



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

# CONTROL ÓPTIMO DE VEHÍCULOS ELÉCTRICOS CON ENERGÍA DISPONIBLE RESTRINGIDA EN RUTA PARCIALMENTE CONOCIDA

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA, MENCIÓN ELÉCTRICA  
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL  
ELECTRICISTA

ENRIQUE EDUARDO GUERRERO MERINO

PROFESOR GUÍA:  
DR. MANUEL ARMANDO DUARTE MERMOUD

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
DR. MARCOS EDUARDO ORCHARD CONCHA  
DR. HUMBERTO ANTONIO VERDEJO FREDES

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la Comisión Nacional  
de Investigación Científica y Tecnológica de Chile, CONICYT, y el  
Centro de Tecnología Minera Avanzada, AMTC.

SANTIAGO DE CHILE  
SEPTIEMBRE 2013

## **RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL:**

Título de Ingeniero Civil Electricista, y al

Grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería, mención Eléctrica

**POR:** Enrique Eduardo Guerrero Merino

**FECHA:** 04/09/2013

**PROFESOR GUÍA:** Manuel Armando Duarte Mermoud

### **CONTROL ÓPTIMO DE VEHÍCULOS ELÉCTRICOS CON ENERGÍA DISPONIBLE RESTRINGIDA EN RUTA PARCIALMENTE CONOCIDA**

Las carreras de autos solares se caracterizan principalmente por su gran limitación energética. En ellas, el vehículo debe recorrer grandes distancias durante extensos periodos sujeto a fuertes restricciones en la energía disponible de sus baterías, por lo que resulta primordial hacer una adecuada planificación en el manejo de la energía solar para obtener una buena posición al final de la carrera. El problema adquiere una complejidad matemática muy atractiva, si se considera que durante la carrera ocurren situaciones sujetas a incertidumbre y que pueden afectar el consumo de energía, tales como la presencia de fuertes vientos, nubosidad y problemas en el vehículo.

El presente trabajo presenta un algoritmo para el uso óptimo de la energía en un vehículo solar, tomando en cuenta la existencia de perturbaciones, pero sin modelarlas explícitamente. Se consideran conocidas las pendientes de la ruta, al poder ser obtenidas desde documentación cartográfica pertinente. El algoritmo distribuye temporalmente el consumo de energía del vehículo de manera de no agotar prematuramente las baterías, buscando llegar a la meta en el mínimo tiempo posible y basándose en un esquema de control óptimo en tiempo real. Se planifica primeramente la energía utilizada por el vehículo en cada día de competición y a continuación se aplica una discretización temporal más fina, de manera de detallar aún más dicho consumo durante el día actual de competición. Finalmente se aplica un algoritmo de control óptimo en tiempo continuo basado en un método pseudoespectral al segmento de discretización en que se está corriendo al momento de la planificación. El procedimiento completo se itera considerando las mediciones de la instrumentación del vehículo, para construir el vector de estado actualizado al momento de la realización de cada iteración, obteniéndose así un proceso realimentado que reacciona oportunamente frente a imprevistos. Hasta el momento no se reportan en la literatura aplicaciones del método pseudoespectral utilizado en vehículos solares. El presente trabajo tiene, entonces, la ventaja de considerar en el corto plazo la dinámica continua del vehículo a un costo computacional menor que en otros esquemas, logrando un ventajoso compromiso entre el detalle de la solución obtenida y la rapidez de su obtención.

Los resultados, obtenidos mediante simulaciones, muestran que el algoritmo recupera los principios generales de control óptimo de vehículos solares, a la vez que es efectivamente capaz de realizar, en tiempos del orden de los cinco segundos, cambios en la estrategia a seguir frente a imprevistos de diversa naturaleza, de manera que el tiempo requerido para llegar a destino resulta ser menor que al utilizar un esquema de lazo abierto. En la literatura consultada dichas soluciones tardan tiempos del orden de minutos en ser obtenidas. El detalle sobre consumos energéticos y velocidades esperadas con que el algoritmo predice la evolución del vehículo, permiten al equipo de carrera facilitar la detección de fallas que puedan presentarse.

*A mis amados padres, que me han guiado y enseñado en este largo camino, y a mi Señor Jesús.*

## Agradecimientos

A Dios, sin duda. Él ha sido el primero en conocerme, sin yo antes haberlo conocido a él, y es ahora, durante el transcurso de esta tesis, el tiempo en el cual él ha dado un sentido especial a mi vida, colocando nuevas metas en mi corazón y abriéndome paso a su manera en cada etapa de mi vida. Qué difícil habría sido todo sin él. Gracias, Padre, por la gran misericordia que has mostrado conmigo a lo largo de toda mi vida; gracias porque no nos ha faltado nunca el pan en la casa, ni tampoco oportunidades para crecer en ti; gracias porque he podido venir a conocerte hace no mucho, y por ser aquel silencioso proveedor todo este tiempo. Gracias por todas aquellas personas que han sido parte de mi vida, y que con su mucha paciencia han permitido que todo esto sea posible: por el profesor Duarte y su gran benignidad y paciencia; por mis amigos, Camilo Jorquera, Matías Gallardo, y todos los de siempre, por su tremenda e incansable paciencia todo el tiempo, su gran amistad y los excelentes momentos que hemos vivido desde hace ya tantos años; por toda la gente que me acompañó a cada uno de los cerros que visité todo este tiempo; por mis compañeros y amigos de la U, en especial por Heinz Gerdin y Eduardo Zamora; por mis hermanos en la fe aquí y en Alemania, en especial por mi queridísima Rebekka, y su gran apoyo durante todo este tiempo.

Gracias, Padre, por cada uno de los desafíos que me has permitido asumir toda mi vida: por mis queridos amigos Idro Valdivia, con los cuales comenzó la chispa de ser eléctrico; por las derrotas y sinsabores que he pasado en mi carrera, tú las conoces bien. Gracias, Señor, por mis amados padres terrenales, ¡cuánto los quiero! ¡y cuánto amor me han entregado, cada uno a su manera durante todo este tiempo! Se termina ahora, Señor, una etapa en que ellos siempre han estado ahí, aunque yo mucho menos para ellos. Ayúdame, Señor, guíame en esta nueva etapa en que los roles empezarán a invertirse, en que mi cruz está cerca, para tomarla con alegría y agradecimiento, sabiendo que tú has sido quien me los ha puesto por delante. Bendice, mi Dios, mis obras venideras, para poder tener el gozo de usarlas para hacer tu voluntad, que te pido me ayudes a entender a diario en mi corazón este y todos los días de mi vida. Gracias, porque ellos siempre han estado ahí, negándose a sí mismos por llevarme a cuestras.

Gracias, Señor, por mis amigos Carlos Aedo, Álvaro Silva y Claudio Burgos, quienes me ayudaron con las secciones de energía solar y baterías, pero también por su amistad y transparencia, así como las de muchos otros que se gestaron y consolidaron durante el desarrollo de Eolian 2.

Gracias, también, por todas aquellas oportunidades, Señor, que me has dado para perdonar y para crecer durante todo este proceso, y porque mis falencias y las de otros me hacen pensar siempre en ti y en la actitud que debo tener hacia mi prójimo y mí mismo.

Señor, por todos los que se preocuparon de mí y me llamaron por teléfono, me escribieron un mail, me propusieron almorzar con ellos, o con los cuales simplemente nos hemos juntado a dar una vuelta y conversar durante este tiempo difícil, por todos ellos te doy las gracias, porque tú mismo sabes que significaron para mí un gran alivio y alegría durante él.

Señor, finalmente, quisiera pedirte que esto no quede solo aquí: ayúdame a seguir creciendo en tu palabra, a seguir dándome cuenta de todas aquellas cosas en las cuales aún queda por crecer y por mejorar, y a todas aquellas partes a las que tú quieres que yo vaya. Gracias, Señor, por todo lo que eres para mí, en el nombre de Jesús, amén.

# TABLA DE CONTENIDO

Capítulo 1.	Introducción.....	1
1.1.	Antecedentes del Problema .....	1
1.2.	Estado del arte .....	2
1.3.	Objetivos .....	4
1.3.1	Objetivo general.....	4
1.3.2	Objetivos específicos.....	4
1.4.	Metodología .....	5
1.5.	Organización del documento .....	6
Capítulo 2.	Modelación del vehículo solar .....	7
2.1.	Dinámica vehicular .....	7
2.1.1	Perturbaciones .....	11
2.2.	Sistema eléctrico .....	14
2.2.1	Panel Solar y MPPT.....	14
2.2.2	Banco de baterías.....	16
2.2.3	Inversor y motor.....	18
2.3.	Energía solar .....	23
2.4.	Equipo de telemetría.....	26
2.5.	Competencia solar.....	28
Capítulo 3.	Control óptimo del vehículo solar .....	29
3.1.	Clasificación de los métodos numéricos .....	31
3.2.	Método Gaussiano pseudoespectral .....	33
3.3.	Algoritmo propuesto .....	39
Capítulo 4.	Aplicación al vehículo solar en condiciones de carrera .....	48
4.1.	Una iteración completa del ciclo.....	48
4.2.	Elección de la escala temporal .....	53
4.3.	La conveniencia de realimentar rápidamente .....	55
4.4.	Estado de carga bajo .....	62
4.5.	Control del entrehierro .....	64
Capítulo 5.	Conclusiones y trabajo futuro .....	66
Capítulo 6.	Referencias .....	71

# ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1: Mapa de ruta del World Solar Challenge.....	11
Figura 2.2: (A) Perfil de elevación de la ruta correspondiente al World Solar Challenge. (B) Pendientes obtenidas para dicha ruta.....	12
Figura 2.3: Rosa de los vientos para la estación meteorológica de Port Augusta. Gobierno de Australia. ....	13
Figura 2.4: Esquema general del sistema eléctrico del vehículo.....	14
Figura 2.5: Circuito equivalente de una celda solar.....	15
Figura 2.6: Característica I-V de una celda solar.....	15
Figura 2.7: Curva de tensión en vacío típica de un banco de baterías como el utilizado en Eolian 2.....	17
Figura 2.8: Esquema típico inversor-motor, como el utilizado en Eolian 2.....	18
Figura 2.9: Límites de operación del motor (izquierda) y su inversor (derecha).....	19
Figura 2.10: (A) Topología de un motor de imán permanente de flujo axial como el utilizado en Eolian 2. (B) Mecanismo de ajuste del entrehierro. ....	19
Figura 2.11: Región de operación del motor de imán permanente. Efecto de la velocidad y del régimen de flujo debilitado.....	20
Figura 2.12: Entrehierro óptimo para distintos valores de torque-velocidad aplicados en el eje del motor.....	21
Figura 2.13: Sistema de ajuste del entrehierro de Eolian2. ....	22
Figura 2.14: Ángulos solares.....	25
Figura 2.15: Esquema de mediciones relevantes para la planificación estratégica del vehículo.....	27
Figura 3.1: Efecto de la elección de un esquema de colocación global y uno local. Se aprecia la ventaja de contar con el segundo método cuando las dinámicas de un sistema son muy rápidas. Para la colocación global se utilizaron ocho puntos Gaussianos; para la local, dos intervalos ( $[0, 0.005]$ y $[0.005, 1]$ ) de cuatro cada uno. ....	37
Figura 3.2: Ejemplo de aplicación de la simbología definida para la planificación diaria.....	42
Figura 3.3: Esquema de realimentación, aplicación y secuenciación de la planificación continua del algoritmo propuesto.....	45
Figura 3.4: Principio del algoritmo propuesto: se planifica con poco detalle hacia los días posteriores, un poco más de detalle hacia las horas posteriores y finalmente se resuelve un problema de control óptimo no lineal para los minutos siguientes a través de un esquema pseudoespectral. El sistema recibe curvas continuas de planificación sobre el control. ....	45
Figura 3.5: Diagrama de flujo del algoritmo propuesto.....	46
Figura 4.1: Pronóstico de potencia solar para los próximos días de competición.....	48
Figura 4.2: Planificación energética semanal.....	49
Figura 4.3: Planificación energética diaria.....	49
Figura 4.4: Resultados para tres iteraciones de la planificación continua separadas por 5 minutos (A) Velocidad, (B) Distancia recorrida, (C) Potencia de entrada al inversor, (D) Energía consumida.....	50
Figura 4.5: Contraste entre la orografía del terreno encontrada durante la porción de la carrera predicha en la primera iteración y: (A) Potencia aplicada al motor, (B) Velocidad del vehículo. ....	52
Figura 4.6: Comparación de resultados entre una discretización escogida como de quince minutos contra otra de treinta, considerando: (A) Velocidad (B) Distancia recorrida, (C) Potencia de entrada, (D) Energía consumida. ....	53
Figura 4.7: Resultados obtenidos para el control, bajo efectos de una ráfaga de viento fuerte. (A) horizonte de tiempo completo. (B) primeros 15 segundos.....	56

Figura 4.8: Velocidad resultante de la aplicación de diversos esquemas de control óptimo bajo el efecto de una ráfaga de viento .....	57
Figura 4.9: Resultados obtenidos para la evolución de distancia recorrida (arriba) y la energía consumida (abajo) para distintas estrategias a aplicar bajo una ráfaga de viento. Curvas entre las 08:30:00 y las 08:40:05 (izquierda), y las 08:40:00 y las 08:55:05 (derecha) .....	59
Figura 4.10: El Sikat II, de Team Solar Philippines, humeante al incendiarse su banco de baterías .....	62
Figura 4.11: Resultados para la planificación energética diaria al simular una situación de derroche energético para distintos escenarios .....	63
Figura 4.12: Mapa de asignación de torque óptimo para el escenario <i>Realimentación</i> definido en la Sección 4.3.....	64

# Capítulo 1. Introducción

## 1.1. Antecedentes del Problema

Siendo la humanidad cada vez más consciente acerca de los impactos de su actividad industrial en el medio ambiente, ha surgido una gran demanda de tecnologías que los mitiguen o supriman. En ese contexto ha sido fundado el Panasonic World Solar Challenge, congregando, desde su creación, autos solares hecho a lo largo de todo el mundo. En 2007 un grupo de estudiantes de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile entraron en la competencia, motivando así la segunda aparición del equipo, en 2011.

El World Solar Challenge [1] es un evento mundialmente conocido que congrega bienalmente a equipos de todo el mundo que desean probar sus vehículos solares. El objetivo de la carrera es cruzar Australia de norte a sur, lo que totaliza una distancia a recorrer de 3.000 [km], utilizando para ello únicamente un banco de baterías con cierta carga inicial establecida en el reglamento del evento y la energía entregada por el sol durante la duración de la carrera. Debido a lo extenso de ésta y de las exigentes restricciones energéticas, se hace entonces necesaria una decisión racional acerca de cuánta energía utilizar, cómo y dónde, durante el evento, haciendo el mejor uso posible de los medios de que se dispone. Resulta natural, entonces, la utilización de esquemas basados en optimización paramétrica y control óptimo [2, 3]. Es necesario, por otro lado, el contar con una modelación adecuada del vehículo y sus componentes [4-7], de modo de estimar de forma precisa la utilización de energía por parte de éste.

La constante presencia de perturbaciones externas hace aún más desafiante la resolución de este problema. Éstas pueden tener origen climático, orográfico, mecánico o humano, y tienen como consecuencia principal el derroche o la carencia del recurso energético, tan apreciado para el rendimiento del vehículo. Estas perturbaciones consisten, más concretamente, en la presencia de vientos que se oponen al desplazamiento del vehículo, nubes que reducen la captación de energía solar, eventuales lluvias que puedan causar fallas sobre los componentes electrónicos del vehículo, pendientes posiblemente no predichas, golpes o accidentes sufridos por el vehículo, descalibración de componentes en el transcurso de la carrera, presencia de tráfico en los poblados u operaciones del vehículo no consideradas en los supuestos del esquema de optimización. Por lo tanto, es de primordial importancia que el control obtenido sea robusto, de alguna forma, a perturbaciones externas, descartándose de plano cualquier solución en lazo abierto, y requiriéndose más bien una operación en tiempo real.

Este trabajo, en consecuencia, puede resultar de interés para el desarrollo del evento en futuras ediciones al proporcionar nuevas perspectivas sobre la forma en que se administra la energía. Sin embargo, resulta importante realizar hincapié en las eventuales aplicaciones cotidianas de este tipo de metodologías. Hoy por hoy la humanidad en general se encuentra también enfrentada al desafío de utilizar de forma cada vez más eficiente sus recursos energéticos: Alemania ha decidido recientemente el eliminar su generación de energía a partir de recursos nucleares, y la investigación en movilidad eléctrica es cada vez mayor: precisamente una de las limitantes que los vehículos eléctricos enfrentan en la actualidad para competir a la par contra vehículos híbridos o de combustión interna es, precisamente, su reducida autonomía en comparación con las alternativas. El presente trabajo, entonces, puede hallar también aplicación en dicho rubro, sirviendo de apoyo a todas las otras áreas de investigación en las que se trabaja para resolver dicho problema. Bajo pequeños cambios en los modelos utilizados, pero sin afectar

la naturaleza no-lineal de éstos, también pueden llevarse a cabo aplicaciones a la industria del transporte, ya sea en medios marítimos, aéreos o terrestres. En [8-10], por ejemplo, se han realizado aplicaciones utilizando métodos similares en medios de transporte terrestres, acuáticos y aéreos, respectivamente. La reducción de costos mediante la utilización de los recursos energéticos de forma óptima se presenta de este modo como un área atractiva a explorar y que puede atraer gran interés por parte de grandes compañías o centros de investigación, especialmente en tiempos en que el crecimiento industrial demanda mayores cantidades de recursos energéticos.

## **1.2. Estado del arte**

Con más de 25 años de experiencia, el World Solar Challenge ha congregado a numerosos equipos de universidades, escuelas politécnicas y compañías tecnológicas de todo el mundo, por lo cual existe una amplia literatura sobre el tema. Existen multitud de formas de organizar la optimización energética de un vehículo solar, con trabajos que pueden dividirse en dos grandes áreas. En primer lugar, existen referencias que abordan en detalle el problema desde un enfoque analítico, dentro de las cuales destacan particularmente [11, 12]. En ellos se discuten, mediante la introducción de modelos de variada complejidad y la aplicación directa del principio del máximo de Pontryagin [2, 13], estrategias concretas a abordar en diversos escenarios. Al igual que en [14], se llega a la conclusión de la existencia de ciertos modos de operación del vehículo que se ven levemente afectados por la inclusión de niveles crecientes de detalle en la modelación, concretamente, la adición de pérdidas óhmicas en baterías, pérdidas varias en el sistema de tracción y potencia solar dependiente del espacio y el tiempo. En resumen, los principales modos de operación de un vehículo solar consisten en aplicar potencia acelerante o regenerativa máximas, el mantener una velocidad constante tal que la batería se carga o descarga a una tasa constante y el utilizar solamente energía solar para operar el vehículo. Cuando hay potencia solar variante espacialmente, se varía la velocidad de modo de alcanzar rápidamente las zonas más despejadas de la pista (cacería solar, ver también [15]); en el caso de pendientes pronunciadas, la estrategia se deforma bajo el principio de anticipación de cerros: en una cuesta ascendente, la velocidad debe aumentarse instantes antes de enfrentarla para luego permitir que la velocidad descienda una vez más hasta alcanzar la otra meseta, y lo dual para una pendiente descendente. Existen también modelos estocásticos aplicados al problema [11, 16]. En consecuencia, cualquier resultado que surja de un esquema de optimización debe saber acoplarse o explicar diferencias con cualquiera de estos escenarios ya previstos. Es de importancia notar que, a pesar de existir desarrollos analíticos bien acabados para varios escenarios, los investigadores no han por ello dejado de requerir el efectuar simulaciones numéricas para dar sentido práctico a sus resultados [17], los cuales son vulnerables a diferencias que pueden llegar a tener los valores de los parámetros utilizados por cada trabajo, así como el valor del coestado inicial del problema de valores en la frontera (TPBVP) respectivo en el caso de planteamientos que recurran al principio del máximo, pudiéndose alterar las conclusiones obtenidas en casos críticos. Es así que, por ejemplo, en [17], se llega a una conclusión diferente acerca de la cacería solar respecto de lo concluido por [11, 12].

Es en esta misma línea que, en casos prácticos, los equipos de competencia han desarrollado una variedad de algoritmos para la resolución numérica, en terreno, de los problemas de optimización a enfrentar. Toda la literatura estudiada concuerda con que la disponibilidad de datos precisos provenientes de un buen sistema de telemetría, que indiquen el estado del

vehículo, así como un buen modelo de éste, es de primordial importancia, debido a que estrategias de lazo abierto son inaceptables para un ambiente tan hostil como el de una competencia solar. Ejemplos particulares de dicha instrumentación pueden encontrarse en [18, 15]. Destacan como variables de estado de suma importancia la posición con respecto a la línea de partida y el estado de carga de las baterías. Algunos trabajos consultan la energía de baterías consumida y otros, la velocidad del vehículo. En cuanto a implementación computacional, existe una tendencia dentro de los autores a dividir el problema en dos etapas: una a cargo de la simulación del comportamiento del vehículo y otra dedicada, por separado, a la elección de un patrón de velocidad a aplicar durante la ruta, en un patrón que recuerda los métodos de disparo [10, 18-21]. Debido a los desarrollos descritos en el párrafo anterior y a la necesidad de contar con soluciones de ejecución rápida a causa de la importancia ya discutida de la realimentación, esta segunda etapa usualmente ha encontrado una sola velocidad óptima que el vehículo debe mantener para continuar en un punto de operación razonablemente cercano al óptimo. Estos esquemas presentan un funcionamiento adecuado para pistas planas, pero sin duda presentarán problemas al enfrentarse a pendientes importantes de acuerdo a la estrategia de anticipación de cerros discutida. Una ventaja de estos métodos en cuanto a su comunicación con el resto del sistema que compone el vehículo es la utilización del control de velocidad constante existente en la mayoría de los controladores de motores disponibles en el mercado, cuyas técnicas de control, ya estandarizadas, también pueden implementarse en dispositivos de fabricación propia, con lo cual una decisión de tipo velocidad constante resulta natural [18, 21].

Otra línea de investigación en esta materia está siendo llevada a cabo por autores que prefieren la utilización de métodos basados en programación dinámica [16, 17, 22]. Una característica clave que motiva el uso de esta técnica es su variante estocástica para su utilización con modelos climáticos y su gran simplicidad en la modelación, la cual usualmente resume velocidad y energía, sin entrar en detalles sobre el comportamiento dinámico de estos a lo largo de la carrera.

La naturaleza estocástica del problema abordado ha desde luego motivado además el interés por desarrollar soluciones que exploten la teoría pertinente. De este modo, existen aplicaciones en las cuales se han propuesto como solución cadenas de Markov [11], programación dinámica estocástica [17] y control por certeza equivalente [16] utilizando, por supuesto, modelos muy sencillos, principalmente basados en el principio de presupuesto energético de [23].

El trabajo propuesto coincide con [16, 17, 23, 24] en destacar la gran importancia del recurso solar como limitante del desempeño del vehículo, pero a la vez como facilitador y simplificador en la estrategia de cálculo que se desea implementar. Es así como el esquema propuesto se basa en primeramente estimar la energía con la cual se dispondrá en el futuro y posteriormente realizar solo los cálculos más urgentes (como la decisión de control a aplicar en el instante presente). Los esquemas propuestos en [23, 24] gozan de una gran simplicidad y automatización al basarse en el conocimiento empírico del comportamiento del vehículo, de modo que a cada consumo se asocia una velocidad crucero a través de la consulta de una tabla, pero el presente trabajo propone insistir, sin embargo, en que las dinámicas del vehículo varían suficientemente lento como para sacrificar un poco de velocidad de cómputo por un nivel de detalle mayor, que permita a los miembros del equipo caer en cuenta de la evolución esperada de las variables relevantes, permitiendo comparar la evolución real y la predicha por los modelos utilizados del vehículo, de modo de detectar eventuales fallas o efecto de perturbaciones. Es así como el esquema propuesto introduce, en vez de una revisión tabulada como las propuestas en

[23, 24], un bloque de control óptimo basado en métodos pseudoespectrales [25, 26, 64, 73], no encontrado en la literatura estudiada. Tal esquema permite, entonces, resolver el problema de optimización a la vez que simular el desarrollo de la carrera en el corto plazo, utilizando menores recursos computacionales que un esquema simulador-optimizador basado en métodos tipo Runge-Kutta y optimización paramétrica [26].

### **1.3. Objetivos**

#### **1.3.1 Objetivo general**

- Desarrollar un algoritmo novedoso que permita administrar de la forma más eficiente posible el gasto de energía en un vehículo solar durante una carrera, analizando la robustez de tal algoritmo frente al acaecimiento de eventos no predichos durante el desarrollo de la carrera.

#### **1.3.2 Objetivos específicos**

- Desarrollar un algoritmo de control óptimo realimentado, es decir, que considere actualizaciones periódicas del vector de estado en todos sus cálculos, de manera de permitir al vehículo dirigirse a la meta llegando a ella en el mínimo tiempo posible.
- Recuperar a través del algoritmo propuesto los casos de uso básicos desarrollados en la literatura [11].
- Utilizar el conocimiento matemático de los fenómenos que afectan al vehículo para la implementación del algoritmo propuesto, incluyendo principalmente dinámicas vehiculares y los efectos de las pendientes del camino, los vientos contrarios al desplazamiento del vehículo y las pérdidas en el motor. Someter a prueba el algoritmo bajo fenómenos de vientos fuertes y derroches energéticos.
- Comparar los resultados contra los producidos por estrategias que cuenten con distinto grado de conocimiento de las condiciones de la ruta, considerando los casos en que éste es nulo y completo.

## 1.4. Metodología

Para llevar a cabo los objetivos del presente trabajo se tienen en cuenta los siguientes puntos clave:

- El recurso escaso es la energía de que se dispone, la cual se recibe de forma distribuida en el tiempo
- El horizonte de tiempo que abarca el desarrollo de una carrera solar es usualmente de varios días, lo cual entorpece una simulación detallada del comportamiento del vehículo al agregar un excesivo número de variables y no-linealidades al procedimiento computacional.
- Para calcular una trayectoria de control óptimo se requiere información sobre el estado inicial y las características de la trayectoria futura. El contar con una generación de soluciones rápida en comparación con la duración de la carrera resulta ventajoso para la implementación de soluciones en tiempo real, que permitan reaccionar rápidamente frente a perturbaciones externas.

De alguna manera el algoritmo implementado está inspirado en la forma como las personas toman decisiones: a largo plazo se planifica primero lo más urgente, y a medida que los plazos se acortan se hacen planificaciones más detalladas hasta llegar a la acción misma. Del mismo modo, la toma de decisiones del algoritmo propuesto se divide en tres etapas: en primer lugar, cada día se utiliza la medición de estado de carga de las baterías y un pronóstico de radiación solar para los días restantes de carrera para planificar la energía total a consumir durante aquellos. Posteriormente, se ignora lo programado para los días posteriores de carrera y se hace una planificación para el día actual distribuyendo el consumo de energía decidido en la etapa anterior a lo largo de éste, en intervalos de tiempo arbitrarios. Finalmente, se ejecuta una etapa de control óptimo no lineal en tiempo continuo, el cual tiene por finalidad el decidir la distribución instantánea que de la energía deba hacerse a lo largo del intervalo de tiempo que se está corriendo en la actualidad. Todas estas etapas son iterativas, con distintos períodos de actualización. Se desea que la última sea lo más rápida posible, teniéndose como resultado el que en general cada iteración tarda del orden de 5 [s] en llevarse a cabo. La segunda etapa debe actualizarse varias veces al día de manera de poder reaccionar a tiempo contra perturbaciones que afecten directamente el consumo energético, pudiendo por ejemplo invocarse una actualización cada quince minutos o cuando la planificación inicialmente realizada deje de cumplirse. La primera etapa, por otro lado, está pensada para ser actualizada una vez al día.

## **1.5. Organización del documento**

El presente trabajo está dividido como sigue: en el Capítulo 2 se revisan exhaustivamente los aspectos más importantes que definen el problema a tratar, entregando los modelos matemáticos que se aplicarán en cada caso. Se considera en primer lugar toda la fenomenología mecánica que afecta el desplazamiento del vehículo, poniendo énfasis inicialmente en la constitución de las fuerzas que se oponen a aquél. Esto inmediatamente abre paso a la introducción de las principales perturbaciones a que el vehículo está expuesto durante una competición, concretamente, viento y pendientes de la ruta. Siendo el sistema eléctrico el responsable de la conversión energética desde fuentes químicas y fotoeléctricas a la energía cinética y potencial gravitacional del vehículo, se aborda a continuación lo a él concerniente, describiendo sucintamente sus componentes principales. Siguiendo la línea de razonamiento, se introduce a continuación la modelación correspondiente a la energía solar que se recibe. La sección relacionada al equipo de telemetría introduce al lector al conocimiento de qué señales pueden ser utilizadas para cálculos o estimaciones por parte del equipo.

El Capítulo 3 está destinado a la descripción de los métodos existentes para la resolución de problemas de control óptimo, comenzando desde una base puramente analítica, pasando por la introducción a diversos métodos numéricos y terminando con la explicación en detalle del algoritmo propuesto. El Capítulo 4, en consecuencia, explora la aplicación de dicho algoritmo a casos hipotéticos pero plausibles en la realidad, discutiendo y demostrando la importancia y efectividad de éste. Finalmente, el Capítulo 5 estipula, discute y analiza las conclusiones emanadas del trabajo realizado, denotando aquellos focos en los cuales se podrían continuar los esfuerzos.

## Capítulo 2. Modelación del vehículo solar

La presente sección tiene por objetivo presentar de forma sucinta la modelación de aquellos fenómenos físicos que determinan el comportamiento dinámico del vehículo como un todo. Se hará énfasis principalmente en el motor eléctrico y el tren mecánico, estableciendo además las restricciones operativas a las que éstos están sujetos.

### 2.1. Dinámica vehicular

A continuación se tratará resumidamente la modelación de la parte mecánica del vehículo. El lector interesado puede consultar [5, 27] para mayores detalles.

El sistema mecánico del vehículo incluye toda la interacción de éste con su medio exterior. Si bien el motor ejerce una fuerza acelerante que impulsa el vehículo hacia adelante, también existen fuerzas resistivas que se oponen al movimiento de éste: el vehículo se desplaza en una carretera real en que existen desniveles, resultado de la orografía natural de la zona geográfica en que se desarrolla el evento, dando como resultado la aparición de una fuerza de origen gravitacional denominada fuerza gradiente, de carácter conservativo, descrita por la ecuación.

$$F_g = mg \sin(\theta_r), \quad (2.1)$$

en que  $\theta_r$  representa la inclinación del vehículo en la posición  $r$  de la pista a recorrer,  $m$  es la masa del vehículo y  $g$  la aceleración de gravedad.

Por otro lado, todo vehículo, por el solo hecho de estar inmerso en una atmósfera gaseosa y no en el vacío, sufre de roce aerodinámico a consecuencia de las diferencias de presión existentes entre las distintas regiones que conforman la superficie del vehículo, las cuales cada equipo solar intenta reducir a un mínimo a través de un diseño cuidadoso de la forma externa de éste, pero que de todas maneras se vuelve importante a altas velocidades, de modo que debe ser considerado. El fenómeno es agravado por la presencia eventual de viento, en la dirección opuesta a la del movimiento del móvil, en especial cuando éste alcanza velocidades altas. Se introduce así la fuerza aerodinámica,

$$F_{ae} = \frac{1}{2} C_D \rho_a A (v + v_v)^2. \quad (2.2)$$

En la ecuación anterior  $C_D$  representa el coeficiente de empuje del vehículo, altamente influenciado por su forma externa, y  $A$  es su área frontal.  $v$  es la velocidad de éste y  $v_v$  la velocidad del viento asociada, que se considera de signo positivo cuando su dirección es en contra del sentido de desplazamiento del vehículo y negativo en caso contrario.

Las ruedas, en su contacto imperfecto con el suelo, deformación por temperatura y eventuales defectos en su presurización, darán origen al roce de rodadura, particularmente importante a bajas velocidades y siempre presente siempre que el vehículo se encuentre en movimiento. Su expresión viene dada por

$$F_r = mg \cos(\theta_r) (C_{r1} + C_{r2}v). \quad (2.3)$$

Aquí se puede apreciar la aparición de dos coeficientes de roce de rodadura,  $C_{r1}$  y  $C_{r2}$ , lo que indica la dependencia de esta fuerza con la velocidad de éste. Efectivamente, una mayor velocidad implica que el número de compresiones y expansiones del gas dentro del neumático del vehículo por unidad de tiempo se incrementan, dando como resultado una mayor cantidad de pérdidas elásticas en el neumático y un aumento en su temperatura, lo que incide en aun mayores pérdidas. Por otro lado, el producto  $mg \cos(\theta_r)$  indica precisamente la dependencia de esta fuerza con la normal del suelo que sostiene el vehículo. En una pista perfectamente plana y a baja velocidad, usualmente se aproxima esta fuerza por  $F_r = C_{r1}mg$ .

Finalmente, es importante notar que el solo hecho de acelerar el vehículo requiere en sí una cantidad de energía a inyectar no nula, que queda, salvo el efecto de pérdidas de las fuerzas ya introducidas, almacenada en él en forma de energía cinética adicional. La energía cinética de un vehículo es la suma de la energía cinética de traslación de éste y la energía cinética de rotación presente en sus ruedas y ejes. Si  $E_c$  es la energía cinética de éste, entonces se tiene que

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 + n_{ruedas} \frac{1}{2}I\omega_{mec}^2, \quad (2.4)$$

donde  $n_{ruedas}$  es el número de ruedas del vehículo (para Eolian 2,  $n_{ruedas} = 3$ ),  $I$  es el momento de inercia de cada una<sup>1</sup> y  $\omega_{mec}$  la velocidad de giro de cada una. Asumiendo un desplazamiento sin deslizamientos se tiene que  $\omega_{mec} = v/r_w$ , donde  $r_w$  es el radio de cada rueda. Así,

$$E_c = \frac{1}{2}m \left( 1 + n_{ruedas} \frac{I}{r_w^2} \right) v^2,$$

de modo que

$$E_c = \frac{1}{2}m_{eq}v^2, \quad (2.5)$$

---

<sup>1</sup> En que se asume que toda las ruedas tienen el mismo momento de inercia

con

$$m_{eq} = m \left( 1 + n_{ruedas} \frac{I}{r_w^2} \right). \quad (2.6)$$

La primera ley de la termodinámica indica que, si  $W$  el trabajo mecánico realizado sobre el vehículo, se tiene que

$$\frac{d}{dt} E_c = \frac{d}{dt} W = (F_a - F_g - F_{ae} - F_r)v, \quad (2.7)$$

donde  $F_a$  es la fuerza acelerante aplicada por el motor del vehículo. Existe, entonces, una potencia, aplicada por el motor, que permite la acumulación de energía cinética en el tren mecánico del vehículo, una vez superada la potencia disipativa que el ambiente fuerza sobre éste. Reescribiendo (2.7) se tiene

$$\frac{d}{dt} E_c = P_e - P_r, \quad (2.8)$$

en que,  $P_e$  es la potencia en el eje que el motor aplica sobre las ruedas y  $P_r$  la potencia resistiva impuesta por la dinámica vehicular. Agrupando adecuadamente términos, se concluye que

$$P_r = a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3, \quad (2.9)$$

con

$$v = \sqrt{2E_c/m_{eq}} \quad (2.10)$$

y

$$\begin{aligned} a_1 &= C_{r1} mg \cos(\theta_r) + mg \sin(\theta_r) + \frac{1}{2} C_D \rho_a A v_v^2 \\ a_2 &= C_{r2} mg \cos(\theta_r) + C_D \rho_a A v_v \\ a_3 &= \frac{1}{2} C_D \rho_a A. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Es importante notar que los coeficientes  $a_2$  y  $a_3$  de la ecuación (2.11) resultan siempre positivos, teniéndose en consecuencia una función de fuerza resistiva convexa [11]. Se sigue inmediatamente que mantener velocidades mayores requiere de potencias mayores.

A través de la interacción mecánica que el vehículo ejerce con el camino también se puede dar cuenta de una variable adicional: la distancia recorrida,  $r$ . Su relación con la velocidad viene dada por

$$\frac{d}{dt}r = v. \quad (2.12)$$

Esta magnitud es de importancia debido a que permite predecir la posición que el vehículo tendrá al transcurrir un determinado lapso. Según se trata en la Sección 2.1.1, esto es de utilidad al momento de considerar las pendientes que el vehículo deba superar a lo largo de su trayectoria. Por otro lado, el contar con esta cantidad es también de utilidad para la planificación energética del vehículo: al encontrarse cerca de la meta la estrategia puede cambiar completamente, dependiendo de la disponibilidad energética, con respecto a la planificada al inicio de la carrera, lejos de la meta.

Esto finaliza la modelación de la dinámica del vehículo en su parte mecánica. En la Tabla 2.1 se presentan los valores de los parámetros más relevantes utilizados en todas las rutinas numéricas. Su origen es diverso, proviniendo algunos, como la masa del vehículo, el número de ruedas y el radio de las mismas, de mediciones directas. Otros, como la densidad del aire, coeficiente de arrastre y los coeficientes de rodadura, son estimados a partir de la bibliografía consultada [5, 28], y finalmente algunos, como el área frontal y el momento de inercia de las ruedas, provienen de estimaciones realizadas por medio de software de diseño asistido por computador tipo elementos finitos y cálculos analíticos estimados. Resulta apropiado notar aquí que son precisamente los parámetros  $C_{r1}$ ,  $C_{r2}$  y  $C_D$  aquellos de los cuales se tiene menor certeza, pero que a la vez influyen fuertemente el comportamiento del vehículo. De ahí que resulte muy recomendable el incorporar algún esquema de identificación en línea de parámetros para el vehículo en alguna nueva versión. Esto podría ayudar, según se discute más adelante, a una mejor administración de los recursos energéticos.

**Tabla 2.1: Valores de los parámetros utilizados correspondientes a la dinámica vehicular del auto solar**

Parámetro	Símbolo	Valor
Masa total (Piloto + Auto)	$m$	302 [kg]
Coefficiente de arrastre	$C_D$	0.08 [-]
Densidad del aire	$\rho_a$	1.2043 [kg/m <sup>3</sup> ]
Área frontal	$A$	0.96 [m <sup>2</sup> ]
Primer coeficiente de rodadura	$C_{r1}$	0.008 [-]
Segundo coeficiente de rodadura	$C_{r2}$	$1.789 \cdot 10^{-4}$ [s/m]
Número de ruedas	$n_{ruedas}$	3 [-]
Momento de inercia de las ruedas	$I$	$10^{-4}$ [kg m <sup>2</sup> ]
Radio de las ruedas	$r_w$	0.2720 [m]

### 2.1.1 Perturbaciones

Según se aprecia en las ecuaciones (2.11) y (2.7), el desplazamiento del vehículo, y su eventual aceleración, implican un consumo energético altamente dependiente de variables imposibles de controlar por parte del equipo de competencia, tales como el viento que afecta el vehículo y las pendientes a través de las cuales éste debe trasladarse. Conviene, entonces, considerar información sobre ellas. En la presente sección se hace referencia a métodos que pueden ayudar a anticiparlas. El presente trabajo solo hará uso del método presentado para la estimación de gradientes, mas no para el de estimación de vientos.

#### Gradientes

Un mapa del recorrido utilizado hasta ahora en las diferentes versiones del World Solar Challenge, obtenido utilizando el software gratuito Google Earth®, se presenta en la Figura 2.1. La ruta consiste simplemente en unir las ciudades de Darwin y Port Augusta a través de la carretera Stuart y luego unir la última con Adelaide a través de la Autopista n°1.



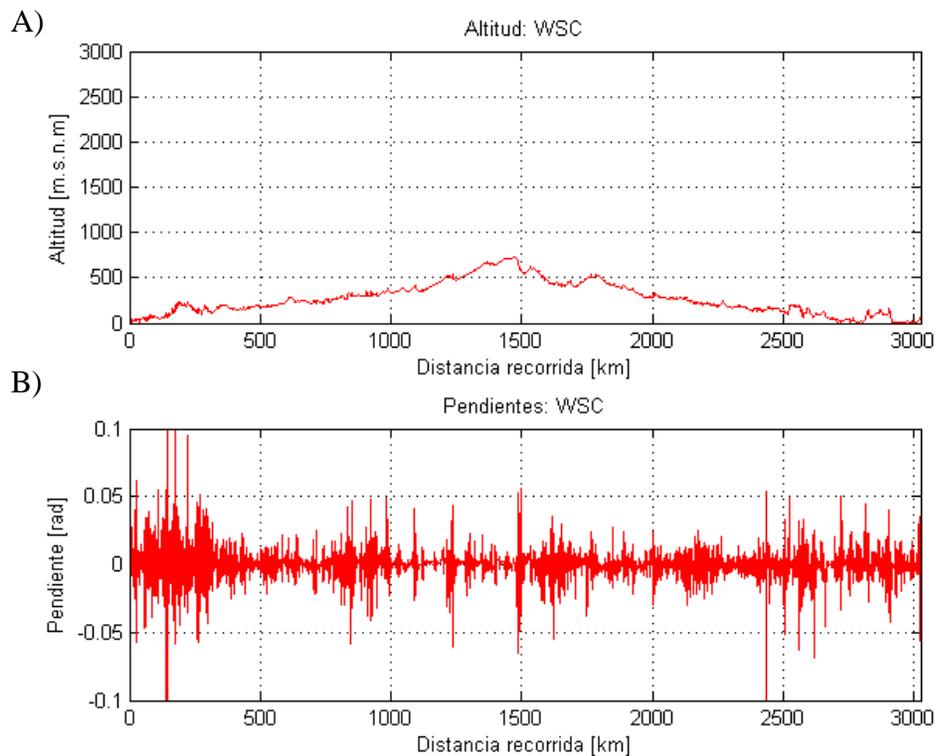
**Figura 2.1: Mapa de ruta del World Solar Challenge**

En el camino el vehículo pasa por multitud de locaciones y poblados. La carrera comienza en la ciudad de Darwin y, en la carrera de 2009, existieron paradas de control en Una vez Katherine, Dunmarra, Tennant Creek, Barrow Creek, Alice Springs, Kulgera, Coober Pedy, Glendambo, Port Augusta y Adelaide, siendo esta última la meta. El definir una ruta en la aplicación señalada permite, utilizando la herramienta de perfil de elevación, acceder a datos orográficos concernientes a la zona. El perfil de elevación de la carrera se muestra en la Figura 2.2 (A), desde la cual se puede apreciar la baja elevación que se tiene durante la ruta, alcanzándose altitudes no muy superiores a 700 [m] para una distancia a cubrir de más de 3000 [km]. A partir de estos datos es posible obtener un vector de elevación  $h$  relacionado con cierto vector de distancia, ambos, digamos, de dimensión  $n_h$ . Es posible, entonces, realizar una interpolación por spline cúbicos [29], definiéndose al menos de clase  $C^1 h(r)$ .

La pendiente entonces tiene dada por

$$\theta_r = \left. \frac{dh}{dr} \right|_r. \quad (2.13)$$

Es conveniente recurrir a splines debido a la incrementada velocidad de convergencia del método pseudoespectral, según lo observado empíricamente durante el desarrollo del presente trabajo: esto se explica a partir de las buenas condiciones de diferenciabilidad que se obtienen al interpolar con dicho enfoque, produciéndose una buena interacción con el mentado método, el cual precisamente aproxima la respuesta a un problema de control óptimo a resolver mediante polinomios. El resultado de la aplicación de esta expresión se muestra en la Figura 2.2 (B). Es posible hacer esto si se asume que la pendiente es constante por tramos, lo cual a simple vista no parece ser una mala aproximación. Otro detalle que conviene tener en mente es el hecho de que se está graficando una pendiente directamente en radianes, siendo que usualmente la convención para tratar pendientes es en porcentaje. El lector debe recordar que simplemente se trata de un factor de cien entre la una y la otra, siendo mayor el valor de la pendiente en porcentaje.



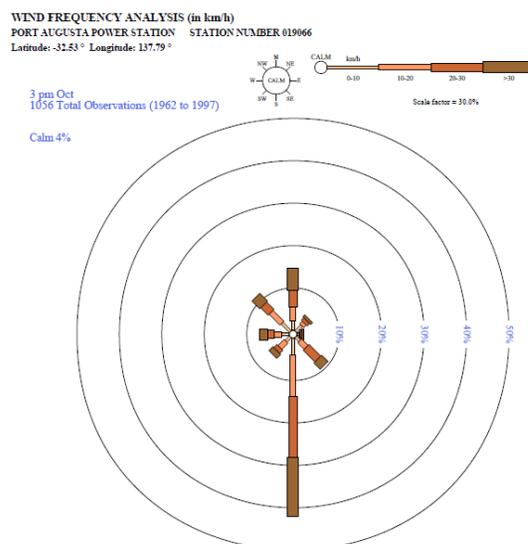
**Figura 2.2: (A) Perfil de elevación de la ruta correspondiente al World Solar Challenge. (B) Pendientes obtenidas para dicha ruta.**

De manera análoga, pueden predecirse vectores o curvas de pendientes consultando a otras fuentes cartográficas. Resulta importante, sin embargo, destacar que mientras mayor resolución de distancia se utilice para la obtención de las splines, mayor es la precisión del método. La utilizada en el presente trabajo es de 660 [m].

## Viento

Sin lugar a dudas la perturbación más difícil de calcular o estimar es la velocidad y dirección del viento, relativa al movimiento del vehículo, que lo afecta. Para este fin, sin dudas es muy preferible utilizar métodos estadísticos y hacer análisis probabilísticos sobre estimaciones del comportamiento del vehículo bajo distintos escenarios. Dicho análisis excede los alcances de este trabajo, pero se deja propuesto el intentar el a continuación expuesto. Se anima fervientemente al lector a visitar el sitio web del Departamento Meteorológico Australiano [30].

Dentro de un área vecina a la ruta de la carrera existen una serie de poblados que cuentan con estaciones meteorológicas de una larga trayectoria de operación. Por ejemplo, Darwin, Tindal, Alice Springs, Oodnadatta, Marree, Woomera, Port Augusta y Adelaide. Existe información en línea acerca de la velocidad y dirección del viento recopilada en estas estaciones de forma estadística y mostrada a través de rosas de los vientos, como la de la Figura 2.3 [31]. Leyendo las tales de manera adecuada, el lector puede reconstruir una distribución probabilística espacio-temporal aproximada del fenómeno y basar sus cálculos en ésta. Una alternativa a la interpretación mediante rosa de los vientos puede ser la descarga directa de todos los datos (existe gran nivel de detalle de éstos, debido a que es posible acceder a más estaciones meteorológicas muy cercanas a la ruta), pero el tratamiento de éstos se hace engorroso, y dado que son datos a la venta, el equipo podría considerar el uso de recursos hacia otros fines. De todas maneras, los datos disponibles permiten al equipo desde ya el aproximar las magnitudes, direcciones y probabilidades de los escenarios más plausibles, y basar sus cálculos en éstos. En el presente trabajo se estudiaron las rosas de los vientos para las estaciones meteorológicas de Adelaide Airport, Port Augusta, Oodnadatta Airport, Alice Springs Airport y Tindal Raaf para el mes de octubre, para las 09:00 y 15:00 horas. Se utiliza la información en ellos contenida para sugerir un esquema de pruebas para el algoritmo desarrollado en el presente trabajo. Los resultados de éste se analizan en la Sección 4.3.



**Figura 2.3: Rosa de los vientos para la estación meteorológica de Port Augusta. Gobierno de Australia.**

## 2.2. Sistema eléctrico

El sistema eléctrico del vehículo, según se muestra en la Figura 2.4, es un sistema de conversión de la energía. Los paneles solares del vehículo captan la energía solar disponible en el momento convirtiéndola, con cierta eficiencia, en energía eléctrica. Para transferir de forma óptima la potencia así captada al resto del sistema eléctrico del vehículo, se utiliza un dispositivo de seguimiento del punto de máxima potencia (MPPT por sus siglas en inglés) para traspasarla a un enlace de corriente continua, el cual a su vez tiene conectado el inversor y el banco de baterías. Este último almacena energía eléctrica entre sus bornes, siendo capaz de aportarla o recibirla hacia o desde el motor y las celdas solares para su uso inmediato o posterior, respectivamente. El dispositivo encargado de convertir la potencia eléctrica en mecánica es el motor, el cual es controlador por un inversor de tres piernas.

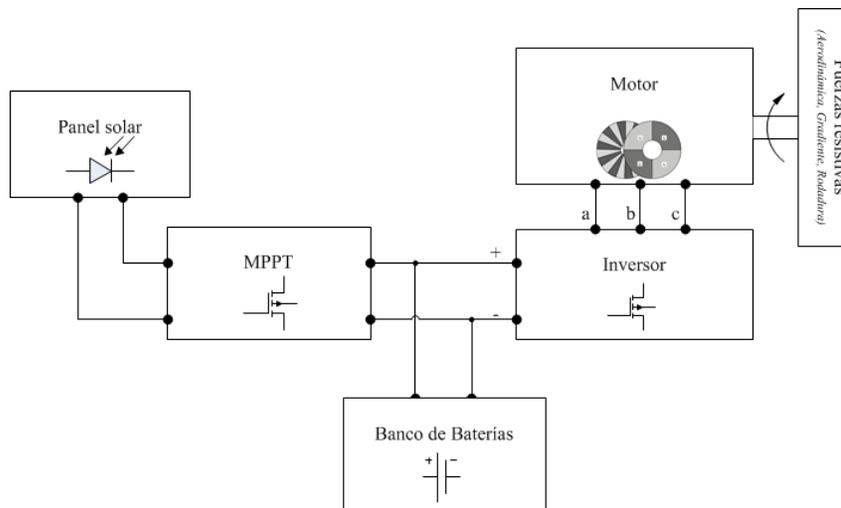
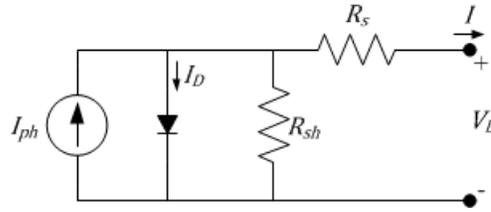


Figura 2.4: Esquema general del sistema eléctrico del vehículo

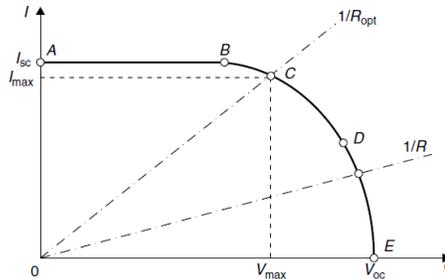
### 2.2.1 Panel Solar y MPPT

Sin duda, lo que define al vehículo como solar es el panel fotovoltaico que contiene. Éste se compone de un conjunto de paños, los cuales son organizados adecuadamente a través de la superficie de éste. Cada paño a su vez consta de un conjunto de celdas solares, las cuales están conectadas de una manera en particular. En muy resumidas cuentas, una celda solar consiste en una juntura p-n, similar a un diodo, que posee la característica de estar constituido por materiales que facilitan el efecto fotoeléctrico. Cuando un fotón incide sobre un átomo con determinada energía, los electrones de los orbitales superiores del lado n de éste, ubicados en la parte superior de la celda, son excitados con dicha energía hacia bandas aún más alejadas del núcleo atómico, reduciéndose en consecuencia la fuerza con que son ligados al núcleo, pudiendo entonces viajar a través de la juntura como consecuencia de la diferencia entre el número de huecos y electrones que existen entre las regiones p y n del semiconductor. Desde luego que en el trayecto ocurren fenómenos de pérdidas, como colisiones con redes atómicas y cambios en la energía cinética de los electrones. Por otro lado, en la oscuridad, la celda se comportará como cualquier juntura p-n, es decir, un diodo. En consecuencia, el modelo de una celda solar viene dado por la Figura 2.5 [32].



**Figura 2.5: Circuito equivalente de una celda solar**

La magnitud  $I_{ph}$  representa la corriente fotónica, producida por la celda, generada a consecuencia del efecto fotoeléctrico y por lo tanto sólo no nula cuando la celda está iluminada.  $I_D$  representa la corriente oscura, la que aparece de aplicar una fuente generadora de tensión positiva entre sus bornes y que da cuenta de su comportamiento como diodo. Notar que este fenómeno seguirá produciéndose mientras la celda esté conectada a una carga resistiva, pues la corriente fotónica producirá siempre un potencial positivo en la carga, activándose así cierta transferencia de electrones desde el lado n al lado p del semiconductor. Al cortocircuitarse, dejarse en circuito abierto o conectarse a distintas cargas puede obtenerse la característica I-V de la celda, mostrada en la Figura 2.6 [32], en que  $I_{sc}$  representa la corriente de cortocircuito de la celda y  $V_{oc}$  el voltaje de circuito abierto de la misma. Existe una combinación ( $V_{max}$ ,  $I_{max}$ ) que maximiza la potencia extraída de la celda. Esto se logra encontrando una impedancia adecuada entre los bornes de la celda,  $R_{opt}$ . En [32] se entregan expresiones analíticas que dan cuenta de este efecto.



**Figura 2.6: Característica I-V de una celda solar**

Con el razonamiento anterior se introduce la conveniencia de incluir en el vehículo un dispositivo que permita adaptar de forma adecuada la impedancia de la carga (en este caso, del conjunto baterías-motor) para maximizar el aprovechamiento de la potencia solar recibida por el vehículo. Dicho dispositivo es el MPPT [33], anteriormente introducido. El Eolian 2 utilizó un conjunto de cuatro dispositivos MPPT-Race v4.0 de la empresa Drivetek [34], el cual presenta una topología tipo Step-Up o Boost. De [6, 34] se aprecia cómo la eficiencia de los tales no desciende del 98.5%, con lo cual se considerará tal dispositivo como perfectamente eficiente. Por otro lado, las celdas solares utilizadas en el World Solar Challenge, de silicio monocristalino, corresponden a las Sunpower C60 [35]. Para todos los efectos se considerará que el panel posee una eficiencia global de 15%. Según se aprecia en las referencias, la variación de este valor con respecto al nominal de un paño de celdas, cercano al 22,5%, responde a multitud de factores, como la sombra que recae sobre cada paño, la temperatura de éste, la ventilación aplicada y el tipo de encapsulado que se utilice, además de la operación del panel en puntos que difieren de las condiciones estándar de obtención experimental de eficiencias. En resumen, de la potencia solar llegada al panel solar, se considerará que solo un 15% llega al sistema de corriente continua de la Figura 2.4.

## 2.2.2 Banco de baterías

El banco de baterías es otro de los elementos principales del vehículo. Éste consta de un conjunto de celdas de cierta tecnología las cuales están conectadas según una determinada topología. En el caso de Eolian 2, se utilizaron las celdas de litio-polímero Leo Industries N636394, de 4.5 [Ah] y 3.7 [V] de capacidad y tensión nominales, respectivamente [36], en conexión 24S11P, lo que significa que las celdas fueron conectadas formando 24 módulos serie de 11 celdas en paralelo cada uno. Con todo esto, los datos más relevantes del banco, obtenidos en [4], se muestran en la Tabla 2.2.

**Tabla 2.2: Datos relevantes del banco de baterías**

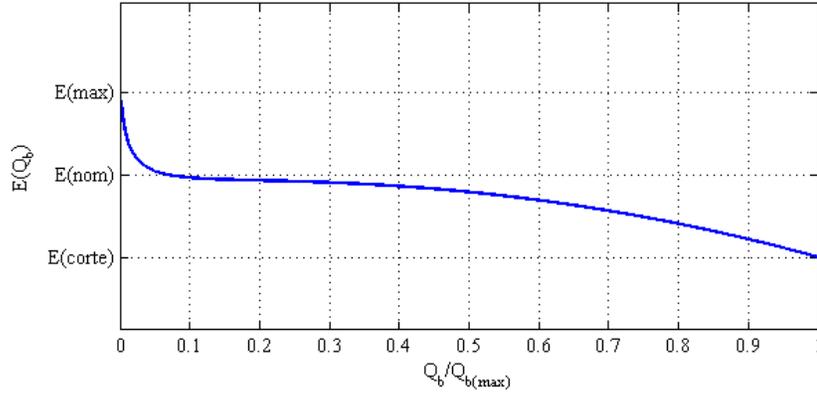
Dato	Valor
Tensión máxima	100.8 [V]
Tensión nominal	88.8 [V]
Tensión de corte	72 [V]
Capacidad nominal [Ah]	47.5 [Ah] <sup>2</sup>
Capacidad nominal [kWh]	4.462 [kWh]

Es deseable que la tensión del banco de baterías permanezca constante mientras éste se carga o descarga. Sin embargo, esto no ocurre así, apreciándose variaciones en ésta tanto dinámicas como instantáneas, relacionadas con su temperatura y estado de carga. Las ecuaciones que gobiernan el este comportamiento vienen dadas por (2.14)

$$\begin{aligned}
 \frac{dU_k}{dt} &= \frac{1}{R_k C_k} U_k + \frac{1}{C_k} I_b \\
 \frac{dU_d}{dt} &= \frac{1}{R_d C_d} U_d + \frac{1}{C_d} I_b \\
 \dot{Q}_b &= I_b \\
 U_b &= E(Q_b) - U_k - U_d - R_s I_b,
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

en que  $R_k, R_d$  y  $R_s$  son llamadas resistencias cinética, de difusión y serie;  $C_k$  y  $C_d$  son las capacitancias cinética y de difusión, respectivamente;  $U_b$  es la tensión en bornes de la batería;  $I_b$  es la corriente que entra o sale de ella,  $U_k$  es la denominada tensión cinética del banco y  $U_d$  es llamada la tensión dinámica de éste. Asociada a la carga extraída de la batería  $Q_b$ , está la curva de tensión en vacío,  $E(Q_b)$ , que tiene una forma como la presentada en la Figura 2.7. Como puede verse, ésta consiste en una relación no lineal que puede explotarse de modo de estimar el estado de carga del banco utilizando mediciones de tensión y del historial de la corriente. Esta información resulta tremendamente útil para el estratega, justamente debido a que el recurso escaso en una carrera solar es la energía de la que se dispone. En estricto rigor, la tensión en vacío del banco depende también de la temperatura de éste, y lo hace de forma creciente. Para fines de este trabajo, tal efecto no es considerado.

<sup>2</sup> La capacidad teórica corresponde a 49.5 [Ah] = 4.5 [Ah] x 11 [celdas en paralelo], pero los datos experimentales indican otra cosa [4]



**Figura 2.7: Curva de tensión en vacío típica de un banco de baterías como el utilizado en Eolían 2**

No debe olvidarse, por otro lado, el efecto de las tensiones dinámicas de (2.14). En ese sentido, resulta importante destacar que las pérdidas del banco de baterías dependen de la historia de la corriente extraída del banco. En un régimen de descarga a corriente constante, éstas vendrán dadas por

$$P_{Lb} = (R_k + R_d + R_s)I_b^2. \quad (2.15)$$

Si se utilizan los parámetros de la Tabla 2.3, también extraídos de [4], cuando la corriente extraída corresponde a 20[A] (lo cual corresponde a una potencia extraída de 2 [kW]), las pérdidas tienen un valor de 32 [W]. En ese sentido, la eficiencia del banco alcanza un 98.4%, siendo aún menores tales pérdidas antes de alcanzarse aquel régimen. Se realizará entonces la simplificación de considerar un banco de baterías perfectamente eficiente, y se considerará únicamente la energía almacenada en él como variable de estado. La potencia de entrada o salida al banco de baterías viene entonces simplemente dada por

$$\dot{E}_b = U_b I_b. \quad (2.16)$$

Utilizando la ley de las corrientes de Kirchhoff sobre el esquema de la Figura 2.4, se tiene

$$\frac{d}{dt}E_b = P_s(t) - P_{in}, \quad (2.17)$$

en que  $P_s(t)$  es la potencia solar neta recibida desde el MPPT y  $P_{in}$  es la potencia de entrada al inversor.

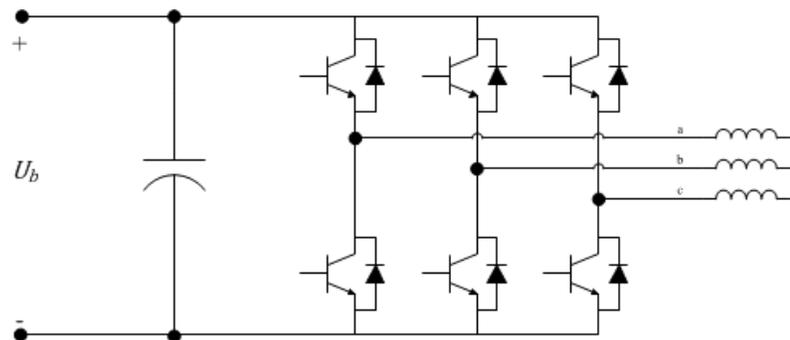
**Tabla 2.3: Parámetros del modelo dinámico de baterías de (2.14)**

Parámetro	Valor
$R_k$	0.0211 [ $\Omega$ ]
$R_d$	0.0134 [ $\Omega$ ]
$R_s$	0.0456 [ $\Omega$ ]
$C_k$	2098.0171 [F]
$C_d$	24977.0556 [F]

Finalmente, es importante indicar la importancia de monitorear que cada celda no sea expuesta a sobrecargas ni descargas demasiado fuertes, que su temperatura se encuentre entre ciertos márgenes de seguridad y que su tensión no salga de cierto rango, pues es muy peligroso que dejen de cumplirse estas condiciones debido a que se la puede dañar o a que pueden causarse daños mayores a componentes o personas debido a su inflamabilidad. Por esta razón no debe dejar de incluirse en todo vehículo solar un sistema de administración de baterías (BMS por sus siglas en inglés) que a la postre permite obtener mediciones de tensión y corriente que son nuevamente útiles para el estratega, al permitir calcular la potencia extraída del banco de baterías mediante la expresión (2.16).

### 2.2.3 Inversor y motor

Un sistema típico inversor-motor es como el que se presenta en la Figura 2.8 [37]. Esta configuración, denominada fuente de voltaje (VSI por sus siglas en inglés), permite sintetizar señales de voltaje aproximadamente sinusoidales a partir de una de corriente continua. En dicha figura,  $U_b$  representa la tensión de corriente continua impuesta en este caso por el banco de baterías. Para dicha síntesis se utiliza usualmente un esquema tipo modulación por espacio vectorial (SVM por sus siglas en inglés), ampliamente cubierta por la literatura [7]. De acuerdo a la misma, no conviene que la magnitud entre fases de las tensiones alternas generadas superior a  $U_b/\sqrt{3}$ , de modo que existe un límite concreto a la tensión aplicada al motor (la cual se considerará para todos los efectos como perfectamente sinusoidal)



**Figura 2.8: Esquema típico inversor-motor, como el utilizado en Eolian 2**

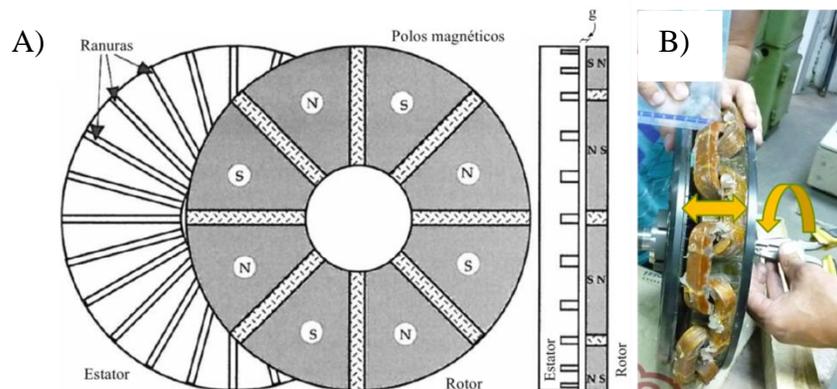
Por otro lado el motor del vehículo, utilizado en los eventos de 2007 y 2011, corresponde al modelo SCM150, de la compañía New Generation Motors [38, 39], acompañado del inversor EVC402 de la misma compañía [42]. Siendo un motor de flujo axial, su topología se caracteriza por la disposición de dos piezas cilíndricas coaxiales, a modo de estator y de rotor. En el primero se ubica un núcleo de hierro laminado magnético rodeado por el enrollado trifásico de armadura, mientras que en el segundo, principalmente una pieza de hierro que sostiene los polos magnéticos, hechos de imanes permanentes de aleación de Neodimio-Hierro-Boro (NdFeB) [40, 41]. La Figura 2.9 muestra un resumen de los límites de operación tanto del motor como del inversor [39, 42].

* Specifications (Preliminary)			SCM150		EVC402-092	
Peak Power	kW		7.5		Peak RMS Phase Current (Amps)	145
Continuous Power @ $V_{nom}$	kW		3.75		Peak Phase Current, Trapezoidal Mode (Amps)	175
Speed @ Peak Power	RPM		1300		Nominal Bus Voltage (Volts)	66-108
No-Load Speed	RPM		1700		Min./Max. Operating Voltage (Volts)	50/135
Peak Torque @ $I_{max}(T_p)$	Nm		135		Maximum Withstand Voltage (Volts)	160
DC Bus Voltage Nominal ( $V_{nom}$ )	V		96 & 48		Input Capacitance (uF)	12,000
Weight	kg		20		Peak Efficiency %	99
					Height (mm/in.)	135/5.29
					Width (mm/in.)	156/6.13
					Length (mm/in.)	332/13.06
					Weight (kg/lbs)	4.9/10.75

**Figura 2.9: Límites de operación del motor (izquierda) y su inversor (derecha)**

Este tipo de motores son muy populares en vehículos solares [41, 43, 44], debido principalmente a su alta razón potencia-peso, su excelente eficiencia máxima (por sobre el 95%) y su capacidad de ser ubicados directamente sobre las ruedas del vehículo, eliminando la necesidad de componentes adicionales de transmisión mecánica que introducen fuentes de pérdidas y peso adicional al vehículo [40].

La topología del motor se muestra en la Figura 2.10, la cual es adaptada de [40]. Otra característica que destaca del dispositivo es la presencia de un mecanismo que controla el ancho del entrehierro, la magnitud  $g$  de la figura. Si bien el solo manejo de la corriente de armadura permite un control bastante preciso del torque ejercido por el motor, con éste es posible con aun mayor libertad el punto de operación de la máquina de modo de lograr un torque aun mayor a la partida, y velocidades más altas en régimen permanente que si se tuviera un ancho de entrehierro fijo. Según se verá, este mecanismo actúa como una forma adicional de lograr regímenes de flujo debilitado en la operación del motor. El lector interesado puede consultar las referencias [45, 46].



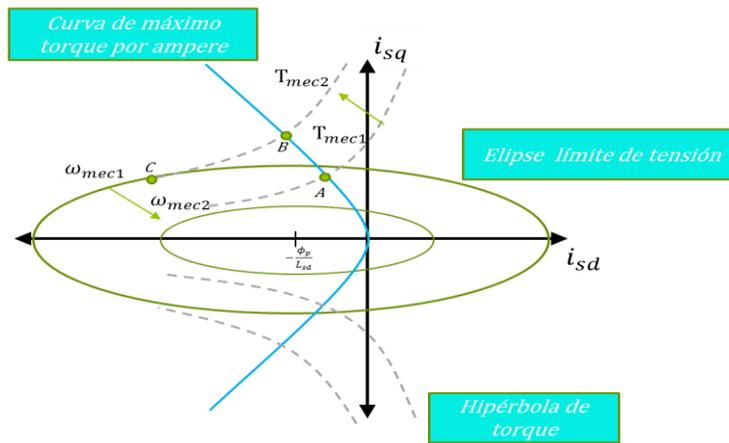
**Figura 2.10: (A) Topología de un motor de imán permanente de flujo axial como el utilizado en Eolian 2. (B) Mecanismo de ajuste del entrehierro.**

Dentro del marco de referencia de las variables de corriente alterna referidas al rotor, las ecuaciones de operación de la máquina corresponden a

$$\begin{aligned}
 u_{sd} &= R_s i_{sd} - L_{sq} \omega_s i_{sq} + L_{sd} \frac{di_{sd}}{dt} \\
 u_{sq} &= R_s i_{sq} + L_{sd} \omega_s i_{sd} + L_{sq} \frac{di_{sq}}{dt} + \omega_s \phi_p \\
 T_{mec} &= \frac{2}{3} z_p \left( \phi_p i_{sq} + i_{sd} i_{sq} (L_{sd} - L_{sq}) \right) \\
 P_{in} &= \frac{2}{3} \left( R_s (i_{sd}^2 + i_{sq}^2) + \frac{1}{2} L_{sd} \frac{di_{sd}^2}{dt} + \frac{1}{2} L_{sq} \frac{di_{sq}^2}{dt} + (L_{sd} - L_{sq}) \omega_s i_{sd} i_{sq} + \omega_s \phi_p i_{sq} \right),
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

en que  $u_{sd}$  y  $u_{sq}$  representan los voltajes directo y en cuadratura aplicados sobre el estator de ésta,  $i_{sd}$  e  $i_{sq}$ , las corrientes asociadas a los respectivos enrollados ficticios y  $\phi_p$ , el flujo magnético proveniente de los imanes permanentes del rotor que es captado por los enrollados del estator. Así, el valor de  $\phi_p$  resulta decreciente con el ancho de entrehierro,  $g$  en la Figura 2.10, pues el flujo de fuga en este último resulta creciente con dicha cantidad. Al estar más separados el estator y el rotor, el estator solo es capaz de recibir una fracción menor del flujo magnético producido por el rotor.  $L_{sd}$  y  $L_{sq}$  representan las inductancias del estator de la máquina,  $R_s$  es la resistencia de fase de ésta y  $\omega_s$ , la frecuencia de las variables eléctricas, directamente proporcional a la velocidad de giro del rotor a través de la relación  $\omega_{mec} = 1/z_p \cdot \omega_s$ , con  $z_p$  el número de pares de polos magnéticos de la máquina. Finalmente,  $P_{in}$  y  $T_{mec}$  representan la potencia (activa) de entrada al motor y el torque mecánico ejercido por éste, respectivamente. El lector interesado puede consultar [47, 7] para encontrar detalles sobre la obtención de este modelo.

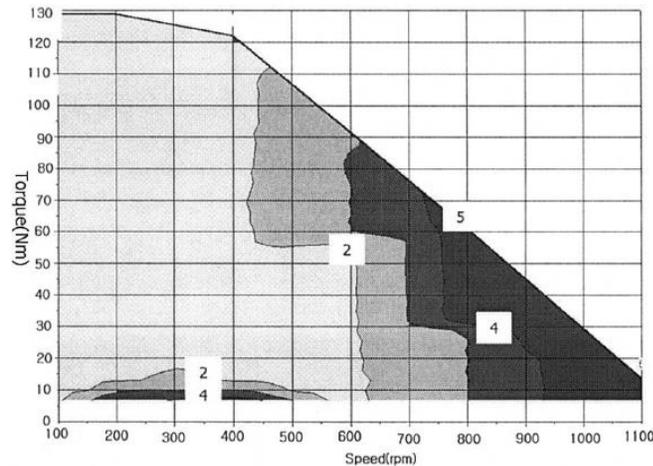
Observando nuevamente que la magnitud de la tensión de corriente alterna aplicada al motor,  $U_{AC} = \frac{2}{3} \sqrt{u_{sd}^2 + u_{sq}^2}$  se encuentra limitada por la capacidad del inversor, es posible establecer la ventaja del régimen de operación de flujo debilitado [48, 49]. La Figura 2.11 muestra la región de operación de la máquina referida a las corrientes  $i_{sd}$  e  $i_{sq}$ .



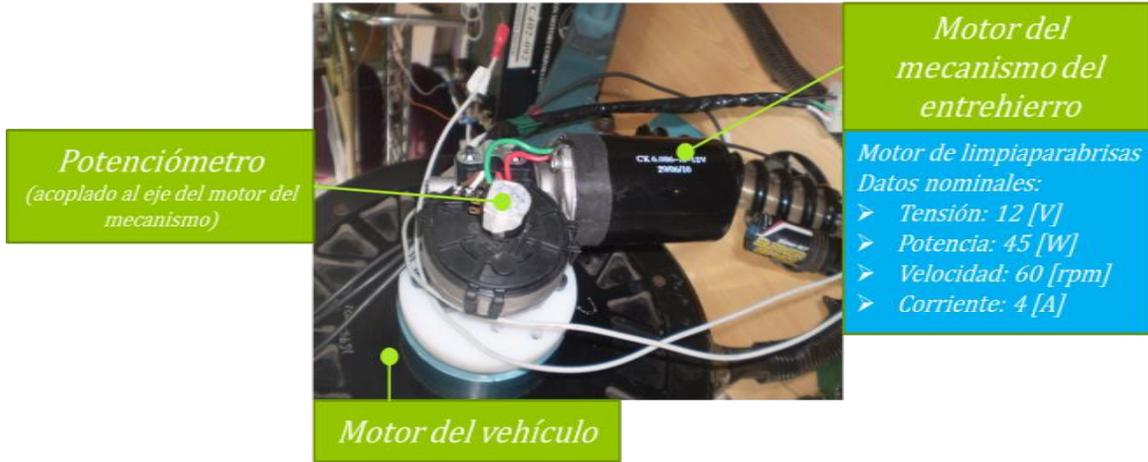
**Figura 2.11: Región de operación del motor de imán permanente. Efecto de la velocidad y del régimen de flujo debilitado.**

Al incrementarse la velocidad de giro del rotor de  $\omega_{mec1}$  a  $\omega_{mec2}$ , el efecto de reacción de armadura también aumenta, limitando la corriente máxima que puede alcanzarse, descrita por las elipses concéntricas denominadas “límite de tensión”. Considerando además que la convexidad de la hipérbolas de torque en dicha región implica la existencia de pares de corriente  $[i_{sd}^*, i_{sq}^*]^T$  que logran maximizar la producción de la torque dada una magnitud particular de su vector asociado, se tiene que una operación eficiente de la máquina requiere desde luego que el punto de operación se encuentre dentro del lugar geométrico de las tales, la curva de máximo torque por ampere (MTPA por su sigla en inglés). Sin embargo, a velocidades altas no es posible alcanzar ciertos valores de torque debido a la limitación de voltaje (en la Figura 2.11,  $T_{mec1} < T_{mec2}$ ), lo que es contrarrestado utilizando cantidades mayores de corriente directa para contrarrestar el flujo magnético polar, en lo que se conoce como “régimen de flujo debilitado”. En el ejemplo de la misma figura, el punto *A* representa una demanda de torque  $T_{mec1}$ , que a una velocidad  $\omega_{mec1}$  es alcanzable de la forma más eficiente posible, pero a  $\omega_{mec2}$  ya no es alcanzable. Por otro lado, a  $\omega_{mec1}$  el comando de torque  $T_{mec2}$  solamente es alcanzable si se aplica un régimen de flujo debilitado, lo cual es representado por los puntos *B* y *C*. Resulta importante destacar que el centro de las elipses de límite de tensión se ubica precisamente en  $[-\frac{\phi_p}{L_{sd}}, 0]$  y que los semiejes de éstas no dependen de  $\phi_p$ , con lo cual es posible, ajustando esta magnitud, lograr torque mayores a velocidades bajas y velocidades mayores a torques menores.

En [46] ya se ha hecho un estudio extensivo de una variante cercana del motor estudiado, obteniéndose los mapas de la Figura 2.12, en que se indica cuál es el ancho de entrehierro que minimiza el consumo de potencia para un determinado punto de operación en la curva torque-velocidad del motor. Para ajustar efectivamente el ancho de entrehierro puede implementarse el mapa de tal figura en una tabla en la memoria de un microcontrolador, y utilizar un esquema de control PI sobre un servomotor utilizando un potenciómetro multivoltas para realimentar la posición actual del mecanismo, pues la carrera completa de éste equivale a dos vueltas y media del tornillo que lo ajusta. En Eolian 2 se intentó utilizar el esquema de la Figura 2.13. El mecanismo de ajuste requiere unos 7 [Nm] para su ajuste en la zona de entrehierro mínimo.



**Figura 2.12: Entrehierro óptimo para distintos valores de torque-velocidad aplicados en el eje del motor.**



**Figura 2.13: Sistema de ajuste del entrehierro de Eolian 2.**

Dicho lo anterior, cabe destacar que el modelo de las ecuaciones (2.18) no considera otros efectos de pérdidas existentes en la máquina, como pérdidas magnéticas y mecánicas. Aranda [14] ya obtuvo un modelo de pérdidas para el conjunto motor-inversor, el cual es válido cuando se ha escogido el ancho del entrehierro óptimo para un punto de operación, y viene dado por

$$P_{Lm} = k_0 v + k_1 |P_e| + k_2 \left( \frac{P_e}{v} \right)^2 \quad (2.19)$$

En que  $P_e$  es la misma potencia en el eje que en la Sección 2.1. Si  $P_e$  está en [W] y  $v$ , la velocidad del vehículo, está en [m/s], los valores de los parámetros [ $k_0, k_1, k_2$ ] vienen dados en la Tabla 2.4. A partir de esto, se cumple entonces que

$$P_{in} = P_{Lm} + P_e = k_0 v + k_1 |P_e| + k_2 \left( \frac{P_e}{v} \right)^2 + P_e. \quad (2.20)$$

**Tabla 2.4: Valores de los parámetros para el modelo de pérdidas por Aranda [14]**

Parámetro	Valor
$k_0$	0.059 [N]
$k_1$	0.043 [-]
$k_2$	0.00785 [s/kg]

De (2.20) se tiene entonces para el  $P_e \geq 0$ , que

$$P_e = -\frac{(k_1 + 1)v^2}{2k_2} + \sqrt{\left( \frac{(k_1 + 1)v^2}{2k_2} \right)^2 + \frac{v^2}{k_2} (P_{in} - k_0 v)}. \quad (2.21)$$

Resulta interesante notar que  $P_e = 0$  cuando  $P_{in} = k_0 v$ . Esto denota, efectivamente, que la energía aplicada al motor está siendo completamente disipada a través del roce de rodadura de éste. Para  $P_e < 0$ ,

$$P_e = -\frac{(1 - k_1)v^2}{2k_2} + \sqrt{\left(\frac{(1 - k_1)v^2}{2k_2}\right)^2 + \frac{v^2}{k_2}(P_{in} - k_0 v)}. \quad (2.22)$$

Se desprende de inmediato que, para  $P_{in} < k_0 v$ , la potencia en el eje comienza a ser de frenado, al primar el efecto de las pérdidas por sobre el de la inyección de potencia desde el sistema eléctrico. El radical es real siempre que  $P_{in} \geq k_0 v - \frac{(1-k_1)^2}{4k_2} v^2$ , lo cual define inmediatamente la potencia máxima a la cual es posible regenerar energía a través del frenado eléctrico del vehículo. Notar cómo, en aquél caso, siendo ambas potencias negativas,  $P_{in} \geq P_e$ .

### 2.3. Energía solar

Resulta de primordial importancia el poder realizar una estimación correcta de la energía solar a recibir, pues depende de este recurso la capacidad motriz del vehículo. El contar con una buena estimación de la radiación a recibir permitirá plantear una estrategia agresiva, mientras que si la tal es de baja calidad, usualmente se incurrirá en error, de modo que una estrategia agresiva probablemente utilizará más energía de la que se esté recibiendo, obteniendo el esquema realimentado a proponer una relevancia aún mayor. Sea cual fuere el caso, la presente sección da cuenta de una forma que se sugiere para la estimación de la potencia solar a recibir<sup>3</sup>. Durante las experiencias de Atacama y Australia de 2011 se utilizó el modelo descrito a continuación. El lector interesado en los detalles puede consultar [32], Capítulo 2. También [14] ha aplicado el modelo aquí expuesto.

La radiación que incide sobre un plano perpendicular a la misma y ubicado fuera de la atmósfera en el  $N$ -ésimo día del año corresponde a

$$G_{on} = G_{sc} \left(1 + 0.033 \cos\left(\frac{360N}{365}\right)\right), \quad (2.23)$$

donde  $G_{sc}$  es la constante solar, actualmente calculada como  $G_{sc} = 1366.1 [W/m^2]$  y  $N$  es el día del año que se está considerando en los cálculos. Cuando este plano no se encuentra perpendicular a la radiación incidente, sino paralelo al suelo, dicha magnitud debe corregirse multiplicando por el factor

<sup>3</sup> Agradecimientos a Álvaro Silva y Carlos Aedo, del equipo de Celdas de Eolian II.

$$\cos(\Phi) = \cos(L) \cos(\delta) \cos(h) + \sin(L) \sin(\delta). \quad (2.24)$$

$\Phi$  es llamado el *ángulo cenital*, y corresponde al existente entre los rayos del sol y la vertical.  $L$  representa la latitud local,  $\delta$  la declinación solar y  $h$  corresponde al ángulo horario. Todos estos parámetros indican la orientación de tal plano, la cual se ve a su vez afectada por los movimientos periódicos de la tierra: rotación, traslación y nutación. Por consiguiente, la hora del día, la época del año y la localidad donde se quiere estimar la radiación afectan efectivamente estos parámetros. Sin entrar en detalles, se listan a continuación las expresiones para los ángulos recién enumerados:

$$\begin{aligned} \delta &= 23.45^\circ \sin \left[ \frac{360}{365} (284 + N) \right] \\ B &= \frac{360(N - 81)}{364} \\ ET &= 9.87 \sin(2B) - 7.52 \cos(B) - 1.5 \sin(B) \\ AST &= LST + ET \pm 4(SL - LL) - DS \\ h &= 15(AST - 12), \end{aligned} \quad (2.25)$$

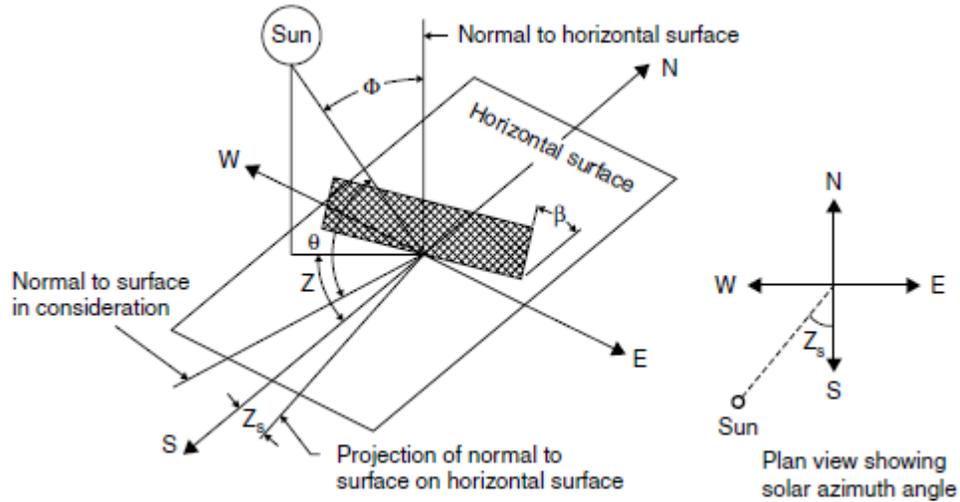
en que  $LST$  es el tiempo estándar local, medido por el reloj.  $SL$  y  $LL$  son la longitud estándar y local, mientras que  $DS$  cuenta por los eventuales ajustes institucionales que puedan realizarse sobre el horario de acuerdo a la estacionalidad (horarios de invierno y verano). Todas las expresiones para  $h$  vienen dadas en minutos. El factor 15 de la ecuación que define este ángulo permite realizar la conversión a grados sexagesimales, unidad en la cual también  $\delta$  está descrito. El valor de  $L$  puede ser obtenido a partir de la lectura de un dispositivo de posicionamiento global (GPS), dependiendo éste únicamente de la localidad a estudiar.  $AST$  es el tiempo solar aparente, el cual relaciona la hora del día con la posición del sol. El signo  $\pm$  de la ecuación (2.25) toma su valor de acuerdo a si se está considerando una ubicación al este del meridiano de Greenwich (signo +) o al oeste de éste (signo -).

Finalmente, si el plano tiene una inclinación de  $\beta$  con respecto a la horizontal, se define el *ángulo de incidencia* de los rayos solares sobre tal plano,  $\theta$ , a partir de

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \sin(L) \sin(\delta) \cos(\beta) - \cos(L) \sin(\delta) \sin(\beta) \cos(Z_s) \\ &\quad + \cos(L) \cos(\delta) \cos(h) \cos(\beta) \\ &\quad + \sin(L) \cos(\delta) \cos(h) \sin(\beta) \cos(Z_s) \\ &\quad + \cos(\delta) \sin(h) \sin(\beta) \sin(Z_s) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Con  $Z_s$  el ángulo formado entre el sur verdadero y la normal a la superficie. La Figura 2.14 [32] explica visualmente los ángulos mencionados. En el caso del panel solar del vehículo,

una buena estimación para el ángulo de incidencia es justamente  $\Phi$ , debido a que la mayor parte del tiempo su orientación será simplemente paralela al suelo, a excepción de las mañanas y tardes, en que una práctica usual en estas competencias consiste en inclinar los paneles solares hacia el sol de modo de maximizar la energía captada por las celdas antes o después de un día de competición.



**Figura 2.14: Ángulos solares**

El efecto de la atmósfera en dicha radiación corresponde a un nuevo obstáculo en la llegada de éste a las celdas solares, de modo que una parte de la incidente a nuestro planeta es reflejada de vuelta al espacio, otra absorbida y otra es finalmente transmitida a través de las diversas capas de aquella, dando así origen a una radiación que llega a la superficie de la tierra luego de una compleja interacción con la atmósfera, llamada *radiación difusa*, y otra que logra llegar directamente, llamada en consecuencia *radiación directa*. Las nubes y la capa de ozono contribuyen a este efecto. En consecuencia, se suele añadir un coeficiente de atenuación, denominado *transmisividad atmosférica*, de modo que el modelo final considerado para la radiación a recibir corresponde a

$$G = \alpha_{at} G_{sc} \left( 1 + 0.033 \cos \left( \frac{360N}{365} \right) \right) (0.6 + 0.2 \cos(\Phi)) \cos(\theta), \quad (2.27)$$

en que el coeficiente  $\alpha_{at}$  se denomina “coeficiente de atenuación”. Éste puede ser dependiente del tiempo, y permite dar cuenta de la presencia de efectos obstructivos para la radiación sobre las celdas solares del vehículo, así como nubes, vegetación o edificios. Ciertamente el desafío para los miembros del equipo es el estimar dichos coeficientes, para lo cual existen diversas metodologías. En 2011, por ejemplo, se utilizó el pronóstico entregado por la Administración nacional oceánica y atmosférica del Ministerio de comercio de los Estados Unidos [50]. En el presente trabajo se considera que el equipo dispone también de un piranómetro como el de [51], el cual permite contar con valores precisos de radiación total recibidos. En tal oportunidad el equipo contó con uno, prestado cortésmente por los patrocinadores del evento.

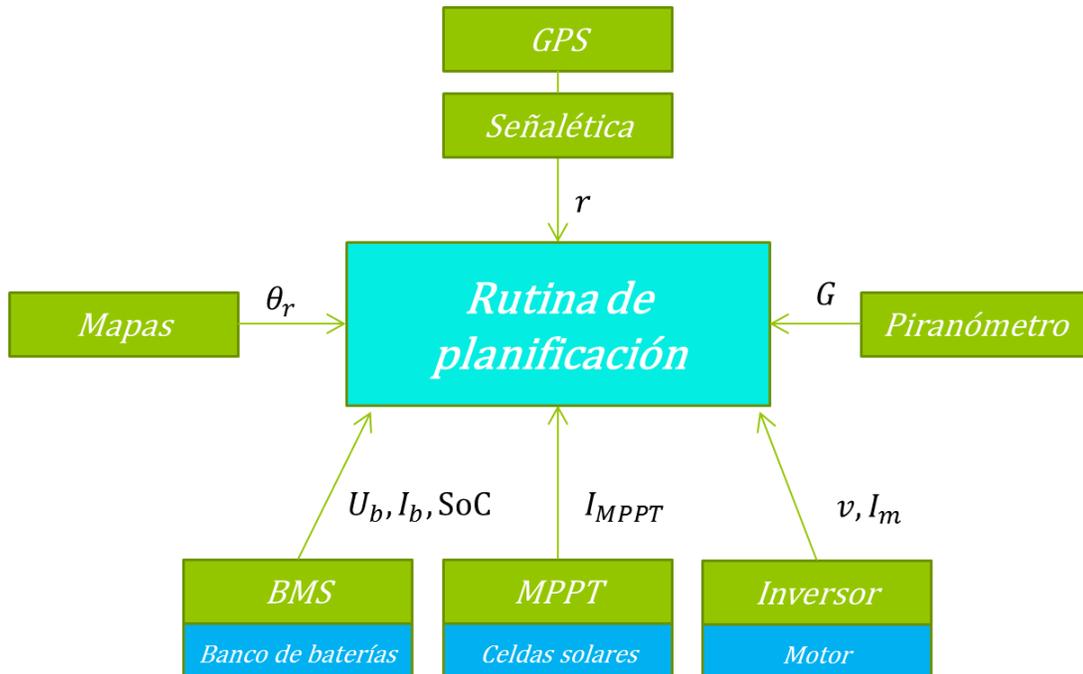
## 2.4. Equipo de telemetría

Resulta muy importante el monitoreo del vehículo, principalmente en lo que a consumo energético se refiere. Si se deja este asunto inadvertido, se puede caer fácilmente en situaciones de carencia energética.

Existen diversas variables de interés a la hora de realizar mediciones. La velocidad del vehículo es desde luego una variable importante a considerar. Por otro lado, la tensión en bornes del banco de baterías entrega información acerca del estado de carga de éstas, lo que resulta crucial para la planificación de la estrategia a seguir. La corriente aportada por el banco de baterías permite estimar a qué tasa se descargan éstas por unidad de tiempo y la corriente entregada por los MPPT permite monitorear a qué tasa se recibe energía desde el medio ambiente. El motor del vehículo también puede aportar información acerca de cuánta corriente consume, de manera de estimarse la potencia utilizada en el movimiento de este último. El correlacionar las variables medidas de forma adecuada permite realizar conclusiones con respecto al rendimiento del vehículo en carrera. Por ejemplo, si se tiene un determinado modelo de éste que indique que para cierta velocidad y cierta pendiente el consumo debe tener un determinado valor, y esto no es así, entonces existe una discrepancia que puede ser analizada para prevenir despilfarros energéticos innecesarios y así garantizar una operación óptima también desde el punto de vista de mantención.

Resulta importante considerar la posibilidad de realizar mediciones con instrumentación disponible en los vehículos escolta. El instrumento indispensable para el estratega es un reloj. Además, es recomendable siempre contar con un sistema de posicionamiento global (GPS por sus siglas en inglés) que permita al equipo saber en qué punto de la pista se encuentra el vehículo exactamente, y combinar lo anterior con algún instrumento cartográfico que dé cuenta de las pendientes próximas a enfrentar (véase Sección 2.1.1). En el camino también es posible revisar la señalética que indica el kilometraje de la pista, de manera de cumplir el mismo objetivo. En algunos casos, puede ser también importante conocer la radiación solar que el vehículo está enfrentando. Para esto pueden utilizarse instrumentos adicionales, como piranómetros (utilizados por Eolian 2 en el Atacama Solar Challenge 2011). Algunos equipos han intentado utilizar celdas solares especialmente calibradas para el fin. Desde luego que existen otras mediciones importantísimas que garantizan que no se excedan los límites operacionales de los componentes del vehículo. Se considera para fines del presente trabajo que dichas mediciones son observadas periódicamente por el equipo y que se opera siempre en regiones seguras, por lo cual simplemente se omiten.

La Figura 2.15 resume las variables que pueden ser medidas a lo largo de la ruta y que pueden ser utilizadas como datos para cualquier esquema a implementar. La simbología utilizada se explica por sí sola.



**Figura 2.15: Esquema de mediciones relevantes para la planificación estratégica del vehículo**

La rutina de planificación, entonces, cuenta en línea con las señales de la Tabla 2.5:

**Tabla 2.5: Señales disponibles en línea para la rutina de planificación**

Dato	Origen de los datos	Valor
Potencia extraída de baterías	BMS	$P_b = U_b I_b$
Potencia solar de entrada	BMS, MPPT	$P_s = U_b I_{MPPT}$
Potencia consumida en el motor	BMS, Inversor	$P_{in} = U_b I_m$
Consumo energético esperado	Inversor, Mapas, GPS	Ecs. (2.9), (2.11), (2.21), (2.22)

## 2.5. Competencia solar

El formato del solares World Solar Challenge 2011 se resume como sigue: El objetivo de la carrera es llegar cuanto antes a la ciudad de Adelaide, South Australia, comenzando desde Darwin, en Northern Territory, utilizando solamente energía solar, y la carga inicial en baterías, para mover el vehículo. Luego de haber sido chequeados los vehículos de forma técnica para asegurar el cumplimiento de ciertos estándares de seguridad y equidad reglamentaria [52], se les permite a los equipos cargar completamente sus baterías hasta la hora de inicio de la carrera el primer día de competición. A lo largo de la ruta los equipos pueden aplicar la estrategia que decidan para conducir su vehículo solar, detenerse a realizar algunas reparaciones (con sutilezas como penalidades de tiempo sobre intervenciones del banco de baterías) o bajo ciertas circunstancias utilizar un camión auxiliar para desplazar el vehículo, en cuyo caso también se aplican descuentos. Es necesario, además, detenerse por media hora en diversas paradas de control ubicadas en ciertos poblados o localidades [53], en las cuales solamente es posible realizar mantenciones menores al vehículo [52]. Al caer el atardecer, los equipos deben establecer un campamento y pernoctar en el desierto, no pudiendo recargar baterías sino solo utilizando convenientemente la energía solar aun disponible. El horario en que el vehículo puede desplazarse es entre las 08:30 y las 17:30 del primer día y las 08:00 y las 17:00 del resto.

A lo largo de la ruta los vehículos deben cumplir con todas las leyes de tránsito de las distintas regiones que son atravesadas (Northern Territory [54] y South Australia [55, 56]). Desde 2007 se han impuesto límites de velocidad de 130 [km/h] en Northern Territory y 110 [km/h] en South Australia.

### Capítulo 3. Control óptimo del vehículo solar

Recapitulando todo lo explicitado en el Capítulo 2 es posible definir el problema a resolver: dado un vehículo solar, minimizar el tiempo utilizado en recorrer desde Darwin hasta Adelaide, sujeto a las restricciones de tránsito recién expuestas y a que el vehículo sigue el modelo que incluye los efectos mencionados entre las secciones 2.1 y 2.4. En resumen, si  $t_0$  es el tiempo de partida del evento;  $t_f$  es el tiempo en que el equipo llega a Adelaide (o, en una carrera general, a la meta);  $E_{k(max)}$  es la energía cinética máxima de acuerdo a los límites de velocidad de las respectivas regiones a atravesar;  $E_{b(max)}$  es la capacidad energética máxima de las baterías; y  $r_{Adelaide}$  es la distancia entre Darwin y Adelaide (o entre la partida y la meta); y  $P_{in}$ , la variable de control, es la potencia eléctrica suministrada al inversor, se desea

$$\begin{aligned}
 & \min_{P_{in}} t_f \\
 & \text{s. a.} \\
 & \frac{d}{dt} E_c = P_e - (a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3) \\
 & \frac{d}{dt} r = v \\
 & \frac{d}{dt} E_b = P_s(t) - P_{in} \\
 & 0 \leq E_c(t) \leq E_{c(max)}, \quad \forall t \in [t_0, t_f] \\
 & E_{b(min)} \leq E_b(t) \leq E_{b(max)}, \quad \forall t \in [t_0, t_f] \\
 & P_{in(min)} \leq P_{in}(t) \leq P_{in(max)}, \quad \forall t \in [t_0, t_f] \\
 & E_c(t_0) = 0 \\
 & r(t_0) = 0 \\
 & E_b(t_0) = E_{b(max)} \\
 & r(t_f) = r_{Adelaide} \\
 & v = \sqrt{\frac{2E_c}{m_{eq}}} \\
 & P_e = \begin{cases} -\frac{(k_1 + 1)v^2}{2k_2} + \sqrt{\left(\frac{(k_1 + 1)v^2}{2k_2}\right)^2 + \frac{v^2}{k_2}(P_{in} - k_0 v)}, & k_0 v \leq P_{in} \\ -\frac{(1 - k_1)v^2}{2k_2} + \sqrt{\left(\frac{(1 - k_1)v^2}{2k_2}\right)^2 + \frac{v^2}{k_2}(P_{in} - k_0 v)}, & k_0 v - \frac{(1 - k_1)^2}{4k_2} v^2 \leq P_{in} < k_0 v \end{cases} \\
 & a_1 = C_{r1} mg \cos(\theta_r) + mg \sin(\theta_r) + \frac{1}{2} C_D \rho_a A v_v^2 \\
 & a_2 = C_{r2} mg \cos(\theta_r) + C_D \rho_a A v_v \\
 & a_3 = \frac{1}{2} C_D \rho_a A.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Las dinámicas indicadas en la ecuación (3.1) corresponden solamente a aquellos instantes de tiempo en que el vehículo puede ser conducido. En otros momentos (de noche, de mañana y durante las paradas de control) el vehículo es descrito por ecuaciones dinámicas que dan cuenta del proceso de carga en baterías y no permiten movimiento a lo largo de la ruta. Dicha

modelación no es incluida en el presente trabajo, pero se desea hacer hincapié en que modelar detalladamente el sistema es en sí mismo un desafío.

El problema (3.1) es uno de optimización en tiempo continuo, en un espacio en de dimensión infinita. Existen ya metodologías analíticas capaces de lidiar con tales problemas, concretamente, las condiciones de primer orden de Pontryagin [2, 13] y la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB en adelante) [2]. En muchos casos simples es incluso posible obtener soluciones analíticas para el control óptimo a aplicar a partir de éstas. En la mayoría de éstos, sin embargo, aparecen prontamente múltiples dificultades a la hora de desearse alcanzar una solución analítica para sistemas más complejos, recurriéndose, en consecuencia, a métodos numéricos para su obtención. En la literatura se pueden encontrar hasta el día de hoy métodos que recurren a ambas condiciones separadamente.

En el caso de la ecuación HJB, si bien contiene en sí misma toda la información que se requiere, su naturaleza de ecuación no lineal en derivadas parciales la hace tremendamente difícil de resolver, cuando esto es posible, aun para sistemas simples, debiéndose recurrir, según ya se ha señalado, a métodos numéricos aproximados. En este caso, las metodologías principales utilizadas en la actualidad se basan en el algoritmo de programación dinámica propuesto por Bellman [57], la cual presenta, sin embargo, el fenómeno conocido como *la maldición de dimensionalidad*. Debido a la naturaleza del algoritmo, sus exigencias computacionales en cuanto a disponibilidad de memoria o uso de CPU se incrementan dramáticamente con el número de estados y controles del problema. Una ventaja de este método es, por otro lado, su capacidad de entregar un *campo de extremos*, una función extensiva del estado que permite tomar decisiones con respecto a qué acción de control tomar para cada valor del vector de estado. Lo atractivo de esta característica, sin embargo, se compensa con el almacenamiento de información sobre muchos escenarios posibles que en la práctica nunca se darán, pues la evolución del sistema nunca habrá llevado al estado a un determinado valor. En la literatura se presenta el uso de programación dinámica y enfoques derivados de la ecuación HJB como una línea de investigación muy activa.

Las condiciones de Pontryagin, por otro lado, están formuladas en forma de un problema de valor en la frontera (BVP). Dependiendo de las características del problema (presencia de restricciones en el estado inicial o final, o de restricciones en puntos interiores) éste puede ser un problema de dos puntos o de múltiples puntos. En este caso, el manejo analítico de las magnitudes involucradas se vuelve un poco más sencillo que en el anterior, pudiéndose resolver problemas de mayor complejidad de una forma más sencilla, u obtener al menos condiciones necesarias que caractericen un conjunto de controles dentro de los cuales está el óptimo, presentando así nociones intuitivas que pueden ser fácilmente utilizadas en el diseño de un controlador. Una dificultad crucial, sin embargo, de las condiciones necesarias de Pontryagin, resulta ser la carencia de información sobre el valor inicial del vector de coestado del sistema, de modo que no es posible obtener la información exacta sobre el control óptimo a aplicar, salvo que se conozcan dichos valores. Resulta interesante aquí comentar el hecho de que, al igual que en el enfoque de Bellman, se hace necesario conocer la evolución del sistema en instantes futuros para poder decidir la que éste tendrá en los instantes presentes. Este enfoque no tiene el mismo problema de *maldición de la dimensionalidad* que el algoritmo de programación dinámica, debido a que no se explora la posibilidad de encontrar el sistema en un punto por fuera de la trayectoria óptima, la cual es directamente calculada.

Otra dificultad con la cual la resolución analítica por las condiciones de Pontryagin se enfrenta es la falta de inclusión de información con respecto a las eventuales perturbaciones que la planta pueda sufrir, lo cual es crítico para el vehículo solar. Una sola perturbación no considerada puede causar que el sistema deje de comportarse de la manera esperada mientras se está aplicando la señal de control calculada, pudiéndose perder no solo la optimalidad, sino además la estabilidad de aquella. Se concluye de la revisión de todos estos puntos, que es necesario, para el presente problema, recurrir a métodos numéricos de control óptimo que permitan superar estas dificultades de forma robusta. Cabe destacar, entonces, que el desarrollo del control óptimo como disciplina aplicada ha ido de la mano con el desarrollo tecnológico del equipo computacional requerido para resolver problemas complejos [58]. En la siguiente sección se introducen brevemente los algoritmos numéricos más utilizados en la actualidad.

### **3.1. Clasificación de los métodos numéricos**

En la presente sección se procederá a la introducción de los principales métodos numéricos encontrados en la bibliografía para la solución de problemas de control óptimo no lineales [2, 58, 59]. Estos pueden ser clasificados principalmente en métodos indirectos y métodos directos.

Los métodos indirectos se caracterizan por su persistencia en la utilización de las condiciones de Pontryagin para la solución del problema de control óptimo, enfrentando las dificultades del problema de valor en la frontera que aparecen. Por un lado, es posible intentar resolver directamente el problema de valor en la frontera a través de los métodos generales de [60], pero ciertamente los problemas que surgen a partir de un enfoque indirecto poseen ciertas características particulares que pueden ser aprovechadas de una forma conveniente. Otros autores [61, 62] han preferido la resolución iterativa de subproblemas de ecuaciones diferenciales de valor inicial (IVP por sus siglas en inglés) de manera de generar una sucesión de soluciones a problemas lineales que convergen al óptimo. Por otro lado, los métodos denominados “de disparo” intentan en su variante indirecta resolver el problema considerando el coestado inicial como variable de decisión, generando en cada paso perturbaciones que permiten obtener direcciones de decrecimiento del error en las restricciones. Si el método de disparo es simple, entonces se toman como variables de decisión solamente los valores del coestado inicial; si es múltiple, entonces el problema se divide en múltiples intervalos, considerándose restricciones adicionales de continuidad del estado cuando corresponda, añadiendo a las variables de decisión el estado y coestado inicial de cada intervalo.

Acerca de los métodos indirectos resulta importante destacar que, basándose en las condiciones necesarias de optimalidad, resulta trabajoso el empezar a trabajar con éstos, debido a que es necesario contar con derivadas analíticas de las distintas funciones involucradas (restricciones y ecuaciones dinámicas) y una expresión del control óptimo en términos de las variables de estado y coestado en un determinado instante de tiempo. Si bien para problemas sencillos esto puede ser fácil de obtener, a medida que la complejidad algebraica de los problemas abordados se incrementa la ventaja de estos métodos rápidamente se desvanece, existiendo casos en que es incluso imposible obtener alguna de las expresiones analíticas requeridas. Por otro lado, según se aprecia en las condiciones de Pontryagin, la ecuación diferencial asociada al coestado puede presentar comportamientos inestables, haciéndose muy sensible al valor del coestado inicial con que se intente iniciar la integración, lo cual se acentúa cuando se tienen problemas con escalas de tiempo muy disímiles entre los estados, pudiéndose incluso incurrir en inestabilidad numérica [60].

Los métodos directos se llaman así precisamente porque evitan la necesidad de derivar las condiciones de Pontryagin y el trabajo con el coestado inicial, parametrizando en vez de eso el control aplicado de alguna forma conveniente para finalmente convertir el problema de control óptimo, formulado en un espacio de tiempo continuo, en uno de dimensión finita, para luego aplicar algún método de optimización no lineal paramétrica [3]. Hay dos líneas que destacan dentro de los planteamientos revisados. Por un lado, aquellos basados en métodos de disparo han evolucionado hacia, según se ha comentado, la discretización de la variable de control, típicamente en formato constante por tramos pero también en formato, por ejemplo, polinomial, pero dejando la variable de estado como resultante de un proceso de integración numérica de una ecuación diferencial ordinaria [19, 10]. Al igual que en la variante indirecta, al tenerse disparo simple se itera únicamente sobre el control, mientras que al tenerse disparo múltiple también se itera sobre los valores del vector de estado al interior del intervalo considerado, mejorándose así las propiedades del método con respecto a aspectos numéricos [60]. El otro gran enfoque investigado consiste en transcribir además las variables de estado, de modo de incrementar la velocidad de cálculo, llamados métodos de transcripción directa [63]. En ese sentido, la transcripción utilizada puede corresponder a esquemas tipo Runge-Kutta [26] o a un comportamiento polinomial, dando así origen a los métodos pseudoespectrales [9, 25, 64], comentados más en detalle en la Sección 3.2. El foco del presente trabajo estará situado en una clase particular de este tipo de métodos: el método Gaussiano pseudoespectral [65].

Es también posible comentar desde ya las ventajas y desventajas de las metodologías directas. Por un lado, podría suceder que la elección arbitraria de una discretización en particular de la señal de control aleje inmediatamente a la función objetivo de su valor realmente óptimo, pues es probable que la evolución real de la variable controlada óptima presente comportamientos que la aproximación escogida sea incapaz de reproducir. Esto ocurre, por ejemplo, si el control óptimo real es discontinuo en cierto instante de tiempo, como ocurre en un control tipo bang-bang [25] y se escoge una transcripción polinomial para un intervalo que lo contiene. Sin embargo, si se toman las precauciones del caso para una transcripción particular, los valores a obtener de la función objetivo serán bastante razonables. En cuanto a los métodos de disparo, dada su dependencia con un integrador de ecuaciones diferenciales ordinarias, es posible que cada iteración sea más lenta que las propuestas por los esquemas de transcripción directa, con la ventaja asociada de entregar también un detalle mayor con respecto las trayectorias calculadas, lo cual puede ser particularmente útil en la presencia, por ejemplo, de perturbaciones externas que puedan producir comportamientos bruscos en las variables de estado. Los métodos pseudoespectrales, por otro lado, cuentan con la gran ventaja de poder calcular a costo computacional muy reducido tanto la dinámica como el control óptimo al mismo tiempo. La desventaja de esto es, claramente, la pérdida de detalle de la trayectoria seguida. Por otro lado, estos métodos poseen la desventaja de que su respuesta depende de la elección de la malla de puntos en que se evalúan los polinomios escogidos, lo cual se comentará con el debido detalle más adelante (véase Sección 3.2). Los avances más recientes en esta materia trabajan con iteraciones sucesivas sobre dicha malla para intentar converger rápidamente a soluciones adecuadas [66-68].

Hasta ahora solamente se ha hablado acerca de métodos de cálculo de control óptimo, pero no se ha discutido acerca de su relación con perturbaciones externas<sup>4</sup>. La verdad es que, en estricto rigor, aun no se han generado trabajos de control óptimo realimentado, sino que se cuenta

---

<sup>4</sup> Si bien en el análisis anterior el término fue utilizado, cabe destacar que esto fue solo en un contexto numérico, matemático, de lazo abierto: un modelo puede esperar ciertas perturbaciones, pero la realidad puede ser otra.

cuando mucho con aproximaciones de éste en torno a ciertas curvas de operación [58], o los *campos de extremos* generados por la programación dinámica. El concepto que se utiliza en la literatura corresponde, por lo general, a *control óptimo en tiempo real*, el cual consiste en la generación periódica de señales de control a aplicar sobre la planta y que minimicen la función objetivo a partir del estado recientemente medido. En este tipo de implementaciones se resuelve el problema de control óptimo de forma reiterada, resultando el tiempo de cálculo ser un factor primordial a la hora de obtener soluciones que realmente representen la trayectoria que el estado de la planta debe seguir para minimizar la función de costo. Existen también varios enfoques que tratan de lo mismo en la literatura: para los métodos de disparo (donde, cabe destacar, el método de disparo múltiple ha ganado mayor popularidad) se procede a la solución por partes de sendos problemas de programación cuadrática dependientes de las diversas mediciones del estado realizadas, las cuales son supuestas cercanas en sentido temporal [3, 10, 19]. Otros autores han optado por valerse de métodos indirectos acompañados de las ventajas de rapidez de cálculo de los métodos pseudoespectrales para entregar estimaciones rápidas del coestado inicial luego de resolver un problema aproximado y posteriormente utilizar las condiciones de Pontryagin para obtener el control óptimo a aplicar [25]. En el presente trabajo se utilizará el método Gaussiano pseudoespectral para obtener bajo un enfoque directo el control a aplicar. La idea central subyacente a todos estos métodos consiste, intuitivamente, en evaluar constantemente la situación del estado actual y volver a planificar el futuro cada vez, de modo de siempre estar avanzando hacia lo que es óptimo para la función de costo escogida.

### 3.2. Método Gaussiano pseudoespectral

En la presente sección se explica brevemente el método Gaussiano pseudoespectral ya mencionado [25, 65], el cual, según se ve en la Sección 3.3, es clave para la aplicación del algoritmo propuesto.

Los métodos pseudoespectrales se llaman todos así debido a que, según ya se ha introducido, se basan en la descomposición del estado y el control de un problema de control óptimo en un espacio de dimensión finita. Esto puede lograrse aplicando, por ejemplo, un esquema de interpolación mediante polinomios de Lagrange [29], los cuales vienen dados por

$$L_i(t) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \left( \frac{t - t_k}{t_i - t_k} \right), \quad (3.2)$$

de modo que una función  $f(t)$  puede ser interpolada en  $n$  diferentes puntos mediante la relación

$$f(t) \approx \hat{f}(t) = \sum_{i=1}^n f(t_i) L_i(t). \quad (3.3)$$

Resulta importante destacar que  $\hat{f}(t)$  es exactamente igual a  $f(t)$  en los puntos  $\{t_i\}_{i=1}^n$ . Los polinomios de Lagrange presentan, por otro lado, la propiedad de anularse en todos los puntos  $\{t_i\}_{i=1}^n$  salvo en uno, de la forma

$$L_i(t_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k. \end{cases} \quad (3.4)$$

Una función  $f(t)$  particular puede ser el vector de estado de un determinado sistema dinámico, de modo que se tendría

$$x(t) \approx X(t) = \sum_{k=0}^N x(t_k) L_k(t). \quad (3.5)$$

Para problemas de tiempo final (o incluso inicial) libre, el intervalo  $[t_0, t_f]$  se transformará siempre al intervalo  $[-1, 1]$  a través de la transformación

$$\tau = \frac{2}{t_f - t_0} (t - t_0) - 1, \quad (3.6)$$

de modo de dejar a  $t_f$  como variable de decisión. La elección del intervalo imagen  $[-1, 1]$  se hace pensando en aprovechar la técnica de integración por cuadratura Gaussiana [29]: si  $f(t)$  es una función definida en tal intervalo,  $\{\tau_i\}_{i=1}^n$  los puntos de Legendre-Gauss (i.e. las raíces del polinomio de Legendre de grado  $n$ , LG en lo sucesivo), y los pesos  $\{\omega_i\}_{i=1}^n$  son definidos como

$$\omega_i = \int_{-1}^1 L_i(\tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.7)$$

Entonces puede calcularse la integral de dicha función mediante la expresión

$$\int_{-1}^1 f(\tau) d\tau \approx \sum_{i=1}^n \omega_i f(\tau_i), \quad (3.8)$$

la cual es exacta cuando  $f(t)$  es un polinomio de grado  $2n - 1$ . De este modo, el método Gaussiano pseudoespectral recupera a la vez las bondades de la cuadratura Gaussiana y la interpolación mediante polinomios de Lagrange escogiendo los instantes de tiempo (o puntos de colocación)  $\{t_i\}_{i=1}^n$  de la ecuación (3.5) como los puntos LG  $\{\tau_i\}_{i=1}^n$  anteriormente mencionados. Al utilizarse un polinomio de grado  $n$  para la aproximación del estado, el cálculo de la trayectoria de ésta a lo largo del intervalo de integración es exacto.

Por otro lado, de (3.5) se tiene que

$$\dot{x}(t_i) \approx \dot{X}(t_i) = x(t_0)\bar{D}_i + \sum_{k=1}^n x(t_k)D_{ik}, \quad (3.9)$$

con

$$D_{ik} = \dot{L}_k(t_i), \quad \bar{D}_i = \dot{L}_0(t_i). \quad (3.10)$$

La ecuación (3.6), por otro lado, aporta finalmente que se puede transcribir, en los puntos LG  $\{t_i\}_{i=1}^n$ , la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, u, t), \quad t \in [t_0, t_f] \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

como

$$\begin{aligned} \frac{2}{(t_f - t_0)} \bar{D}_i X(t_0) + \frac{2}{(t_f - t_0)} \sum_{k=1}^n D_{ik} X_k &= f(X_i, U_i, t_i), \quad i = 1, \dots, n. \\ X(t_0) &= X_0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Con todo lo anterior, un problema general de control óptimo descrito por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \min_u J &= \Phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \\ \text{s. a} \quad \frac{dx}{dt} &= f(x(t), u(t), t) \\ \phi(x(t_0), t_0, x(t_f), t_f) &= 0 \\ C(x(t), u(t), t) &\leq 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

puede ser transcrito mediante el método Gaussiano pseudoespectral como

$$\begin{aligned}
\min_{\{X_k, U_k\}_{k=1, t_f, t_0}^n} J &= \Phi(X(t_f), t_f) + \frac{(t_f - t_0)}{2} \sum_{k=1}^n g(X_k, U_k, t_k) w_k \\
\bar{D}_i X(t_0) + \sum_{k=1}^n D_{ik} X_k - \frac{(t_f - t_0)}{2} f(X_i, U_i, t_i) &= 0, \quad i = 1, \dots, n \\
X(t_0) + \frac{(t_f - t_0)}{2} \sum_{k=1}^n w_k f(X_k, U_k, t_k) - X(t_f) &= 0 \\
\phi(X(t_0), t_0, X(t_f), t_f) &= 0 \\
C(X_i, U_i, t_i) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, n,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

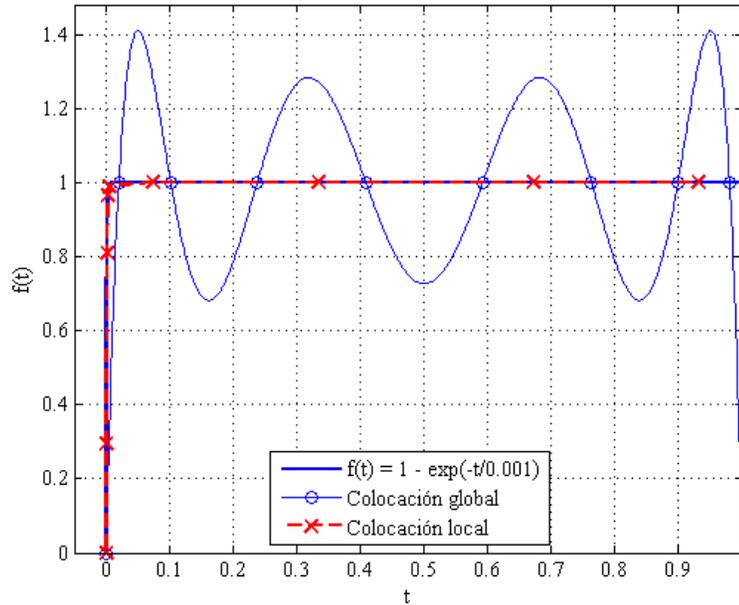
el cual puede ser resumido mediante

$$\begin{aligned}
&\min_z F(z) \\
&s. a \\
&G(z) = 0 \\
&H(z) \leq 0.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Si en el problema (3.13) el estado y el control tienen dimensión  $n_x$  y  $n_u$  respectivamente, entonces el vector  $z$  de (3.15) tiene magnitud  $n(n_x + n_u) + 2$ , debido a la elección de  $n$  nodos, cada uno con  $n_x$  variables de estado y  $n_u$  variables de control, más los instantes de tiempo  $t_0$  y  $t_f$ . Eventuales implementaciones podrían incluir además algunas componentes de  $X(t_0)$  y parámetros de diseño de algún proceso como variables de decisión, pero no son abordadas en el presente trabajo. Se ha construido así un problema de optimización paramétrica, en que las variables de decisión son justamente los valores del vector de estado y el control en los puntos LG. La estructura del problema, según lo explicitado en [65], es de tipo disperso, es decir, se forman matrices jacobianas con multitud de ceros, por lo cual se hace apropiado el uso en general de cualquier algoritmo de programación no-lineal [3] pero más aún los algoritmos dispersos SQP, como SNOPT [69]. Nótese cómo este planteamiento convierte las restricciones dinámicas del problema en simples restricciones de igualdad.

Existen varios planteamientos que permiten mejorar las características de convergencia y calidad de aproximación del método pseudoespectral. Los planteamientos multi-intervalos [72] permiten distribuir los puntos en que se evalúan el estado y el control de forma de considerar mejor las dinámicas rápidas. Aunque lo mismo puede realizarse simplemente aumentando el número de puntos a evaluar en un enfoque global como el presentado en (3.14), es posible observar que para dinámicas muy rápidas (por ejemplo, un sistema de primer orden que converge rápidamente a una respuesta de régimen permanente, la cual es representada durante un largo intervalo de tiempo) es más preciso el asignar una malla densa de puntos en aquellas zonas donde se tiene una rápida dinámica y una menos densa en otros casos, lo que lleva a plantear el dividir

el intervalo deseado en una serie de sub-intervalos y escoger los puntos Gaussianos de cada uno utilizando la transformación (3.6) con los límites temporales de cada uno. Este procedimiento se conoce en la literatura como colocación local, mientras que cuando solo existe un intervalo el procedimiento se conoce como colocación global. En la Figura 3.1 se muestra un ejemplo de interpolación en que esta última produce resultados oscilatorios sin poder aproximarse correctamente al comportamiento real de una determinada función, situación que es corregida mediante una asignación adecuada de intervalos y la aplicación de colocación local. Cuando no se presenta esta situación, es preferible sin embargo utilizar una colocación global por sobre la local [70].



**Figura 3.1: Efecto de la elección de un esquema de colocación global y uno local. Se aprecia la ventaja de contar con el segundo método cuando las dinámicas de un sistema son muy rápidas. Para la colocación global se utilizaron ocho puntos Gaussianos; para la local, dos intervalos  $([0, 0.005])$  y  $[0.005, 1])$  de cuatro cada uno.**

Existen dos variantes adicionales del método Gaussiano pseudo espectral. Debido a que los puntos Gaussianos se encuentran todos en el intervalo abierto  $(-1, +1)$ , cabe plantearse la posibilidad de incluir también como nodos de colocación los límites de éste,  $\tau_0 = -1$  y  $\tau_{n+1} = +1$ . El método Lobatto pseudo espectral (LPM), basado en los puntos de Legendre-Gauss-Lobatto (LGL) incluye ambos límites y el método Radau pseudo espectral (RPM), basado en los puntos de Legendre-Gauss-Radau (LGR) incluye solamente uno de ellos, típicamente  $\tau_0$ . Cuando incluye a  $\tau_{n+1}$ , se denomina entonces el método RPM desplazado. El lector puede acceder a más detalles sobre los polinomios de Lagrange asociados a cada una de estas variantes y a las fórmulas de integración en [71]. Un tratamiento unificado de las tres variantes se puede consultar en [72]. En particular, el método RPM es el más popular para el planteamiento de colocación local como el utilizado, debido a que no incurre en redundancias y permite a la vez considerar la información entre intervalo e intervalo con mayor precisión.

En la práctica, para el RPM, la ecuación (3.14) cambia de la siguiente manera [72]:

$$\begin{aligned}
\min_{\{X_k, U_k\}_{k=1}^n, t_f, t_0} J &= \Phi(X_{n+1}, t_f) + \frac{(t_f - t_0)}{2} \sum_{k=1}^n g(X_k, U_k, t_k) w_k \\
\sum_{k=1}^{n+1} D_{ik} X_k - \frac{(t_f - t_0)}{2} f(X_i, U_i, t_i) &= 0, \quad i = 1, \dots, n \\
X_1 - x(t_0) &= 0 \\
\phi(X(t_0), t_0, X(t_f), t_f) &= 0 \\
C(X_i, U_i, t_i) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, n,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

en que  $X_{n+1}$  es el estado final, ubicado en un punto no contenido en la colocación. Notar que en consecuencia, las restricciones diferenciales solamente se cumplen para los  $n$  primeros puntos.

En este mismo sentido, cabe destacar la tremenda importancia que tiene para el éxito del método pseudoespectral una correcta elección de los puntos en los cuales se desean evaluar estados y controles. Desgraciadamente el conocimiento que permite tal elección no se encuentra disponible con exactitud hasta resolver el problema de control óptimo. Eso ha motivado el desarrollo de métodos que producen secuencias de problemas pseudoespectrales que intentan adecuar la malla de puntos (conjunto de todos los intervalos en que se subdividió el original y sus respectivos puntos LGR) automáticamente de modo de satisfacer más precisamente las restricciones diferenciales a lo largo de todo el intervalo considerado, y no solamente en los puntos de interpolación [66-68]. Sin embargo, dado que estos métodos resuelven el problema de control óptimo varias veces, no serán utilizados en el presente trabajo, pues las bondades de la rápida convergencia del método comienzan a perderse.

En el caso del problema abordado en el presente trabajo, resulta importante tomar en cuenta el hecho de que, en primer lugar, existe multiplicidad de escalas de variación temporal de las variables consideradas: una carrera solar puede durar varios días, mientras que la energía cinética utilizada puede alcanzar sus valores máximos en cuestión de segundos, dependiendo de la aceleración del vehículo; la carga de las baterías presenta variaciones significativas dentro de una escala del orden de horas al igual que la distancia recorrida. Dependiendo de la velocidad, es también posible que el vehículo deba cruzar por múltiples zonas de diversa pendiente, de modo que se generan patrones altamente oscilatorios en la potencia resistiva incluso en la escala de los minutos (véase Capítulo 4). Todo esto hace que sean no triviales la modelación que se escoja del problema ni la elección de la malla de puntos a utilizar: alguien podría verse tentado, por ejemplo, a realizar un control sobre las variables eléctricas del motor considerando la evolución completa del sistema a lo largo de la carrera, pero la experiencia indica que la alta velocidad de cambio de estas variables implica que la elección de una malla de puntos adecuada al problema puede resultar poco práctica. Si bien podría recurrirse a las técnicas iterativas de refinamiento de malla anteriormente discutidas, se puede comprobar de forma empírica que la convergencia correcta del error en las ecuaciones dinámicas requiere una malla infinitamente grande, lo cual posee a su vez un respaldo teórico desarrollado en [73]. Se defiende, de esta manera, la elección de la modelación del sistema como un problema de transferencia energética, según lo mostrado en las ecuaciones (3.1). Se insiste en la potencia transferida hacia el inversor como variable de control y no en la potencia extraída del banco de baterías [11, 14], pensando sobre todo en temas

de implementabilidad: usualmente los módulos de baterías, paneles solares e inversor corresponden a distintos fabricantes, de modo que resulta muy difícil el coordinar exactamente, por ejemplo, la potencia que debe utilizar el inversor para que el consumo de baterías responda a un patrón como los definidos por [11].

Dado que considerar el detalle completo de una carrera solar requiere conocer la evolución del vehículo a lo largo de varios días y en consecuencia un alto número de variables en el problema de control óptimo que retrasan la resolución de éste y por lo tanto deterioran la aplicabilidad de esquemas en tiempo real, resulta conveniente el resumir la información sobre la potencia solar a recibir a lo largo de los días de modo de planificar adecuadamente el consumo de energía durante éstos, según su calidad de único recurso escaso del problema. Se propone entonces, a continuación, una forma de realizar tal procedimiento de manera de facilitar el camino hacia implementaciones en línea.

### 3.3. Algoritmo propuesto

Se ha dicho que un gran problema a la hora de planificar el control óptimo para la carrera completa resulta ser el hecho de que una implementación directa requeriría de un número elevadísimo de variables que pueden retrasar importantemente su aplicabilidad en línea debido a la multiplicidad de escalas de tiempo presentes. ¿Cómo, entonces, estructurar un algoritmo que permita incluir todos estos efectos de manera rápida? Lo que es importante distinguir en este caso es el hecho de que el recurso escaso es la energía: si se dispusiese de un banco de baterías lo suficientemente grande como para no agotarse durante toda la carrera, indudablemente que el control que minimiza el tiempo de llegada a la meta es uno que acelera aplicando la máxima potencia posible hasta alcanzar la velocidad máxima, y luego compensar todos los efectos adversos para mantener al vehículo operando en ella. A medida que nuestro banco de baterías decrece en capacidad, se hace más difícil mantener velocidades más altas, hasta que, finalmente, cuando la energía disponible es la justa y necesaria, la velocidad de operación resulta en realidad bastante más lenta, pues mantener una velocidad demasiado alta, debido a la expresión (2.9), posee un costo energético que impide el llegar a la meta. La conclusión de todo este razonamiento es que primeramente conviene planificar adecuadamente el uso de energía.

Siguiendo esta línea de razonamiento, dado que se conoce el estado de carga de las baterías (Sección 2.4), resulta importante predecir de alguna forma la potencia solar a recibir a partir del instante actual y hasta el final de la carrera, utilizando para ello el modelo de la Sección 2.3 y de la instrumentación de que se disponga. Desde luego que para llevar a cabo tal predicción se requieren cuantos datos sea posible estimar, más un horizonte de tiempo prefijado en el número de días. Supóngase que, dado un conocimiento previo del comportamiento del vehículo, se estima a grandes rasgos que éste pueda finalizar la carrera en  $N_d$  días contados desde el inicio de la carrera. Si  $\hat{G}(t)$  es la irradiancia solar estimada en  $[W/m^2]$ ;  $n_{celdas}$  es el número de celdas solares que componen el panel del vehículo;  $A_{celda}$  es el área de cada celda;  $\eta_{celda}$  es la eficiencia nominal de cada celda e  $\eta_{MPPT}$  es la eficiencia del MPPT, entonces se tiene que

$$\hat{E}_s^{(d)} = \int_{t_0^{(d)}}^{t_f^{(d)}} \eta_{MPPT} n_{celdas} \eta_{celda} A_{celda} \hat{G}(\tau) d\tau \quad (3.17)$$

es la estimación de la energía solar neta a obtener en el día ( $d$ ), donde  $d \in \{1, \dots, N_d\}$ . Desde luego que, si la planificación es realizada en el día actual  $D_a$ , solo debe hacerse este cálculo para  $d \in \{D_a, \dots, N_d\}$ . Los límites de integración,  $t_0^{(d)}$  y  $t_f^{(d)}$  dependen efectivamente del día de competencia que se esté considerando. De acuerdo a lo descrito en la Sección 2.5, se supone que al principio de la competencia el banco de baterías del vehículo estará lleno, por lo cual no tendrá sentido considerar  $t_0^{(1)}$  como menor a la hora de partida. Por otro lado, si el último día de competencia la carrera tiene una hora de término establecida, no corresponde considerar  $t_f^{(N_d)}$  como mayor a dicha hora. En todos los otros casos puede situarse  $t_0^{(d)}$  en un instante temprano en la mañana (por ejemplo, las 04:00<sup>5</sup>) y  $t_f^{(d)}$  tarde en la noche (por ejemplo, las 23:00), de modo de evitar integrar la noche, pero no perder ningún instante de luz.

De este modo puede realizarse una programación muy rápida sobre la energía que es posible utilizar durante cada uno de los días restantes de carrera, etapa conocida en adelante como *planificación semanal*. Para ello debe tenerse en cuenta que:

- Una estrategia agresiva utiliza la mayor cantidad de energía posible (procurando, desde luego, su uso eficiente), de manera de que el banco de baterías es vaciado al final del último día [11].
- La energía almacenada en baterías debe estar siempre dentro de sus límites (Sección 2.2.2)
- Deben respetarse los límites de operación del conjunto motor-inversor: la potencia no debe superar la potencia continua admisible por el conjunto (Sección 2.2.3).
- Para planificar el día actual, el algoritmo debe considerar la energía disponible en baterías según su medición.

Si  $\hat{E}_b^{(d)}$  es la estimación de la energía almacenada en baterías al inicio del día ( $d$ ) (siendo, por ende,  $\hat{E}_b^{(D_a)}$  un valor conocido, calculado a partir del estado de carga del banco de baterías medido desde el BMS), los supuestos anteriores dan origen al siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\{E_m^{(d)}\}_{d=D_a}^{N_d}} - \sum_{d=D_a}^{N_d} E_m^{(d)} \\
 & \text{s. a} \\
 & \hat{E}_b^{(d+1)} = \hat{E}_b^{(d)} + \hat{E}_s^{(d)} - E_m^{(d)}, \quad \forall d \in \{D_a, \dots, N_d\} \\
 & \hat{E}_b^{(N_d+1)} = E_{b(\min)} \\
 & E_{b(\min)} \leq \hat{E}_b^{(d+1)} \leq E_{b(\max)}, \quad \forall d \in \{D_a, \dots, N_d\} \\
 & E_{m(D-\min)} \leq E_m^{(d)} \leq E_{m(D-\max)}, \quad \forall d \in \{D_a, \dots, N_d\}.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

<sup>5</sup> A lo largo de este trabajo, todas las horas están escritas en formato veinticuatro horas

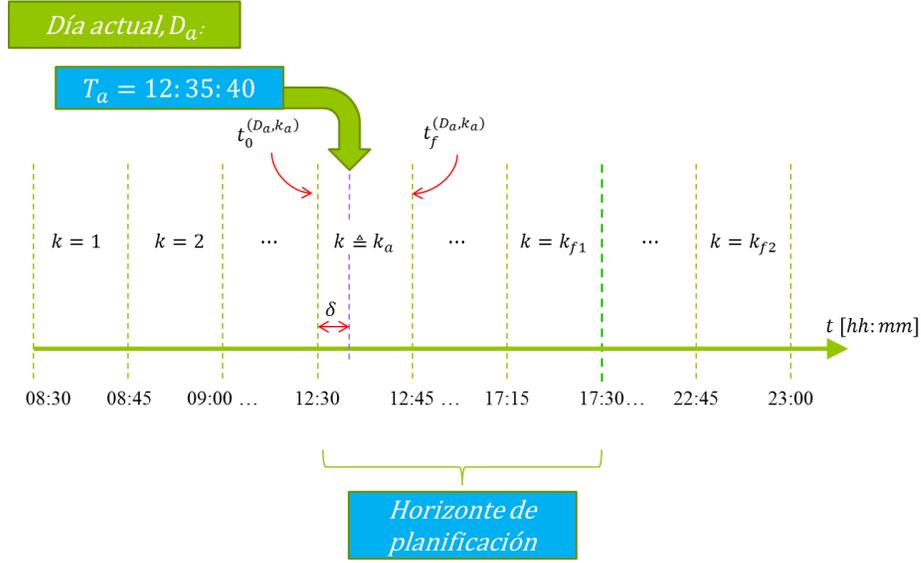
Los valores de energía mínima y máxima diaria a consumir,  $E_{m(D-min)}$  y  $E_{m(D-max)}$ , pueden ser obtenidos como el producto de la potencia continua del motor por la cantidad de horas que este corre diariamente. Para el World Solar Challenge, según se revisó en la Sección 2.5, este lapso corresponde a nueve horas.

El problema anterior consta de poquísimas incógnitas, usualmente menos de diez, pues este tipo de competiciones rara vez excede los siete días. Por lo tanto, se cuenta ya con una primera planificación que permite resumir de forma muy compacta el comportamiento del vehículo en varios días. Desde ya podría realizarse una planificación detallada de las dinámicas a seguir durante la carrera resolviendo un problema de control óptimo en tiempo continuo mediante la técnica pseudoespectral de la Sección 3.2. Sin embargo, cabe destacar que las dinámicas vehiculares del móvil siguen siendo demasiado rápidas como para ser tratadas directamente en un intervalo de longitud de nueve horas. Por esta misma causa, conviene realizar una segunda discretización que permita considerar segmentos del orden de los minutos para entregar éstos al método pseudoespectral. Si bien a priori esta discretización es arbitraria, es importante tener en cuenta, en primer lugar, la rapidez de las variables de estado del sistema, de modo que estas alcancen a estabilizarse antes de considerar la siguiente iteración. La experiencia muestra que tal efecto se logra en un lapso del orden de decenas de segundos. Por otro lado, la discretización debe considerar segmentos suficientemente amplios como para que la etapa de control óptimo alcance a converger. Esto también se comprueba como del orden de las decenas de segundos. Lógicamente, el número de segmentos temporales a considerar no debe ser muy alto, so pena de perder la ventaja de realizar estas planificaciones sucesivas. El presente trabajo, en consecuencia, utiliza un conjunto de segmentos uniformes de quince minutos de duración.

Se define entonces, de forma análoga a la ecuación (3.17), la energía solar estimada a recibir en el intervalo ( $k$ ) como

$$\hat{E}_s^{(D_a, k)} = \int_{t_0^{(D_a, k)}}^{t_f^{(D_a, k)}} \eta_{MPPT} n_{celdas} \eta_{celda} A_{celda} \hat{G}(\tau) d\tau. \quad (3.19)$$

El superíndice ( $D_a$ ), alude a que los segmentos considerados corresponden al día actual de competición solamente, posponiendo los cálculos para los siguientes día por efecto de la planificación ya realizada. Si al momento de realizar esta planificación la hora actual medida desde el reloj es  $T_a$ , entonces el primer paso es situar  $T_a$  en la discretización realizada de manera de escoger el segmento actual,  $k_a$ . Cabe destacar que en esta segunda planificación conviene considerar los intervalos  $k_{f1}$ , cuyo límite superior es la hora término del día actual de competición (17:30 para el primer día de ésta y 17:00 para los sucesivos, según la Sección 2.5), y  $k_{f2}$ , aquel cuyo límite superior es entrada la noche, según la planificación anterior. Se consideran estos límites debido a que no es posible operar el vehículo luego de la hora de cierre del día, pero antes de eso sí es posible aprovechar las estimaciones realizadas sobre la potencia solar para considerar esa energía como disponible anteriormente, extrayéndola temporalmente del banco de baterías. La Figura 3.2 grafica lo anteriormente expuesto. A continuación se define un problema de optimización similar al de (3.18). Cabe destacar que  $\hat{E}_b^{(D_a, k_a)}$  corresponde a la medición del estado de carga de las baterías en el instante  $T_a$ , y es por lo tanto un valor conocido.



**Figura 3.2: Ejemplo de aplicación de la simbología definida para la planificación diaria**

$$\begin{aligned}
 & \min_{\{E_m^{(D_a, k)}\}_{k=k_a}^{k_f}} - \sum_{k=k_a}^{k_f} E_m^{(D_a, k)} \\
 & \text{s. a} \\
 & \hat{E}_b^{(D_a, k+1)} = \hat{E}_b^{(D_a, k)} + \hat{E}_s^{(D_a, k)} - E_m^{(D_a, k)}, \quad \forall k \in \{k_a, \dots, k_{f1}\} \\
 & \hat{E}_b^{(D_a, k+1)} = \hat{E}_b^{(D_a, k)} + \hat{E}_s^{(D_a, k)}, \quad \forall k \in \{k_{f1} + 1, \dots, k_{f2} - 1\} \\
 & \hat{E}_b^{(D_a, k_{f2})} = \hat{E}_b^{(D_a+1)} \\
 & E_{b(\min)} \leq \hat{E}_b^{(D_a, k)} \leq E_{b(\max)}, \quad \forall k \in \{k_a + 1, \dots, k_{f2}\} \\
 & E_{m(S-\min)} \leq E_m^{(D_a, k)} \leq E_{m(S-\max)}, \quad \forall k \in \{k_a, \dots, k_{f1}\}.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

En este caso, los límites energéticos del motor  $E_{m(S-\min)}$  y  $E_{m(S-\max)}$ , dado que se han escogido los intervalos de tiempo que subdividen un día de competición de manera que su duración de sea suficientemente corta, pueden ser calculados utilizando la potencia máxima del motor (Sección 2.2.3). Esto permitirá aplicar estrategias agresivas de corta duración si fuese necesario, aunque la escasez energética de los vehículos solares lo hace poco probable. El resultado de la resolución de este problema es el conjunto  $\{E_m^{(D_a, k)}\}_{k=k_a}^{k_{f1}}$  de energías que debe consumir el motor en cada intervalo  $\{[t_0^{(D_a, k)}, t_f^{(D_a, k)}]\}_{k=k_a}^{k_{f1}}$  y no el consumo de energía acumulado en el tiempo de éste. En los gráficos de secciones posteriores se muestra, sin embargo, esta última cantidad, por facilidad de comprensión.

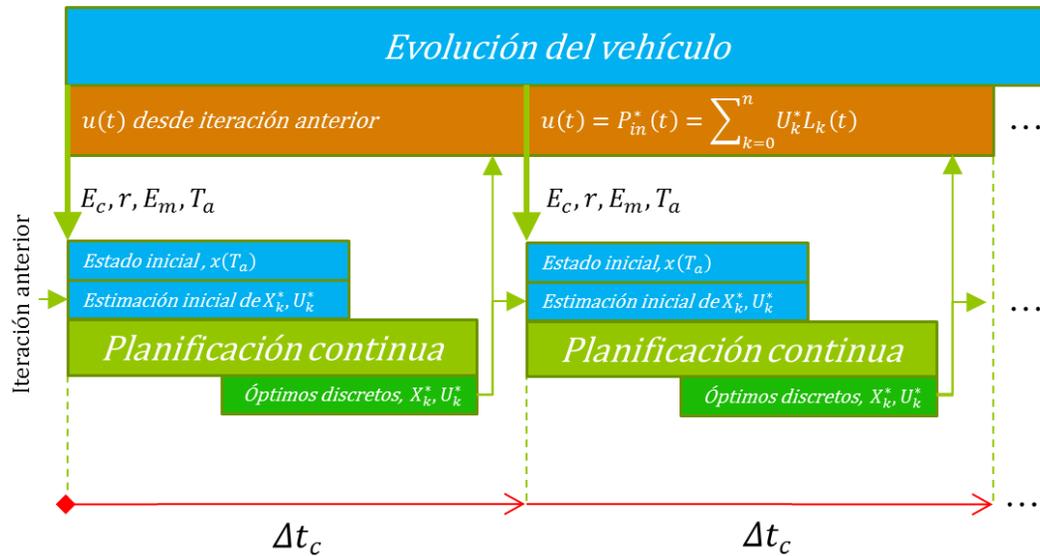
En resumen, resolviendo los sistemas propuestos en las ecuaciones (3.18) y (3.20) es posible resumir el ingreso y gasto energético óptimo del vehículo en dos etapas: una que considera la duración completa de la carrera y otra que considera la duración de un solo día. Esto, sin embargo, no da cuenta de la dinámica detallada del vehículo, de modo que aún se hace necesaria una nueva etapa de planificación, considerando ahora un intervalo reducido, dada por la discretización que se haga de cada día. Resta entonces definir la etapa de control óptimo, llamada en adelante *planificación continua*. Si el vehículo se encuentra corriendo durante el intervalo  $(D_a, k_a)$ ; la hora actual es  $T_a = t_0^{(D_a, k_a)} + \delta t$ ; la medición de velocidad es  $v_{T_a}$  y la medición de la distancia recorrida es  $r_{T_a}$ , se resuelve el problema de control óptimo

$$\begin{aligned}
& \min_{P_{in}} -r \left( t_f^{(D_a, k_a)} + \delta t \right) \\
& \text{s. a.} \\
& \frac{d}{dt} E_c = P_e - (a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3) \\
& \frac{d}{dt} r = v \\
& \frac{d}{dt} E_m = P_{in} \\
& 0 \leq E_c(t) \leq E_{c(max)}, \quad \forall t \in [T_a, t_f^{(D_a, k_a)} + \delta t] \\
& 0 \leq E_m(t) \leq E_{mf}^{(D_a, k_a)}, \quad \forall t \in [T_a, t_f^{(D_a, k_a)} + \delta t] \\
& P_{in(min)} \leq P_{in}(t) \leq P_{in(max)}, \quad \forall t \in [T_a, t_f^{(D_a, k_a)} + \delta t] \\
& E_c(T_a) = \frac{1}{2} m_{eq} v_{T_a}^2 \\
& r(T_a) = r_{T_a} \\
& E_m(T_a) = E_{mT_a} \\
& E_m \left( t_f^{(D_a, k_a)} + \delta t \right) = E_{mf}^{(D_a, k_a)} \\
& E_{mf}^{(D_a, k_a)} = E_m^{(D_a, k_a)} + \frac{\delta t}{\left( t_f^{(D_a, k_{a+1})} - t_0^{(D_a, k_{a+1})} \right)} E_m^{(D_a, k_{a+1})} \\
& v = \sqrt{\frac{2E_c}{m_{eq}}} \\
& P_e = \begin{cases} -\frac{(k_1 + 1)v^2}{2k_2} + \sqrt{\left(\frac{(k_1 + 1)v^2}{2k_2}\right)^2 + \frac{v^2}{k_2}(P_{in} - k_0 v)}, & k_0 v \leq P_{in} \\ -\frac{(1 - k_1)v^2}{2k_2} + \sqrt{\left(\frac{(1 - k_1)v^2}{2k_2}\right)^2 + \frac{v^2}{k_2}(P_{in} - k_0 v)}, & k_0 v - \frac{(1 - k_1)^2}{4k_2} v^2 \leq P_{in} < k_0 v \end{cases} \\
& a_1 = C_{r1} mg \cos(\theta_r) + mg \sin(\theta_r) + \frac{1}{2} C_D \rho_a A v^2 \\
& a_2 = C_{r2} mg \cos(\theta_r) + C_D \rho_a A v \\
& a_3 = \frac{1}{2} C_D \rho_a A,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

en que la magnitud  $E_{mT_a}$  es un contador que se vuelve a cero al inicio de cada intervalo temporal (i.e.  $E_m(t = t_0^{(D_a,k)}) = 0$ ) y que el resto del tiempo integra potencia consumida por el motor, de acuerdo a la ecuación de estado de  $E_m$  y según las mediciones de tensión y corriente entregadas por el BMS y el inversor, respectivamente. Si resultase más cómodo y confiable, también podrían utilizarse adecuadamente las mediciones del estado de carga en baterías e integraciones sobre el modelo de radiación solar, gracias a la información aportada por la ecuación (2.17) y el sistema de telemetría. La magnitud  $E_{mf}^{(D_a,k)}$ , por otro lado, es la responsable de que cada subproblema a resolver presente un comportamiento tipo horizonte móvil [19], suavizando el planteamiento discreto de las etapas anteriores. Así, se tiene siempre un problema de duración  $t_f^{(D_a,k)} - t_0^{(D_a,k)}$  restringido a una cantidad de energía a utilizar determinada. El reajuste de  $E_{mT_a}$  corresponde a cambiar periódicamente la referencia de la energía consumida de manera de evitar o minimizar eventuales problemas de reinicio de los integradores. Una forma más intuitiva pero vulnerable a este tipo de fallas podría evitar tal cambio de referencia utilizando el vector de energía consumida acumulada del motor, la suma acumulada de los valores de  $\{E_m^{(D_a,k)}\}_{k=k_a}^{k_{f1}}$ , y aplicar el mismo principio de expansión que define a  $E_{mf}^{(D_a,k_a)}$ .

Resulta interesante comentar la independencia de esta etapa con respecto a la dinámica solar. Si bien podría añadirse, esto ya fue realizado anteriormente a través de una planificación detallada del gasto energético para el día actual. Otro aspecto importante a tener en cuenta en el presente planteamiento es el hecho de que se tiene como función de costo la distancia recorrida, procurándose su maximización. Este planteamiento resulta equivalente al de minimizar el tiempo de recorrido cuando la distancia a la meta es larga, debido a que su efecto principal es el de maximizar la velocidad media de recorrido del vehículo, pues el tiempo final a considerar,  $t_f^{(D_a,k)} + \delta t$ , es fijo para cada subproblema. La ventaja de esta forma es que no se necesita una estimación de la distancia a recorrer en el intervalo de tiempo considerado, lo cual al menos numéricamente sí es necesario en un enfoque de tiempo final libre a minimizar. En contraposición a lo anterior, cuando la distancia a la meta es muy corta (y ésta está a la vista), podría darse que este esquema presente el problema de calcular todo para lograr recorrer una distancia mayor a la requerida, dosificando mal la energía. Se espera, sin embargo, que la planificación energética diaria compense este efecto, dejando al vehículo sin suficiente energía como para planificar más allá de la meta ubicando  $k_{f1}$  y  $k_{f2}$  en algún intervalo en el cual se espere terminar la carrera, pues la hora de término siempre puede ser ajustada en las etapas de planificación anteriores, de acuerdo a los pronósticos del equipo.

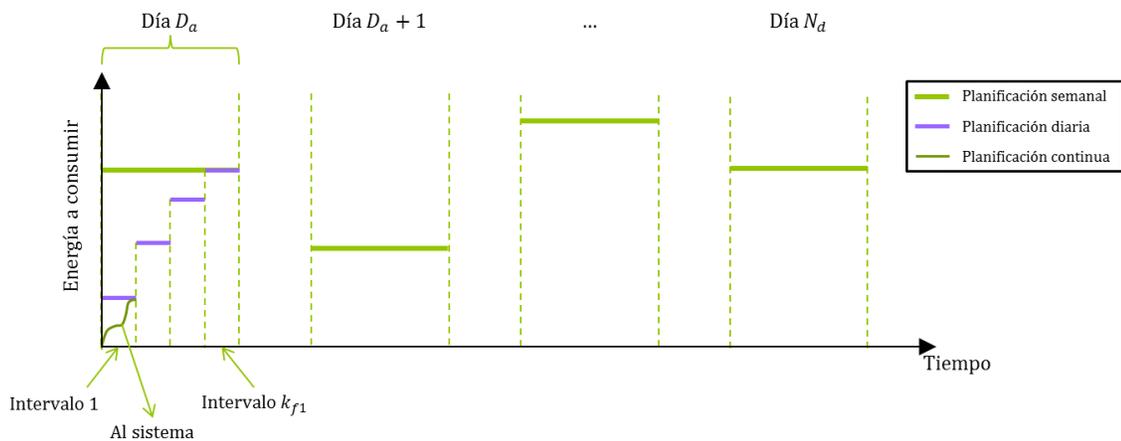
Cada subproblema a resolver tendrá asociada una cantidad de tiempo de cálculo  $\Delta t_c$ , el cual se reduce incorporando inmediatamente como estimación inicial de las variables de decisión aquellas producidas como respuesta. El resultado es a continuación entregado a través de su representación en el espacio continuo al sistema para su aplicación, evaluándose así el control de forma continua mientras se realizan los cálculos para los instantes posteriores. La Figura 3.3 muestra esquemáticamente el proceso de realimentación del estado, transcripción de la respuesta y secuenciación de la estrategia propuesta.



**Figura 3.3: Esquema de realimentación, aplicación y secuenciación de la planificación continua del algoritmo propuesto**

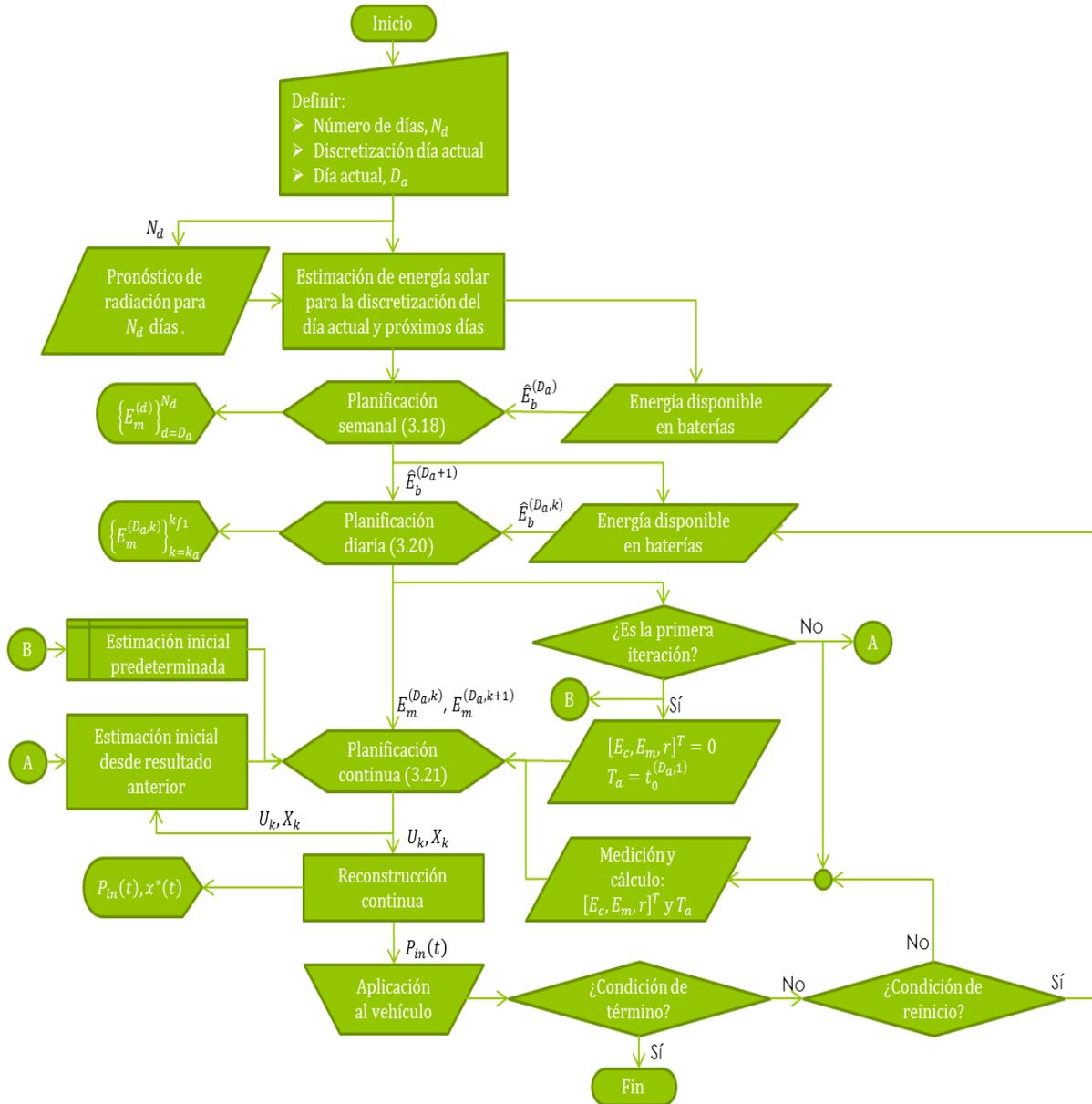
La resolución de este bloque se realiza aplicando los métodos pseudoespectrales introducidos en la Sección 3.2, utilizando una malla de nueve intervalos uniformes con veinte nodos cada uno mediante el software gratuito GPOPS [65]. Esta configuración es obtenida a partir de un análisis tipo ensayo-error.

Hasta el momento, se ha propuesto en la presente sección que una planificación segmentada del desarrollo de la carrera puede ayudar a agilizar los tiempos de cálculo del control óptimo requerido para el vehículo, entregándose a los sistemas físicos del vehículo solamente las señales continuas que deben aplicarse en los instantes próximos en detalle y resumiendo su comportamiento futuro en una planificación del consumo energético que abarca con distinto nivel de detalle la evolución para los días e intervalos de tiempo siguientes. La Figura 3.4 ilustra el principio empleado.



**Figura 3.4: Principio del algoritmo propuesto: se planifica con poco detalle hacia los días posteriores, un poco más de detalle hacia las horas posteriores y finalmente se resuelve un problema de control óptimo no lineal para los minutos siguientes a través de un esquema pseudoespectral. El sistema recibe curvas continuas de planificación sobre el control.**

Por otro lado, la Figura 3.5 entrega un diagrama de flujo del algoritmo propuesto.



**Figura 3.5: Diagrama de flujo del algoritmo propuesto**

Se han resumido las condiciones de término y las condiciones de reinicio en un solo bloque, pero se explicitan a continuación. Básicamente, se desea hacer la mayor cantidad de iteraciones de planificación continua, y de la forma más rápida posible, por lo cual se desea reducir al mínimo el número de las iteraciones de menor detalle, aunque bien es cierto que, según se ve en la Sección 4.1 dichos cálculos toman tiempos órdenes de magnitud por debajo de los tiempos de cálculo de la etapa de planificación continua, por lo cual incluso si se implementase un ciclo que para cada iteración considere una planificación nueva, se tendrían resultados de igual calidad. De cualquier modo, la idea del algoritmo es aferrarse lo más posible a las predicciones y modelaciones de las que se dispone. Por esta causa, la condición de reinicio verifica si:

- Existe una indicación del usuario que así lo requiera.
- La discretización utilizada para el día actual ha cambiado.
- El pronóstico de energía solar ha cambiado.
- El estado de carga de las baterías ha caído por debajo de lo predicho para el segmento actual.
- Ha transcurrido un cierto tiempo desde la última vez que se realizó una iteración de planificación diaria, o un cierto número de iteraciones de planificación continua.

Por otro lado, se pueden enumerar como condiciones de término las siguientes, las cuales representan el éxito del algoritmo o la expresa decisión del usuario:

- Existe una indicación del usuario que así lo requiera.
- El día de competencia ha llegado a su fin.

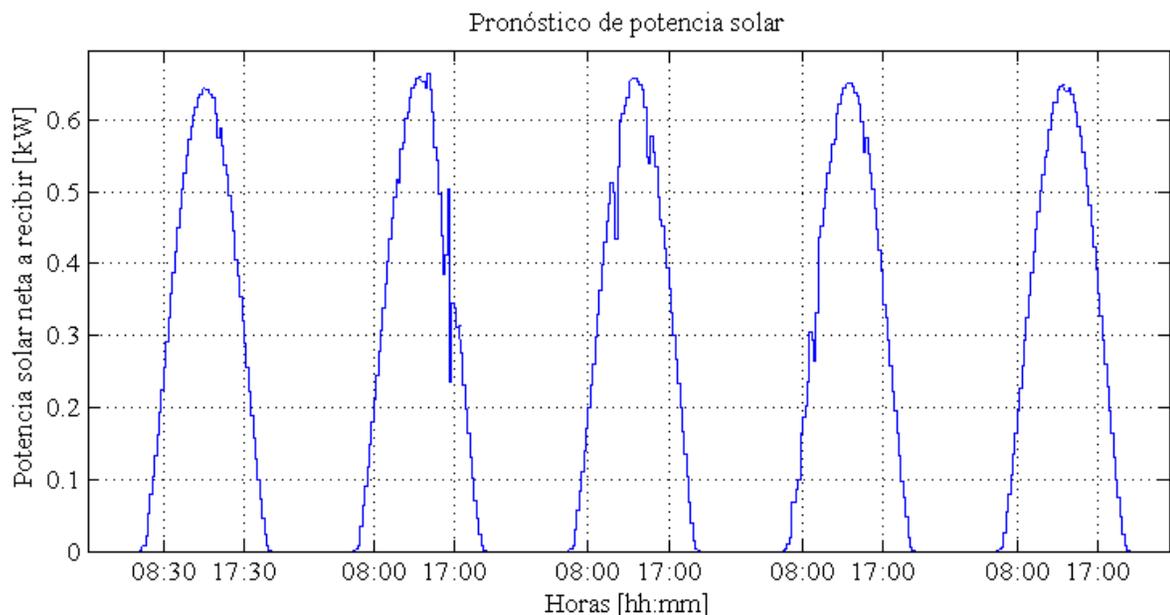
Resulta interesante, por otro lado, destacar el hecho de que la aplicación al vehículo haya sido marcada como una operación manual. Si bien sería interesante el implementar o adquirir un controlador del vehículo que lo operase a cierta potencia deseada, este objetivo está por fuera de los alcances del presente trabajo. El equipo podría entonces, de no contar con esta característica, aprovechar la funcionalidad de velocidad crucero de los inversores comerciales más populares [42] variando la velocidad de referencia de modo de seguir el resultado entregado para la energía cinética  $E_c$  al final de cada etapa de planificación continua. Dicha estrategia corresponde a un sustituto que se aproximará bien a los resultados obtenidos de tenerse una operación eficiente del inversor y, desde luego, una información adecuada con respecto a las pendientes encontradas en el camino.

Para el método de programación no lineal utilizado, SNOPT, no se requieren estimaciones iniciales muy cercanas al óptimo para tenerse una convergencia adecuada a éste. Sin embargo, es deseable que las curvas discretizadas entregadas para este rol tengan magnitudes adecuadas y sigan el sentido común. Es necesario entregar estimaciones iniciales para los nodos temporales que se utilizarán, el vector de estado y el vector de control. En el presente trabajo se utiliza una energía cinética constante equivalente al promedio entre  $v_{T_a}$  y 100 [km/h]; interpolaciones lineales del horizonte temporal, entre  $T_a$  y  $T_a + 900$  [s]; del consumo de energía, entre 0 y  $E_{mf}^{(D_a, k_a)}$ ; de la distancia recorrida, entre  $r_{T_a}$  y lo que alcanza a recorrerse en 900 [s] con el promedio entre  $v_{T_a}$  y 100[km/h], y una potencia aplicada constante de 2 [kW]. Las unidades físicas utilizadas para todas las energías son los [kWh]; para las velocidades, [m/s]; para las distancias, [km]; para el tiempo, [s], y para las potencias, [kW]. Resulta importante tener esto en mente ya que el utilizar unidades que produzcan valores numéricos muy disímiles en orden de magnitud entre los distintos estados y controles puede provocar problemas numéricos como jacobianos mal dimensionados y errores de aproximación en general que deterioren la calidad de la respuesta, tanto en eficacia de la convergencia, precisión de la respuesta y tiempo de cálculo. Así pues, con las unidades escogidas ninguna magnitud supera el orden de  $10^2$  salvo el tiempo, explícitamente ausente de todas las ecuaciones. De este modo, se tiene ya completamente caracterizado el algoritmo propuesto. La siguiente sección, entonces, lo pondrá a prueba en diversos escenarios de funcionamiento, tanto esperados como inesperados y evaluará su desempeño.

## Capítulo 4. Aplicación al vehículo solar en condiciones de carrera

### 4.1. Una iteración completa del ciclo

Es necesario, en primer lugar, definir un horizonte temporal en el cual se desea completar la carrera, el cual puede, desde luego, ser modificado en iteraciones sucesivas del algoritmo. Para fines de este ejemplo, considérese una planificación para un lapso de  $N_d \triangleq 5$  días, de entre los cuales se está corriendo el primero,  $D_d \triangleq 1$ . A continuación, es preciso contar con un pronóstico de potencia solar neta a recibir durante los días siguientes. Supóngase que dicho pronóstico –que corresponde concretamente al integrando de las ecuaciones (3.17) y (3.19)- es el que se muestra en la Figura 4.1<sup>6</sup>, en que se rotulan los horarios de inicio y término del día de competición según lo discutido en la Sección 2.5.

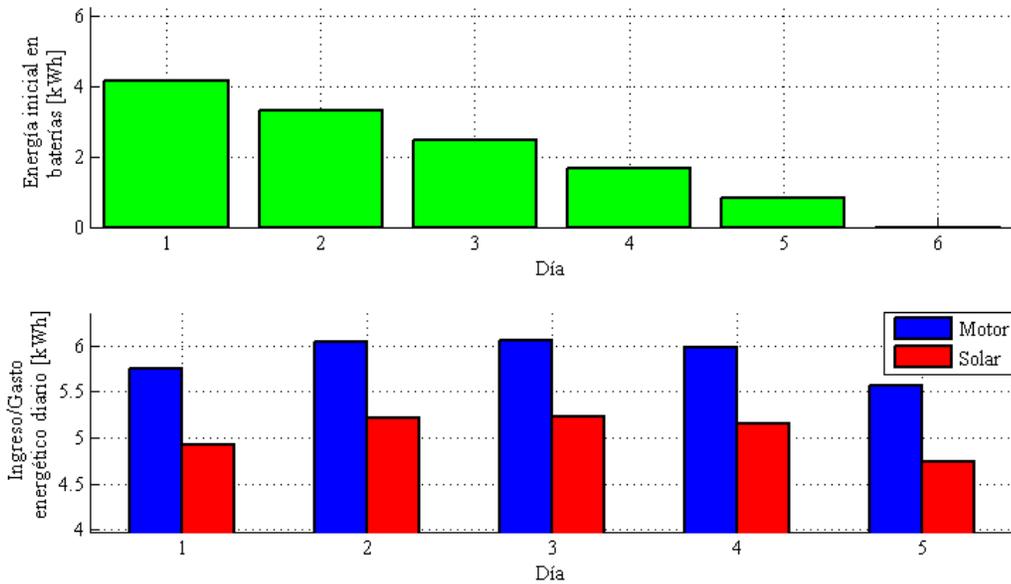


**Figura 4.1: Pronóstico de potencia solar para los próximos días de competición**

Con esta información, y una estimación de la energía disponible en baterías al inicio del día, es posible programar un determinado gasto energético diario en el motor, mostrado en la Figura 4.2 (3.18). Notar que en la parte superior de ésta se ha incluido el día  $N_d + 1 = 6$ , dando a entender que al final del último día el banco de baterías se encuentre vacío. Esta planificación energética completa tarda 0.046 [s] en ser ejecutada<sup>7</sup>. Se tiene así de forma muy sucinta caracterizada, sin detalles, la evolución esperada del vehículo a lo largo del desarrollo de la carrera.

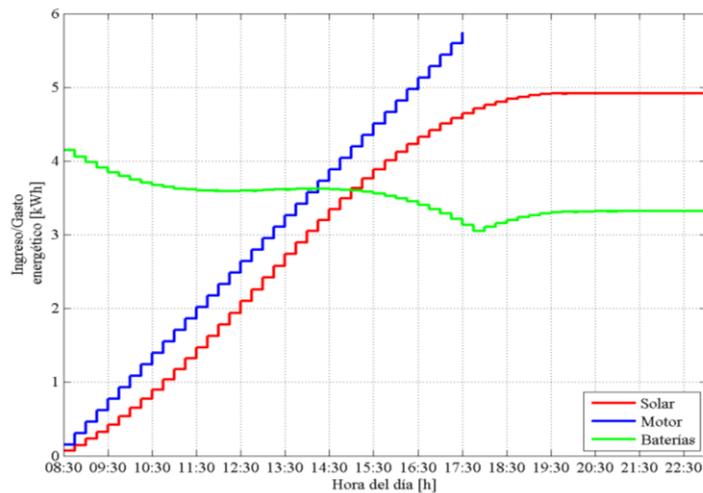
<sup>6</sup> Se utilizan datos reales de radiación medidos en Santiago de Chile entre el 1/1/2006 y el 6/1/2006 [74].

<sup>7</sup> Para esta y todas las pruebas se utilizó un equipo Intel® Core™ i7 – 2630QM CPU @ 2.00GHz, 6,00 GB RAM bajo Windows 7 Home Premium.



**Figura 4.2: Planificación energética semanal**

A continuación, se programa, según lo discutido, el consumo energético del motor para el día actual (3.20). En este momento resulta importante contar con una medición de la energía disponible en baterías en el momento actual, la hora actual del día y el pronóstico de radiación para el presente día. Si el vehículo se encuentra al inicio de la carrera, los resultados de esta etapa se muestran en la Figura 4.3. Este paso tarda 0.28 [s] al discretizar el día completo en intervalos de 15 minutos.



**Figura 4.3: Planificación energética diaria**

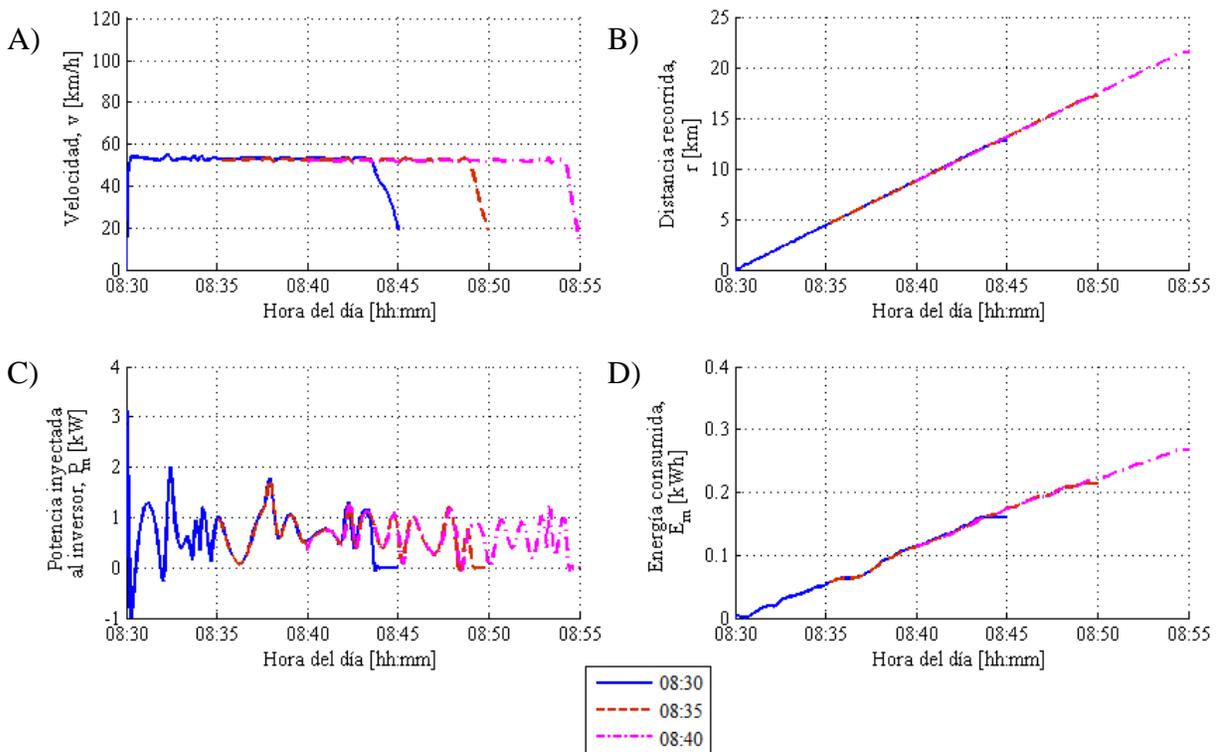
En la Figura 4.3 resulta interesante destacar que las curvas obtenidas, en el caso de la energía solar y la utilizada por el motor, no representan las magnitudes utilizadas en (3.20), sino más bien a las sumas acumuladas en el tiempo de ellas. Así se puede representar todo de forma más intuitiva, apreciándose en dicha figura las trayectorias planificadas a plazo de un día de la energía consumida en el motor, la potencia solar total captada a lo largo del día y la curva de descarga del banco de baterías. Aquí es importante notar que, si bien las curvas de descarga del

banco de baterías y la energía solar acumulada son consideradas hasta tarde por la noche (23:00 en este caso), la energía consumida por el motor solo es considerada hasta las 17:30, pues no tiene sentido para el problema matemático el operarlo.

Resta, entonces, la última etapa del procedimiento descrito: calcular la potencia óptima a aplicar al motor a lo largo de cada uno de los intervalos temporales que conforman la discretización del actual día (3.21). Debido a la restricción temporal y energética a que cada uno de estos subproblemas de control óptimo están sujetos, puede resultar interesante apreciar la evolución temporal de las respuestas entregadas por cada uno. Se muestran en la Figura 4.4 tres resultados, obtenidos al realizar cálculos cada cinco minutos utilizando las mediciones de la Tabla 4.1 y las energías a utilizar en los tramos primero y segundo de la Figura 4.3,  $E_m^{(D_{a,1})} = 0.1596 [kWh]$  y  $E_m^{(D_{a,2})} = 0.1596 [kWh]$ . Dichas mediciones son consideradas pensando que no hay más perturbaciones externas y que por lo tanto cada trayectoria generada corresponde a la real evolución del vehículo. El tiempo de cálculo de cada subproblema, utilizando el software gratuito GPOPS [65], se encuentra tabulado la última fila.

**Tabla 4.1: Datos medidos para algunas iteraciones del algoritmo**

Estado [Unidad]	Símbolo	Valor		
Hora del día [hh:mm]	$t_0$	08:30	08:35	08:40
Velocidad [km/h]	$v$	0	53.7309	51.5224
Energía consumida [kWh]	$E_m$	0	0.0468	0.1019
Posición en la ruta [km]	$r$	0	4.0787	8.2241
Tiempo de cálculo [s]	$\Delta t_c$	4.7729	25.7432	17.5416



**Figura 4.4: Resultados para tres iteraciones de la planificación continua separadas por 5 minutos (A) Velocidad, (B) Distancia recorrida, (C) Potencia de entrada al inductor, (D) Energía consumida.**

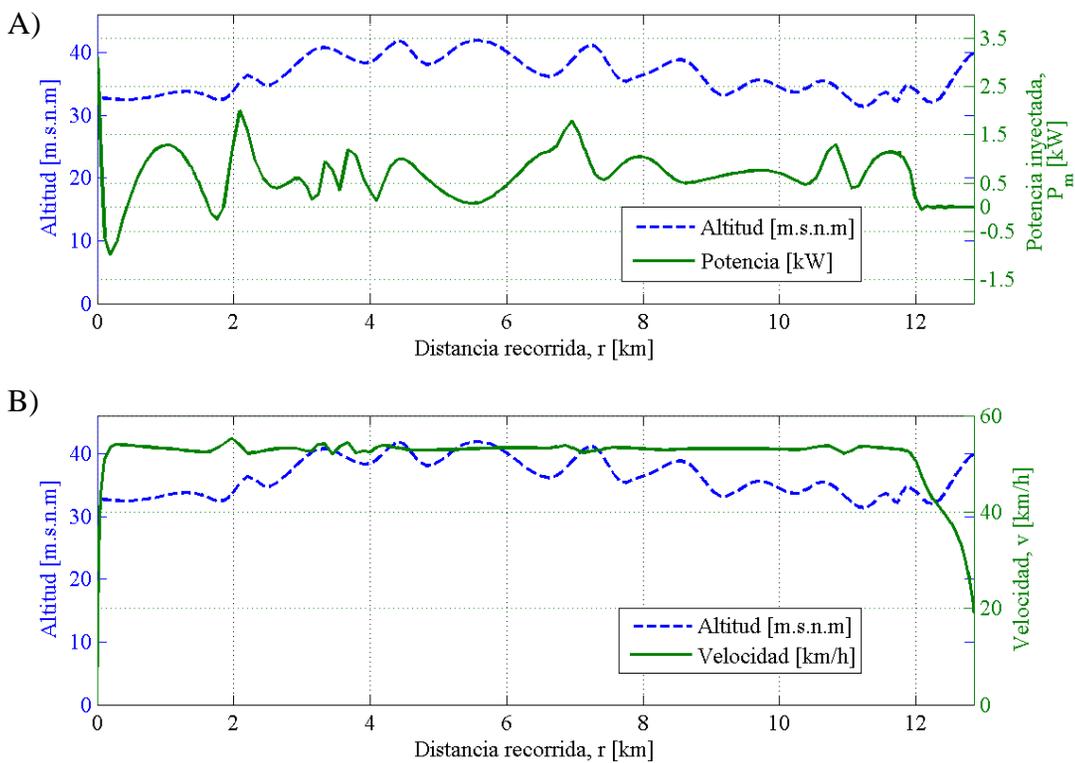
A priori, parecen poco intuitivos los resultados obtenidos, sobre todo observando los tiempos de cálculo de cada respuesta. Cabe destacar que este hecho tiene su origen en la gran distancia entre las horas del día para las cuales se plantea cada problema, fundamentándose en que las estimaciones iniciales de la respuesta proporcionadas al método de optimización no lineal son cercanas a óptimos locales, incrementándose así el tiempo de cálculo. Sin embargo, el considerar subproblemas planteados para horas del día cercanas entre sí reduce grandemente el tiempo de cálculo, al poderse transmitir la solución de uno como estimación inicial del siguiente. Si en el mismo ejemplo de la Tabla 4.1 los problemas hubieran sido planteados para las horas 08:30:00, 08:30:05 y 08:30:10, se hubieran obtenido respectivamente tiempos de cálculo de 4.7729 [s], 3.3888 [s] y 2.8608 [s], los cuales son más que razonables para la aplicación de sus resultados en línea. De todas maneras, los tiempos de cálculo mostrados en dicha tabla son aún lo suficientemente bajos como para ser también efectivamente aplicados en un esquema de control óptimo realimentado para este tipo de problemas.

El objetivo de esta sección es, sin embargo, comentar acerca de las formas de las respuestas obtenidas. Lo primero que llama la atención es el hecho de que cada respuesta presenta hacia el final de su período de tiempo considerado un régimen en que la velocidad decrece al dejarse de inyectar potencia hacia el motor, permitiendo que el vehículo avance únicamente gracias a su inercia. Según se discute en la literatura [11] este comportamiento resulta indeseable, debido a que, en una pista plana, la forma más eficiente de lograr una velocidad media para un determinado tramo a recorrer resulta precisamente el mantener dicha velocidad media, comportamiento que aproximadamente debe cumplirse para el caso de una pista con pendientes más bien bajas, como la australiana. Sin embargo, es importante reconocer el hecho de que cada uno de los subproblemas a resolver entrega una respuesta que está pensada para ser realmente aplicada sobre el vehículo solamente en sus instantes iniciales, de modo que, según se discutió en el párrafo anterior, rápidamente pueda actualizarse por una nueva curva. En ese sentido, la aproximación utilizada de restringir la energía disponible y el horizonte de tiempo a considerar en cada uno, produce desde luego que, para maximizar la distancia recorrida en dicho intervalo, se deba, en consecuencia, agotar al máximo la energía disponible y luego dejar al vehículo desacelerar libremente. Lo interesante del planteamiento tipo horizonte móvil propuesto es que tal comportamiento, según se aprecia en la Figura 4.4, se repite cada vez, posponiéndose indefinidamente el momento en el cual el vehículo se deja desacelerar libremente y manteniéndose una velocidad prácticamente constante, según se aprecia en la misma figura.

Todas las otras curvas tienden a coincidir. Las diferencias, casi imperceptibles, en la curva de potencia aplicada al motor corresponden efectivamente a que la velocidad programada en cada uno de los tres casos es muy levemente diferente, encontrándose los obstáculos correspondientes a las pendientes de la ruta, que se han incluido directamente en detalle, según el procedimiento indicado en la Sección 2.1.1. Resulta interesante, en el caso de la distancia recorrida y la energía total consumida, apreciar cómo la distribución energética en cada caso cambia, aunque solo hacia el final de cada tramo. Lo segundo le da especial validez al esquema propuesto, dando lo primero cuenta de que, justamente, cada solución es en sí misma subóptima.

Es importante volver a mencionar que se ha incluido directamente el efecto de las pendientes en el cálculo de las soluciones mostradas, de modo que resulta interesante revisar la relación entre éstas, la velocidad y la potencia aplicada sobre el motor, lo cual queda reflejado en la Figura 4.5, en un análisis que solo incluye el resultado del problema de las 08:30 de la Tabla 4.1. Se deja ver, en la sección inferior de ésta, cómo el algoritmo pretende, en su generalidad, mantener una velocidad constante cercana a los 50 [km/h] de modo de, según lo discutido en

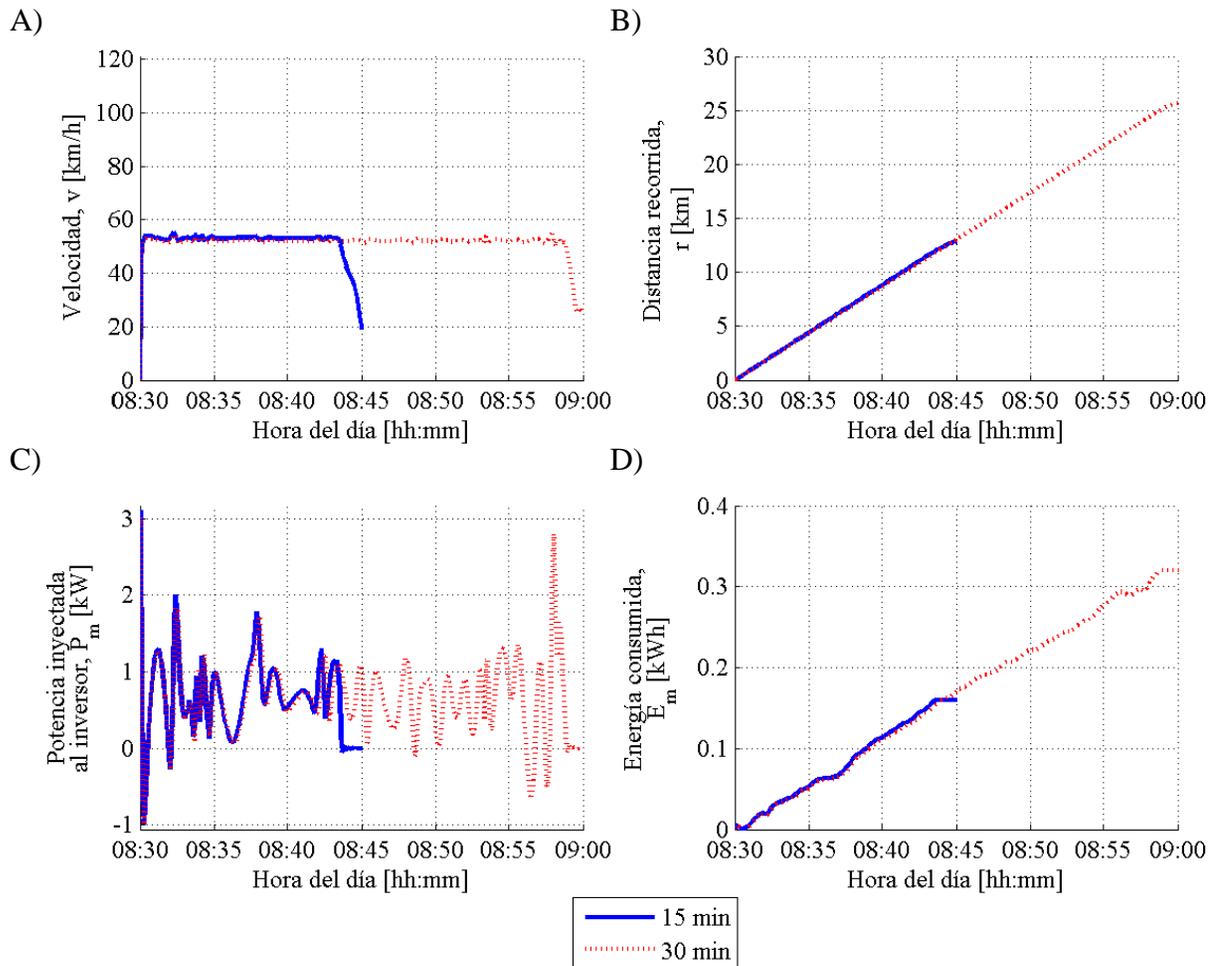
[11], destinar la energía a compensar los efectos de las perturbaciones externas en vez de utilizarla en acelerar el vehículo. Inicialmente el vehículo acelera rápidamente de modo de alcanzar esta velocidad óptima lo antes posible. Se deja ver cómo la pendiente inicial, levemente negativa, es aprovechada para tal fin, compensándose apropiadamente los efectos de las pendientes mediante una aplicación oportuna de cantidades mayores o menores de potencia al motor. Cerca de los kilómetros 2, 11 y 7, se deja ver el buen uso que el algoritmo hace de la técnica de anticipación de pendientes discutida también en [11]: los máximos de potencia en esas zonas ocurren justo antes de enfrentar pendientes empinadas, aumentando en consecuencia la velocidad para luego ser reducida rápidamente, de modo de utilizar lo más eficientemente posible la energía considerando las pérdidas mecánicas en el motor. El lector podría verse tentado a pensar que en otros sectores el vehículo debiese exhibir también este comportamiento. Debe tenerse en cuenta, sin embargo, que la distancia que abarca dicho valle es también bastante extensa, y que las pendientes por ende son pequeñas.



**Figura 4.5: Contraste entre la orografía del terreno encontrada durante la porción de la carrera predicha en la primera iteración y: (A) Potencia aplicada al motor, (B) Velocidad del vehículo.**

## 4.2. Elección de la escala temporal

Ya mostrado el correcto funcionamiento del algoritmo, es posible preguntarse si la discretización temporal utilizada es adecuada o si convendría utilizar otra distinta. En la Figura 4.6 se muestran las respuestas obtenidas para dos discretizaciones: una considerando una longitud de quince minutos y otra, una de treinta, utilizando, al igual que en la sección anterior, los límites energéticos para los intervalos respectivos. Para hacerlas comparables en cuanto a calidad de aproximación, se dobló el número de intervalos del método pseudoespectral en el segundo caso, según lo estipulado en la Sección 3.3.



**Figura 4.6: Comparación de resultados entre una discretización escogida como de quince minutos contra otra de treinta, considerando: (A) Velocidad (B) Distancia recorrida, (C) Potencia de entrada, (D) Energía consumida.**

Las diferencias entre un y otro resultado no resultan apreciables sino hasta cerca de las 08:45, en que las velocidades de uno y otro caso difieren apreciablemente, dejándose ver el resultado de la política de ahorro energético del primero, en que las limitaciones energéticas del algoritmo son más estrechas. En todo caso, las velocidades no difieren más allá de 1 [km/h]. En consecuencia, se concluye que al utilizar una discretización más gruesa se puede planificar con mayor horizonte temporal el comportamiento del vehículo, pero a un coste mayor en tiempo de cálculo y sin muchas diferencias con respecto al cálculo de un fragmento más pequeño de carrera.

La discretización utilizada, de acuerdo a la ecuación (3.20), afecta el número de intervalos  $k_{f1}$  y  $k_{f2}$  a considerar, además de los límites de la energía consumida,  $E_{m(s-min)}$  y  $E_{m(s-max)}$ , los cuales pasan a depender del segmento en el caso de contarse con una discretización no uniforme. Esto modifica, en consecuencia, las magnitudes que las energía consumidas planificadas para cierto día tengan, observándose magnitudes menores en aquellos intervalos cuya duración sea menor. Es de notar que la energía solar pronosticada para un determinado día no depende de la discretización utilizada, de manera que la energía consumida por el motor, acumulada, también debe poseer la misma magnitud para un día completo, pues el pronóstico de energía en baterías no depende de la etapa respectiva, sino de la de planificación semanal. Esto permite concluir que el consumo energético a lo largo de un día no se verá mayormente afectado por el cambio de discretización. Sin embargo, resulta importante observar que una discretización demasiado fina sí produce distorsiones con respecto a discretizaciones más gruesas. La Figura 4.6 (D), por ejemplo, da cuenta de que la restricción energética para el primer intervalo de la discretización fina,  $E_m^{(Da,1)} = 0.1596 [kWh]$ , no se cumple para la discretización gruesa, la cual para las 08:45 ya posee un consumo energético levemente mayor que dicha cantidad. Si la discretización gruesa tuviese que cumplir la restricción energética de la fina, el valor de su función objetivo óptima empeoraría, debido a que el conjunto factible será reducido gracias a la adición de aquella, quedando las curvas óptimas de la Figura 4.6 fuera de éste. De todos modos, los resultados obtenidos en la Sección 4.1 muestran cómo la limitación energética impuesta es desplazada gracias al esquema de horizonte móvil, lo que hace que los resultados sean similares, transcurrido cierto lapso. Con todo eso, aun la discretización gruesa de la Figura 4.6 implica la generación de soluciones subóptimas. La prueba de esto proviene de considerar el escenario en que se considera el día completo como un solo intervalo: en aquel caso se repiten las consideraciones recién abordadas, siendo la única diferencia la longitud de las discretizaciones empleadas.

El tiempo de cálculo correspondiente para la discretización fina es de 4.8345[s] y de 12.6141[s], respectivamente, lo cual se explica a partir del mayor número de variables de que consta la segunda alternativa. Debe recordarse que es deseable que el algoritmo posea un ciclo completo lo más breve en tiempo de cálculo posible. Durante el tiempo en que una sola solución de largo horizonte es calculada, podrían haberse realizado dos realimentaciones y se estaría calculando la tercera, si se utiliza una solución de corto horizonte. Cabe, entonces, preguntarse por la conveniencia de replanificar constantemente el desempeño del vehículo, lo cual se discute en la Sección 4.2.

### 4.3. La conveniencia de realimentar rápidamente

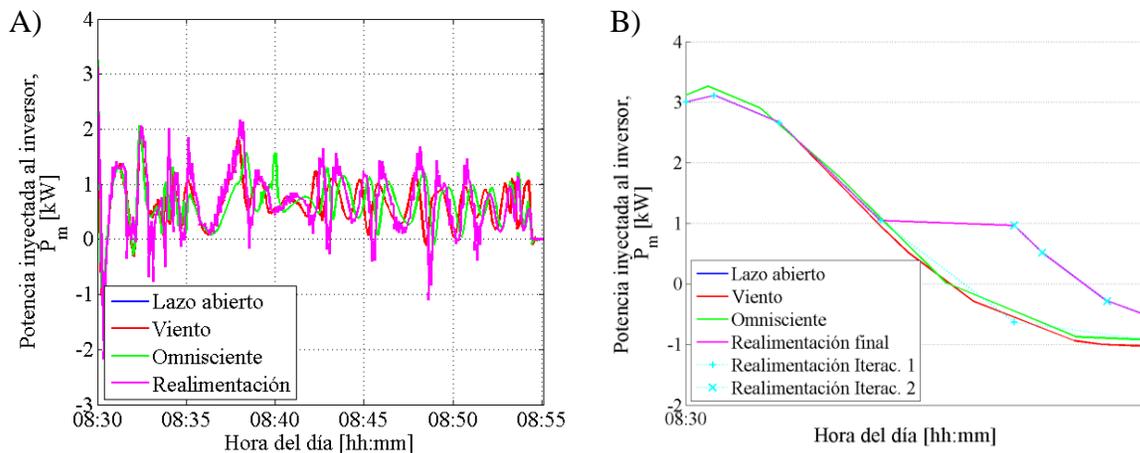
En la presente sección se estudia la conveniencia de contar con un esquema realimentado de iteración rápida como el propuesto. Ya se ha mencionado que para una situación en la que no hay perturbaciones, dos iteraciones consecutivas entregan soluciones similares. Aquí se estudia el caso en el cual una ráfaga de viento de magnitud desconocida para el equipo y dirigida exactamente en la dirección opuesta a la del movimiento del vehículo, lo impacta a las 08:35, afectando su evolución temporal. Debido a que la variable de control es la potencia aplicada al vehículo, se estudiará en primer lugar el caso en que ésta no puede ser variada con prontitud, afectándose velocidad y distancia recorrida. El estudio de las rosas de los vientos descritas en la Sección 2.1.1 arroja que se alcanzan velocidades de entre 10 y 20 [km/h] aproximadamente el 10% del tiempo durante el mes de octubre, tanto en la mañana como en la tarde, a lo largo de toda Australia. Esto indica como razonable el que la ráfaga a programar posea una magnitud de 15 [km/h] y 5 minutos de duración.

Para la realización de las pruebas se simulan tres escenarios distintos. En el primero, se realizan iteraciones consecutivas de la planificación continua cada 5 segundos, utilizando como estado inicial en cada caso el resultante de la iteración anterior en el instante de tiempo correspondiente, por lo cual este escenario será denominado como *lazo abierto*. Por otro lado, al sistema controlado mediante la señal de entrada obtenida de esta manera se lo somete al efecto del viento, pudiendo apreciarse la desviación producida por éste en la curva denominada *viento*, que carece, desde luego, de una realimentación apropiada. A continuación se evalúa el efecto de aplicar un control óptimo *omnisciente*, es decir, que asume conocido el efecto del viento de forma perfecta, asumiéndose que se cuenta con sensores y calidad de predicción perfectos, curva denominada de la misma forma. Finalmente, se observa el efecto de aplicar un esquema de *realimentación* según lo discutido en la Sección 3.3. Para cada una de estas modalidades se utiliza el planteamiento del problema de las ecuaciones (3.21).

Para comparar de forma apropiada los diferentes esquemas se hacen los siguientes supuestos:

- El tiempo inicial para la realización de todos los esquemas es las 08:30:00.
- El esquema de lazo abierto realiza iteraciones cada 5 segundos, hasta las 08:40:05, esto es, cinco segundos después de transcurrida la ráfaga de viento, con lo cual no se esperan variaciones adicionales en la trayectoria del estado o del control respecto de las óptimas. Aplicando la estrategia de horizonte móvil, el tiempo final para esta última iteración es las 08:55:05, y el consumo energético final permisible, de 0.2669 [kWh]: estos límites son los aplicados a todos los esquemas analizados, definiéndose de antemano para el esquema omnisciente.
- Las trayectorias mostradas corresponden a la trayectoria final que realizan los respectivos estados al aplicarse consecutivamente los controles calculados y considerarse el efecto del viento excepto, naturalmente, en el caso de lazo abierto.
- La última iteración de cada caso, realizada en ausencia de viento, se considera como coincidente con la realidad en el caso realimentado. Esto para impedir que se considere una disponibilidad energética mayor que en la de los otros esquemas.
- Para mejorar la precisión del esquema omnisciente, se utilizan diecinueve intervalos del método pseudoespectral, en vez de los nueve utilizados en los otros esquemas

Los resultados obtenidos para el control se muestran en la Figura 4.7, mostrando el lado izquierdo la evolución completa de dicha señal en el intervalo especificado, y el derecho, un acercamiento a los quince primeros segundos de la aplicación de éste.



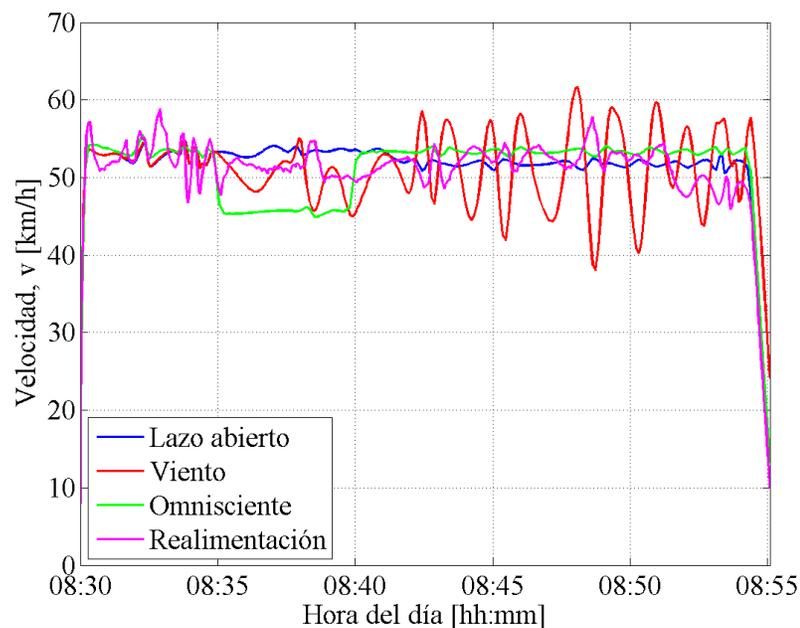
**Figura 4.7: Resultados obtenidos para el control, bajo efectos de una ráfaga de viento fuerte. (A) horizonte de tiempo completo. (B) primeros 15 segundos.**

Por construcción, se tiene que las curvas *Lazo abierto* y *Viento* coinciden perfectamente todo el tiempo. Por otro lado, según se muestra en el lado derecho de la misma figura, puede apreciarse que, salvo diferencias numéricas relacionadas con la elección de la malla de puntos del método pseudoespectral aplicada en cada caso, las curvas de control *Omnisciente* y *Lazo abierto* coinciden plenamente hasta el instante en que comienza la perturbación, las 08:35. A partir de entonces, la primera y la segunda presentan un comportamiento similar, pero no idéntico. Las semejanzas vienen dadas efectivamente por las pendientes del camino a que ambas están expuestas, y vienen expresadas mayoritariamente por una similitud en la forma de ambas soluciones. Las diferencias, por otro lado, residen en las magnitudes de los picos de ambas curvas, y en un desplazamiento temporal entre ambas. Como se verá en la Figura 4.8, es en este instante donde realmente el esquema *Omnisciente* marca la diferencia, no intentando mantener la velocidad como constante, sino reduciéndola dejando de aplicar tanta potencia poco antes de enfrentar la ráfaga, de manera de incurrir en ahorros energéticos, retomando posteriormente la velocidad anterior. Esto produce que, al finalizar la perturbación, las curvas analizadas en el presente párrafo vuelvan a coincidir en formas y magnitudes, manteniéndose desde luego desplazadas debido a la discrepancia en la distancia recorrida a tal hora. Este comportamiento podría ser explotado en alguna versión posterior del programa de manera de acelerar los cálculos realizados mediante desplazamientos apropiados de las curvas obtenidas en lazo abierto.

Conviene a continuación analizar el efecto de la realimentación. El lado derecho de la Figura 4.7 muestra cómo la curva *Realimentación* coincide inicialmente (*Realimentación Iterac. 1*) con las otras dos hasta cierto instante en que se separa de éstas, correspondiendo dicho instante al momento en que se aplica el control calculado utilizando el estado medido cinco segundos luego de aplicado el control inicial, *Realimentación Iterac. 2*. Según puede apreciarse, dicha curva corresponde exactamente a la óptima, con la salvedad de estar desplazada una cantidad de tiempo igual a la que tarda en efectuarse dicho cálculo,  $\Delta t_c = 5.1157$  [s]. Esta sola diferencia temporal, desde luego minimizada mientras menor sea el tiempo de cálculo empleado para la obtención de la iteración respectiva, produce desviaciones apreciables con respecto del óptimo,

pero que, según se aprecian en la Figura 4.9, siguen produciendo un aporte a la función objetivo, de modo que el esquema propuesto resulta conveniente de considerar. El hecho de que la trayectoria de control final resulte tener un comportamiento oscilatorio corresponde a la naturaleza iterativa del método: mientras en una iteración, como *Realimentación Iterac. 2*, se producen perturbaciones debido a este fenómeno que desvían las trayectorias de estado respecto de las óptimas en una determinada dirección, las siguientes producen perturbaciones en la dirección opuesta, de modo que al cabo de varias, éstas tienden a cancelarse, aun produciéndose ventajas en la función objetivo debido al mayor conocimiento que se tiene de la evolución real del sistema. Nótese aquí, por otra parte, el hecho de que la trayectoria final del control realimentado, en el lado izquierdo de la Figura 4.7, se presenta casi siempre en un punto medio entre la curva de lazo abierto y la curva *Omnisciente*, con una mayor tendencia hacia la última. Lo último viene a ser una consecuencia de la ignorancia que se tiene respecto de la ráfaga de viento, realizándose todas las planificaciones a futuro a partir de la información puramente entregada por el modelo, mientras que lo primero se justifica con la disponibilidad de un conocimiento más preciso sobre la trayectoria de estado.

Los primeros resultados interesantes de comentar emanantes de la aplicación de las señales de control recién analizadas corresponden a la velocidad, graficados en la Figura 4.8.



**Figura 4.8: Velocidad resultante de la aplicación de diversos esquemas de control óptimo bajo el efecto de una ráfaga de viento**

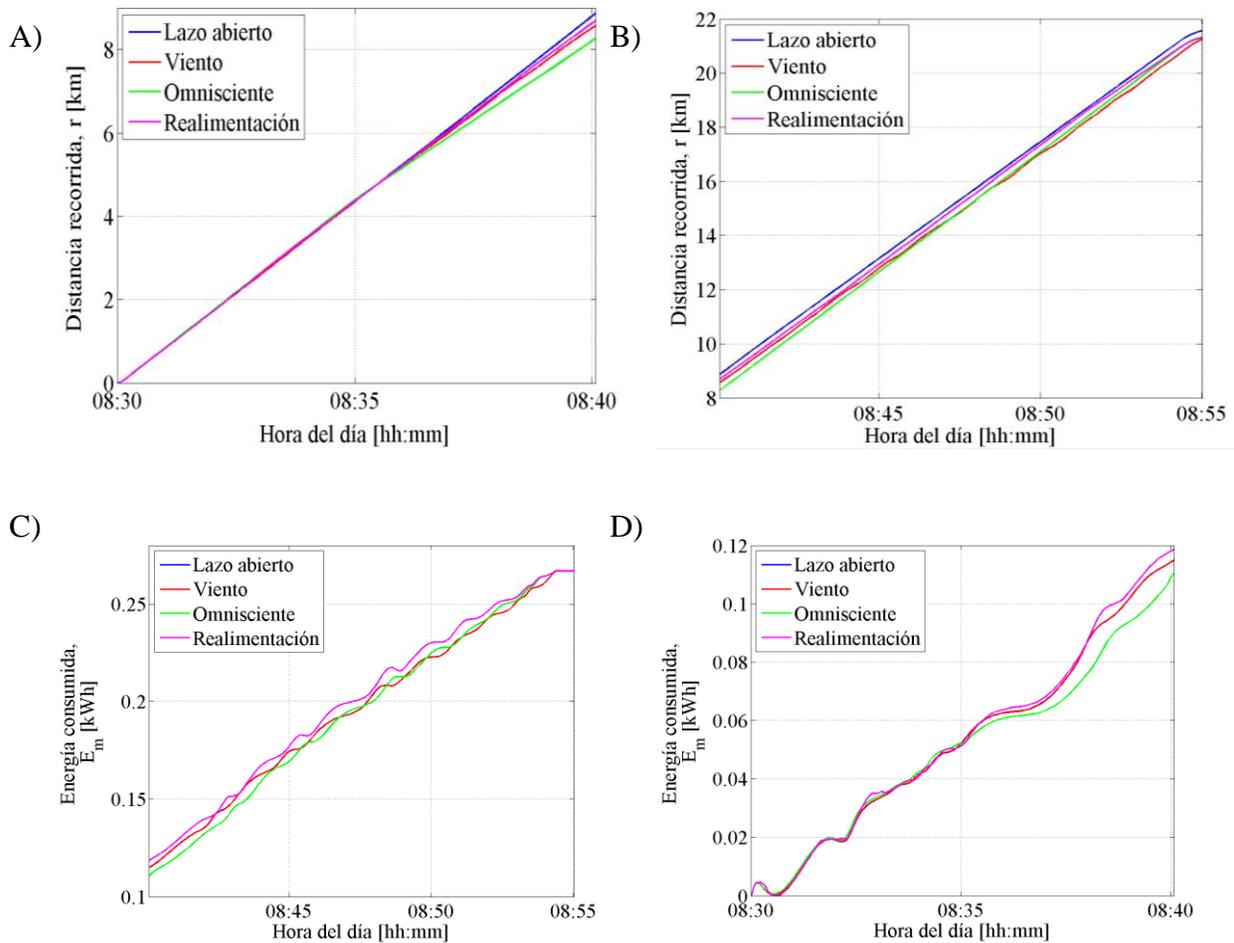
Es en este punto donde se aprecia más claramente el razonamiento detrás de cada acción de control aplicada. En primer lugar nótese cómo las curvas *Lazo abierto* y *Viento* coinciden originalmente, produciéndose diferencias importantes entre ambas, lógicamente, a partir del instante de incidencia de la ráfaga. Debido a que la potencia inyectada en el tren mecánico es la misma en ambos casos, la velocidad resultante en el segundo oscila en torno a la correspondiente al primero. Durante la duración de la ráfaga, lógicamente la velocidad del vehículo desciende al aplicarse la estrategia en lazo abierto, produciéndose un desfase entre la posición esperada por ésta y la real. Como el modelo considerado incluye el efecto de las pendientes, la potencia oscila,

según lo ya discutido, considerando un uso óptimo de la energía según anticipación de pendientes. El error en la posición incrementa el error en la velocidad óptima, pues en el esquema *Viento* se aplican estrategias de aceleración en pendientes además descendientes, al contrario de lo explicitado en [11]. La sensación de comodidad por parte del piloto, según puede anticiparse, se verá también afectada por esta decisión subóptima. Según se observa en la Figura 4.9, todos aquellos intervalos de tiempo en que la curva *Viento* se encuentra por debajo de las otras curvas inciden en que el valor de la función objetivo obtenido en este caso sea el peor de todos.

El razonamiento de la curva *Omnisciente*, según se puede confirmar, consiste en reducir adecuadamente la velocidad mientras el vehículo enfrenta la ráfaga para luego aprovechar la menor consunción de energía durante este período acelerando más fuertemente durante el resto del intervalo considerado. La base teórica para la toma de tal decisión reside en la reducción de los términos de la ecuación (2.9), debiendo recordarse en este caso que la fuerza de roce aerodinámico depende del cuadrado de la velocidad relativa del móvil con respecto a la masa de aire que enfrenta. Una reducción en la velocidad determinada, en consecuencia, reduce mayormente el consumo energético en condiciones de viento en contra que en ausencia de tal perturbación. Esto permite, según se aprecia en la Figura 4.9, que para las 08:40 se tenga bastante menos energía consumida en este escenario que para el resto, pudiéndose invertir el remanente el mantener una velocidad media posterior mayor que en el caso de lazo abierto, según se aprecia. Eso es consistente con la vigorizante inyección de potencia observada en la Figura 4.7, hacia esta misma hora.

La curva *Realimentación*, según lo discutido anteriormente, se encuentra de nuevo, generalmente, entre las curvas *Viento* y *Omnisciente*, como consecuencia de las condiciones de información ya discutidas, conociéndose el estado cada cierto tiempo pero ignorándose el real origen de las perturbaciones a través de él apreciadas. Desde luego, cada sub-estrategia correspondiente a cada iteración corresponden a esquemas en lazo abierto que consideran la información disponible del estado, por lo cual el esquema nunca considera la reducción de velocidad que el escenario *Omnisciente* sí, de modo que las acciones de control siempre estarán más bien dirigidas hacia el restablecimiento de las trayectorias correspondientes más bien al escenario *Lazo abierto*. El factor determinante en la toma de decisión para las curvas a entregar en cada caso resulta nuevamente ser el recurso energético, el cual según se ve en la Figura 4.9, a partir de la aplicación de la ráfaga es siempre es medido como mayor al esperado en la ausencia de esta última. Al disponerse en cada iteración de una energía menor, la velocidad proyectada resulta, entonces, ser menor. Al igual que en la sección anterior, de nuevo surge la interrogante de cómo mejorar este esquema de modo de incluir más explícitamente el efecto de perturbaciones en cada iteración. Una respuesta directa podría ser el de utilizar en cada iteración un modelo distinto, cuyos parámetros correspondan más fielmente a los realmente correspondientes al sistema bajo el efecto de las perturbaciones. Este aspecto no fue explorado en el presente trabajo, surgiendo como una arista nueva a explorar en algún eventual trabajo futuro.

Queda finalmente por analizar el efecto, en cada caso, en tanto la distancia recorrida como el consumo energético. Ambos se muestran en la Figura 4.9, separados convenientemente en dos intervalos. Esta representación ayuda tanto a la estética como al análisis siguiente.



**Figura 4.9: Resultados obtenidos para la evolución de distancia recorrida (arriba) y la energía consumida (abajo) para distintas estrategias a aplicar bajo una ráfaga de viento. Curvas entre las 08:30:00 y las 08:40:05 (izquierda), y las 08:40:00 y las 08:55:05 (derecha)**

El análisis a efectuar puede centrarse en tres variables distintas: el tiempo, la energía consumida y la distancia. Es interesante para el equipo de competencia el encontrarse en todo tiempo en el punto más distante del punto de partida de la carrera posible, de manera de garantizar que en todo momento el vehículo está en la posición más lejana alcanzable posible. Si bien esto puede verse como el objetivo buscado en la carrera, los resultados obtenidos nos muestran que esto no necesariamente es así, pues lo realmente importante es el llegar a la meta en mínimo tiempo. Esto puede implicar el ahorrar cierta cantidad de energía durante el trayecto, adoptando políticas menos agresivas, para poder posteriormente echar mano en el momento preciso a las capacidades del vehículo. Sin embargo, puede ser conveniente, por otro lado y además de lo anterior, llegar también de forma prematura a determinadas paradas de control.

Según puede verse, los resultados permiten abarcar todo el abanico anterior de estrategias. Lo primero que hay que recordar es que el consumo energético (Figura 4.9, abajo, derecha) es igual al final del intervalo considerado para todos los casos. Obsérvese además, en el mismo sector de la figura, y en el sector ubicado a su izquierda, que la energía consumida por todos los esquemas es prácticamente la misma al principio de la etapa, solamente produciéndose diferencias apreciables hacia el instante en que la ráfaga comienza a ejercer acción sobre el vehículo. Si bien es cierto que el escenario de *Realimentación* posee algunas discrepancias con los otros escenarios (recuérdese que por construcción las energías consumidas de *Viento* y *Lazo abierto* son las mismas), llama la atención el hecho de que, a pesar de las oscilaciones en la señal de control aplicada, discutidas anteriormente y mostradas en la Figura 4.7, la energía consumida no se altera tan gravemente en este primer intervalo de tiempo. Las diferencias importantes en cuanto a consunción de energía se aprecias, lógicamente, a partir del instante en que actúa la ráfaga de viento. Se respalda lo anteriormente dicho con respecto a la estrategia de ahorro de energía que aplica el escenario *Omnisciente*, notando que, posterior a la aplicación de la ráfaga de viento, dicha diferencia se estrecha cada vez más, debido a que tal estrategia empieza a tomar la modalidad de alta velocidad ya discutida. Es de notar el hecho de que el escenario de *Realimentación* siempre posee un mayor consumo energético que los otros. Esto resulta lógico si se recuerda que el esquema, en su falta de información, intenta mantener la velocidad lo más alta posible durante la duración de la ráfaga, a diferencia de los escenarios *Viento* y *Lazo abierto*, que fallan tanto en mantener una velocidad constante como en dar una representación verídica de la realidad, respectivamente.

En cuanto a la distancia recorrida, es lógico que el escenario *Lazo abierto* produzca las mayores distancias. De no aplicarse vientos al vehículo, los resultados podrían ser aproximadamente estos para la distancia recorrida. El valor final de la curva es de 21.58 [km], el cual es seguido, desde luego, por el de la curva *Omnisciente*, con 21.36 [km] el de la curva *Realimentación* con 21.32 [km] y finalmente la curva *Viento*, con 21.28 [km]. Es posible concluir, por ende que con el esquema de realimentación propuesto, entonces, sí se realizan mejoras apreciables con respecto a un sistema en lazo abierto como el de [14]. La diferencia entre los valores entregados para este ejemplo, de 400 [m], equivale a la longitud de varios vehículos, y a unos 28.8 [s] de diferencia, a 50 [km/h], con respecto a otro vehículo, lo cual desde ya podría significar la diferencia entre uno y otro puesto en el podio, en casos críticos. Si esto se suma adecuadamente a través del desarrollo de toda la carrera, se podrían tener avances bastante mayores, recomendándose entonces el uso del presente algoritmo en carreras de esta naturaleza. Este resultado global hace sentido si se considera que el nivel de información entre cada uno de los casos es creciente. Esto vuelve a respaldar la idea anteriormente formulada de combinar el esquema presentado con alguno que permita conocer en mayor detalle la magnitud de las perturbaciones que son aplicadas al sistema.

Nótese, sin embargo, que no durante todo el trayecto los resultados poseen el mismo orden. Si se observan los sectores iniciales del intervalo de tiempo considerado (Figura 4.9, arriba, izquierda), se apreciará que las distancias recorridas en cada caso son prácticamente las mismas, al igual que casi todas las otras variables, hasta el instante en que la ráfaga es aplicada. A continuación, la cautela del esquema *Omnisciente* vuelve a evidenciarse, mientras que el esquema realimentado exhibe los mayores valores. Nótese cómo, pasando al sector de la derecha, para la gran mayoría del resto del tiempo, es la curva *Realimentación* la que está por sobre las otras tres (salvo *Lazo abierto*, la cual es prácticamente alcanzada por dicha curva hacia las 08:52), excepto para los instantes finales del intervalo considerado, muy cerca de las 08:55, en que es rebasada por la curva *Omnisciente*. Notar, entonces, que existe otra ventaja de aplicar el esquema

realimentado propuesto: si bien éste posee un gasto energético mayor que los otros escenarios propuestos, también, de alguna forma, ayuda siempre a mantenerse en una posición alejada del punto de partida. En este caso, la naturaleza híbrida de la información con que este esquema trabaja resulta ser de ayuda: sin conocer la información exacta, el esquema propuesto persevera de la forma más tenaz posible en la consecución de la meta.

Si bien es cierto que los análisis anteriores consideran toda la duración del intervalo de tiempo considerado, también es cierto que la mayor parte de las curvas no serán aplicadas, debido a la actualización que el esquema desarrollado aplica sobre las trayectorias óptimas calculadas y a la duración de la carrera completa, que obliga a considerar horizontes de tiempo y restricciones energéticas mayores. Para fines de este ejemplo, sin embargo, conviene entonces analizar lo que sucede hasta poco después del cese de la ráfaga de viento, a las 08:40:05 (Figura 4.9, izquierda). Se verifica una vez más la robustez aumentada del esquema realimentado, obteniéndose en la curva correspondiente una distancia recorrida final que se asemeja más que todas a la del esquema de lazo abierto, llegando a estar solo 160 [m] por detrás de esta última, a pesar de la perturbación aplicada. El consumo energético utilizado para conseguirlo, cabe destacar, es apreciablemente mayor. El hecho, sin embargo, de que la energía utilizada sea controlada en cada iteración controla el riesgo de despilfarros energéticos.

Es posible que, durante su travesía, el vehículo enfrente otro tipo de perturbaciones, como fallas de tipo mecánico o aumento de pérdidas por causa de calentamiento. En embargo, todas ellas pueden reducirse a casos como el recién presentado, en que el modelo utilizado para la resolución de cada planificación no calza con la realidad. De este modo, por analogía, los resultados obtenidos en esta sección son también aplicables a los tales, esperándose entonces nuevamente que la aplicación del esquema propuesto frente a un esquema en lazo abierto ayude a mejorar el rendimiento del vehículo en competición por tiempos apreciables a escala humana, pudiéndose combinar de forma conveniente la visualización de la evolución esperada del vector de estado con la real, de manera de mantener el equipo bien informado sobre discrepancias que puedan producirse. Eventualmente, según se ha discutido, podría resultar de gran utilidad el poder estimar de forma rápida la magnitud de tales perturbaciones, de manera de tomar decisiones más cercanas a la óptima.

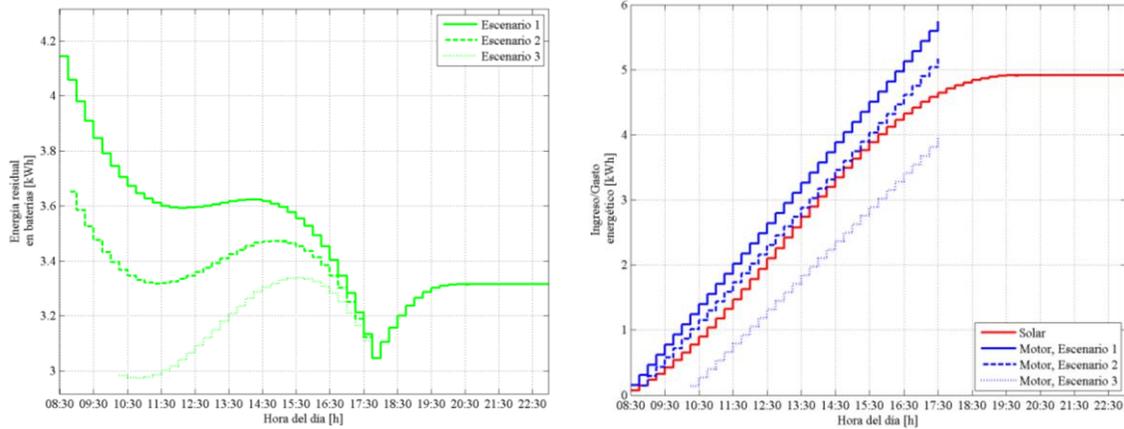
#### 4.4. Estado de carga bajo

Al ser vehículos que se encuentran casi siempre en una etapa de prototipo, los autos solares son muy vulnerables a fallas imprevistas que pueden causar grandes despilfarros energéticos. En el Atacama Solar Challenge de 2011, Eolian 2 desperdició una importante de su capacidad al perderse conexión con la telemetría del vehículo; en el World Solar Challenge del mismo año, Sikat II sufrió un accidente al incendiarse su banco de baterías (Figura 4.10, [75]), pero pudo continuar, con gran pérdida, en carrera, mientras que el equipo solar Umicore de Bélgica tuvo que realizar cambios en sus baterías. Resulta, entonces, importante analizar el comportamiento del algoritmo cuando el SoC muestra valores más bajos que los previstos en una determinada etapa del evento.



**Figura 4.10: El Sikat II, de Team Solar Philippines, humeante al incendiarse su banco de baterías**

En la presente sección se simularán tres escenarios diferentes. El primer escenario corresponde a una situación normal, tal como la descrita en la Sección 4.1. El segundo escenario corresponde a la acción a llevar a cabo cuando la medición del estado de carga del sistema, a las 08:45, detecta que se dispone solamente del 90% de la energía disponible esperada para tal instante, mientras que el tercer escenario corresponde a lo que ocurre cuando una medición realizada a las 10:30 revela que ya se ha consumido energía por sobre el nivel aceptable para el día completo, siendo ésta del 90% de lo correspondiente a lo esperado para el día siguiente. Los resultados se muestran en la Figura 4.11. Cabe destacar que el tiempo de cálculo para cada caso, al igual que lo señalado anteriormente, se encuentra en torno a los 0.3 [s].



**Figura 4.11: Resultados para la planificación energética diaria al simular una situación de derroche energético para distintos escenarios**

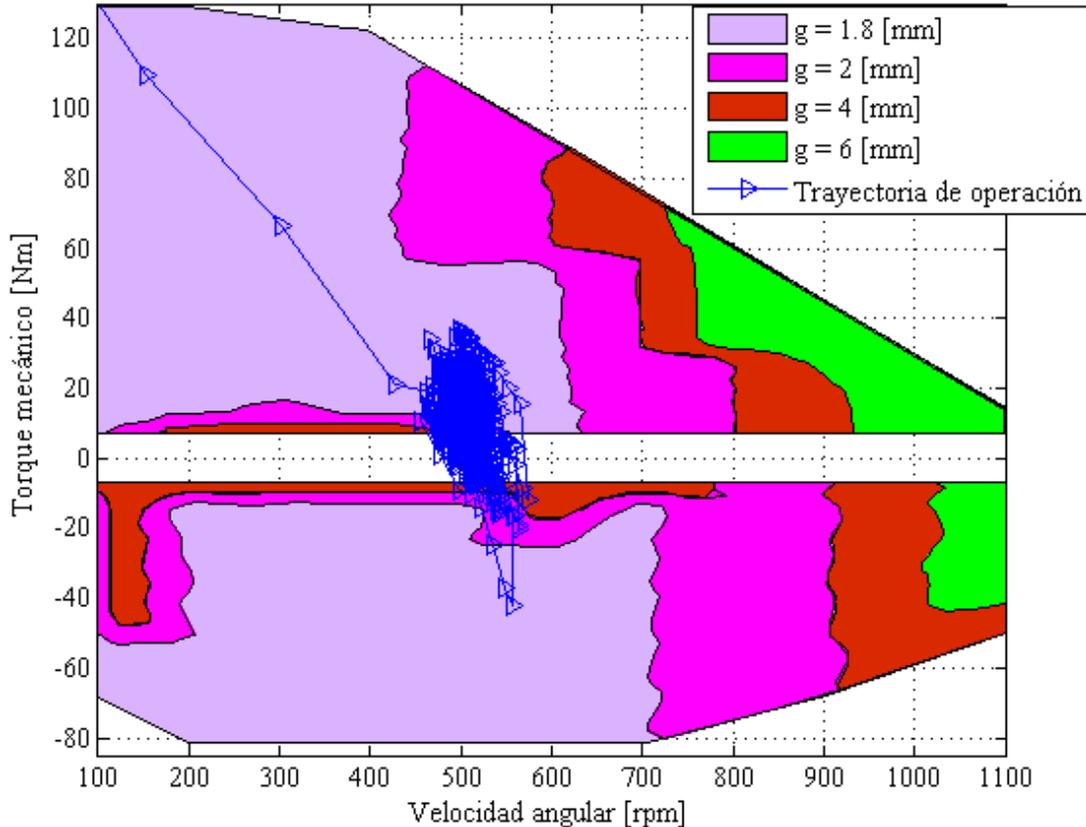
Los resultados obtenidos son lógicos: si se dispone de apreciablemente menos energía que lo esperado en cierto instante de tiempo, la acción más intuitiva a tomar es la de reducir el consumo. Resulta notable cómo, a pesar de que en el tercer escenario se tiene una disponibilidad energética bastante mermada (pues aún resta la mayoría del día por correr, y ya se ha agotado la cuota diaria), la respuesta del algoritmo promueve continuar el avance, aunque sea a una velocidad también disminuida (pues, a largo plazo, la energía consumida en cierto lapso es creciente con la velocidad media en él alcanzada, según se desprende del estudio realizado en la Sección 4.3), lo cual es perfectamente consistente con la función objetivo utilizada en la planificación continua, (ecuación (3.21)). El algoritmo siempre intentará ajustar la dinámica del vehículo de modo de no afectar la meta energética de los días siguientes. En este momento resulta nuevamente importante destacar la relevancia que tiene el contar con estimaciones adecuadas del estado de carga del banco de baterías del vehículo. Lecturas erróneas en éste van sin duda a producir comportamientos anómalos en el algoritmo propuesto.

## 4.5. Control del entrehierro

En la presente sección se estudiará la variación que sufre el entrehierro magnético del motor del vehículo en la medida que éste acelera. Dada una potencia de entrada,  $P_{in}(t)$  y una velocidad  $v(t)$ , se calcula la potencia en el eje utilizando las ecuaciones (2.21) y (2.22). Por otro lado, la velocidad angular del motor viene dada por  $\omega_{mec} = v/r_w$ , y el torque mecánico, en consecuencia, viene dado por  $T_{mec} = P_e/\omega_{mec}$ , lo que da origen a la ecuación

$$T_{mec} = \begin{cases} -\frac{(k_1 + 1)vr_w}{2k_2} + \sqrt{\left(\frac{(k_1 + 1)vr_w}{2k_2}\right)^2 + \frac{r_w^2}{k_2}(P_{in} - k_0v)}, & P_{in} \geq k_0v \\ -\frac{(1 - k_1)vr_w}{2k_2} + \sqrt{\left(\frac{(1 - k_1)vr_w}{2k_2}\right)^2 + \frac{r_w^2}{k_2}(P_{in} - k_0v)}, & P_{in} < k_0v. \end{cases} \quad (4.1)$$

En caso contrario, según se aprecia en dichas ecuaciones, no se tiene potencia generada, no entregando los mapas de [46] una indicación explícita para el entrehierro óptimo, pudiendo inferirse, de la Figura 2.12, la aplicación de una distancia  $g = 1.8 [mm]$ . Se considera para todos los efectos la evolución de las curvas *Realimentación*, de la Sección 4.3. Los resultados se muestran en la Figura 4.12 .



**Figura 4.12: Mapa de asignación de torque óptimo para el escenario *Realimentación* definido en la Sección 4.3**

Es de notar en este caso, en primer lugar, cómo se estima inicialmente un torque mayor que el factible. Dicha discrepancia se debe únicamente a las diferencias de precisión existentes entre la aproximación utilizada para el cálculo de la potencia en el eje y la fenomenología real, pero afortunadamente no cambia el resultado de las conclusiones a tomar: se concluye acerca de la conveniencia de utilizar un esquema de ajuste del entrehierro, debido a que, según se puede observar, el motor del vehículo opera la mayor cantidad de tiempo alternándose entre la zona correspondiente a  $g = 1.8$  [mm],  $g = 2.0$  [mm] y  $g = 4.0$  [mm]. En este punto resulta importante mencionar que la referencia consultada no especifica una zona de operación para torques entre los -7 [Nm] y los 7 [Nm], de modo que en el razonamiento siguiente se aplicó una interpolación sencilla, basada en la información visual aportada por el gráfico. En aquellas zonas donde se requiere de frenado regenerativo, la consulta de [46] muestra que el motor se alterna entre las zonas de operación correspondientes a  $g = 4.0$  [mm],  $g = 2.0$  [mm] y  $g = 1.8$  [mm]. No debe olvidarse que dichas zonas corresponden a intervalos de ubicación del entrehierro, de modo que la zona correspondiente a  $g = 2.0$  [mm] perfectamente podría indicar en realidad a un valor  $g = 2.5$  [mm].

Resulta importante notar el rápido avance del sistema hacia su zona habitual de operación. Si bien se parte con un torque calculado de 168.3273 [Nm], éste llega al cabo de 6[s] a los 21 [Nm], pasándose en dicho lapso desde las 0 a las 426.5 [rpm]. El vehículo opera, entonces, la mayor parte del tiempo en el régimen oscilatorio mostrado, principalmente en zonas correspondientes a  $g = 1.8$  [mm]. Los mapas de eficiencia de la referencia consultada indican que la diferencia entre la eficiencia de uno y otro sector de operación podría situarse en cantidades del orden del 3%: es así posible concluir en lo concerniente a este punto que, al menos para la estrategia y el vehículo utilizado, el implementar el control del ancho del entrehierro resulta recomendable, pero no imprescindible, y que deben por cierto encontrarse métodos de bajo consumo energético para su operación. Debido a que con la estrategia probada el vehículo no superaría los 60 [km/h], los efectos de contrafuerza electromotriz presentados en la Sección 2.2.3 no aplican. De aquí es posible apreciar la relevancia que un sistema de planificación energética como el utilizado puede llegar a tener en aplicaciones de diseño, si se utilizare con los valores paramétricos adecuados en sus modelos.

## Capítulo 5. Conclusiones y trabajo futuro

A lo largo del presente trabajo se ha realizado y puesto a prueba en diversas circunstancias de funcionamiento un algoritmo de control óptimo en tiempo real diseñado para un vehículo solar que participa de una carrera, obteniéndose resultados que avalan su aplicación, exhibiendo mejoras apreciables con respecto a esquemas en lazo abierto y aportando tanto rapidez como detalle a las soluciones estudiadas en la literatura. El algoritmo primero divide el problema en etapas diarias, de modo de planificar el desarrollo de la carrera en una perspectiva semanal. Luego, teniendo ya una planificación a largo plazo, realiza una planificación a corto plazo, determinando rápidamente el comportamiento óptimo esperado del recurso energético a lo largo del día actual de competición. Más detalle es agregado por la planificación continua, que permite programar las variables energéticas principales del vehículo de forma dinámica y veloz, aprovechando al máximo el nivel de detalle de la pista de que se dispone. En este punto, la utilización de métodos de transcripción directa para el problema de corto plazo, particularmente el método Gaussiano pseudoespectral, se presenta como el distintivo del presente trabajo, debido a que el uso del concepto de cuadratura Gaussiana y de interpolación polinomial permite realizar cálculos de forma muy rápida, haciendo que pocos parámetros puedan representar con bastante fidelidad las dinámicas de un sistema no lineal cualquiera. El método implementado presenta semejanzas y diferencias con otros trabajos, incorporando de forma mixta una planificación energética a corto plazo y una destinada al largo plazo en las cuales se planifica la energía a utilizar durante la carrera. Este enfoque se motiva principalmente, por un lado, por la dificultad computacional de incluir con detalle los factores que afectan al vehículo a lo largo de toda la trayectoria, y por otro, por la ventaja que un nivel de conocimiento adecuado sobre éstos puede traer a la calidad de la decisión tomada por el programa. Sin embargo, al incrementarse considerablemente la longitud del período de integración a considerar en la optimización, el número de variables requeridas para que la solución entregada posea el detalle suficiente crece inmanejablemente, lo que motiva integrar el concepto de presupuesto energético.

El algoritmo implementado presenta tiempos reducidos de cálculo con respecto a otras implementaciones. Éstas declaran abiertamente el contar con tiempos de cálculo del orden de los minutos, mientras que los del esquema implementado apenas son del orden de los cinco segundos. Se tienen así mejores capacidades de reacción frente a perturbaciones externas que en dichos trabajos, al verse agilizada la capacidad de realimentación del esquema. El método pseudoespectral utilizado marca la diferencia al aproximar a bajo costo la dinámica del vehículo. De este modo, el trabajo propuesto se sitúa como una solución de compromiso entre soluciones tabuladas ultra-rápidas y soluciones de planificación detalladas, pero costosas computacionalmente.

El algoritmo toma decisiones que concuerdan con los resultados disponibles en la literatura. Éste aplica la técnica de anticipación de cerros, debido a que las pérdidas en el motor y el conocimiento de la orografía de la ruta fueron incluídos en todo momento. Se deja ver, además, el cumplimiento correcto de las estrategias básicas de velocidad constante también descritas: a cambios pequeños en la pendiente del camino, desviaciones pequeñas con respecto a cierta magnitud de velocidad se aprecian. De este modo, es posible apreciar que la metodología propuesta permite, a diferencia de otras estudiadas, considerar a toda hora la curvatura particular del camino para hacer un uso más eficiente de la energía.

El algoritmo propuesto muestra robustez frente a diversos escenarios adversos para el desempeño del vehículo. Éstos pueden agruparse en dos grupos: uno que incluye fallas mecánicas y vientos sobre el vehículo y otro relacionado más de cerca con fallas en el panel solar, errores significativos en el sistema de predicción de radiación solar y lecturas erróneas del estado de cargas en baterías. Dichos escenarios son representados por una ráfaga de viento contraria a la dirección en movimiento y una situación en que el estado de cargas en baterías medido es inferior al planificado. Se muestra la eficacia del método propuesto, obteniéndose respuestas muy rápidas al actualizar la planificación energética y respuestas llenas de sentido: en situación de estrechez energética, en vez de detenerse a recargar, el sistema prefiere reducir su velocidad de modo de no desperdiciar tiempo valioso en la ruta, pero a la vez cumplir la planificación energética para el día presente. Sin duda que esta decisión puede ser rebatible, por ejemplo, si el día actual presenta un cielo perfectamente claro y el pronóstico de radiación solar para el día siguiente cambia de un instante a otro, pasando de indicar un cielo claro a un día nublado. En esas circunstancias deberá recurrirse a una iteración de planificación semanal, la cual inmediatamente ajustará el valor de la energía remanente en baterías al final del día actual de modo de aprovechar esta situación de la mejor forma. Con tiempos de simulación tan breves (menos de medio segundo para los esquemas de mediano y largo plazo, y menos de diez para las iteraciones de planificación continua) es posible realizar planificaciones nuevas virtualmente en cualquier instante de tiempo.

La inclusión de la discretización de la energía solar utilizada le da al algoritmo un carácter subóptimo. Esto es debido a dos factores principales: en primer lugar, el uso de intervalos de tiempo finito sugiere inmediatamente el uso de una función objetivo, para el problema de control óptimo asociado al intervalo actual de competencia, correspondiente a la maximización de la distancia recorrida en él. El segundo factor corresponde a la inclusión de restricciones sobre la energía a consumir, las cuales tienen como fin el mantener dicho consumo dentro de márgenes aceptables a lo largo de la carrera. Desde ya, la inclusión de restricciones adicionales a cualquier problema de optimización solo puede empeorar o mantener el valor óptimo de la función objetivo. Adicionalmente, este esquema, a diferencia de los basados en programación dinámica, no incorpora detalles precisos sobre la evolución futura del vector de estado completo, habiéndose preferido solamente resumir las variables energéticas hacia el futuro a través de la discretización mencionada. No puede considerarse que la optimización parcial realizada en cada intervalo recupere un óptimo global para la carrera o el día completo, debido a que lo anterior no es suficiente para anticipar la dinámica futura del sistema con precisión. No obstante, el esquema propuesto implementa una estrategia de tipo horizonte móvil, la cual se encarga de renovar la solución parcial obtenida, de modo de compensar sus limitaciones, mitigando grandemente los efectos de los dos factores degradantes de la optimalidad anteriormente mencionados. Con todo esto, el esquema implementado maximiza el uso de energía en el motor y procura que tal uso sea el más eficiente posible con respecto a la distancia recorrida. Esto sin duda que apunta en la misma dirección que un criterio de minimización del tiempo final de recorrido, y cuenta con la ventaja de no requerir información futura detallada para su formulación. En cuanto al uso de discretizaciones diferentes, se comprueba que los resultados obtenidos son prácticamente idénticos, encontrándose solo diferencias apreciables hacia el final de los intervalos correspondientes, derivadas de las restricciones energético-temporales de éstos. El usuario debe evaluar la conveniencia de contar con un nivel de detalle mayor hacia el futuro en contraposición a una menor frecuencia de realimentación.

Es necesario y conveniente aplicar simplificaciones a la modelación del vehículo, con el fin de algoritmo y minimizar los tiempos de cálculo requeridos para la planificación continua. El sistema eléctrico del vehículo es complejo, y profundamente no lineal: la gran cantidad de celdas

solares, con sus diferentes características, orientaciones espaciales y conexión en los paños que conforman el panel solar implica que cada una hace un aporte de corriente distinto al sistema y su eficiencia puede ser distinta con respecto a la de sus vecinas; el banco de baterías, también compuesto por un gran número de unidades, cada una con sus estados de salud y de carga, y el conjunto inversor-motor, con sus características no lineales y la conversión DC/AC a través de la técnica de modulación SVM, sin contar el conjunto de MPPT instalados, presentan complejidades de modelación tremendamente altas como para ser incluidas en detalle, resultando muy conveniente su representación, en algunos casos a través de factores, eficiencias energéticas. La alta eficiencia de algunos de ellos respalda la decisión, particularmente el caso del MPPT y el banco de baterías. Para el último existen modelos sencillos que permiten agruparlo como un todo, pero en el trabajo realizado, para agilizar el cómputo de la planificación continua, se prefirió utilizar la alternativa ya descrita. La eficiencia del panel de celdas solares permanece no abordada con detalle, utilizándose como primera aproximación una eficiencia media. Por las mismas causas, también se decide utilizar una modelación sencilla para la parte mecánica del vehículo, con bases principalmente en la mecánica de movimiento unidimensional y en la transferencia energética, considerando que todas las fuerzas pueden ser consideradas como aplicadas sobre el centro de masa del vehículo. Estas asunciones resultan muy adecuadas para circuitos de carrera en los cuales el vehículo debe recorrer distancias largas en línea recta, como las carreras solares, debido a que las dinámicas de giro del vehículo rara vez son aplicadas

Los resultados obtenidos son fuertemente dependientes del modelo utilizado para describir al vehículo. El someter el vehículo a perturbaciones y analizar el efecto de un distinto grado de conocimiento de éstas revela que los resultados varían apreciablemente en los distintos casos, dándose paso, efectivamente, a políticas de ahorro energético cuando se anticipan condiciones adversas. Debido a que el algoritmo toma sus decisiones dependiendo completamente de la modelación utilizada, también es posible concluir y enfatizar la necesidad de contar con una identificación precisa de los parámetros de éste. En el trabajo realizado se ha analizado el efecto de no contar con ella, apreciándose un deterioro no menor en el desempeño del vehículo.

Es importante contar con un equipo de telemetría bien pensado. Las restricciones presupuestarias no permiten muchas veces el poder trasladar equipos muy numerosos, grandes o caros, de modo que debe decidirse muy bien la instrumentación a contemplar para su uso en carrera. El disponer de ella permite contar con información útil para los sistemas de estrategia, al entregar la posibilidad de realimentar estados relevantes o de detectar fallas. El esquema presentado hace uso de realimentación de la distancia recorrida, el estado de carga y utiliza mediciones sobre la corriente ingresada al inversor. Destaca en este caso el uso de dispositivos GPS, particularmente debido a que una discordancia en la estimación de las pendientes del camino puede comenzar a aplicar una señal de control correspondiente a un tramo de la ruta en otro incurriendo así en un uso subóptimo de la energía, desaprovechando las ventajas de la utilización de la estrategia de anticipación de cerros. Pueden resultar además útiles otro tipo de señales, como la señalética del camino. Un sistema de telemetría que permita predecir o dar cuenta de efectos provenientes de perturbaciones externas resulta prioritario, en consonancia con el párrafo anterior.

El motor del vehículo no alcanzará mejoras significativas en su rendimiento de procederse al ajuste detallado del entrehierro, pero de todas maneras éste resulta recomendable al permitir ahorros energéticos correspondientes a un orden del 3% en la eficiencia del motor, tanto en regímenes acelerantes como de frenado. Dados los parámetros del vehículo y el modelo de éste

utilizados, se recomienda una apertura del entrehierro de  $g = 1.8 [mm]$  la mayoría del tiempo, produciendo variaciones bajo un sistema motriz eficiente. Dicho modelo, consistente en términos asociados a pérdidas óhmicas, roce de rodadura y a un término empírico dependiente de la potencia en el eje, reproduce de forma fiel el comportamiento de la máquina, avalando esta conclusión, obtenida de un análisis independiente del algoritmo propuesto.

Sería interesante estudiar en algún trabajo futuro la relación espacial de la radiación solar, en cuanto a nubosidades y latitudes: la estrategia de cacería solar puede resultar de aplicación directa en un trabajo futuro. Si bien el algoritmo en su implementación original no incluye explícitamente esta estrategia, se sugiere intentar una ponderación apropiada y rápida de la potencia del motor a utilizar en los distintos tramos de la planificación diaria. El efecto de ésta sería el de priorizar ciertos intervalos de tiempo en que convenga aplicar mayor energía para acelerar a una velocidad mayor y así alcanzar los claros de sol más rápidamente. Dado que la planificación realizada en el presente trabajo es puramente temporal, los coeficientes de dicha ponderación deberían estar relacionados con la dimensión espacial a través de la velocidad, la cual a su vez está relacionada con la energía consumida. En ese sentido puede sugerirse el definir una función no lineal de la energía consumida a resolver, debiendo analizarse su velocidad de convergencia. También podría ser interesante en un trabajo futuro el intentar incluir la estimación de la potencia solar también en la planificación continua a través de una interpolación preferentemente de clase  $C^1$ , como splines cúbicos, pues se ha descubierto de forma empírica que parametrizaciones de esta clase aceleran grandemente el tiempo de cálculo de cada etapa, debido a su diferenciabilidad. De esta manera, además de la primera estimación del uso energético entregado por las etapas semanal y diaria, que podrían permanecer lineales, se tendría una relación rápida dada por el software de control óptimo.

Otro aspecto que no se abordó explícitamente es la interacción del sistema con las paradas de control que el vehículo tendrá que superar. Esto no es en sí una dificultad para el esquema propuesto, el cual si no es implementado directamente sobre el inversor, o si su aplicación sobre éste puede desactivarse, simplemente entregará sugerencias al equipo sobre qué potencia consumir en cada instante de tiempo, iterándose continuamente mediante pronósticos que se actualizarán conforme la energía disponible del vehículo y la hora del día avanzan, aplicándose únicamente la iteración correspondiente al momento en que el vehículo debe salir de tal posición.

Sin duda se sugiere como trabajo futuro el seguir trabajando en implementaciones cada vez más rápidas del método pseudoespectral empleado. GPOPS, el software utilizado, es en sí mismo un programa de resolución de problemas de control óptimo fuera de línea. En la literatura es posible encontrar una interesante forma de adaptar lo anterior a un esquema de realimentación extra-rápido, planteando el problema de control óptimo discretizado según un esquema de programación cuadrática secuencial (SQP), realizando para cada iteración sendas operaciones con los jacobianos y lagrangeanos de las restricciones y función objetivo del problema discretizado de manera de condensarlo, haciendo posible la separación del problema en una etapa cuyos cálculos no requieren del conocimiento del vector de estado en un determinado instante de tiempo, los cuales pueden llevarse a cabo mientras el sistema evoluciona en el tiempo, y otra que se ejecuta muy velozmente al obtenerse dicha información. Así es posible reducir aún más los tiempos de cálculo entre etapas, con el consecuente impacto en las oscilaciones apreciadas en el control aplicado para cuando existe realimentación.

Otro punto sobre el cual podría desearse realizar mejoras consiste en la calidad estocástica del modelo utilizado, tanto en lo concerniente a la modelación del vehículo como a la

disponibilidad energética. El primer caso está más bien relacionado con las probabilidades de enfrentar una perturbación importante durante el trayecto utilizando, por ejemplo, los datos entregados por rosas de los vientos, en el caso de una consideración más en detalle de los últimos. El segundo caso, por otro lado, considera el hecho de que tanto la predicción de energía solar neta a recibir como la medición del estado de carga en baterías poseen grados de incertidumbre importantes, lo cual puede cuantificarse adecuadamente a través de este tipo de enfoques.

La identificación en línea de los parámetros del modelo utilizado también resulta interesante de analizar en el futuro. Un adecuado seguimiento de éstos puede, según ya se ha discutido, permitir que la etapa de planificación continua tome mejores decisiones en cuanto al uso de energía. Se encuentra a lo largo del trabajo realizado que el contar con mejor información sin duda permite tomar mejores decisiones.

Dentro de la misma línea, cabe destacar el hecho de que ninguna de las referencias consultadas hace mención de la restricción de potencia máxima que el banco de baterías encuentra al poseer un bajo estado de carga, y que por lo tanto se tiene ahí otro punto a tratar en trabajo futuro. Debido al decrecimiento de la tensión interna del banco de baterías la corriente máxima extraíble también se reduce, lo cual puede afectar la aplicabilidad de las estrategias calculadas hacia el final de la ruta. De cualquier modo, los modelos utilizados permiten hasta el momento la realización de cambios pertinentes durante la carrera, de modo que el cálculo de esta restricción puede ser llevado a cabo de forma periódica, actualizando, por ejemplo los parámetros asociados a la potencia inyectada al inversor.

Puede resultar interesante el poner explícitamente a prueba el esquema con pendientes elevadas. A pesar de que en carreras como el World Solar Challenge la ganancia en la función objetivo por considerar las pendientes puede ser despreciable, en presencia de pendientes más pronunciadas los resultados sin duda serán diferentes con mayor claridad. Como trabajo futuro podría considerarse el ahondar en este aspecto. En casos en que se tienen trayectos planos, como en el World Solar Challenge, muchos equipos prefieren no considerar esta información por simplicidad, pero el esquema propuesto aprovecha las ventajas provenientes de su conocimiento; lo que puede ser especialmente útil para carreras con rutas empinadas como el Atacama Solar Challenge de 2011.

## Capítulo 6. Referencias

- [1] Word Solar Challenge, World solar challenge (en línea), [www.worldsolarchallenge.org](http://www.worldsolarchallenge.org). Última consulta: Julio 2013.
- [2] M. Athans, P.L. Falb, Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications, Mineola: Dover Publications, Inc., 1998.
- [3] J. Nocedal, S. Wright, Numerical Optimization. Springer, 2006.
- [4] C. Burgos, “*Diseño del estimador de estado de carga (SoC) para el auto solar Eolian 2*”, Informe del curso Taller de desarrollo tecnológico EL680. Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Chile, 2012.
- [5] T.D. Gillespie, Fundamentals of vehicle dynamics. Warrendale: Society of Automotive Engineers, Inc., 1992, pp. 79-123.
- [6] D. Huarapil, “*Optimización de un sistema fotovoltaico de un vehículo con tracción eléctrica*”, Memoria para optar al título de ingeniero civil electricista. Santiago: Departamento de ingeniería eléctrica, Universidad de Chile, 2012.
- [7] N.P. Quang, J.A. Dittrich, Vector Control of Three-Phase AC Machines: System Development in the Practice. Springer, 2008.
- [8] C. Francolin, A. Rao, C. Duarte, G. Martel, “*Optimal Control of an Autonomous Surface Vehicle to Improve Connectivity in an Underwater Vehicle Network*”, Journal of Aerospace Computing, Information, and Communication, Vol. 9, No. 1 (2012), pp. 1-13.
- [9] W. Kang, N. Bedrossian, “Pseudospectral Optimal Control Theory Makes Debut Flight, Saves NASA \$1M in Under Three Hours”, SIAM News Vol. 40, No. 7, March-April 2008, pp. 307-321
- [10] C. Kirches, Fast Numerical Methods for Mixed-Integer Nonlinear Model-Predictive Control, In: H.G. Bock, W. Hackbusch, M. Luskin, R. Rannacher (eds.), Advances in Numerical Mathematics, Springer Vieweg, Wiesbaden, 2011.
- [11] P. Pudney, “*Optimal energy management for solar-powered cars*”. Ph.D Thesis. Adelaide: University of South Australia, 2000.
- [12] F. Santosa et al., “*Solar car racing strategies*”. In 6th PIMS-IMA Graduate Mathematics Modelling Camp, Banff, AB, Canada, 2003, pp. 61-82.
- [13] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, E.F. Mishchenko, The Mathematical Theory of Optimal Processes. John Wiley & Sons, 1962.
- [14] E. Aranda, “*Desarrollo de estrategia para el uso óptimo de la energía en un vehículo solar*”, Memoria para optar al título de ingeniero civil electricista. Santiago: Departamento de ingeniería eléctrica, Universidad de Chile, 2008.

- [15] Y. Shimizu, Y. Komatsu, M. Torii, M. Takamuro, “*Solar car cruising strategy and its supporting system*”, JSAE Review, Vol. 19, Issue 2, April 1998, pp. 143-149.
- [16] A. Scheidegger, “*Energy Management Optimization for a Solar Vehicle*”, Master’s Thesis. Lausanne: École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2006.
- [17] M.W. Daniels, P.R. Kumar, “*Racing with the sun: The optimal use of the solar powered automobile*”. IEEE Control Systems, June 1999, pp.12-22.
- [18] A. Boulgakov, “*Sunswift IV strategy for the 2011 World Solar Challenge*”, B.Sc Thesis. Sydney: The University of SouthWales, 2012.
- [19] M. Diehl, "Real-Time Optimization for Large Scale Nonlinear Processes", PhD Thesis, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, 2001.
- [20] M. Diehl, H.G. Bock, J.P. Schlöder, "A Real-Time Iteration Scheme for Nonlinear Optimization in Optimal Feedback Control", SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 43, No. 5, 2005, pp. 1714-1736.
- [21] C. Mocking, “*Optimal design and strategy for the SolUTra*”. MSc Report. Enschede: Department of electrical engineering, University of Twente, 2006.
- [22] C.-T. Li, A. Dowling, "Solar Car Energy Management Strategy," *Automotive Engineering International and Momentum*, the April issue, 2010.
- [23] G. S. Wright, “Optimal Energy Management for Solar Car Race”, in IEEE 39th Midwest symposium on Circuits and Systems, Ames, IA, 1996, Vol. 3, pp. 1011-1014.
- [24] J.-H. Cheng, C.-T. Li, "Backward Energy Management Algorithm for a Solar Car," in *World Renewable Energy Congress X and Exhibition*, Glasgow, UK, 2008.
- [25] D.A. Benson, "A gauss pseudospectral transcription for optimal control", Ph. D. Dissertation. Cambridge, MA: Department of Aeronautics and Astronautics, MIT, 2004.
- [26] A. Rao, “A Survey of Numerical Methods for Optimal Control”, in AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Pittsburgh, PA, USA, AAS Paper 09-334, Vol. 31, No.2, August 2009.
- [27] D. Carroll, The Winning Solar Car: a design guide for solar race car teams, Warrendale: SAE International, 2003, pp. 15-48
- [28] U.S. Government Printing Office, “U.S Standard Atmosphere” Washington D.C., USA, 1976.
- [29] R.L. Burden, D.J. Faires, Análisis numérico México D.F: Grupo editorial Iberoamérica, 2001 (7° edición).
- [30] Australian Government, Bureau of Meteorology (en línea) <http://www.bom.gov.au>. Última consulta: Julio 2013.

- [31] Australian Government, Bureau of Meteorology “*Wind: Wind Roses for Selected Locations in Australia*” (en línea) <http://www.bom.gov.au/watl/wind/>. Última consulta: Julio 2013.
- [32] S. Kalogirou, Solar energy engineering: processes and systems, Academic Press, Elsevier Science, 2009.
- [33] C. Vergara, “*Adaptador de impedancia para fuentes fotovoltaicas*”, Memoria para optar al título de ingeniero civil electricista. Santiago: Departamento de ingeniería eléctrica, Universidad de Chile, 2008.
- [34] Drivetek, MPPT-Race V 4.0 (Hoja de datos), [www.drivetek.ch](http://www.drivetek.ch). 2012.
- [35] Sunpower, C60 Solar Cell (Hoja de datos), 2010.
- [36] Leo, N636394 (Hoja de datos), [www.leoindustries.com](http://www.leoindustries.com), 2010.
- [37] D. Patterson, X. Yan, S. Camilleri, “*A Very High Efficiency Controller for an Axial Flux Permanent Magnet Wheel Drive in a Solar Powered Vehicle*”, Proceedings of the International Conference on Power Electronic Drives and Energy Systems for Industrial Growth, On page(s): 886 - 891 vol.2, 1998.
- [38] New Generation Motors Corporation, SC-M150 Axial Flux, Permanent Magnet, DC Brushless Electric Motor Operating Manual, Version 1.00. Washington, USA, 2002.
- [39] New Generation Motors Corporation, NGM Motor Specs. Washington, USA, 2002.
- [40] D. Hanselman, Brushless Permanent-Magnet Motor Design. McGraw Hill, 1994.
- [41] D. Patterson, R. Spée, “*The Design and Development of an Axial Flux Permanent Magnet Brushless DC Motor for Wheel Drive in a Solar Powered Vehicle*”, IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 31, No. 5, September/October 1995, pp.1054-1061.
- [42] New Generation Motors Corporation, EVC402 Controller Operating Manual. Washington, USA, 2002.
- [43] G. Arkesteijn, E. de Jong, H. Polinder, “*Loss Modelling and Analysis of the Nuna Solar Car Drive System*”, International Conference on Ecologic Vehicles & Renewable Energies, Monaco, 2007.
- [44] H. Kimura, A. Ikegami, “*Development of the World's fastest Solar Car*”, en Proceedings of JSES/SWEA Joint Conference, Tokyo, 2010.
- [45] L. Ma, M. Sanada, S. Morimoto, Y. Takeda, “*Advantages of IPMSM with Adjustable PM Armature Flux Linkage in Efficiency Improvement and Operating Range Extension*” in Proceedings of the Power Conversion Conference, Osaka, Vol. 1, 2002, pp. 136-141.
- [46] S.C. Oh, A. Emadi “*Test and Simulation of Axial-Flux Motor Characteristics for Hybrid Electric Vehicles*”, IEEE Transactions on vehicular technology, Vol. 53, No.3, May 2004, pp. 912-919.

- [47] A. E. Fitzgerald, C. Kingsley Jr., S. Umans, Electric Machinery.5th Ed. McGraw Hill, 2003, pp. 657-663.
- [48] T.M. Jahns, “*Flux-Weakening Regime Operation of an Interior Permanent-Magnet Synchronous Motor Drive*”, IEEE Transactions on Industry and Applications, Vol. IA-23, No.4, July/August 1987, pp. 681-689.
- [49] S. Morimoto, Y .Takeda, H. Takao, K. Taniguchi, “*Expansion of Operation Limits for Permanent Magnet Motor by Current Vector Control Considering Inverter Capacity*”, IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 26, No. 5, September/October 1990, pp. 866-871.
- [50] U.S. Department of Commerce, National Oceanic and Atmospheric Administration, “NOAA Operational Model Archive Distribution System (N.O.M.A.D.S)” (en línea), <http://www.nomad3.ncep.noaa.gov/>. Última consulta: Agosto 2013.
- [51] Kipp & Zonen: “METEON pyranometer” (en línea) <http://www.kippzonen.com/?product/46162/METEON.aspx>. Última consulta: Agosto 2013.
- [52] Word Solar Challenge, General Regulations for the conduct of the 2011 World Solar Challenge, Kent Town: South Australian Motor Sport Board, August 2010.
- [53] Word Solar Challenge, Route Notes for the 2011 World Solar Challenge, Kent Town: South Australian Motor Sport Board, August 2010.
- [54] Northern Territory Government, Traffic Regulations (as in force at 1 February 2013), Darwin: Department of Transport, February 2013
- [55] Government of South Australia, Motor Vehicles Act 1959, Adelaide: Attorney-General’s Department, January 2013
- [56] Government of South Australia, Road Traffic Act 1961, Adelaide: Attorney-General’s Department, January 2013
- [57] R.E. Bellman, S.E. Dreyfus, Applied Dynamic Programming, The RAND Corporation, 1962.
- [58] A.E. Bryson, “Optimal control – 1950 to 1985”, IEEE Control Systems, Vol. 16, No. 3, June 1996, pp. 26-33.
- [59] D.E. Kirk, Optimal Control Theory: An Introduction, Mineola: Dover Publications, Inc., 1998.
- [60] U. Ascher, B. Mattheij, B. Russell, Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995.
- [61] A. Miele, T. Wang, “*Multiple-Subarc Gradient-Restoration Algorithm, Part 1: Algorithm Structure*”, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 116, No.1, January 2003, pp. 1-17

- [62] A. Miele, T. Wang, “*Multiple-Subarc Gradient-Restoration Algorithm, Part 2: Application to a Multistage Launch Vehicle Design*”, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 116, No.1, January 2003, pp. 19-39
- [63] J.T. Betts, W.P. Huffman, “Exploiting sparsity in the Direct Transcription Method for Optimal Control”, Computational Optimization and Applications, Vol. 14, No.2, September 1999, pp. 179-201.
- [64] I.M. Ross, M. Karpenko, “A review of Pseudospectral optimal control: From theory to flight”, Annual Reviews in Control Vol. 36, October 2012, pp. 182-197.
- [65] A. Rao, D.A. Benson, C. Darby, M.A. Patterson, C. Francolin, I. Sanders, G. Huntington, “*Algorithm 902: GPOPS, A MATLAB Software for Solving Multiple-Phase Optimal Control Problems Using the Gauss Pseudospectral Method*”, ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 37, No. 2, Article 22, April 2010.
- [66] C. Darby, W. Hager, A. Rao, “An hp-adaptive Pseudospectral method for solving optimal control problems”, Optimal Control Applications and Methods, Vol. 32, No.4, July-August 2011, pp. 476-502.
- [67] A.V. Rao, K.D. Mease, “*Dichotomic basis approach to solving hyper-sensitive optimal control problems*”, Automatica, Volume 35, Issue 4, April 1999, Pages 633–642.
- [68] A.V. Rao, M.A. Patterson and W.W. Hager, “*A ph-Collocation Scheme for Optimal Control*”, Automatica, Submitted for Publication, January 2013.
- [69] P. E. Gill, W. Murray y M.A. Saunders, “*SNOPT: An SQP Algorithm for Large-Scale Constrained Optimization*”, SIAM Review, Vol. 47, No. 1, January 2002, pp. 99-131.
- [70] G.T. Huntington, and A.V. Rao, "Comparison of Global and Local Collocation Methods for Optimal Control," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 31, No. 2, March-April 2008, pp. 432-436.
- [71] M. Abramowitz and I. Stegun, Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. New York: Dover Publications, 1965, pp. 887-889.
- [72] D. Garg, M. Patterson, W. Hager, A. Rao, G. Huntington, “A unified framework for the numerical solution of control problems using pseudospectral methods”, Automatica, Vol. 46, No.11, November 2010, pp. 1843-1851.
- [73] W. Kang, I.M. Ross & Q. Gong, (2008). “*Pseudospectral optimal control and its convergence theorems*”. In Analysis and design of nonlinear control systems, Editors: A. Astolfi and L. Marconi . Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, pp. 109–126.
- [74] R. Garreaud et al. Datos meteorológicos obtenidos del Grupo de Meteorología, Departamento de Geofísica de la Universidad de Chile (en línea), <http://infomet.dgf.uchile.cl/OBSERVACIONES/observaciones.html>. Última consulta: Julio 2013.

- [75] D. Cullen, L. Haines, “*Team Philippines solar car in self-combustion drama: Bush not the only thing burning in Oz outback*”, The register, 18<sup>th</sup> October 2011 (en línea): Última consulta: Agosto 2013.
- [76] A.E. Bryson, Y.-C. Ho, Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control, Taylor & Francis, 1975.
- [77] S. Gonzalez, A. Miele , “*Sequential Gradient-Restoration Algorithm for Optimal Control Problems with General Boundary Conditions*”, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 26, No. 3, November 1978, pp. 395-425.
- [78] L. F. Shampine, J. Kierzenska, M.W. Reichelt, “*Solving Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations in Matlab using bvp4c*”, available at [http://www.mathworks.com/bvp\\_tutorial](http://www.mathworks.com/bvp_tutorial)
- [79] Word Solar Challenge, The 2011 World Solar Challenge Observer Manual, Kent Town: South Australian Motor Sport Board, August 2010.