UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

MERCADO DE INNOVACIONES, COSTOS DE TRANSACCIÓN E INCERTIDUMBRE

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN ECONOMÍA APLICADA

ANDREA IGNACIA CANALES GUTIÉRREZ

PROFESOR GUÍA:
NICOLÁS FIGUEROA GONZÁLEZ

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JUAN ESCOBAR CASTRO
MATTEO TRIOSSI VERONDINI

SANTIAGO DE CHILE
MAYO 2013

Resumen

Este trabajo intenta modelar el flujo de patentes basándose en el trabajo de Figueroa y Serrano, quienes observan que en la base de datos del flujo de patentes de U.S.A. se documenta los siguientes hechos estilizados:
(1) Las patentes de las firmas pequeñas son de menor calidad que las de las firmas grandes.

(2) Las firmas pequeñas adquieren desproporcionadamente más patentes de las firmas pequeñas que de las grandes.

(3) Las firmas pequeñas adquieren muchas más patentes que en el caso netamente aleatorio.

(4) Las firmas grandes compran mejores patentes.

lo cual es completamente opuesto a lo que la teoría clásica de la firma predice, es decir, que las firmas pequeñas tienen ventajas comparativas en la generación de patentes y las firmas grandes son mejores comercializando estas.

Nuestro modelo sugerido considera una economía donde las firmas pequeñas poseen una laboratorio creativo que utiliza una innovación a la vez, mientras que las firmas grandes poseen dos laboratorios creativos, cada laboratorio, independientemente, utiliza una patente de cierta calidad, la cual determina la capacidad productiva de la empresa (en las firma grandes será el promedio de las patente utilizadas por ambos laboratorios). A su vez cada laboratorio tiene la capacidad de generar innovaciones, la cuales, en caso de no serle útiles al mismo laboratorio, puede ser vendida o transferida sin costo al otro laboratorio en el caso de las firmas grandes. Este hecho es el que produce que las firmas grandes sean más pacientes a la hora de tomar la decisión de comprar o no una patente, ya que al comparar los beneficios con el costo de esta, consideran que dentro de la firma es más probable generar una patente, con lo cual se explica el segundo hecho estilizado. Además, dado el mismo efecto anterior, cuando las firmas grandes deciden comprar una patente, lo hacen sólo si esta patente es mucho mayor que las patentes que actualmente posees, sin embargo, las firmas pequeñas son menos selectivas a la hora de comprar, con lo cual se explica el tercer y el cuarto hecho estilizado. Finalmente,dado lo anterior, observamos que en estado estacionario, las firmas pequeñas poseen patentes de menor calidad que las firmas grandes.

Por último, extendemos el modelo, y consideramos laboratorio que potencialmente pueden funcionar independientemente como firmas pequeñas o fusionarse y trabajar como una firma grande. Dado el carácter monopólico de este mercado, asumiremos que determinan los costos de transacción mediante una negociación a la Nash, y luego logramos un equilibrio que nos

determina la especialización del mercado, con un cierto número de laboratorios que deciden trabajar como firmas grandes y otro como firma pequeña.

Agradecimientos

Ante todo quiero agradecer a Joaquín, quién nación durante este proceso, por toda la energía y magia aportada a mi vida. A Nicolás por su infinito amor, apoyo y paciencia. A mis padres y a Constanza, por todo el apoyo que siempre me han brindado.

Al profesor Nicolás Figueroa, por todo su apoyo, consejos, paciencia y sobre todo por su amistad.

A mi amigo de siempre, Juan, los de Ingeniería Matemática, Cristina y Gillian, y a los amigos conocidos en el programa, Diana y Javier.

A todos los profesores del MAGCEA por todos los conocimientos y apoyo entregado. A Olguita, Fernanda y Julie, por toda su paciencia y orientación.

Tabla de Contenido

Índice de tablas

Índice de figuras

Introducción

En las últimas décadas el intercambio de nuevos conocimientos se ha ido multiplicando y desarrollando, llegando a conformarse un mercado de patentes muy importante para el desarrollo de las empresas.

La teoría desarrollada hasta el momento sugiere que existen firmas grandes y pequeñas, las cuales poseen distintas ventajas comparativas en el proceso de innovación: las firmas pequeñas son relativamente mejores en la creación de innovaciones mientras que las firmas grandes son mejores en el desarrollo y/o comercialización de estas (Arrow (1983), Holmstrom (1989)). Teece (1986) argumenta que la calidad de las patentes juega un rol crucial, ya que la capacidad de utilizar una innovación depende de si se puede combinar con activos complementarios ya sea otros inventos, capacidades de conocimiento, etc. Además, se considera la posibilidad de que la innovación pueda ser útil para otras firmas, basado en Rosenberg (1998), quien afirma que no es posible controlar a priori la naturaleza exacta de la calidad y el alcance del uso de las innovaciones.Sin embargo, en los datos acerca del flujo de patentes en U.S.A., es posible notar que no necesariamente se refleja lo anterior.El objetivo de este trabajo es desarrollar un modelo que permita explicarlo , para ello se considera el trabajo de Figueroa y Serrano (2011), que documenta los siguientes hechos estilizados:

- Las patentes de las firmas pequeñas son de menor calidad que las de las firmas grandes.
- Las firmas pequeñas adquieren desproporcionadamente más patentes de las firmas pequeñas que de las grandes.
- Las firmas pequeñas adquieren muchas más patentes que en el caso netamente aleatorio.
- Las firmas grandes compran mejores patentes.

Nuestro modelo considera una economía que consta de firmas que poseen un laboratorio creativo, a las cuales llamaremos firmas pequeñas y firmas que poseen dos laboratorios, las llamadas firmas grandes. Cada laboratorio tiene la capacidad de generar patentes, las cuales tienen asociada una calidad $k \in \{1, 2, ..., \bar{k}\}$. Más aún, cada laboratorio permite a una firma utilizar de forma productiva una patente. De esta forma, la capacidad productiva de una firma pequeña está dada por k, que corresponde a la única patente que utiliza. Y la capacidad productiva de una firma grande es (k_1, k_2) que corresponden a las patentes que utiliza cada laboratorio de la firma. Estas capacidades productivas están asociadas a las ganancias de una firma pequeña que posee una patente de calidad k y una firma grande que posee una par de patentes de calidades (k_1, k_2). Las patentes les pueden ser útiles a las firmas o no. Si la patente no es útil a la misma firma la puede vender a alguna firma que le sirva, que puede ser tanto una firma grande como una pequeña. Por otro lado, la firma que recibe la patente debe decidir si la compra o no, analizando si lo que gana con la nueva patente menos el costo que le paga a la firma dueña de la patentes es mayor que sus utilidades actuales.

La principal ventaja que tienen las firmas grandes sobre las firmas pequeñas es posibilidad de reasignar patentes dentro de la firma, es decir, se puede crear una patente en un laboratorio que no le sea útil y la firma puede transferírsela al otro laboratorio, si le sirve, a costo cero. En efecto, dado este fenómeno de reasignación dentro de la firmas grandes, es que ellas se vuelven más pacientes y selectivas a la hora de tomar la decisión de comprar una patente externa, lo cual conlleva a que ellas tengan mejores patentes que las firmas pequeñas.

Dado el modelo, estudiamos tanto la generación de nuevas patentes dentro de las mismas firmas, como la comercialización de estas. Simulándolo para un caso Benchmark, donde todo es netamente aleatorio, es decir, las patentes se generan aleatoriamente, si la patente no le es útil a una firma no es más probable que le sirva a una firma del mismo tamaño, etc, logramos captar el primer y el cuarto hecho estilizado. El segundo hecho es posible lograrlo aumentando la probabilidad de que una firma que se genera en una firma pequeña y no le es útil le sea útil a otra firma pequeña. Por último, el tercer hecho se logra modificando ciertos parámetro que más adelante detallaremos.

Posteriormente, extendemos nuestro modelo donde consideramos un grupo de firmas que poseen dos laboratorios, pero que pueden decidir si integrarse y funcionar como una firma grande, o bien separase y trabajar como dos firmas pequeñas. Lo interesante de este caso, es que endogeneizamos en el modelo la decisión de ser una firma grande o pequeña y encontramos un equilibrio interior, es decir, no existen sólo firmas de un solo tamaño.

Para resolver este modelo creamos las funciones de valor de cada firma grande y pequeña cuando sus laboratorios poseen una firma (k_1, k_2) y k respectivamente. Con ello, determinamos la matrices de aceptación de cada tamaño de firma, la cual nos indica que calidades estarían dispuestos a comprar. Luego, estimamos una matrices de transición la cual nos indica, por ejemplo, a que tasa una firma pequeña que actualmente posee una patente de calidad k pasaría a tener una patente de calidad $k+1$. Dado esto determinamos los estados estacionarios de las firmas.

Este trabajo es desarrollado de la siguiente forma, en el capítulo 2 explicamos en detalle nuestro modelo en conjunto con algunos detalles teóricos del mismo. En el tercer capítulo, comenzaremos exponiendo cómo se pueden ver los hechos estilizados en el modelo y luego presentamos los resultados que obtenemos para una caso benchmark, estudiamos cuales hechos estilizados se logran, y para los que no, realizamos las modificaciones necesarias para conseguirlos. También realizamos una estática comparativa del modelo y por último presentamos algunos detalles computacionales de la simulación. En el cuarto capítulo estudiamos una extensión del modelo, donde endogeneizamos la decisión acerca del tamaño de las firmas.El último capítulo detalla las conclusiones de este trabajo.

Revisión de la Literatura

Existe mucha literatura acerca del rol de la especialización y si los mercados permiten que esta especialización se realice de manera eficiente. En particular, es importante el rol de la división de trabajo en cada etapa del proceso de innovación. Además este proceso de innovación nos ayuda a determinar la competencia entre las firmas. Por ejemplo, Gans, Hsu y Stern (2002) muestran que los retornos de la cooperación entre firmas son crecientes en el control intelectual sobre los derechos de propiedad, bajos costos de transacción y costos hundidos asociados a la entrada en el mercado de productos.

La teoría clásica asegura que existen ventajas comparativas que son determinantes en el proceso de innovación. Teece (1986) destaca que la capacidad de producción es crucial a la hora de obtener retornos, que incluso empresas que posean muy buena innovaciones pueden fracasar si no tiene la producción necesaria.

Los trabajos desarrollados hasta el momento sugerían que las firmas grandes poseían ventajas comparativas en el desarrollo y comercialización de las innovaciones, y que adquirían una gran cantidad de las patentes desarrollas por las firmas pequeñas. Es decir, las firmas pequeñas eran mejores generando innovaciones, que eran vendidas a las firmas grandes. Algunos estudios se enfocaban en establecer relaciones acerca de cómo las empresas podía dedicarse a generar innovaciones o a generar alianzas con empresas relacionadas, y cómo caracterizar este último fenómeno, sin embargo, en este contexto, esto sólo sucede como resultados de un proceso aleatorio, que nos entrega la tasa a la cual una patente generada en una firma puede no servirle y puede ser vendida, sin la necesidad de generar alianzas.

Trabajos realizados en sectores específicos de las industria muestran, por ejemplo, como se beneficiaron los paises menos desarrollados con el hecho que el costo hundido de la creación de empresas de ingeniería química haya sido efectuado anteriormente por países más desarrollados (Arora, Fosfuri y Gambardella, 2001). Lerner y Merges (1998) estudian los derechos de control de las empresas de biotecnología que cotizan en la bolsa, y muestran que las firmas que realizan I + D son mucho más pequeñas que sus socios.

Capítulo 1

El Modelo

Nuestra economía consta de N_s firmas pequeñas y N_b firmas grandes, las cuales están dotadas de 1 y 2 laboratorios respectivamente. Asumiremos que cada laboratorio genera innovaciones a tasa r. Definimos γ_{i} con $\mathrm{i} = \{s, b\}$, donde i denota el tamaño de la firma, como la probabilidad de que una innovación interna sea útil para la misma firma cuando ella es de tamaño i y λ_{i} como la probabilidad de que una patente generada en una firma de tamaño i sea útil para otra firma del mismo tamaño. Cada laboratorio puede utilizar sólo una innovación a la vez, existe una única probabilidad de recibir innovaciones externas y una tasa única a la cual el laboratorio genera innovaciones internas. Entonces, las tasas a las cuales firmas grandes y pequeñas reciben innovaciones internas son:

$$\begin{aligned} T_{s,int} &= r\gamma_s \qquad (1.1) \\ T_{b,int} &= r\gamma_b \end{aligned}$$

y la tasa a la cual reciben innovaciones externas es:

$$\begin{aligned} T_{s,\mathrm{ext}} &= r\frac{N_s - 1}{N_s + 2N_b}(1-\gamma_s)\lambda_s\frac{1}{N_s - 1} + r\frac{2N_b}{N_s + 2N_b}(1-\gamma_b)(1-\lambda_b)\frac{1}{N_s} \qquad (1.2) \\ &= r\frac{1}{N_s + 2N_b}(1-\gamma_s)\lambda_s + r\frac{2N_b}{N_s + 2N_b}(1-\gamma_b)(1-\lambda_b)\frac{1}{N_s} \\ T_{b,\mathrm{ext}} &= r\frac{N_s}{N_s + 2N_b}(1-\gamma_s)(1-\lambda_s)\frac{2}{2N_b} + r\frac{2N_b - 2}{N_s + 2N_b}(1-\gamma_b)\lambda_b\frac{2}{2N_b - 2} \\ &= r\frac{N_s}{N_s + 2N_b}(1-\gamma_s)(1-\lambda_s)\frac{2}{2N_b} + r\frac{2}{N_s + 2N_b}(1-\gamma_b)\lambda_b \end{aligned}$$

en el caso de $T_{s,ext}$ notemos que el primer sumando corresponde a la tasa a la cual se generan innovaciones en las firmas pequeñas, no le fue útil a esa firma y le sirve a otra firma pequeña, es decir, la tasa a la cual recibe innovaciones externa desde otra firma pequeña. El segundo sumando representa la tasa a la cual recibe innovaciones externas desde una firma grande, lo mismo sucede con $T_{b,ext}$. Por ello, introduciremos la notación para diferenciar entre estas dos tasas de llegada de las innovaciones:

$$\begin{aligned} T_{s,\text{ext},s} &= r\frac{1}{N_s+2N_b}(1-\gamma_s)\lambda_s \\ T_{s,\text{ext},b} &= r\frac{2N_b}{N_s+2N_b}(1-\gamma_b)(1-\lambda_b)\frac{1}{N_s} \\ T_{b,\text{ext},s} &= r\frac{N_s}{N_s+2N_b}(1-\gamma_s)(1-\lambda_s)\frac{2}{2N_b} \\ T_{b,\text{ext},b} &= r\frac{2}{N_s+2N_b}(1-\gamma_b)\lambda_b \end{aligned} \tag{1.3}$$

Asumiremos que las firmas de ambos tamaños generan innovaciones de calidad $k \in \{1,...,\bar{k}\}$ con cierta probabilidad, denotamos por $ps(k)$ y $pb(k)$ la probabilidad con que las firmas pequeñas y grandes generan una patente de calidad k respectivamente, donde $k=1$ es la peor calidad y $\bar{k}$ la mejor. Además cada innovación se deprecia a tasa r_{d}, es decir, disminuye en una unidad su calidad. Cuando una firma recibe una innovación externa debe pagar un costo de transacción c, mientras que si deciden utilizar una innovación interna, no existen costos asociados.

Consideraremos $\pi_s(k)$ el beneficio que le otorga a una firma pequeña tener una patente de calidad k (y $\pi_b(k_1,k_2)$ el beneficio que le otorga a una firma grande tener dos patentes de calidades (k_1,k_2) con $k_1 \leq k_2$). El factor de descuento será δ. De esta forma, la función de valor V_s que enfrenta una firma pequeña es:

$$\begin{aligned} \delta V_s(k) &= \pi_s(k) + T_{s,\text{int}}\sum_{l>k} ps(l)[V_s(l)-V_s(k)] \\ &\quad +T_{s,\text{ext},s}\sum_{l>k} ps(l)\,\text{máx}\{V_s(l)-V_s(k)-c,0\} \\ &\quad +T_{s,\text{ext},b}\sum_{l>k} pb(l)\,\text{máx}\{V_s(l)-V_s(k)-c,0\} - r_{\text{d}}(V_s(k)-V_s(k-1)) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Observación : Para la derivación de V_s a partir del modelo en tiempo discreto, ver apéndice.

Análogamente, la función de valor de las firmas grandes queda definida como:

$$
\begin{aligned}
\delta V_b(k_1,k_2) \quad = \quad & \pi_b(k_1,k_2) + T_{b,int}\Bigg[\sum_{k_1<l<k_2} pb(l)[V_b(l,k_2) - V_b(k_1,k_2)] \\
& + \sum_{l\geq k_2} pb(l)[V_b(k_2,l) - V_b(k_1,k_2)]\Bigg] \\
& + T_{b,ext,s}\Bigg[\sum_{k_1<l<k_2} ps(l)\,\text{máx}\{V_b(l,k_2) - V_b(k_1,k_2) - c, 0\} \\
& + \sum_{l\geq k_2} ps(l)\,\text{máx}\{V_b(k_2,l) - V_b(k_1,k_2) - c, 0\}\Bigg] \\
& + T_{b,ext,b}\Bigg[\sum_{k_1<l<k_2} pb(l)\,\text{máx}\{V_b(l,k_2) - V_b(k_1,k_2) - c, 0\} \\
& + \sum_{l\geq k_2} pb(l)\,\text{máx}\{V_b(k_2,l) - V_b(k_1,k_2) - c, 0\}\Bigg] \\
& - r_{\mathrm{d}}(V_b(k_1,k_2) - V_b(k_1-1,k_2)) - r_{\mathrm{d}}(V_b(k_1,k_2) - V_b(k_1,k_2-1))
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

1.1. Algunos Resultados

Podemos ver que V_s es solución de $T_sV = V$ donde T_s está definido como:

$$
\begin{aligned}
T_sV(k) \quad = \quad & \frac{1}{\delta}\Bigg\{\pi(k) + T_{s,int}\sum_{l>k} ps(l)[V_s(l) - V_s(k)] \\
& + T_{s,ext,s}\sum_{l>k} ps(l)\,\text{máx}\{V_s(l) - V_s(k) - c, 0\} \\
& + T_{s,ext,b}\sum_{l>k} pb(l)\,\text{máx}\{V_s(l) - V_s(k) - c, 0\} - r_{\mathrm{d}}(V_s(k) - V_s(k-1))\Bigg\}
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

Nos interesa estudiar la contractancia de nuestro operador T_s para poder demostrar existencia y unicidad (análogamente de T_b).Cabe destacar que la contractancia de nuestro operador nos asegura que, al iterarlo, convergeremos asíntoticamente a una solución, y dado que las variables de control (la decisión de comprar o no una patente) son finitas, este operador convergerá en tiempo finito.

Primero, cabe destacar que en el modelo planteando las condiciones de Blackwell no se satisfacen, las cuales nos aseguran la contractancia del operador. Para la *condición de descuento*, al estar comparando las diferencias de las funciones de valor, se tiene:

$$[T(V+a)](k) \leq (TV)(k) + \beta a$$

y esta condición se cumple para cualquier β, puesto que $[T(V+a)](k) = (TV)(k)$.

La condición de monotonía nos pide que si $V_1 < V_2$ entonces $TV_1 < TV_2$. Sin embargo, la condición de monotonía no es tan clara, ya que si tenemos dos funciones de valor $V_1 < V_2$, no siempre tendremos que sus diferencias sean mayores, es decir, $V_1(k) - V_1(k-1) < V_2(k) - V_2(k-1)$, esto dependerá de la concavidad de V_1 y V_2.

No obstante, hemos determinado que para ciertos parámetros la función si es contractante, es decir, $\|TV_1 - TV_2\| \leq \|V_1 - V_2\|$, donde $\|\cdot\|$ es la norma del supremo. Mostraremos el caso para las firmas pequeñas, ya que el caso para las firmas grandes es análogo. Por simplicidad asumiremos $ps = pb = p$ y $V_s = V$

Teorema 1.1 *: T_s es contractante si $|T_{s,int}| + |T_{s,ext}| + |r_{\mathrm{d}}| < \frac{\delta}{2}$. Y T_b es contractante si $|T_{b,int}| + |T_{b,ext}| + |r_{\mathrm{d}}| < \frac{\delta}{4}$*

Demostración: Demostraremos el caso para T_sV ya que el caso para T_bV es análogo. Notemos que cuando desarrollemos $TV_1 - TV_2$ obtendremos la expresión $\sum\limits_{l>k} p(l)[V_1(l) - V_1(k) - V_2(l) + V_2(k)]$.

$$\begin{aligned}
|\sum_{l>k} p(l)[V_1(l) - V_1(k) - V_2(l) + V_2(k)]| &= |\sum_{l>k} p(l)[(V_1(l) - V_2(l)) - (V_1(k) - V_2(k))]| \\
&\leq \sum_{l>k} p(l)[|V_1(l) - V_2(l)| + |V_1(k) - V_2(k)|] \\
&\leq \sum_{l>k} p(l)[\|V_1 - V_2\| + \|V_1 - V_2\|] \\
&= 2\|V_1 - V_2\| \sum_{l>k} p(l) \\
&\leq 2\|V_1 - V_2\|
\end{aligned}$$

Por otra parte, tendremos también la expresión $\sum\limits_{l>k} p(l)[\max\{V_1(l) - V_1(k) - c, 0\} - \max\{V_2(l) - V_2(k) - c, 0\}]$, para la cual debemos considerar 3 casos para buscar una cota de:

$$|\max\{V_1(l) - V_1(k) - c, 0\} - \max\{V_2(l) - V_2(k) - c, 0\}| \tag{1.7}$$

Caso 1: $V_1(l) - V_1(k) > c \wedge V_2(l) - V_2(k) > c$

En este caso, ambos máximos se alcanzarán en la primera componente:

$$\begin{aligned} |\max\{V_1(l) - V_1(k) - c, 0\} - \max\{V_2(l) - V_2(k) - c, 0\}| &= |V_1(l) - V_1(k) - c - V_2(l) + V_2(k) + c| \\ &\leq |V_1(l) - V_2(l)| + |V_1(k) - V_2(k)| \\ &\leq 2\|V_1 - V_2\| \end{aligned}$$

Caso 2: $V_1(l) - V_1(k) > c \wedge V_2(l) - V_2(k) < c$

Desarrollaremos este caso, ya que el caso $V_1(l) - V_1(k) < c \wedge V_2(l) - V_2(k) > c$ es análogo:

$$\begin{aligned} |\max\{V_1(l) - V_1(k) - c, 0\} - \max\{V_2(l) - V_2(k) - c, 0\}| &= |V_1(l) - V_1(k) - c| \\ &\leq |V_1(l) - V_1(k) - c + c - V_2(l) + V_2(k)| \\ &\leq |V_1(l) - V_2(l)| + |V_1(k) - V_2(k)| \\ &\leq 2\|V_1 - V_2\| \end{aligned}$$

Caso 2: $V_1(l) - V_1(k) < c \wedge V_2(l) - V_2(k) < c$

Esta es la cota trivial.

$$|\max\{V_1(l) - V_1(k) - c, 0\} - \max\{V_2(l) - V_2(k) - c, 0\}| = 0$$

Ahora podemos probar que nuestra función operador es contractante para ciertos parámetros

$$
\begin{aligned}
\|TV_1 - TV_2\| &= |\frac{1}{\delta}|\|T_{s,int}\sum_{l>k} p(l)[V_1(l) - V_1(k) - V_2(l) + V_2(k)] \\
&+ T_{s,\text{ext}}\sum_{l>k} p(l)[\text{máx}[V_1(l) - V_1(k) - c, 0] - \text{máx}[V_2(l) - V_2(k) - c, 0]] \\
&- r_{\text{d}}(V_1(k) - V_1(k-1)) + r_{\text{d}}(V_2(k) - V_2(k-1))\| \\
&\leq |\frac{1}{\delta}|\left(|T_{s,\text{int}}|2\|V_1 - V_2\|\sum_{l>k} p(l) + |T_{s,ext}|2\|V_1 - V_2\|\sum_{l>k} p(l) + 2|r_{\text{d}}|\|V_1 - V_2\|\right) \\
&\leq |\frac{1}{\delta}|\left(|T_{s,\text{int}}|2\|V_1 - V_2\| + |T_{s,\text{ext}}|2\|V_1 - V_2\| + 2|r_{\text{d}}|\|V_1 - V_2\|\right) \\
&= |\frac{1}{\delta}|\left(2|T_{s,\text{int}}| + 2|T_{s,\text{ext}}| + 2|r_{\text{d}}|\right)\|V_1 - V_2\|
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, T_s es contractante ssi:

$$
\begin{aligned}
|\frac{2}{\delta}|\left(|T_{s,\text{int}}| + |T_{s,\text{ext}}| + |r_{\text{d}}|\right) &< 1 \qquad (1.8) \\
|T_{s,\text{int}}| + |T_{s,ext}| + |r_{\text{d}}| &< \frac{\delta}{2}
\end{aligned}
$$

Equivalentemente, para el caso de las firmas grandes V_b es contractante ssi:

$$
\begin{aligned}
|\frac{4}{\delta}|\left(|T_{b,\text{int}}| + |T_{b,\text{ext}}| + |r_{\text{d}}|\right) &< 1 \qquad (1.9) \\
|T_{b,\text{int}}| + |T_{b,ext}| + |r_{\text{d}}| &< \frac{\delta}{4}
\end{aligned}
$$

Para encontrar las funciones de valor hemos implementado un programa en Matlab el cual resuelve nuestro problema mediante el método de la iteración de la función de valor cuando (1.8) y (1.9) se cumplan. En caso contrario, el programa busca un punto fijo a las ecuaciones (1.4) y (1.5) mediante métodos numéricos.

A pesar de que nuestro modelo está desarrollado en tiempo continuo, es posible reemplazar la estructura de tiempo continuo con una estructura de tiempo discreto con periodos muy pequeños, con lo cual nuestro factor de descuento cercano a uno, y lo cual implicará una convergencia muy lenta.

1.2. Estructura de Mercado

Hemos estudiado la ganancias de las firmas grandes y pequeñas. Además, implícitamente, hemos estudiado las decisiones de las firmas respecto a qué innovaciones comprar. Obviamente, una firma aceptará una innovación interna cuando ella sea de una calidad mayor de la que actualmente posee la firma. Por otra parte, aceptará una innovación externa siempre que el beneficio que gana al aceptarla compense el costo de transacción. Definimos, para las firmas pequeñas, la matriz de aceptación $A_{s,\bar{k}\times\bar{k}}$ donde $A_s(\mathrm{i},j)=1$ si la firma que posee actualmente una patente de calidad i aceptaría comprar una patente de calidad j a precio c, de lo contrario $A_s(\mathrm{i},j)=0$:

$$A_s(\mathrm{i},j)=\begin{cases} 1 & \text{si } V_s(j)-c>V_s(\mathrm{i}) \\ 0 & \text{si } V_s(j)\leq V_s(\mathrm{i}) \end{cases} \tag{1.10}$$

De la misma forma, para las firmas grandes definimos $A_{b,\bar{K}\times\bar{K}}$ con $\bar{K}=\frac{\bar{k}(\bar{k}+1)}{2}$, donde $A_b((k_1,k_2),(l,k_2))=1$ con $k_1<l<k_2$ o $A_b((k_1,k_2),(k_2,l))=1$ con $l\geq k_2$ si una firma grande que actualmente posee un par de patentes de calidades (k_1,k_2) aceptaría una patente de calidad $l>k_1$, de lo contrario, $A_b((k_1,k_2),(l,k_2))=0$ ó $A_b((k_1,k_2),(k_2,l))=0$:

$$A_b((k_1,k_2)(\mathrm{i},j))=\begin{cases} 1 & \text{si } (V_b(\mathrm{i},j)-c>V_b(k_1,k_2)) \text{ y} \\ & ((k_1<\mathrm{i}<k_2, j=k_2) \text{ ó } (j\geq k_2, k_2=\mathrm{i})) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{1.11}$$

Lo anterior nos ha permitido estudiar el estado estacionario de la distribución de patentes de las firmas grandes y pequeñas, así como también los flujos de compra y venta entre ellas.

En efecto, una empresa pequeña, que posee una innovación de tipo k, recibe una innovación de calidad $l>k$ a tasa $T_{s,int}\cdot ps(l)$ y recibe innovaciones externas de calidad $l>k$ a tasa $[T_{s,\mathrm{ext},s}\cdot ps(l)+T_{s,\mathrm{ext},b}\cdot pb(l)]\cdot A_s(k,l)$. Por lo tanto, definimos la tasa a la cual una empresa pequeña que posee una innovación de calidad k pasa a poseer una innovación de calidad l como:

$$q^s_{kl}=T_{s,\mathrm{int}}\cdot ps(l)+T_{s,\mathrm{ext},s}\cdot ps(l)\cdot A_s(k,l)+T_{s,\mathrm{ext},b}\cdot pb(l)\cdot A_s(k,l) \qquad \forall k\leq l \tag{1.12}$$

además, notemos que en nuestro modelo nuestras patentes también pueden depreciarse:

$$q^s_{\mathrm{i}\ \mathrm{i}-1}=r_{\mathrm{d}} \qquad \forall \mathrm{i}>1 \tag{1.13}$$

por último, como las patentes no pueden depreciarse más de una unidad:

$$q_{\text{i}j}^s = 0 \qquad \forall j < \text{i} - 1 \tag{1.14}$$

Los estados estacionarios están definidos por los vectores $\mu_s \in \mathbb{R}^{\bar{k}}$ y $\mu_b \in \mathbb{R}^{\bar{K}}$, que, en el caso de las firmas pequeñas, resuelven el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
&\mu_{s,1} = q_{21}^s \mu_{s,2} - (q_{12}^s + q_{13}^s + ... + q_{1\bar{k}}^s)\mu_{s,1} \\
&\mu_{s,2} = q_{12}^s \mu_{s,1} + q_{31}^s \mu_{s,3} - (q_{21}^s + q_{23}^s + ... + q_{2\bar{k}}^s)\mu_{s,2} \\
&. \\
&. \\
&. \\
&\mu_{s,\bar{k}} = q_{1\bar{k}}^s \mu_{s,1} + q_{2\bar{k}}^s \mu_{s,2} + ... + q_{\bar{k}-1\ \bar{k}}^s \mu_{s,\bar{k}-1} - q_{\bar{k}\ \bar{k}-1}^s \mu_{s,\bar{k}}
\end{aligned} \tag{1.15}$$

es decir, la proporción de firmas que poseen una patente de calidad i (i $= \{2, ..., \bar{k} - 1\}$) debe ser igual a el porcentaje de firmas que poseían una patente de calidad $j <$ i y recibieron una innovación, tanto interna como externa, de calidad i, más la proporción de firmas que poseían una patente de calidad i $+ 1$ y esta se depreció, menos la proporción de firmas que poseían una innovación de calidad i y recibieron una innovación de calidad $j >$ i, menos la proporción que poseía una patente de calidad i y esta se depreció. Debemos notar que cuando i $= 1$ desaparece el último efecto, es decir, no existe una proporción de firmas que poseían una patente de calidad 1 y esta se depreció como tampoco existen firmas de menor con patentes de menor calidad y reciban una innovación de calidad 1, y en el caso de $\bar{k}$ no hay firmas que reciban innovaciones y aumenten de calidad, tampoco existen firmas con calidad $\bar{k} + 1$ y se deprecien. Lo cual se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&\mu_{s,1} = \frac{q_{21}^s}{1 + q_{12}^s + q_{13}^s + ... + q_{1\bar{k}}^s}\mu_{s,2} \\
&\mu_{s,2} = \frac{q_{31}^s}{1 + q_{21}^s + q_{23}^s + ... + q_{2\bar{k}}^s}\mu_{s,3} + \frac{q_{12}^s}{1 + q_{21}^s + q_{23}^s + ... + q_{2\bar{k}}^s}\mu_{s,1} \\
&. \\
&. \\
&. \\
&\mu_{s,\bar{k}} = \frac{q_{1\bar{k}}^s}{1 + q_{\bar{k}\ \bar{k}-1}^s}\mu_{s,1} + \frac{q_{2\bar{k}}^s}{1 + q_{\bar{k}\ \bar{k}-1}^s}\mu_{s,2} + ... + \frac{q_{\bar{k}-1\ \bar{k}}^s}{1 + q_{\bar{k}\ \bar{k}-1}^s}\mu_{s,\bar{k}-1}
\end{aligned} \tag{1.16}$$

que corresponde a la siguiente forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \mu_{s,1} \\ \mu_{s,2} \\ . \\ . \\ . \\ \mu_{s,\bar{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{q^s_{21}}{1+q^s_{12}+q^s_{13}+...+q^s_{1\bar{k}}} & ... & 0 \\ \frac{q^s_{12}}{1+q^s_{21}+q^s_{23}+...+q^s_{2\bar{k}}} & 0 & \frac{q^s_{31}}{1+q^s_{21}+q^s_{23}+...+q^s_{2\bar{k}}} & ... \quad 0 \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ \frac{q^s_{1\bar{k}}}{1+q^s_{\bar{k}\ \bar{k}-1}} & \frac{q^s_{2\bar{k}}}{1+q^s_{\bar{k}\ \bar{k}-1}} & \frac{q^s_{3\bar{k}}}{1+q^s_{\bar{k}\ \bar{k}-1}} & ... \quad 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_{s,1} \\ \mu_{s,2} \\ . \\ . \\ . \\ \mu_{s,\bar{k}} \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

Análogamente, cuando una firma grande que actualmente posee un par de innovaciones de calidades (k_1, k_2) genera una innovación interna de calidad l $(l > k_1)$ puede pasar a tener un par de patentes (k_2, l) o (l, k_2). La tasa a la cual las firmas grandes generan innovaciones internas de calidad l es $2 \cdot T_{b,int} \cdot pb(l)$, ya que poseen dos laboratorios. Por otra parte, reciben innovaciones externas de calidad l a tasa $[T_{b,\text{ext},s} \cdot ps(l) + T_{b,\text{ext},b} \cdot pb(l)] \cdot A_b((k_1, k_2), (l, k_2))$ si $k_1 < l < k_2$ y a tasa $[T_{b,\text{ext},s} \cdot ps(l) + T_{b,\text{ext},b} \cdot pb(l)] \cdot A_b((k_1, k_2), (k_2, l))$ si $l \geq k_2$, entonces:

$$\begin{aligned} q^b_{(k_1,k_2),(l,k_2)} &= 2 \cdot T_{b,int} \cdot pb(l) + (T_{b,\text{ext},s} \cdot ps(l) + T_{b,\text{ext},b} \cdot pb(l)) \cdot A_b((k_1, k_2), (l, k_2)) \ \forall k_1 < l < k_2 \\ q^b_{(k_1,k_2),(k_2,l)} &= 2 \cdot T_{b,int} \cdot pb(l) + (T_{b,\text{ext},s} \cdot ps(l) + T_{b,\text{ext},b} \cdot pb(l)) \cdot A_b((k_1, k_2), (k_2, l)) \ \forall l \geq k_2 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Para el caso de las depreciaciones hay que ser más cuidadoso. Supongamos que tenemos un firma que posee un par de patentes de calidades (k_1, k_2) con $k_1 = k_2$, como sabemos, cada patente puede depreciarse a tasa r_d, en cuyo caso la firma pasaría a poseer un par $(k_1 - 1, k_2)$ o $(k_1, k_2 - 1)$, sin embargo, para nuestro modelo ambos casos son equivalentes, por lo tanto:

$$q^b_{(k_1,k_2),(k_1-1,k_2)} = 2 \cdot r_\text{d} \qquad \text{Si } k_1 = k_2 \tag{1.19}$$

Por otra parte, si $k_1 < k_2$ cada patente puede depreciarse a tasa r_d, es decir:

$$q^b_{(k_1,k_2),(k_1-1,k_2)} = r_\text{d} \qquad\qquad q^b_{(k_1,k_2),(k_1,k_2-1)} = r_\text{d} \tag{1.20}$$

Dado lo anterior, el estado estacionario para las firmas grandes está determinado por el siguiente sistema :

$$
\begin{aligned}
\mu_{b,(1,1)} &= \frac{q^b_{(1,2),(1,1)}}{1+\sum_{l=2}^{\bar{k}} q^b_{(1,1),(1,l)}}\mu_{b,(1,2)} \\
\mu_{b,(1,2)} &= \frac{q^b_{(1,1),(1,2)}}{1+q^b_{(1,2),(1,1)}+\sum_{l=2}^{\bar{k}} q^b_{(1,2),(2,l)}}\mu_{b,(1,1)} + \frac{q^b_{(1,3),(1,2)}}{1+q^b_{(1,2),(1,1)}+\sum_{l=2}^{\bar{k}} q^b_{(1,2),(2,l)}}\mu_{b,(1,3)} \\
&. \\
&. \\
&. \\
\mu_{b,(\bar{k},\bar{k})} &= \frac{\sum_{l=1}^{\bar{k}} q^b_{(l,\bar{k}),(\bar{k},\bar{k})}}{1+q^b_{(\bar{k},\bar{k}),(\bar{k}-1,\bar{k})}}\mu_{b,(l,\bar{k})}
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

que en forma matricial es:

$$
\begin{pmatrix} \mu_{b,(1,1)} \\ \mu_{b,(1,2)} \\ . \\ . \\ . \\ \mu_{b,(\bar{k},\bar{k})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{q^b_{(1,2),(1,1)}}{1+\sum_{l=2}^{\bar{k}} q^b_{(1,1),(1,l)}} & \cdots & 0 \\ \frac{q^b_{(1,1),(1,2)}}{1+q^b_{(1,2),(1,1)}+\sum_{l=2}^{\bar{k}} q^b_{(1,2),(2,l)}} & 0 & \frac{q^b_{(1,3),(1,2)}}{1+q^b_{(1,2),(1,1)}+\sum_{l=2}^{\bar{k}} q^b_{(1,2),(2,l)}} & \cdots \; 0 \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ \frac{\sum_{l=1}^{\bar{k}} q^b_{(1,\bar{k}),(\bar{k},\bar{k})}}{1+q^b_{(\bar{k},\bar{k}),(\bar{k}-1,\bar{k})}} & \frac{\sum_{l=1}^{\bar{k}} q^b_{(2,\bar{k}),(\bar{k},\bar{k})}}{1+q^b_{(\bar{k},\bar{k}),(\bar{k}-1,\bar{k})}} & \frac{\sum_{l=1}^{\bar{k}} q^b_{(3,\bar{k}),(\bar{k},\bar{k})}}{1+q^b_{(\bar{k},\bar{k}),(\bar{k}-1,\bar{k})}} & \cdots \; 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_{b,(1,1)} \\ \mu_{b,(1,2)} \\ . \\ . \\ . \\ \mu_{b,(\bar{k},\bar{k})} \end{pmatrix}
\tag{1.22}
$$

Cabe destacar que en nuestro modelo hemos encontrado que, bajo ciertas condiciones, las firmas grandes toman la decisión de adquirir una innovación basándose sólo en la calidad de la peor patente que actualmente poseen (k_1), para estos casos podemos ver que las matrices de aceptación de las firmas grandes coincide con la matriz de una aceptación de una firma pequeña.

Lema 1.2 *Si $c = 0$ ó $\delta \to \infty$, entonces:*

$$A_s(k,l) = A_b(k,k_2,l) \qquad \forall k, k_2, l \ con\ k \geq k_2 \tag{1.23}$$

En efecto, cuando $\delta \to \infty$, las firmas grandes actúan como miopes y adquieren cualquier patente que sea mejor que la peor patente que actualmente tienen, sin esperar que surja

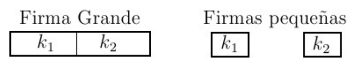

Figura 1.1: Diagrama de la economía

alguna patente dentro de la misma firma. Por otra parte, cuando $c = 0$, las firmas grandes también adquieren cualquier patente mejor, ya que que no incurren en ningún costo de transacción al hacerlo.

Definamos $\nu_b(k)$ como:

$$\nu_b(k) = \sum_{k \leq k_2} \mu_b(k, k_2) \tag{1.24}$$

dado lo anterior y esta definición podemos exponer el siguiente teorema.

Teorema 1.3 *Si* $A_s(k, l) = A_b(k, k_2, l)$, $\mu_s(k) \preceq_1 \nu_b(k)$ $\forall k$

Demostración: Supongamos que tenemos una economía con 2 empresas pequeñas y una grande con 2 laboratorios. Supongamos también que inicialmente la empresa grande tiene un par de patentes de calidades (k_1, k_2) con $k_1 \leq k_2$ y las firmas pequeñas tienen patentes de las mismas calidades, es decir, una firma posee una patente de calidad k_1 y la otra posee una patente de calidad k_2. Las idea de la demostración es estudiar cómo evolucionan laa firmas grandes y las firmas pequeñas ante los mismos shocks. El siguiente diagrama representa nuestra economía:

Inicialmente la firma grande tiene la misma calidad promedio que las firmas pequeñas juntas. Notemos que sucede en el instante ε:

- Si alguna patente se depreciase, ambos tipos de firmas seguirían teniendo la misma calidad promedio:

  $$\frac{(k_{1,b} - 1) + k_{2,b}}{2} = \frac{k_{1,b} + (k_{2,b} - 1)}{2} = \frac{k_{1,s} + k_{2,s} - 1}{2}$$

  es decir, tanto la firma grande como las firmas pequeñas quedarían con patentes de las mismas calidades.
- Supongamos ahora que en el laboratorio que posee la patente k_1, tanto de la firma pequeña como la grande, recibe un shock interno y genera una patente de calidad l, con $1 \leq l \leq \bar{k}$:
  - Si $l \leq k_1$, ningún laboratorio la acepta y la calidad promedio se mantiene.

- Si $k_1 < l$, ambos laboratorios se quedan con la patente y siguen teniendo la misma calidad promedio:

$$\frac{l + k_{2,b}}{2} = \frac{l + k_{2,s}}{2}$$

En este caso, también las firmas quedarían con las mismas patentes.

- Ahora, si el laboratorio que tiene la patente k_2 recibe el shock interno:
  - Si $l \leq k_1$, al igual que en el caso anterior, ambos rechazan la patente.
  - Si $k_1 < l \leq k_2$, el laboratorio de la firma pequeña rechaza la patente mientras que la firma grande reorganiza sus patentes, entonces:

$$\frac{k_{1,s} + k_{2,b}}{2} < \frac{l + k_{2,s}}{2}$$

  - Si $l > k_2$ ambos aceptan la patente y siguen teniendo la misma calidad promedio.

  Para este caso, la firmas de menor calidad es la misma en la firma grande como en la pequeñas, $k_{1,b} = k_{1,s}$, pero $k_{2,s} \leq k_{2,b}$

En resumen, para cualquier historia de shocks $(\omega_0, \omega_1, ...)$ la firma de peor calidad será igual para ambas firmas, sin embargo, habrá diferencia para la mejor patente de cada firma $k_{2,s} \leq k_{2,b}$. Lo que en consecuencia produce que la calidad promedio de las firmas grandes será mejor o igual a la de las firmas pequeñas, de lo que podemos concluir que:

$$\mu_s(k) \preceq_1 \nu_b(k) \ \forall k$$

Capítulo 2

Resultados Numéricos

El programa realizado en Matlab nos entrega los estados estacionarios y las decisiones de cada firma. En este capítulo estudiaremos como varían nuestros resultados en comparación a nuestro caso benchmark. También al final del capítulo discutiremos algunos detalles del procedimiento computacional.

2.1. Hechos Estilizados

Como mencionamos anteriormente existen 4 hechos estilizados que se evidencian en los datos y que queremos que nuestro modelo refleje, a continuación mostraremos como ver estos hechos en nuestro modelo:

2.1.1. Patentes de las firmas pequeñas son de menor calidad que las patentes de las firmas grandes

Este hecho podemos verificarlo analizando las calidades promedio en estado estacionario:

$$\sum_{j=1}^{\bar{k}} j\mu_{s,j} < \sum_{(k_1,k_2)\in I} \left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)\mu_{b,(k_1,k_2)} \qquad I = \{k_1, k_2 \in \{1, 2, ..., \bar{k}\} \text{ t.q. } k_1 \leq k_2\} \tag{2.1}$$

2.1.2. Las firmas pequeñas adquieren desproporcionadamente más innovaciones desde las firmas pequenñas que de las firmas grandes

Para verificar este hecho debe suceder la tasa a la que efectivamente compra una firma pequeña a firmas de su mismo tamaño debe ser mayor a la tasa a la cual le compra a las firmas grandes:

$$T_{s,\text{ext},s} \sum_{l>k} ps(l)AS(k,l) \ > \ T_{s,\text{ext},b} \sum_{l>k} pb(l)AS(k,l) \tag{2.2}$$

2.1.3. Firmas pequeñas adquieren más patentes que en el caso netamente aleatorio

En este caso comparamos las tasas efectivas de compras totales de las firmas de una firma pequeña que posee una patente de calidad k y una firma grande que posee un par de patentes de calidades (k_1, k_2), sin importar de que tipo de firma adquiere la patente:

$$T_{s,\text{ext},s} \sum_{l>k} ps(l)AS(k,l) + T_{s,\text{ext},b} \sum_{l>k} pb(l)AS(k,l) > \frac{N_s + 2N_b - 1}{2(N_s + 2 + N_b - 2)} \tag{2.3}$$

2.1.4. Firmas grandes adquieren patentes de mayor calidad

Para analizar este hecho hemos construido una matriz que nos ayudará a ordenar la información que poseemos. Llamaremos RS y RB a las matrices que ordenan la información de las firmas pequeñas y grandes respectivamente. En el caso de las firmas pequeñas RS tiene $\bar{k}$ filas y 4 columnas, cada fila representa una firma que posee una innovación de calidad $k \in \{1, ..., \bar{k}\}$, la primera columna representa la calidad promedio de las innovaciones que ellas generan internamente, la segunda columna representa la calidad promedio de patentes que obtienen externamente desde firmas pequeñas y la tercera columna representa la calidad promedio que obtienen desde firmas grandes. Finalmente la cuarta columna representa el promedio ponderado de las tres columnas anteriores, entonces:

$$\begin{aligned}
RS(\mathrm{i},1) &= \frac{(\mathrm{i}+1)\cdot ps(\mathrm{i}+1) + (\mathrm{i}+2)\cdot ps(\mathrm{i}+2) + ... + \bar{k}\cdot ps(\bar{k})}{ps(\mathrm{i}+1) + ps(\mathrm{i}+2) + ... + ps(\bar{k})} \\
RS(\mathrm{i},2) &= \frac{(\mathrm{i}+1)\cdot ps(\mathrm{i}+1)\cdot AS(\mathrm{i},\mathrm{i}+1) + ... + \bar{k}\cdot ps(\bar{k})\cdot AS(\mathrm{i},\bar{k})}{ps(\mathrm{i}+1) + ps(\mathrm{i}+2) + ... + ps(\bar{k})} \\
RS(\mathrm{i},3) &= \frac{(\mathrm{i}+1)\cdot pb(\mathrm{i}+1)\cdot AS(\mathrm{i},\mathrm{i}+1) + ... + \bar{k}\cdot pb(\bar{k})\cdot AS(\mathrm{i},\bar{k})}{pb(\mathrm{i}+1) + pb(\mathrm{i}+2) + ... + pb(\bar{k})} \\
RS(\mathrm{i},4) &= \frac{RS(\mathrm{i},1)\cdot L_{1\mathrm{i}} + RS(\mathrm{i},2)\cdot L_{2\mathrm{i}} + RS(\mathrm{i},3)\cdot L_{3\mathrm{i}}}{L_{1\mathrm{i}} + L_{2\mathrm{i}} + L_{3\mathrm{i}}}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

donde $L_{1\mathrm{i}}$, $L_{2\mathrm{i}}$ y $L_{3\mathrm{i}}$ se definen como:

$$\begin{aligned}
L_{1\mathrm{i}} &= \gamma_s[ps(\mathrm{i}+1) + ... + ps(\bar{k})] \\
L_{2\mathrm{i}} &= (1-\gamma_s)\frac{\lambda_s}{N_s - 1}[ps(\mathrm{i}+1)\cdot AS(\mathrm{i},\mathrm{i}+1) + ... + ps(\bar{k})\cdot AS(\mathrm{i},\bar{k})] \\
L_{3\mathrm{i}} &= (1-\gamma_b)\frac{1-\lambda_b}{N_s}[pb(\mathrm{i}+1)\cdot AS(\mathrm{i},\mathrm{i}+1) + ... + pb(\bar{k})\cdot AS(\mathrm{i},\bar{k})]
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Notemos que $L_{1\text{i}}$ denota la probabilidad de que una firma pequeña genere una innovación interna de una calidad mayor a i, $L_{2\text{i}}$ es la probabilidad de que otra firma pequeña haya generado una innovación de calidad mayor, que no le haya servido a esa firma, y le sirva a nuestra firma. Y por último $L_{3\text{i}}$ denota la probabilidad de que una firma grande haya generado una patente de mejor calidad, no le haya servido a ella ni a ninguna firma grande y le sirva a nuestra empresa.

De la misma forma ordenamos la información para las firmas grandes en la matriz RB que tiene $\bar{K}$ filas y las mismas 4 columnas. Por lo tanto, se verificará nuestro hecho estilizado cuando miremos los promedio ponderados de nuestras matrices RS y RB y se cumpla que:

$$\sum_{\text{i}=1}^{\bar{K}} RB(\text{i},4) \cdot \mu_b(\text{i}) > \sum_{\text{i}=1}^{\bar{k}} RS(\text{i},4) \cdot \mu_s(\text{i}) \tag{2.6}$$

2.2. Caso Benchmark

En este caso consideraremos que nuestra economía se compone de 4 firmas pequeñas y sólo 2 grandes, es decir, existen 8 laboratorios en total, donde las patentes tendrán una calidad que varía desde 1 a 5 ($k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$). Los parámetros r y r_{d} los consideraremos ambos iguales a $0,2$ y $c = 0$.

Las probabilidad de las firmas de generar patentes de las distintas calidades las consideraremos uniformes, $ps(k) = pb(k) = \frac{1}{5}$ y las probabilidades γ_{i} y λ_{i} con $\text{i} = \{s, b\}$ se generaran aleatoriamente, es decir, no consideramos que las patentes generadas dentro de una firman sean más útiles para ellas (No Targetting), ni que por alguna razón sea más probable que le sirvan a otra firma del mismo tamaño (No Technology Linkages) :

No Targetting : $\gamma_s = \frac{1}{N_s+2N_b} = \frac{1}{8}$ y $\gamma_b = \frac{2}{N_s+2N_b} = \frac{1}{4}$

No Technology Linkages : $\lambda_s = \frac{N_s-1}{N_s-1+2N_b} = \frac{3}{7}$ y $\lambda_b = \frac{2N_b-2}{N_s+2N_b-2} = \frac{1}{3}$

A partir de esto, se pueden computar las tasas internas y externas a las cuales reciben innovaciones las distintas firmas, las cuales estaban determinadas por las ecuaciones (1.1), (1.2) y (1.3) :

$$\begin{array}{lcllcl}
T_{s,int} & = & 0,025 & T_{b,int} & = & 0,05 \\
T_{s,ext} & = & 0,175 & T_{b,ext} & = & 0,3 \\
T_{s,ext,s} & = & 0,075 & T_{b,ext,s} & = & 0,2 \\
T_{s,ext,b} & = & 0,1 & T_{b,ext,b} & = & 0,1
\end{array}$$

k	**F. Pequeñas**
1	0,2067
2	0,1653
3	0,2232
4	0,2381
5	0,1667

k_1	k_2	**F. Grandes**
1	1	0,0452
1	2	0,0633
1	3	0,0633
1	4	0,0471
1	5	0,0230
2	2	0,0364
2	3	0,0889
2	4	0,0742
2	5	0,0394
3	3	0,0700
3	4	0,1357
3	5	0,0771
4	4	0,0845
4	5	0,1086
5	5	0,0434

Resumen		
k	**F. Pequeñas**	**F. Grandes**
1	0,2067	0,1436
2	0,1653	0,1693
3	0,2232	0,2524
4	0,2381	0,2672
5	0,1667	0,1674
Prom.	2,9927	3,1456

Tabla 2.1: Estado Estacionario Caso Benchmark

Además los beneficios de cada firma por tener una innovación de cierta calidad se definen como:

$$\pi_s(k) = k \qquad \pi_b(k_1, k_2) = k_1 + k_2 \quad \text{con} \quad k, k_1, k_2 \in \{1, 2, ..., 5\} \tag{2.7}$$

Primero analizaremos los estados estacionarios. Notemos que al trabajar con un costo de transacción igual a 0, estamos dando toda la libertad a las firmas de transar sus patentes entre ellas, por lo tanto obtendremos un porcentaje alto de firmas con muy buenas patentes:

Notemos que en la tercera, la tabla resumen, se adjuntan los estados estacionarios de las firmas grandes por calidades, esos estados estacionarios ($\mu_{b,\mathrm{i}}$) vienen dados por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \mu_{b,\mathrm{i}} &= \mu_{b,(\mathrm{i},\mathrm{i})} + \sum_{l=1}^{\mathrm{i}-1} \frac{\mu_{b,(l,\mathrm{i})}}{2} + \sum_{l=\mathrm{i}+1}^{\bar{k}} \frac{\mu_{b,(\mathrm{i},l)}}{2} \\ &= \sum_{l=1}^{\mathrm{i}} \frac{\mu_{b,(l,\mathrm{i})}}{2} + \sum_{l=\mathrm{i}}^{\bar{k}} \frac{\mu_{b,(\mathrm{i},l)}}{2} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Como podemos observar, en el caso de las firmas pequeñas obtuvimos una distribución más bien uniforme, con alrededor del 20 % de las firmas con cada calidad. En el caso de las firmas grandes encontramos más heterogeneidad, sin encontrar grandes diferencia tampoco. En la tabla resumen se refleja el hecho de que la firmas grandes tendrían mejores patentes por la posibilidad que tienen de reasignar las patentes dentro de sus laboratorios y de hecho tiene una calidad promedio superior a la de las firmas pequeñas. Con ello podemos verificar que con los parámetros considerados en nuestro caso benchmark si se cumple nuestro primer hecho estilizado.

Para verificar nuestro segundo y tercer hecho estilizado debemos analizar las tasa efectivas de compras, las cuales reflejan a que tasa las firmas están comprando patentes de las distintas calidades y desde las distintas empresas. Recordemos que para ello debemos verificar que se cumplan las ecuaciones (2.2) y (2.3).

A continuación veremos los resultados obtenidos para nuestro caso:

Firma pequeña			
k	F. pequeña	F. Grande	Promedio
1	0,060	0,080	0,140
2	0,045	0,060	0,105
3	0,030	0,040	0,070
4	0,015	0,020	0,035
5	0	0	0
P	0,0301	0,0401	0

Tabla 2.2: Tasa Efectiva de compra de una Firma Pequeña

Esta tabla nos dice que, por ejemplo, una firma pequeña que actualmente posee una patente de calidad $k = 1$ recibe patentes desde otras firmas pequeñas a una tasa del $0,06$ y desde las firmas grandes a una tasa del $0,08$, de lo cual se concluye que recibe una patente que le puede ser útil a una tasa del $0,14$. Así también, podemos observar, que al tener una patente de la más baja calidad, la tasa a la cual recibe patentes que le podrían ser útiles es mayor que para otras firmas pequeñas con patentes más grandes. Notemos que en promedio una firma pequeña adquiere de las innovaciones generadas por otras firmas pequeñas a una tasa del 0,03 y a un 0,04 recibe innovaciones generadas por las firmas grandes, es decir, no podemos comprobar nuestro primer hecho estilizado que las firmas pequeñas adquieren más desde otras firmas del mismo tamaño que desde firmas grandes.

Para el caso de las firmas grandes:

Destaquemos primero que, como consideramos $c = 0$, las firmas grandes toman sus decisiones de compra basándose sólo en la calidad de su peor patente, es por ello que vemos que las tasas a las cuales adquieren patentes las firmas que poseen un par de patentes $(k_1, k_2) = (1, 1)$ es la misma que una firma que posee un par de patentes $(k_1, k_2) = (1, 2)$, $(k_1, k_2) = (1, 3)$, etc.

Firma Grande				
k_1	k_2	F. Pequeña	F. Grande	Total
1	1	0,16	0,08	0,24
1	2	0,16	0,08	0,24
1	3	0,16	0,08	0,24
1	4	0,16	0,08	0,24
1	5	0,16	0,08	0,24
2	2	0,12	0,06	0,18
2	3	0,12	0,06	0,18
2	4	0,12	0,06	0,18
2	5	0,12	0,06	0,18
3	3	0,08	0,04	0,12
3	4	0,08	0,04	0,12
3	5	0,08	0,04	0,12
4	4	0,04	0,02	0,06
4	5	0,04	0,02	0,06
5	5	0	0	0
Promedio		0,0977	0,0489	0

Tabla 2.3: Tasa Efectiva de compra de una Firma Grande

En el caso de las firmas de menor tamaño , en el agregado están comprando a una tasa del 0,07 aproximadamente, adquiriendo a una tasa un poco mayor de las firmas grandes que de las pequeñas. En cambio, en el caso de las firmas grandes ellas tiene una tasa efectiva de compra de un 0,13 aproximadamente, adquiriendo más innovaciones de las pequeñas empresas. Esto se da debido a que hay más laboratorios de firmas pequeñas que laboratorios de firmas grandes a las que la firma grande potencialmente le podría comprar una patente.

En nuestro caso benchmark, donde tenemos 4 firmas pequeñas con un laboratorio de innovación cada una, y 2 firmas grandes equipadas con dos laboratorios nos dice que, en el casos de las firmas pequeñas, ellas reciben potencialmente innovaciones externas de 7 de los 8 laboratorios que existen en esta economía, y las firmas grandes reciben de 6 laboratorios de los 8, pero pueden repartirlas entre sus 2 laboratorios. Por lo tanto, podemos decir que las firmas pequeñas reciben 7 shock externos, mientras que las firmas grandes reciben 12, entonces el ratio entre los shocks que reciben las pequeñas versus las firmas grandes es igual a $\frac{7}{12}$. Sin embargo, los datos nos sugieren que en la realidad este ratio es mayor que en nuestro caso con comportamiento aleatorio, esto debido a que las firmas pequeñas adquieren mucho más patentes que las firmas grandes. Para el caso que estamos estudiando hemos obtenido los siguientes ratios:

Caso Aleatorio	0,5833
Caso Simulado	0,4793

Tabla 2.4: Tasa de Compra de una Firma pequeña, caso aleatorio y caso Benchmark

es decir, no se refleja lo que ocurre en los datos.

Finalmente analizamos nuestro cuarto hecho estilizado, para ello estudiamos las calidades promedio de las patentes que están generando internamente, y de las que están comprando, tanto de firmas de igual tamaño, como del resto. Recordemos que estas tablas se generaron con las ecuaciones (2.4) y (2.5) en el caso de las firmas pequeñas:

Firma Pequeña				
k	Interna	Externa desde firma pequeña	Externa desde firma grande	Promedio
1	3,5	3,5	3,5	3,5
2	4	4	4	4
3	4,5	4,5	4,5	4,5
4	5	5	5	5
5	0	0	0	0
Promedio	4,296	4,296	4,296	4,296

Tabla 2.5: Calidad promedio de las patentes que adquiere una firma pequeña

Esta tabla nos indica que, una firma pequeña que ahora posee una patente de calidad $k = 1$ adquirirá patentes tanto internas y externas de una calidad promedio de $k = 3,5$. De hecho, nos indica que la calidad promedio de las patente que genera internamente son básicamente de la misma calidad de las patentes que adquieren externamente, esto ya que, al asumir $c = 0$ estamos dado total libertad al mercado de las innovaciones. En el caso de las firmas grandes obtenemos el mismo resultado, salvo que sus patentes tienen mejor calidad, esto sólo se debe a que las tasa a la cual generan y reciben patentes es mayor en empresas de su tamaño (T_{bi} , T_{be}):

Por lo tanto, reemplazando en nuestra ecuación (2.6) se obtiene lo siguiente:

En resumen, considerando los 4 hechos estilizados encontrados en los datos se tiene que:

- Sí, se cumple que las patentes de las firmas pequeñas son de menor calidad que las patentes de las firmas grandes.
  Logramos que las patentes de las firmas pequeñas sean de menor calidad que las patentes de las firmas grandes. Esto se debe a que estamos considerando todo aleatorio y el costo de transacción es 0, por ello, al generarse una patente, en cualquier laboratorio, las firmas grandes tienen más posibilidades de que la innovación les sea útil, ya que poseen dos laboratorios donde pueden ubicarla, lo cual produce que sus patentes tengan una mayor calidad promedio que las firmas pequeñas.

- Sí, las firmas grandes adquieren patentes de mayor calidad.
  Conseguimos que las firmas grandes adquieran patentes de mayor calidad. Esto es una consecuencia directa del primer hecho estilizado, ya que como las firmas grandes poseen patentes de mejor calidad que las firmas pequeñas, a la hora de adquirir nuevas patentes sólo aceptarán patentes de una mayor calidad a las que actualmente poseen, y como

Firma Grande					
k_1	k_2	Interna	Externa desde una firma grande	Externa desde una firma pequeña	Promedio
1	1	3,5	3,5	3,5	3,5
1	2	3,5	3,5	3,5	3,5
1	3	3,5	3,5	3,5	3,5
1	4	3,5	3,5	3,5	3,5
1	5	3,5	3,5	3,5	3,5
2	2	4,0	4,0	4,0	4,0
2	3	4,0	4,0	4,0	4,0
2	4	4,0	4,0	4,0	4,0
2	5	4,0	4,0	4,0	4,0
3	3	4,5	4,5	4,5	4,5
3	4	4,5	4,5	4,5	4,5
3	5	4,5	4,5	4,5	4,5
4	4	5,0	5,0	5,0	5,0
4	5	5,0	5,0	5,0	5,0
5	5	0	0	0	0
Promedio		4,223	4,223	4,223	4,223

Tabla 2.6: Calidad promedio de las patentes que adquiere una firma grande

Calidad promedio que compran firmas pequeñas	3.5797
Calidad promedio que compran firmas grandes	4.0398

Tabla 2.7: Resumen de la calidad promedio que adquieren ambas firmas

son de mejor calidad que las patentes de las firmas pequeñas, aceptarán innovaciones de mejor calidad que las que aceptarán las firmas pequeñas.

- No logramos captar que las firmas pequeñas adquieren desproporcionadamente más de las firmas pequeñas que de las firmas grandes.
  Con los parámetros de nuestro caso benchmark no logramos que las firmas pequeñas adquieran desproporcionadamente más innovaciones desde las firmas pequeñas que de las firmas grandes. Sin embargo, es posible replicar este efecto en nuestro modelo aumentando el valor de λ_s, con ello lograremos que las patentes generadas en las firmas pequeñas sean con mayor probabilidad útiles a otras firmas pequeñas, incentivando el flujo de patente entre estas firmas y logrando que este sea mayor que el flujo de patentes con las firmas grandes. Esto lo veremos en detalle en la siguiente sección.

- Tampoco las firmas pequeñas adquieren más patentes que de las firmas grandes. No logramos que las firmas pequeñas adquirieran más patentes que las firmas grandes. Recordemos que para analizar este hecho estilizado estudiábamos los ratios de compra de las firmas pequeñas versus las firmas grandes en el caso completamente aleatorio y lo comparábamos con nuestra simulación. Para que el hecho estilizado se cumpliera debía suceder que el ratio de la simulación fuera mayor al ratio del caso aleatorio, lo que no sucede cuando simulamos el caso benchmark, no obstante, variando los parámetros r, r_{d} y c, es posible obtener ratios simulados que superen al caso aleatorio.

2.3. Technology Linkages

Mostraremos que es posible lograr el segundo hecho estilizando aumentando el technology linkages de las firmas pequeñas, es decir, λ_s. En la siguiente tabla se resumen las tasas efectivas de compra de una firma pequeñas desde las distintas firmas, a medida que aumentamos λ_s:

Tasa efectiva de compra		
λ_s	Desde Firmas pequeñas	Desde firmas grandes
0,5	0,0341	0,0390
0,7142	0,0448	0,0358
0,8571	0,0510	0,0340
1	0,0566	0,0324

Tabla 2.8: Cambios en la tasa efectiva de compra de una firma pequeña a medida que aumenta λ_s

Como vemos, efectivamente logramos el hecho estilizado que buscábamos, es decir, las firmas pequeñas adquieren más patentes desde otras firmas pequñas que de las firmas grandes.

2.4. Tercer hecho estilizado

Tal como señalamos anteriormente, este hecho estilizado es posible lograrlo modificando los valores de r, r_{d} y c. Para ello, debemos reflejar en el modelo que las firmas grandes sean más pacientes, por lo cual haremos que la tasa a la que se crean patentes sea alta, se deprecian a una tasa muy baja y el costo de transacción sea alto, para que las grandes prefieran esperar generar internamente una patente antes de comprarla. A continuación adjuntamos una tabla con los resultados obtenidos variando los parámetros mencionados anteriormente:

r	r_{d}	c	Ratio
0,95	0,01	0	0,5052
0,95	0,01	0,3	0,5052
0,95	0,01	0,5	0,5052
0,95	0,01	0,9	0,5002
0,95	0,01	1	0,7326

Tabla 2.9: Variación en la tasa de compra variando los parámetros r, r_{d} y c

2.5. Estática Comparativa

En esta sección estudiaremos la sensibilidad del estado estacionario de las firmas pequeñas y grandes de nuestro caso benchmark con respecto a los valores de r, r_{d} y c.

2.5.1. Moviendo r

En este caso observamos una directa relación entre los valores de r y los estados estacionarios. Al aumentar la tasa a la cual los laboratorios generan innovaciones, r, aumenta considerablemente la proporción de firmas, de ambos tamaños, que poseen innovaciones de la máxima calidad, por ende mejoran las calidades promedios de ambos tipos de firmas.

$r = 0{,}1$		
k	Small	Big
1	0,416	0,366
2	0,167	0,190
3	0,175	0,197
4	0,152	0,160
5	0,091	0,086
P	2,334	2,410

$r = 0{,}3$		
k	Small	Big
1	0,115	0,065
2	0,138	0,122
3	0,228	0,244
4	0,288	0,329
5	0,231	0,241
P	3,382	3,558

$r = 0{,}4$		
k	Small	Big
1	0,069	0,033
2	0,111	0,086
3	0,216	0,216
4	0,317	0,359
5	0,286	0,306
P	3,639	3,819

$r = 0{,}5$		
k	Small	Big
1	0,044	0,018
2	0,089	0,061
3	0,200	0,186
4	0,333	0,371
5	0,333	0,363
P	3,822	4,000

Tabla 2.10: Variación del estado estacionario de ambas firmas ante aumentos de r

2.5.2. Moviendo r_{d}

Al contrario del caso anterior, cuando aumentamos la tasa a la cual se deprecian las patentes afectamos directamente la proporción de firmas que poseen innovaciones de cierta calidad, las firmas tienden a tener patentes de peores calidades y baja su calidad promedio.

$r_{\mathrm{d}} = 0{,}1$		
k	Small	Big
1	0,069	0,033
2	0,111	0,086
3	0,216	0,216
4	0,317	0,359
5	0,286	0,306
P	3,639	3,819

$r_{\mathrm{d}} = 0{,}3$		
k	Small	Big
1	0,325	0,264
2	0,173	0,193
3	0,199	0,228
4	0,186	0,202
5	0,118	0,114
P	2,599	2,709

$r_{\mathrm{d}} = 0{,}4$		
k	Small	Big
1	0,416	0,366
2	0,167	0,190
3	0,175	0,197
4	0,152	0,160
5	0,091	0,086
P	2,334	2,410

$r_{\mathrm{d}} = 0{,}5$		
k	Small	Big
1	0,488	0,449
2	0,156	0,179
3	0,154	0,171
4	0,128	0,131
5	0,074	0,069
P	2,144	2,194

Tabla 2.11: Variación del estado estacionario de ambas firmas ante aumentos de r_{d}

2.5.3. Moviendo c

Al modificar los valores de c afectamos directamente las matrices de aceptación. Al aumentar este valor, hacemos más costosas las transacciones de innovaciones por lo cual obtenemos el mismo efecto que al aumentar r_{d}, es decir, las firmas tienden a tener patentes de más baja calidad y baja la calidad promedio de las firmas.

$c = 0{,}2$			$c = 0{,}5$			$c = 0{,}9$			$c = 1$		
k	Small	Big	k	Small	Big	k	Small	Big	k	Small	Big
1	0,207	0,144	1	0,207	0,144	1	0,239	0,172	1	0,259	0,187
2	0,165	0,169	2	0,165	0,169	2	0,149	0,157	2	0,162	0,170
3	0,223	0,252	3	0,223	0,252	3	0,207	0,237	3	0,225	0,251
4	0,238	0,267	4	0,238	0,267	4	0,238	0,267	4	0,219	0,245
5	0,167	0,167	5	0,167	0,167	5	0,167	0,167	5	0,135	0,146
P	2,993	3,146	P	2,993	3,146	P	2,944	3,102	P	2,808	2,993

Tabla 2.12: Variación del estado estacionario de ambas firmas ante aumentos de c

2.5.4. Moviendo γ_s

Al aumentar los valores de γ_s del caso benchmark aumentamos la probabilidad de que las innovaciones generadas por las firmas pequeñas sean útiles para ellas mismas, con ello las firmas pequeñas mejoraran las calidades de sus patentes y las firmas grandes recibirán con menor probabilidad innovaciones externas desde las firmas pequeñas, con lo cual sus patentes serán peores con respecto al caso benchmark. De hecho notemos que a medida que γ_s aumenta, la calidad promedio de las firmas pequeñas aumenta y la calidad promedio de las firmas grandes disminuye.

$\gamma_s = 0,25$			$\gamma_s = 0,5$			$\gamma_s = 0,75$			$\gamma_s = 1$		
k	Small	Big	k	Small	Big	k	Small	Big	k	Small	Big
1	0,189	0,166	1	0,159	0,223	1	0,135	0,305	1	0,115	0,423
2	0,162	0,177	2	0,154	0,189	2	0,146	0,194	2	0,138	0,183
3	0,226	0,250	3	0,228	0,238	3	0,229	0,216	3	0,228	0,180
4	0,247	0,253	4	0,263	0,221	4	0,277	0,184	4	0,289	0,140
5	0,177	0,155	5	0,195	0,129	5	0,214	0,102	5	0,231	0,074
P	3,060	3,055	P	3,182	2,843	P	3,288	2,583	P	3,382	2,258

Tabla 2.13: Variación del estado estacionario de ambas firmas ante aumentos de γ_s

2.5.5. Moviendo γ_b

En este caso observamos el mismo efecto anterior, pero en las firmas grandes. Ellas generan innovaciones que con mayor probabilidad le son útiles a ellas mismas por lo cual mejoran la calidad promedio de sus patentes y las firmas pequeñas, al recibir con menor probabilidad innovaciones externas que le son útiles, empeoran la calidad promedio de sus patentes.

$\gamma_b = 0,375$			$\gamma_b = 0,5$			$\gamma_b = 0,75$			$\gamma_b = 1$		
k	Small	Big	k	Small	Big	k	Small	Big	k	Small	Big
1	0,230	0,138	1	0,257	0,132	1	0,325	0,122	1	0,416	0,113
2	0,169	0,167	2	0,172	0,165	2	0,173	0,160	2	0,167	0,156
3	0,219	0,253	3	0,214	0,253	3	0,199	0,254	3	0,175	0,254
4	0,227	0,271	4	0,214	0,275	4	0,186	0,282	4	0,152	0,289
5	0,155	0,171	5	0,143	0,175	5	0,118	0,182	5	0,091	0,189
P	2,908	3,171	P	2,814	3,195	P	2,599	3,242	P	2,334	3,286

Tabla 2.14: Variación del estado estacionario de ambas firmas ante aumentos de γ_b

2.5.6. Moviendo λ_s

Cuando aumentamos el valor de λ_s con respecto al caso benchmark generamos un efecto similar que al aumentar γ_s. Cuando λ_s es mayor aumentamos la probabilidad de que una innovación generada por una firma pequeña le sea útil a otra firma pequeña, es decir, generamos un vínculo" entre las firmas pequeñas, con ellos ellas mejoran su calidad promedio, lo cual empeora la calidad promedio de las firmas grandes ya que reciben menos innovaciones externas.

$\lambda_s = 0,5714$			$\lambda_s = 0,7142$			$\lambda_s = 0,8571$			$\lambda_s = 1$		
k	Small	Big	k	Small	Big	k	Small	Big	k	Small	Big
1	0,177	0,185	1	0,152	0,241	1	0,132	0,318	1	0,115	0,423
2	0,159	0,182	2	0,152	0,191	2	0,145	0,194	2	0,138	0,183
3	0,227	0,246	3	0,229	0,234	3	0,229	0,212	3	0,228	0,180
4	0,253	0,242	4	0,267	0,212	4	0,278	0,178	4	0,289	0,140
5	0,184	0,145	5	0,200	0,122	5	0,216	0,098	5	0,231	0,074
P	3,108	2,980	P	3,210	2,784	P	3,300	2,547	P	3,382	2,258

Tabla 2.15: Variación del estado estacionario de ambas firmas ante aumentos de λ_s

2.5.7. Moviendo λ_b

Al igual que en el caso anterior, al aumentar λ_b las patentes generadas en las empresas grandes con mayor probabilidad le son útiles a las otras firmas grandes, con lo cual ellas mejoran sus calidades promedio y las de las firmas pequeñas empeoran.

$\lambda_b = 0,5$		
k	Small	Big
1	0,243	0,113
2	0,170	0,156
3	0,217	0,254
4	0,221	0,289
5	0,149	0,189
P	2,862	3,286

$\lambda_b = 0,6667$		
k	Small	Big
1	0,288	0,090
2	0,173	0,142
3	0,208	0,251
4	0,201	0,307
5	0,130	0,210
P	2,712	3,407

$\lambda_b = 0,833$		
k	Small	Big
1	0,345	0,072
2	0,172	0,129
3	0,194	0,247
4	0,178	0,322
5	0,111	0,231
P	2,538	3,511

$\lambda_b = 1$		
k	Small	Big
1	0,416	0,059
2	0,167	0,116
3	0,175	0,240
4	0,152	0,335
5	0,091	0,251
P	2,334	3,603

Tabla 2.16: Variación del estado estacionario de ambas firmas ante aumentos de λ_b

Notemos que al realizar las estáticas comparativas de los distintos parámetros hemos obtenido los resultados esperados, es decir, los resultados obtenidos son completamente los que esperaríamos a priori de nuestro modelo.

2.6. Aspectos Computacionales

Como dijimos al comienzo, ahora discutiremos algunos detalles computacionales del presente trabajo. En primer lugar, para calcular los valores de $V_s(k)$ y $V_b(k_1, k_2)$ debíamos ver si ellas eran contractantes o no, en caso de serlo, las determinábamos mediante la iteración de la función de valor. De los contrario, en el caso de V_s, buscábamos una solución de:

$$\begin{aligned} 0 \; = \; & \pi_s(k) + T_{s,int} \sum_{l>k} ps(l)[V_s(l) - V_s(k)] \\ & + T_{s,ext,s} \sum_{l>k} ps(l) \max\{V_s(l) - V_s(k) - c, 0\} \\ & + T_{s,ext,b} \sum_{l>k} pb(l) \max\{V_s(l) - V_s(k) - c, 0\} - r_{\mathrm{d}}(V_s(k) - V_s(k-1)) - \delta V_s(k) \end{aligned} \tag{2.9}$$

de la misma forma lo hacemos con $V_b(k_1, k_2)$. A su vez, cada vez que iteramos o resolvemos la ecuación anterior vamos completando nuestra matriz de aceptación, es decir, si en el caso de las firmas pequeñas obtenemos que $\max V_s(j) - V_s(j) - c, 0 = V_s(j) - V_s(j) - c$ llenamos con un 1 en la casilla (i, j) de A_s, en caso contrario, llenamos con un 0. Este mismo procedimiento se sigue con las matrices de aceptación de las firmas grandes.

Dado lo anterior, construimos las matrices de transición determinadas por las ecuaciones

(1.17) y (1.22) y luego buscamos un vector tal que:

$$\begin{aligned} TM_{\text{i}}^{\top} \cdot x &= x \text{ con i} \in \{s, b\} \\ \sum_{\text{i}} x_{\text{i}} &= 1 \end{aligned}$$

donde TM_{i} es la matriz de transición. Este vector nos entrega el estado estacionario de las firmas.

Capítulo 3

Tamaño de firmas endógena

Consideremos ahora que en nuestra economía existen N_s firmas pequeñas, con sólo un laboratorio cada una, y $2N_b$ firmas también con un laboratorio cada una pero ellas potencialmente podrían integrar sus laboratorios conformando una firma grande dotada de dos laboratorios, es decir, estas firmas tienen la opción de integrarse o trabajar de manera independiente. Estas firmas deben decidir si integrarse a costo f y así aprovechar los beneficios de reasignar las innovaciones dentro de los laboratorios de la firma o trabajar como dos firmas pequeñas independientes.

Es nuestro modelo cuando una firma genera una innovación que no le útil a sí misma, se la vende a otra firma a la cual le es útil, sin embargo, en este intercambio, ambas firmas tienen un poder de negociación que surge de lo específico de la innovación, dado que la firma que vende la innovación es el único ofertante y la firma que decide si comprar o no, es el único demandante. Debido a esto, asumiremos que el costo c que pagan las firmas por una innovación externa se determina mediante una negociación a la Nash. Podemos así expresar las ganancias de un vendedor y de la firma que es potencialmente compradora de la patente. Si una firma pequeña que posee una patente de calidad k debe decidir si comprar o no una patente de calidad $l > k$, su ganancia está dada por:

$$V_s(k) + \alpha \max\{V_s(l) - V_s(k) - c, 0\} \tag{3.1}$$

y el vendedor gana:

$$(1 - \alpha) \max\{V_s(l) - V_s(k) - c, 0\} \tag{3.2}$$

Si la innovación de calidad l fuera ofrecida a una firma grande que posee un par de patentes (k_1, k_2), la ganancia de ella sería:

$$\begin{aligned} &V_b(k_1, k_2) + \alpha \max\{V_b(l, k_2) - V_b(k_1, k_2) - c, 0\} \ \text{ si } k_1 < l < k_2 \\ &V_b(k_1, k_2) + \alpha \max\{V_b(k_2, l) - V_b(k_1, k_2) - c, 0\} \ \text{ si } l \geq k_2 \end{aligned} \tag{3.3}$$

y por su parte, la ganancia del vendedor sería :

$$\begin{array}{ll} (1-\alpha)\,\text{máx}\{V_b(l,k_2)-V_b(k_1,k_2)-c,0\} & \text{si } k_1 < l < k_2 \\ (1-\alpha)\,\text{máx}\{V_b(k_2,l)-V_b(k_1,k_2)-c,0\} & \text{si } l \geq k_2 \end{array} \tag{3.4}$$

Ahora que hemos definidos los excedentes del comprador y vendedor para cada tamaño de firmas, podemos reescribir las funciones de valor de cada una[1] . En este caso la función de valor de las firmas pequeñas, que denominaremos U_{e}, está dada por:

$$\begin{aligned} \delta U_s(k) &= \pi_s(k,N_s) + T_{s,\mathrm{int}} \sum_{l>k} ps(l)[U_s(l)-U_s(k)] \\ &+ T_{s,\mathrm{ext},s} \sum_{l>k} ps(l)\alpha\,\text{máx}\{U_s(l)-U_s(k)-c,0\} \\ &+ T_{s,\mathrm{ext},b} \sum_{l>k} pb(l)\alpha\,\text{máx}\{U_s(l)-U_s(k)-c,0\} - r_{\mathrm{d}}(U_s(k)-U_s(k-1)) \\ &+ r\frac{2}{N_s+2N_b}(1-\gamma_s)\Bigg\{\lambda_s(1-\alpha)\sum_{k=1}^{\bar{k}}\sum_{l=k}^{\bar{k}}\mu_{s,k}\,\text{máx}\{U_s(l)-U_s(k)-c,0\} \\ &+ (1-\lambda_s)(1-\alpha)\sum_{k_1,k_2}\sum_{l=k_1+1}^{k_2}\mu_{b,(k_1,k_2)}\,\text{máx}\{U_b(l,k_2)-U_b(k_1,k_2)-c,0\} \\ &+ (1-\lambda_s)(1-\alpha)\sum_{k_1,k_2}\sum_{l=k_2}^{\bar{k}}\mu_{b,(k_1,k_2)}\,\text{máx}\{U_b(k_2,l)-U_b(k_1,k_2)-c,0\}\Bigg\} \end{aligned} \tag{3.5}$$

donde agregamos las ganancias que tiene la firma por vender las patentes que genera y no le sirven. La cuarta línea representa la ganancia promedio que obtiene al vender una patente a una firma pequeña y la quinta y sexta línea representan la ganancia promedio que obtiene al venderle una innovación a una firma grande, dependiendo de la calidad de la innovación. La función de valor de las firmas grandes se redefine como:

[1]Notemos que en el modelo original asumíamos que $\alpha = 1$

$$\begin{aligned}
\delta U_b(k_1,k_2) &= \pi_b(k_1,k_2,N_b) + T_{b,int}\left[\sum_{k_1<l<k_2} pb(l)[U_b(l,k_2)-U_b(k_1,k_2)]\right. \qquad (3.6)\\
&+ \left.\sum_{l\geq k_2} pb(l)[U_b(k_2,l)-U_b(k_1,k_2)]\right]\\
&+ T_{b,\mathrm{ext},s}\left[\sum_{k_1<l<k_2} ps(l)\alpha\,\text{máx}\{U_b(l,k_2)-U_b(k_1,k_2)-c,0\}\right.\\
&+ \sum_{l\geq k_2} ps(l)\alpha\,\text{máx}\{U_b(k_2,l)-U_b(k_1,k_2)-c,0\}\\
&+ T_{b,\mathrm{ext},b}\left[\sum_{k_1<l<k_2} pb(l)\alpha\,\text{máx}\{U_b(l,k_2)-U_b(k_1,k_2)-c,0\}\right.\\
&+ \sum_{l\geq k_2} pb(l)\alpha\,\text{máx}\{U_b(k_2,l)-U_b(k_1,k_2)-c,0\}\\
&+ r\frac{2}{N_s+2N_b}(1-\gamma_b)\left\{(1-\lambda_b)(1-\alpha)\sum_{k=1}^{\bar{k}}\sum_{l=k}^{\bar{k}}\mu_{s,k}\,\text{máx}\{U_s(l)-U_s(k)-c,0\}\right.\\
&+ \lambda_b(1-\alpha)\sum_{k_1,k_2}\sum_{l=k_1+1}^{k_2}\mu_{b,(k_1,k_2)}\,\text{máx}\{U_b(l,k_2)-U_b(k_1,k_2)-c,0\}\\
&+ \left.\lambda_b(1-\alpha)\sum_{k_1,k_2}\sum_{l=k_2}^{\bar{k}}\mu_{b,(k_1,k_2)}\,\text{máx}\{U_b(k_2,l)-U_b(k_1,k_2)-c,0\}\right\}\\
&-r_{\mathrm{d}}(U_b(k_1,k_2)-U_b(k_1-1,k_2))-r_{\mathrm{d}}(U_b(k_1,k_2)-U_b(k_1,k_2-1))
\end{aligned}$$

Entonces si una de estas firmas decide mantener dos laboratorios separados, sus ganancias esperadas son:

$$\Pi_{Separacion} = 2\sum_{k=1}^{\bar{k}}\mu_{s,k}U_s(k) \qquad (3.7)$$

mientras que cuando la firma decide integrarse gana:

$$\Pi_{Integracion} = \sum_{(k_1,k_2)\in I}\mu_{b,(k_1,k_2)}U_b(k_1,k_2) \qquad (3.8)$$

Definición 3.1 *Consideremos que en nuestra economía existen N_s firmas pequeñas y N_b firmas que poseen 2 laboratorios. Un equilibrio está dado por $(N_1^*, N_2^*, \mu_s, \mu_b)$, con $N_1^* + 2N_2^* = N_s + 2N_b$, y $N_1^* \geq N_s$ tal que:*

- *Si* $\Pi_{Separacion}(N_s + 2, N_b - 1, \mu_s, \mu_b) \leq \Pi_{Integracion}(N_s, N_b, \mu_s, \mu_b) - f$ *entonces* (N_s, N_b) *es E. N.*
- *Si* $\Pi_{Separacion}(N_s + 2N_b, 0, \mu_s, \mu_b) \geq \Pi_{Integracion}(N_s + 2N_b - 2, 1, \mu_s, \mu_b) - f$ *entonces* $(N_s + 2N_b, 0)$ *es E. N.*
- *Si* $\Pi_{Separacion}(N_s + 2N, N_b - N, \mu_s, \mu_b) \geq \Pi_{Integracion}(N_s + 2N - 2, N_b - N + 1, \mu_s, \mu_b) - f$ *y* $\Pi_{Integracion}(N_s + 2N, N_b - N, \mu_s, \mu_b) - f \geq \Pi_{Separacion}(N_s + 2N - 2, N_b - N + 1, \mu_s, \mu_b)$ *entonces* $(N_s + 2N, N_b - N)$ *es E. N. con* $N \leq N_b$

donde f es el costo que pagan dos firmas pequeñas al integrarse.

3.1. Simulación para el caso Benchmark

Para estudiar los resultados de nuestra extensión, simulamos al caso benchmark y hemos obtenido las ganancias de las firmas al estar integradas o separadas. Supusimos que todos los laboratorios de nuestra economía podían potencialmente integrarse, por ello calculamos cuando existen 8 firmas pequeñas, cuando existes 6 pequeñas y una grande y así sucesivamente.

Supongamos que hay especialización y no a todas las firmas les conviene ser de un sólo tamaño, para reflejar este efecto supondremos que las funciones de utilidad son las siguiente:

$$\pi_s(k) = \frac{k}{(N_1^* + 1)^2} \qquad \pi_b(k) = \frac{k}{(N_2^* + 1)^2}$$

Notemos que la manera en que definimos la $\pi_s(k)$ y $\pi_b(k)$ generan un efecto de "congestión" en el mercado, de manera que no a todas las firmas les convenga realizar la misma decisión, o sea, no todas quieren integrarse o no todas quieren separarse.

Los resultados de la simulación con estas funciones de utilidad se muestran a continuación:

como podemos observar, para este caso $(N_1^*, N_2^*) = (2, 3)$ es un equilibrio de Nash, ya que no existen incentivos para que alguna firma se desvíe:

N_1^*	8	6	4	2	0
N_2^*	0	1	2	3	4
$\Pi_{Integracion} - f$	-	1,5399	0,6853	0,3861	0,2470
$\Pi_{Separacion}$	0,0725	0,1196	0,2359	0,6511	-

Tabla 3.1: Utilidad de las firmas integradas y separadas, considerando $f = 0$

$$\begin{aligned} 0,3861 &= \Pi_{Integracion}(2,3) > \Pi_{Separacion}(4,2) = 0,2359 \\ 0,6511 &= \Pi_{Separacion}(2,3) > \Pi_{Integracion}(0,4) = 0,2470 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Hemos logrado un equilibrio interior principalmente debido a que asumimos que no existe un costo al integrarse ($f = 0$) y a que utilizamos funciones de utilidad adecuadas, las cuales generan el efecto de que no convenga que todas las firmas quieran funcionar integradas o todas separadas.

Ahora si aumentamos el costo de integración más alto, como por ejemplo, $f = 0,2$:

N_1^*	8	6	4	2	0
N_2^*	0	1	2	3	4
$\Pi_{Integracion} - f$	-	1,3399	0,4853	0,1861	0,0470
$\Pi_{Separacion}$	0,0725	0,1196	0,2359	0,6511	-

Tabla 3.2: Utilidad de las firmas integradas y separadas, considerando $f = 0,2$

obtenemos que $(N_1^*, N_2^*) = (4,2)$ es un nuevo equilibrio de Nash:

$$\begin{aligned} 0,4853 &= \Pi_{Integracion}(4,2) - 0,2 > \Pi_{Separacion}(6,1) = 0,1196 \\ 0,2359 &= \Pi_{Separacion}(4,2) - 0,2 > \Pi_{Integracion}(2,3) = 0,1861 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Mediante esta extensión hemos logrado endogeneizar el número de firmas de cada tamaño que existen, y bajo una función de utilidad apropiada, hemos logrado un equilibrio interesante, en el cual no todas las firmas deciden ser del mismo tamaño.

Conclusión

Este trabajo estudia ciertos fenómenos en el mercado de las innovaciones distintos a los que que la literatura clásica sugiere. Establece distintas ventajas comparativas entre firmas de distintos tamaños, sugiere que la principal ventaja de las firmas grandes es que, al poseer más de un laboratorio creativo, pueden reasignar sus innovaciones dentro de sus laboratorio, además es más probable que se genere una innovación dentro de la firma, por lo cual son más pacientes y selectivas a la hora de comprar patentes, lo que en consecuencia trae que, en estado estacionario, estas firmas tengan patentes de mejor calidad.Por otra parte, la firmas pequeñas generan menos innovaciones,lo cual las hace menos selectivas, lo que, como consecuencia, trae que el mercado de las patentes en las firmas pequeñas sean más dinámico.

Además logramos captar los cuatro hechos estilizados que se observan Figueroa y Serrano (2011). Primero, logramos que las firmas pequeñas tengan patentes de menor calidad, como consecuencia de lo anterior, tienen menor probabilidad de generar patentes internas que les sean útiles y son más impacientes a la hora de comprar patentes y frente a esta desventaja efectivamente tiene patentes de menor calidad que las firmas grandes. Segundo, esto debido a que las firmas grandes tienen más posibilidades de crear internamente patentes y también con mayor probabilidad les hes útil a la misma firma, por lo cual son más selectivas a la hora de comprar patentes y , en consecuencia, adquieren patentes de mayor calidad. Tercero, captamos que las firmas pequeñas adquieran más patentes desde otras firmas pequeñas, esto se logra aumentando la probabilidad de que una patentes que es generada en una firma pequeña y que no le hes útil a ella misma, le sirva a otra firma pequeña. Cuarto, se logra que las firmas pequeñas adquieran más patentes que las firmas grandes sólo si damos las condiciones para que las firmas grandes sean más pacientes aún, lo que quiere decir, que aumentamos la tasa a la cual se generan las innovaciones, disminuimos a la tasa a la cual se deprecian y aumentamos el costo de transacción.

En la extensión introducimos especialización en nuestro modelo y logramos las firmas no se agrupen en un mismo tamaño saturando el mercado, sino que ellas logran un equilibrio de Nash en el cual se distribuyen en ambos mercados.

Por último, este trabajo logra capturar los hechos estilizados en base a los cuales se desarrolló todo el trabajo y muestra una dinámica del mercado de innovaciones distinta a la que la literatura clásica nos había mostrado.

Bibliografía

[1] Anand, B., and T. Khanna (2000): “The Structure of Licensing Contract", Journal of Industrial Economics, 48, 103-135.

[2] Anton, J., and D. A. Yao (1994): “Expropriation and Inventions: Appropriable Rents in the Absence of Property Rights,.American Economic Review, 84 (1), 190-209.

[3] Argote, L., P. Ingram, J. M. Levine, and R. L. Moreland (2000): “Knowledge Transfer in Organizations: Learning from the Experience of Others,.Organizational Behavior and Human Decision Processes, 82 (1), 1-8.

[4] Arora, A. (1995): “Licensing Tacit Knowledge: Intellectual Property Rights and the Market for Know-How,.Economics of Innovation y New Technology, 4, 41-59

[5] Arora, A., A. Fosfuri, y A. Gambardella (2001): “Market for Technology: The Economics of Innovation and Corporate Strategy".TheMITPress.

[6] Arora, A., y A. Gambardella (1994a): “The changing technology of technological change: general and abstract knowledge and the division of innovative labour,Research Policy,23 (5), 523-532.

[7] Arrow, K. (1962): “Economic Welfare and the Allocation of Resources for Invention,‘ïn Rate and Direction of Inventive Activity. NBER y Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.

[8] Bresnahan, T., y M. Trajtenberg (1995): “General Purpose Technologies: “Engines of Growth¿,"Journal of Econometrics, 65 (1), 83-108.

[9] Cassiman, B., y R. Veugelers (2006): “In Search of Complementarity in the Innovation Strategy: Internal RyD and External Knowledge Acquisition,"Management Science,52 (1), 68-82.

[10] Cohen, W. (1992): “Empirical studies of innovative activity and performance,"Working Paper, Carnegie Mellon University.

[11] Cohen, W. M., and D. A. Levinthal (1990): “Absorptive Capacity: A New Perspective on Learning and Innovation,.Administrative Science Quarterly, 35 (1), 128-152

[12] Gans, J., D. Hsu, y S. Stern (2002): “When Does Start-Up Innovation Spur the Gale of Creative Destruction?,RAND Journal of Economics, 33, 571-586.

[13] Gans, J., y S. Stern (2003): “The Product Market and the Market for “Ideas": Commercialization Strategies for Technology Entrepreneurs,Research Policy, 32, 333-350.

[14] Gans, J. S., D. H. Hsu, y S. Stern (2008): “The Impact of Uncertain Intellectual Property Rights on the Market for Ideas: Evidence from Patent Grant Delays,"Management Science, 54, 982-997.

[15] Hall,B.H.,A.B.Jaffe, y M. Trajtenberg (2001): “The NBER Patent Citation Data File: Lessons, Insights and Methodological Tools,"NBER Working Paper 8498.

[16] Hellmann, T. F., y E. C. Perotti (2011): “The Circulation of Ideas in Firms and Markets,"NBER Working Paper 16943.

[17] Henderson, R., y I. Cockburn (1996): “Scale, Scope, and Spillovers: The Determinants of Research Productivity in Drug Discovery,RAND Journal of Economics, 27 (1), 32-59.

[18] Holmstrom, B. (1989): “Agency Costs and Innovation,"Journal of Economic Behavior and Organization, 12 (3), 305-327.

[19] Lanjouw, J. O., y M. Schankerman (2004): “Protecting intellectual property rights: are small firms handicapped?,"The Journal of Law and Economics, 47 (1), 45-74.

[20] erner, J., and R. P. Merges (1998): “The Control of Technology Alliances: An Empirical Analysis of the Biotechnology Industry,"Journal of Industrial Economics, 46 (2), 125-156.

[21] Nelson, R. R. (1959): “The Simple Economics of Basic Scientific Research,"Journal of Political Economy, 67, 297-306.

[22] Romer, P. (1990): “Endogenous Technological Change,"Journal of Political Economy,98(5), 71-102.

[23] Rosenberg, N. (1996): “Uncertainty and Technological Change,ïn TheMosaicofEconomic Growth, ed. by R. Landau, T. Taylor, and G.Wright.StanfordUniversityPress.

[24] Serrano, C. J. (2006): “The Market for Intellectual Property: Evidence from the Transfer of Patents,"Ph.D. thesis, University of Minnesota.

[25] Teece, D. J. (1986): “Profiting from technological innovation: Implications for integration, collaboration, licensing and public policy,Research Policy, 15, 285-305.

[26] Troy, I., and R. Werle (2008): “Uncertainty and the Market for Patents,"MPIfG Working Paper 08/2.

Apéndice A

Deduzcamos la función de valor para las firmas pequeñas primero. Tomemos un intervalo de tiempo dt, las probabilidades de recibir una innovación interna o externa son $T_{s,\mathrm{int}}\mathrm{d}t$ y $T_{s,\mathrm{ext}}\mathrm{d}t$, además la probabilidad de que la innovación que posee la firma se deprecie es $r_{\mathrm{d}}\mathrm{d}t$. Por último, el factor de descuento lo definimos como $\frac{1}{1+r\mathrm{d}t}$. Por simplicidad asumiremos $ps = pb = p$ y $V_s = V$. Por lo tanto, nuestra función de valor será igual a el beneficio que obtiene la firma hoy de tener una patente k más todas las combinaciones por las cuales podemos recibir una innovación mañana:

$$
\begin{aligned}
V(k) = \pi(k)\mathrm{d}t + \frac{1}{1+\delta\mathrm{d}t}\Big\{&(1-T_{s,int}\mathrm{d}t)(1-T_{s,\mathrm{ext}}\mathrm{d}t)(1-r_{\mathrm{d}}\mathrm{d}t)V(k) \\
&+T_{s,\mathrm{int}}\mathrm{d}t(1-T_{s,\mathrm{ext}}\mathrm{d}t)(1-r_{\mathrm{d}}\mathrm{d}t)\left[\sum_{l>k}p(l)V(l)+\sum_{l\leq k}p(l)V(k)\right] \\
&+T_{s,ext}\mathrm{d}t(1-T_{s,int}\mathrm{d}t)(1-r_{\mathrm{d}}\mathrm{d}t)\left[\sum_{l>k}p(l)\,\mathrm{máx}\{V(l)-c,V(k)\}\right. \\
&\left.+\sum_{l\leq k}p(l)V(k)\right]+(1-T_{s,int}\mathrm{d}t)(1-T_{s,\mathrm{ext}}\mathrm{d}t)r_{\mathrm{d}}V(k-1)+T_{s,int}\ \mathrm{d}t \\
&(1-T_{s,ext}\ \mathrm{d}t)\ r_{\mathrm{d}}\mathrm{d}t\left[\sum_{l>k}p(l)V(l)+\sum_{l\leq k}p(l)V(k)\right]V(k-1)+\ldots\Big\}
\end{aligned}
$$

Reescribiendo tenemos:

$$\delta V(k) = (1 + r\mathrm{d}t)\pi(k) - T_{s,\mathrm{int}}V(k) - T_{s,ext}V(k) - r_{\mathrm{d}}V(k) + T_{s,int}T_{s,ext}\mathrm{d}tV(k)$$

$$+\ T_{s,int}r_{\mathrm{d}}\mathrm{d}tV(k)\ +\ T_{s,ext}r_{\mathrm{d}}\mathrm{d}tV(k) - T_{s,int}T_{s,ext}r_{\mathrm{d}}\mathrm{d}t^2V(k)\ +\ T_{s,int}$$

$$(1 - T_{s,ext}\mathrm{d}t)(1 - r_{\mathrm{d}}\mathrm{d}t)\sum_{l>k} p(l)V(l)\ +\ T_{s,ext}(1 - T_{s,int}\mathrm{d}t)(1 - r_{\mathrm{d}}\mathrm{d}t)$$

$$\sum_{l>k} p(l)\,\text{máx}\{V(l) - c, V(k)\}\ +\ (1 - T_{s,\mathrm{int}}\mathrm{d}t)(1 - T_{s,ext}\mathrm{d}t)r_{\mathrm{d}}V(k-1)$$

$$+T_{s,\mathrm{int}}(1 - T_{s,ext}\mathrm{d}t)(1 - r_{\mathrm{d}}\mathrm{d}t)\sum_{l\leq k} p(l)V(k) + T_{s,ext}(1 - T_{s,int}\mathrm{d}t)(1 - r_{\mathrm{d}}\mathrm{d}t)$$

$$\sum_{l\leq k} p(l)V(k) + T_{s,int}\ \mathrm{d}t(1 - T_{s,ext}\ \mathrm{d}t)\ r_{\mathrm{d}}\mathrm{d}t\left[\sum_{l>k} p(l)V(l) + \sum_{l\leq k} p(l)V(k)\right] V(k-1) + ...\Bigg\}$$

Y tomando $\text{lím}_{\mathrm{d}t\to 0}$ nos queda:

$$\delta V(k) = \pi(k)\ +\ T_{s,int}\sum_{l>k} p(l)V(l)\ +\ T_{s,ext}\sum_{l>k} p(l)\,\text{máx}\{V(l) - c, V(k)\}\ +\ r_{\mathrm{d}}V(k-1)$$
$$+T_{s,int}\sum_{l\leq k} p(l)V(k) + T_{s,ext}\sum_{l\leq k} p(l)V(k)$$
$$-T_{s,\mathrm{int}}V(k) - T_{s,\mathrm{ext}}V(k) - r_{\mathrm{d}}V(k)$$

Por tanto las función de valor para las firmas pequeñas queda definida como:

$$\begin{aligned}\delta V(k) &= \pi(k) + T_{s,\mathrm{int}}\sum_{l>k} ps(l)[V(l) - V(k)] \\ &+T_{s,exts}\sum_{l>k} ps(l)\,\text{máx}[V(l) - V(k) - c, 0] \\ &+T_{s,extb}\sum_{l>k} pb(l)\,\text{máx}[V(l) - V(k) - c, 0] - r_{\mathrm{d}}(V(k) - V(k-1))\end{aligned}$$

y para las firmas grandes:

$$
\begin{aligned}
\delta V(k_1,k_2) \quad = \quad & \pi(k_1)+\pi(k_2) \\
& +T_{b,\text{int}}\left[\sum_{k_1<l<k_2} pb(l)[V(l,k_2)-V(k_1,k_2)]+\sum_{l\geq k_2} pb(l)[V(k_2,l)-V(k_1,k_2)]\right] \\
& +T_{b,\text{exts}}\left[\sum_{k_1<l<k_2} ps(l)\,\text{máx}[V(l,k_2)-V(k_1,k_2)-c,0]\;+\right. \\
& \qquad \left.\sum_{l\geq k_2} ps(l)\,\text{máx}[V(k_2,l)-V(k_1,k_2)-c,0]\right] \\
& +T_{b,\text{extb}}\left[\sum_{k_1<l<k_2} pb(l)\,\text{máx}[V(l,k_2)-V(k_1,k_2)-c,0]\;+\right. \\
& \qquad \left.\sum_{l\geq k_2} pb(l)\,\text{máx}[V(k_2,l)-V(k_1,k_2)-c,0]\right] \\
& -r_{\text{d}}(V(k_1,k_2)-V(k_1-1,k_2))-r_{\text{d}}(V(k_1,k_2)-V(k_1,k_2-1))
\end{aligned}
$$

Apéndice B

Programa Principal

```
clear;
clc;
b = 1     ; % Discount Factor
k = 5     ; % High Quality (\bar{k})
K = k*(k+1)/2 ; % Total quality pairs (k_1,k_2)
c = 0.8; % Transaction cost
ri  = 0.2 ; % Rate of creation of an innovation
ris = 0.03 ; % Rate of creation of an innovation (Small)
rib = 0.03 ; % Rate of creation of an innovation (Big)
rd  = 0.2 ; % Depreciation rate of patents
Ns = 4    ; % Total of small firms
Nb = 2    ; % Total of big firms
us = 0.5  ; % Probability that a patent generated by a small firm will be useful to the sa
ub = 0.5  ; % Probability that a patent generated by a big firm will be useful to the same
ls = 0.1 ;  % Probability that a patent generated by a small firm will not be useful to th
lb = 0.1 ;  % Probability that a patent generated by a big firm will not be useful to the 
US = @(x) x; % Utility that generates a small firm patent quality k
UB = @(x) x; % Utility that generates a big firm patent quality k
pl = zeros(1,k); % Probability of quality patents generate k
pl(:) = 1/k;
ps = zeros(1,k); % Probability that a small firm quality patents generate k
pb = zeros(1,k); % Probability that a big firm quality patents generate k
%OUTPUTS
v = 1:k         ; % Grid small firms
vv= zeros(K,2)  ; % Grid grip firms
VS = zeros(k,2) ; % Small firms value function
VB = zeros(K,2) ; % Big firms value function
AS = zeros(k,k) ; % Matrix acceptance of small firms
AB = zeros(K,k) ; % Matrix acceptance of big firms
MTS =zeros(k,k) ; % Markov transition matrix of small firms
MTB =zeros(K,K) ; % Markov transition matrix of big firms
SSS =zeros(k,1) ; % Steady-state small firms
SSB =zeros(K,1) ; % Steady-state big firms
```

```
%Options
NoTargetting   = 1 ;
NoTechlinkages = 1 ;
Benchmark      = 1 ;
if NoTargetting ==1
    us = 1/(Ns+2*Nb);
    ub = 2/(Ns+2*Nb);
end
if NoTechlinkages ==1
    ls = (Ns-1)/(Ns-1+2*Nb);
    lb = (2*Nb-2)/(Ns+2*Nb-2);
end
if Benchmark == 1
    ris = ri;
    rib = ri;
    ps = pl;
    pb = pl;
end
% Probabilities
Tsi = ris*us; % Rate at which a small firm receives a internal innovation
Tbi = rib*ub; % Rate at which a big firm receives a internal innovation
Tse = ris*(1-us)*ls+rib*2*Nb*(1-ub)*(1-lb)*1/Ns; % Rate at which a small firm receives
Tbe = ris*Ns*(1-us)*(1-ls)*1/Nb + rib*(1-ub)*lb*2; %Rate at which a big firm receives
% Spacial notation
Tses = ris*(1-us)*ls; % Rate at which a small firm receives a external innovation from
Tseb = rib*2*Nb*(1-ub)*(1-lb)*1/Ns; % Rate at which a small firm receives a external i
Tbes = ris*Ns*(1-us)*(1-ls)*1/Nb; % Rate at which a big firm receives a external innov
Tbeb = rib*(1-ub)*lb*2; % Rate at which a big firm receives a external innovation from
contractante = 0;

% Small firms value function
VS(:,2)=US(v'); % In the last period of the function value is equal to the quality of
j = 3; % Periods
aux = zeros(k,1);
while (norm(VS(:,j-1)-VS(:,j-2))>0.001)
    for i=1:k
       R = valuesmall(VS,ps,pb,i,k,j,c); % Calculates the addends of the value functio
       AS(i,:) = R(4:end); % Matrix acceptance
       if i==1 % If the quality is equal to 1 not depreciated
       aux(i) = 1/b*(US(i)+Tsi*R(1)+Tses*R(2)+Tseb*R(3));
       else
       aux(i) = 1/b*(US(i)+Tsi*R(1)+Tses*R(2)+Tseb*R(3)-rd*(VS(i,j-1)-VS(i-1,j-1)));
       end
    end
  VS = [VS,aux];
  j=j+1;
  if j>=1000;
```

```
      break;
  end
  if norm(VS(:,size(VS,2)))>k^2
      contractante = 1;
      break;
  end
end
VS = VS(:,2:end);
% If the Value Function method does not converge spend at this step
if j>=1000 || contractante == 1
    %disp('PUNTO FIJO SMALL')
   VS = puntofijosmall(VS(:,1),k,b,rd,c,ps,Tsi,Tse);
   AS = asmall(ps,VS',k,c);
end
% Big firms value function
for i=1:k
    for j=i:k
        vv(i/2*(2*k+3-i)-k+j-i,1) = i;
        vv(i/2*(2*k+3-i)-k+j-i,2) = j;
    end
end
% In the last period of the function value is equal to the utility \pi(k_1,k_2)
VB(:,3) = UB(vv(:,1))+UB(vv(:,2));
VB(:,1) = vv(:,1);
VB(:,2) = vv(:,2);
j = 4; % Periods
AUX = zeros(K,1);
contractante = 0;
while (norm(VB(:,j-1)-VB(:,j-2))>0.001)
    for i=1:K
       aa = vv(i,1); %k_1
       bb = vv(i,2); %k_2
       R  = valuebig(VB,vv,ps,pb,i,k,K,j,c); % Calculates the addends of the value functio
       AB(i,:) = R(9:end); % Matrix acceptance
       AUX(i)= 1/b*(UB(aa)+UB(bb)+Tbi*(R(1)+R(2))+Tbes*(R(3)+R(5))+Tbeb*(R(4)+R(6))-rd*(R(
    end
    VB = [VB,AUX];
    j=j+1;
    if j>=1000;
      break;
    end
  if norm(VB(:,size(VB,2)))>K^2
      contractante = 1;
      break;
  end
end
% If the Value Function method does not converge spend at this step
```

```
if j>=1000 || contractante == 1
    disp('PUNTO FIJO BIG')
   VB = puntofijobig(VB(:,3),vv,k,K,b,rd,c,pb,Tsi,Tse);
   AB = abig(vv,pb,VB,k,K,c);
end
AB=[vv,AB];
clear  AUX aux aa bb R  i ii j s
% Transition matrix
    % Small firms
MTS = matrixtransitionsmall(AS,rd,ps,pb,Tses,Tseb,Tsi,k); %Matriz de Transici\'on de l
SSS = Markov(MTS); % Steady-state small firms
    % Big Firms
MTB = matrixtransitionbig(AB,vv,rd,ps,pb,Tbi,Tbes,Tbeb,k,K); %Matriz de Transici\'on d
SSB = Markov(MTB); % Steady-state big firms
% Probability Distribution
PD = prob(SSB,SSS,k,K,vv); % Summary table of the stationary states
% Table showing what happens to the patents generated by the firms of different sizes
TABLA = zeros(2*k+2,6);
ASint = zeros(k,k);
ABint = zeros(K,k);
    % Internal acceptance matrix of small firms
for i= 1:k
    for j=i+1:k
        ASint(i,j)=1;
    end
end
% Internal acceptance matrix of big firms
    for i=1:K
        for j=1:k
            if vv(i,1)<j || vv(i,2)<j
                ABint(i,j)=1;
            end
        end
    end
    AB=AB(:,3:end);
    for s=1:k
        % Small firms
        TABLA(s,1) = s; % Quality
        TABLA(s,2) = us*sum(ASint(:,s).*SSS(:)); % Percentage of patents that remain w
        TABLA(s,3) = (1-us)*ls*sum(AS(:,s).*SSS(:)); % Percentage of patents that are
        TABLA(s,4) = TABLA(s,2)+TABLA(s,3); % Percentage of patents that are used by
        TABLA(s,5) = (1-us)*(1-ls)*sum(AB(:,s).*SSB(:));  % Percentage of patents that
        TABLA(s,6) = 1-sum(TABLA(s,4:5)); % Percentage of patents that are disposed
        % Bif firms
        TABLA(k+s+1,1) = s; % Quality
        TABLA(k+s+1,2) = ub*sum(ABint(:,s).*SSB(:)); % Percentage of patents that rema
        TABLA(k+s+1,3) = (1-ub)*lb*sum(AB(:,s).*SSB(:)); % Percentage of patents that
```

```
        TABLA(k+s+1,4) = (1-ub)*(1-lb)*sum(AS(:,s).*SSS(:));  % Percentage of patents that
        TABLA(k+s+1,5) = TABLA(k+s+1,2)+TABLA(k+s+1,3); % Percentage of patents that are us
        TABLA(k+s+1,6) = 1-sum(TABLA(k+s+1,4:5)); % Percentage of patents that are disposed
    end
         % Aggregate
        for s=2:5
        TABLA(k+1,s) = sum(TABLA(1:k,s).*PD(1:k,1));
        TABLA(2*k+2,s) = sum(TABLA(k+2:2*k+1,s).*PD(1:k,2));
        end
  % Average quality
        QAS = qualitysmall(k,ps,pb,AS,SSS,us,ub,ls,lb,Ns);
        QAB = qualitybig(vv,k,K,ps,pb,AB,SSB,us,ub,ls,lb,Nb);
   % Effective rates of purchase
        ERS = efectiveratesmall(Tses,Tseb,k,ps,pb,AS,SSS);
        ERB = efectiveratebig(Tbes,Tbeb,vv,K,ps,pb,AB,SSB);
   % Quality willing to buy
        WSS = wsmall(k,AS,SSS);
        WSB = wbig(k,K,AB,vv,SSB);
   % Results
      imprimir(TABLA,v,SSS,vv,SSB,PD,WSS,WSB,ERS,ERB,Ns,Nb,QAS,QAB,b,us,k,K,ub,ls,lb,ris,ri

 % EXTENSION
    %Inputs
    a = 0.5;
    f = 0;
    N = Ns+2*Nb;
    Nse = Ns+2*Nb;
    Nbe = 0;
    ls = (Nse-1)/(N-1);
    lb = (2*Nse-2)/(N-2);
    E=zeros(4,N/2+1);
for s=1:N/2+1
    T = rates(ri,Nse,Nbe,NoTechlinkages,N,us,ub,ls,lb);
    ls = T(1);
    lb = T(2);
    Tsi = T(3);
    Tbi = T(4);
    Tses = T(5);
    Tseb = T(6);
    Tse  = T(7);
    Tbes = T(8);
    Tbeb = T(9);
    Tbe  = T(10);
    USE = zeros(k,3);
    UBE = zeros(K,3);
    USE(:,3) = US(v');
    UBE(:,3) = UB(vv(:,1))+UB(vv(:,2));
```

```
  UBE(:,1) = vv(:,1);
  UBE(:,2) = vv(:,2);
  ASE = zeros(k,k);
  ABE = zeros(K,k);
  RS = zeros(k,1);
  RB = zeros(K,1);
  ESI  =@(x,y,z,t) 1/b*(Tsi*x+Tses*y+Tseb*z-rd*t);
  ESII =@(x,y,z)   1/b*(ri*1/N*(1-us)*(1-a)*(ls*x+(1-ls)*(y+z))*ones(k,1));
  EBI  =@(x,y,z,t,r,s,xx,yy) 1/b*(Tbi*(x+y)+Tbes*(z+t)+Tbeb*(r+s)-rd*(xx+yy));
  EBII  =@(x,y,z)  1/b*(ri*2/N*(1-ub)*(1-a)*((1-lb)*x+lb*(y+z))*ones(K,1));
% Utility of quality innovation k  (Small Firms)
 US = @(x) x/(Nse+1)^2;
% Utility of quality innovation k (Big firms)
 UB = @(x) x/(Nbe+1)^2;
  extensionsmall = 0;
  extensionbig = 0;
  AUXES=[zeros(k,1),v',ones(k,1)];
  j=3;
  while(norm(AUXES(:,end-1)-AUXES(:,end-2))>0.001)
      for i=1:k
          R = extensionvfs(i,k,j,AUXES,ps,a,c,pb,rd); % Calculates the addends of th
          ASE(i,:)=R(5:end);
          AUXES(i,end)=1/b*US(i)+ESI(R(1),R(2),R(3),R(4))+RS(i);
      end
      AUXES=[AUXES,zeros(k,1)];
      j=j+1;
  end
  if extensionsmall == 0
          MTSE = matrixtransitionsmall(ASE,rd,ps,pb,Tses,Tseb,Tsi,k);
          SSSE = Markov(MTSE);
          extensionsmall = 1;
  end
  AUXEB=[vv(:,1),vv(:,2),vv(:,1)+vv(:,2),zeros(K,1)];
  jj=4;
  while(norm(AUXEB(:,end-1)-AUXEB(:,end-2))>0.001)
      for ii=1:K
          R = extensionvfb(ii,k,K,jj,AUXEB,ps,a,c,pb); % Calculates the addends of t
          ABE(ii,:)   = R(9:end);
          AUXEB(ii,end) = 1/b*(UB(vv(ii,1))+UB(vv(ii,2)))+EBI(R(1),R(2),R(3),R(4),R(
      end
      AUXEB=[AUXEB,zeros(K,1)];
      jj=jj+1;
  end
  if extensionbig == 0
      ABE  = [vv,ABE];
      MTBE = matrixtransitionbig(ABE,vv,rd,ps,pb,Tbi,Tbes,Tbeb,k,K);
      SSBE = Markov(MTBE);
```

```
        ABE  = ABE(:,3:end);
        extensionbig = 1;
    end
   if j>=1000;
      break;
   end
  R = extensionee(k,K,USE,UBE,ps,c,pb,SSSE,SSBE);
    if extensionsmall == 1
        RS = ESII(R(1),R(2),R(3));
        USE = [USE,AUXES(:,end-1)+RS];
    end
    if extensionbig == 1
        RB = EBII(R(4),R(5),R(6));
        UBE = [UBE,AUXEB(:,end-1)+RB];
    end
AUXES = zeros(k,1);
AUXEB = zeros(K,1);
j  = size(USE,2);
jj = size(UBE,2);
while ((norm(USE(:,end-1)-USE(:,end-2))>0.001) || (norm(UBE(:,end-1)-UBE(:,end-2))>0.001))
    for i=1:k
            R = extensionvfs(i,k,j,USE,ps,a,c,pb,rd); % Calculates the addends of the value
            ASE(i,:)=R(5:end);
            AUXES(i)=1/b*US(i)+ESI(R(1),R(2),R(3),R(4));
    end
    for ii=1:K
            R = extensionvfb(ii,k,K,jj,UBE,ps,a,c,pb); % Calculates the addends of the valu
            ABE(ii,:)=R(9:end);
            AUXEB(ii)= 1/b*(UB(vv(ii,1))+UB(vv(ii,2)))+EBI(R(1),R(2),R(3),R(4),R(5),R(6),R(
    end
    R = extensionee(k,K,USE,UBE,ps,c,pb,SSSE,SSBE);
    RS = ESII(R(1),R(2),R(3));
    RB = EBII(R(4),R(5),R(6));
    if norm(USE(:,end-1)-USE(:,end-2))>0.001
    USE = [USE,AUXES(:)+RS];
    else
    USE = [USE,AUXES(:)];
    end
    if norm(UBE(:,end-1)-UBE(:,end-2))>0.001
    UBE = [UBE,AUXEB(:)+RB];
    else
    UBE = [UBE,AUXEB(:)];
    end
 j=j+1;
 jj=jj+1;
end
E(1,s)=Nse;
```

```
E(2,s)=Nbe;
E(3,s)=SSBE(:)'*UBE(:,end)-f;
E(4,s)=2*(SSSE(:)'*USE(:,end));
if s~=N/2+1
Nse=Nse-2;
Nbe=Nbe+1;
end
end
clear D1 D2 AUX aux aa bb R S S1 SS1 SS2 S2 S3S S3B S4S S4B SS i ii j R s
```

Funciones

Valuesmall

```
function R=valuesmall(VS,ps,pb,i,k,j,c)
R = zeros(1,3);
%S  = 0;
%SS1 = 0;
%SS2 = 0;
 AS = zeros(1,k);

 if i~=k
   for s=i+1:k
       R(1) = R(1) + ps(s)*(VS(s,j-1)-VS(i,j-1));%\sum_{l>k} ps(l) [V_s(l)-V_s(k)]
       [AA,BB] = max([VS(s,j-1)-VS(i,j-1)-c,0]);
       R(2) = R(2) + ps(s)*AA;%\sum_{l>k} ps(l) \max[V_s(l)-V_s(k)-c,0]
       R(3) = R(3) + pb(s)*AA;%\sum_{l>k} pb(l) \max[V_s(l)-V_s(k)-c,0]
       if BB == 1
           AS(1,s)=1;
       end

   end
 end
R=[R,AS];
```

Puntofijosmall

```
function R=puntofijosmall(A,k,b,rd,c,p,Tsi,Tse)
r=b;
%A=A';
y = A./r;
sol = fsolve(@(x) myfun(x,k,p,r,rd,c,Tsi,Tse,A),y);
R=sol;
```

```
function F = myfun(x,k,p,r,rd,c,Tsi,Tse,A)
IN = @(x) [sumainternasmall(p,x,k)];
EX = @(x) [sumaexternasmall(p,x,k,c)];
D  = @(x) [depsmall(x,k)];
F = @(x) A+Tsi*IN(x)+Tse*EX(x)+rd*D(x)-rd*x-r*x;
F = F(x);
```

Asmall

```
function R=asmall(p,x,k,c)
AS = zeros(k,k);
for i=1:k
    for j=i+1:k
        [A,B]=max([x(j)-x(i)-c,0]);
        if B==1
            AS(i,j)=1;
        end
    end
end
R=AS;
```

Valuebig

```
function R=valuebig(VB,vv,ps,pb,i,k,K,j,c)
AB = zeros(1,k);
R=zeros(1,8);
        aa=vv(i,1);
        bb=vv(i,2);
        C=coef(aa,bb,vv,k,K);
        y=size(C);

        for g=1:y(2)
            R(2) = R(2)+pb(vv(C(g),2))*(VB(C(g),j-1)-VB(i,j-1));%\sum_{l>=k_2} pb(l) [V_s(l
            [AA,BB] = max([VB(C(1,g),j-1)-VB(i,j-1)-c,0]);
            R(5) = R(5)+ ps(vv(C(g),2))*AA;%\sum_{l>=k_2} ps(l) \max[V_s(l)-V_s(k)-c,0]
            R(6) = R(6)+ pb(vv(C(g),2))*AA;%\sum_{l>=k_2} pb(l) \max[V_s(l)-V_s(k)-c,0]
            if BB==1
            AB(1,vv(C(g),2))=1;
            end
        end

        CC=coeff(aa,bb,vv,k,K);
```

```
        y=size(CC);
        for g=1:y(2)
            R(1) = R(1) + pb(vv(CC(1,g),1))*(VB(CC(1,g),j-1)-VB(i,j-1));%\sum_{k_1<l<k
            [AA,BB] = max([VB(CC(1,g),j-1)-VB(i,j-1)-c,0]);
            R(3) = R(3) + ps(vv(CC(1,g),2))*AA;%\sum_{k_1<l<k_2} ps(l) \max[V_s(l)-V_s
            R(4) = R(4) + pb(vv(CC(1,g),2))*AA;%\sum_{k_1<l<k_2} pb(l) \max[V_s(l)-V_s
            if BB==1
            AB(1,vv(CC(1,g),1))=1;
            end
        end

        if aa==1;
            if bb==1
                R(7) = 0;% Caso en que se deprecia k_1
                R(8) = 0;% Caso en que se deprecia k_2
            else
                R(7) = 0;% Caso en que se deprecia k_1
                R(8) = VB(i,j-1)-VB(i-1,j-1);% Caso en que se deprecia k_2

            end
        else
            D = depreciacion(aa,bb,vv,k,K);
            R(7) = VB(i,j-1)-VB(D(1),j-1); % Caso en que se deprecia k_1
            R(8) = VB(i,j-1)-VB(D(2),j-1); % Caso en que se deprecia k_2
        end
R = [R,AB];
```

Coef

```
function C=coef(a,b,V,k,K)
s=[];
if a < b
for g=b:k
    for i=1:K
        if V(i,1)==b & V(i,2)==g
        s = [s,i];
        end
    end
end
else
    for g=b+1:k
    for i=1:K
        if V(i,1)==b & V(i,2)==g
        s = [s,i];
        end
```

```
    end
    end
end
C=s;
```

Coeff

```
function C=coeff(a,b,V,k,K)
s=[];
for g=a+1:b-1
    for i=1:K
        if V(i,1)==g & V(i,2)==b
            s = [s,i];
        end
    end
end
C=s;
```

Depreciacion

```
function F=depreciacion(a,b,V,k,K)
F=[];
for i=1:K
    if V(i,1)==a-1 && V(i,2)==b
        F=[F,i];
    end
    if V(i,1)==a && V(i,2)==b-1
        F=[F,i];
    elseif V(i,1)==b-1 && V(i,2)==a
        F=[F,i];
    end
end
```

Puntofijobig

```
function R=puntofijobig(A,vv,k,K,b,rd,c,p,Tsi,Tse)
r=b;
%A=A';
y = A./r;
sol = fsolve(@(x) myfun(x,vv,k,K,p,r,rd,c,Tsi,Tse,A),y);
R=sol;
```

```
function F = myfun(x,vv,k,K,p,r,rd,c,Tsi,Tse,A)
IN = @(x) [sumainternabig(vv,p,x,k,K)];
EX = @(x) [sumaexternabig(vv,p,x,k,K,c)];
D  = @(x) [depbig(vv,x,k,K)];

F = @(x) A+Tsi*IN(x)+Tse*EX(x)+rd*D(x)-rd*x-r*x;
F = F(x);
```

Abig

```
function R=abig(vv,pb,VB,k,K,c)
AB=zeros(K,k);
for i=1:K
    for j=i:K
        if vv(i,1)<vv(j,1) & vv(i,2)==vv(j,2)

         [A,B]=max([VB(j)-VB(i)-c,0]);
         if B==1 | (VB(j)-VB(i)-c==0)
             AB(i,vv(j,1))=1;
         end
        end

        if vv(i,2)<vv(j,2) & vv(i,2)==vv(j,1)

         [A,B]=max([VB(j)-VB(i)-c,0]);
         if B==1 | (VB(j)-VB(i)-c==0)
             AB(i,vv(j,2))=1;
         end
        end
    end
end
R=AB;
```

Matrixtransitionsmall

```
function R=matrixtransitionsmall(AS,rd,ps,pb,Tses,Tseb,Tsi,k)
DM=zeros(k,k);

% Depreciation
for i=2:k
    DM(i,i-1)= rd;
end
```

```
Ia=zeros(k,k);
Ib=zeros(k,k);

% Internal innovation
for i=1:k-1
    for j=i+1:k
    Ia(i,j) = Tsi*ps(j);
    end
end

% External innovation
for i=1:k-1
    for j=i+1:k
    Ib(i,j) = Tses*ps(j)*AS(i,j)+Tseb*pb(j)*AS(i,j);
    end
end
IM=Ia+Ib;
R = DM+IM;

% Transition
for i=1:k
    a = sum(R(i,:));
    R(i,i)=1-a;
end
```

Markov

```
function R=Markov(MM)
global M
M=MM;
n=size(M);
x0 = zeros(n(1),1);
x = fsolve(@myfun,x0);
R = x; %Here I store the probability of being in a state.

function F = myfun(x)
global M
F = [M'*x-x;sum(x)-1];
```

Matrixtransitionbig

```
function R=matrixtransitionbig(AB,vv,rd,ps,pb,Tbi,Tbes,Tbeb,k,K)
AB=AB(:,3:end);
```

```
n=size(AB);
AUX=zeros(n(1)+2);
AUX(3:end,1:2)=vv;
AUX(1:2,3:end)=vv';

for i=1:K
    for j=1:k
        if AB(i,j)==1
           if j >= vv(i,2)
           for r=3:n(1)+2
                if AUX(1,r)==vv(i,2) & AUX(2,r)== j
                   AUX(i+2,r)=1;
                end
           end
           else
              for r=3:n(1)+2
                if AUX(1,r)==j & AUX(2,r)==vv(i,2)
                   AUX(i+2,r)=1;
                end
           end
        end
    end
    end
end
AB=AUX(3:n(1)+2,3:n(1)+2);
DM=zeros(K,K);

for i=2:K
    if vv(i,1)==1
    DM(i,i-1)= rd;
    else
        for j=1:K
            if (vv(i,1)-1==vv(j,1) & vv(i,2)==vv(j,2)) | (vv(i,1)==vv(j,1) & vv(i,2)-1
                if vv(i,1)==vv(i,2)
                DM(i,j)= 2*rd;
                else
                    DM(i,j)= rd;
                end
            end
        end
    end
end
Ia = zeros(K,K);
Ib = zeros(K,K);
% Internal innovation matrix
for i=3:K+2
    for j=i+1:K+2
```

```
    if (AUX(i,1)==AUX(1,j) & AUX(i,2)<AUX(2,j) & AUX(i,1)==AUX(i,2)) | (AUX(i,2)==AUX(1,j)
    Ia(i-2,j-2) = Tbi*pb(AUX(2,j));
    end
    if  (AUX(i,2)==AUX(2,j) & AUX(i,1)<AUX(1,j))
    Ia(i-2,j-2) = Tbi*pb(AUX(1,j));
    end
    end
end

% External innovation matrix
for i=3:K+2
    for j=i+1:K+2
    if (AUX(i,1)==AUX(1,j) & AUX(i,2)<AUX(2,j) & AUX(i,1)==AUX(i,2)) | (AUX(i,2)==AUX(1,j)
    Ib(i-2,j-2) = Tbeb*pb(AUX(2,j))*AB(i-2,j-2)+Tbes*ps(AUX(2,j))*AB(i-2,j-2);
    end
    if  (AUX(i,2)==AUX(2,j) & AUX(i,1)<AUX(1,j))
    Ib(i-2,j-2) = Tbeb*pb(AUX(1,j))*AB(i-2,j-2)+Tbes*ps(AUX(1,j))*AB(i-2,j-2);
    end
    end
end
IM = Ia+Ib;
R = DM+IM;
for i=1:K
    a = sum(R(i,:));
    R(i,i)=1-a;
end
```

Prob

```
function R=prob(SSB,SSS,k,K,vv)
R=zeros(k+1,2);
R(1:k,1)=SSS;
for i=1:K
    for j=1:k
        if vv(i,1)==j
            R(j,2) = R(j,2)+SSB(i)/2;
        end

        if vv(i,2)==j
            R(j,2) = R(j,2)+SSB(i)/2;
        end
    end
end
v = zeros(k,1);
for i=1:k
```

```
    v(i)=i;
end
% Average quality
R(k+1,1) = sum(v.*R(1:k,1));
R(k+1,2) = sum(v.*R(1:k,2));
```

Qualitysmall

```
function R=qualitysmall(k,ps,pb,AS,SSS,us,ub,ls,lb,Ns)
RS = zeros(k+1,5);
v=zeros(1,k);
for i=1:k
    v(i)=i;
end
% Filled the first column
for i=1:k
    RS(i,1)=i;
end
% Filled the second column
for i=1:k-1
    RS(i,2) = sum(ps(i+1:end).*v(i+1:end))/sum(ps(i+1:end));
end
% Filled the third column
for i=1:k-1
    for j=i+1:k
    RS(i,3) = RS(i,3)+(ps(j)*j*AS(i,j))/sum(ps(i+1:end));
    end
end
% Filled the fourth column
for i=1:k-1
    for j=i+1:k
    RS(i,4) = RS(i,4)+(pb(j)*j*AS(i,j))/sum(pb(i+1:end));
    end
end

% Horizontal aggregate
for i=2:5
    RS(k+1,i) = sum(RS(1:k-1,i).*SSS(1:k-1))/sum(SSS(1:k-1));
end

% Weights
LS = zeros(k-1,k-1);
for i=1:k-1
    LS(i,1) = us*sum(ps(i+1:end));
    LS(i,2) = (1-us)*ls/(Ns-1)*sum(ps(i+1:end).*AS(i,i+1:end));
```

```
    LS(i,3) = (1-ub)*(1-lb)/Ns*sum(pb(i+1:end).*AS(i,i+1:end));
end
% Vertical aggregate
for i=1:k-1
    RS(i,5)=sum(RS(i,2:k).*LS(i,1:k-1))/sum(LS(i,:));
end
RS(k+1,5) = sum(RS(1:k-1,5).*SSS(1:k-1))/sum(SSS(1:k-1));
R=RS;
```

Qualitybig

```
function R=qualitybig(vv,k,K,ps,pb,AB,SSB,us,ub,ls,lb,Nb)
RB = zeros(K+1,6);

% Filled the first and second column
RB(1:K,1) = vv(:,1);
RB(1:K,2) = vv(:,2);

% Filled the third column
for i=1:K-1
    a = min(vv(i,:));
    for j=a+1:k
    RB(i,3) = RB(i,3)+(pb(j)*j)/sum(pb(a+1:end));
    end
end
% Filled the fourth column
for i=1:K-1
    a = min(vv(i,:));
    for j=a+1:k
    RB(i,4) = RB(i,4)+(pb(j)*j*AB(i,j))/sum(pb(a+1:end).*AB(i,a+1:end));
    end
end
% Filled the fifth column
for i=1:K-1
    a = min(vv(i,:));
    for j=a+1:k
    RB(i,5) = RB(i,5)+(ps(j)*j*AB(i,j))/sum(ps(a+1:end).*AB(i,a+1:end));
    end
end

% Horizontal  aggregate
for i=3:6
    RB(K+1,i) = sum(RB(1:K-1,i).*SSB(1:K-1))/sum(SSB(1:K-1));
end
```

```
% Weights
LB = zeros(K-1,K-1);
for i=1:K-1
    a = min(vv(i,:));
    LB(i,1) = ub*sum(pb(a+1:end));
    LB(i,2) = (1-ub)*lb/(Nb-1)*sum(pb(a+1:end).*AB(i,a+1:end));
    LB(i,3) = (1-us)*(1-ls)/Nb*sum(ps(a+1:end).*AB(i,a+1:end));
end
% Vertical aggregate
for i=1:K-1
    RB(i,6)=sum(RB(i,3:5).*LB(i,1:3))/sum(LB(i,:));
end
RB(K+1,6) = sum(RB(1:K-1,6).*SSB(1:K-1))/sum(SSB(1:K-1));
R=RB;
```

Efectiveratesmall

```
function R=efectiveratesmall(Tses,Tseb,k,ps,pb,AS,SSS)
R = zeros(k+1,4);

% Filled the first column
for i=1:k
    R(i,1)=i;
end
% Filled others columns
for i=1:k-1
    R(i,2) = Tses*sum(ps(i+1:end).*AS(i,i+1:end));
    R(i,3) = Tseb*sum(pb(i+1:end).*AS(i,i+1:end));
    R(i,4) = R(i,2)+R(i,3);
end
for i=2:3
R(k+1,i) = sum(R(1:k,i).*SSS);
end
```

Efectiveratebig

```
function R=efectiveratebig(Tbes,Tbeb,vv,K,ps,pb,AB,SSB)
R = zeros(K+1,5);
R(1:K,1:2) =vv;
% Filled the last column
for i=1:K-1
    a = min(vv(i,:));
```

```
    R(i,3) = Tbes*sum(ps(a+1:end).*AB(i,a+1:end));
    R(i,4) = Tbeb*sum(pb(a+1:end).*AB(i,a+1:end));
    R(i,5) = R(i,3) +R (i,4);
end
for i=3:4
R(K+1,i) = sum(R(1:K,i).*SSB);
end
```

Wsmall

```
function R = wsmall(k,AS,SSS);
R=zeros(2,k-1);
for i=1:k-1
    R(1,i) = i+1;
end
R(2,1)=sum(AS(:,2).*SSS(:));
for i=2:k-1
    R(2,i)=sum(AS(:,i+1).*SSS(:))-sum(R(2,1:i-1));
end
```

Wbig

```
function R = wbig(k,K,AB,vv,SSB);
R=zeros(2,k-1);
for i=1:k-1
    R(1,i) = i+1;
end
R(2,1)=sum(AB(:,2).*SSB(:));
for i=2:k-1
    R(2,i)=sum(AB(:,i+1).*SSB(:))-sum(R(2,1:i-1));
end
```

Rates

```
function T = rates(ri,Nse,Nbe,NoTechlinkages,N,us,ub,lss,lbb)
T=zeros(1,10);
if NoTechlinkages==1
    if Nse~=0
    T(1,1)=(Nse-1)/(N-1);
    lss = (Nse-1)/(N-1);
    end
```

```
    if Nbe~=0
    T(1,2)=(2*Nbe-2)/(N-2);
    lbb = (2*Nbe-2)/(N-2);
    end
else
    T(1,1)=lss;
    T(1,2)=lbb;
end

T(1,3) = ri*us;

if Nse==0
    T(1,5) = 0;
else

T(1,5) = ri*(1-us)*lss;
end

T(1,4) = ri*ub;

if Nbe==0
T(1,9) = 0;
else
T(1,9) = ri*2*(1-ub)*lbb;
end

if Nse==0 || Nbe ==0
    T(1,6) = 0;
    T(1,8) = 0;
else
    T(1,6) = ri*2*Nbe*(1-ub)*(1-lbb)*1/Nse;
    T(1,8) = ri*Nse*(1-us)*(1-lss)*1/Nbe;
end
T(1,7) = T(1,5)+T(1,6);
T(1,10) = T(1,8)+T(1,9);
end
```

Extensionvfs

```
function R=extensionvfs(i,k,j,USE,ps,a,c,pb,rd)
R=zeros(1,4+k);

%(1) \sum_(l>k)ps(l)[U_s(l)-U_s(k)]
for g=i+1:k
    R(1,1) = R(1,1)+ps(g)*(USE(g,j-1)-USE(i,j-1));
```

```
end

%(2) \sum_(l>k)ps(l)[U_s(k)+\alpha \max {U_s(l)-U_s(k)-c,0}]
for g=i+1:k
   [MAX,I] = max([USE(g,j-1)-USE(i,j-1)-c,0]);
   R(1,2) = R(1,2) + ps(g)*(a*MAX);
   if I==1
       R(1,4+g)=1;
   end
end

%(3) \sum_(l>k)pb(l)[U_s(k)+\alpha \max {U_s(l)-U_s(k)-c,0}]
for g=i+1:k
   MAX = max([USE(g,j-1)-USE(i,j-1)-c,0]);
   R(1,3) = R(1,3) + pb(g)*(a*MAX);
end

%(4) r_d [U_s(k)-U_s(k-1)]
if i>1
    R(1,4)=(USE(i,j-1)-USE(i-1,j-1));
end
end
```

Extensionvfb

```
function R=extensionvfb(ii,k,K,j,UBE,ps,a,c,pb)
R=zeros(1,8+k);
y = UBE(ii,1);
z = UBE(ii,2);
%(8)-(10)-(12)

for g=y+1:z
    for h=1:K
        if (UBE(h,1)==g && UBE(h,2)==z)
            [MAX,I] = max([UBE(h,j-1)-UBE(ii,j-1)-c,0]);
            R(1,1) = R(1,1)+pb(g)*(UBE(h,j-1)-UBE(ii,j-1));
            R(1,3) = R(1,3)+ps(g)*(a*MAX);
            R(1,5) = R(1,5)+pb(g)*(a*MAX);
            if I==1
                R(1,8+g)=1;
            end
        end
    end
end
```

```
%(9)-(11)-(13)
for g=z+1:k
    for h=1:K
        if (UBE(h,1)==z && UBE(h,2)==g)
            [MAX,I] = max([UBE(h,j-1)-UBE(ii,j-1)-c,0]);
            R(1,2) = R(1,2)+pb(g)*(UBE(h,j-1)-UBE(ii,j-1));
            R(1,4) = R(1,4)+ps(g)*(a*MAX);
            R(1,6) = R(1,6)+pb(g)*(a*MAX);
            if I==1
                R(1,8+g)=1;
            end
        end
    end
end

%(17)-(18)
if z>1
    if y==1
        for h=1:K
            if (UBE(h,1)==y && UBE(h,2)==z-1)
                R(1,7) = 0;
                R(1,8) = UBE(ii,j-1)-UBE(h,j-1);
                break
            end
        end
    else
        for h=1:K
            if (UBE(h,1)==y-1 && UBE(h,2)==z)
                R(1,7)=UBE(ii,j-1)-UBE(h,j-1);
            end
            if (UBE(h,1)==z-1 && UBE(h,2)==y) || (UBE(h,1)==y && UBE(h,2)==z-1)
                R(1,8)=UBE(ii,j-1)-UBE(h,j-1);
            end
    end
end
end
```

Extensionee

```
function R=extensionee(k,K,USE,UBE,ps,c,pb,SSSE,SSBE)
R=zeros(1,6);

%(5) \sum_(k=1)^(\bar{k}) \sum_(l=k)^(\bar{k}) SS_(s,k)ps(l) \max
%{U_s(l)-U_s(k)-c,0}
%(14) \sum_(k=1)^(\bar{k}) \sum_(l=k)^(\bar{k}) SS_(s,k)ob(l) \max
```

```
%{U_s(l)-U_s(k)-c,0}

for l=1:k
    for g=l:k
        MAX = max([USE(g,end-1)-USE(l,end-1)-c,0]);
        R(1,1) = R(1,1)+SSSE(l)*ps(g)*MAX;
        R(1,4) = R(1,4)+SSSE(l)*pb(g)*MAX;
    end
end

%(6) \sum_{k_1,k_2} \sum_{l=k_1+1}^{k_2} SS_(b,k_1,k_2) ps(l) \max
%{U_b(l,k_2)-U_b(k_1,k_2)-c,0}
%(15) \sum_{k_1,k_2} \sum_{l=k_1+1}^{k_2} SS_(b,k_1,k_2) pb(l) \max
%{U_b(l,k_2)-U_b(k_1,k_2)-c,0}
for h=1:K
    y = UBE(h,1);
    z = UBE(h,2);
    for g=y+1:z
        for u=h+1:K
            if ((UBE(u,1)==g) && (UBE(u,2)==z))
            MAX = max([UBE(u,end-1)-UBE(h,end-1)-c,0]);
            R(1,2) = R(1,2)+SSBE(h)*ps(g)*MAX;
            R(1,5)= R(1,5)+SSBE(h)*pb(g)*MAX;
            end
        end
    end
end

%(7) \sum_{k_1,k_2} \sum_{l=k_2+1}^{\bar{k}} SS_(b,k_1,k_2) ps(l) \max
%{U_b(k_2,l)-U_b(k_1,k_2)-c,0}
%(16) \sum_{k_1,k_2} \sum_{l=k_2+1}^{\bar{k}} SS_(b,k_1,k_2) pb(l) \max
%{U_b(k_2,l)-U_b(k_1,k_2)-c,0}
for h=1:K
    y = UBE(h,1);
    z = UBE(h,2);
    for g=z+1:k
        for u=h+1:K
            if ((UBE(u,1)==z) && (UBE(u,2)==g))
            MAX = max([UBE(u,end-1)-UBE(h,end-1)-c,0]);
            R(1,3) = R(1,3)+SSBE(h)*ps(g)*MAX;
            R(1,6) = R(1,6)+SSBE(h)*pb(g)*MAX;
            end
        end
    end
end
end
```