



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

MAGNONES Y PLASMONES EN UN FILM GEOMETRICAMENTE
MODULADO

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN CIENCIAS, MENCIÓN FÍSICA

CLAUDIO FELIPE JARUFE TRONCOSO

SANTIAGO DE CHILE, JULIO 2012



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

MAGNONES Y PLASMONES EN UN FILM GEOMETRICAMENTE
MODULADO

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN CIENCIAS, MENCIÓN FÍSICA

CLAUDIO FELIPE JARUFE TRONCOSO

PROFESOR GUÍA:

RODRIGO ARIAS FEDERICI

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:

ALVARO NUÑEZ VASQUEZ

RAFAEL BENGURIA DONOSO

SANTIAGO DE CHILE, JULIO 2012

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
MAGISTER EN CIENCIAS, MENCIÓN FÍSICA
POR: CLAUDIO JARUFE
FECHA: 25 DE JULIO DE 2012
PROF. GUÍA: SR. RODRIGO ARIAS

“MAGNONES Y PLASMONES EN UN FILM GEOMETRICAMENTE MODULADO”

En este trabajo se presenta la teoría para estudiar los modos de oscilación de plasmones y magnones en un film geoméricamente modulado y se analiza la respuesta de la polarización y magnetización, respectivamente, al aplicar un campo externo paralelo al eje de simetría de la perturbación. La geometría en cuestión corresponde a un film delgado ferromagnético para el análisis de los magnones y dieléctrico en el caso de los plasmones. El film posee una modulación periódica de sus superficies en una cierta dirección.

El estudio se realizó suponiendo que la escala relevante de la nano-estructura, en este caso el ancho del film, es pequeña en comparación con la longitud de onda de la radiación incidente, esto corresponde al límite estático. En este caso se pueden desprestigiar los efectos de retardo, no existen efectos inductivos y los problemas eléctricos y magnéticos se desacoplan y por lo tanto se pueden estudiar las respuestas plasmonicas y magnonicas separadamente.

Utilizando elementos de variable compleja se obtuvieron ecuaciones integrales para los potenciales electro-estáticos y magneto-estáticos en el borde de la muestra; luego, utilizando una base adecuada para la descripción del potencial en el borde las ecuaciones integrales se transforman en un problema matricial de valores y vectores propios. Los potenciales en el interior y exterior de la estructura y la respuesta a un campo externo se pueden obtener integrando adecuadamente el potencial en el borde. La ventaja al utilizar ecuaciones integrales es que se pueden resolver geometrias complejas.

Se realizaron simulaciones numéricas para estudiar los modos normales en el caso plasmónico y magnónico. Los modos estudiados se propagan perpendicularmente a la perturbación de la superficie. La periodicidad de la geometría genera modos de Bloch análogos a los que se encuentran para electrones en redes cristalinas periódicas y se puede apreciar la aparición de bandas prohibidas. Para perturbaciones geométricas sinusoidales de pequeña amplitud se puede calcular analíticamente el ancho de las bandas permitiendo el diseño de dispositivos que cumplan ciertos requerimientos.

AGRADECIMIENTOS

A mi hijo Samir por darme las mayores alegrías de mi vida y a la Carola por acompañarme durante todos estos años.

Al profesor Rodrigo Arias por aguantarme durante estos dos años de trabajo, por las buenas ideas que han surgido y guiarme para poder obtener resultados. Además le agradezco al Departamento de Física que me acogió desde el comienzo y por muchos años ha sido casi como mi segundo hogar.

Finalmente quiero agradecerle a mi familia por apoyarme durante toda mi vida en cada locura.

Este trabajo fue realizado con el apoyo del proyecto Fondecyt 1100213, el proyecto FB0807 Financiamiento Basal para Centros Científicos de Excelencia y del Fondo de Innovación para la Competitividad-MINECON ICM P10-061-F

Índice General

Tabla de Figuras	III
1. Introducción	1
2. Teoría: Ecuaciones Integrales para los potenciales electro-estáticos y magneto-estáticos	5
2.1. Modos plasmónicos	5
2.2. Modos Magneto-estáticos	7
2.3. Potenciales en todo el espacio:	9
3. Teoría aplicada a la geometría elegida:	11
3.1. Geometría seleccionada:	11
3.2. Ecuaciones integrales y soluciones tipo Bloch:	11
3.3. Ecuaciones integrales para films con perturbaciones superficiales periódicas: .	13
3.4. Simetría y soluciones:	14
3.5. Desde ecuaciones integrales a ecuaciones matriciales:	15
3.6. Caso del film perfecto:	17
3.6.1. Análisis de frecuencias en el esquema reducido:	18
3.7. Perturbaciones geométricas pequeñas:	19
3.7.1. Caso especial, una perturbación sinusoidal:	21
3.8. Análisis perturbativo de las brechas entre bandas:	22
3.8.1. Brechas entre bandas aproximadas, plasmones:	23
3.8.2. Brechas entre bandas aproximadas, magnones:	24
3.9. Respuesta a un campo aplicado:	25

3.9.1. Respuesta del film perfecto:	27
3.10. Energía Magnética:	27
4. Resultados Numéricos	31
4.1. Relaciones de dispersión	31
4.2. Potencial Magneto-estático	34
4.3. Respuesta de un film magneto-estático perturbado:	37
4.4. Magnetización	40
5. Discusión y Conclusiones	47
Bibliografía	49
6. Apendice	51
6.1. Ecuaciones integrales para films con superficies perturbadas periódicamente:	51
6.2. Desde ecuaciones integrales a ecuaciones matriciales:	53
6.3. Film Perfecto	54
6.4. Integrales necesarias para el film perfecto:	55
6.5. Caso especial, un film perturbado de forma sinusoidal:	58
6.5.1. Brechas de bandas aproximadas, caso magnónico:	61

Índice de figuras

2.1. Geometría del film con una perturbación sinusoidal en sus superficies	8
3.1. El módulo de las matrices M y N en cada posición (i, j) para el film perfecto. El color azul corresponde a cero y color rojo oscuro corresponde a 1.	17
3.2. Modos magneto-estáticos para el film perfecto en un esquema reducido, con $h = 0,3$, $D/A = 0,1$	19
3.3. Valor propio $\epsilon(k)$ de los modos simétricos y anti-simétricos en un film dieléctrico perfecto en un esquema reducido, $D/A = 0,1$	20
3.4. El módulo de las matrices M y N en cada posición (i, j) para $\xi = 0,01$. El color azul corresponde a cero y color rojo oscuro corresponde a 1.	21
3.5. El módulo de las matrices M y N en cada posición (i, j) para $\xi = 0,04$. El color azul corresponde a cero y color rojo oscuro corresponde a 1.	22
4.1. Frecuencias propias magneto-estáticas en un film cuya superficie está perturbada simétricamente de forma sinusoidal con amplitudes $\xi = 0,01$ (arriba), $\xi = 0,03$ (abajo) respectivamente, $D/A = 0,1$, $h = 0,3$	32
4.2. Valor propio $\epsilon(k)$ de los modos electro-estáticos simétricos en un film dieléctrico cuya superficie está perturbada simétricamente de forma sinusoidal, con amplitudes $\xi = 0,01$ (arriba) y $\xi = 0,04$ (abajo) respectivamente, $D/A = 0,1$	33
4.3. Valor propio $\epsilon(k)$ de los modos electro-estáticos anti-simétricos en un film dieléctrico cuya superficie está perturbada simétricamente de forma sinusoidal, con amplitudes $\xi = 0,01$ (arriba) y $\xi = 0,04$ (abajo) respectivamente, $D/A = 0,1$	34

4.4. Potencial magneto-estático ϕ_{lh} localizado en la superficie superior moviéndose hacia la izquierda, $D/A = 0,1, h = 0,3$	35
4.5. Potencial magneto-estático ϕ_{rh} localizado en la superficie inferior moviéndose hacia la derecha, $D/A = 0,1, h = 0,3$	36
4.6. Potencial magneto-estático de la segunda banda en el borde de la zona de Brillouin $k = K/2$ para una perturbación sinusoidal con amplitud $\xi = 0,01, D/A = 0,1, h = 0,3$	36
4.7. Potencial magneto-estático de la segunda banda en $k = K/4$ (en el centro de la parte positiva de la zona de Brillouin) para una perturbación sinusoidal con amplitud $\xi = 0,01, D/A = 0,1, h = 0,3$	37
4.8. Amplitudes el potencial magneto-estático en la superficie superior (c_0 y c_{-1}) e inferior (b_0 y b_{-1}) del film, como respuesta al campo magnético aplicado de frecuencia ω y vector de onda $k, D/A = 0,1, h = 0,3$	38
4.9. Amplitud de los coeficientes c_0, c_{-1}, b_0 y b_{-1} del potencial magneto-estático en función de la frecuencia para ciertos valores del vector de onda $k, D/A = 0,1, h = 0,3$	39
4.10. Primer modo de oscilación de la magnetización en el plano $x-y$ en la frecuencia de resonancia en el caso del film perfecto para distintos tiempos $t_1, t_2 \dots t_8$, con $k = \pi/A, D/A = 0,1, h = 0,3$	41
4.11. Segundo modo de oscilación de la magnetización en el plano $x - y$ en la frecuencia de resonancia en el caso del film perfecto para distintos tiempos $t_1, t_2 \dots t_8$, con $k = \pi/A, D/A = 0,1, h = 0,3$	42
4.12. Magnetización $m(t)$ del modo en el borde de la zona de Brillouin $k = K/2$ para el film perfecto. La magnetización se localiza en la superficie inferior moviéndose hacia la derecha, $D/A = 0,1, h = 0,3$. El color azul corresponde a cero y el color rojo oscuro a 1	43

4.13. Magnetización $m(t)$ del modo en el borde de la zona de Brillouin $k = K/2$ para el film perfecto. La magnetización se localiza en la superficie superior moviéndose hacia la izquierda, $D/A = 0,1$, $h = 0,3$. El color azul corresponde a cero y el color rojo oscuro a 1	43
4.14. Magnetización en el plano $x - y$ en el caso $\xi = 0,01$ para distintos tiempos $t_1, t_2 \dots t_8$, en la frecuencia de resonancia $\omega = 0,7198$, con $k = \pi/A$, $D/A = 0,1$, $h = 0,3$	44
4.15. Magnetización en el plano $x - y$ en el caso $\xi = 0,01$ para distintos tiempos $t_1, t_2 \dots t_8$, en la frecuencia de resonancia $\omega = 0,701$, con $k = \pi/A$, $D/A = 0,1$, $h = 0,3$	45
4.16. Magnetización $m(t)$ del segundo modo en el borde de la zona de Brillouin $k = K/2$ $\omega = 0,7198$ para una perturbación sinusoidal con amplitud $\xi = 0,01$, $D/A = 0,1$, $h = 0,3$	46
4.17. Magnetización $m(t)$ del primer modo en el borde de la zona de Brillouin $k = K/2$ $\omega = 0,701$ para una perturbación sinusoidal con amplitud $\xi = 0,01$, $D/A = 0,1$, $h = 0,3$	46
6.1. Perfil del potencial magnético en función de la coordenada y para ondas superficiales con $\nu = \pm 1$, fuente [20]	56
6.2. Curva de integración para calcular la integral (6.23)	57

Capítulo 1

Introducción

Por un largo tiempo ha existido interés en crear meta-materiales o estructuras artificiales hechas con nano-estructuras con el objetivo de lograr nuevas aplicaciones. Nuevos dispositivos de estado sólido han sido construidos y se esperan mucho más en el futuro.

Un área en que se están realizando trabajos en esta dirección es en óptica, donde la respuesta de partículas metálicas o dieléctricas a campos electromagnéticos se están tratando de entender y utilizar en dispositivos prácticos. Un fenómeno de interés en algunos casos es el incremento localizado de los campos, el cual está relacionado con las características geométricas de los nano-objetos. También por ejemplo, en espectroscopía Raman la preponderancia de las superficies de las moléculas puede dar respuestas órdenes de magnitud superiores a líquidos o gases correspondientes [1]. En particular se estudian los sistemas metálicos debido a sus excitaciones colectivas, llamadas plasmones, donde los electrones de conducción se mueven de manera específica a frecuencias específicas. Las resonancias plasmónicas permiten identificar nano-estructuras y juegan un rol importante en el incremento no lineal de las señales ópticas. Estos campos ópticos de alta intensidad proveen una manera de detectar moléculas individuales [2] .

Otra área en que también se están buscando aplicaciones nano-métricas es en la propagación de ondas de spin en materiales ferromagnéticos, en particular en films delgados

y nano-hilos. En nano-sistemas ferromagnéticos la respuesta a los campos magnéticos es también de gran interés dada su importancia para la comprensión de la dinámica de la magnetización. En el caso ferromagnético los análogos a los plasmones se denominan magnones.

Los materiales ferromagnéticos artificiales con características periódicas se denominan «Magnonic crystals» en relación con los más conocidos y desarrollados «Photonic crystals». Estos últimos, han sido concebidos para controlar la propagación de ondas electromagnéticas o fotones en materiales: una característica principal en ellos es la existencia de gaps de frecuencias prohibidas debido a la periodicidad de estos materiales. A su vez los «Photonic crystals» tienen como predecesores a los cristales atómicos que existen naturalmente. De hecho, la ingeniería de gaps en bandas electrónicas en materiales semi-conductores ha sido muy importante en el desarrollo de la electrónica avanzada. A medida que ahora entramos en la era de la Spintrónica, se evidencia que el desarrollo de los «Magnonic crystals», debería ser muy relevante en futuras aplicaciones.

El estudio de ondas de spin en films delgados se inició en 1980, el interés estuvo enfocado en estudiar la aparición de bandas en la relación de dispersión de ondas de spin en un material o guía de ondas que posee una interacción periódica efectiva construida. Este efecto es de particular interés debido a aplicaciones en filtros de spin. Cálculos micro-magnéticos y resultados experimentales han mostrado que estos «band gaps» existen en films delgados ferromagnéticos: han sido calculados y medidos en relación a modulaciones de la geometría del film, sus materiales y campos aplicados. Aun así, todavía existe una necesidad de entender mejor el rol de la geometría en estos «band gaps» y la relación de dispersión, para diseñar estructuras con mejores aplicaciones.

El tópico de esta tesis es el estudio de la influencia de la geometría en los modos normales y la respuesta electromagnética de nano-estructuras ferromagnéticas y dieléctricas: los principales resultados de esta tesis fueron publicados en la Ref. [3]. La geometría de interés que se

desea estudiar en esta tesis corresponde a un film delgado ferromagnético para el análisis de magnones, y dieléctrico para el caso de plasmones . El film posee una modulación periódica de sus superficies en una dirección. El análisis puede simplificarse cuando la escala relevante de la nano-estructura es pequeña en comparación con la longitud de onda de la radiación incidente, esto corresponde al llamado limite estático: los campos eléctricos y magnéticos incidentes pueden ser considerados uniformes en la nano-estructura. En este caso uno puede despreciar los efectos de retardo, no existen efectos inductivos y los problemas eléctrico y magnético se desacoplan [4] y por lo tanto se pueden estudiar las respuestas plasmónicas y magnónicas separadamente.

El objetivo específico es analizar el efecto de la modulación periódica en la relación de dispersión, modos de oscilación y la respuesta electromagnética de las nano-estructuras. La geometría no permite el uso de una base ortogonal de funciones para describir el perfil del film y obtener el efecto de la perturbación en los modos y su respuesta. La teoría utilizada para analizar los plasmones es la de la referencia [15], consiste en resolver ecuaciones integrales para los potenciales electro-estáticos en los bordes de la muestra. Los potenciales en el interior y exterior de la estructura y la respuesta a un campo externo pueden ser calculados integrando el potencial en el borde. En el caso magneto-estático el potencial magnético también satisface la ecuación de Laplace en el interior y exterior de la geometría y por lo tanto se utilizará una modificación de la teoría anteriormente descrita. La ventaja de estas ecuaciones integrales es que permiten resolver geometrías complejas; luego, utilizando una base adecuada para describir el potencial en el borde las ecuaciones integrales se transforman en un problema matricial simple de resolver.

La periodicidad de la geometría genera modos de Bloch, análogos a los que se encuentran para electrones en redes cristalinas periódicas, por lo tanto, se pueden identificar diferentes bandas en un esquema de zona de Brillouin reducido. Estos modos se propagan perpendicularmente a la perturbación de la superficie y se acoplan en el borde de la zona de Brillouin

debido a la existencia de la modulación.

Capítulo 2

Teoría: Ecuaciones Integrales para los potenciales electro-estáticos y magneto-estáticos

2.1. Modos plasmónicos

Primero se resumirá la teoría presentada en la referencia [15] la cual nos permite determinar los modos electro-estáticos de un dieléctrico (la cual asumiremos muy grande en una dimensión) utilizando ecuaciones integrales del potencial electro-estático a lo largo del borde de la muestra. Supondremos que los campos oscilan con frecuencia ω :

$$\vec{E}(\vec{\rho}, t) = \vec{E}_\omega(\vec{\rho})e^{-i\omega t} + \vec{E}_\omega^*(\vec{\rho})e^{i\omega t} \quad (2.1)$$

$$\vec{D}(\vec{\rho}, t) = \epsilon(\vec{\rho}, \omega)\vec{E}_\omega(\vec{\rho})e^{-i\omega t} + \epsilon(\vec{\rho}, \omega)^*\vec{E}_\omega^*(\vec{\rho})e^{i\omega t}, \quad (2.2)$$

donde $\epsilon(\vec{\rho}, \omega) = 1$ afuera del dieléctrico y $\epsilon(\vec{\rho}, \omega) = \epsilon(\omega)$ dentro de él. El campo electro-estático satisface $\nabla \times \vec{E} = 0$ en todo el espacio, por lo tanto el campo eléctrico puede escribirse como el gradiente del potencial eléctrico $\vec{E}_\omega = -\nabla\phi_\omega$; análogamente, como $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ (excepto en el borde del dieléctrico) entonces $\vec{E}_\omega^{in,out} = -\nabla \times (\psi_\omega^{in,out} \hat{z})$ (llamaremos potencial conjugado a ψ). Como estos potenciales deben describir el mismo campo eléctrico deben satisfacer las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\partial\phi/\partial x = \partial\psi/\partial y \quad , \quad \partial\phi/\partial y = -\partial\psi/\partial x \quad (2.3)$$

Por lo tanto se introduce un potencial complejo $\Omega \equiv \phi + i\psi$, el cual es instantáneamente analítico, es decir $\Omega = \Omega(z, t)$, con $z = x + iy$, y $E_x - iE_y = -\partial\Omega(z, t)/\partial z$. Este potencial complejo es discontinuo al cruzar el borde de la muestra, por lo tanto se deben diferenciar $\Omega^{in, out}(z, t)$. Como el potencial complejo es analítico se puede utilizar el teorema de Cauchy para escribir su componente de Fourier temporal ($\Omega(z, t) = \Omega_\omega(z)e^{i\omega t} + \Omega_{-\omega}(z)e^{-i\omega t}$) en un punto $z = z_c$ en el borde de la muestra descrita por la curva C (considerando que los potenciales decaen a cero apropiadamente en infinito):

$$\Omega_{\pm\omega}^{in}(z_c) = \frac{1}{\pi i} \oint_{PV} d\eta \frac{\Omega_{\pm\omega}^{in}(\eta)}{\eta - z_c} \quad (2.4)$$

$$\Omega_{\pm\omega}^{out}(z_c) = -\frac{1}{\pi i} \oint_{PV} d\eta \frac{\Omega_{\pm\omega}^{out}(\eta)}{\eta - z_c} \quad (2.5)$$

(en las ecuaciones anteriores PV es la integral del valor principal sobre la curva C ; además las ecuaciones son para la componente de Fourier temporal del potencial). La condición de borde escritas para la componentes de Fourier son $\phi_{\pm\omega}^{in}(z_c) = \phi_{\pm\omega}^{out}(z_c)$, $\epsilon(\pm\omega)\partial\phi_{\pm\omega}^{in}(z_c)/\partial n = \partial\phi_{\pm\omega}^{out}(z_c)/\partial n$, $\epsilon(\pm\omega)\psi_{\pm\omega}^{in}(z_c) = \psi_{\pm\omega}^{out}(z_c)$ y $\partial\psi_{\pm\omega}^{in}(z_c)/\partial n = \partial\psi_{\pm\omega}^{out}(z_c)/\partial n$ (donde $\partial/\partial n$ representa la derivada normal). Usando estas condiciones de borde en las ecuaciones (2.4) y (2.5), el hecho que $\phi_{-\omega} = (\phi_\omega)^*$, $\psi_{-\omega} = (\psi_\omega)^*$, luego de simplificaciones algebraicas (detalles en la ref. [15]) se pueden obtener las siguientes ecuaciones integrales para los potenciales electrostáticos:

$$\phi_\omega^{in}(z_c) = \frac{\lambda}{2\pi i} \oint_{PV} \left\{ \frac{d\eta}{\eta - z_c} - \frac{d\eta^*}{(\eta - z_c)^*} \right\} \phi_\omega^{in}(\eta) \quad (2.6)$$

$$\psi_\omega^{in}(z_c) = -\frac{\lambda}{2\pi i} \oint_{PV} \left\{ \frac{d\eta}{\eta - z_c} - \frac{d\eta^*}{(\eta - z_c)^*} \right\} \psi_\omega^{in}(\eta) \quad (2.7)$$

con

$$\lambda \equiv \frac{\epsilon(\omega) - 1}{\epsilon(\omega) + 1} \quad (2.8)$$

(para simplificar la notación escribimos $\phi = \phi(\eta), \psi = \psi(\eta)$ pero en estricto rigor ambos potenciales son función de η y η^* , es decir, no analíticas). Las ecuaciones (2.6) y (2.7) deben ser resueltas para el problema de autovalores $(\lambda_e, \phi_e, \psi_e)$. Se puede notar que estas ecuaciones son muy similares y por lo tanto muestran un espectro “gemelo” [14], es decir, si $(\lambda_e, \phi_e, \psi_e)$ es una solución al problema de autovalores de estas ecuaciones, entonces $(-\lambda_e, \psi_e, \phi_e)$ también es solución (se puede observar que $\lambda \rightarrow -\lambda$ es equivalente a $\epsilon \rightarrow 1/\epsilon$). Además, si uno está interesado en conocer los potenciales en el interior y en el exterior de la muestra, estos pueden ser calculados mediante la integración de las soluciones anteriores a lo largo de la muestra. Utilizando el teorema de Cauchy se puede obtener:

$$\Omega_\omega^{in}(z_{in}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\eta \frac{\Omega_\omega^{in}(\eta)}{\eta - z_{in}} \quad (2.9)$$

$$\Omega_\omega^{out}(z_{out}) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C d\eta \frac{\Omega_\omega^{out}(\eta)}{\eta - z_{out}} \quad (2.10)$$

2.2. Modos Magneto-estáticos

Para el estudio se consideró una lámina delgada con modulaciones superficiales perpendiculares a la dirección z a largo de la cual se aplica un campo magnético H_0 . Utilizando esta geometría 2.1 es posible asegurar que la configuración de equilibrio corresponde a una magnetización uniforme alineada con el eje z debido a que estas modulaciones superficiales no inducen cargas superficiales.

La dinámica de una pequeña perturbación de la magnetización ($\vec{M}(\vec{x}, t) \simeq M_s \hat{z} + \vec{m}(\vec{x}, t)$) está descrita por la ecuación linealizada de Landau-Lifshitz, y a una frecuencia ω se puede escribir como ($\vec{m} = \vec{m}_\omega(\vec{\rho}) \exp(-i\omega t) + c.c$, donde $c.c$ es el complejo conjugado y asumimos que no existe dependencia en z) :

$$i\omega \vec{m}_\omega(\vec{\rho}) = \gamma M_s \hat{z} \times \vec{h}_D^\omega(\vec{m}) + \gamma \vec{m}_\omega \times H_0 \hat{z} \quad (2.11)$$

donde $\vec{h}_D(\vec{m})$ es el campo demagnetizante producido por la magnetización \vec{m} , y γ el valor absoluto de la razón giromagnética. Estas ecuaciones pueden ser invertidas y permiten

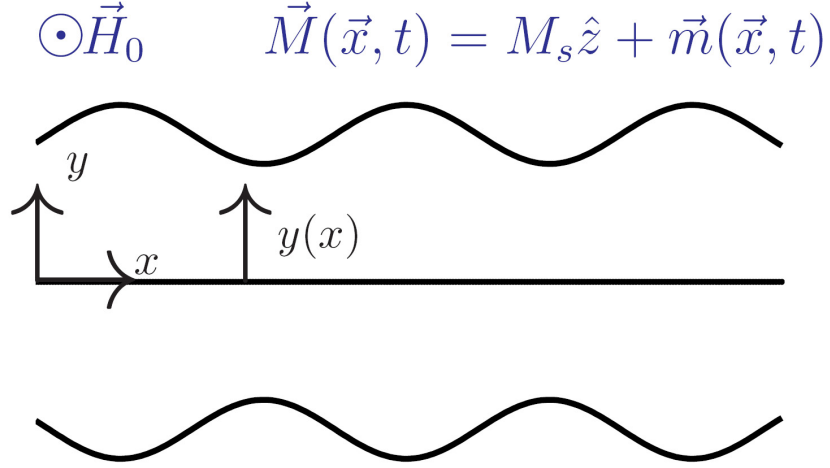


Figura 2.1: Geometría del film con una perturbación sinusoidal en sus superficies

encontrar una relación constitutiva entre la perturbación de la magnetización y el campo demagnetizante correspondiente:

$$4\pi\vec{m}_\omega = (\mu_1(o) - 1)\vec{h}_D^\omega - i\mu_2(o)\hat{z} \times \vec{h}_D^\omega \quad (2.12)$$

donde $o \equiv \omega/4\pi M_s \gamma$ es una frecuencia adimensional y $\mu_1(o) \equiv [h(h+1) - o^2]/[h^2 - o^2]$, $\mu_2(o) \equiv -o/[h^2 - o^2]$, con $h \equiv H_0/4\pi M_s \gamma$ el campo aplicado adimensional. El campo demagnetizante está dado por el gradiente de un potencial magneto-estático, $\vec{h}_D = -\nabla\phi$, además según las ecuaciones de Maxwell en ausencia de monopolos magnéticos $\nabla \cdot \vec{b} = 0$, por lo tanto en el interior y exterior del film $\nabla^2\phi = 0$. Debido a esto último, al igual que en el caso plasmónico, se puede introducir un potencial complejo analítico $\Omega(z) = \phi + i\psi$ en el interior y exterior del film y las ecuaciones (2.3,2.4,2.5) también son válidas en este caso. Las condiciones de borde magneto-estáticas en el borde del film (curva C) de continuidad del campo magnético tangencial (\vec{h}_D) y continuidad de la inducción magnética (\vec{b}) normal se pueden escribir en función del potencial complejo $\phi_\omega^{out} = \phi_\omega^{in}$, $\mu_1\psi_\omega^{in} + i\mu_2\phi_\omega^{in} = \psi_\omega^{out}$. Reemplazando estas condiciones de borde en las ecuaciones integrales (2.4,2.5) y luego de manipulaciones algebraicas análogas al caso plasmónico se pueden obtener las siguientes ecuaciones integrales de valores propios para el potencial magneto-estático $\phi_\omega^{in} = \phi_\omega$ y su potencial conjugado ψ_ω^{in} :

$$\begin{aligned}
(\mu_1 + 1)\phi_\omega(z_c) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ (\mu_1 - 1) \oint_{PV} \left(\frac{d\eta}{(\eta - z_c)} - c.c. \right) + \right. \\
\left. + \mu_2 \oint_{PV} \left(\frac{d\eta}{(\eta - z_c)} + c.c. \right) \right\} \phi_\omega(\eta) \quad (2.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1 + \mu_1 - \mu_2^2)\psi_\omega^{in}(z_c) = -\frac{1}{2\pi i} \left\{ (\mu_1 - 1 + \mu_2^2) \oint_{PV} \left(\frac{d\eta}{(\eta - z_c)} - c.c. \right) \right. \\
\left. + \mu_2\mu_1 \oint_{PV} \left(\frac{d\eta}{(\eta - z_c)} + c.c. \right) \right\} \psi_\omega^{in}(\eta) \quad (2.14)
\end{aligned}$$

Se puede observar que la ecuación de autovalores (2.6) para los modos plasmónicos es un caso especial de la ecuación (2.13) para los modos magneto-estáticos: si μ_2 es reemplazado por cero y μ_1 por ϵ entonces se recupera la ecuación (2.6) (lo mismo ocurre con la ecuación para el potencial conjugado ψ).

Además, para evitar la singularidad numérica en $\eta = z_c$ de las ecuaciones (2.13,2.14) se puede sumar y restar un termino adecuado a los potenciales integrados. De esta forma se obtienen las siguientes ecuaciones integrales para el potencial ϕ_ω en el borde de la muestra (ya no es necesario tomar el valor principal de la integral):

$$\phi_\omega(z_c) = \frac{1}{4\pi i} \left\{ (\mu_1 - 1) \oint_C \left(\frac{d\eta}{(\eta - z_c)} - c.c. \right) + \mu_2 \oint_C \left(\frac{d\eta}{(\eta - z_c)} + c.c. \right) \right\} (\phi_\omega(\eta) - \phi_\omega(z_c)) \quad (2.15)$$

2.3. Potenciales en todo el espacio:

Si uno está interesado en los potenciales al interior o exterior de la muestra, ellos pueden ser calculados mediante la integración apropiada de las soluciones previas a lo largo del borde del film, esto es válido para el caso magneto-estático y electro-estático. A partir del teorema de Cauchy:

$$\Omega_\omega^{in}(z_{in}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\eta \frac{\Omega_\omega^{in}(\eta)}{\eta - z_{in}} \quad (2.16)$$

$$\Omega_\omega^{out}(z_{out}) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C d\eta \frac{\Omega_\omega^{out}(\eta)}{\eta - z_{out}} \quad (2.17)$$

En el caso magneto-estático cuando uno combina las ecuaciones para $\Omega_{\pm\omega}$ se obtienen las siguientes expresiones para el potencial magneto-estático en el exterior e interior de la muestra respectivamente (el caso plasmónico corresponde a tomar $\mu_2 = 0$ y $\mu_1 = \epsilon$):

$$\begin{aligned} \phi_{\omega}^{out}(z_{out}) = & -\frac{1}{4\pi i} \oint_C \left\{ \frac{d\eta}{\eta - z_{out}} (\phi_{\omega}(\eta)(1 - \mu_2) + i\mu_1\psi_{\omega}^{in}(\eta)) - \right. \\ & \left. \frac{d\eta^*}{(\eta - z_{out})^*} (\phi_{\omega}(\eta)(1 + \mu_2) - i\mu_1\psi_{\omega}^{in}(\eta)) \right\} \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \phi_{\omega}^{in}(z_{in}) = & \frac{1}{4\pi i} \oint_C \left\{ \frac{d\eta}{\eta - z_{in}} (\phi_{\omega}(\eta) + i\psi_{\omega}^{in}(\eta)) - \right. \\ & \left. \frac{d\eta^*}{(\eta - z_{in})^*} (\phi_{\omega}(\eta) - i\psi_{\omega}^{in}(\eta)) \right\} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Es importante observar que ambas ecuaciones (2.18) y (2.19) requieren conocer los potenciales ϕ_{ω} y ψ_{ω}^{in} en el borde del film: estos deben ser calculados previamente mediante sus respectivas ecuaciones integrales (2.13), (2.14).

Capítulo 3

Teoría aplicada a la geometría elegida:

3.1. Geometría seleccionada:

La idea es analizar el efecto de la geometría en los modos de propagación electro-estáticos y magneto-estáticos en este film. Se eligió una perturbación geométrica periódica para buscar modos con bandas prohibidas, es decir, se espera un efecto similar a lo que sucede para los electrones de Bloch al moverse en el potencial periódico de un cristal. Además se supuso que la perturbación de la superficie inferior es una reflexión de la superficie superior. El film perfecto se asume infinito en las direcciones x y z y se encuentra entre $y = -D/2$ e $y = D/2$ en la dirección y . En general la superficie superior está descrita por $y_u(x) = y(x)$ y la superficie inferior $y_d(x) = -y(x)$, con $y(x)$ una función periódica de periodo A , es decir si n es un entero $y(x + nA) = y(x)$.

Para calcular la relación de dispersión se eligió la función periódica más simple, un perfil sinusoidal para la superficie perturbada: $y(x) = D/2 + \xi \sin(Kx)$, con $K \equiv 2\pi/A$. La figura 2.1 muestra la geometría en el caso sinusoidal.

3.2. Ecuaciones integrales y soluciones tipo Bloch:

La ecuación de valores propios (2.13) para el potencial magneto-estático en un punto $z_c = z'_u = x' + iy'$ en la superficie superior y para un punto en la superficie inferior $z_c = z'_d = x' - iy'$ (se utilizó la notación $y' \equiv y(x')$ y $\dot{y} \equiv dy/dx$) es:

$$\begin{aligned}
2\pi i(\mu_1 + 1)\phi_\omega(x' \pm iy') &= PV \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ (\mu_1 - 1) \left(\frac{1 - iy}{x - x' - i(y \pm y')} - c.c. \right) \right. \\
&\quad \left. + \mu_2 \left(\frac{1 - iy}{x - x' - i(y \pm y')} + c.c. \right) \right\} \phi_\omega(x - iy) \\
&- PV \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ (\mu_1 - 1) \left(\frac{1 + iy}{x - x' + i(y \mp y')} - c.c. \right) \right. \\
&\quad \left. + \mu_2 \left(\frac{1 + iy}{x - x' + i(y \mp y')} + c.c. \right) \right\} \phi_\omega(x + iy) \quad (3.1)
\end{aligned}$$

En la ecuación (3.1) el punto $x' \pm iy'$ en el borde de la muestra es un punto arbitrario y por lo tanto la misma ecuación puede ser evaluada en $x' + nA \pm iy'$. Al realizar el cambio de variable x por $x + nA$ y utilizando la periodicidad de la función $y(x)$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
2\pi i(\mu_1 + 1)\phi_\omega(x' + nA \pm iy') &= PV \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ (\mu_1 - 1) \left(\frac{1 - iy}{x - x' - i(y \pm y')} - c.c. \right) \right. \\
&\quad \left. + \mu_2 \left(\frac{1 - iy}{x - x' - i(y \pm y')} + c.c. \right) \right\} \phi_\omega(x + nA - iy) \\
&- PV \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ (\mu_1 - 1) \left(\frac{1 + iy}{x - x' + i(y \mp y')} - c.c. \right) \right. \\
&\quad \left. + \mu_2 \left(\frac{1 + iy}{x - x' + i(y \mp y')} + c.c. \right) \right\} \phi_\omega(x + nA + iy) \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Se puede observar que el kernel no varía con respecto a la ecuación (3.1) y por lo tanto el potencial magneto-estático $\phi_\omega(\vec{\rho})$ satisface la misma ecuación integral que su versión desplazada $\phi_\omega(\vec{\rho} + \vec{R})$, donde $\vec{R} \equiv nA\hat{x}$, es decir, un desplazamiento que es múltiplo de la periodicidad de la geometría. De esta forma se concluye que $\phi_\omega(\vec{\rho} + \vec{R}) = C(\vec{R})\phi_\omega(\vec{\rho})$. Aplicando esta última propiedad para $\phi(\vec{\rho} + \vec{R} + \vec{R}')$ se obtiene $C(\vec{R} + \vec{R}') = C(\vec{R})C(\vec{R}')$, y por lo tanto $C(\vec{R}) = \exp(i\vec{k} \cdot \vec{R}) = \exp(iknA)$. Este último resultado nos permite afinar que $\phi_\omega(\vec{\rho}) = \exp(ikx)u_\omega(\vec{\rho})$, con $u_\omega(\vec{\rho})$ una función periódica con período A . Por lo tanto existen modos de Bloch (como en el caso de las funciones de onda de electrones en un cristal periódico) que se generan debido a la invariancia de traslación de la geometría en la dirección x , la cual posee un período A .

El vector de onda $\vec{k} = k\hat{x}$ es entonces perpendicular a la perturbación geométrica y a la magnetización de equilibrio. En el caso del film perfecto magnetizado en el plano, y con el vector de onda \vec{k} perpendicular a la magnetización, los modos magneto-estáticos son superficiales y localizados en una de las superficies del film dependiendo de la dirección de propagación [18] (*field displacement non reciprocity*).

Por lo tanto, el campo magneto-estático real en los bordes superiores e inferiores del film se pueden escribir en terminos de ondas de Bloch de la forma:

$$\phi_u(x, t) = f_\omega^k(x)e^{i(kx-\omega t)} + (f_\omega^k(x))^*e^{-i(kx-\omega t)} \quad (3.3)$$

$$\phi_d(x, t) = g_\omega^k(x)e^{i(kx-\omega t)} + (g_\omega^k(x))^*e^{-i(kx-\omega t)} \quad (3.4)$$

, donde las funciones $f_\omega^k(x)$ y $g_\omega^k(x)$ poseen período A , i.e. pueden ser escritas utilizando las siguientes series de Fourier:

$$f_\omega^k(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ijKx} \quad ; \quad g_\omega^k(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j e^{ijKx} \quad (3.5)$$

3.3. Ecuaciones integrales para films con perturbaciones superficiales periódicas:

La ecuación integral para el potencial magneto-estático (2.13) en su versión (3.1) puede ser reescrita al estudiar una perturbación geométrica de período A . En este caso la integración infinita sobre la variable x (dirección perpendicular a la perturbación geométrica) puede ser transformada en una sumatoria de integrales sobre el período A , como se explica en la sección 6.1. La ecuación integral (2.13) se transforma en la siguiente ecuación integral para las funciones $f_\omega^k(x)$ y $g_\omega^k(x)$ sobre $x \in (-A/2, A/2)$:

$$\begin{aligned}
(\mu_1(o) + 1)f_\omega^k(x') &= PV \int_{-A/2}^{A/2} \frac{dx}{A} \{(\mu_1(o) - 1)[F_{1-}^k(x, x') - F_{1+}^k(x, x')] \\
&\quad - \mu_2(o) [F_{1-}^k(x, x') + F_{1+}^k(x, x')]\} f_\omega^k(x) \\
&\quad + PV \int_{-A/2}^{A/2} \frac{dx}{A} \{(\mu_1(o) - 1)[F_{2-}^k(x, x') - F_{2+}^k(x, x')] \\
&\quad + \mu_2(o) [F_{2-}^k(x, x') + F_{2+}^k(x, x')]\} g_\omega^k(x)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
(\mu_1(o) + 1)g_\omega^k(x') &= PV \int_{-A/2}^{A/2} \frac{dx}{A} \{(\mu_1(o) - 1)[F_{2-}^k(x, x') - F_{2+}^k(x, x')] \\
&\quad - \mu_2(o) [F_{2-}^k(x, x') + F_{2+}^k(x, x')]\} f_\omega^k(x) \\
&\quad + PV \int_{-A/2}^{A/2} \frac{dx}{A} \{(\mu_1(o) - 1)[F_{1-}^k(x, x') - F_{1+}^k(x, x')] \\
&\quad + \mu_2(o) [F_{1-}^k(x, x') + F_{1+}^k(x, x')]\} g_\omega^k(x)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

donde las funciones $F_{j\pm}^k(x, x')$ están definidas como (para $k > 0$):

$$\begin{aligned}
F_{1\pm}^k(x, x') &= (1 \pm iy) \frac{e^{\pm k(y-y')}}{1 - e^{-Ki(x-x') \pm K(y-y')}} \\
F_{2\pm}^k(x, x') &= (1 \pm iy) \frac{e^{\pm k(y+y')}}{1 - e^{-Ki(x-x') \pm K(y+y')}}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

, con la notación $iy \equiv dy/dx$ e $y' = y(x')$.

3.4. Simetría y soluciones:

La simetría de la geometría con respecto al eje x (posee una simetría de reflexión con respecto a este eje) y las funciones $F_{j\pm}^k(x, x')$ (ecuaciones (3.8)) permiten obtener las siguientes propiedades:

$$F_{2+}^{-k} \pm F_{2-}^{-k} = \mp [(F_{2+}^k)^* \pm (F_{2-}^k)^*] \quad ; \quad F_{1+}^{-k} \pm F_{1-}^{-k} = \mp [(F_{1+}^k)^* \pm (F_{1-}^k)^*] \tag{3.9}$$

Tomando el complejo conjugado de las ecuaciones (3.6,3.7) y comparando estas con las mismas ecuaciones (3.6,3.7) escritas para $(-\omega, -k)$ se concluye que (utilizando las propiedades (3.9)):

$$(f_{\omega}^k(x))^* = f_{-\omega}^{-k}(x) \quad ; \quad (g_{\omega}^k(x))^* = g_{-\omega}^{-k}(x) \quad (3.10)$$

Además, si se escribe la ecuación (3.6) para $f_{-\omega}^k(x)$ y $g_{-\omega}^k(x)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} (\mu_1(o) + 1)f_{-\omega}^k(x') &= PV \int_{-A/2}^{A/2} \frac{dx}{A} \{(\mu_1(o) - 1)[F_{1-}^k(x, x') - F_{1+}^k(x, x')] \\ &\quad + \mu_2(o) [F_{1-}^k(x, x') + F_{1+}^k(x, x')]\} f_{-\omega}^k(x) \\ + PV \int_{-A/2}^{A/2} \frac{dx}{A} &\{(\mu_1(o) - 1)[F_{2-}^k(x, x') - F_{2+}^k(x, x')] \\ &\quad - \mu_2(o) [F_{2-}^k(x, x') + F_{2+}^k(x, x')]\} g_{-\omega}^k(x) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Comparando la ecuación (3.11) con (3.7) se puede observar que $f_{-\omega}^k(x) = Cg_{\omega}^k(x)$ y $g_{-\omega}^k(x) = Cf_{\omega}^k(x)$ ya que los kernels de las ecuaciones (3.11) y (3.7) son los mismos. Como las ecuaciones son lineales, se puede elegir $C = 1$, es decir, $f_{-\omega}^k(x) = g_{\omega}^k(x)$ y $g_{-\omega}^k(x) = f_{\omega}^k(x)$. Aplicando las ecuaciones (3.10) se concluye que $f_{-\omega}^{-k}(x) = (g_{\omega}^k(x))^*$ y $g_{-\omega}^{-k}(x) = (f_{\omega}^k(x))^*$.

Para el caso especial de los plasmones ($\mu_2 = 0$) utilizando el mismo tipo de argumentos se puede observar que $f_{\omega}^k(x) = Cg_{\omega}^k(x)$ y $g_{\omega}^k(x) = Cf_{\omega}^k(x)$. Reemplazando esta última relación en las anteriores se concluye que $C^2 = 1$, es decir $C = \pm 1$ o $f_{\omega}^k(x) = \pm g_{\omega}^k(x)$, por lo tanto los modos plasmónicos son simétricos o anti-simétricos bajo reflexiones con respecto al eje x .

3.5. Desde ecuaciones integrales a ecuaciones matriciales:

Los potenciales magneto-estáticos en las superficies del film pueden ser encontrados una vez que los coeficientes de Fourier c_l 's y b_l 's de las funciones periódicas $f_{\omega}^k(x)$, $g_{\omega}^k(x)$ (ecuaciones (3.3), (3.4)) hayan sido calculados. Es preferible introducir los coeficientes $p_l \equiv c_l + b_l$ y $q_l \equiv c_l - b_l$ ya que para el caso plasmónico ($\mu_2 = 0$) las ecuaciones para calcular los coeficientes se desacoplan.

Utilizando el procedimiento detallado en el apéndice 6.2 las ecuaciones integrales (3.6) y (3.7) para los modos magneto-estáticos pasan a ser equivalentes al siguiente sistema matricial

lineal:

$$[(\mu_1(o) - 1)M - \mu_2(o)N - 2U]d = 0 \quad (3.12)$$

donde d es un vector columna compuesto por la concatenación de los vectores p y q . Las matrices M y N están definidas como:

$$M = \begin{pmatrix} M_u & 0 \\ 0 & M_d \end{pmatrix} ; \quad N = \begin{pmatrix} 0 & N_u \\ N_d & 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

con:

$$\begin{aligned} M_u &= D^- - D^+ - C^{0-} + C^{0+} + C^- - C^+ ; & M_d &= D^- - D^+ - C^{0-} + C^{0+} - C^- + C^+ \\ N_u &= D^- + D^+ + C_0^- + C_0^+ + C^- + C^+ ; & N_d &= D^- + D^+ + C_0^- + C_0^+ - C^- - C^+ \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde los elementos de las matrices D^\pm , C^\pm y $C^{0\pm}$ están definidos por:

$$D_{lj}^\pm \equiv D_{lj}^{k\pm} ; \quad C_{lj}^\pm \equiv C_{lj}^{k\pm} ; \quad C_{lj}^{0\pm} \equiv C_{(l-j)0}^{k=0\pm} \quad (3.15)$$

y

$$D_{lj}^\pm \equiv \int_{-A/2}^{A/2} \frac{dx'}{A} \int_{-A/2}^{A/2} \frac{dx}{A} e^{-iKlx'} (e^{iKjx} F_{1\pm}^k(x, x') - e^{iKjx'} F_{1\pm}^0(x, x')) \quad (3.16)$$

$$C_{lj}^{k\pm} \equiv \int_{-A/2}^{A/2} \frac{dx'}{A} \int_{-A/2}^{A/2} \frac{dx}{A} e^{-iKlx'} e^{iKjx} F_{2\pm}^k(x, x') \quad (3.17)$$

Análogamente las ecuaciones para el caso plasmónico son ($\mu_2 = 0$ y μ_1 es reemplazado por $\epsilon(\omega)$):

$$[(\epsilon(o) - 1)M - 2U]d = 0 \quad (3.18)$$

en efecto esto corresponde a ecuaciones desacopladas para los modos simétricos y anti-simétricos respectivamente:

$$[(\epsilon(o) - 1)M_u - 2U]p = 0 ; \quad [(\epsilon(o) - 1)M_d - 2U]q = 0 \quad (3.19)$$

3.6. Caso del film perfecto:

En el caso del film perfecto las matrices $D^\pm, C^\pm, C^{0\pm}$ son diagonales, esto se puede apreciar en el siguiente diagrama para el módulo de las matrices M y N :

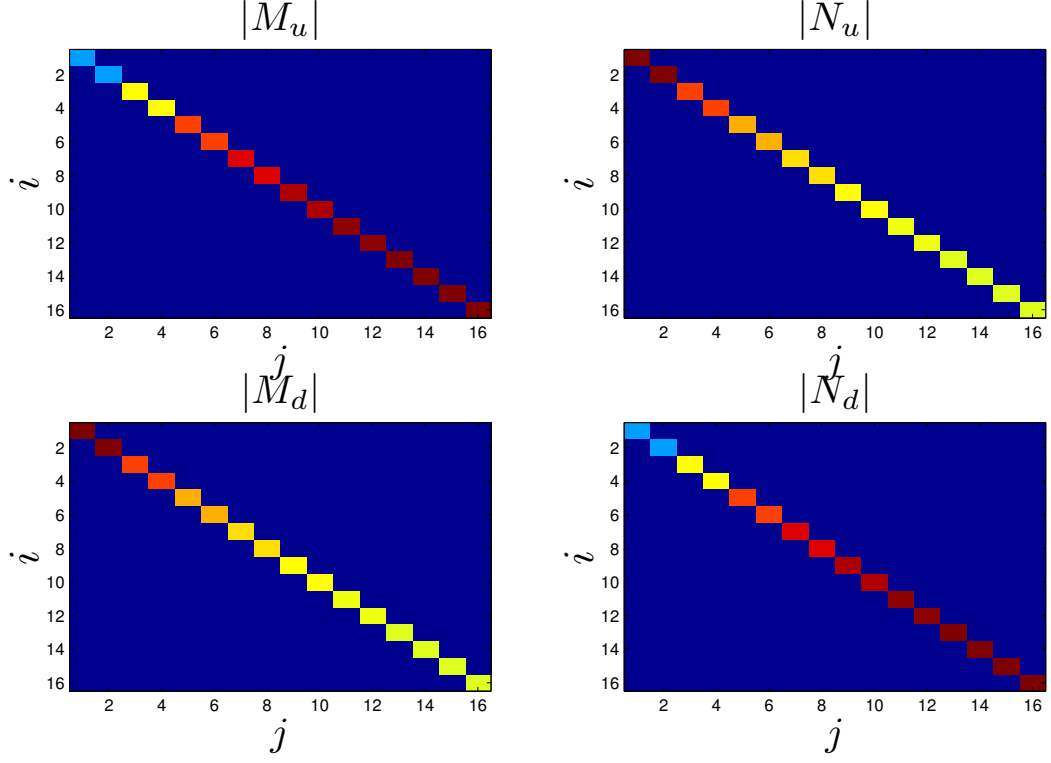


Figura 3.1: El módulo de las matrices M y N en cada posición (i, j) para el film perfecto. El color azul corresponde a cero y color rojo oscuro corresponde a 1.

por lo tanto el problema de valores propios (3.12) se transforma en problemas de valores propios independientes compuestos por matrices de 2×2 asociadas a los diferentes valores de j , donde j es el índice de los coeficientes de Fourier p_j, q_j :

$$\begin{pmatrix} (1 - \mu_1(o))(1 - e^{-|\kappa_j|D}) - 2 & \mp \mu_2(o)(1 + e^{-|\kappa_j|D}) \\ \mp \mu_2(o)(1 - e^{-|\kappa_j|D}) & (1 - \mu_1(o))(1 + e^{-|\kappa_j|D}) - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_j \\ q_j \end{pmatrix} = 0 \quad (3.20)$$

$\kappa_j \equiv k + Kj$ y en \mp el signo superior corresponde a $j \geq 0$ y el inferior a $j < 0$. La condición para encontrar soluciones a las ecuaciones (3.20) es que el determinante del sistema sea nulo, de esta forma se obtiene la siguiente ecuación para la relación de dispersión:

$$\tanh(|\kappa|D) = \frac{2\mu_1}{\mu_2^2 - \mu_1^2 - 1} \quad (3.21)$$

donde se puede notar que los modos con $\pm\kappa$ son degenerados (el mismo resultado puede obtenerse resolviendo las ecuaciones diferenciales con las condiciones de borde apropiadas, ver sección 6.3). La ecuación anterior nos permite obtener la relación de dispersión para los modos magneto-estáticos:

$$o(\kappa) = \sqrt{h(h+1) + (1 - e^{-2|\kappa|D})/4} \quad (3.22)$$

es decir la frecuencia de estos modos está en el rango $o \in (\sqrt{h(h+1)}, h+1/2)$ y corresponden a modos superficiales [18].

Para modos electro-estáticos se reemplaza $\mu_1(o)$ por $\epsilon(\omega)$ y $\mu_2 = 0$, a partir de la ecuación (3.20) se observa que existen modos simétricos y anti-simétricos independientes cuyas relaciones de dispersión son:

$$\begin{aligned} \epsilon_s &= -\coth(|\kappa|D/2) & \lambda_s &= \exp(|\kappa|D) \\ \epsilon_a &= -\tanh(|\kappa|D/2) & \lambda_a &= -\exp(|\kappa|D) \end{aligned} \quad (3.23)$$

lo que corresponde a los "modos gemelos" ($\lambda = (\epsilon - 1)/(\epsilon + 1)$) [15]. Para conocer explícitamente la relación $\omega(\kappa)$ es necesario conocer el tipo de material dieléctrico, es decir, $\epsilon(\omega)$.

Se puede observar que al considerar el caso de un film perturbado, el resultado del film perfecto sugiere reordenar las variables de la ecuación (3.12) para que p_j y q_j estén juntos, de esta forma, la matriz perturbada comienza como una matriz diagonal por bloques cuando la perturbación es pequeña (con bloque de dimensión 2×2).

3.6.1. Análisis de frecuencias en el esquema reducido:

Como la perturbación geométrica de la superficie del film posee período $\Delta x = A$, el vector de onda k puede considerarse restringido entre $k = -\pi/A$ y $k = \pi/A$, es decir, la primera zona de Brillouin. Para una perturbación periódica el análisis de las frecuencias de los modos puede hacerse en un esquema reducido. Por ejemplo, para el caso del film perfecto,

las frecuencias de los modos magneto-estáticos (ecuación (6.22)) en un esquema reducido están graficados en la figura 3.2

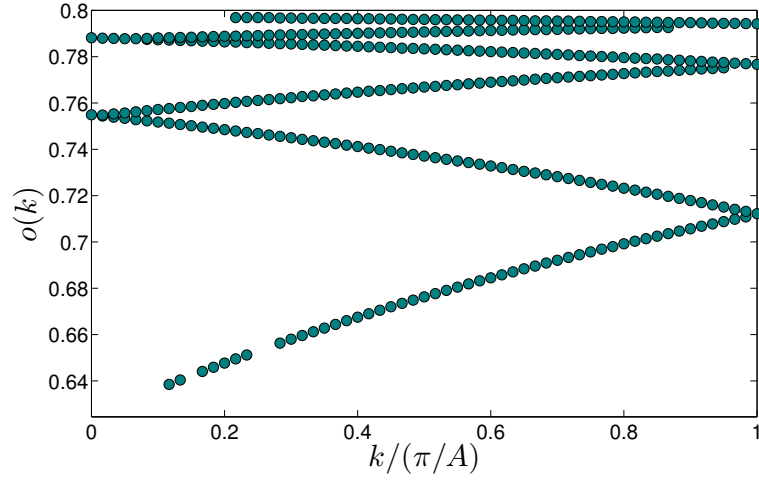


Figura 3.2: Modos magneto-estáticos para el film perfecto en un esquema reducido, con $h = 0,3$, $D/A = 0,1$

En la figura 3.3 se puede observar el valor propio $\epsilon(k)$ de los modos electro-estáticos simétricos y anti-simétricos en un esquema reducido

3.7. Perturbaciones geométricas pequeñas:

Es posible analizar el caso de una pequeña perturbación a la superficie del film (con respecto a su espesor D), es decir, se consideró $y(x) = D/2 + \xi(x)$ with $|\xi(x)| \ll D$, el parámetro pequeño. Por lo tanto, se estudiará la ecuación de valores propios (3.12) a primer orden en ξ . Por ejemplo, uno de los coeficientes necesarios en la ecuación (3.12) a primer orden es:

$$D_{lj}^{\pm} \simeq D_{lj}^{\pm 0} + D_{lj}^{\pm \xi'} + D_{lj}^{\pm \xi} \quad (3.24)$$

donde $D_{lj}^{\pm 0}$ corresponde al valor asociado al film perfecto (sección 6.4), $D_{lj}^{\pm \xi'}$ es la corrección proporcional a $\dot{y} = y'(x) \simeq \xi'(x)$, y $D_{lj}^{\pm \xi}$ el término proporcional a $\xi(x)$. Los términos relevantes a primer orden en la ecuación (3.12) son:

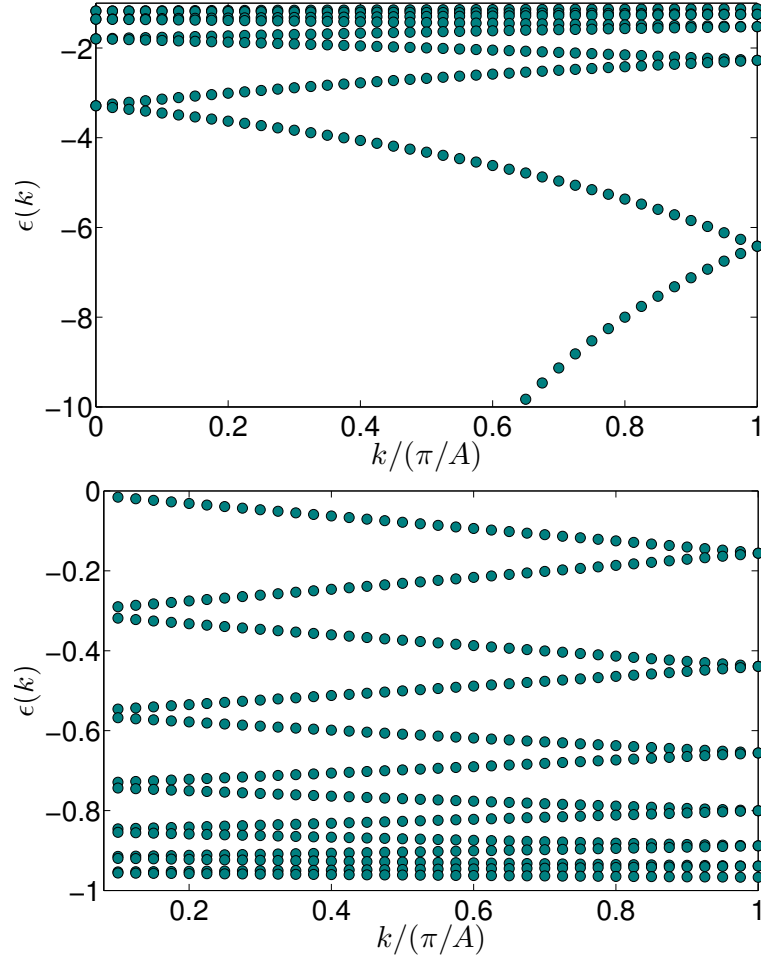


Figura 3.3: Valor propio $\epsilon(k)$ de los modos simétricos y anti-simétricos en un film dieléctrico perfecto en un esquema reducido, $D/A = 0,1$

$$D_{lj}^{\pm\xi'} \simeq \pm i \int_{-A/2}^{A/2} \frac{dx}{A} \int_{-A/2}^{A/2} \frac{dx'}{A} e^{-ilKx'} \xi'(x) \left(\frac{e^{ijKx} - e^{ijKx'}}{1 - e^{-iK(x-x')}} \right) \quad (3.25)$$

$$C_{lj}^{k\pm\xi'} \simeq \pm i e^{\pm kD} \int_{-A/2}^{A/2} \frac{dx}{A} \int_{-A/2}^{A/2} \frac{dx'}{A} \xi'(x) \frac{e^{-ilKx'} e^{ijKx}}{1 - e^{-iK(x-x') \pm KD}} \quad (3.26)$$

$$D_{lj}^{\pm\xi} \simeq \pm \int_{-A/2}^{A/2} \frac{dx}{A} \int_{-A/2}^{A/2} \frac{dx'}{A} e^{-ilKx'} \frac{(\xi(x) - \xi(x'))}{1 - e^{-iK(x-x')}} \left(k e^{ijKx} - K \frac{e^{ijKx} - e^{ijKx'}}{1 - e^{-iK(x-x')}} \right) \quad (3.27)$$

$$C_{lj}^{k\pm\xi} \simeq \pm e^{\pm kD} \int_{-A/2}^{A/2} \frac{dx}{A} \int_{-A/2}^{A/2} \frac{dx'}{A} (\xi(x) + \xi(x')) \times \frac{e^{-ilKx'} e^{ijKx}}{1 - e^{-iK(x-x')} e^{\pm KD}} \left(k - \frac{K}{1 - e^{\mp KD} e^{iK(x-x')}} \right) \quad (3.28)$$

3.7.1. Caso especial, una perturbación sinusoidal:

Como un ejemplo de una perturbación periódica simple se eligió una sinusoidal: $\xi(x) = \xi \sin(Kx)$, es decir $\dot{y} = \xi K \cos(Kx)$, con $|\xi| \ll D$, $K \equiv 2\pi/A$ y período A . En este caso las matrices $D^\pm, C^\pm, C^{0\pm}$ que determinan las matrices M y N son todas tridiagonales. En la figura 3.4 se puede observar la forma tridiagonal de las matrices M y N , la diagonal principal es de orden cero, y las diagonales superiores e inferiores son de primer orden en la perturbación.

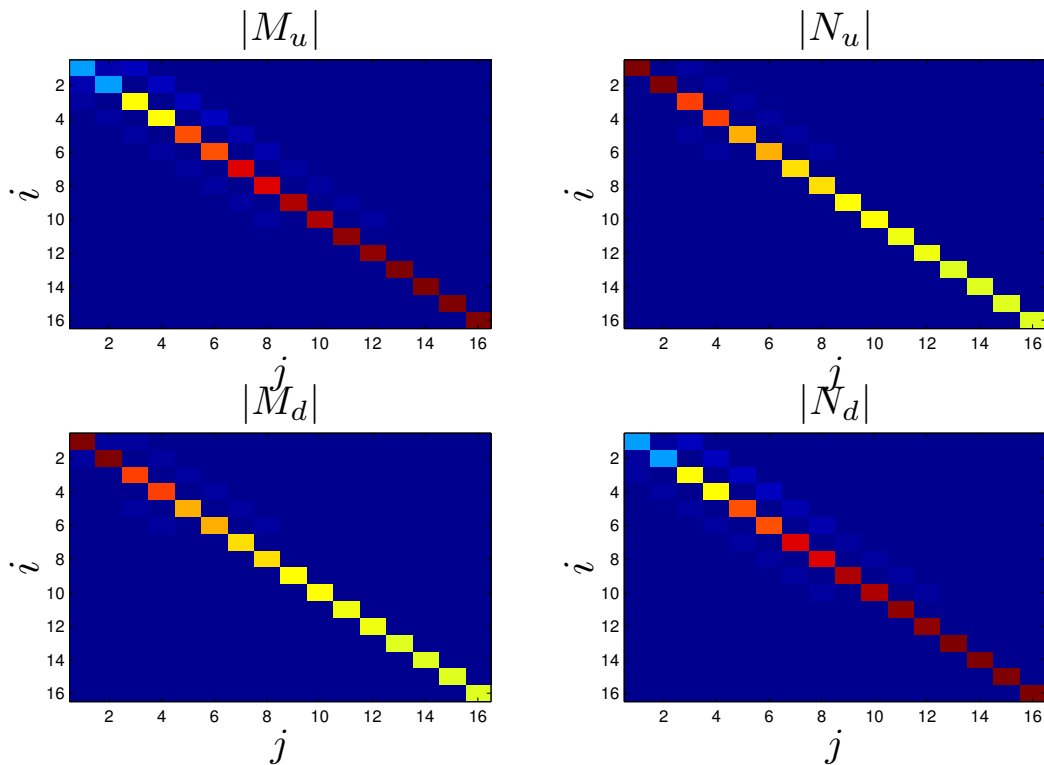


Figura 3.4: El módulo de las matrices M y N en cada posición (i, j) para $\xi = 0,01$. El color azul corresponde a cero y color rojo oscuro corresponde a 1.

A medida que el tamaño de la perturbación aumenta ya no se pueden utilizar los resultados de la sección anterior y se debe recurrir al cálculo de las integrales sin realizar la aproximación. En el gráfico 3.5 se observa la aparición de diagonales superiores e inferiores en las matrices M y N que no existen cuando la perturbación es pequeña.

Esto significa que los modos con diferentes valores de j ya no son independientes como en el caso del film perfecto: un modo del film perfecto j se acopla a los modos $j \pm 1$ generándose

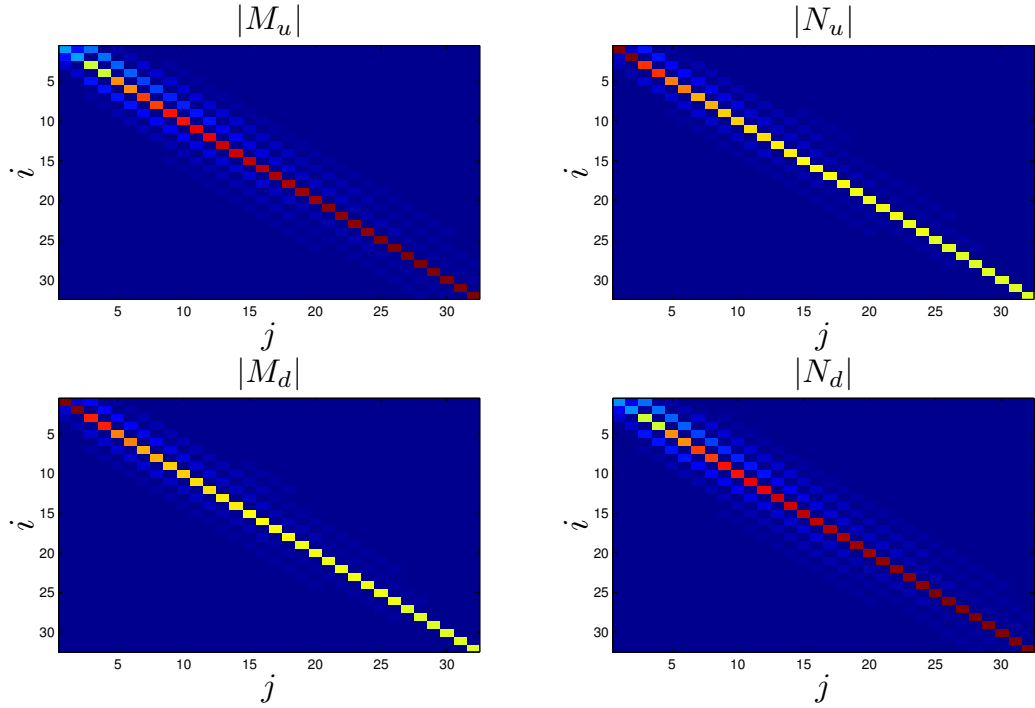


Figura 3.5: El módulo de las matrices M y N en cada posición (i, j) para $\xi = 0,04$. El color azul corresponde a cero y color rojo oscuro corresponde a 1.

una dependencia en cadena. Los elementos a primer orden de las matrices $D^\pm, C^\pm, C^{0\pm}$ (ecuaciones (3.25) a (3.28)) son determinadas analíticamente mediante integrales calculadas en el plano complejo (el método es el mismo que el utilizado para el film perfecto en el 6.4).

Esta teoría de perturbaciones concuerda con los cálculos numéricos realizados para el caso sinusoidal sin restringir la amplitud de la perturbación.

3.8. Análisis perturbativo de las brechas entre bandas:

Se puede realizar un análisis perturbativo de lo que sucede con la relación de dispersión en los bordes de la zona de Brillouin realizando un análisis similar al hecho para los electrones en los sólidos en un potencial débil. En estos bordes dos bandas se degeneran para el film perfecto y se acoplan mediante la perturbación de la superficie, y la autofunción puede ser aproximada por una combinación lineal de las autofunciones degeneradas. Primero se analizara el caso de los plasmones, que es el caso simple, y luego el caso magnónico.

3.8.1. Brechas entre bandas aproximadas, plasmones:

Definiendo $\nu \equiv 2/(\epsilon - 1)$, las ecuaciones (3.19) para los modos plasmónicos simétricos y anti-simétricos pueden ser re-escritas como las siguientes ecuaciones de auto-valores:

$$(M_u - \nu U)p = 0 \quad , \quad (M_d - \nu U)q = 0 \quad (3.29)$$

Se puede realizar un análisis perturbativo de la ecuación anterior para el caso de los modos simétricos (análogamente se puede realizar el análisis para los modos anti-simétricos), a primer orden se obtiene:

$$(M_u^{(0)} - \nu U)p = -M_u^{(1)}p \quad (3.30)$$

donde la matriz en el lado izquierdo es diagonal, y la matriz en el lado derecho es proporcional a la amplitud de la perturbación, es decir, de primer orden. Las ecuaciones asociadas a los índices $l = 0, -1$ en la ecuación (3.30) son:

$$((-1 + e^{-|k-K|D}) - \nu)p_{-1} = -\sum_j M_{(-1)j}^{(1)}p_j \quad (3.31)$$

$$((-1 + e^{-|k|D}) - \nu)p_0 = -\sum_j M_{0j}^{(1)}p_j \quad (3.32)$$

y similarmente para otros valores de l . Cuando $k \simeq K/2$, es decir, cerca del borde de la zona de Brillouin, los factores en el lado izquierdo de las ecuaciones (3.32) se vuelven similares y pequeños si ν es cercano al valor propio de orden cero asociado con p_0 or p_{-1} (debido a la degeneración que existe en el film perfecto). Este no es el caso para las ecuaciones correspondientes a otros valores de l . Por lo tanto p_0 y p_{-1} son grandes comparados con otros p_l , luego una forma aproximada de calcular los valores propios y vectores propios es mantener solo estas variables, es decir, la ecuación (3.32) se puede escribir como (evaluando exactamente en $k = K/2$):

$$\begin{pmatrix} (-1 + e^{-KD/2}) + M_{(-1)(-1)}^{(1)} - \nu & M_{(-1)0}^{(1)} \\ M_{0(-1)}^{(1)} & (-1 + e^{-KD/2}) + M_{00}^{(1)} - \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{-1} \\ p_0 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.33)$$

Para nuestro ejemplo de perturbación sinusoidal, y a partir de las ecuaciones (3.13,3.14,6.43) esta ecuación se transforma en:

$$\begin{pmatrix} (-1 + e^{-KD/2}) - \nu & i\xi K/2 \\ -i\xi K/2 & (-1 + e^{-KD/2}) - \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{-1} \\ p_0 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.34)$$

es decir, los valores y vectores propios son:

$$\begin{aligned} \nu^{(1)} &= -1 + e^{-KD/2} - \xi K/2 & \nu^{(2)} &= -1 + e^{-KD/2} + \xi K/2 \\ p_{-1}^{(1)} &= -i & p_{-1}^{(2)} &= i \\ p_0^{(1)} &= 1 & p_0^{(2)} &= 1 \end{aligned} \quad (3.35)$$

y por lo tanto la separación entre las bandas es igual a:

$$\nu^{(2)} - \nu^{(1)} = \xi K = 2\pi\xi/A \quad (3.36)$$

, es decir, una expresión analítica muy simple proporcional a la perturbación. Dado los vectores propios anteriores el potencial en la superficie superior para los modos con alta (2) y baja (1) frecuencia (al borde de la zona de Brillouin) son proporcionales a:

$$f_{\omega}^{(2)} \propto \cos(\omega t)(\cos(Kx/2) + \sin(Kx/2)) \quad , \quad f_{\omega}^{(1)} \propto \sin(\omega t)(\cos(Kx/2) - \sin(Kx/2)) \quad (3.37)$$

es decir, corresponden a modos estacionarios: esto se puede entender ya que en el borde de la zona de Brillouin se tienen dos modos acoplados de la misma amplitud viajando en direcciones opuestas.

3.8.2. Brechas entre bandas aproximadas, magnones:

Siguiendo argumentos similares a los utilizados en el caso de los plasmones, los modos magneto-estáticos y sus frecuencias están (en forma aproximada) dados por la solución al siguiente problema de valores propios para la frecuencia normalizada ω ($\mu_1 = \mu_1(\omega)$, $\mu_2 = \mu_2(\omega)$, $r_{\pm} \equiv -1 \pm \exp(-KD/2)$) y los coeficientes principales de los modos p_{-1}, q_{-1}, p_0, q_0 :

$$\begin{pmatrix} (\mu_1 - 1)r_+ - 2 & i\frac{\xi K}{2}(\mu_1 - 1) & -\mu_2 r_- & i\frac{\xi K}{2}\mu_2 e^{-\frac{KD}{2}} \\ -i\frac{\xi K}{2}(\mu_1 - 1) & (\mu_1 - 1)r_+ - 2 & i\frac{\xi K}{2}\mu_2 e^{-\frac{KD}{2}} & -\mu_2 r_+ \\ -\mu_2 r_+ & -i\frac{\xi K}{2}\mu_2 e^{-\frac{KD}{2}} & (\mu_1 - 1)r_- - 2 & i\frac{\xi K}{2}(\mu_1 - 1) \\ -i\frac{\xi K}{2}\mu_2 e^{-\frac{KD}{2}} & -\mu_2 r_- & -i\frac{\xi K}{2}(\mu_1 - 1) & (\mu_1 - 1)r_- - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{-1} \\ p_0 \\ q_{-1} \\ q_0 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.38)$$

La frecuencia en el borde de la zona de Brillouin se expande de la forma: $\omega \simeq \omega^0 + \Delta\omega$, donde ω^0 es la frecuencia de orden cero (ecuación (6.22) con $\kappa = K/2$) y $\Delta\omega$ una perturbación a la frecuencia de orden ξ . Imponiendo que el determinante de la ecuación de valores propios (3.38) sea nulo y utilizando un análisis perturbativo se puede obtener la siguiente expresión aproximada para los cambios en frecuencia en el borde de la zona de Brillouin:

$$\Delta\omega = \pm \frac{\xi K}{2} e^{-KD/2} \left| \frac{(\mu_1^0 - 1)^2 - (\mu_2^0)^2}{[(\mu_1^0 - 1)(\mu_1')_0 - \mu_2^0(\mu_2')_0](1 - e^{-KD}) + 2(\mu_1')_0} \right| \quad (3.39)$$

un resultado que concuerda con los cálculos numéricos (aquí $(\mu_{1,2}')_0$ corresponde a la derivada con respecto a la frecuencia evaluada en la frecuencia de orden cero). La separación entre las bandas es $\xi K \exp(-KD/2) | \%|$. Los detalles de este cálculo se encuentran en la sección 6.5.1.

3.9. Respuesta a un campo aplicado:

Es posible estudiar como estos films con superficies moduladas reaccionan a un campo aplicado. En particular, se explica como calcular la respuesta de un film ferromagnético bajo la aproximación magneto-estática. Si se utiliza el potencial complejo analítico $\Omega = \phi + i\psi$ (aquí ϕ y ψ son reales) el teorema de Cauchy aplicado en el interior y exterior de la muestra implican que para un punto z_c ubicado en el borde de la muestra (en la curva C) se cumple:

$$\Omega^{out}(z_c) = \frac{1}{\pi i} \oint_{C_\infty} d\eta \frac{\Omega^{out}(\eta)}{(\eta - z_c)} - \frac{1}{\pi i} \oint_{P.V.} d\eta \frac{\Omega^{out}(\eta)}{(\eta - z_c)} \quad (3.40)$$

$$\Omega^{out}(z_c) = \frac{1}{\pi i} \oint_{P.V.} d\eta \frac{\Omega^{in}(\eta)}{(\eta - z_c)} \quad (3.41)$$

La diferencia al existir el campo aplicado consiste en que la integración en ∞ contribuye: de hecho, la integral por C_∞ en la ecuación (3.40) es igual a $2\Omega^\infty(z_c)$, con el potencial previo igual al potencial aplicado. Tomando la transformada de Fourier en el tiempo y luego de manipulaciones algebraicas se obtiene la siguiente ecuación para ϕ_ω en el borde de la muestra, la cual es una versión inhomogénea de la ecuación (2.15):

$$\begin{aligned} \phi_\omega(z_c) = \phi_\omega^\infty(z_c) + \frac{1}{4\pi i} \left\{ (\mu_1 - 1) \oint_C \left(\frac{d\eta}{(\eta - z_c)} - c.c. \right) \right. \\ \left. + \mu_2 \oint_C \left(\frac{d\eta}{(\eta - z_c)} + c.c. \right) \right\} (\phi_\omega(\eta) - \phi_\omega(z_c)) \end{aligned} \quad (3.42)$$

El campo aplicado es (de esta forma satisface la ecuación de Laplace):

$$\vec{B}_\infty = \vec{H}_\infty \simeq b_\infty \cos(kx - \omega t) \cosh(ky) \hat{y} \quad (3.43)$$

Cerca de la muestra (aproximación magneto-estática) $\vec{H}_\infty \simeq b_\infty \cos(kx - \omega t) \hat{y}$. El potencial asociado ϕ_∞ está dado por:

$$\phi^\infty(x, y) = -\frac{b_\infty}{k} \cos(kx - \omega t) \sinh(ky) = -\frac{b_\infty}{2k} (e^{i(kx - \omega t)} + e^{-i(kx - \omega t)}) \sinh(ky) \quad (3.44)$$

,es decir,

$$\phi_\omega^\infty(x, y) = -\frac{b_\infty}{2k} e^{ikx} \sinh(ky) \quad (3.45)$$

Si uno sigue los pasos que en el caso homogéneo llevan desde la ecuación integral para el potencial (2.15) a su versión de ecuación matricial (3.12), en el caso inhomogéneo a partir de la ecuación (3.42) se obtiene la siguiente ecuación matricial:

$$[(\mu_1(o) - 1)M - \mu_2(o)N - 2U]d = -2d_\infty \quad (3.46)$$

donde $d_\infty \equiv (p_\infty; q_\infty)$, con $p_i^\infty = c_i^\infty + b_i^\infty$, $q_i^\infty = c_i^\infty - b_i^\infty$, y $(y(x))$ representa una perturbación particular de la superficie)

$$c_i^\infty = -\frac{1}{A} \int_{-A/2}^{A/2} dx e^{-ikx} \frac{b_\infty}{2k} \sinh(ky(x)) = -b_i^\infty \quad (3.47)$$

es decir, $q_i^\infty = 2c_i^\infty$ y $p_i^\infty = 0$, que representa el hecho que el término de forzamiento, en este caso, es anti-simétrico.

3.9.1. Respuesta del film perfecto:

Como un ejemplo es interesante estudiar la forma de la ecuación matricial inhomogénea en el caso del film perfecto cuando es forzado a una frecuencia ω :

$$\begin{pmatrix} (\mu_1(o) - 1)(1 + e^{-kD}) + -2 & -\mu_2(o)(1 + e^{-kD}) \\ -\mu_2(o)(1 - e^{-kD}) & (\mu_1(o) - 1)(-1 - e^{-kD}) - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

donde $\sigma = 2b_\infty \sinh(kD/2)/k$. La solución de este sistema es:

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = \frac{b_\infty(e^{kD} - 1)}{2k \text{Det}(o)} \begin{pmatrix} \mu_2(o) \cosh(kD/2) \\ -\mu_1(o) \sinh(kD/2) - \cosh(kD/2) \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

con $\text{Det}(o) = (\mu_1(o)^2 + 1 - \mu_2(o)^2) \sinh(kD)/2 + \mu_1(o) \cosh(kD)$, es decir, como es esperado la respuesta posee una resonancia (diverge) a medida que la frecuencia se acerca a la frecuencia de los modos normales donde $\text{Det} = 0$ para un valor de k .

3.10. Energía Magnética:

Utilizando el resultado del problema de valores y vectores propios es posible escribir una expresión simple para la energía magnética del film, la cual se simplifica en integrales de los potenciales sobre el borde de la muestra.

El promedio temporal de la densidad de energía magnética está dado por [20]:

$$w_m = \frac{1}{4} \vec{h}^* \frac{d}{d\omega} (\omega \vec{\mu}(\omega)) \vec{h} \quad (3.50)$$

La energía por unidad de largo en la dirección perpendicular a la perturbación es

$$W_m = \int dA \frac{1}{4} \vec{h}^* \frac{d}{d\omega} (\omega \bar{\mu}(\omega)) \vec{h} \quad (3.51)$$

La matriz de 2×2 : $\frac{d}{d\omega}(\omega\mu)$ posee la forma:

$$\frac{d}{d\omega}(\omega\mu) = \begin{pmatrix} \tau_1 & -i\tau_2 \\ i\tau_2 & \tau_1 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

donde

$$\tau_1(\omega) = 1 + \frac{h(h^2 + \omega^2)}{(h^2 - \omega^2)^2} \quad (3.53)$$

$$\tau_2(\omega) = \frac{2h^2\omega}{(h^2 - \omega^2)^2} \quad (3.54)$$

De esta forma la energía magnética puede escribirse como:

$$W_m = \frac{1}{4} \int dA (\nabla\phi)^* \left[\tau_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i\tau_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \nabla\phi \quad (3.55)$$

Definiendo R como la matriz de rotación en $\pi/2$ en el sentido anti-horario entonces la energía del film es:

$$W_m = \frac{1}{4} \int dA [\tau_1 (\nabla\phi)^* \nabla\phi + i\tau_2 (\nabla\phi)^* R \nabla\phi] \quad (3.56)$$

Utilizando la propiedad: $\nabla(fA) = A\nabla f + f\nabla A$ se obtiene:

$$\nabla(\phi^* \nabla\phi) = \nabla\phi \nabla\phi^* + \phi^* \nabla^2\phi \quad (3.57)$$

$$(3.58)$$

Como el potencial magnético satisface la ecuación de Laplace se obtiene: $\nabla(\phi^* \nabla\phi) = \nabla\phi \nabla\phi^*$, para el otro término en la energía se puede escribir:

$$\nabla(\phi^* R \nabla\phi) = (R \nabla\phi) \nabla\phi^* + \phi^* \nabla(R \nabla\phi) \quad (3.59)$$

$$(3.60)$$

El segundo término es nulo ya que $\nabla(R\nabla\phi) = \partial_x\partial_y\phi - \partial_y\partial_x\phi$ y por lo tanto $\nabla(\phi^*R\nabla\phi) = (R\nabla\phi)\nabla\phi^* = \nabla\phi^*(R\nabla\phi)$

reemplazando ambos valores en la energía:

$$W_m = \frac{1}{4} \int dA [\tau_1 \nabla(\phi^* \nabla\phi) + i\tau_2 \nabla(\phi^* R\nabla\phi)] \quad (3.61)$$

$$W_m = \frac{1}{4} \int dl \hat{n} [\tau_1 (\nabla\phi)\phi^* + i\tau_2 R(\nabla\phi)\phi^*] \quad (3.62)$$

El término $\hat{n}(R\nabla\phi)$ corresponde a $-\partial_t\phi$ (aquí ∂_t es la derivada tangencial), por lo tanto

$$W_m = \frac{1}{4} \int dl \left[\tau_1 \frac{\partial\phi}{\partial\hat{n}} \phi^* - i\tau_2 \frac{\partial\phi}{\partial\hat{t}} \phi^* \right] \quad (3.63)$$

$$W_m = \frac{1}{4} \int dl \left[\tau_1 \frac{\partial\phi}{\partial\hat{n}} - i\tau_2 \frac{\partial\phi}{\partial\hat{t}} \right] \phi^* \quad (3.64)$$

Además, de las relaciones de Cauchy sabemos que $\partial\phi/\partial\hat{n} = \partial\psi/\partial\hat{t}$, con lo que se obtiene:

$$W_m = \frac{1}{4} \int dl \left[\tau_1 \frac{\partial\psi}{\partial\hat{t}} - i\tau_2 \frac{\partial\phi}{\partial\hat{t}} \right] \phi^* \quad (3.65)$$

El potencial magnético ψ^{in} se puede describir de forma similar al potencial ϕ en el borde del film. Denominando \hat{c}_l y \hat{b}_l a los coeficientes de Fourier de las funciones periódicas asociadas al potencial ψ^{in} en el borde, las integrales sobre el borde del film se pueden calcular y por lo tanto la energía se puede escribir en función de los coeficientes para ϕ y ψ^{in} :

$$W_m = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\tau_1 \frac{\partial\psi_d^{in}}{\partial x} - i\tau_2 \frac{\partial\psi_d^{in}}{\partial x} \right] \phi_d^* + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\tau_1 \frac{\partial\psi_u^{in}}{\partial x} - i\tau_2 \frac{\partial\psi_u^{in}}{\partial x} \right] \phi_u^* \quad (3.66)$$

Las potenciales en la cara inferior (d) están descritos de la forma:

$$\phi_d = \sum_l b_l e^{iKlx} e^{ikx} \quad (3.67)$$

$$\psi_d = \sum_l \hat{b}_l e^{iKlx} e^{ikx} \quad (3.68)$$

$$(3.69)$$

Los cuatro términos que aparecen en la integral para el cálculo de la energía en la ecuación (3.66) son similares, el primero de ellos es:

$$\begin{aligned}
& \tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx \quad \frac{\partial \psi_D^{in}}{\partial x} \phi_D^* \\
& \tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx \quad \sum_j \hat{b}_j i(Kj + k) e^{iKjx} e^{ikx} \sum_l b_l^* e^{-iKlx} e^{-ikx} \\
& \tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx \quad \sum_j \hat{b}_j i(Kj + k) e^{iKjx} e^{ikx} \sum_l b_l^* e^{-iKlx} e^{-ikx} \\
& \tau_1 \sum_l \quad \sum_j \hat{b}_j b_l^* i(Kj + k) \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{iKjx - iKlx} \\
& \tau_1 \sum_l \quad \sum_j \hat{b}_j b_l^* i(Kj + k) A \delta_{j,l} \\
& \tau_1 \sum_j \quad \hat{b}_j b_j^* i(Kj + k) A
\end{aligned} \tag{3.70}$$

los otros términos son análogos con distintos coeficientes (para la cara superior (u) los coeficientes son \hat{c}_l y c_l), de tal forma que aparecerán las combinaciones: $\hat{b}_j b_j^*$, $\hat{c}_j c_j^*$, $b_j b_j^* = b_j^2$ y $c_j c_j^* = c_j^2$. De esta forma la energía del film es:

$$W_m = \frac{A}{4} \sum_j \left[(Kj + k) \left(i\tau_1 (\hat{b}_j b_j^* + \hat{c}_j c_j^*) - \tau_2 (b_j^2 + c_j^2) \right) \right] \tag{3.71}$$

Capítulo 4

Resultados Numéricos

Los resultados numéricos que se presentan se realizaron considerando un film delgado cuyas superficies superior e inferior están moduladas geoméricamente mediante una sinusoidal, es decir, $y(x) = D/2 + \xi \sin(Kx)$, con $K = 2\pi/A$.

4.1. Relaciones de dispersión

Se calcularon los valores propios y modos normales asociados a las ecuaciones integrales (2.13), (2.14) para los potenciales ϕ_ω y ψ_ω^{in} . La ecuación matricial lineal asociada con la ecuación integral (2.13) para ϕ_ω es la ecuación (3.12), donde uno determina los coeficientes de las matrices utilizando la transformada rápida de Fourier (FFT). La teoría de perturbaciones coincide con los resultados numéricos cuando la perturbación de la superficie es pequeña. Para el caso plasmónico la ecuación matricial anterior se desacopla en dos ecuaciones independientes (3.19) para los modos simétricos y anti-simétricos.

La figura 4.1 muestra la relación de dispersión de un film ferromagnético con superficies perturbadas sinusoidalmente con amplitudes $\xi = 0,01$ y $0,05$ respectivamente. Se eligió como parámetro $D = 0,1$ (ancho del film), y la periodicidad de largo $A = 1$ como el largo de referencia (se puede notar que los modos magneto-estáticos dependen de $D/A, \xi/A$, es decir, existe una independencia de escala).

Para el caso del film perfecto, en el borde de la zona de Brillouin (es decir, $k = \pm\pi/A = K/2$) las bandas son degeneradas. Por ejemplo para $k = K/2$ la banda $j = 0$ es degenerada

con la banda $j = -1$, y en $k = -K/2$ las bandas $j = 0$ y $j = 1$ son degeneradas.

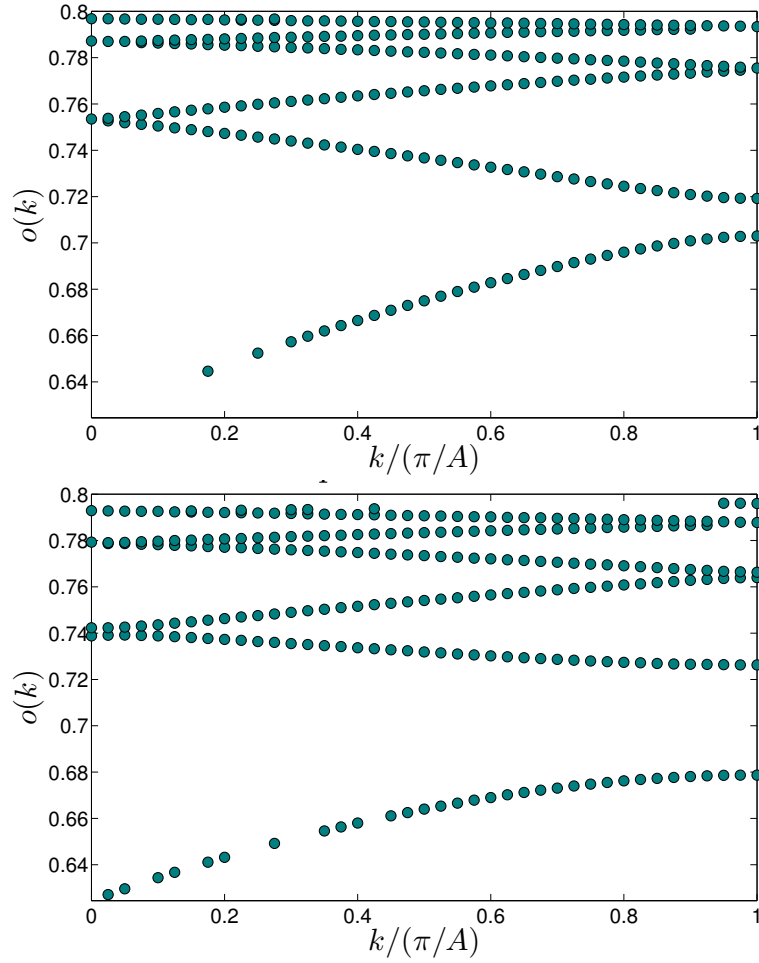


Figura 4.1: Frecuencias propias magneto-estáticas en un film cuya superficie está perturbada simétricamente de forma sinusoidal con amplitudes $\xi = 0,01$ (arriba), $\xi = 0,03$ (abajo) respectivamente, $D/A = 0,1$, $h = 0,3$

El resultado de la figura 4.1 muestra que cuando existe una perturbación pequeña, es decir $\xi = 0,01$, aparece una brecha entre las bandas de los modos $j = 0$ y $j = -1$. El valor analítico encontrado para la brecha en $k = \pi/A$ en la ecuación (3.39) coincide con los resultados numéricos graficados. A medida que la perturbación crece hasta $\xi = 0,03$ los valores propios de modos más altos comienzan a separarse en el borde de la zona de Brillouin, generando la aparición de nuevas brechas entre los modos $j = 1$ y $j = -2$. Finalmente cuando la amplitud es $\xi = 0,04$ se puede observar la existencia de muchas brechas entre las bandas,

las cuales se vuelven mas densas y delgadas a medida que uno se aproxima a la frecuencia límite: $\sqrt{h(h+1)}$. La separación entre las bandas crece a medida que se incrementa el tamaño de las modulaciones geométricas de las superficies.

Este mismo comportamiento se puede observar en el caso de los modos plasmónicos, donde los modos simétricos están en el rango $\epsilon < -1$ y los modos anti-simétricos en el rango $-1 < \epsilon < 0$. En ambos casos la separación entre las bandas crece a medida que aumenta ξ , pero estas brechas son más delgadas a medida que uno se acerca a $\epsilon = -1$ ya que este es un punto de acumulación para las bandas. Esto puede observarse en las figuras 4.2 y 4.3

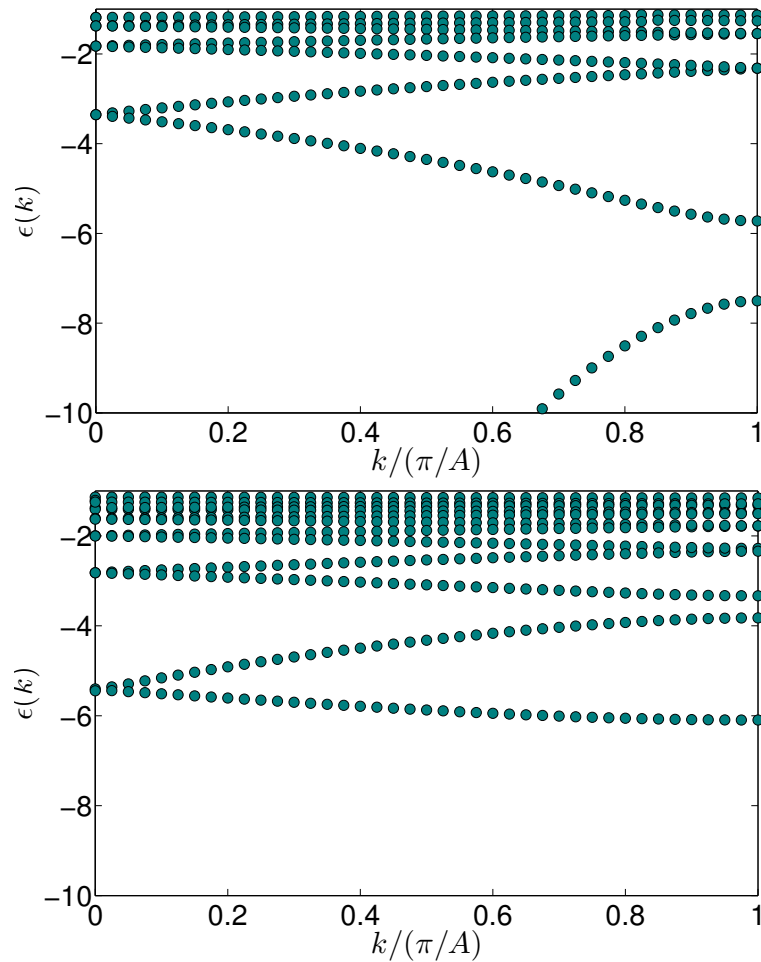


Figura 4.2: Valor propio $\epsilon(k)$ de los modos electro-estáticos simétricos en un film dieléctrico cuya superficie está perturbada simétricamente de forma sinusoidal, con amplitudes $\xi = 0,01$ (arriba) y $\xi = 0,04$ (abajo) respectivamente, $D/A = 0,1$

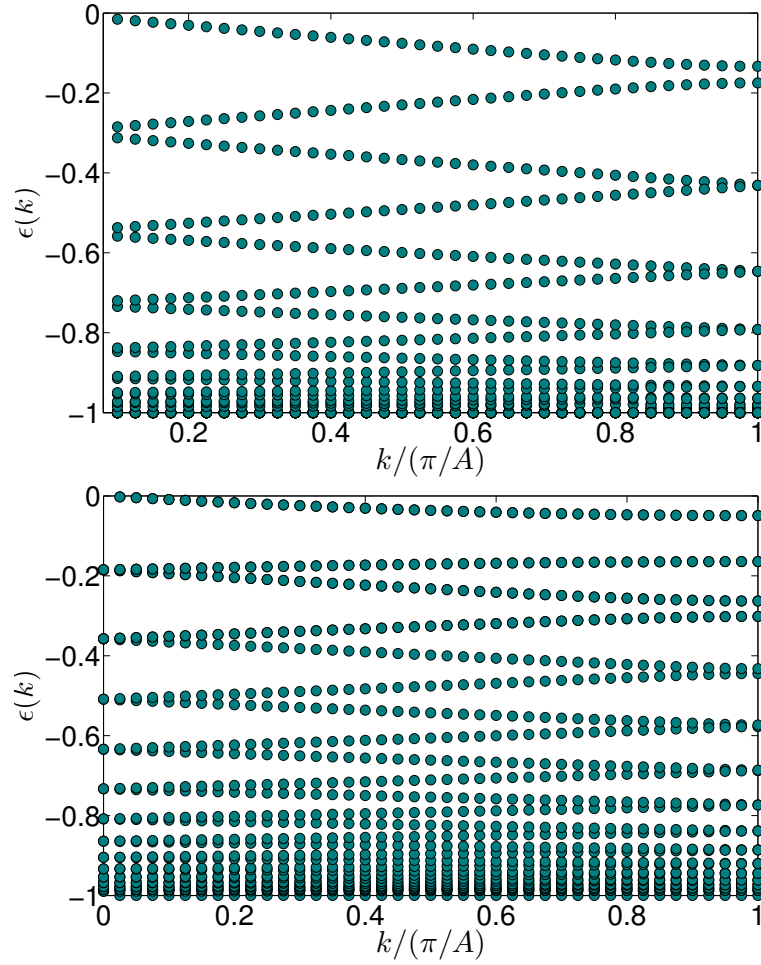


Figura 4.3: Valor propio $\epsilon(k)$ de los modos electro-estáticos anti-simétricos en un film dieléctrico cuya superficie está perturbada simétricamente de forma sinusoidal, con amplitudes $\xi = 0,01$ (arriba) y $\xi = 0,04$ (abajo) respectivamente, $D/A = 0,1$

Para conocer explícitamente la relación de dispersión $\omega(k)$ en el caso plasmónico es necesario conocer $\epsilon(\omega)$ para un material dieléctrico específico.

4.2. Potencial Magneto-estático

El potencial magneto-estático $\phi(\vec{x}, t)$ en el exterior e interior del film ferromagnético puede ser obtenido mediante las ecuaciones (2.18), (2.19) respectivamente: estos requieren la integración del potencial en el borde de la muestra, el cual es solución de las ecuaciones integrales (2.13,2.14). Para entender la evolución temporal de los modos se graficaron las

curvas de nivel del potencial magnético a diferentes tiempos t_1, t_2 , y se utilizó $k = K/2$ (es decir en el borde de la zona de Brillouin, donde el acoplamiento entre las bandas originalmente degeneradas es más fuerte y genera un comportamiento más interesante).

En la configuración utilizada para el vector de onda $\vec{k} = k\hat{x}$ en el caso del film perfecto existen dos tipos de modos superficiales: ondas que viajan hacia la izquierda localizadas en la superficie superior (ϕ_{lh}) y ondas que viajan hacia la derecha (ϕ_{rh}) localizadas en la superficie inferior (*field displacement non reciprocity*). Por ejemplo las bandas $j = -1$ y $j = 0$ corresponden a modos del tipo *lh* y *rh*, y en el borde de la zona de Brillouin estos dos modos se degeneran. La perturbación geométrica genera que estos modos se acoplen fuertemente creando un modo mezclado, es decir, con una parte viajando hacia la izquierda en la superficie inferior y hacia la derecha en la superficie superior.

En las figuras 4.4 y 4.5 se presentan las curvas de nivel de los modos superficiales del film perfecto viajando a la izquierda y derecha respectivamente (en $\kappa = \mp\pi/A$ o equivalentemente $k = \pi/A = K/2$ para las bandas $j = -1$ y $j = 0$):

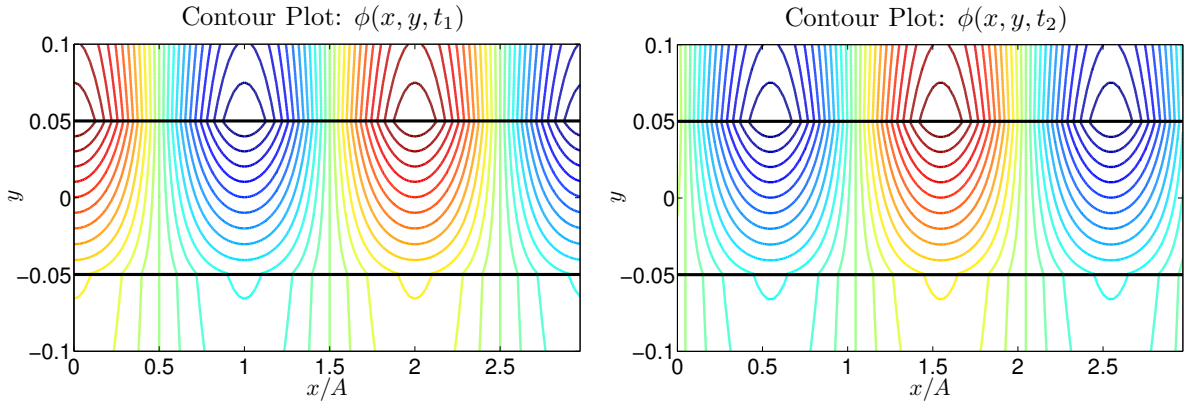


Figura 4.4: Potencial magneto-estático ϕ_{lh} localizado en la superficie superior moviéndose hacia la izquierda, $D/A = 0,1$, $h = 0,3$

Las figuras 4.6 y 4.7 muestran la evolución temporal desde t_1 a t_2 de los modos magneto-estáticos del film con una pequeña perturbación en su superficie con amplitud $\xi = 0,01$. La figura 4.6 corresponde al borde de la zona de Brillouin ($k = K/2$) y la figura 4.7 está en la mitad de la parte positiva de la zona de Brillouin, es decir, $k = K/4$.

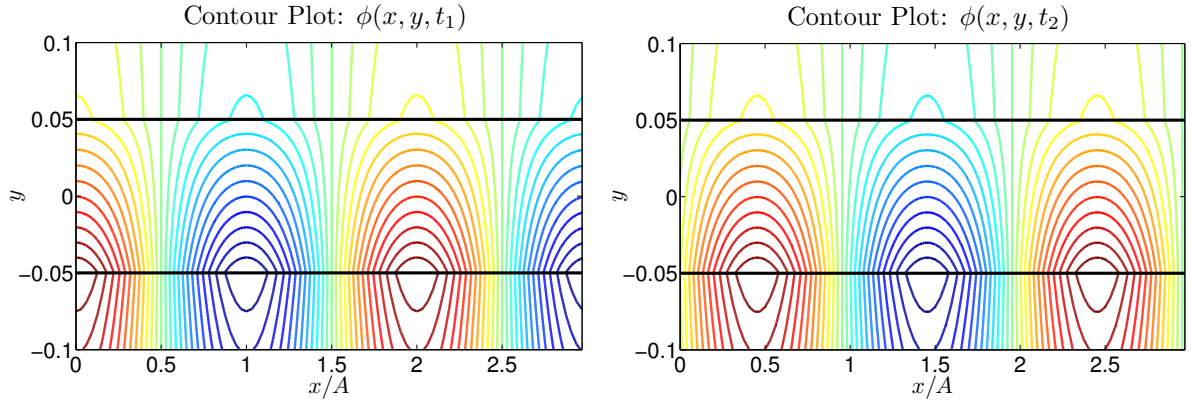


Figura 4.5: Potencial magneto-estático ϕ_{rh} localizado en la superficie inferior moviéndose hacia la derecha, $D/A = 0,1$, $h = 0,3$

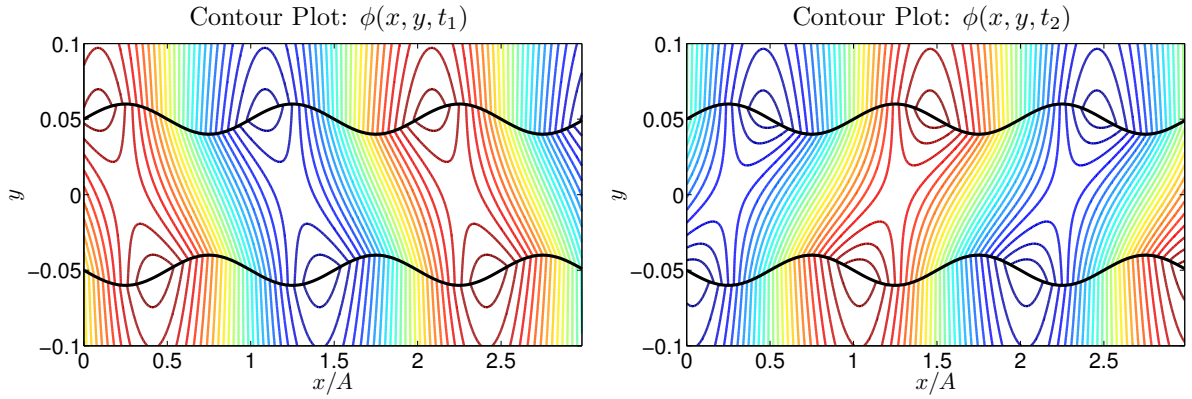


Figura 4.6: Potencial magneto-estático de la segunda banda en el borde de la zona de Brillouin $k = K/2$ para una perturbación sinusoidal con amplitud $\xi = 0,01$, $D/A = 0,1$, $h = 0,3$

En la figura 4.6 la deformación periódica del film causa el acoplamiento entre las dos bandas $j = 0, -1$ del film perfecto en $k = K/2$, se puede observar en la superficie superior el modo de la segunda banda viajando hacia la izquierda y en la superficie inferior viajando a la derecha, esto es consistente con un fuerte acoplamiento entre las ondas viajeras hacia la izquierda y derecha, $j = -1$ y $j = 0$, del film perfecto. A medida que uno se aleja del borde de la zona de Brillouin los modos del film perfecto se desacoplan y los modos poseen las mismas propiedades que en el film perfecto, es decir, soluciones localizadas en la superficie superior/inferior viajando hacia la derecha/izquierda: este comportamiento se puede observar

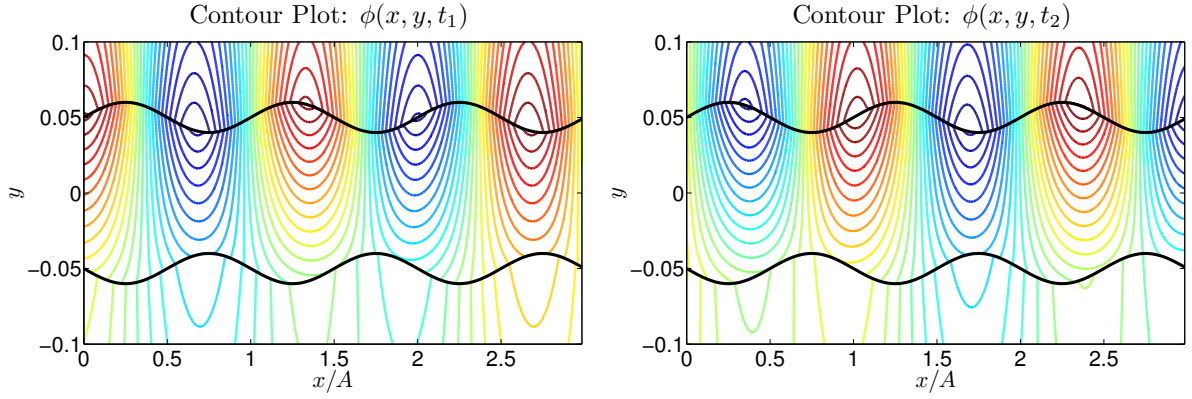


Figura 4.7: Potencial magneto-estático de la segunda banda en $k = K/4$ (en el centro de la parte positiva de la zona de Brillouin) para una perturbación sinusoidal con amplitud $\xi = 0,01$, $D/A = 0,1$, $h = 0,3$

en la figura 4.7 en $k = K/4$, es decir, en la mitad de la parte positiva de la zona de Brillouin se observa para la segunda banda una onda que viaja hacia la izquierda.

4.3. Respuesta de un film magneto-estático perturbado:

Para el caso de un film ferromagnético con sus superficies perturbadas, como se explicó en la sección 3.9 se puede estudiar la respuesta a un campo magnético aplicado en la aproximación magneto-estática. En nuestro caso, el campo magnético forzante fue elegido con una polarización a lo largo de la dirección perpendicular al plano del film, y se propaga hacia la derecha (con frecuencia ω y vector de onda k). Esto corresponde a un forzamiento anti-simétrico (si se considera la respuesta de un film dieléctrico, con $\mu_2 = 0$, solo se excitarían modos anti-simétricos). La superficie del film se considera perturbada sinusoidalmente (y también simétricamente) como se discutió anteriormente, es decir, $y(x) = D/2 + \xi \sin(Kx)$ con $K \equiv 2\pi/A$. Para suavizar la respuesta en la frecuencia de resonancia se incluyó el amortiguamiento de Gilbert dado por $\alpha = 0,01$ (en la práctica, en los cálculos basta reemplazar la frecuencia ω por $\omega - i\alpha$, es decir, adquiere una parte imaginaria).

Para analizar la respuesta del film se pueden considerar diferentes observables, la energía

absorbida, la amplitud del campo promedio, etc. En nuestro caso se estudió, para un vector de onda k y frecuencia variable, los coeficientes del potencial asociado a la primera y segunda banda del film perfecto en las superficies superiores e inferiores, es decir, c_0, c_{-1} (ecuaciones (3.3), (3.5)) y b_0, b_{-1} (ecuaciones (3.4), (3.5)) respectivamente. Comportamientos interesantes aparecen cuando el vector de onda se acerca al borde de la zona de Brillouin, $k \rightarrow K/2$. En la figura 4.8 se grafican los valores absolutos de c_0, c_{-1} y b_0, b_{-1} en el plano (ω, k) , donde el color rojo indica un valor más alto.

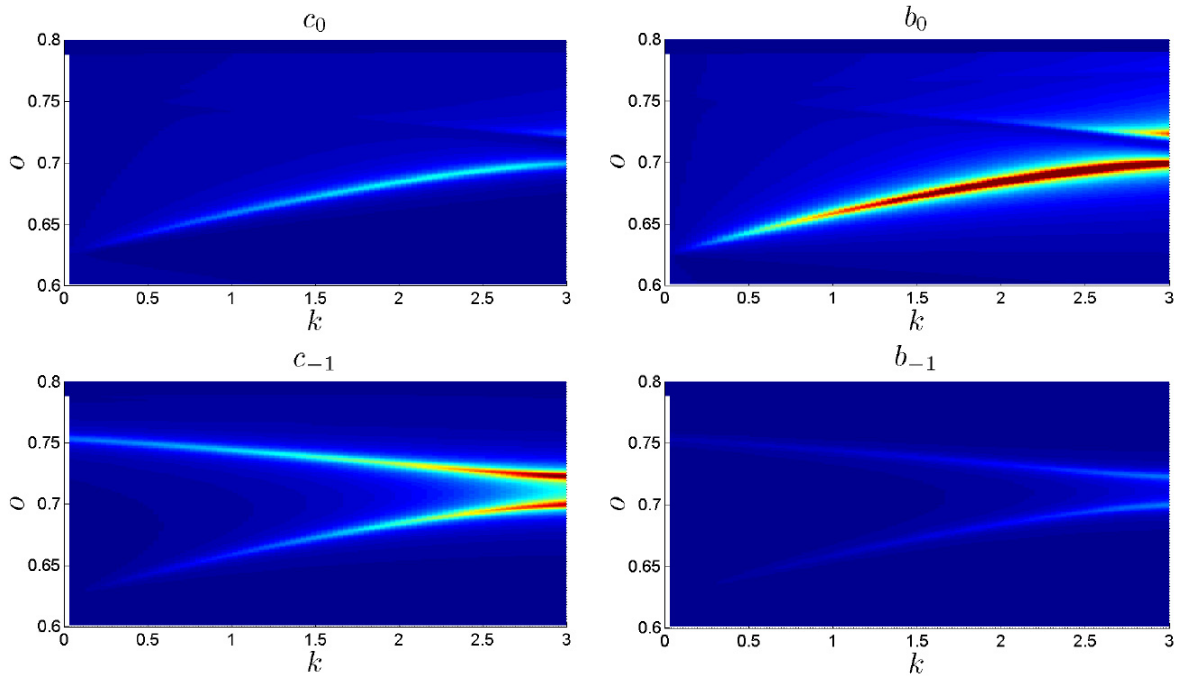


Figura 4.8: Amplitudes el potencial magneto-estático en la superficie superior (c_0 y c_{-1}) e inferior (b_0 y b_{-1}) del film, como respuesta al campo magnético aplicado de frecuencia ω y vector de onda k , $D/A = 0,1$, $h = 0,3$.

En el caso del film perfecto este tipo de forzamiento, es decir, un campo magnético propagándose hacia la derecha, debiese excitar los modos de la primera banda, que se propagan hacia la derecha y localizado en la superficie inferior: esto explica que b_0 es grande para todo (ω, k) 's asociado con la relación de dispersión de la primera banda y c_0 menor (superficie superior). Entonces, el acoplamiento de las primeras dos bandas mediante la perturbacion geométrica, que es fuerte cerca del borde de la zona de Brillouin, explica el alto valor de c_{-1}

en las primeras dos bandas cerca del borde de la zona. Cuando el acoplamiento es importante b_{-1} no alcanza valores altos ya que $j = -1$ corresponde a una onda que viaja hacia la izquierda localizada en la superficie superior. Además, cerca del borde b_0 adquiere un valor alto en la segunda banda y esto se explica ya que, en ese punto, el modo normal se acopla con amplitudes similares viajando hacia la izquierda y derecha.

En la figura 4.9 se observa la "sección transversal" de las figuras anteriores, donde se puede identificar las frecuencias de resonancia de los modos normales para los valores elegidos de k y los anchos de línea de la respuesta en frecuencia.

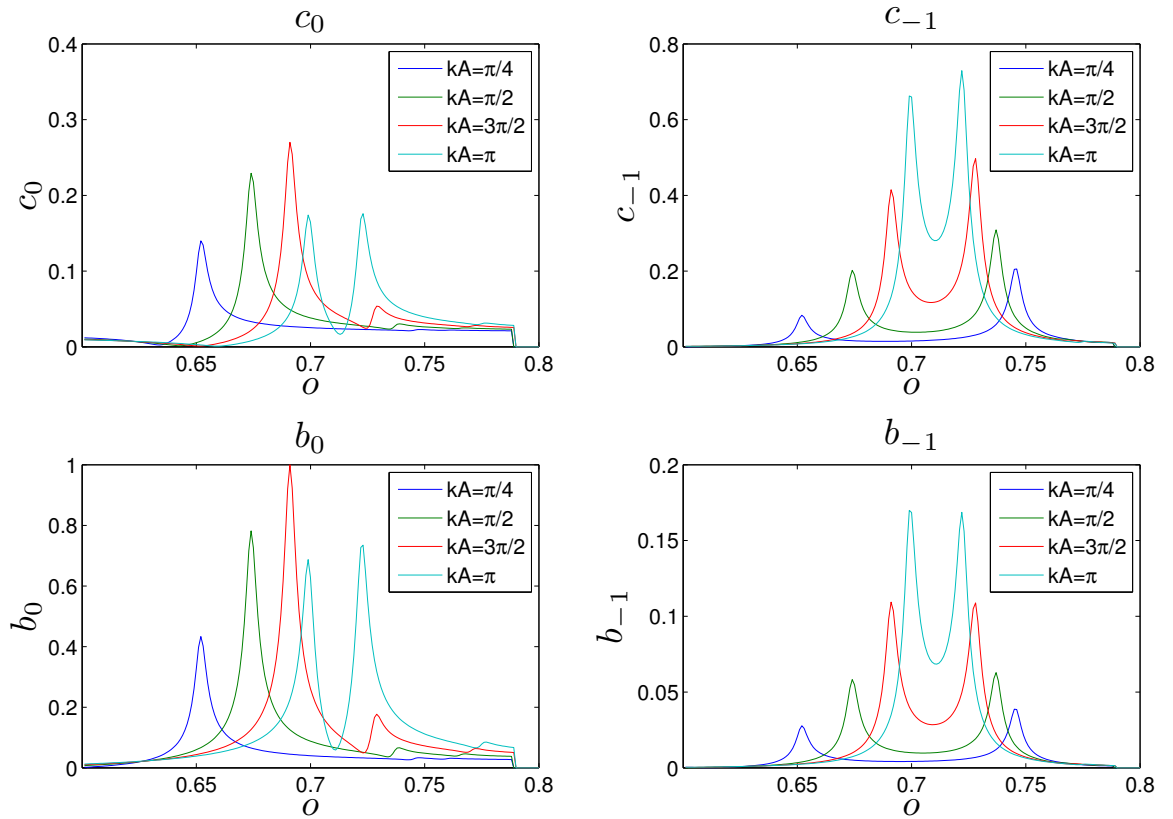


Figura 4.9: Amplitud de los coeficientes c_0 , c_{-1} , b_0 y b_{-1} del potencial magneto-estático en función de la frecuencia para ciertos valores del vector de onda k , $D/A = 0,1$, $h = 0,3$

Los comentarios previos se pueden observar claramente en estas figuras. Los anchos de línea se mantienen muy similares al variar el valor de k , algo que era de esperarse ya que se excita el modo normal aun cuando las amplitudes pueden cambiar, y cuando uno se acerca

al borde de la zona ambas bandas se acercan (son degeneradas en el caso del film perfecto), algo que puede ser interpretado como solo un modo con un ancho de línea mucho mayor.

4.4. Magnetización

Con los cálculos obtenidos para los potenciales magnéticos se puede obtener la magnetización en el interior del film mediante la ecuación:

$$4\pi\vec{m}_\omega = (\mu_1(o) - 1)\vec{h}_D^\omega - i\mu_2(o)\hat{z} \times \vec{h}_D^\omega \quad (4.1)$$

La evolución temporal de la magnetización permite ver una onda de spin que se propaga en el interior del film. En el caso del film perfecto existen dos modos con la misma frecuencia, en los cuales la dirección de propagación de la onda de spin cambia pero el sentido de la precesión se mantiene. En las figuras 4.10 y 4.11 se observan imágenes en distintos instantes de la magnetización en el plano $x - y$ para distintos instantes de tiempo: $t_1, t_2 \dots t_8$.

Al igual como sucede con el potencial magnético, la magnetización (la magnitud de la magnetización) se localiza en distintas superficies según el modo normal en cual se encuentre oscilando, es decir, se localiza en la superficie cuando se propaga hacia la derecha y se localiza en la superficie superior al propagarse hacia la izquierda. Esto se puede apreciar en las figuras 4.12 y 4.13, en las cuales se grafica la densidad de magnetización en el film en distintos instantes ($t_1 < t_2$), el color azul corresponde a cero y el color rojo oscuro a 1.

En las figuras 4.14 y 4.15 se puede observar la magnetización cuando el film está modulado sinusoidalmente. Se puede apreciar un comportamiento similar al de una cadena de pendulos, en el cual la magnetización va alternando su dirección de una superficie del film a la otra. En ambos modos la magnetización no está uniformemente distribuida en el interior del film y se mantiene el sentido de precesión. En las figuras 4.17 y 4.16 se puede grafica la magnitud de la magnetización, donde el color azul corresponde a cero y el color rojo oscuro a 1. Se puede notar que en ambos modos aparece una onda estacionaria con nodos claramente definidos, en el caso del modo de mayor frecuencia $\omega = 0,7198$ se aprecia que la magnetización esta localizada en las zonas mas anchas del film y decae rapidamente en las zonas angostas.

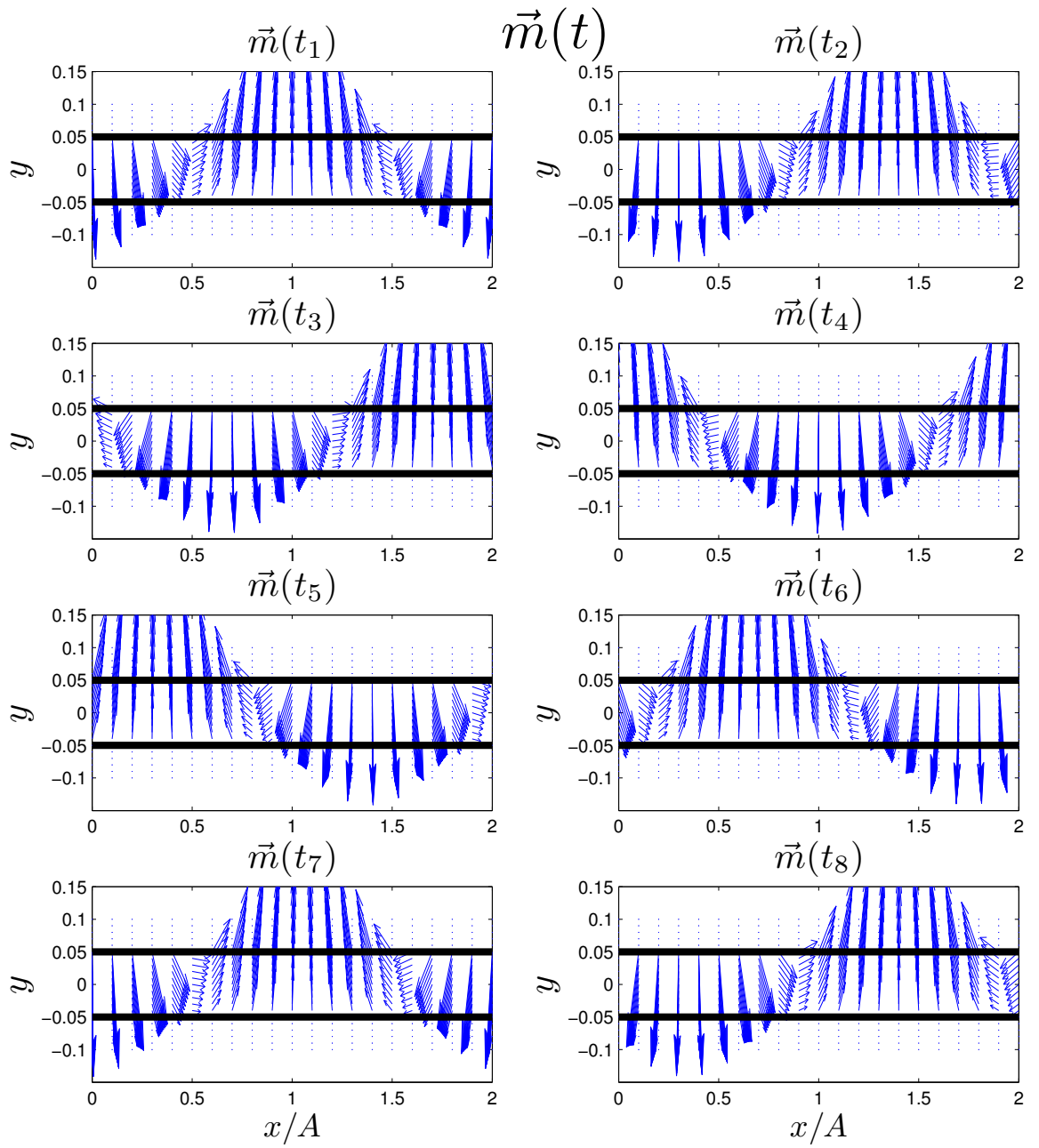


Figura 4.10: Primer modo de oscilación de la magnetización en el plano $x - y$ en la frecuencia de resonancia en el caso del film perfecto para distintos tiempos t_1, t_2, \dots, t_8 , con $k = \pi/A$, $D/A = 0,1$, $h = 0,3$

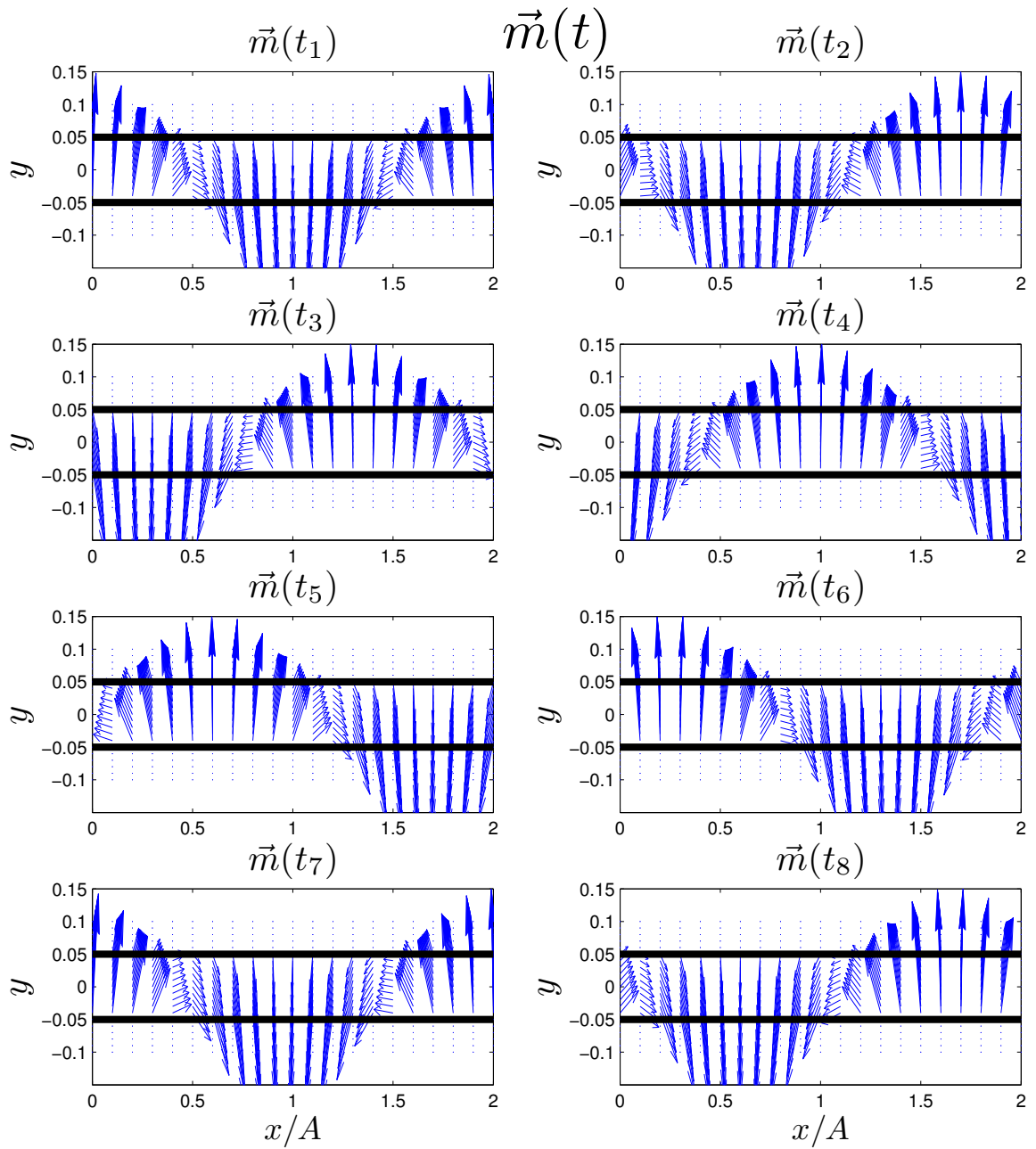


Figura 4.11: Segundo modo de oscilación de la magnetización en el plano $x-y$ en la frecuencia de resonancia en el caso del film perfecto para distintos tiempos t_1, t_2, \dots, t_8 , con $k = \pi/A$, $D/A = 0,1$, $h = 0,3$

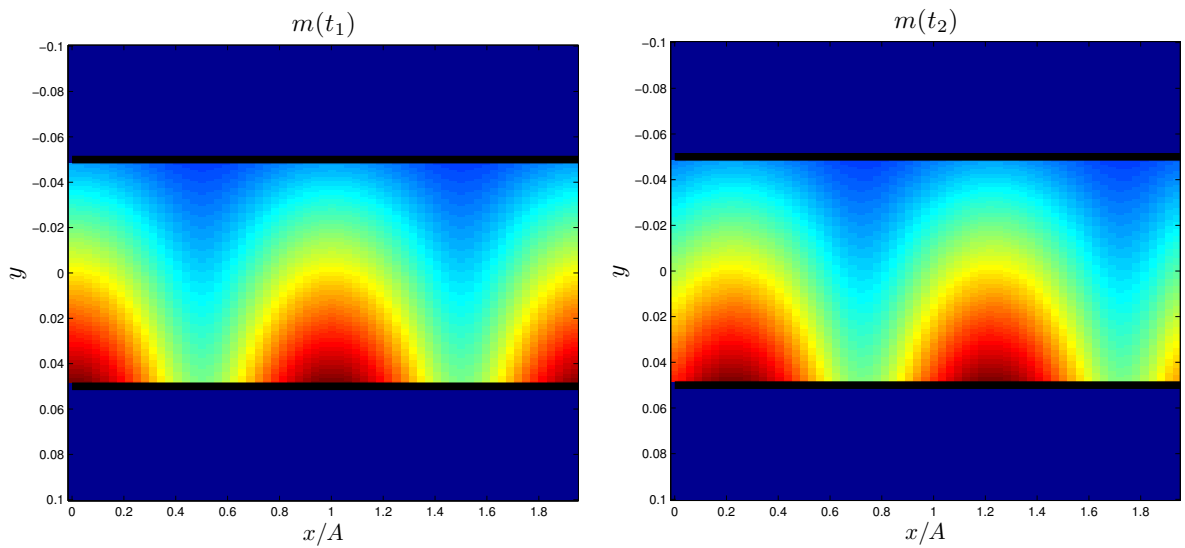


Figura 4.12: Magnetizacion $m(t)$ del modo en el borde de la zona de Brillouin $k = K/2$ para el film perfecto. La magnetizacion se localiza en la superficie inferior moviéndose hacia la derecha, $D/A = 0,1$, $h = 0,3$. El color azul corresponde a cero y el color rojo oscuro a 1

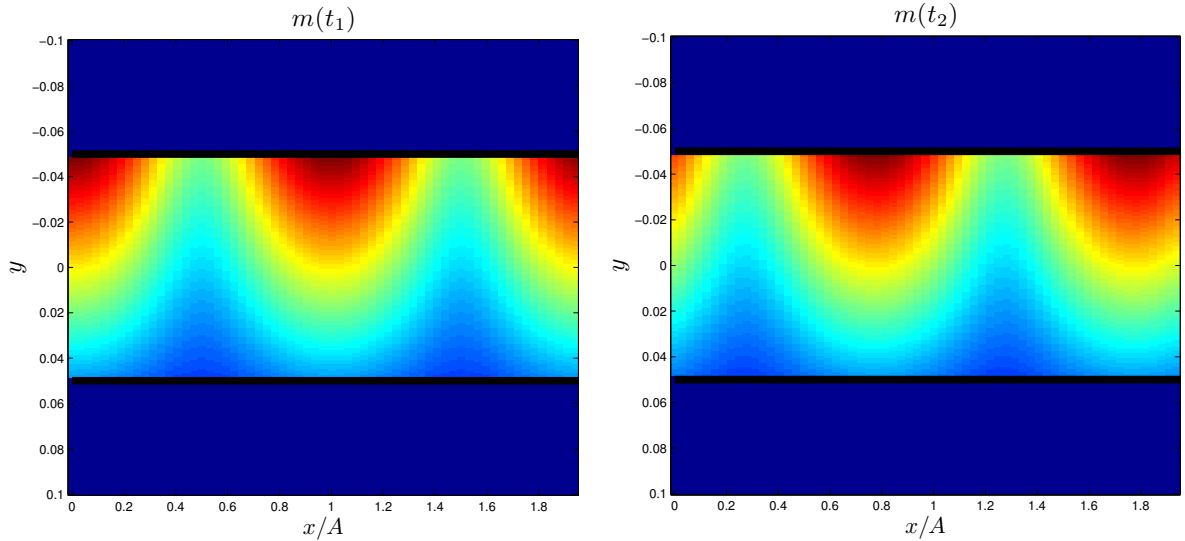


Figura 4.13: Magnetizacion $m(t)$ del modo en el borde de la zona de Brillouin $k = K/2$ para el film perfecto. La magnetizacion se localiza en la superficie superior moviéndose hacia la izquierda, $D/A = 0,1$, $h = 0,3$. El color azul corresponde a cero y el color rojo oscuro a 1

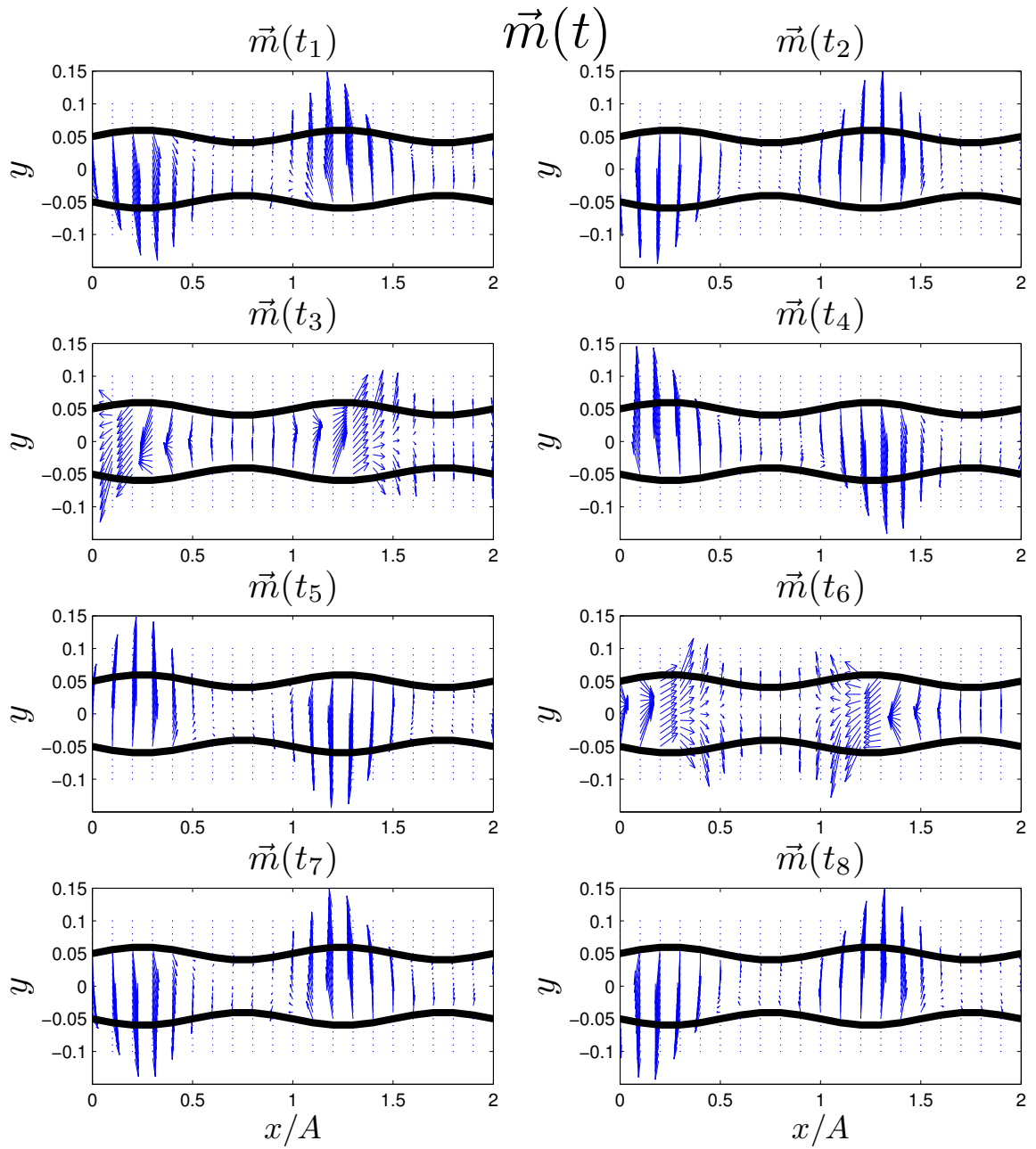


Figura 4.14: Magnetización en el plano $x - y$ en el caso $\xi = 0,01$ para distintos tiempos $t_1, t_2 \dots t_8$, en la frecuencia de resonancia $\omega = 0,7198$, con $k = \pi/A$, $D/A = 0,1$, $h = 0,3$

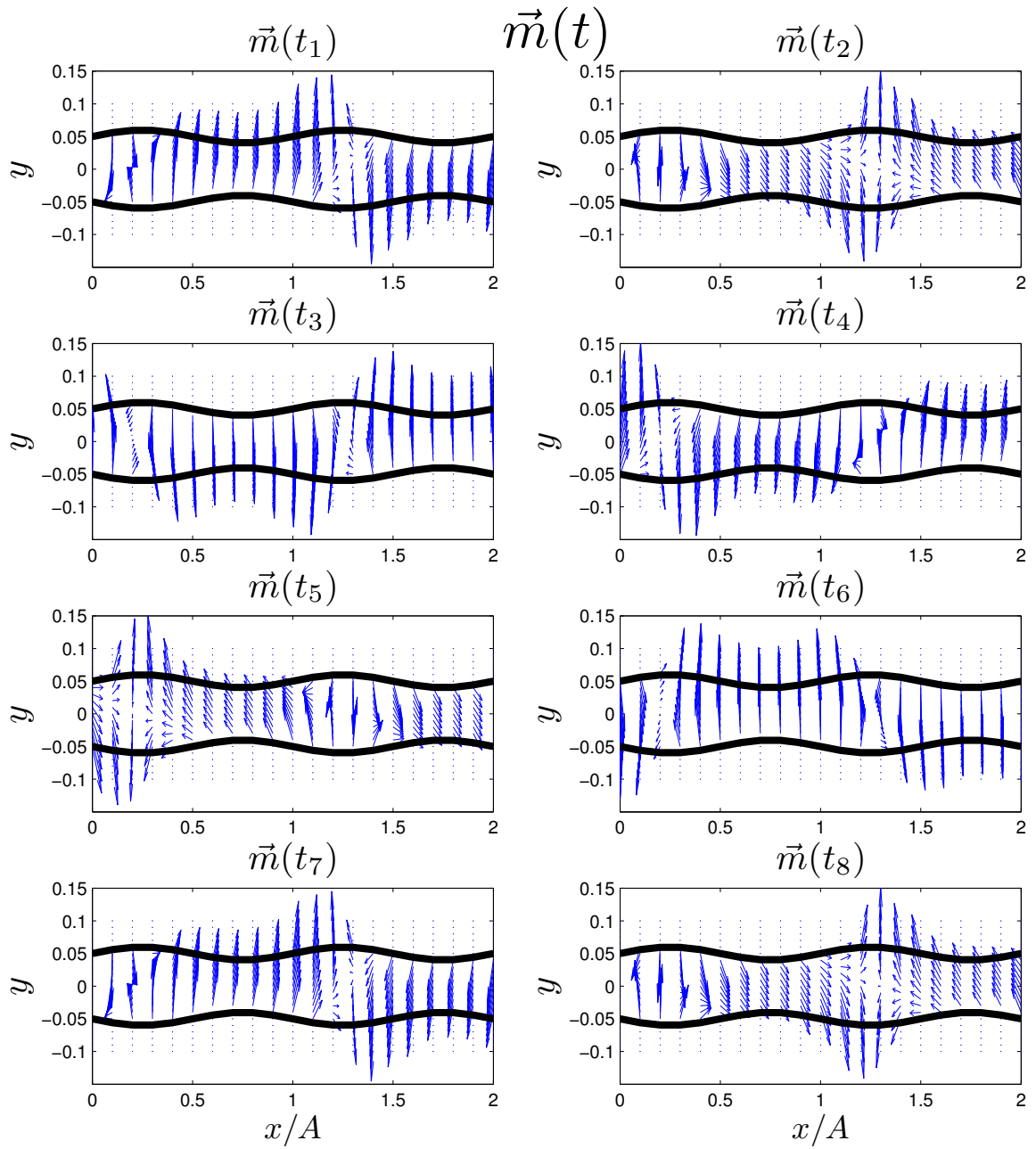


Figura 4.15: Magnetización en el plano $x - y$ en el caso $\xi = 0,01$ para distintos tiempos $t_1, t_2 \dots t_8$, en la frecuencia de resonancia $\omega = 0,701$, con $k = \pi/A$, $D/A = 0,1$, $h = 0,3$

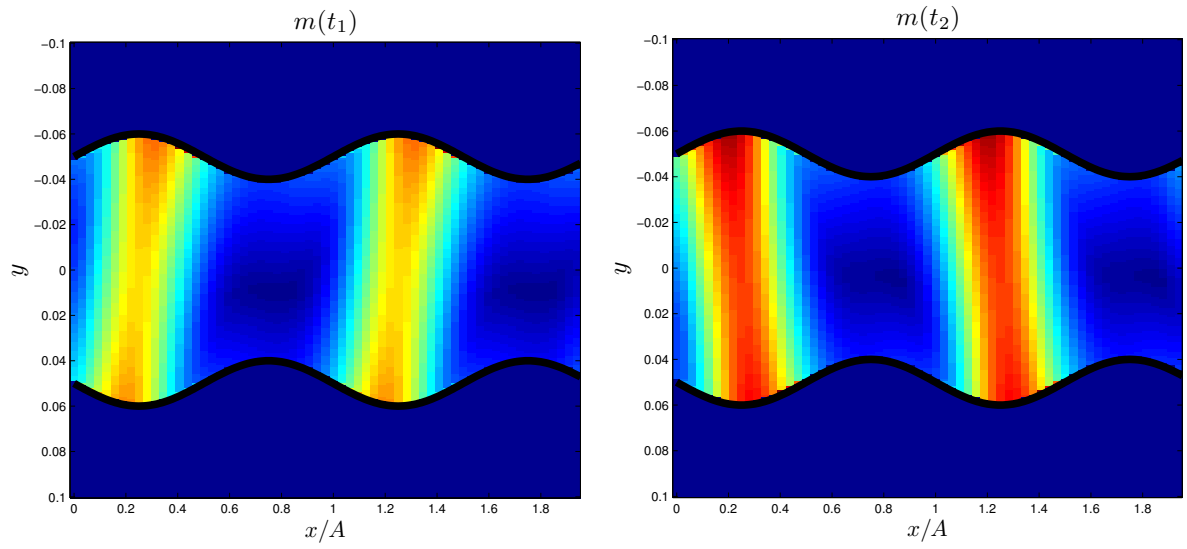


Figura 4.16: Magnetización $m(t)$ del segundo modo en el borde de la zona de Brillouin $k = K/2$ $o = 0,7198$ para una perturbación sinusoidal con amplitud $\xi = 0,01$, $D/A = 0,1$, $h = 0,3$

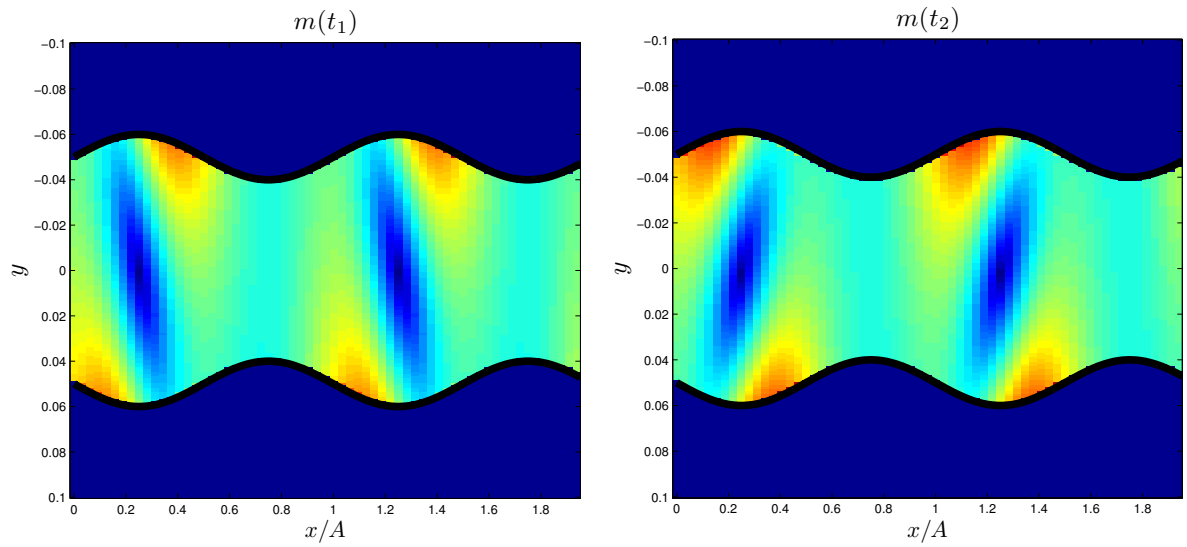


Figura 4.17: Magnetización $m(t)$ del primer modo en el borde de la zona de Brillouin $k = K/2$ $o = 0,701$ para una perturbación sinusoidal con amplitud $\xi = 0,01$, $D/A = 0,1$, $h = 0,3$

Capítulo 5

Discusión y Conclusiones

En la presente tesis se presentó un formalismo para poder estudiar en un mismo esquema los modos plasmónicos y magnónicos de un film infinito cuyas superficies están moduladas periódicamente. La metodología utilizada es válida en el límite estático, es decir, cuando el tamaño característico del film es pequeño comparado con la longitud de la onda incidente. La ventaja del método desarrollado, que se basa en la resolución de ecuaciones integrales de valores propios, es que es utilizable para cualquier geometría arbitraria (con ciertas restricciones, básicamente un problema en 2D) y por lo tanto permite obtener resultados para perturbaciones geométricas de grandes amplitudes.

Los resultados obtenidos muestran que al cambiar periódicamente la geometría de las superficies de una película dieléctrica o ferromagnética, aparecen modos de Bloch que se propagan perpendiculares a la perturbación. La relación de dispersión de estos modos se modifica de tal forma que en un esquema de la zona reducida de Brillouin se observa la aparición de bandas prohibidas asociadas a la perturbación geométrica. El tamaño de estas bandas disminuye a medida que aumenta la frecuencia del modo de interés y crece a medida que crece el tamaño de la modulación. Más aún, para modulaciones pequeñas, el tamaño de las bandas se puede obtener analíticamente y concuerda con los resultados numéricos.

Utilizando las ecuaciones integrales se obtuvieron los modos normales del sistema. En el

borde de la zona de Brillouin, para el caso del film perfecto, existen dos modos superficiales degenerados que se propagan en direcciones opuestas y que se concentran en superficies opuestas. La modulación geométrica genera que las bandas inferiores se acoplen fuertemente y por lo tanto los modos normales son una mezcla de ondas viajando en ambas direcciones. Al alejarse del borde de la zona de Brillouin este acoplamiento disminuye y se recupera el comportamiento que se obtenía para el film perfecto. Estas propiedades se verificaron realizando el estudio de la respuesta del sistema a una onda magnética viajando hacia la derecha, además se observó que en el borde de la zona de Brillouin las bandas inferiores vecinas son tan cercanas que pueden ser interpretadas experimentalmente como un solo modo con ancho de línea más amplio al que se observa para cada banda al alejarse del borde.

La modulación geométrica, en el borde de la zona de Brillouin, genera la aparición de modos estacionarios, y la aparición de un modo en el cual la magnetización se localiza oscilando en las zonas anchas del film y luego decae rápidamente en las zonas angostas.

Bibliografía

- [1] For review articles, see the volume in Kneipp and M. Moskovits, *Surface enhanced Raman scattering*, Topics in applied Physics, Vol. 103 (Springer Verlag, Heidelberg, 2006).
- [2] J. Steidner and B. Pettinger, Phys. Rev. Lett. **100**, 236101 (2008).
- [3] Claudio Jarufe and R.E. Arias, Phys. Rev. B **85**, 205411 (2012).
- [4] I.D. Mayergoyz, D.R. Fredkin and Z.Zhang, Phys. Rev. B **72**, 155412 (2005).
- [5] R.W. Rendell, D.J. Scalapino and B. Muhlschlegel, Phys. Rev. Lett. **41**, 1746 (1978).
- [6] D.L. Mills, Phys. Rev. B **65**, 125419 (2002)
- [7] Shiwei Wu and D.L. Mills, Phys. Rev. B **65**, 205420 (2002).
- [8] P.K. Aravind, A. Nitzan and H. Metiu, Surf. Sci. **110**, 189 (1981).
- [9] P. Chu and D.L. Mills, Phys. Rev. Lett. **99**, 127401 (2007).
- [10] P. Chu and D.L. Mills, Phys. Rev. B **77**, 045416 (2008).
- [11] R. Arias and D.L. Mills, Phys. Rev. B **67**, 094423 (2003).
- [12] R. Arias and D.L. Mills, Phys. Rev. B **68**, 245420 (2003).
- [13] Rodrigo Arias and D.L. Mills, Phys. Rev. B **70**, 104425 (2004).
- [14] D.R. Fredkin and I.D. Mayergoyz, Phys. Rev. Lett. **91**, 253902 (2003).
- [15] A. Jara, R.E. Arias, D.L. Mills, Phys. Rev. B **81**, 085422 (2010).

- [16] Rodrigo Arias and D.L. Mills, Phys. Rev. B **70**, 094414 (2004).
- [17] Rodrigo Arias and D.L. Mills, Phys. Rev. B **72**, 104418 (2005).
- [18] R.W. Damon, J.R. Eshbach, J. Phys. Chem. Solids **19**, 308 (1961).
- [19] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of integrals, series and products*, Seventh Edition, Academic Press, 2007.
- [20] Daniel D. Stancil, Anil Prabhakar, *Spin Waves, Theory and Applications*, Springer

Capítulo 6

Apendice

6.1. Ecuaciones integrales para films con superficies perturbadas periódicamente:

La ecuación integral (3.1) puede ser re-escrita de una forma más simple para el caso de una perturbación geométrica que posee período A . En este caso, la integración sobre la extensión infinita de la variable x (perpendicular a la perturbación geométrica) puede ser transformada apropiadamente mediante suma de integrales sobre el período A .

En la ecuación integral (3.1) para el potencial magneto-estático como consecuencia de los modos de Bloch (con $\eta = x + iy$ en la superficie superior del film, $\eta = x - iy$ en la inferior y $z'_u = x' + iy'$), aparecen operadores de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{d\eta}{\eta - z'_u} e^{ikx} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \frac{1 - iy}{x - x' - i(y + y')} - \frac{1 + iy}{x - x' + i(y - y')} \right\} e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-A/2}^{A/2} dx \left\{ \frac{1 - iy}{x - x' + jA - i(y + y')} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 + iy}{x - x' + jA + i(y - y')} \right\} e^{ikx} e^{ikjA} \\ &= e^{ikx'} \int_{-A/2}^{A/2} \frac{dx}{A} (F_{2-}^k(x, x') - F_{1+}^k(x, x')) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Análogamente

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{d\eta}{\eta - z'_d} e^{ikx} = e^{ikx'} \int_{-A/2}^{A/2} \frac{dx}{A} (F_{1-}^k(x, x') - F_{2+}^k(x, x')) \quad (6.2)$$

con

$$F_{m\pm}^k(x, x') = \frac{1}{2\pi i} (1 \pm iy) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha(j-\beta)}}{j - \beta + i\gamma_{m\pm}} \quad (6.3)$$

Los valores de m son 1, 2, $\alpha \equiv kA$, $\beta = -(x - x')/A$ y $\gamma_{m\pm} = \pm(y + (-1)^m y')/A$, por lo tanto uno solo necesita sumas del tipo:

$$\begin{aligned} s(\alpha, \beta, \gamma) &\equiv \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{ij\alpha} / [(j - \beta)^2 + \gamma^2] \\ t(\alpha, \beta, \gamma) &\equiv \sum_{j=-\infty}^{+\infty} j e^{ij\alpha} / [(j - \beta)^2 + \gamma^2] = -i\partial s / \partial \alpha \end{aligned} \quad (6.4)$$

De acuerdo a la referencia [19], y para $0 \leq \alpha \leq 2\pi$:

$$s(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\pi}{\gamma} \left[\frac{e^{i\beta(\alpha-2\pi)} \sinh(\gamma\alpha) + e^{i\beta\alpha} \sinh(\gamma(2\pi - \alpha))}{\cosh(2\pi\gamma) - \cos(2\pi\beta)} \right] \quad (6.5)$$

luego de manipulaciones algebraicas se obtiene:

$$s(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\pi e^{i\beta(\alpha-\pi)}}{2\gamma} \left[\frac{e^{\gamma(\alpha-\pi)}}{\sinh(\pi(\gamma + i\beta))} + \frac{e^{-\gamma(\alpha-\pi)}}{\sinh(\pi(\gamma - i\beta))} \right] \quad (6.6)$$

Tambi3n,

$$t(\alpha, \beta, \gamma) = -i \frac{\partial s}{\partial \alpha} = \beta s + g \quad (6.7)$$

$$g(\alpha, \beta, \gamma) = -i \frac{\pi e^{i\beta(\alpha-\pi)}}{2} \left[\frac{e^{\gamma(\alpha-\pi)}}{\sinh(\pi(\gamma + i\beta))} - \frac{e^{-\gamma(\alpha-\pi)}}{\sinh(\pi(\gamma - i\beta))} \right] \quad (6.8)$$

De las ecuaciones (6.3,6.4,6.6,6.7,6.8) se puede observar que:

$$\begin{aligned} F_{m\pm}^k(x, x') &= \frac{1}{2\pi i} (1 \pm iy) e^{-i\beta\alpha} [t(\alpha, \beta, \gamma_{m\pm}) - (\beta + i\gamma_{m\pm})s(\alpha, \beta, \gamma_{m\pm})] \\ &= -\frac{1}{2} (1 \pm iy) \frac{e^{\gamma_{m\pm}\alpha} e^{-\pi(\gamma_{m\pm} + i\beta)}}{\sinh(\pi(\gamma_{m\pm} + i\beta))} = (1 \pm iy) \frac{e^{\gamma_{m\pm}\alpha}}{1 - e^{-iK(x-x')} e^{2\pi\gamma_{m\pm}}} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Además,

$$F_{m\pm}^{-k}(x, x') = \frac{1}{2\pi i} (1 + \pm iy) e^{i\beta\alpha} [t(-\alpha, \beta, \gamma_{m\pm}) - (\beta + i\gamma_{m\pm})s(-\alpha, \beta, \gamma_{m\pm})] \quad (6.10)$$

Debido a que $s(-\alpha, \beta, \gamma_{m\pm}) = s(\alpha, -\beta, \gamma_{m\pm})$, $t(-\alpha, \beta, \gamma_{m\pm}) = -t(\alpha, -\beta, \gamma_{m\pm})$,

$$F_{m\pm}^{-k}(x, x') = -(1 \pm iy) \frac{e^{-\gamma_{m\pm}\alpha}}{1 - e^{iK(x-x')}e^{-2\pi\gamma_{m\pm}}} \quad (6.11)$$

De esta forma la ecuación integral (3.1) se puede escribir como combinaciones de las funciones $F_{m\pm}^{-k}(x, x')$.

6.2. Desde ecuaciones integrales a ecuaciones matriciales:

Primero se utilizan una versión apropiada de las ecuaciones integrales (3.6,3.7) para los modos magneto-estáticos que no requiere la consideración del valor principal de las integrales, es decir, se utilizará la ecuación (2.15):

$$\begin{aligned} 2f_{\omega}^k(x') &= \int_{-A/2}^{A/2} \frac{dx}{A} \{(\mu_1(o) - 1)[(F_{1-}^k(x, x') - F_{1+}^k(x, x'))f_{\omega}^k(x) - (F_{1-}^0(x, x') - F_{1+}^0(x, x'))f_{\omega}^k(x')] \\ &\quad - \mu_2(o)[(F_{1-}^k(x, x') + F_{1+}^k(x, x'))f_{\omega}^k(x) - (F_{1-}^0(x, x') + F_{1+}^0(x, x'))f_{\omega}^k(x')]\} \\ &\quad + \int_{-A/2}^{A/2} \frac{dx}{A} \{(\mu_1(o) - 1)[(F_{2-}^k(x, x') - F_{2+}^k(x, x'))g_{\omega}^k(x) - (F_{2-}^0(x, x') - F_{2+}^0(x, x'))f_{\omega}^k(x')] \\ &\quad + \mu_2(o)[(F_{2-}^k(x, x') + F_{2+}^k(x, x'))g_{\omega}^k(x) - (F_{2-}^0(x, x') + F_{2+}^0(x, x'))f_{\omega}^k(x')]\} \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} 2g_{\omega}^k(x') &= \int_{-A/2}^{A/2} \frac{dx}{A} \{(\mu_1(o) - 1)[(F_{2-}^k(x, x') - F_{2+}^k(x, x'))f_{\omega}^k(x) - (F_{2-}^0(x, x') - F_{2+}^0(x, x'))g_{\omega}^k(x')] \\ &\quad - \mu_2(o)[(F_{2-}^k(x, x') + F_{2+}^k(x, x'))f_{\omega}^k(x) - (F_{2-}^0(x, x') + F_{2+}^0(x, x'))g_{\omega}^k(x')]\} \\ &\quad + \int_{-A/2}^{A/2} \frac{dx}{A} \{(\mu_1(o) - 1)[(F_{1-}^k(x, x') - F_{1+}^k(x, x'))g_{\omega}^k(x) - (F_{1-}^0(x, x') - F_{1+}^0(x, x'))g_{\omega}^k(x')] \\ &\quad + \mu_2(o)[(F_{1-}^k(x, x') + F_{1+}^k(x, x'))g_{\omega}^k(x) - (F_{1-}^0(x, x') + F_{1+}^0(x, x'))g_{\omega}^k(x')]\} \end{aligned} \quad (6.13)$$

Se multiplica las ecuaciones (6.12,6.13) por el factor $\exp(-iKlx')/A$ y se integra sobre x' entre $-A/2$ y $A/2$, luego las ecuaciones (6.12,6.13) se transforman en:

$$2c_l = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \{[(\mu_1(o) - 1)(D_{lj}^- - D_{lj}^+ - C_{(l-j)0}^{0-} + C_{(l-j)0}^{0+}) - \mu_2(o)(D_{lj}^- + D_{lj}^+ + C_{(l-j)0}^{0-} + C_{(l-j)0}^{0+})]c_j + [(\mu_1(o) - 1)(C_{lj}^{k-} - C_{lj}^{k+}) + \mu_2(o)(C_{lj}^{k-} + C_{lj}^{k+})]b_j\} \quad (6.14)$$

$$2b_l = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \{[(\mu_1(o) - 1)(C_{lj}^{k-} - C_{lj}^{k+}) - \mu_2(o)(C_{lj}^{k-} + C_{lj}^{k+})]c_j + [(\mu_1(o) - 1)(D_{lj}^- - D_{lj}^+ - C_{(l-j)0}^{0-} + C_{(l-j)0}^{0+}) + \mu_2(o)(D_{lj}^- + D_{lj}^+ + C_{(l-j)0}^{0-} + C_{(l-j)0}^{0+})]b_j\} \quad (6.15)$$

donde los diferentes elementos de matriz están definidos en las ecuaciones (3.15) y (3.17). Introduciendo $p_l \equiv c_l + b_l$ y $q_l \equiv c_l - b_l$, sumando y restando las ecuaciones (6.14,6.15) y escribiéndolas en notación matricial, se obtiene:

$$2p = (\mu_1(o) - 1)(D^- - D^+ - C^{0-} + C^{0+} + C^- - C^+)p - \mu_2(o)(D^- + D^+ + C^{0-} + C^{0+} + C^- + C^+)q \quad (6.16)$$

$$2q = (\mu_1(o) - 1)(D^- - D^+ - C^{0-} + C^{0+} - C^- + C^+)q - \mu_2(o)(D^- + D^+ + C^{0-} + C^{0+} - C^- - C^+)p \quad (6.17)$$

que puede ser escrito como la ecuación matricial (3.12).

6.3. Film Perfecto

Las soluciones de la ecuación de Laplace para el potencial electro-estático ($\nabla\phi^{in,out} = 0$) en las zonas: I: $y > D/2$, II: $-D/2 < y < D/2$ y III: $y < -D/2$ están dadas por:

$$\phi_I(r) = Ae^{-k_x y + i\nu k_x x} \quad (6.18)$$

$$\phi_{II}(r) = B(e^{ky} + e^{-ky})e^{i\nu k_x x} \quad (6.19)$$

$$\phi_{III}(r) = Ae^{k_x y + i\nu k_x x} \quad (6.20)$$

$$(6.21)$$

Utilizando las condiciones de borde $\phi_\omega^{out} = \phi_\omega^{in}$, $\mu_1 \psi_\omega^{in} + i\mu_2 \phi_\omega^{in} = \psi_\omega^{out}$ en $y = \pm D/2$ se puede obtener la relación de dispersión:

$$o(\kappa) = \sqrt{h(h+1) + (1 - e^{-2|\kappa|D})/4} \quad (6.22)$$

En la siguiente figura se puede observar el potencial graficado para $\nu \pm 1$. Se puede observar que a pesar de que la relación de dispersión es independiente de ν , los modos no lo son. Cuando la dirección de propagación se invierte, los modos se desplazan de una superficie a otra. En la siguiente figura se puede observar el potencial en función de la coordenada y :

6.4. Integrales necesarias para el film perfecto:

En el caso del film perfecto $y(x) = y(x') = D/2$, y la expresión para D_{lj}^\pm (ecuación (3.17)) toma la forma:

$$D_{lj}^\pm = \int_{-A/2}^{A/2} \frac{dx}{A} \int_{-A/2}^{A/2} \frac{dx'}{A} e^{-iKlx'} \frac{e^{iKjx} - e^{iKjx'}}{1 - e^{-iK(x-x')}} \quad (6.23)$$

Se pueden introducir las variables $\theta = Kx$ y $\theta' = Kx'$ que varían desde $-\pi$ a π , entonces para $j \geq 0$ se utiliza $\eta = \exp(i\theta)$ y $\eta' = \exp(i\theta')$. De esta forma, la ecuación (6.23) se transforma en una doble integral sobre círculos de radio uno (curva c) en el plano complejo.

Es importante destacar que la singularidad en $\eta = \eta'$ no existe ya que se trabajó con las ecuaciones integrales en su versión (2.15) (las cuales no incluyen el valor principal). Utilizando el teorema de Cauchy se obtiene

$$D_{l|j|}^\pm = -\frac{1}{(2\pi)^2} \oint_c \frac{d\eta'}{\eta'} (\eta')^{-l} \oint_c \frac{d\eta}{\eta} \frac{\eta^{|j|} - (\eta')^{|j|}}{1 - \eta'/\eta} = 0 \quad (6.24)$$

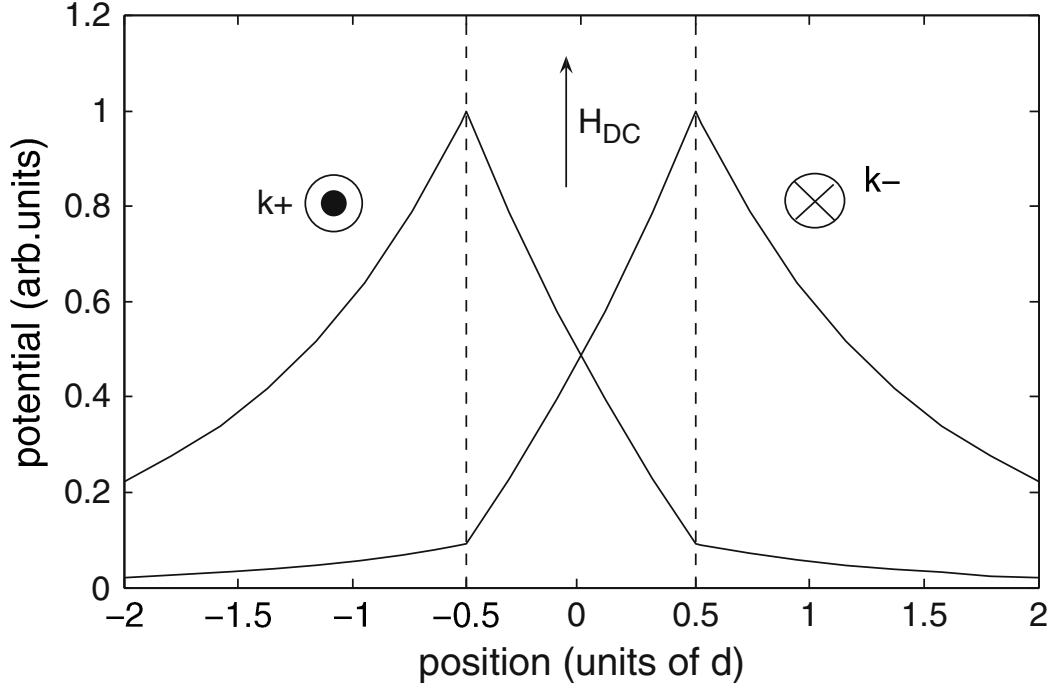


Figura 6.1: Perfil del potencial magnético en función de la coordenada y para ondas superficiales con $\nu = \pm 1$, fuente [20]

El valor de C_{lj}^{\pm} (ecuación (3.17)) para el film perfecto está dado por

$$C_{lj}^{k\pm} = \int_{-A/2}^{A/2} \frac{dx}{A} \int_{-A/2}^{A/2} \frac{dx}{A} e^{-iKlx'} e^{iKjx} \frac{e^{\pm kD}}{1 - e^{-iK(x-x')} e^{\pm KD}} \quad (6.25)$$

$$(6.26)$$

y utilizando el mismo cambio de variable para $j \geq 0$:

$$C_{l|j|}^{k\pm} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \oint_c \frac{d\eta'}{\eta'} (\eta')^{-l} \oint_c \frac{d\eta}{\eta} \frac{\eta^{|j|} e^{\pm kD}}{1 - e^{\pm KD} \eta'/\eta} \quad (6.27)$$

En el cálculo de $C_{l|j|}^{k+}$ se puede observar que no existen polos dentro del círculo unitario

Camino de Integración

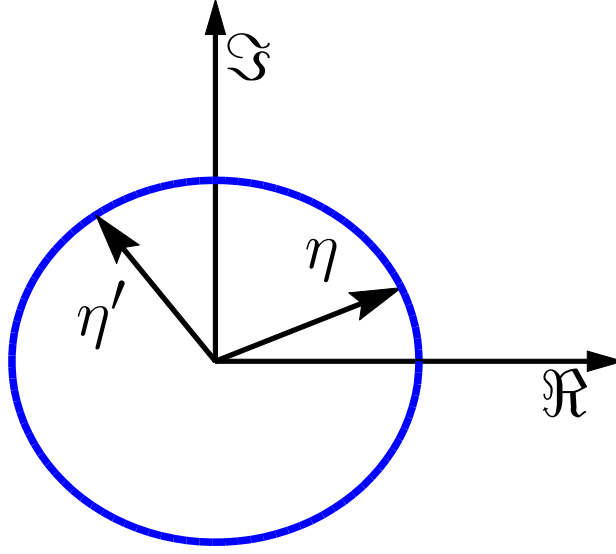


Figura 6.2: Curva de integración para calcular la integral (6.23)

en la integral sobre η :

$$\oint_c d\eta \frac{\eta^{|j|} e^{kD}}{\eta - e^{KD}\eta'} \quad (6.28)$$

por lo tanto $C_{l|j|}^{k+} = 0$, es decir $C^{0+} = 0$.

En el cálculo de $C_{l|j|}^{k-}$ si existe un polo dentro del círculo unitario en la integral sobre η en $\eta = e^{-KD}\eta'$

$$\oint_c d\eta \frac{\eta^{|j|} e^{-kD}}{\eta - e^{-KD}\eta'} = 2\pi i \eta'^{|j|} e^{-KD|j|} e^{-kD} \quad (6.29)$$

luego,

$$C_{l|j|}^{k\pm} = -i \frac{1}{(2\pi)} \oint_c \frac{d\eta'}{\eta'} (\eta')^{-l} \eta'^{|j|} e^{-KD|j|} e^{-kD} \quad (6.30)$$

$$= e^{-KD|j|} e^{-kD} \delta_{l|j|} \quad (6.31)$$

$C_{l|j|}^{k-} = \exp(-kD - KD|j|) \delta_{l|j|}$, es decir, $C_{(l-j)0}^{k=0-} = \delta_{lj} = C_{lj}^{0-}$. Además, si $j < 0$ se realiza el cambio de variable: $\eta = \exp(-i\theta)$, $\eta' = \exp(-i\theta')$ y realizando un cálculo similar se obtiene que $D_{l(-|j|)}^{\pm} = -\delta_{l(-|j|)}$ y $C_{l(-|j|)}^{k+} = -e^{(k-K|j|)D} \delta_{l(-|j|)}$, $C_{l(-|j|)}^{k-} = 0$.

6.5. Caso especial, un film perturbado de forma sinusoidal:

El método para calcular las integrales de los coeficientes $D^\pm, C^\pm, C^{0\pm}$ en el caso de una perturbación sinusoidal es el mismo que se utilizó para calcular los coeficientes en el film perfecto. Como ejemplo se detalla el cálculo del coeficiente $C_{l,j}^{+\xi'}$:

$$\begin{aligned} C_{l,j}^{+\xi'} &= \int \frac{dx'}{A} \int \frac{dx}{A} e^{-iKlx'} e^{iKjx} i\xi' e^{kD} \frac{1}{1 - e^{-iK(x-x')+KD}} \\ C_{l,j}^{+\xi'} &= \frac{i\xi K}{2} e^{kD} \int \frac{dx'}{A} \int \frac{dx}{A} e^{-iKlx'} e^{iKjx} \frac{e^{iKx} + e^{-iKx}}{1 - e^{-iK(x-x')+KD}} \end{aligned} \quad (6.32)$$

Para calcular la última integral es necesario analizar distintamente los casos $j \geq 0$ y $j < 0$.

- Caso $j \geq 0$: En este caso conviene realizar los cambios de variables: $\eta = \exp(iKx)$ y $\eta' = \exp(iKx')$, de esta forma la integral se realiza sobre el círculo unitario en el plano complejo, por lo tanto:

$$C_{l,j}^{+\xi'} = \frac{i\xi K}{-2K^2 A^2} e^{kD} \int \frac{d\eta'}{\eta'} \int \frac{d\eta}{\eta} \eta'^{-l} \eta^j \frac{1}{\eta - \eta' e^{KD}} (\eta^2 + 1) \quad (6.33)$$

Como $j \geq 0$ el único polo encerrado en el círculo unitario existe cuando $j = 0$, y está ubicado en $\eta = 0$, por lo tanto si $j \geq 1$ entonces $C_{l,j}^{+\xi'} = 0$. El único término no nulo existe si $j = 0$:

$$\begin{aligned} C_{l,0}^{+\xi'} &= -\frac{i\xi K}{2K^2 A^2} e^{kD} \int \frac{d\eta'}{\eta'} \int \frac{d\eta}{\eta} \eta'^{-l} \frac{1}{\eta - \eta' e^{KD}} (\eta^2 + 1) \\ C_{l,0}^{+\xi'} &= -\frac{i\xi K}{2K^2 A^2} e^{kD} 2\pi i \int \frac{d\eta'}{\eta'} \eta'^{-l} \frac{1}{\eta' e^{KD}} \\ C_{l,0}^{+\xi'} &= -\frac{i\xi K}{2K^2 A^2} e^{kD} 2\pi i \int d\eta' \eta'^{-l-2} e^{-KD} \end{aligned} \quad (6.34)$$

La integral en η' será no nula solamente si $-l - 2 = -1$, por lo tanto $l = -1$ y el valor del coeficiente será:

$$\begin{aligned} C_{-1,0}^{+\xi'} &= -\frac{i\xi K}{2K^2 A^2} e^{kD} (2\pi i)^2 e^{-KD} \\ C_{-1,0}^{+\xi'} &= -\frac{i\xi K}{2} e^{kD-KD} \end{aligned} \quad (6.35)$$

- Caso $j < 0$: Análogamente al caso anterior ahora realizamos el cambio de variable: $\eta = \exp(-iKx)$ y $\eta' = \exp(-iKx')$ por lo tanto la integral para los coeficientes es:

$$\begin{aligned} C_{l,j}^{+\xi'} &= -\frac{i\xi K}{2K^2 A^2} e^{kD} \int d\eta' \int \frac{d\eta}{\eta} \eta^l \eta^{-j} \frac{1}{\eta' - \eta e^{KD}} \frac{(\eta^2 + 1)}{\eta} \\ C_{l,j}^{+\xi'} &= \frac{i\xi K}{2K^2 A^2} e^{kD} e^{-KD} \int d\eta' \eta'^l \int d\eta \eta^{-j-2} \frac{1}{\eta - \eta' e^{-KD}} (\eta^2 + 1) \end{aligned} \quad (6.36)$$

La integral anterior posee dos polos, uno en $\eta = \eta' e^{-KD}$ y otro polo en $\eta = 0$ que existe solo si $j = -1$. Si $j = -1$ el coeficiente queda dado por:

$$\begin{aligned} C_{l,-1}^{+\xi'} &= \frac{i\xi K}{2K^2 A^2} e^{kD-KD} (2\pi i) \int d\eta' \eta'^l \left[-\frac{e^{KD}}{\eta'} + \eta' e^{-KD} + \frac{e^{kD}}{\eta'} \right] \\ C_{l,-1}^{+\xi'} &= \frac{i\xi K}{2K^2 A^2} e^{kD-KD} (2\pi i) \int d\eta' \eta'^l [\eta' e^{-KD}] \\ C_{-2,-1}^{+\xi'} &= \frac{i\xi K}{2K^2 A^2} e^{kD-KD} (2\pi i)^2 e^{-KD} \\ C_{-2,-1}^{+\xi'} &= -\frac{i\xi K}{2} e^{kD-2KD} \end{aligned} \quad (6.37)$$

Si $j < -1$ ya no existe el polo en cero:

$$C_{l,j}^{+\xi'} = \frac{i\xi K}{2K^2 A^2} e^{kD} e^{-KD} (2\pi i) \int d\eta' \eta'^l (\eta' e^{-KD})^{-j-2} ((\eta' e^{-KD})^2 + 1)$$

Uno de los términos aporta en $l = j - 1$ y el otro en $l = j + 1$:

$$\begin{aligned} C_{j-1,j}^{+\xi'} &= \frac{i\xi K}{2K^2 A^2} e^{kD} e^{-KD} (2\pi i)^2 e^{KDj} \\ C_{j-1,j}^{+\xi'} &= -\frac{i\xi K}{2} e^{kD-KD+KDj} \end{aligned} \quad (6.38)$$

$$\begin{aligned} C_{j+1,j}^{+\xi'} &= \frac{i\xi K}{2K^2 A^2} e^{kD} e^{+KD} (2\pi i)^2 e^{KDj} \\ C_{j-1,j}^{+\xi'} &= -\frac{i\xi K}{2} e^{kD+KD+KDj} \end{aligned} \quad (6.39)$$

Los elementos no nulos de primer orden de las matrices $D^\pm, C^\pm, C^{0\pm}$ que determinan las matrices M y N (ecuaciones (3.13), (3.14)) para un film con una superficie modificada periódicamente son (para las columnas $j = -1$ y $j = 0$ hay valores especiales que no coinciden con los siguientes):

$$\begin{aligned}
D_{(-|j+1)(-|j)}^{\pm\xi'} &= \mp i \frac{\xi K}{2} \\
D_{(|j-1)(|j)}^{\pm\xi'} &= \pm i \frac{\xi K}{2} \\
D_{(-|j+1)(-|j)}^{\pm\xi} &= \pm i \frac{\xi K}{2} \\
D_{(|j-1)(|j)}^{\pm\xi} &= \mp i \frac{\xi K}{2} \\
C_{(-|j+1)(-|j)}^{+\xi'} &= -i \frac{\xi K}{2} e^{kD} e^{-KD(|j-1)} \\
C_{(-|j-1)(-|j)}^{+\xi'} &= -i \frac{\xi K}{2} e^{kD} e^{-KD(|j+1)} \\
C_{(|j-1)(|j)}^{-\xi'} &= -i \frac{\xi K}{2} e^{-kD} e^{-KD(|j-1)} \\
C_{(|j+1)(|j)}^{-\xi'} &= -i \frac{\xi K}{2} e^{-kD} e^{-KD(|j+1)} \\
C_{(-|j+1)(-|j)}^{+\xi} &= -i \frac{\xi}{2} e^{kD} e^{-KD|j|} [-k(1 + e^{KD}) + K((|j| - 1)e^{KD} + |j|)] \\
C_{(-|j-1)(-|j)}^{+\xi} &= -i \frac{\xi}{2} e^{kD} e^{-KD|j|} [k(1 + e^{KD}) - K((|j| + 1)e^{-KD} + |j|)] \\
C_{(|j-1)(|j)}^{-\xi} &= -i \frac{\xi}{2} e^{-kD} e^{-KD|j|} [k(1 + e^{KD}) + K((|j| - 1)e^{KD} + |j|)] \\
C_{(|j+1)(|j)}^{-\xi} &= i \frac{\xi}{2} e^{-kD} e^{-KD|j|} [k(1 + e^{-KD}) + K((|j| + 1)e^{-KD} + |j|)] \quad (6.40)
\end{aligned}$$

Los casos especiales para las columnas $j = -1$ y $j = 0$ son los siguientes:

$$\begin{aligned}
D_{(-1)0}^{\pm\xi} &= \mp i \frac{\xi}{2} k & D_{0(-1)}^{\pm\xi} &= \mp i \frac{\xi}{2} (k - K) \\
C_{(-1)0}^{+\xi'} &= -i \frac{\xi}{2} K e^{(k-K)D} & C_{0(-1)}^{-\xi'} &= -i \frac{\xi}{2} K e^{-kD} \\
C_{(-1)0}^{-\xi} &= -i \frac{\xi}{2} k e^{-kD} & C_{(-1)0}^{+\xi} &= -i \frac{\xi}{2} (k - K) e^{(k-K)D} \\
C_{0(-1)}^{+\xi} &= i \frac{\xi}{2} (k - K) e^{(k-K)D} & C_{0(-1)}^{-\xi} &= i \frac{\xi}{2} k e^{-kD}
\end{aligned} \quad (6.41)$$

es decir:

$$\begin{aligned}
D_{(-1)0}^{\pm(1)} &= \mp i \frac{\xi}{2} k & D_{0(-1)}^{\pm(1)} &= \mp i \frac{\xi}{2} (k - K) \\
C_{(-1)0}^{+(1)} &= -i \frac{\xi}{2} k e^{(k-K)D} & C_{0(-1)}^{+(1)} &= i \frac{\xi}{2} (k - K) e^{(k-K)D} \\
C_{(-1)0}^{- (1)} &= -i \frac{\xi}{2} k e^{-kD} & C_{0(-1)}^{- (1)} &= i \frac{\xi}{2} (k - K) e^{-kD}
\end{aligned} \tag{6.42}$$

A partir de las ecuaciones (6.40), (6.41) and (6.42) se obtiene que los elementos de matriz $C^{0\pm}$ nulos son los mismos que antes. Por lo tanto, de las ecuaciones (3.14) y evaluando en $k = K/2$ se obtiene:

$$M_u = M_d = i \frac{\xi K}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad N_u = -N_d = -i \frac{\xi K}{2} e^{-KD/2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.43}$$

6.5.1. Brechas de bandas aproximadas, caso magnónico:

Reordenando las ecuaciones (3.38) y sus variables se obtiene:

$$\begin{pmatrix} (\mu_1 - 1)(-1 + e^{-\frac{KD}{2}}) - 2 & -\mu_2(-1 - e^{-\frac{KD}{2}}) & i \frac{\xi K}{2} (\mu_1 - 1) & i \frac{\xi K}{2} \mu_2 e^{-\frac{KD}{2}} \\ -\mu_2(-1 + e^{-\frac{KD}{2}}) & (\mu_1 - 1)(-1 - e^{-\frac{KD}{2}}) - 2 & -i \frac{\xi K}{2} \mu_2 e^{-\frac{KD}{2}} & i \frac{\xi K}{2} (\mu_1 - 1) \\ -i \frac{\xi K}{2} (\mu_1 - 1) & i \frac{\xi K}{2} \mu_2 e^{-\frac{KD}{2}} & (\mu_1 - 1)(-1 + e^{-\frac{KD}{2}}) - 2 & -\mu_2(1 + e^{-\frac{KD}{2}}) \\ -i \frac{\xi K}{2} \mu_2 e^{-\frac{KD}{2}} & -i \frac{\xi K}{2} (\mu_1 - 1) & -\mu_2(1 - e^{-\frac{KD}{2}}) & (\mu_1 - 1)(-1 - e^{-\frac{KD}{2}}) - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{-1} \\ q_{-1} \\ p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = 0 \tag{6.44}$$

Al escribir el determinante de la matriz de la ecuación (6.44) con términos hasta de orden ξ el problema se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} (A_+ + c_+) & -B_- - d_- & a & b \\ (-B_+ - d_+) & (A_- + c_-) & -b & a \\ -a & b & (A_+ + c_+) & (B_- + d_-) \\ -b & -a & (B_+ + d_+) & (A_- + c_-) \end{vmatrix} = 0 \tag{6.45}$$

donde los elementos con letra mayúscula son términos de orden zero y los elementos con letra minúscula representan correcciones de primer orden en ξ . Estos últimos están definidos mediante:

$$\begin{aligned}
a &= i \xi K (\mu_1^0 - 1) / 2 & b &= i \xi K \mu_2^0 e^{-KD/2} / 2 \\
c_{\pm} &= \tilde{\lambda}_{\pm} (\mu_1')_0 \Delta o & d_{\pm} &= \tilde{\lambda}_{\pm} (\mu_2')_0 \Delta o
\end{aligned} \tag{6.46}$$

y los términos en mayúsculas son:

$$A_{\pm} = (\mu_1^0 - 1) \tilde{\lambda}_{\pm} - 2 \tag{6.47}$$

$$B_{\pm} = \mu_2^0 \tilde{\lambda}_{\pm} \tag{6.48}$$

con $\tilde{\lambda}_{\pm} = -1 \pm e^{-KD/2}$. Los términos de segundo orden del determinante (6.45) permiten obtener (puede obtenerse, por ejemplo, de la siguiente fórmula para el determinante de una matriz M_{ij} de 4×4 , $Det = \epsilon_{ijpq} M_{i1} M_{j2} M_{p3} M_{q4}$ con ϵ_{ijpq} el tensor de Levi-Civita totalmente antisimétrico):

$$0 = (A_- c_+ + A_+ c_- - B_- d_+ - B_+ d_-)^2 + (a(A_+ - A_-) + b(B_+ + B_-))^2 \quad (6.49)$$

Esta última expresión lleva al resultado (3.39) para el cambio en frecuencia en el borde de la zona de Brillouin.