



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

MODELO CINEMÁTICO DE RUPTURA SÍSMICA PARA INVERSIÓN DE
SISMOGRAMAS EN EL CAMPO LEJANO

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

FRANCISCO JAVIER BRAVO SAGUA

PROFESOR GUÍA:
JAIME CAMPOS MUÑOZ

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JAIME ORTEGA PALMA
JAVIER RUIZ PAREDES

SANTIAGO DE CHILE
SEPTIEMBRE 2013

Resumen

El objetivo de esta memoria es implementar un sistema de procesamiento y análisis de señales sísmicas en el campo lejano para determinar, mediante una técnica de inversión linealizada, la distribución del desplazamiento sobre un plano de falla con dimensiones finitas como modelo de la fuente sísmica. Para este objetivo, son estudiados los fundamentos teóricos para la generación del campo de desplazamientos de las ondas de volumen de una fuente finita a distancias telesísmicas, de interpretación más sencilla en términos del proceso de ruptura en la fuente sísmica, y los fundamentos numéricos para plantear el problema de inversión de la variación espacial y temporal del desplazamiento sobre el plano de falla.

En el Capítulo 2, se estudia la representación matemática de la fuente sísmica, desde la teoría de la elastodinámica lineal, en términos de la función de Green y el tensor de momento sísmico. En el Capítulo 3, es determinada la función de Green de la elastodinámica para un medio infinito, homogéneo e isotrópico, y con ello el patrón de radiación de las ondas P y S en el campo lejano. El Capítulo 4 corresponde a las correcciones realizadas a dichas expresiones para incorporar las características de heterogeneidad y superficie libre de la Tierra desde la teoría de rayos y se discute su rango de validez como aproximación. Además, son incluidos los efectos de la respuesta instrumental y de la atenuación intrínseca en la Tierra para altas frecuencias. Al final de este capítulo se obtiene la expresión analítica para la generación de sismogramas sintéticos en el campo lejano para una fuente puntual, la cual es utilizada en los principales métodos de inversión (Kikuchi & Kanamori 1991, Hartzell & Heaton 1983, Nábelek, 1984). El Capítulo 5 corresponde al estudio del modelo de fuente extendida de Haskell y el efecto de directividad. En el Capítulo 6, son estudiadas las parametrizaciones utilizadas en los métodos de Kikuchi & Kanamori (1991), Hartzell & Heaton (1983) y Nábelek (1984), y las condiciones de borde requeridas para otorgar estabilidad al problema inverso. En el Capítulo 7, es explicitada la parametrización del problema de inversión desarrollada en esta memoria, el cual es implementado como un sistema matricial para la componente vertical del campo de desplazamiento. Para evaluar su pertinencia, se realiza la inversión de la fuente sísmica para el terremoto del 14 de noviembre del 2007 en Tocopilla ($M_w=7.7$) y se comparan los resultados con los obtenidos por otros métodos independientes (ondas de campo cercano y lejano) en los trabajos de Peyrat *et al.* (2010) y Delouis *et al.* (2009). Los resultados de la inversión resultan ser consistentes con los resultados de los otros estudios, tanto en el patrón de la distribución del deslizamiento sobre el plano de falla y en su magnitud, como con la distribución de las réplicas. Finalmente, son propuestas diversas modificaciones al método desarrollado, como por ejemplo la modelación de otras formas de onda (ondas SH, PP, etc), y la incorporación de relaciones de causalidad en el desplazamiento de subfallas vecinas del modelo, las cuales son de fácil implementación en los sistemas de inversión matricial.

Agradecimientos

Son muchas las personas que han aportado de una u otra manera a que finalmente pueda estar escribiendo estas páginas. Con el latente riesgo de dejar fuera a alguna que otra persona, me veo en la grata obligación de personalizar algunos agradecimientos.

Primero, agradecer a los profesores de la comisión, que con su conocimiento y consejos me han permitido guiar y dar forma a este trabajo. Al profesor Jaime Campos que siempre mantuvo la confianza y la motivación para este trabajo.

A los funcionarios del departamento de ingeniería matemática, a Don Óscar, a Don Luis, y la señora Gladys, por su muy buena disposición y trato. Y obviamente a Eterin, la mejor secretaria docente del Universo.

A los compañeros de carrera con los que tuve la oportunidad de compartir gratos momentos, principalmente a los de mi generación: Valentina, Riffo, Maldonado, Chiri, Carlos, Chino, Johan, Abelino, Pancho Plana y Emilio, que han hecho más llevadero mi paso por esta facultad y esas las interminables tandas de estudio, donde siempre primó el compañerismo, la solidaridad y el buen humor.

Agradecer principalmente a mis mejores amigos, a César, a Mauricio y Franco, los chanchos, sobre los cuales podría escribir una memoria completa acerca del cariño que les tengo y de los grandes momentos que hemos compartido.

A la Coni, mi compañera en este último tramo, que siempre que lo necesité me brindó su apoyo y comprensión, justo en el momento que más lo necesitaba. Cuando sea su momento también estaré ahí.

A las personas más importantes para mí: mis hermanos Roberto y Cristóbal, y con mucho amor a mis padres, que me han dado lo más importante. Para no caer en lugares comunes, sólo diré que los amo. A la Olivia, que me ha visto crecer todos estos años, por quien siento una infinita gratitud. Obviamente también cabe dentro en esta categoría.

Mención aparte al Chino por facilitarme esos papers imposibles de conseguir, y a mi hermano Cristóbal, que con su talento artístico me ayudó con algunos mamarrachos que al principio sólo yo descifraba.

Tabla de contenido

<i>Resumen</i>	i
<i>Agradecimientos</i>	ii
Tabla de contenido	iii
Índice de Tablas	vi
Índice de Figuras	x
1. Introducción	1
1.1. Estructura de la Memoria	2
2. Representación Matemática de la Fuente Sísmica	4
2.1. Nociones de Elastodinámica Lineal	4
2.1.1. Ley de Hooke generalizada	5
2.1.2. Ecuación de movimiento	6
2.2. Teoremas de Reciprocidad y Representación	7
2.2.1. Teorema de Reciprocidad de Betti	7
2.2.2. Forma integral del Teorema de Betti	8
2.2.3. Función de Green para la ecuación de la elastodinámica	9
2.2.4. Reciprocidad en espacio para la función de Green	9

2.2.5. Teorema de Representación de Knopoff - de Hoop	10
2.3. Teorema de Representación para Modelo de Falla	12
2.4. Fuerzas de Cuerpo Equivalentes	13
2.5. Tensor de Momento Sísmico	19
3. Función de Green de la Elastodinámica	22
3.1. Función de Green de la Elastodinámica en un Medio Homogéneo, Isotrópico no Acotado	23
3.1.1. Teorema de Lamé	23
3.2. Campo de Desplazamiento para Campo Lejano	27
3.3. Patrón de Radiación en el Campo Lejano para una Fractura de Cizalle de Orientación Arbitraria en un Medio con Simetría Esférica	31
3.4. Parametrización de la Función Fuente	33
4. Correcciones a los Desplazamiento	35
4.1. Teoría de Rayos para Ondas de Cuerpo	35
4.1.1. Propagación en medios isotrópicos no homogéneos	38
4.1.2. Efecto superficie libre	42
4.1.3. Divergencia geométrica	45
4.2. Sismogramas Sintéticos	45
4.2.1. Respuesta instrumental	46
4.2.2. Atenuación en el medio	46
5. Modelos Cinemáticos para Fallas con Dimensiones Finitas	49
5.1. Modelo de Haskell	50
6. Implementación de la Inversión Cinemática de la Fuente Sísmica en el Campo Lejano	55

6.1. Formulación del Problema Discreto	57
6.1.1. Modelos de resolución del modelo discreto	59
6.1.2. Implementación de la inversión para campo lejano	63
6.1.3. Procesamiento de datos	64
7. Parametrización de la Fuente Sísmica para la Inversión del Desplazamiento con Datos Telesísmicos	66
8. Aplicación al Terremoto del 14 de Noviembre de 2007 en Tocopilla	71
8.1. Inversiones Previas del Terromoto de Tocopilla	73
8.1.1. Delouis <i>et al.</i> 2009	73
8.1.2. Peyrat <i>et al.</i> (2010)	75
8.2. Inversión Telesísmica con el Programa ONDDIM	77
8.3. Discusión de los Resultados	81
9. Conclusiones	84
Bibliografía	87
Apéndice	93
A. Notación indicial	93
B. Ecuaciones de ondas no homogéneas	95

Índice de Tablas

8.1. Sismicidad del gap del norte de Chile. Ubicación de los eventos de magnitud mayores a 7 seleccionados del Centennial Catalog of Engdahl & Villaseñor (2002) (Eventos de profundidad mayores a 80 km no son incluidos). (Peyrat <i>et al.</i> (2010))	72
8.2. Mecanismos focales, duración de la función fuente temporal, y momento sísmico del terremoto de Tocopilla obtenida por los estudios de validación . .	82

Índice de Figuras

2.1. Medio elástico de volumen V , cuya superficie interior Σ modela una falla de cizalle.	12
2.2. Sistema de fuerzas equivalente a la descripción promedio de una dislocación. (Lay & Wallace, 1995)	14
2.3. Diagrama interpretativo de la componente f_1 . (Aki & Richards, 1980)	17
2.4. Diagrama interpretativo de la componente f_3 . (Aki & Richards, 1980)	17
2.5. 9 Cuplas de fuerzas correspondientes a las componentes del tensor densidad de momento sísmico. (Shearer, 2009)	19
2.6. Sistemas de fuerzas que generan la misma radiación. Izquierda: Sistema de fuerzas correspondiente a (2.55). Derecha: Sistema de fuerzas correspondiente a (2.56).(Aki & Richards, 1980)	20
3.1. Vectores unitarios del sistema de coordenadas esféricas con origen en la fuente.	28
3.2. Patrón de radiación de la componente radial (onda P) del campo lejano. Las flechas blancas corresponden a la dirección de la dislocación sobre el plano de falla. Las flechas negras representan la dirección del desplazamiento.	30
3.3. Patrón de radiación de la componente S del campo lejano. Las flechas blancas corresponden a la dirección de la dislocación sobre el plano de falla. Las flechas negras representan la dirección del desplazamiento de partícula asociada a cada nodo.	30
3.4. Parámetros del deslizamiento de una falla con respecto al sistema de coordenadas geográficas. (Aki & Richards, 1980)	31
3.5. Parametrización de la función fuente.	34

3.6. Ejemplo de función fuente compleja.	34
4.1. Geometría de la ley de Snell para Tierra esférica estratificada radialmente. (Stein & Wysession, 2003)	40
4.2. Trayectoria de los rayos para diferentes distribuciones de velocidad con la profundidad. Imagen superior: Tiplicación de los rayos debido a un incremento abrupto de velocidad. Imagen inferior: efecto de zona de sombra debido a una reducción abrupta de velocidad. (Stein & Wysession, 2003)	41
4.3. Trayectoria de los rayos para el modelo de distribución de velocidades ak135. (Kennett, 2005)	42
4.4. Imagen superior: Identificación de diversas fases en el sismograma observado. Imagen inferior: Diagrama de las fases de profundidad con sus trayectorias. (Stein & Wysession, 2003)	43
4.5. Determinación del tiempo de retardo de la fase pP con respecto a la fase P. .	44
4.6. Ejemplo de sismograma sintético para una fuente puntual de doble-cupla de profundidad intermedia.	48
5.1. Propagación de la dislocación en una fuente con dimensiones.	49
5.2. Modelo de falla rectangular de Haskell.	51
5.3. Trayectoria de los rayos en el modelo rectangular de Haskell para distancias telesísmicas.	52
5.4. Función fuente temporal para el modelo de Haskell. (Stein & Wysession, 2003)	53
5.5. Efecto de la directividad de la ruptura en la función temporal para diferentes azimut desde la fuente. (Stein & Wysession, 2003)	53
6.1. Campo de desplazamiento resultante como secuencia de subeventos. (Hartzell & Heaton, 1985)	59
6.2. Curvas camino tiempo para foco superficial.	64

6.3. Ejemplo del efecto del protocolo de procesamiento de señales aplicado al registro del terremoto de Tocopilla del 14 de Noviembre de 2007 para la estación SSPA. Registro original en la parte superior. Resultado del tratamiento de la señal en el medio. Recuadro inferior, ventana de 100 segundos seleccionada.	65
7.1. Esquema de parametrización de la grilla de puntos en un plano falla rectangular.	67
7.2. Esquema de actualización de distancia epicentral de los puntos de la grilla .	67
7.3. Definición del ángulo α como la proyección en vertical de la dirección de la estación	68
7.4. Coseno director para la propagación en grilla rectangular.	69
7.5. Ejemplo de función fuente compleja.	70
8.1. Tectonic setting: location and rupture areas of large earthquakes of the 19th and 20th in Northern Chile shown as estimated rupture zones (from Lomnitz 2004; Comte & Pardo 1991). Seismicity of magnitude greater than 5.5 (grey circles) from the Centennial Catalog (Engdahl & Villaseñor 2002). Red circles are events from Table 1. Blue circle is the 2007 November 14 Tocopilla mainshock. (Peyrat <i>et al.</i> 2010)	72
8.2. Distribución del slip obtenido en (Delouis <i>et al.</i> 2009). a) inversión con datos telesísmicos. b) inversión con datos telesísmicos y strong-motions.	73
8.3. Función temporal fuente obtenido en la inversión conjunta. (Delouis <i>et al.</i> 2009)	74
8.4. Ajuste de los sismogramas para la componente P para la inversión conjunta. (Delouis <i>et al.</i> 2009)	74
8.5. Ajuste de los sismogramas para 2 fuentes puntuales. (Peyrat <i>et al.</i> 2010) . .	75
8.6. Resultado de la inversión con datos de campo lejano. a) distribución de los desplazamientos, b) función temporal fuente. (Peyrat <i>et al.</i> 2010)	76
8.7. Distribución del slip y función temporal (Peyrat <i>et al.</i> 2010). (a) Inversión strong-motion campo cercano. (b) Inversión telesísmica.	77
8.8. Distribución de los desplazamientos.	78
8.9. Función fuente temporal estimada.	79

8.10. Orientación del campo de deslizamiento estimado con respecto el epicentro. .	79
8.11. Ajuste de los sismogramas. En negro los sismogramas observados, en rojo el ajuste. Desplazamiento en μm	80
8.12. Ubicación de las estaciones utilizadas en la inversión con el programa ONDDIM.	81
8.13. Distribución de las réplicas del terremoto de Tocopilla 14/11. (Sobiesiak, 2013)	83

Capítulo 1

Introducción

Los métodos sismológicos para la determinación del mecanismo focal se basan en el análisis de las ondas sísmicas. El método de inversión consiste en comparar los sismogramas observados en distintos puntos de la superficie de la Tierra con los obtenidos teóricamente, y mediante el ajuste, determinar los parámetros que definen el proceso físico. En estos métodos, el momento sísmico es determinado ajustando los sismogramas sintéticos con los observados mediante mínimos cuadrados. Para la elaboración de los sismogramas teóricos, o sintéticos, es necesario realizar aproximaciones tanto en lo concerniente a la propagación de las ondas como en lo relacionado con la fuente. Los modelos de Tierra más simples consideran al medio como elástico, homogéneo y isotrópico. Para la inversión telesísmica, los ajustes se realizan para registros a distancias epicentrales entre 30 y 90 grados del foco, rango en el que el trayecto de las ondas sísmicas ocurre en la zona más homogénea de la Tierra.

Referidos a la modelación de la fuente sísmica, una de las simplificaciones más utilizadas es la aproximación de fuente puntual. En este modelo, válido para longitudes de onda mayores que las dimensiones de la fuente, toda la energía es liberada desde un único punto, correspondiente al foco. Para el modelo de foco puntual, han sido desarrollados diversos métodos numéricos de modelización e inversión de ondas de cuerpo (Deschamps et al. 1980, Nábelek, 1984).

Para terremotos de magnitud mayor a M_w 7, el modelo de fuente puntual ya no es válido, siendo necesario considerar las dimensiones de la fuente. Para terremotos con fuente extendida, diversos métodos de modelización han sido desarrollados, los cuales representan el patrón de ruptura como una secuencia de subeventos distribuidos en el plano de falla (Kikuchi Kanamori, 1982; Hartzell y Heaton, 1983; Kikuchi y Fukao, 1985). El sismograma sintético es entonces la superposición de los sismogramas generados por el deslizamiento de cada uno

de los subeventos, y su distribución en el plano es determinado como el que minimiza el error de ajuste con el sismograma observado. Sin embargo, debido al trade-off entre el mecanismo y la localización de los subeventos (conocimiento limitado de la dinámica del proceso), el problema su vuelve inestable, siendo necesario imponer condiciones de borde físicas con tal de restringir el rango de soluciones admisibles. La diferencia entre los métodos de inversión radica en las condiciones de borde consideradas, en la parametrización de la propagación de la ruptura, en el planteamiento del problema de inversión, y en el método implementado para su resolución.

El objetivo general de esta memoria es implementar un sistema rápido de procesamiento y análisis de señales sísmicas en campo lejano para determinar, mediante la técnica de inversión linealizada, la distribución del desplazamiento sobre una falla extendida como modelo de la fuente sísmica. Bajo esta perspectiva, el objetivo específico de esta memoria consiste en la revisión de los fundamentos teóricos y numéricos necesarios para entender y plantear el problema de inversión de la fuente sísmica con datos telesísmicos, con el fin de identificar el rango de validez y resolución de los esquemas de parametrización de los modelos de fuente de terremotos en el marco de un ambiente de subducción.

1.1. Estructura de la Memoria

En el Capítulo 2 se introducen las nociones de la elastodinámica lineal necesarias para la descripción del problema de campo de desplazamiento para un sistema de fuerzas. Además se presenta la demostración de los Teoremas de Reciprocidad y de Representación de fuentes sísmicas que permiten obtener la relación entre el campo de desplazamiento elástico y la descripción cinemática del proceso de ruptura en la fuente. Por último, se introducen los conceptos de fuerzas equivalentes y de tensor de momento sísmico, y se estudian su interpretación física y sus limitaciones para la descripción del proceso de ruptura.

En el Capítulo 3, se determina la expresión analítica de la función de Green de la elastodinámica y sus derivadas para un medio infinito, homogéneo e isotrópico. Con estas expresiones, se logra caracterizar la solución fundamental para los desplazamientos elásticos, y se estudia en detalle sus componentes P y S. Posteriormente, se introduce la descripción estándar utilizada para describir la orientación de un plano de falla y se explicitan los patrones de radiación para dicha orientación.

El Capítulo 4 corresponde a las correcciones que son necesarias de realizar a la expresión de los desplazamientos, de modo de incorporar las características de la propagación en un modelo de Tierra más realista. como son los efectos de superficie libre, heterogeneidad de la

Tierra y la atenuación intrínseca del medio . Se realiza una introducción a la Teoría de Rayos y se discute su rango de validez como aproximación para la representación de la propagación de ondas. También se incluye el efecto de la respuesta instrumental y de la corrección por expansión geométrica del frente de ondas, con tal de obtener la descripción matemática de los sismogramas sintéticos.

En el capítulo 5 se estudia el modelo cinemático de una falla con dimensiones finitas, y se describe el modelo propuesto por Haskell (1964). Se introduce el concepto de directividad, y se muestra su importancia para discriminar entre el plano de falla y el plano auxiliar.

El capítulo 6 trata sobre los objetivos y alcances del problema de inversión de ondas de cuerpo a distancias telesísmicas. Se estudian las características de estabilidad y unicidad del problema y se establecen las restricciones físicas que deben ser agregadas para soslayar los inconvenientes. Se plantea un sistema discreto para el problema de inversión y se describen diversos métodos existentes para su solución. Finalmente, se explican los pasos necesarios para el tratamiento de señales sísmicas para su correcta interpretación.

En el capítulo 7 se explicita la parametrización del plano de falla utilizado para crear el programa de inversión y el método de resolución escogido.

En el capítulo 8, se muestra el estudio del proceso de ruptura del terremoto del 14 de noviembre del 2007 en Tocopilla ($M_w = 7.7$). Se realiza la inversión con el programa generado y se compara la solución obtenida en este trabajo con las obtenidas por estudios previos que utilizan otros modelos de inversión. Se estudian sus similitudes y diferencias.

Finalmente, en el capítulo 9, se realizan las conclusiones con respecto a los resultados de la inversión del capítulo 8, y se proponen modificaciones a la parametrización y planteamiento del problema a realizarse para trabajos futuros.

Capítulo 2

Representación Matemática de la Fuente Sísmica

2.1. Nociones de Elastodinámica Lineal

Para describir el movimiento en cada punto del medio continuo se utiliza el campo vectorial de desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Este vector representa la distancia de una partícula en un instante t con respecto a la posición \mathbf{x} que ocupaba en un tiempo de referencia t_0 . En este medio tienen lugar las denominadas deformaciones internas, asociadas a variaciones espaciales y temporales del campo de desplazamiento $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Para describir estas deformaciones se utiliza el *tensor de deformación* ϵ definido como,

$$\epsilon = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (2.1)$$

En notación de indicial (Apéndice A),

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.2)$$

Esta definición supone que el incremento en los desplazamientos (∂u_i) es menor que el de las variaciones espaciales (∂x_i). Los elementos diagonales del tensor, ϵ_{11} , ϵ_{22} y ϵ_{33} , representan las deformaciones longitudinales en dirección de los ejes $\hat{\mathbf{x}}_1$, $\hat{\mathbf{x}}_2$, $\hat{\mathbf{x}}_3$ respectivamente. Los elementos ϵ_{ij} que no pertenecen a la diagonal representan las deformaciones de cizalle.

Para analizar las fuerzas internas que actúan entre partículas adyacentes en un medio continuo, se introducen los conceptos de *tracción* y *tensor de esfuerzos*. Para un determinado punto en una superficie interna S , se define la tracción o *stress* como la fuerza \mathbf{F} por unidad

de superficie que actúa en ese punto a través de un plano con cierta orientación. La tracción a través de un plano de orientación \mathbf{n} es representado por el vector \mathbf{T} ,

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{\Delta S} \quad (2.3)$$

Los esfuerzos pueden ser representados por el tensor de segundo orden τ_{ij} , de 9 elementos, de modo de definir el estado de esfuerzos en cualquier punto sobre 3 planos ortogonales. El primer índice de τ_{ij} corresponde a la dirección de la normal al plano sobre el que actúa la fuerza y el segundo indica la dirección de la fuerza. En un plano cuya normal viene dada por \mathbf{n} , la relación de Cauchy entre el vector \mathbf{T} y el tensor $\boldsymbol{\tau}$ es,

$$T_i = \tau_{ji}n_j \quad (2.4)$$

Es posible demostrar que en ausencia de momentos externos (conservación del momento angular), $\boldsymbol{\tau}$ es simétrico ($\tau_{ij} = \tau_{ji}$) (Aki & Richards, 1980).

Finalmente, se consideran las fuerzas por unidad de volumen actuando en el medio, denominadas *fuerzas de cuerpo*. La notación $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ denota la fuerza de cuerpo actuando en una partícula originalmente en la posición \mathbf{x} en el instante t .

2.1.1. Ley de Hooke generalizada

El comportamiento mecánico de un material continuo está definido por la relación existente entre esfuerzos y deformaciones, establecida mediante la llamada *ecuación constitutiva*. Un medio continuo se dice *elástico* si posee un estado natural (en el que los esfuerzos y deformaciones son cero) al cual regresa cuando dejan de aplicarse fuerzas. La ecuación constitutiva de la elasticidad lineal es la generalización de la ley de Hooke para resortes, que establece que cada componente del tensor de esfuerzos es una combinación lineal de componentes del tensor de deformación. Es decir, existen constantes c_{ijpq} tal que,

$$\tau_{ij} = c_{ijpq}\epsilon_{pq} \quad (2.5)$$

Un cuerpo que cumple la ecuación (2.5) se dice *linealmente elástico*. Las constantes c_{ijpq} , denominados *módulos elásticos*, forman un tensor de cuarto orden que describe las propiedades del material. Consta de 81 términos, pero dada la simetría de los tensores de deformación y esfuerzos, sólo 36 son diferentes, pudiendo escribirse la ecuación (2.5) en función de los desplazamientos,

$$\tau_{ij} = c_{ijpq}u_{p,q} \quad (2.6)$$

Para un medio *perfectamente elástico* (no existe disipación de energía para las deformaciones), se deduce que $c_{ijpq} = c_{pqij}$, por lo que los términos diferentes se reducen a 21 (Aki & Richards, 1980). Por último, para un medio isotrópico, donde las propiedades del material son independientes de la dirección en que son examinadas, los 21 términos se reducen a 2 coeficientes independientes, λ y μ , denominados parámetros de Lamé, pudiendo escribir \mathbf{c} de la forma,

$$c_{ijpq} = \lambda\delta_{ij}\delta_{pq} + \mu(\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp}) \quad (2.7)$$

De este modo, el tensor de esfuerzos se expresa simplemente,

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon})\mathbb{I} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon} \quad (2.8)$$

donde \mathbb{I} es la matriz identidad de 3×3 y tr la traza matricial. En notación indicial,

$$\tau_{ij} = \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} \quad (2.9)$$

2.1.2. Ecuación de movimiento

El movimiento de cada punto del interior de un volumen está determinado por las fuerzas y esfuerzos que actúan en el interior del volumen y en su superficie exterior. La segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo V rodeado por una superficie S , sometido a una fuerza de cuerpo \mathbf{f} y tracciones \mathbf{T} se formula como,

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} dV = \iiint_V f_i dV + \iint_S T_i dS \quad (2.10)$$

Expresando la tensión en función del tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\tau}$, es posible transformar la integral de superficie mediante el Teorema de Gauss,

$$\iint_S \tau_{ji} n_j dS = \iiint_V \tau_{ji,j} dV \quad (2.11)$$

Luego, para todo volumen donde se cumplan estos supuestos, el movimiento de sus partículas están regidas por la ecuación, (Aki & Richards, 1980)

$$\rho\ddot{u}_i - f_i - \tau_{ij,j} = 0 \quad (2.12)$$

Dada la simetría del tensor de esfuerzos, (2.12) puede escribirse vectorialmente como

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{f} - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad (2.13)$$

2.2. Teoremas de Reciprocidad y Representación

Los Teoremas de Reciprocidad y Representación permiten obtener relaciones generales entre pares de soluciones para los desplazamientos en medios elásticos, cuya finalidad es poder representar los desplazamientos de un complicado sistemas de fuerzas por medio de los producidos por otro más simple.

2.2.1. Teorema de Reciprocidad de Betti

Sea un medio continuo y elástico de volumen V rodeado por una superficie S . Sea $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ el campo de desplazamiento producto de la acción de la fuerza de cuerpo \mathbf{f} y a los esfuerzos $\boldsymbol{\tau}$ sobre este volumen, y sea $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ otro campo de desplazamiento producto del sistema de fuerzas internas \mathbf{g} y de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$, sobre el mismo volumen. En cada caso se cumple, (Aki & Richards, 1980)

$$\iiint_V (\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{v} \, dV + \iint_S \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \iiint_V (\mathbf{g} - \rho \ddot{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{u} \, dV + \iint_S \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS, \quad (2.14)$$

expresión conocida como el Teorema de reciprocidad de Betti.

Demostración

En virtud del Teorema de divergencia,

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}) \, dV \quad (2.15)$$

Del mismo modo, la integral de superficie del lado derecho de (2.14) puede ser expresada como una integral de volumen, con lo que se obtiene,

$$\iiint_V [(\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau})] \, dV = \iiint_V [(\mathbf{g} - \rho \ddot{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma})] \, dV \quad (2.16)$$

La ecuación (2.16) puede ser compactada gracias a (2.13), reemplazando $\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}$ con $-\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$ en el lado izquierdo y $\mathbf{g} - \rho \ddot{\mathbf{v}}$ con $-\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ al lado derecho,

$$\iiint_V [(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau})] \, dV = \iiint_V [(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma})] \, dV \quad (2.17)$$

En notación indicial,

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} v_i - \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i \tau_{ij}) \right] dV = \iiint_V \left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} u_i - \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \sigma_{ij}) \right] dV \quad (2.18)$$

Por regla del producto,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (v_i \tau_{ij}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \tau_{ij} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} v_i, \quad (2.19)$$

con la cual, $\frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \sigma_{ij})$ puede ser reescrito de manera similar. Sustituyendo estas expresiones en (2.18), esta se reduce a

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \tau_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} \quad (2.20)$$

Sustituyendo $\tau_{ij} = c_{ijpq} \frac{\partial u_p}{\partial x_q}$, y $\sigma_{ij} = c_{ijpq} \frac{\partial v_p}{\partial x_q}$ y haciendo uso de la simetría $c_{ijpq} = c_{pqij}$, la igualdad es verificada y el Teorema de Betti probado.

2.2.2. Forma integral del Teorema de Betti

El Teorema de Betti, tal como está enunciado en (2.14), no involucra condiciones iniciales para \mathbf{u} y \mathbf{v} . También sigue siendo válido si \mathbf{f} , $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{u} , $\ddot{\mathbf{u}}$ son evaluadas en un instante t_1 y \mathbf{g} , $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{v} , $\ddot{\mathbf{v}}$ en un instante diferente t_2 . Al elegir $t_1 = t$ y $t_2 = T - t$ e integrar la ecuación (2.16) en el tiempo $[0, T]$, los términos que involucran aceleraciones se reducen a los valores iniciales y finales de los campos de desplazamiento. En efecto,

$$\begin{aligned} \int_0^T \{ \ddot{\mathbf{v}}(T-t) \mathbf{u}(t) - \ddot{\mathbf{u}}(t) \mathbf{v}(T-t) \} dt &= \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \{ \dot{\mathbf{v}}(T-t) \mathbf{u}(t) - \dot{\mathbf{u}}(t) \mathbf{v}(T-t) \} dt \\ &= \{ \dot{\mathbf{v}}(0) \mathbf{u}(T) - \dot{\mathbf{u}}(T) \mathbf{v}(0) - \dot{\mathbf{v}}(T) \mathbf{u}(0) - \dot{\mathbf{u}}(0) \mathbf{v}(T) \} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Bajo las condiciones de causalidad, los desplazamientos y velocidades son nulos antes de un tiempo dado. Eligiendo ese instante como origen de referencia, se tiene que $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}} = 0$ para $t \leq 0$, con lo que,

$$\rho \int_{-\infty}^{\infty} \{ \ddot{\mathbf{v}}(T-t) \mathbf{u}(t) - \ddot{\mathbf{u}}(t) \mathbf{v}(T-t) \} dt = \mathbf{0} \quad (2.22)$$

Luego, se deduce del Teorema de Betti el Teorema de Betti integral, (Aki & Richards,

1980)

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_V \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, T - t) dV dt + \int_{-\infty}^{\infty} \iint_S \mathbf{v}(\mathbf{x}, T - t) \cdot \boldsymbol{\tau}(t) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_V \mathbf{g}(\mathbf{x}, T - t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dV dt + \int_{-\infty}^{\infty} \iint_S \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\sigma}(T - t) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS dt
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

2.2.3. Función de Green para la ecuación de la elastodinámica

Un tipo de fuerzas de gran interés por su sencillez y utilidad en sismología son las denominadas *fuerzas impulsivas unidireccionales*. Se expresan analíticamente a través de la función delta de Dirac,

$$f_i = \delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta(t - T) \tag{2.24}$$

Esta expresión describe la fuerza unidireccional aplicada en el punto $\boldsymbol{\xi}$ en el instante T , con dirección n . El campo de desplazamiento resultante a esta fuerza se denomina *función de Green de la elastodinámica*. Denotando $G_{in}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, T)$ a la función de Green resultante de la aplicación de la fuerza (2.24), esta debe cumplir,

$$\rho \frac{\partial^2 G_{in}}{\partial t^2} - \delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta(t - T) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijpq} \frac{\partial G_{pn}}{\partial x_q} \right) = 0 \tag{2.25}$$

La función de Green caracteriza el medio, ya que depende de sus coeficientes elásticos, su densidad, y de las condiciones de contorno de su superficie S . Esta puede ser obtenida analíticamente para ciertos medios sencillos, como en algunos modelos de Tierra, y numéricamente para modelos más complicados, por cierto más realistas. Su importancia radica en la relación que se puede establecer con otros desplazamientos resultado de sistemas de fuerzas más complicadas, mediante los Teoremas de Representación.

2.2.4. Reciprocidad en espacio para la función de Green

Sean las fuerzas impulsivas,

$$\begin{aligned}
 f_i(\mathbf{x}, t) &= \delta_{im} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_1) \delta(t) \\
 g_i(\mathbf{x}, t) &= \delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_2) \delta(t)
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

y sus respectivas respuestas mecánicas,

$$\begin{aligned}
 u_i(\mathbf{x}, t) &= G_{im}(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\xi}_1, 0) \\
 v_i(\mathbf{x}, t) &= G_{in}(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\xi}_2, 0)
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

sobre las cuales se imponen alguna condición de borde homogénea. Entonces, el Teorema de Betti aplicado a (2.26) y (2.27) no involucra integrales de superficie, con lo que se obtiene,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_V \delta_{im} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_1) \delta(t) G_{in}(\mathbf{x}, \tau - t; \boldsymbol{\xi}_2, 0) dV dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_V \delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_2) \delta(\tau - t) G_{im}(\mathbf{x}, \tau - t; \boldsymbol{\xi}_1, 0) dV dt \quad (2.28) \end{aligned}$$

Por propiedades de la función delta, las integrales de volumen se reducen a,

$$G_{mn}(\boldsymbol{\xi}_1, \tau; \boldsymbol{\xi}_2, 0) = G_{nm}(\boldsymbol{\xi}_2, \tau; \boldsymbol{\xi}_1, 0) \quad (2.29)$$

La igualdad (2.29) establece que la componente m del desplazamiento en $\boldsymbol{\xi}_1$ debido a una fuerza impulsiva en el punto $\boldsymbol{\xi}_2$ de dirección n , es la misma a componente n del desplazamiento en $\boldsymbol{\xi}_2$ debido a una fuerza impulsiva en el punto $\boldsymbol{\xi}_1$ de dirección m .

2.2.5. Teorema de Representación de Knopoff - de Hoop

Para encontrar una expresión para los desplazamientos \mathbf{u} debido a una fuerza de cuerpo \mathbf{f} actuando en V , basta relacionar dicha respuesta con la fuerza de cuerpo $g_i(\mathbf{x}, t) = \delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta(t)$ y su respectiva solución $v_i(\mathbf{x}, t) = G_{in}(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\xi}, 0)$ mediante el Teorema de Betti integral. Denominando $\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{n})$ a la tracción debido a \mathbf{u} , sigue que,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_V f_i(\mathbf{x}, t) \cdot G_{in}(\mathbf{x}, \tau - t; \boldsymbol{\xi}, 0) dV dt + \int_{-\infty}^{\infty} \iint_S G_{in}(\mathbf{x}, \tau - t; \boldsymbol{\xi}, 0) T_i(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{n}) dS dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_V \delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta(\tau - t) u_i(\mathbf{x}, t) dV dt + \int_{-\infty}^{\infty} \iint_S u_i(\mathbf{x}, t) c_{ijpq} n_j G_{pm,q}(\mathbf{x}, \tau - t; \boldsymbol{\xi}, 0) dS dt \quad (2.30) \end{aligned}$$

La primera integral del lado izquierdo colapsa a $u_n(\boldsymbol{\xi}, \tau)$, con lo que,

$$\begin{aligned}
 u_n(\boldsymbol{\xi}, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_V f_i(\mathbf{x}, t) \cdot G_{in}(\mathbf{x}, \tau - t; \boldsymbol{\xi}, 0) dV dt \\
 &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \iint_S u_i(\mathbf{x}, t) c_{ijpq} n_j G_{pn,q}(\mathbf{x}, \tau - t; \boldsymbol{\xi}, 0) dS dt \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \iint_S G_{in}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\xi}, 0) T_i(\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau), \mathbf{n}) dS dt
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

El inconveniente de la expresión (2.31) es que involucra a la función de Green de una fuerza impulsiva aplicada en el mismo punto de observación $\boldsymbol{\xi}$. Para remediar este hecho, se hace uso de la reciprocidad espacial de la función de Green. Intercambiando el nombre de las variables, obtenemos la expresión definitiva del Teorema de Representación, (Burridge & Knopoff, 1964)

$$\begin{aligned}
 u_n(\mathbf{x}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_V f_i(\boldsymbol{\xi}, \tau) \cdot G_{ni}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\xi}, 0) dV d\tau \\
 &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \iint_S u_i(\boldsymbol{\xi}, \tau) c_{ijpq} \nu_j G_{np,q'}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\xi}, 0) dS d\tau \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \iint_S G_{ni}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\xi}, 0) T_i(\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, \tau), \mathbf{n}) dS d\tau,
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

donde p' indica que el subíndice se refiere al segundo conjunto de argumentos de G_{np}

$$G_{np,q'}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\xi}, 0) = \frac{\partial}{\partial \xi_q} G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\xi}, 0), \tag{2.33}$$

y la convención de sumación aún aplica. Para hacer uso de la reciprocidad espacial de la función de Green, es necesario imponer alguna condición de borde homogénea, ya sea $G_{in}(\boldsymbol{\xi}, t - \tau; \mathbf{x}, 0) = 0$ para $\boldsymbol{\xi}$ en S , ó $c_{ijpq} n_j G_{pn,q}(\boldsymbol{\xi}, t - \tau; \mathbf{x}, 0) = 0$ para $\boldsymbol{\xi}$ en S , con lo que una de las integrales de superficie se anula. La condición elegida dependerá del tipo de fenómeno que se desee representar, con su respectiva condición de borde.

La importancia del Teorema de Representación es que, caracterizado el medio vía la función de Green, el campo de desplazamiento puede ser determinado mediante las fuerzas de cuerpo actuando en el medio y las características del deslizamiento y las tracciones en la superficie.

2.3. Teorema de Representación para Modelo de Falla

Dado el problema de determinar los desplazamientos producidos por un deslizamiento espontáneo en un plano de falla, se busca establecer una formulación del problema de tal forma de aplicar los resultados previamente obtenidos. Principalmente, relacionar los desplazamientos con una función de Green (cuya expresión dependerá de los supuestos sobre las características del medio) mediante el Teorema de Representación.

Para este motivo, se modela la Tierra como un medio continuo y elástico de volumen V de superficie S . La falla es idealizada como una *dislocación*, esto es, una discontinuidad en los desplazamientos a través de la superficie Σ , completamente contenida en V . La superficie de V es dividida en una superficie exterior S y en una superficie interna Σ_ϵ , rodeando Σ (figura 2.1). Dada esta discontinuidad de los desplazamientos en Σ , las ecuaciones de movimiento no se satisfacen a través del interior de S . Sin embargo, son válidas en la región encerrada por $S + \Sigma_\epsilon$, donde puede ser aplicado el Teorema de Representación.

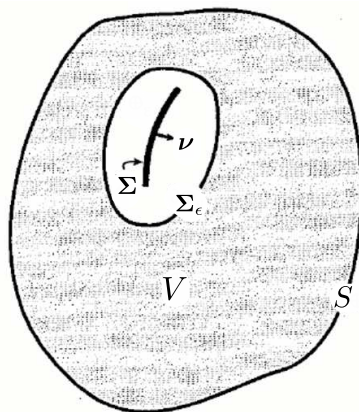


Figura 2.1: Medio elástico de volumen V , cuya superficie interior Σ modela una falla de cizalle.

Asumiendo que no existen fuerzas de cuerpo actuando en el medio (esto es, despreciando fuerzas como la gravedad), la integral de volumen en (2.32) es nula. Para las integrales de superficie, se identifica S con la superficie de la Tierra, la cual se supone libre de tensiones, por lo que tanto \mathbf{u} como \mathbf{G} satisfacen la misma condición de borde homogénea. De este modo, las integrales de superficie en (2.32) sólo involucran aportes de la superficie interior Σ_ϵ .

Si la región Σ_ϵ es considerada delgada, con ancho menor que la longitud de onda más corta de interés, entonces sólo es necesario considerar dos superficies Σ^+ y Σ^- que rodeen a lo largo de Σ . La discontinuidad en los desplazamientos entre las dos superficies se denota $[\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, \tau)] = \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, \tau)|_{\Sigma^+} - \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, \tau)|_{\Sigma^-}$. Como señala Haskell (1964), cualquier proceso físicamente razonable de falla dentro de una zona estrecha entre dos superficies es incapaz de producir fuerzas F^+ y F^- que no sean iguales en magnitud y opuestas en sentido, al menos sobre intervalos no más pequeños que el tiempo de viaje sísmico entre las superficies. Así, se asume que la dislocación es una dislocación de somigliana (a través del cual las fuerzas, y así las tracciones son continuas) con lo que $[\mathbf{T}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu})] = 0$. Además, \mathbf{G} es continua en V (pues es la respuesta mecánica a una fuerza impulsiva). Por lo tanto, la expresión para los desplazamientos es igual a la integral no nula en (2.32). Denotando $\boldsymbol{\nu}$ a la normal de Σ (desde Σ^- a Σ^+), la expresión para el campo de desplazamientos es, (Aki & Richards, 1980)

$$\begin{aligned} u_n(\mathbf{x}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \iint_{\Sigma} [u_i(\boldsymbol{\xi}, \tau)] c_{ijpq} \nu_j G_{np,q}(\mathbf{x}, \tau - t; \boldsymbol{\xi}, 0) d\Sigma d\tau \\ &= \iint_{\Sigma} [u_i] c_{ijpq} \nu_j * G_{np,q} d\Sigma \end{aligned} \quad (2.34)$$

La ecuación (2.34) establece que basta conocer el campo de deslizamiento en la falla para determinar el campo de desplazamiento en cualquier punto del medio.

2.4. Fuerzas de Cuerpo Equivalentes

El modelo de fuente sísmica, caracterizado por el Teorema de Representación, no involucra directamente la presencia de fuerzas de cuerpo. El desplazamiento en el punto (\mathbf{x}, t) es calculado considerando solamente las características cinemáticas de la dislocación. La componente dinámica del fenómeno de propagación de ondas sísmicas sólo aparece implícitamente en las fuerzas de cuerpo que definen las funciones de Green. Es por esto que resulta natural buscar relacionar la descripción cinemática de la ruptura con un sistema útil de fuerzas dinámicamente equivalente, es decir, que produzcan un mismo patrón de ondas sísmicas.

Para las falla de cizalle, la dislocación puede ser visualizada como el producto del deslizamiento entre dos bloques de material, donde la dislocación está restringida al plano que conecta ambos bloques. Sobre este plano, cada punto puede tener vectores de desplazamiento levemente distintos. En general, es esperable que sean cercanamente paralelos, con magnitudes variando en función de su posición relativa a los extremos de la zona

de ruptura. Si se consideran las propiedades cinemáticas promedio de la ruptura como deslizamiento de bloques, pareciera ser dinámicamente equivalente a un par de fuerzas de igual magnitud, cuyas direcciones corresponden al movimiento relativo entre los bloques (figura 2.2).

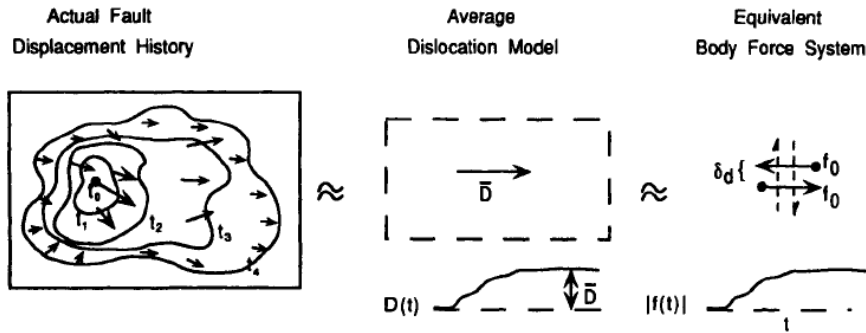


Figura 2.2: Sistema de fuerzas equivalente a la descripción promedio de una dislocación. (Lay & Wallace, 1995)

Sin embargo, el modelo de falla de cupla simple tiene un momento asociado $M_0 = |\mathbf{f}|\delta d$ (con δd la separación entre las fuerza, $\delta d \rightarrow 0$, $|\mathbf{f}| \rightarrow \infty$ cuyo producto es constante M_0). Una solución para este inconveniente es incorporar un par de fuerzas perpendiculares al plano de falla tal que el momento angular neto del sistema sea nulo, denominado *modelo de doble-cupla*. Durante la década del 20 hasta mediados de los 60 fue ampliamente debatida la idoneidad de ambos modelos para describir el proceso de ruptura. Finalmente, la representación más aceptada es el modelo de doble-cupla, gracias a los trabajos de Mayurama (1963) y Burridge & Knopoff (1964). Siguiendo el desarrollo de Burridge & Knopoff (1964), basta considerar el Teorema de Representación para la dislocación de superficie Σ descrita en la sección anterior. Para la orientación previamente elegida, y sin imponer condiciones sobre las discontinuidades $[\mathbf{u}]$ y $[\mathbf{T}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu})]$ sobre Σ , se obtiene,

$$\begin{aligned}
 u_n(\mathbf{x}, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_V f_p(\boldsymbol{\eta}, \tau) \cdot G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\eta}, 0) dV(\boldsymbol{\eta}) d\tau \\
 & + \int_{-\infty}^{\infty} \iint_{\Sigma} [u_i(\boldsymbol{\xi}, \tau)] c_{ijpq} \nu_j G_{np,q}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\xi}, 0) d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) d\tau \\
 & - \int_{-\infty}^{\infty} \iint_{\Sigma} [T_p(\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, \tau), \boldsymbol{\nu})] G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\xi}, 0) d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) d\tau
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Las funciones de Green integradas sobre la superficie Σ pueden ser localizadas en la integral de volumen mediante la función delta de Dirac,

$$G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau, \boldsymbol{\xi}, 0) = \iiint_V \delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}) G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\eta}, 0) dV(\boldsymbol{\eta}) \quad (2.36a)$$

$$-G_{np,q}(\mathbf{x}, t - \tau, \boldsymbol{\xi}, 0) = \iiint_V \frac{\partial}{\partial \eta_q} \delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}) G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\eta}, 0) dV(\boldsymbol{\eta}), \quad (2.36b)$$

donde,

$$\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) = \delta(x_1 - \xi_1) \delta(x_2 - \xi_2) \delta(x_3 - \xi_3) \quad (2.37)$$

Sustituyendo estas expresiones en (2.35) se obtiene,

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_V G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\eta}, 0) \left\{ f_p(\boldsymbol{\eta}, \tau) - \left(\iint_{\Sigma} [u_i(\boldsymbol{\xi}, \tau)] c_{ijpq} \nu_j \frac{\partial}{\partial \eta_q} \delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}) + [T_p(\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, \tau), \boldsymbol{\nu})] \delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}) d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) \right) \right\} dV(\boldsymbol{\eta}) d\tau \quad (2.38)$$

donde f_p representa la fuerza de cuerpo. La fuerza equivalente a la discontinuidad en las tracciones $[\mathbf{T}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, \tau), \boldsymbol{\nu})]$ se identifica con la expresión,

$$\mathbf{f}^{[\mathbf{T}]}(\boldsymbol{\eta}, \tau) = - \iint_{\Sigma} [\mathbf{T}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, \tau), \boldsymbol{\nu})] \delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}) d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) \quad (2.39)$$

La fuerza equivalente a la discontinuidad en los desplazamientos $[u_i(\boldsymbol{\xi}, \tau)]$ es identificada con,

$$f_p^{[\mathbf{u}]}(\boldsymbol{\eta}, \tau) = - \iint_{\Sigma} [u_i(\boldsymbol{\xi}, \tau)] c_{ijpq} \nu_j \frac{\partial}{\partial \eta_q} \delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}) d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) \quad (2.40)$$

De este modo, el efecto de la discontinuidad a través de Σ es dinámicamente equivalente al sistema de fuerzas de cuerpo $\mathbf{f}^{[\mathbf{T}]}$ y $\mathbf{f}^{[\mathbf{u}]}$. Dado que la falla en V es un proceso interno, el momento total y las fuerzas se conservan. Sigue que la fuerza total debido a $\mathbf{f}^{[\mathbf{u}]}$ y el momento total para cualquier punto fijo es cero. En efecto, la expresión analítica para la fuerza neta,

$$\begin{aligned} \iiint_V f_p^{[\mathbf{u}]}(\boldsymbol{\eta}, \tau) dV(\boldsymbol{\eta}) &= - \iint_{\Sigma} [u_i] c_{ijpq} \nu_j \left\{ \iiint_V \frac{\partial \delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi})}{\partial \eta_q} dV(\boldsymbol{\eta}) \right\} d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) \\ &= - \iint_{\Sigma} [u_i] c_{ijpq} \nu_j \left\{ \iint_S \delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}) n_q dS(\boldsymbol{\eta}) \right\} d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

donde la última igualdad es debido a que Σ y S no tienen puntos en común. En notación indicial, el momento angular neto se expresa como,

$$\begin{aligned} \iiint_V \epsilon_{mnp}(\eta_n - \eta_{0n}) f_p^{[u]} dV &= - \iint_{\Sigma} c_{ijqp} \nu_j [u_i] \left\{ \iiint_V \epsilon_{mnp}(\eta_n - \eta_{0n}) \frac{\partial}{\partial \eta_q} \delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}) dV \right\} d\Sigma \\ &= \iint_{\Sigma} \epsilon_{mqp} c_{ijpq} \nu_j [u_i] d\Sigma \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

para todo η_{0n} fijo. La última igualdad es producto de la simetría de los módulos elásticos y la definición del símbolo de permutación (Apéndice A).

Para visualizar de mejor forma la distribución de las fuerzas equivalentes sobre el plano de falla, se considera como ejemplo una falla Σ que yace en el plano $\xi_3 = 0$, con lo que $\nu_1 = \nu_2 = 0$, y el deslizamiento $[\mathbf{u}]$ no tiene componentes en la dirección ξ_3 . Si ξ_1 es la dirección del deslizamiento, se tiene además $[u_2] = [u_3] = 0$. Las fuerzas de cuerpo equivalente se reducen a,

$$f_p^{[u]}(\boldsymbol{\eta}, \tau) = - \iint_{\Sigma} [u_1(\boldsymbol{\xi}, \tau)] c_{13pq} \nu_j \frac{\partial}{\partial \eta_q} \delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}) d\xi_1 d\xi_2 \quad (2.43)$$

En un medio isotrópico, se obtiene de (2.7) que $c_{13pq} = 0$, salvo $c_{1313} = c_{1331} = \mu$. Luego,

$$\begin{aligned} f_1(\boldsymbol{\eta}, \tau) &= - \iint_{\Sigma} \mu [u_1(\boldsymbol{\xi}, \tau)] \delta(\eta_1 - \xi_1) \delta(\eta_2 - \xi_2) \frac{\partial}{\partial \eta_3} \delta(\eta_3) d\xi_1 d\xi_2 \\ f_2(\boldsymbol{\eta}, \tau) &= 0 \\ f_3(\boldsymbol{\eta}, \tau) &= - \iint_{\Sigma} \mu [u_1(\boldsymbol{\xi}, \tau)] \frac{\partial}{\partial \eta_3} \delta(\nu_1 - \xi_1) \delta(\eta_2 - \xi_2) \delta(\eta_3) d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (2.44)$$

De la integral que define f_1 se obtiene,

$$f_1(\boldsymbol{\eta}, \tau) = -\mu [u_1(\boldsymbol{\eta}, \tau)] \frac{\partial}{\partial \eta_3} \delta(\eta_3) \quad (2.45)$$

Así, f_1 representa un sistema de cuplas simples (fuerzas en dirección $\pm \eta_1$, brazo en dirección η_3 , momento en dirección η_2) distribuido sobre Σ (figura 2.3). El momento total debido a esta componente de la fuerza de cuerpo, alrededor del eje η_2 es,

$$\iiint_V \eta_3 f_1 dV = - \iiint_{\Sigma} \eta_3 \mu [u_1] \frac{\partial}{\partial \eta_3} \delta(\eta_3) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 = \iint_{\Sigma} \mu [u_1(\boldsymbol{\xi}, \tau)] d\eta_1 d\eta_2 \quad (2.46)$$

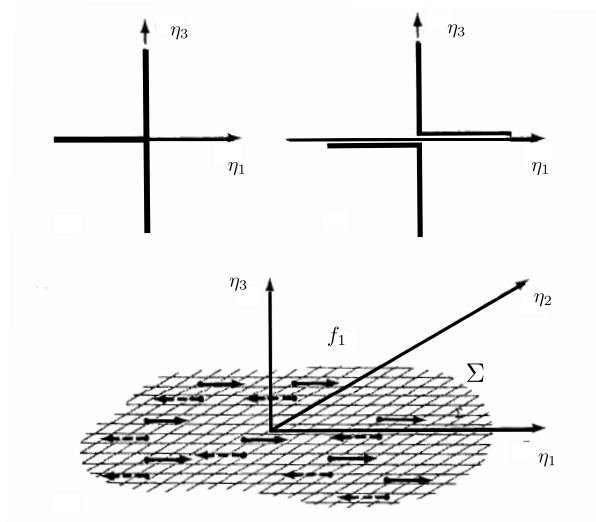


Figura 2.3: Diagrama interpretativo de la componente f_1 . (Aki & Richards, 1980)

La componente f_3 es simplemente,

$$f_3(\boldsymbol{\eta}, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \eta_1} \{ \mu [u_1(\boldsymbol{\eta}, \tau)] \} \delta(\eta_3) \quad (2.47)$$

por lo que representa un sistema de fuerzas simples (figura 2.4). Como el momento angular neto es cero, se tiene que el momento angular debido a f_3 es $-\iint_{\Sigma} \mu [u_1(\boldsymbol{\xi}, \tau)] d\eta_1 d\eta_2$

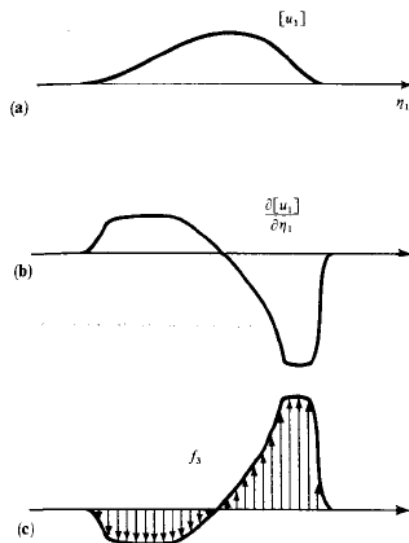


Figura 2.4: Diagrama interpretativo de la componente f_3 . (Aki & Richards, 1980)

La expresión (2.46) motiva la introducción del concepto de *tensor densidad de momento sísmico*, definido por,

$$m_{pq} = [u_i] \nu_j c_{ijpq} \quad (2.48)$$

A partir de este tensor, se puede reescribir el Teorema de Representación para el modelo de falla (2.34) como,

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \iint_{\Sigma} m_{pq} * G_{np,q} d\Sigma \quad (2.49)$$

La importancia de la convolución como operador lineal radica en la expresión de la solución de ecuaciones diferenciales a coeficientes constantes. Dado que la función de Green es la solución fundamental de una ecuación de la elastodinámica, la suma sobre p de la convolución $m_{pq} * G_{np}$ resulta la n -ésima componente de la solución de un medio resultante a una fuerza de magnitud m_{pq} . Sin embargo, la expresión (2.49) involucra las derivadas de la función de Green. Para ver el sentido físico de esta convolución, basta expresar $G_{np,q}$ como,

$$G_{np,q} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{G_{np}(\mathbf{x}, \tau - t; \boldsymbol{\xi}, 0) - G_{np}(\mathbf{x}, \tau - t; \boldsymbol{\xi} - \Delta l \boldsymbol{\xi}_q, 0)}{\Delta l}, \quad (2.50)$$

que es equivalente a la respuesta de la acción de cuplas separadas por una distancia Δl tendiendo a cero en la dirección q . De esta manera, la expresión para los desplazamientos (2.49) es dinámicamente equivalente a la acción de la suma de cuplas distribuidas sobre Σ , con m_{pq} correspondiendo a la magnitud de la cupla (p, q) . La figura 2.5 muestra las nueve cuplas que son representadas por el tensor densidad de momento sísmico. Para un medio isotrópico, m_{pq} se simplifica mediante (2.7),

$$m_{pq} = \lambda \nu_k [u_k] \delta_{pq} + \mu (\nu_p [u_q] + \nu_q [u_p]), \quad (2.51)$$

y para un modelo de fuente sísmica puramente de cizalle, $(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{u} = 0)$

$$m_{pq} = \mu (\nu_p [u_q] + \nu_q [u_p]), \quad (2.52)$$

o equivalentemente,

$$m_{pq} = \mu \Delta u (\nu_p l_q + \nu_q l_p), \quad (2.53)$$

donde Δu es el módulo de los deslizamientos con dirección \mathbf{l} . Entonces la expresión para los desplazamientos puede escribirse como

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \iint_{\Sigma} \mu \Delta u(\boldsymbol{\xi}, t) (l_p \nu_q + l_q \nu_p) * G_{np,q}(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\xi}, 0) d\Sigma \quad (2.54)$$

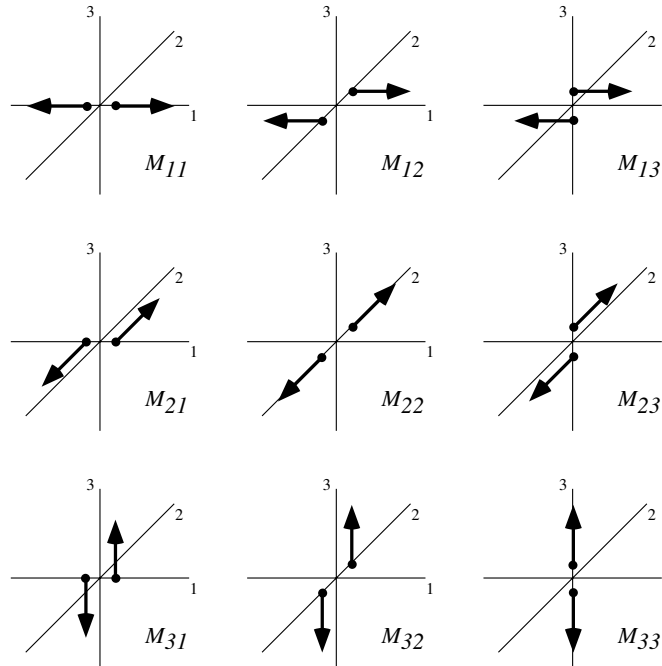


Figura 2.5: 9 Cuplas de fuerzas correspondientes a las componentes del tensor densidad de momento sísmico. (Shearer, 2009)

2.5. Tensor de Momento Sísmico

El uso del tensor de densidad de momento presenta algunos inconvenientes. Principalmente, reduce el problema de inversión de la fuente sísmica a conocer la distribución espacial y temporal de los deslizamientos de cada uno de los puntos en el plano de falla, hecho que en la práctica puede resultar ambicioso dependiendo del detalle que se desee obtener. Más aún, las fuerzas equivalentes distribuidas sobre el plano de falla no tienen una representación única. Una manera de constatar este hecho es escribiendo el Teorema de Representación para la falla de ejemplo anteriormente descrita,

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \iint_{\Sigma} \mu [u_1] \left\{ \frac{\partial G_{n1}}{\partial \xi_3} + \frac{\partial G_{n3}}{\partial \xi_3} \right\} d\Sigma d\tau, \quad (2.55)$$

que por integración por partes puede ser escrito como,

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \iint_{\Sigma} \mu \left([u_1] \frac{\partial G_{n1}}{\partial \xi_3} - \left[\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3} \right] G_{n3} \right) d\Sigma d\tau \quad (2.56)$$

Mediante la identificación de la derivada de la función de Green con la respuesta mecánica de la acción de cuplas, las fuerzas equivalentes para las expresiones (2.55) y (2.56) cuando $[u_1]$ es descrito como en la figura 2.4, se distribuyen como en la figura 2.6

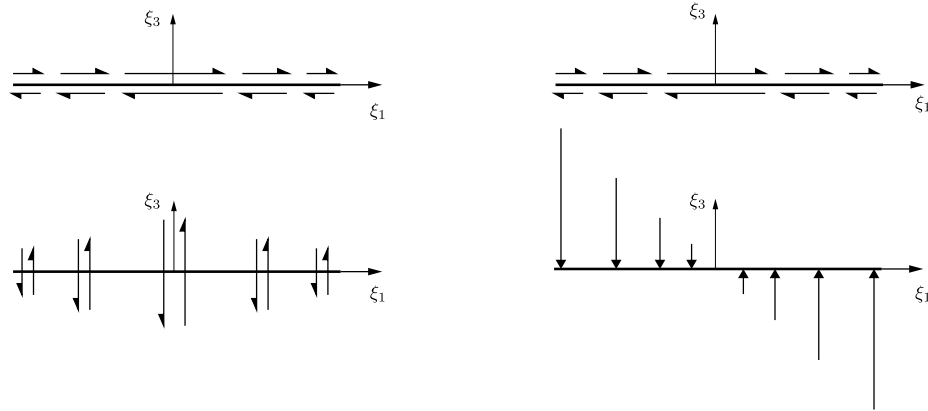


Figura 2.6: Sistemas de fuerzas que generan la misma radiación. Izquierda: Sistema de fuerzas correspondiente a (2.55). Derecha: Sistema de fuerzas correspondiente a (2.56). (Aki & Richards, 1980)

El ejemplo correspondiente a la figura 2.6 muestra la limitación de las fuerzas equivalentes como representación del proceso de ruptura. La determinación unívoca de las fuerzas de cuerpo equivalente se obtiene cuando es determinada la función de desplazamientos $[\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, \tau)]$, y por lo tanto, la contribución individual a las fuerzas de cuerpo de cada partícula de la falla. A grandes distancias de la falla de ruptura, a menudo las ondas observadas son aquellas con longitud de onda mucho más grande que la extensión de la falla, por efecto de la atenuación de altas frecuencias durante propagación (Capítulo 4). En tal caso, se dice que Σ actúa como una *fente puntual*, donde los aportes de los elementos de superficie $d\Sigma$ son aproximados al comportamiento de la superficie $A = \iint d\Sigma$. Para la aproximación de fuente puntual se define el *Tensor de momento sísmico* como,

$$M_{pq} = \iint_{\Sigma} m_{pq} d\Sigma = \iint_{\Sigma} [u_i] \nu_j c_{ijpq} d\Sigma \quad (2.57)$$

De esta manera, la distribución de las fuerzas de cuerpo equivalente se reduce a un sólo sistema de doble-cupla aplicada en un punto, de magnitud M_{pq} , que describe 9 posibles orientaciones de cuplas, como en la figura 2.5. El campo de desplazamiento para el modelo de foco puntual puede ser escrito entonces como,

$$u_n(\mathbf{x}, t) = M_{pq} * G_{np,q} \quad (2.58)$$

Para una dislocación de cizalle en un medio isotrópico, se tiene,

$$M_{pq} = M_0(t)(\nu_p l_q + \nu_q l_p) , \quad (2.59)$$

con $M_0(t) = \mu A \Delta u(t)$, donde A es el área de Σ , \mathbf{l} la dirección del deslizamiento, y Δu el deslizamiento promedio. El término M_0 se denomina *momento sísmico*, el cual fue introducido por Aki (1966). Es uno de los parámetros más útiles para caracterizar terremotos resultantes de una falla de deslizamiento, debido a que incluye al área de la falla, su deslizamiento promedio y el módulo de rigidez del material. De este modo, los desplazamientos para la aproximación de fuente puntual puede escribirse como

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \mu A (l_p \nu_q + l_q \nu_p) \Delta u(t) * G_{np,q}(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\xi}, 0) \quad (2.60)$$

Capítulo 3

Función de Green de la Elastodinámica

El Teorema de Representación determina el campo de desplazamiento mediante la descripción del proceso de ruptura en la región focal, que descendena los desplazamientos, y la derivada espacial del tensor de Green. Es este último elemento el que contiene las características de la propagación de las ondas sísmicas. Para un modelo realista de propagación, la respuesta mecánica a fuerzas impulsivas debiese ser determinada considerando las características particulares del medio en cuestión, tanto su heterogeneidad como su superficie libre. Sin embargo, expresar estas condiciones en la ecuación de la elastodinámica (2.13) dificulta considerablemente la determinación de la función de Green, al menos analíticamente. Por este motivo, el desarrollo teórico general consiste en determinar la función de Green suponiendo la Tierra como un medio elástico, homogéneo e infinito, para posteriormente realizar las correcciones correspondientes al efecto de la superficie libre y a la heterogeneidad de sus capas (Capítulo 4). El sistema de ecuaciones que rige el campo de desplazamiento en un medio homogéneo, infinito isotrópico es

$$\rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (3.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbb{I} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.2)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T] \quad (3.3)$$

Para encontrar la expresión cerrada del sistema de ecuaciones, se calcula $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ en función

de \mathbf{u} . Desarrollando la expresión de su primera componente,

$$\begin{aligned}
 (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})_1 &= \partial_{x_1} \sigma_{11} + \partial_{x_2} \sigma_{12} + \partial_{x_3} \sigma_{13} \\
 &= \lambda \partial_{x_1} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2\mu \partial_{x_1} (\partial_{x_1} u_1) + \mu \partial_{x_2} (\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2) + \mu \partial_{x_3} (\partial_{x_3} u_1 + \partial_{x_1} u_3) \\
 &= \lambda \partial_{x_1} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \partial_{x_1} (\partial_{x_1} u_1 + \partial_{x_2} u_2 + \partial_{x_3} u_3) + \mu \partial_{x_1} (\partial_{x_1 x_1}^2 u_1 + \partial_{x_2 x_2}^2 u_2 + \partial_{x_3 x_3}^2 u_3) \\
 &= (\lambda + \mu) \partial_{x_1} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu (\nabla^2 \mathbf{u})_1
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

De manera análoga, se determinan las demás componentes. Luego,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \tag{3.5}$$

Usando la identidad $\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \times \nabla \times \mathbf{u})$ se obtiene la formulación clásica para los desplazamientos elásticos en medios homogéneos isotrópicos (Udías, 1999),

$$\rho \partial_t^2 \mathbf{u} = \mathbf{f} + (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \tag{3.6}$$

3.1. Función de Green de la Elastodinámica en un Medio Homogéneo, Isotrópico no Acotado

3.1.1. Teorema de Lamé

Sea $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ la única solución de (3.6), con condiciones iniciales $\mathbf{u}(x, 0)$, $\partial_t \mathbf{u}(x, 0)$ y fuerza de cuerpo \mathbf{f} expresados vía los potenciales del Teorema de Helmholtz

$$\mathbf{f} = \nabla E + \nabla \times \mathbf{F}; \quad \partial_t \mathbf{u}(x, 0) = \nabla A + \nabla \times \mathbf{B}; \quad \mathbf{u}(x, 0) = \nabla C + \nabla \times \mathbf{D}$$

con $\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{D} = 0$. Entonces existen potenciales ϕ y $\boldsymbol{\Psi}$ para \mathbf{u} que cumplen las siguientes propiedades:

- (i) $\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \boldsymbol{\Psi}$
- (ii) $\nabla \cdot \boldsymbol{\Psi} = 0$
- (iii) $\ddot{\phi} = \frac{E}{\rho} + \alpha^2 \nabla^2 \phi$ (donde $\alpha = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}$)
- (iv) $\ddot{\boldsymbol{\Psi}} = \frac{\mathbf{F}}{\rho} + \beta^2 \nabla^2 \boldsymbol{\Psi}$ (donde $\beta = \frac{\mu}{\rho}$)

$\nabla\phi$ y $\nabla \times \Psi$ son llamados onda P y onda S respectivamente (Aki & Richards, 1980).

Demostración: integrando $\ddot{\phi}$ y $\ddot{\Psi}$ se construyen las funciones

$$\phi(x, t) = \rho^{-1} \int_0^t (t - \tau) \{E(x, t) + (\lambda + 2\mu) \nabla \cdot \mathbf{u}(x, \tau)\} d\tau + At + C \quad (3.7a)$$

$$\Psi(x, t) = \rho^{-1} \int_0^t (t - \tau) \{\mathbf{F}(x, t) - \mu \nabla \times \mathbf{u}(x, \tau)\} d\tau + \mathbf{B}t + \mathbf{D} \quad (3.7b)$$

(i) Directa de la ecuación (3.6)

(ii) Directa del hecho que $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ y que $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$

(iii), (iv) De la descomposición $\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \Psi$ se obtiene que

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (\nabla\phi) + \nabla \cdot (\nabla \times \Psi) \quad \nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times (\nabla\phi) + \nabla \times (\nabla \times \Psi) \quad (3.8a)$$

$$= \nabla \cdot (\nabla\phi) \quad = \nabla \times (\nabla \times \Psi) \quad (3.8b)$$

$$= \nabla^2\phi, \quad = \nabla^2\Psi \quad (3.8c)$$

donde se han usado las identidades vectoriales $\nabla \cdot (\nabla \times \Psi) = 0$ y $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$ para todo campo escalar ϕ y vectorial Ψ . Reemplazando (3.8c) en (3.7), se obtiene lo pedido \square

Para determinar la función de Green de la elastodinámica basta aplicar el Teorema de Lamé para una fuerza de cuerpo impulsiva. Los potenciales de Helmholtz para la fuerza de la forma $f_{il} = X_0(t)\delta(x)\delta_{il}$ (donde el subíndice l denota la dirección de la fuerza) se obtienen mediante la función \mathbf{W} ,

$$W_{il} = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{X_0(t)\delta(\boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} \delta_{il} dV = -\frac{X_0(t)}{4\pi|\mathbf{x}|} \delta_{il} \quad (3.9)$$

Los potenciales buscados son obtenidos mediante las identidades,

$$E_l(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \mathbf{W} = \frac{\partial W_{jl}}{\partial x_j} = -\frac{X_0(t)}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \quad (3.10)$$

$$F_{il}(\mathbf{x}, t) = -(\nabla \times \mathbf{W})_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial W_{kl}}{\partial x_j} = \epsilon_{ijl} \frac{X_0(t)}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \quad (3.11)$$

En virtud de (iii) y (iv) del Teorema de Lamé, los potenciales para el desplazamiento \mathbf{u} se determinan resolviendo las ecuaciones de ondas correspondientes,

$$\frac{\partial^2 \phi_l(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = -\frac{X_0(t)}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \alpha^2 \frac{\partial \phi_l(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_{il}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \epsilon_{ijl} \frac{X_0(t)}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \beta^2 \frac{\partial \Psi_{il}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (3.13)$$

cuyas respectivas soluciones (Apéndice B) son,

$$\phi_l(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x_l} \frac{1}{r} \right) \int_0^{r/|\alpha|} \tau X_0(t - \tau) d\tau \quad (3.14)$$

$$\Psi_{il}(\mathbf{x}, t) = \epsilon_{ijl} \frac{1}{4\pi\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} \right) \int_0^{r/|\alpha|} \tau X_0(t - \tau) d\tau \quad (3.15)$$

con $r = |\mathbf{x}|$. El último paso para obtener el desplazamiento debido a la fuerza impulsiva es calcular $\nabla\phi + \nabla \times \Psi$,

$$u_{il} = u_{il}^P + u_{il}^S = \frac{\partial \phi_l(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} + \epsilon_{ijk} \frac{\partial \Psi_{il}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} \quad (3.16)$$

El primer término de la suma es determinado simplemente mediante la regla del producto y de la cadena para las derivadas

$$\begin{aligned} u_{il}^P &= -\frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_l} \frac{1}{r} \right) \int_0^{r/\alpha} \tau X_0(t - \tau) d\tau \right\} \\ &= -\frac{1}{4\pi\rho} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l} \frac{1}{r} \right) \int_0^{r/\alpha} \tau X_0(t - \tau) d\tau - \frac{r}{4\pi\rho\alpha^2} \left(\frac{\partial}{\partial x_l} \frac{1}{r} \right) X_0 \left(t - \frac{r}{\alpha} \right) \frac{\partial r}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Las derivadas parciales de las funciones radiales r y $1/r$ pueden ser expresadas en función del coseno director $\gamma_i = x_i/r = \partial r/\partial x_i$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l} \frac{1}{r} = \frac{3\gamma_i \gamma_l - \delta_{il}}{r^3}; \quad r \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x_i} = -\frac{\gamma_i \gamma_l}{r}, \quad (3.18)$$

con lo que finalmente

$$u_{il}^P = -\frac{1}{4\pi\rho} \left(\frac{3\gamma_i \gamma_l - \delta_{il}}{r^3} \right) \int_0^{r/\alpha} \tau X_0(t - \tau) d\tau + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} \frac{\gamma_i \gamma_j}{r} X_0 \left(t - \frac{r}{\alpha} \right) \quad (3.19)$$

El cálculo del rotor del otro potencial se simplifica al hacer uso de las propiedades del símbolo de permutación (Apéndice A)

$$\begin{aligned}
 u_{il}^S &= \epsilon_{ijm}\epsilon_{mkl} \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r} \right) \int_0^{r/\beta} \tau X_0(t-\tau) d\tau \right\} \\
 &= (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \times \\
 &\quad \left\{ \frac{1}{4\pi\rho} \left(\frac{3\gamma_j\gamma_k - \delta_{jk}}{r^3} \right) \int_0^{r/\beta} \tau X_0(t-\tau) d\tau - \frac{r}{4\pi\rho\beta^2} \frac{\gamma_j\gamma_k}{r} X_0\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \right\} \\
 &= \frac{1}{4\pi\rho} \left(\frac{3\gamma_i\gamma_l - \delta_{ij}}{r^3} \right) \int_0^{r/\beta} \tau X_0(t-\tau) d\tau - \frac{r}{4\pi\rho\beta^2} \frac{(\delta_{il} - \gamma_i\gamma_l)}{r} X_0\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

donde ha sido usada la relación $\gamma_k\gamma_k = 1 - \gamma_l^2$, para $k \neq l$. De este modo, para una fuerza puntual de magnitud $X_0(t)$ en la dirección l , localizada en el origen, obtenemos la clásica solución de Stokes para el desplazamiento

$$\begin{aligned}
 u_i(x, t) &= \frac{1}{4\pi\rho} (3\gamma_i\gamma_l - \delta_{ij}) \frac{1}{r^3} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau X_0(t-\tau) d\tau \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} \gamma_i\gamma_l \frac{1}{r} X_0\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (\gamma_i\gamma_l - \delta_{il}) \frac{1}{r} X_0\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

El primer término integral decae como $1/r^2$ para fuentes de corta duración en comparación a $r/\beta - r/\alpha$ (Knopoff, 1967), por lo que es denominado término de *campo cercano*. Los otros 2 términos decaen como $1/r$ por lo que se denominan de *campo lejano*.

El primer término de campo lejano corresponde a la forma de onda denominada P

$$u_i^P = \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} \gamma_i\gamma_j \frac{1}{r} X_0\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) \quad (3.22)$$

el cual cumple las siguientes propiedades:

- (1) Propagación con velocidad $\alpha = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$.
- (2) Forma de onda proporcional a la magnitud de la fuerza aplicada.
- (3) Dirección del desplazamiento paralelo a la dirección de la fuente (pues $u_i^P \propto \gamma_i$) por lo tanto la forma de onda P es longitudinal, en la que la dirección del movimiento de partícula es la misma dirección que la de propagación.

El segundo término de campo lejano corresponde a la denominada forma de onda S

$$u_i^S = \frac{1}{4\pi\rho\beta^2}(\delta_{ij} - \gamma_i\gamma_j)\frac{1}{r}X_0\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \quad (3.23)$$

el cual cumple las siguientes propiedades:

- (1) Propagación con velocidad $\beta = [\mu/\rho]^{1/2}$
- (2) Forma de onda proporcional a la magnitud de la fuerza aplicada
- (3) Dirección del desplazamiento perpendicular a la dirección de la fuente (pues $u^S \cdot \gamma = 0$) por lo tanto la forma de onda S es transversal, en la que la dirección del movimiento de partícula es normal a la dirección de propagación.

El término de campo cercano son contribuciones tanto de la onda P como la onda S, las cuales no son fáciles de identificar de manera separada. Un análisis exhaustivo puede ser encontrado en Aki & Richards (1980), el cual no es expuesto en este trabajo debido al interés en el estudio de las ondas a distancias telesísmicas.

3.2. Campo de Desplazamiento para Campo Lejano

Para determinar el campo de desplazamiento en el campo lejano, basta convolucionar el tensor de momento sísmico con la derivada del término de campo lejano de la función de Green. Para la onda P, es necesario calcular

$$G_{np,q} = \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} \frac{\partial}{\partial\xi_q} \left\{ \frac{1}{r} \gamma_n \gamma_p \delta\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) \right\} \quad (3.24)$$

donde ξ es el punto de aplicación de la fuerza impulsiva, y $r^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2$. Conservando los términos de orden r^{-1} ,

$$\frac{1}{4\pi\rho\alpha^2 r} \gamma_n \gamma_p \frac{\partial}{\partial\xi_q} \delta\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) = -\frac{1}{4\pi\rho\alpha^3 r} \gamma_n \gamma_p \dot{\delta}\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) \frac{\partial r}{\partial\xi_q} \quad (3.25)$$

En función de los cosenos directores $\left(\frac{\partial r}{\partial\xi_q} = \frac{\xi_q - x_q}{r} = -\gamma_q\right)$,

$$G_{np,q} = \frac{1}{4\pi\rho\alpha^3 r} \gamma_n \gamma_p \gamma_q \dot{\delta}(t - (r/\alpha)) \quad (3.26)$$

Análogamente, la derivada con respecto a ξ_q de la componente S del campo lejano se expresa como,

$$G_{np,q} = \frac{1}{4\pi\rho\beta^3r}(\delta_{np} - \gamma_n\gamma_p)\gamma_q\dot{\delta}(t - (r/\beta)) \quad (3.27)$$

Convolucionando (3.26) y (3.27) con M_{pq} , se obtienen los desplazamientos en el campo lejano para el modelo de fuente puntual

$$u_n = \frac{\gamma_n\gamma_p\gamma_q}{4\pi\rho\alpha^3r}\dot{M}_{pq}\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \left(\frac{\delta_{np} - \gamma_n\gamma_p}{4\pi\rho\beta^3r}\right)\gamma_q\dot{M}_{pq}\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \quad (3.28)$$

Para una falla de cizalle en un medio isotrópico ($M_{pq} = \mu(\nu_p[u_q] + \nu_q[u_p])A$)

$$u_n = \frac{2\gamma_n\gamma_p\gamma_q\nu_q}{4\pi\rho\alpha^3r}\mu A\Delta\dot{u}_p\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \left(\frac{\nu_n\gamma_p - \delta_{np}\gamma_q\nu_q - 2\gamma_n\gamma_p\gamma_q\nu_q}{4\pi\rho\beta^3r}\right)\mu A\Delta\dot{u}_p\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \quad (3.29)$$

Rescribiendo vectorialmente los productos indiciales

$$\mathbf{u} = \frac{2(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{\gamma} \cdot \dot{\mathbf{u}}_\alpha)}{4\pi\rho\alpha^3r}\mu A\boldsymbol{\gamma} + \frac{[(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nu})\dot{\mathbf{u}}_\beta + (\boldsymbol{\gamma} \cdot \dot{\mathbf{u}}_\beta)\boldsymbol{\nu} - 2(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{\gamma} \cdot \dot{\mathbf{u}}_\beta)\boldsymbol{\gamma}]}{4\pi\rho\beta^3r}\mu A \quad (3.30)$$

donde $\dot{\mathbf{u}}_c$ es la velocidad de partícula en la fuente, promediada sobre el área A y evaluada en $t - r/c$, con $c = \alpha, \beta$.

Una forma de caracterizar las componentes P y S del campo lejano, expresada por (3.30), es estudiando la distribución espacial de las amplitudes alrededor de la fuente, o *patrón de radiación*. Dada la propagación radial y transversal de las ondas de cuerpo en el campo lejano, resulta natural realizar su descripción en un sistema de coordenadas esféricas. Eligiendo el sistema de ejes cartesianos de tal manera de situar la falla en el plano (x_1, x_2) , con $\xi = 0$, y dirección del desplazamiento en el eje \mathbf{x}_1 , sigue que $\boldsymbol{\nu} = (0, 0, 1)$, $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}, 0, 0)$. A partir de este sistema se introducen los vectores unitarios $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$ centrados en la fuente donde θ se mide desde el eje $\hat{\mathbf{x}}_3$, y ϕ se mide desde el eje $\hat{\mathbf{x}}_1$ (figura 3.1).

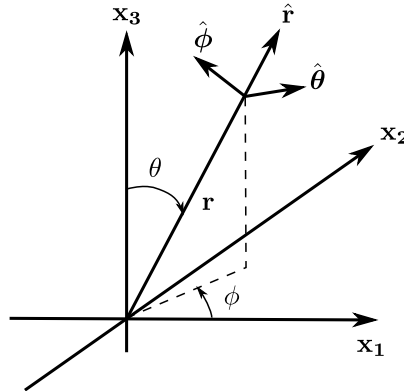


Figura 3.1: Vectores unitarios del sistema de coordenadas esféricas con origen en la fuente.

La relación entre los sistemas de coordenadas es establecida mediante las identidades,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\gamma} &= (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} &= (-\sin \phi, \cos \phi, 0)\end{aligned}\tag{3.31}$$

De estas relaciones se desprende fácilmente que $(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nu}) = \cos \theta$ y $(\boldsymbol{\gamma} \cdot \bar{\mathbf{u}}) = \sin \theta \cos \phi$. Expresando $\bar{\mathbf{u}}$, $\boldsymbol{\gamma}$ y $\boldsymbol{\nu}$ en el sistema de coordenadas esférico, el campo de desplazamientos para la onda P se escribe (Aki & Richard, 1980),

$$u^P = \frac{1}{4\pi\rho\alpha^3r} \sin 2\theta \cos \phi \hat{\mathbf{r}} \dot{M}_0 \left(t - \frac{r}{\alpha} \right)\tag{3.32}$$

y para la onda S

$$u^S = \frac{1}{4\pi\rho\beta^3r} (\cos 2\theta \cos \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} - \cos \theta \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}}) \dot{M}_0 \left(t - \frac{r}{\beta} \right)\tag{3.33}$$

En ambos casos, el patrón de radiación está formado por 4 nodos sinusoidales alrededor de la fuente. Para la onda P, los nodos tienen direcciones de movimiento alternante, positiva para los movimientos de compresión, y negativos para las dilataciones, los cuales están separados por dos planos ortogonales. Uno corresponde al plano de falla, y el otro, denominado *plano auxiliar*, está relacionado con la fuerzas de cuerpo equivalente perpendiculares al plano de falla. El máximo desplazamiento se encuentra en 45° entre el plano de falla y el plano auxiliar (figura 3.2). En el patrón de radiación de la onda S, los nodos alternan en la dirección de propagación (figura 3.3). El máximo coincide con los planos de falla y auxiliar. Ambos patrones no son capaces de distinguir entre el plano de falla y el plano auxiliar, debido a que en la definición de m_{pq} para un medio isotrópico, \mathbf{l} y $\boldsymbol{\nu}$ pueden ser intercambiados sin modificar la forma de la propagación (2.60).

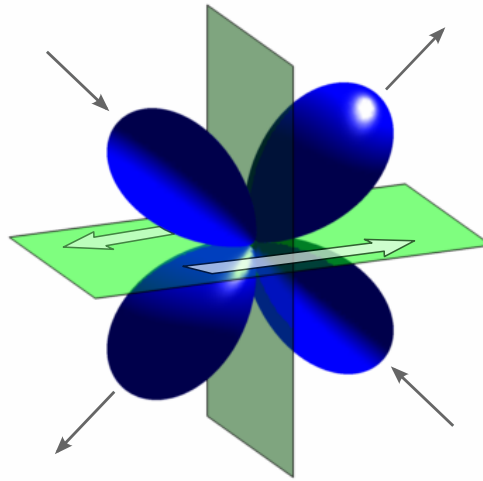


Figura 3.2: Patrón de radiación de la componente radial (onda P) del campo lejano. Las flechas blancas corresponden a la dirección de la dislocación sobre el plano de falla. Las flechas negras representan la dirección del desplazamiento.

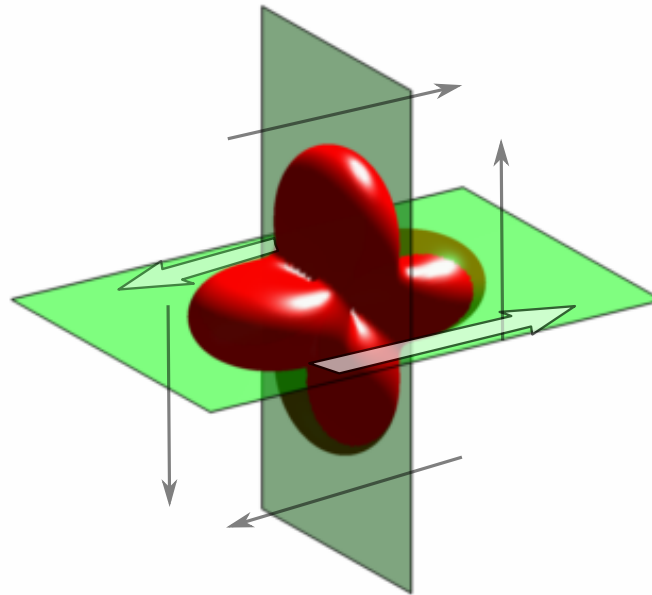


Figura 3.3: Patrón de radiación de la componente S del campo lejano. Las flechas blancas corresponden a la dirección de la dislocación sobre el plano de falla. Las flechas negras representan la dirección del desplazamiento de partícula asociada a cada nodo.

3.3. Patrón de Radiación en el Campo Lejano para una Fractura de Cizalle de Orientación Arbitraria en un Medio con Simetría Esférica

La descripción más general del patrón de radiación consiste en describir el deslizamiento $\bar{\mathbf{u}}$ sobre el plano de falla en un sistema de coordenadas geográfico, $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$, con direcciones norte, este y centro de la Tierra, respectivamente. Con este fin, el plano de falla es visualizado como la interfaz que separa dos bloques de material que presentan un deslizamiento relativo. El patrón de radiación estará de este modo en función de los parámetros que definen la orientación del plano de falla y de la orientación del deslizamiento sobre este (figura 3.4).

La traza de la falla se define como la intersección de la proyección del plano de falla con el plano horizontal. El *strike* ϕ_s es el azimut de la traza (el ángulo formado con respecto al norte geográfico). El *dip* δ , es el ángulo entre el plano de falla y el plano horizontal. La dirección de la traza es definida tal que el dip es menor a 90° (es decir, al orientar el pulgar de la mano derecha en ese sentido, y rotar la palma desde el plano horizontal hasta el plano de falla, dicha rotación es menor a 90°). El desplazamiento entre los dos bloques es descrito por el vector desplazamiento. El ángulo entre este vector y la horizontal medido sobre el plano de falla es denominado *slip* o *rake* λ . ϕ es el azimut del observador. En general, ϕ_s, δ, λ y la magnitud del desplazamiento entre los dos bloques pueden variar sobre la superficie de la falla, donde los valores promedio son usados para modelos simples.

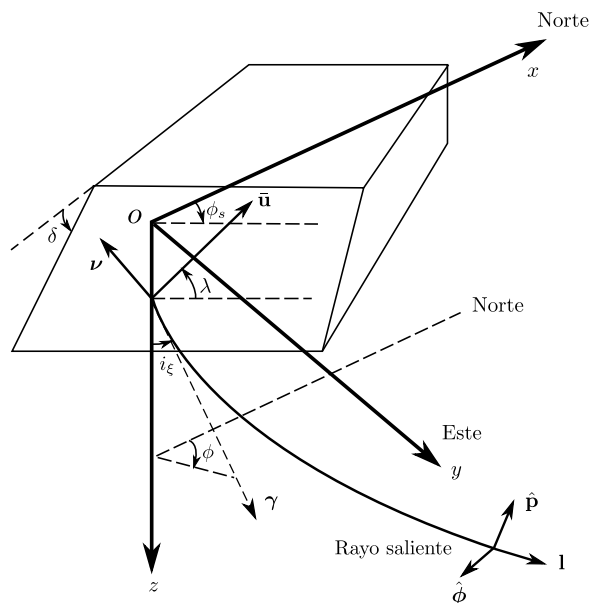


Figura 3.4: Parámetros del deslizamiento de una falla con respecto al sistema de coordenadas geográficas. (Aki & Richards, 1980)

Las componentes de los vectores unitarios $\boldsymbol{\nu}$ y $\bar{\mathbf{u}}$ en función de los ángulos ϕ_s , δ y λ están definidas por

$$\begin{aligned} \text{vector normal } \boldsymbol{\nu} &= -\sin \delta \sin \phi_s \hat{\mathbf{x}} + \sin \delta \cos \phi_s \hat{\mathbf{y}} - \cos \delta \hat{\mathbf{z}} \\ \text{deslizamiento } \bar{\mathbf{u}} &= \bar{u}(\cos \lambda \cos \phi_s + \cos \delta \sin \lambda \sin \phi_s) \hat{\mathbf{x}} \\ &\quad + \bar{u}(\cos \lambda \sin \phi_s - \cos \delta \sin \lambda \cos \phi_s) \hat{\mathbf{y}} - \bar{u} \sin \delta \sin \lambda \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Para un medio con simetría esférica, es posible definir un sistema ortogonal asociado al rayo, de vectores unitarios \mathbf{l} , $\hat{\mathbf{p}}$ y $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ (figura 3.4)

$$\begin{aligned} \text{Dirección onda P } \mathbf{l} = \boldsymbol{\gamma} &= \sin i_\xi \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin i_\xi \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos i_\xi \hat{\mathbf{z}} \\ \text{Dirección onda SV } \hat{\mathbf{p}} &= \cos i_\xi \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos i_\xi \sin \phi \hat{\mathbf{y}} - \sin i_\xi \hat{\mathbf{z}} \\ \text{Dirección onda SH } \hat{\boldsymbol{\phi}} &= -\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (3.35)$$

donde SV denota la componente vertical del movimiento de la onda S, y SH la componente horizontal, lo cual se traduce como $\mathbf{u}^{SV} = (\mathbf{u}^S \cdot \hat{\mathbf{p}})\hat{\mathbf{p}}$ y $\mathbf{u}^{SH} = (\mathbf{u}^S \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}})\hat{\boldsymbol{\phi}}$. El ángulo i_ξ , denominado *take-off*, es medido desde el eje $\hat{\mathbf{z}}_3$ y la dirección de propagación del rayo. Para este sistema de coordenadas los patrones de radiación R^P , R^{SV} y R^{SH} , en su forma adimensional, se expresan como (Aki y Richards, 1980),

$$\begin{aligned} R^P &= 2(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{\gamma} \cdot \dot{\bar{\mathbf{u}}}) / \dot{\bar{u}} \\ &= \cos \lambda \sin \delta \sin^2 i_\xi \sin 2(\phi - \phi_s) - \cos \lambda \cos \delta \sin 2i_\xi \cos(\phi - \phi_s) \\ &\quad + \sin \lambda \sin 2\delta (\cos^2 i_\xi - \sin^2 i_\xi \sin^2(\phi - \phi_s)) \\ &\quad + \sin \lambda \cos 2\delta \sin 2i_\xi \sin(\phi - \phi_s) \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} R^{SV} &= [(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nu})(\dot{\bar{\mathbf{u}}}_\beta \cdot \hat{\mathbf{p}}) + (\boldsymbol{\gamma} \cdot \dot{\bar{\mathbf{u}}}_\beta)(\boldsymbol{\nu} \cdot \hat{\mathbf{p}})] / \dot{\bar{u}} \\ &= \sin \lambda \cos 2\delta \cos 2i_\xi \sin(\phi - \phi_s) - \cos \lambda \cos \delta \cos 2i_\xi \cos(\phi - \phi_s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cos \lambda \sin \delta \sin 2i_\xi \sin 2(\phi - \phi_s) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sin \lambda \sin 2\delta \sin 2i_\xi (1 + \sin^2(\phi - \phi_s)) \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned}
 R^{SH} &= \left[(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nu})(\dot{\mathbf{u}}_{\beta} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}) + (\boldsymbol{\gamma} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{\beta})(\boldsymbol{\nu} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}) \right] / \dot{u} \\
 &= \cos \lambda \cos 2\delta \cos i_{\xi} \sin(\phi - \phi_s) + \cos \lambda \sin \delta \sin i_{\xi} \cos 2(\phi - \phi_s) \\
 &\quad + \sin \lambda \cos 2\delta \cos i_{\xi} \cos(\phi - \phi_s) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sin \lambda \sin 2\delta \sin i_{\xi} \sin 2(\phi - \phi_s)
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

con lo que el desplazamiento en el campo lejano pueden ser escrito para una orientación de falla arbitraria de la forma (Aki & Richards, 1980)

$$\mathbf{u}^p = \frac{R^P \mu A}{4\pi\rho\alpha^3 r} \dot{u} \left(t - \frac{r}{\alpha} \right) \mathbf{l} \tag{3.39}$$

$$\mathbf{u}^{SV} = \frac{R^{SV} \mu A}{4\pi\rho\beta^3 r} \dot{u} \left(t - \frac{r}{\beta} \right) \hat{\mathbf{p}} \tag{3.40}$$

$$\mathbf{u}^{SH} = \frac{R^{SH} \mu A}{4\pi\rho\beta^3 r} \dot{u} \left(t - \frac{r}{\beta} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{3.41}$$

3.4. Parametrización de la Función Fuente

La forma de la señal en el campo lejano (ecuación 3.28) depende principalmente de la derivada de la historia de los desplazamientos, $\Delta\dot{u}(t)$. Más aún, contiene toda la información del proceso de ruptura en la fuente, siendo por lo tanto uno de los parámetros principales que se busca determinar en el proceso de inversión. Para esto, se puede suponer de distintas formas que resulten fáciles de parametrizar.

La parametrización más sencilla es a través de un impulso en el tiempo (figura 3.5 (a)), donde la función fuente alcanza su máximo en forma instantánea. Una representación más realista es considerar que el deslizamiento o slip no ocurre instantáneamente, requiriendo un tiempo de formación, o *rise-time*. Este tiempo corresponde al necesario para que una sola partícula de la fractura alcance su desplazamiento final después que la ruptura ha alcanzado este punto. Para este caso, la historia de la dislocación es modelada a menudo como una función rectangular (figura 3.5 (b)), triangular (figura 3.5 (c)) o trapezoidal (figura 3.5 (d)).

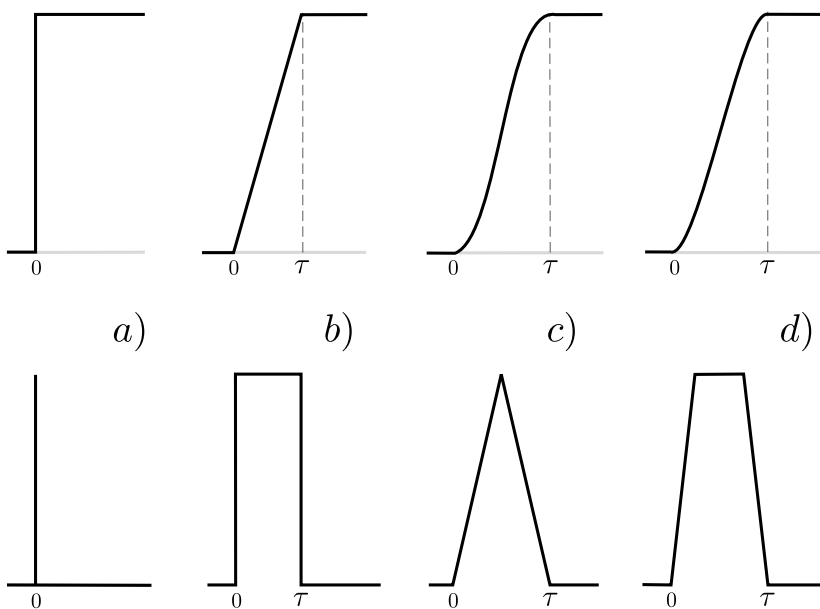


Figura 3.5: Parametrización de la función fuente.

Para representar fuentes complejas, se pueden considerar una serie de triángulos de diferentes amplitudes e igual base de largo τ , que se solapan en $\tau/2$, de manera de poder representar distintos niveles de liberación de energía en cada instante, incluyendo paradas en el proceso de ruptura (figura 3.6).

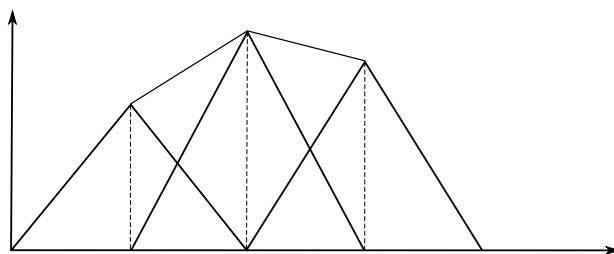


Figura 3.6: Ejemplo de función fuente compleja.

Capítulo 4

Correcciones a los Desplazamiento

La expresión para el campo de desplazamientos elásticos han sido obtenida bajo las condiciones de un medio elástico, infinito y homogéneo. Sin embargo, el planeta Tierra no presenta dichas características. Para evitar la dificultad de resolver las ecuaciones bajo nuevas condiciones iniciales y de borde, se considera un conjunto de correcciones a la solución inicial con el fin de incluir los fenómenos de superficie libre y de heterogeneidad de la Tierra.

La estructura de la Tierra se modela como un medio estratificado, constituida por capas homogéneas y de espesor cualquiera. Luego, se deben realizar correcciones sobre la propagación de las ondas internas que consideren las discontinuidades que separan medios de diferentes propiedades.

4.1. Teoría de Rayos para Ondas de Cuerpo

La solución de D'Alembert para la ecuación de onda homogénea, como son las ecuaciones para los potenciales ϕ y Ψ de los desplazamientos para $\mathbf{f} = 0$ son ondas plana de la forma $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = Ae^{-i\omega(t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}$, donde \mathbf{k} es la dirección de propagación. Los trayectos paralelos a \mathbf{k} , y en este caso, perpendiculares al frente de ondas, son denominados *rayos*.

La teoría de rayos es una serie de métodos que permite aproximar la propagación de ondas mediante el comportamiento de sus rayos, que para medios no homogéneos es más sencillo de obtener que su solución analítica. Para el caso de propagación en medios homogéneos, isotrópicos, la ecuación de la elastodinámica correspondiente puede ser escrita, mediante la identidad $\nabla^2\mathbf{u} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) - (\nabla\times\nabla\times\mathbf{u})$ como,

$$\rho \partial_t^2 \mathbf{u} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (4.1)$$

Permitiendo la variación espacial de la dirección de propagación de las ondas P y S, se buscan soluciones para (4.1) de la forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) e^{-i\omega(t-T(\mathbf{x}))} \quad (4.2)$$

Para un instante t constante, la ecuación $T(\mathbf{x}) = t$ define una superficie denominada *frente de ondas*. $\nabla T(\mathbf{x})$ representa la dirección de la propagación en cada punto. Las líneas paralelas a ∇T son denominados rayos.

Las derivadas espaciales de \mathbf{u} involucradas en la ecuación (4.1) se desarrollan como,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = (\nabla \cdot \mathbf{A} - i\omega \mathbf{A} \cdot \nabla T) e^{-i\omega(T-t)} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} - i\omega \mathbf{A} \cdot \nabla T) e^{-i\omega(T-t)} - (i\omega)(\nabla \cdot \mathbf{A} - i\omega \mathbf{A} \cdot \nabla T) \nabla T e^{-i\omega(T-t)} \\ &= [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} - i\omega \mathbf{A} \cdot \nabla T) - i\omega(\nabla \cdot \mathbf{A}) \nabla T + (i\omega)^2 (\nabla T \cdot \mathbf{A}) \nabla T] e^{-i\omega(T-t)} \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - i\omega A_i \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) e^{-i\omega(T-t)} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial x_j^2} &= \left(\frac{\partial^2 A_i}{\partial x_j^2} - i\omega \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} - i\omega A_i \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} - i\omega \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - i\omega A_i \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) e^{-i\omega(T-t)} \\ &= \left(\frac{\partial^2 A_i}{\partial x_j^2} - 2i\omega \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} - i\omega A_i \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} + (i\omega)^2 A_i \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right)^2 \right) e^{-i\omega(T-t)} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Denotando $\sum \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} = [(\nabla T \cdot \nabla) \mathbf{A}]_i$, el laplaciano de \mathbf{u} se escribe vectorialmente como

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla^2 \mathbf{A} - 2i\omega(\nabla T \cdot \nabla) \mathbf{A} - i\omega \mathbf{A} \nabla^2 T - \omega^2 \mathbf{A} |\nabla T|^2 \quad (4.7)$$

La segunda derivada temporal de \mathbf{u} resulta simplemente,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{A} e^{-i\omega(T-t)} \quad (4.8)$$

Reemplazando las expresiones (4.4), (4.7) y (4.8) en (4.1), y dividiendo por $e^{-i\omega(T-t)}$, se obtiene, (Kara! & Keller, 1959)

$$\begin{aligned} -\omega^2 \rho \mathbf{A} &= (\lambda + \mu) [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} - i\omega \mathbf{A} \cdot \nabla T) - i\omega(\nabla \cdot \mathbf{A}) \nabla T - \omega^2 (\nabla T \cdot \mathbf{A}) \nabla T] \\ &\quad + \mu (\nabla^2 \mathbf{A} - 2i\omega(\nabla T \cdot \nabla) \mathbf{A} - i\omega \mathbf{A} \nabla^2 T - \omega^2 \mathbf{A} |\nabla T|^2) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Dividiendo por ω^2 y considerando el límite $\omega \rightarrow \infty$, la expresión se reduce a,

$$\rho \mathbf{A} = (\lambda + \mu) [(\nabla T \cdot \mathbf{A}) \nabla T] + \mu (\mathbf{A} |\nabla T|^2) \quad (4.10)$$

Tomando el producto escalar de (4.10) con ∇T , se obtiene

$$(\rho - (\lambda + 2\mu) |\nabla T|^2) (\nabla T \cdot \mathbf{A}) = 0 \quad (4.11)$$

Por otro lado, del producto vectorial de (4.10) con ∇T , se obtiene

$$(\rho - \mu |\nabla T|^2) (\mathbf{A} \times \nabla T) = 0 \quad (4.12)$$

Para \mathbf{A} y ∇T no nulos, el sistema formado por (4.11) y (4.12) es satisfecho en dos casos posibles

Caso I	Caso II
$\mathbf{A} \cdot \nabla T = 0$	$\mathbf{A} \times \nabla T = 0$
$ \nabla T ^2 = \frac{\rho}{\mu}$	$\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}$

Estos sistemas son estrictamente válidos para el límite de frecuencias. Sin embargo en la práctica es una aproximación válida cuando la escala de variación en el medio es significativamente más grande que las longitudes de ondas consideradas (aproximación de altas frecuencias) (Kara & Keller, 1959, Aki & Richards, 1980).

La ecuación de la forma $|\nabla T|^2 = \frac{1}{c(\mathbf{x})^2}$, denominada ecuación *eikonal*, es una ecuación en derivadas parciales que relaciona la geometría del rayo con la distribución de velocidades en el medio. Para un frente de onda definido para un tiempo t fijo, $T(\mathbf{x}) = t$, se cumple $\nabla T \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = 1$. Además, $|\nabla T| \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| = |\nabla T| |c| = 1$. Luego, por la desigualdad en Cauchy-Schwarz, se tiene que ∇T es paralelo a la velocidad de propagación, y por consiguiente, los rayos son perpendiculares al frente de ondas. Si el rayo es parametrizado en longitud de arco $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$, se tiene directamente que,

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = c \nabla T \quad (4.13)$$

De esta manera, el caso I describe el trayecto de los rayos que se propagan perpendicular a \mathbf{A} con velocidad $(\mu/\rho)^{1/2}$, los cuales corresponden a la onda S. El caso II describe el trayecto de los rayos que se propagan paralelos a \mathbf{A} a velocidad $(\rho/(\lambda + 2\mu))^{1/2}$, correspondientes a la onda P. Dado que las velocidades de propagación son constantes, de (4.13) sigue que $T = T_0 + c(s - s_0)$, con $c = \alpha, \beta$, por lo que las soluciones de la forma (4.2) son ondas planas.

4.1.1. Propagación en medios isotrópicos no homogéneos

Para estudiar las trayectorias de los rayos en medios isotrópicos no homogéneos, se consideran las ecuaciones de la elastodinámica donde los coeficientes elásticos varían con la posición,

$$\rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (4.14)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\mathbf{x}) \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbb{I} + 2\mu(\mathbf{x}) \boldsymbol{\epsilon} \quad (4.15)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T] \quad (4.16)$$

Desarrollando las derivadas espaciales, el sistema puede ser escrito como (Karal & Keller, 1959)

$$\rho \partial_t^2 \mathbf{u} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nabla \mu \times (\nabla \times \mathbf{u}) + 2(\nabla \mu \cdot) \mathbf{u} \quad (4.17)$$

Reemplazando la función armónica (4.2), se obtiene

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho \mathbf{A} &= (\lambda + \mu) [\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A} - i\omega \mathbf{A} \cdot \nabla T) + i\omega (\nabla \cdot \mathbf{A}) \nabla T + (i\omega)^2 (\nabla T \cdot \mathbf{A}) \nabla T] \\ &\quad + \mu (\nabla^2 \mathbf{A} + 2i\omega (\nabla T \cdot \nabla) \mathbf{A} + i\omega \mathbf{A} \nabla^2 T + \mathbf{A} \cdot \nabla^2 T - \omega^2 \mathbf{A} |\nabla T|^2) \\ &\quad + \nabla \lambda [i\omega (\mathbf{A} \cdot \nabla T) + (\nabla \cdot \mathbf{A})] + (\nabla \lambda) \times [i\omega (\nabla T \times \mathbf{A}) + (\nabla \times \mathbf{A})] \\ &\quad + 2 [\nabla \mu \cdot \nabla + i\omega (\nabla \mu \cdot \nabla T)] \mathbf{A} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Haciendo ω tender a infinito, se deduce de igual manera los casos I y II. A diferencia de la aproximación para altas frecuencias en medios homogéneos, es necesario despreciar además los términos que involucran los gradientes de los parámetros elásticos. Luego, esta aproximación será válida en medios donde a la escala de variabilidad de los parámetros elásticos es mucho mayor que las longitudes de onda considerada, también denominados *medios de heterogeneidad suave*.

En la teoría de rayos asintótica, la función propuesta como solución es de la forma (4.2), donde la amplitud es además función de la frecuencia ω ,

$$\mathbf{A} = \sum_{n=0}^{\infty} (i\omega)^{-n} \mathbf{A}_n \quad (4.19)$$

Al reemplazar este ansatz en (4.17), se obtiene una expresión que permite determinar recursivamente tantos valores de \mathbf{A}_n como sean requeridos, lo que permite caracterizar otro tipo de fenómenos en la propagación de ondas. Para el coeficiente \mathbf{A}_0 , que domina para altas

frecuencias, el análisis es el mismo que en el acá expuesto, denominado *aproximación de orden cero*, el cual permite estudiar los fenómenos de reflexión y refracción, suficiente para muchas aplicaciones en sismología.

La ecuación $d\mathbf{x}/ds = c\nabla T$ previamente obtenida, permite parametrizar las trayectorias de los rayos en función $\nabla T(\mathbf{x})$. Para eliminar esta dependencia, basta derivar la ecuación con respecto al parámetro de distancia s . En efecto, la derivada de ∇T se expresa como,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\nabla T(\mathbf{x})) &= \nabla \left(\frac{d}{ds} T(\mathbf{x}) \right) \\ &= \nabla \left(\nabla T(\mathbf{x}) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right) \\ &= \nabla \left(\frac{1}{c(\mathbf{x})} \frac{d\mathbf{x}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right) \\ &= \nabla \left(\frac{1}{c(\mathbf{x})} \right) \end{aligned} \quad (4.20)$$

De este modo, al derivar (4.13) con respecto s , se obtiene una ecuación diferencial denominada *ecuación del rayo*,

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{c(\mathbf{x})} \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right) = \nabla \left(\frac{1}{c(\mathbf{x})} \right) \quad (4.21)$$

Para un modelo de tierra esférica, con velocidad variando radialmente $c = c(r)$, se obtiene que la expresión,

$$\mathbf{r} \times \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad (4.22)$$

es constante a lo largo del rayo. En efecto

$$\frac{d}{ds} \left(\mathbf{r} \times \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{r}}{ds} + \mathbf{r} \times \left(\frac{1}{c} \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \mathbf{r} \times \nabla \left(\frac{1}{c} \right) = 0 \quad (4.23)$$

Denotando i al ángulo comprendido entre el rayo y \mathbf{r} , y \mathbf{n} al vector ortogonal a estos dos últimos, se tiene que,

$$\mathbf{r} \times \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = |\mathbf{r}| \cdot \left| \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| \cdot \sin(i) = \frac{r \sin(i)}{c} \mathbf{n} \quad (4.24)$$

Por lo tanto, el escalar $p = \frac{r \sin(i)}{c}$ es constante y se denomina parámetro del rayo. Esta última condición es la generalización de la ley de Snell para una geometría esférica (figura 4.1).

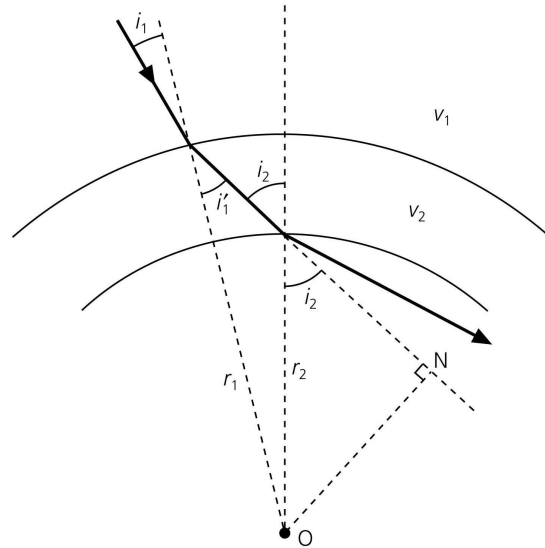


Figura 4.1: Geometría de la ley de Snell para Tierra esférica estratificada radialmente. (Stein & Wysession, 2003)

A partir de la ecuación del rayo (4.21) es posible calcular numéricamente la trayectoria de los rayos para un modelo de distribución de velocidad del interior de la Tierra, dado un punto y dirección inicial del rayo. En general, la velocidad de propagación aumenta con la profundidad como efecto del peso de las capas superiores de la Tierra. La irregularidad de dicho aumento viene determinado principalmente por la composición físico-química de cada una de ellas, lo que conduce a diversos fenómenos en el trayecto de los rayos, como la *triplicación* y las *zonas de sombra* (figura 4.2).

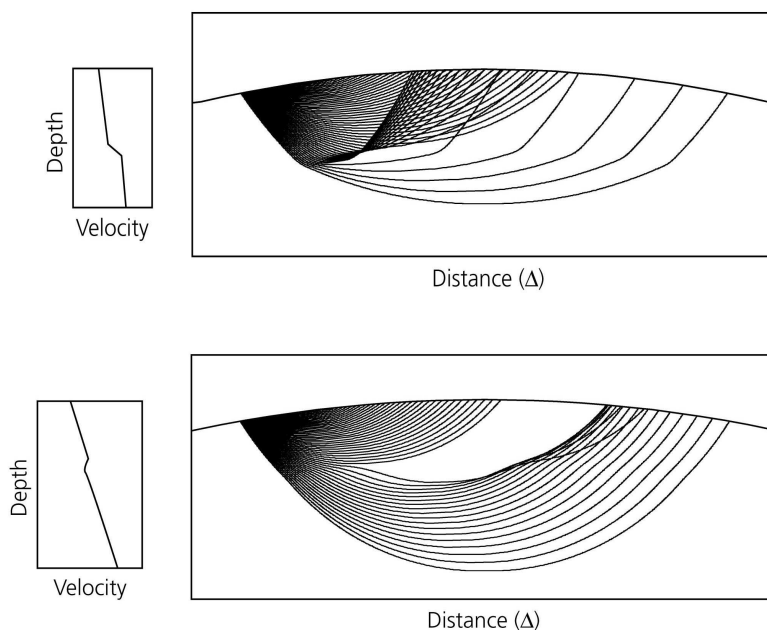


Figura 4.2: Trayectoria de los rayos para diferentes distribuciones de velocidad con la profundidad. Imagen superior: Tipicidad de los rayos debido a un incremento abrupto de velocidad. Imagen inferior: efecto de zona de sombra debido a una reducción abrupta de velocidad. (Stein & Wysession, 2003)

Para una correcta interpretación de los sismogramas observados, es necesario trabajar con rayos cuya trayectoria tenga lugar en regiones de la Tierra más homogénea. Para los principales modelos de distribución de velocidades, los frentes de ondas que arriban a la superficie entre distancias epicentrales de 30 a 90 grados desde la fuente, realizan su recorrido principalmente en el manto inferior, de estructura más sencilla y homogénea que la corteza y el manto superior (figura 4.3).

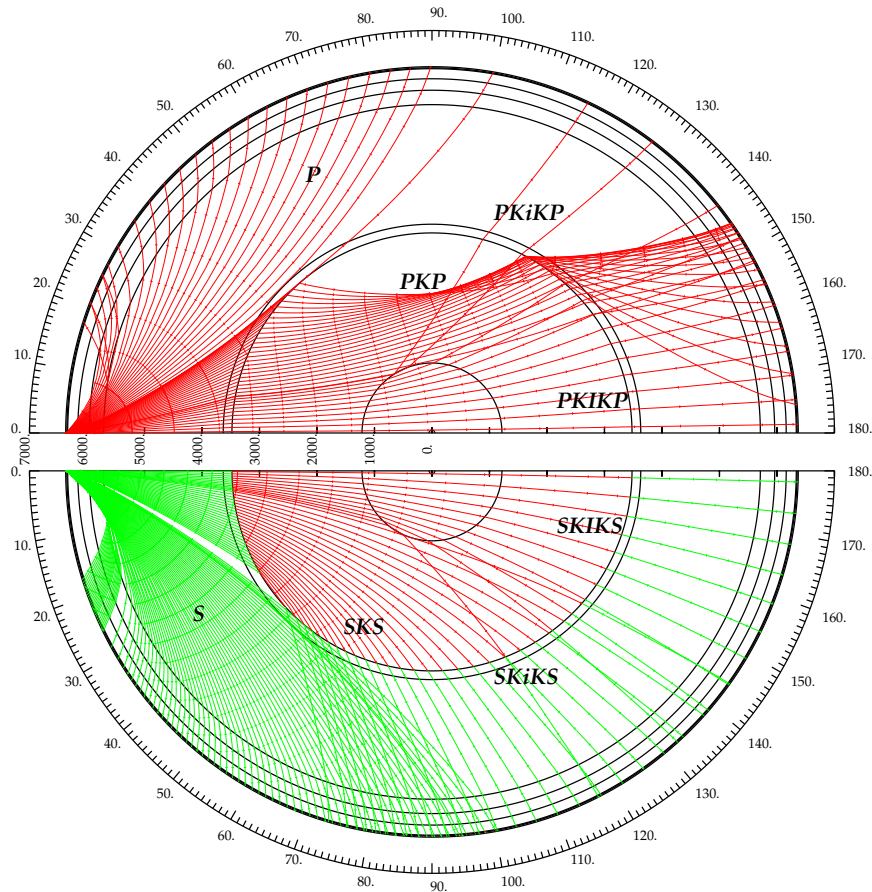


Figura 4.3: Trayectoria de los rayos para el modelo de distribución de velocidades ak135. (Kennett, 2005)

4.1.2. Efecto superficie libre

Fases de profundidad

Las fases reflejadas, o de profundidad, corresponden a aquellos rayos que se reflejan en zonas de discontinuidad en la homogeneidad del medio terrestre, como la superficie y el núcleo, y que son observadas junto con los rayos que se propagan directamente al punto de observación. Dado que deben recorrer el trecho entre el foco y la superficie antes de viajar a la estación, llegan con un tiempo de desfase con respecto a los rayos que arriban directamente, el que puede ser usado para un mejor ajuste de la profundidad del foco (figura 4.4).

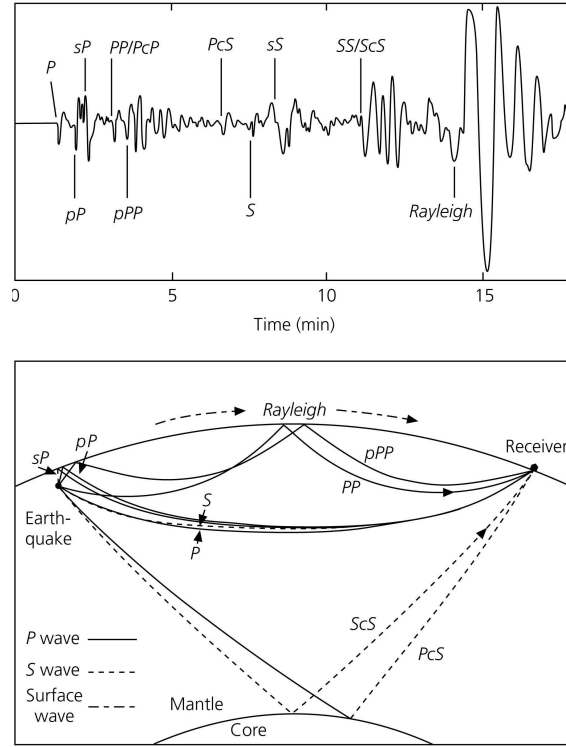


Figura 4.4: Imagen superior: Identificación de diversas fases en el sismograma observado. Imagen inferior: Diagrama de las fases de profundidad con sus trayectorias. (Stein & Wysession, 2003)

Para la forma de onda P, las fases más importantes en el proceso de inversión son la pP (rayo que viaja hasta la superficie como onda P, y se refleja como P) y la sP (rayo que viaja como onda S y se refleja como P). Análogamente, las fases de interés para la onda S son la sS y la pS. La diferencia en los tiempos de llegada de la onda directa y las reflejadas, denotados por Δt_{pP} , Δt_{sP} y Δt_{sS} , dependen de la profundidad del terremoto y de la distancia entre la fuente y la estación. Bajo la aproximación de que los rayos directos y reflejados tienen el mismo parámetro (figura 4.5), son expresados como (Stein & Wysession, 2003),

$$\Delta t_{pP} = \frac{2H \cos i_h}{\alpha_h} \quad (4.25)$$

$$\Delta t_{sP} = H \left(\frac{\cos j_h}{\beta_h} + \frac{\cos i_h}{\alpha_h} \right) \quad (4.26)$$

$$\Delta t_{sS} = \frac{2H \cos j_h}{\beta_h} \quad (4.27)$$

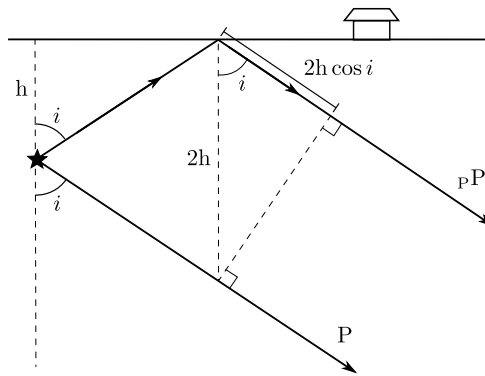


Figura 4.5: Determinación del tiempo de retardo de la fase pP con respecto a la fase P.

donde i_h y j_h son los ángulos de incidencia en el foco para la onda P y la onda S, respectivamente.

Dado que en la superficie de discontinuidad en la que incide el frente de ondas no se cumple la condición de variación lenta, no es posible describir estos fenómenos directamente con la aproximación de teoría de rayos. Sin embargo, suponiendo que se puede aplicar la teoría de rayos a ambos lados de la superficie, la solución al problema consiste en imponer condiciones cinemáticas y dinámicas de continuidad en la propagación, con lo cual se encuentran coeficientes para la amplitud de las ondas que reflejan la respuesta para el cambio de medio. Los coeficientes de reflexión para la superficie libre, que modifican la amplitud de las fases de profundidad incidentes, se expresan como, (Udías, 1999)

$$V_{pP} = \frac{4rs - (1 + 3r^2)^2}{4rs + (1 + 3r^2)^2} \quad (4.28)$$

$$V_{sP} = \frac{-4s(1 + 3r^2)}{4rs + (1 + 3r^2)^2} \quad (4.29)$$

$$V_{sS} = \frac{4rs - (1 + 3r^2)^2}{4rs + (1 + 3r^2)^2} \quad (4.30)$$

donde $r = \cot i_0$ y $s = \cot j_0$, con i_0 y j_0 los ángulos de incidencia en la superficie para la onda P y la onda S, respectivamente.

El coeficiente de corrección $C_z(i_0)$ representa la respuesta de la superficie libre a una onda P plana incidente con un ángulo i_0 con respecto a la vertical. Su expresión permite la proyección del movimiento de partícula según la componente vertical z . El coeficiente $C_r(i_0)$

representa la respuesta horizontal de la superficie libre a un rayo SV incidente. (Kanamori & Stewart, 1976; Deschamps *et al.*, 1980)

$$C_z(i_0) = \frac{2 \cos i_0 \cos(2j_0)}{D = \cos^2 2j_0 + (\beta/\alpha)^2 \sin 2i_0 \sin 2j_0} \quad (4.31)$$

$$C_r(i_0) = \frac{2 \cos j_0 \cos 2j_0}{D = \cos^2 2j_0 + (\beta/\alpha)^2 \sin 2i_0 \sin 2j_0} \quad (4.32)$$

4.1.3. Divergencia geométrica

En general, la amplitud de onda decae con la distancia, fenómeno conocido como divergencia geométrica. Considerando la tierra esférica y homogénea, la razón entre el flujo de energía en la estación a una distancia Δ de la fuente, y el flujo emitido por dicha fuente, por unidad de ángulo sólido, viene expresado por (Kanamori & Stewart, 1976)

$$g(\Delta) = \sqrt{\frac{\rho_h c_h \sin i_h}{\rho_0 c_0 \sin \Delta \cos i_0} \left| \frac{di_h}{d\Delta} \right|} \quad (4.33)$$

Así, para la aproximación de foco puntual, la ecuación que proporciona la componente vertical del desplazamientos para la onda P es (Kanamori & Stewart, 1976),

$$u^P = \frac{M_0}{4\pi\rho\alpha^3 r} C(i_0)g(\Delta)[R^p(\phi, i_h)f(t - r/\alpha) + R^p(\phi, \pi - i_h)V_{pP}f(t - r/\alpha - \Delta t_{pP}) \\ + R^{SV}(\phi, \pi - j_h)V_{sP}f(t - r/\alpha - \Delta t_{sP})] \quad (4.34)$$

4.2. Sismogramas Sintéticos

La forma de onda registrada en una estación sismológica depende de una serie de factores, siendo algunos de evaluación más compleja que otros. Fundamentalmente, depende de la fuente sísmica, de la propagación en el medio y del instrumento utilizado para su medición. En el estudio de forma de onda a distancias telesísmicas, estos factores son mejores evaluados. El sismograma $s(t)$, correspondiente a una estación, se puede expresar como la convolución de tres términos: el desplazamiento en la estación $u(t)$, la atenuación en el medio $g(t)$, y la respuesta instrumental $i(t)$,

$$s(t) = u(t) * g(t) * i(t) \quad (4.35)$$

el cual suele ser estudiado en el dominio de frecuencias

$$S(\omega) = U(\omega)G(\omega)I(\omega) \quad (4.36)$$

4.2.1. Respuesta instrumental

La respuesta del instrumento está definida por una función de variable compleja en el dominio de las frecuencias y representa al producto de una serie de funciones correspondientes a las diferentes etapas de la adquisición de los datos: sismómetro, amplificador, filtro analógico, convertidor análogo-digital y filtro digital. Para las estaciones digitales de banda ancha la función de transferencia se puede expresar en forma de polos y ceros (Hutt, 1993)

$$I(\omega) = A_0 D_s \frac{\prod_{j=1}^{N_s} (i\omega - z_j)}{\prod_{j=1}^{N_p} (i\omega - p_j)} \quad (4.37)$$

donde:

- $\omega: 2\pi f$ (f frecuencia en Hz)
- N_z, N_p : número de ceros y polos
- z_j, p_j : j-ésimo cero y polo
- A_0 : factor de normalización
- D_s : sensibilidad del instrumento

El número y valor de los polos y ceros, así como el valor de A_0 y D_s dependen del tipo de instrumento (desplazamiento, velocidad, aceleración) y son valores que el fabricante proporciona.

4.2.2. Atenuación en el medio

A medida que tiene lugar la propagación en el medio, la amplitud va disminuyendo debido a la atenuación anelástica. Esta disminución depende del tiempo de recorrido t y es distinta para cada fase. La atenuación sísmica se describe en términos del factor de calidad Q (Futterman, 1962) y su representación es equivalente a la de un oscilador armónico con

amortiguador. La transformada de Fourier de este operador se escribe (Deschamps *et al.* 1980)

$$G(\omega, t^*) = e^{-\left(\frac{\omega t^*}{2} - i \frac{\omega t^*}{\pi} \log \frac{\omega}{\omega_0}\right)} \quad (4.38)$$

donde t^* se define como

$$t^* = \int_{\Gamma} \frac{dt}{Q} \quad (4.39)$$

con Γ representando la trayectoria del rayo. Carpenter (1967) sugirió una forma aproximada y más conveniente para esta expresión,

$$t^* = T/Q \quad (4.40)$$

donde T es el tiempo total de viaje de la señal a lo largo de la trayectoria Γ , y Q es un valor promedio a lo largo de este trayecto. Para distancias epicentrales entre 30 y 90, se suele tomar $t^* = 1$ para la onda P y $t^* = 4$ para las S (Carpenter & Flinn, 1965; Langston & Helmberger, 1975) ω_0 es un valor de referencia, que se suele tomar igual a 2π . La elección de otro valor sólo avanza o retarda el sismograma, sin modificar su forma. El operador descrito por la ecuación (4.38), no introduce estructuras fuertes en la forma de la onda para muchos problemas de interés, sino que más bien tiene un efecto de suavizado sobre ella.

De este modo, la expresión de los sismogramas sintéticos para la componente vertical de los desplazamientos es (Langston & Helmberger, 1975; Kanamori & Stewart, 1976),

$$\begin{aligned} u^P = & \frac{M_0}{4\pi\rho\alpha^3r} C(i_0)g(\Delta)[R^p(\phi, i_h)f(t - r/\alpha) + R^p(\phi, \pi - i_h)V_{pP}f(t - r/\alpha - \Delta t_{pP}) \\ & + R^{SV}(\phi, \pi - j_h)V_{sP}f(t - r/\alpha - \Delta t_{sP})] * I(t) * Q(t) \end{aligned} \quad (4.41)$$

donde ϕ corresponde a las parámetros focales del plano de falla y i_h y j_h cumplen $\sin i_h/\alpha = \sin j_h/\beta$ por la ley de Snell. La expresión (4.41) es la utilizada para modelar formas de onda en los métodos de inversión con datos en el campo lejano (Kikuchi & Kanamori, 1991; Hartzell & Heaton, 1983; Nábělek, 1984; Kikuchi & Fukao, 1985)(figura 4.6).

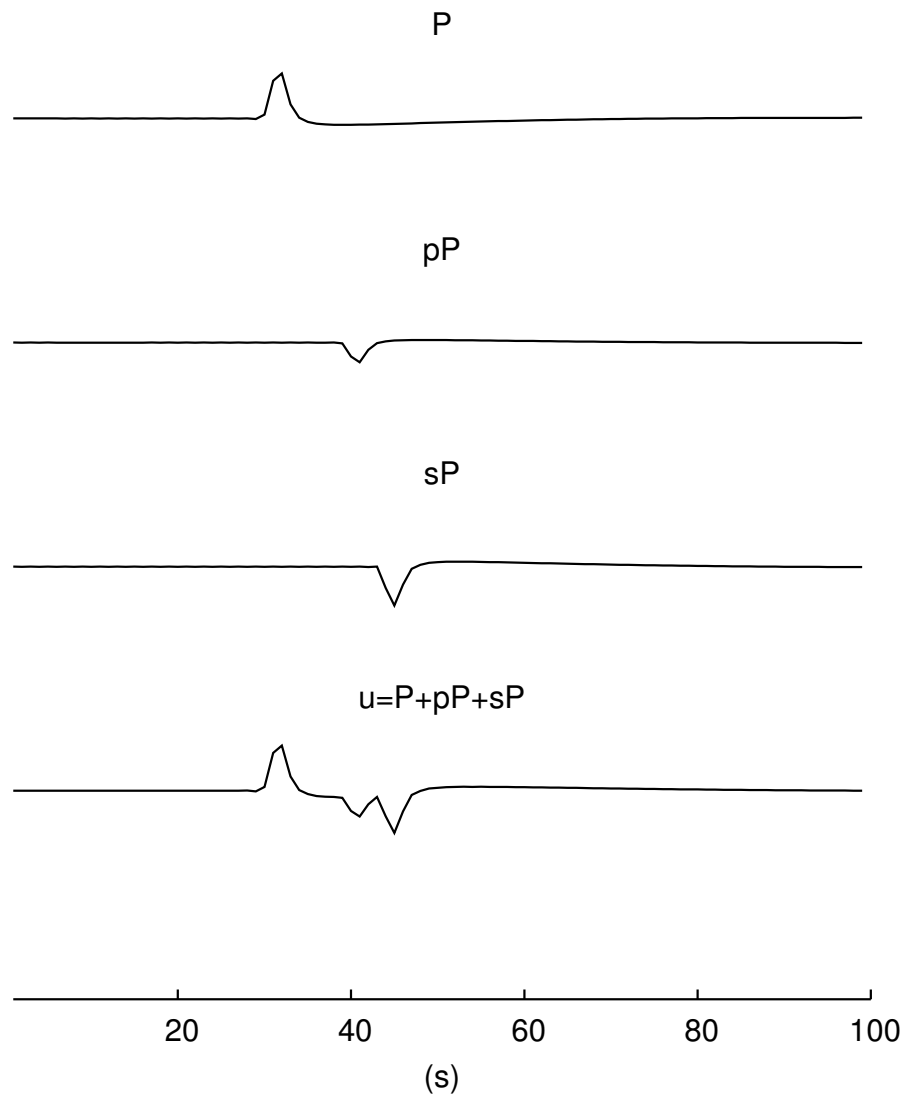


Figura 4.6: Ejemplo de sismograma sintético para una fuente puntual de doble-cupla de profundidad intermedia.

Capítulo 5

Modelos Cinemáticos para Fallas con Dimensiones Finitas

El modelo de foco puntual es aceptable para sismos de pequeña y mediana magnitud ($M_w \leq 6$). Para terremotos de mayor magnitud, se requieren modelos que consideren la dimensión de la fuente y su efecto en la propagación de la onda. El modelo cinemático más general consiste en el caso de una fractura de cizalle, con una fuente de superficie Σ sobre la cual se propaga la dislocación $\Delta u(\xi_i)$ con velocidad v_r en una dirección, desde el origen ($\xi = 0$) hasta un punto final a distancia L , sin hacer ningún supuesto acerca de la geometría de la fractura (figura 5.1). v_r se denomina *velocidad de ruptura*, que en este caso se considera constante, menor que la velocidad de propagación de la onda (fracturas *subsónicas*).

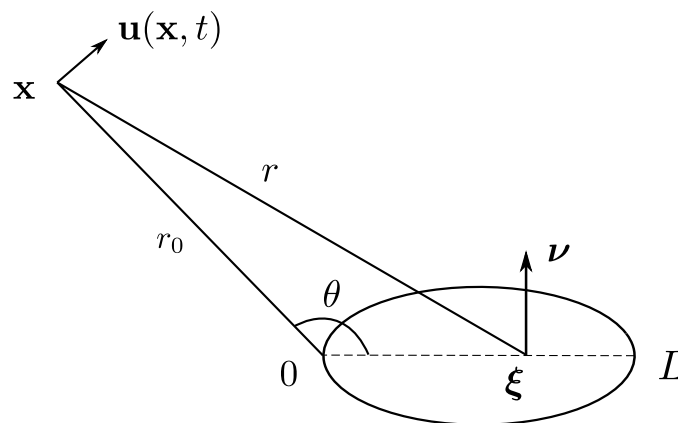


Figura 5.1: Propagación de la dislocación en una fuente con dimensiones.

Para el caso de fuente con dimensiones, los desplazamientos elásticos para la onda P ó S en el campo lejano vienen dados por la convolución del término de campo lejano de la función de Green con el tensor de densidad de momento sísmico (Teorema de Representación 2.49). Para medios homogéneos, isotrópicos infinitos, se obtiene,

$$u_n = \frac{\mu}{4\pi c^3 \rho} \iint_{\Sigma} \frac{R(\phi, i_h)}{r} \Delta \dot{u} \left(\boldsymbol{\xi}, t - \frac{r}{c} \right) d\Sigma \quad (5.1)$$

donde R , c y u_n corresponden a alguna forma de onda. La principal diferencia que introduce la aproximación de foco con dimensiones finitas radica integral de la dependencia temporal, donde $r = \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|$. Mediante desarrollo en serie de Taylor, y recordando que,

$$\frac{\partial r}{\partial \xi_i} = -\gamma_i \quad (5.2)$$

la aproximación de primer orden de r en torno a r_0 se expresa como,

$$r = r_0 - (\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \quad (5.3)$$

Así, el desplazamiento en el campo lejano para esta aproximación se escribe (Haskell, 1964)

$$u_n = \frac{\mu}{4\pi \rho c^3} \iint_{\Sigma} \frac{R(\phi, i_h)}{r_0} \Delta \dot{u} \left(\boldsymbol{\xi}, t - \frac{r_0 - (\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\gamma})}{c} \right) d\Sigma \quad (5.4)$$

5.1. Modelo de Haskell

El modelo de foco con dimensiones más empleado es el de falla rectangular propuesto por Haskell (1964), consistente en una falla de longitud L y anchura W en que la dislocación Δu se propaga unidireccionalmente desde el origen ($\xi = 0$) hasta un punto a distancia L con velocidad v_r constante. (figura 5.2)

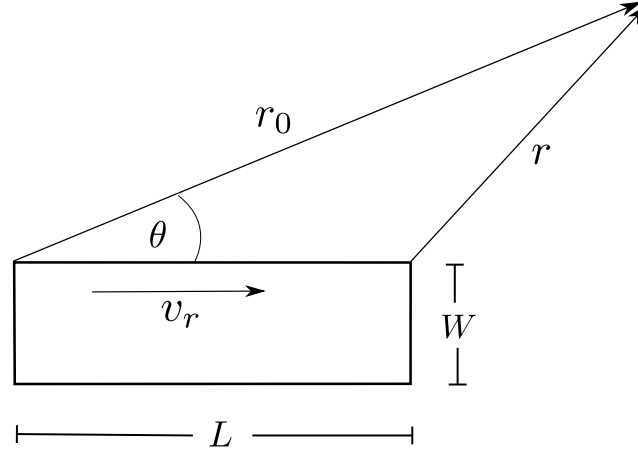


Figura 5.2: Modelo de falla rectangular de Haskell.

Sea 0 el tiempo de inicio de la ruptura. Si se considera un receptor a distancia r_0 del punto inicial de la ruptura, el primer rayo llega al instante r_0/c . El punto al extremo de la falla, ahora a distancia r del receptor, rompe en el tiempo L/v_r , por lo que el rayo proveniente de este punto incide en el instante $(L/v_r + r/c)$. Para r_0 definido por el coseno director $\cos \theta$, por ley de cosenos se tiene,

$$r^2 = r_0^2 + L^2 - 2r_0L \cos \theta \quad (5.5)$$

Para distancias telesísmicas, donde $r \gg L$ (5.3)

$$r \approx r_0 - L \cos \theta \quad (5.6)$$

por lo que el rayo proveniente del extremo de la falla llega al receptor en el instante

$$\frac{L}{v_r} + \frac{r_0 - L \cos \theta}{c} = \frac{r_0}{c} + \frac{L}{c} \left(\frac{c}{v_r} - \cos \theta \right) \quad (5.7)$$

Bajo esta aproximación, la expresión para los desplazamientos puede escribirse como

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu R(\phi, i_h)}{4\pi \rho c^3 r_0} \iint_{\Sigma} \Delta \dot{u} \left(\xi_i, t - \frac{r_0}{c} - \frac{\xi_i}{c} \left(\frac{c}{v_r} - \cos \theta \right) \right) d\xi_i \quad (5.8)$$

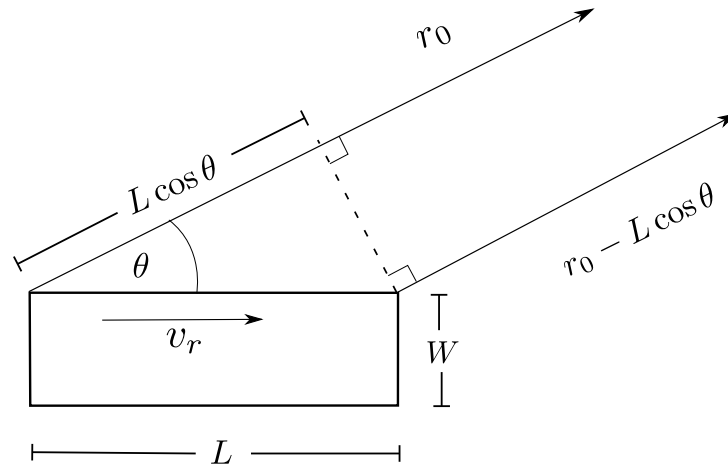


Figura 5.3: Trayectoria de los rayos en el modelo rectangular de Haskell para distancias telesísmicas.

La diferencia entre los tiempos de llegada de los rayos que parten de los puntos iniciales y finales de la ruptura es simplemente,

$$T_c = L(1/v_r - \cos \theta/c) \quad (5.9)$$

la cual es denominada *tiempo de ruptura aparente*. El tiempo de ruptura aparente no es el mismo para todas las estaciones, ya que depende de la orientación de cada una con respecto a la dirección de propagación de la ruptura. Esta diferencia tiene el efecto de modificar la duración de la forma de onda para cada estación, y se denomina *efecto de directividad de la ruptura*.

El segundo elemento que determina la forma de onda es la función temporal fuente (STF) de cada uno de los puntos de la falla. En el modelo de Haskell, la historia del slip se modela como una función rampa de *rise-time* τ_r , igual para todos los puntos, por lo que la STF es una función rectangular de duración τ_r (figura 5.4). Luego, la STF para el modelo de falla rectangular se obtiene como la convolución de la función rectangular de largo T_c , relacionado con la dimensión de la falla, y la STF de cada punto, cuyo resultado es un trapecio de largo $\tau_r + T_c$.

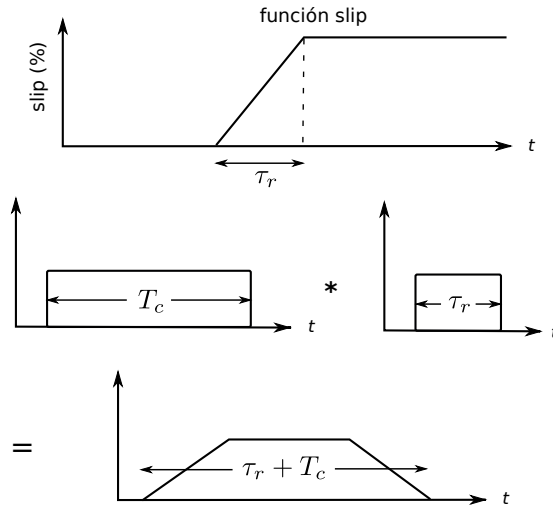


Figura 5.4: Función fuente temporal para el modelo de Haskell. (Stein & Wysession, 2003)

La función temporal trapezoidal del desplazamiento observada desde cada estación será distinta debido al efecto de directividad. El trapecio de base mínima corresponde a estaciones que se encuentran en la misma dirección de la ruptura (estaciones directivas), y el máximo para las antidirectivas. Esta diferencia es aparente, ya que el proceso de ruptura no varía según la estación, sino que es una característica de la fuente. Luego, la amplitud del trapecio también se modifica por el efecto de directividad, ya que su área debe ser constante igual al momento sísmico, que es independiente del receptor de la señal (fig. 5.5). El cambio de amplitud se puede expresar como (Berckhemer & Jacob, 1965)

$$u(r) \sim \frac{R(\phi, i_h)}{1 - \frac{v_r}{c} \cos \theta} \tag{5.10}$$

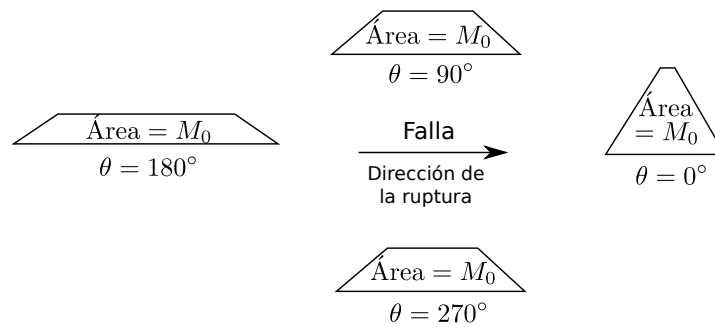


Figura 5.5: Efecto de la directividad de la ruptura en la función temporal para diferentes azimut desde la fuente. (Stein & Wysession, 2003)

En algunos casos, el efecto de directividad puede ser usado para identificar el plano de falla, dado no hay efectos similares asociados al plano auxiliar.

Capítulo 6

Implementación de la Inversión Cinemática de la Fuente Sísmica en el Campo Lejano

El problema inverso relacionado al estudio de la fuente sísmica finita con registros en el campo lejano se reduce a determinar la distribución espacial y temporal del desplazamiento sobre el plano de falla (slip y/o la tasa de slip). Los resultados se presentan muchas veces como la determinación de la función temporal de la fuente sísmica para un terremoto, interpretada en términos de distribución espacial del momento sísmico sobre la superficie de ruptura asumiendo muchas veces una velocidad de ruptura constante. Los modelos de fuente finita suelen tener una representación como una fuente línea (versión más simple) o en 2D como fuente circular, rectangular u otra forma regular también simple.

Debido a las simplificaciones del modelo, principalmente por la limitación del conocimiento de la física y dinámica del proceso de ruptura del terremoto, inevitablemente aparece no unicidad en la solución (Kikuchi & Kanamori, 1982), incluso contando con muchos registros a diferentes distancias y acimut distribuidos sobre la superficie del globo. Cuando el terremoto es estudiado como una serie de subeventos pueden aparecer interferencias destructivas entre ellos y diversas secuencias de subeventos pueden explicar los mismos datos muy bien. Luego, es importante determinar cual es el rango de soluciones admisibles. Algunas restricciones deben ser impuestas a la solución para estabilizar la inversión, además del requerimiento de un adecuado ajuste a los sismogramas observados. Es importante determinar cuales restricciones son razonables. La validez de los modelos debe ser eventualmente juzgada a la luz de otros datos.

El problema de la inversión de la distribución espacial y temporal del deslizamiento sísmico sobre el plano de falla fue resuelto formalmente por primera vez por Olson & Apsel (1982). Para estos autores, una determinada distribución de deslizamiento sobre el plano de falla es una solución aceptable del problema inverso, si satisface las siguientes tres condiciones:

1. La solución debe explicar los datos.
2. La solución debe ser físicamente razonable (consistente con condiciones independientes).
3. Si más de una solución ajusta los datos igualmente bien, entonces se debe incorporar información adicional para definir unívocamente cuál es la nueva solución obtenida.

Para que la solución sea físicamente razonable, es necesario incorporar condiciones de borde físicas. En principio, estas condiciones deberían ser inferidas del proceso de inversión la ruptura sísmica. Sin embargo nuestro conocimiento de la física y dinámica del proceso del terremoto se mantiene bastante limitado y comparativamente el parámetro mejor determinado que se dispone al presente es la velocidad de ruptura sísmica. La velocidad de ruptura sísmica entra en la categoría de condiciones de borde débiles puesto que mientras la duración de todo el proceso de la fuente sísmica es mayor que el tiempo de propagación de las ondas sísmicas a lo largo de la superficie de ruptura, la velocidad de ruptura es del orden de la velocidad de las ondas sísmicas. Para implementar numéricamente esta condición, se requiere ubicar los eventos de manera de cubrir adecuadamente el plano de falla total.

Otra condición de borde, aunque con menos fundamentos físicos, es el requerimiento que el vector de tasa de desplazamiento sobre el plano de falla esté en coherencia con la dirección promedio de la caída de esfuerzos, el cual es a su vez inferido del mecanismo focal del terremoto (*rake*). Esto significa que el valor de la proyección del vector tasa de deslizamiento con la dirección del vector que representa la caída de esfuerzos sea positiva. Mientras que, en principio, el deslizamiento en dirección opuesta es posible debido a interferencia de ondas sísmicas sobre el plano de falla, esto puede ser poco probable y las experiencias de simulaciones de ruptura sísmica en 3D indican que la dirección del deslizamiento coincide con la de caída de esfuerzos (Das, 1981).

Esto sugiere que podemos asumir que la dirección del deslizamiento sea constante sobre el plano de falla durante la ruptura sísmica y a la vez coincidente con la dirección de la caída de esfuerzos, y que la componente del vector que describe la tasa de deslizamiento debe ser no-negativa. Esta condición, conocida como *no-backslip*, ha sido utilizada por Hartzell & Heaton (1983), Kikuchi & Fukao (1985).

Con estas 2 condiciones, el deslizamiento queda confinado a las zonas donde los puntos de la grilla de eventos entran en contacto con el frente de ruptura y adicionalmente limitando el número de veces que cada punto de la grilla puede deslizarse (romper). Esta condición se logra haciendo que el modelo tenga dos frentes pre-asignados: el frente de ruptura y el de cicatrización, dejando entre ambos un espacio-tiempo donde el deslizamiento o slip queda confinado. Su implementación reduce drásticamente el número de variables desconocidas en el modelo.

Otra condición de borde que puede ser considerada en la inversión es por ejemplo que el momento sísmico total se ajuste al momento sísmico obtenido por la solución CMT (Centroid Moment Tensor) o de datos geodéticos de deformación. También se puede introducir la condición que la máxima tasa de desplazamiento sobre el plano de falla esté limitada a satisfacer algunas consideraciones dadas por la mecánica de la fractura. Hartzell & Heaton (1983) minimizaron el momento sísmico, el cual es otra variante de condiciones que se pueden imponer en la solución del problema inverso.

La tercera condición de Olson & Apsel significa que las condiciones de borde físicas pueden ser claramente insuficientes para especificar una solución única y se propone incluir algunos supuestos no-físicos adicionales para hacer que la solución sea única. Uno de estos requerimientos no-físicos es por ejemplo que la solución al problema inverso tenga norma mínima.

6.1. Formulación del Problema Discreto

Utilizando el Teorema de Representación de fuentes sísmicas, el registro en desplazamiento en una estación ubicada en el punto \mathbf{x} sobre la superficie de la tierra, se expresa en términos de la distribución de deslizamientos sobre el plano de falla

$$u_k(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \iint_{\Sigma} K_{ik}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) [u_i(\boldsymbol{\xi}, \tau)] d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) d\tau \quad (6.1)$$

donde

- $u_k(\mathbf{x}, t)$ son las componentes del campo de desplazamiento
- $[u_i(\boldsymbol{\xi}, \tau)]$ las componentes del slip, o discontinuidad en los desplazamientos sobre Σ
- $K_{ik}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau)$ las componentes de la respuesta impulsiva del medio en (\mathbf{x}, t) debido a una dislocación puntual en $(\boldsymbol{\xi}, \tau)$

Los sismogramas observados no representan el vector desplazamiento \mathbf{u} sino que el resultado de la salida del sismómetro. Al convolucionar ambos lados de la ecuación (6.1) por la respuesta del instrumento para una estación dada, y asumiendo que la dirección del deslizamiento sobre el plano de falla es contante, se obtiene

$$S_j(t) = \int_0^t \iint_{\Sigma} W_j(\boldsymbol{\xi}, t - \tau) \Delta u(\boldsymbol{\xi}, \tau) d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) d\tau \quad (6.2)$$

donde

- $W_j(\boldsymbol{\xi}, \tau)$ es la respuesta impulso $(\boldsymbol{\xi}, \tau)$ correspondiente a una dirección del slip y convolucionada con la respuesta instrumental
- $\Delta u(\boldsymbol{\xi}, \tau)$ es la tasa de deslizamiento en función del vector de dos dimensiones $\boldsymbol{\xi}$ que entrega la posición sobre el plano de falla relativa a algún punto de referencia (hipocentro) y τ es el tiempo medido desde el tiempo de origen del terremoto

Donde se imponen las condiciones de borde físicas

$$\Delta u(\boldsymbol{\xi}, \tau) \geq 0 \quad \text{para todo } (\boldsymbol{\xi}, t) \quad (\text{condición no-backslip}) \quad (6.3a)$$

$$\Delta u(\boldsymbol{\xi}, \tau) = 0 \quad \text{para } \tau < T(\boldsymbol{\xi}) \quad (\text{condición de causalidad}) \quad (6.3b)$$

El momento sísmico (M_0) cumple,

$$\int_0^{\infty} \iint_{\Sigma} \mu(\boldsymbol{\xi}) \Delta u(\boldsymbol{\xi}, \tau) d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) d\tau = M_0 \quad (6.4)$$

En esta descripción de modelo de ruptura, la función $T(\boldsymbol{\xi})$ no es el frente de ruptura, sino que más bien representa el borde de éste en la formulación. Las funciones W_j son calculadas usando la aproximación de teoría de rayos generalizada para incorporar efectos de la estructura de la tierra e incorporando los factores de divergencia geométrica y atenuación (Capítulo 4).

Para obtener soluciones numéricas, la ecuación (6.2) se discretiza. El plano de falla Σ se divide en celdas rectangulares, donde se aproxima $\Delta u(\boldsymbol{\xi}, \tau)$ por funciones lineales en el tiempo y a lo largo de la dirección de ruptura. Las funciones W_j son entonces integradas analíticamente sobre cada celda, y las integrales sobre la falla son reemplazadas por sumas. El tiempo de la fuente es discretizado a intervalos fijos, y se asume que la tasa de deslizamiento $\Delta u(\boldsymbol{\xi}, \tau)$ varía linealmente en estos intervalos.

La discretización espacial en celdas es equivalente a representar el patrón de ruptura de un gran terremoto como una secuencia de subeventos más pequeños distribuidos en el plano de falla (Wyss & Brune, 1967; Kanamori & Stewart, 1978)(figura 6.1). La naturaleza múltiple de estos eventos está fuertemente relacionada con la heterogeneidad de las propiedades mecánicas de la zona de falla, caracterizada por asperezas. Ellas están relacionadas con la irregularidad del movimiento en la falla (Mikumo & Miyatake, 1978; Kanamori, 1979; Miyatake, 1980b; Papageorgiou & Aki, 1983a, b), y también son las responsables del término de la propagación de la ruptura y de su secuencia (Das & Aki, 1977; Aki, 1979; Israel & Nur, 1979; Andrews, 1980, 1981; Miyatake, 1980a; Nur & Israel, 1980; Lay *et al.* 1982).

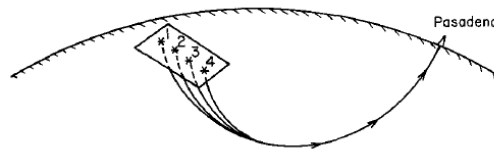


Figura 6.1: Campo de desplazamiento resultante como secuencia de subeventos. (Hartzell & Heaton, 1985)

6.1.1. Modelos de resolución del modelo discreto

Los métodos de inversión citados en este trabajo tienen en común la discretización del problema de inversión. Para grandes terremotos, múltiples subeventos son situados como elementos de una grilla rectangular que es situada sobre el plano de falla, para los cuales son computados las funciones de Green. Sin embargo, la diferencia reside en el planteamiento del problema de ajustar los sismogramas observados con los sintéticos, y por lo tanto en los algoritmos desarrollados para su resolución y en la formulación de las condiciones de borde.

En el método de Kikuchi & Kanamori (1982), todos los eventos tienen igual geometría. El primer subevento es modelado como una fuente puntual con función temporal rampa, de rise-time τ . Su momento sísmico y localización en el frente de ruptura es determinado de forma que la diferencia entre la función de Green correspondiente y el sismograma observado sea mínimo en norma $\|l_2\|$. El residuo resultante es ajustado por la ruptura de un segundo subevento. El proceso es continuado por N iteraciones hasta que la ganancia marginal sea despreciable. Para un número fijo de iteraciones, el error de aproximación está en función del rise-time τ . Por ensayo y error, el valor τ es elegido de manera de minimizar el error total.

La función fuente es obtenida como la superposición de las funciones rampa. En Kikuchi & Kanamori (1991), estos autores extienden su trabajo anterior, en donde el mecanismo de los subeventos son permitidos a variar. El ajuste de los elementos del tensor de momento de cada evento es realizado iterativamente sobre los ajustes residuales del mismo modo descrito anteriormente. El error de aproximación está ahora en función de la localización en el frente de ruptura y de τ . La elección de la localización de los subeventos y de τ es realizada sobre una grilla de valores posibles que minimice el error de ajuste. Debido a la determinación del mecanismo de los subeventos en la iteración, la inversión se vuelve más inestable de lo que inherentemente es. Luego, deben ser realizadas una serie de consideraciones tal que la búsqueda de los parámetros en la grilla sea restringido al rango de soluciones admisibles, donde la decisión final recae en el criterio del sismólogo. Otro inconveniente es que la solución final depende del orden en que los subeventos son determinados, condición denominada *path dependence* (Young *et al.* 1989). No existe un criterio absoluto para la elección de una solución por sobre las demás. Luego el método debe ser corregido iterando sobre diversas subsecuencias y eligiendo la solución que sea consistente con los otros datos.

En el método de Nábělek (1984), la estimación de los parámetros se realiza mediante el método de máxima verosimilitud. Si los errores en los datos y en los parámetros son gaussianos, el método implica minimizar la función,

$$\chi^2 = [d - m(p)]^T C_{d_0}^{-1} [d - m(p)] + [p_0 - p]^T C_{p_0}^{-1} [p_0 - p] \quad (6.5)$$

donde d es el arreglo de los simsogramas observados, $m(p)$ el vector de simsogramas sintéticos calculados con los parámetros p , p_0 es el vector de parámetros estimados a priori y C_{d_0} y C_{p_0} son las matrices varianza-covarianza a priori de los datos y de los parámetros respectivamente. Mediante la matriz C_{d_0} se puede asignar distintos pesos a las observaciones. Dado que $m(p)$ es no lineal, el mínimo de (6.5) es calculado mediante un proceso iterativo, de forma de linealizar la dependencia de los parámetros. Esto presenta el inconveniente de que la solución obtenida corresponda a un mínimo local si la estimación a priori de los parámetros está alejada del modelo óptimo. Dentro de los parámetros que son estimados, se encuentra la profundidad, el mecanismo focal y la función temporal. Esta última es representada mediante una serie de triángulos isósceles de base $2\tau_r$ que se solapan en una cantidad τ_r . La amplitud de cada triángulo es determinado en el ajuste, pero es necesario dar la duración τ_r (igual para todos) y el número de ellos.

En el método de Hartzell & Heaton (1985), un hipocentro es fijado dentro de una grilla que discretiza una falla de geometría predeterminada. Desde este punto, se simula la propagación del frente de ruptura, que equivale al inicio de la función temporal para cada evento, que a su vez es parametrizado como superposición de triángulos como en el

método de Nábělek (1984). Para una geometría dada y para una estación, se computan las funciones de Green para cada subevento, por lo que el problema de inversión se reduce a la determinación de la amplitud de cada triángulo. Si las funciones de Green son dispuestas como vectores columna, el problema puede ser escrito de manera matricial (ecuación 6.6), donde $\{x_j^i\}_{j=1,nt}$ corresponde a las amplitudes de los triángulos de la función temporal del evento i , t_r al número de puntos de desfase temporal entre triángulos que se solapan en τ , y b al sismograma observado en la estación.

$$\begin{aligned}
 t_r = & \left\{ \begin{array}{c|ccc|ccc|ccc}
 & \text{evento 1} & & & \text{evento 2} & & & & \dots & & & \\
 \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|ccc}
 g_1^1 & 0 & 0 & \dots & g_1^2 & 0 & 0 & \dots & \dots & & & \\
 g_2^1 & 0 & 0 & \dots & g_2^2 & 0 & 0 & \dots & \dots & & & \\
 g_3^1 & g_1^1 & 0 & \dots & g_3^2 & g_1^2 & 0 & \dots & \dots & & & \\
 g_4^1 & g_2^1 & 0 & \dots & g_4^2 & g_2^2 & 0 & \dots & \dots & & & \\
 \vdots & g_3^1 & g_1^1 & \dots & \vdots & g_3^2 & g_1^2 & \dots & \dots & & & \\
 \vdots & \vdots & g_2^1 & \dots & \vdots & \vdots & g_2^2 & \dots & \dots & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & & & \\
 g_n^1 & g_n^1 & g_n^1 & \dots & g_n^2 & g_n^2 & g_n^2 & \dots & \dots & & &
 \end{array} \right. & \left[\begin{array}{c} x_1^1 \\ x_2^1 \\ \vdots \\ x_1^2 \\ x_2^2 \\ \vdots \end{array} \right] & = & \left[\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{array} \right]
 \end{array} \right. \quad (6.6)
 \end{aligned}$$

Al repetir este procedimiento para m estaciones, se obtienen m matrices de sintéticos, las cuales son concatenadas por filas. Los sismogramas observados en cada estación son concatenados en un vector columna b , de modo de ser consistente con el orden de la matriz. De esta forma, denotando A a la matriz de sismogramas sintéticos, el problema puede ser escrito matricialmente como

$$Ax = b \quad (6.7)$$

La condición de positividad o no-backslip (6.3a) es impuesta mediante la desigualdad

$$x_i \geq 0 \quad (6.8)$$

La condición de causalidad (6.3b) es utilizada en la construcción de la matriz de sintéticos

$$g_k^i = 0 \quad , \quad \text{para } i < T(k) \quad (6.9)$$

La condicion (6.4) se introduce como

$$\sum_{i,j} c_i x_j^i = M_0 \quad (6.10)$$

donde los coeficientes c_i son independientes del tiempo y corresponden al producto de la rigidez μ promedio de la celda por su área.

Dado que el sistema (6.7) es una aproximación de la propagación, para un modelo de tierra simplificado, el objetivo de la inversión es minimizar los residuos $r = Ax - b$, para alguna norma. Dado el mal condicionamiento de la matriz A , es necesario incluir al problema de minimización la condición (6.8), con tal de restringir el espacio de soluciones, además de llenar el vacío creado por la pérdida de información por la ausencia de suficientes datos. El sistema lineal (6.7) puede ser modificado en virtud de incluir alguna condición de borde. Hartzell & Heaton (1985) incluyen la condición de momento sísmico mínimo modificando el sistema de la forma,

$$\begin{bmatrix} A \\ \lambda I \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

donde el valor de λ determina el peso para la condición de mínimo momento sísmico.

El uso de triángulos para parametrizar la función fuente generaliza al uso de funciones rampa, como los usados en los métodos de Kikuchi & Kanamori (1991). La importancia de usar esta parametrización es que permite una mayor libertad en el tiempo que se liberan las tensiones en cada celda, dado que la propagación del frente de ruptura se computa con una velocidad constante. El número de incógnitas se multiplica por el número de triángulos que se usa para parametrizar a cada celda.

Estos problemas de inversión de resolución matricial, son planteados como

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \|Ax - b\|_2 \\ &\text{sujeto a} \quad x \geq 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

Donde pueden ser incorporados las condiciones de borde pertinentes. El problema es conocido como *non-negative least squares* (NNLS).

Otra forma de buscar los parámetros óptimos es implementando métodos de inversión *no lineales*. Los del tipo Monte-Carlo consisten en perturbar aleatoriamente el valor de los parámetros de modo de explorar un alto número de posibles soluciones, con tal entregar el valor óptimo y no algún mínimo local como solución. Entre estos métodos, el denominado *simulated annealing* (recocido simulado ó enfriamiento estadístico) consiste en la exploración de soluciones en torno a vecindades de una solución preliminar basado en un criterio físico. En particular, en la probabilidad de Boltzmann asociada a cada configuración de un sistema de átomos. El nombre deriva de la analogía de calentar un sólido, lo que causa un aumento de energía de sus átomos. El enfriamiento lento entrega mayores probabilidades de recristalizar

en configuraciones con menor energía que la inicial (mínimo global). En concreto, para una temperatura T constante, una perturbación de los parámetros es aceptada como una iteración con probabilidad uno si $\Delta S < 0$, y con probabilidad $\exp(-\Delta S/T)$ si $\Delta S > 0$, siendo ΔS la variación de energía correspondiente. Se comienza con un valor alto de temperatura y posteriormente se va disminuyendo antes de comenzar nuevas iteraciones. En los métodos de inversión, la energía es asociada con la diferencia entre los sintéticos y los observados. La temperatura es un parámetro que controla la evolución del sistema, que mantiene el nombre por razones históricas.

6.1.2. Implementación de la inversión para campo lejano

La inversión de ondas de cuerpo en el campo lejano conlleva una serie de supuestos y fenómenos físicos asociados a la propagación de las ondas sísmicas que deben ser considerados, tanto para minimizar el ruido en los sismogramas observados como para definir la construcción del problema de inversión.

La aproximación de foco con dimensiones finitas es adecuada para modelar terremotos de magnitud mayores a 7. Una ventana de 100 segundos para los sismogramas permiten asegurar la captura del proceso de ruptura para terremotos de hasta M_w 8.5

Las señales sísmicas utilizadas en el campo lejano son de periodo largo, menores a 1 Hertz para la onda P y menores de 0.24 para la onda S, debido a la atenuación de la tierra (Capítulo 4). El Teorema de muestreo asegura que para muestreo de intervalo Δt , es posible reconstruir completamente señales limitadas en banda de energía que no posean componentes a frecuencias mayores que la frecuencia de Nyquist $f_N = 1/2\Delta t$. Luego, la discretización del intervalo de tiempo cuando se utilizan ondas P en la inversión es elegida cada 0.5 segundos, lo que permite mantener resolución de los detalles de la ruptura sísmica y permitir un mejor control del ruido.

La distribución de sismogramas respecto al azimut debe ser deseablemente uniforme, lo que en la práctica resulta difícil dada la distribución sesgada de estaciones alrededor del globo, de mayor presencia en el hemisferio norte. Sin embargo, varios estudios han demostrado que esto no es un mayor obstáculo para determinar una solución estable (Mendoza & Hartzell, 1988 y 1989; Hartzell & Heaton, 1983).

Los registros de ondas P son seleccionados de estaciones comprendidas entre distancias epicentrales $30^\circ < \Delta < 90^\circ$ de la región focal, ya que el recorrido del frente de ondas de cuerpo es realizado principalmente en el manto inferior, de estructura más sencilla y homogénea que la corteza y el manto superior. Usualmente se puede imponer una condición más restrictiva

sobre el límite superior, seleccionando estaciones a distancias de $30^\circ < \Delta < 75^\circ$, con el fin de evitar la introducción de otras fases que no son modeladas en esta aproximación y que aparecen a distancias entre $75^\circ < \Delta < 90^\circ$ para la ventana de 100 segundos (figura 6.2).

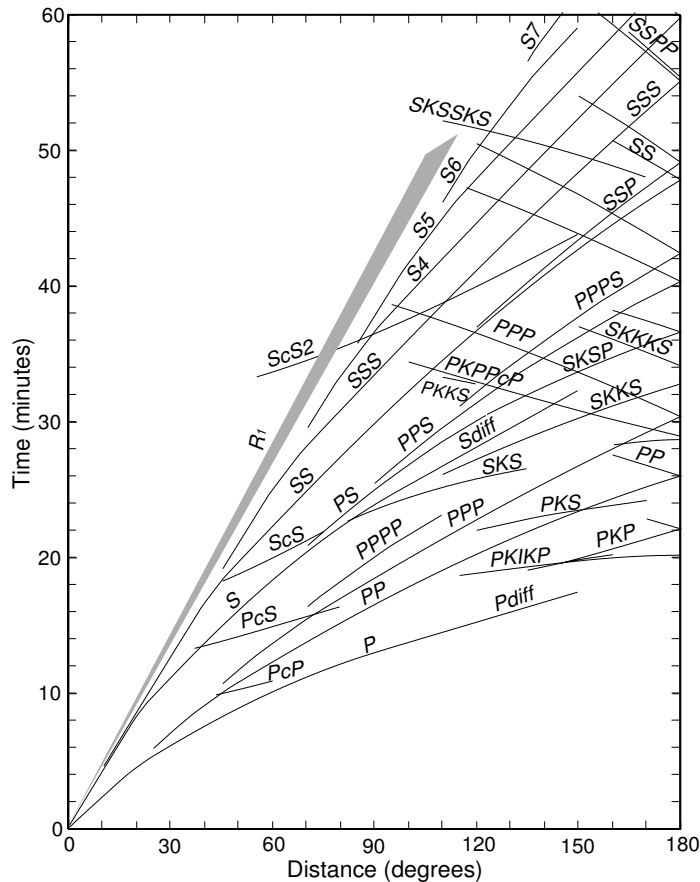


Figura 6.2: Curvas camino tiempo para foco superficial.

6.1.3. Procesamiento de datos

Para los registros obtenidos en estaciones digitales banda ancha, es necesario realizar una serie de procesos

- Remover la media y la tendencia de los registros.
- Deconvolucionar la respuesta del instrumento correspondiente a cada estación, para

posteriormente convolucionar la señal con una respuesta instrumental común, con el fin de hacer comparable los registros con los sintéticos.

- Integrar los sismogramas que estan en velocidad, para obtener desplazamiento del suelo.
- Aplicar filtro banda pasante. Esto permite eliminar frecuencias registradas que no son explicadas por el modelo de Tierra utilizado, por ejemplo altas frecuencias que aparecen al incidir el frente de ondas en la corteza de la tierra, las cuales no deberían aparecer por el proceso de atenuación de la Tierra.
- recortar sismogramas.
- remuestrear el registro cada $\Delta t = 0.5$ s (Onda P).

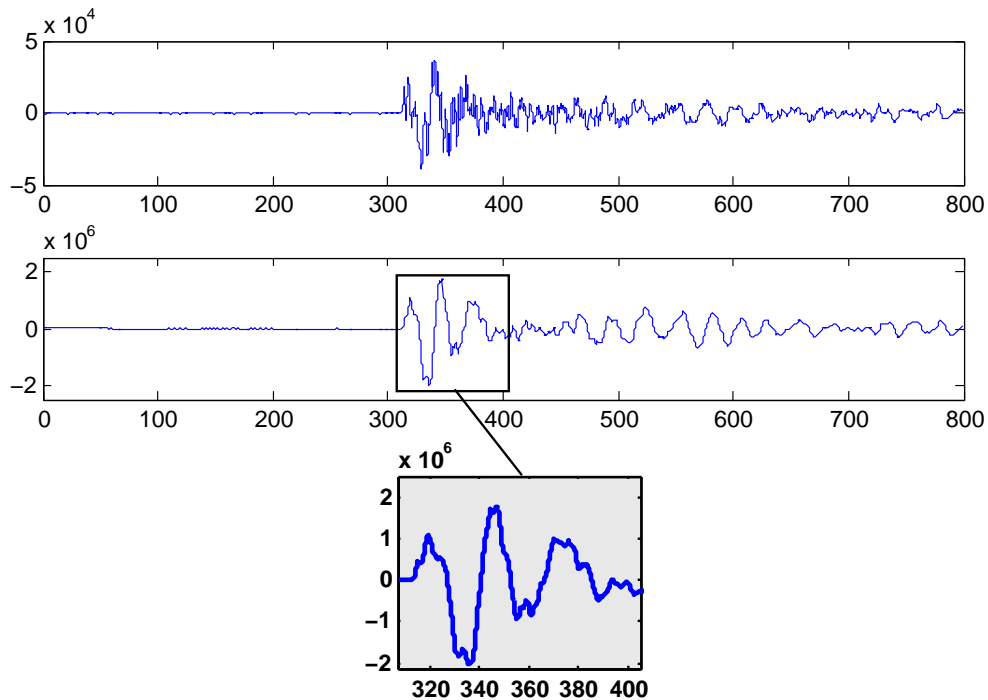


Figura 6.3: Ejemplo del efecto del protocolo de procesamiento de señales aplicado al registro del terremoto de Tocopilla del 14 de Noviembre de 2007 para la estación SSPA. Registro original en la parte superior. Resultado del tratamiento de la señal en el medio. Recuadro inferior, ventana de 100 segundos seleccionada.

Capítulo 7

Parametrización de la Fuente Sísmica para la Inversión del Desplazamiento con Datos Telesísmicos

A fin de estudiar de forma cuantitativa el problema de inversión, se ha desarrollado un programa de inversión (ONDDIM), a partir de la representación de una fuente puntual en el campo lejano, para describir el campo de desplazamiento de la componente vertical para la onda P escrito en FORTRAN. Este capítulo describe la parametrización del problema, y las condiciones de borde incorporadas, en pos de ajustar la inversión para terremotos representados por desplazamientos sobre un plano de falla finita de forma rectangular.

La falla rectangular se discretiza en subeventos dispuestos en una grilla de $n \times m$ puntos equiespaciados una distancia Δx . Las dimensiones de la grilla son previamente acotadas en función del momento sísmico, el cual puede ser conocido a priori, como la solución CMT. Sobre este plano, se elige el hipocentro (i_0, j_0) , desde donde se propaga la ruptura, de profundidad H dada. La profundidad de los demás puntos se obtiene en función del dip, mediante una relación trigonométrica sencilla. (figura 7.1)

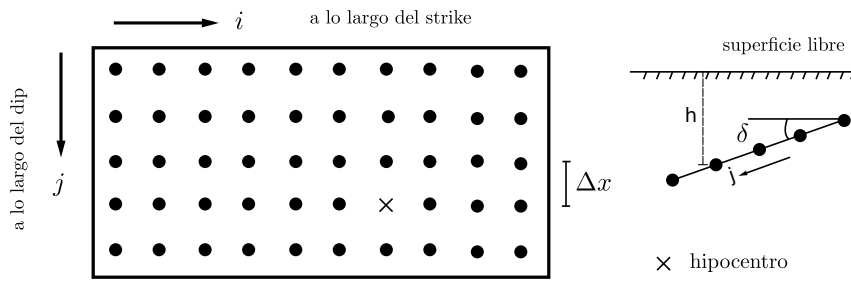


Figura 7.1: Esquema de parametrización de la grilla de puntos en un plano falla rectangular.

Los parámetros focales (δ, ϕ, λ) , correspondientes al dip, azimuth y rake, se asumen iguales para todos los elementos de la grilla. Denotando $\bar{\Delta}_p$ a la distancia epicentral entre el hipocentro y el punto \mathbf{p} de un mismo plano horizontal, y ϕ_p al ángulo comprendido entre la dirección de la estación sobre la horizontal y \mathbf{p} (figura 7.2), entonces se cumple la relación,

$$\cos \Delta_p = \cos \phi_p \sin \Delta \sin \bar{\Delta}_p + \cos \bar{\Delta}_p \cos \Delta \quad (7.1)$$

mediante la cual es posible determinar la distancia epicentral de los puntos de la grilla. Con los valores H_{ij} y Δ_{ij} , los ángulos emergentes para cada celda e incidentes en la estación son obtenidos mediante spline cúbico de las tablas de Behe y Pho (1972).

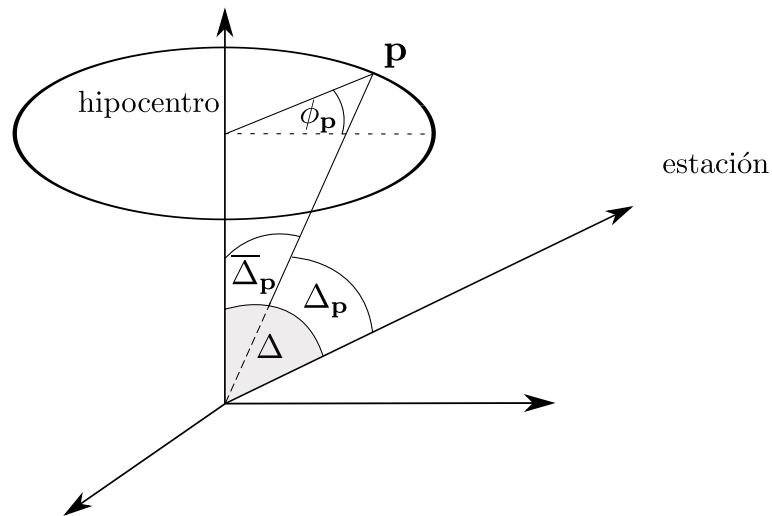


Figura 7.2: Esquema de actualización de distancia epicentral de los puntos de la grilla

En la parametrización de falla rectangular desarrollada, la ruptura se propaga radialmente por los elementos de la grilla. Luego, cada dirección de esta propagación puede ser estudiada como un caso particular del modelo de Haskell unidireccional, con su respectivo coseno director, por lo que tendrá asociado el fenómeno de directividad. Denominando $\hat{\phi}$ al la diferencia entre el azimut de la estación y el azimut de la falla, y α al ángulo entre la dirección de la estación \mathbf{x} y su proyección en vertical hasta la superficie \mathbf{p}_x (figura 7.3), se demuestra que,

$$\cos \alpha = \frac{\cos \delta}{\sqrt{\cos^2 \delta + \sin^2 \hat{\phi} \sin^2 \delta}} \quad (7.2)$$

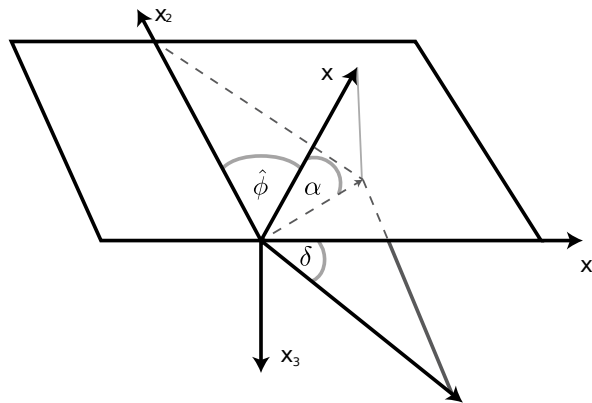


Figura 7.3: Definición del ángulo α como la proyección en vertical de la dirección de la estación

donde es posible verificar fácilmente los casos triviales $\cos \alpha = 1$ para $\hat{\phi} = 0$ y $\cos \alpha = \cos \delta$ para $\hat{\phi} = \pi/2$. Denominando ϕ_p al ángulo comprendido entre el punto (i, j) y \mathbf{p}_x (figura 7.4), el coseno director para una ruptura propagándose en la dirección (i, j) se expresa como,

$$\cos \theta_{ij} = \cos \phi_p \sin(i_{h_{ij}} + \alpha) \quad (7.3)$$

Al reemplazar (7.2) en (7.3) se obtiene

$$\cos \theta_{ij} = \cos \phi_p \left(\frac{\cos i_{h_{ij}} \sin \hat{\phi} \sin \delta + \cos \delta \sin i_{h_{ij}}}{\sqrt{\cos^2 \delta + \sin^2 \hat{\phi} \sin^2 \delta}} \right) \quad (7.4)$$

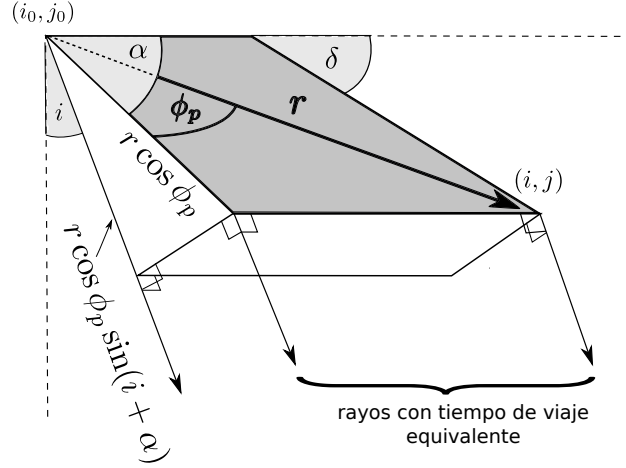


Figura 7.4: Coseno director para la propagación en grilla rectangular.

De este modo, el rayo que se propaga desde el punto \$(i, j)\$ arriba a la estación de observación en el instante \$t_{ij}\$, como en el modelo de Haskell

$$t_{ij} = t_{i_0 j_0} + \underbrace{\frac{\sqrt{(i - i_0)^2 + (j - j_0)^2} \Delta x}{v_r}}_{:=t_{ij}^R} \left(1 - \frac{v_r}{c} \cos \theta_{ij} \right) \quad (7.5)$$

Para cada celda de la grilla \$(i, j)\$, la función temporal se representa mediante una serie de triángulos isósceles, siendo cero antes del tiempo \$t_{ij}^R\$, para simular el frente de ruptura. La base de cada triángulo es \$\tau_r\$, y se solapan en una cantidad \$\tau_r/2\$, (figura 7.5). El valor \$\tau_r\$ varía con respecto a la estación y a la dirección de ruptura, por efecto de directividad,

$$\tau_{r_{ij}} = \tau_r \left(1 - \frac{v_r}{c} \cos \theta_{ij} \right) \quad (7.6)$$

La cantidad mínima de triángulos para cada punto debe ser tal de modelar las condiciones de causalidad de la ruptura. Esto es, que la función temporal fuente de un punto alcanzado

por el frente de ruptura debe tener como mínimo una duración tal que el frente de ruptura alcance otra fuente vecina. Si para k triángulos el soporte de la función fuente tiene duración t_k , este debe cumplir,

$$\frac{\sqrt{2}\Delta x}{v_r} < t_k$$

donde v_r es la velocidad de ruptura, y $\sqrt{2}\Delta x$ a la distancia de un punto a otro en diagonal sobre la grilla.

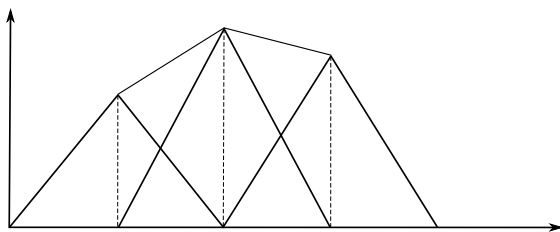


Figura 7.5: Ejemplo de función fuente compleja.

Las funciones de Green correspondientes a cada punto se calculan mediante el programa de modelación de ondas de cuerpo desarrollado en Campos (1989). El problema de inversión se plantea como un sistema lineal, como es descrito en (6.12), el cual es resuelto con el algoritmo NNLS. Dado que en esta implementación ϕ , δ y λ son constantes en toda la grilla, la inversión es adecuada para fuentes extendidas de geometría simple, donde los parámetros focales son determinados como los que minimizan el error de ajuste sobre en un espacio de parámetros en torno a una estimación a priori de la geometría de la falla.

Capítulo 8

Aplicación al Terremoto del 14 de Noviembre de 2007 en Tocopilla

El terremoto de tocopilla ($M_w=7.6$) ocurrió el 14 de Noviembre del 2007 a las 15:40:50 (UTC) en el norte de Chile, entre 22°S y 24°S. En este sector la placa de Nazca subducta debajo de la placa Sudamericana a una tasa de 6.6 cm/yr (Angermann *et al.* 1999), y además forma parte de una región identificada como un potencial gap sísmico (Kelleher 1972; Kelleher *et al.* 1973) (regiones que no han experimentado un gran terremoto los últimos 30 años). Este terremoto es muy interesante debido a que es el primer gran evento Chileno en ser registrado por una red con un número importante de acelerómetros digitales y estaciones banda ancha a distancias local y regional (< 500 km), además de ser el más grande tipo thrust en la región desde el terremoto de Antofagasta 1995.

En este capítulo, se realiza la inversión de la fuente de este terremoto con datos telesísmicos, usando el software desarrollado en este trabajo, y se comparan los resultados con los obtenidos en Peyrat *et al.* (2010) y los obtenido en Delouis *et al.* (2009). Este terremoto ha sido elegido como validación del programa de inversión principalmente por 2 motivos

1. La magnitud del evento es adecuado para considerar el modelo de fuente con dimensiones finitas.
2. Los estudios previos anteriormente mencionados logran caracterizar adecuadamente el proceso de ruptura del evento. En estos se exponen métodos de inversión con datos tanto del campo lejano como del campo lejano, además de considerar las componentes P y SH de las ondas de cuerpo para el ajuste. Todos ellos con resultados consistentes.

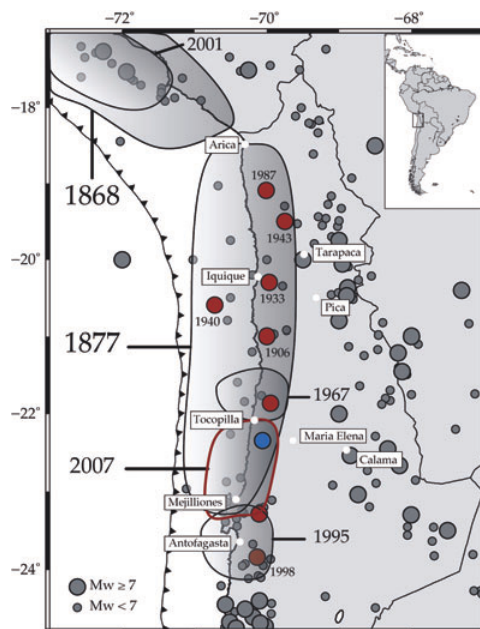


Figura 8.1: Tectonic setting: location and rupture areas of large earthquakes of the 19th and 20th in Northern Chile shown as estimated rupture zones (from Lomnitz 2004; Comte & Pardo 1991). Seismicity of magnitude greater than 5.5 (grey circles) from the Centennial Catalog (Engdahl & Villaseñor 2002). Red circles are events from Table 1. Blue circle is the 2007 November 14 Tocopilla mainshock. (Peyrat *et al.* 2010)

Date	Time	Lon. (°)	Lat. (°)	Depth (km)	M_w
1905/04/26	21:43:0.00	-70.00	-21.00	60.0	7.0
1906/08/30	2:38:0.00	-70.00	-21.00	0.0	7.1
1933/02/23	8:9:20.78	-69.96	-20.30	35.0	7.2
1940/10/04	7:54:50.11	-70.72	-20.59	23.5	7.1
1943/12/01	10:34:46.00	-69.75	-19.50	80.0	7.1
1967/12/21	2:25:24.40	-69.95	-21.86	42.5	7.4
1987/08/08	15:48:58.05	-70.01	-19.09	71.2	7.2
1995/07/30	5:11:25.16	-70.10	-23.28	46.0	8.0
1998/01/30	12:16:10.46	-70.13	-23.84	42.0	7.1
2001/06/23	20:33:14.98	-73.55	-16.30	29.8	8.4

Tabla 8.1: Sismicidad del gap del norte de Chile. Ubicación de los eventos de magnitud mayores a 7 seleccionados del Centennial Catalog of Engdahl & Villaseñor (2002) (Eventos de profundidad mayores a 80 km no son incluidos). (Peyrat *et al.* (2010))

8.1. Inversiones Previas del Terromoto de Tocopilla

8.1.1. Delouis *et al.* 2009

El mecanismo focal es obtenido modelando 21 componentes de la onda P y 16 componentes de la onda SH registradas a distancias telesísmicas, usando el método de Nábělek (1984) para una fuente puntual de doble cupla. Diversos parámetros de falla son testeados, obteniéndose el mejor ajuste para (strike, dip, rake)=(0,20,105), con una profundidad del hipocentro de 45 km. Posteriormente, se realizan 2 inversiones con el método de Nábělek (1984), uno modelando ondas de campo lejano y el otro modelando conjuntamente ondas de campo lejano con datos strong-motions. Ambas pruebas son ajustadas sobre un plano de falla de 192 km de largo y 132 km de ancho, cuyo strike y dip es fijado a los valores obtenidos previamente. El plano es dividido en 176 subfallas 12 km × 12 km, que son modeladas como fuentes puntuales. La función fuente temporal y el rake para cada subfalla es determinada mediante simulated annealing, siendo este último restringido a valores entre 90 y 120 grados. La distribución del slip para la inversión con datos del campo lejano se muestra en la figura 8.2 a). El momento sísmico estimado es de 3.97×10^{20} Nm.

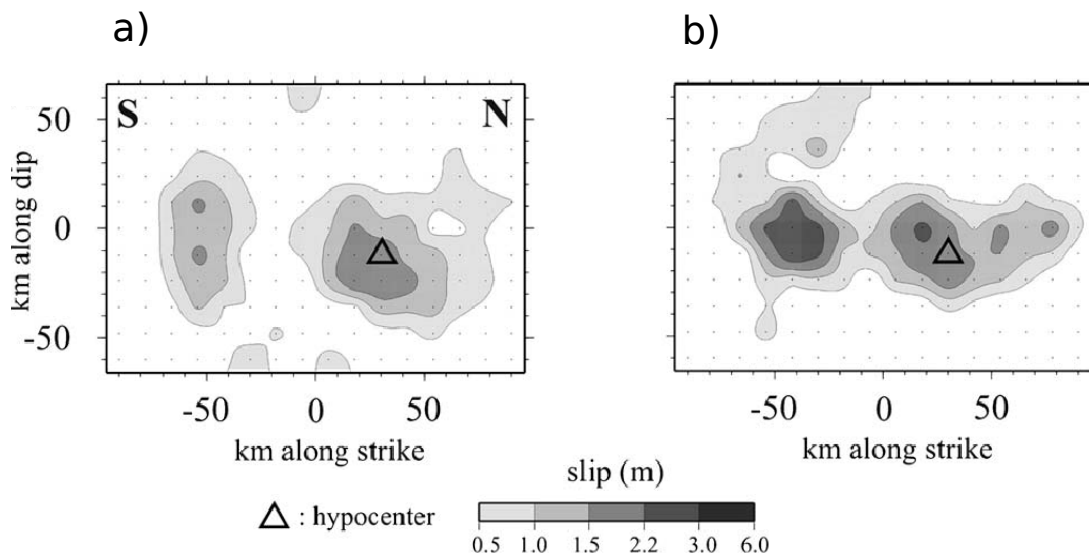


Figura 8.2: Distribución del slip obtenido en (Delouis *et al.* 2009). a) inversión con datos telesísmicos. b) inversión con datos telesísmicos y strong-motions.

Los resultados de la inversión conjunta son explicitados con más detalle. En este caso, el deslizamiento promedio es de 1.2 m sobre un área de $156 \times 48\text{km}^2$ (figura 8.2 b)) con un

momento sísmico total de 4.5×10^{20} Nm, correspondiente a M_w 7.7. El deslizamiento máximo es de 3 m. La función fuente estimada tiene una duración de 45 segundos, presentando 2 peaks de amplitud. El segundo peak ocurre 35 segundos después del inicio de la ruptura (figura 8.3). En ambas inversiones, se identifica una propagación norte sur, constituida por 2 parches de deslizamiento. El primero localizado en el hipocentro y el segundo a 70 km más hacia el sur. Como es mencionado en el paper, en ambas inversiones la forma de onda es correctamente modelada en amplitud y fase. La figura 8.4 muestra el ajuste para algunos sismogramas de la inversión conjunta.

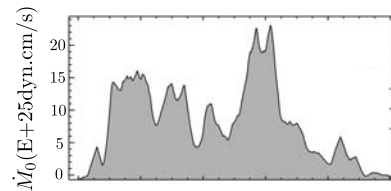


Figura 8.3: Función temporal fuente obtenido en la inversión conjunta. (Delouis *et al.* 2009)

La principal diferencia entre los 2 métodos utilizados es la estimación del momento sísmico, en donde es 20 % mayor en la inversión conjunta. Además, para este último método, el parche más al sur está asociado con un mayor deslizamiento, a diferencia de lo obtenido en la inversión telesísmica.

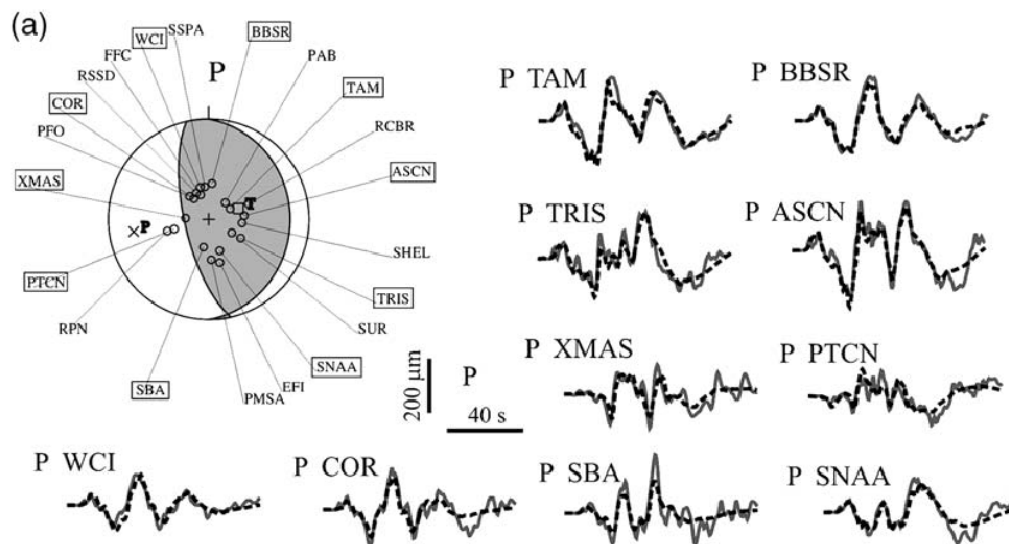


Figura 8.4: Ajuste de los sismogramas para la componente P para la inversión conjunta. (Delouis *et al.* 2009)

8.1.2. Peyrat *et al.* (2010)

En Peyrat *et al.* (2010), la inversión en el campo lejano es realizada por 2 métodos, considerando 18 observaciones para la componentes vertical de la onda P y 11 observaciones para componentes SH, cada una de 90 segundos de largo. Primero es utilizado el método de Nábělek (1984) para determinar el mecanismo focal. Se asume la presencia de 2 subeventos, velocidad de ruptura constante de 2.7 km/s y profundidad hipocentral de 50 km. Los parámetros son determinados como (strike, dip, rake)=(358,26,109). Los ajustes de la forma de onda y la función temporal son mostrados en la figura 8.5 .

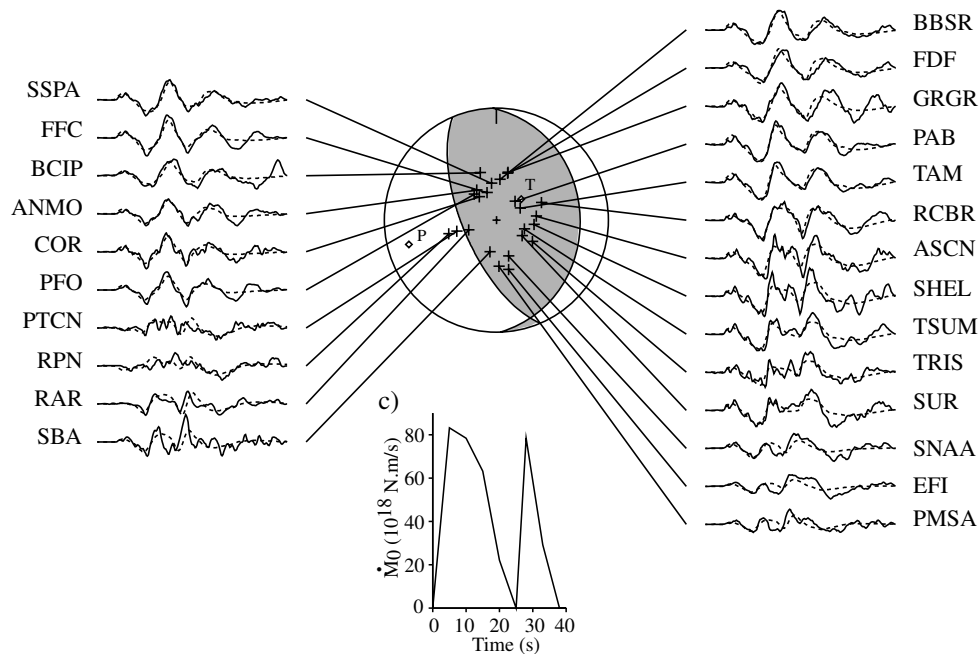


Figura 8.5: Ajuste de los sismogramas para 2 fuentes puntuales. (Peyrat *et al.* 2010)

La distribución del slip en la falla es determinada por el método de Kikuchi & Kanamori (1991), asumiendo como geometría fija la estimada previamente. Diferentes ajustes fueron computados sobre diferentes valores de profundidad hipocentral, dimensiones de falla, tamaño de la grilla y velocidad de ruptura. La superficie de falla es finalmente dividida en celdas de 20 km, cubriendo un área total de 160 km \times 80 km. La mejor solución es mostrada en la figura 8.6. El slip determinado está compuesta por 2 parches, uno correspondiente al hipocentro, y otro situado más al sur, al igual que el desplazamiento determinado por el trabajo de Delouis *et al.* (2009). La superficie total deslizada es de 150 km \times 60 km, con un deslizamiento máximo de 1.5 m. $M_0 = 2.9 \times 10^{20}$ Nm ($M_w = 7.6$).

Adicionalmente en este trabajo se realiza una inversión con datos strong-motions en el campo cercano, parametrizando los parches de deslizamiento obtenidos en la inversión como elipses (Vallé & Bouchon, 2004). Cada elipse es determinada por 6 parámetros: 2 coordenadas el origen, el ángulo de orientación, los semi ejes y el peak de deslizamiento en el centro. El mecanismo se asume uniforme en todo el plano, y la velocidad de ruptura radial de cada elipse constante. La fuente es modelada por 2 elipses, dado los resultados de inversión con datos en campo lejano. Los parámetros de las elipses son estimadas con el método de inversión no lineal *Neighbourhood algorithm* (NA) desarrollado por Sambridge (1999). Los resultados de esta inversión muestran 2 parches bien definidos. El primer parche rompe a una velocidad de 2.4 km s^{-1} , con un slip máximo de 2.6 m. El segundo parche rompe a 2.7 km s^{-1} , con un slip máximo de 2.4 m. El momento sísmico total es $3.68 \times 10^{20} \text{ Nm}$, $M_w = 7.6$

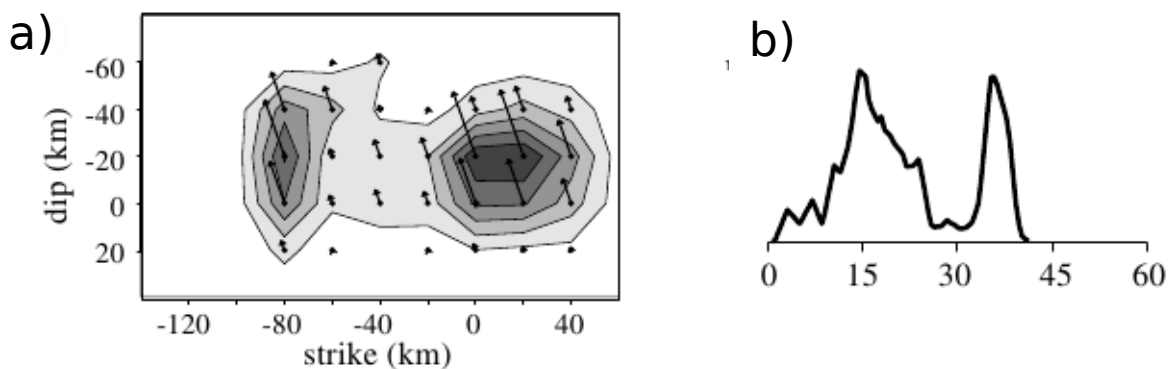


Figura 8.6: Resultado de la inversión con datos de campo lejano. a) distribución de los desplazamientos, b) función temporal fuente. (Peyrat *et al.* 2010)

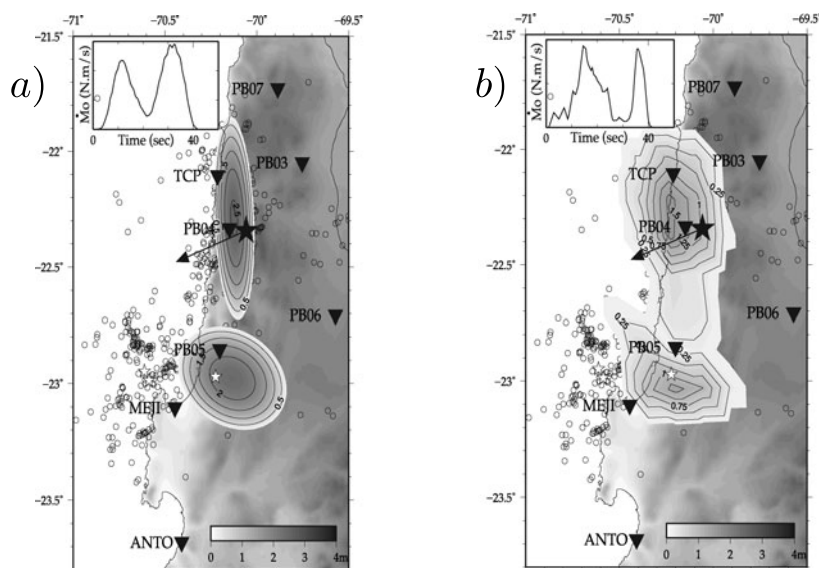


Figura 8.7: Distribución del slip y función temporal (Peyrat *et al.* 2010). (a) Inversión strong-motion campo cercano. (b) Inversión telesísmica.

8.2. Inversión Telesísmica con el Programa ONDDIM

Se modelan 19 componentes verticales de la onda P, de estaciones a distancia epicentral entre 30° y 90° . La distribución azimutal no resulta completa u homogénea debido principalmente a la pobre distribución de estaciones sísmicas en el pacífico. Este hecho ocurre generalmente para inversión telesísmica de terremotos chilenos. Los sismogramas banda ancha fueron obtenidos desde Incorporated Research Institutions for Seismology (IRIS) data center. Una ventana de 90 segundos fue utilizada para la inversión.

Para determinar los parámetros focales, se realizan sucesivas inversiones para diferentes orientaciones de plano de falla sobre un área de $200 \text{ km} \times 140 \text{ km}$, discretizada en celdas $20 \text{ km} \times 20 \text{ km}$. La función fuente temporal de cada celda es parametrizada con 14 triángulos isósceles de 2 segundos de base que se solapan, con tal de poder tener resolución para propagaciones anómalas (celdas que rompen tiempo después de ser alcanzados por el frente de ruptura, etc.). Los parámetros focales son iterados en un espacio de valores típicos para los eventos de subducción en el norte de Chile. La zona de contacto sismogénica en la región presenta un buzamiento entre los 21 y 30 grados (Araujo & Suarez 1994, Buske *et al.* 2002). La profundidad hipocentral es iterada entre los 20 y 50 km, tal como lo indica la sismicidad previa en la interfaz de contacto de las placas (Comte & Suárez, 1995; Delouis *et al.* 1996). El strike es buscado en torno a cero, cuyo valor es similar al de la fosa oceánica en la región. Todos estos valores en concordancia con los valores obtenidos por los trabajos de validación.

Junto con lo anterior, se prueban diversos valores de velocidad de ruptura.

Los parámetros focales que mejor ajustan los sismogramas por RMS son (strike, dip, rake)=(358, 26, 100), para una profundidad hipocentral de 50 km y una velocidad de ruptura de 2.7 km/s (figura 8.11). El deslizamiento obtenido se distribuye en un área de $140 \text{ km} \times 120 \text{ km}$, donde el mayor deslizamiento se encuentra en un área de $120 \text{ km} \times 60 \text{ km}$ (figura 8.8). En esta región se observa una propagación norte-sur, compuesta principalmente por 2 parches. El primero localizado en el hipocentro, con un slip máximo de 4.5 m, y el segundo a 60 km más al sur, con un slip máximo de 1.3 m. También se observa una leve propagación hacia la fosa, con deslizamientos menores a un metro. El momento sísmico total es $2.7 \times 10^{20} \text{ Nm}$ ($M_w = 7.6$).

La función fuente temporal se compone principalmente de la historia de los 2 parches principales los primeros 36 segundos, con peaks a los 10 y a los 30 segundos aproximadamente. Una tercera componente, de menor magnitud, se presenta entre los 37 y 57 segundos (figura 8.9).

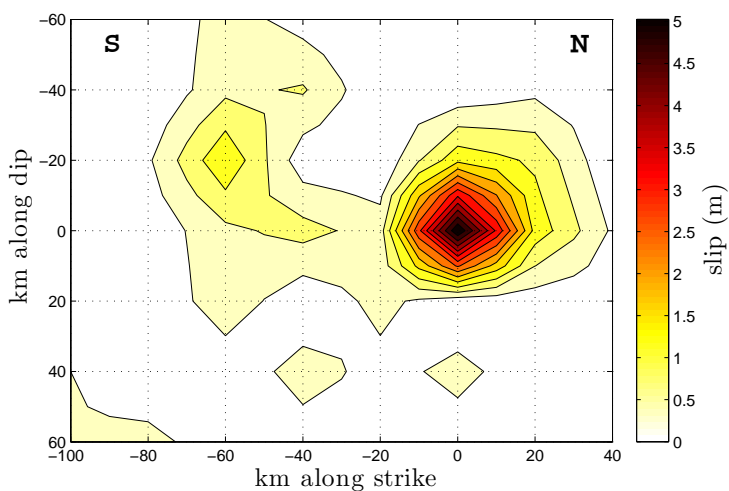


Figura 8.8: Distribución de los desplazamientos.

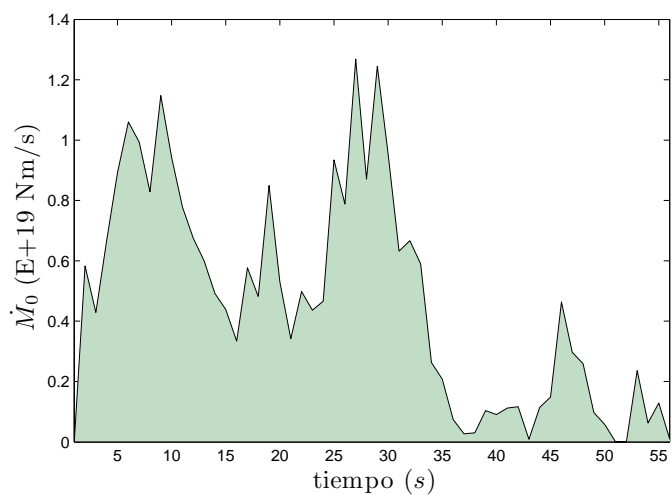


Figura 8.9: Función fuente temporal estimada.

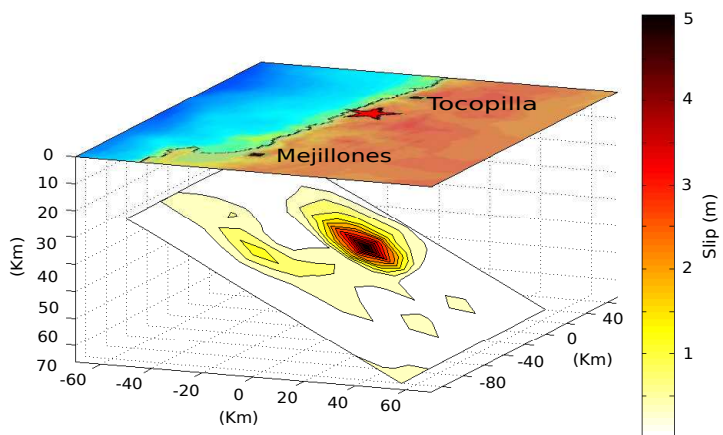


Figura 8.10: Orientación del campo de deslizamiento estimado con respecto al epicentro.

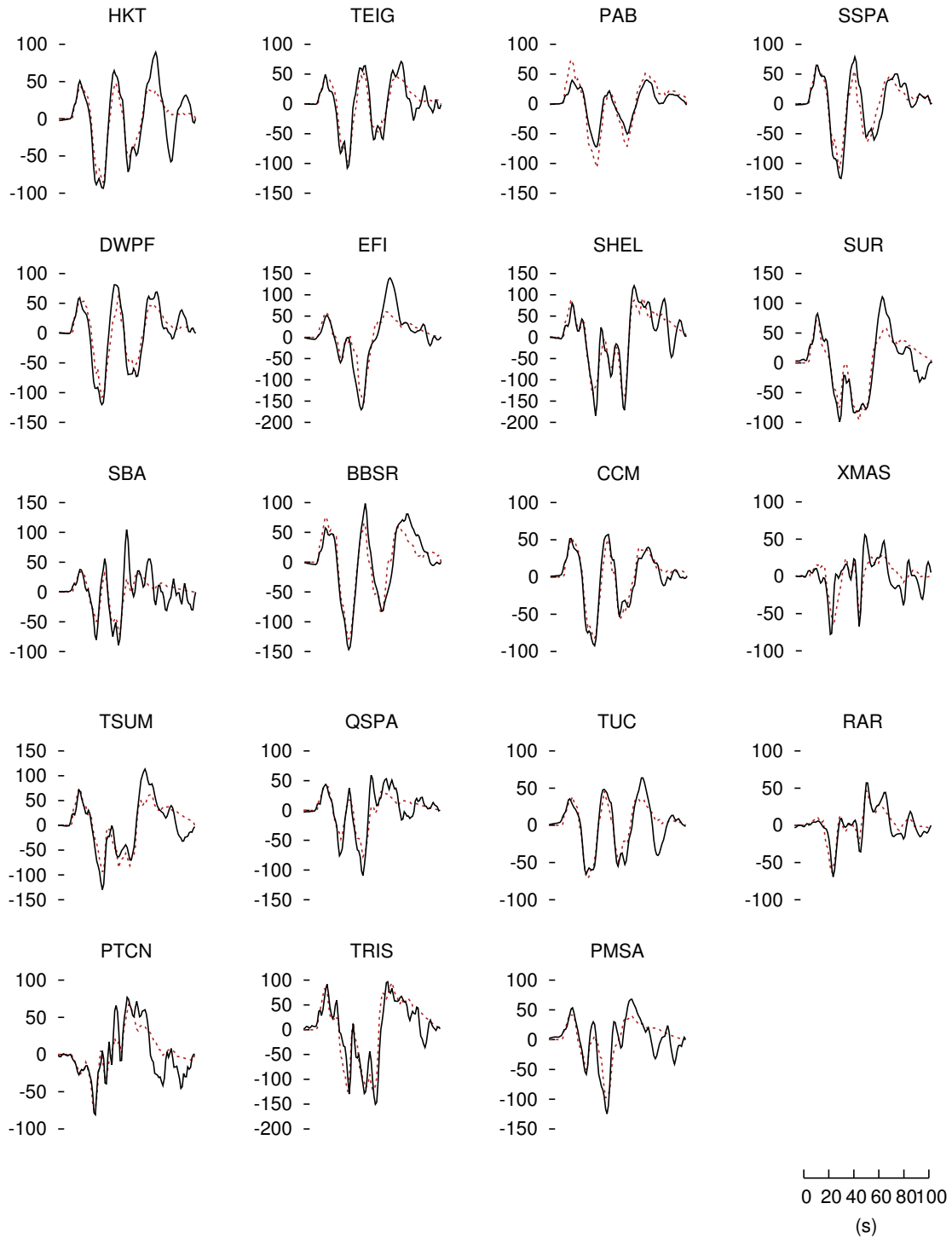


Figura 8.11: Ajuste de los sismogramas. En negro los sismogramas observados, en rojo el ajuste. Desplazamiento en μm .

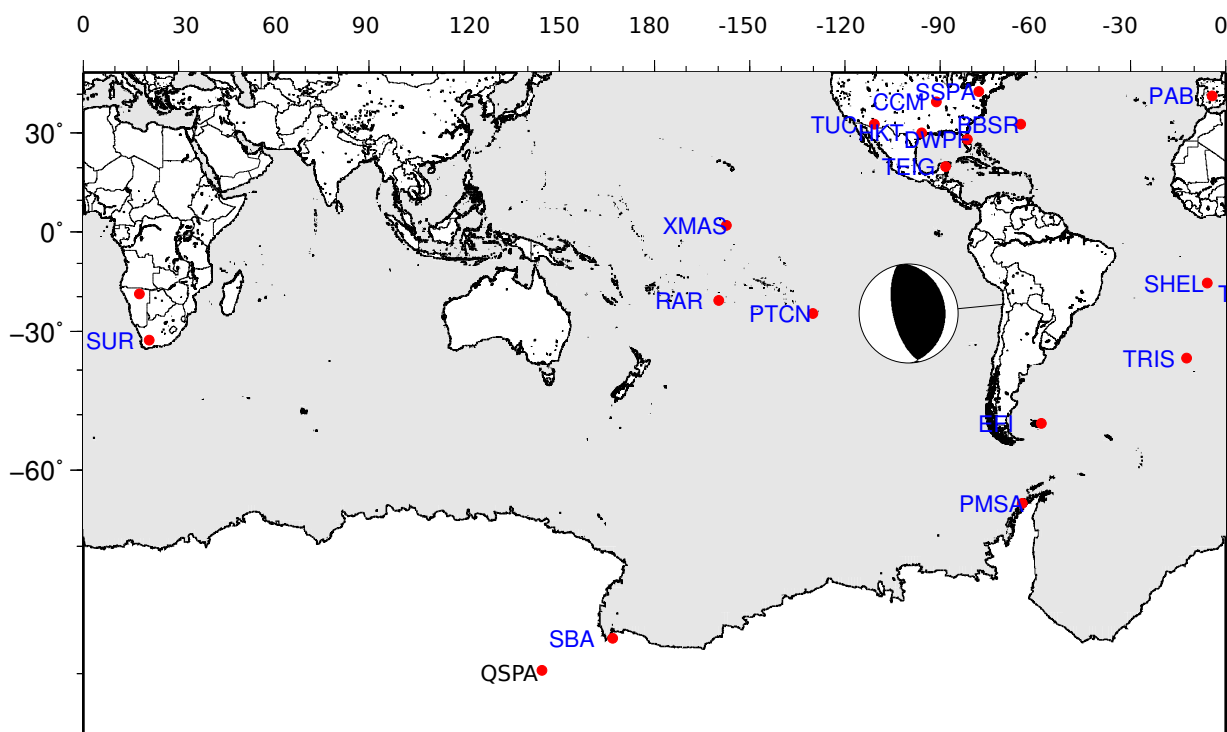


Figura 8.12: Ubicación de las estaciones utilizadas en la inversión con el programa ONDDIM.

8.3. Discusión de los Resultados

La estimación del mecanismo focal y profundidad hipocentral es similar para todos los métodos revisados. La mayor discrepancia en la orientación del plano de falla se encuentra en el ángulo dip estimado en Delouis *et al.* (2009) (tabla 8.2) Sobre la inversión campo de deslizamiento en la falla, todos los métodos muestran una propagación de ruptura norte-sur.

De las pruebas realizadas, la inversión de 2 fuentes puntuales con el método de Nábělek en Peyrat *et al.* (2010) muestra las mayores diferencias en el ajuste de los sismogramas, principalmente en las estaciones antidirectivas (SBA, SNAA, EFI, PMSA en la figura 8.5). Esto confirma la necesidad de parametrizar el plano de falla con más subeventos. Para la parametrización rectangular del plano de falla, los métodos obtienen una extensión de la ruptura relativamente parecida, entre 120-150 km de largo, y 50-60 km de ancho, incluyendo además una propagación menor hacia la costa, la cual resulta coherente con la distribución de las réplicas (figura 8.13). Sin embargo, aún cuando las inversiones con datos telesísmicos de los trabajos previos son consistentes con sus inversiones con datos de campo cercano, estas presentan algunas diferencias a considerar. En el trabajo de Delouis *et al.* (2009), la distancia estimada entre el centro de los 2 parches es 60-70 kms, siendo el de más al

sur el que presenta mayor deslizamiento, mientras que en Peyrat *et al.* (2010) es de 100 km aproximadamente, donde el máximo deslizamiento es en el primer parche. La solución obtenida en este trabajo sitúa a los parches a una distancia de 60 km, donde el primer parche presenta un deslizamiento máximo de 4.5 m. En los otros métodos, el deslizamiento máximo total es de 2.6 m y 3 m, siendo que hacen una estimación mayor del momento sísmico. Es decir, el método desarrollado en este trabajo concentra más el momento sísmico en el centro de un solo parche. Esto puede deberse a la sensibilidad para distinguir celdas contiguas, dado que la variación de la profundidad y de la distancia epicentral es pequeña para la inversión con datos telesísmicos. También puede deberse al número de triángulos para la generación de la función fuente temporal para cada subevento.

Trabajo	Strike (°)	Dip (°)	Rake (°)	hipocentro (km)	M_0 (Nm)
Delouis <i>et al.</i> (2009)	0	20	105	45	$3.97/4.5 \times 10^{20}$
Peyrat <i>et al.</i> (2010)	358	26	109	50	$2.9/3.68 \times 10^{20}$
Onddim	358	26	100	50	$2.7/ - \times 10^{20}$

Tabla 8.2: Mecanismos focales, duración de la función fuente temporal, y momento sísmico del terremoto de Tocopilla obtenida por los estudios de validación

Con respecto al programa desarrollado, los sismogramas sintéticos ajustan bien en rasgos generales los sismogramas observados (figura 8.11). Solamente el registro de la estación PAB no es consistente en amplitud con el sismograma sintético, pero si en forma, por lo que se asume que esta diferencia puede deberse a un error en el cálculo de su divergencia geométrica o en los valores de sensibilidad y amplificación de la respuesta instrumental de esta estación. El detalle más importante es en el ajuste del final de los sismogramas, donde se presentan las mayores diferencias. Esto es debido principalmente a las restricciones a priori de la longitud y tiempo de la ruptura. Sin embargo, los otros métodos también presentan sus mayores diferencias en el ajuste de este extremo, por lo que se puede suponer la existencia de un mecanismo complejo en el término de la ruptura, o la llegada de otras fases que no han sido consideradas en la modelación.

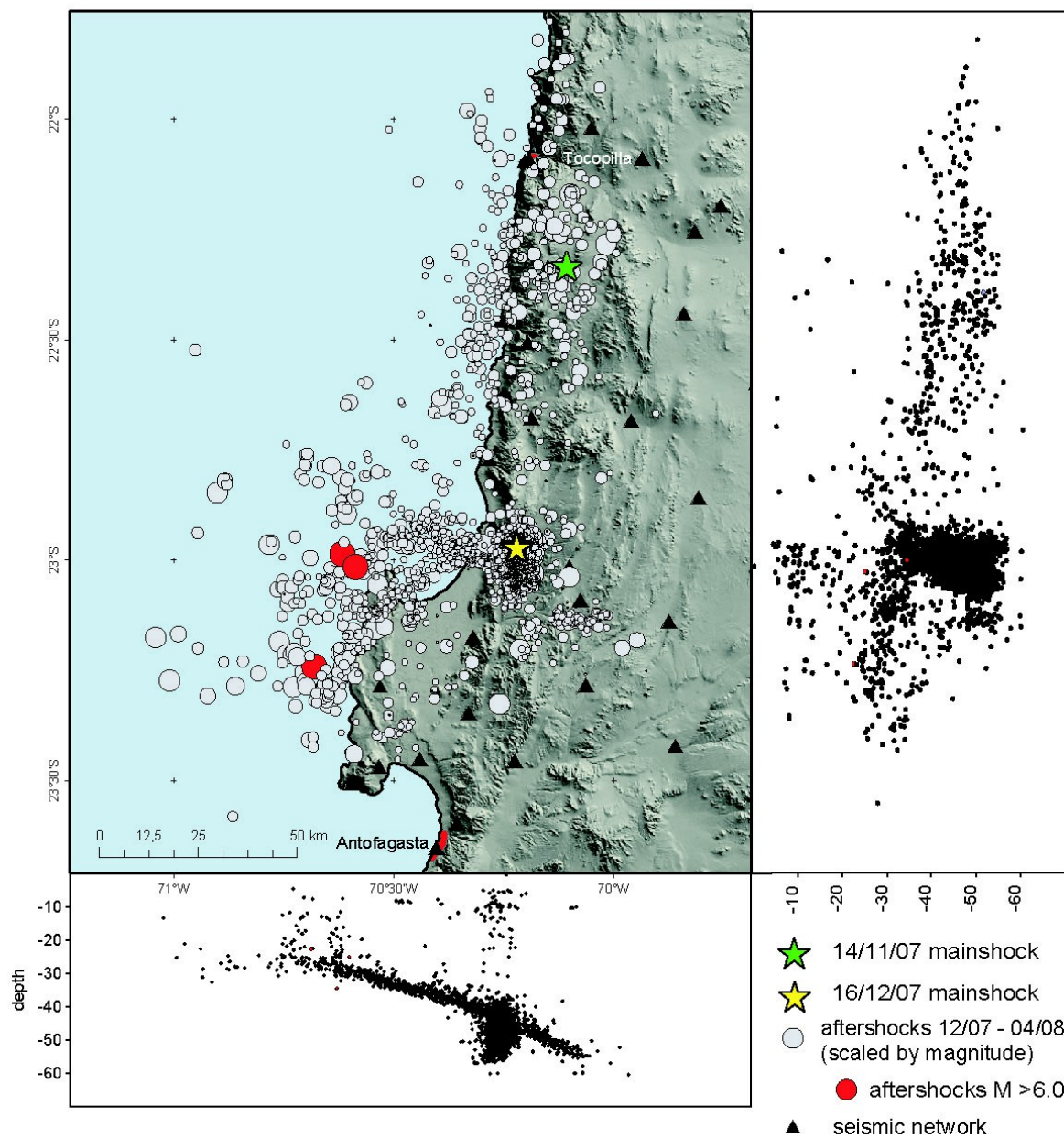


Figura 8.13: Distribución de las réplicas del terremoto de Tocopilla 14/11. (Sobiesiak, 2013)

Capítulo 9

Conclusiones

Diferentes esquemas de inversión han sido desarrollados para el estudio de la distribución espacial y temporal del campo de desplazamiento sobre el plano de falla. Aunque los diferentes esquemas poseen un marco teórico común en cuanto a la propagación de ondas de cuerpo, la parametrización de la falla y el planteamiento del problema de inversión dependen de la naturaleza particular de cada fenómeno. Dicha elección debe ser elegida considerando el nivel de detalle que se quiera obtener de la solución, del conocimiento a priori del fenómeno, y de la estabilidad del sistema que se obtiene.

Los Capítulos 2 y 3 se enmarcan en el estudio analítico de los desplazamientos producidos por la fuente sísmica. Considerando supuestos físicos simples, estos capítulos permiten una completa caracterización cinemática del fenómeno. Reemplazando dichos supuestos, es posible derivar una descripción matemática de otros fenómenos de interés que puedan ser representados vía los Teoremas de Reciprocidad y Representación. El capítulo 4 expone las correcciones que deben ser realizadas a la solución para los desplazamientos generados en la fuente, con tal de incorporar tanto las características de la propagación en medios no homogéneos acotados, como los concernientes a la respuesta instrumental. La expresión (4.41), que se obtiene al final de este capítulo, es la utilizada para la generación de los sismogramas sintéticos en métodos de inversión de Kikuchi & Kanamori (1982), Hartzell & Heaton (1983), Kikuchi & Fukao (1985) y Nábělek (1984). Por lo tanto, estos 3 capítulos permiten entender los fundamentos teóricos subyacentes al problema de inversión de ondas de cuerpo para distancias telesísmicas.

Referidos al programa de inversión desarrollado en este trabajo, la estimación del campo de desplazamientos en la fuente para el terremoto de Tocopilla del 2007 (Capítulo 8) resulta ser consistente con los trabajos de validación, los que muestran que la propagación de la

ruptura presenta una dirección norte-sur, con una leve propagación hacia la costa. También es consistente con las magnitudes físicas que describen el fenómeno, tanto en extensión de la falla, duración de la ruptura, momento sísmico y distribución de las réplicas. Sin embargo, se observa que la distribución del campo de deslizamiento no es suave. Se encuentran celdas con gran deslizamiento adyacentes a celdas de desplazamiento despreciable. Esto es debido posiblemente a la poca sensibilidad en la distinción de entre celdas vecinas, para las longitudes de onda estudiadas. El determinar las dimensiones mínimas de la parametrización es propuesto como un trabajo futuro. Una posible implementación para subsanar este hecho es ampliando el sistema lineal de inversión, como en el método de Hartzell & Heaton,

$$\begin{bmatrix} A \\ \lambda F \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b \\ \lambda d \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

y definir F y d de manera tal de incluir relaciones de proximidad de los deslizamientos entre celdas aledañas. La definición de F para este fin es no trivial, pues depende tanto de la parametrización de la grilla como del criterio utilizado para relacionar las celdas. La elección de λ debe ser tal de no destruir significativamente la calidad del ajuste. Definido el criterio de proximidad, su incorporación en el sistema matricial posee la ventaja de conservar la interpretación física del fenómeno de propagación. Para el método de Kikuchi & Kanamori (1991), este tipo de correcciones no son directas, debido a que el método iterativo de resolución no considera explícitamente la causalidad de la ruptura. Este último método posee mayores ventajas para el estudio de terremotos de naturaleza más compleja.

También es posible ampliar el sistema matricial incorporando otro tipo de funciones de Green, con tal de modelar ondas de cuerpo en el campo cercano, ondas superficiales o datos GPS, y estudiar como es modificada la solución de la inversión. Para el estudio del terremoto de Tocopilla, el momento sísmico estimando considerando datos strong-motions en Peyrat *et al.* (2010) y Delouis *et al.* (2009) es en promedio 20% mayor que lo estimando por sus respectivas inversiones con datos telesísmicos.

Dada de la flexibilidad que entrega la programación del método desarrollado en este trabajo, es posible modificar el problema de inversión con tal de realizar otro tipo de análisis. Un estudio interesante es, dada una orientación del plano de falla, determinar el rake para cada uno de los subeventos de manera independiente. Este problema, denominado *slip partitioning*, consiste en la descomposición el vector slip en su componente normal y perpendicular con respecto al movimiento de las placas, para estudiar su efecto en la deformación de la corteza. Para este propósito, ser necesario incorporar una subrutina para el problema de minimización no lineal, como *simulated annealing*, e imponer condiciones que sean consideradas adecuadas para cada caso, como restringir la variabilidad del slip para celdas aledañas. La flexibilidad en la programación también permite concatenar el método

a sistemas de alerta temprana del centro sismológico nacional. A partir de la estimación del campo de deslizamiento sobre el plano de falla es posible obtener, mediante la técnica del modelo elástico de Okada, el campo de desplazamientos del fondo oceánico para sismos de subducción tipo thrust, con lo que el modelo desarrollado en esta memoria permitiría contar con un input para el modelación de tsunami teórico que se desarrolla en el departamento de Geofísica bajo el programa de riesgo sísmico.

Bibliografía

- Aki, K. (1979), Characterization of barriers on an earthquake fault. *J. Geophys. Res.* 84, 6140–6148.
- Aki, K. and Richards, P. (1980), *Quantitative Seismology*. Freeman, San Francisco.
- Andersen, L. (2006), *Linear elastodynamic Analysis*. Aalborg University, Aalborg, Denmark.
- Andrews, D.J. (1980), A stochastic fault model 1.Static case. *J. Geophys. Res.* 85, 3867–3877.
- Andrews, D.J. (1981), A stochastic fault model 2.Time-dependent case. *J. Geophys. Res.* 86, 10821–10834.
- Angermann, D., Klotz, J. and Reigber, C. (1999), Space-geodetic estimation of the Nazca-South America Euler vector, *Earth planet. Sci. Lett.* 171, 329–334.
- Araujo, M. and Suárez, G. (1994), Geometry and state of stress of the sub- ducted Nazca plate beneath central Chile and Argentina: evidence from teleseismic data, *Geophys. J. Int.* 116, 283–303.
- Berckhemer, H. and Jacob, K.H. (1965), Synthetic seismic pulses from propagating faults. Scientific Report no 1. Institut für Meteorologie und Geophysik der Johann Wolfgang Goethe, Universität Frankfurt am Main, Germany.
- Burridge, R. and Knopoff, L. (1964), Body force equivalents for seismic dislocations, *Bull. seism. Soc. Am.* 56, 1875–1888.
- Buske, S., Lüth, S., Meyer, H., Patzig, R., Reichert, C., Shapiro, S., Wigger, P. and Yoon, M. (2002), Broad depth range seismic imaging of the subducted Nazca Slab, North Chile, *Tectonophysics* 350, 273–282.

- Campos, J. (1989), Determinación de parámetros focales por medio del modelamiento de ondas de cuerpo del sismo del 9 de dic. de 1950. *Tesis de Magister*. Universidad de Chile, Santiago, Chile.
- Carpenter, E.W. and Flinn, E.A. (1965), Attenuation of teleseismic body waves, *Nature* 207, 745.
- Carpenter, E.W. (1967), Teleseismic signals calculated for underground, underwater, and atmospheric explosions, *Geophysics* 23, 1, 17–32
- Comte, D., and Suárez, G. (1995), Stress distribution and geometry of the subducting Nazca plate in northern Chile using teleseismically recorded earthquakes, *Geophys. J. Int.* 122, 419–440.
- Das, S. (1981), Three-dimensional spontaneous rupture propagation and implications for the earthquake source mechanism, *Geophys. J. R. astr. Soc.* 67, 375–393.
- Das, S. and Aki, K. (1977), Fault plane with barriers, a versatile earthquake model, *J. Geophys. Res.* 82, 5658–5670.
- Delouis, B., Cisternas, A., Dorbath, L., Rivera, L. and Kausel, E. (1996), The Andean subduction zone between 22 and 25S (northern Chile): precise geometry and state of stress, *Tectonophysics*, 259, 81–100.
- Delouis, B., Pardo, M., Legrand, D. and Monfret, T. (2009), The Mw 7.7 Tocopilla Earthquake of 14 November 2007 at the Southern Edge of the Northern Chile Seismic Gap: rupture in the Deep Part of the Coupled Plate Interface, *Bull. seism. Soc. Am.* 99, 87–94.
- Deschamps, A., Lyon-Caen, H., Madariaga, R. (1980), Mise au point sur les méthodes de calcul de sismogrammes synthétiques de longue période. *Ann. Géophys.* 36, 167–178.
- Futterman, W. I. (1962), Dispersive body waves, *J. Geophys. Res.* 67(13), 5279–5291.
- Hartzell, S.H. and Heaton, T.H. (1983), Inversion of strong ground motion and teleseismic waveform data for the fault rupture history of the 1979 Imperial Valley, California, earthquake. *Bull. Seism. Soc. Am.* 73, 1553–1583.
- Hartzell, S.H. and Heaton, T.H. (1985), Telesismic time functions for large, shallow subduction zone earthquakes. *Bull. Seism. Soc. Am.* 75, 965–1004.
- Haskell, N.A. (1964), Total energy and energy spectra density of elastic waves from propagating faults. *Bull. Seism. Soc. Am.* 51, 401–435.

- Hutt, R. (1993), Specifying and using channel response information, Appendix C. SEED, Reference Manual, 131-150.
- Israel, M. and Nur, A. (1979), A complete solution of a one-dimensional propagating fault with non-uniform stress and strength. *J. Geophys. Res.* 88, 2191–2198.
- Kanamori, H. (1979), A semi-empirical approach to prediction of long-period ground motions from great earthquakes. *Bull. Seismol. Soc. Am.* 69, 1645–1670.
- Kanamori, H. and Stewart, G. (1978), Seismological aspects of the Guatemala earthquake of February 4, 1976, *J. Geophys Res.* 83, 3427–3434.
- Karal, C. and Keller, B. (1959), Elastic Wave Propagation in Homogeneous and Inhomogeneous Media *J. Acoust. Soc. Am.* 31, 694–705
- Kelleher, J.A. (1972), Rupture Zones of Large South American Earthquakes and Some predictions, *J. Geophys. Res.* 77(11), 2087–2103.
- Kelleher, J., Sykes, L. and Oliver, J. (1973), Possible criteria for predicting earthquake locations and their application to major plate boundaries of the Pacific and the Caribbean, *J. Geophys. Res.* 78(14), 2547–2585.
- Kennett, B.L.N. (2005), *Seismological tables: ak135*, Research School of Earth sciences. The Australian National University, Canberra, Australia
- Kikuchi, M. and Fukao, Y. (1985), Iterative deconvolution of complex body waves. The Tokachi- Oki earthquake of 1968. *Phys. Earth Planet. Inter.* 37, 235–248.
- Kikuchi, M. and Kanamori, H. (1982), Inversion of complex body waves. *Bull. Seism. Soc. Am.* 72, 491–506.
- Kikuchi, M. and Kanamori, H. (1991), Inversion of complex body waves - III, *Bull. Seism. Soc. Am.* 81, 2335–2350.
- Knopoff, L. (1967), *The Mathematics of the Seismic Source*. Institut für Geophysik, Universitat Karlsruhe (lecture notes).
- Langston, C.A. and Helmberger, D.V (1975), A procedure for modelling shallow dislocation sources. *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 4, 117–30.
- Lay, T.H., Kanamori, H. and Ruff, L. (1982), The asperity model and the nature of large subduction zone earthquakes. *Earthquake Prediction Res.* 1: 3–71.

- Lay T. and Wallace, T.C. (1995), *Modern Global Seismology*, Academic Press, San Diego, CA.
- Mendoza, C. and Hartzell, S.H. (1988), Inversion for slip distribution using teleseismic P waveforms: North Palm Springs, Borah Peak, and Michoacan earthquakes. *Bull. Seism. Soc. Am.* 78, 1092–1111.
- Mendoza, C. and Hartzell, S.H. (1989), Slip distribution of the 19 September 1985 Michoacan, Mexico, earthquake. *Bull. Seism. Soc. Am.* 79, 655–669.
- Mikumo, T. and Miyatake, T. (1978), Dynamical rupture process on a three-dimensional fault with non-uniform frictions, and near-field seismic waves. *Geophys. Jr. Astron. Soc.* 54, 417–438.
- Miyatake, T. (1980a), Numerical simulations of earthquake source by a three-dimensional crack model. Part I. Rupture process. *J. Phys. Earth* 28, 565–598.
- Miyatake, T. (1980b), Numerical simulations of earthquake source by a three-dimensional crack model. Part II. Seismic waves and spectrum. *J. Phys. Earth* 28: 599–616.
- Nábělek, J. (1984), Determination of earthquake source parameters from inversion of body waves, *PhD thesis*, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA.
- Nur, A. and Israel, M. (1980), The role of heterogeneities in faulting. *Phys. Earth Planet. Inter.* 21, 225–236.
- Olson, A.H. and R.J. Apsel (1982), Finite faults and inverse theory with applications to the 1979 Imperial Valley earthquake, *Bull. Seismol. Soc. Am.* 72, 1969–2001.
- Papageorgiou, A.S. and Aki, K. (1983a), A specific barrier model for the quantitative discription of inhomogeneous faulting and the prediction of strong ground motion. Part I. Description of the model. *Bull. Seismol. Soc. Am.* 73: 693–722.
- Papageorgiou, A.S. and Aki, K. (1983b), A specific barrier model for the quantitative discription of inhomogeneous faulting and the prediction of strong ground motion. Part II. Applications of the model. *Bull. Seismol. Soc. Am.* 73, 953–978.
- Pho, H.T. and Behe, L. (1972), Extended distances and angles of incidence of P waves, *Bull. seism. Soc. Am.* 62, 885–902.
- Sambridge, M. (1999), Geophysical inversion with a neighbourhood algorithm -I. Searching a parameter space, *Geophys. J. Int.* 138, 479–494.

- Scherbaum, F. (1996), *Of poles and zeros. Fundamentals of Digital Seismology*. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.
- Shearer, P (2009), *Introduction to seismology*. Cambridge University press, New York.
- Sobiesiak, M., Proyecto Red ILN para el Norte de Chile, 2013.
- Stein, S. and Wysession, M. (2003), *An introduction to seismology, earthquakes, and earth structure*. Blackwell Publishing, MA, USA.
- Udías, A. (1999), *Principles of Seismology*. Cambridge University Press, UK.
- Vallée, M. and Bouchon, M. (2004), Imaging coseismic rupture in far field by slip patches, *Geophys. J. Int.* 156, 615–630.
- Wyss, M. and Brune, J.N. (1967), The Alaska earthquake of 28 March 1964: a complex multiple rupture, *Bull. Seism. Soc. Am.* 57, 1017–1023.
- Young, C.J., Lay, T., and Lynnes, C.S. (1989), Rupture of the 4 February 1976 Guatemalan earthquake, *Bull. Seism. Soc. Am.* 79, 670–689.

APÉNDICE

Apéndice A

Notación indicial

Para poder escribir de manera compacta el desarrollo de ciertas expresiones, se ha preferido usar en los primeros capítulos la notación indicial. Para un campo vectorial \mathbf{u} , el término u_i es entendido como su i -ésima componente, donde i toma los valores $i = 1, 2, 3$ cuando es expresada en una ecuación. Las derivadas son escritas de manera compacta con el signo coma separando los subíndices correspondiente a las componentes involucradas

$$u_{i,j} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (\text{A.1})$$

En la notación de sumación de Einstein, las expresiones que poseen índices repetidos corresponden a la suma de dichos los términos donde el índice que se repite toma los valores de 1 a 3. Las expresiones más comunes expresadas con esta convención son:

Producto escalar de vectores

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = x_i y_i \quad (\text{A.2})$$

Traza matricial

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = A_{11} + A_{22} + A_{33} = A_{ii} \quad (\text{A.3})$$

Divergencia de campo escalar

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = u_{i,i} \quad (\text{A.4})$$

Se introduce el símbolo de permutación o símbolo de Levi- Civita (parámetro de

permutación) como

$$e_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si alguno de los índices son iguales} \\ 1 & \text{si } i, j, k \text{ es una subsecuencia de } 12312 \\ -1 & \text{si } i, j, k \text{ es una subsecuencia de } 32132 \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

con el cual, se simplifica la expresión del producto cruz

$$a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{x}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\hat{x}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{x}_3 \quad (\text{A.6})$$

al describir sus componentes como

$$(a \times b)_i = e_{ijk}a_jb_k \quad (\text{A.7})$$

De igual modo, las componentes del rotor de un campo vectorial son descritas como

$$(\nabla \times F)_i(x) = \epsilon_{ijk} \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(x) \quad (\text{A.8})$$

Una de las funciones de mayor utilidad para la descripción indicial es el delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

el cual está relacionado con el símbolo de permutación vía la identidad $\delta - \epsilon$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \quad (\text{A.10})$$

Apéndice B

Ecuaciones de ondas no homogéneas

Para encontrar los potenciales para el campo de desplazamiento, se deben resolver las ecuaciones de onda

$$\frac{\partial^2 \phi_l(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = -\frac{X_0(t)}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \alpha^2 \frac{\partial \phi_l(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (\text{B.1a})$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_{il}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \epsilon_{ijl} \frac{X_0(t)}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \beta^2 \frac{\partial \Psi_{il}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (\text{B.1b})$$

Siendo el desarrollo en Andersen (2006), salvo correcciones en errores de signo, se introducen las funciones auxiliares $f_p(\mathbf{x}, t)$, $f_s(\mathbf{x}, t)$

$$\phi_l(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_l} f_p(\mathbf{x}, t), \quad \Psi_{il} = \epsilon_{ijl} \frac{\partial}{\partial x_j} f_s(\mathbf{x}, t) \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \frac{X_0(t)}{4\pi\rho} \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \alpha^2 \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (\text{B.3a})$$

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \frac{X_0(t)}{4\pi\rho} \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \beta^2 \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (\text{B.3b})$$

El operador Laplaciano es escrito en coordenadas esféricas. En el caso general

$$\nabla^2 f = \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cot \vartheta}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \quad (\text{B.4})$$

Donde r es la distancia al origen, θ y ϑ son los ángulos de azimut y polar, respectivamente. Las coordenadas cartesianas están relacionadas con las coordenadas esféricas vía las relaciones

$$x_1 = r \sin \vartheta \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \vartheta \sin \theta, \quad x_3 = r \cos \vartheta \quad (\text{B.5})$$

Sin embargo, ya que el problema definido por la ecuación (B.3) posee simetría esférica, la solución es independiente de ϑ y θ , por lo que sólo las derivadas con respecto a r se conservan. Es decir

$$\frac{\partial^2 f_p(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi\rho} \frac{X_0(t)}{r} + \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 f_p}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f_p}{\partial r} \right) \quad (\text{B.6a})$$

$$\frac{\partial^2 f_s(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi\rho} \frac{X_0(t)}{r} + \beta^2 \left(\frac{\partial^2 f_s}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f_s}{\partial r} \right) \quad (\text{B.6b})$$

El sistema (B.6) puede ser simplificado introduciendo las cantidades F_p, F_s ,

$$f_p(x, t) = \frac{F_p(r, t)}{r}, \quad f_s(x, t) = \frac{F_s(r, t)}{r} \quad (\text{B.7})$$

con lo que se obtiene

$$\frac{\partial^2 F_p(x, t)}{\partial t^2} = \frac{X_0(t)}{4\pi\rho} + \alpha^2 \frac{\partial^2 F_p}{\partial r^2} \quad (\text{B.8a})$$

$$\frac{\partial^2 F_s(x, t)}{\partial t^2} = \frac{X_0(t)}{4\pi\rho} + \beta^2 \frac{\partial^2 F_s}{\partial r^2} \quad (\text{B.8b})$$

Excepto por las velocidades α y β , ambas ecuaciones son idénticas. La ecuación general para la ecuación de ondas se escribe

$$F(r, t) = P(t) + Q_1(t - r/c) + Q_2(t - r/c) \quad (\text{B.9})$$

donde Q_1 y Q_2 son funciones arbitrarias. El primer término corresponde a la solución particular, y las 2 siguientes dan la solución homogénea general. Obviando los subíndices P y S , una solución particular de la ecuación (B.8) es buscada como

$$P(t) = \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^t (t-s)X(s)ds \quad (\text{B.10})$$

Para probar esto, se integra por partes (B.10)

$$P(t) = \frac{1}{4\pi\rho} \left[(t-s)\tilde{X}(s) \right]_0^t + \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^t \tilde{X}(s)ds = \frac{1}{4\pi\rho} \left\{ \tilde{X}(t) - \tilde{X}(0) - t\tilde{X}(0) \right\} \quad (\text{B.11})$$

donde $\tilde{X}(t)$ es la antiderivada de $X(t)$. Entonces, insertando P en (B.8), y obviando los subíndices P y S , resulta

$$\frac{\partial^2 P}{\partial s^2} - c^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \frac{1}{4\pi\rho} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial s^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right\} \left\{ \tilde{X}(t) - \tilde{X}(0) - s\tilde{X}(0) \right\} = \frac{X(s)}{4\pi\rho} \quad (\text{B.12})$$

donde se ha usado que $X(t)$ es independiente de r . Es fácilmente probado por inserción que la solución de la parte homogénea de (B.8) tiene la forma general de $F_h(t - r/\alpha)$ para

la primera ecuación y $F_h(t - r/\alpha)$ para la segunda, donde F_h es una función arbitraria. Note que los términos con argumento $t + r/\alpha$ y $t + r/\beta$ son inválidos físicamente, ya que corresponden a ondas propagándose hacia la fuente. Así, obviando nuevamente los subíndices P y S , la solución completa para cualquiera de la ecuaciones son de la forma $F(r, t) = F_h(t - r/c) + P(t)$. Evidentemente, una solución físicamente válida es solamente obtenida si las funciones auxiliares $f_p(x, t)$ y $f_s(x, t)$ son finitas en $r = 0$. Esto es sólo en el caso que $F_p(0, t) = F_s(0, t) = 0$, es decir

$$F(0, t) = F_h(t) + P(t) = 0 \implies F_h(t) = -\frac{1}{4\pi\rho} \int_0^t (t-s)h(s)ds \quad (\text{B.13})$$

Sigue que la solución general $F(r, t)$ puede ser escrita en la forma

$$F(r, t) = \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^t (t-s)h(s)ds - \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^{t-r/c} \left(t - \frac{r}{c} - s\right) h(s)ds \quad (\text{B.14})$$

y por un simple arreglo de los términos, $F_p(r, t)$ y $F_s(r, t)$ son obtenidos como

$$F_p(t) = \frac{1}{4\pi\rho} \int_{t-r/\alpha}^t (t-s)h(s)ds + \frac{r}{4\pi\rho\alpha} \int_0^{t-r/\alpha} h(s) \quad (\text{B.15a})$$

$$F_s(t) = \frac{1}{4\pi\rho} \int_{t-r/\beta}^t (t-s)h(s)ds + \frac{r}{4\pi\rho\beta} \int_0^{t-r/\beta} h(s) \quad (\text{B.15b})$$

El paso siguiente consiste en emplear el cambio de variable (B.7) , y subsecuentemente (B.2), Así

$$\phi_l(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{F_p(r, t)}{r} \right) \quad , \quad \Psi_{il}(x, t) = \epsilon_{ijl} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{F_s(r, t)}{r} \right) \quad , \quad r = |x| \quad (\text{B.16})$$

las cuales, por inserción de $F_p(r, t)$ y $F_s(r, t)$ de (B.15), se obtiene el resultado

$$\phi_l(x, t) = -\frac{1}{4\pi\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x_l} \frac{1}{r} \right) \int_0^{|x|/\alpha} \tau X_0(t - \tau) d\tau \quad (\text{B.17a})$$

$$\Psi_{il}(x, t) = \epsilon_{ijl} \frac{1}{4\pi\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} \right) \int_0^{|x|/\alpha} \tau X_0(t - \tau) d\tau \quad (\text{B.17b})$$

