



**UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL**

**MODELO DE HABILITACIÓN DE PUNTOS DE EXTRACCIÓN DE MINAS
SUBTERRÁNEAS EN UN SISTEMA DE OPTIMIZACIÓN DE PLANES
MINEROS DE LARGO PLAZO**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

FERNANDO FELIPE CAVIERES VÁSQUEZ

**PROFESOR GUÍA:
RODOLFO URRUTIA URIBE**

**MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
PATRICIO CONCA KEHL
RAFAEL EPSTEIN NUMHAUSER**

**SANTIAGO DE CHILE
ENERO 2013**

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL
INDUSTRIAL
POR: FERNANDO CAVIERES VÁSQUEZ
FECHA: 16/01/2013
PROFESOR GUÍA: RODOLFO URRUTIA URIBE

MODELO DE HABILITACIÓN DE PUNTOS DE EXTRACCIÓN DE MINAS SUBTERRÁNEAS EN UN SISTEMA DE OPTIMIZACIÓN DE PLANES MINEROS DE LARGO PLAZO

La planificación de las operaciones mineras subterráneas en el largo plazo es un problema con un alto nivel de complejidad debido a la gran cantidad de variables y restricciones que se deben tomar en cuenta. Es por esto que actualmente CODELCO utiliza un modelo de optimización de planes mineros para apoyar la toma de decisiones.

Este modelo matemático es capaz de determinar el momento en que el mineral se debe extraer de los puntos de extracción, una vez estos han sido habilitados, con el fin de obtener el mayor beneficio económico. Sin embargo, este modelo no determina el plan óptimo de habilitación de puntos de extracción, sino que lo recibe como un dato de entrada.

En este trabajo se expandió el sistema de planificación anterior, añadiéndole la capacidad de determinar el plan de habilitación de puntos de extracción, es decir, el periodo cuando cada punto de extracción debe ser comenzado a explotar (lo cual conlleva la realización de obras civiles de preparación), respetando una secuencia de apertura de puntos dada. Esto se logró mediante la modelación de la extracción de columnas como un flujo en redes.

La formulación de la extracción de mineral de una columna como un flujo en redes se basa en crear estados posibles a lo largo de los periodos de planificación (nodos) y arcos que permiten pasar de un estado a otro en periodos consecutivos. Esta nueva formulación permitió fortalecer la solución relajada del problema de planificación, obteniendo resultados menos fraccionarios y con garantías de ser enterizados mediante heurísticas para obtener soluciones factibles aceptables. Además, permite implementar la capacidad de determinar el plan de apertura de puntos de extracción agregando más arcos o posibilidades de solución, al costo de elevar la dificultad del problema y, por lo tanto, los tiempos de resolución.

Para paliar el aumento en los tiempos de resolución, se ha incorporado una metodología de agregación del recurso minero que puede generar reducciones importantes en estos tiempos sin afectar de manera significativa la evaluación económica del negocio. Esto se sustenta en la característica particular de la extracción por hundimiento, donde los puntos de extracción cercanos deben ser explotados de manera similar, por lo tanto, agruparlos en un mismo recurso no afecta de manera sustancial su explotación individual.

Finalmente, los resultados arrojan que el modelo de planificación de área variable es efectivamente capaz de determinar el plan de habilitación económicamente más conveniente y que puede producir mejoras en los beneficios netos del negocio. En un ejercicio de prueba, se han contrastado las soluciones del modelo de área fija con el de área variable y este último ha producido mejoras en el VAN del orden del 3%. Estas mejoras son debidas principalmente al ahorro por postergación de los costos de habilitación de puntos de extracción y a la mejora de los ingresos por el aumento en la flexibilidad de la solución.

A mi padre, Fernando, y a mi madre, Nelly.

*Por ser un ejemplo de perseverancia y constancia para mí.
Porque siempre he sentido su apoyo en todo lo que me he propuesto.
Porque gracias a ellos me he convertido en una persona de bien.*

Y, sobretodo, por su amor.

Gracias, los amo.

Tabla de Contenidos

1.	Introducción.....	1
2.	Objetivos.....	3
2.1.	Objetivo General	3
2.2.	Objetivos Específicos	3
2.3.	Justificación.....	3
2.4.	Alcances	5
3.	Marco Teórico.....	6
3.1.	Definición del Problema.....	6
3.2.	Construcción del Modelo	8
3.3.	Solución del Modelo	9
3.4.	Validación del Modelo	10
4.	Descripción de las Operaciones Mineras Subterráneas.....	12
4.1.	Labores de Minería.....	12
4.2.	Unidades Operacionales	15
4.2.1.	Recurso Minero	15
4.2.2.	Puntos de Extracción.....	15
4.2.3.	Subsectores.....	17
4.2.4.	Sectores	18
4.3.	Tareas de Procesamiento	19
5.	Modelo de Optimización	22
5.1.	Datos de Entrada	22
5.1.1.	Estado de la Mina.....	22
5.1.2.	Parámetros Técnicos	22
5.1.3.	Parámetros Económicos	23
5.2.	Modelo Matemático	24
5.2.1.	Función Objetivo.....	24
5.2.2.	Variables	25
6.	Definición del Problema.....	26
6.1.	Metodología de Apertura de Área Fija.....	28
6.2.	Metodología de Apertura de Área Variable	30
7.	Método de Agregación del Recurso Minero.....	33
7.1.	Criterios de agrupación de puntos de extracción.	34
7.1.1.	Criterio de distancia máxima	34
7.1.2.	Criterio de secuencia máxima	35
7.2.	Generación de columnas	36
7.3.	Validación de la Metodología	38

8.	Modelación de la Extracción de Columnas como un Flujo en Redes	42
8.1.	Formulación matemática del modelo de flujo en redes.....	47
8.1.1.	Índices	47
8.1.2.	Variables de Decisión	47
8.1.3.	Nuevos Conjuntos	47
8.1.4.	Nueva Variable.....	47
8.1.5.	Nuevas Restricciones	48
8.2.	Habilitación de Área Variable usando arcos	52
9.	Validación del Modelo.....	53
9.1.	Características de la Instancia de Validación	53
9.1.1.	Estado de la mina	53
9.1.2.	Parámetros Técnicos	54
9.1.3.	Parámetros Económicos	55
9.2.	Definición de las instancias de validación	55
9.2.1.	Heurística de Redondeo	56
9.3.	Resultados	59
9.3.1.	Efecto de la extracción de columnas como un flujo en redes	59
9.3.2.	Efecto de la habilitación de área variable	61
10.	Conclusiones.....	64
11.	Bibliografía.....	66
12.	Anexos.....	69
12.1.	Formulación Matemática Original del Modelo de Optimización, sin Flujo en Redes para las Columnas.	69
12.1.1.	Índices	69
12.1.2.	Conjuntos	70
12.1.3.	Parámetros.....	71
12.1.4.	Variables de decisión	74
12.1.5.	Restricciones	77
12.1.6.	Función objetivo	83

1. Introducción

En Chile, la minería es uno de los sectores productivos con mayor aporte al Producto Interno Bruto Nacional. En el año 2011, según información entregada por la Comisión Chilena del Cobre COCHILCO, la actividad minera explica hasta un 18% del PIB, de los cuales un 89% se atribuye exclusivamente a la minería del cobre. [1]

El cobre se produce, principalmente, bajo la forma de cátodos, concentrados y refinados a fuego y es efectuada por tres grupos de empresas de la minería del cobre: Gran Minería, representada por 17 empresas privadas y una estatal, la Corporación Nacional del Cobre (Codelco), que han producido entre el 90 y 94% del total nacional en los últimos 7 años; Mediana Minería, representada por unas 22 empresas principalmente nacionales, que produjeron entre el 5 y el 7% y Pequeña Minería, que produjo del orden del 1% de dicho total. La producción del 2011 alcanzó a 5.3 millones de toneladas métricas finas [2].

Si bien, la producción del cobre se encuentra compartida con empresas mineras extranjeras como, Xstrata, Anglo American, BHP Billiton, entre otras, es Codelco quien lidera la industria minera nacional con un 34% de la producción de cobre al 2011 y a nivel internacional su producción equivale al 11% del total mundial el mismo año. [3]

Actualmente, el 70% de mineral de Codelco proviene de minas a rajo abierto y sólo el 30% de subterráneas; sin embargo, la producción futura de Codelco en el mediano plazo provendrá mayoritariamente de minas subterráneas. En efecto, los proyectos Mina Chuquicamata Subterránea, en 2018, y Nuevo Nivel Mina El Teniente, en 2017, contribuirán a invertir la actual relación entre producción a rajo abierto y bajo tierra [4]. Estos grandes proyectos, consideran cuantiosas inversiones de dinero, cercanas a 3,800 millones de dólares en el caso del Proyecto Mina Chuquicamata Subterránea [5] y a 3,500 millones de dólares en el caso del Nuevo Nivel Mina El Teniente [6].

En consecuencia, la minería subterránea es la gran palanca de desarrollo de que dispone Chile y, como es natural, requiere condiciones adecuadas para desarrollarse y así proporcionar los resultados que el país espera. Sobremanera, los elevados niveles de inversión implican una minuciosa planificación de los proyectos que justifique el riesgo. La evaluación de planes mineros es fundamental para efectuar una correcta selección de los proyectos a realizar e, igualmente, asignar recursos financieros que permitan llevarlos a cabo.

La planificación de las operaciones mineras en el largo plazo es un problema con un alto grado de complejidad, debido a la elevada cantidad de decisiones a considerar, tales como: la extracción, transporte y almacenamiento de mineral, las labores de concentración y obtención de mineral refinado, las restricciones tecnológicas y de presupuesto, y todo esto durante un horizonte que puede extenderse varias décadas [7].

En operaciones mineras subterráneas de gran envergadura, las decisiones más importantes respecto a la planificación de la explotación corresponden a la cantidad de puntos de extracción a habilitar en cada periodo del horizonte de evaluación y, cuánto mineral extraer anualmente de cada uno de ellos. Estas variables afectan las características del mineral que se obtendrá cada periodo y, por lo tanto, repercuten directamente en el valor del negocio. Al extraer mineral con mejores leyes en los periodos más próximos, se produce más cobre fino al inicio de la evaluación generando mayores beneficios económicos. [8]

Dada la complejidad de la planificación de operaciones mineras subterráneas, una manera de abordarla, consiste en dividir el proceso total y resolver por etapas cada subproblema. Al usar esta metodología, se deja de ver el proceso completo y se pueden perder oportunidades de aumentar el valor del negocio.

En este contexto, la Corporación Nacional del Cobre de Chile (Codelco), ha utilizado durante varios años sistemas computacionales que dan apoyo a la elaboración de planes mineros mediante formulaciones matemáticas de problemas de optimización. [9]

Para abordar este problema, actualmente se utiliza un modelo de planificación minera que es capaz de optimizar la cantidad de mineral que se extrae de cada unidad de producción en cada periodo de la vida del proyecto. Esta planificación se realiza de manera integral, considerando tanto las restricciones de la extracción como las de planta. Involucrando tanto variables mineras como de presupuesto y tecnológicas. De esta manera, se evalúa el proceso integrado mina-planta [7]. Sin embargo, este modelo no determina el plan óptimo de habilitación de puntos de extracción, sino que lo recibe como un dato de entrada.

En este trabajo, se desea implementar un sistema de planificación minera subterránea de largo plazo que sea capaz de determinar de manera simultánea la cantidad óptima de puntos de extracción a habilitar en cada periodo del horizonte de evaluación y el mineral anual a extraer de cada uno de ellos, con el fin de generar el mayor beneficio económico.

Para lograr este objetivo, se plantea incorporar al modelo actual la capacidad de determinar la cantidad óptima de puntos de extracción a habilitar en cada periodo del horizonte de evaluación.

La introducción de esta característica en el modelo de optimización genera un incremento en la complejidad del problema, tanto en el modelamiento como en la implementación. La inserción de nuevas variables aumenta el tamaño del problema, lo cual tiene directa incidencia en los tiempos necesarios para obtener una solución. Es por esto que se ha considerado utilizar algún método de agregación que permita compensar este incremento en los tiempos de resolución. Pero lo más importante es que, optimizar el plan de habilitación de puntos de extracción produce beneficios directos en el valor neto de un proyecto. Por ejemplo, si se sitúa el VAN de un proyecto minero de gran envergadura, como los que se desarrollan en CODELCO, alrededor de los MUS\$ 4,000, una mejora de tan solo 3% en el valor presente neto del negocio implica un aumento aproximado de US\$ 120,000,000. Un aumento de este orden no es extraño para mejoras de este tipo [7].

2. Objetivos

2.1. Objetivo General

La finalidad de este trabajo consiste en implementar un sistema de optimización de planes mineros subterráneos de largo plazo que sea capaz de determinar la cantidad óptima de puntos de extracción a habilitar en cada periodo del horizonte de evaluación y que decida cuánto mineral extraer de cada uno de ellos anualmente, con el fin de generar el mayor beneficio económico.

2.2. Objetivos Específicos

- Determinación y comprensión de los elementos más relevantes de la extracción de mineral en operaciones subterráneas que se desean modelar.
- Análisis del actual sistema de optimización y evaluación de planes mineros subterráneos de largo plazo: detalles del modelo de optimización, plataformas donde se desarrolla.
- Formulación de un modelo de programación matemática, en base al actual modelo, que considere los puntos a habilitar por periodo como una variable de decisión.
- Implementar una metodología que permita reducir los tiempos de resolución del problema de optimización.
- Validación del modelo de optimización mediante contrastes con el modelo actual, en términos de generación de beneficios económicos y tiempos de resolución.

2.3. Justificación

La planificación de las operaciones mineras en el largo plazo es una tarea muy compleja debido a la gran cantidad de variables, decisiones y consideraciones que se deben tener en cuenta. Un plan minero consiste en la programación de la extracción de minerales, transporte, procesos de concentración y obtención de productos comerciales, teniendo como interrogantes los montos y momentos de inversión, considerando un sistema con capacidades de transporte y procesamiento en un horizonte de evaluación que puede llegar a varias décadas.

Aunque estos problemas son simultáneos y están altamente relacionados, en la práctica se resuelven secuencialmente, la solución de uno de ellos es el punto de partida para resolver el siguiente. Esta práctica aparece por la dificultad metodológica para plantear un enfoque integrado [7].

Hay conciencia de que las soluciones parciales son subóptimas para el problema en su conjunto y la integración ofrece grandes beneficios potenciales. Sin embargo, mientras mayor se la cantidad de consideraciones que tome en cuenta la formulación del modelo de optimización, mayores se hacen las dimensiones del problema y, por lo tanto, este se vuelve más difícil de resolver. Esta dificultad se traduce en largos tiempos de espera para obtener un resultado factible e incluso en la imposibilidad de obtener uno con la tecnología actual.

Santibañez [8] en su trabajo, ejemplifica cómo evoluciona el tiempo de resolución de un problema de planificación minera subterránea al aumentar las dimensiones del modelo, llegando a incrementos de hasta un 60% del tiempo, al incorporar solo un periodo al horizonte de evaluación. Al pensar en un plan que puede abarcar varias décadas, el incremento en el tiempo puede volverse intolerable.

El modelo de planificación que se tiene actualmente, recibe el plan de habilitación en sectores subterráneos como un parámetro, es decir, el periodo en que se comienza a explotar un punto de extracción, dejando como única variable de decisión la cantidad de mineral que se saca por periodo de cada punto. Si además, el modelo fuera capaz de determinar la cantidad de puntos que se pueden comenzar a extraer por periodo, es decir, determinar el área nueva óptima por periodo, se agregaría una nueva variable de decisión, incrementando el universo de soluciones posibles, entre las cuales se pueden encontrar aquellas con un mayor beneficio económico. Por otro lado, se aumentaría la cantidad de variables de decisión volviendo el problema aún más difícil de resolver.

Dado esto, en este trabajo no sólo se desea implementar un modelo de optimización con las características mencionadas sino que además se pretende que este modelo pueda entregar soluciones en tiempo razonables. Para esto, se plantea la incorporación alguna metodología que ayude a reducir los tiempos de resolución.

En resumen, lo que se propone es un sistema que resuelve de manera integral el problema de la planificación de una operación minera subterránea, determinando óptimamente la habilitación de puntos de extracción y la extracción de mineral, y que es capaz de entregar soluciones en tiempos razonables, que permiten generar un mayor beneficio económico.

Goic [9] y Caro [7] muestran, en sus trabajos en modelos de planificación minera integrada, que las soluciones sugeridas por estos pueden generar beneficios del orden del 2% por sobre las soluciones generadas por los métodos tradicionales. Sin embargo, en instancias que ofrezcan al modelo más alternativas de solución, dichos beneficios pueden superar un 4% del valor económico del negocio.

En valores de la gran minería del cobre en Chile, un proyecto subterráneo como Mina Chuquicamata Subterránea, puede alcanzar una valoración económica cercana a los MUS\$ 4,000 [10]. Esto significa que un incremento del 4% en el valor económico del negocio implica aumento en los beneficios por MUS\$ 160.

2.4. Alcances

- Para realizar las pruebas de implementación y posterior validación del nuevo modelo de Área Variable, se usará un computador con las siguientes características:
 - Procesador Intel Core i7-2630QM de 2 GHz, de 8 nucleos.
 - 6 GB de memoria RAM.
 - Sistema Operativo Windows 7 Home Premium de 64 bits.
- Para diseñar el nuevo modelo de planificación, se utilizarán los mismos sistemas y lenguajes de desarrollo sobre los cuales se construyó el modelo base.

Esta decisión se ha tomado tras evaluar el alto costo de migrar de sistemas de desarrollo, pero sobre todo a que existe un conocimiento previo de los lenguajes que no se desea perder. Dado esto, se prevé que no existen problemas con seguir utilizando los mismos.

Inicialmente, los datos de entrada se ingresan a una base de datos (MSAccess) y son procesados para generar archivos con la información en formatos predefinidos que serán usados por el modelo de optimización. El procesamiento de la información se realiza mediante un programa generado en lenguaje Delphi por lo cual, la generación de nueva información requerirá modificar este programa según sea necesario.

Para realizar la optimización, se usa el lenguaje de modelamiento matemático GAMS [11], y CPLEX [12] como solver. Lo que implica que cualquier modificación al modelo actual debe efectuarse usando este lenguaje, de lo contrario, se debiese migrar todo el modelo actual al nuevo lenguaje de modelación.

- La teoría subyacente en el desarrollo de este proyecto está ligada fuertemente a los trabajos realizados por previamente por Santibañez [8], Goic [9] y Caro [7].

El Sistema MUCH utiliza modelos matemáticos de programación lineal mixta que resuelven un problema del tipo "optimización de flujos en redes capacitadas". Los materiales provenientes de los yacimientos fluyen a través de una red de procesos y pagan el costo asociado al pasar por sus nodos, donde pueden sufrir transformaciones. Finalmente el material llega a un nodo terminal donde se puede obtener un beneficio monetario asociado a las características del producto.

El proceso recién mencionado puede separarse en dos etapas: La planificación de la extracción del recurso de una mina subterránea y la asignación de flujo de materiales en la red de procesos.

El desarrollo de este proyecto se centra fundamentalmente en la planificación de la extracción del recurso de una mina subterránea. Es por este motivo que no resulta necesario mencionar la completitud de las restricciones del proceso minero completo hasta la obtención y venta del producto final.

3. Marco Teórico

El desarrollo de un modelo de programación matemática está inmerso en el ámbito de la Investigación Operativa. A continuación se presenta el marco general de la metodología de investigación de operaciones [13], aplicado al caso específico del problema en estudio:

3.1. Definición del Problema

Definir el problema corresponde a identificar el ámbito del sistema bajo estudio, establecer el objetivo del mismo e identificar las alternativas de decisión del sistema.

Para establecer el ámbito es necesario desarrollar un modelo conceptual del sistema. Esto consiste en identificar sus componentes y las relaciones existentes entre ellas, definir los límites o fronteras del mismo, el medio ambiente, y las posibles influencias de éste sobre el sistema.

Para definir el objetivo del estudio es necesario identificar el comportamiento del sistema que se desea modificar, ya sea porque se quiere mejorar o porque se considera inadecuado o inconveniente. Este comportamiento que se desea modificar es sólo un síntoma y está asociado a una o más causas, por lo que se requiere observar el sistema a fin de realizar un diagnóstico de las posibles causas. Una vez identificado el conjunto de causas se puede definir el objetivo específico del estudio y proponer diferentes cursos de acción conducentes al logro de los objetivos planteados. Para esto la Investigación Operativa propone identificar las decisiones que son tomadas en el ámbito del sistema y que son susceptibles de ser tomadas en forma diferente. Los objetivos específicos deben ser cuantificables a fin de poder evaluar la eficiencia y/o eficacia de las soluciones propuestas.

Se denomina medida de efectividad el o los criterios que permiten cuantificar los objetivos específicos.

Tanto en la definición del ámbito como de los objetivos del estudio es importante considerar los objetivos de la organización, del solicitante del estudio y de los participantes involucrados en las decisiones consideradas. En cuanto a la generación de alternativas la idea es seleccionar un número reducido de ellas, las que se estime que son más efectivas.

Para el desarrollo de lo anterior hay aspectos que es aconsejable tener en cuenta y que se mencionan brevemente a continuación:

- **La dimensión espacial del sistema:** se refiere a definir los límites entre el sistema y el medio ambiente o marco de referencia. Define, por ejemplo, si el sistema en estudio corresponderá a las actividades realizadas al interior de toda la mina, o sólo a algunos de los sectores productivos de ella, descartando el resto.

- **La dimensión temporal del sistema u horizonte:** corresponde a la definición del período para el cual se hará el diseño y al establecimiento de las unidades temporales dentro del período. A modo de ejemplo, el modelo de planificación puede tener un horizonte de un año, pero este puede ser dividido en meses, trimestres, semestres, etc. Los sub-períodos no tienen necesariamente la misma extensión. Se acostumbra a definir los primeros períodos más cortos que los finales, puesto que la capacidad de predicción disminuye hacia el final del horizonte.
- **Nivel de las decisiones:** corresponde a definir cuáles son las decisiones que aborda el estudio y cuáles son las no consideradas. Se debe diferenciar en este punto entre las decisiones estratégicas y las operativas, siendo las primeras aquellas que comprometen, por lo general, a gran parte de la organización y sus objetivos, y son de largo plazo; mientras que las decisiones operativas están focalizadas al interior de la organización, con bajo impacto sobre el resto de la misma y referidas al corto plazo.
- **Separabilidad de las decisiones:** se refiere al nivel de interrelación existente entre las diferentes decisiones posibles de ser abordadas en el estudio. Esto está íntimamente relacionado con la dimensión espacial del sistema y el nivel de las decisiones a considerar. Si bien las decisiones tomadas por una componente del sistema generan siempre reacciones, el grado de influencia de la reacción sobre la componente en cuestión puede ser distinto. Es posible separar componentes de un sistema cuando el nivel de influencia de las reacciones a las decisiones tomadas en una componente es débil.
- **Grado de precisión numérica:** se refiere al error que se está dispuesto a aceptar en los valores numéricos de la solución. Evidentemente, la solución tendrá por lo menos el error que contienen los datos.
- **Tiempo y recurso humano disponible:** se refiere a los plazos establecidos para el estudio y al equipo de trabajo y sus características: número de personas, especialidad, etc.
- **Tecnología disponible:** corresponde a las metodologías con que se cuenta y a las características de los sistemas computacionales. La selección de la metodología a utilizar es importante, puesto que influye fuertemente en el enfoque con que se analizará el problema y en el tipo y calidad de las soluciones. Se deben estudiar: la conveniencia de metodologías existentes y que se encuentran disponibles como producto computacional comercial, versus el desarrollar una nueva forma de resolución; características de los equipos computacionales existentes en la organización; costos y características de otros equipos; etc.

3.2. Construcción del Modelo

Una de las principales características de la investigación operativa es la utilización de modelos matemáticos en la resolución de los problemas. Un modelo es una representación idealizada de una situación u objeto concreto. Modelar una situación, en base a los objetivos, implica capturar, por medio de un proceso de abstracción, los factores dominantes que determinan el comportamiento del sistema en estudio. La calidad del modelo, esto es cuán bien representa la realidad, depende de la percepción, creatividad, intuición e imaginación del modelador.

En la práctica no se pueden considerar todos los factores y todas las relaciones existentes entre ellos, por lo tanto deben seleccionarse aquellos que sean más significativos, esto es, aquellos que tengan un mayor impacto sobre los objetivos establecidos. Esto quiere decir que el modelo es una aproximación de la realidad.

Los modelos matemáticos emplean elementos matemáticos en la representación: símbolos, variables, funciones, etc. Muchas de las aplicaciones de Investigación Operativa utilizan este tipo de modelos para generar y evaluar alternativas de solución.

Los elementos característicos de un modelo matemático son: variables, restricciones y medidas de efectividad. Las restricciones y la medida de efectividad expresan cuantitativa o matemáticamente las relaciones entre las variables. Las restricciones representan las limitaciones que debe imponerse a las decisiones consideradas. Por otra parte, la medida de efectividad corresponde al criterio que se utilizará para comparar distintas alternativas de diseño. Esto es, establece cuál es el criterio para considerar una alternativa mejor que otra.

Las variables pueden ser:

- **Variables de decisión o endógenas:** representan las decisiones cuantificables abordadas por el estudio, cuyos valores se intenta determinar por medio de la resolución del modelo. Es posible, en algunas casos, incluir en esta variable distintas alternativas de diseño.
- **Variables exógenas o parámetros:** representan aquellas decisiones que fueron o son tomadas fuera del ámbito del sistema considerado. Desde el punto de vista del modelo, éstas variable son datos, que pueden tener comportamientos aleatorios o determinísticos.
- **Variables de estado:** son variables que caracterizan la situación en que se encuentra el sistema en un instante dado y su valor depende de las variables de decisión y de los parámetros.

De esta forma, resolver el modelo implica intentar determinar el valor de las variables de decisión de modo que se cumplan las restricciones y que se obtenga el mejor valor posible, es decir, que se optimice la función objetivo. Los modelos que optimizan la función objetivo se denominan modelos de programación matemática.

A pesar de lo atractivo que puede resultar éste enfoque, en la práctica existen muchas situaciones donde las características de las decisiones no permiten construir un modelo matemático adecuado. Por otro lado, aún cuando sea posible construir un modelo matemático, el grado de complejidad y el tamaño del mismo puede ser tal que no es posible resolverlo con las técnicas matemáticas y computadores disponibles hasta el momento.

3.3. Solución del Modelo

Determinar la solución de un modelo matemático consiste en determinar los valores de las variables de decisión de manera que se cumplan las limitaciones o restricciones consideradas y que se optimice la medida de efectividad/eficiencia establecida. Para el investigador operacional experimentado esta etapa es, por lo general, sencilla puesto que se trata de seleccionar y aplicar la técnica más adecuada para el modelo. Muchas de las técnicas de investigación operativa se encuentran disponibles en paquetes computacionales comerciales. Sin embargo, para problemas complejos, en muchas ocasiones es necesario desarrollara metodologías especializadas de solución.

La solución puede obtenerse de diversas formas, dependiendo de las características del modelo:

- **Solución analítica:** por medio de operaciones de cálculo, el valor de las variables de decisión se establece explícitamente en función de los parámetros del modelo.
- **Solución numérica:** los valores de las variables de decisión, en este caso, se obtiene por medio de algoritmos o métodos. Los algoritmos son generalmente iterativos, esto significa que dada una solución inicial, que pueda o no cumplir con las restricciones, en cada iteración los valores de las variables se modifican de modo de mejorar el valor de las medidas de efectividad asociadas. Si cada nueva solución examinada mejora el valor de la medida de efectividad se dice que el algoritmo converge a la solución óptima. En cada iteración se analiza si es posible mejorar la solución, cuando esto no es posible quiere decir que la solución obtenida es óptima.

Desafortunadamente, no es posible resolver todos los modelos matemáticos por medio de algoritmos. Esto se debe, por una parte, a que la rapidez de convergencia de los algoritmos disponible es lenta, es decir, se requiere un gran número de iteraciones para obtener la solución óptima. Por otra parte, la complejidad del modelo puede ser tal que resulte imposible obtener computacionalmente una solución óptima. Para algunas de estas situaciones se han desarrollado métodos denominados heurísticas, que son también iterativos pero que no garantizan optimalidad de la solución, tratan sólo de determinar buenas soluciones y están basados en reglas simples. Este tipo de métodos se utilizan como parte de algoritmos optimizantes, a fin de acelerar la convergencia, o bien para obtener soluciones aceptables no necesariamente óptimas.

Además de la solución del modelo es conveniente proveer información acerca del comportamiento de la solución ante variaciones en los valores de los parámetros del modelo. Esto se denomina análisis de sensibilidad. Este análisis permite determinar cuáles

son los parámetros críticos del modelo. En la práctica gran cantidad de los valores de los parámetros poseen incertidumbre, es decir, son estimaciones, en cuyo caso es necesario estudiar el comportamiento de la solución obtenidas en una vecindad de los valores estimados, particularmente para los más críticos.

3.4. Validación del Modelo

Se trata de analizar la capacidad del modelo para predecir razonablemente el desempeño del sistema. El mejor modelo es aquel que mejor predice y no aquel que se ajusta mejor a los datos. En primer lugar, es necesario verificar si la solución es razonable, para enseguida realizar pruebas de consistencia, validez de los supuestos, etc. Un modelo puede resultar que no es válido debido a que, por ejemplo, se omitieron variables o relaciones relevantes, se incluyeron otras no pertinentes, existen relaciones inadecuadas o inconsistentes, algunos valores de los datos han sido estimados incorrectamente o con un error mayor que el aceptable, etc. Mientras el modelo y su solución no se consideren satisfactorios, deben efectuarse las correcciones necesarias.

Para los sistemas que están operando, la metodología tradicionalmente utilizada para validar un modelo consiste en una prueba retrospectiva, esto es, estudiar la capacidad del modelo para predecir la situación actual, a partir de datos de períodos anteriores. El modelo será válido si es capaz de reproducir el comportamiento del sistema en el pasado. Surge, entonces la pregunta ¿el sistema se comportará en el futuro, de la misma forma que en el pasado?. Otra alternativa es probar el modelo con conjuntos de datos experimentales, es decir, que caracterizan situaciones diseñadas para tal propósito.

Para sistemas que no están operando pueden utilizarse datos experimentales o bien datos obtenidos de un modelo de simulación.

El esquema de la figura siguiente representa las etapas descritas anteriormente y que conceptualizan la metodología de Investigación de Operaciones.

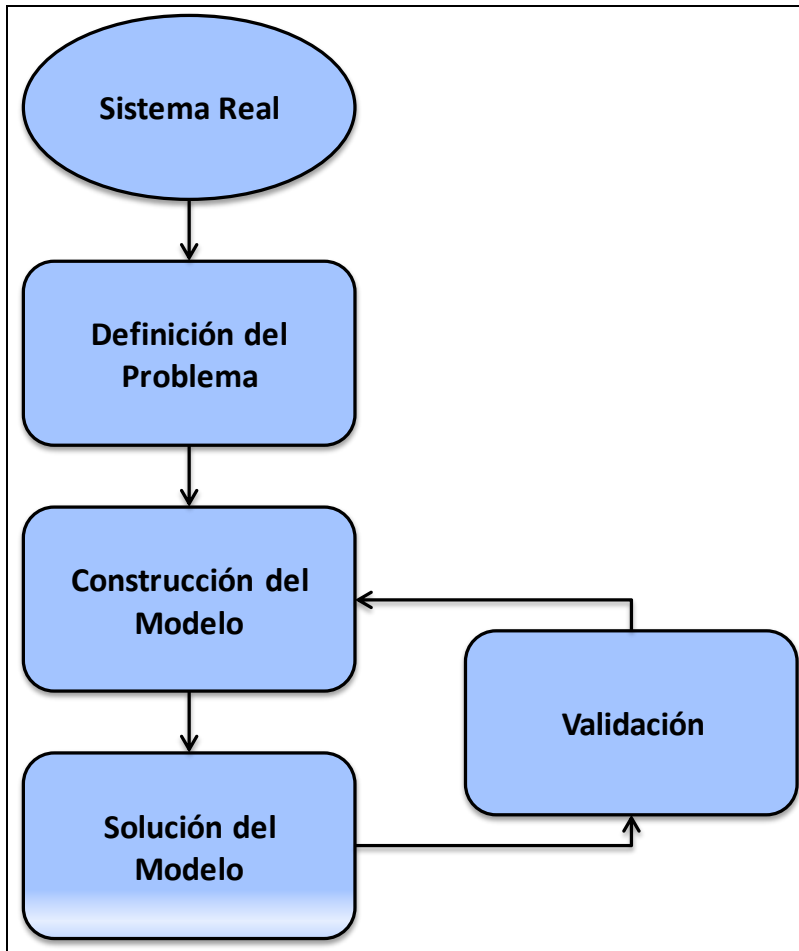


Figura 3-1: Esquema de la Metodología de Investigación de Operaciones.

4. Descripción de las Operaciones Mineras Subterráneas

El proceso minero puede entenderse, a grandes rasgos, como una secuencia de procesos desde que se extraer el mineral en los yacimientos hasta que se obtiene un producto refinado o comercial.

Esta secuencia de procesos puede dividirse en dos partes claramente diferenciables: las **labores de minería**, que constituyen las operaciones de socavación de la mina y la extracción del mineral, y las **tareas de procesamiento**, donde el mineral extraído es sometido a los procesos de concentración, fundición y refinería.

4.1. Labores de Minería

La explotación subterránea consiste en la extracción del mineral de un yacimiento por debajo de la superficie del terreno mediante la construcción de galerías y piques, utilizando algún método de explotación.

La determinación del método de explotación depende de elementos como [8] :

- La geometría del cuerpo mineralizado.
- La calidad geomecánica de la roca mineralizada.
- La cantidad, leyes y distribución de los recursos geológicos.
- La ubicación y el entorno de la mina.

A estos elementos técnicos se debe incorporar, la estructura de costos, el porcentaje de recuperación, la seguridad, el precio del mineral, etc.

Las operaciones de la gran minería del cobre en Chile, como El Teniente [8] o Chuquicamata Subterránea [10] utilizan principalmente 2 métodos de explotación: el *Panel Caving*, en el cual se quiebra gran cantidad de área en cada operación; y el *Block Caving*, que permite ir avanzando en pequeños frentes de menor área que los utilizados con *Panel Caving*. Ambos corresponden a métodos donde se induce el hundimiento del mineral por efecto gravitacional.

Los métodos de hundimiento *Block/Panel caving* se utilizan frecuentemente en la gran minería del cobre debido sus bajos costos y alta efectividad en la extracción del mineral. [14]. La diferencia entre ambos métodos es que al usar *block caving* se divide el yacimiento en sectores menores que pueden ser habilitados brindando la posibilidad de cambiar el orden de la extracción cuando sea necesario al costo de complejizar la operación, mientras que el *panel caving* se quiebran grandes áreas del yacimiento, simplificando la extracción pero restando capacidad de modificar la extracción.

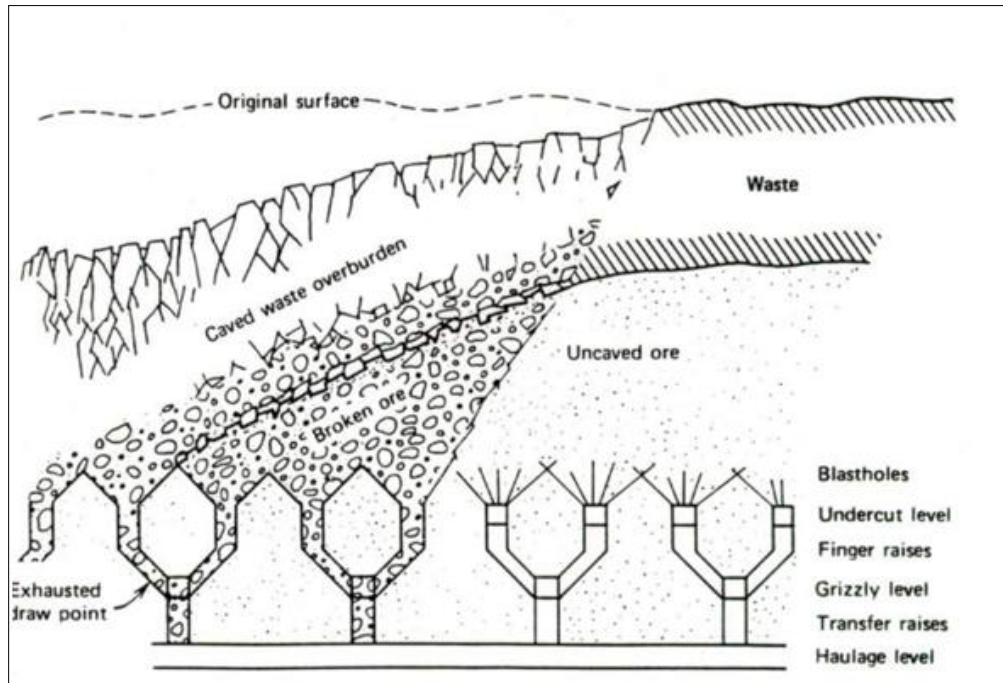


Figura 4-1: Método de explotación subterránea: *Block Caving*. [Fuente: Roberto Oyarzun, (Online) Métodos de explotación más comunes en minería subterránea]¹

La extracción del mineral se realiza a través de un sistema de niveles operacionales que permiten ir transportando el mineral desde el nivel de producción, a niveles inferiores en los cuales se va procesando. Los niveles principales asociados a la producción misma se describen a continuación [8]:

- **Nivel de Hundimiento:** En este nivel es donde se realiza la socavación de las columnas de mineral por medio de explosiones que fragmentan la roca. Esta fragmentación hace que el mineral pueda bajar debido a la gravedad.
- **Nivel de Producción:** Este nivel se encuentra inmediatamente debajo del nivel de hundimiento. Aquí operan las palas autocargables LHD que se encargan de recopilar el mineral desde los puntos de extracción y cargarlo hasta un punto de vaciado, que se comunica con los niveles de reducción a través de un sistema de piques. El proceso de abrir un punto de extracción también se realiza mediante el uso de explosivos. La idea es formar un "embudo" por donde caerá el mineral fragmentado en el nivel de hundimiento.

¹ Fecha de visita: 2012-12-08. Web: http://www.ucm.es/info/crismine/Metodos_explotacion.htm

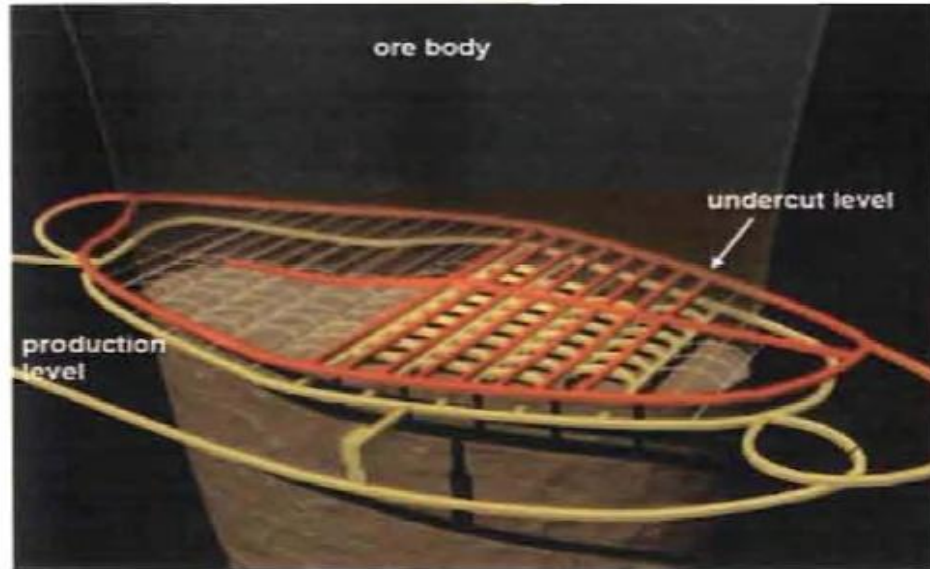


Figura 4-2: Niveles de Hundimiento (Undercut level) y Producción en un Sector Subterráneo. [Fuente: Imagen modificada de la animación de block caving de Sandvik Tamrock]

- **Nivel de Reducción:** Está ubicado justo por debajo del nivel de producción. El material obtenido en el nivel de producción es depositado en piques que lo conectan con este nivel. Aquí se ubican zonas equipadas con parrillas y martillos que reducen el tamaño de la roca hasta tamaños adecuados para las etapas siguientes.

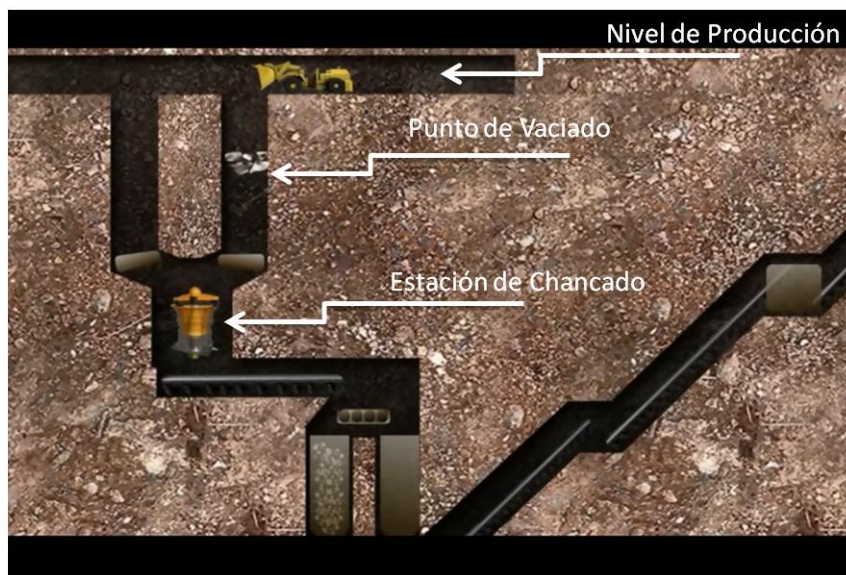


Figura 4-3: Esquema nivel de reducción bajo el nivel de producción de una mina subterránea. [Fuente: Imagen modificada de la animación Proyecto Mina Chuquicamata Subterránea de Codelco]

4.2. Unidades Operacionales

4.2.1. Recurso Minero

Para poder tomar cualquier decisión es necesario primeramente identificar el recurso minero que se quiere explotar. Esto se hace mediante la caracterización del recurso en un modelo tridimensional compuesto por bloques. El bloque es la unidad básica en que se divide conceptualmente el recurso geológico. Cada bloque tiene asociadas características como tonelaje, leyes de minerales, posición y otros, que son determinados mediante métodos estadísticos de geología.

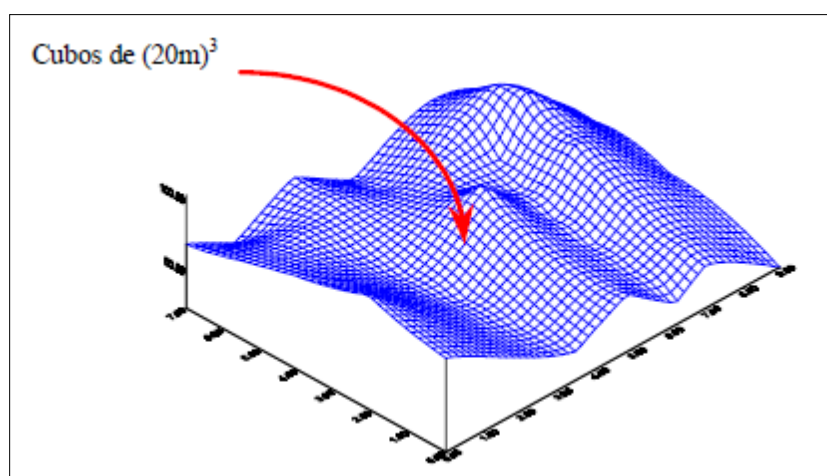


Figura 4-4: Discretización del Recurso Minero en un Modelo de Bloques de 20x20x20m. [Fuente: Pablo Santibañez, Metodología para la Evaluación y Optimización de Planes Mineros de Largo Plazo. Santiago, Chile, 2000.]

Este modelo es la base para poder definir el resto de las unidades operacionales. A continuación se presentan las principales unidades operacionales, desde la unidad más básica a la más compleja.

4.2.2. Puntos de Extracción

Los **puntos de extracción** son las unidades de producción de una mina subterránea. Estos puntos corresponden a los lugares donde el mineral fracturado en el nivel de hundimiento cae por gravedad hacia el nivel de producción.

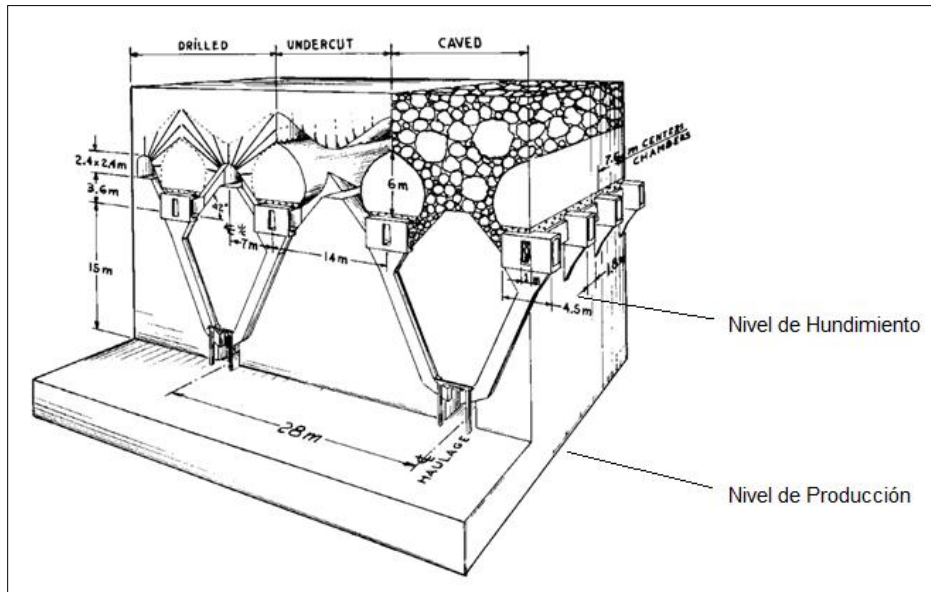


Figura 4-5: Diseño esquemático de un punto de extracción para un block caving genérico. [Fuente: Raúl Castro, Preparación en *Block Caving*, 2008, Curso Manejo de Minerales y Ventilación - Universidad de Chile.]

El mineral que cae por las bateas es recogido mediante equipos LHD y transportado hacia depósitos desde donde será enviado a distintos procesos de refinamiento.

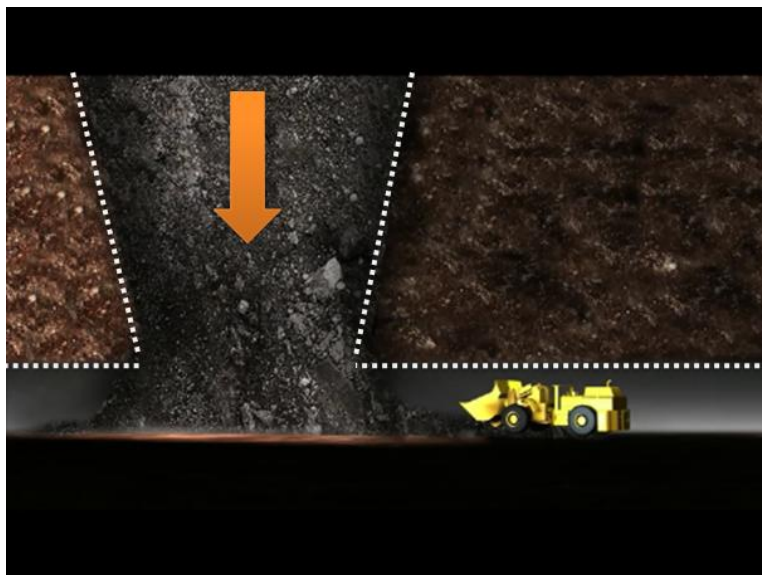


Figura 4-6: Pala autocargable LHD recogiendo el mineral que cae por un punto de de extracción. [Fuente: Imagen modificada de la animación Proyecto Mina Chuquicamata Subterránea de Codelco]

Un punto de extracción es idealizado como una columna de mineral constituida por bloques apilados verticalmente. Los bloques inferiores se extraen antes puesto que se simula el mineral cayendo por efecto gravitacional.

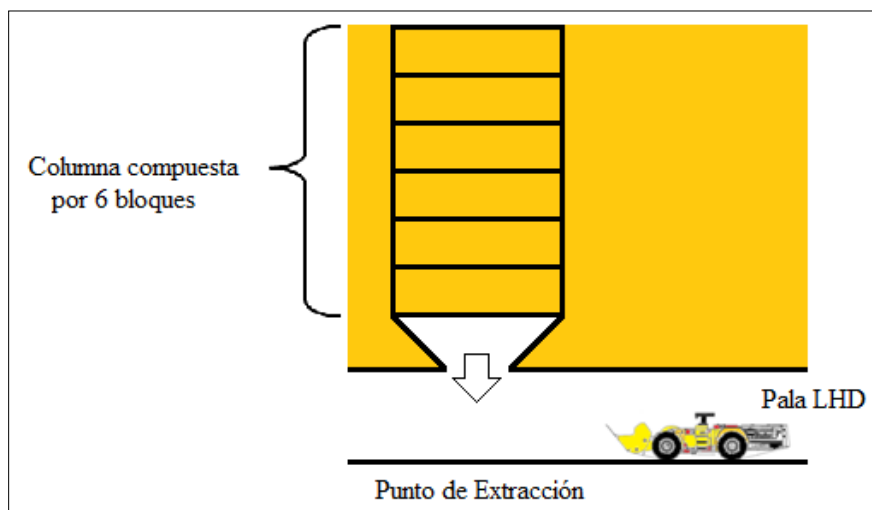


Figura 4-7: Diseño esquemático de un punto de extracción constituido por bloques de mineral. [Fuente: Elaboración propia.]

4.2.3. Subsectores

Los **subsectores** son áreas del yacimiento que han sido separadas con el fin de administrar de mejor manera su explotación. Dependiendo del método de extracción pueden ser llamados Paneles (Panel Caving) o Macrobloques (Block Caving).

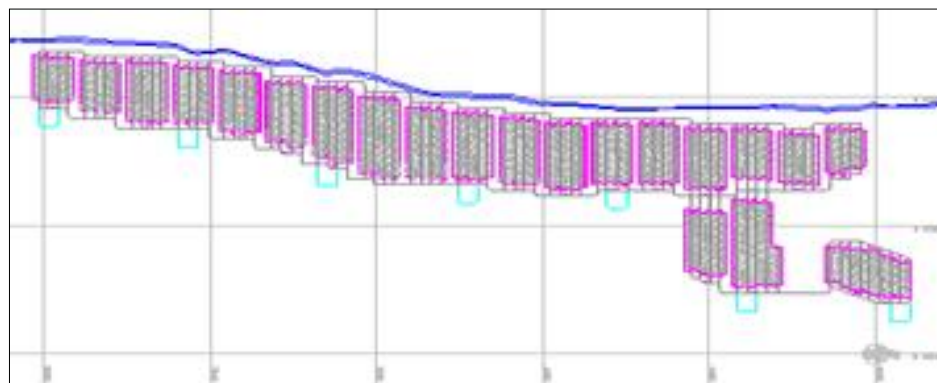


Figura 4-8: Vista Planta de los 21 Subsectores que componen el Nivel 1 del Proyecto Mina Chuquicamata Subterránea de CODELCO. [Fuente: "Estudio de Prefactibilidad Proyecto Mina Chuquicamata Subterránea, Corporación Nacional del Cobre de Chile, Santiago, 2009"]

Los criterios para realizar esta división pueden ser variados [8]:

- Secuencia de extracción independiente,
- Características mineralógicas,
- Método de Explotación,
- Otros.

El método de explotación y las características de los bloques del subsector permiten determinar el diseño de la malla de puntos de extracción que permita cumplir de mejor manera con los siguientes objetivos [15]:

- Mayor recuperación de Mineral,
- Estabilidad de la Mina,
- Eficiencia en operación de los equipos de extracción.

En la **figura 4-9**, se puede apreciar 2 mallas de puntos de extracción que se puede utilizar en una operación para cumplir con los objetivos mencionados. De manera que el subsector se puede considerar como un conjunto de puntos de extracción que comparten algunas características operacionales semejantes.

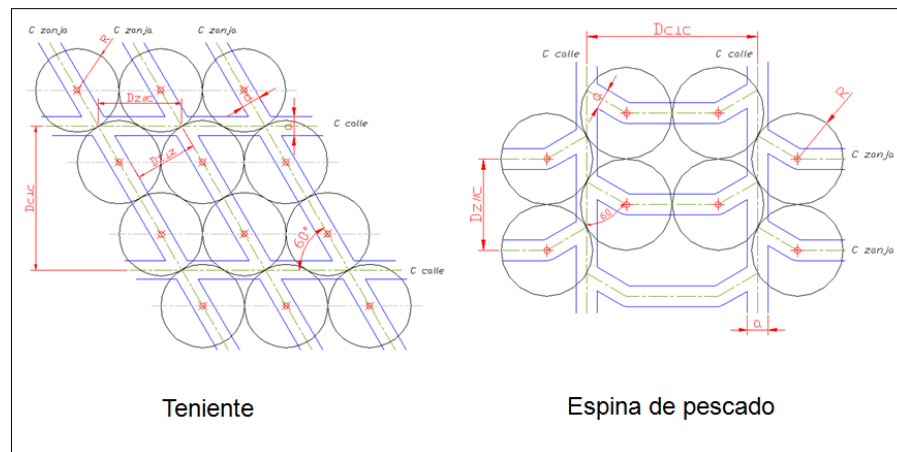


Figura 4-9: Diseño de una malla de puntos de extracción en base a diámetros de extracción [Fuente: Raúl Castro, Preparación en Block Caving, 2008, Curso Manejo de Minerales y Ventilación - Universidad de Chile.]

4.2.4. Sectores

Los sectores son las zonas productivas de una mina. Se entienden como una fracción del área geográfica del yacimiento ubicada a un determinado nivel (cota sobre el nivel del mar) por lo cual, están conformados de varios subsectores.

El diseño de los sectores está determinado por la geometría del yacimiento, el método de explotación, la ubicación de los accesos y la logística de transporte y movimiento de mineral subterráneo [16].

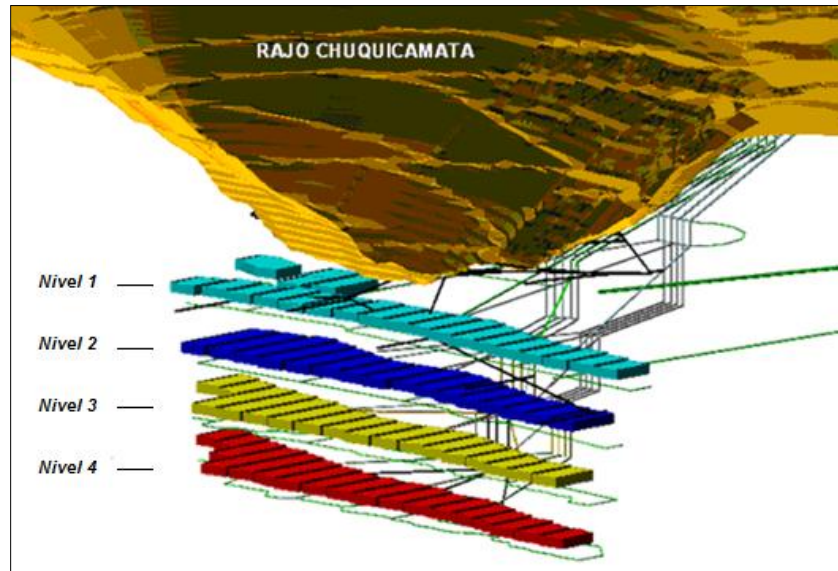


Figura 4-10: Esquema 4 Niveles (Sectores) Proyecto Mina Chuquicamata Subterránea de CODELCO.
 [Fuente: "Estudio de Prefactibilidad Proyecto Mina Chuquicamata Subterránea, Corporación Nacional del Cobre de Chile, Santiago, 2009"]

4.3. Tareas de Procesamiento

Dependiendo del tipo de yacimiento cuprífero, los procesos de planta se diferencian en procedimientos para extraer mineral sulfurado u oxidado. En la minería subterránea, es natural que el tipo de mineral sea mayormente sulfurado, por lo tanto, en este trabajo solo se considerarán procesos de una línea de sulfuros.

- **Chancado**

Este proceso se debe realizar en ambos casos, sin embargo, para los sulfuros se requieren tres etapas de chancado y posteriormente una de molienda, a fin de reducir el tamaño del mineral a micrones², que puedan luego flotar en el proceso siguiente. Para los óxidos, por otra parte, es suficiente una reducción a pulgadas, para lo que basta con dos etapas de chancado y, a veces, sólo con una.

El chancado primario se realiza en chancadores de gran tamaño con capacidades de 140,000 toneladas por día y más. Estos chancadores entregan mineral de 6 a 8 pulgadas de diámetro, y pueden ser giratorios o de mandíbula.

El chancado secundario se realiza en chancadores cónicos con los que se reduce el tamaño del mineral a sólo un par de pulgadas de diámetro.

² 1 micrón = 10⁻⁶ metros

El chancado terciario permite disminuir el tamaño del mineral hasta fracciones menores a ½ pulgada de diámetro.

- **Molienda**

Se realiza usando molinos de barras o de bolas (convencional), o con sistemas autógenos / semi-autógenos que aprovechan el mismo mineral como elemento para moler.

Esta etapa entrega el mineral en tamaño de micrones, apto para ser procesado en el sistema de flotación.

- **Flotación (Sulfuros)**

El mineral chancado se deposita en celdas con agitadores, a las cuales se les agregan agentes espumantes. El cobre se adhiere a las burbujas, que luego son retiradas desde la celda por medio de paletas.

El material que queda en el fondo de la celda es eliminado, correspondiendo al relave. Sin embargo, este relave también contiene algo de cobre (que, por lo tanto, se pierde) dando origen a que el porcentaje de recuperación de la concentradora no sea 100%.

Por último, este concentrado se seca, pasando finalmente al proceso de refinación.

Si bien el sistema de optimización de planes mineros contempla tanto las labores de minería como las tareas de procesamiento, el foco del presente trabajo está en la primera de las dos etapas.

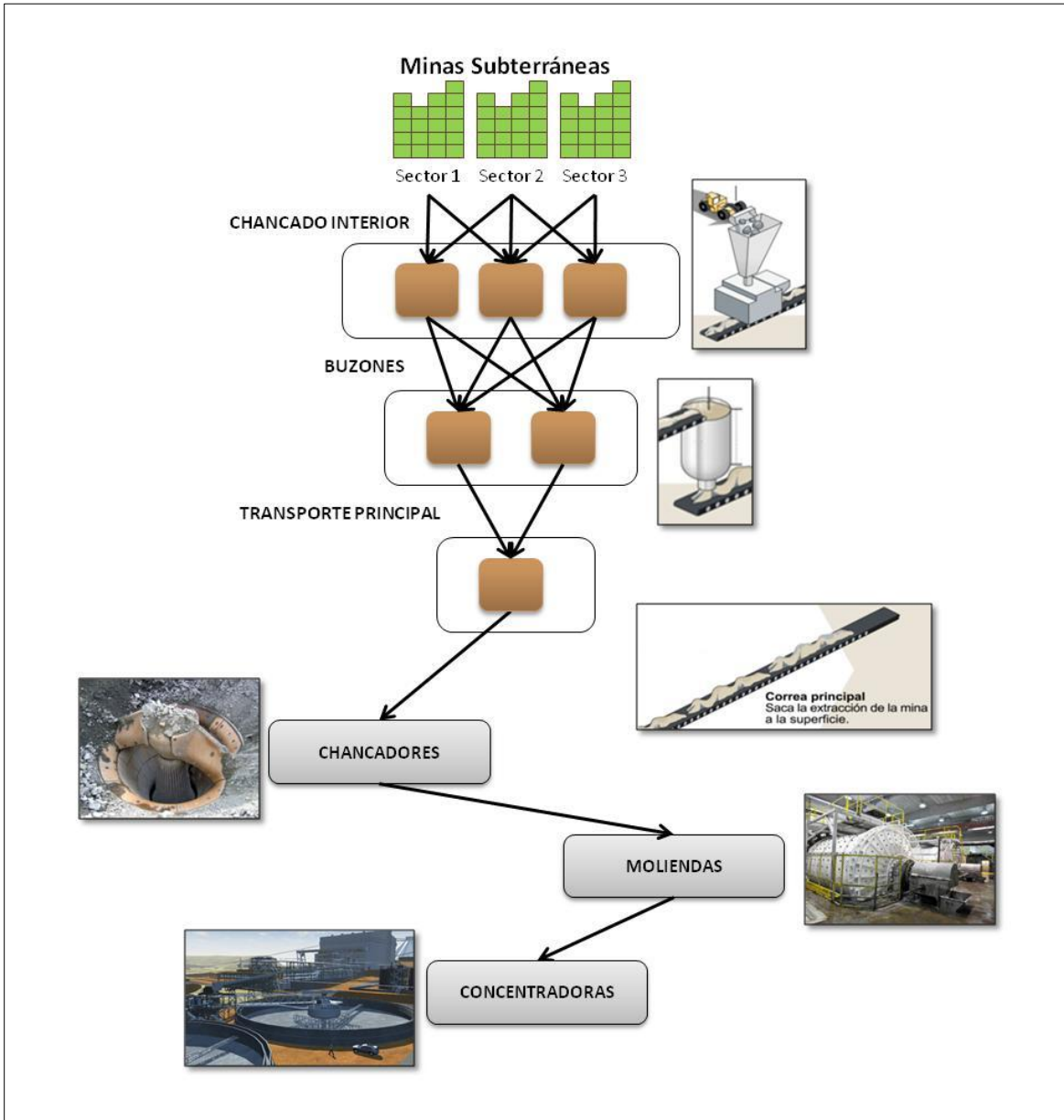


Figura 4-11: Esquema Red de Procesos Mineros.

5. Modelo de Optimización

En esta sección se explicará de qué manera están modeladas las labores de extracción, cuáles son sus restricciones, los parámetros de entradas y qué es lo que se desea optimizar. En los Anexos se puede revisar en detalle el modelo matemático actual.

5.1. Datos de Entrada

5.1.1. Estado de la Mina

- **Cubicaciones:**

Corresponde a la información geológica de la mina. Cada bloque contiene información volumétrica, tonelaje, y leyes de los minerales más relevantes (Cu, Mo, As, etc.).

El modelo de bloques está agrupado en Sectores, Subsectores y Puntos de extracción.

5.1.2. Parámetros Técnicos

- **Capacidades**

Corresponde a las posibilidades de proceso en toneladas por día de los distintos elementos de la red:

- Chancado
- Molienda
- Concentradora
- Lixiviación
- Etc.

- **Recuperaciones Metalúrgicas**

Porcentaje efectivo de mineral fino que puede obtenerse en la planta de concentración.

- **Ritmos de Extracción**

Ritmos mínimos y máximos de extracción en toneladas por día, por subsector.

- **Velocidades de Extracción:**

Corresponde a las toneladas máximas de mineral por día que pueden ser extraídas de un punto dependiendo de la cantidad de material que ha sido extraído hasta el momento.

- **Secuencias de explotación**

Corresponde al orden en que deben ser abiertos los puntos de extracción de un subsector. Es un input para el modelo, como resultado de un estudio que resuelve solo este tema, es decir, un subproblema acotado dentro de la planificación minera.

- **Plan de Área Nueva**

Área a habilitar por subsector por periodo. La cantidad de área que se puede habilitar por periodo está directamente relacionada con el periodo que deben iniciar a ser explotados los puntos de extracción. El objetivo de este trabajo consiste en liberar este dato de entrada para que sea una variable de decisión del modelo.

5.1.3. Parámetros Económicos

- **Comerciales**

Parámetros que conforman las orientaciones comerciales normalmente generados por las vicepresidencias de comercialización o gerencia comercial de las grandes mineras, como CODELCO.

Parámetros asociados a la valoración del Cobre Concentrado: Precios de productos y subproductos, descuentos por fundición y refinería, premios por subproductos contenidos, penalizaciones por contaminantes y tasa de descuento.

- **Costos fijos**

Costo Fijo de extracción en la mina.

Costo Fijo en nodos de procesos (Chancado, Molienda, Concentradora, SBL, Botaderos, etc).

- **Costos variables**

Costo Variable de extracción.

Costo Variable de tratamiento en nodos de procesos (dólares/ton).

Costo Variable por tratamiento de contaminantes (tostación, adicionales en fundición y refinería, en caso que correspondan).

- **Inversiones**

Inversiones en plantas de procesamiento e infraestructura.

5.2. Modelo Matemático

Un problema de flujo en redes queda definido por una red de nodos y arcos que los conectan, más un conjunto de costos asociados al transporte de una unidad de producto entre cada par de arcos. Si existen capacidades para el transporte ya sea en los arcos o en los nodos, se habla de un problema capacitado. Si por la red puede transitar más de un tipo de producto distinto con costos y capacidades diferenciadas entre ellos, se habla de un problema multi-producto. Cuando la habilitación y disponibilidad de los arcos y nodos es una variable de decisión se dice que el problema de flujo es además un problema de diseño.

De esta manera, cada etapa del proceso (chancado, molienda, lixiviación, etc.) puede asociarse a un nodo de la red, el que queda caracterizado por un costo fijo, un costo variable, una capacidad y un coeficiente de transformación que nos dice cuanto producto sale por cada unidad de producto ingresada al proceso. Del mismo modo, los arcos de la red corresponden a las distintas conexiones que unen los distintos procesos (caminos, correas, tuberías, etc.) y quedan caracterizados por un costo fijo, un costo variable y una capacidad.

Dado que se requiere distinguir las características metalúrgicas de los materiales que fluyen por la red, es decir, tipo de mineral (sulfuro, óxido, mixto, etc.), leyes de minerales y contaminantes (cobre total, cobre soluble, molibdeno, plata, arsénico, etc.), el problema es multi-producto.

No obstante lo anterior, el problema tiene una serie de elementos adicionales que lo diferencian del problema tradicional de flujo en redes y que hacen más difícil su resolución. Como por ejemplo: Las cantidades a transportar período a período son variables de decisión. En efecto, la decisión de que materiales deben fluir por la red está determinada por el plan de extracción de cada mina, lo que constituye por sí mismo un problema de difícil resolución.

En resumen, se puede considerar el problema como un problema de flujo en redes para el transporte y procesamiento de mineral y un problema de extracción para la decisión de qué materiales deben fluir en cada período por la red de procesos. Ambos problemas están ligados por una restricción que indica que todo lo extraído en cada período debe ser transportado en dicho período.

De acuerdo a lo anterior, en términos resumidos el modelo matemático a optimizar presenta los siguientes objetivos, variables y restricciones:

5.2.1. Función Objetivo

Maximizar el valor presente del negocio. Para ello se considera una función objetivo del tipo:

$$F.O. = \textit{Beneficios} - \textit{Costos} - \textit{Inversiones}$$

Donde los beneficios están dados por los ingresos por venta de productos y subproductos; los costos, por los asociados a la extracción, transporte y procesos en planta;

y las inversiones, por las asociadas a la adquisición de equipos mineros principales, y a nuevos proyectos, como por ejemplo de nuevas instalaciones.

5.2.2. Variables

Las variables del modelo se refieren a cuándo explotar cada bloque y al flujo de productos a través de la red de procesos. Dado el carácter dinámico del problema, estas variables se asocian a cada período del horizonte de evaluación (en general se consideran periodos anuales). Las decisiones en un período de cuánto material extraer y cuánto flujo enviar por cada arco de la red afectarán el estado con que se comience el próximo período.

6. Definición del Problema

En el modelo de optimización, los puntos de extracción han sido representados como columnas de bloques³. Cuando un punto comienza a ser explotado, lo que sucede es que los bloques inferiores de la columna son extraídos, simulando el mineral que cae por gravedad.

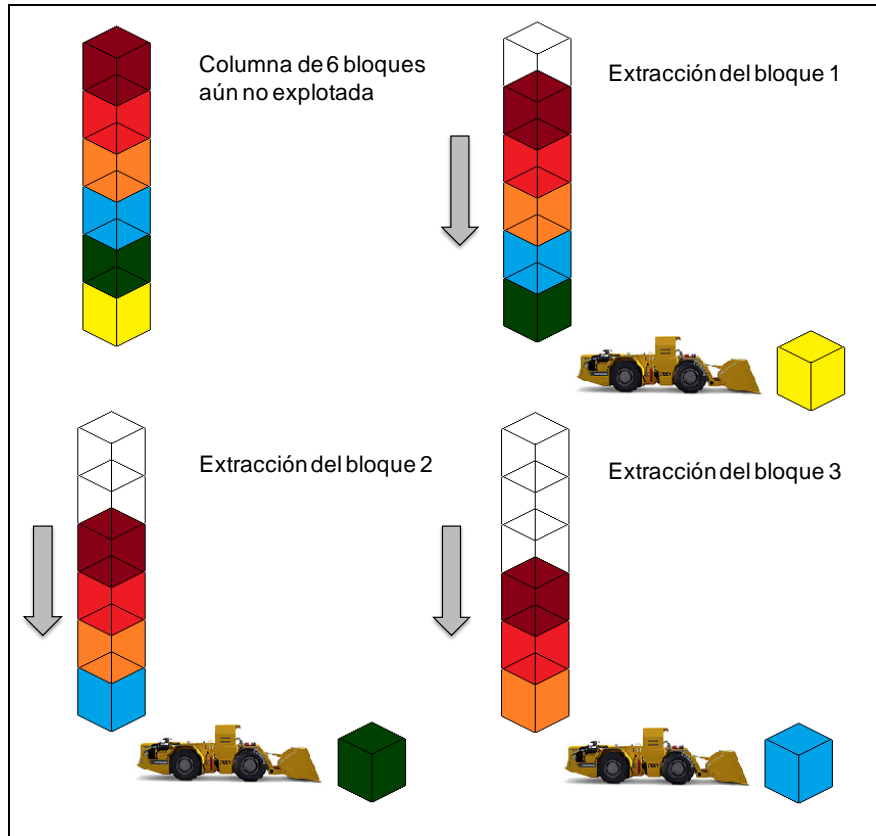


Figura 6-1: Esquema de la explotación de un punto en el modelo de optimización.

Cada punto de extracción tiene asociada un área (igual al área de la base de la columna), por lo cual, iniciar la explotación de uno de ellos se denomina "abrir área". Habilitar los puntos de extracción conlleva la realización de obras civiles que deben desarrollarse con antelación. Una vez se ha abierto un punto, el mineral cae por gravedad

³ Los puntos de extracción también puede ser caracterizados como columnas cilíndricas, como en la figura 4-9.

de manera controlada, ya en la operación minera. De esta manera, el plan de área nueva se puede traducir como la cantidad de puntos que deben ser abiertos en un periodo en particular.

Diferencia Máxima de Altura entre Columnas Vecinas

La explotación de una columna está limitada por la extracción de las columnas cercanas a ella. Esta limitación proviene de la estabilidad necesaria en el hundimiento del mineral. Diferencias de altura elevadas⁴ entre columnas vecinas puede resultar peligroso para la seguridad de la mina por lo cual, es necesario que estas columnas mantengan una extracción similar en el tiempo.

Un segundo efecto provocado por la diferencia de altura entre columnas vecinas corresponde a un aumento en la dilución del mineral. La diferencia de alturas provoca que los bloques no bajen de manera vertical haciéndose más difícil estimar las características del mineral a extraer.

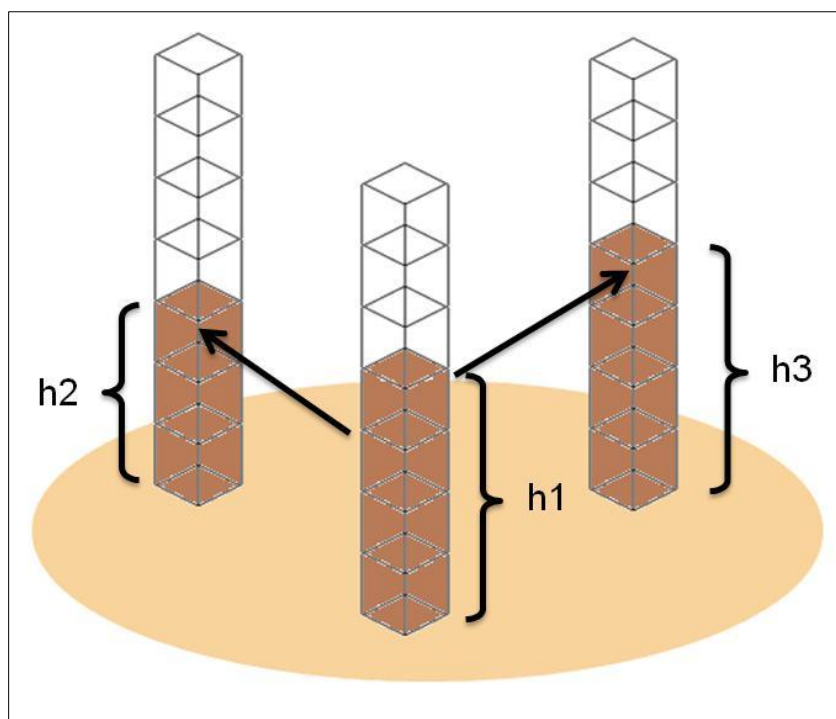


Figura 6-2: Diferencias de altura entre columnas vecinas.

⁴ La determinación de valores que incorporen peligrosidad a la operación dependen de las características particulares de cada mina. A modo de ejemplo, la diferencia máxima de altura entre columnas vecinas puede ser del orden de 40m.

Velocidad de Extracción de una Columna

Otra restricción importante en la extracción de una columna es la velocidad a la cual puede ser extraído el material. Cada columna tiene asociada una velocidad de extracción máxima que depende de la altura actualmente extraída. Estas series de velocidades, varían según las características del mineral. Normalmente los bloques inferiores de cada punto de extracción se deben explotar a velocidades menores.

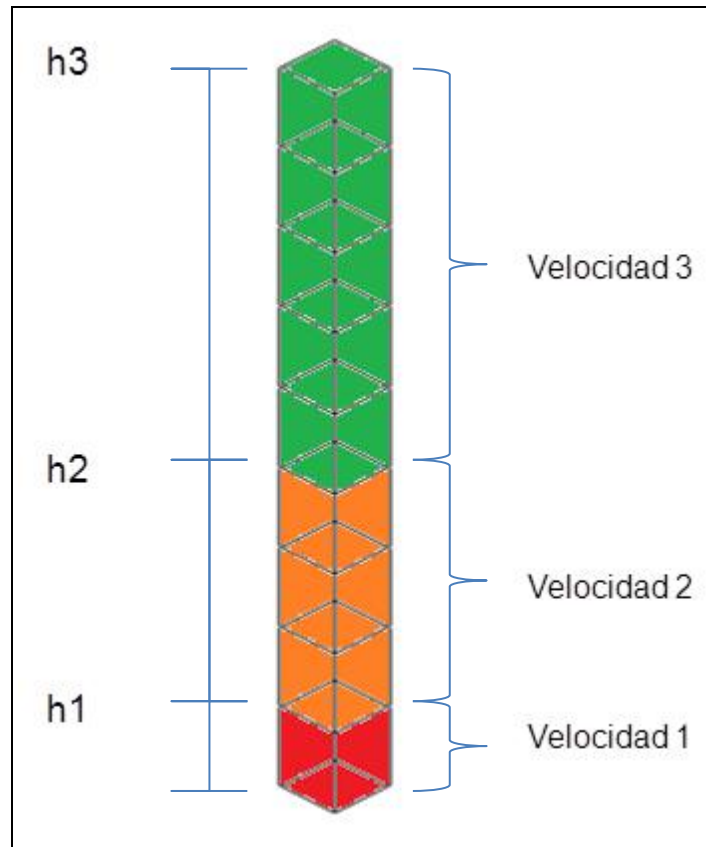


Figura 6-3: Velocidades de extracción máximas según altura extraída de una columna.

En la tabla 9-2 se puede apreciar una serie de velocidades máximas según la altura extraída de la columna.

6.1. Metodología de Apertura de Área Fija

Supóngase la imagen a continuación (Figura A) como la vista planta de un subsector de alguna mina subterránea. El subsector está formado por 30 puntos de extracción y cada punto de extracción tiene asociada un área de 1 m^2 (para hacer fácil el ejemplo).

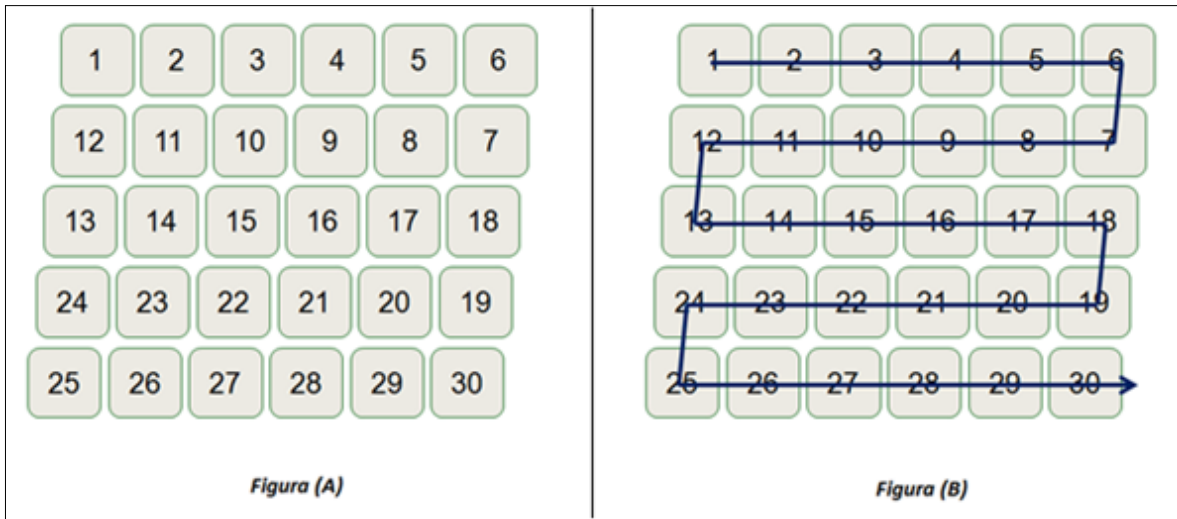


Figura 6-4: Esquema con vista planta de un subsector y su secuencia de apertura de puntos.

Los puntos de extracción se encuentran enumerados según una secuencia (Figura B). Esta secuencia no es aleatoria, corresponde a otro parámetro de entrada del sistema e indica el orden en que se debe comenzar a explotar cada punto. Esta secuencia atiende criterios técnicos que permiten que la operación sea estable y segura, por lo tanto, no puede ser modificada.

Tal como se ha mencionado previamente, el modelo que se usa en la actualidad debe recibir el plan de apertura de área como un parámetro de entrada. Este concepto puede resultar algo confuso para el lector por lo que se detallará de la manera más didáctica posible para luego realizar una comparación con el modelo que se desea implementar.

Usando jerga minera, iniciar la explotación de un punto de extracción se denomina "abrir área", es decir, en el sector de ejemplo, "abrir 3 m² en un determinado periodo es equivalente a iniciar la explotación de 3 puntos de extracción en dicho periodo.

Se propone el siguiente plan de área nueva para un horizonte de 5 periodos para el subsector del ejemplo:

Tabla 6-1: Plan de apertura de área fija

Periodo	Área [m ²]
P1	5
P2	5
P3	6
P4	6
P5	8

Este programa de apertura de área debe ser respetado por el sistema a cabalidad por lo cual, el único resultado posible es el que se muestra a continuación:

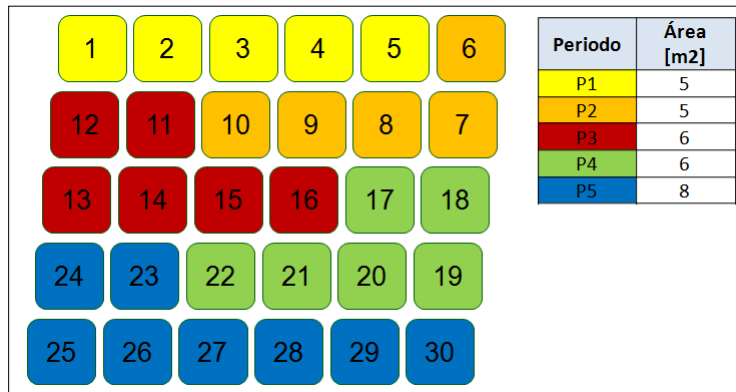


Figura 6-5: Vista planta de un plan de habilitación de área para un horizonte de 5 periodos.

Debe ser destacado que el plan respeta tanto la secuencia de los puntos de extracción como el requerimiento de área nueva por periodo. Dado lo anterior, la flexibilidad del modelo de optimización actual de área fija corresponde a determinar la cantidad de bloques a extraer por periodo desde cada punto de extracción (respetando el inicio de su explotación o año de apertura).

6.2. Metodología de Apertura de Área Variable

Para ejemplificar lo que se desea lograr se usará el mismo subsector anterior pero ahora bajo las condiciones de un modelo donde el área a abrir por periodo corresponde a una variable de decisión y no a un dato de entrada.

Dado que ahora se incluye una nueva variable, se debe incluir una restricción para que ésta no salga de límites permitidos, por ejemplo:

- La cantidad de área abierta en un periodo no puede ser negativa (puede ser 0).
- La cantidad de área abierta en un periodo no puede ser mayor que el área total disponible.

También se pueden agregar otro tipo de restricciones que hacen al plan más "cómodo" para los planificadores, como por ejemplo restringir la apertura de área a cierto rango por periodo. Por ejemplo, tómese en cuenta el siguiente plan de apertura de área:

Tabla 6-2: Plan apertura de área variable

Periodo	Área Mínima [m2]	Área Máxima [m2]
P1	1	10
P2	1	10
P3	1	10
P4	1	10
P5	1	10

A diferencia del plan de área vigente, ya no se exige la cantidad exacta de área a abrir sino que se permite al sistema elegir la mejor opción mientras se cumplan las restricciones. Un plan factible puede ser el siguiente.

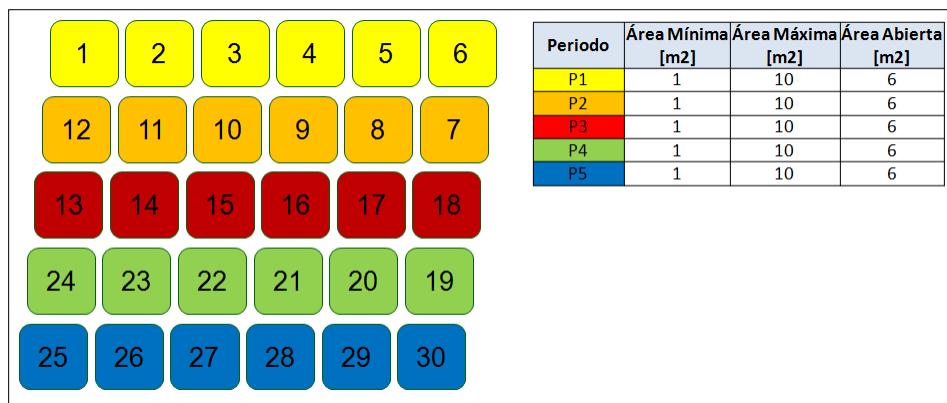


Figura 6-6: Vista planta de un plan de habilitación de área para un horizonte de 5 periodos usando modelo de área variable.

En este plan se abre la misma cantidad de área todos los periodos. Sin embargo, no es el único plan factible. Se debe notar que la cantidad de mineral extraído desde un subsector por periodo no depende sólo del área "abierta" sino también de la cantidad de bloques extraídos desde cada punto.

El plan a continuación respeta igualmente todas las restricciones.

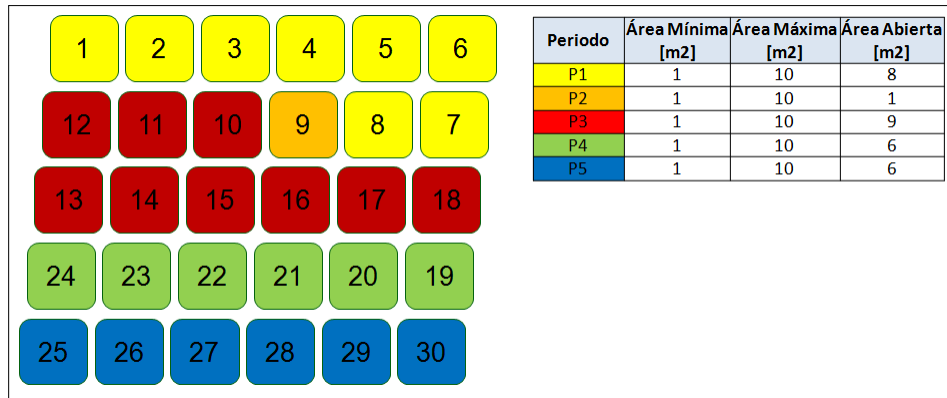


Figura 6-7: Vista planta de otro plan de habilitación de área posible para un horizonte de 5 periodos usando modelo de área variable.

Con este tipo de modelo se ha agregado flexibilidad a la planificación, permitiendo buscar alternativas que brinden mayor valor al negocio.

7. Método de Agregación del Recurso Minero

La resolución de problemas reales de programación lineal implica un alto costo computacional, en tiempo y complejidad, debido al gran número de variables y restricciones que poseen. Esto se agudiza en el caso de la programación lineal aplicado a problemas mineros a nivel detallado, donde existen problemas con millones variables, muchas de ellas binarias, y cantidades similares de restricciones, lo que implica un altísimo esfuerzo computacional asociado. [17]

El desarrollo del trabajo propuesto en esta memoria implica un incremento de la cantidad de variables y restricciones tal, que puede tornar el problema inmanejable.

Para ejemplificar esta situación, se han corrido varias instancias del modelo de optimización actual para distintos tamaños de recurso minero y se han registrado los tiempos que necesarios para obtener una solución en cada caso.

Tabla 7-1: Características de las instancias

N° Instancia	Cantidad de Subsectores	Cantidad de Puntos de Extracción	Cantidad de Bloques	Cantidad de Restricciones	Cantidad de Variables	Tiempo de Resolución [min]
1	1	128	1,856	51,833	46,508	1
2	5	603	10,724	246,408	179,488	8
3	20	2,287	45,241	950,751	657,828	43
4	36	3,094	90,433	1,272,117	953,170	56
5	53	3,729	125,993	1,526,848	1,187,166	69
6 ⁵	71	4,367	161,721	1,774,888	1,414,465	135

Se puede ver que a medida que aumenta el tamaño del problema, se incrementan los tiempos de resolución también. Sin embargo, el incremento del tiempo es mayor en relación al aumento del tamaño del problema. Esto habla que los tiempos de resolución no crecen de manera lineal respecto al tamaño del problema.

Viendo el gráfico siguiente es más simple observar las afirmaciones anteriores.

⁵ Esta instancia corresponde a un caso real de planificación de largo plazo de una mina subterránea perteneciente a la gran minería del cobre en Chile.

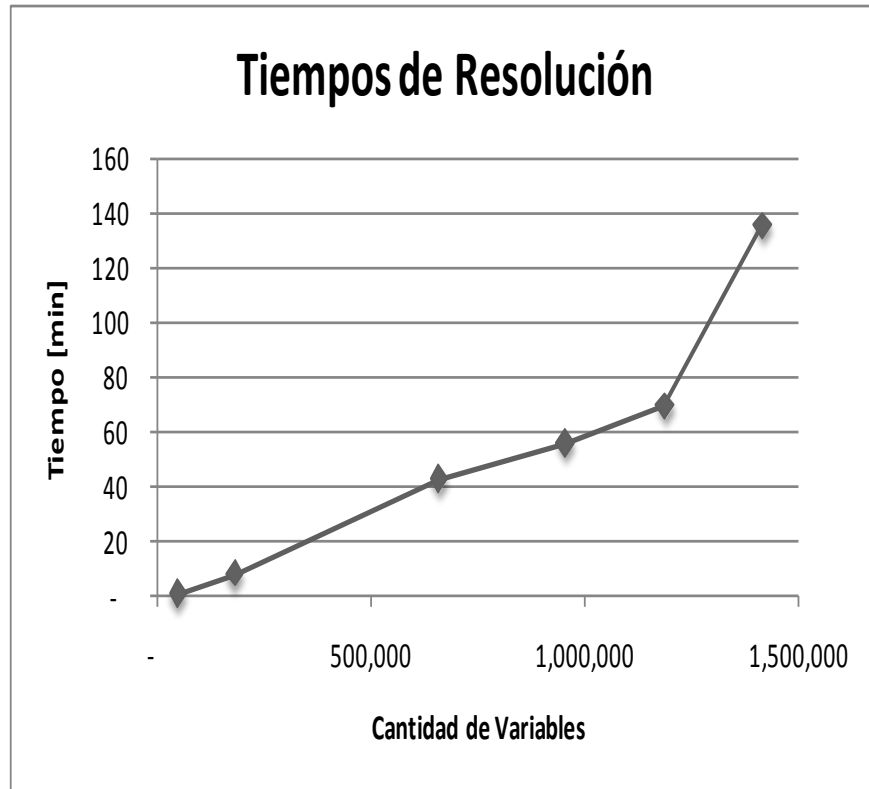


Figura 7-1: Gráfico del tiempo de resolución de un modelo de programación minera según el tamaño del problema a resolver.

7.1. Criterios de agrupación de puntos de extracción.

Para reducir los tiempos de espera, pensando en el incremento del tamaño del problema al introducir la habilitación de puntos de extracción como una variable de decisión, se ha decidido aplicar un método de agrupación de puntos de extracción que disminuya el tamaño del problema, sin afectar de gran manera la evaluación del proyecto.

Este método agrupa puntos de extracción, en unidades mayores que llamadas columnas cumpliendo con determinados criterios que se explican a continuación:

7.1.1. Criterio de distancia máxima

Se indica la distancia α máxima en metros considerada para agrupar puntos de extracción en columnas. Los puntos no agrupados cuyos centros se encuentren a distancia menor que α y estén en una secuencia consecutiva, partiendo desde el punto con índice 1 en la secuencia, conformarán una columna.

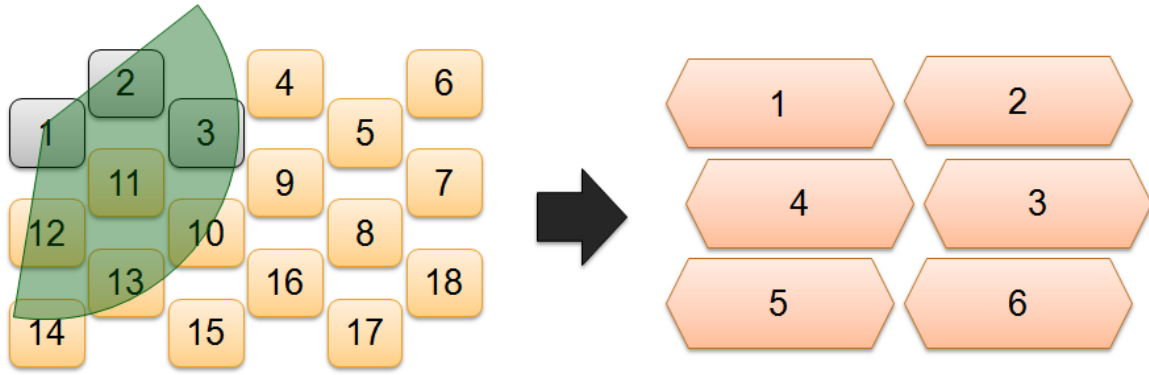


Figura 7-2: Ejemplo de agregación de columna usando un criterio de distancia máxima (desde el punto 1) donde el radio alcanza a los puntos en secuencia 2 y 3. El proceso se repite con los siguientes puntos secuenciados.

7.1.2. Criterio de secuencia máxima

Se indica la cantidad η de puntos en secuencia que se pueden agregar a una columna. Por ejemplo, si η tiene valor 2 se crearán columnas de 2 puntos de extracción puesto que la cantidad máxima de puntos en secuencia a partir de un punto en particular.

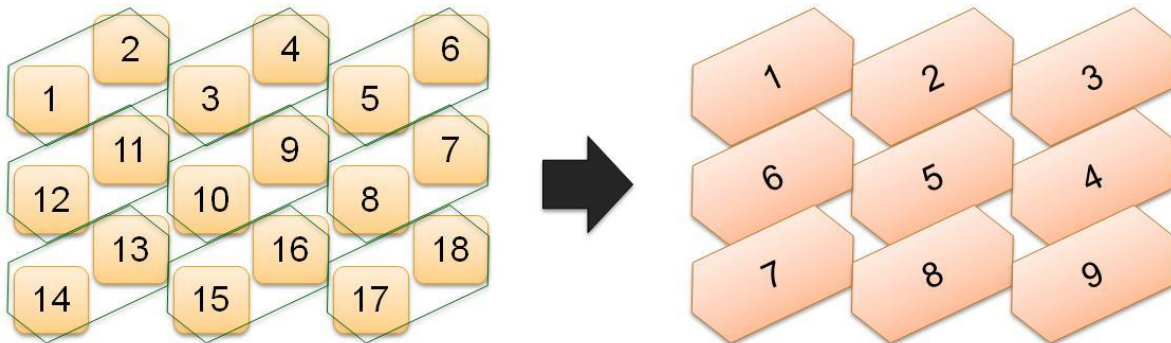


Figura 7-3: Ejemplo de agregación de puntos usando un criterio de secuencia máxima de 2 puntos.

7.2. Generación de columnas

Las características de cada columna corresponden a una ponderación de las características de los puntos que las componen. Por ejemplo, se tiene una columna formada por 2 puntos de extracción:

Tabla 7-2: Datos puntos de extracción:

Punto	Coordenada X	Coordenada Y	Área [m ²]
N1n1-11S	3083.1	3875.4	400
N1n1-12S	3099.1	3875.4	400

Tabla 7-3: Datos columna resultante de agrupar los puntos:

Columna	Coordenada X	Coordenada Y	Área [m ²]
N010001	3091.1	3875.4	800

Los bloques de estos puntos deben combinarse para formar los bloques de la columna. Esto pasa de la siguiente manera: Los bloques ubicados a la misma altura, conforman un bloque combinado, ubicado a la misma altura de los originales, cuyo tonelaje es la suma de los tonelajes de los bloques que lo conforman y sus características como ley de Cu, Ley de Mo, Ley de As u otras, son una ponderación de las características de cada bloque.

Es importante mencionar que para realizar el proceso mencionado, la agrupación se fía que al menos, los puntos de extracción que pertenecen a un mismo subsector, tienen bloques con la misma altura.

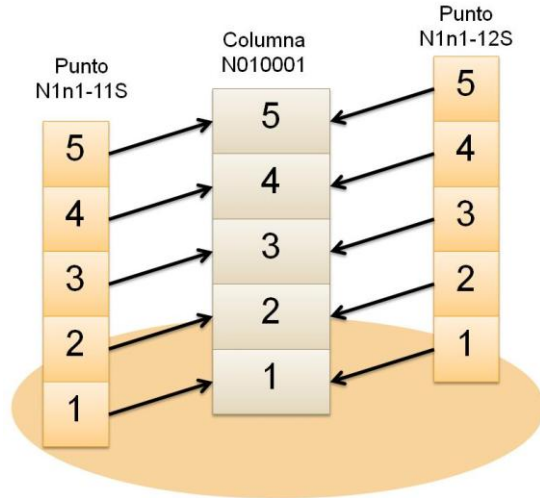


Figura 7-4: Ejemplo de agregación de 2 puntos de extracción.

Tabla 7-4: Agregación de puntos de extracción

Punto N1n1-11S				
Posición	Altura [m]	Altura Acumulada [m]	Tonelaje	Ley Cu
1	18	18	11,258	1.32
2	18	36	19,231	1.38
3	18	54	19,231	1.42
4	18	72	19,231	1.40
5	18	90	19,231	1.34

Punto N1n1-12S				
Posición	Altura [m]	Altura Acumulada [m]	Tonelaje	Ley Cu
1	18	18	12,684	1.38
2	18	36	17,261	1.42
3	18	54	17,261	1.47
4	18	72	17,261	1.51
5	18	90	17,261	1.51

Columna N010001				
Posición	Altura [m]	Altura Acumulada [m]	Tonelaje	Ley Cu
1	18	18	23,942	1.35
2	18	36	36,492	1.40
3	18	54	36,492	1.44
4	18	72	36,492	1.45
5	18	90	36,492	1.42

7.3. Validación de la Metodología

Para validar este método, se aplicará la agrupación a una de las instancias mencionadas al inicio de este capítulo, instancia n° 5 cuyas características son las siguientes:

Tabla 7-5: Características de la instancia

Cantidad de Subsectores	Cantidad de Ptos. de Extracción	Cantidad de Bloques	Cantidad de Restricciones	Cantidad de Variables	Cantidad de Variables Enteras	Tiempo de Resolución [minutos]	VAN [MFIC\$ ⁶]
53	3,729	125,993	1,526,848	1,187,166	914,780	69	12,955

- Criterio de secuencia máxima

Se usará una agregación por secuencia máxima, donde a lo más se puede agrupar 3 puntos en secuencia.

- Criterio de distancia máxima

Como distancia máxima se permitirán puntos de extracción alejados entre si a lo más en 40 metros.

El resultado de esta agrupación se puede ver gráficamente en la figura 7-5.

⁶ FIC\$ corresponde a una unidad monetaria ficticia que se usará para enmascarar valores reales y así poder presentar los resultados de este trabajo. MFIC\$ es la nomenclatura para referirse a millones de unidades monetarias ficticias.



Figura 7-5: Vista planta de la ubicación de las columnas luego de la agrupación de puntos. Cada columna contiene a lo más 3 puntos de extracción del mismo tamaño.

Se puede apreciar en la imagen a continuación que no hay mucha distorsión respecto a la secuencia original y el frente de avance se respeta completamente.

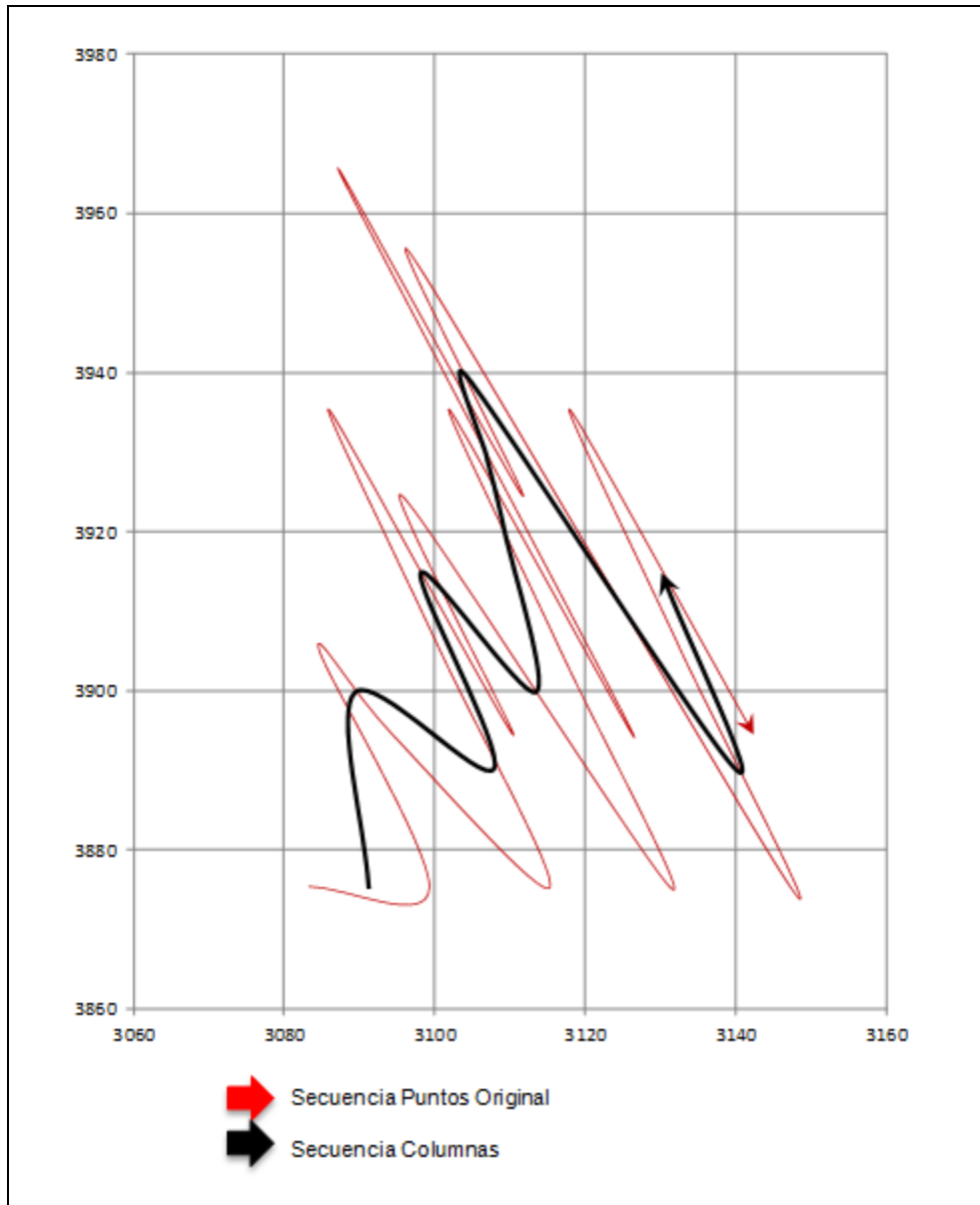


Figura 7-6: Vista planta de la variación de la secuencia al efectuar la agrupación.

El resultado comparativo de la optimización realizada por el modelo con y sin agregación se encuentra en la siguiente tabla:

Tabla 7-6: Comparación instancias con y sin agregación

Instancia	Cantidad de Subsectores	Cantidad de Puntos de Extracción	Cantidad de Bloques	Cantidad de Restricciones	Cantidad de Variables	Tiempo de Resolución [min]	VAN [FIC\$]
sin agregación	53	3,729	125,993	1,526,848	1,187,166	69	12,955,029,675
con agregación	53	1,907	43,354	769,885	630,919	16	12,899,323,047
				50%	47%	77%	0.43%

La agregación, redujo el tamaño del problema alrededor del 50%. Esto hizo que los tiempos de resolución bajaran hasta un 77%, lo cual es un gran aporte si se piensa en incrementar el tamaño del problema al incorporar la planificación de área variable, pero lo más importante es que la disminución en el valor del negocio producida por la agregación es menor al 1%. Este resultado no parece extraño si se piensa que una de las restricciones de la extracción es que, entre puntos vecinos, la explotación debe ser similar en el tiempo. Al usar el método de agregación del recurso, lo que se hace es igualar la extracción de los puntos que conforman la columna. Sin embargo, debido a su proximidad, estos puntos debían igualmente tener una extracción parecida, por lo tanto, el impacto de la agregación no alcanza a ser significativo.

Con estos resultados, se puede validar que este método de agregación de puntos de extracción en columnas permite disminuir tiempos de resolución de manera drástica, sin comprometer de manera significativa la evaluación del negocio.

8. Modelación de la Extracción de Columnas como un Flujo en Redes

En este capítulo, se explicará sobre los beneficios de modelar la extracción de columnas como un flujo en redes y de qué manera esta modelación permite implementar la habilitación de puntos de extracción con área variable.

Se ha mencionado antes el alto grado de complejidad de la planificación de las operaciones mineras y, en particular, la elevada cantidad de variables y restricciones que conforman el modelo de optimización sobre el que se está trabajando.

Estas características hacen que el problema de programación lineal entero-mixto requiera elevados tiempos de espera para obtener una solución, o incluso, que el equipo computacional no sea suficiente para poder obtenerla. Es por este motivo que en la práctica se usa la relajación lineal del problema de optimización, cuyos tiempos de resolución son significativamente menores. Posteriormente, esta solución relajada se "enteriza" mediante una heurística de redondeo.

La única variable entera de la formulación actual del modelo corresponde a:

$z(j,n,t)$: 1 Si el bloque n de la columna j es extraído en el periodo t . En la relajación lineal del modelo, se puede interpretar como la fracción del bloque n de la columna j que es extraído en el periodo t .

Sin embargo, puede ocurrir que, dadas ciertas condiciones del recurso minero, la naturaleza de la solución relajada sea altamente fraccionaria (ver figura 8-1). En efecto, debido a la utilización de tasas de descuento, el modelo busca extraer lo antes posible los minerales con mejores leyes. Al usar la relajación lineal del problema, la solución que se obtiene propone extraer fracciones de varios bloques para llegar a minerales con mejores leyes que se encuentran a mayor altura. Estas soluciones presentan un elevado grado de infactibilidad operacional y cualquier enfoque de redondeo tiene muy pocas posibilidades de entregar soluciones cercanas al óptimo, peor aún soluciones factibles⁷ [9].

Adicionalmente, las soluciones de la formulación actual pueden presentar características indeseadas como detención y reapertura de puntos de extracción.

⁷ En casos difíciles, las heurísticas suelen relajar ciertas restricciones para lograr entregar soluciones enteras "aceptables" pero no factibles desde el punto de vista puramente matemático.

Para lidiar con este tipo de situaciones y obtener soluciones menos "fragmentadas"⁸, se ha decidido usar un enfoque de flujo en redes para modelar la extracción de columnas como el tránsito de bloques por una ruta de estados posibles a lo largo de los periodos de planificación.

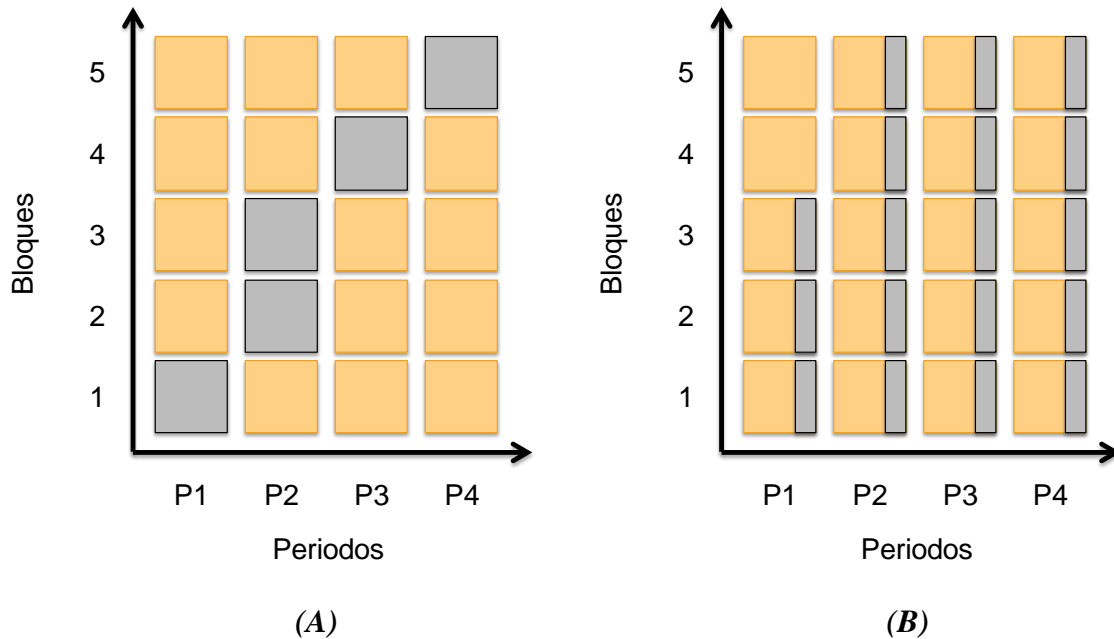


Figura 8-1: Solución entera vs Solución relajada. En oscuro se destaca la fracción del bloque extraído en el periodo correspondiente.

(A) Solución entera factible donde los bloques se extraen totalmente antes de extraer bloques superiores.

(B) Solución del problema relajado donde se permite fraccionamiento de los bloques.

Esta formulación debiera hacer que la solución del problema relajado posea valores más enteros, es decir, que la variable de decisión que determina la extracción de un bloque tenga valores cercanos a 0 ó a 1.

En esta formulación, se define el estado de una columna en un cierto periodo como "el último bloque extraído en dicho periodo", y para cada estado se crea un conjunto de "estados alcanzables" o "sucesores", dadas las condiciones de la operación minera. Para lo anterior se crea un conjunto, $suce(j,n,m,t)$, que se genera a priori con todas las combinaciones de estados posibles.

⁸ En la solución entera, cada bloque se extrae en un solo periodo. En la solución relajada, la extracción de un bloque en particular, mientras se realice en una mayor cantidad de periodos se considera una solución más fraccionaria. A igual cantidad de periodos, se prefiere valores cercanos a 0 ó a 1.

La clave de esta formulación radica fundamentalmente en la generación de los arcos $suce(j,n,m,t)$, que indican los estados a los cuales se puede acceder y en la creación de una nueva variable de decisión asociada a los arcos que indica la ruta que sigue el flujo. Esta nueva variable es:

$R(j,n,m,t)$: 1 si se extrae en t desde el bloque $n+1$ hasta el bloque m de la columna j , dado que se extrajo el bloque n en $t-1$.

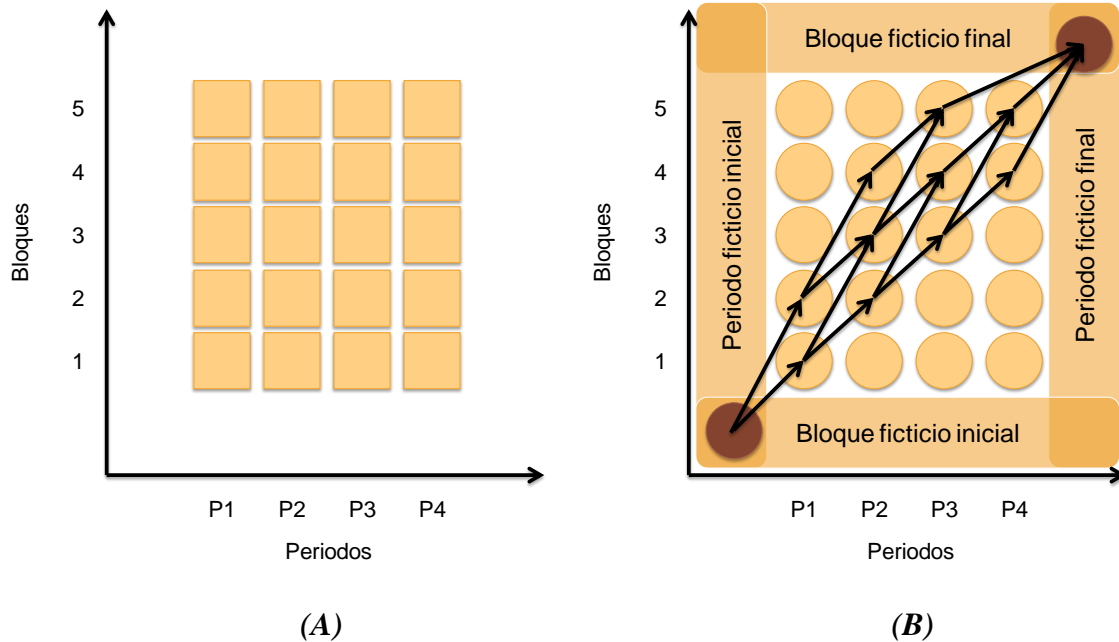


Figura 8-2: Extracción de una columna como un flujo en redes.

- (A) Formulación tradicional donde se asocia la variable $z(j,n,t)$ con una casilla de la matriz bloque-periodo.
 (B) Formulación con arcos donde hay una variable $z(j,n,t)$ por cada nodo y además, un conjunto de arcos asociados a variables $R(j,n,m,t)$.

La fortaleza de modelar la extracción de columnas de esta manera está en que la relajación lineal solo puede extraer fracciones de bloques donde exista un arco, eliminando la posibilidad de obtener soluciones que respeten el tonelaje pero que extraigan mineral de mejor ley en bloques a los cuales no se puede acceder, por ejemplo, en la figura 8-2 (B) no existe un arco desde el bloque ficticio inicial hasta el bloque 3 en el periodo P1, esto puede deberse a que los primeros bloques se extraen a velocidades más lentas.

Se ha mencionado la gran importancia de la generación de arcos en esta formulación, puesto que es la manera de permitir o denegar soluciones *a priori* y de manera selectiva según las condiciones del problema.

La generación de arcos depende de diversos factores como:

- **Velocidades de extracción de una columna**

Un bloque m es sucesor de otro n si:

- Pertenece a la misma columna j .
- m está a mayor altura que n .
- El tonelaje de los bloques entre $n+1$ y m pueden ser extraídos suponiendo que se extrajese a velocidad máxima.⁹

- **Bloques de extracción mínima**

Es normal que se exija una extracción mínima a cada columna, por ejemplo una altura tal que asegure la extracción de la roca primaria. Esto se puede hacer descartando los arcos que permiten solo extraer hasta algún bloque por debajo de los bloques mínimos requeridos.

- **Habilitación de columnas**

Cuando existe un plan de apertura área, las rutas de cada columna tienen un inicio determinado, por ejemplo: la primera mitad de un subsector se comienza a extraer el primer año del horizonte, esto significa que las rutas que inician en periodos posteriores al primero deben ser eliminadas para la primera mitad de puntos de extracción según la secuencia del subsector.

Para la habilitación de área variable, no existe un periodo de inicio determinado para cada columna, por lo tanto, se deben generar más arcos que permitan iniciar la extracción en cualquier periodo.

- **Alternativas particulares**

Diferentes operaciones mineras presentan distintos requerimientos productivos. Con los arcos es posible abordar algunos de estos requerimientos como por ejemplo:

- Imposibilitar que se detenga la extracción de una columna antes del último bloque, creando arcos que lleguen al bloque Destino sólo desde el último bloque de la columna.

⁹ Recordar que la velocidad máxima de extracción puede ser distinta para bloques diferentes, dependiendo de la altura a la que se encuentre, ver figura 6-3.

- Imposibilitar la extracción completa de una columna, eliminando los arcos que se salen desde los bloques sobre una altura determinada y llegan al bloque Destino en el periodo Pfin.

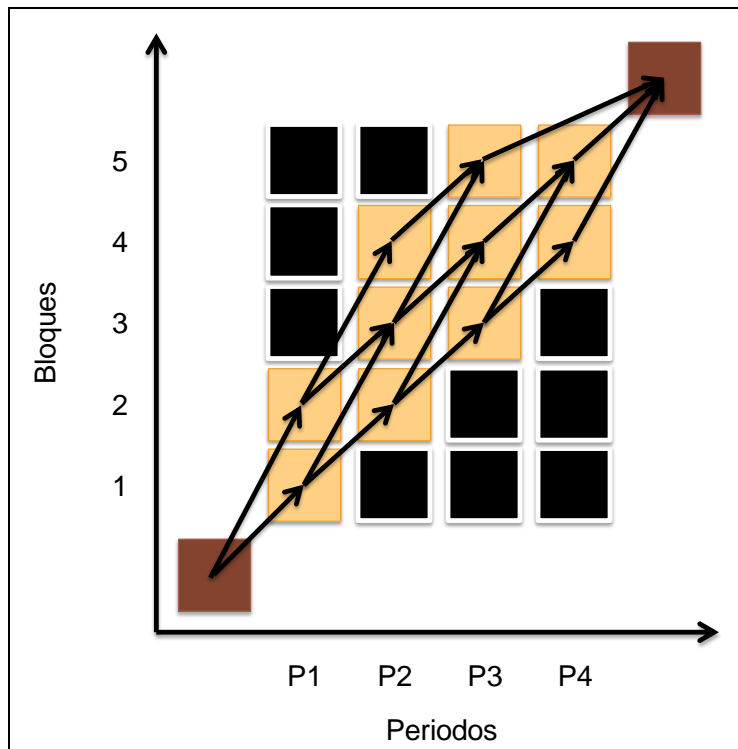


Figura 8-3: Eliminación de estados usando arcos. Se puede ver en negro, las casillas que no tienen ningún arco entrando ni saliendo. Esto significa que es imposible que las variables $z(j,n,t)$ en esas casillas tengan valor mayor que 0.

8.1. Formulación matemática del modelo de flujo en redes

Primeramente, se han de mencionar los elementos relevantes del modelo original:

8.1.1. Índices

- t : Periodos del horizonte de evaluación.
 j : Columnas de mineral.
 n : Bloques de mineral en una columna.

8.1.2. Variables de Decisión

$z(j,n,t)$: 1 Si el bloque n de la columna j es extraído en el periodo t .

Para la nueva formulación del problema se deben definir nuevos parámetros, agregar una nueva variable de decisión que permite determinar la ruta de extracción de cada columna e incorporar las restricciones que crean el flujo y lo relacionan con las variables de decisión originales.

8.1.3. Nuevos Conjuntos

- $suce(j,n,m,t)$: se puede extraer en t desde el bloque $n+1$ hasta el bloque m de la columna j , dado que se extrajo el bloque n en $t-1$.
- $Pini$: Periodo ficticio anterior al primer periodo del horizonte de evaluación.
- $Pfin$: Periodo ficticio posterior al último periodo del horizonte de evaluación.
- $Origen(j)$: Bloque ficticio anterior al primer bloque de la columna j .
- $Destino(j)$: Bloque ficticio posterior al último bloque de la columna j .

8.1.4. Nueva Variable

- $R(j,n,m,t)$: Variable asociada a cada arco de la formulación de flujo en redes. 1 si se extrae en t desde el bloque $n+1$ hasta el bloque m de la columna j , dado que se extrajo el bloque n en $t-1$.

8.1.5. Nuevas Restricciones

- Flujo de entrada de la columna j.

$$\sum_n \sum_t R(j, Origen(j), n, t) = 1$$

$$\forall n / \exists suce(j, Origen(j), n, t)$$

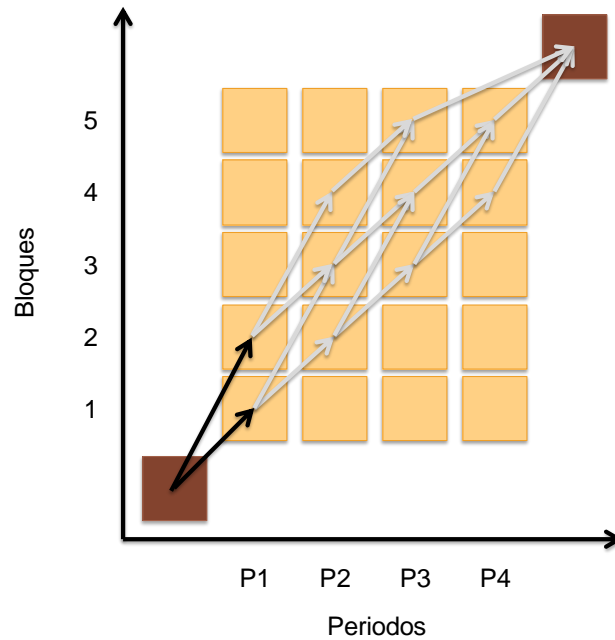


Figura 8-4: Esquema explicativo de la restricción del flujo de entrada de la columna j. Los arcos en negro son aquellos que salen del banco Origen(j) en el periodo ficticio Pini.

- Conservación de flujo en el bloque n.

$$\sum_{ant} R(j, ant, n, t) = \sum_{pos} R(j, n, pos, t + 1)$$

$$\forall ant / \exists suce(j, ant, n, t)$$

$$\forall pos / \exists suce(j, n, pos, t)$$

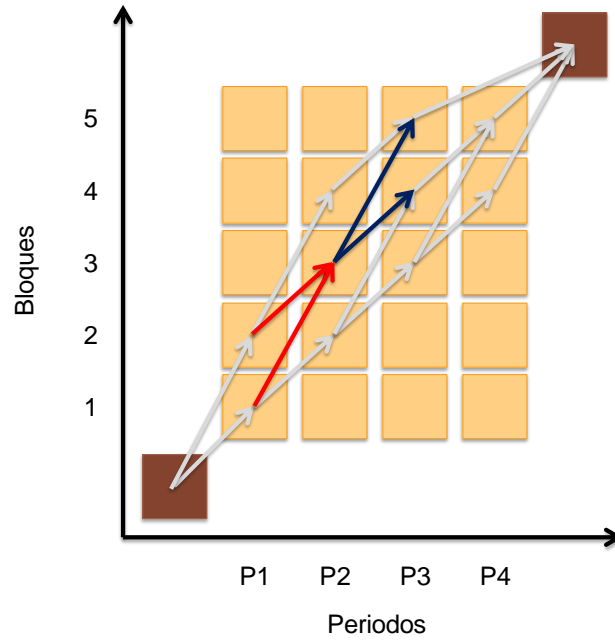


Figura 8-5: Esquema explicativo de la restricción de conservación de flujo en el bloque n. Para que se conserve el flujo, los arcos que entran a n (rojos) deben sumar lo mismo que los arcos que salen (azules).

- Flujo de salida de la columna j.

$$\sum_n \sum_t R(j, n, Destino(j), Pfin) = 1$$

$$\forall n / \exists suce(j, n, Destino(j), Pfin)$$

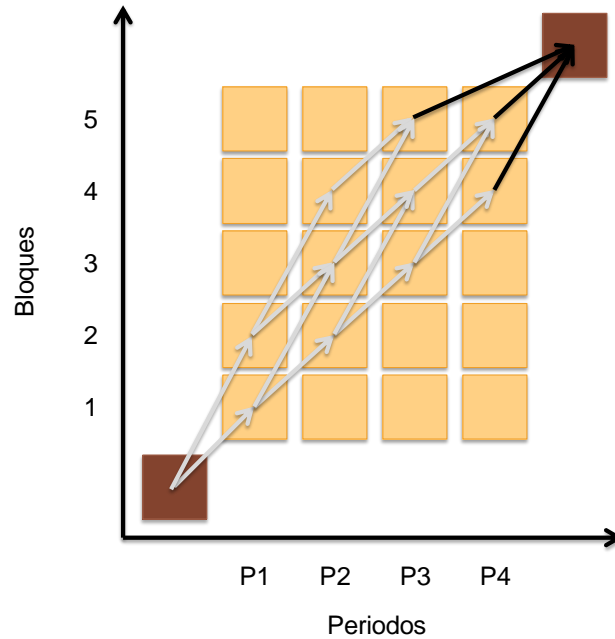


Figura 8-6: Esquema explicativo de la restricción de flujo de salida de la columna j. Los arcos en negro son aquellos que llegan hasta el bloque Destino(j) en el periodo ficticio Pfin. En una instancia real, debiera haber arcos que llegan hasta el bloque Destino(j) desde cada estado accesible. Esto permite que la extracción de la columna pueda detenerse donde convenga.

- Relación entre el flujo y las variables de extracción del bloque n en el periodo t .

$$z(j, n, t) = \sum_n \sum_t R(j, ant, pos, t)$$

$$\forall ant / ant < n \wedge \exists suce(j, ant, n, t)$$

$$\forall pos / pos \geq n \wedge \exists suce(j, ant, pos, t)$$

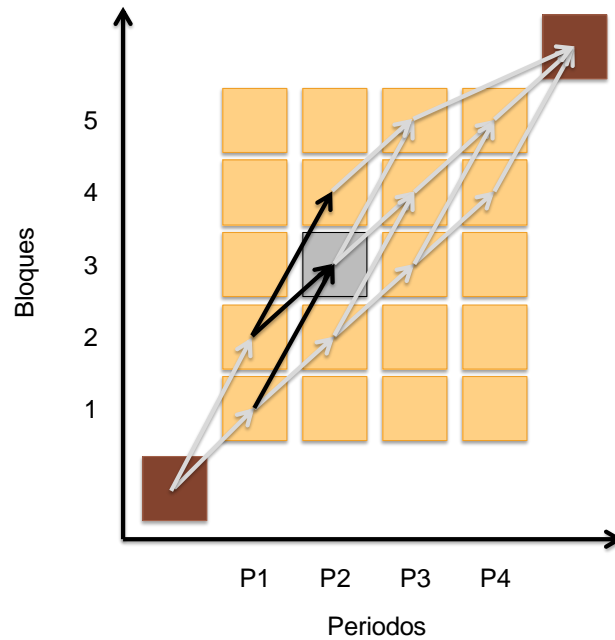


Figura 8-7: Esquema explicativo de la restricción de relación entre el flujo y las variables de extracción del bloque n en el periodo t . La variable $z(j,n,t)$ asignada a la casilla destacada debe ser igual la suma de los arcos en negro.

8.2. Habilitación de Área Variable usando arcos

Uno de los beneficios de modelar la extracción de una columna como un flujo en redes es que permite implementar de manera directa la metodología de apertura de área variable.

En términos simples, la diferencia entre la metodología de habilitación de área fija y la de área variable es la cantidad de rutas posibles que se definen a priori (ver Figura 8-8). Esto es sumamente relevante para poder controlar las dimensiones del problema.

La apertura de área variable permite iniciar la extracción de una columna en cualquier periodo. Sin embargo, existen restricciones operacionales que se deben respetar, como la secuencia de habilitación. Esto implica que, aunque teóricamente todos los puntos puedan iniciar en cualquier periodo, en la práctica esto no debiera ser efectivo. Particularmente, los primeros puntos de la secuencia no debieran tener demasiada libertad puesto que es necesario que se abran rápido para poder extraer columnas posteriores.

Así como la secuencia, pueden existir otras características específicas del recurso y la operación que permiten regular la cantidad de rutas que se generan y así agregar sólo libertades reales. Se debe tener en cuenta que aumentar las dimensiones del problema produce muy fácilmente incrementos de tiempo intolerables (que impiden al computador resolver el problema), por lo tanto, es importante generar rutas de manera inteligente.

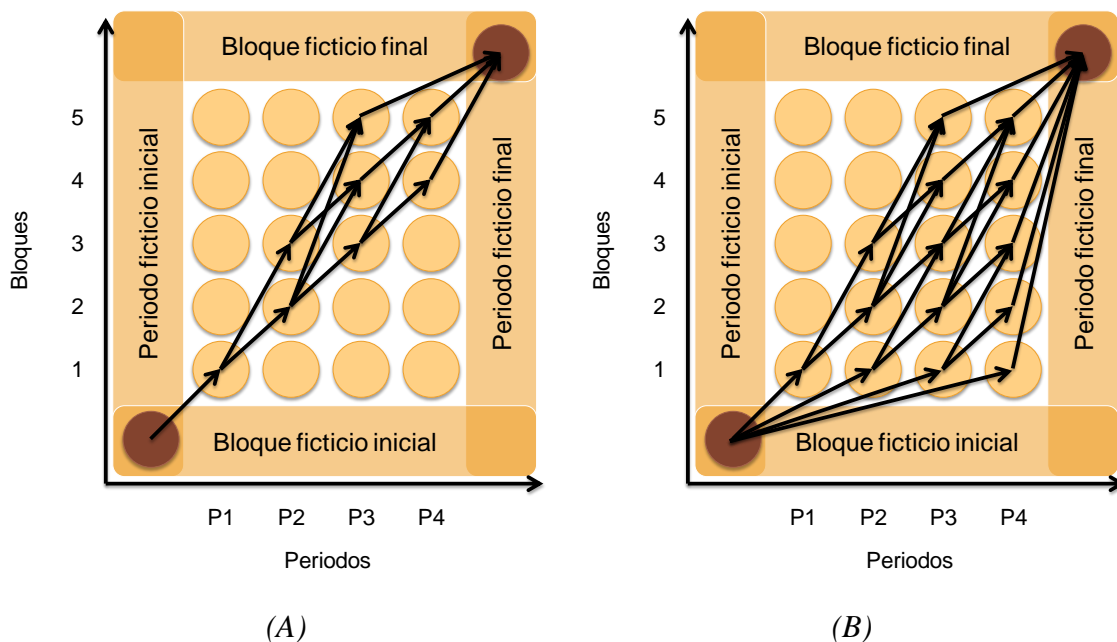


Figura 8-8: Arcos para habilitación de Área Fija y Área Variable.
(A) Arcos que permiten habilitar una columna solamente en el primer periodo del horizonte.
(B) Arcos que permiten habilitar la columna en cualquiera de los 4 periodos del horizonte.

9. Validación del Modelo

En este capítulo se muestra la aplicación del nuevo modelo en una instancia de planificación, los cambios cualitativos que presenta la solución con flujo en redes y el efecto de la habilitación de área variable.

9.1. Características de la Instancia de Validación

Para realizar la validación del modelo se ha usado el recurso de Ingeniería de Prefactibilidad del Proyecto Mina Chuquicamata Subterránea de CODELCO [5].

Este proyecto considera la explotación por medio de macro bloques, con el proceso de extracción “block caving”, en una mina subterránea que comprende cuatro niveles de producción. Cada nivel (sector) está conformado por aproximadamente 20 macrobloques (subsector) que a su vez, contienen cerca de 120 puntos de extracción.

Para validar el modelo sólo se usó un macrobloque del Nivel 1 (Cota 1841) y los datos de entrada más relevantes son los siguientes [10]:

9.1.1. Estado de la mina

- Horizonte de evaluación: 2012 a 2060.
- Periodos anuales desde el año 2012 a 2030 y decenios desde año 2031 hasta el 2060 para hacer un total de 22 periodos.
- La operación del macrobloque se realiza entre los periodos 2023 y 2028 para un total de 6 años de vida.
- El macrobloque está conformado por 116 puntos de extracción que constituyen un total de 29,229,382 toneladas de mineral de ley promedio de Cu 1.06¹⁰%.
- Las dimensiones de los bloques son: 20m x 20m x 18m (largo x ancho x alto).

¹⁰ Valor modificado por confidencialidad de los datos.

9.1.2. Parámetros Técnicos¹¹

- La extracción total del macrobloque debe encontrarse entre los siguientes rangos en toneladas por día (tpd):

Tabla 9-1: Capacidad máxima y mínima de procesamiento

Periodo	Min tpd	Max tpd
2012 - 2022	0	0
2023	3,000	3,500
2024	3,000	8,500
2025	3,000	8,500
2026	3,000	8,500
2027	3,000	8,500
2028	3,000	8,500
2029 - 2060	0	0

- La extracción por columna debe respetar la siguiente serie de velocidades operacionales.

Tabla 9-2: Rangos de velocidades de extracción máximas de una columna

Altura Min. [m]	Altura Max. [m]	Velocidad [m/día]
0	90	0.20
90	162	0.55
162	9999	0.70

- El plan de apertura de área para este macrobloque exige habilitar todos los puntos el primer año de operación, es decir, abrir 46,400 m² en periodo 2023.
- La recuperación de Cu en concentradora corresponde a 86% y la recuperación de Mo a 65% en cualquier periodo del horizonte de evaluación.

¹¹ Algunos valores serán modificados por la confidencialidad de esta información.

9.1.3. Parámetros Económicos

- Para evaluar los productos se usó un precio de Cu en el largo plazo 250 FIC¹²¢/lb y Precio del Mo en el largo plazo 30 FIC\$/kg.
- Los costos variables de la operación serán de FIC\$ 10 por tonelada de mineral extraído. Los costos fijos actualizados al periodo 2012 alcanzan FIC\$ 208,790,725.
- El costo por habilitar un punto de extracción corresponde a FIC\$ 1 millón.
- Por efecto de tratamientos de Fundición y Refinería, se usará un descuento al precio del Cu de 46.23 FIC¢/lb y al precio del Mo de 30 FIC\$/Kg.

9.2. Definición de las instancias de validación

Con el fin de evaluar de manera cualitativa y cuantitativa, los resultados de la implementación, tanto de la modelación en flujo en redes como de la planificación de área variable, se definieron las siguientes instancias que utilizan los datos de entrada indicados anteriormente:

1. Planificación de un macrobloque usando el modelo de optimización original de área fija. Para efectos del análisis posterior, se llamará a esta instancia como "Modelo Original".
2. Planificación de un macrobloque usando el modelo de optimización de área fija con flujo de redes en columnas. Para efectos del análisis posterior, se llamará a esta instancia como "Modelo de Área Fija con Arcos".
3. Planificación de un macrobloque usando el modelo de optimización de área variable con flujo de redes en columnas. Para efectos del análisis posterior, se llamará a esta instancia como "Modelo de Área Variable con Arcos".

Se realizaron 2 análisis usando estas instancias:

- El primer análisis consiste en ver el efecto que tiene la incorporación de arcos para modelar la extracción de columnas como un flujo en redes sobre el modelo original de planificación. Para esto se compararán los resultados de las instancias "Modelo Original" y "Modelo de Área Fija con Arcos".

¹² FIC\$ corresponde a una unidad monetaria ficticia que se usará para enmascarar valores reales y así poder presentar los resultados de este trabajo.

En este caso, se analizarán los resultados de ambas soluciones relajadas en diferentes dimensiones para determinar de qué manera la incorporación de arcos en la formulación ayuda a fortalecer la solución relajada.

- El segundo análisis se refiere a la verificación de la planificación de la habilitación de puntos o plan de Área Variable. En este análisis se desea ver que efectivamente el nuevo modelo es capaz de determinar el plan de habilitación de puntos de extracción en función de un mayor beneficio económico. Para esto se compararán los resultados de las instancias "Modelo de Área Fija con Arcos" y "Modelo de Área Variable con Arcos".

Debido a que en este caso se desea comparar 2 soluciones factibles, no basta con estudiar las diferencias de entre las soluciones relajadas. Es necesario comparar soluciones enteras para ambos casos. Sin embargo, las soluciones enteras tienen un elevado tiempo de resolución pese a las dimensiones reducidas de la instancia. Es por esto que se realizó la siguiente metodología para obtener soluciones enteras en tiempos razonables.

1. Se resolvió el problema usando el Modelo con Arcos de Área Fija para obtener una solución relajada.
2. La solución relajada se "enterizó" por medio de una heurística que redondea por tonelaje la extracción de cada columna, periodo a periodo.
3. La solución redondeada se usó como dato de entrada para una nueva iteración del Modelo con Arcos de Área Fija, que esta vez resolvió el problema entero.
4. La solución entera del Modelo con Arcos de Área Fija se usó como dato de entrada para el Modelo con Arcos de Área Variable.

De esta manera, se han obtenido 2 soluciones enteras comparables.

9.2.1. Heurística de Redondeo

Se ha dicho que se utilizará una heurística para obtener soluciones aceptablemente enteras a partir de soluciones relajadas. Esta heurística redondea en base al tonelaje extraído de un punto en cada periodo y funciona de la siguiente manera:

- Supóngase una solución relajada del modelo de optimización para un punto de extracción cualquiera.
 1. Se realiza un recuento del mineral (toneladas) enviado en cada periodo desde el punto de extracción y de cada bloque del punto.
 2. Por cada periodo, desde el más actual hasta el último del horizonte, se compara el tonelaje extraído en dicho periodo con el tonelaje del bloque en la posición más baja de la columna cuya extracción no ha sido redondeada aún:

- a. Si el tonelaje del bloque es menor o igual que el tonelaje extraído en ese periodo. Entonces la variable correspondiente a ese bloque en dicho periodo toma el valor 1 menos las fracciones extraídas en periodos anteriores, se descuenta del tonelaje extraído de ese periodo el tonelaje del bloque y se pasa al siguiente bloque.
- b. Si el tonelaje del bloque es mayor que el tonelaje extraído en ese periodo. Entonces la variable correspondiente a ese bloque en dicho periodo toma un valor igual al cociente entre el tonelaje extraído en ese periodo y el tonelaje del bloque, se descuenta del tonelaje del bloque el tonelaje extraído en ese periodo y se pasa al siguiente periodo con el mismo bloque.

Para explicar de mejor manera el procedimiento, se propone el siguiente ejemplo del redondeo de una solución del modelo relajado para un punto de extracción:

- Supóngase la siguiente solución del problema relajado en un horizonte de 4 periodos:

		Tonelaje Periodo	9	22	9	12
Bloque	Tonelaje Bloque	P1	P2	P3	P4	
6	10					0.20
5	10					1.00
4	10		0.40	0.60		
3	10	0.30	0.40	0.30		
2	10	0.30	0.70			
1	10	0.30	0.70			

- A continuación se muestran los pasos que realizaría la heurística de redondeo para obtener una solución aceptable:

1)

		Tonelaje Periodo	0	22	9	14
Bloque	Tonelaje Bloque	P1	P2	P3	P4	
6	10					
5	10					
4	10					
3	10					
2	10					
1	1	0.90				

2)

		Tonelaje Periodo	0	22	9	14
Bloque	Tonelaje Bloque	P1	P2	P3	P4	
6	10					
5	10					
4	10					
3	10					
2	10					
1	0	0.90	0.10			

3)	Tonelaje Periodo	0	12	9	14
Bloque	Tonelaje Bloque	P1	P2	P3	P4
6	10				
5	10				
4	10				
3	10				
2	0		1.00		
1	0	0.90	0.10		

4)	Tonelaje Periodo	0	2	9	14
Bloque	Tonelaje Bloque	P1	P2	P3	P4
6	10				
5	10				
4	10				
3	0		1.00		
2	0		1.00		
1	0	0.90	0.10		

5)	Tonelaje Periodo	0	0	9	14
Bloque	Tonelaje Bloque	P1	P2	P3	P4
6	10				
5	10				
4	8		0.20		
3	0		1.00		
2	0		1.00		
1	0	0.90	0.10		

6)	Tonelaje Periodo	0	0	1	14
Bloque	Tonelaje Bloque	P1	P2	P3	P4
6	10				
5	10				
4	0		0.20	0.80	
3	0		1.00		
2	0		1.00		
1	0	0.90	0.10		

7)	Tonelaje Periodo	0	0	0	14
Bloque	Tonelaje Bloque	P1	P2	P3	P4
6	10				
5	9			0.10	
4	0		0.20	0.80	
3	0		1.00		
2	0		1.00		
1	0	0.90	0.10		

8)	Tonelaje Periodo	0	0	0	5
Bloque	Tonelaje Bloque	P1	P2	P3	P4
6	10				
5	0			0.10	0.90
4	0		0.20	0.80	
3	0		1.00		
2	0		1.00		
1	0	0.90	0.10		

9)	Tonelaje Periodo	0	0	0	0
Bloque	Tonelaje Bloque	P1	P2	P3	P4
6	5				0.50
5	0			0.10	0.90
4	0		0.20	0.80	
3	0		1.00		
2	0		1.00		
1	0	0.90	0.10		

9.3. Resultados

9.3.1. Efecto de la extracción de columnas como un flujo en redes

- Evaluación Cuantitativa

Tabla 9-3: Características de la Solución

Modelo	Cantidad de Variables	Cantidad de Variables Enteras	Cantidad de Restricciones	Tiempo de Ejecución [s]	VAN [FIC\$]
Original	50,856	18,941	31,955	13	96,326,122
Arcos de Área Fija	173,141	88,055	53,755	65	96,258,133
Diferencia					- 67,989
Diferencia					-0.07%

Tabla 9-4: Análisis del VAN

Modelo	Costos Fijos [FIC\$]	Costos Variables [FIC\$]	Costos por Habilitación de Puntos [FIC\$]	Ingresos [FIC\$]	VAN [FIC\$]
Original	208,790,725	86,524,190	72,359,041	464,000,081	96,326,125
Arcos de Área Fija	208,790,725	86,582,085	72,359,041	463,989,987	96,258,137
Diferencia		57,895	-	10,093	67,988
Diferencia		0.07%	0.00%	0.00%	-0.07%

Tabla 9-5: Plan Mineral a Planta

Periodo	Modelo Original [toneladas]	Modelo de Arcos de Área Fija [toneladas]	Diferencia [toneladas]	Diferencia [%]
P2023	1,260,000	1,260,000	-	0.00%
P2024	3,050,273	3,060,000	9,727	0.32%
P2025	3,060,000	3,060,000	-	0.00%
P2026	3,060,000	3,060,000	-	0.00%
P2027	3,060,000	3,060,000	-	0.00%
P2028	3,060,000	3,060,000	-	0.00%
	16,550,273	16,560,000	9,727	0.06%

Tabla 9-6: Ley de Cu del Mineral a Planta

Periodo	Modelo Original [%]	Modelo de Arcos de Área Fija [%]	Diferencia [%]
P2023	1.00	1.00	- 0.00
P2024	1.11	1.09	- 0.02
P2025	1.04	1.07	0.04
P2026	1.06	1.07	0.01
P2027	1.09	1.09	- 0.00
P2028	1.17	1.15	- 0.02
	1.09	1.09	- 0.00

• **Evaluación Cualitativa**

En este análisis se han comparado 2 puntos del subsector en evaluación con el fin de determinar por observación la mejora en la calidad de la solución relajada que genera el uso de arcos.

Tabla 9-7: Solución Cualitativa

Bloque	Velocidad (días)	Extracción Modelo Original						Extracción Modelo con Arcos de Área Fija					
Columna: N1N1_N040003		P2023	P2024	P2025	P2026	P2027	P2028	P2023	P2024	P2025	P2026	P2027	P2028
10	25.71	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
9	32.73	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
8	32.73	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7	32.73	-	-	-	-	-	0.33	-	-	-	-	-	0.32
6	32.73	-	-	-	-	0.39	0.61	-	-	-	-	-	1.00
5	90.00	-	-	-	0.19	0.21	0.61	-	-	-	-	1.00	-
4	90.00	-	-	-	0.19	0.21	0.61	-	-	-	1.00	-	-
3	90.00	-	-	-	0.19	0.81	-	-	-	1.00	-	-	-
2	90.00	-	-	-	1.00	-	-	-	1.00	-	-	-	-
1	90.00	1.00	-	-	-	-	-	1.00	-	-	-	-	-
Columna: N1N1_N040035		P2023	P2024	P2025	P2026	P2027	P2028	P2023	P2024	P2025	P2026	P2027	P2028
15	25.71	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
14	25.71	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
13	25.71	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
12	25.71	-	-	-	-	0.32	0.28	-	-	-	-	0.22	0.38
11	25.71	-	-	-	-	0.32	0.28	-	-	-	-	0.22	0.38
10	25.71	-	-	-	-	0.32	0.28	-	-	-	-	0.22	0.38
9	32.73	-	-	-	-	0.32	0.28	-	-	-	-	0.22	0.38
8	32.73	-	-	-	-	0.32	0.28	-	-	-	-	0.60	-
7	32.73	-	0.50	0.24	0.26	-	-	-	-	-	1.00	-	-
6	32.73	-	0.50	0.24	0.26	-	-	-	-	0.81	0.19	-	-
5	90.00	-	0.50	0.24	0.26	-	-	-	0.81	0.19	-	-	-
4	90.00	-	0.50	0.24	0.26	-	-	-	1.00	-	-	-	-
3	90.00	-	0.50	0.24	0.26	-	-	-	1.00	-	-	-	-
2	90.00	-	0.50	0.24	0.26	-	-	-	1.00	-	-	-	-
1	90.00	1.00	-	-	-	-	-	1.00	-	-	-	-	-

Por medio de la inspección visual, se pueden observar las siguientes mejoras producidas por la implementación del modelo con arcos:

- El punto N1N1_N04003 presentaba una detención durante los periodos P2024 y P2025 al usar el modelo original. Este problema de reapertura de puntos de extracción ha sido solucionado puesto que los arcos deben mantener un flujo que impide que exista extracción nula entre dos periodos con extracción mayor que cero para un mismo punto.
- Se puede observar en ambos puntos, que las soluciones se acercan mucho más a un resultado entero, en especial el punto N1N1_N04003. El punto N1N1_N04035 ha disminuido de manera considerable el fraccionamiento de las variables y se aprecia un "escalonamiento" similar al que debiera tener una solución entera, donde los bloques se extraen completos en un solo periodo.

Se debe considerar que estas observaciones realizadas a 2 puntos particulares también aplican en el resto de puntos del ejercicio.

9.3.2. Efecto de la habilitación de área variable

El objetivo del modelo de área variable es facultar al sistema de planificación para poder adelantar o postergar la apertura de puntos de extracción con el fin de generar mayor valor del negocio.

En este análisis se compararon 2 instancias. La primera corresponde a un plan obtenido con el modelo de área fija, en el cual se abren todas las columnas del subsector bajo análisis en el periodo 2023. La segunda es la solución obtenida con el modelo de área variable, que podía postergar puntos en el caso que fuera conveniente para obtener un mayor VAN.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

Tabla 9-8: Características de las Instancias

Modelo	Cantidad de Variables	Cantidad de Variables Enteras	Cantidad de Restricciones	Tiempo de Ejecución ¹³ [s]	VAN [FIC\$]
Arcos de Área Fija	173,141	87,378	49,700	2,784	89,553,969
Arcos de Área Variable	209,906	124,143	66,437	9,855	92,328,240
				Diferencia	2,774,271
				Diferencia	3.10%

¹³ Corresponden a los tiempo de demora de la solución entera.

Tabla 9-9: Resultados Económicos de las Instancias

Modelo	Costos Fijos [FIC\$]	Costos Variables [FIC\$]	Costos por Habilitación de Puntos [FIC\$]	Ingresos [FIC\$]	VAN [FIC\$]
Arcos de Área Fija	208,790,725	85,631,519	72,359,041	456,335,254	89,553,969
Arcos de Área Variable	208,790,725	86,545,523	71,342,502	459,006,991	92,328,240
Diferencia		914,005	- 1,016,538	2,671,737	2,774,271
Diferencia		1.07%	-1.40%	0.59%	3.10%

La tabla 9-9 muestra el modelo con arcos de área variable, genera un beneficio adicional al modelo de arcos de área fija en la instancia analizada. En este caso, el beneficio se ve reflejado en un incremento de los ingresos, conjuntamente con una reducción de los costos por habilitación de puntos debido la postergación de la apertura de algunos. En la tabla 9-10 se puede ver que la apertura de 8,800 m², correspondientes a 22 de los 116 puntos de extracción de la instancia, ha sido postergada un periodo. Este efecto ha producido un beneficio de FIC\$ 1 millón.

Tabla 9-10: Plan de Apertura de Área

Periodo	Metros Cuadrados	
	Modelo de Arcos de Área Fija	Modelo de Arcos de Área Variable
2023	46,400	37,600
2024	-	8,800

Periodo	Puntos de Extracción	
	Modelo de Arcos de Área Fija	Modelo de Arcos de Área Variable
2023	116	94
2024	-	22

Tabla 9-11: Plan de Mineral a Planta

Periodo	Modelo de Arcos de Área Fija [toneladas]	Modelo de Arcos de Área Variable [toneladas]	Diferencia [toneladas]	Diferencia [%]
P2023	1,256,815	1,258,809	1,994	0.16%
P2024	3,057,391	3,059,821	2,430	0.08%
P2025	3,054,277	3,059,686	5,409	0.18%
P2026	3,038,224	3,057,811	19,587	0.64%
P2027	3,054,910	3,059,511	4,601	0.15%
P2028	3,058,493	3,057,109	- 1,384	-0.05%
	16,520,110	16,552,747	32,637	0.20%

Tabla 9-12: Ley de Cu del Mineral a Planta

Periodo	Modelo de Arcos de Área Fija [%]	Modelo de Arcos de Área Variable [%]	Diferencia [%]
P2023	1.00	1.02	0.02
P2024	1.07	1.07	0.00
P2025	1.07	1.06	- 0.01
P2026	1.06	1.05	- 0.01
P2027	1.10	1.10	0.00
P2028	1.09	1.14	0.06
	1.07	1.08	0.01

La cantidad de mineral enviado en ambos casos difiere cada periodo en menos del 1% y, en total, en un 0.2%, lo cual se puede considerar como despreciable para el análisis, es decir, se habla que tienen mismo plan de mineral enviado a planta. Esto implica que, los beneficios obtenidos mediante ingresos se deben a una mejora en las leyes de Cu de los minerales.

En la tabla 9-12 se puede apreciar que, en general, las leyes de Cu mejoran de un 1.07% a un 1.08%. Sin embargo, el aporte más importante corresponde al aumento en las leyes de Cu de minerales enviados el periodo P2023, que es cuando la tasa de descuento castiga menormente los flujos en este ejercicio.

10. Conclusiones

En este trabajo, se ha implementado en un sistema de planificación de operaciones mineras subterráneas la capacidad de determinar, de manera integrada, el plan de habilitación de puntos de extracción, conjuntamente con la determinación de la extracción de mineral en cada periodo. Esto se logró mediante la modelación de la extracción de columnas como un flujo en redes.

La formulación de la extracción de mineral de una columna como un flujo en redes, incluso antes de incorporar la decisión de área a habilitar en cada periodo, permite mejorar la solución del problema relajado. Lo anterior resulta de gran importancia puesto que las dimensiones tan grandes del problema de planificación minera hacen muy difícil la obtención de soluciones del problema entero, por lo que, se suele usar la solución del problema relajado como guía para encontrar soluciones enteras aceptables.

Al comparar el desempeño del modelo original con la nueva formulación con flujo en redes se observa una mejora sustancial en la solución relajada del problema. Las variables son mucho menos fraccionarias, se han eliminado problemas de reapertura de puntos y se ha descartado la posibilidad de extraer fracciones de bloques violando restricciones de velocidad de explotación. Incluso, para algunos puntos la solución es casi completamente entera. De manera que, el uso de heurísticas de redondeo se vuelve una buena manera de obtener soluciones aceptables en tiempos cortos (en comparación con el tiempo para resolver el problema entero).

Adicionalmente, esta nueva formulación permite de manera directa implementar la capacidad de determinar el plan de apertura de puntos de extracción agregando más arcos o posibilidades de solución, al costo de elevar la dificultad del problema y, por lo tanto, los tiempos de resolución.

La incorporación de los arcos en la formulación de la extracción de columnas incrementa también la dificultad del problema debido a la incorporación de una gran cantidad de variables, tanto continuas como enteras. Para paliar el aumento en los tiempos de resolución, se ha incorporado una metodología de agregación del recurso minero que disminuye la cantidad de variables del modelo. Aprovechando que los tiempos de resolución crecen exponencialmente con la cantidad de variables, la reducción del recurso mediante la agregación de puntos de extracción genera una notable disminución en la cantidad de variables y, en consecuencia, una baja notable en los tiempos de resolución del problema.

La agregación de puntos de extracción también reduce la flexibilidad del problema porque hace que los puntos agregados tengan la misma extracción. Sin embargo, se ha mostrado que este hecho no tiene implicancias significativas en el valor del negocio. Este efecto está sustentado en la característica particular que tienen las operaciones mineras que usan métodos de hundimiento, como el Block Caving o el Panel Caving, donde los puntos

de extracción que se encuentran en una vecindad deben ser explotados de manera similar para no incrementar la dilución del recurso y también por razones de estabilidad de la mina.

Finalmente, se han realizado pruebas en la planificación de una mina subterránea real, comprobándose que el modelo de planificación de área variable es efectivamente capaz de determinar el plan de habilitación económicamente más conveniente y que puede producir mejoras en los beneficios netos del negocio. En el ejercicio de prueba, se han contrastado las soluciones del modelo de área fija con el de área variable y este último ha producido mejoras en el VAN por un orden del 3%. Estas mejoras son debidas principalmente a:

- Ahorro debido a la postergación de los costos de habilitación de puntos de extracción. El plan de área fija indicaba que todos los puntos de extracción debían ser abiertos el periodo 2023. Sin embargo, el modelo de área variable determinó que era recomendable postergar en un periodo la apertura del 19% de los puntos de la secuencia, generando ahorros por FIC\$ 1 millón.
- Mejora de los ingresos por el aumento en la flexibilidad de la solución. El modelo de área variable tiene una mayor cantidad de rutas que el modelo de área fija, por lo que puede tratar de obtener mejores leyes o sacar más mineral.

Es importante mencionar que el ejercicio realizado correspondía a una operación minera de extracción por Block Caving, donde cada subsector es relativamente pequeño (100 puntos aprox.) y de corta vida operacional (6 años), por lo tanto, la flexibilidad intrínseca de la operación es baja. Se esperaría que en una operación de tipo Panel Caving, donde los subsectores tienen una elevada cantidad de puntos (1000 aprox.), la planificación de área variable pueda tener impactos mayores al obtenido en este ejercicio. Queda propuesto para un trabajo futuro verificar lo anterior utilizando el nuevo sistema en alguna operación minera de extracción por Panel Caving, como El Teniente de CODELCO.

11. Bibliografía

- [1] COCHILCO, "Anuario de Estadísticas del Cobre y Otros Minerales," Comisión Chilena del Cobre, Santiago, 2011.
- [2] SERNAGEOMIN, "Anuario de la Minería de Chile," Servicio Nacional de Geología y Minería, Santiago, Chile, 2011.
- [3] CODELCO, "Memoria Anual 2011," Corporación Nacional del Cobre de Chile, 2011.
- [4] CODELCO. Minería subterránea: Pilar del futuro de Codelco. [Online]. http://www.codelco.com/mineria-subterranea-pilar-del-futuro-de-codelco/prontus_codelco/2011-05-19/170202.html
- [5] CODELCO. Proyecto Mina Chuquicamata Subterránea. [Online]. http://www.codelco.com/proyecto-mina-chuquicamata-subterranea/prontus_codelco/2012-01-27/134902.html
- [6] CODELCO. Nuevo Nivel Mina El Teniente. [Online]. http://www.codelco.com/nuevo-nivel-mina-el-teniente/prontus_codelco/2011-07-06/130724.html
- [7] Rodrigo Caro, *Optimización de la Planificación Integrada Minero-Metalúrgica de Largo Plazo*. Santiago, Chile, 2006, Memoria para optar al título de ingeniero civil industrial e ingeniero civil químico.
- [8] Pablo Santibañez, *Metodología para la Evaluación y Optimización de Planes Mineros de Largo Plazo*. Santiago, Chile, 2000, Trabajo de memoria de título.
- [9] Marcel Goic, *Formulación e Implementación de un Modelo de Programación Matemática para la Planificación de Largo Plazo en Minería a Cielo Abierto*. Santiago, Chile, 2003, Tesis para optar al título de magister en gestión de operaciones.
- [10] CODELCO, "Estudio de Prefactibilidad Proyecto Mina Chuquicamata Subterránea,"

Corporación Nacional del Cobre de Chile, Santiago, 2009.

- [11] GAMS. The General Algebraic Modeling System. [Online]. <http://www.gams.com/>
- [12] IBM. IBM ILOG CPLEX Optimizer. [Online]. <http://www-01.ibm.com/software/integration/optimization/cplex-optimizer/>
- [13] Carmen Ortiz, Samuel Varas, and Jorge Vera, *Apuntes de Investigación Operativa.*: Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Chile, 1995.
- [14] Alexander Vyazmensky, *NUMERICAL MODELLING OF SURFACE SUBSIDENCE ASSOCIATED WITH BLOCK CAVE MINING USING A FINITE ELEMENT I DISCRETE ELEMENT APPROACH.*, 2008, THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY In the Earth Sciences.
- [15] Raúl Castro, Preparación en Block Caving, 2008, Curso Manejo de Minerales y Ventilación - Universidad de Chile.
- [16] Enrique Rubio, Camilo Morales, Marcelo Vargas, Fernando Peirano, and Nicolás Montecinos, Diseño de Minas Subterráneas, 2009, Curso MI 58B Diseño de Minas Subterráneas.
- [17] Marianela Pereira, *Construcción de un Modelo Agregado de Planificación Minera.* Santiago, Chile, 2007, Memoria para optar al título de ingeniero civil industrial.
- [18] Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Chile. [Online]. http://old.dii.uchile.cl/proyectos_investigacion/
- [19] Jorge Alarcón Díaz, *Evaluación de la Resolución en Paralelo de un Problema Estocástico de Planificación Minera de Largo Plazo.* Santiago, Chile, 2012, Memoria para optar al título de ingeniero civil industrial.
- [20] Esteban Aste, *Desarrollo de un Método Heurístico para la Generación de Programas Mineros de Corto Plazo en Minería de Cobre a Cielo Abierto.* Santiago, Chile, 2011, Tesis para optar al grado de magister en gestión de operaciones.

- [21] Mauricio Muñoz, "Cartilla Laboral: La Minería del Cobre en Chile," Área Laboral ICAL, Instituto de Ciencias Alejandro Lipschutz, 2011. [Online]. <http://www.ical.cl/2011/11/cartilla-laboral-la-mineria-del-cobre-en-chile/>
- [22] Rodrigo Valdés, *Análisis con y sin Forzamiento del Crecimiento del Sector Oeste de Mina Esmeralda*. Santiago, Chile, 2009, Memoria para optar al título de ingeniero civil en minas.
- [23] COCHILCO, "Informe Tendencias del Mercado del Cobre Mayo-Julio 2012," Comisión Chilena del Cobre, Santiago, 2012.
- [24] COCHILCO, "Informe Tendencias del Mercado del Cobre Enero-Abril 2012," Comisión Chilena del Cobre, Santiago, 2012.
- [25] SONAMI, "Fundamentos para el Desarrollo Minero de Chile," Sociedad Nacional de Minería de Chile, Santiago, 2010.
- [26] Roberto Oyarzun. Métodos de explotación más comunes en minería subterránea. [Online]. http://www.ucm.es/info/crismine/Metodos_explotacion.htm

12. Anexos

12.1. Formulación Matemática Original del Modelo de Optimización, sin Flujo en Redes para las Columnas.

12.1.1. Índices

t, u	:	períodos del horizonte de evaluación
a	:	sectores de explotación
j, i	:	columnas de mineral
n	:	bloques de mineral en una columna
v_s	:	primer nodo de la red de procesos subterráneos
p_s	:	segundo nodo de la red de procesos subterráneos
s_s	:	tercer nodo de la red de procesos subterráneos
c	:	chancadores
q	:	moliendas
o	:	concentradoras
vp_s	:	arco entre el primer y segundo nodo de la red de procesos subterráneos
ps_s	:	arco entre el segundo y tercer nodo de la red de procesos subterráneos
sc_s	:	arco entre el tercer nodo de la red de procesos subterráneos y chancadores
cq	:	arco entre chancadores y moliendas
qo	:	arco entre moliendas y concentradoras
k, g	:	productos intermedios y finales

12.1.2. Conjuntos

- $k(v_s)$: conjunto de productos en el 1° nodo de la red de procesos subterráneos
- $k(p_s)$: conjunto de productos en el 2° nodo de la red de procesos subterráneos
- $k(s_s)$: conjunto de productos en el 3° nodo de la red de procesos subterráneos
- $k(c)$: conjunto de productos en los chancadores
- $k(q)$: conjunto de productos en las moliendas
- $k(o)$: conjunto de productos en las concentradoras
- $n(j)$: bloques en columna j
- Ji : $\{ (j,i) / j \text{ es una columna vecina de } i \}$
- $J(a)$: columnas de sector a
- JV_s : $\{ (j,v_s) / j \text{ tributa su producción en } v \}$
- VP_s : $\{ (v_s,p_s) / v \text{ tributa su producción en } p \}$
- PS_s : $\{ (p_s,s_s) / p \text{ tributa su producción en } s \}$
- SC_s : $\{ (s_s,c) / s \text{ tributa su producción en } c \}$
- CQ : $\{ (c,q) / c \text{ tributa su producción en } q \}$
- QO : $\{ (q,o) / q \text{ tributa su producción en } o \}$
- $NO_HAB(j, t)$: $\{ j / j \text{ no es factible de ser explotado en el período } t \}$
- $SEC(j, i)$: $\{ (j,i) / \text{columna } j \text{ debe ser explotada antes que la columna } i \}$

12.1.3. Parámetros

- Explotación

$h(j,n)$:	altura [m] del bloque n , en la columna j
$\delta(j,i)$:	diferencia de altura [m] máxima entre columnas vecinas (j, i)
$\chi(j,i)$:	diferencia de altura [m] mínima entre columnas vecinas (j, i)
$\beta(j,i)$:	tiempo mínimo que debe utilizarse para extraer n de la columna j
$DP(t)$:	duración [días] del período t
$A(k,j,n)$:	toneladas de producto k que se obtienen de n perteneciente a la columna j
$area(j)$:	área [m ²] de influencia de la columna j
$MAX_AREA(t)$:	área máxima a habilitar por sector en el período t
$TON(j,n)$:	toneladas de mineral que tiene el bloque n de la columna j
$VBASE(j)$:	velocidad base [tpd] de extracción de la columna j

- Capacidades de Proceso y Flujo

$CAP(v_s,t)$:	capacidad máxima del nodo v_s , en el período t
$CAP(vp_s,t)$:	capacidad máxima del arco vp_s , en el período t
$CAP(p_s,t)$:	capacidad máxima de la nodo p_s , en período t
$CAP(ps_s,t)$:	capacidad máxima del arco ps_s , en el período t
$CAP(s_s,t)$:	capacidad máxima del nodo s_s , en el período t
$CAP(sc_s,t)$:	capacidad máxima del arco sc_s , en el período t
$CAP(c,t)$:	capacidad máxima de la chancador c , en el período t

$CAP(cq, t)$:	capacidad máxima del arco cq , en el período t
$CAP(q, t)$:	capacidad máxima de la molienda q , en el período t
$CAP(qo, t)$:	capacidad máxima del arco qo , en el período t
$CAP(o, t)$:	capacidad máxima de la concentradora o , en el período t

- Coeficientes Tecnológicos (transformación de productos)

$CC(ok)$:	consumo de capacidad de una tonelada de producto k procesada en la concentradora o
$CT(c, kg)$:	coeficiente Tecnológico de transformación de producto g en producto k , en la estación de chancado c
$CT(q, kg)$:	coeficiente Tecnológico de transformación de producto g en producto k , en la estación de molienda q
$CT(o, kg)$:	coeficiente Tecnológico de transformación de producto g en producto k , en la estación de concentradora o

- Parámetros Generales

$P(k, t)$:	precio de venta de los productos $k \in K_M$ en nivel demanda final, en el período t
$desc(t)$:	factor de descuento para el período t

- Costos Fijos

$Ca(v_s, t)$:	costo fijo asociado al nodo v_s , en período t
$Ca(p_s, t)$:	costo fijo asociado al nodo p_s , en período t

$Ca(s_s, t)$:	costo fijo asociado al nodo s_s , en período t
$Ca(c, t)$:	costo fijo asociado la estación de chancado c , en período t
$Ca(q, t)$:	costo fijo asociado la estación de molienda q , en período t
$Ca(o, t)$:	costo fijo asociado la estación de concentrado o , en período t
$Ca(vp_s, t)$:	costo fijo asociado al arco vp_s , en período t
$Ca(ps_s, t)$:	costo fijo asociado al arco ps_s , en período t
$Ca(sc_s, t)$:	costo fijo asociado al arco sc_s , en período t
$Ca(cq, t)$:	costo fijo asociado al arco cq , en período t
$Ca(qo, t)$:	costo fijo asociado al arco qo , en período t

- Costos Variables (de Flujo)

$CW(a, t)$:	costo de habilitación del sector a en el período t
$CA(a, t)$:	costo de incorporación de 1 m ² de área en el sector a en el período t
$Cf(v_s, t)$:	costo de Flujo durante el período t , en el nodo v_s
$Cf(p_s, t)$:	costo de Flujo durante el período t , en el nodo p_s
$Cf(s_s, t)$:	costo de Flujo durante el período t , en el nodo v_s
$Cf(c, t)$:	costo de Flujo durante el período t , en chancadora c
$Cf(q, t)$:	costo de Flujo durante el período t , en molienda q
$Cf(o, t)$:	costo de Flujo durante el período t , en concentradora o
$Cf(vp_s, t)$:	costo de Flujo durante el período t , en el arco vp_s
$Cf(ps_s, t)$:	costo de Flujo durante el período t , en el arco ps_s
$Cf(sc_s, t)$:	costo de Flujo durante el período t , en el arco sc_s
$Cf(cq, t)$:	costo de Flujo durante el período t , en el arco cq

- $Cf(qo, t)$: costo de Flujo durante el período t , en el arco qo
- $MAXE(kcont,t)$: nivel máximo de contaminante $kcont$ en período t

12.1.4. Variables de decisión

- Explotación

- $w(a,t)$: 1, si se habilita sector a en el período t
0, si no
- $0 \leq z(j,n,t) \leq 1$: fracción del bloque n de la columna j extraída en el período t
- $0 \leq Y(j,t)$: altura extraída en columna j al final del período t

- Flujo en arcos y procesos

- $f(v_s, k, t) \geq 0$: flujo de producto k (toneladas) en nodo v_s , en el período t
- $f(p_s, k, t) \geq 0$: flujo de producto k (toneladas) en nodo p_s , en el período t
- $f(s_s, k, t) \geq 0$: flujo de producto k (toneladas) en nodo s_s , en el período t
- $f(c, k, t) \geq 0$: flujo de producto k (toneladas) en chancadora c , en período t
- $f(q, k, t) \geq 0$: flujo de producto k (toneladas) en molienda q , en el período t
- $f(o, k, t) \geq 0$: flujo de producto k (toneladas) en concentradora o , en el período t
- $f(vp_s, k, t) \geq 0$: flujo de producto k (toneladas) en arco vp_s , en el período t
- $f(ps_s, k, t) \geq 0$: flujo de producto k (toneladas) en arco ps_s , en el período t
- $f(sc_s, k, t) \geq 0$: flujo de producto k (toneladas) en arco sc_s , en el período t
- $f(cq, k, t) \geq 0$: flujo de producto k (toneladas) en arco cq , en el período t

$f(qo, k, t) \geq 0$: flujo de producto k (toneladas) en arco qo , en el período t

- Disponibilidad de Arcos e Instalaciones Productivas

$X(v_s, t)$: 1, si está disponible el nodo v_s , en período el t
0, si no

$X(p_s, t)$: 1, si está disponible el nodo p_s , en período el t
0, si no

$X(s_s, t)$: 1, si está disponible el nodo s_s , en período el t
0, si no

$X(c, t)$: 1, si está disponible la chancadora c , en período el t
0, si no

$X(q, t)$: 1, si está disponible la molienda q , en período el t
0, si no

$X(o, t)$: 1, si está disponible la concentradora o , en período el t
0, si no

$X(vp_s, t)$: 1, si está disponible el arco vp_s , en período el t
0, si no

$X(ps_s, t)$: 1, si está disponible el arco ps_s , en período el t
0, si no

$X(sc_s, t)$: 1, si está disponible el arco sc_s , en período el t
0, si no

$X(cq, t)$: 1, si está disponible el arco cq , en período el t
0, si no

$X(qo, t)$: 1, si está disponible el arco qo , en período el t
0, si no

- Construcción de Arcos e Instalaciones Productivas

$\alpha (v_s, t)$:	1, si se construye el nodo v_s , en el período t 0, si no
$\alpha (p_s, t)$:	1, si se construye el nodo p_s , en el período t 0, si no
$\alpha (s_s, t)$:	1, si se construye el nodo s_s , en el período t 0, si no
$\alpha (c, t)$:	1, si se construye la chancadora c , en el período t 0, si no
$\alpha (q, t)$:	1, si se construye la molienda q , en el período t 0, si no
$\alpha (o, t)$:	1, si se construye la concentradora o , en el período t 0, si no
$\alpha (vp_s, t)$:	1, si se construye el arco vp_s , en el período t 0, si no
$\alpha (ps_s, t)$:	1, si se construye el arco ps_s , en el período t 0, si no
$\alpha (sc_s, t)$:	1, si se construye el arco sc_s , en el período t 0, si no
$\alpha (cq, t)$:	1, si se construye el arco cq , en el período t 0, si no
$\alpha (qo, t)$:	1, si se construye el arco qo , en el período t 0, si no

12.1.5. Restricciones

- Extracción

- a) Cada bloque se puede explotar, total o parcialmente, sólo una vez en el horizonte

$$\sum_t z(j, n, t) \leq 1 \quad \forall j, n$$

- b) Los bloques deben ser explotados “hacia arriba”

$$\sum_{u \leq t} z(j, n - 1, u) \geq \sum_{u \leq t} z(j, n, u) \quad \forall j, n, t$$

- c) La altura extraída en la columna j , corresponde a la suma de las fracciones extraídas a cada bloque perteneciente a ella en todos los períodos anteriores, hasta el t inclusive.

$$Y(j, t) = \sum_{u \leq t} \sum_{n \in N(j)} z(j, n, u) * h(j, n) \quad \forall j, t$$

- d) La diferencia de altura entre las columnas que pertenecen a una vecindad no puede ser mayor que $\delta(j, i)$ (“suavizamiento”)

$$Y(j, t) - Y(i, t) \leq \delta(j, i) \quad \forall (j, i) \in JI \quad \forall t$$

- e) La diferencia de altura entre las columnas que pertenecen a una vecindad no puede ser menor que $\gamma(j, i)$ (“secuencia”)

$$Y(j, t) - Y(i, t) \geq \gamma(j, i) \quad \forall (j, i) \in SEC(j, i) \quad \forall t$$

- f) La suma de los tiempos utilizados para extraer los bloques de la columna j en el período t debe ser menor que el total de días hábiles del período.

$$\sum_{n \in N(j)} z(j, n, t) * \beta(j, n, h) \leq DP(t) \sum_{u \leq t} w(a, h, u) + (1 - \sum_{u \leq t} w(a, h, u)) \sum_h \sum_{n \in N} \beta(j, n, h)$$

$$\forall t, h, j \in J(a)$$

- g) A lo más se puede incorporar un monto igual a $MAX_AREA(t)$ en área de columnas nuevas del sector a , en el período t .

$$\sum_{j \in J(a)} z(j, t) * area(j) \leq MAX_{AREA}(t) \quad \forall a, t$$

- k) En el período t sólo se puede extraer mineral de las columnas j que son factibles, dada la restricción de incorporación de área.

$$\sum_h \sum_{j \in NO_HAB(j,t)} \sum_{n \in N(j)} z(j, n, h, t) = 0 \quad \forall t$$

- Disponibilidad de Recursos de Proceso y Flujo

- a) Un nodo v_s está disponible en el período t , si ha sido construido en los períodos anteriores.

$$X(v_s, t) \leq \sum_{u \leq t} \alpha(v_s, u) \quad \forall v_s, t$$

- b) Un arco entre el nodo v_s y el nodo p_s está disponible en el período t , si ha sido construido en los períodos anteriores

$$X(vp_s, t) \leq \sum_{u \leq t} \alpha(vp_s, u) \quad \forall (v_s, p_s) \in VP_s, t$$

- c) Un nodo p_s está disponible en el período t , si ha sido construido en los períodos anteriores.

$$X(p_s, t) \leq \sum_{u \leq t} \alpha(p_s, u) \quad \forall p_s, t$$

- d) Un arco entre el nodo p_s y el nodo s_s está disponible en el período t , si ha sido construido en los períodos anteriores

$$X(ps_s, t) \leq \sum_{u \leq t} \alpha(ps_s, u) \quad \forall (p_s, s_s) \in PS_s, t$$

- e) Un nodo s_s está disponible en el período t , si ha sido construido en los períodos anteriores.

$$X(s_s, t) \leq \sum_{u \leq t} \alpha(s_s, u) \quad \forall s_s, t$$

- f) Un arco entre el nodo s_s y la chancadora c está disponible en el período t , si ha sido construido en los períodos anteriores

$$X(sc_s, t) \leq \sum_{u \leq t} \alpha(sc_s, u) \quad \forall (s_s, c) \in SC_s, t$$

- g) Una estación chancadora c disponible en el período t , si ha sido construida en los períodos anteriores.

$$X(c, t) \leq \sum_{u \leq t} \alpha(c, u) \quad \forall c, t$$

- h) Un arco entre la chancadora c y la molienda q disponible en el período t , si ha sido construido en los períodos anteriores

$$X(cq, t) \leq \sum_{u \leq t} \alpha(cq, u) \quad \forall (c, q) \in CQ, t$$

- i) Una estación de molienda q está disponible en el período t , si ha sido construida en los períodos anteriores.

$$X(q, t) \leq \sum_{u \leq t} \alpha(q, u) \quad \forall q, t$$

- j) Un arco entre la molienda q y la concentradora o está disponible en el período t , si ha sido construido en los períodos anteriores

$$X(qo, t) \leq \sum_{u \leq t} \alpha(qo, u) \quad \forall (q, o) \in QO, t$$

- k) Una estación de concentrado o está disponible en el período t , si ha sido construida en los períodos anteriores.

$$X(o, t) \leq \sum_{u \leq t} \alpha(o, u) \quad \forall o, t$$

- Conservación de Flujos, Factores de Transformación y Capacidades de Proceso y de Arcos.

Extracción

- a) El flujo de producto k que llega al nodo v_s , en el período t , corresponde a la suma de las cantidades de ese producto obtenidas de los bloques extraídos en dicho período.

$$f(v_s, k, t) = \sum_{j \in J(v_s)} \sum_{n \in N(j)} \sum_h A(k, j, n, h) Z(j, n, h, t) \quad \forall v_s, k \in k(v_s), t$$

- b) El flujo de productos en el nodo v_s , en el período t , debe ser menor que su capacidad.

$$\sum_{k \in k(v_s)} f(v_s, k, t) \leq CAP(v_s, t) \quad \forall v_s, t$$

- c) El flujo de producto k es igual a la suma de los flujos de producto k enviados desde el nodo v_s hacia el nodo p_s , en el período t

$$f(v_s, k, t) = \sum_{p_s / (v_s, p_s) \in VP_s} f(v_s, p_s, k, t) \quad \forall v_s, k \in k(v_s), t$$

Transporte Intermedio:

- d) El flujo de productos en transporte intermedio entre el cruzado v y la estación de vaciado p , en el período t , debe ser menor que su capacidad

$$\sum_{k \in k(v_s)} f(v_s, p_s, k, t) \leq CAP(v_s, p_s, t) \quad \forall (v_s, p_s) \in VP_s, t$$

Estación de Vaciado:

- e) El flujo de producto k en la estación de vaciado p, en el período t, es igual al flujo de producto k que llega desde todos los cruzados por transporte intermedio.

$$f(p_s, k, t) = \sum_{v_s / (v_s, p_s) \in VP_s} f(v_s, p_s, k, t) \quad \forall p_s, k \in k(v_s), t$$

- f) El flujo de productos en la estación de vaciado p, en el período t, debe ser menor que su capacidad de proceso.

$$\sum_{k \in k(v_s)} f(p_s, k, t) \leq CAP(p_s, t) * X(p_s, t) \quad \forall p_s, t$$

- g) El total de producto k enviado por los arcos de transporte principal s es igual al total de producto k enviado desde la estación de vaciado p

$$\sum_{s_s / (p_s, s_s) \in PS_s} f(p_s, s_s, k, t) = f(p_s, k, t) \quad \forall p_s, k \in k(p_s), t$$

Estación de Vaciado - Arco de Transporte Principal:

- h) El flujo de productos entre la estación de vaciado p y el arco de transporte principal s, en el período t, debe ser menor que su capacidad

$$\sum_{k \in k(p_s)} f(p_s, s_s, k, t) \leq CAP(p_s, s_s, t) * X(p_s, s_s, t)$$

$$\forall (p_s, s_s) \in PS_s, t$$

12.1.6. Función objetivo

Costos Fijos

$$\begin{aligned}
 CF = \sum_t \left\{ desc(t) \right. & \left[\left(\sum_{v_s} C\alpha(v_s, t) * \alpha(v_s, t) \right) + \left(\sum_{p_s} C\alpha(p_s, t) * \alpha(p_s, t) \right) \right. \\
 & + \left(\sum_{s_s} C\alpha(s_s, t) * \alpha(s_s, t) \right) + \left(\sum_c C\alpha(c, t) * \alpha(c, t) \right) + \left(\sum_q C\alpha(q, t) * \alpha(q, t) \right) \\
 & + \left(\sum_o C\alpha(o, t) * \alpha(o, t) \right) + \left(\sum_{vp_s} C\alpha(vp_s, t) * \alpha(vp_s, t) \right) \\
 & + \left(\sum_{ps_s} C\alpha(ps_s, t) * \alpha(ps_s, t) \right) + \left(\sum_{sc_s} C\alpha(sc_s, t) * \alpha(sc_s, t) \right) \\
 & + \left(\sum_{cq} C\alpha(cq, t) * \alpha(cq, t) \right) + \left(\sum_{qo} C\alpha(qo, t) * \alpha(qo, t) \right) \\
 & \left. \left. + \left(\sum_a \sum_h Cw(a, h, t) * w(a, h, t) \right) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Costos Fijos

$$\begin{aligned}
 CV = & \sum_t \left\{ desc(t) \left[\left(\sum_a \sum_h CA(a, h, t) \left[\sum_{j \in J(a)} z(j, h, t) * area(j) \right] \right) \right. \right. \\
 & + \left(\sum_{v_s} \sum_{k \in k(v_s)} f(v_s, k, t) * Cf(v_s, t) \right) + \left(\sum_{p_s} \sum_{k \in k(v_s)} f(p_s, k, t) * Cf(p_s, t) \right) \\
 & + \left(\sum_{s_s} \sum_{k \in k(p_s)} f(s_s, k, t) * Cf(s_s, t) \right) + \left(\sum_c \sum_{k \in k(p_s)} f(c, k, t) * Cf(c, t) \right) \\
 & + \left(\sum_q \sum_{k \in k(c)} f(q, k, t) * Cf(q, t) \right) \\
 & + \left(\sum_{(v_s, p_s) \in VP_s} \sum_{k \in k(v_s)} f(v_s, p_s, k, t) * Cf(v_s, p_s, t) \right) \\
 & + \left(\sum_{(p_s, s_s) \in PS_s} \sum_{k \in k(p_s)} f(p_s, s_s, k, t) * Cf(p_s, s_s, t) \right) \\
 & + \left(\sum_{(s_s, c) \in SC_s} \sum_{k \in k(p_s)} f(s_s, c, k, t) * Cf(s_s, c, t) \right) \\
 & \left. + \left(\sum_{(c, q) \in CQ} \sum_{k \in k(c)} f(c, q, k, t) * Cf(c, q, t) \right) + \left(\sum_{(q, o) \in QO} \sum_{k \in k(c)} f(q, o, k, t) * Cf(q, o, t) \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Beneficios

$$B = \sum_a \sum_{k \in k(r)} \sum_t desc(t) * f(m, k, t) * P(k, t)$$

Función Objetivo

$$MAX FO = B - CF - CV$$