ 2\sqrt{gh_0} \frac{d\sqrt{gh_0}}{d\sigma^*} \pm \sqrt{gh_0} \frac{du}{d\sigma^*} \mp \sqrt{gh_0} g \tan(\beta) t \frac{dt}{d\sigma^*} &= 0 \\ \pm \sqrt{gh_0} \frac{d}{d\sigma^*} \left[u \pm 2\sqrt{gh_0} - g \tan(\beta) t \right] &= 0\end{aligned}$$

Luego, los *invariantes de Riemann* del sistema, definidos como las funciones escalares que son constantes a lo largo de las curvas características son

$$I_{1,2} = u \pm 2\sqrt{gh_0} - g \tan(\beta) t$$

que satisfacen las ecuaciones características

$$\partial_t I_{1,2} + c_{1,2} \partial_x I_{1,2} = 0$$

Notar que los invariantes y las velocidades características, se relacionan de manera sencilla

$$c_{1,2} = \frac{3}{4} I_{1,2} + \frac{1}{4} I_{2,1} + \tan(\beta) g t$$

Una de las estrategias utilizadas por Carrier & Greenspan (1958) para resolver este problema, es considerar a las variables independientes como variables dependientes de los invariantes de Riemann. Para ello, debe considerarse el siguiente Jacobiano

$$J = \frac{\partial(t, x)}{\partial(I_1, I_2)} = \begin{pmatrix} \partial_{I_1} t & \partial_{I_2} t \\ \partial_{I_1} x & \partial_{I_2} x \end{pmatrix}$$

Suponiendo que esta matriz es invertible (este supuesto se discutirá más adelante), entonces

$$J^{-1} = \frac{\partial(I_1, I_2)}{\partial(t, x)} = \begin{pmatrix} \partial_t I_1 & \partial_x I_1 \\ \partial_t I_2 & \partial_x I_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} \partial_{I_2} x & -\partial_{I_2} t \\ -\partial_{I_1} x & \partial_{I_1} t \end{pmatrix}$$

esto permite reescribir las ecuaciones características como

$$\partial_{I_{2,1}} x - c_{1,2} \partial_{I_{1,2}} = 0$$

Esto representa un sistema no lineal debido a la dependencia de las velocidades características con los invariantes, pero es posible convertirlo en una ecuación diferencial lineal de segundo orden al derivar cada ecuación con la variable opuesta

$$\begin{aligned} \partial_{I_2 I_1}^2 x - \frac{3}{4} \partial_{I_2} t - c_1 \partial_{I_2 I_1}^2 t &= 0 \\ \partial_{I_2 I_1}^2 x - \frac{3}{4} \partial_{I_1} t - c_2 \partial_{I_2 I_1}^2 t &= 0 \end{aligned}$$

Eliminando la variable x restando las ecuaciones

$$\partial_{I_2 I_1}^2 t + \frac{3}{2(I_1 - I_2)} (\partial_{I_2} t - \partial_{I_1} t) = 0$$

es conveniente entonces, definir las siguientes variables generalizadas

$$\begin{aligned} \lambda &=: \frac{I_1 + I_2}{2} = u - \tan(\beta)gt \\ \sigma &=: \frac{I_1 - I_2}{2} = 2\sqrt{gh_0} \end{aligned}$$

Utilizando la regla de la cadena, es directo escribir la ecuación en términos de las nuevas variables

$$(\partial_{\lambda\lambda}^2 t - \partial_{\sigma\sigma}^2 t) - \frac{3}{\sigma} \partial_{\sigma} t = 0$$

Debido a que $\lambda = u - \tan(\beta)gt$, se tiene que $t = \frac{u-\lambda}{\tan(\beta)g}$. Nuevamente, gracias a la regla de la cadena, es posible encontrar con facilidad que

$$(\partial_{\lambda\lambda}^2 u - \partial_{\sigma\sigma}^2 u) - \frac{3}{\sigma} \partial_{\sigma} u = 0$$

Otra de las estrategias de Carrier & Greenspan (1958), es la introducción de un “potencial” $\phi = \phi(\sigma, \lambda)$, de modo que

$$u = \frac{\partial_{\sigma} \phi}{\sigma}$$

Al reemplazarlo

$$\begin{aligned} \left(\partial_{\lambda\lambda}^2 \left(\frac{\partial_{\sigma} \phi}{\sigma} \right) - \partial_{\sigma\sigma}^2 \left(\frac{\partial_{\sigma} \phi}{\sigma} \right) \right) - \frac{3}{\sigma} \partial_{\sigma} \left(\frac{\partial_{\sigma} \phi}{\sigma} \right) &= 0 \\ \partial_{\lambda\lambda\sigma}^3 \phi - \sigma \partial_{\sigma} \left(\partial_{\sigma} \left(\frac{\partial_{\sigma} \phi}{\sigma} \right) \right) - 3 \partial_{\sigma} \left(\frac{\partial_{\sigma} \phi}{\sigma} \right) &= 0 \\ \partial_{\lambda\lambda\sigma}^3 \phi - \partial_{\sigma} \left(\sigma \partial_{\sigma} \left(\frac{\partial_{\sigma} \phi}{\sigma} \right) \right) - 2 \partial_{\sigma} \left(\frac{\partial_{\sigma} \phi}{\sigma} \right) &= 0 \\ \partial_{\sigma} \left(\partial_{\lambda\lambda}^2 \phi - \sigma \partial_{\sigma} \left(\frac{\partial_{\sigma} \phi}{\sigma} \right) - 2 \frac{\partial_{\sigma} \phi}{\sigma} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Pidiéndole acotamiento a las derivadas del potencial, entonces la ecuación se reduce a

$$\begin{aligned} \partial_{\lambda\lambda}^2 \phi - \sigma \partial_{\sigma} \left(\frac{\partial_{\sigma} \phi}{\sigma} \right) - 2 \frac{\partial_{\sigma} \phi}{\sigma} &= 0 \\ \partial_{\lambda\lambda}^2 \phi - \left(\frac{\partial_{\sigma\sigma}^2 \phi - \partial_{\sigma} \phi}{\sigma} \right) - 2 \frac{\partial_{\sigma} \phi}{\sigma} &= 0 \\ \partial_{\lambda\lambda}^2 \phi - \partial_{\sigma\sigma}^2 \phi - \frac{1}{\sigma} \partial_{\sigma} \phi &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente, la ecuación que define al potencial, puede escribirse como

$$\sigma \partial_{\lambda\lambda}^2 \phi = \partial_{\sigma}(\sigma \partial_{\sigma} \phi)$$

Para completar esta parte, debemos dar las fórmulas que definen el pasaje de un sistema a otro.

De la definición del potencial

$$u = \frac{\partial_{\sigma} \phi}{\sigma}$$

Tal como se utilizó anteriormente,

$$t = \frac{u - \lambda}{\tan(\beta)g}$$

Para expresar x , se puede ver que los invariantes de Riemann y las velocidades características, en términos de las variables generalizadas son

$$\begin{aligned} I_{1,2} &= \lambda \pm \sigma \\ c_{1,2} &= \lambda \pm \frac{\sigma}{2} + \tan(\beta)gt \end{aligned}$$

gracias a esto, y a la regla de la cadena, las ecuaciones características pueden reescribirse como

$$\begin{aligned} \partial_{\lambda} x - \partial_{\sigma} x - c_1(\partial_{\lambda} t - \partial_{\sigma} t) &= 0 \\ \partial_{\lambda} x + \partial_{\sigma} x - c_2(\partial_{\lambda} t + \partial_{\sigma} t) &= 0 \end{aligned}$$

Restando las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2\partial_{\lambda} x + (c_1 - c_2)\partial_{\lambda} t - (c_1 + c_2)\partial_{\sigma} t &= 0 \\ 2\partial_{\lambda} x + \sigma\partial_{\lambda} t - 2(\lambda + \tan(\beta)gt)\partial_{\sigma} t &= 0 \end{aligned}$$

pero como $t = \frac{u-\lambda}{\tan(\beta)g}$

$$\begin{aligned} 2\partial_\lambda x + \sigma \left(\frac{\partial_\sigma u - 1}{\tan(\beta)g} \right) - 2(\lambda + \tan(\beta)gt)\partial_\sigma t &= 0 \\ 2\partial_\lambda x + \sigma \left(\frac{\partial_\lambda u - 1}{\tan(\beta)g} \right) - 2u \frac{\partial_\sigma u}{\tan(\beta)g} &= 0 \end{aligned}$$

y utilizando la definición del potencial

$$2\partial_\lambda x + \frac{1}{\tan(\beta)g}(\partial_\lambda \sigma \phi - \sigma) + \frac{2}{\tan(\beta)g}u(\partial_\sigma u) = 0$$

Despejando x

$$\begin{aligned} \partial_\sigma x &= \frac{1}{2 \tan(\beta)g}(\sigma + 2u(\partial_\sigma u) - \partial_\lambda \sigma \phi) \\ \partial_\sigma x &= \partial_\sigma \left(\frac{1}{2 \tan(\beta)g} \left(\frac{\sigma^2}{2} + u^2 - \partial_\lambda \phi \right) \right) \end{aligned}$$

de donde se puede escoger entonces que

$$x = \frac{1}{2 \tan(\beta)g} \left(\frac{\sigma^2}{2} + u^2 - \partial_\lambda \phi \right)$$

finalmente, como $\sigma = 2\sqrt{gh_0}$, y utilizando la representación de la variable x , se despeja

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= 4gh_0 \\ \frac{\sigma^2}{4g} &= \eta + \tan(\beta)x \\ \eta &= \frac{\sigma^2}{4g} + \frac{1}{2g} \left(\partial_\lambda \phi - \frac{\sigma^2}{2} - u^2 \right) \\ \eta &= \frac{1}{2g} (\partial_\lambda \phi - u^2) \end{aligned}$$

4.2.1. Solución de la teoría no lineal

Tal como se vió en la sección anterior, el sistema no lineal de *shallow water equations* en el caso unidimensional, puede ser representado a través de una ecuación lineal diferencial a derivadas parciales de segundo orden utilizando una transformación hodográfica,

$$\begin{aligned}\sigma \partial_{\lambda\lambda}^2 \phi &= \partial_{\sigma}(\sigma \partial_{\sigma} \phi) \\ u &= \frac{\partial_{\sigma} \phi}{\sigma} \\ t &= \frac{u - \lambda}{\tan(\beta)g} \\ x &= \frac{1}{2 \tan(\beta)g} \left(\frac{\sigma^2}{2} + u^2 - \partial_{\lambda} \phi \right) \\ \eta &= \frac{1}{2g} (\partial_{\lambda} \phi - u^2)\end{aligned}$$

Considerando la transformada de Fourier del potencial, en la variable λ

$$\widehat{\phi}(\sigma, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\sigma, \lambda) e^{-i\lambda s} d\lambda$$

entonces, es fácil ver que la solución acotada del potencial es

$$\widehat{\phi}(\sigma, s) = A(s) J_0(s\sigma)$$

Si se proporciona una condición de borde, digamos

$$\widehat{\phi}(\sigma_0, s) = F(s)$$

entonces

$$A(s) = \frac{F(s)}{J_0(s\sigma_0)}$$

y por tanto, al invertir la transformada

$$\phi(\sigma, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(s)}{J_0(s\sigma_0)} J_0(s\sigma) e^{i\lambda s} ds$$

Si se especifica una condición inicial, es posible hacer un tratamiento similar (Carrier, 1986). En general, tal como lo plantea Synolakis (1987) no es trivial tomar una condición de borde o inicial sin hacer un fuerte supuesto sobre la solución, ya que esto implicaría conocer el dato, ya sea en todo el espacio o todo el tiempo, dependiendo de la condición, sin contar, que después deben ser traspasadas al espacio (σ, λ) .

4.2.2. Comparación entre la teoría lineal y no lineal

Para verificar la consistencia entre las soluciones predichas por ambas teorías, se linealiza la transformación hodográfica despreciando los términos $O(u^2)$. En el mismo orden, $\phi_\lambda \ll \frac{\sigma^2}{2}$ y $u \ll \lambda$, con lo cual

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial_\sigma \phi}{\sigma} \\ t &= -\frac{\lambda}{\tan(\beta)g} \\ x &= \frac{\sigma^2}{4 \tan(\beta)g} \\ \eta &= \frac{\partial_\lambda \phi}{2g} \end{aligned}$$

es interesante notar que ahora las ecuaciones quedan desacopladas, permitiendo una transición directa entre los espacios (x, t) y (σ, λ) .

Teniendo en consideración la dificultad a la hora de tomar una condición inicial o de borde, Synolakis (1987) propone tomar como condición de borde la misma utilizada en el problema lineal equivalente, lo que viene a ser formalmente correcto al mismo orden de aproximación.

El punto x_0 en el plano hodográfico, está dado por

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 &= 4 \tan(\beta)g x_0 \\ \sigma_0 &= 2c_0 \end{aligned}$$

Por otra parte, notar que

$$\begin{aligned} \eta(x_0, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) \frac{J_0(2k_0 x_0)}{J_0(2k_0 x_0) + iJ_1(2k_0 x_0)} e^{i\omega t} d\omega \\ \eta(x_0, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) \frac{J_0(2k_0 x_0)}{J_0(2k_0 x_0) + iJ_1(2k_0 x_0)} e^{-i \frac{\lambda}{\tan(\beta)g} \omega} d\omega \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables $\omega = -g \tan(\beta)s$

$$\eta(x_0, t) = 2g \tan(\beta) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) \frac{J_0(2k_0 x_0)}{J_0(2k_0 x_0) + iJ_1(2k_0 x_0)} e^{i\lambda s} ds$$

Con lo anterior, por inspección, se reconoce la transformada de Fourier en la variable λ de $\eta(x_0, t)$

$$\widehat{\eta(x_0, t)}(s) = 2g \tan(\beta) \Phi(\omega) \frac{J_0(2k_0 x_0)}{J_0(2k_0 x_0) + iJ_1(2k_0 x_0)}$$

Y puesto que

$$\partial_\lambda \phi(\sigma, \lambda) = 2g\eta(x, t)$$

Al aplicar la transformada de Fourier en la variable λ en σ_0

$$isF(s) = 4g^2 \tan(\beta) \Phi(\omega) \frac{J_0(2k_0 x_0)}{J_0(2k_0 x_0) + iJ_1(2k_0 x_0)}$$

al reemplazar valores, se observa que

$$\begin{aligned} 2k_0 x_0 &= 2 \frac{\omega}{c_0} x_0 \\ 2k_0 x_0 &= 2 \frac{-sg \tan(\beta)}{c_0} x_0 \\ 2k_0 x_0 &= 2 \frac{-sg \tan(\beta)}{c_0} d \cot(\beta) \\ 2k_0 x_0 &= -2c_0 s \\ 2k_0 x_0 &= -2\sigma_0 s \end{aligned}$$

De este modo, la expresión integral del potencial queda

$$\phi(\sigma, \lambda) = \frac{4g^2 \tan(\beta)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(\omega)}{s} \frac{J_0(s\sigma)}{J_0(2k_0 x_0) + iJ_1(2k_0 x_0)} e^{i\lambda s} ds$$

Redefiniendo como variable de integración k_0 (ya que $s = -\frac{x_0}{c_0} k_0$)

$$\phi(\sigma, \lambda) = -\frac{2gc_0^2}{x_0 \pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(\omega)}{k_0} \frac{J_0\left(\frac{x_0}{c_0} k_0 \sigma\right)}{J_0(2k_0 x_0) + iJ_1(2k_0 x_0)} e^{-i\lambda \frac{x_0}{c_0} k_0} dk_0$$

pero, en esta aproximación $\eta = \frac{1}{2g} \partial_\lambda \phi$, con lo cual

$$\begin{aligned}\eta(x, t) &= \frac{c_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) \frac{J_0\left(\frac{x_0}{c_0} k_0 \sigma\right)}{J_0(2k_0 x_0) + iJ_1(2k_0 x_0)} e^{-i\lambda \frac{x_0}{c_0} k_0} dk_0 \\ \eta(x, t) &= \frac{c_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) \frac{J_0\left(\frac{x_0}{c_0} k_0 \sigma\right)}{J_0(2k_0 x_0) + iJ_1(2k_0 x_0)} e^{ic_0 k_0 t} dk_0\end{aligned}$$

En la teoría no lineal, el *runup*, se alcanza en la posición x_s donde la elevación alcanza el mismo nivel que la profundidad, es decir en x_s tal que $-x_s \tan(\beta) = \eta(x_s, t)$. Mirando el sistema hodográfico original, es directo que esto sólo puede lograrse cuando $\sigma = 0$, y en dicho punto, la velocidad alcanza su valor crítico, haciéndose nula, es decir, $u(x_s, t) = 0$. De este modo

$$\eta(x_s, t) = \frac{c_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(\omega)}{J_0(2k_0 x_0) + iJ_1(2k_0 x_0)} e^{ic_0 k_0 t} dk_0$$

Escribiendo la integral en términos de la variable ω (ya que $\omega = k_0 c_0$)

$$\eta(x_s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(\omega)}{J_0(2k_0 x_0) + iJ_1(2k_0 x_0)} e^{i\omega t} d\omega$$

que es exactamente la misma integral de *runup* 4.8 predicha por la teoría lineal.

4.2.3. Validación de la teoría no lineal: *Breaking point*

Calculemos el Jacobiano de la transformación hodográfica,

$$\begin{aligned}|J| &= \partial_{I_1} t \partial_{I_2} x - \partial_{I_2} t \partial_{I_1} x \\ &= \frac{1}{4} (\partial_\lambda t + \partial_\sigma t) (\partial_\lambda x - \partial_\sigma x) - \frac{1}{4} (\partial_\lambda t - \partial_\sigma t) (\partial_\lambda x + \partial_\sigma x) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\sigma t \partial_\lambda x - \partial_\lambda t \partial_\sigma x) \\ &= \frac{1}{(2g \tan(\beta))^2} (u_\sigma (2uu_\sigma - \phi_{\lambda\lambda}) - (u_\lambda - 1)(\sigma + 2uu_\sigma - \phi_{\lambda\sigma})) \\ &= \frac{1}{(2g \tan(\beta))^2} (u_\sigma (2uu_\sigma - u - (\sigma u)_\sigma) - (u_\lambda - 1)(\sigma + 2uu_\sigma - \sigma u_\lambda)) \\ &= \frac{1}{(2g \tan(\beta))^2} ((u_\lambda - 1)^2 - u_\sigma^2)\end{aligned}$$

que el Jacobiano sea singular en $\sigma = 0$, es una propiedad de la transformación hodográfica y no de la forma inicial en particular que se escoja. Así que, si u y sus primeras derivadas parciales se mantienen acotadas, el Jacobiano queda invertible dentro del fluido. Luego, los problemas aparecen cuando la pendiente de la superficie del líquido, $\frac{\partial \eta}{\partial x}$, se hace infinita. El punto donde esto ocurre es comúnmente llamado *breaking point*, es decir, el punto en que la ola “rompe” y se colapsa sobre si misma por acción de la gravedad. La predicción de este punto y sus implicancias desde la teoría no lineal fueron comparadas en experiencias de laboratorio por Synolakis (1987).

Capítulo 5

Generalización al caso Bidimensional

Se considera una batimetría similar a la del caso unidimensional pero extendiéndola en la dirección y (ver figura 5.1):

$$h(x, y) = \begin{cases} d & \text{si } x > x_0, y \in \mathbb{R} \\ x \tan(\beta) & \text{si } x \leq x_0, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

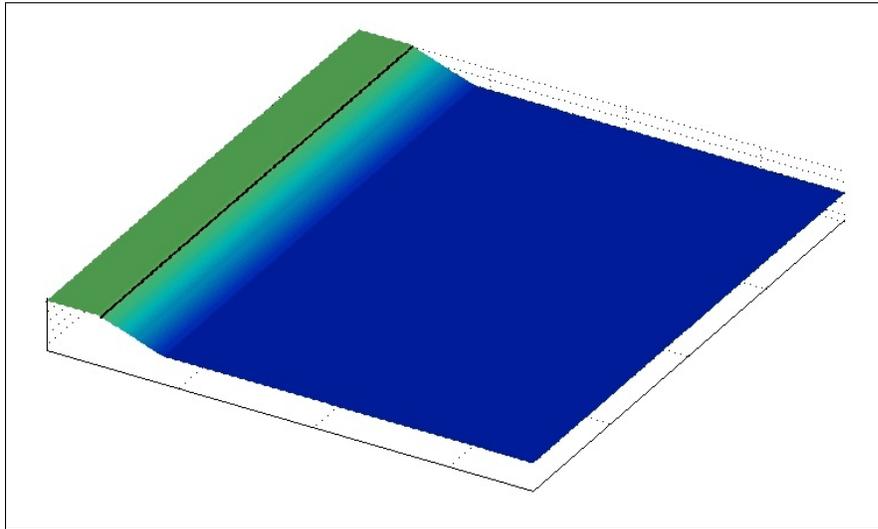


Figura 5.1: Esquema de batimetría para el problema 2D.

Retomando el sistema de ecuaciones (2.6) que rige el problema,

$$\begin{aligned} \eta_t + ((\eta + h)u)_x + ((\eta + h)v)_y &= 0 \\ u_t + uu_x + vv_y + g\eta_x &= 0 \\ v_t + uv_x + vv_y + g\eta_y &= 0 \end{aligned}$$

En el caso lineal, el sistema queda,

$$\eta_t + (hu)_x + (hv)_y = 0 \quad (5.1)$$

$$u_t + g\eta_x = 0 \quad (5.2)$$

$$v_t + g\eta_y = 0 \quad (5.3)$$

y eliminando las variables u, v se obtiene la EDP

$$\eta_{tt} - g((h\eta_x)_x + (h\eta_y)_y) = 0$$

Se deben distinguir dos casos,

• $x > x_0$

En este caso la profundidad es constante, $h(x, y) = d$ y la EDP queda,

$$\eta_{tt} = gd(\eta_{xx} + \eta_{yy}) \quad (5.4)$$

que corresponde a la ecuación de ondas 2D, con $c_0^2 = gd$.

Aplicando la transformada de Fourier en tiempo, la ecuación se convierte en

$$-\omega^2 \hat{\eta} = c_0^2(\hat{\eta}_{xx} + \hat{\eta}_{yy})$$

Definiendo $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$

$$-k_0^2 \hat{\eta} = \hat{\eta}_{xx} + \hat{\eta}_{yy}$$

Se postula una solución del tipo

$$\hat{\eta}(x, y, \omega) = \oint_{|\vec{k}|=k_0} \left\{ A(\vec{k})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} + B(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right\} dl$$

donde $\vec{k} = (k_x, k_y)$ representa el vector número de onda, $\vec{r} = (x, y)$ es el vector posición y dl es el elemento de línea.

• $x \leq x_0$

Para este caso, $h(x, y) = x \tan(\beta)$, y se obtiene la EDP

$$\eta_{tt} = g \tan \beta (x\eta_{xx} + \eta_x + x\eta_{yy}) \quad (5.5)$$

Aplicando la transformada de Fourier en tiempo

$$\begin{aligned} -\omega^2 \widehat{\eta} &= g \tan \beta (x \widehat{\eta}_{xx} + \widehat{\eta}_x + x \widehat{\eta}_{yy}) \\ -\frac{\omega^2 \cot(\beta)}{g} \widehat{\eta} &= x \widehat{\eta}_{xx} + \widehat{\eta}_x + x \widehat{\eta}_{yy} \\ -\frac{\omega^2 d \cot(\beta)}{gd} \widehat{\eta} &= x \widehat{\eta}_{xx} + \widehat{\eta}_x + x \widehat{\eta}_{yy} \\ -k_0^2 x_0 \widehat{\eta} &= x \widehat{\eta}_{xx} + \widehat{\eta}_x + x \widehat{\eta}_{yy} \end{aligned}$$

Se postula una solución del tipo,

$$\widehat{\eta}(x, y, \omega) = \oint_{|\vec{k}|=k_0} X(x)Y(y)dl$$

Se observa que las funciones X, Y deben satisfacer que

$$-k_0^2 x_0 XY = xX''Y + X'Y + xXY''$$

Separando variables

$$-\frac{1}{x} \left(k_0^2 x_0 + x \frac{X''}{X} + \frac{X'}{X} \right) = \frac{Y''}{Y}$$

Tomando como constante de separación $-k_y^2$, se obtiene que

$$Y(y) = C(\vec{k})e^{-ik_y y} + D(\vec{k})e^{ik_y y}$$

mientras que la función X satisface la siguiente ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$xX'' + X' + (k_0^2 x_0 - k_y^2 x)X = 0 \tag{5.6}$$

Que es esencialmente la ecuación diferencial de *Sharpe*, luego, la solución finita en la costa ($x = 0$) es, gracias a D.1

$$X(x) = e^{-k_y x} M(\mu, 1, 2k_y x)$$

con $\mu = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k_0^2 x_0}{k_y} \right)$, y $M(a, b, z)$ es la función hipergeométrica confluyente de *Kummer*.

5.1. Uso de la Transformada de Fourier Tiempo - Espacio

La ecuación diferencial parcial que gobierna el movimiento para el caso de profundidad constante, es la ecuación de ondas,

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = \frac{1}{c_0^2} \eta_{tt}$$

Aplicando la transformada Tiempo-Espacio en (y, t) , la ecuación de ondas se transforma en,

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\eta}}_{xx} - k_y^2 \bar{\bar{\eta}} &= -\frac{\omega^2}{c_0^2} \bar{\bar{\eta}} \\ \bar{\bar{\eta}}_{xx} + (k_0^2 - k_y^2) \bar{\bar{\eta}} &= 0, \end{aligned}$$

definiendo $k_x = \sqrt{k_0^2 - k_y^2}$ notar que $k_x = k_x(k_y, \omega)$

Las soluciones generales son

$$\bar{\bar{\eta}} = A_i e^{ik_x x} + A_r e^{-ik_x x}$$

Invirtiendo la transformada se obtiene,

$$\eta(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (A_i e^{ik_x x} + A_r e^{-ik_x x}) e^{i\omega t - ik_y y} dk_y d\omega$$

Para el caso interesante, cuando la profundidad decrece linealmente con x , se aplica la transformada definida en 4.5 a la ecuación 5.5 pero sólo en las variables (y, t) , es decir, la ecuación

$$x\eta_{xx} + \eta_x + x\eta_{yy} - \frac{x_0}{c_0^2} \eta_{tt} = 0$$

se convierte en

$$\begin{aligned} x\bar{\bar{\eta}}_{xx} + \bar{\bar{\eta}}_x - k_y^2 x\bar{\bar{\eta}} + \frac{x_0}{c_0^2} \omega^2 \bar{\bar{\eta}} &= 0 \\ x\bar{\bar{\eta}}_{xx} + \bar{\bar{\eta}}_x + (k_0^2 x_0 - k_y^2 x) \bar{\bar{\eta}} &= 0, \end{aligned}$$

la que se concilia con ecuación (5.6). Las soluciones generales en este caso son entonces,

$$\bar{\bar{\eta}} = B e^{-k_y x} M(\mu, 1, 2k_y x) + A e^{-k_y x} U(\mu, 1, 2k_y x)$$

con $\mu = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k_0^2 x_0}{k_y} \right)$ y donde $M(a, b, z)$, $U(a, b, z)$ son las funciones hipergeométricas confluente de *Kummer* y de *Tricomi* respectivamente.

Dado que U tiene singularidad logarítmica en $x = 0$, la solución acotada en el origen es

$$\bar{\eta} = B e^{-k_y x} M(\mu, 1, 2k_y x)$$

e invirtiendo la transformada,

$$\eta(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B e^{i\omega t - ik_y y} e^{-k_y x} M(\mu, 1, 2k_y x) dk_y d\omega$$

Debe notarse que k_x en el dominio de integración puede tomar valores reales o complejos. Esta particularidad, rompe la simetría del problema, e incluso podrían producirse divergencias exponenciales. Sin embargo, por completitud, se continuará el cálculo y para el caso de la onda solitaria infinitamente extendida, se verá que aún este formalismo es válido, pero para otros casos, se verá una alternativa para evitar este problema.

5.2. Continuidad de las soluciones

Se debe imponer continuidad en $x = x_0$, de las soluciones y sus primeras derivadas. Debido a que se ha utilizado la transformada espacial en la variable y , las soluciones son independientes de ésta, con lo cual, sólo basta aplicar la continuidad a las derivadas en x , con lo cual se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} A_i e^{ik_x x_0} + A_r e^{-ik_x x_0} &= BX(x_0) \\ ik_x (A_i e^{ik_x x_0} - A_r e^{-ik_x x_0}) &= BX'(x_0) \end{aligned}$$

Siendo similar al caso unidimensional, se obtienen entonces los coeficientes

$$\begin{aligned} B(k_y, \omega) &= \frac{2A_i(k_y, \omega) e^{ik_x x_0}}{X(x_0) - \frac{i}{k_x} X'(x_0)} \\ A_r(k_y, \omega) &= \frac{X(x_0) + \frac{i}{k_x} X'(x_0)}{X(x_0) - \frac{i}{k_x} X'(x_0)} A_i(k_y, \omega) e^{2ik_x x_0} \end{aligned}$$

Ahora bien, si se da el valor incidente en $x = x_0$, digamos

$$\bar{\eta}(x_0, k_y, \omega) = \Phi(k_y, \omega)$$

significa que

$$A_i(k_y, \omega) = e^{-ik_x x_0} \Phi(k_y, \omega)$$

Por lo tanto, dado que se tiene la expresión para la solución antitransformada

$$\begin{aligned} \eta(x, y, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B e^{i\omega t - ik_y y} X(x) dk_y d\omega \\ \eta(x, y, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\Phi(k_y, \omega) e^{i\omega t - ik_y y} X(x)}{X(x_0) - \frac{i}{k_x} X'(x_0)} dk_y d\omega \end{aligned} \quad (5.7)$$

5.3. Cálculo del espectro de Fourier de una onda solitaria 2D

Consideremos la solución de la ecuación de Boussinesq 2D, para el caso de una onda solitaria incidente, centrada en x_1 , como antes, pero infinitamente extendida con una incidencia θ , es decir, de B.4

$$\eta(x, y, t) = H \operatorname{sech}^2(\gamma(\sin(\theta)(x - x_1) - \cos(\theta)y + ct))$$

$$\text{con } \gamma = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{3H}{4d}} \text{ y } c = c_0 \sqrt{1 + \frac{H}{d}}.$$

Puesto que $\Phi(k_y, \omega) = \bar{\eta}(x_0, k_y, \omega)$, se debe calcular una transformada de Fourier tiempo-espacio, es decir,

$$\begin{aligned} \Phi(k_y, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H \operatorname{sech}^2(\gamma(\sin(\theta)(x_0 - x_1) - \cos(\theta)y + ct)) e^{-i\omega t + ik_y y} dy dt \\ \Phi(k_y, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_y y} \left(\int_{-\infty}^{\infty} H \operatorname{sech}^2(\gamma(\sin(\theta)(x_0 - x_1) - \cos(\theta)y + ct)) e^{-i\omega t} \right) dt dy \end{aligned}$$

Pero la transformada en t ya fue calculada, salvo traslación, se tiene que calcular la siguiente integral,

$$\Phi(k_y, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_y y} \left(\frac{4d^3}{3} \frac{\pi}{c} e^{ik_c(\sin(\theta)(x_0 - x_1) - \cos(\theta)y)} k_c \operatorname{cosech}(\alpha k_c) \right) dy,$$

$$\text{con } \alpha = \frac{\pi}{2\gamma} \text{ y } k_c = \frac{\omega}{c}.$$

Así

$$\Phi(k_y, \omega) = \left(\frac{4d^3}{3} \frac{\pi}{c} e^{ik_c \sin(\theta)(x_0 - x_1)} k_c \operatorname{cosech}(\alpha k_c) \right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_c \cos(\theta)y + ik_y y} dy$$

$$\Phi(k_y, \omega) = \left(\frac{4d^3}{3} \frac{\pi}{c} e^{ik_c \sin(\theta)(x_0-x_1)} k_c \operatorname{cosech}(\alpha k_c) \right) 2\pi \delta(-\cos(\theta)k_c + k_y), \quad (5.8)$$

donde $\delta(\cdot)$ es la distribución Delta de Dirac.

5.4. Cálculo del máximo *runup* para una onda solitaria 2D

Análogo al caso unidimensional, al considerar 5.7 y 5.8, se tiene

$$\eta(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \left(\frac{4d^3}{3} \frac{\pi}{c} e^{ik_c \sin(\theta)(x_0-x_1)} k_c \operatorname{cosech}(\alpha k_c) \right) 2\pi \delta(k_y - \cos(\theta)k_c) e^{i\omega t - ik_y y} X(x)}{X(x_0) - \frac{i}{k_x} X'(x_0)} dk_y d\omega$$

Recordando, que

$$X(x) = e^{-k_y x} M(\mu, 1, 2k_y x)$$

con $\mu = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k_0^2 x_0}{k_y} \right)$.

Evaluando en $x = 0$, $X(0) = 1$ e integrando en k_y (δ funciona como el funcional de evaluación) se tiene que,

$$\eta(0, y, t) = \frac{4d^3}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{ik_c \sin(\theta)(x-x_1)} k_c \operatorname{cosech}(\alpha k_c)) e^{i\omega t - i \cos(\theta) k_c y}}{X(x_0) - \frac{i}{k_x} X'(x_0)} \frac{d\omega}{c} \quad (5.9)$$

Observar que,

$$k_0 = \frac{\omega}{c_0} = \frac{\omega}{c} \frac{c}{c_0} = \sqrt{1 + \frac{H}{d}} k_c = a k_c$$

Por otra parte, al evaluar en $k_y = \cos(\theta)k_c$, se tiene

$$\begin{aligned} k_x &= \sqrt{k_0^2 - k_y^2} \\ &= \sqrt{a^2 k_c^2 - \cos^2(\theta) k_c^2} \\ &= a \sin(\theta) k_c \end{aligned}$$

Puede notarse que $k_x \in \mathbb{R}$, además

$$X(x) = e^{\cos(\theta)k_c x} M(\mu, 1, -2 \cos(\theta)k_c x)$$

$$\text{con } \mu = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a^2 k_c x_0}{\cos(\theta)} \right).$$

Gracias a la transformación de Kummer (ecuación (C.6)), es equivalente escribir

$$X(x) = e^{-\cos(\theta)k_c x} M(1 - \mu, 1, 2 \cos(\theta)k_c x)$$

Con estas consideraciones, aplicando el cambio de variables $\omega = ck_c$ en la ecuación (5.9), ésta queda

$$\eta(0, y, t) = \frac{4d^3}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_c \operatorname{cosech}(\alpha k_c)}{X(x_0) - \frac{i}{ak_c} X'(x_0)} e^{ik_c(\sin(\theta)(x_0 - x_1) + \cos(\theta)y + ct)} dk_c \quad (5.10)$$

5.4.1. Validación de la generalización

Se puede apreciar que la integral en la ecuación (5.10) es muy similar a la obtenida en el caso unidimensional, por lo que el caso $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ debería recuperar lo ya obtenido en la sección 4.1.4. En efecto, llamando $\lambda = \cos(\theta)$ y usando la expansión en serie de potencias (ver ecuación (C.2)) se tiene que,

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} X(x) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} e^{-\lambda k_c x} M(1 - \mu, 1, 2\lambda k_c x) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \mu)^n (2\lambda k_c x)^n}{1^{(n)} n!} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{n-1} 2\lambda k_c (1 - \mu + j) \right) \frac{x^n}{(n!)^2} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{n-1} 2\lambda k_c \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2 k_c x_0}{\lambda} \right) + j \right) \right) \frac{x^n}{(n!)^2} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{n-1} k_c ((2j + 1)\lambda - a^2 k_c x_0) \right) \frac{x^n}{(n!)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{n-1} (-a^2 k_c^2 x_0) \frac{x^n}{(n!)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (a^2 k_c^2 x_0)^n \frac{x^n}{(n!)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{2ak_c\sqrt{xx_0}}{2} \right)^{2n} \\
 &= J_0(2ak_c\sqrt{xx_0})
 \end{aligned}$$

esto muestra que la función $X(\cdot)$ está fuertemente relacionada con la función de Bessel $J_0(\cdot)$ cuando $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

Puesto que la derivada es un operador lineal y continuo, y la función $X(\cdot)$ es lo suficientemente regular,

$$\begin{aligned}
 \lim_{\lambda \rightarrow 0} X'(x) &= (J_0(2ak_c\sqrt{xx_0}))' \\
 &= -J_1(2ak_c\sqrt{xx_0}) \frac{ak_c\sqrt{x_0}}{\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

Al reemplazar en lo anterior la ecuación (5.10), y evaluando en $x = x_0$, se llega a que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \eta(0, y, t) = \frac{4d^3}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_c \operatorname{cosech}(\alpha k_c)}{J_0(2ak_c x_0) + iJ_1(2ak_c x_0)} e^{ik_c(x_0 - x_1 + ct)} dk_c$$

que es exactamente la misma integral obtenida en la ecuación (4.9), lo que valida la solución en curso (caso bidimensional), al estar generalizando correctamente la solución del caso unidimensional.

Una forma gráfica de ver esto, es que la función $X(\cdot)$ se mantiene muy cerca de la función $J_0(\cdot)$. La figura 5.2 muestra la comparación de ambas funciones.

5.4.2. Sobre los ceros de la función $X(\cdot) \pm \frac{i}{k_x} X'(\cdot)$

Para seguir en la dirección de generalizar el problema unidimensional al bidimensional, debe realizarse una integración en el plano complejo, por lo que es de interés conocer si el denominador del integrando de (5.10) posee ceros, ya que contribuyen como polos tal y como Synolakis (1988) lo hizo con la función $J_0(\cdot) \pm iJ_1(\cdot)$.

Un cálculo directo, permite ver que,

$$X'(x_0) = \lambda k_c e^{-\lambda k_c x_0} [M(1 - \mu, 1, 2\lambda k_c x_0) - 2\mu M(1 - \mu, 2, 2\lambda k_c x_0)]$$

Para estudiar la integral de *runup*, se debe pasar al plano complejo, así, cambiando k_c por z

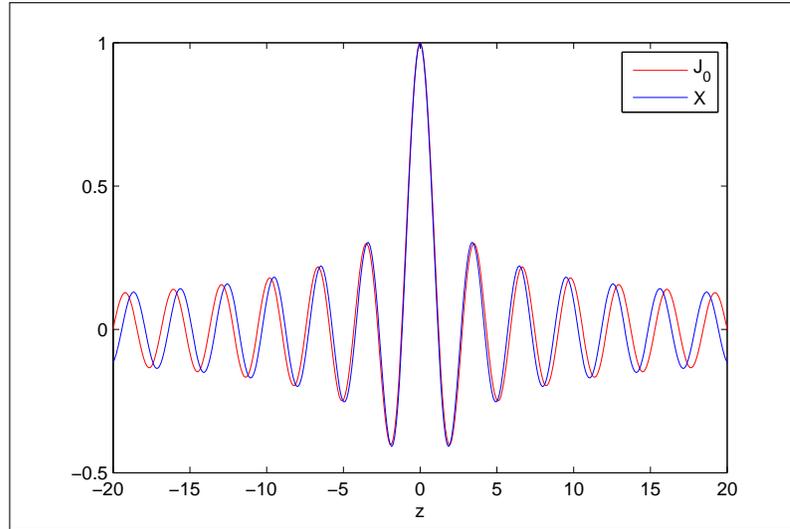


Figura 5.2: Comparación entre las funciones $J_0(2az)$, en rojo, y en azul, $X = e^{-z} M\left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2}{\lambda} z\right), 1, 2\lambda z\right)$ para $\lambda = 0.3$, $H = 10$ m, y $d = 4000$ m.

Observar que para n fijo

$$(1 - \mu)^{(n)} = \prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1 - \frac{a^2}{\lambda} z x_0}{2} + j \right)$$

Para z grande

$$(1 - \mu)^{(n)} = \left(-\frac{a^2}{2\lambda} z x_0 \right)^n + O\left(\left(-\frac{a^2}{2\lambda} z x_0 \right)^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (j + 1/2) \right)$$

$$(1 - \mu)^{(n)} = \left(-\frac{a^2}{2\lambda} z x_0 \right)^n + O\left(\frac{n^2}{2} \left(-\frac{a^2}{2\lambda} z x_0 \right)^{n-1} \right),$$

donde $O(g)$ representa el orden de g . lo que permite escribir la función M de Kummer como,

$$M(1 - \mu, 1, 2\lambda z x_0) = J_0(2az x_0) (1 + O(2\lambda z x_0))$$

$$M(1 - \mu, 2, 2\lambda z x_0) = \frac{1}{ak_c x_0} J_1(2az x_0) (1 + O(2\lambda/a))$$

además,

$$e^{-\lambda z x_0} = O\left(\frac{1}{\lambda z x_0} \right)$$

Por otra parte, para z pequeño, es fácil ver que

$$\begin{aligned} M(1 - \mu, 1, 2\lambda z x_0) &= 1 + O(\lambda z x_0) \\ M(1 - \mu, 2, 2\lambda z x_0) &= 1 + O(\lambda z x_0) \end{aligned}$$

y recordando que $J_\nu(\cdot)$ tiene expansión en serie de potencias,

$$J_\nu(w) = \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} \left(\frac{w}{2}\right)^\nu - O\left(\frac{1}{\Gamma(\nu + 2)} \left(\frac{w}{2}\right)^{2+\nu}\right)$$

Se definen las funciones,

$$\begin{aligned} f(z) &= J_0(2azx_0) - iJ_1(2azx_0) \\ g(z) &= X(x_0) + \frac{i}{\lambda z} X'(x_0) \end{aligned}$$

entonces, para z grande, el módulo de $f(z) - g(z)$ se puede acotar, en efecto,

$$|f(z) - g(z)| = |f(z)O(|z|^{-1})| < |f(z)|$$

y lo mismo se deduce para z pequeño.

En particular la desigualdad anterior es válida en C_R , el semicirculo superior de radio R . En virtud del teorema de Rouché (F.2), las funciones f y g tienen el mismo número de ceros en C_R y haciendo $R \rightarrow +\infty$, tienen el mismo número de ceros en el semiplano superior. Debido a que f no tiene ceros en el semiplano superior, se concluye que la función g tampoco tiene ceros en el semiplano superior, y por tanto no contribuye con polos a la integral de *runup*.

Si se definen

$$\begin{aligned} f_2(z) &= J_0(2azx_0) + iJ_1(2azx_0) \\ g_2(z) &= X(x_0) - \frac{i}{\lambda z} X'(x_0) \end{aligned}$$

La misma conclusión que antes se puede obtener en el semi plano inferior, puesto que $\overline{f_2}(z) = f(\overline{z})$ y $\overline{g_2}(z) = g(\overline{z})$, es decir, os ceros quedan reflejados.

El resultado anterior puede interpretarse de la siguiente manera: debido a que no es posible establecer desigualdades precisas a causa de la complejidad de las funciones, se sabe que ambas funciones se mantienen a una distancia cada vez más pequeña (de hecho, ambas tienen la misma expansión asintótica), por lo que, gracias al teorema de Rouché, ambas deberían tener aproximadamente el mismo número de ceros, y más aún, debido a su similitud, y como ya se ha probado que la función $f(z)$ no tiene ceros en el semi plano superior (Synolakis, 1988), la función $g(z)$, de tener ceros en el semi plano superior, no puede tener demasiados, y sus contribuciones como polos en el denominador de la integral de *runup*, deberían ser despreciables, y es por lo cual, de ahora en adelante, será tratada como si fuera una función entera en el semi plano superior.

5.4.3. Cálculo del *runup*

Retomando el desarrollo desde la ecuación (5.10), se procede a realizar una integración en el plano complejo de la misma forma que en el caso unidimensional, pero en vista que el denominador no tiene ceros en el semi plano inferior, los únicos polos que contribuyen son los del numerador, así, siguiendo el mismo procedimiento, se puede asegurar la convergencia cuando $\delta - m > 0$, donde en este caso, $m = \sin(\theta)(x_0 - x_1) - a \cos(\theta)y + ct$ y $\delta = 2ax_0$.

Aplicando la aproximación asintótica, se obtiene

$$\begin{aligned}\eta(0, y, t) &= 8H\sqrt{\pi\gamma\delta} \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\frac{3}{2}}(-1)^{n+1} (e^{-2\gamma(\delta-m)})^n \\ \eta(0, y, t) &= 8H\sqrt{\pi\frac{1}{d}\sqrt{\frac{3H}{4d}}2x_0\sqrt{1+\frac{H}{d}}} \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\frac{3}{2}}(-1)^{n+1} (e^{-2\gamma(\delta-m)})^n\end{aligned}$$

pero la serie es la misma obtenida en el caso unidimensional, lo que define el tiempo máximo

$$t_{max} = \frac{1}{c} \left(\sin(\theta)(x_1 - x_0) + 2ax_0 + a \cos(\theta)y - \frac{0,366}{\gamma} \right)$$

y evaluando $\eta(0, y, t)$ en dicho tiempo, se obtiene el *runup* de acuerdo a la fórmula

$$\frac{\mathcal{R}(y)}{d} = 2,831 \left(\frac{H}{d} \right)^{\frac{5}{4}} \left(1 + \frac{H}{d} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\cot(\beta)}$$

La fórmula anterior muestra que el *runup* de una onda solitaria 2D, infinitamente extendida es el mismo que en el caso unidimensional a lo largo de toda la costa. Este resultado

es consistente con la intuición, ya que al tratarse de una teoría lineal, lo único que es dependiente de la dirección y , es el tiempo máximo, debido a la oblicuidad de la incidencia, es decir, aunque en algunas zonas se tarde más, eventualmente la ola llegará con la misma altura máxima. Siendo esto último una situación poco realista, se torna necesario introducir la finitud de la onda inicial.

5.5. Solución Particular

Debido a la enorme dificultad presente en el problema, al tratar de resolver en forma cerrada las ecuaciones, aún en el caso lineal, se reducirá a resolverlas en el caso particular de soluciones armónicas tanto en t como en y .

Para esto, introduciremos la variable s de la siguiente forma (Carrier & Noiseux, 1983):

$$s = y - \sec(\theta)c_0t$$

donde $\theta \in [0, \pi]$, representa el ángulo de incidencia de las ondas (incidencia normal con $\theta = \frac{\pi}{2}$), tal como se aprecia en la figura 5.3.

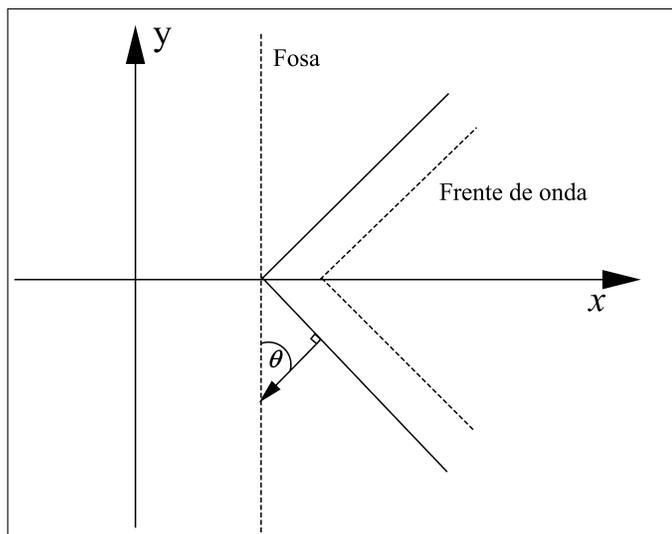


Figura 5.3: Geometría básica para la solución particular.

En el caso $x > x_0$, la ecuación obtenida era,

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = \frac{1}{c_0^2} \eta_{tt}$$

utilizando la variable s , la ecuación anterior se reduce a,

$$\begin{aligned}\eta_{xx} + \eta_{ss} &= \sec^2(\theta)\eta_{ss} \\ \eta_{xx} - \tan^2(\theta)\eta_{ss} &= 0\end{aligned}$$

luego, aplicando la transformada de Fourier (se utiliza la transformada espacial)

$$\widehat{\eta}_{xx} + \tan^2(\theta)k_s^2\widehat{\eta} = 0.$$

Las soluciones generales son entonces

$$\widehat{\eta} = A_i e^{i \tan(\theta)k_s x} + A_r e^{-i \tan(\theta)k_s x}$$

Para el caso $0 < x < x_0$, la ecuación obtenida era

$$x\eta_{xx} + \eta_x + x\eta_{yy} - \frac{x_0}{c_0^2}\eta_{tt} = 0$$

Reemplazando la variable s , la ecuación anterior se reduce a,

$$\begin{aligned}x\eta_{xx} + \eta_x + x\eta_{ss} - x_0 \sec^2(\theta)\eta_{ss} &= 0 \\ x\eta_{xx} + \eta_x + (x - x_0 \sec^2(\theta))\eta_{ss} &= 0\end{aligned}$$

Aplicando la transformada de Fourier en s ,

$$\begin{aligned}x\widehat{\eta}_{xx} + \widehat{\eta}_x - (x - x_0 \sec^2(\theta))k_s^2\widehat{\eta} &= 0 \\ x\widehat{\eta}_{xx} + \widehat{\eta}_x + (k_s^2 \sec^2(\theta)x_0 - k_s^2 x)\widehat{\eta} &= 0\end{aligned}$$

En vista de la ecuación diferencial (D.1), la solución finita cuando $x \rightarrow 0^+$ en este caso es,

$$\widehat{\eta} = B e^{-k_s x} M(\mu, 1, 2k_s x)$$

con $\mu = \mu(k_s) = \frac{1}{2}(1 - k_s \sec^2(\theta)x_0)$. Notar que $\mu(k_s) + \mu(-k_s) = 1$.

Notar que, al igual que antes, debido a las propiedades de la función de Kummer,

$$\begin{aligned}\widehat{\eta}_x &= Bk_s e^{-k_s x} [M(\mu, 1, 2k_s x) - (1 + k_s \sec^2(\theta)x_0)M(\mu, 2, 2k_s x)] \\ \widehat{\eta}_x &= Bk_s e^{-k_s x} [M(\mu, 1, 2k_s x) - 2\mu(-k_s)M(\mu, 2, 2k_s x)]\end{aligned}$$

Aplicando las condiciones de continuidad en $x = x_0$, nuevamente se obtiene

$$\begin{aligned}A_i e^{i \tan(\theta)k_s x_0} + A_r e^{-i \tan(\theta)k_s x_0} &= B e^{-k_s x_0} M(\mu, 1, 2k_s x_0) \\ i k_s \tan(\theta)(A_i e^{i \tan(\theta)k_s x_0} - A_r e^{-i \tan(\theta)k_s x_0}) &= B k_s e^{-k_s x_0} [M(\mu, 1, 2k_s x_0) - \\ &\quad (1 + k_s \sec^2(\theta)x_0)M(\mu, 2, 2k_s x_0)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_i e^{i \tan(\theta)k_s x_0} + A_r e^{-i \tan(\theta)k_s x_0} &= B e^{-k_s x_0} M(\mu, 1, 2k_s x_0) \\ A_i e^{i \tan(\theta)k_s x_0} - A_r e^{-i \tan(\theta)k_s x_0} &= -i B \cot(\theta) e^{-k_s x_0} [M(\mu, 1, 2k_s x_0) - \\ &\quad (1 + k_s \sec^2(\theta)x_0)M(\mu, 2, 2k_s x_0)]\end{aligned}$$

Por simplicidad, se definen las funciones $M_0(\cdot)$ y $N_0(\cdot)$ como,

$$\begin{aligned}M_0(k_s) &= e^{-k_s x_0} M(\mu, 1, 2k_s x_0) \\ N_0(k_s) &= \cot(\theta) e^{-k_s x_0} [M(\mu, 1, 2k_s x_0) - 2\mu(-k_s)M(\mu, 2, 2k_s x_0)]\end{aligned}$$

Las que presentan paridad como funciones de k_s , :

$$\begin{aligned}M_0(-k_s) &= e^{k_s x_0} M(\mu(-k_s), 1, -2k_s x_0) && \text{(Usando la transformación de Kummer)} \\ &= e^{k_s x_0} e^{-2k_s x_0} M(1 - \mu(-k_s), 1, 2k_s x_0) \\ &= e^{-k_s x_0} M(\mu(k_s), 1, 2k_s x_0) \\ &= M_0(k_s)\end{aligned}$$

luego, $M_0(\cdot)$ es par, y en el caso de $N_0(\cdot)$

$$\begin{aligned}N_0(-k_s) &= \cot(\theta) e^{k_s x_0} [e^{-2k_s x_0} M(\mu(-k_s), 1, -2k_s x_0) - 2\mu(k_s) e^{-2k_s x_0} M(\mu(-k_s), 2, -2k_s x_0)] \\ &= \cot(\theta) e^{-k_s x_0} [M(1 - \mu(-k_s), 1, 2k_s x_0) - 2\mu(k_s) M(2 - \mu(-k_s), 2, 2k_s x_0)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cot(\theta)e^{-k_s x_0} [M(\mu(k_s), 1, 2k_s x_0) - 2\mu(k_s)M(1 + \mu(k_s), 2, 2k_s x_0)] \\
&= \cot(\theta)e^{-k_s x_0} [M(\mu(k_s), 1, 2k_s x_0) - 2(\mu(k_s) - 1)M(\mu(k_s), 2, 2k_s x_0) \\
&\quad - 2M(\mu(k_s), 1, 2k_s x_0)] \quad (\text{Usando propiedades de recurrencia}) \\
&= -\cot(\theta)e^{-k_s x_0} [M(\mu(k_s), 1, 2k_s x_0) - 2\mu(-k_s)M(\mu(k_s), 2, 2k_s x_0)] \\
&= -N_0(k_s)
\end{aligned}$$

se concluye que es impar.

Así, el sistema de ecuaciones en términos de M_0, N_0 es,

$$\begin{aligned}
A_i e^{i \tan(\theta) k_s x_0} + A_r e^{-i \tan(\theta) k_s x_0} &= B M_0(k_s) \\
A_i e^{i \tan(\theta) k_s x_0} - A_r e^{-i \tan(\theta) k_s x_0} &= -i B N_0(k_s)
\end{aligned}$$

Despejando los coeficientes

$$\begin{aligned}
A_r &= A_i e^{2i k_s x_0 \tan(\theta)} \frac{M_0(k_s) + i N_0(k_s)}{M_0(k_s) - i N_0(k_s)} \\
B &= \frac{2e^{i k_s x_0 \tan(\theta)}}{M_0(k_s) - i N_0(k_s)} A_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_r &= A_i e^{2i(k_s x_0 \tan(\theta) + \arg(M_0(k_s) + i N_0(k_s)))} \\
B &= \frac{2e^{i k_s x_0 \tan(\theta)}}{M_0(k_s) - i N_0(k_s)} A_i
\end{aligned}$$

y como es de esperar, el coeficiente reflejado A_r mantiene la amplitud de la onda incidente y sólo presenta un cambio de fase.

Suponiendo conocido el coeficiente incidente en $x = x_0$ en función de k_s ,

$$\begin{aligned}
A_i e^{i \tan(\theta) k_s x_0} &= \Phi(k_s) \\
A_i &= \Phi(k_s) e^{-i \tan(\theta) k_s x_0}
\end{aligned}$$

se obtiene fácilmente el coeficiente B .

Invirtiendo la transformada de Fourier, una vez reemplazado B , se tiene,

$$\eta(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(k_s) \frac{2e^{-k_s x} M(\mu, 1, 2k_s x)}{M_0(k_s) - i N_0(k_s)} e^{-i k_s s} dk_s$$

Es posible probar que la integral anterior es real. En efecto

$$\begin{aligned}\eta(x, y, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(k_s) \frac{e^{-k_s x} M(\mu, 1, 2k_s x)}{M_0(k_s) - iN_0(k_s)} e^{-ik_s s} dk_s \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Phi(k_s) \frac{e^{-k_s x} M(\mu, 1, 2k_s x)}{M_0(k_s) - iN_0(k_s)} e^{-ik_s s} dk_s + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \Phi(k_s) \frac{e^{-k_s x} M(\mu, 1, 2k_s x)}{M_0(k_s) - iN_0(k_s)} e^{-ik_s s} dk_s\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $k_s = -k_s$ en la segunda integral

$$\eta(x, y, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Phi(k_s) \frac{e^{-k_s x} M(\mu, 1, 2k_s x)}{M_0(k_s) - iN_0(k_s)} e^{-ik_s s} dk_s + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Phi(-k_s) \frac{e^{k_s x} M(\mu(-k_s), 1, -2k_s x)}{M_0(-k_s) - iN_0(-k_s)} e^{ik_s s} dk_s$$

Por la transformación de Kummer

$$\eta(x, y, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Phi(k_s) \frac{e^{-k_s x} M(\mu, 1, 2k_s x)}{M_0(k_s) - iN_0(k_s)} e^{-ik_s s} dk_s + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Phi(-k_s) \frac{e^{-k_s x} M(\mu(k_s), 1, 2k_s x)}{M_0(k_s) + iN_0(k_s)} e^{ik_s s} dk_s$$

Notando que $\Phi(k_s)$ es la transformada de Fourier de alguna función real, entonces $\Phi(-k_s) = \overline{\Phi(k_s)}$, donde $\overline{(\)}$ denota el complejo conjugado. Por lo tanto,

$$\eta(x, y, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Phi(k_s) \frac{e^{-k_s x} M(\mu, 1, 2k_s x)}{M_0(k_s) - iN_0(k_s)} e^{-ik_s s} dk_s + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \overline{\Phi(k_s) \frac{e^{-k_s x} M(\mu(k_s), 1, 2k_s x)}{M_0(k_s) - iN_0(k_s)} e^{-ik_s s} dk_s}$$

Como $\forall z \in \mathbb{C}, z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$, se obtiene,

$$\eta(x, y, t) = \frac{2}{\pi} \text{Re} \int_0^{+\infty} \Phi(k_s) \frac{e^{-k_s x} M(\mu, 1, 2k_s x)}{M_0(k_s) - iN_0(k_s)} e^{-ik_s s} dk_s$$

Evaluando en $x = 0$, se obtiene la integral que es de interés para este problema

$$\eta(0, y, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(k_s)}{M_0(k_s) - iN_0(k_s)} e^{-ik_s s} dk_s$$

Como ya se vio antes, una ola inicial que es infinitamente extendida en la dirección y sin presentar variación de amplitud a lo largo de una dirección, no refleja una distribución

apreciable, de hecho, por ser una teoría lineal, llega la misma altura máxima en toda la costa. Con el fin de visualizar una distribución de *runup* realista, se considerará una onda inicial tipo solitón, pero con decaimiento en la dirección normal a la dirección de propagación, tal como se aprecia en la realidad.

Para considerar un solitón que se propaga a velocidad c , se toma,

$$\eta(x, y, t) = H \operatorname{sech}^2(\gamma(\sin(\theta)(x - x_1) - a \cos(\theta)s))f(p) \quad (5.11)$$

con $\gamma = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{3H}{4d}}$, $c = ac_0 = \sqrt{1 + \frac{H}{d}}c_0$, $p = \cos(\theta)(x - x_1) + a \sin(\theta)y$ y donde $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ tal que $\lim_{|p| \rightarrow \infty} f(p) = 0$.

Una elección de la función f es, por ejemplo, un modelo gaussiano,

$$f(p) = e^{-\left(\frac{2p}{L}\right)^2}$$

siendo L un parámetro que controla el tamaño transversal de la ola (por ejemplo, el largo de una falla). La figura 5.4 muestra la ola inicial a ser propagada en el caso bidimensional, según el modelo anterior (decaimiento gaussiano en la dirección normal a la dirección de propagación)

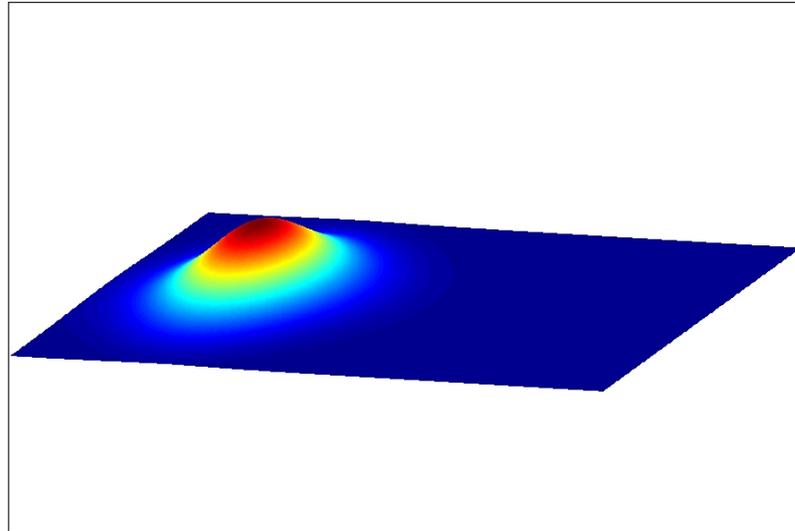


Figura 5.4: Ejemplo de forma inicial de la ola.

Ahora se debe calcular $\Phi(k_s)$, para ello, evaluando $\eta(x, y, t)$ en $x = x_0$,

$$\eta(x_0, y, t) = H \operatorname{sech}^2(\gamma(\sin(\theta)(x_0 - x_1) - a \cos(\theta)s))f(p_0)$$

donde $p_0 = \cos(\theta)(x_0 - x_1) + a \sin(\theta)y$.

Puesto que esta transformada ya fue calculada (salvo una constante de cambio de escala), se obtiene que,

$$\Phi(k_s) = f(p_0) \frac{4d^3}{3} \frac{\pi \sec^2(\theta)}{a^2} k_s \operatorname{cosech} \left(\frac{\alpha}{a} \sec(\theta) k_s \right) e^{ik_s \left(\frac{\tan(\theta)}{a} (x_0 - x_1) \right)}$$

Con esto, la integral de *runup* queda,

$$\eta(0, y, t) = f(p_0) \frac{4d^3}{3} \frac{\sec^2(\theta)}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_s \operatorname{cosech} \left(\frac{\alpha}{a} \sec(\theta) k_s \right)}{M_0(k_s) - iN_0(k_s)} e^{ik_s \left(-s + \frac{\tan(\theta)}{a} (x_0 - x_1) \right)} dk_s$$

Como ya se probó, la función del denominador sólo posee ceros en el semiespacio superior del plano complejo, con lo cual, los únicos polos, son los del numerador, así, bajo las mismas condiciones de convergencia dadas en el caso anterior, se puede escribir

$$\begin{aligned} \eta(0, y, t) &= -f(p_0) \frac{4d^3}{3} \frac{\sec^2(\theta)}{a^2} 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a \cos(\theta)}{\alpha} \frac{k_n}{M_0(k_n) - iN_0(k_n)} e^{ik_n \left(-s + \frac{\tan(\theta)}{a} (x_0 - x_1) \right)} \\ \eta(0, y, t) &= -f(p_0) \frac{4d^3}{3} \frac{\sec(\theta)}{\alpha a} 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n k_n}{M_0(k_n) - iN_0(k_n)} e^{ik_n \left(-s + \frac{\tan(\theta)}{a} (x_0 - x_1) \right)} \end{aligned}$$

donde $k_n = -\frac{a}{\alpha} \cos(\theta) n\pi i$, $n \in \mathbb{N}$.

Así

$$\begin{aligned} \eta(0, y, t) &= -f(p_0) \frac{8d^3}{3} \frac{\pi^2}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n+1}}{M_0(k_n) - iN_0(k_n)} e^{ik_n \left(-s + \frac{\tan(\theta)}{a} (x_0 - x_1) \right)} \\ \eta(0, y, t) &= -8Hf(p_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n+1}}{M_0(k_n) - iN_0(k_n)} e^{ik_n \left(-s + \frac{\tan(\theta)}{a} (x_0 - x_1) \right)} \end{aligned}$$

Para seguir evaluando la serie anterior, se utilizará una expresión asintótica de la función de Kummer, dada por la ecuación (C.7).

Con $b = 1$, $a = \frac{1}{2}(1 - k_n x_0 \sec^2(\theta))$ y $z = 2k_n x_0$, se ve que

$$2(b - 2a) = \sec^2(\theta)z > z \text{ (en módulo)}$$

con lo cual, es directo encontrar que,

$$\phi = \theta$$

y entonces

$$\begin{aligned} M(\mu(k_n), 1, 2k_n x_0) &= \Gamma(1) e^{k_n x_0} [k_n x_0 \pi \tan(\theta)]^{-\frac{1}{2}} \cdot \\ &\quad \left\{ \sin \left(\frac{1}{2} (1 - k_n x_0 \sec^2(\theta)) \pi + k_n x_0 (\theta \sec^2(\theta) - \tan(\theta)) + \frac{\pi}{4} \right) + O(|k_n|^{-1}) \right\} \\ &= e^{k_n x_0} [k_n x_0 \pi \tan(\theta)]^{-\frac{1}{2}} \cdot \\ &\quad \left\{ \cos \left(k_n x_0 \left(\left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \sec^2(\theta) + \tan(\theta) \right) - \frac{\pi}{4} \right) \right\} + O(|k_n|^{-1}) \end{aligned}$$

Nótese que la aproximación asintótica toma mayor validez para ángulos cercanos a $\theta = 90^\circ$.

Definiendo $v(\theta) = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \sec^2(\theta) + \tan(\theta)$, se obtiene

$$M(k_n) = [k_n x_0 \pi \tan(\theta)]^{-\frac{1}{2}} \cos \left(k_n x_0 v(\theta) - \frac{\pi}{4} \right) + O(|k_n|^{-1})$$

En el caso en que $b = 2$, $a = \frac{1}{2}(1 - k_n x_0 \sec^2(\theta))$ y $z = 2k_n x_0$, sólo se puede decir que

$$\begin{aligned} k_n x_0 \sec^2(\phi) &= 1 + k_n x_0 \sec^2(\theta) \\ \sec^2(\phi) &= \sec^2(\theta) + \frac{1}{k_n x_0} \end{aligned}$$

Reemplazando

$$\begin{aligned} M(\mu(k_n), 2, z) &= \Gamma(2) e^{k_n x_0} [k_n x_0 \sec(\phi)]^{-1} [\pi k_n x_0 \tan(\phi)]^{-\frac{1}{2}} \cdot \\ &\quad \left\{ \sin \left(\frac{1}{2} (1 - k_n x_0 \sec^2(\theta)) \pi + k_n x_0 (\phi \sec^2(\phi) - \tan(\phi)) + \frac{\pi}{4} \right) + O(|k_n|^{-1}) \right\} \\ M(\mu(k_n), 2, z) &= e^{k_n x_0} [k_n x_0 \sec(\phi)]^{-1} [\pi k_n x_0 \tan(\phi)]^{-\frac{1}{2}} \cdot \\ &\quad \left\{ \sin \left(\frac{1}{2} (1 - k_n x_0 \sec^2(\theta)) \pi + k_n x_0 \left(\phi \left(\sec^2(\theta) + \frac{1}{k_n x_0} \right) - \tan(\phi) \right) + \frac{\pi}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. + O(|k_n|^{-1}) \right\} \\ M(\mu(k_n), 2, z) &= e^{k_n x_0} [k_n x_0 \sec(\phi)]^{-1} [\pi k_n x_0 \tan(\phi)]^{-\frac{1}{2}} \cdot \\ &\quad \left\{ \cos \left(k_n x_0 \left(\phi \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) \sec^2(\theta) + \tan(\phi) \right) - \frac{\pi}{4} - \phi \right) + O(|k_n|^{-1}) \right\} \\ M(\mu(k_n), 2, z) &= e^{k_n x_0} [k_n x_0 \sec(\phi)]^{-1} [\pi k_n x_0 \tan(\phi)]^{-\frac{1}{2}} \cdot \\ &\quad \left\{ \cos \left(k_n x_0 \left(\phi \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) \sec^2(\theta) + \tan(\phi) \right) - \frac{\pi}{4} \right) \cos(\phi) + \right. \\ &\quad \left. \sin \left(k_n x_0 \left(\phi \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) \sec^2(\theta) + \tan(\phi) \right) - \frac{\pi}{4} \right) \sin(\phi) + O(|k_n|^{-1}) \right\} \end{aligned}$$

Dado que en $O(|k_n|^{-1})$, $\phi = \theta$, se tiene análogamente que

$$N(k_n) = -[k_n x_0 \pi \tan(\theta)]^{-\frac{1}{2}} \sin\left(k_n x_0 v(\theta) - \frac{\pi}{4}\right) + O(|k_n|^{-1})$$

Esto permite escribir en conjunto que

$$M(k_n) - iN(k_n) = [k_n x_0 \pi \tan(\theta)]^{-\frac{1}{2}} e^{ik_n x_0 v(\theta) - \frac{i\pi}{4}} + O(|k_n|^{-1})$$

Debe observarse nuevamente que este kernel tiene la misma expresión asintótica que el obtenido en el caso unidimensional, salvo constantes. Esto nuevamente sugiere el hecho que este kernel también es entero en el semiplano correspondiente (puede tratarse una demostración análoga a la dada por Synolakis (PhD Thesis, 1986).

Regresando al cálculo de η , usando esta aproximación asintótica

$$\eta(0, y, t) = -8Hf(p_0) \sum_{n=1}^{\infty} [k_n x_0 \pi \tan(\theta)]^{\frac{1}{2}} e^{-ik_n x_0 v(\theta) + \frac{i\pi}{4}} n(-1)^{n+1} e^{ik_n(-s + \frac{\tan(\theta)}{a}(x_0 - x_1))}$$

Haciendo todos los reemplazos correspondientes, la expresión anterior se puede escribir como

$$\eta(0, y, t) = 8\sqrt{\pi\sqrt{3}}Hf(p_0) \left(\frac{H}{d}\right)^{\frac{1}{4}} \left(1 + \frac{H}{d}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\cot(\beta) \sin(\theta)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{3}{2}} (-1)^{n+1} \chi^n$$

con

$$\chi = e^{2a\gamma \cos(\theta)(-s + \frac{\tan(\theta)}{a}(x_0 - x_1) - [(\frac{\pi}{2} - \theta) \sec^2(\theta) + \tan(\theta)]x_0)}$$

Puesto que la serie anterior es la misma que apareció en el caso unidimensional, es posible definir el tiempo máximo, gracias a la variable s , y el valor del *runup*

$$\bullet t_{max}(y) = \frac{1}{c} \left(a \cos(\theta)y + \sin(\theta)(x_1 - x_0) + \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \sec(\theta) + \sin(\theta) \right] ax_0 - \frac{0,366}{\gamma} \right) \quad (5.12)$$

$$\bullet \mathcal{R}(y) = 2,831Hf(\cos(\theta)(x_0 - x_1) + a \sin(\theta)y) \left(\frac{H}{d}\right)^{\frac{1}{4}} \left(1 + \frac{H}{d}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\cot(\beta) \sin(\theta)} \quad (5.13)$$

O en la forma de “Ley de *runup*”

$$\frac{\mathcal{R}(y)}{d} = 2,831 f(\cos(\theta)(x_0 - x_1) + a \sin(\theta)y) \left(\frac{H}{d}\right)^{\frac{5}{4}} \left(1 + \frac{H}{d}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\cot(\beta) \sin(\theta)}$$

Si se define,

$$\mathcal{R}_0 = 2,831 H \left(\frac{H}{d}\right)^{\frac{1}{4}} \left(1 + \frac{H}{d}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\cot(\beta)},$$

que no es más que el *runup* obtenido en la parte unidimensional, entonces

$$\mathcal{R}(y) = f(\cos(\theta)(x_0 - x_1) + a \sin(\theta)y) \sqrt{\sin(\theta)} \mathcal{R}_0$$

Es interesante notar que en el caso de incidencia normal ($\theta = \frac{\pi}{2}$), las expresiones anteriores (5.12), (5.13) se reducen a

$$t_{max}(y) = \frac{1}{c} \left(x_1 + (2a - 1)x_0 - \frac{0,366}{\gamma} \right)$$

$$\mathcal{R}(y) = f(y) \mathcal{R}_0$$

Es decir, que la forma del *runup* es la misma que la forma inicial amplificada por el *runup* predicho por el estudio unidimensional, y el tiempo máximo, no depende de y , con lo cual, según esta teoría, con incidencia normal, el *runup* se alcanza en toda la costa al mismo tiempo.

Es claro también que cuando la ola viaja en forma paralela a la costa ($\theta = 0, \pi$), no existe ningún *runup*, pues esta ola no toca la playa, lo que es consistente con las fórmulas, pues

$$\mathcal{R}(y) = 0$$

Las figuras 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, muestran la distribución de *runup* para distintos valores del ángulo de incidencia, mientras que la figura 5.9 muestra la variación del *runup*, en ciertos puntos de la costa, en función del ángulo de incidencia.

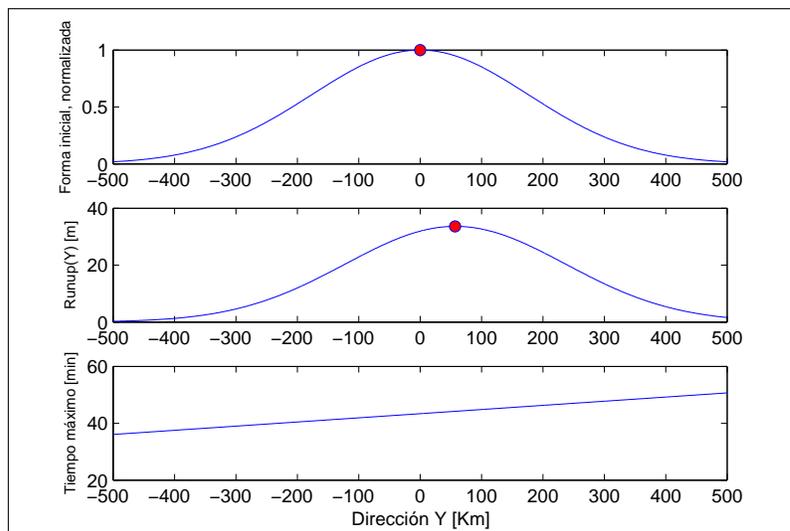


Figura 5.5: *Runup* predicho por esta teoría, para $d = 4 \text{ km}$, $\theta = 80^\circ$, $\beta = 2^\circ$, $H = 10 \text{ m}$, $x_1 = 441 \text{ km}$ y con f gaussiana como en el ejemplo anterior con $L = 500 \text{ km}$.

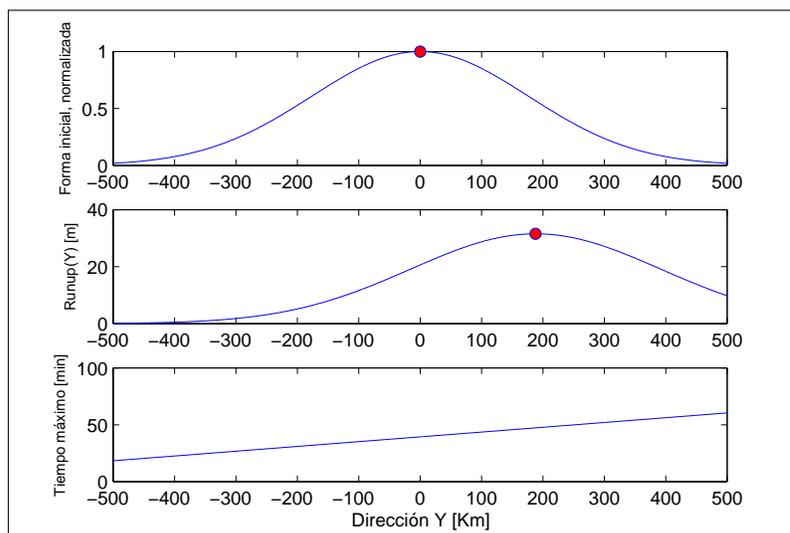


Figura 5.6: *Runup* predicho por esta teoría, para $d = 4 \text{ km}$, $\theta = 60^\circ$, $\beta = 2^\circ$, $H = 10 \text{ m}$, $x_1 = 441 \text{ km}$ y con f gaussiana como en el ejemplo anterior con $L = 500 \text{ km}$.

Se puede observar que la incidencia juega una suerte de “directividad” (tal y como los patrones de radiación indican la forma en que las ondas sísmicas radian su energía). Queda a evidencia entonces, según la fórmula 5.13 que el *runup* es máximo en la incidencia normal, y decrece como $\sqrt{\sin(\theta)}$ para otros ángulos.

Okal & Synolakis (2004) propusieron una distribución $\mathcal{R}(y)$ empírica. Por otra parte, el desarrollo teórico realizado ha permitido encontrar una expresión analítica dada por la ecuación (5.13) con un respaldo físico-matemático.

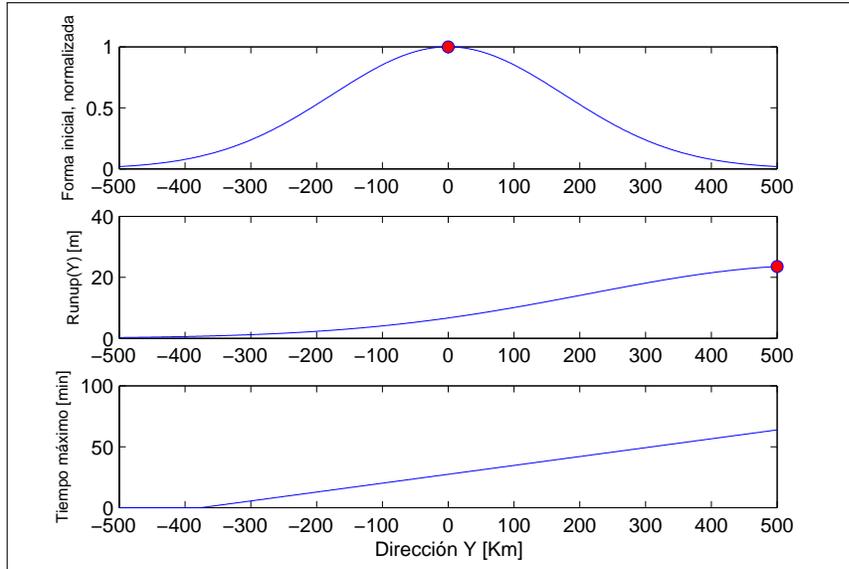


Figura 5.7: *Runup* predicho por esta teoría, para $d = 4 \text{ km}$, $\theta = 30^\circ$, $\beta = 2^\circ$, $H = 10 \text{ m}$, $x_1 = 441 \text{ km}$ y con f gaussiana como en el ejemplo anterior con $L = 500 \text{ km}$.

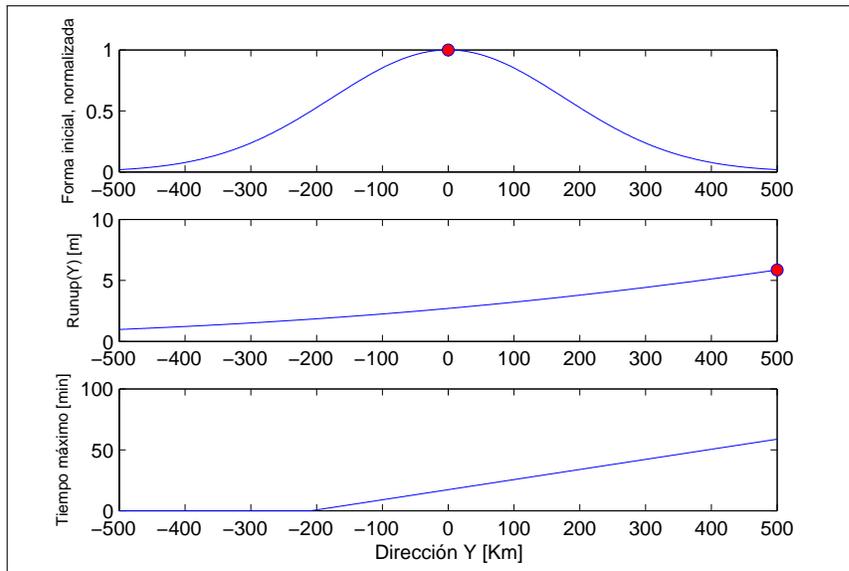


Figura 5.8: *Runup* predicho por esta teoría, para $d = 4 \text{ km}$, $\theta = 10^\circ$, $\beta = 2^\circ$, $H = 10 \text{ m}$, $x_1 = 441 \text{ km}$ y con f gaussiana como en el ejemplo anterior con $L = 500 \text{ km}$.

Todo el desarrollo anterior ha sido pensando en una onda solitaria como onda inicial. Debido a que no existen las *N-waves* 2D, (no al menos como la solución exacta de alguna ecuación físico-matemática) es posible proponerlas al igual como se hizo con la onda solitaria con decaimiento transversal, y en ese sentido, se dispondría de una onda inicial tipo *N-wave*. Según la metodología utilizada, el resultado sería el mismo que el de la ecuación 5.13, salvo que el valor de \mathcal{R}_0 estará dado por el *runup* de una *N-wave* unidimensional en vez del de una

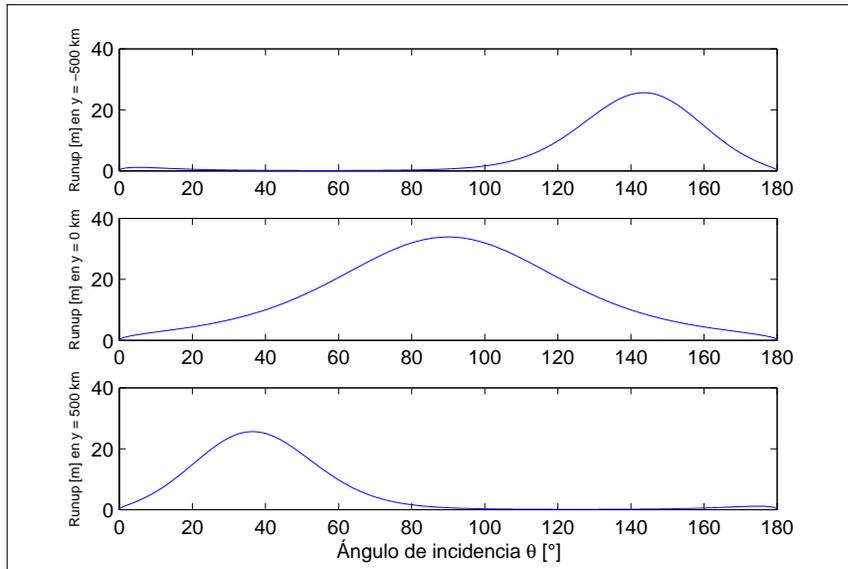


Figura 5.9: Variación del *runup* según el ángulo de incidencia para tres posiciones en la playa, para $d = 4 \text{ km}$, $\beta = 2^\circ$, $H = 10 \text{ m}$, $x_1 = 441 \text{ km}$ y con f gaussiana como antes con $L = 500 \text{ km}$.

onda solitaria.

Capítulo 6

Comparación numérica y con datos reales

En este capítulo se procederá a validar los cálculos teóricos analíticos con ayuda de modelos de simulación numérica. También se va a comparar el modelo analítico con datos reales y contrastarlo con el modelo empírico propuesto por Okal & Synolakis (2004).

6.1. El modelo NEOWAVE

La simulación numérica de tsunamis es una área que cada vez se ha vuelto más importante con el fin de obtener el seguimiento y predicción de un tsunami, así como las alturas de inundación. Algunos modelos usados para estos propósitos, usados en el NOAA, son MOST (Method Of Splitting Tsunami) desarrollado por Titov & Synolakis (1997), TTT (Tsunami Travel Times) diseñado por Paul Wessel, el principal desarrollador de GMT (Generic Mapping Tools).

El modelo NEOWAVE, sigla de Non-hydrostatic Evolution of Ocean WAVE, es un software diseñado principalmente por el Dr. Yoshiki Yamazaki (Yamazaki et al., 2008) en lenguaje de programación FORTRAN basado en un esquema numérico de diferencias finitas con grillas anidadas, como resultado de su tesis doctoral en la Universidad de Hawaii en Manoa.

El modelo NEOWAVE es derivado de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles y de la ecuación de continuidad, las cuales incluyen efectos de no-linealidad, viscosidad del fluido y presión tanto hidrostática como no-hidrostática. Cabe destacar que al ser un modelo de diferencias finitas que resuelve un problema altamente complejo y no-lineal, los tiempos de cálculo pueden ser muy elevados dependiendo del detalle de resolución de la grilla que se defina, por ejemplo, con una batimetría de 30" de resolución, el modelo puede tardar varias horas en simular pocos minutos de propagación del tsunami.

El modelo NEOWAVE ha sido validado en experimentos de laboratorio simulando con buenos resultados la evolución de ondas solitarias en un canal y la estimación del *runup* en una isla cónica, lo que es de interés particular en la situación de Hawaii.

Este modelo ha sido utilizado para modelar tsunamis generados por terremotos usando modelos de falla finita considerando distribuciones heterogeneas de *slip*, como por ejemplo, el caso del terremoto de Tohoku-oki del 2011 (Yamazaki et al., 2011).

6.1.1. Configuración del modelo

Para ejecutar el modelo numérico NEOWAVE, deben ingresarse tres *inputs* fundamentales:

- Batimetría
- Ola inicial
- Campo de velocidades inicial

En el caso de este problema, la batimetría está dada por el modelo *Sloping beach*, lo que reduce considerablemente los tiempos de cálculo del software.

Por otra parte, la ola inicial es la estudiada en la sección (5.5), correspondiente a la ecuación (5.11),

$$\eta(x, y, t) = H \operatorname{sech}^2(\gamma(\sin(\theta)(x - x_1) - a \cos(\theta)s))f(p)$$

con $p = \cos(\theta)(x - x_1) + a \sin(\theta)y$, o bien

$$\eta(x, y, t) = H \operatorname{sech}^2(\gamma(\sin(\theta)(x - x_1) - a \cos(\theta)y + ct))f(p) \quad (6.1)$$

Por otra parte, para la obtención del campo horizontal de velocidades inicial, debe reanudarse desde las ecuaciones de movimiento. Se retoma desde el sistema “*Shallow water wave equations*”, las ecuaciones linealizadas

$$u_t + g\eta_x = 0 \quad (6.2)$$

$$v_t + g\eta_y = 0 \quad (6.3)$$

Tomando la onda inicial descrita antes, como una onda viajera solitaria y amortiguada en la dirección transversal,

$$\eta(x, y, t) = H \operatorname{sech}^2(\gamma\xi)f(p) \quad (6.4)$$

con $p = \cos(\theta)(x - x_1) + a \sin(\theta)y$ y $\xi = \sin(\theta)(x - x_1) - a \cos(\theta)y + ct$. Entonces, de (6.4)

$$\begin{aligned}
 \eta_x &= \frac{\partial}{\partial x} H \operatorname{sech}^2(\gamma\xi) f(p) \\
 &= H f(p) \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{sech}^2(\gamma\xi) + H \operatorname{sech}^2(\gamma\xi) \frac{\partial}{\partial x} f(p) \\
 &= H f(p) \frac{\partial}{\partial \xi} \operatorname{sech}^2(\gamma\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x} + H \operatorname{sech}^2(\gamma\xi) \frac{\partial}{\partial p} f(p) \frac{\partial p}{\partial x} \\
 &= H f(p) \frac{\partial}{\partial \xi} \operatorname{sech}^2(\gamma\xi) \sin(\theta) + H \operatorname{sech}^2(\gamma\xi) \frac{\partial}{\partial p} f(p) \cos(\theta)
 \end{aligned}$$

pero de (6.2), $u_t = -g\eta_x$, por lo que, integrando en t

$$\begin{aligned}
 u &= -g \int \eta_x dt + C(x, y) \\
 &= -g H f(p) \sin(\theta) \int \frac{\partial}{\partial \xi} \operatorname{sech}^2(\gamma\xi) \frac{\partial t}{\partial \xi} \partial \xi - g H f'(p) \cos(\theta) \int \operatorname{sech}^2(\gamma\xi) \frac{\partial t}{\partial \xi} \partial \xi + C(x, y) \\
 &= -\frac{g \sin(\theta)}{c} f(p) H \operatorname{sech}^2(\gamma\xi) - \frac{g \cos(\theta)}{c} f'(p) H \frac{\tanh(\gamma\xi)}{\gamma} + C(x, y) \\
 &= -\frac{g \sin(\theta)}{c} \eta(x, y, t) - \frac{g \cos(\theta)}{c} f'(p) H \frac{\tanh(\gamma\xi)}{\gamma} + C(x, y)
 \end{aligned}$$

así, cuando $t \rightarrow 0$,

$$u(x, y, 0) = -\frac{g \sin(\theta)}{c} \eta(x, y, 0) - \frac{g \cos(\theta)}{c} \frac{f'(p)}{\gamma} H \tanh(\gamma(\sin(\theta)(x - x_1) - a \cos(\theta)y)) + C(x, y) \quad (6.5)$$

Para v , el procedimiento es análogo: de (6.4)

$$\begin{aligned}
 \eta_y &= \frac{\partial}{\partial y} H \operatorname{sech}^2(\gamma\xi) f(p) \\
 &= H f(p) \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{sech}^2(\gamma\xi) + H \operatorname{sech}^2(\gamma\xi) \frac{\partial}{\partial y} f(p) \\
 &= H f(p) \frac{\partial}{\partial \xi} \operatorname{sech}^2(\gamma\xi) \frac{\partial \xi}{\partial y} + H \operatorname{sech}^2(\gamma\xi) \frac{\partial}{\partial p} f(p) \frac{\partial p}{\partial y} \\
 &= H f(p) \frac{\partial}{\partial \xi} \operatorname{sech}^2(\gamma\xi) (-a \cos(\theta)) + H \operatorname{sech}^2(\gamma\xi) \frac{\partial}{\partial p} f(p) a \sin(\theta)
 \end{aligned}$$

luego, de (6.3), $v_t = -g\eta_y$ e integrando en t ,

$$\begin{aligned}
 v &= -g \int \eta_y dt + D(x, y) \\
 &= gHf(p)a \cos(\theta) \int \frac{\partial}{\partial \xi} \operatorname{sech}^2(\gamma\xi) \frac{\partial t}{\partial \xi} \partial \xi - gHf'(p)a \sin(\theta) \int \operatorname{sech}^2(\gamma\xi) \frac{\partial t}{\partial \xi} \partial \xi + D(x, y) \\
 &= \frac{ag \cos(\theta)}{c} f(p)H \operatorname{sech}^2(\gamma\xi) - \frac{ag \sin(\theta)}{c} f'(p)H \frac{\tanh(\gamma\xi)}{\gamma} + D(x, y) \\
 &= \frac{g \cos(\theta)}{c_0} \eta(x, y, t) - \frac{g \sin(\theta)}{c_0} f'(p)H \frac{\tanh(\gamma\xi)}{\gamma} + D(x, y)
 \end{aligned}$$

y tomando el límite $t \rightarrow 0$,

$$v(x, y, 0) = \frac{g \cos(\theta)}{c_0} \eta(x, y, 0) - \frac{g \sin(\theta)}{c_0} \frac{f'(p)}{\gamma} H \tanh(\gamma(\sin(\theta)(x - x_1) - a \cos(\theta)y)) + D(x, y) \quad (6.6)$$

Puesto que el campo de velocidades inicial debe estar concentrado en una zona acotada, equivalente a la de la onda inicial, se impone que,

$$\lim_{|x|, |y| \rightarrow \infty} \{u(x, y, 0), v(x, y, 0)\} = 0$$

esta condición permite fijar las constantes,

$$\begin{aligned}
 C(x, y) &= \frac{g \cos(\theta)}{c} \frac{f'(p)}{\gamma} H \tanh(\gamma(\sin(\theta)(x - x_1) - a \cos(\theta)y)) \\
 D(x, y) &= \frac{g \sin(\theta)}{c_0} \frac{f'(p)}{\gamma} H \tanh(\gamma(\sin(\theta)(x - x_1) - a \cos(\theta)y))
 \end{aligned}$$

con esto, el campo inicial de velocidades queda

$$(u(x, y, 0), v(x, y, 0)) = \left(-\frac{g \sin(\theta)}{c} \eta(x, y, 0), \frac{g \cos(\theta)}{c_0} \eta(x, y, 0) \right)$$

Finalmente, para asegurar que la ola inicial no se traslape con la zona de *sloping beach* ($0 < x < x_0$) y evitar problemas numéricos, es posible establecer una condición geométrica entre los distintos parámetros.

Como se aprecia en la figura 6.1, para simplificar los cálculos, se encierra a la onda inicial en un rectángulo de dimensiones L, W . Sin pérdida de generalidad debido a la simetría de la

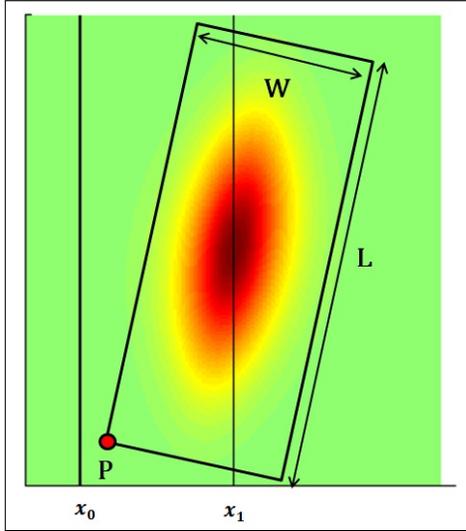


Figura 6.1: Condición geométrica.

rotación, basta suponer a θ agudo, así, sin un mayor esfuerzo, las coordenadas del punto P son

$$P = \left(x_1 - \frac{L}{2} \cos(\theta) - \frac{W}{2} \sin(\theta), \frac{L}{2} \sin(\theta) - \frac{W}{2} \cos(\theta) \right)$$

Con lo cual, debe imponerse que,

$$x_1 - \frac{L}{2} \cos(\theta) - \frac{W}{2} \sin(\theta) > x_0$$

o en forma equivalente

$$\cos(\phi - \theta) < \frac{2(x_1 - x_0)}{\sqrt{L^2 + W^2}}$$

donde ϕ es el ángulo agudo definido a través de $\cos(\phi) = \frac{L}{\sqrt{L^2 + W^2}}$.

Lo anterior genera distintos casos:

- Si $\sqrt{L^2 + W^2} < 2(x_1 - x_0)$, θ es libre y cualquier ángulo en $[0, \pi]$ puede ser escogido.
- Si $\sqrt{L^2 + W^2} > 2(x_1 - x_0)$, θ queda restringido al intervalo $I := [\theta_0, \pi - \theta_0]$, donde θ_0 está definido por $\theta_0 = \arccos\left(\frac{L}{\sqrt{L^2 + W^2}}\right) + \arccos\left(\frac{2(x_1 - x_0)}{\sqrt{L^2 + W^2}}\right)$
- Si $I = \emptyset$, no existen ángulos que eviten el traslape, lo que significa que la ola inicial ha sido puesta demasiado cerca de la línea $x = x_0$.

- Si $I \neq \emptyset$, sólo los ángulos contenidos en I son válidos para evitar el traslape.

Es importante precisar cómo el ancho de la onda es definido. Esto es una complicación adicional puesto que en estricto rigor, la onda solitaria tiene una longitud de onda infinita. El método aquí utilizado para definirla, es el de considerar porcentualmente el área elevada que se cubre. Gracias al hecho que

$$\int_{\mathbb{R}^+} \operatorname{sech}^2(\gamma x) dx = \frac{1}{\gamma}$$

y que

$$\int_0^{W/2} \operatorname{sech}^2(\gamma x) dx = \frac{1}{\gamma} \tanh\left(\gamma \frac{W}{2}\right)$$

se impone que la cobertura de área dada por W sea del $100r\%$ ($r \in [0, 1]$),

$$\frac{\frac{1}{\gamma} \tanh\left(\gamma \frac{W}{2}\right)}{\frac{1}{\gamma}} = r$$

de donde, finalmente, se obtiene para cierta elección de r ,

$$W = \frac{2}{\gamma} \operatorname{arctanh}(r)$$

Con todas las consideraciones previas, el software del modelo NEOWAVE queda listo para usarse.

6.1.2. Resultados

A continuación se presentan los resultados obtenidos por el modelo NEOWAVE y sus respectivas comparaciones con el modelo teórico. Se presentan distintos casos, ordenados según el parámetro a variar.

Los siguientes resultados han sido modelados variando f, θ y β , todos con $H = 10 \text{ m}$, $d = 4 \text{ km}$, $L = 500 \text{ km}$ y $x_1 = 441 \text{ km}$, fijos. Debido a la simetría del problema, basta con estudiar ángulos de incidencia agudos. Cada elección de parámetros supone una simulación distinta en NEOWAVE, así, se hará variar un cierto parámetro, manteniendo los demás fijos.

(a) Función Gaussiana $f(p) = e^{-\left(\frac{2p}{L}\right)^2}$, $\theta = 90^\circ, 60^\circ, 30^\circ, 10^\circ$ y $\beta = 2^\circ$.

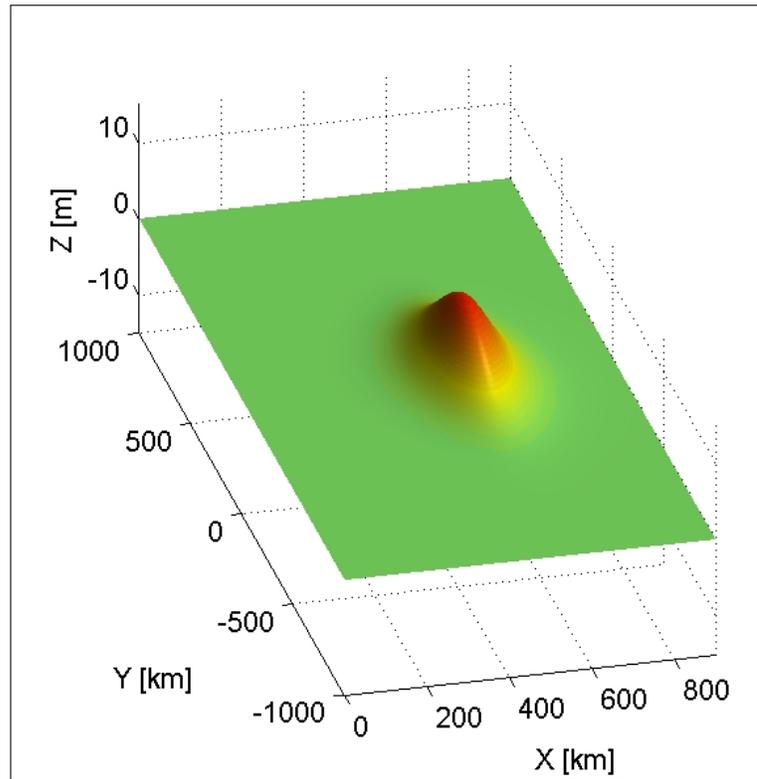


Figura 6.2: Ola inicial con amortiguamiento Gaussiano, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 90^\circ$.

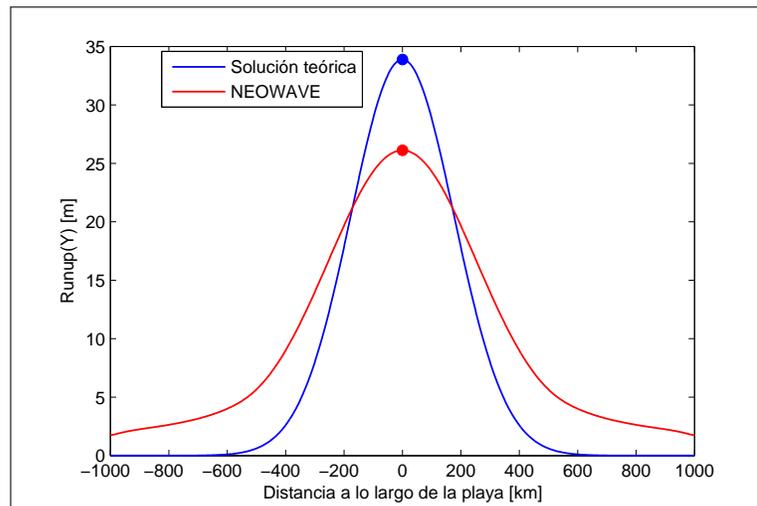


Figura 6.3: Comparación de *runup*, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 90^\circ$.

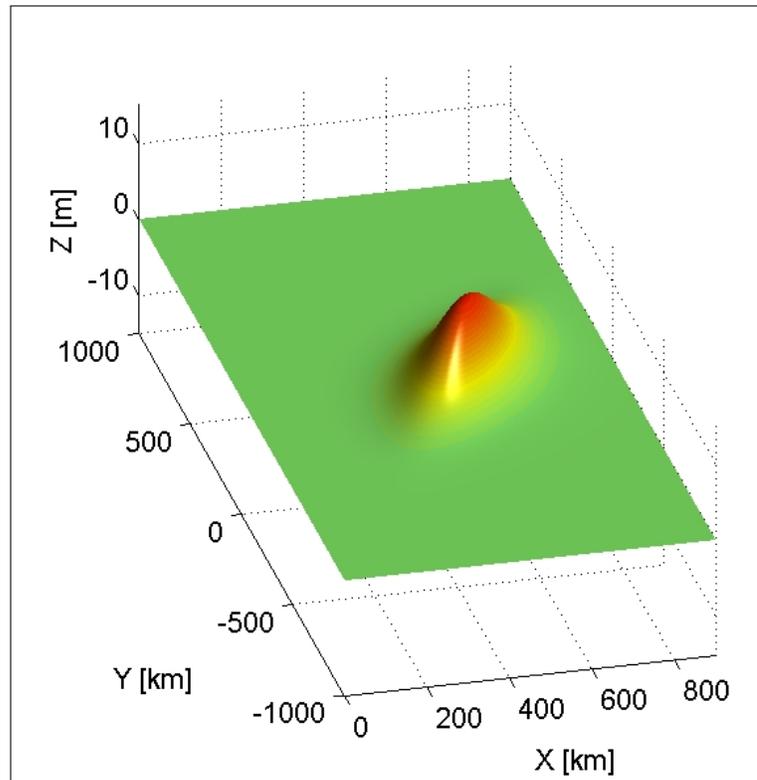


Figura 6.4: Ola inicial con amortiguamiento Gaussiano, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 60^\circ$.

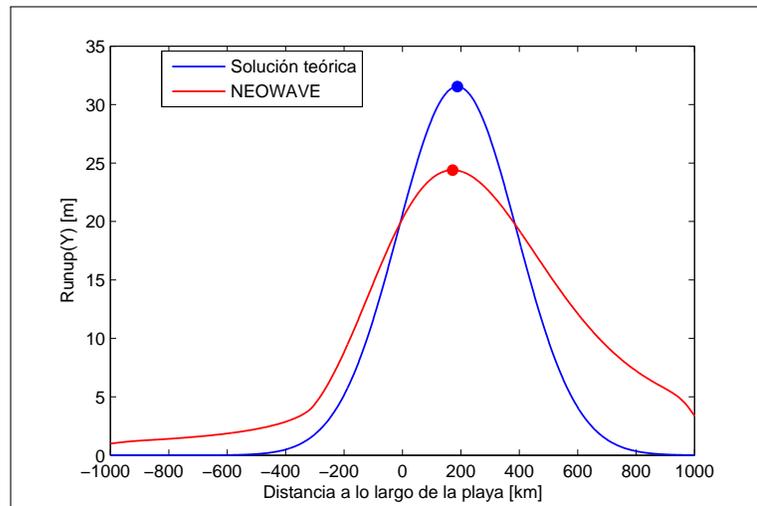


Figura 6.5: Comparación de *runup*, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 60^\circ$.

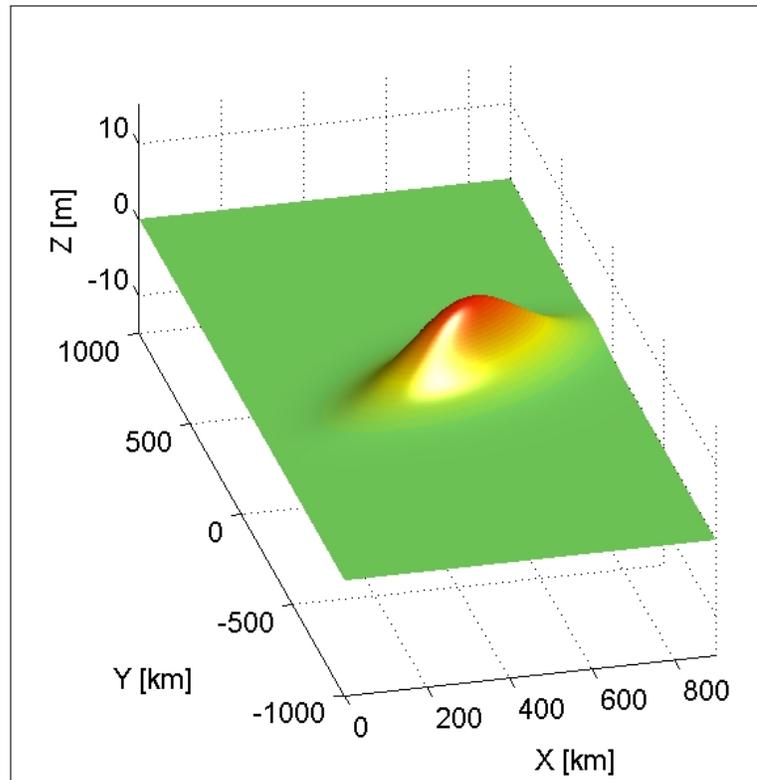


Figura 6.6: Ola inicial con amortiguamiento Gaussiano, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 30^\circ$.

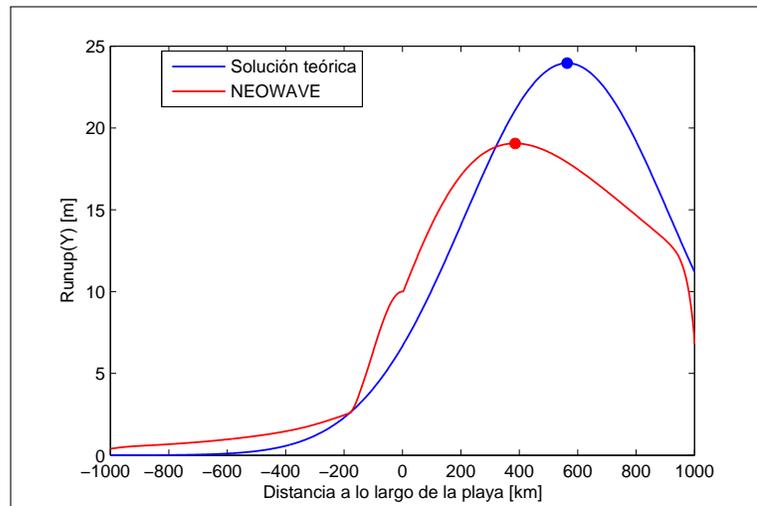


Figura 6.7: Comparación de *runup*, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 30^\circ$.

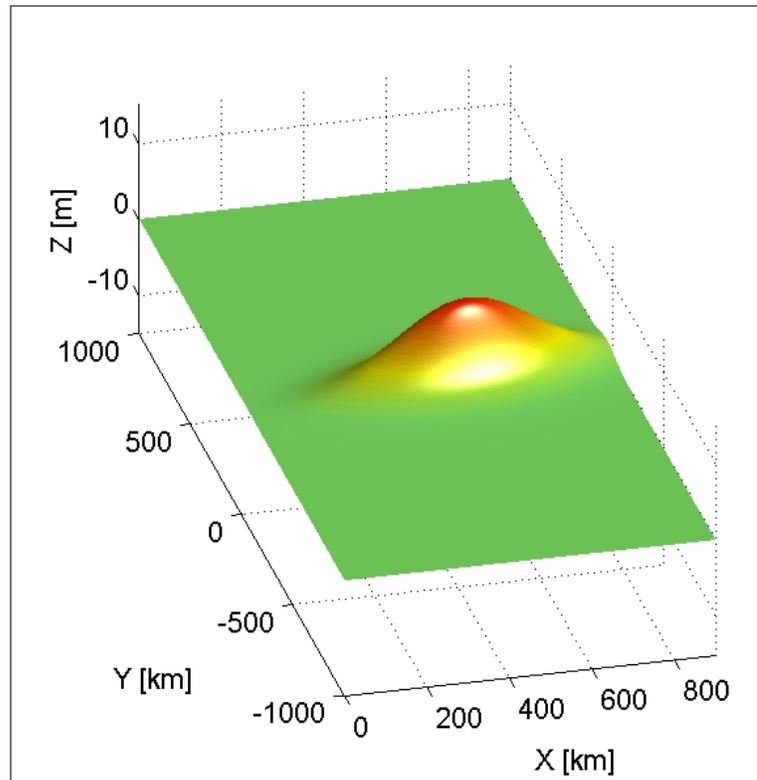


Figura 6.8: Ola inicial con amortiguamiento Gaussiano, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 10^\circ$.

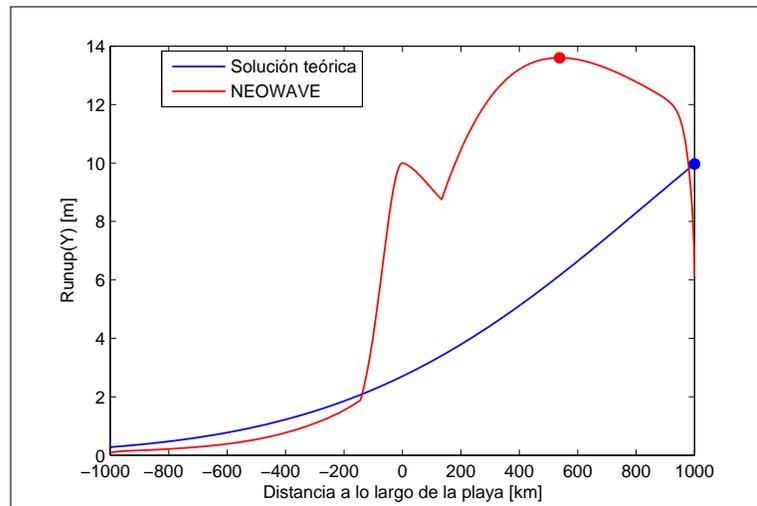


Figura 6.9: Comparación de $runup$, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 10^\circ$.

(b) Función Lorentziana $f(p) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2p}{L}\right)^2}$, $\theta = 90^\circ, 60^\circ, 30^\circ, 10^\circ$ y $\beta = 2^\circ$.

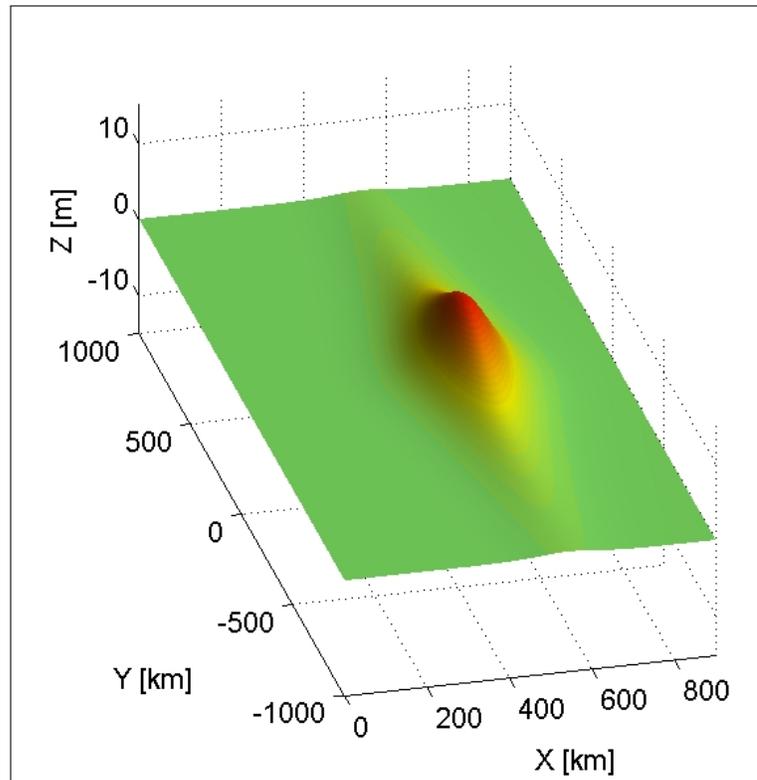


Figura 6.10: Ola inicial con amortiguamiento Lorentziano, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 90^\circ$.

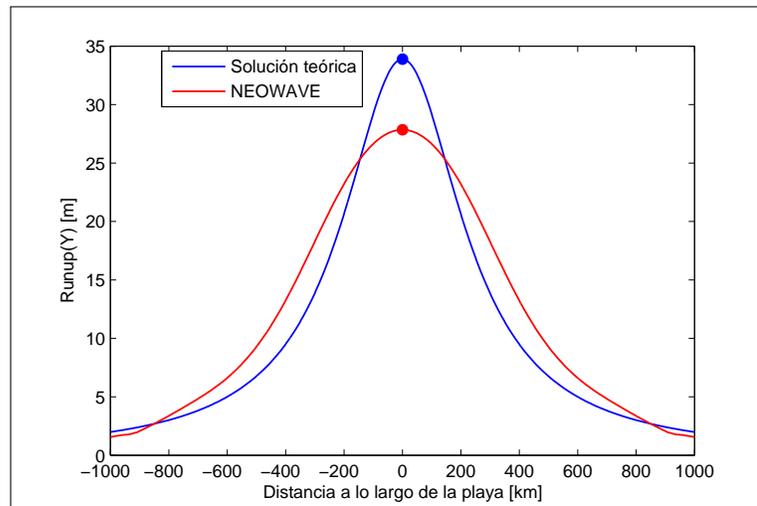


Figura 6.11: Comparación de *runup*, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 90^\circ$.

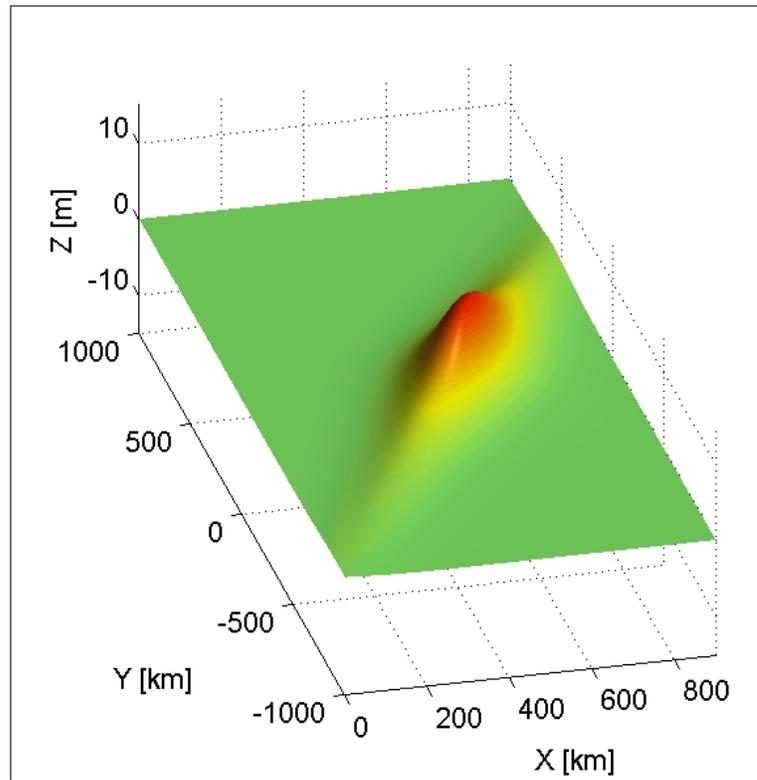


Figura 6.12: Ola inicial con amortiguamiento Lorentziano, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 60^\circ$.

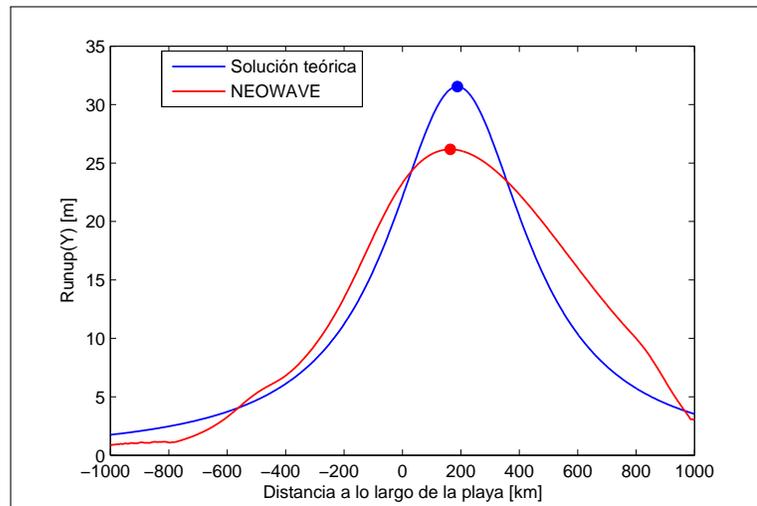


Figura 6.13: Comparación de *runup*, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 60^\circ$.

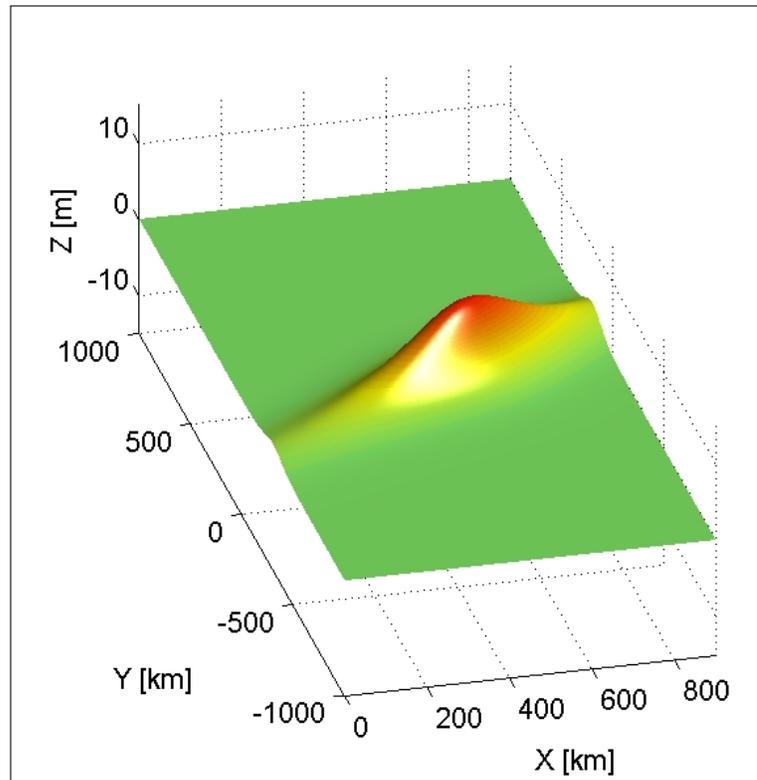


Figura 6.14: Ola inicial con amortiguamiento Lorentziano, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 30^\circ$.

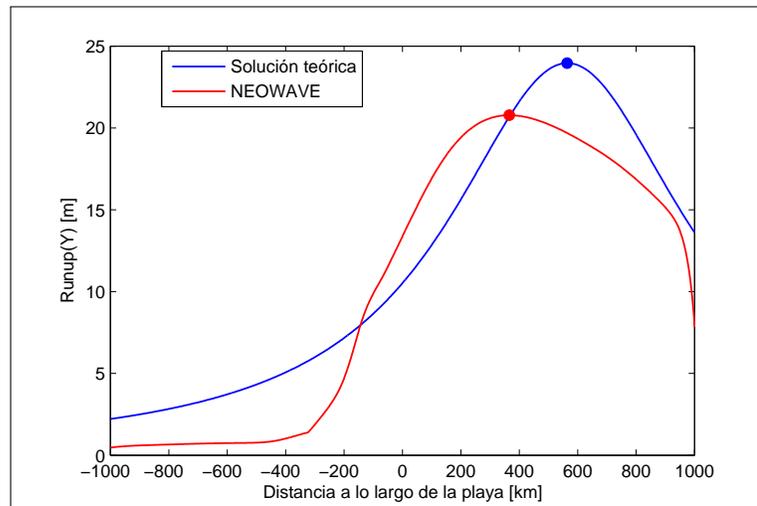


Figura 6.15: Comparación de *runup*, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 30^\circ$.

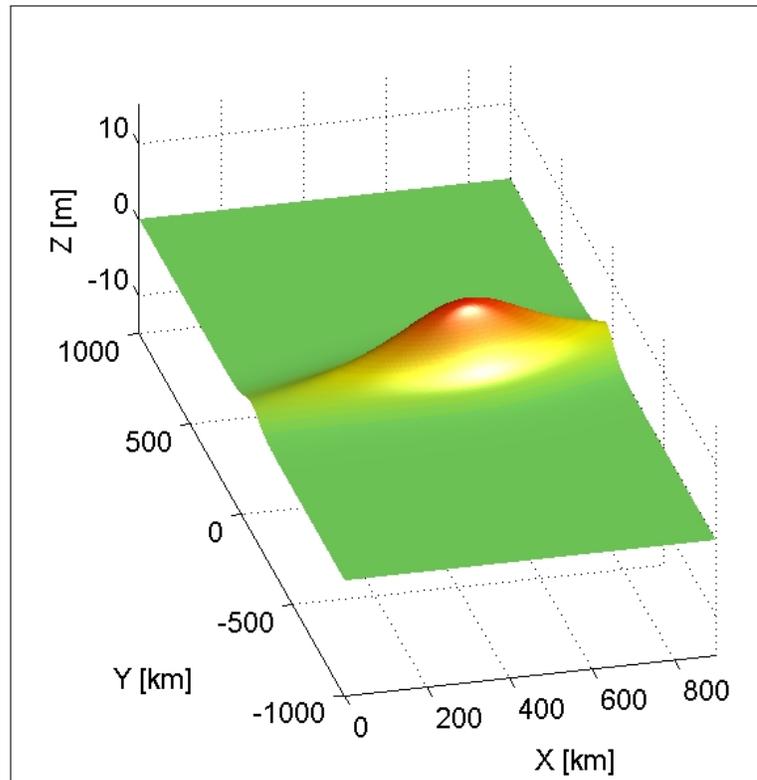


Figura 6.16: Ola inicial con amortiguamiento Lorentziano, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 10^\circ$.

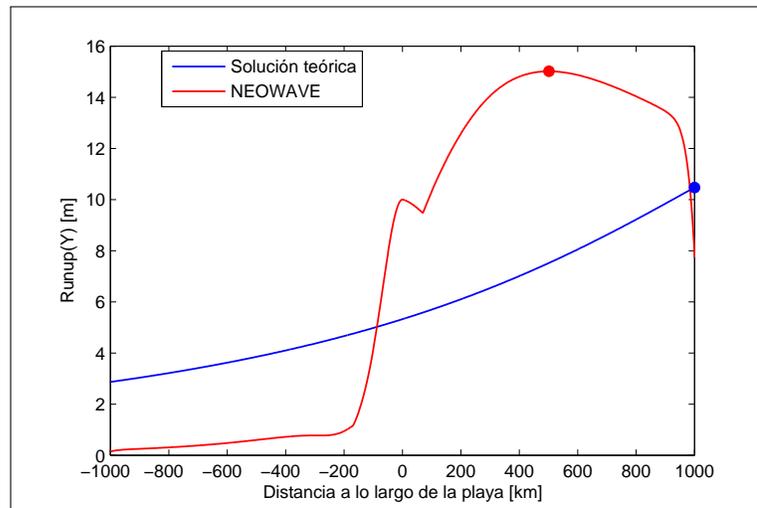


Figura 6.17: Comparación de $runup$, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 10^\circ$.

(c) Función Lorentziana $f(p) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2p}{L}\right)^2}$, $\beta = 1.5^\circ, 2^\circ, 2.5^\circ, 3^\circ$ y $\theta = 80^\circ$.

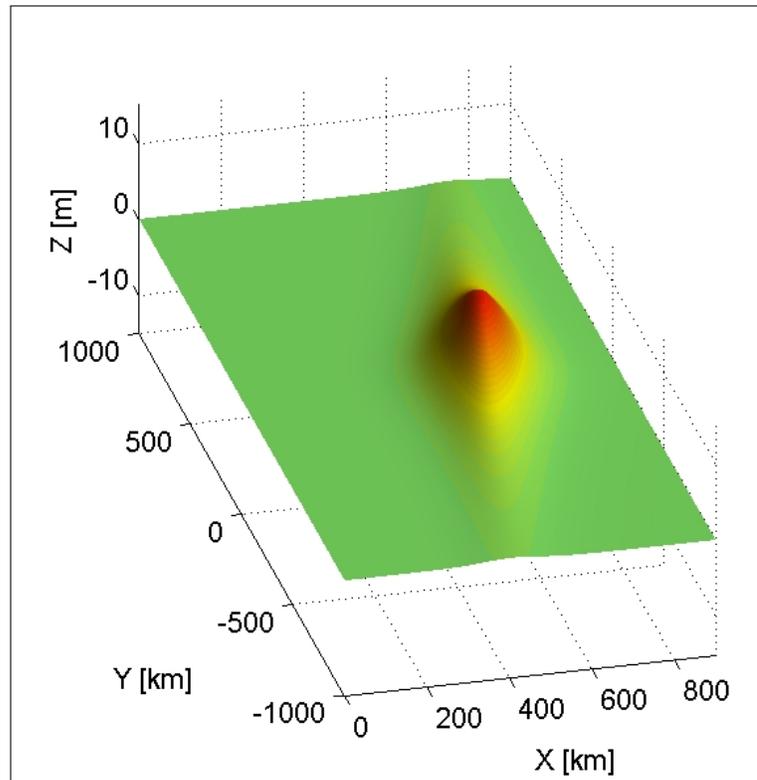


Figura 6.18: Ola inicial con amortiguamiento Lorentziano, $\beta = 1.5^\circ$, $\theta = 80^\circ$.

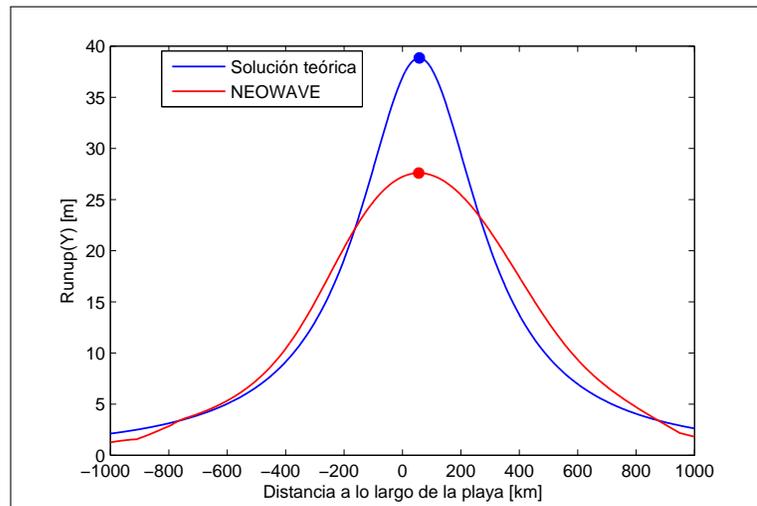


Figura 6.19: Comparación de *runup*, $\beta = 1.5^\circ$, $\theta = 80^\circ$.

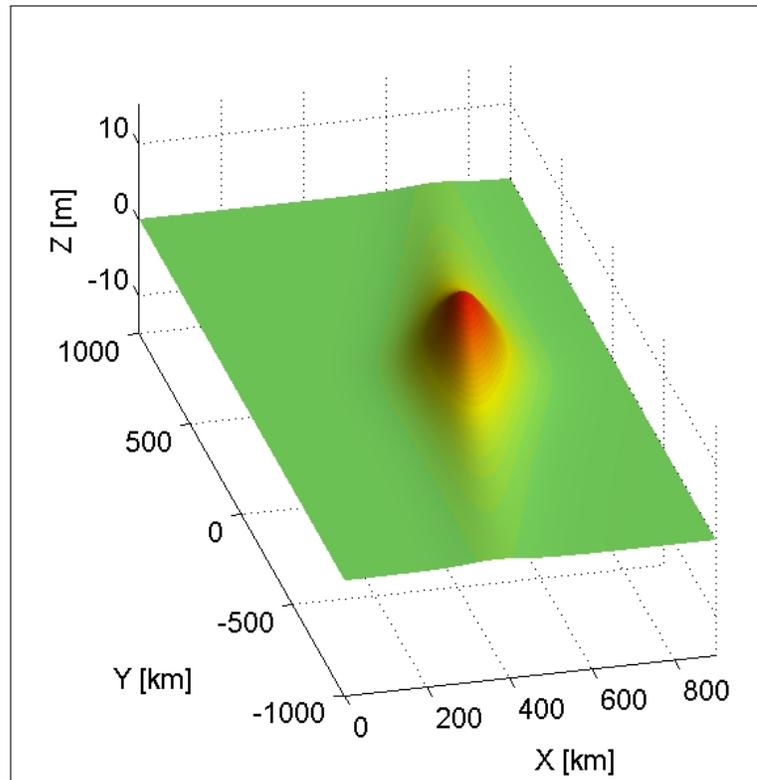


Figura 6.20: Ola inicial con amortiguamiento Lorentziano, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 80^\circ$.

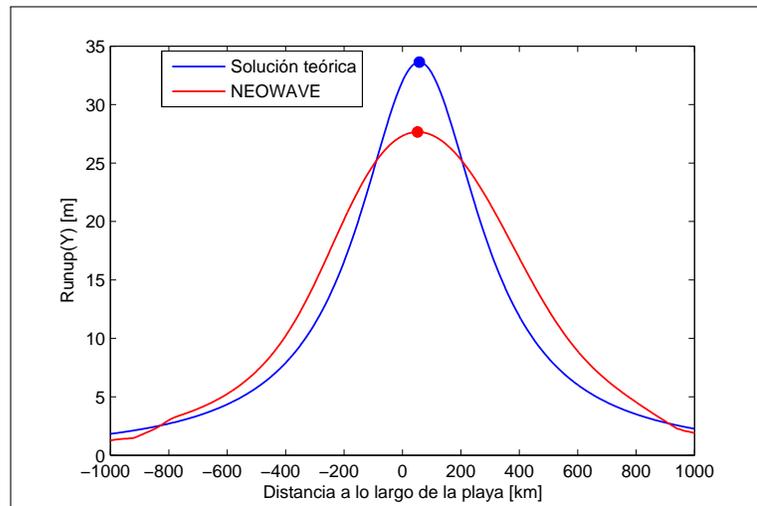


Figura 6.21: Comparación de $runup$, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 80^\circ$.

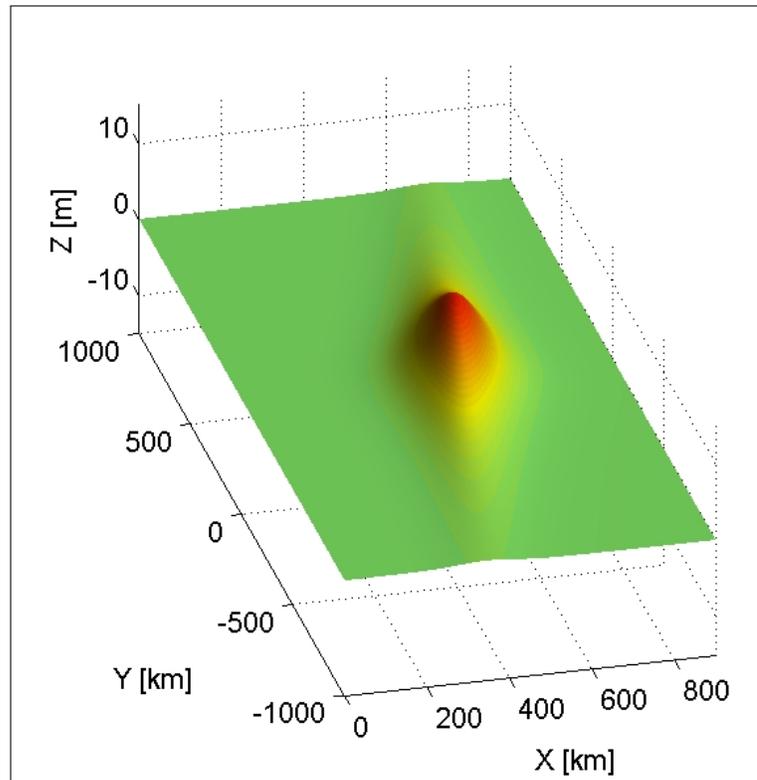


Figura 6.22: Ola inicial con amortiguamiento Lorentziano, $\beta = 2.5^\circ$, $\theta = 80^\circ$.

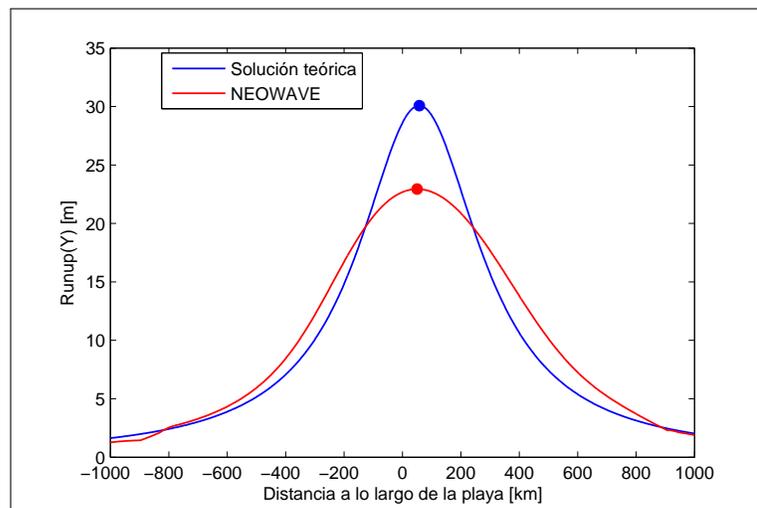


Figura 6.23: Comparación de *runup*, $\beta = 2.5^\circ$, $\theta = 80^\circ$.

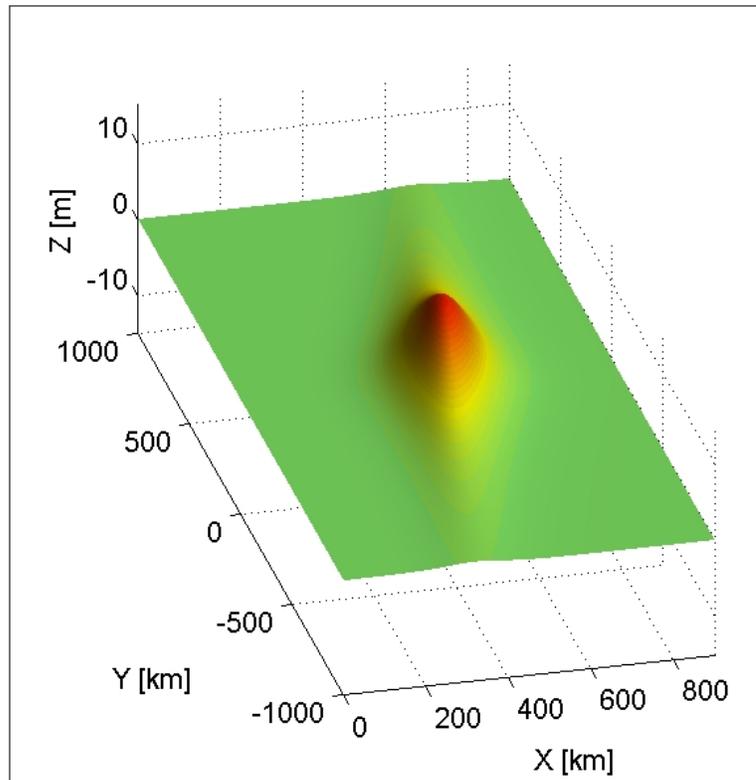


Figura 6.24: Ola inicial con amortiguamiento Lorentziano, $\beta = 3^\circ$, $\theta = 80^\circ$.

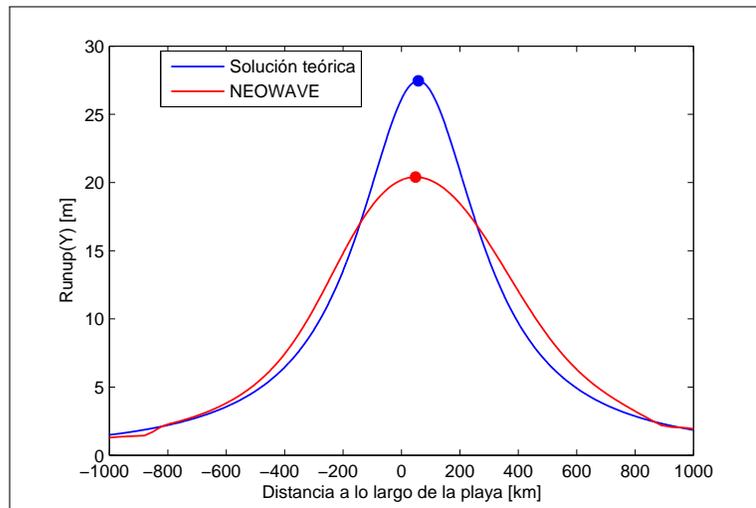


Figura 6.25: Comparación de $runup$, $\beta = 3^\circ$, $\theta = 80^\circ$.

(d) Función indicatriz $f(p) = H\left(\frac{L}{2} - |p|\right)$, $\theta = 90^\circ, 75^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ, 25^\circ, 20^\circ, 10^\circ$ y $\beta = 2^\circ$.

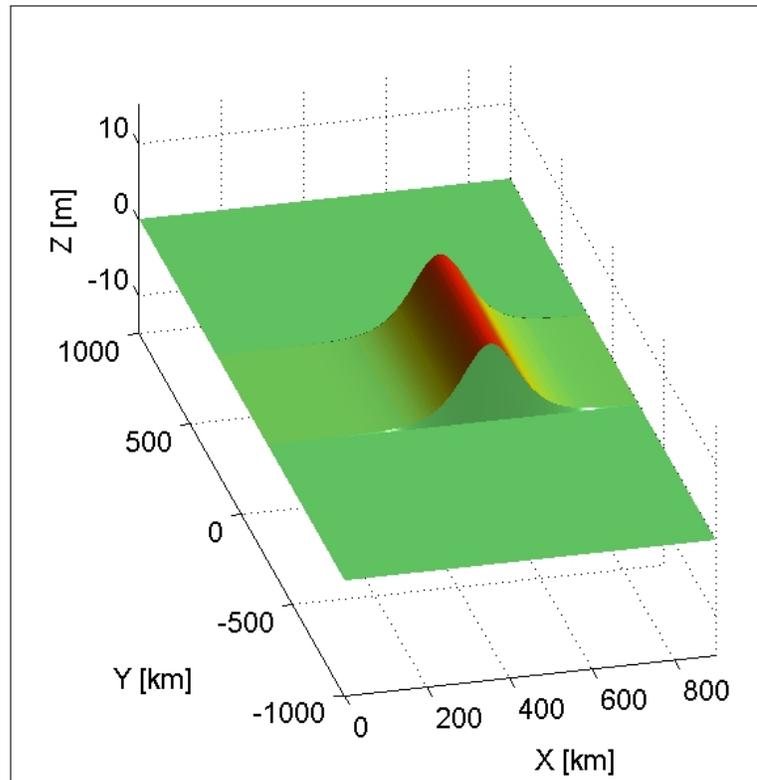


Figura 6.26: Ola inicial finita sin amortiguamiento, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 90^\circ$.

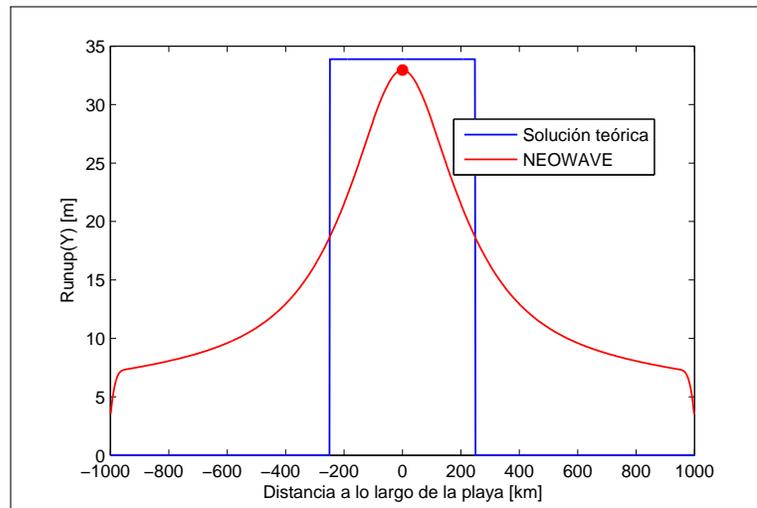


Figura 6.27: Comparación de *runup*, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 90^\circ$.

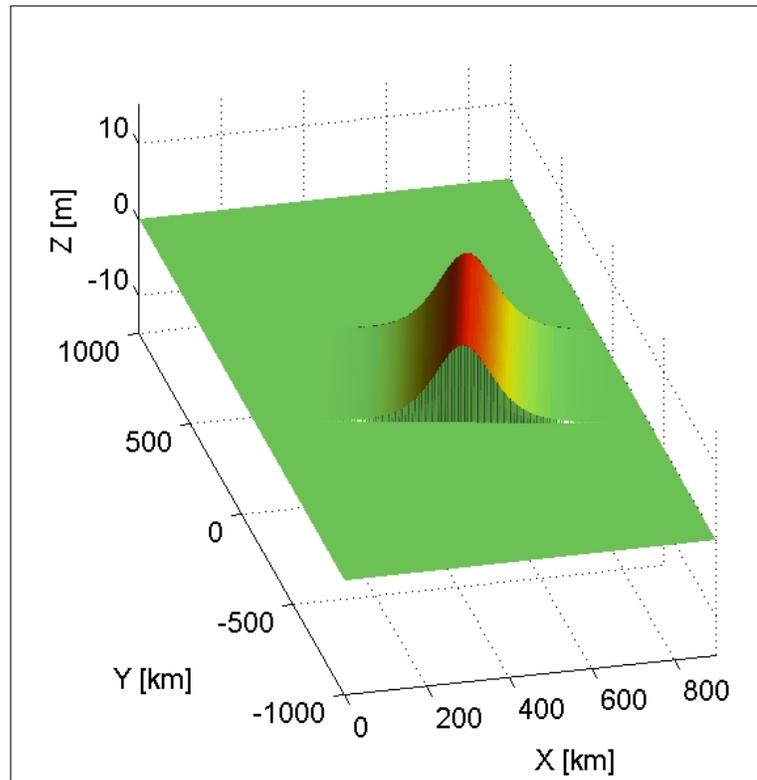


Figura 6.28: Ola inicial finita sin amortiguamiento, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 75^\circ$.

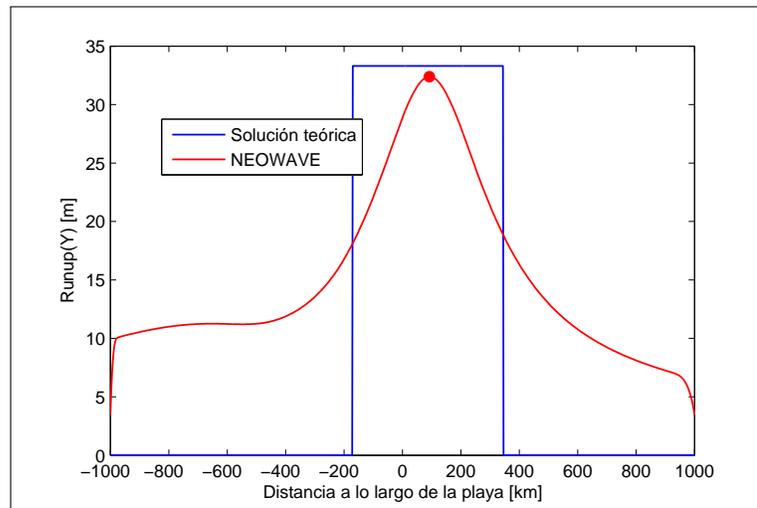


Figura 6.29: Comparación de *runup*, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 75^\circ$.

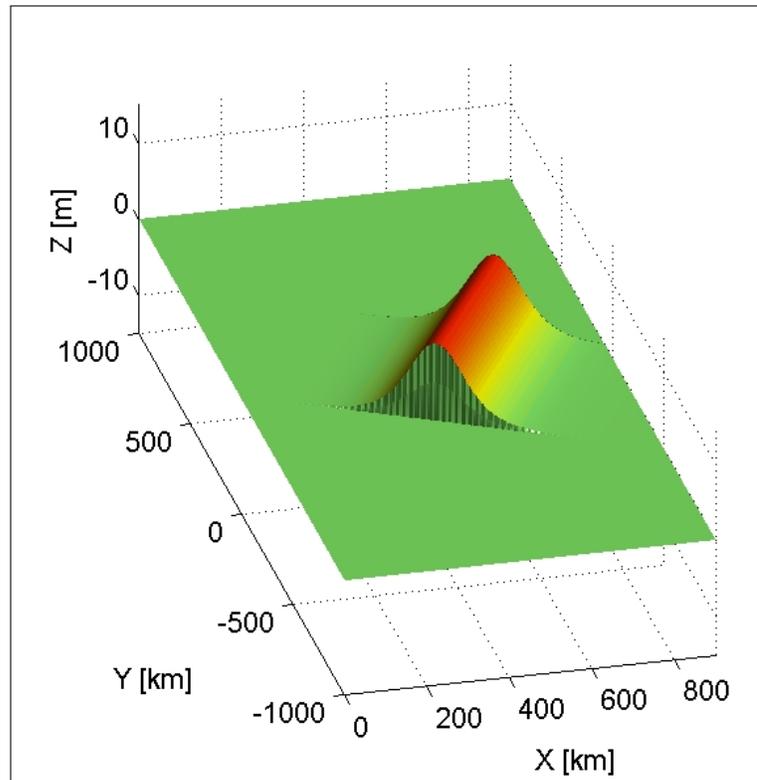


Figura 6.30: Ola inicial finita sin amortiguamiento, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 60^\circ$.

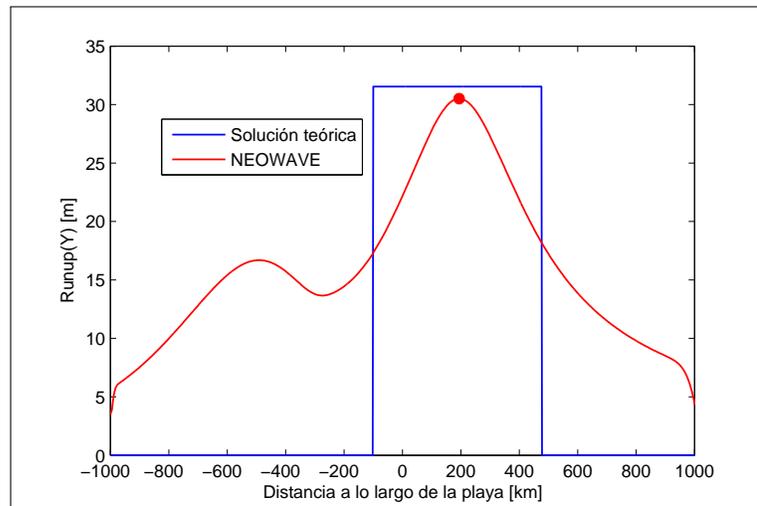


Figura 6.31: Comparación de *runup*, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 60^\circ$.

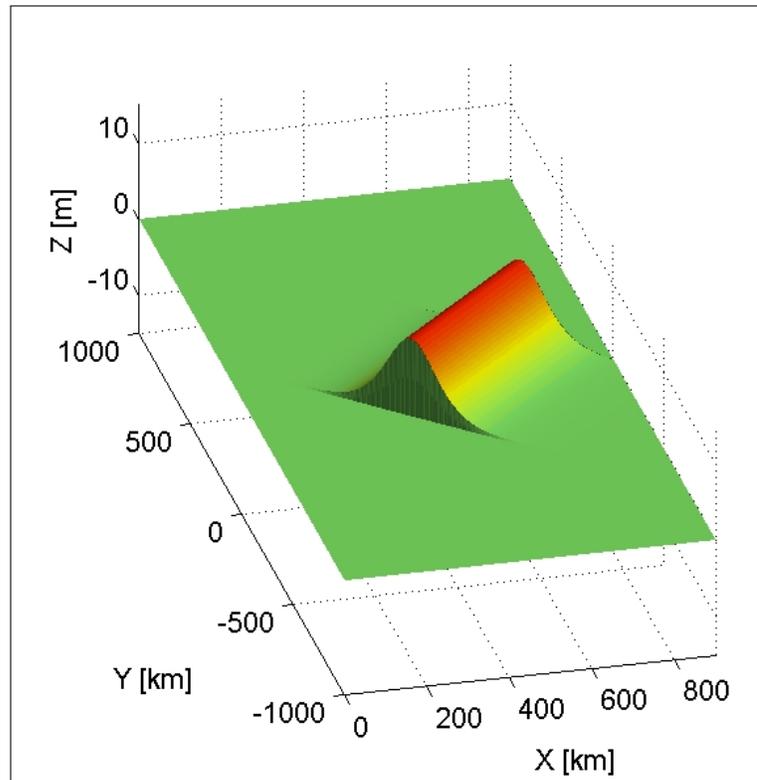


Figura 6.32: Ola inicial finita sin amortiguamiento, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 45^\circ$.

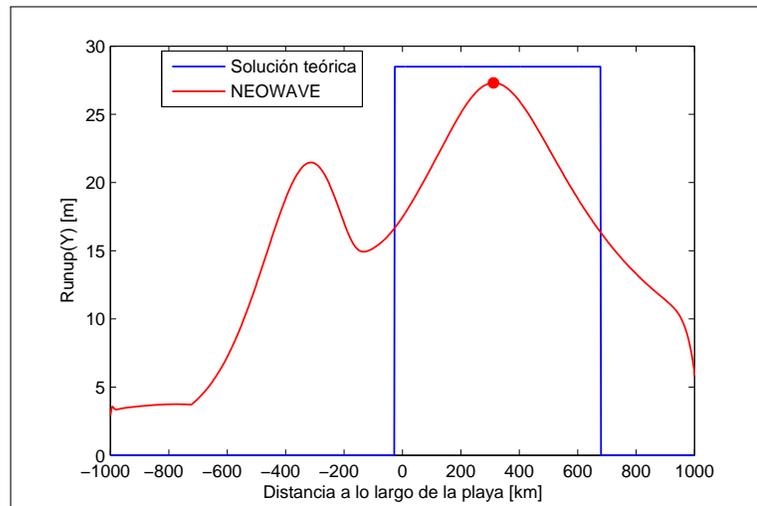


Figura 6.33: Comparación de $runup$, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 45^\circ$.

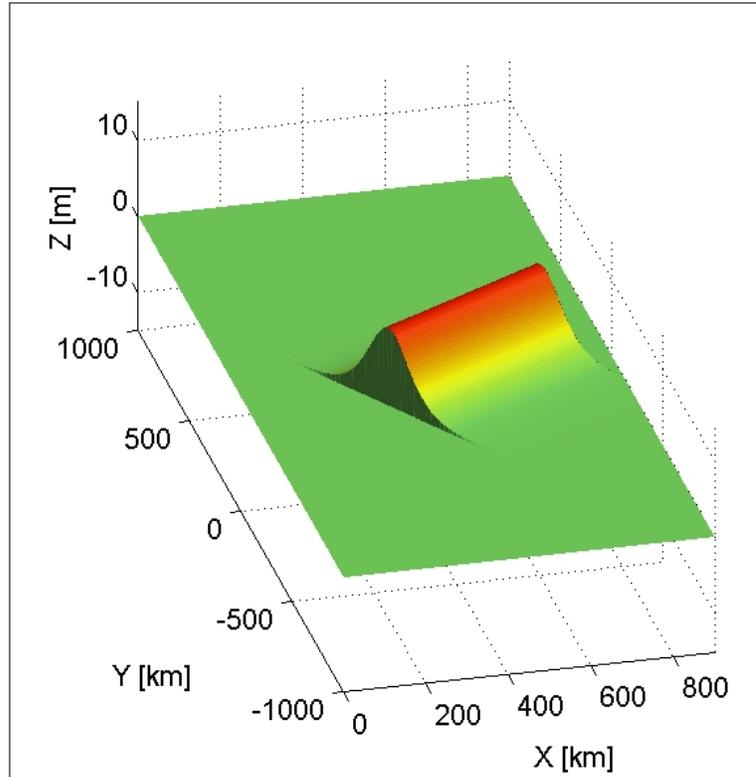


Figura 6.34: Ola inicial finita sin amortiguamiento, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 30^\circ$.

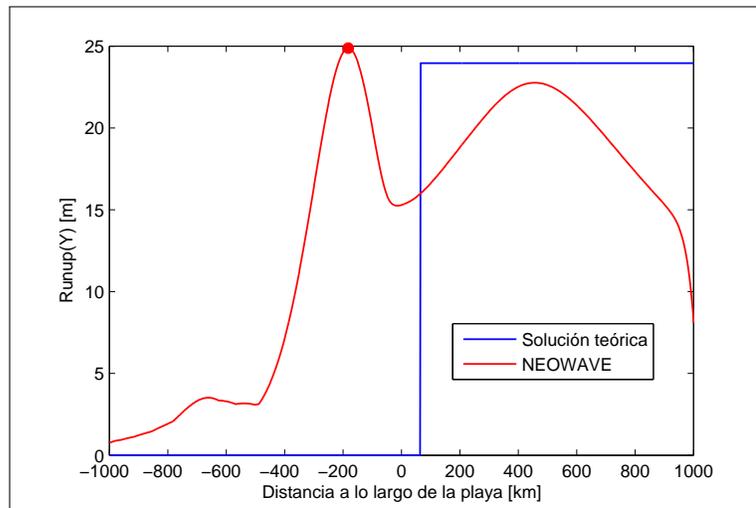


Figura 6.35: Comparación de *runup*, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 30^\circ$.

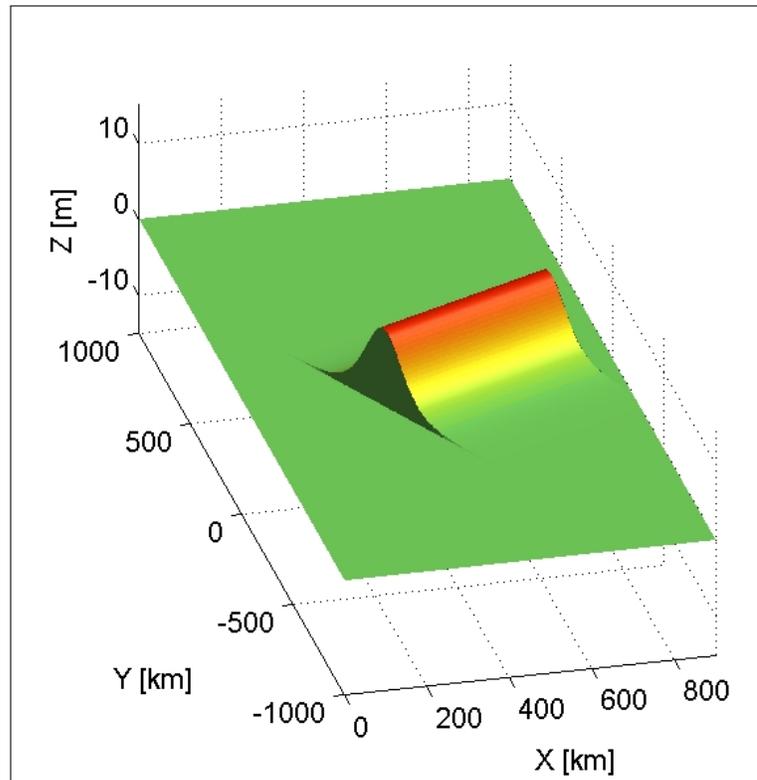


Figura 6.36: Ola inicial finita sin amortiguamiento, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 25^\circ$.

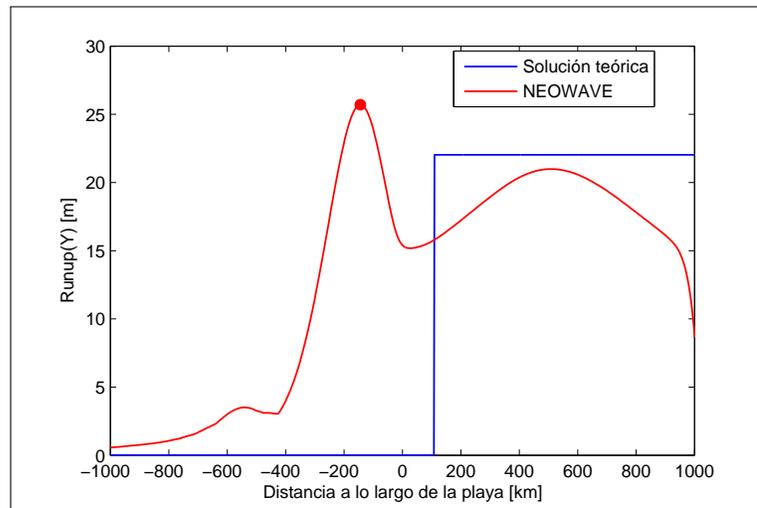


Figura 6.37: Comparación de *runup*, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 25^\circ$.

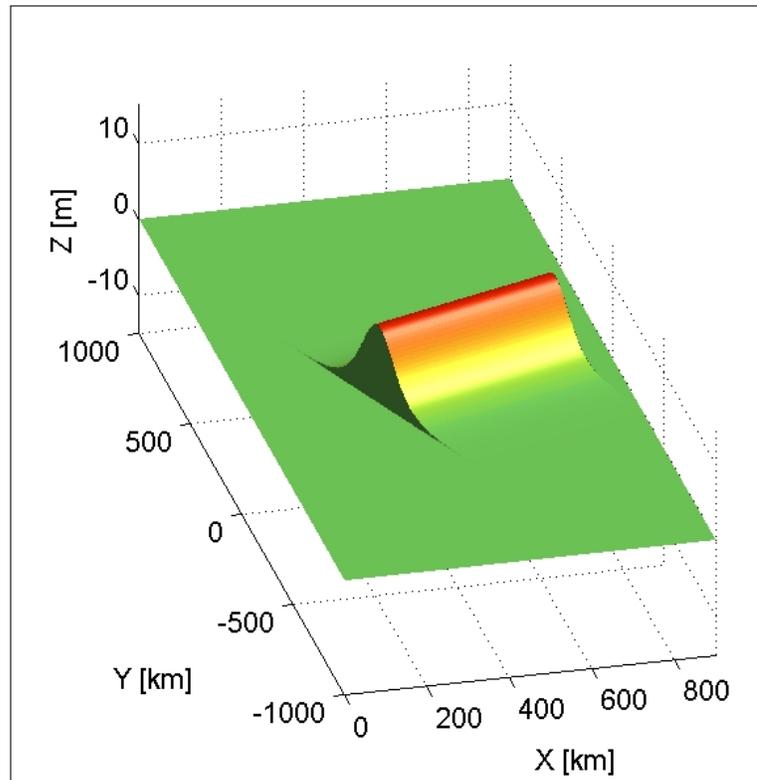


Figura 6.38: Ola inicial finita sin amortiguamiento, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 20^\circ$.

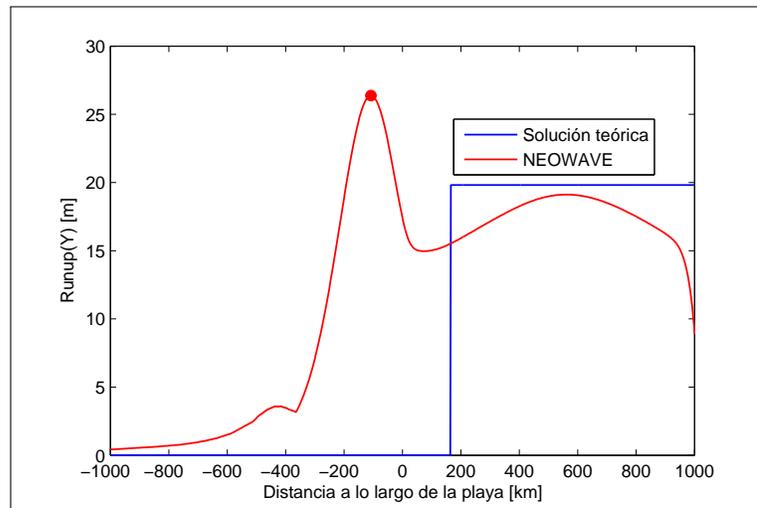


Figura 6.39: Comparación de *runup*, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 20^\circ$.

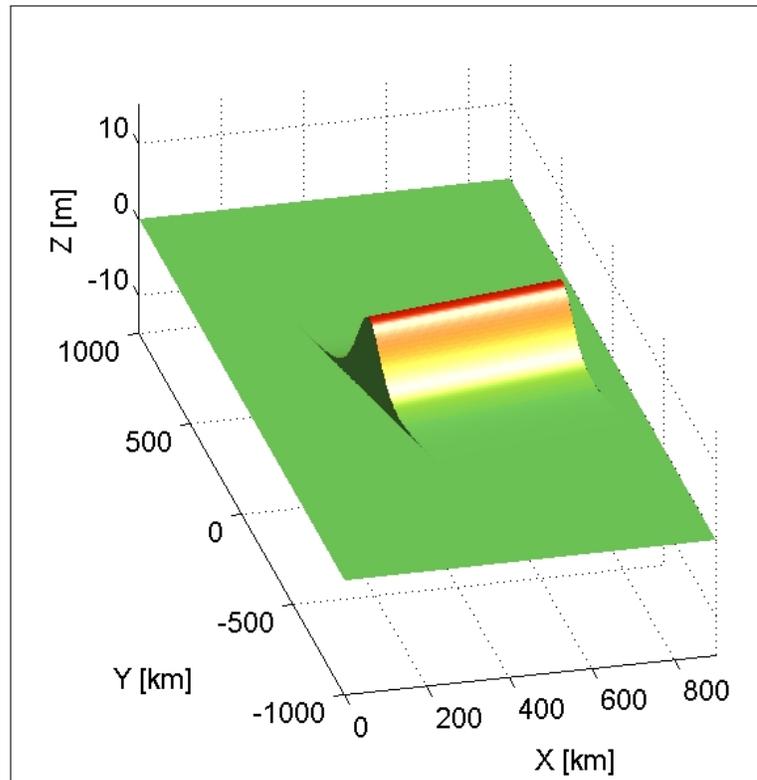


Figura 6.40: Ola inicial finita sin amortiguamiento, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 10^\circ$.

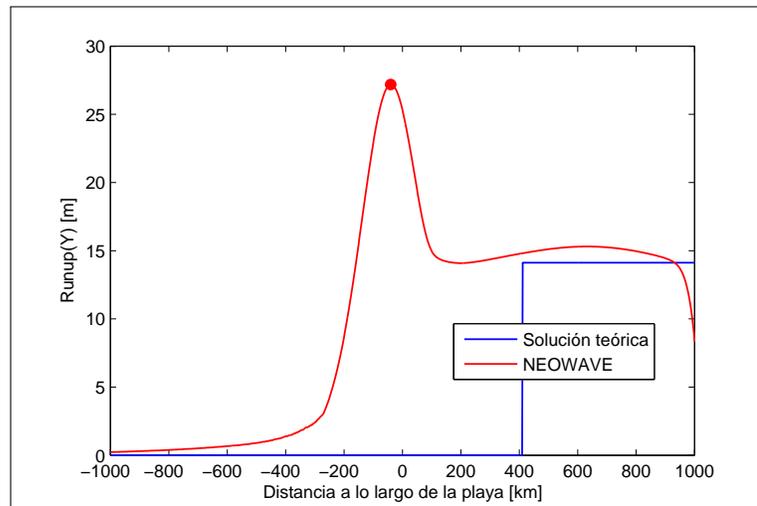


Figura 6.41: Comparación de $runup$, $\beta = 2^\circ$, $\theta = 10^\circ$.

Los resultados anteriores permiten observar el comportamiento de las soluciones y cuán bien representadas son por la modelación teórica. El caso **(a)** muestra que un decaimiento gaussiano resulta demasiado rápido respecto del $runup$ calculado numéricamente. El caso **(b)**, con decaimiento Lorentziano mejora la forma de la distribución ya que posee un decaimiento

más lento. En ambos casos, los resultados tienden a discrepar mayormente cuando θ se aleja de 90° , lo cual es completamente consistente con la derivación de la solución teórica, la cual es válida para ángulos cercanos a 90° , debido al rango de validez de la aproximación asintótica de las funciones hipergeométricas. Otras razones que explican las diferencias, son que el modelo NEOWAVE considera los efectos de dispersión y no-linealidad, los cuales se hacen más importantes en una incidencia más oblicua. El caso **(c)** pone en evidencia la dependencia de la pendiente de la playa, la cual para ángulos demasiado pequeños ($<1.5^\circ$) la solución teórica comienza a sobreestimar en demasía el *runup*. Para ángulos mayores, a pesar de haber una sobreestimación inherente debido a las aproximaciones desarrolladas, esta diferencia comienza a hacerse menor y estabilizarse alrededor de los 7 m. En general, se observa que el máximo *runup* teórico es mayor que el numérico y que el corrimiento de dicho máximo, se predice bien.

La elección de la función f es muy importante pues la evolución y estabilidad de la onda inicial dependen en gran medida a ella. Para ver esto último, el caso **(d)**, con una función de Heaviside, modela un segmento de onda solitaria, la cual por ser una solución exacta de la ecuación KdV, compensa la no-linealidad y dispersión haciéndola mucho más estable en su viaje. Este último caso, a pesar de no ser un modelo razonable para la distribución de *runup* en la costa, permite obtener un resultado de gran importancia, el cual es validar desde otro punto de vista la solución teórica. Es trivial ver que el *runup* máximo, entendido como el máximo valor de la distribución de *runup* en la playa, de la solución teórica está dado por

$$\mathcal{R} = \sqrt{\sin(\theta)}\mathcal{R}_0, \quad (6.7)$$

entonces, al comparar los máximos de las figuras obtenidas en el caso **(d)** (ver figura 6.42) puede verse que para $\theta \geq 30^\circ$ la solución teórica predice muy bien el *runup* máximo, mientras que las diferencias se vuelven mayores cuanto más alejado de 90° es la incidencia, principalmente debido a que la solución teórica no es válida para ángulos muy distantes de 90° y porque los efectos no-lineales se hacen más importante gracias a interferencias entre distintos frentes de ondas que se forman en el viaje debido a que la onda inicial es más inestable.

Finalmente, gracias a la simetría del problema, para este modelamiento, puede decirse que la solución teórica predice muy bien el máximo *runup* para $\theta \in [30^\circ, 150^\circ]$.

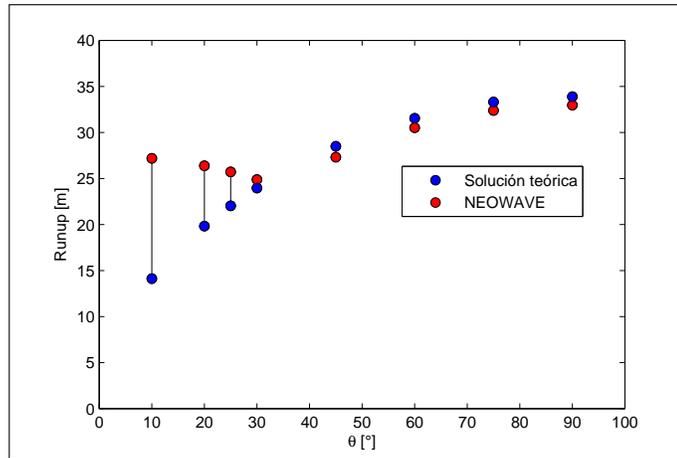


Figura 6.42: Comparación del máximo *runup*.

6.2. Modelos empíricos

Para modelar la distribución de *runup* en la costa, existe el modelo propuesto por Okal & Synolakis (2004)

$$\mathcal{R}(y) = \frac{b}{1 + \left(\frac{y-c}{a}\right)^2} \quad (6.8)$$

con y la distancia a lo largo de la costa y donde a, b, c son constantes determinadas mediante métodos de optimización (“ensayo y error”) para ajustar la curva a los datos observados, de modo que ésta pase lo más cerca de los puntos, según algún tipo de criterio (por ejemplo, mínimos cuadrados).

Este modelo es usado por los autores para discriminar si un tsunami fue producido ya sea por dislocaciones o por *landslides*, utilizando razones entre los parámetros de ajuste.

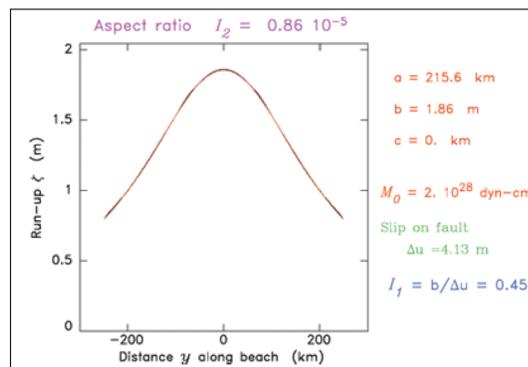


Figura 6.43: Modelo de distribución de *runup* propuesto por Okal & Synolakis (2004).

La figura 6.43 muestra un ejemplo estudiado por Okal & Synolakis (2004) en que el ajuste resulta casi perfecto.

A pesar de ajustar en muchos casos, no siempre este modelo representa adecuadamente la distribución de *runup* y no es claro el por qué elegir dicha función, pues los autores consideran esta elección sin una razón físico-matemática aparente.

6.3. Caso emblemático: Tsunami del Maule, 2010

El terremoto del Maule ocurrió el 27 de febrero el año 2010a las 03:34 a.m. hora local (UTC-3). Tuvo una magnitud de momento $M_w=8.8$ y la máxima intensidad registrada fue de *IX* en la escala e Mercalli. Este terremoto cobró la vida de alrededor de 525 personas y otras 25 desaparecidas. Debido a las características del contacto de subducción en Chile, la ruptura fue lo suficientemente grande como para llegar hasta la fosa dando como resultado un epicentro ubicado mar adentro y la generación de un tsunami que terminó por devastar las zonas costeras.

Para modelar este tsunami, se consideran los siguientes valores para los parámetros que definen la batimetría y el tamaño aproximado de la ola inicial:

- $d = 4 \text{ km}$
- $\beta = 2^\circ$ (lo que genera una distancia, entre la costa y la fosa, de aproximadamente $x_0 = 115 \text{ km}$)
- $L = 500 \text{ km}$
- $H = 9 \text{ m}$
- $\theta = 90^\circ$
- $f(p) = \epsilon(f_L(bp) + af_L(bp - c))$, donde f_L es la misma función Lorentziana usada en **(b)** y con a, b, c a escoger para simular la forma bimodal del *runup* del tsunami del Maule. Dichos parámetros son escogidos con el método “Trial and Error”. La constante ϵ es para asegurar que el máximo valor de f sea 1.

Se observa que a diferencia del modelo de Okal & Synolakis (Figura 1.4), el modelo previo ajusta de mejor forma de la distribución de *runup* tal como se aprecia en la figura 6.44.

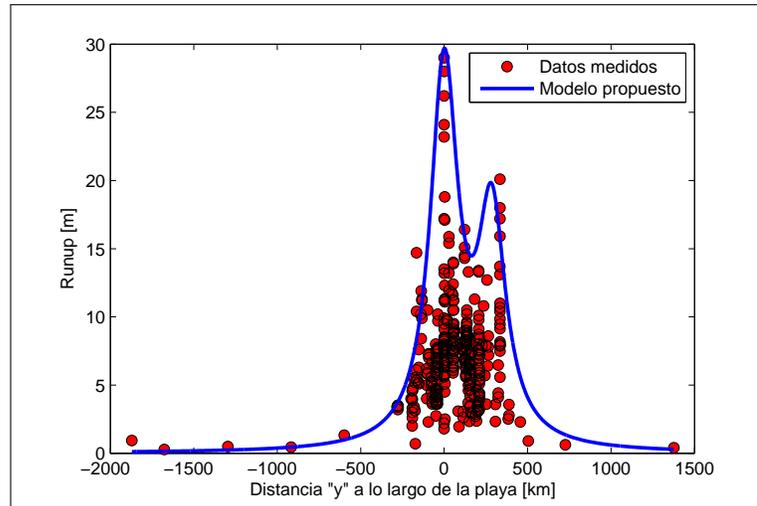


Figura 6.44: Modelo de distribución de $runup$ para el tsunami del Maule, con $\epsilon = 0,9371$, $a = -0,6$, $b = 3,5$ y $c = 1000km$.

6.3.1. Relación con la deformación inicial: Fórmulas de Okada

Okada (1985) provee una solución analítica para la deformación en superficie provocada por una falla rectangular en un semi-espacio. Las formulas hacen uso de los parametros elásticos, dimensiones de la falla, su profundidad, deslizamiento y orientación en el espacio (*Strike, Rake, Dip*). Para obtener un mayor grado de detalle, es posible hacer uso de modelos de falla finita, los cuales descomponen el plano de falla en multiples subfallas, cada una con sus respectivos parámetros (Figura 6.45).

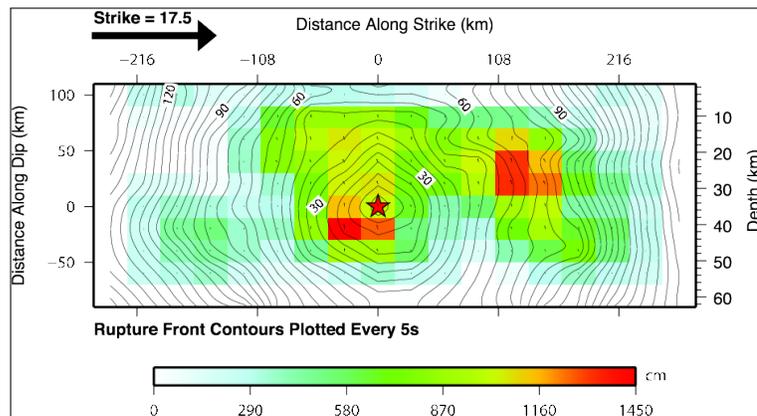


Figura 6.45: Modelo de falla finita para el terremoto del Maule dado por el USGS. (Fuente: http://earthquake.usgs.gov/earthquakes/eqinthenews/2010/us2010tfan/finite_fault.php)

Utilizando la información que provee el USGS, para el caso del terremoto del Maule, se aplica una superposición lineal de las fórmulas de Okada, donde se obtiene una deformación

con una elevación máxima de 4 m y una subsidencia máxima de 1 m . (Ver figuras 6.46, 6.47, 6.48).

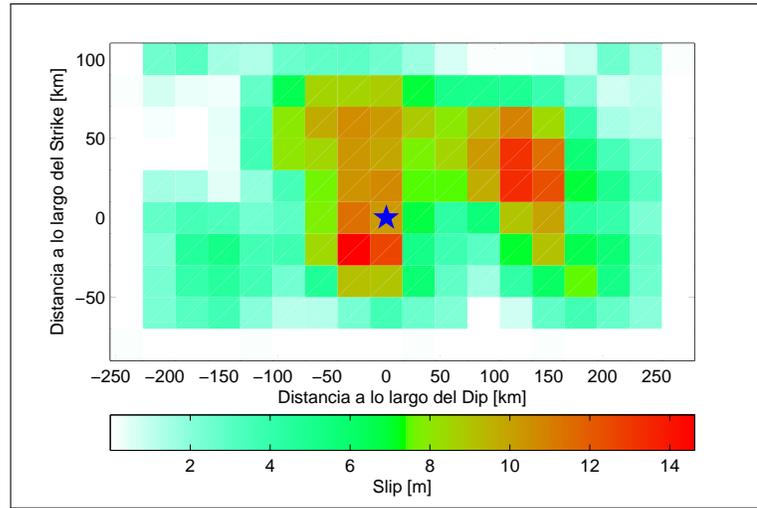


Figura 6.46: Verificación modelo de falla finita para el terremoto del Maule, utilizando los datos descargables del sitio web del USGS.

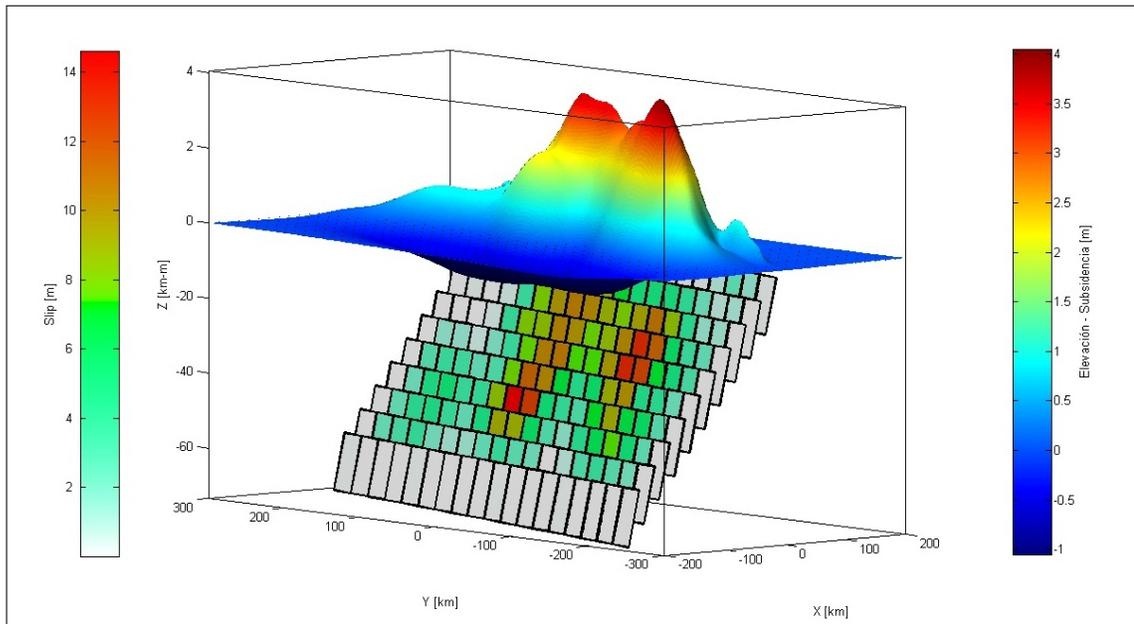


Figura 6.47: Deformación del fondo marino producto del plano de falla mostrado. La barra de colores de la izquierda muestra el *slip* de la falla finita (figura 6.46) y la de la derecha, el levantamiento-depresión del fondo marino.

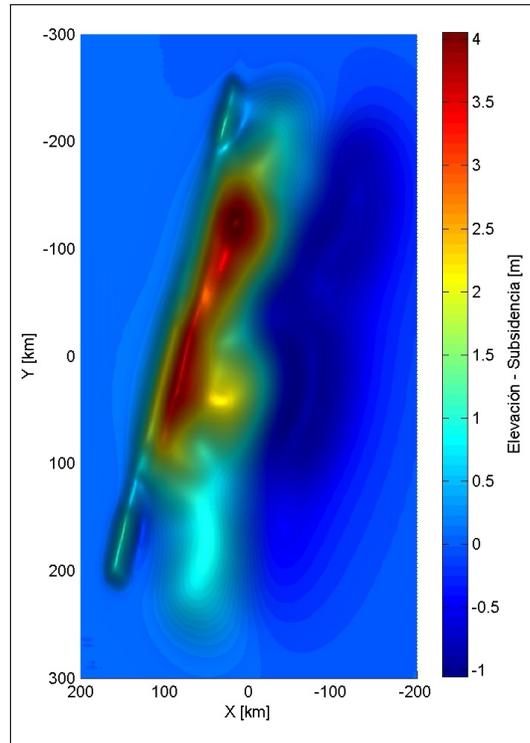


Figura 6.48: Visión en planta de la deformación en la superficie del fondo marino.

La elección de la altura H podría estar sobreestimada tal como lo sugiere el modelo de falla finita del terremoto del Maule (figura 6.48). Por lo cual, se procede a considerar los siguiente valores para los parámetros en la determinación de la distribución de *runup*:

- $d = 4 \text{ km}$
- $\beta = 2^\circ$
- $L = 500 \text{ km}$
- $H = 5 \text{ m}$
- $\theta = 90^\circ$
- $f(p) = \epsilon(f_L(bp) + af_L(bp - c))$, igual que en la sección anterior.

con esta modelación, la distribución de *runup* se muestra en la figura 6.49.

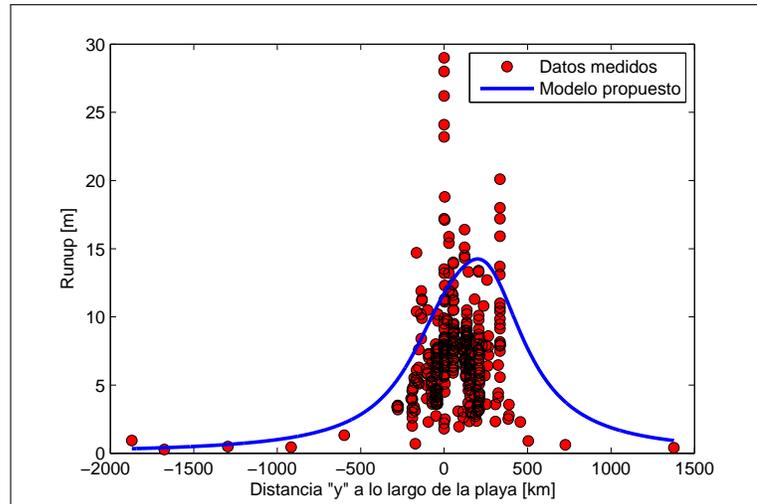


Figura 6.49: Modelo de distribución de *runup* para el tsunami del Maule, con $\epsilon = 0,3804$, $a = 2$, $b = 1,2$ y $c = 300km$.

El modelo anterior subestima el máximo *runup* prácticamente en un 50 %, sin embargo, si se observa la deformación inicial (figura 6.47), pensando en una generación de tsunamis pasiva, la onda inicial se asemeja más a una *N-wave* que a una onda solitaria, y ya que sus *runup* difieren alrededor de un 36 %, el modelo puede ser fácilmente corregido, lo cual puede verse en la figura 6.50.

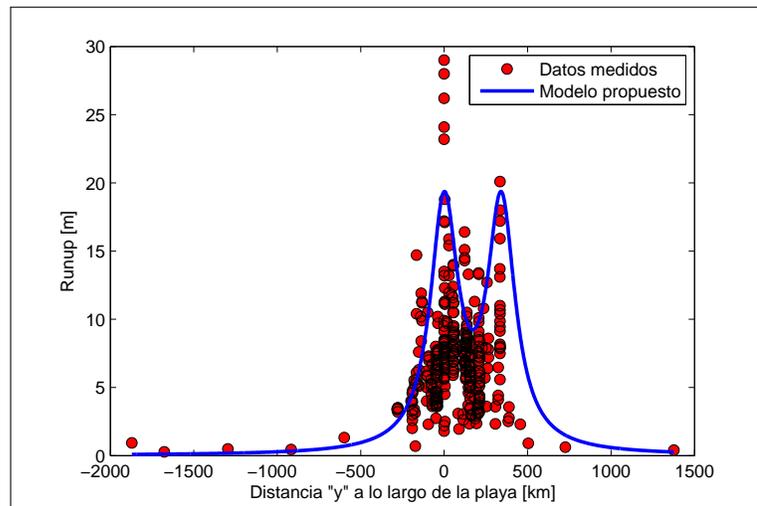


Figura 6.50: Modelo de distribución de *runup* para el tsunami del Maule, con $\epsilon = 0,9257$, $a = 1$, $b = 3,5$ y $c = 1200km$.

A pesar que aún hay una subestimación en el máximo *runup*, esta diferencia puede ser explicada por el hecho que al ser un modelo basado en la teoría lineal, ésta sólo tiene capacidad para cuantificar los efectos de la primer ola, sin embargo, en la realidad se observa que en general la primer ola no es la más energética debido a que las siguientes incorporan

interferencias y efectos de resonancia según la geometría de la costa, dificultando la predicción del momento en que se alcanzan las máximas alturas.

Capítulo 7

Conclusiones

El objetivo de este trabajo ha sido estudiar de manera teórica algunos aspectos sobre propagación de tsunamis y el *runup*. Siendo un problema de complejidad muy alta, la obtención de expresiones analíticas cerradas que den cuenta del comportamiento y evolución de las ondas en el agua analíticas es una tarea que parece no ser posible de realizar. A pesar de esto, es posible encontrar soluciones explícitas (en algunos casos son exactas y en otros, aproximadas) para el caso de la teoría lineal 1D y soluciones semi explícitas en el caso de la teoría no-lineal 1D. Inherentment, el problema 2D se torna aún más complejo ya que entran en juego parámetros que la teoría 1D no tiene la resolución de ver, tales como la finitud de la onda inicial y la oblicuidad con la que incide dicha onda inicial, entre otras.

La generación es un tema importante a la hora de modelar tsunamis. En el caso particular de tsunamis producidos por terremotos, se ha comprobado que la generación de ondas de tsunami, que son de grandes longitudes de onda, es prácticamente instantánea, respecto al tiempo de duración de la fuente del terremoto (Kajiura, 1970), esto significa que la deformación estática del fondo marino es utilizada idénticamente como la forma de onda inicial, lo que permite hablar equivalentemente sobre ola inicial y deformación estática (Okada, 1985), lo cual es consistente con las comparaciones mostradas por Kervella et al. (2007) sobre las generaciones activa y pasiva. También, el supuesto de replicar la deformación submarina en la superficie del agua, es un supuesto adquirido en el modelo NEOWAVE a la hora de modelar numéricamente tsunamis producidos por terremotos.

En este trabajo se han reencontrado las soluciones al problema lineal 1D dadas por Synolakis (1987) y por Tadepalli & Synolakis (1994,1996) y se ha cuantificado la diferencia que surge al resolver el problema de condiciones iniciales por medio de la transformada tiempo-espacio de Fourier contra el problema de condiciones iniciales, para una onda solitaria, obteniendo que para un amplio rango de valores, no hay una diferencia sustancial (Ecuación 7.1) entre

el *runup* calculado en el caso de C.I. (Synolakis, 1987) y de C.B. encontrado en este estudio, a saber,

$$\frac{\mathcal{R}(\text{Condición de borde})}{\mathcal{R}(\text{Condición inicial})} = \sqrt{1 + \frac{H}{d}} \quad (7.1)$$

Se ha exhibido una demostración para la solución del problema no-lineal 1D, esta vez para un sistema dimensional a través del uso de los invariantes de Riemann siendo consistente con las soluciones existentes dadas por Carrier & Greenspan (1958). La linealización de dicha solución permite probar que las teorías no-lineal y lineal predicen de igual manera las alturas de *runup* (Synolakis, 1987).

Para el caso de la teoría lineal 2D, con el uso de la transformada de Fourier espacio-tiempo, se ha probado que cuando se hace incidir una onda solitaria infinitamente extendida, sin importar su ángulo de incidencia, produce un *runup* constante a lo largo de la playa, y de hecho, igual al predicho por la teoría lineal unidimensional. Se ha propuesto una solución para un caso particular de ondas viajeras con una dependencia simultánea y lineal entre el tiempo y la dirección de la playa para una onda solitaria inicial finita o acotada (amortiguada en la dirección transversal a la dirección de propagación) (Ecuación 7.2),

$$\eta(x, y, t) = H \operatorname{sech}^2(\gamma(\sin(\theta)(x - x_1) - a \cos(\theta)y + ct))f(p) \quad (7.2)$$

con $p = \cos(\theta)(x - x_1) + a \sin(\theta)y$, ya que su simpleza permite cuantificar explícitamente el cómo influye la oblicuidad de la incidencia de las ondas, siendo una de las contribuciones más importantes de este trabajo (Ecuación 7.3).

$$\mathcal{R}(y) = f(\cos(\theta)(x_0 - x_1) + a \sin(\theta)y) \sqrt{\sin(\theta)} \mathcal{R}_0 \quad (7.3)$$

con $\mathcal{R}_0 = 2,831H \left(\frac{H}{d}\right)^{\frac{1}{4}} \left(1 + \frac{H}{d}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\cot(\beta)}$.

Gracias a las características de la función f , se tiene cierta libertad para elegirla y así modelar distribuciones de *runup* en la costa.

La solución anterior, del caso lineal 2D, ha sido comparada con el modelo numérico NEO-WAVE descrito en el capítulo 6, encontrándose que la solución analítica cuantifica la distribución de *runup*, en medida de una elección adecuada de la función f y se ha comprobado la sensibilidad de el ángulo de incidencia y de la pendiente de la playa.

En el caso de un segmento de onda solitaria 2D, el máximo *runup*

$$\max_{y \in \mathbb{R}} \mathcal{R}(y) = \sqrt{\sin(\theta)} \mathcal{R}_0$$

estima muy bien el calculado por el modelo NEOWAVE, dentro del dominio de validez de esta solución, y es una generalización clara del trabajo de Synolakis (1987) cuando se considera $\theta = \frac{\pi}{2}$.

La distribución de *runup* en la costa es una función de alto interés ya que indica las zonas de inundación de un tsunami, las cuales son necesarias para alertar a la población frente a un potencial peligro. La obtención de dicha función sólo puede ser aproximada, si se desea una estimación en pocos segundos, ya que una distribución que incluya todos los detalles de batimetría, no-linealidad, dispersión, etc, tarda del orden de horas hasta días en ser calculada por un software numérico, como el caso de NEOWAVE.

Se ha comparado la versión empírica de la distribución dada por Okal & Synolakis (2004), y se ha propuesto un modo más general de confeccionarla pero con un respaldo físico-matemático que explica de forma explícita la influencia de la incidencia de las ondas.

7.1. Perspectivas y desarrollos futuros

Aunque en el presente estudio se han abordado varias líneas de trabajo, aún quedan abiertos algunos puntos que pueden investigarse y/o desarrollarse pero necesitan de un trabajo más exhaustivo. Algunos de estos puntos son

- Estudio del caso 2D no lineal.
- Complejizar batimetría 1D: dos segmentos lineales con diferente inclinación y generalizar a n segmentos.
- Buscar otras formas iniciales de onda que generen un resultado analítico.
- Investigar si es posible corregir la fórmula de distribución de *runup* usando modelos numéricos.
- Estudiar y relacionar el punto crítico en que la fórmula analítica de la teoría lineal 2D deja de ser válida con todos los parámetros del modelo.
- Estimar una relación analítica que describa las diferencias entre las generaciones activa y pasiva, en función de los parámetros del modelo.

Bibliografía

- Abramowitz, M and Stegun, L. A., Dover publications. (1964), *Handbook of mathematical functions*. National Bureau of Standards.
- Arfken, G., (1985), *Mathematical methods for physicists*. Academic Press Inc., San Diego, 3rd edition.
- Carrier G.F. and Greenspan H.P.(1958), *Water waves of finite amplitude on a sloping beach*. J. Fluid Mech. 17, 97-110.
- Carrier G.F. and Noiseux C.F. (1983), *The reflection of obliquely incident tsunamis*. J. Fluid Mech. 133, 147-160.
- Debnath L. Uma B. (1978), *On generation and propagation of tsunamis in a shallow running ocean*. Internat. J. Math. and Math. Sci. Vol. 1, 373-390.
- Okada, Y. (1985), *Surface Deformation Due to Shear and Tensile Faults in a Half-Space*, Bull. Seismol. Soc. Am., 75, 1135-1154.
- Okal, E.A. and Synolakis, C.E. (2004), *Source discrimination for nearfield tsunamis*, Geophysical Journal International, 158, 899-912.
- Kajiura K. (1970), *Tsunami source, energy and the directivity of wave radiation*. Bull. of the Earthquake Research Institute, Vol. 48, 835-869.
- Kervella Y., Dutykh D. and Dias F. (2007), *Comparison between three-dimensional linear and nonlinear tsunami generation models*. Theor. Comput. Fluid Dyn. 21, 245-269.
- Morse P.M. and Feshbach H. (1953) *Methods of Theoretical Physics* Vol. 2, McGraw-Hill Book Co., New York.
- Synolakis C.E. (1986), *The runup of long waves*. *Ph.D. thesis*, Caltech, Pasadena, California, 91125.

- Synolakis C.E. (1988), *On the roots of $J_0(z) - iJ_1(z)$* . Q. Appl. Maths. XLVI (1), 105-108.
- Synolakis C.E. (1987), *The runup of solitary waves*. J. Fluid Mech. 185, 523-545.
- Synolakis C.E. (1991), *Tsunami run-up on steep slopes: How good linear theory really is*. Natural Hazards, 4, 221 - 234.
- Tadepalli S. and Synolakis C.E. (1994), *The run-up on N-waves on sloping beaches*. Proc. R. Soc. Lond. A 455, 99 - 112.
- Tadepalli S. and Synolakis C.E. (1996), *Model for the leading waves of tsunamis*. Phys. Rev. Lett. 77, 2141 - 2145.
- Yamazaki Y., Kowalik Z., Fai Cheung K. (2009) *Depth-integrated, non-hydrostatic model for wave breaking and run-up*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 61, No. 5, pp. 473-497.
- Yamazaki Y., Lay T., Cheung K.F., Kanamori H. (2011) *Modeling near-field tsunami observations to improve finite-fault slip models for the 11 March 2011 Tohoku earthquake*. Geophysical Research Letters, Vol. 38, L00G15, 6 PP.
- Zhang J.E. and Wu Y.T. (1999), *Oblique long waves on beach and induced longshore current*. J. Eng. Mech. Vol. 25, N?7, 812-826

APÉNDICE

Apéndice A

La ecuación de Korteweg - de Vries

La ecuación de Korteweg - de Vries (KdV) es una ecuación de propagación de ondas que incluye tanto efectos de no-linealidad y dispersión a la vez. Esta ecuación tiene muchos usos en física de ondas, para el caso de la teoría de ondas sobre agua poco profunda, la ecuación KdV adquiere la forma

$$\eta_t + c_0\eta_x + \frac{3c_0}{2d}\eta\eta_x + \frac{c_0d^2}{6}\eta_{xxx} = 0 \quad (\text{A.1})$$

donde $c_0 = \sqrt{gd}$.

A.1. Solución solitaria de la ecuación KdV

La solución solitaria se obtiene buscando una solución del tipo,

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= f(\xi) \\ \xi &= x - ct \end{aligned}$$

donde c es la velocidad de la onda, la cual quedará a determinar.

Reemplazando en la ecuación (A.1) se obtiene

$$-cf' + c_0f' + \frac{3c_0}{2d}ff' + \frac{c_0d^2}{6}f''' = 0$$

Integrando,

$$(c_0 - c)f + \frac{3c_0}{2d}\frac{f^2}{2} + \frac{c_0d^2}{6}f'' = A$$

Multiplicando por f' e integrando nuevamente,

$$(c_0 - c) \frac{f^2}{2} + \frac{c_0}{2d} \frac{f^3}{2} + \frac{c_0 d^2}{6} \frac{f'^2}{2} = A\xi + B$$

La onda solitaria se concentra en una región acotada, por lo que decae rápidamente a cero cuando $\xi \rightarrow \pm\infty$, esto significa que $A = B = 0$, así la ecuación anterior queda

$$f'^2 = \frac{6(c - c_0)}{c_0 d^2} f^2 - \frac{3}{d^3} f^3,$$

que es una EDO que puede resolverse por medio de separación de variables,

$$\frac{df}{f\sqrt{a^2 - b^2 f}} = d\xi$$

con $a^2 = \frac{6(c - c_0)}{c_0 d^2}$ y $b^2 = \frac{3}{d^3}$. Integrando,

$$\int \frac{df}{f\sqrt{a^2 - b^2 f}} = \xi + C$$

A través del cambio de variables $f = \frac{a^2}{b^2} \operatorname{sech}^2(\theta)$, la integral se resuelve explícitamente,

$$-\frac{2}{a} \operatorname{sech}^{-1} \left(\frac{b}{a} \sqrt{f} \right) = \xi + C$$

y despejando f ,

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{a^2}{b^2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{a}{2} (\xi + C) \right) \\ f(\xi) &= \frac{2(c - c_0)d}{c_0} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{d} \sqrt{\frac{3(c - c_0)}{2c_0}} (\xi + C) \right) \end{aligned}$$

con lo que

$$\eta(x, t) = \frac{2(c - c_0)d}{c_0} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{d} \sqrt{\frac{3(c - c_0)}{2c_0}} (x - ct + C) \right)$$

Si definimos $C = -x_1$ como el centro de la onda solitaria, en el instante inicial,

$$\eta(x, t) = \frac{2(c - c_0)d}{c_0} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{d} \sqrt{\frac{3(c - c_0)}{2c_0}} (x - x_1 - ct) \right)$$

y si además en $\eta(x_1, 0) = H$, con H la altura de la ola, entonces debe tenerse que,

$$\frac{2(c - c_0)d}{c_0} = H$$

De donde se puede encontrar la velocidad del solitón,

$$c = c_0 \left(1 + \frac{H}{2d} \right)$$

y por tanto, se obtiene finalmente que

$$\eta(x, t) = H \operatorname{sech}^2 (\gamma(x - x_1 - ct)) \quad (\text{A.2})$$

$$\text{con } \gamma = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{3H}{4d}}.$$

Apéndice B

La ecuación de Boussinesq

La ecuación de Boussinesq es otra aproximación para la propagación de ondas en el agua que incorpora efectos de no linealidad y que es válida para grandes longitudes de onda. La ecuación de Boussinesq es,

$$\eta_{tt} - c_0^2 \eta_{xx} - \frac{3c_0^2}{2d} (\eta^2)_{xx} - \frac{c_0^2 d^2}{3} \eta_{xxxx} = 0 \quad (\text{B.1})$$

donde $c_0 = \sqrt{gd}$.

B.1. Solución solitaria de la ecuación de Boussinesq

La solución solitaria se obtiene buscando una solución del tipo

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= f(\xi) \\ \xi &= x \pm ct \end{aligned}$$

donde c es la velocidad de la onda, la cual quedará a determinar.

Reemplazando en la ecuación (B.1) se obtiene

$$c^2 f'' - c_0^2 f'' - \frac{3c_0^2}{2d} (f^2)'' - \frac{c_0^2 d^2}{3} f'''' = 0$$

Integrando dos veces

$$(c^2 - c_0^2) f - \frac{3c_0^2}{2d} f^2 - \frac{c_0^2 d^2}{3} f'' = A\xi + B$$

La onda solitaria se concentra en una región acotada, por lo que decae rápidamente a cero cuando $\xi \rightarrow \pm\infty$, esto significa que $A = B = 0$. Multiplicando por f' e integrando otra vez

$$(c^2 - c_0^2) \frac{f^2}{2} - \frac{c_0^2}{2d} f^3 - \frac{c_0^2 d^2}{3} \frac{(f')^2}{2} = C$$

Por la misma razón que antes, $C = 0$,

$$\frac{(c^2 - c_0^2)}{2} f^2 - \frac{c_0^2}{2d} f^3 - \frac{c_0^2 d^2}{6} (f')^2 = 0$$

que es una EDO que puede resolverse por medio de separación de variables

$$\frac{df}{f \sqrt{a^2 - b^2 f}} = d\xi,$$

con $a^2 = \frac{3(c^2 - c_0^2)}{c_0^2 d^2}$ y $b^2 = \frac{3}{d^3}$. Integrandolo,

$$\int \frac{df}{f \sqrt{a^2 - b^2 f}} = \xi + D$$

A través del cambio de variables $f = \frac{a^2}{b^2} \operatorname{sech}^2(\theta)$, la integral se resuelve explícitamente

$$-\frac{2}{a} \operatorname{sech}^{-1} \left(\frac{b}{a} \sqrt{f} \right) = \xi + D$$

y despejando f ,

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{a^2}{b^2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{a}{2} (\xi + D) \right) \\ f(\xi) &= \frac{(c^2 - c_0^2) d}{c_0^2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{d} \sqrt{\frac{3(c^2 - c_0^2)}{4c_0^2}} (\xi + D) \right) \end{aligned}$$

con lo que

$$\eta(x, t) = \frac{(c^2 - c_0^2) d}{c_0^2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{d} \sqrt{\frac{3(c^2 - c_0^2)}{4c_0^2}} (x \pm ct + D) \right)$$

Si definimos $D = -x_1$ como el centro de la onda solitaria, en el instante inicial

$$\eta(x, t) = \frac{(c^2 - c_0^2) d}{c_0^2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{d} \sqrt{\frac{3(c^2 - c_0^2)}{4c_0^2}} (x - x_1 \pm ct) \right)$$

y si además en $\eta(x_1, 0) = H$, con H la altura de la ola, entonces debe tenerse que

$$\frac{(c^2 - c_0^2) d}{c_0^2} = H,$$

de donde se puede encontrar la velocidad del solitón,

$$c = c_0 \sqrt{1 + \frac{H}{d}}$$

y por tanto, se obtiene finalmente que

$$\eta(x, t) = H \operatorname{sech}^2(\gamma(x - x_1 \pm ct)) \quad (\text{B.2})$$

$$\text{con } \gamma = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{3H}{4d}}.$$

Puede observarse que, en el primer orden

$$c \approx c_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{H}{d}\right)$$

que corresponde a la solución hallada en la ecuación KdV.

B.2. Ecuación de Boussinesq 2D y solución solitaria

Para el caso bidimensional, la ecuación se perturba ligeramente, y la ecuación que rige el movimiento es

$$\eta_{tt} - c_0^2(\eta_{xx} + \eta_{yy}) - \frac{3c_0^2}{2d}(\eta^2)_{xx} - \frac{c_0^2 d^2}{3}\eta_{xxxx} = 0 \quad (\text{B.3})$$

Para buscar la solución solitaria, al igual que antes, se obtiene al poner,

$$\begin{aligned} \eta(x, y, t) &= f(\xi) \\ \xi &= \epsilon_1 x + \epsilon_2 y \pm ct \end{aligned}$$

donde ϵ_1, ϵ_2 están relacionados con la dirección de propagación de la onda.

El tratamiento es exactamente el mismo que antes, con la salvedad que en este caso,

$$a^2 = \frac{c^2 - c_0^2(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)}{d^2 c_0^2}$$

y entonces, la solución solitaria 2D es,

$$\eta(x, y, t) = H \operatorname{sech}^2(\gamma(\epsilon_1(x - x_1) + \epsilon_2 y \pm ct)) \quad (\text{B.4})$$

$$\text{con } c = c_0 \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \frac{H}{d}} \text{ y } \gamma = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{3H}{4d}}.$$

Apéndice C

La función hipergeométrica

La ecuación diferencial de Kummer es,

$$zw'' + (b - z)w' - aw = 0$$

donde a, b son constantes complejas. Esta ecuación tiene dos soluciones linealmente independientes: la función M de *Kummer* y la función U de *Tricomi*:

$$M(a, b, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{(n)}}{b^{(n)}} \frac{z^n}{n!} \quad (\text{C.1})$$

$$U(a, b, z) = \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(a-b+1)} M(a, b, z) + \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} z^{1-b} M(a-b+1, 2-b, z) \quad (\text{C.2})$$

donde $a^{(n)}$ es el *rising factorial* o símbolo de *Pochhammer*

$$a^{(n)} = a(a+1) \cdots (a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \quad (\text{C.3})$$

La ecuación hipergeométrica de Kummer o ecuación hipergeométrica confluyente, es un caso particular de la ecuación hipergeométrica generalizada.

Esta función permite expresar muchas funciones elementales y especiales, por ejemplo,

$$\begin{aligned} M(a, a, z) &= e^z \\ M(1/2, 1, z) &= e^{\frac{z}{2}} I_0\left(\frac{z}{2}\right) \end{aligned}$$

De la definición es fácil deducir relaciones recursivas, por ejemplo

$$\frac{d}{dz} M(a, b, z) = \left(\frac{a}{b} - 1\right) M(a, b+1, z) + M(a, b, z) \quad (\text{C.4})$$

$$(b - a)M(a - 1, b, z) + (2a - b + z)M(a, b, z) = aM(a + 1, b, z) \quad (\text{C.5})$$

Una importante propiedad, es la *Transformación de Kummer*

$$M(a, b, -z) = e^{-z}M(b - a, b, z) \quad (\text{C.6})$$

C.1. Expansiones asintóticas

La función de Kummer cuenta variadas formas asintóticas dependiendo el caso de sus parámetros. Una de ellas es cuando $|a|$ y z son grandes, de modo que $2(b - 2a) > z \gg 1$. Siendo $\cos^2(\phi) = \frac{z}{2(b - 2a)}$, la expresión es

$$M(a, b, z) = \Gamma(b)e^{(b-2a)\cos^2(\phi)}[(b - 2a)\cos(\phi)]^{1-b} \left[\frac{\pi}{2}(b - 2a)\sin(2\phi) \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \sin \left(a\pi + \frac{1}{2}(b - 2a)(2\phi - \sin(2\phi)) + \frac{\pi}{4} \right) + O \left(\left| \frac{1}{2}b - a \right|^{-1} \right) \right\} \quad (\text{C.7})$$

O equivalentemente

$$M(a, b, z) = \Gamma(b)e^{\frac{z}{2}} \left[\frac{z}{2} \sec(\phi) \right]^{1-b} \left[\frac{\pi z}{2} \tan(\phi) \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \sin \left(a\pi + \frac{z}{2}(\phi \sec^2(\phi) - \tan(\phi)) + \frac{\pi}{4} \right) + O \left(\left| \frac{1}{2}b - a \right|^{-1} \right) \right\}$$

Los detalles de estas funciones y otras propiedades pueden verse en “Handbook of mathematical functions” (Abramowitz & Stegun, 1964).

Apéndice D

La ecuación de Sharpe

La ecuación diferencial de *Sharpe* es,

$$zy'' + y' + (z + A)y = 0$$

la cual, es una generalización de la ecuación de Bessel de orden 0 (es el caso cuando $A = 0$), y aparece en la teoría de reflexión de sonido en un paraboloides.

Para resolver la ecuación, se hace la transformación $y(z) = e^{iz}w(z)$, con lo cual,

$$\begin{aligned} y' &= e^{iz}w' + ie^{iz}w = e^{iz}(w' + iw) \\ y'' &= e^{iz}w'' + 2ie^{iz}w' - e^{iz}w = e^{iz}(w'' + 2iw' - w) \end{aligned}$$

Así, la ecuación diferencial queda,

$$\begin{aligned} z(w'' + 2iw' - w) + (w' + iw) + (z + A)w &= 0 \\ zw'' + (2iz + 1)w' + (A + i)w &= 0 \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables $t = -2iz$, la ecuación resultante es

$$tw''(t) + (1 - t)w'(t) - \left(\frac{1 - Ai}{2}\right)w(t) = 0$$

que es la ecuación hipergeométrica de Kummer con $b = 1$ y $a = \frac{1 - Ai}{2}$.

Con esto, las soluciones generales de la ecuación de Sharpe son,

$$y(z) = e^{iz} M\left(\frac{1-Ai}{2}, 1, -2iz\right), e^{iz} U\left(\frac{1-Ai}{2}, 1, -2iz\right)$$

Otras ecuaciones del estilo, pueden ser resueltas con el mismo método, por ejemplo, la ecuación diferencial,

$$zy'' + y' + (\alpha - \beta z)y = 0 \tag{D.1}$$

Considerando el cambio de variables $z = \lambda t$, entonces $y(z) = w(t)$, la ecuación se transforma

$$\begin{aligned} \lambda t \frac{1}{\lambda^2} w'' + \frac{1}{\lambda} w' + (\alpha - \beta \lambda t) w &= 0 \\ tw'' + w' + (\alpha \lambda - \beta \lambda^2 t) w &= 0 \end{aligned}$$

Se escoge λ de modo que $-\beta \lambda^2 = 1$, es decir $\lambda = -\frac{i}{\sqrt{\beta}}$, y así la ecuación queda

$$tw'' + w' + \left(t - \frac{i\alpha}{\sqrt{\beta}}\right) w = 0$$

La cual, es la ecuación de Sharpe, con $A = -\frac{i\alpha}{\sqrt{\beta}}$, y entonces, la solución general de la ecuación (D.1) es

$$\begin{aligned} w(t) &= \left\{ e^{it} M\left(\frac{1-Ai}{2}, 1, -2it\right), e^{it} U\left(\frac{1-Ai}{2}, 1, -2it\right) \right\} \\ y(z) &= \left\{ e^{i\frac{z}{\lambda}} M\left(\frac{1-Ai}{2}, 1, -2i\frac{z}{\lambda}\right), e^{i\frac{z}{\lambda}} U\left(\frac{1-Ai}{2}, 1, -2i\frac{z}{\lambda}\right) \right\} \\ y(z) &= \left\{ e^{-\sqrt{\beta}z} M\left(\frac{1-\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}}{2}, 1, 2\sqrt{\beta}z\right), e^{-\sqrt{\beta}z} U\left(\frac{1-\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}}{2}, 1, 2\sqrt{\beta}z\right) \right\} \end{aligned}$$

Apéndice E

Representaciones Integrales

Muchas de las funciones especiales poseen representaciones integrales de distintos tipos. Las que involucran este trabajo, hacen uso de las funciones de Bessel e hipergeométrica, para las cuales existen diversas representaciones, y en particular, representaciones en forma integral. Los detalles pueden verse en “Handbook of mathematical functions” (Abramowitz & Stegun, 1964).

La integral de Poisson para funciones de Bessel o también conocida como *La segunda integral de Bessel*, establece que

$$J_\nu(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_0^1 (1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(ux) du, \quad \text{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}, x > 0.$$

$$Y_\nu(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(-\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \int_1^\infty (u^2-1)^{-\nu-\frac{1}{2}} \cos(ux) du, \quad \text{Re}(\nu) < \frac{1}{2}, x > 0.$$

donde $J_\nu(\cdot)$ es la función cilíndrica de Bessel y $J_\nu(\cdot)$ es la función de Neumann o de Bessel de segundo tipo.

Notemos que en el caso particular en que $\nu = 0$

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(ux)}{\sqrt{1-u^2}} du \tag{E.1}$$

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{\cos(ux)}{\sqrt{u^2-1}} du \tag{E.2}$$

Por otra parte, de las integrales de Mehler - Sonine,

$$J_\nu(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \int_1^\infty (u^2-1)^{-\nu-\frac{1}{2}} \sin(ux) du, \quad \text{Re}(\nu) < \frac{1}{2}, x > 0.$$

Y en el caso particular en que $\nu = 0$

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{\sin(ux)}{\sqrt{u^2 - 1}} du, \quad x > 0.$$

Utilizando el cambio de variables $u = \cosh(s)$, esta última expresión se transforma en

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(x \cosh(s)) ds, \quad x > 0. \quad (\text{E.3})$$

Similarmente, la función de Kummer admite la siguiente representación integral,

$$M(a, b, z) = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} dt \quad \text{Re}(b) > \text{Re}(a) > 0.$$

otra expresión que la liga con las funciones de Bessel es,

$$M(a, b, -z) = \frac{z^{\frac{1}{2}-\frac{b}{2}}}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-t} t^{a-\frac{b}{2}-\frac{1}{2}} J_{b-1}(2\sqrt{zt}) dt \quad \text{Re}(a) > 0.$$

Apéndice F

Teoremas del Argumento y de Rouché

Estos teoremas, son ampliamente usados cuando se trata de estudiar ceros y polos de funciones en el plano complejo. Sus demostraciones no son mayormente complicadas, y pueden hallarse en cualquier libro de variable compleja, por ejemplo, ver “Mathematical methods for physicists” (Arfken, 1985)

F.1. Teorema del argumento

Este teorema, relaciona el número de ceros y polos de una función meromorfa (función analítica salvo en sus polos), el cual puede interpretarse a través de integrales tipo “*winding number*”. Su enunciado matemático es:

Teorema del argumento

Si f es una función meromorfa en un abierto Ω limitado por una curva cerrada C de modo que ningún cero ni polo pertenece a C , entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

donde N, P son el número de ceros y polos contando multiplicidades, respectivamente.

Synolakis (1986) en su integral de *runup* utiliza este teorema al momento de probar que la función

$$f(z) = J_0(z) - iJ_1(z) \tag{F.1}$$

no tiene ceros en el semiplano superior. En efecto, tomando $C = C_R$, el semicírculo superior de radio R , f es analítica en C_R y por tanto $P = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\
 N &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{J'_0(z) - iJ'_1(z)}{J_0(z) - iJ_1(z)} dz \\
 N &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{-J_1(z) - i(J_0(z) - J_1(z)/z)}{J_0(z) - iJ_1(z)} dz \\
 N &= \frac{1}{2\pi} \oint_{C_R} \left(1 + \frac{J_1(z)/z}{J_0(z) - iJ_1(z)} \right) dz \\
 N &= \frac{1}{2\pi} \oint_{C_R} dz + \frac{1}{2\pi} \oint_{C_R} \frac{J_1(z)/z}{J_0(z) - iJ_1(z)} dz \\
 N &= \frac{1}{2\pi} \oint_{C_R} \frac{J_1(z)/z}{J_0(z) - iJ_1(z)} dz
 \end{aligned}$$

donde se ha usado que $J'_0(z) = -J_1(z)$, $J_{n-1}(z) = \frac{n}{z}J_n(z) + J'_n(z)$ (con $n = 1$) y que una integral cerrada de una función analítica es cero.

Por otra parte, de las expresiones asintóticas de las funciones de Bessel

$$\begin{aligned}
 J_1(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\sin \left(z - \frac{\pi}{4} \right) + e^{Im(z)} O(|z|^{-1}) \right) \\
 J_0(z) - iJ_1(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(e^{-i(z-\frac{\pi}{4})} + e^{Im(z)} O(|z|^{-1}) \right)
 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{|J_1(z)|}{|J_0(z) - iJ_1(z)|} &= \left| \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\sin \left(z - \frac{\pi}{4} \right) + e^{Im(z)} O(|z|^{-1}) \right)}{\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(e^{-i(z-\frac{\pi}{4})} + e^{Im(z)} O(|z|^{-1}) \right)} \right| \\
 &\leq \frac{e^{Im(z)}}{2e^{Im(z)}} \\
 &\leq \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Mientras que si $z = x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 \frac{|J_1(x)|}{|J_0(x) - iJ_1(x)|} &= \frac{|J_1(x)|}{\sqrt{J_0^2(x) + J_1^2(x)}} \\
 &\leq 1
 \end{aligned}$$

Así, se obtiene que

$$\begin{aligned} \left| \oint_{C_R} \frac{J_1(z)/z}{J_0(z) - iJ_1(z)} dz \right| &\leq \int_{|C_R|} \left| \frac{J_1(z)/z}{J_0(z) - iJ_1(z)} dz \right| \\ &\leq \frac{\pi R}{2R} + \frac{2R}{R} \end{aligned}$$

y se puede estimar que,

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2\pi} \oint_{C_R} \frac{J_1(z)/z}{J_0(z) - iJ_1(z)} dz \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi R}{2R} + \frac{2R}{R} \right) \\ &\leq \frac{2 + \pi/2}{2\pi} = 0,5683\dots \\ &< 1 \end{aligned}$$

Como N es un natural, necesariamente $N = 0$, es decir, $J_0(z) - iJ_1(z)$ no tiene ceros dentro de C_R , luego haciendo $R \rightarrow \infty$, se concluye lo mismo para el semiplano superior.

F.2. Teorema de Rouché

Una de las grandes aplicaciones de este teorema, es que permite demostrar de manera muy simple el teorema fundamental del álgebra. Su uso principal está relacionado con la existencia y número de ceros de funciones analíticas. Existe una popular explicación informal de este teorema: Si una persona pasea a su perro con una correa y comienzan a darle vueltas a un árbol, la persona y el perro darán exactamente el mismo número de vueltas al árbol siempre que el largo de la correa sea menor a la mínima vuelta.

El enunciado matemático del teorema es:

Teorema de Rouché (F.2)

Sea $K \subseteq \Omega$ una región acotada de frontera ∂K regular y sean f, g funciones analíticas en K . Si $|f(z) - g(z)| < |f(z)| \forall z \in \partial K$, entonces f, g poseen el mismo número de ceros dentro de K .

