



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE GEOFÍSICA

PROPAGACIÓN DE ONDAS SOLITARIAS EN MEDIOS ESTRATIFICADOS:
TEORÍA Y OBSERVACIONES

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS, MENCIÓN GEOFÍSICA

RODRIGO ANDRÉS CONTRERAS ARRATIA

PROFESOR GUÍA:
MARIO PARDO PEDEMONTTE

MIEMBROS DE COMISIÓN:
JAVIER RUIZ PAREDES
KLAUS BATAILLE BOLLWEG

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto Fondecyt 1100990

SANTIAGO DE CHILE
2013

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL
GRADO DE: Magíster en Ciencias, mención
Geofísica

POR: Rodrigo Andrés Contreras Arratia

FECHA: 29/07/2013

PROFESOR GUIA: Mario Pardo Pedemonte

PROPAGACIÓN DE ONDAS SOLITARIAS EN MEDIOS ESTRATIFICADOS: TEORÍA Y OBSERVACIONES

La teoría clásica en sismología que explica la transmisión de ondas en un medio elástico se sustenta sobre las bases de la ley de Hooke, la cual relaciona linealmente los esfuerzos aplicados a un cierto sólido con la deformación que éste sufre. Si bien ésta es válida en la mayoría de los casos, es posible que no explique todos los fenómenos ondulatorios en medios elásticos. Para algunos casos es necesaria una relación constitutiva que incluya términos de mayor orden, o términos no lineales. Esto es posible debido a la existencia de una relación entre la Energía Interna de Deformación y los invariantes del tensor de deformación. El trabajo teórico desarrollado en este estudio incorpora la transmisión de ondas dispersivas en un medio no lineal, la cual entrega ecuaciones diferenciales no lineales. Éstas, bajo ciertas condiciones, presentan soluciones de Ondas Solitarias, es decir, son ondas viajeras que no pierden su forma de onda a medida que se propagan.

Las soluciones a los modelos presentan velocidades de fase levemente mayores a la velocidad de la onda S, periodos cercanos a los 150s, deformaciones permanentes y amplitudes de onda inversamente proporcionales a la raíz de los coeficientes de no linealidad. Estas ondas se observan principalmente en zonas cercanas al hipocentro de sismos de magnitud moderada y donde las rocas se comporten no linealmente con endurecimiento, esto significa que a medida que los esfuerzos aplicados sean mayores, la roca será más difícil de deformar.

Estos resultados se comparan con observaciones de sismos registrados en Estados Unidos: un sismo Mw 5.1 ocurrido el 29 de Septiembre del 2004 y otro Mw 4.8 que ocurrió el 8 de octubre del 2006. El análisis de señales comprende: pruebas de ruido que muestran que las señales son parte del sismo y no ruido sísmico ambiente, gráficos distancia vs tiempo que muestran una velocidad de fase relativamente constante para la onda y estudios de polarización y amplitudes esperadas en cada estación que muestran movimientos de partícula concordante con el 50% de los datos. En las réplicas estudiadas del terremoto de Chile del 27 de Febrero del 2010, de los registros estudiados, no se observaron las señales de periodo largo, lo cual muestra que la geología de Chile no cumple las condiciones necesarias para la propagación de ondas solitarias. Por otro lado, al revisar la literatura se puede establecer que sismos de profundidad intermedia y mayor no generan estas ondas de baja frecuencia, sólo se observan en sismos superficiales (intraplaca). Es por esto que no se espera observar estas señales en las réplicas del terremoto de Chile.

Si bien estos resultados muestran que hay observaciones que cumplen con las condiciones del modelo, no es una conclusión definitiva. Se deben realizar más pruebas para demostrar que la totalidad de los datos sean consistentes con la teoría, éstas deben incluir: estudios de la reología de la zona y estudios de otros procesos no lineales en la zona de ruptura del terremoto.

PROPAGATION OF SOLITARY WAVES IN STRATIFIED MEDIA: THEORY AND OBSERVATIONS

Classical theory in seismology that describes the propagation of seismic waves in an elastic medium is based on the Hooke's law, which relates linearly the stresses applied to a solid with the strain and subsequent deformation. While this is valid in most cases, may not explain all wave phenomena in elastic media. For some cases it is necessary to consider a constitutive relationship that includes higher-order terms, or nonlinear terms. This is possible due to the existence of a relationship between the Elastic Energy and the invariants of the strain tensor. Theoretical work developed here, includes the transmission of dispersive waves in a nonlinear medium, which leads to nonlinear differential equations. Those, under some conditions and hypothesis contains Solitary Wave behavior, namely, travelling waves that do not lose energy and keep their waveform when they propagate.

Solutions to these models have phase velocities slightly larger than the S-wave velocity, dominant frequency of about 150s, permanent deformation and wave amplitudes inversely proportional to the root of the coefficient of nonlinearity. These waves are observed in seismic stations close to the hypocentre of earthquakes of moderate magnitude and where rocks show elastic nonlinearity with hardening, this means that when the applied stress is higher, the rock is more difficult to deform.

These theoretical results are compared to observations of earthquakes registered in U.S: an earthquake Mw 5.1 occurred on September 29th, 2004 and another Mw 4.8 occurred on October 8th, 2006. The signal analysis includes: seismic noise testing that shows that the low-frequency signals are not part of the seismic noise, distance versus time graphs that evince a constant phase velocity of the signal and finally polarization analysis and computation of expected amplitudes at each station. that indicate particle displacement concordant with 50% of the data. Seismic waveform data of aftershocks related to the Mw 8.8 Maule Chilean earthquake occurred in February 27th 2010 do not show evidence of these long-period signals, this means that geology of Chile does not meet the proper conditions for the propagation of Solitary Waves. On the other hand, one can say, based on literature, that deep and intermediate depth earthquakes do not generate low frequency waves, they are just observed in shallow earthquakes (intraplate). This could be another reason to the lack of these signals in recordings of aftershocks triggered by the 2010, Chilean earthquake.

Even if these results show that there are observations that fulfill the model conditions, it is not a definitive conclusion. It has to be further tested to demonstrate that all data are consistent with the theory proposed in this work, these should include: rheology studies in the area and studies of another nonlinear processes in the earthquake rupture zone.

Dedicatoria

El presente trabajo se lo dedico a Orlando y Adelaida, mis padres, que han apoyado mis decisiones y me han querido a pesar de todo. Su amor y comprensión siempre ha sido una inspiración para mi tanto en el ámbito estudiantil, laboral o personal. Se lo dedico también a la mujer que comparte su vida conmigo y que me obligó a terminar mis estudios: Mabel, una extraordinaria mujer que tuve la suerte de encontrar. Mis hermanas Paula y Daniela, que a pesar de la distancia siempre acompañan mis momentos, mis tíos y primos que siempre están ahí cuando los necesito. A mis profesores, por su ayuda, sus comentarios oportunos y su paciencia.

Especial mención para mis abuelos: Margarita, Nina, Delia y Luchito, que siempre están en mis recuerdos y mi corazón. Sin su empuje frente a la adversidad, yo no hubiese llegado hasta aquí.

Tabla de Contenido

1. Introducción	6
1.1. Antecedentes	6
1.2. Motivación	7
1.3. Objetivo General	8
1.4. Objetivos específicos	8
1.5. Metodología	8
1.5.1. Teórica	9
1.5.2. Observacional	9
1.6. Datos	10
1.6.1. Eventos	10
2. Propagación de Ondas Solitarias en Medios Elásticos: Marco Teórico	16
2.1. Sistema de referencia Lagrangiano v/s Euleriano	16
2.2. Fuerzas sobre un cuerpo	18
2.3. Energía Interna de Deformación	20
2.4. Comportamiento Mecánico de las rocas	21
2.5. Ecuaciones Constitutivas	22
2.6. Ondas Solitarias y Solitones	23
3. Propagación de Ondas Solitarias en Medios Elásticos: Desarrollo Teórico	28
3.1. Dispersión	28
3.1.1. Ondas Superficiales de Love	28
3.1.2. Ondas Superficiales de Rayleigh	30
3.2. Nolinealidad	34
3.2.1. Ondas SH (Caso Love)	34
3.2.2. Ondas P-SV (Caso Rayleigh)	36
3.3. Modelos de Propagación de Ondas Solitarias	39
3.3.1. Modelo de propagación de ondas Solitarias de Love	39
3.3.2. Modelo de propagación de ondas Solitarias de Rayleigh	42
3.4. Interpretación	45
3.4.1. Onda Solitaria de Love	45
3.4.2. Onda Solitaria de Rayleigh	47
4. Modelación y Tratamiento de Señales	49
4.1. Modelación de Forma de Onda	49
4.2. Preparación de los datos	51
4.3. Prueba de Ruido	53

4.4. Patrones de Radiación	55
4.4.1. Amplitudes Normalizadas de Ondas de Love y Rayleigh	56
4.4.2. Polarizaciones	57
4.5. Sismogramas Sintéticos Lineales	60
4.6. Gráficos Distancia Epicentral vs Tiempo	61
4.7. Observaciones en Chile	65
5. Conclusiones y Discusión	68
6. Glosario	71
Bibliografía	73
A. Programa que modela la forma de onda de las Ondas Solitarias.	Anexo A
B. Señales de baja frecuencia observadas en estaciones de USA.	Anexo B

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

Las ondas solitarias son perturbaciones no lineales que viajan sin cambiar su forma de onda [3], esto es posible combinando los efectos de no linealidad del medio con la dispersión que estas ondas sufren. Han sido estudiadas teórica y observacionalmente en medios fluidos y en fibras ópticas, entre otros. En este trabajo de tesis se pretende buscar respuestas a la interrogante: ¿Pueden observarse ondas solitarias en medios elásticos, en especial, en la Tierra?

Para estudiar teórica y observacionalmente la propagación de estas ondas en los medios antes nombrados se suponen medios homogéneos, no lineales e ideales, en los cuales las ondas solitarias mantienen su velocidad y forma de onda de la envolvente, entre otras propiedades. Sin embargo, para un medio real estas condiciones del medio no se cumplen debido a que la Geología varía de un lugar a otro, traducándose principalmente en variaciones de la velocidad y de la envolvente a medida que la onda viaja. Este efecto hace que estas ondas sean muy poco observadas en datos sísmológicos. Si las características del medio no cumplen las condiciones de propagación, las ondas de interés perderán su forma de onda y la energía se disipará.

Distintos tipos de onda son generadas al nuclearse un sismo, las más conocidas son explicadas con la teoría lineal y su observación en distintas estaciones sísmológicas va a depender del tensor de momento sísmico del evento. Las polarizaciones y amplitudes esperadas en cada estación muestran una directividad intrínseca en las ondas sísmicas. Las ondas no lineales, en particular las ondas solitarias, van a depender igualmente del tensor de momento, además, de una componente no lineal de este tensor, de la distancia epicentral y la reología de las rocas por donde se transmiten las ondas.

Para estudiar ondas solitarias en medios elásticos, se debe considerar una onda que sufra dispersión [4, 5] para que se propague por un medio no lineal, para esto se trabaja con ondas superficiales de Love y Rayleigh. Con el fin de modelar teóricamente la propagación de estas ondas se considera un medio estratificado y se proponen ecuaciones diferenciales parciales con coeficientes especiales para cada una de las ondas superficiales consideradas.

El medio no lineal se estudia expandiendo la ley de Hooke tomando en cuenta todas las combinaciones posibles de los invariantes del tensor de deformaciones aplicado a una onda SH y a una P-SV hasta cuarto orden. Una vez obtenida la Energía Interna de Deformación, se puede calcular el tensor de esfuerzos debido al paso de la onda. Por último, este resultado se incluye en la ecuación

ción de movimiento y se obtiene una ecuación diferencial parcial que modela el comportamiento elástico del medio no lineal debido a la propagación de ondas superficiales de Love y Rayleigh.

En distintas zonas del mundo tales como: California, Grecia, Polonia, Vanuatu y Cascadia entre otras, se han observado señales de largo periodo (150s) [6, 7, 8, 9], las cuales no han sido explicadas de forma satisfactoria con las teorías conocidas. La más aceptada la propone Delorey et al en su artículo del 2008 [10], el cual relaciona estas señales con una inclinación del sismómetro debido a una mala instalación del equipo o una deformación permanente del suelo a nivel regional. Sin embargo, no es completamente convincente debido a que la señal siempre arriba un poco antes del paquete de la onda S. Es muy poco probable que el cambio de inclinación ocurra siempre a la llegada de una misma fase (esto se mostrará en el capítulo 4.)

En este trabajo se analizan datos sismológicos de un evento en California y otro en la zona del volcán Rainier ambos registrados por las redes Transportable Array y CAFE, el primero fue un sismo Mw 5.1 que ocurrió el 29 de septiembre del 2004, mientras que el segundo fue Mw 4.5 ocurrido el 8 de octubre del 2006. Los instrumentos que midieron estos terremotos y en particular las señales de baja frecuencia en estudio son sismómetros banda ancha Guralp y Streckeisen.

Se eligió trabajar estos datos debido a la gran cantidad de estaciones que registraron los sismos y en particular, las señales de interés. Además, se realizó una inspección de los sismogramas de las réplicas del terremoto Mw 8.8 del 27 de Febrero en Maule, Chile, para averiguar si se observan estas señales de baja frecuencia luego de este gran terremoto, estos datos fueron proporcionados por el consorcio IRIS y su proyecto Chile Ramp. De los resultados observacionales se desprende lo complejo que es aplicar en este caso las técnicas de estudio de la Sismología, que en su esencia son lineales, ya que estas señales no lineales no cumplen con principios de superposición, en general se comportan de una forma muy poco intuitiva [3].

Para finalizar, este capítulo continúa con la motivación que surgió para resolver el problema y los objetivos de la tesis para luego detallar la metodología del trabajo tanto teórica como observacional y los datos utilizados. En el capítulo siguiente, se establecen las bases teóricas necesarias para solucionar el problema, desde la elección de un sistema coordinado Lagrangiano y descripción de la deformación de un sólido hasta las principales características y campos de aplicación de ecuaciones diferenciales parciales que poseen soluciones de solitones (u ondas solitarias). En el tercer capítulo, se desarrollan teóricamente las ecuaciones diferenciales parciales que describen ondas solitarias en medios continuos sólidos, con sus respectivas soluciones. En el capítulo cuarto, se modelan numéricamente las soluciones de los resultados de los modelos entregados en el capítulo precedente y luego se comparan estas soluciones y sus propiedades con los sismogramas registrados en USA. Finaliza el trabajo con la entrega de las conclusiones del estudio, la respuesta a los objetivos del estudio y las principales características encontradas.

1.2. Motivación

La idea principal de este trabajo es describir y entender de mejor manera la transmisión de ondas en la tierra, en especial, en lo que se refiere a la propagación de ondas solitarias tanto de un punto de vista teórico como observacional. Estas ondas están bien descritas en sistemas cuánticos y en medios continuos como los fluidos [3], por lo que el aporte de esta tesis es estudiar teóricamente

estas ondas en un sólido elástico. Por otro lado, se quiere recopilar observaciones y analizarlas para relacionarlas con los resultados teóricos.

Si los modelos propuestos son correctos y además las señales que se estudian cumplen con las características de ondas de Love y Rayleigh, este trabajo sería un gran avance para la Sismología y la propagación de ondas en general, ya que se obtendría una descripción del comportamiento elástico mucho más preciso.

Si las hipótesis de trabajo son las correctas, tendría implicaciones indirectas muy útiles para variadas ramas de la Geofísica, como por ejemplo la obtención de valores para parámetros mecánicos constitutivos de las rocas (reología) y la caracterización de discontinuidades físicas cercanas a la superficie. Esto es sólo un ejemplo de la gran gama de avances que se encontrarían si los efectos no lineales fueran considerados dentro de la relación constitutiva.

1.3. Objetivo General

Demostrar teórica y observacionalmente la existencia de ondas sísmicas solitarias en medios estratificados en el interior de la Tierra.

1.4. Objetivos específicos

- Postular ecuaciones diferenciales que describan la propagación de ondas solitarias de Love y Rayleigh y que las soluciones correspondan a ondas viajeras.
- Hacer una revisión de la teoría elástica no lineal con el fin de saber donde esperar esta respuesta del medio.
- Desarrollar un tratamiento de señales que relacione la polarización de las perturbaciones con el movimiento de partícula esperado para cada estación para todos los sismos, y, además, la comparación de las observaciones con las amplitudes esperadas para ondas de Love y Rayleigh obtenidas a partir del mecanismo de foco de los eventos.
- Determinar si se observaron ondas solitarias cerca del área de ruptura luego del terremoto Mw 8.8 en Maule, Chile, ocurrido el 27 de febrero del 2010.

1.5. Metodología

El trabajo se separa en dos etapas, la primera comprende un estudio teórico sobre la propagación de ondas solitarias en medios estratificados, donde se toma en cuenta análisis de dispersión, no linealidad, soluciones estacionarias a los modelos de propagación y las condiciones que debe cumplir el medio para que éstas ocurran.

Por otro lado, la segunda etapa contempla el estudio de las señales de baja frecuencia que se han observado en estaciones cercanas al epicentro de ciertos sismos, cuya forma de onda es muy similar a las formas obtenidas por los modelos teóricos. Este estudio comprende análisis como el

estudio de los niveles de ruido, polarización, amplitud de onda y modelamiento de sismogramas sintéticos, entre otros. Se desea comprobar si las señales de baja frecuencia cumplen ciertas condiciones que son necesarias para la validación de la teoría de Ondas Solitarias que se presenta, si esto es así, se comprueba la existencia teórica y observacional de ondas solitarias de Love y Rayleigh.

1.5.1. Teórica

Se considera un semiespacio elástico infinito y una capa elástica de espesor H por sobre éste (Fig 3.1), la idea es encontrar relaciones de dispersión para ondas SH y P-SV propagándose en la dirección \hat{x}_1 cumpliendo con la relación $kH \rightarrow 0$, aplicando las condiciones de borde correspondientes. Esto entrega una fórmula matemática para calcular la velocidad de fase de la onda, de donde se obtiene la función $\omega = \omega(k)$, siendo ω la frecuencia angular y k el número de onda para cada tipo de onda, luego se aplica la transformada inversa de Fourier que entrega dos ecuaciones diferenciales parciales lineales que describen el efecto de la dispersión de cada una de las ondas superficiales.

Por otro lado se obtiene una expresión para la energía de deformación hasta el cuarto orden para cada tipo de onda: SH y P-SV, así se puede encontrar la expresión para las componentes del tensor de esfuerzos e incluir la divergencia de éste en la ecuación de movimiento tal como lo muestra la ecuación 2.10. Ésto entrega una ecuación diferencial no lineal para el movimiento de las partículas.

El paso siguiente es combinar estas ecuaciones de alguna forma para obtener dos ecuaciones no lineales con un término dispersivo, éstas describen la propagación de Ondas Solitarias de Love y Rayleigh. Luego se resuelven estas ecuaciones para los valores de los coeficientes de no linealidad y dispersión esperados en la Tierra, para posteriormente obtener una función que representa el sismograma sintético (desplazamiento de la partícula) debido al paso de cada una de estas ondas.

Paralelamente se calculan los valores de los coeficientes de no linealidad y dispersión que son necesarios para que la propagación de estas ondas sea posible y se discute la posible existencia de este tipo de medios en la Tierra. Los desplazamientos máximos serán función de la no linealidad del medio, éstos en Sismología son del orden de centímetros, este dato sirve para constreñir los valores necesarios a la realidad.

1.5.2. Observacional

Las señales de interés que poseen periodos largos $\sim 150s$ y que arriban un poco antes que el paquete de la onda S, son estudiadas para poder dilucidar si concuerdan o no con la teoría de propagación de Ondas Solitarias que se postula en este trabajo, se utiliza para este fin el programa SAC (Seismic Analysis Code) que entrega herramientas muy poderosas y simples para analizar las señales, la localización de los eventos y sus parámetros de ruptura se obtienen del catálogo NEIC. Primero hay que asegurarse que los datos esten bien guardados, luego se cargan los archivos “*.sac” y se observa que los headers sean concordantes para cada uno de los canales, si este no fuera el caso se deben aplicar las correcciones necesarias.

Por otro lado, se realiza un análisis de ruido a las señales, esto es comparar los espectros de las señales en estudio con los espectros de señales de ruido sísmico de fondo. Para esto se quita la tendencia lineal y el promedio de la señal y luego se le aplica un “taper” a la señal, finalmente se aplica la Transformada de Fourier. Con esta información se puede descartar que las señales sean parte del ruido ambiente en los alrededores del sismómetro.

Luego se aplica un filtro Butterworth pasabajo de $0,01Hz$ para visualizar algunas de las señales de interés que no se ven a simple vista. Al identificar las señales, se rotan los sismogramas horizontalmente para encontrar la polarización de la señal de baja frecuencia.

Una vez que se obtiene la localización del evento y se ha calculado su mecanismo focal, se pueden graficar los sismogramas dependiendo de la distancia epicentral del evento, esto sirve para obtener la velocidad de la señal. La teoría que se presenta muestra que la onda se propaga con velocidad constante.

Por otro lado, se modelan las ecuaciones diferenciales postuladas a través del método de diferencias finitas para comprobar que los modelos propuestos son válidos en Sismología, esto significa, para coeficientes del medio acordes a los observados en la tierra.

Estas pruebas observacionales puede que no estén en concordancia con lo esperado, en este caso, se debe encontrar una explicación física razonable que explique la discordancia entre el análisis y la teoría propuesta.

1.6. Datos

1.6.1. Eventos

Se estudian dos eventos muy bien registrados en Estados Unidos (aproximadamente 150 estaciones observaron cada uno de los sismos) la idea es calcular: espectros de Fourier, polarizaciones y la amplitud predominante para las ondas de Love y Rayleigh a partir del mecanismo de foco del evento, además se presentan gráficos distancia v/s tiempo que ayudan a calcular una velocidad promedio de las señales de baja frecuencia, asumiendo que son ondas viajeras. Luego se estudian las réplicas del terremoto de Maule, Chile, ocurrido el 27 de febrero del 2010, para ver si se observan este tipo de señales en alguno de estos eventos. Estas señales de interés se comparan con los resultados teóricos que se presentan, la concordancia entre ambas es necesaria para que la teoría sea válida.

Estados Unidos

Se estudian los eventos Mw 5.1 (evento 1) y Mw 4.8 (evento 2) ocurridos en el sur de California y Volcán Rainier, respectivamente [10]. El primer evento ocurrió el 29 de Septiembre del 2004 y fue registrado por 148 estaciones de la red Transportable Array, mientras que el segundo evento ocurrió el 8 de octubre del 2006 y fue observado por 189 estaciones de las red antes nombrada y la red CAFE. Los sismómetros para ambos casos, se encontraban relativamente cerca del hipocentro (distancias regionales) y cubrían adecuadamente todo el rango de azimuth, por lo que la solución

del tensor de momento está muy bien determinada. Esto dice que las polarizaciones y amplitudes esperadas para las ondas de Love y Rayleigh fueron muy bien calculadas.

Chile

Se inspeccionan los datos recolectados por el proyecto Chile Ramp, financiado por National Science Foundation para monitorear las réplicas del terremoto del Maule Mw 8.8 ocurrido en febrero del 2010. Los científicos a cargo fueron Susan Beck y Sergio Barrientos, mientras que los primeros científicos a cargo en terreno fueron Steve Roecker y Ray Russo, instalaron 58 estaciones de banda ancha cercano a la zona de ruptura, siendo la primera de ellas puesta en funcionamiento el 18 de Marzo. Éstas estuvieron recolectando datos durante poco menos de siete meses. Los instrumentos los proporcionó PASSCAL y fueron principalmente sismómetros Guralp CMG-3T, también se usó en la primera etapa del proyecto sismómetros Guralp CMG40T. Cincuenta y cuatro estaciones grabaron a 100 muestras por segundo y sólo cuatro de ellas lo hicieron a 40. El sistema de adquisición de datos utilizado fué el Reftek 130 datalogger.

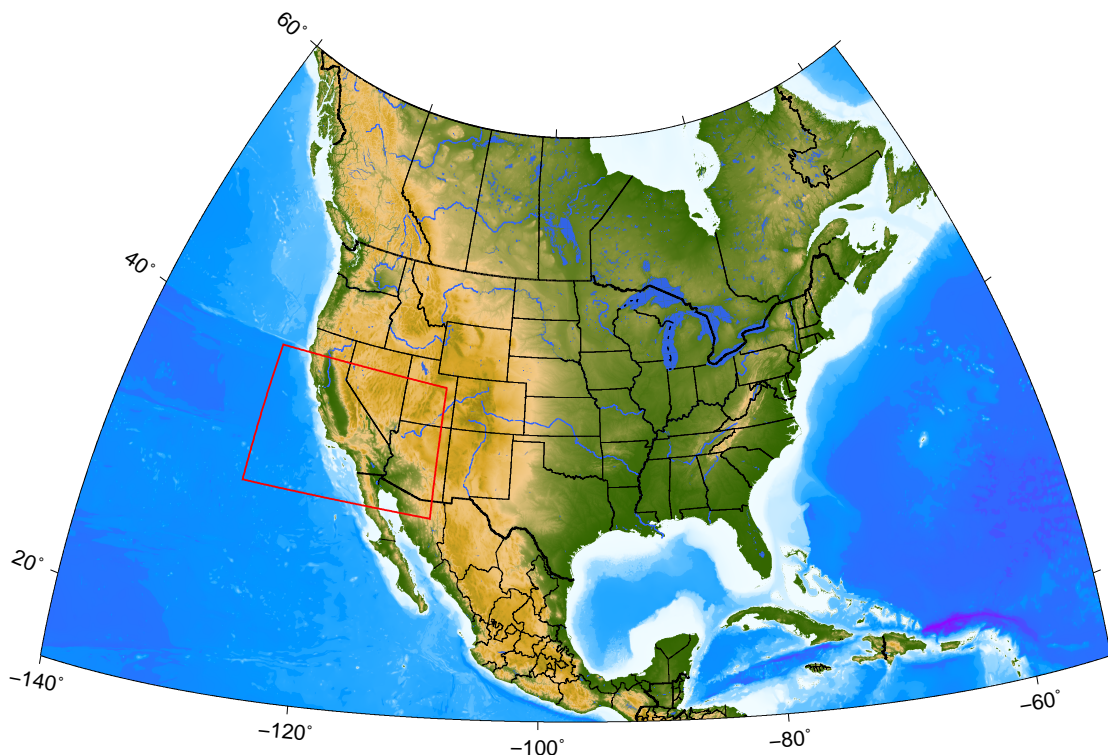


Figura 1.1: Mapa Norteamérica, Zona de estudio en rojo (California).

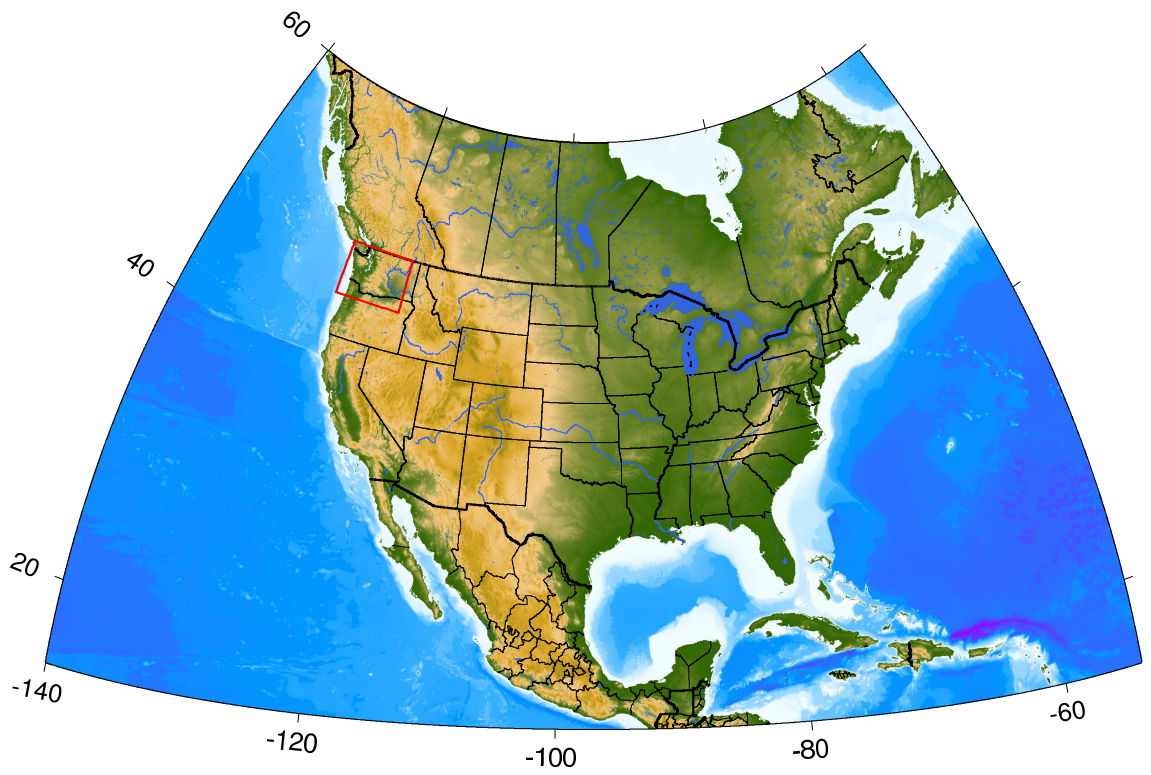


Figura 1.2: Mapa Norteamérica, Zona de estudio en rojo (Washington).

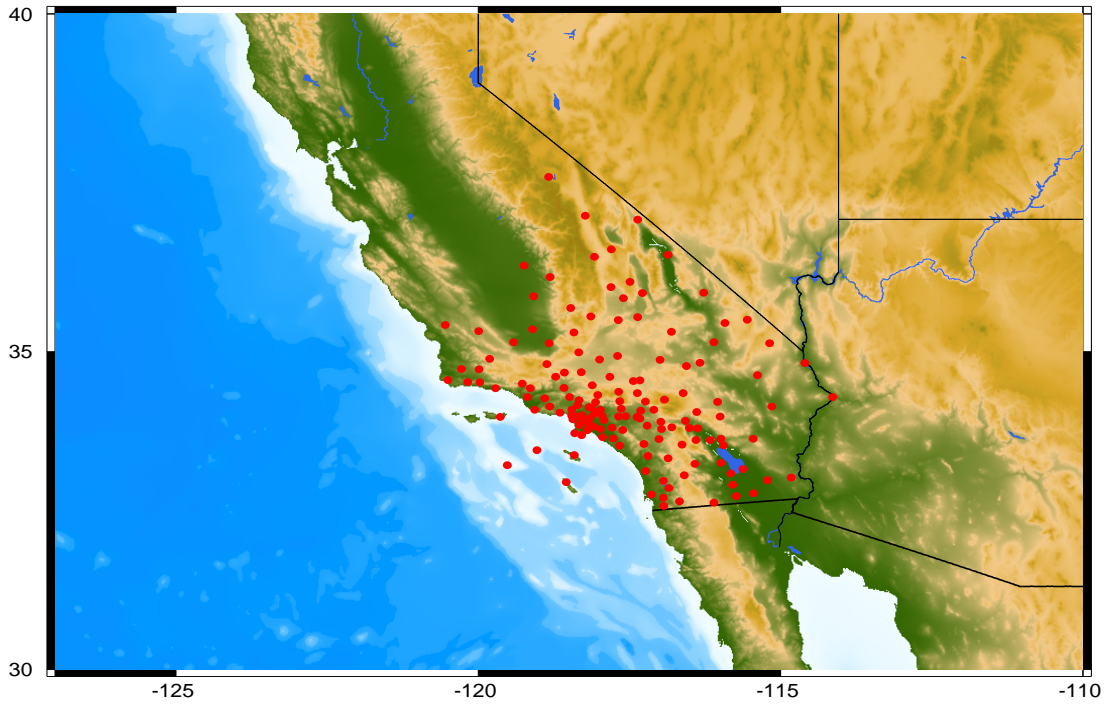


Figura 1.3: Estaciones sísmicas banda ancha del proyecto Transportable Array.

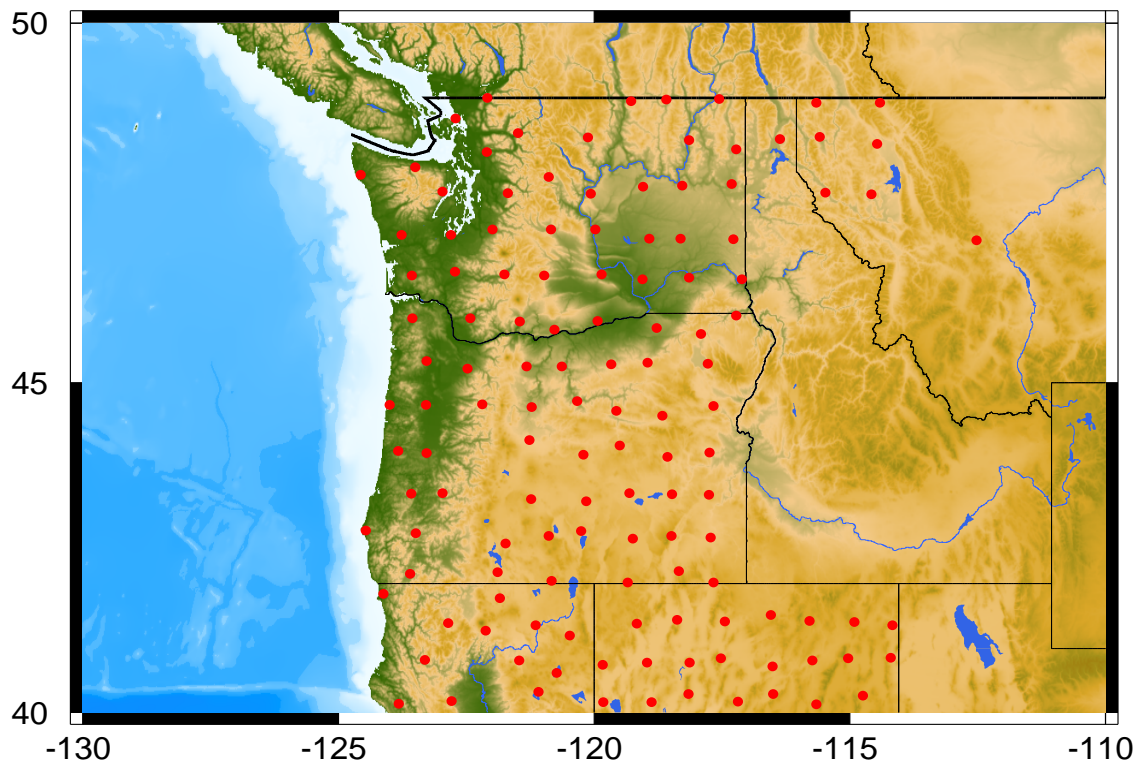


Figura 1.4: Estaciones sísmicas banda ancha del proyecto CAFE.

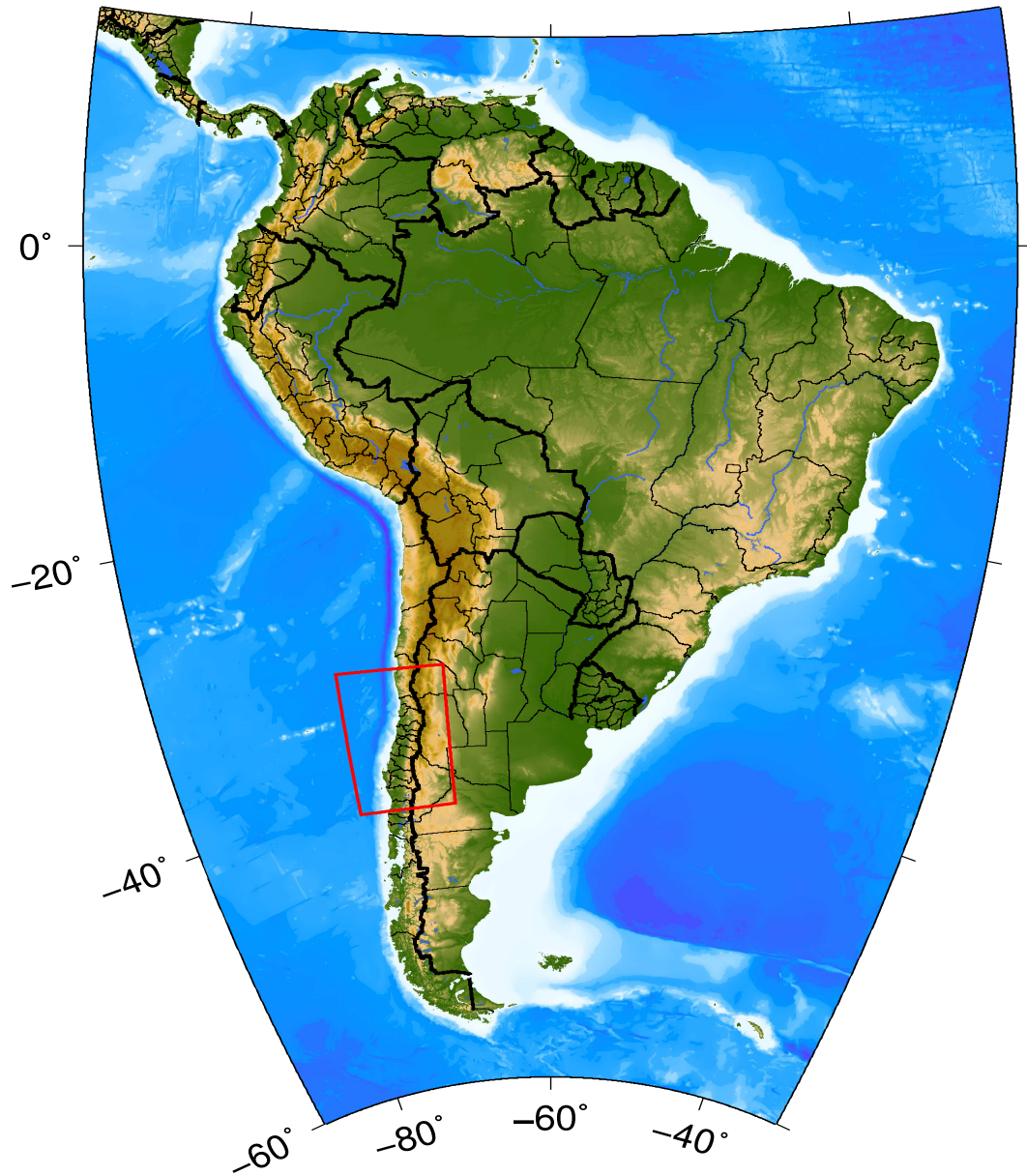


Figura 1.5: Mapa Sudamérica, Zona de estudio en rojo.

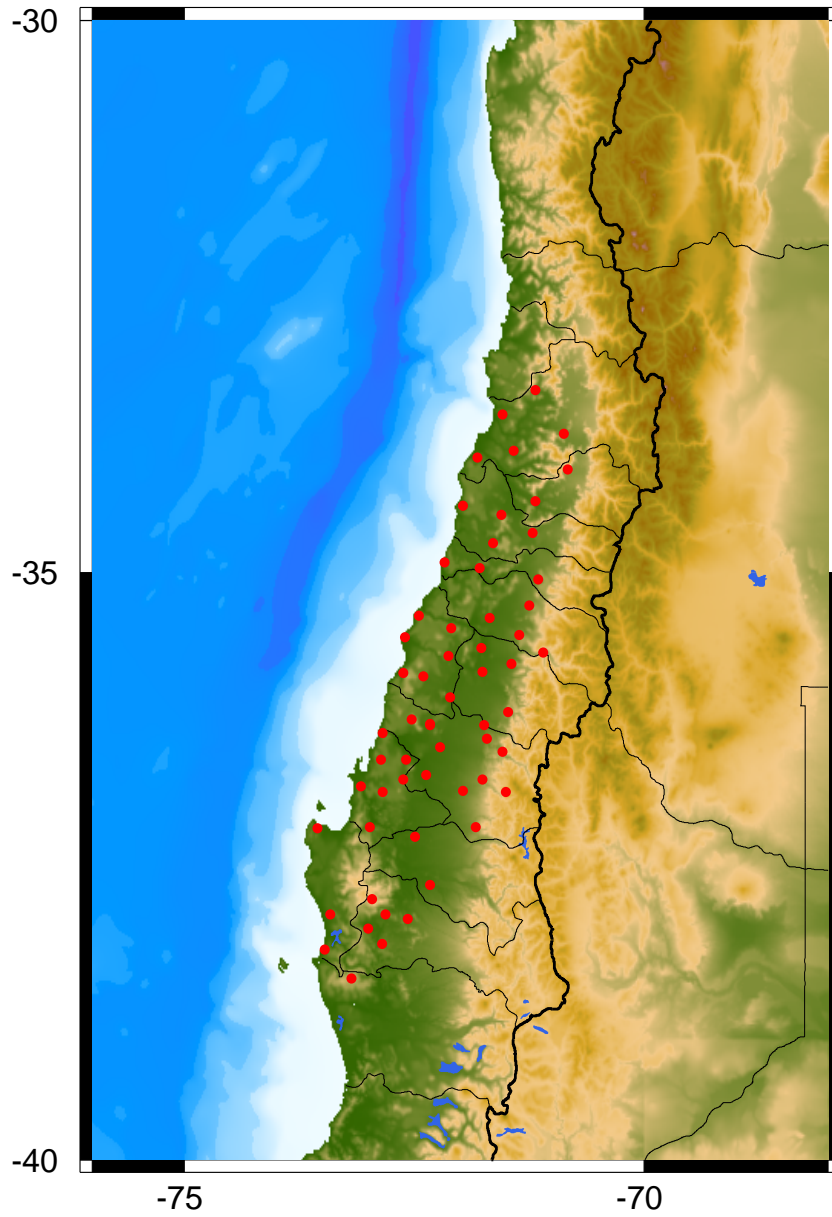


Figura 1.6: Estaciones sísmicas banda ancha del proyecto Chile Ramp.

Capítulo 2

Propagación de Ondas Solitarias en Medios Elásticos: Marco Teórico

La idea central de este capítulo es establecer las bases para abordar el problema teórico de la transmisión de ondas en la Tierra sólida, para esto se revisan las características que posee un medio elástico con el fin de conocer las respuestas de un cierto volumen al ser afectado por distintas fuerzas aplicadas. Se procede de la siguiente forma: se presentan los dos sistemas de referencia que se pueden usar para estudiar un medio continuo, primero se desarrolla el cálculo de la deformación del cuerpo para luego identificar las fuerzas que actúan sobre éste. El paso siguiente es encontrar una relación entre la deformación y la energía de deformación, la cual entrega la llave para incluir una relación constitutiva al problema (relación entre los esfuerzos aplicados y la deformación). Posteriormente se describe el comportamiento real que rige a los sólidos, y se dan a conocer las ecuaciones que caracterizan el comportamiento elástico no lineal. Para finalizar, se explica que son las ondas solitarias (o Solitones) haciendo hincapié en las características que poseen las ecuaciones y se presentan algunos ejemplos de éstas en otras áreas de la Física.

2.1. Sistema de referencia Lagrangiano v/s Euleriano

Existen dos sistemas de referencia con los cuales se puede describir adecuadamente la evolución temporal de alguna magnitud física en un cierto sistema continuo. Dependiendo de las características que éste posea se puede utilizar el marco Lagrangiano (material) o el marco Euleriano (espacial) [4, 5]. En sismología interesa medir el desplazamiento, velocidad y/o aceleración del suelo por lo que se debe usar el sistema que permita medir directa y fácilmente estas cantidades. En la figura 2.1 se muestran estos dos sistemas de referencia que se describen a continuación.

Marco de referencia Euleriano

Este sistema se utiliza cuando se quiere conocer la evolución de alguna magnitud física en un punto espacial en particular, sin importar que partículas pasen por ese punto. Por ejemplo: si el objetivo es calcular la velocidad de un río, se fija un punto específico y se mide la velocidad de cada partícula que pase por esas coordenadas, es decir, las variables independientes son la posición en estudio y el tiempo. El sistema Euleriano o espacial es especialmente útil cuando se estudian

medios fluídos.

Marco de referencia Lagrangiano

Este marco se utiliza principalmente cuando se quiere conocer la evolución de alguna magnitud física de una partícula en especial siguiéndola en el espacio. Esta visión es más útil para sistemas continuos sólidos, un caso típico puede ser cuando se desea conocer la velocidad y posición de la partícula de una roca específica (representada por un punto) al ser afectada por una onda sísmica, las variables independientes son la posición inicial de la partícula y el tiempo. Esto es exactamente lo que se desea en un estudio sismológico, conocer como se mueve un cierto volumen elástico en el espacio y tiempo, dada una cierta posición inicial.

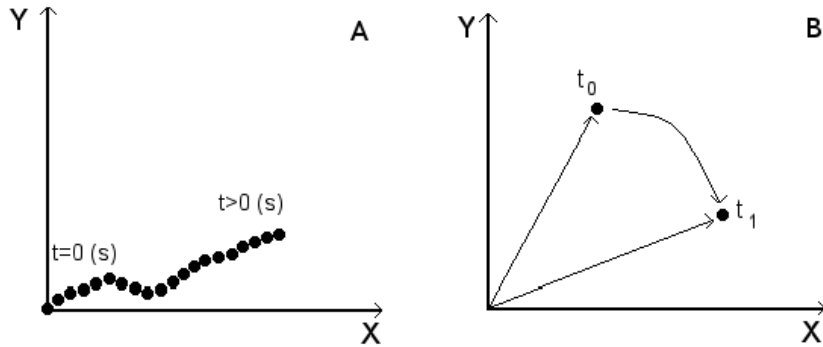


Figura 2.1: Marcos de referencia Euleriano y Lagrangiano. (a) Euleriano: las partículas van pasando por el punto de interés $(x,y,t) = (0,0,t)$ y se mide una cierta propiedad. (b) Lagrangiano: se sigue una partícula en el tiempo.

En este trabajo se adoptará la descripción Lagrangiana. Se analiza la distorsión que sufre el medio al ser afectado por un agente externo cualquiera. Se considera una partícula que ubicada en la posición \underline{x} y que es transportada debido a este agente a una nueva posición $\underline{x} + \underline{u}(\underline{x}, t)$, siendo \underline{u} el campo de desplazamiento. Ahora, se quiere conocer la nueva posición de las partículas en la vecindad de \underline{x} , es decir, las partículas ubicadas en la posición $\underline{x} + \delta\underline{x}$, al moverse bajo la acción del campo de desplazamientos \underline{u} , esto es: $\underline{x} + \delta\underline{x} + \underline{u}(\underline{x} + \delta\underline{x}, t)$. Para el tiempo inicial el elemento de línea vectorial entre las posiciones de 2 partículas es: $\delta\underline{x}$. Para cualquier tiempo posterior será dependiente del campo de desplazamientos: $\delta\underline{x} + \delta\underline{u}$. Se calcula este nuevo elemento de línea vectorial en función de las posiciones iniciales tal como se muestra en la figura 2.2, se tiene así:

$$\delta\underline{x} + \delta\underline{u} = \underline{x} + \delta\underline{x} + \underline{u}(\underline{x} + \delta\underline{x}) - (\underline{x} + \underline{u}(\underline{x})) \quad (2.1)$$

Como $\delta\underline{x}$ es infinitesimalmente pequeño, se puede expandir el tercer término del lado derecho despreciando términos de segundo orden y superiores, es decir:

$$\underline{u}(\underline{x} + \delta\underline{x}) \approx \underline{u}(\underline{x}) + (\delta\underline{x} \cdot \nabla)\underline{u}(\underline{x}) \quad (2.2)$$

Reemplazando en 2.1 se obtiene la relación que define una transformación lineal de la posición de las partículas del medio debido a un agente externo. Este ente matemático es llamado tensor de

segundo orden, se muestra a continuación en notación indicial:

$$\delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta x_j \quad (2.3)$$

y gracias a la relación:

$$(u_{i,j} - u_{j,i}) \delta x_j = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} u_{m,l} \delta x_k \quad (2.4)$$

resulta:

$$\delta u_i = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \delta x_j + \frac{1}{2} (\nabla \times \underline{u} \times \delta \underline{x})_i \quad (2.5)$$

Donde el primer término de la derecha representa las deformaciones por traslaciones que sufre el cuerpo, mientras que el segundo define una rotación. Para gradientes de desplazamiento pequeños el sistema continuo se comporta como un cuerpo rígido por lo que se puede despreciar el último término. Entonces se define el tensor infinitesimal de deformaciones como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.6)$$

La relación 2.6 entrega la información de cómo se deforma un cuerpo para el caso de “pequeñas deformaciones”, este tensor es simétrico por lo que no se necesitan las nueve componentes sino que sólo seis.

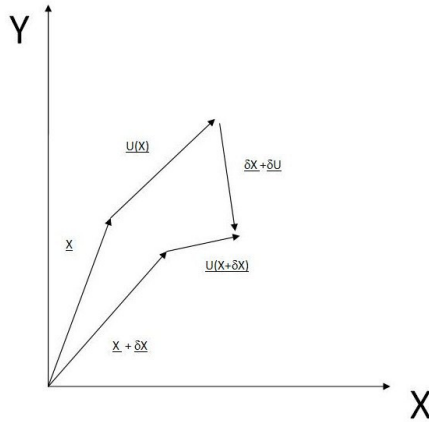


Figura 2.2: Vectores de desplazamiento de las partículas utilizados en la descripción Lagrangiana del medio.

2.2. Fuerzas sobre un cuerpo

Ahora, se quiere expresar matemáticamente las fuerzas responsables de las deformaciones que actúan sobre un cuerpo elástico que son de dos tipos:

- Fuerzas de superficie: existen debido al contacto entre dos volúmenes infinitesimales adyacentes, es decir, una fuerza aplicada sobre la superficie de nuestro cuerpo en estudio.

- Fuerzas externas: actúan sobre un punto en específico del sólido.

Para observar como actúan estas fuerzas se considera la figura 2.3. Aquí se muestran ciertas fuerzas aplicadas sobre la superficie y el volumen.

La tracción \underline{T} se define como una fuerza actuando sobre un área infinitesimal caracterizada por el vector unitario normal a la superficie denotado \hat{n} . Para sólidos, se observa que las tracciones no necesariamente poseen la misma dirección que el vector normal ya que éstos pueden soportar esfuerzos de cizalle (fuerzas actuando perpendicularmente al vector normal). La idea es encontrar una expresión matemática para el tensor de esfuerzos $\underline{\tau}$, que está definido como:

$$\delta T_i = \frac{\partial T_i}{\partial S_j} \delta S_j \implies T_i = \tau_{ij} n_j \quad (2.7)$$

Las fuerzas externas aplicadas a un volumen elástico pueden ser de distinta naturaleza, por lo que poseen expresiones matemáticas completamente particulares, éstas pueden ser: efecto de la gravedad $\rho \underline{g}$, una fuerza externa unitaria $A \delta(\underline{x}) \delta(t) \delta_{in}$, etc.

Aquí se denotan por \underline{f} y poseen dimensiones de $\frac{\text{Fuerza}}{\text{Volumen}}$. Entonces aplicando la segunda ley de Newton a nuestro sistema sobre un volumen V , encerrado por una superficie S [4], se obtiene:

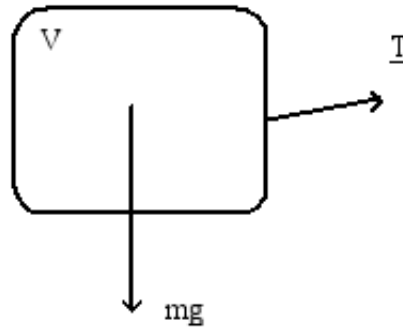


Figura 2.3: Fuerzas que actúan sobre un cuerpo.

$$\iiint \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dV = \iiint f_i dV + \iint \tau_{ij} n_j dS \quad (2.8)$$

donde el término del lado izquierdo es el término inercial y aplicando el teorema de la divergencia de Gauss a la integral de superficie, se tiene que:

$$\iiint \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dV = \iiint f_i dV + \iiint \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dV \quad (2.9)$$

Ya que se puede aplicar esta relación a cualquier volumen, se eliminan las integrales y el resultado queda:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.10)$$

aquí ρ representa la densidad del sólido elástico y u_i la i -ésima componente del desplazamiento. Es necesario recordar que la derivada del tensor de esfuerzos es con respecto a las coordenadas en el marco de referencia Lagrangiano. Esta ecuación muestra como responde el medio a ciertas tracciones y fuerzas externas, por ejemplo: para el caso de un sismo se puede modelar la fuente como la suma de muchas fuerzas externas unitarias en un tiempo t_0 . Lo que resulta para un tiempo posterior es un balance entre el movimiento de las partículas y las tracciones debidas a la interacción constante entre volúmenes adyacentes. Es decir, el tensor de esfuerzos entrega información de cómo responde el medio a una cierta perturbación.

2.3. Energía Interna de Deformación

Utilizando la ecuación de movimiento 2.10 y la Primera Ley de la Termodinámica, que establece que existe una energía interna almacenada en un cierto sistema físico, se puede calcular el balance para la tasa de trabajo realizado (variación de energía interna) sobre el cuerpo, esto es:

$$\dot{W}_m + \dot{Q} = \dot{K} + \dot{W} \quad (2.11)$$

donde \dot{W}_m es la tasa de trabajo mecánico realizado, \dot{Q} es la tasa de calentamiento, \dot{K} es la tasa de incremento en energía cinética y \dot{W} es la tasa de incremento de energía interna.

Desarrollando explícitamente cada una de las partes, se tiene:

1. La tasa de trabajo mecánico está dada por la suma del trabajo realizado por las fuerzas de cuerpo y las fuerzas de contacto:

$$\iiint \underline{f} \cdot \underline{\dot{u}} dV + \iint \underline{T} \cdot \underline{\dot{u}} dS \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} &= \iiint [f_i \dot{u}_i + (\tau_{ij} \dot{u}_i)_{,j}] dV \\ &= \iiint (\rho \dot{u}_i \ddot{u}_i + \tau_{ij} \dot{u}_{i,j}) dV \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \iiint \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV + \iiint \tau_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV \end{aligned} \quad (2.13)$$

2. La tasa de calentamiento está dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint Q dV \quad (2.14)$$

donde Q es calor cedido o absorbido.

3. La tasa de incremento de energía cinética:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV \quad (2.15)$$

4. Entonces la variación de energía interna por unidad de volumen esta dada por:

$$\dot{W} = \dot{Q} + \tau_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad \text{ó} \quad dW = \hat{T} dS + \tau_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (2.16)$$

donde \hat{T} es la temperatura y S la entropía del sistema.

Para el caso de la transmisión de ondas elásticas en el medio se puede asumir un proceso adiabático, debido a que la velocidad de las ondas es mucho mayor que la velocidad de transferencia de calor, por lo tanto:

$$\tau_{ij} = \left(\frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_{S=cte} \quad (2.17)$$

La relación 2.17 es la que entrega una forma simple de calcular el tensor de esfuerzos en función de las componentes del tensor de deformaciones para luego calcular la divergencia de éste e incluirlo en la ecuación de movimiento. Se puede expandir la función W hasta el orden que se desee, esto lleva a relaciones constitutivas que pueden ser lineales o no lineales dependiendo del orden hasta el cual se expanda la función de energía. Es importante dejar en claro que para realizar esto se deben considerar los invariantes del tensor de deformación en lugar de las componentes para que los valores no dependan del sistema de referencia utilizado. En este trabajo, como se verá en la sección 3.2, se utilizan los invariantes: $Tr \underline{\underline{\epsilon}}$, $Tr \underline{\underline{\epsilon}}^2$ y $Tr \underline{\underline{\epsilon}}^3$.

2.4. Comportamiento Mecánico de las rocas

Ahora que se tienen las relaciones con las que se puede encontrar una ecuación para los esfuerzos aplicados en función de las deformaciones que sufre el cuerpo, se debe estudiar cómo responden las rocas en condiciones reales para modelar la relación constitutiva de forma óptima.

Si experimentalmente se aplica un cierto esfuerzo unidireccional a una roca y se mide su respuesta (deformación) se observa que para esfuerzos pequeños aplicados la muestra se comporta linealmente, es decir, iguales incrementos en el esfuerzo conllevan iguales incrementos en la deformación, además si se deja de aplicar el esfuerzo la muestra vuelve a su estado inicial instantáneamente. Para deformaciones mayores ($\epsilon > 10^{-7}$) comienza a observarse un comportamiento no lineal, es decir, para incrementos iguales en los esfuerzos aplicados se miden diferentes incrementos en las deformaciones.

Si se grafican los esfuerzos aplicados en función de las deformaciones que sufre el cuerpo $\tau = \tau(\epsilon)$, se pueden observar dos tipos de comportamiento no lineal:

- El primero y más común es el representado por una función cóncava, esto significa que a medida que se aumentan los esfuerzos aplicados será cada vez más fácil deformarlo (debilitamiento de la roca. *Weakening*, en inglés) tal como lo muestra la figura 2.4.

- El segundo no es tan común, queda representado por una función convexa, esto significa que a medida que se aumentan los esfuerzos aplicados será cada vez más difícil deformarlo (endurecimiento de la roca. *Hardening*, en inglés) tal como lo muestra la figura 2.5.

El comportamiento elástico en general, sea este de carácter lineal o no lineal, es un proceso reversible. Por otro lado, cuando los esfuerzos aplicados se aumentan existe un punto crítico en el que el proceso pasa a ser irreversible, la roca se fractura y el comportamiento reológico pasa a ser plástico. Sin embargo, en este trabajo se desarrollaron todos los cálculos utilizando elasticidad, no el comportamiento plástico.

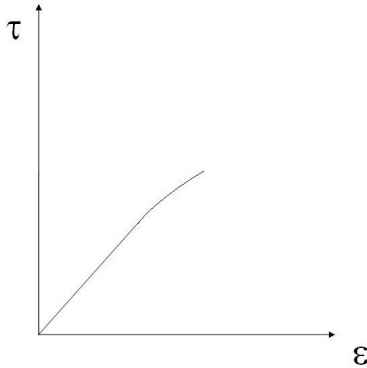


Figura 2.4: Comportamiento elástico de los sólidos (weakening).

2.5. Ecuaciones Constitutivas

La relación 2.17 entrega la llave para incluir una ecuación constitutiva que describa el comportamiento elástico de los sólidos y así poder obtener la ecuación de movimiento no lineal para los casos de interés, transmisión de ondas SH (Love) y P-SV (Rayleigh). En este trabajo se considera la función W hasta cuarto orden tomando en cuenta todas las combinaciones posibles de los invariantes del tensor de deformación $Tr\epsilon$ (primer orden), $Tr\epsilon^2$ (segundo orden) y $Tr\epsilon^3$ (tercer orden).

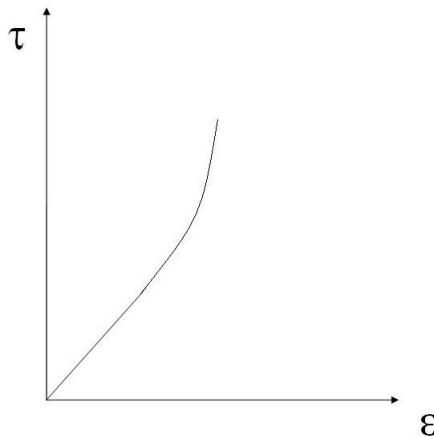


Figura 2.5: Comportamiento elástico de los sólidos (hardening).

Esto es:

$$\begin{aligned}
W = & \frac{\lambda}{2}(Tr\boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu Tr\boldsymbol{\varepsilon}^2 + A(Tr\boldsymbol{\varepsilon})^3 + B(Tr\boldsymbol{\varepsilon}^2)(Tr\boldsymbol{\varepsilon}) + \\
& CTr\boldsymbol{\varepsilon}^3 + D(Tr\boldsymbol{\varepsilon})^4 + E(Tr\boldsymbol{\varepsilon})^2(Tr\boldsymbol{\varepsilon}^2) + \\
& F(Tr\boldsymbol{\varepsilon}^2)^2 + G(Tr\boldsymbol{\varepsilon})(Tr\boldsymbol{\varepsilon}^3)
\end{aligned} \tag{2.18}$$

o escrito en forma de componentes:

$$\begin{aligned}
W = & \frac{\lambda}{2}(\varepsilon_{ll})^2 + \mu\varepsilon_{kp}\varepsilon_{pk} + A(\varepsilon_{ll})^3 + B\varepsilon_{ll}\varepsilon_{kp}\varepsilon_{pk} + \\
& C\varepsilon_{kp}\varepsilon_{pq}\varepsilon_{qk} + D(\varepsilon_{ll})^4 + E(\varepsilon_{ll})^2\varepsilon_{kp}\varepsilon_{pk} + \\
& F(\varepsilon_{kp}\varepsilon_{pk})^2 + G\varepsilon_{ll}\varepsilon_{kp}\varepsilon_{pq}\varepsilon_{qk}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

donde A, B, C, D, E, F, G son constantes que indican que tan importante es cada contribución de la deformación a la Energía de Deformación. Derivando con respecto a la ij-ésima componente del tensor de deformaciones, se tiene la ij-ésima componente del tensor de esfuerzos:

$$\begin{aligned}
\tau_{ij} = & \lambda\varepsilon_{ll}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} + 3A\varepsilon_{ll}^2\delta_{ij} + 2B\varepsilon_{ll}\varepsilon_{ij} + B\varepsilon_{kp}\varepsilon_{pk}\delta_{ij} \\
& + 3C\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj} + 4D\varepsilon_{ll}^3\delta_{ij} + 2E\varepsilon_{ll}\varepsilon_{kp}\varepsilon_{pk}\delta_{ij} + 2E\varepsilon_{ll}^2\varepsilon_{ij} \\
& + 4F\varepsilon_{kp}\varepsilon_{pk}\varepsilon_{ij} + G\varepsilon_{kp}\varepsilon_{pq}\varepsilon_{qk}\delta_{ij} + 3G\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj}\varepsilon_{ll}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

La teoría lineal está representada por los dos primeros términos de esta ecuación, el resto representan no linealidades, es decir, muestra como responde el sólido a una cierta perturbación. En la figura 2.6 se observa el efecto de la no linealidad sobre una onda, para el tiempo 0 se tiene una forma de onda parecida a una Gaussiana que se propaga en la dirección x . El efecto no lineal se hace evidente en el tiempo t_1 , en donde los mayores valores de densidad viajan más rápido, lo que se traduce en un cambio de forma de la onda a una Distribución de Poisson, hasta el punto límite dado por el tiempo t_B . Luego de este tiempo se observa que para ciertos valores de x existen dos valores de la densidad, para solucionar este problema se deben hacer cambios de variables que explican este fenómeno como onda de choque.

En el siguiente capítulo se aplica la condición de transmisión de ondas superficiales de Love y Rayleigh a esta relación constitutiva para encontrar las ecuaciones de movimiento para ondas elásticas no lineales.

2.6. Ondas Solitarias y Solitones

Las ondas solitarias son un tipo de ondas no lineales que no pierden su forma al viajar, las observó por primera vez el científico e ingeniero John Scott Russell en un medio fluido de poca profundidad [3]. Para crear un modelo que describa la propagación de éstas se deben considerar dos efectos: no linealidad y dispersión. Cada uno de estos efectos deforma la onda de cierta manera, sin embargo, se puede dar el caso que ambos efectos se balanceen resultando en una perturbación

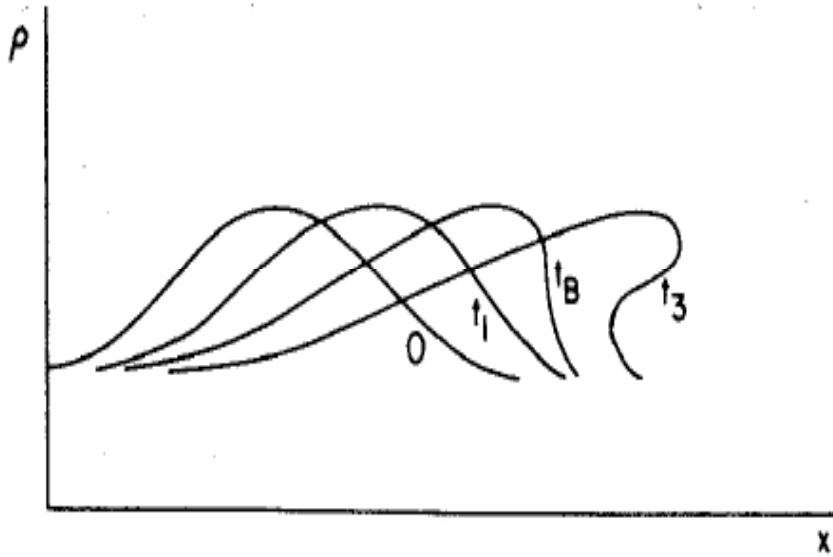


Figura 2.6: Efecto de la no linealidad en una forma de onda.

localizada (de ahí el nombre Solitaria) que viaja sin sufrir alteraciones. Dicho de otra forma, a pesar de las diferencias en la velocidad de fase debido a cada uno de los efectos que intervienen el paquete completo viaja con velocidad constante. Este tipo de ondas están muy bien descritas en distintas áreas de la Física, en esta sección se revisan algunas de ellas y en el próximo capítulo se sentarán las bases para crear un modelo de propagación de Ondas Solitarias en medios elásticos estratificados.

Onda de Korteweg-De Vries

La propagación de este tipo de Solitones se estudio teóricamente por dos científicos holandeses, Diederik Johannes Korteweg y Gustav De Vries en 1895, 60 años después de la observación hecha por John Scott Russell [3]. Esta onda no lineal que se propaga en una sola dirección en un medio fluído que posee una profundidad l , tal que $l \ll \lambda$, siendo λ la longitud de onda de la perturbación, y que presenta variaciones en la profundidad $l + \eta$, queda descrita por la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \quad (2.21)$$

Donde haciendo unos cambios de variable:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + 12u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} \quad (2.22)$$

Siendo τ y ξ medidas de tiempo y espacio respectivamente y u es proporcional a η . Si se observa la ecuación 2.22 se puede ver que los dos primeros términos representan una onda plana, lineal y que viaja en una dirección específica con velocidad constante, ahora si se incluye el segundo término

del lado derecho al análisis se obtiene:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + 12u \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad (2.23)$$

Se obtiene una ecuación no lineal (último término), su efecto se puede observar si se factoriza por $\frac{\partial u}{\partial \xi}$:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = (1 + 12u) \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad (2.24)$$

Es decir, la velocidad de la onda depende de la amplitud y fase de ésta, este efecto se puede observar al romper las olas en la costa, tal como lo muestra la figura 2.6.

Por otro lado, el efecto del primer, segundo y cuarto término de la ecuación 2.22 representa:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = (1 - k^2) \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad (2.25)$$

Aquí se observa que la velocidad de la onda depende del número de onda, lo que significa que ondas con longitud de onda mayor viajan en este caso más rápido que las que poseen longitud de onda menor.

El resultado del modelo de propagación de ondas solitarias de Korteweg-De Vries representado por la ecuación diferencial 2.22 se muestra en la figura 2.7 y la solución analítica es de la forma:

$$u = \frac{1}{4} a^2 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} (a\xi - (a + a^3)\tau + \delta) \right] \quad (2.26)$$

Existen otros modelos que describen transmisión de ondas solitarias o solitones en distintos medios, por ejemplo:

Ecuación Sine-Gordon

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = m^2 \sin \phi \approx m^2 \left(\phi + \frac{1}{3} \phi^3 \right) \quad (2.27)$$

La ecuación de Sine-Gordon mostrada en 2.27 posee distintos campos de aplicación, tales como: la teoría de campos relativistas, física del estado sólido y el transporte de señales en fibra óptica. Esta última es la aplicación más parecida al caso que se estudiará en este trabajo, ya que se modela la transmisión de una onda en un medio no lineal que no pierde su forma de onda al propagarse.

Ecuación no lineal de Schrödinger

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \beta \phi |\phi|^2 = 0 \quad (2.28)$$

Esta ecuación, si bien nace de la Mecánica Cuántica, no representa la evolución de un estado cuántico si no que tiene aplicaciones en Óptica con la transmisión en fibras ópticas y en Fluidos con el modelamiento de la envolvente de una onda en aguas profundas.

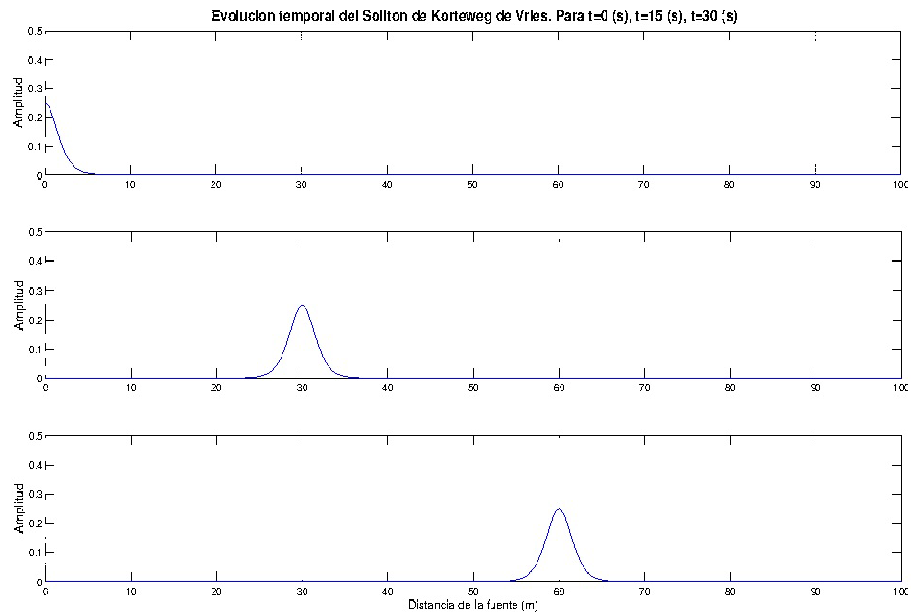


Figura 2.7: Evolución temporal del Solitón de Korteweg de Vries con $a = 1$, $0 < \xi < 100$ y $v = 2m/s$

Ya que estas ondas son no lineales es importante notar que no es posible aplicar el principio de superposición, lo que se traduce en un impedimento de aplicar la transformada de Fourier y además, cuando dos ondas solitarias interactúan el resultado no es la suma de las contribuciones, en general estas ondas se comportan de una forma muy poco intuitiva.

Ahora la diferencia entre una Onda Solitaria y un Solitón es básicamente que el Solitón cumple ciertas condiciones de estabilidad al interactuar con otro, es decir, si dos de éstos chocan conservan su amplitud inicial y además existe un pequeño desfase (retraso) con respecto al Solitón antes del choque tal como se observa en la figura 2.8 [3]. La Onda Solitaria por su parte, no cumple estas condiciones por lo que al interactuar con otra se desestabiliza y pierde su forma. El presente trabajo se enfoca sólo en la transmisión de una Onda Solitaria, sin estudiar su estabilidad.

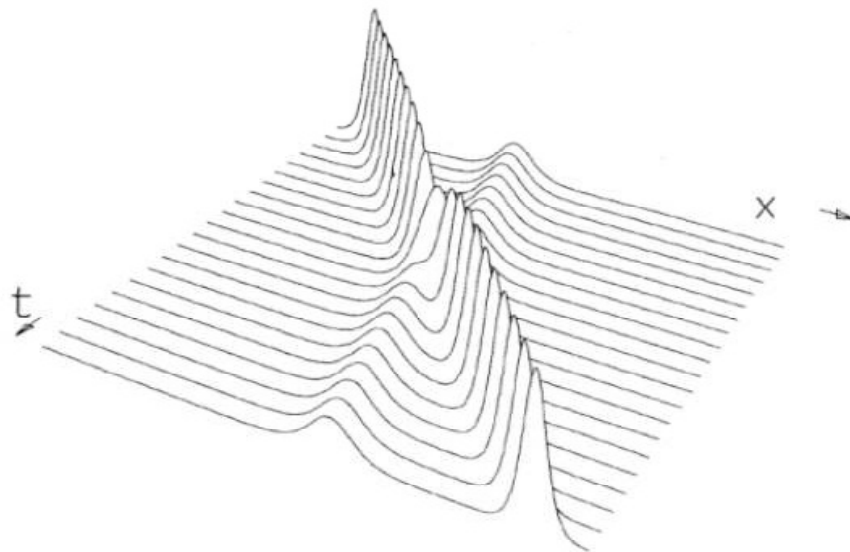


Figura 2.8: Interacción de 2 Solitones.

Capítulo 3

Propagación de Ondas Solitarias en Medios Elásticos: Desarrollo Teórico

En este capítulo se estudian por separado los efectos de dispersión en un medio estratificado lineal (capa sobre un semiespacio) y las características de un medio elástico no lineal. Luego se analiza la transmisión de estas ondas dispersivas en un semiespacio elástico no lineal, postulando una ecuación diferencial no lineal parcial que combina ambos efectos. La idea es obtener soluciones acotadas que tiendan a un valor fijo cuando la perturbación haya migrado, estas soluciones pueden representar la propagación de Ondas Solitarias en un medio elástico. Finalmente se examinan las condiciones necesarias que se deben cumplir para que estas ondas puedan existir, además de sus implicancias en Sismología.

3.1. Dispersión

Si se considera la aproximación lineal por un momento las únicas ondas sísmicas que presentan dispersión son las ondas superficiales transmitiéndose en un medio estratificado representado por una capa de espesor H (medio 1) sobre un semiespacio (medio 2) dispuestos como se muestra en la figura 3.1 [4, 5] con $\mu_1 < \mu_2$ y $\lambda_1 < \lambda_2$, siendo μ y λ los parámetros de Lamè de cada medio. Estas son las condiciones necesarias para que la capa se comporte como una guía de ondas y puedan existir este tipo de perturbaciones. Aquí se estudian los casos de ondas de Love (SH) y Rayleigh (P-SV) propagándose en la dirección \hat{x}_1 .

3.1.1. Ondas Superficiales de Love

Las ondas de Love quedan descritas por:

$$\underline{u}_{Love}(x_1, t) = \begin{cases} [A_1 \exp(-i\eta_1 kz) + B_1 \exp(i\eta_1 kz)] \exp i(\omega t - kx) \hat{x}_2 & \text{si } 0 < z < H \\ [A_2 \exp(-\gamma_2 kz) + B_2 \exp(\gamma_2 kz)] \exp i(\omega t - kx) \hat{x}_2 & \text{si } z > H \end{cases}$$

Donde:

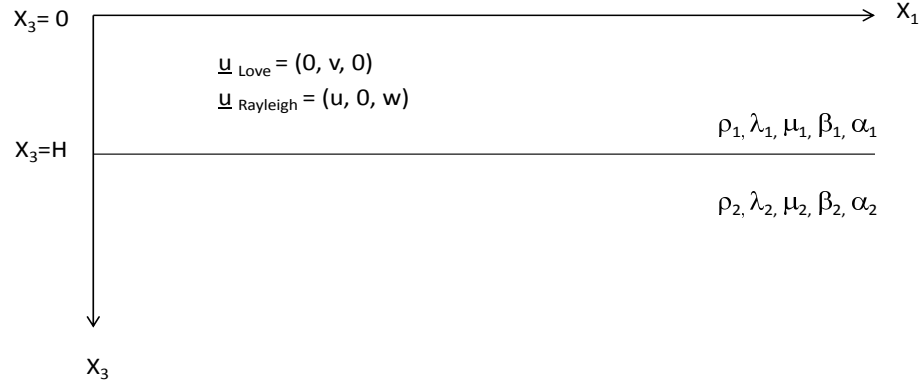


Figura 3.1: Geometría del problema de propagación de ondas superficiales en un medio estratificado.

$$\eta_i = \sqrt{\frac{c^2}{\beta_i^2} - 1}, \quad \gamma_i = \sqrt{1 - \frac{c^2}{\beta_i^2}} \quad (3.1)$$

Se imponen las condiciones de borde al problema: tracciones nulas en la superficie libre $z = 0$, tracciones y desplazamientos continuos en $z = H$, además de desplazamientos nulos cuando $z \rightarrow \infty$. Estas condiciones entregan un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas que es consistente si y sólo si su determinante es igual cero. Esto proporciona como resultado una ecuación trascendental que relaciona la frecuencia angular con la velocidad de fase de la onda. La ecuación es:

$$\tan \left(kH \sqrt{\frac{c^2}{\beta_1^2} - 1} \right) = \frac{\mu_2 \sqrt{1 - \frac{c^2}{\beta_2^2}}}{\mu_1 \sqrt{\frac{c^2}{\beta_1^2} - 1}} \quad (3.2)$$

Donde c es la velocidad de fase de la onda superficial y $\beta_i = \sqrt{\frac{\mu_i}{\rho_i}}$ es la velocidad transversal en el i -ésimo medio. Esta ecuación muestra que las ondas de Love presentan modos normales de oscilación en la capa de espesor H , los que pueden ser calculados al sumar $n\pi$ al argumento de la tangente, por ejemplo: $0 < \eta_1 kH < \frac{\pi}{2}$ (modo fundamental) y $\pi < \eta_1 kH < \frac{3\pi}{2}$ (primer modo normal).

Para este trabajo es necesario restringir el dominio de frecuencias en el que se trabaja ya que se considera la aproximación de grandes longitudes de onda $kH \rightarrow 0$ esto lleva a: $\tan(x) \approx x$, lo que significa que el modelo será predictivo sólo para el modo fundamental de oscilación. Utilizando la relación: $c = \frac{\omega}{k}$, se calcula $\omega^2 = \omega^2(k^2)$ hasta segundo orden, dando como resultado:

$$\omega^2 = \beta_2^2 k^2 - \delta_L k^4, \quad \delta_L = \beta_2^2 H^2 \left(\frac{\beta_2^2}{\beta_1^2} - 1 \right)^2 \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} > 0 \quad (3.3)$$

La ecuación 3.3 es la relación de dispersión para el dominio en estudio, en la figura 3.2 se muestra la dispersión de la onda de Love y la aproximación que se aplica en este trabajo. Se utilizan los

valores promedios para las distintas estructuras que existen en la tierra, por ejemplo: $\beta_2 = 4500 \frac{m}{s}$, $\beta_1 = 3500 \frac{m}{s}$, $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 1,9415$ y $H = 35000m$. Esto entrega el valor $\delta_L = 2,6 \cdot 10^{15} \frac{m^4}{s^2}$. Utilizando la transformada inversa de Fourier, es posible convertir la función 3.3 en una ecuación diferencial parcial que modela el efecto de la dispersión en ondas superficiales de tipo SH, propagándose en un medio estratificado.

$$\omega^2 = \beta_2^2 k^2 - \delta_L k^4 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \delta_L \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} \quad (3.4)$$

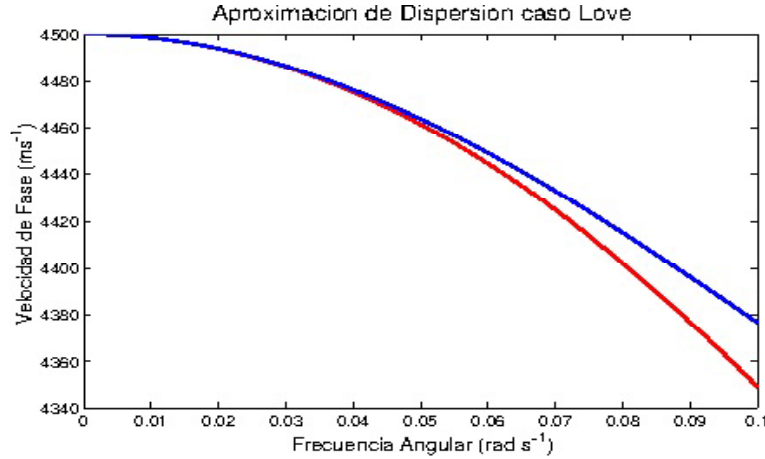


Figura 3.2: Aproximación de la Dispersión de la Onda de Love.

Esta ecuación diferencial modela la relación de dispersión de las ondas de Love a cuarto orden. La velocidad de fase transversal del segundo medio es la velocidad máxima que puede presentar la onda de Love ($k = 0$). Si k aumenta, la velocidad disminuirá paulatinamente hasta alcanzar el valor β_1 ya que la constante δ_L es siempre mayor que cero. Es importante dejar en claro que no es posible incluir un término con una potencia impar de k en la relación 3.3 ya que la ecuación diferencial y por ende la velocidad de fase tendría una componente imaginaria que claramente no tiene sentido físico en nuestro problema.

3.1.2. Ondas Superficiales de Rayleigh

En esta sección se obtiene una ecuación que describe la dispersión que sufre una onda superficial de Rayleigh a cuarto orden, se debe obtener una ecuación diferencial similar a la del caso de Love, ya que debe ser una ecuación diferencial que posea sólo términos reales, esta ecuación tendría la forma:

$$\omega^2 = v_R^2 k^2 - \delta_R k^4 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v_R^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \delta_R \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} \quad (3.5)$$

Donde v_R y δ_R son constantes a determinar. Se utiliza el mismo procedimiento que para las ondas de Love, se puede calcular una ecuación trascendental que entregue los valores necesarios.

El campo de desplazamiento en el medio 1, para $0 < z < H$ es:

$$\begin{aligned} \underline{u} = & \left[A_1'(\hat{x}_1 + \eta_{\alpha_1}\hat{x}_3) \exp(-ik\eta_{\alpha_1}z) + A_1''(\hat{x}_1 - \eta_{\alpha_1}\hat{x}_3) \exp(ik\eta_{\alpha_1}z) \right] \exp(ik(ct - x)) \\ & + \left[B_1'(-\eta_{\beta_1}\hat{x}_1 + \hat{x}_3) \exp(-ik\eta_{\beta_1}z) + B_1''(\eta_{\beta_1}\hat{x}_1 + \hat{x}_3) \exp(ik\eta_{\beta_1}z) \right] \exp(ik(ct - x)) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Y en el medio 2, para $z > H$ es:

$$\underline{u} = \left[A_2(\hat{x}_1 - i\gamma_{\alpha_2}\hat{x}_3) \exp(-k\gamma_{\alpha_2}z) + B_2(i\gamma_{\beta_2}\hat{x}_1 + \hat{x}_3) \exp(-k\gamma_{\beta_2}z) \right] \exp(ik(ct - x)) \quad (3.7)$$

Donde:

$$\eta_{\alpha_1} = \sqrt{\frac{c^2}{\alpha_1^2} - 1}, \quad \gamma_{\beta_2} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{\beta_2^2}}, \quad \text{etc.} \quad (3.8)$$

Se aplican las mismas condiciones de borde que para el caso de la transmisión de ondas de Love y se obtienen 6 ecuaciones con 6 incógnitas representadas por una matriz M de 6×6 . La condición de consistencia para este sistema de ecuaciones es: $\det M = 0$, con esto se obtiene la relación de dispersión para las ondas de Rayleigh.

Pueden desarrollarse varios casos dependiendo de los límites que se asuman para la velocidad de fase de la onda, aquí se trabajará con $\beta_1 < c < \beta_2$ ya que es un caso más simple y el más cercano a la realidad. La relación de dispersión entonces queda:

$$\begin{aligned} A_0 + B_0 \cos(kH\eta_{\alpha_1}) \cos(kH\eta_{\beta_1}) + C_0 \sin(kH\eta_{\alpha_1}) \sin(kH\eta_{\beta_1}) + D_0 \cos(kH\eta_{\alpha_1}) \sin(kH\eta_{\beta_1}) \\ + E_0 \sin(kH\eta_{\alpha_1}) \cos(kH\eta_{\beta_1}) = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Donde los coeficientes A_0, B_0, C_0, D_0 y E_0 están dados por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{4\omega^8}{c^2} \left(\frac{2}{c^2} - \frac{1}{\beta_1^2} \right) \left[\left(\frac{2f}{c^2} - \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{1}{\beta_2^2} \right) \left(\frac{2f}{c^2} - \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{1}{\beta_2^2} + \frac{1}{\beta_1^2} \right) - \frac{2f}{c^2} \gamma_{\alpha_2} \gamma_{\beta_2} \left(\frac{2f}{c^2} + \frac{1}{\beta_1^2} \right) \right] \\
B_0 &= \frac{4\omega^8}{c^4} \gamma_{\alpha_2} \gamma_{\beta_2} \left[\left(\frac{2f}{c^2} + \frac{1}{\beta_1^2} \right)^2 + f^2 \left(\frac{2}{c^2} - \frac{1}{\beta_1^2} \right)^2 \right] - \frac{4}{c^4} \left(\frac{2f}{c^2} - \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{1}{\beta_2^2} + \frac{1}{\beta_1^2} \right)^2 \\
&\quad - \left(\frac{2}{c^2} - \frac{1}{\beta_1^2} \right)^2 \left(\frac{2f}{c^2} - \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{1}{\beta_2^2} \right)^2 \\
C_0 &= \frac{4\omega^8}{c^4} \eta_{\alpha_1} \eta_{\beta_1} \left[\left(\frac{2f}{c^2} - \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{1}{\beta_2^2} \right)^2 - \frac{4f^2}{c^4} \gamma_{\alpha_2} \gamma_{\beta_2} \right] + \frac{\left(\frac{2}{c^2} - \frac{1}{\beta_1^2} \right)^2}{\eta_{\alpha_1} \eta_{\beta_1}} \\
&\quad \times \left[\left(\frac{2f}{c^2} - \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{1}{\beta_2^2} + \frac{1}{\beta_1^2} \right)^2 - \left(\frac{2f}{c^2} + \frac{1}{\beta_1^2} \right)^2 \gamma_{\alpha_2} \gamma_{\beta_2} \right] \\
D_0 &= -\omega^8 \frac{1}{\beta_1^2} \frac{1}{\beta_2^2} \frac{\mu_2}{\mu_1} \left[\frac{4}{c^4} \gamma_{\alpha_2} \eta_{\beta_1} + \left(\frac{2}{c^2} - \frac{1}{\beta_1^2} \right)^2 \frac{\gamma_{\beta_2}}{\eta_{\beta_1}} \right] \\
E_0 &= -\omega^8 \frac{1}{\beta_1^2} \frac{1}{\beta_2^2} \frac{\mu_2}{\mu_1} \left[\frac{4}{c^4} \eta_{\alpha_1} \gamma_{\beta_2} + \left(\frac{2}{c^2} - \frac{1}{\beta_1^2} \right)^2 \frac{\gamma_{\alpha_2}}{\eta_{\alpha_1}} \right] \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Con $f = \frac{\mu_2}{\mu_1} - 1$ y $C_0, E_0 \in \Im$ (números imaginarios). Se insertan estos términos en la ecuación 3.9 y se obtiene una ecuación trascendental que relaciona estas velocidades con el número de onda (explícito en el argumento de las funciones trigonométricas). Luego se utilizan las identidades trigonométricas: $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$ y $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$ y se calcula la aproximación de estas funciones a primer orden cuando $kH \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
\sinh(kH) &\approx kH \\
\sin(kH) &\approx kH \\
\cosh(kH) &\approx 1 \\
\cos(kH) &\approx 1
\end{aligned}$$

Con estas simplificaciones se obtiene una relación de dispersión simplificada para el caso en estudio:

$$k = -\frac{1}{H} \frac{A_0 + \sqrt{B_0^2 + D_0^2} \cos(\theta_4)}{\gamma_{\alpha_1} \sin(\theta_3) \sqrt{|C_0|^2 + |E_0|^2} + \eta_{\beta_1} \sin(\theta_4) \sqrt{B_0^2 + D_0^2}} \tag{3.11}$$

Se desea encontrar la función $\omega^2 = \omega^2(k^2)$ pero el trabajo matemático para lograrlo es demasiado tedioso y no se obtiene una función manejable que entregue los coeficientes que se necesitan. Sin embargo, se puede obtener ω y k a partir de distintos valores de c que cumplan con la desigualdad: $\beta_1 < c < \beta_2$ en la ecuación 3.11. Luego se aproxima mediante mínimos cuadrados la función

ω^2 en términos de k^2 tal como se muestra en la figura 3.3, así se consigue el valor numérico de los coeficientes v_R y δ_R , utilizando los valores dados en el ejemplo anterior ($\beta_2 = 4500 \frac{m}{s}$, $\beta_1 = 3500 \frac{m}{s}$, $\alpha_2 = 4500\sqrt{3}$, $\alpha_1 = 3500\sqrt{3}$, $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 1,9415$ y $H = 35000m$), dando como resultado:

$$\begin{aligned} v_R &= 4121,8 \frac{m}{s} \\ \delta_R &= 7,46 \cdot 10^{16} \frac{m^4}{s^2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

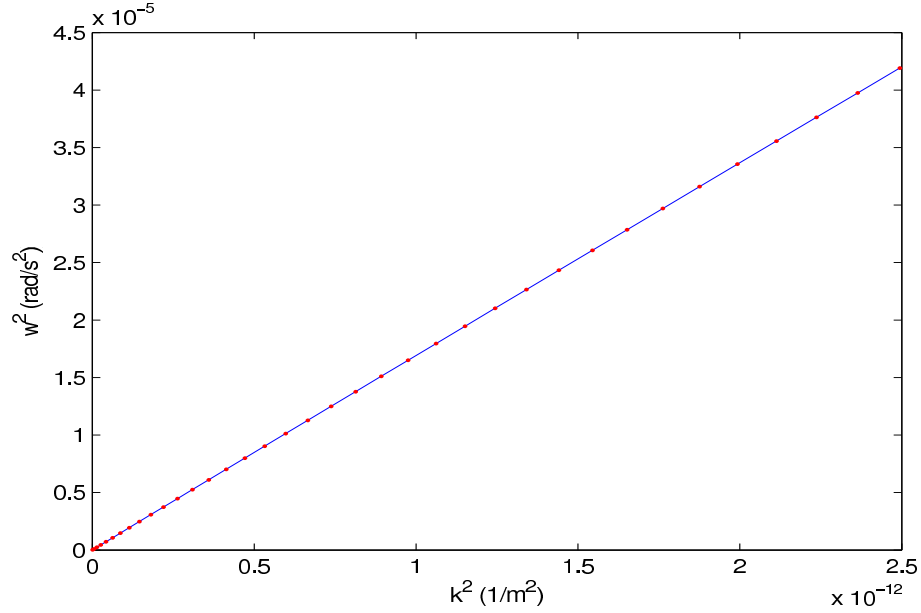


Figura 3.3: Aproximación de la dispersión de la Onda de Rayleigh.

Por ende, la ecuación que describe la dispersión que sufre una Onda Superficial de Rayleigh es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v_R^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \delta_R \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} \quad (3.13)$$

Con los valores de v_R y δ_R dados en 3.12, la única diferencia que se encuentra entre los modelos de dispersión para las ondas de Love y Rayleigh son los coeficientes de cada término, lo que conlleva a velocidades de fase bastante diferentes para un mismo número de onda. El valor v_R (velocidad de una onda superficial de Rayleigh con $k = 0$) es significativamente más bajo que la velocidad β , la cual es la velocidad máxima de una onda superficial de Love con $k = 0$. Por lo tanto, para números de onda iguales la onda de Love es más rápida (en teoría) que la onda de Rayleigh, por otro lado, el valor δ_R es aproximadamente 30 veces mayor que el valor δ_L , es decir, las ondas superficiales de Rayleigh sufren más dispersión que las ondas de Love. Las diferencias en la propagación de estas ondas se hacen evidentes en las secciones siguientes, además como se verá en el capítulo siguiente las ondas superficiales de Rayleigh poseen un desfase en su propagación, la cual adelanta su efecto a medida que ésta se propaga. Este efecto puede eliminar las diferencias en la velocidad de propagación para ambas ondas y lograr que viajen a la misma velocidad.

3.2. Nolinealidad

El segundo objetivo de este capítulo fue expandir τ_{ij} utilizando la relación 2.17 con el fin de considerar efectos nolineales en la propagación de ondas superficiales SH y P-SV, para esto se trabaja en un medio elástico nolineal semi infinito, medio que seguiremos utilizando en el resto del trabajo. Utilizando un sistema de referencia Lagrangiano como se muestra en la figura 3.4. El vector unitario \hat{x}_1 apunta hacia la derecha, \hat{x}_2 sale de la hoja y \hat{x}_3 va hacia abajo, el plano generado por los vectores \hat{x}_1 y \hat{x}_2 representa el plano superficial del medio y el plano generado por los vectores \hat{x}_1 y \hat{x}_3 representa el plano llamado plano sagital de propagación.

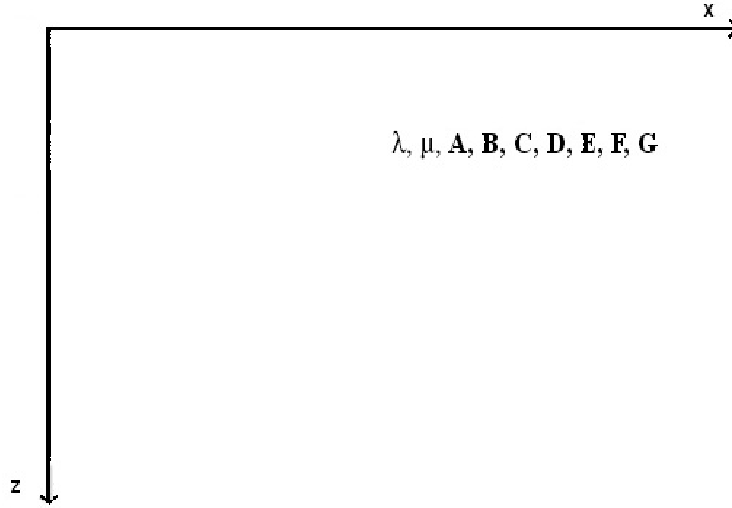


Figura 3.4: Geometría del problema de propagación de ondas superficiales SH y P-SV en un semi espacio nolineal.

3.2.1. Ondas SH (Caso Love)

Se considera una onda cuyo vector de polarización posee sólo componentes en \hat{x}_2 , propagándose en la dirección \hat{x}_1 en un medio caracterizado por λ, μ, ρ y por ciertas constantes nolineales a determinar A, B, C, D, E, F, G . La propagación de esta onda queda representada por:

$$\underline{u} = (0, u_2(x_1), 0)$$

Por lo tanto el tensor de deformaciones se expresa como:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & u_{2,1} & 0 \\ u_{2,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde por simplicidad en la notación se hizo: $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_{i,j}$. El tensor de deformación representa sólo movimientos de cizalle, los invariantes de este tensor son:

$$\begin{aligned}
Tr\underline{\underline{\underline{\epsilon}}} &= 0 \\
Tr\underline{\underline{\epsilon}}^2 &= \frac{1}{2}(u_{2,1})^2 \\
Tr\underline{\underline{\epsilon}}^3 &= 0
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Se buscan en la ecuación 2.18 los términos que contribuyen a la energía de deformación W y se trabaja sólo con esos en la ecuación 2.20, reemplazando queda:

$$\tau_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + 4F\epsilon_{ij}Tr\underline{\underline{\epsilon}}^2 \tag{3.15}$$

Se usa la relación 2.6 y las componentes distintas de cero:

$$\tau_{ij} = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + 2F(u_{i,j} + u_{j,i})Tr\underline{\underline{\epsilon}}^2$$

Se aplica esta relación al caso en estudio:

$$\tau_{21} = \mu(u_{2,1} + u_{1,2}) + F(u_{2,1} + u_{1,2})u_{2,1}^2 \tag{3.16}$$

Luego se agrupa y se toma la divergencia de esta última relación, se obtiene la fuerza por unidad de volumen en el eje \hat{x}_2 :

$$\begin{aligned}
\tau_{21} &= \mu u_{2,1} + F u_{2,1}^3 \\
\tau_{21,1} &= \mu u_{2,11} + F (u_{2,1}^3)_{,1}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Luego se reemplaza 3.17 en la ecuación de movimiento mostrada en el capítulo anterior 2.10 y utilizando $\gamma_L = \frac{F}{\rho}$, donde γ_L el coeficiente de no linealidad, se obtiene:

$$\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \gamma_L \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^3 \right] \tag{3.18}$$

Este resultado representa la ecuación no lineal que describe el movimiento de partículas debido a ondas superficiales tipo SH, sus características principales son:

1. Poseen polarización horizontal y transversal a la dirección de propagación.
2. Al desarrollar la derivada, se obtuvo la ecuación de una forma más simple.

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \left(\beta^2 + 3\gamma_L \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \tag{3.19}$$

Esta relación entrega una velocidad de fase que cumple con la relación $v^2 = \beta^2 + 3\gamma_L (u_{2,1})^2$.

3. La energía de deformación resulta ser una función par, lo que significa que no depende hacia dónde se cizalle el cuerpo.

El análisis de los valores esperados para los coeficientes se realizará en la sección 3.4, en donde se estudian todos los posibles casos con sus respectivas soluciones.

3.2.2. Ondas P-SV (Caso Rayleigh)

Por otro lado si se considera una onda viajando en la misma dirección \hat{x}_1 y cuyo vector de polarización es generado por las bases \hat{x}_1 y \hat{x}_3 , en este caso se tiene la propagación de ondas superficiales tipo P-SV.

El medio en el que se transmiten las ondas se caracteriza por λ, μ, ρ y por ciertas constantes no lineales a determinar A, B, C, D, E, F, G . El campo de desplazamientos \underline{u} queda representado por:

$$\underline{u} = (u_1(x_1), 0, u_3(x_1))$$

Por lo tanto el tensor de deformaciones queda definido como:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} u_{1,1} & 0 & \frac{1}{2}u_{3,1} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}u_{3,1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lo que corresponde a movimientos de cizalle en \hat{x}_3 y cambio de volumen en la dirección \hat{x}_1 . Los invariantes de este tensor son calculados:

$$\begin{aligned} Tr\underline{\underline{\epsilon}} &= u_{1,1} \\ Tr\underline{\underline{\epsilon}}^2 &= (u_{1,1})^2 + \frac{1}{2}(u_{3,1})^2 \\ Tr\underline{\underline{\epsilon}}^3 &= (u_{1,1})^3 + \frac{3}{4}u_{1,1}(u_{3,1})^2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Con estas 3 cantidades fue posible ver que todos los términos de la ecuación 2.18 aportan a la energía de deformación debida a este tipo de ondas superficiales. Ahora la ecuación 2.20 para este caso quedó:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \lambda (Tr\underline{\underline{\epsilon}}) \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} + 3A (Tr\underline{\underline{\epsilon}}^2) \delta_{ij} + 2B (Tr\underline{\underline{\epsilon}}) \epsilon_{ij} + B (Tr\underline{\underline{\epsilon}}^2) \delta_{ij} \\ &+ 3C \epsilon_{ik} \epsilon_{kj} + 4D (Tr\underline{\underline{\epsilon}}^3) \delta_{ij} + 2E (Tr\underline{\underline{\epsilon}}) (Tr\underline{\underline{\epsilon}}^2) \delta_{ij} + 2E (Tr\underline{\underline{\epsilon}})^2 \epsilon_{ij} \\ &+ 4F (Tr\underline{\underline{\epsilon}}^2) \epsilon_{ij} + G (Tr\underline{\underline{\epsilon}}^3) \delta_{ij} + 3G \epsilon_{ik} \epsilon_{kj} (Tr\underline{\underline{\epsilon}}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Se desea encontrar ecuaciones para u_1 y u_3 en función de x_1 , para esto se debe encontrar las componentes τ_{11} y τ_{31} . Se calcula el primero de estos valores usando $\varepsilon_{11} = u_{1,1}$:

$$\begin{aligned}\tau_{11} = & (\lambda + 2\mu)u_{1,1} + 3A(u_{1,1})^2 + \frac{3A}{2}(u_{3,1})^2 + 3B(u_{1,1})^2 + \frac{B}{2}(u_{3,1})^2 \\ & + 3C(u_{1,1})^2 + \frac{3C}{4}(u_{3,1})^2 + 4D(u_{1,1})^3 + 3Du_{1,1}(u_{3,1})^2 + 4E(u_{1,1})^3 \\ & + Eu_{1,1}(u_{3,1})^2 + 4F(u_{1,1})^3 + 2Fu_{1,1}(u_{3,1})^2 + 4G(u_{1,1})^3 \\ & + \frac{3G}{2}u_{1,1}(u_{3,1})^2\end{aligned}\quad (3.22)$$

Se ordenan estos términos y se calcula la divergencia del tensor:

$$\begin{aligned}\tau_{11,1} = & (\lambda + 2\mu)u_{1,11} + (3A + 3B + 3C)\left((u_{1,1})^2\right)_{,1} \\ & + \left(\frac{3A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{3C}{4}\right)\left((u_{3,1})^2\right)_{,1} \\ & + (4D + 4E + 4F + 4G)\left((u_{1,1})^3\right)_{,1} \\ & + \left(3D + E + 2F + \frac{3G}{2}\right)\left(u_{1,1}(u_{3,1})^2\right)_{,1}\end{aligned}\quad (3.23)$$

Se puede ver de esta ecuación que $\tau_{11,1}$ depende tanto de $u_{1,1}$ como de $u_{3,1}$, por lo tanto se obtiene una ecuación diferencial con estas dos incógnitas, es decir:

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \Phi \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)\quad (3.24)$$

Esta ecuación se considera un poco más adelante, ya que se deben hacer algunas simplificaciones para resolverla. Por otro lado el valor τ_{31} queda:

$$\begin{aligned}\tau_{31} = & \mu u_{3,1} + Bu_{1,1}u_{3,1} + \frac{3C}{2}u_{1,1}u_{3,1} + E(u_{1,1})^2 u_{3,1} \\ & + 2F(u_{1,1})^2 u_{3,1} + F(u_{3,1})^3 + 3G(u_{1,1})^2 u_{3,1}\end{aligned}\quad (3.25)$$

Nuevamente se ordenan estos términos y se calcula la divergencia del tensor:

$$\tau_{31,1} = \mu u_{3,11} + \left(B + \frac{3C}{2}\right)\left(u_{1,1}u_{3,1}\right)_{,1} + \left(E + 2F + \frac{3G}{2}\right)\left((u_{1,1})^2 u_{3,1}\right)_{,1} + F\left((u_{3,1})^3\right)_{,1}\quad (3.26)$$

De la misma forma que para la ecuación 3.24 se obtiene una ecuación con las mismas dos incógnitas, esto se tradujo en un sistema de ecuaciones de dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \Phi \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} &= \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \Psi \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)\end{aligned}\quad (3.27)$$

Para resolver un sistema no lineal acoplado se requiere de un trabajo matemático muy laborioso y muchas veces este trabajo es en vano ya que los sistemas no poseen soluciones analíticas. Sin embargo, se puede hacer una simplificación que hace el trabajo matemático mucho más simple. Las ecuaciones se pueden desacoplar y no se atenta significativamente con el resultado final, de hecho, para ondas superficiales lineales de Rayleigh esta relación se cumple. La idea es suponer que las soluciones poseen la misma forma de onda y sólo difieren en un cierto desfase (constante), esto permite utilizar la relación: $u_{1,1} = u_{3,1}$, al realizar el trabajo matemático necesario se logra desacoplar las ecuaciones ($\Phi(u_{1,1})$ y $\Psi(u_{3,1})$). Se observa también que ambas ecuaciones diferenciales poseen la misma forma, por lo tanto, se puede trabajar sólo con una ecuación del sistema 3.27 que describa el movimiento de u_1 y u_3 .

La única diferencia entre estas dos ecuaciones es la velocidad para el término lineal no dispersivo $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}$ en donde se debe utilizar la máxima velocidad permitida para una Onda Superficial de Rayleigh en un medio lineal de la misma forma que se hizo para el modelo de ondas superficiales de Love, es decir: v_R .

Por lo tanto, la ecuación diferencial que modela el movimiento de partículas debido a las Ondas Superficiales tipo P-SV (Ondas Superficiales de Rayleigh, u_R) propagándose en un medio no lineal, es:

$$\frac{\partial^2 u_R}{\partial t^2} = v_R^2 \frac{\partial^2 u_R}{\partial x_1^2} + \eta_R \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\left(\frac{\partial u_R}{\partial x_1} \right)^2 \right) + \gamma_R \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\left(\frac{\partial u_R}{\partial x_1} \right)^3 \right)\quad (3.28)$$

Las principales características de esta ecuación, son:

1. El vector de polarización está contenido en el plano sagital de propagación.
2. Al desarrollar la derivada, se obtuvo la ecuación de una forma más simple.

$$\frac{\partial^2 u_R}{\partial t^2} = \left(v_R^2 + 2\eta_R \frac{\partial u_R}{\partial x_1} + 3\gamma_R \left(\frac{\partial u_R}{\partial x_1} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u_R}{\partial x_1^2}\quad (3.29)$$

Esto entrega una velocidad de fase que cumple con la relación $v^2 = v_R^2 + 2\eta_R u_{1,1} + 3\gamma_R (u_{1,1})^2$. Esta igualdad muestra que existe una diferencia en la velocidad de la onda para el caso compresivo ($u_{1,1} > 0$) y para el caso de dilatación ($u_{1,1} < 0$).

3. Las constantes η_R y γ_R dependen tanto de $u_{1,1}$ como de $u_{3,1}$, por lo tanto no se pueden asociar a cada uno de los tipos de propagación envueltos en este problema, compresibilidad y cizalle, si no que son el resultado de la combinación de ambos tipos de movimiento. Esto se puede

verificar al observar la dependencia de las funciones Φ y Ψ en el sistema de ecuaciones 3.27.

Además es necesario aclarar que los coeficientes γ_L y γ_R no son iguales, $\gamma_L = F$ y $\gamma_R = E + 3F + \frac{3G}{2}$, en general, para distintos tipos de movimiento de partícula se obtienen distintos coeficientes de no linealidad.

4. La energía de deformación es una función impar para este caso, por lo que la diferencia entre compresión y dilatación queda evidenciada en el modelo y los resultados, al igual que para el cizalle hacia la izquierda o la derecha.

3.3. Modelos de Propagación de Ondas Solitarias

La idea central del desarrollo teórico de este trabajo fue establecer ecuaciones diferenciales que incluyan términos dispersivos y no lineales en el campo lejano, en donde se puede aplicar la aproximación de onda plana. Además, dependiendo de los valores de los coeficientes no lineales y dispersivos se encuentran distintas soluciones para los modelos, los resultados de u que interesan son funciones continuas que no divergen, ya que éstas pueden representar soluciones de Ondas Solitarias.

3.3.1. Modelo de propagación de ondas Solitarias de Love

Se considera el efecto dispersivo de las ondas de Love y la transmisión de una onda SH en un medio elástico no lineal, efectos descritos por las ecuaciones 3.4 y 3.18. Al combinar estas ecuaciones se obtiene un modelo de propagación de Ondas Solitarias de Love.

$$\ddot{u}_L = \beta^2 u_L'' + \gamma_L (u_L^3)' + \delta_L u_L'''' \quad (3.30)$$

Donde \ddot{u}_L es la segunda derivada temporal de u_L y el signo $'$ representa la derivada espacial (1-D) de una cierta función. Como se desea encontrar una solución de onda que viaje a velocidad constante, se puede escribir una ecuación diferencial alternativa para la propagación de esta perturbación.

$$\ddot{u}_L = v^2 u_L'' \quad (3.31)$$

Aquí, v representa la velocidad de fase del paquete completo (Onda Solitaria), se reemplaza 3.31 en la ecuación 3.30 e integrando una vez resulta:

$$(v^2 - \beta^2) u_L' = \gamma_L u_L^3 + \delta_L u_L'' \quad (3.32)$$

Ahora se multiplica por u_L' y se integra:

$$(v^2 - \beta^2) u_L'^2 = \frac{\gamma_L}{2} u_L^4 + \delta_L u_L''^2 \quad (3.33)$$

Se despeja u_L'' :

$$u_L'' = u_L' \sqrt{\frac{(v^2 - \beta^2)}{\delta_L} + \left(-\frac{\gamma_L}{2\delta_L}\right) u_L'^2} \quad (3.34)$$

Luego se hace el cambio de variable $u_L' = y$, además de introducir nuevas constantes: $a = \frac{(v^2 - \beta^2)}{\delta_L}$ y $c = -\frac{\gamma_L}{2\delta_L}$. La ecuación diferencial queda:

$$\frac{dy}{dx} = y\sqrt{a + cy^2} \quad (3.35)$$

Se define la función $\xi = x - vt$. Se puede reemplazar la derivada espacial ($\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi}$).

$$\frac{dy}{y\sqrt{a + cy^2}} = d\xi \quad (3.36)$$

Esta relación debe ser integrada, el lado derecho corresponde simplemente a $x - vt$ mientras que el lado izquierdo posee distintas soluciones para distintos valores de a y c resumidos en el siguiente esquema:

$$x - vt = \int \frac{dy}{y\sqrt{a + cy^2}} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{a}} \ln \frac{\sqrt{a} - \sqrt{a + cy^2}}{\sqrt{a} + \sqrt{a + cy^2}} & \text{si } a > 0, c < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{a}} \ln \frac{\sqrt{a + cy^2} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + cy^2} + \sqrt{a}} & \text{si } a > 0, c > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-a}} \frac{1}{\arccos \sqrt{-\frac{cy^2}{a}}} & \text{si } a < 0, c > 0 \end{cases}$$

Sólo la primera solución para $a > 0, c < 0$ entrega una función u continua, acotada y que converge a un cierto valor para $t \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a} - \sqrt{a + cy^2}}{\sqrt{a} + \sqrt{a + cy^2}} &= \exp[2\sqrt{a}(x - vt)] \\ \sqrt{a} - \sqrt{a + cy^2} &= \sqrt{a}\exp(2\theta) + \sqrt{a + cy^2}\exp(2\theta) \\ \sqrt{a}(1 - \exp(2\theta)) &= \sqrt{a + cy^2}(1 + \exp(2\theta)) \\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a + cy^2}} &= \frac{1 + \exp(2\theta)}{1 - \exp(2\theta)} \cdot \frac{\exp(-\theta)}{\exp(-\theta)} \\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a + cy^2}} &= -\frac{\exp(\theta) + \exp(-\theta)}{\exp(\theta) - \exp(-\theta)} = -\frac{\cosh(\theta)}{\sinh(\theta)} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Donde $\theta = \sqrt{a}(x - vt)$. De la ecuación 3.37, se puede despejar y:

$$\begin{aligned} \frac{a}{a + cy^2} &= \frac{1}{\tanh^2(\theta)} \\ a(\sinh^2(\theta) - \cosh^2(\theta)) &= cy^2 \cosh^2(\theta) \\ y = u'_L &= \sqrt{\frac{-a}{c}} \frac{1}{\cosh(\sqrt{a}(x - vt))} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Este resultado es proporcional a la forma de onda del campo de velocidad de las partículas debido al paso del solitón de Love, ahora se integra:

$$u_L = \int y dx = \sqrt{\frac{-a}{c}} \int \frac{dx}{\cosh(\sqrt{a}(x - vt))} \quad (3.39)$$

y se obtiene el campo de desplazamientos:

$$u_L = \sqrt{\frac{8\delta_L}{\gamma_L}} \arctan \left[\exp \left(\sqrt{\frac{v^2 - \beta^2}{\delta_L}} (x - vt) \right) \right] \quad (3.40)$$

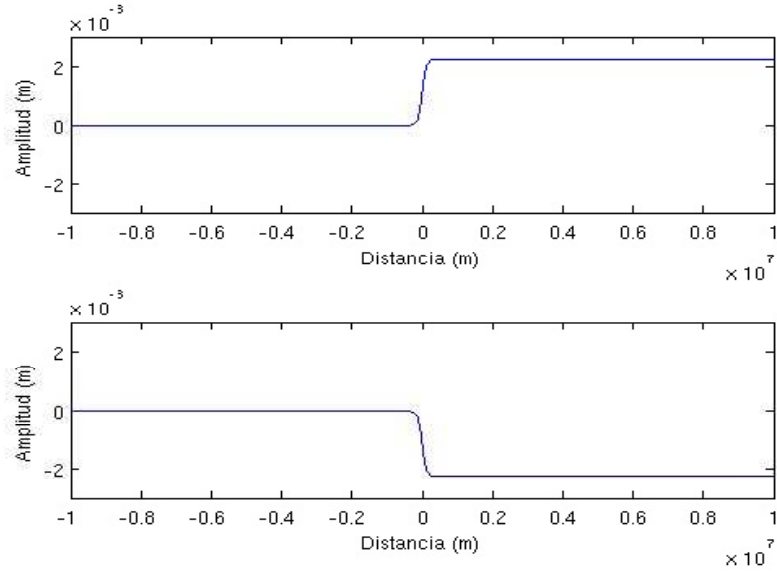


Figura 3.5: Desplazamiento de partícula debido al paso de una Onda Solitaria de Love.

Esta es la solución para el movimiento de partícula debido al paso de una onda solitaria de Love, figura 3.5 que produce una deformación permanente luego del paso de la onda. Los valores que se utilizan para modelar esta solución son: $\gamma_L = 1,1 \cdot 10^{20} \frac{m^2}{s^2}$, $\beta = 4500 \frac{m}{s}$, $v = 4524 \frac{m}{s}$ y

$\delta_L = 2,6 \cdot 10^{15} \frac{m^4}{s^2}$. En la siguiente sección se va a extraer toda la información posible de esta ecuación con sus respectivas aplicaciones a sismología y estudios de rocas.

La segunda y tercera solución posible para la integral entregan como soluciones:

$$u_L = \sqrt{\frac{1}{c}} \left[\ln \left(2 \sinh \left(\frac{\sqrt{a}}{2} (x - vt) \right) \right) - \ln \left(2 \cosh \left(\frac{\sqrt{a}}{2} (x - vt) \right) \right) \right] \quad (3.41)$$

$$u_L = \sqrt{\frac{1}{c}} \ln \left(\sin \left(\frac{\sqrt{a}}{2} (x - vt) \right) + \cos \left(\frac{\sqrt{a}}{2} (x - vt) \right) \right) - \sqrt{\frac{1}{c}} \ln \left(\cos \left(\frac{\sqrt{a}}{2} (x - vt) \right) - \sin \left(\frac{\sqrt{a}}{2} (x - vt) \right) \right) \quad (3.42)$$

Estas soluciones divergen, por lo que no representan una solución física del problema. No se pueden considerar ni siquiera ondas, son dominios de a y c en los cuales nuestro modelo de Ondas Solitarias no tiene ningún grado de validez. Esto significa que es imposible observar este tipo de ondas cuando $\gamma_L < 0$ o $\beta > v$.

3.3.2. Modelo de propagación de ondas Solitarias de Rayleigh

De la misma forma que para el caso anterior, se deben considerar los efectos dispersivos para las ondas de Rayleigh y la propagación de ondas P-SV en un medio elástico no lineal, estos efectos quedan descritos por las ecuaciones 3.13 y 3.28. Ambas se suman y se obtiene:

$$\ddot{u}_R = v_R^2 u_R'' + \eta_R \left((u_R')^2 \right)' + \gamma_R \left((u_R')^3 \right)' + \delta_R u_R'''' \quad (3.43)$$

Donde por simplicidad, al igual que para el caso de Love, se cambia la notación para las derivadas espaciales (u') y temporales (\dot{u}). Se debe realizar el mismo cálculo y trabajo algebraico que para el primer caso. Nuevamente se utiliza: $\ddot{u}_R = v^2 u_R''$.

$$(v^2 - v_R^2) u_R' = \eta_R u_R'^2 + \gamma_R u_R'^3 + \delta_R u_R'' \quad (3.44)$$

Se multiplica por u_R'' y se integra con respecto a x_1 :

$$\begin{aligned} \frac{v^2 - v_R^2}{2} u_R'^2 &= \frac{\eta_R}{3} u_R'^3 + \frac{\gamma_R}{4} u_R'^4 + \frac{\delta_R}{2} u_R''^2 \\ u_R''^2 &= \frac{v^2 - v_R^2}{\delta_R} u_R'^2 - \frac{2\eta_R}{3\delta_R} u_R'^3 - \frac{\gamma_R}{2\delta_R} u_R'^4 \\ \frac{dy}{dx_1} = \frac{dy}{d\xi} &= y \sqrt{a + by + cy^2} \\ \frac{dy}{y \sqrt{a + by + cy^2}} &= d\xi \end{aligned} \quad (3.45)$$

Donde se realizan los siguientes cambios de variables: $u_R' = y$, $\xi = x - vt$, $a = \frac{v^2 - v_R^2}{\delta_R}$, $b = -\frac{2\eta_R}{3\delta_R}$ y $c = -\frac{\gamma_R}{2\delta_R}$, al igual que para el caso de Love. Luego se integra el lado izquierdo y se obtienen los

resultados dados en el siguiente esquema. La integral del lado derecho es simplemente $x - vt$.

$$x - vt = \int \frac{dy}{y\sqrt{a+by+cy^2}} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{a}} \ln \frac{2a+by+2\sqrt{a^2+aby+acy^2}}{y} & \text{si } a > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-a}} \arctan \frac{2a+by}{2\sqrt{-a}\sqrt{a+by+cy^2}} & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Donde sólo el primer resultado para $a > 0$ condujo a una solución para u continua, acotada y que converge a un cierto valor definido cuando $t \rightarrow \infty$, ésta puede representar una solución de onda Solitaria de Rayleigh.

De la primera solución,

$$\begin{aligned} 2a + by + 2\sqrt{a^2 + aby + acy^2} &= y \exp(-\sqrt{a}(x - vt)) \\ \sqrt{a^2 + aby + acy^2} &= \frac{y}{2} [\exp(-\sqrt{a}(x - vt)) - b] - a \\ acy^2 &= \frac{y^2}{4} [\exp(-\sqrt{a}(x - vt)) - b]^2 - ay \exp(-\sqrt{a}(x - vt)) \\ y^2 (4ac - [\exp(-\sqrt{a}(x - vt)) - b]^2) &= -4ay \exp(-\sqrt{a}(x - vt)) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Entonces:

$$y = u'_R = \frac{4a \exp(-\sqrt{a}(x - vt))}{[\exp(-\sqrt{a}(x - vt)) - b]^2 - 4ac} \quad (3.47)$$

Esta solución es acotada sólo para valores negativos de c . Para $c > 0$ se obtiene una solución que no concuerda con la física del problema de transmisión de ondas ya que contiene un punto singular.

Se integra esta última relación y se obtiene el campo de desplazamientos debido al paso de una Onda Solitaria de Rayleigh, éste es:

$$u_R = \sqrt{\frac{8\delta_R}{\gamma_R}} \arctan \left(\frac{\exp \left(-\sqrt{\frac{v^2 - v_R^2}{\delta_R}} (x - vt) \right) + \frac{2\eta_R}{3\delta_R}}{\sqrt{4 \frac{(v^2 - v_R^2)\gamma_R}{2\delta_R^2}}} \right) \quad (3.48)$$

Si se observa la ecuación 3.48 es evidente que el efecto del coeficiente η_R tienen un efecto de desfase sobre la onda solitaria de Rayleigh, en la siguiente sección se mostrará que el valor de η_R debe ser relativamente pequeño, ya que el desfase no debe ser importante. Además para valores positivos y negativos de este coeficiente, se tiene muy diferentes movimientos de partícula, lo que se debe contrastar con observaciones para saber cual es el comportamiento que es más probable de

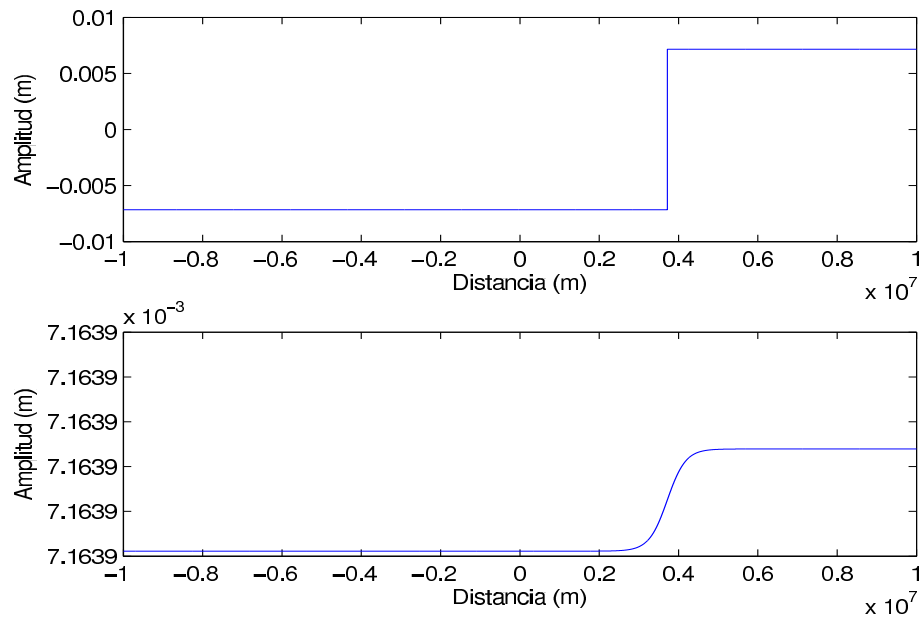


Figura 3.6: Desplazamiento de partícula debido al paso de una Onda Solitaria de Rayleigh.

observar. Como se verá en el siguiente capítulo, el caso más representativo de la realidad es para $b < 0$ (bajas frecuencias).

Esta onda también muestra que ocurre una deformación permanente después del paso de la onda por el lugar en estudio al igual que para el caso de la Onda Solitaria de Love. Además existe una directividad en la solución ya que ésta es más abrupta (frecuencia más alta) para $b > 0$ y más suave (bajas frecuencias) para $b < 0$. Esto ocurre debido a la directividad intrínseca de un sismo, debido a la modelación del sismo por una doble cupla. En algunas zonas se observan compresiones en la primera llegada y en otras se observan dilataciones, estas diferencias conllevan a diferencias en la forma de onda de la onda solitaria de Rayleigh.

Las características de la directividad están resumidas en el siguiente cuadro:

$b > 0$	$\eta_R < 0$	Dilatación más rápida
$b < 0$	$\eta_R > 0$	Compresión más rápida

Tabla 3.1: Resumen directividad de las Ondas Solitarias de Rayleigh.

Esto queda evidenciado desde la teoría ya que la función de energía para el caso de propagación de ondas P-SV tiene un término impar, lo cual se traduce en un comportamiento muy diferente de la roca cuando hay compresión o dilatación.

Es importante notar también que las formas de onda mostradas en la figura 3.6 muestran una menor amplitud para valores de b negativos (las diferencias de amplitud en el eje Y no pueden ser evidenciadas por el programa que grafica, esto significa que las ondas solitarias de Rayleigh son muy poco energéticas y que la mayoría de la energía que se propaga corresponde a la propagación de ondas solitarias de Love).

En resumen, se obtienen soluciones acotadas que representan Ondas Solitarias solamente cuando $a > 0$ y $c < 0$ ($v < \beta$ y $\gamma_R > 0$), estas restricciones son las mismas que para el caso de Ondas Solitarias de Love por lo que ambos modelos están en concordancia, además, ambas perturbaciones poseen la misma dependencia para la amplitud $A = \sqrt{\frac{8\delta}{\gamma}}$. Para el coeficiente b , no existe una restricción explícita por lo que puede ser negativo o positivo, sin embargo hemos visto que es más probable que se propague la onda cuando éste sea negativo, su valor entrega valiosa información sobre el tipo de movimiento que domina en la transmisión de ondas Superficiales de Rayleigh.

3.4. Interpretación

Se retoman las ecuaciones 3.40 y 3.48 para interpretar los resultados de los modelos, éstas entregan el campo de desplazamiento de las partículas debido al paso de una onda Solitaria de Love y Rayleigh respectivamente. Se estudia también el significado de las restricciones en los coeficientes de estos modelos para la Sismología.

1. Los valores de a, b, c entregan información acerca de las características físicas del suelo, velocidad de la onda y efecto de la dispersión.
2. El valor de amplitud, entrega los valores permitidos de movimiento del suelo tomando en cuenta los coeficientes de dispersión y no linealidad dados.
3. El valor de la velocidad de fase para cada onda se puede encontrar suponiendo un periodo de la onda, aquí se utiliza el valor observado en los datos sismológicos disponibles.

3.4.1. Onda Solitaria de Love

Se postula que para que existan Ondas Solitarias de Love la constante a debe ser mayor que cero, eso significa que la velocidad de propagación de la onda debe ser mayor a la velocidad transversal que se utiliza en el modelo dispersivo de este tipo de ondas ($v > \beta$) ya que la constante δ_L es siempre positiva. La constante $c = -\frac{\gamma_L}{2\delta_L}$ debe ser menor que cero para que la solución tenga validez, esto implica que γ_L debe ser mayor que cero, lo que se traduce en una roca que a medida que se le aplican esfuerzos, se hace cada vez es más difícil de deformar.

Es poco probable observar este comportamiento en las rocas pero sin embargo, existe evidencia de que ocurre. Generalmente la reología de las rocas muestra un comportamiento no lineal representado con $\gamma_L < 0$, lo que significa que la roca sufre un efecto llamado *weakening*, lo que se traduce en una roca que a medida que se le aplican más esfuerzos, se hace cada vez más débil, o fácil de deformar.

En resumen, es imposible observar Ondas Solitarias de Love en materiales no competentes como sedimentos o rocas fracturadas, se observan sólo en rocas que presentan comportamiento "hardening".

Por otro lado, la amplitud del solitón $A = \sqrt{\frac{8\delta_L}{\gamma_L}}$ depende de la raíz del inverso del coeficiente de no linealidad, lo que significa que mientras más no lineal sea el medio, menor será la amplitud de las

ondas. Cabe destacar, sin embargo, que en un medio lineal ($\gamma_L = 0$) la solución de Onda Solitaria no posee sentido físico.

Por otro lado, el valor de la amplitud de la onda en las estaciones cercanas ($\approx 130km$) debe estar en concordancia con los valores esperados para un sismo $M_w \approx 5,5$. Se consideran estos eventos ya que poseen un área de ruptura no muy grande, esta restricción en la magnitud es útil para poder representar el sismo por una fuente puntual y poder trabajar en el campo lejano con ondas planas ya que las perturbaciones que se estudiaron poseen longitudes de onda de: $\lambda = vT = 4,5 \frac{km}{s} 150s \approx 675km$, lo cuál es mucho más grande que el largo de la ruptura que produjo el terremoto $\lambda_{onda} \gg \lambda_{ruptura}$.

Para calcular el coeficiente no lineal de la ecuación se considera la relación constitutiva no lineal dada por la ecuación 3.15 y la relación lineal que está dada sólo por el primer término para ondas tipo SH.

Relación lineal	Relación No lineal
$\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}$	$\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + 4\gamma \left(Tr \underline{\underline{\varepsilon}}^2 \right) \varepsilon_{ij}$

Se considera una cierta deformación de cizalle fija, existen dos relaciones constitutivas que predicen distintos valores en los esfuerzos aplicados, la Ley de Hooke y la relación no lineal. Cuando el valor de esfuerzo lineal sea el 90 % del valor no lineal se asume que la deformación correspondiente es 10^{-7} (un medio muy no lineal) y que $\mu = 3 \cdot 10^{10} \frac{kg}{ms^2}$. Luego se escala y se restan las ecuaciones para obtener un valor $\gamma = 3 \cdot 10^{23} \frac{kg}{ms^2}$.

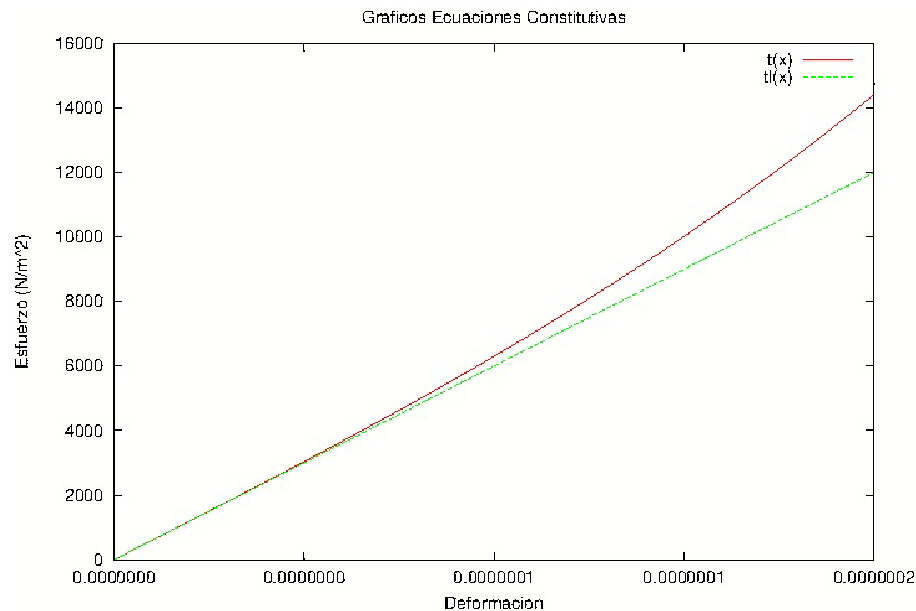


Figura 3.7: Ecuación constitutiva para movimiento de partícula debido a una Onda Solitaria de Love.

Por lo tanto, la relación constitutiva para una onda transversal en el medio elástico no lineal considerado es:

$$\tau_{ij} = 6 \cdot 10^{10} \varepsilon_{ij} + 3 \cdot 10^{23} \left(Tr \underline{\underline{\varepsilon}}^2 \right) \varepsilon_{ij} \quad (3.49)$$

Sin embargo, este valor de γ no es el que se necesita para el modelo, es necesario $\gamma_L = \frac{\gamma}{\rho} = 1,1 \cdot 10^{20} \frac{m^2}{s^2}$, donde $\rho = 2700 \frac{kg}{m^3}$ es la densidad del medio. Con estos datos se obtiene la amplitud del solitón para los valores que se calculan:

$$A = \sqrt{\frac{8\delta_L}{\gamma_L}} \approx 1cm \quad (3.50)$$

Este valor es del orden de las amplitudes observadas en ciertas zonas cercanas al hipocentro de un sismo $Mw = 5,5$, por lo tanto, las Ondas Solitarias de Love se pueden observar sólo en lugares donde los coeficientes no lineales sean de este orden. En general existe un rango de magnitudes de momento en los que las observaciones a diferentes distancias epicentrales pueden presentar Ondas Solitarias, debe haber una relación entre la amplitud de esta onda (que es, en primera aproximación, un intercambio entre la magnitud del evento y la distancia de observación) y el valor del coeficiente de no linealidad.

Finalmente se calcula la velocidad de fase de estas ondas, se asume un valor del periodo igual a 150s [10]. Este valor está acorde con la restricción $a > 0$.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{\frac{v^2 - \beta^2}{\delta_L}} \Rightarrow vT \sqrt{v^2 - \beta^2} = 2\pi \sqrt{\delta_L} \quad (3.51)$$

Se utiliza $\beta = 4500 \frac{km}{s}$ y se obtiene $v = 4524 \frac{m}{s}$. Es decir, la Onda Solitaria es un poco más rápida que el paquete de onda S, lo cual se observa en el capítulo siguiente, observacionalmente.

Con estos calculos se encuentran las condiciones que deben cumplir y las características que poseen las Ondas Solitarias de Love. Además se observa que la teoría es consistente con las características que se esperan en un sismo y con la reología del medio.

Otro punto importante es que al observar la ecuación diferencial planteada 3.30 se ve que $-u_L$ también es solución del modelo, es por esto que las Ondas Solitarias de Love pueden presentar polarizaciones tanto en la dirección \hat{x}_2 como en $-\hat{x}_2$. Esto va a depender exclusivamente del mecanismo de foco del evento y la no linealidad del medio en cuestión.

La velocidad de la onda, que debe ser constante, se calcula a partir de 3.30 y esta dada por la ecuación:

$$v^2 = \beta^2 + 3\gamma_L (u_{2,1})^2 - k^2 \delta_L \quad (3.52)$$

3.4.2. Onda Solitaria de Rayleigh

Tal como en la sección anterior 3.4.1, se debe cumplir que $a > 0$ y $c < 0$ para que existan las ondas solitarias de Rayleigh. Estas condiciones entregan $\gamma_R > 0$, $v > \beta$ y una solución que repre-

senta un desplazamiento permanente luego del paso de la onda al igual que para el caso de Love. Ambos modelos, y por ende, ambas soluciones tienen las mismas implicancias en la reología, polarizaciones de las ondas, etc.

El punto discordante y más importante en el análisis de la Onda Solitaria de Rayleigh es el que compete al término $b = -\frac{2\eta_R}{3\delta_R}$. El término no lineal que incluye este coeficiente es una función impar, por lo tanto, si u es solución $-u$ no lo es. Esto significa que hay una directividad en el resultado, es decir, van a existir diferentes soluciones para distintos tipos de movimiento, en particular, compresión o dilatación, tal como se desprende de la ecuación 3.47 y se muestra en la figura 3.6.

La amplitud de la onda posee la misma dependencia que la Onda Solitaria de Love $\sqrt{\frac{8\delta_R}{\gamma_R}}$, depende de la raíz inversa del coeficiente de no linealidad γ_R al igual que para la Onda Solitaria de Love, sin embargo, la amplitud de esta onda resulta ser mucho menor, por lo que posee mucha menos energía. El término dispersivo de las Ondas de Rayleigh es mayor que para Love y además $\gamma_L \neq \gamma_R$. Para desplazamientos del orden de centímetros se tiene que $\gamma_R \approx 2,38 \cdot 10^{20} \frac{m^2}{s^2}$.

El número de onda también posee la misma dependencia teórica dada por la ecuación 3.51, sin embargo, como ya se dijo, las Ondas Solitarias de Rayleigh poseen un valor de dispersión distinto a las Ondas Solitarias de Love por lo que se obtiene una velocidad distinta para la propagación de esta perturbación; para el mismo periodo de 150s se tiene una velocidad de fase de $4,768 \frac{m}{s}$, que cumple con la relación:

$$v^2 = v_R^2 + 2\eta_R u'_R + 3\gamma_R (u'_R)^2 - \delta_R k^2 \quad (3.53)$$

Esta velocidad es un poco mayor que $\beta = 4500 \frac{m}{s}$ tal como lo predice la desigualdad mostrada al inicio de esta sección, significa que la onda solitaria de Rayleigh arriba a una estación un poco antes que la onda solitaria de Love y la onda S, sin embargo, su poca amplitud la hace casi imperceptible cuando se compara con estas ondas. Si el caso fuera $b > 0$ (frecuencias más altas) se podrían observar con mayor amplitud, sin embargo, este dominio de frecuencias se escapa al dominio que se trabaja en esta tesis y representa otros modos de propagación, en particular, efectos no lineales con altas frecuencias se observan en la coda de algunas ondas debido al efecto de Scattering en el núcleo de la Tierra.

En el siguiente capítulo se estudian algunas señales que se han observado en ciertos eventos que podrían estar asociadas con Ondas Solitarias que se van a comparar con las formas de onda teóricas y los valores esperados que se calcularon en esta sección. Además se realizará un análisis sísmológico simultáneamente.

Capítulo 4

Modelación y Tratamiento de Señales

En este capítulo se analizan señales sísmicas que pueden validar la teoría presentada en el capítulo anterior. Se estudian las características principales de las señales de bajas frecuencias presentes tanto en la modelación numérica de las ecuaciones de Ondas Solitarias de Love y Rayleigh como en registros de sismos observados y presentados en la sección 1.6. El modelamiento numérico debe estar en concordancia con las características de las Ondas Solitarias tanto en su forma de onda como en sus características, por ejemplo: velocidad de onda, longitud de onda, polarización, entre otras. Se espera además que los datos registrados por sismómetros banda ancha Guralp CMG40T y STS-2 en Estados Unidos, representados en velocidad para que sea más fácil la visualización de éstos, sean concordantes con las características de estas ondas solitarias.

Las señales de interés que se observaron sólo en algunas de las estaciones que registraron el sismo arriban un poco antes que el paquete de la onda S y son muy similares a las soluciones de los modelos propuestos, tal como se presenta en secciones posteriores. El estudio comprende: análisis de sismogramas sintéticos, pruebas de ruido, estudio de la polarización, gráficos distancia vs tiempo y comparación de las señales de baja frecuencia con las soluciones teóricas de los modelos propuestos en el capítulo anterior. Todos estos, ayudaron a discernir si las señales corresponden a Ondas Solitarias de Love y Rayleigh.

4.1. Modelación de Forma de Onda

Se modela la ecuación 3.30 a través del método de diferencias finitas de cuarto orden con el fin de observar cómo se ven las formas de onda y su evolución en el tiempo dada una condición inicial representada por una función similar a la de Heaviside ($\arctan(\exp(x - vt))$). El modelo de propagación de la onda solitaria de Rayleigh posee un parámetro que no está definido, por lo que sólo se realiza el modelamiento de forma de onda de la onda solitaria de Love.

Se considera un medio no lineal homogéneo en el que se propagan estas ondas dispersivas, se reescribe la ecuación 3.30 en forma adimensional para establecer sólo un parámetro de dependencia de la ecuación diferencial no lineal (γ_b), esto se logra haciendo unos cambios de variable en la

ecuación: $t' = \beta^2 t$ y $u_L = \frac{\beta}{\sqrt{\gamma_L}} v_L$.

$$\ddot{u}_L = \beta^2 u_L'' + \gamma_L (u_L^3)' + \delta_L u_L'''' \quad (4.1)$$

$$\dot{v}_L = u_L'' + (u_L^3)' + \frac{\delta_L}{\beta^2 \sqrt{\gamma_L}} u_L'''' \quad (4.2)$$

$$\ddot{v}_L = u_L'' + (u_L^3)' + b u_L'''' \quad , \text{donde } \gamma_b = \frac{\delta_L}{\beta^2 \sqrt{\gamma_L}} \quad (4.3)$$

En donde la última derivada temporal es con respecto a la nueva variable t' y el valor de γ_b para el caso en estudio es igual a 0,01218. Se representa la solución de esta ecuación numéricamente con el fin de mostrar la existencia de la señal de deformación permanente descrita en el capítulo anterior y que ésta es estable a medida que viaja a distintas estaciones. Para esto se utiliza el programa escrito en lenguaje Fortran que es mostrado en el Anexo A

El resultado de la modelación a través del método de diferencias finitas es mostrado en la figura 4.1. Se observa la transmisión de la señal de interés (en desplazamiento) en distintas estaciones a distintas distancias epicentrales (estación más cercana: abajo, estación más cercana: arriba). La forma de onda viaja con velocidad constante y es estable a medida que se propaga la onda viajera, con los coeficientes entregados en el capítulo anterior, por lo que la forma de onda es solución a la ecuación diferencial propuesta.

No fue necesario realizar más pruebas, lo que se deseaba comprobar era la estabilidad de la solución en base a los coeficientes que se calcularon en este trabajo, los cuales son las condiciones que debe cumplir la Tierra para que la propagación de ondas solitarias de Love (en este caso) sea posible.

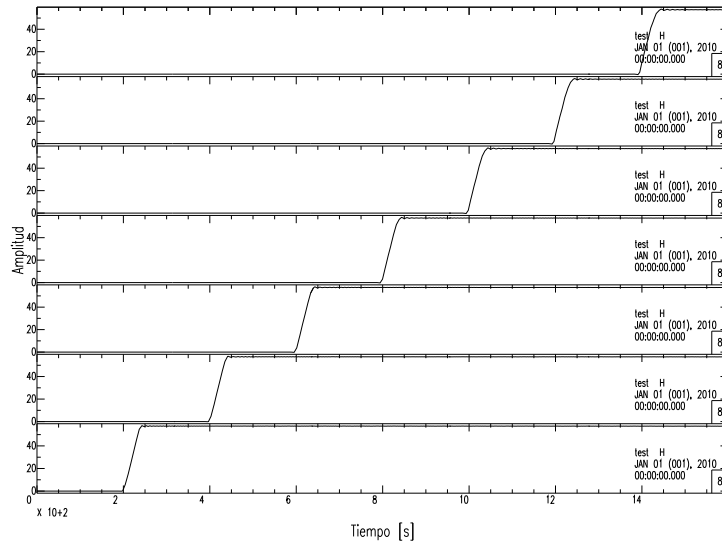


Figura 4.1: Evolución temporal de la Onda Solitaria calculada a través del método de diferencias finitas.

Este resultado demuestra que la teoría presentada en el capítulo anterior es válida para un medio homogéneo. Ahora es necesario comprobar que los datos sísmológicos (medio heterogéneo) que se analizan en la siguiente sección son concordantes con la teoría de ondas solitarias de Love y

Rayleigh.

4.2. Preparación de los datos

En esta sección se comienza con el tratamiento de datos sísmológicos, para comparar observaciones reales con los modelos teóricos. Primero que todo se hizo una prueba de la causalidad de los filtros que se aplicaron y su influencia sobre las formas de onda y el arribo de las distintas fases a la estación CWC. Se aplicaron tres tipos de filtros: Butterworth pasabajo con frecuencia de corte $0,01Hz$, cuatro polos y una pasada, Butterworth pasabajo con frecuencia de corte $0,01Hz$, cuatro polos y dos pasadas y por último Butterworth pasabajo con frecuencia de corte $0,01Hz$, dos polos y dos pasadas, luego se compararon las señales resultantes, encontrando que la aplicación de los filtros debe ser causal ya que la fase varía en demasía ($\sim 20s$), por esto, es correcto aplicar el segundo o tercero de estos filtros. Los resultados se muestran en la figura 4.2.

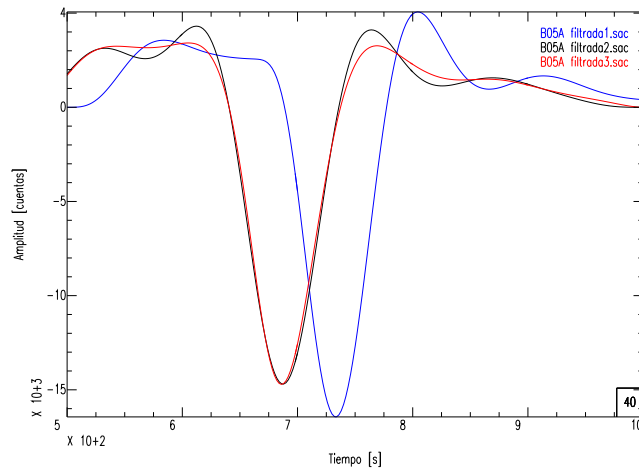


Figura 4.2: Comparación de señales filtradas, en azul: filtro acausal, en rojo y negro: filtro causal. En este trabajo se utiliza el filtro Butterworth con frecuencia de corte $0,01Hz$, 4 polos y 2 pasadas (negro).

En la figura 4.3 se muestran los sismogramas del Evento 1 (ver sección 1.6), registrado en la estación CWC distante a aproximadamente $130km$ del epicentro. En esta sección se mostrará el análisis realizado sólo a esta estación en California y la estación B05A en Rainier, todas las señales se muestran en el Anexo B. A simple vista no se observa ninguna señal anómala en el sismo, se puede ver claramente el arribo de la onda P, onda S y sus respectivos decaimientos exponenciales en la coda. Sin embargo al aplicar un filtro Butterworth pasabajo de $0,01Hz$, cuatro polos y dos pasadas, las señales de bajo periodo se hacen evidentes, tal como lo muestra la figura 4.4.

Se debe rotar la señal horizontalmente para observarla de mejor manera ya que en la figura 4.3 está descompuesta en las componentes norte y este. Se puede encontrar cierto ángulo en el que la señal queda completamente contenida en 1 sólo canal del sismómetro, como se muestra en la figura 4.5.

Otro ejemplo es el que se observa en la estación B05A que registró el sismo Mw 4.8 cerca del Volcán Rainier en Washington, USA, ocurrido el 8 de Octubre del 2006 (Evento 2) en donde la

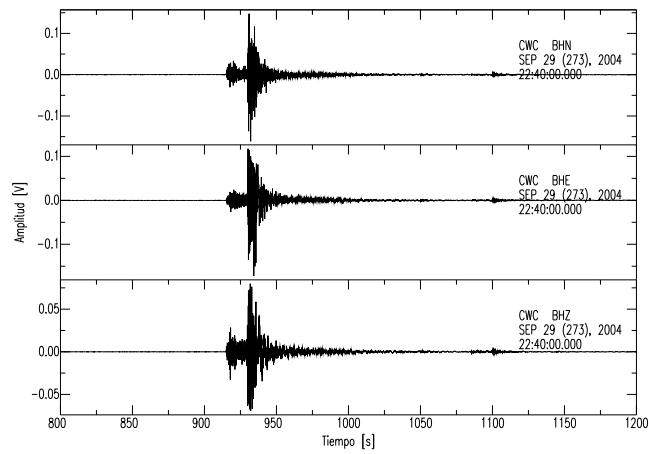


Figura 4.3: Sismograma del evento del 29 de Septiembre del 2004, registrado en la estación CWC.

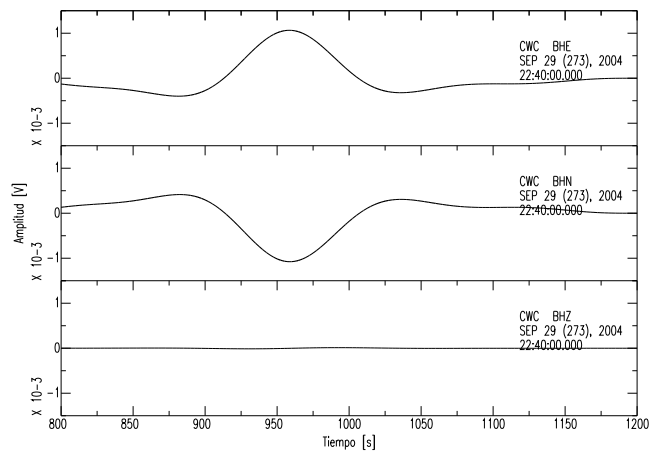


Figura 4.4: Sismograma de la figura 1.1, filtrado con un filtro pasabajo de 0,01Hz.

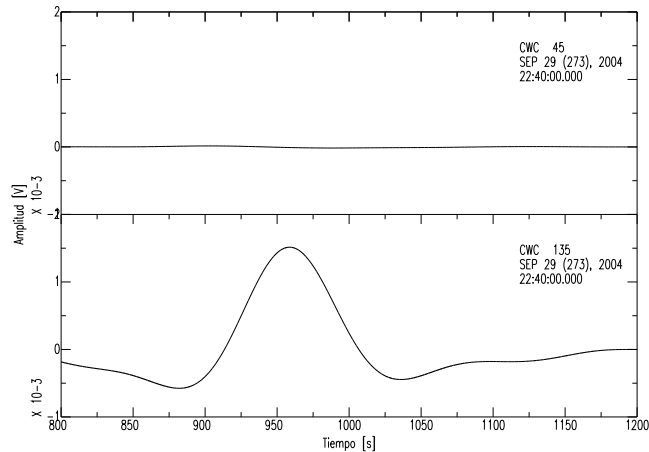


Figura 4.5: Sismograma filtrado y rotado 45 grados en sentido horario.

señal de baja frecuencia en la componente norte de la figura 4.6 es evidente sin aplicar el filtro pasabajo. Sin embargo, para calcular su polarización es necesario aplicar el filtro tal como muestra la figura 4.7.

De la figura 4.5 se infiere un vector de polarización de la perturbación en la dirección 135° al este del norte, la imagen 4.7 representa un vector de polarización que apunta en dirección sur, esto hace evidente una de las características que poseen las Ondas Solitarias: Polarización definida para el arribo de la onda a una cierta estación.

Se calcula el espectro de amplitud para cada una de las señales rotadas de las figuras 4.5 y 4.7, éstos se muestran en la figura 4.8 y 4.9. Se observa que hay una fuerte componente cercana a los 150s en el canal que contiene la señal (azul) mientras que en el otro canal horizontal no aparece este máximo (negro). Esta prueba es para asegurar que la señal quede completamente contenida en un solo canal.

En la siguiente sección se continúa aplicando esta prueba de espectros, para obtener información acerca de la naturaleza de la señal, en particular si éstas son debidas al terremoto o es un ruido de fondo. Las señales que se utilizan para el siguiente análisis son los sismogramas filtrados y rotados para tener la totalidad de la posible Onda Solitaria en un solo canal.

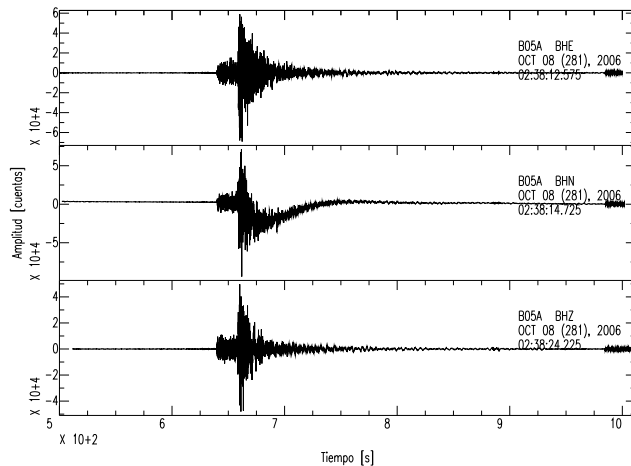


Figura 4.6: Sismograma del Evento 2, registrado por la estación sísmica B05A.

4.3. Prueba de Ruido

Es necesario hacer una prueba de ruido para comprobar si la señal que se observa es propia del terremoto o es parte del ruido ambiental de la estación. Esta prueba consiste en comparar la señal de interés con una serie temporal que contenga sólo ruido ambiente. Esto lleva a diferencias importantes en el contenido frecuencial de las señales si la perturbación estudiada es parte del terremoto.

Se utiliza para este estudio el canal que posee la señal completa, tal como se dejó estipulado en la sección anterior. Para las series temporales de ruido se utiliza un sólo canal ya que las diferencias en contenido frecuencial son mínimas entre las 3 componentes. Primero es necesario tener una ventana temporal que contenga en su totalidad al sismo en estudio y por otro lado, tener una ventana de tiempo del mismo largo sólo con ruido ambiente.

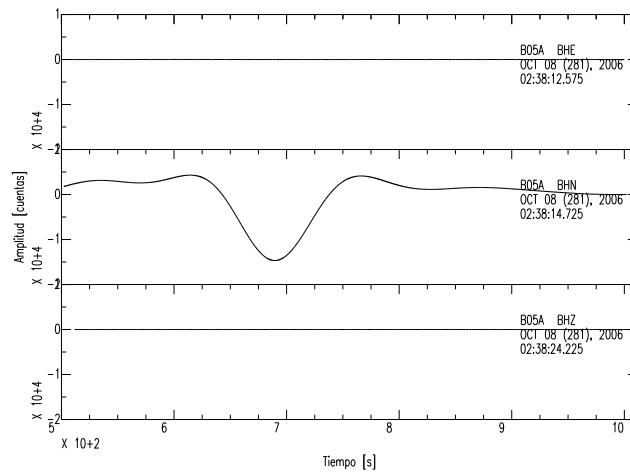


Figura 4.7: Sismograma del evento 2, registrado por la estación B05A y filtrado con un filtro pasa-bajo de 0.01 Hz.

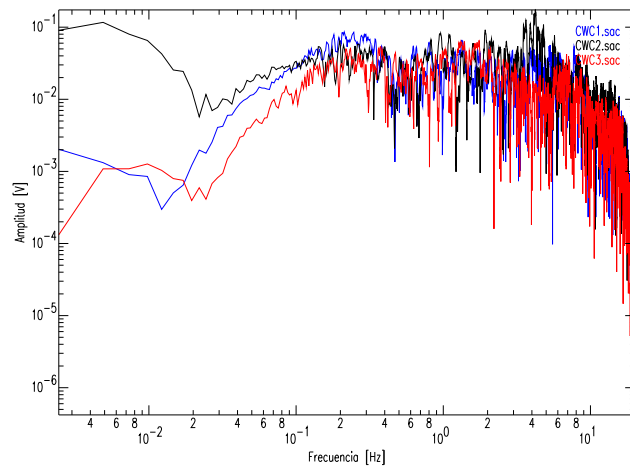


Figura 4.8: Espectros de canales en la estación CWC para el Evento 1. En negro: canal que contiene la señal de baja frecuencia. En azul y rojo: canales que no contienen la señal de baja frecuencia.

Los sismogramas proporcionados son de 1 hora de duración. Los sismos quedan completamente observados en la ventana 400 – 1600s, por ende, se utiliza como serie temporal de ruido la ventana 2400 – 3600s. Se quita la tendencia, el promedio y se hace cero el inicio y final de la señal para no introducir artefactos numéricos en los resultados. Se les aplica la Transformada de Fourier y al comparar las amplitudes para cada frecuencia se observa que para la posible onda solitaria existe un peak varias veces mayor que la amplitud del ruido para periodos cercanos a $f = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ Hz} \Rightarrow T \approx 150 \text{ s}$ que es precisamente el periodo de la perturbación de interés. En la figura 4.10 se muestra un peak cerca de tres veces más energía para la señal de interés que el nivel de ruido, mientras que para la figura 4.11 se tiene un peak cerca de mil veces más energía para la señal en cuestión que para el ruido ambiental. .

En general este comportamiento se observa para las 28 estaciones que registraron la perturbación de baja frecuencia en California al igual que para las 11 estaciones que observaron la señal en el evento del Mt. Rainier. Gracias a esto se puede decir, con un alto grado de certeza, que las señales son realmente parte del sismo y que no corresponden a ruido ambiental. Pese a esto, algu-

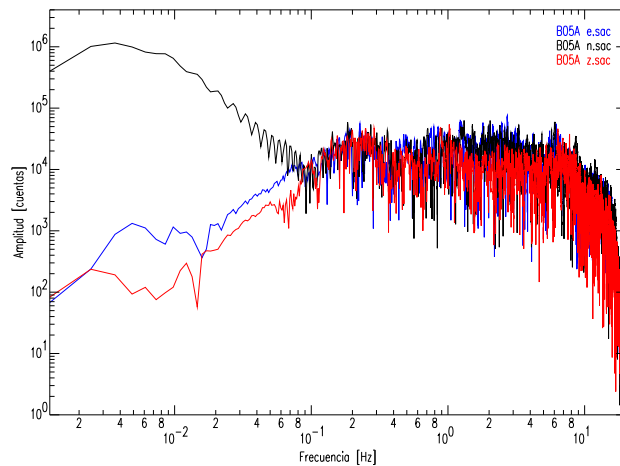


Figura 4.9: Espectros de canales en la estación B05A para el Evento 2. En negro: canal que contiene la señal de baja frecuencia. En azul y rojo: canales que no contienen la señal de baja frecuencia.

nas de las señales no son muy energéticas (tal como se observa en la estación CWC), su amplitud no es mucho mayor que la amplitud del ruido (sólo 3 veces) que es justo el múltiplo mínimo que se debe considerar para que la señal sea efectivamente ajena al ruido ambiental. Además las altas frecuencias (que poseen una amplitud del mismo orden que las bajas) son mucho más energéticas, es por esto que las posibles Ondas Solitarias no representan mayor riesgo para construcciones o la vida de las personas.

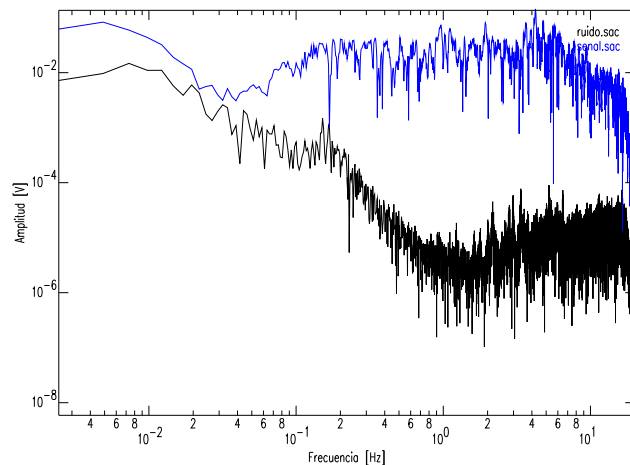


Figura 4.10: Comparación de espectros en la estación CWC (evento 1). En azul: espectro del sismo. En negro: ruido ambiental.

4.4. Patrones de Radiación

Según la teoría lineal existen ondas superficiales que se transmiten en un medio estratificado, son las llamadas ondas de Love y Rayleigh, éstas, presentan amplitud y polarización definida al arribar a una cierta estación que va a depender del mecanismo focal del evento. Al comparar los vectores de polarización de las señales observadas con los que el mecanismo focal predice para

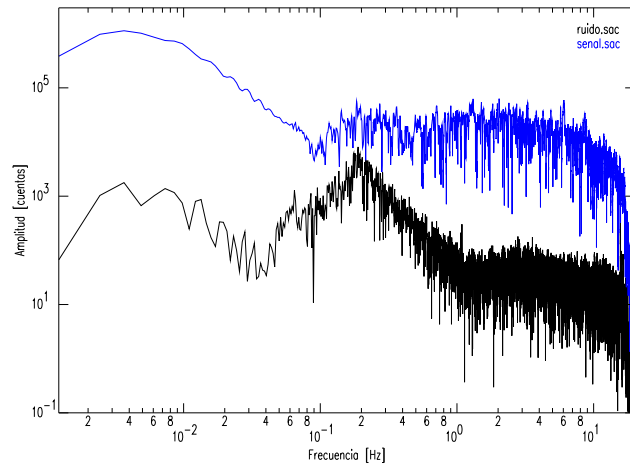


Figura 4.11: Comparación de espectros en la estación B05A (evento 2). En azul: espectro del sismo. En negro: ruido ambiental.

estas ondas, se debe obtener un resultado similar.

Antes de seguir con esta parte del estudio, se define el dominio en el cual se va a trabajar: Campo cercano, campo intermedio o campo lejano. Para lograr esto se debe tener en cuenta que los eventos que se estudian son $M_w \approx 5$, los cuales poseen un área de ruptura pequeña $A < 100km^2$. Por otro lado las perturbaciones que se analizan poseen longitudes de onda de: $\lambda = vT = 4,5 \frac{km}{s} 150s \approx 675km$, este valor es mucho más grande que el largo de la ruptura que produjo el terremoto $long.deonda \gg long.ruptura$, por lo que se puede utilizar la aproximación de campo lejano.

4.4.1. Amplitudes Normalizadas de Ondas de Love y Rayleigh

Una vez simplificado el problema, se calculan las amplitudes normalizadas y la polarización en el campo lejano para ondas superficiales de Love y Rayleigh a partir de las siguientes ecuaciones [5]:

$$\begin{aligned}
 P_L^2 &= (\cos \delta \sin \lambda \sin \delta \sin 2\phi + \cos \lambda \sin \delta \cos 2\phi)^2 + (-\cos \lambda \cos \delta \sin \phi + \sin \lambda \cos 2\delta \cos \phi)^2 \\
 P_R^2 &= (\sin \lambda \sin \delta \cos \delta)^2 + (\sin \lambda \cos 2\delta \sin \phi + \cos \lambda \cos \delta \cos \phi)^2 + \\
 &\quad (\cos \lambda \sin \delta \sin 2\phi - \sin \lambda \sin \delta \cos \delta \cos 2\phi)^2
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

En donde λ es el manteo de la falla, δ es el deslizamiento de la falla y $\phi = \phi_f - \phi_s$, con ϕ_f rumbo de la falla y ϕ_s rumbo de la estación en relación al hipocentro.

Con esta información se pueden calcular teóricamente las amplitudes normalizadas esperadas de los vectores de polarización para las ondas de Love y Rayleigh en cada estación. En los sismogramas horizontales de los eventos estudiados están contenidas tanto las supuestas ondas solitarias de Love como las de Rayleigh, por lo que, si las amplitudes esperadas son similares, se debe considerar la suma de ambos tipos de onda. Es decir, si la teoría presentada es correcta, las señales

registradas son una combinación lineal de dos ondas solitarias en distintos ejes (longitudinal para el caso de Rayleigh y transversal para el caso de Love). Es posible establecer una combinación lineal de ambas señales ya que no interactúan entre sí, lo hacen en distintos canales del sismómetro.

Se calculan las amplitudes teóricas normalizadas a partir de los parámetros que definen el mecanismo focal y en la tabla 4.1. Luego se obtiene la información necesaria para definir cuál de las Ondas Solitarias es la que debiera dominar en los registros, esto se muestra en las tablas 4.2 (evento 1) y 4.3 (evento 2). La onda será dominante cuando su amplitud normalizada sea al menos 0.25 más que la otra onda. Si domina la Onda de Love el vector de polarización debe ser transversal a la propagación de la onda, al contrario, si domina la Onda de Rayleigh, el vector de polarización debe ser paralelo (o antiparalelo) a la propagación de la onda.

Evento	California	Rainier
Latitud	35,41°	46,90°
Longitud	-118,73°	-121,58°
Profundidad (km)	12	3
Rumbo	293°	145°
Manteo	71°	74°
Deslizamiento	-169°	127°
Momento Sísmico (Dyna-cm)	$4,26 \cdot 10^{23}$	$3,55 \cdot 10^{22}$

Tabla 4.1: Resumen eventos utilizados en el estudio.

En la siguiente sección se muestra cómo se relaciona la información obtenida en esta sección con los vectores de polarización de las señales de interés para cada evento en cada estación.

4.4.2. Polarizaciones

En las figuras 4.12 y 4.13, se han graficado los vectores de polarización de las señales de baja frecuencia para los 2 eventos en estudio. Si bien no se puede observar un patrón definido en las polarizaciones de las señales, se observa que los vectores en su mayoría son radiales o tangenciales, cumpliendo con lo establecido teóricamente.

Las señales asociadas con ondas solitarias no se observan en todas las estaciones que registraron el sismo, sólo en las que se muestran en las figuras 4.12 (28 de 148 estaciones que registraron el sismo) y 4.13 (11 de las 189 que registraron el sismo) esto se debe a que se deben cumplir las condiciones de propagación de la onda solitaria en el punto de observación y durante todo el trayecto de la onda para llegar ahí, las diferencias en la Geología principalmente hacen que sea muy complicada la observación de estas señales.

Se espera que la geología de las rocas por donde se propaga exitosamente la Onda Solitaria sea concordante a lo esperado teóricamente, dadas las consideraciones que se hacen en el capítulo 3 (rocas que experimentan un endurecimiento a medida que se aumentan los esfuerzos aplicados). En una etapa posterior a este trabajo se debe estudiar la Geología de la zona oeste de USA.

Estación	Amplitud de Love	Amplitud de Rayleigh	Onda Dominante
ADO	0.763	0.641	Ambas
ALP	0.109	0.990	Rayleigh
BTP	0.469	0.879	Rayleigh
CGO	0.910	0.405	Love
CHF	0.159	0.983	Rayleigh
CLC	0.338	0.937	Rayleigh
CWC	0.965	0.247	Love
GSC	0.803	0.589	Ambas
ISA	0.816	0.571	Ambas
JRC2	0.548	0.832	Rayleigh
LCG	0.423	0.902	Rayleigh
LCP	0.360	0.929	Rayleigh
LDR	0.415	0.906	Rayleigh
LGU	0.930	0.358	Love
LJR	0.914	0.397	Love
LRL	0.645	0.759	Ambas
MGE	0.762	0.641	Ambas
MLAC	0.680	0.728	Ambas
MPM	0.450	0.889	Rayleigh
MWC	0.097	0.992	Rayleigh
OSI	0.721	0.687	Ambas
PAS	0.173	0.981	Rayleigh
SBC	0.805	0.587	Ambas
TEH	0.932	0.351	Love
TFT	0.340	0.936	Rayleigh
TIN	0.945	0.316	Love
VES	0.311	0.947	Rayleigh
WBS	0.434	0.897	Rayleigh

Tabla 4.2: Valores teóricos de Amplitudes de ondas de Love y Rayleigh para el evento 1 y clasificación para definir la señal que debe dominar.

Para el evento 1, se tiene una concordancia en 19 de las 28 estaciones que observaron la señal de baja frecuencia, mientras que para el evento 2, la concordancia es en 6 de las 11, estos resultados se resumen en los tablas 4.4 y 4.5.

Este resultado, si bien no es óptimo, dice que es posible que las señales observadas sean efectivamente Ondas Solitarias de Love y Rayleigh. Los resultados no concordantes se podrían relacionar con diferencias importantes en las amplitudes debido al coeficiente de no linealidad γ_L o γ_R , a soluciones no-doble cupla del tensor de momento que cambiaría las polarizaciones esperadas para el sismo o a diferencias grandes, y poco previsible, de la teoría elástica no lineal. Sin embargo, también podrían deberse a un comportamiento anómalo no lineal del sismómetro [10] debido algún efecto ajeno al sismo. Cabe destacar además que todos los sensores son banda ancha, principalmente Guralp y Streckeisen, por lo que la explicación de Delorey et al (2008), evidenciaría un problema grave en la instalación y/o funcionamiento de este tipo de sensores.

Estación	Amplitud de Love	Amplitud de Rayleigh	Onda Dominante
B05A	0.521	0.549	Ambas
C06A	0.409	0.637	Ambas
E05A	0.519	0.551	Ambas
E07A	0.423	0.628	Ambas
F04A	0.224	0.723	Rayleigh
C04A	0.394	0.646	Ambas
C05A	0.582	0.485	Ambas
C09A	0.403	0.641	Ambas
E04A	0.367	0.662	Rayleigh
K05A	0.595	0.469	Ambas
M05C	0.600	0.462	Ambas

Tabla 4.3: Valores teóricos de Amplitudes de ondas de Love y Rayleigh para el evento 2 y clasificación para definir la señal que debe dominar.

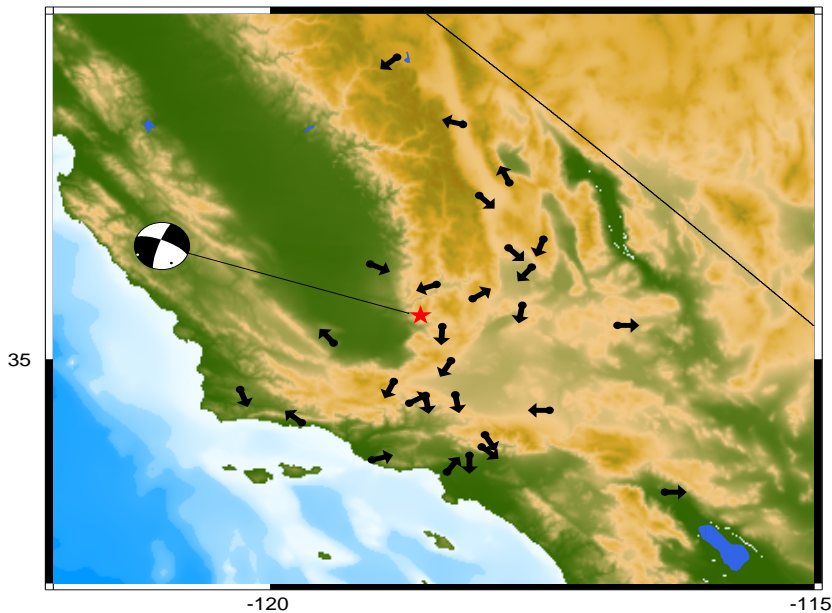


Figura 4.12: Polarizaciones observadas para el evento 1.

Otro punto importante es que no se observan señales en el eje vertical, esto se puede explicar debido al grado de libertad que existe en el movimiento de la superficie, es decir, como la superficie se mueve libremente, no se endurece la roca a medida que se aumentan los esfuerzos, por lo tanto, no se cumplen las condiciones necesarias para la propagación de las ondas en ese eje. Las Ondas Solitarias de Rayleigh representan sólo un movimiento longitudinal y horizontal.

Otra posible explicación es que el medio no lineal sea intrínsecamente anisótropo, y que además en la componente vertical no exista una reología no lineal lo que anularía la solución de onda solitaria en esta componente, o bien que es extremadamente no lineal, lo que reduciría la amplitud de la onda, haciéndola tender a cero.

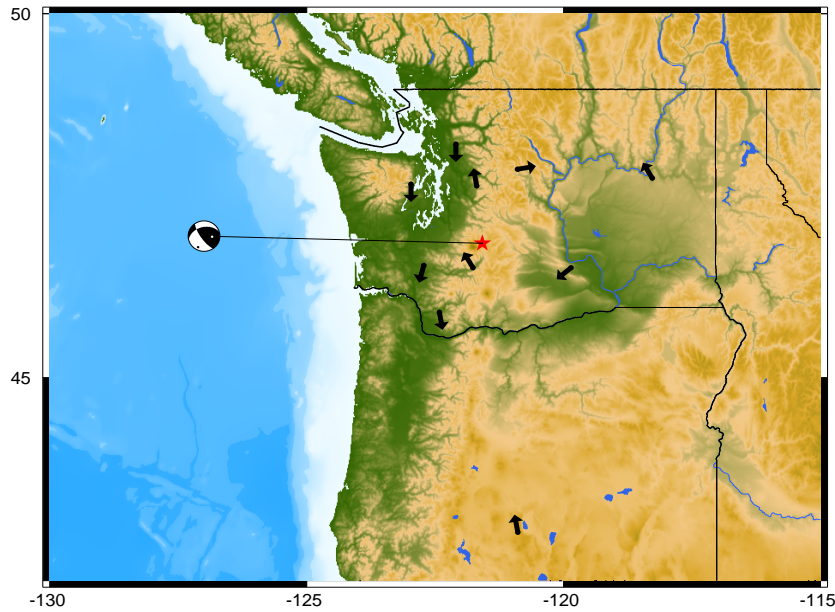


Figura 4.13: Polarizaciones observadas para el evento 2.

Estación	Onda dominante	Concordancia	Estación	Onda dominante	Concordancia
ADO	Ambas	Concordante	LJR	Love	No Concordante
ALP	Rayleigh	Concordante	LRL	Ambas	No Concordante
BTP	Rayleigh	Concordante	MGE	Ambas	Concordante
CGO	Love	Concordante	MLAC	Ambas	Concordante
CHF	Rayleigh	Concordante	MPM	Rayleigh	Concordante
CLC	Rayleigh	Concordante	MWC	Rayleigh	No Concordante
CWC	Love	No Concordante	OSI	Ambas	Concordante
GSC	Ambas	No Concordante	PAS	Rayleigh	Concordante
ISA	Ambas	Concordante	SBC	Ambas	Concordante
JRC2	Rayleigh	No Concordante	TEH	Love	Concordante
LCG	Rayleigh	Concordante	TFT	Rayleigh	No Concordante
LCP	Rayleigh	No Concordante	TIN	Love	Concordante
LDR	Rayleigh	No Concordante	VES	Rayleigh	Concordante
LGU	Love	Concordante	WBS	Rayleigh	Concordante

Tabla 4.4: Ondas dominantes en cada estación para el evento 1 (teóricas) y su concordancia con los datos.

4.5. Sismogramas Sintéticos Lineales

En esta sección se utilizan los parámetros del sismo: mecanismo de foco, momento sísmico y distancias fuente - receptor, además de los azimuth de la falla y el azimuth entre el epicentro y la estación, para poder modelar los sismogramas sintéticos esperados en cada una de las estaciones. Con este estudio se espera saber si la teoría clásica de terremotos predice estas señales de baja frecuencia o no.

Se asume un modelo de estructura de velocidades como el dado en la sección 3.1: una capa de

Estación	Onda dominante	Concordancia
B05A	Ambas	Concordante
C06A	Ambas	No Concordante
E05A	Ambas	Concordante
E07A	Ambas	No Concordante
F04A	Rayleigh	Concordante
C04A	Ambas	Concordante
C05A	Ambas	No Concordante
C09A	Ambas	No Concordante
E04A	Rayleigh	Concordante
K05A	Ambas	No Concordante
M05C	Ambas	Concordante

Tabla 4.5: Ondas dominantes en cada estación para el evento 2 (teóricas) y su concordancia con los datos.

$35km$ con $\beta_1 = 3500 \frac{m}{s}$ sobre un semiespacio con $\beta_2 = 4500 \frac{m}{s}$, se consideran los dos eventos antes mencionados que son resumidos en la tabla 4.6:

Evento	California	Rainier
Latitud	$35,41^\circ$	$46,90^\circ$
Longitud	$-118,73^\circ$	$-121,58^\circ$
Profundidad (km)	12	3
Rumbo	293°	145°
Manteo	71°	74°
Deslizamiento	-169°	127°
Momento Sísmico (Dyna-cm)	$4,26 \cdot 10^{23}$	$3,55 \cdot 10^{22}$

Tabla 4.6: Resumen eventos utilizados en el estudio.

Se calcula una serie temporal de aproximadamente $200s$ para que contenga toda la información de la señal de baja frecuencia, además del arribo de las ondas P, S y ondas superficiales. Se observa en la figura 4.14 y 4.15 una señal de baja frecuencia pero de aproximadamente $60s$, la cual corresponde a Ondas Superficiales lineales, muy energéticas.

Por lo tanto, es claro que el mecanismo focal y la Ley de Hooke no predicen la presencia de las señales de interés que se transmiten en un medio elástico.

4.6. Gráficos Distancia Epicentral vs Tiempo

Una visión contraria a la propuesta en este trabajo en relación a estas señales de baja frecuencia es la que plantea Delorey et al [10] en su artículo del 2008, "Broadband Sensor Nonlinearity During Moderate Shaking", donde definen estas señales como respuestas instrumentales debido

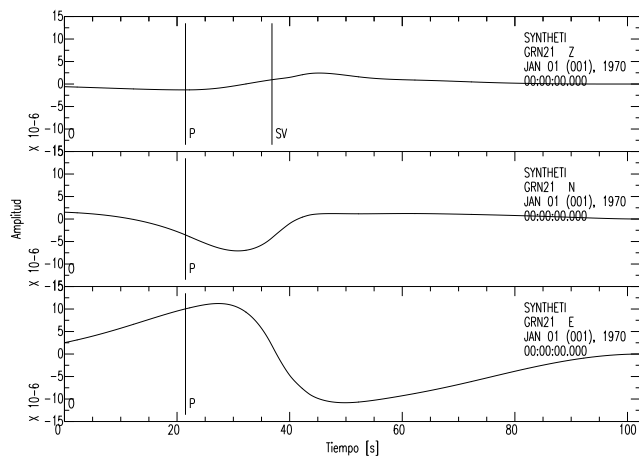


Figura 4.14: Sismograma sintético para evento 1 observado en estación CWC, filtrado con filtro pasabajo 0.01 Hz.

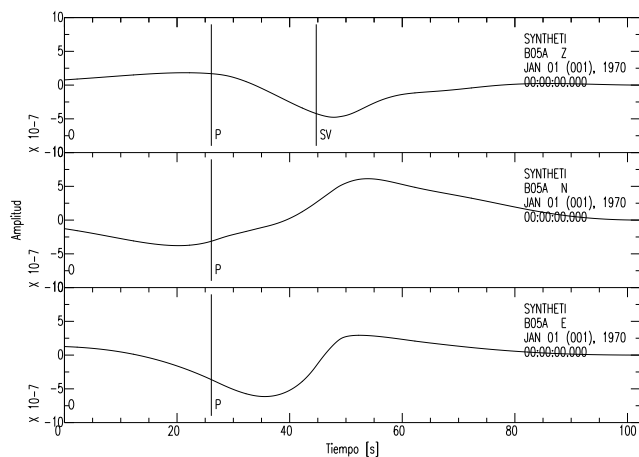


Figura 4.15: Sismograma sintético para evento 1 observado en estación CWC, filtrado con filtro pasabajo 0.01 Hz.

a un cambio en la inclinación del instrumento, idea que ha sido aceptada por variados grupos de investigación.

En esta sección se realizan gráficos distancia vs tiempo que ayudaron a establecer una velocidad relativamente constante para las perturbaciones, tal como se plantea en este trabajo. Se debe tener en cuenta que teóricamente se trabaja con un medio homogéneo, sin embargo, la tierra es un medio muy heterogéneo, las diferencias en las constantes no lineales y de dispersión conllevan a diferencias en las velocidades de propagación, esto significa que se debe considerar un cierto error en la velocidad promedio de la Onda Solitaria si existe. Se debe encontrar el valor más representativo de esta velocidad.

Una vez calculado el hipocentro del evento y teniendo en cuenta las coordenadas de cada estación se puede crear el gráfico mostrado en la figura 4.16 y 4.17, éste ilustra el arribo de las señales a la estación en relación a su distancia epicentral en kilómetros.

Las figuras 4.16 y 4.17 muestran los gráficos de distancia vs tiempo para todas las estaciones

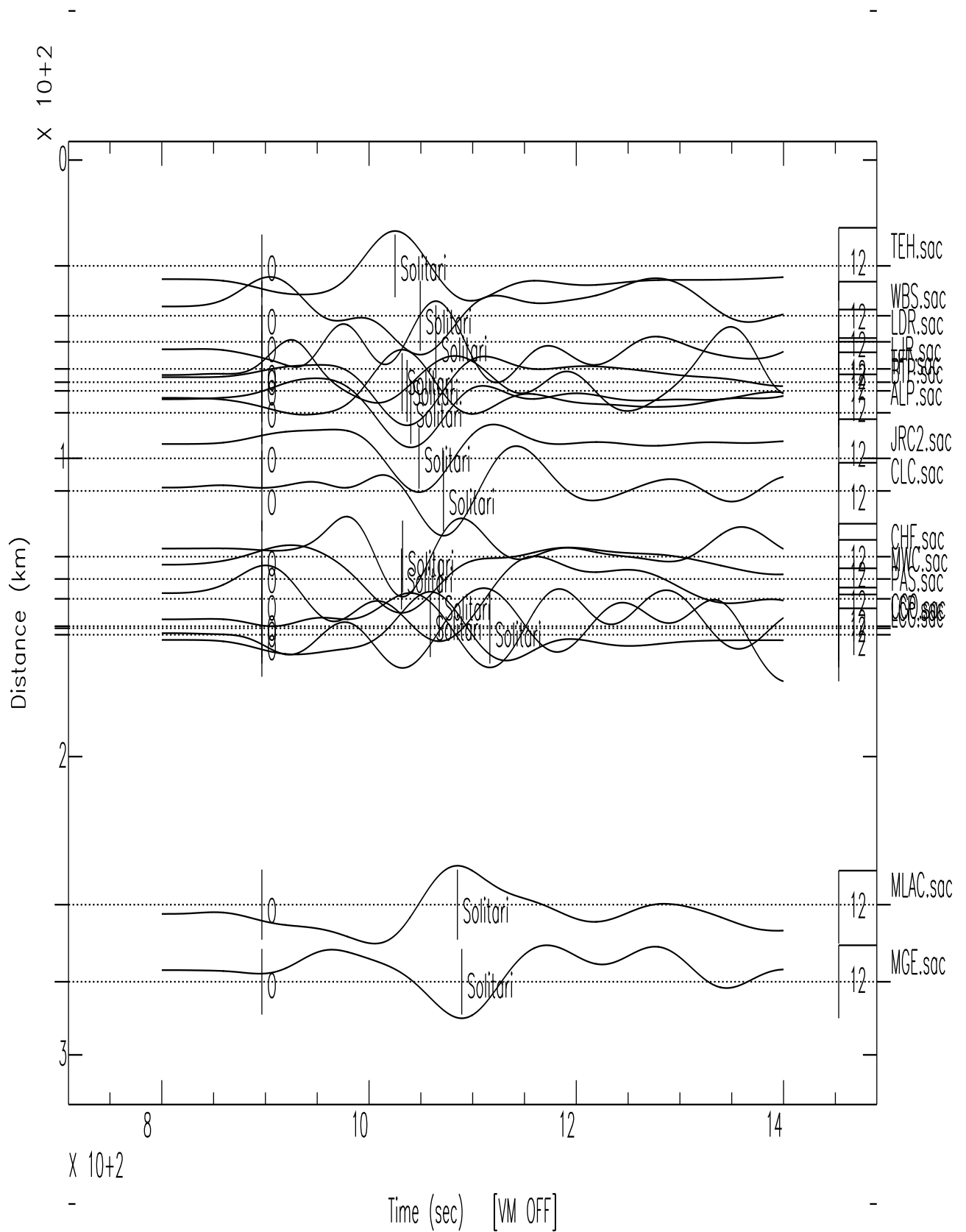


Figura 4.16: Gráficos distancia vs tiempo (evento 1). Se observa el arribo de lo que se interpreta como onda solitaria.

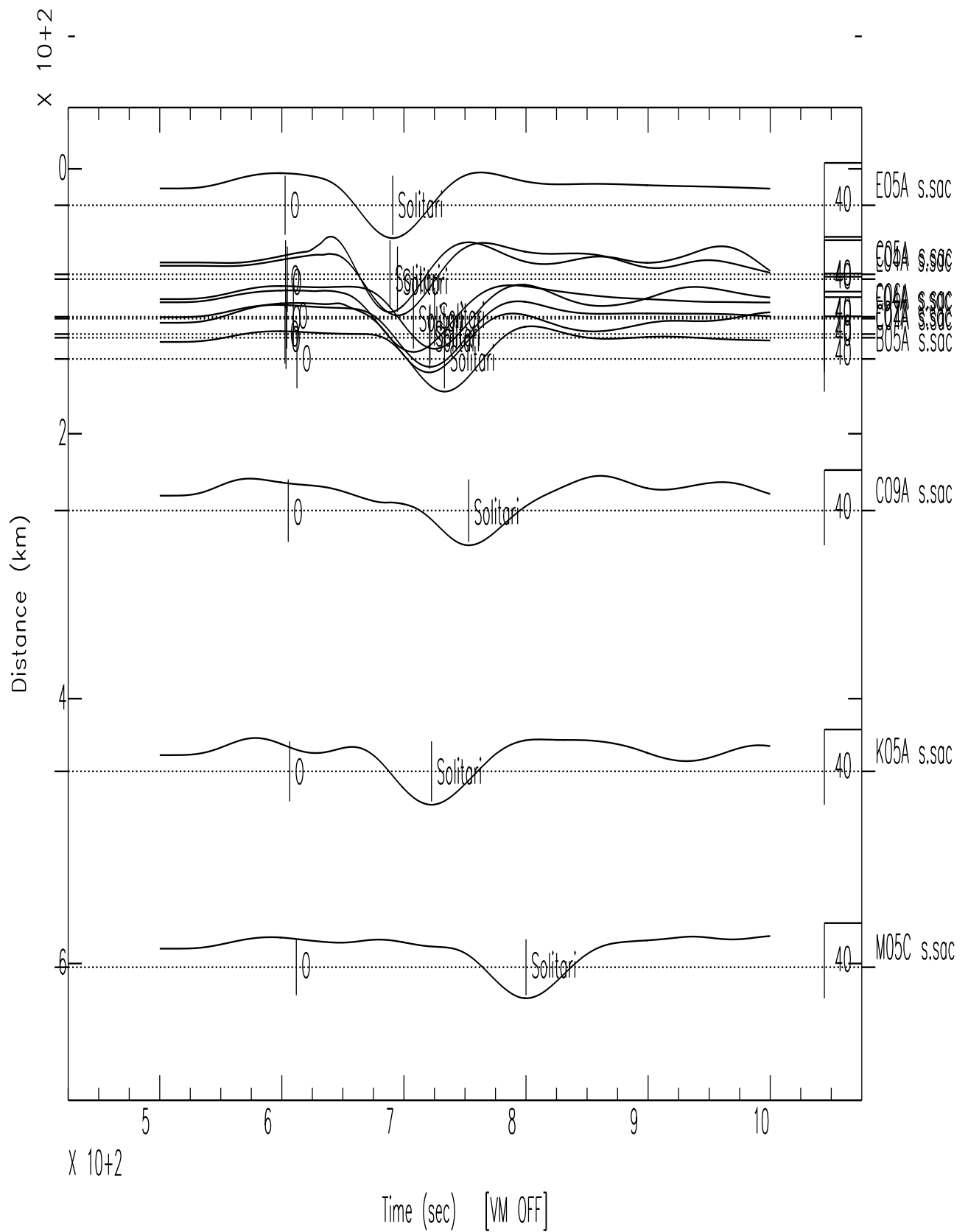


Figura 4.17: Gráficos distancia vs tiempo (evento 2). Se observa el arribo de lo que se interpreta como onda solitaria.

que registraron la supuesta onda solitaria, la marca “Solitari” muestra el peak de esta señal. Estas marcas evidencian una velocidad aproximadamente constante de propagación igual a $4,79 \pm 0,2 \frac{km}{s}$ para el evento 1, y de $4,58 \pm 0,2 \frac{km}{s}$ para el evento 2. Estos valores se muestran con los errores asociados al cálculo, que están relacionados, además de la imprecisión asociada al marcar el arribo de la onda, a las diferencias en la reología de las rocas y cambios en los parámetros del medio a medida que la Onda Solitaria se propaga.

Este resultado es tremendamente importante para validar la hipótesis y descarta totalmente que las señales sean la manifestación de una deformación del suelo ya sea local o regional debido a una inclinación del terreno. Si este fuera el caso, la perturbación no presentaría una velocidad relativamente constante, se deformaría el suelo al arribo de la onda más energética, ya sea esta la onda P, S o alguna de las ondas superficiales. Este estudio es necesario pero no suficiente ya que demuestra que la señal es un fenómeno ondulatorio, pero no se puede establecer que es una Onda Solitaria, aunque muchas de sus características sean condordantes con la teoría presentada.

4.7. Observaciones en Chile

Durante 7 meses luego del terremoto Mw 8.8 ocurrido el 27 de febrero del 2010, se registraron señales sísmicas que corresponden a réplicas de este terremoto. Se analizaron estas señales para ver si hay señales de baja frecuencia dentro de las réplicas en alguna estación. Se inspeccionaron cerca de un mes de datos de estaciones de la red temporal Chile Ramp, la verdad es que muy pocas estaciones fueron instaladas en roca, debido a la Geología que existe en la zona cercana a la ruptura del terremoto.

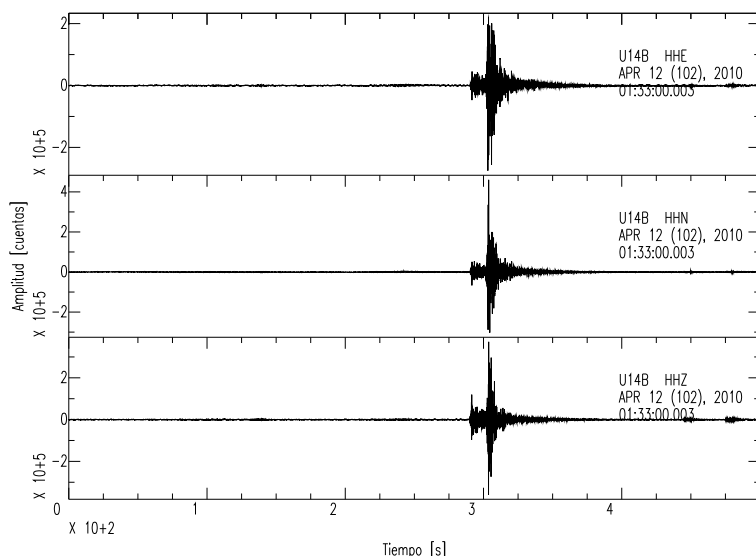


Figura 4.18: Señales de baja frecuencia (en bruto) registradas en Chile luego del terremoto ocurrido el 27 de febrero del 2010.

Se observan algunas señales de baja frecuencia (muy pocas) con periodos cercanos a 100s y que no arriban a la estación un poco antes que la onda S, esto significa que no corresponden a las

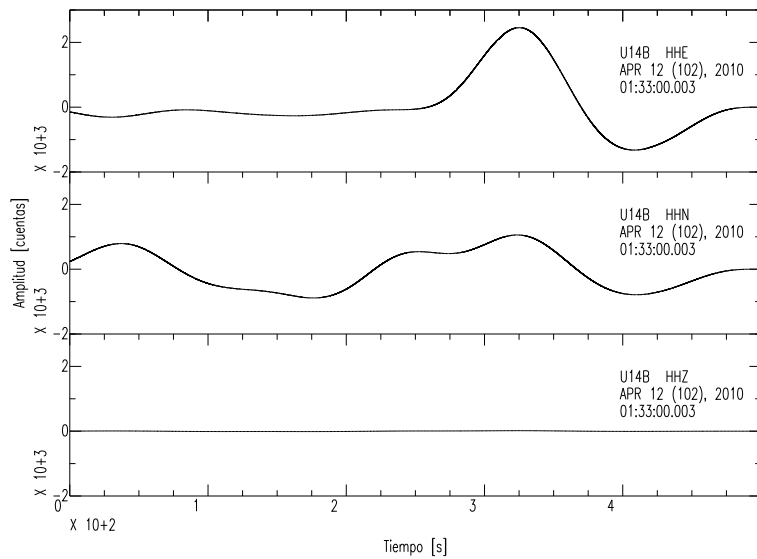


Figura 4.19: Señales filtradas registradas en Chile luego del terremoto ocurrido el 27 de febrero del 2010.

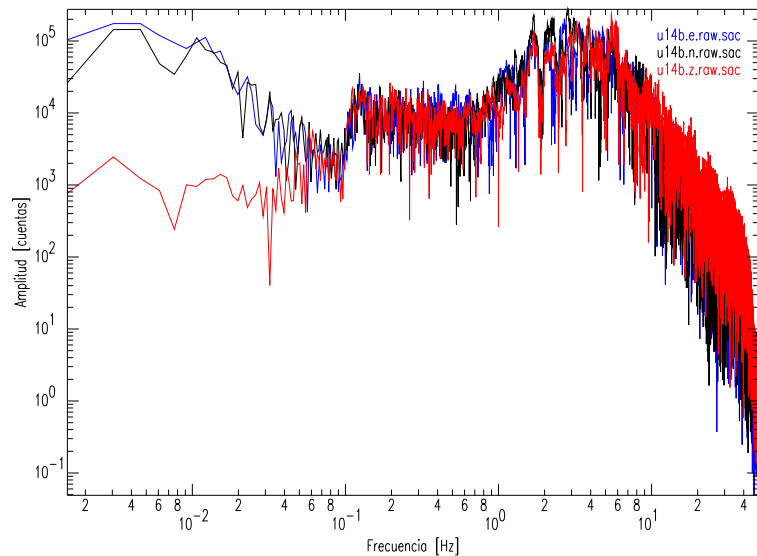


Figura 4.20: Espectro de las señales de baja frecuencia registradas en Chile luego del terremoto ocurrido el 27 de febrero del 2010.

señales que se desea estudiar, un ejemplo de estas señales es la que se muestra en las figuras 4.18 (sismograma bruto), 4.19 (sismograma filtrado) y 4.20 (espectro de amplitud).

Se pensó que las réplicas del terremoto del Maule en 2010, sería un gran nicho para observar las señales de baja frecuencia estudiadas en este trabajo, sin embargo, no se registraron señales del mismo tipo del esperado. Lo que puede explicarse por 2 cosas:

- Geología de la zona: Se espera que las señales se observen en las estaciones cercanas al epicentro o área de ruptura, por lo tanto, se debe estudiar la Geología de la zona costera del Maule y Bio Bio, la cual presenta en superficie suelo, no rocas. Este suelo no se comporta como un medio no lineal con endurecimiento, por lo tanto, no es posible que se observen estas

señales en las estaciones instaladas cerca de la costa. Se podrían observar en zonas rocosas como cordilleras, pero ya se aleja mucho del epicentro, además la Geología por donde se propagaría la onda para llegar a zonas cordilleranas no permite la transmisión exitosa de la onda solitaria.

- Profundidad del evento: Esta teoría tiene un sustento más estadístico que teórico, ya que el 100 % de las señales registradas provienen de eventos corticales (superficiales, no más de 15km de profundidad) y no de sismos interplaca como las réplicas del evento del 2010, cuyos hipocentros rondan los 30km de profundidad.

Capítulo 5

Conclusiones y Discusión

Las Ondas Solitarias han sido estudiadas en varias ramas de la física cuando teóricamente se suponen medios de propagación no lineales y homogéneos, esto es válido por ejemplo: en fluidos, en los cuales la propagación de la onda fue descrita por la ecuación de Korteweg-De Vries.

Se estudió tanto teórica como observacionalmente la existencia de Ondas Solitarias en medios sólidos elásticos estratificados. Teóricamente se encontraron ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de partículas para ondas superficiales SH (Love) y P-SV (Rayleigh), para esto es necesario asumir un medio no lineal y estratificado (con estratos homogéneos) para poder representar de buena manera una Onda Solitaria. Los modelos entregan ciertas condiciones para la transmisión de estas ondas, para el caso de ondas solitarias de Love:

- El medio debe responder de manera no lineal y debe cumplir con endurecimiento de roca al aumentar los esfuerzos aplicados.
- Onda con velocidad de fase constante y mayor a la velocidad de la onda S.
- Longitud de onda mucho mayor a las dimensiones del área de ruptura.
- Desplazamiento permanente luego del paso de las Ondas Solitarias.
- Amplitud de las ondas inversamente proporcional a la raíz cuadrada del coeficiente de no linealidad.
- Ondas poco energéticas, no producen grandes daños a construcciones ni a las personas.

Debido a la gran cantidad de condiciones que se tienen para la propagación se explica la poca observación de estas ondas. Las condiciones se deben cumplir en el punto de observación y en donde se propaga la onda anteriormente.

Para las Ondas Solitarias de Rayleigh:

- El coeficiente de dispersión es siempre positivo y un orden de magnitud mayor al de dispersión de Love, esto significa que el coeficiente γ_R es siempre positivo, este resultado posee las mismas implicancias que para las ondas de Love, las ondas se observan en zonas donde el

medio se vuelva más competente a medida que se aumentan los esfuerzos. El coeficiente η_R puede ser positivo o negativo, posee la misma forma de onda para compresión o dilatación, sin embargo, para compresión el paso de la onda es más rápido que para dilatación lo que se traduce en una perturbación de menos periodo para la compresión. Los desplazamientos producidos por esta onda se pueden observar en un sismo cuando el coeficiente $\gamma_R \approx 10^{20} \frac{m^2}{s^2}$.

- Las Ondas Solitarias de Rayleigh tienden a poseer mayor amplitud.
- Las señales se observarían en zonas competentes, esto concuerda con el coeficiente de no-linealidad positivo, con las observaciones y con la teoría y las observaciones de las Ondas Solitarias de Love.

La teoría para ambas Ondas desemboca en soluciones que poseen una gran correspondencia entre sí, lo que es muy bueno para la validación de la teoría desarrollada, además están en concordancia con los datos, lo cual respalda fuertemente la hipótesis.

Las señales de baja frecuencia analizadas en este trabajo corresponden a fenómenos ondulatorios que arriban a la estación un pequeño tiempo antes que el paquete de la onda S, si bien son poco energéticos, no corresponden a ruido ambiental. Por otro lado, representan una onda que se transmite con velocidad relativamente constante, sólo puede variar por las diferencias en la geometría del medio estratificado o por variaciones en los valores de los coeficientes de no-linealidad.

Por otro lado, las polarizaciones no están en buena concordancia con el mecanismo de foco de los eventos, sin embargo, para una gran cantidad de observaciones éstas son concordantes con la onda que domina en cada estación (movimiento de partículas longitudinal o transversal). Estas diferencias en los vectores de polarización se pueden deber a grandes y poco previsibles cambios en las respuestas elásticas del medio no-lineal (por ejemplo: γ_L puede hacer que la amplitud de la onda aumente, mientras que γ_R en ese punto puede hacer que la amplitud de la onda disminuya) o a soluciones del tensor de momento con componente no-doble cupla dominante.

En general, la teoría de las Ondas Solitarias es autosustentable y la comprobación con los datos entrega una gran seguridad acerca de la existencia de las ondas, en desmedro de la teoría cualitativa aceptada hasta el momento que explica las señales por un cambio en la inclinación del instrumento. Si bien, este trabajo muestra que algunas características de las señales concuerdan con lo obtenido teóricamente, no puede entregar una explicación definitiva ya que faltan estudios de la Geología del lugar o de las propiedades de medios elásticos.

En Chile, se observaron señales que poseen periodos grandes pero que no poseen la misma forma de onda de las señales de interés. Esto puede deberse a que:

- La geología de la zona no cumple con las condiciones de propagación de ondas (zona de la costa de Bio Bio y Maule corresponde a sedimentos y rocas muy erodadas).
- La cobertura acimutal para sismos interplaca en Chile no puede lograrse de buena manera, ya que no se cuenta con sensores en el océano, esto sería un punto interesante a seguir, observar si la corteza oceánica responde de la misma manera..

- La profundidad de los eventos no permite la propagación de estas ondas.

Este último punto es importante, los sismos en los que se observan estas señales de largo periodo (eventos 1 y 2) son bastante superficiales, mientras que los sismos interplaca (réplicas del sismo del Maule) son de mucha mayor profundidad. Eventos en donde se observan las señales estudiadas alrededor del mundo muestran siempre poca profundidad, en su totalidad son sismos corticales.

La propagación de estas ondas por la Tierra podrían entregar información acerca de la reología de la zona, ya que se deben cumplir ciertas condiciones para que ocurra, además de su aplicación a distintos ambientes tectónicos en donde las deformaciones superficiales sean importantes y permanentes, como arcos volcánicos o zonas de subducción, teniendo claro que sólo se pueden observar en sismos corticales.

Capítulo 6

Glosario

Símbolo	Cantidad Física que Representa
\underline{x}	Vector de posición
\underline{u}	Vector de desplazamiento
$\underline{\delta x}$	Diferencial vectorial de posición
δx_i	i-ésima componente del diferencial vectorial de posición
δx_i	i-ésima componente del diferencial vectorial de posición
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	Tensor de Deformaciones
ε_{ij}	ij-ésima componente del Tensor de Deformaciones
$Z_{i,j}$	Derivada j-ésima de la i-ésima componente del vector Z (genérico)
ε_{ijk}	Tensor de Levi-Civita
\underline{T}	Vector de Tracción
$\underline{\delta S}$	Elemento de área de una superficie
\underline{n}	Vector normal a la superficie en estudio
$\underline{\tau}$	Tensor de Esfuerzos
ρ	Densidad del medio
V	Volumen
\underline{f}	Fuerza externa
\dot{Z}	Derivada temporal de la cantidad Z (genérico)
Z'	Derivada espacial de la cantidad Z (genérico)
Q	Calor
W	Energía interna
S	Entropía
Tr	Traza
λ, μ	Constantes de Lamé
A, B, C, D, E, F, G	Constantes de no linealidad
δ_{ij}	Delta de Kronecker
SH	Ondas S con polarización horizontal

Tabla 6.1: Símbolos utilizados en la tesis.

Símbolo	Cantidad Física que Representa
P-SV	Mezcla de Ondas P y S con polarización no horizontal
τ	Coordenada de tiempo
\underline{g}	Gravedad
k	Número de Onda
T	Periodo
\hat{T}	Temperatura
H	Profundidad de la capa sobre el semiespacio
ω	Frecuencia angular
δ_L	Coeficiente dispersivo ondas de Love
u_{Love}	Desplazamiento debido a onda de Love lineal
α	Velocidad onda P
β	Velocidad onda S
c	Velocidad de fase de la onda en estudio
v_R	Velocidad onda de Rayleigh lineal
δ_R	Coeficiente dispersivo onda de Rayleigh
A_0, B_0, C_0, D_0, E_0	Funciones de la velocidad de fase en ondas Rayleigh
γ_L	Coeficiente no lineal de Love
γ_R	Coeficiente no lineal de Rayleigh
η_R	Coeficiente no lineal de Rayleigh
u_L	Desplazamiento debido a Onda Solitaria de Love
u_R	Desplazamiento debido a Onda Solitaria de Rayleigh
Φ, Ψ	Términos no lineales en ecuaciones diferenciales acopladas
ξ	$x - vt$
$y = u'_L$	Derivada espacial de la Onda Solitaria de Love

Tabla 6.2: Símbolos utilizados en la tesis.

Bibliografía

- [1] Bataille K. y Lund F. (1982) Nonlinear waves in elastic media *North-Holland Publishing Company, Physica 6D*, 95-104.
- [2] Maugin G. (2007) Nonlinear surface waves and solitons. *The European Physical Journal, special topics*, 147, 209-230
- [3] Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D. y Morris H.C. (1982) Solitons and Non-linear Wave Equations *Academic Press Inc.*,
- [4] Aki, K. y Richards P. (1980) Quantitative Seismology *W.H. Freeman and Company, San Francisco, Calif.*
- [5] Ben-Menahem A. y Jit Singh S. (1981) Seismic Waves and Sources *Springer-Verlag*
- [6] Battaglia J., Aki, K. y J.P. Montagner (2000) Tilt signals derived from a GEOSCOPE VBB station on the Piton de la Fournaise volcano *Geophys. Res. Lett.*, 27, 605-608.
- [7] Zahradník J. y Plešinger A. (2005) Long-period pulses in broadband records of near earthquakes *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 95, 1928-1939.
- [8] Wielandt E. y Forbriger T. (1999) Near-field seismic displacement and tilt associated with explosive activity of Stromboli. *Annali di Geofisica*, 42, 407-416.
- [9] Zahradník J. y Plešinger A. (2010) Toward Understanding Subtle Instrumentation Effects Associated with Weak Seismic Events in the Near Field *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 100, 59-73.
- [10] A. Delorey Et. Al. (2008) Broadband sensor nonlinearity during moderate shaking *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 98, 1595-1601.

Anexo A

Programa que modela la forma de onda de las Ondas Solitarias.

```
parameter (max=4000)
double precision u(10000,2)
real x1(max),x2(max),x3(max),x4(max),x5(max)
real x6(max),x7(max),x8(max),x9(max)
double precision us,uss,ussss
character file*5,com*1

common /sigpar/ delta,nsig

h=10.    ! 1 ? km
c=5.     ! km/s
c b=0.01218 ! km**4/s**2
alfa=0.20 ! 0.2 ?
c b=0.
c g=0.

write(*,*) ' b ?'
read(*,*) b

source = 1.0
mm=2000
ms=mm/2
ll=max

dt=alfa*h/c
f1=(c*dt/h)**2/12.
f2=b*(dt/h/h)**2
f3=8.*b*(dt/h)**2/(12. )**3

write(*,*) f1,f2,f3
```

```

write(file(1:4),'(a4)') 'test'

delta=100.*dt
nsig=2
ny=5
ndy=100
nfirst=100
npts= ndy

i1=1
i2=2
c time loop:
do l=1,ll

c advance one time step:
do m=3,mm-2

us=u(m-2,i2)-u(m+2,i2)+8.*(u(m+1,i2)-u(m-1,i2))
uss=-(u(m-2,i2)+u(m+2,i2))+16.*(u(m+1,i2)+u(m-1,i2))
uss = uss -30.*u(m,i2)
usssss=u(m-2,i2)+u(m+2,i2)-4.*(u(m+1,i2)+u(m-1,i2))
usssss = usssss +6.*u(m,i2)

u(m,i1)=-u(m,i1)+2.*u(m,i2) +f1*uss +f2*usssss +f3*uss*us*us
end do

c add source:
u(ms,i1)=u(ms,i1)+signl(l*dt)*source*dt**2

c write seismogram:

c write(*,*)float(l),(u(nfirst+(ns-1)*ndy,i1),ns=1,ny)
c write(1,'(f6.0,5e12.3)')float(l),(u(nfirst+(ns-1)*ndy,i1),ns=1,ny)
x1(l) = u(nfirst,i1)
x2(l) = u(nfirst+ndy,i1)
x3(l) = u(nfirst+2*ndy,i1)
x4(l) = u(nfirst+3*ndy,i1)
x5(l) = u(nfirst+4*ndy,i1)
x6(l) = u(nfirst+5*ndy,i1)
x7(l) = u(nfirst+6*ndy,i1)
x8(l) = u(nfirst+7*ndy,i1)
x9(l) = u(nfirst+8*ndy,i1)
ii=i1
i1=i2
i2=ii

end do

```

```

y = 0.
iz = 0
iyyy = 2010
jul = 1
com = 'H'

call newhdr
call setfhv('DELTA',dt,nerr)
beg = 0.0
call setfhv('B',beg,nerr)
call setnhv('NPTS',ll,nerr)
    call setihv('IFTYPE','ITIME',nerr)
    call setkhv('KSTNM',file(1:4),nerr)
    call setkhv('KCOMPNM',com,nerr)
    call setlhv('LEVEN',.TRUE.,nerr)
    call setnhv('NZHOUR',iz,nerr)
    call setnhv('NZMIN',iz,nerr)
    call setnhv('NZSEC',iz,nerr)
    call setnhv('NZMSEC',iz,nerr)
    call setnhv('NZYEAR',iyyy,nerr)
    call setnhv('NZJDAY',jul,nerr)
call system('rm test*')
do i = 1 , ll
write(11,*) i,x1(i)
write(12,*) i,x2(i)
write(13,*) i,x3(i)
write(14,*) i,x4(i)
enddo
write(file(5:5),'(a1)') '1'
    call wsac0(file,y,x1,nerr)
write(file(5:5),'(a1)') '2'
    call wsac0(file,y,x2,nerr)
write(file(5:5),'(a1)') '3'
    call wsac0(file,y,x3,nerr)
write(file(5:5),'(a1)') '4'
    call wsac0(file,y,x4,nerr)
write(file(5:5),'(a1)') '5'
    call wsac0(file,y,x5,nerr)
write(file(5:5),'(a1)') '6'
    call wsac0(file,y,x6,nerr)
write(file(5:5),'(a1)') '7'
    call wsac0(file,y,x7,nerr)
write(file(5:5),'(a1)') '8'
    call wsac0(file,y,x8,nerr)
write(file(5:5),'(a1)') '9'
    call wsac0(file,y,x9,nerr)

```

```
print *, nerr
call system('/usr/local/sac/bin/sac')
end
```

```
C=====
C
C SUB SIGNL
C
  FUNCTION SIGNL(T)
  COMMON /SIGPAR/ DELTA,NSIG
  DIMENSION AMPMAX(10)
  DATA AMPMAX/1.333,1.299,1.6,1.585,1.714,1.706,1.778,1.773,
* 1.818,1.815/
  SIGNL=0.0
  IF(T.LT.0.0 .OR. T.GT.DELTA) RETURN
  DEL=FLOAT(NSIG)*3.14159265/DELTA
  TT=DEL*T
  SIGNL=ATAN(EXP(TT))

  RETURN
  END
```

Anexo B

Señales de baja frecuencia observadas en estaciones de USA.

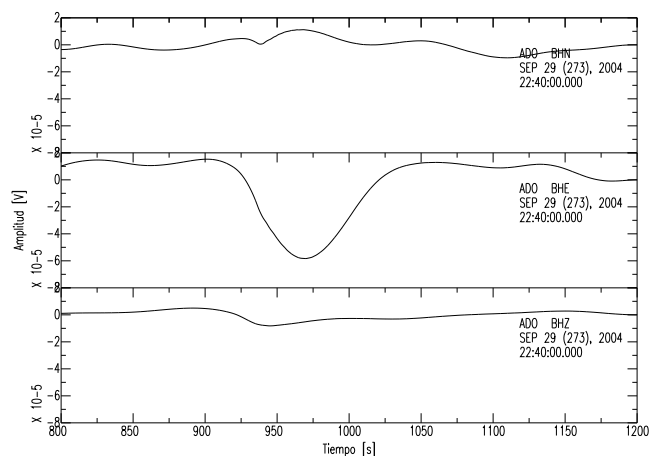


Figura B.1: Señal de baja frecuencia registrada en la estación ADO, parte del evento del 29 de Septiembre del 2004 en California.

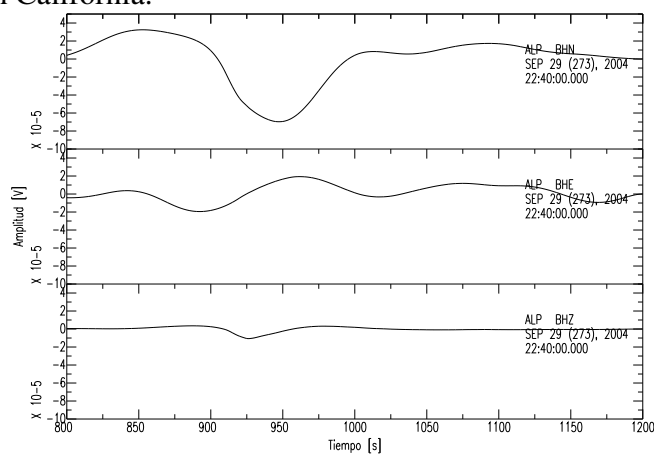


Figura B.2: Señal de baja frecuencia registrada en la estación ALP, parte del evento del 29 de Septiembre del 2004 en California.

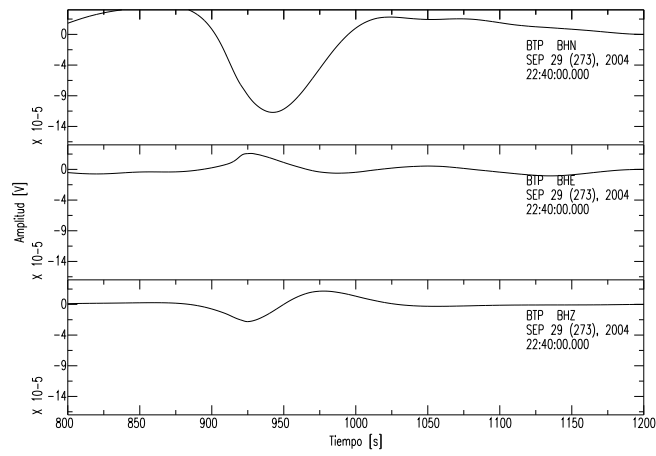


Figura B.3: Señal de baja frecuencia registrada en la estación BTP, parte del evento del 29 de Septiembre del 2004 en California.

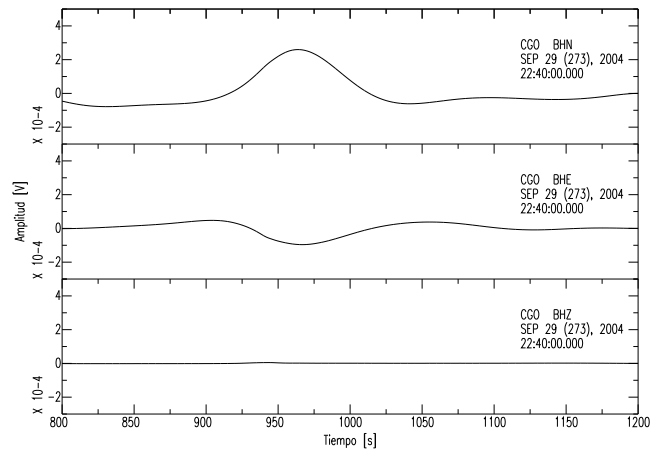


Figura B.4: Señal de baja frecuencia registrada en la estación CGO, parte del evento del 29 de Septiembre del 2004 en California.

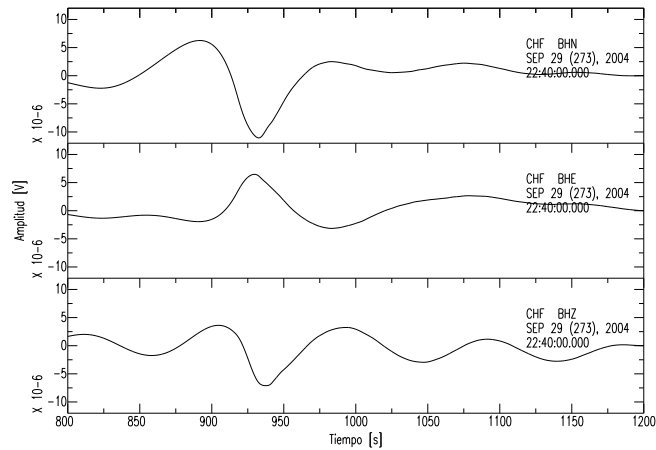


Figura B.5: Señal de baja frecuencia registrada en la estación CHF, parte del evento del 29 de Septiembre del 2004 en California.

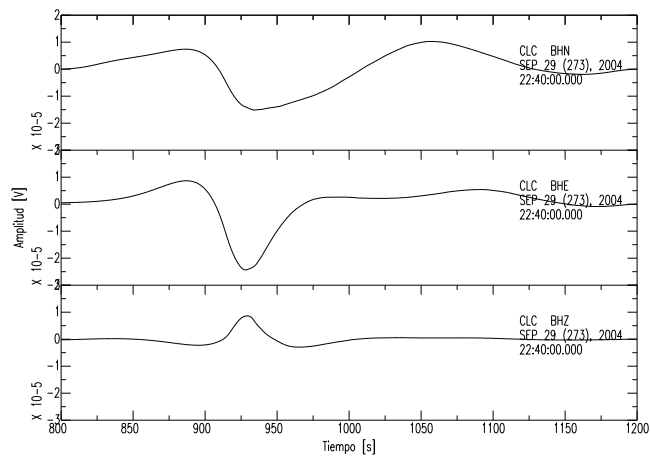


Figura B.6: Señal de baja frecuencia registrada en la estación CLC, parte del evento del 29 de Septiembre del 2004 en California.

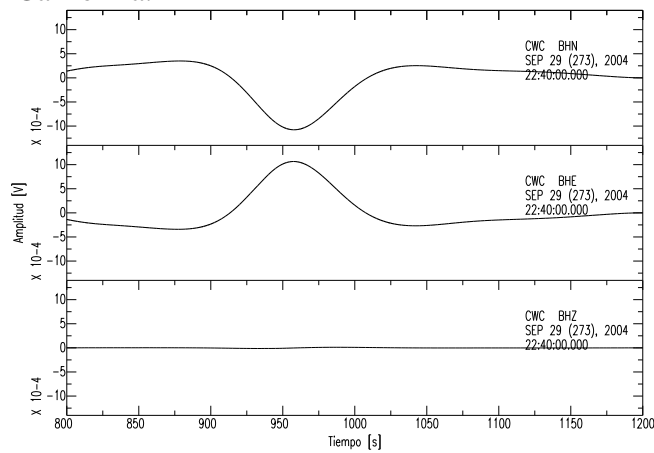


Figura B.7: Señal de baja frecuencia registrada en la estación CWC, parte del evento del 29 de Septiembre del 2004 en California.

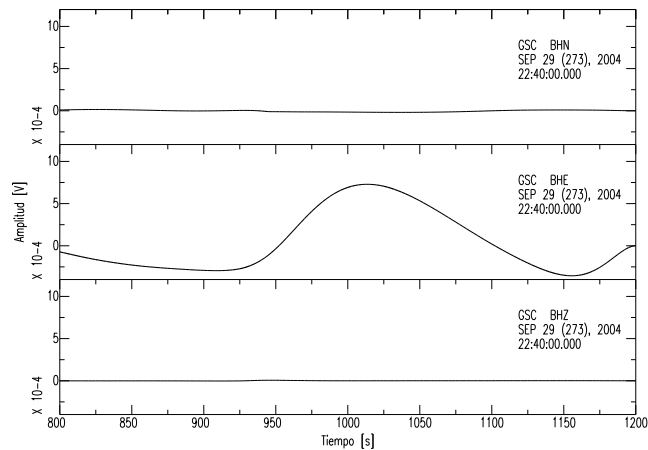


Figura B.8: Señal de baja frecuencia registrada en la estación GSC, parte del evento del 29 de Septiembre del 2004 en California.

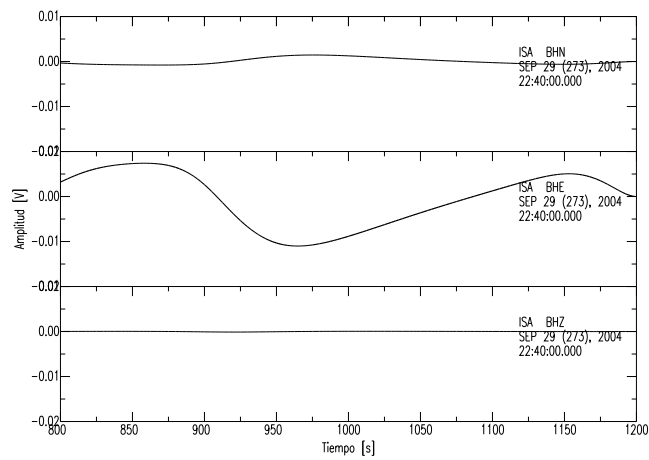


Figura B.9: Señal de baja frecuencia registrada en la estación ISA, parte del evento del 29 de Septiembre del 2004 en California.

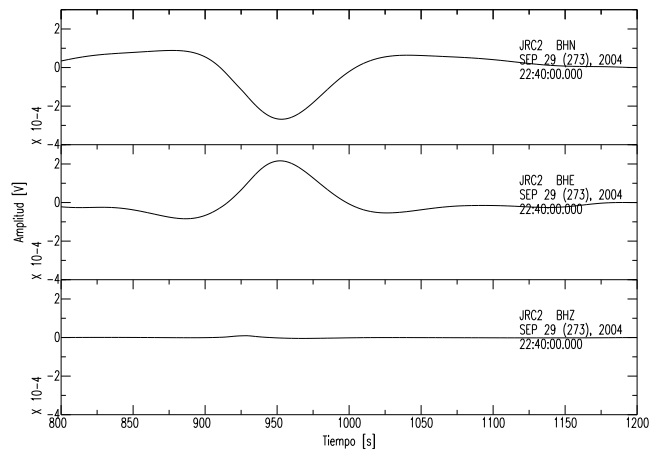


Figura B.10: Señal de baja frecuencia registrada en la estación JRC2, parte del evento del 29 de Septiembre del 2004 en California.

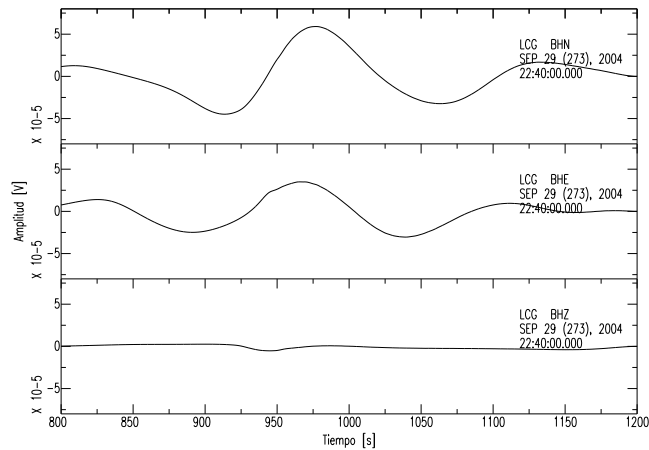


Figura B.11: Señal de baja frecuencia registrada en la estación LCG, parte del evento del 29 de Septiembre del 2004 en California.

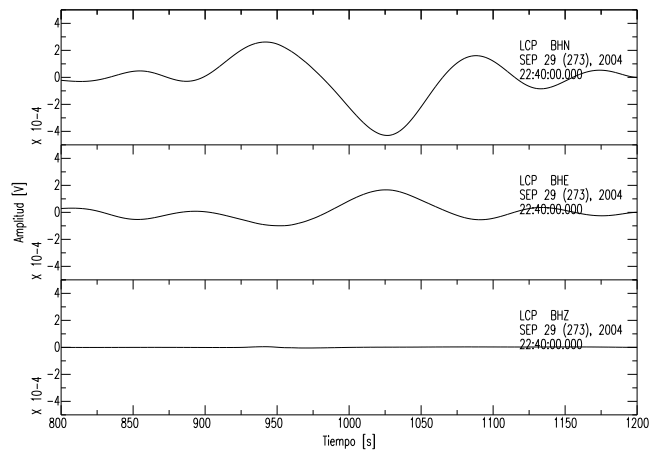


Figura B.12: Señal de baja frecuencia registrada en la estación LCP, parte del evento del 29 de Septiembre del 2004 en California.

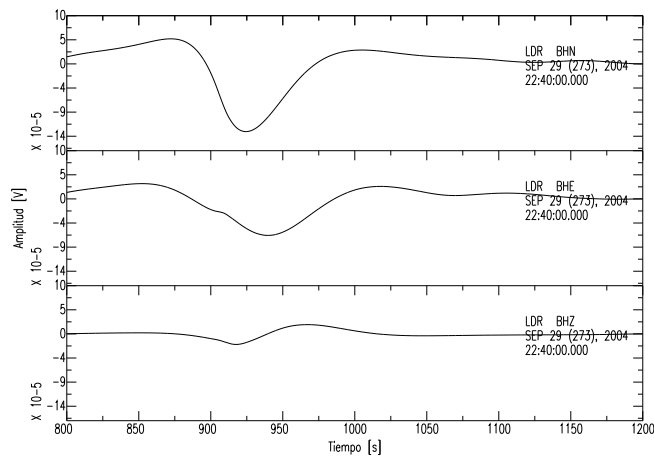


Figura B.13: Señal de baja frecuencia registrada en la estación LDR, parte del evento del 29 de Septiembre del 2004 en California.

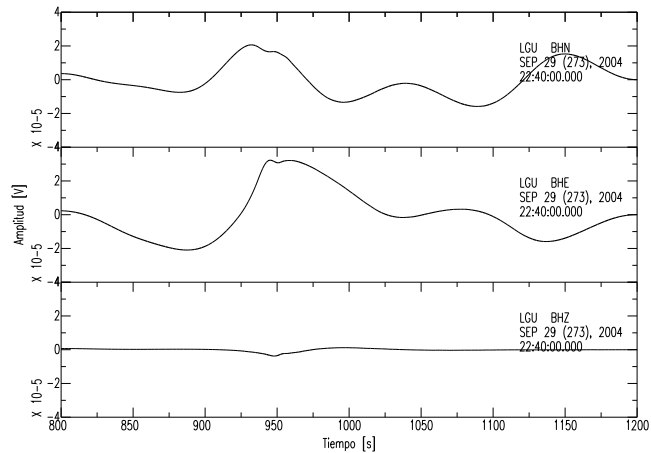


Figura B.14: Señal de baja frecuencia registrada en la estación LGU, parte del evento del 29 de Septiembre del 2004 en California.

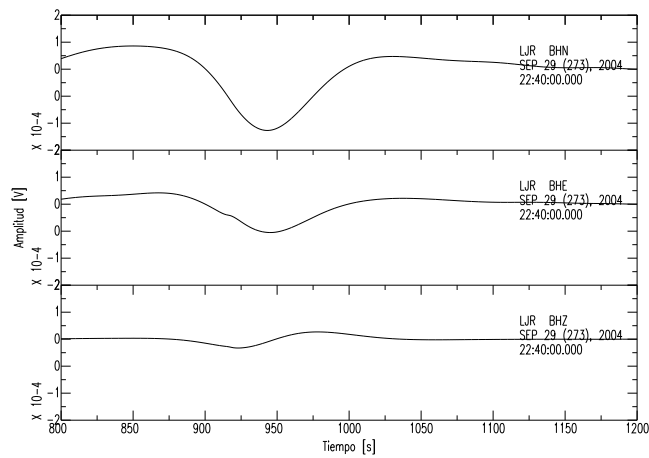


Figura B.15: Señal de baja frecuencia registrada en la estación LJR, parte del evento del 29 de Septiembre del 2004 en California.

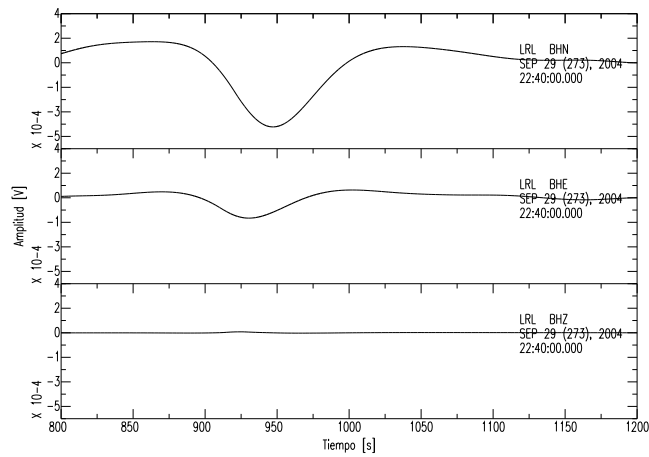


Figura B.16: Señal de baja frecuencia registrada en la estación LRL, parte del evento del 29 de Septiembre del 2004 en California.

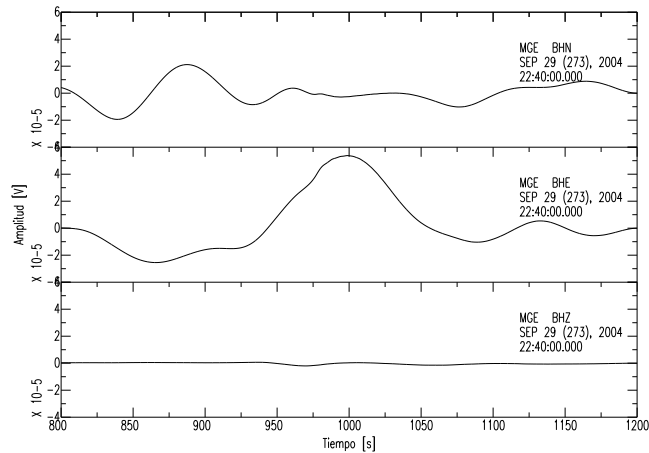


Figura B.17: Señal de baja frecuencia registrada en la estación MGE, parte del evento del 29 de Septiembre del 2004 en California.

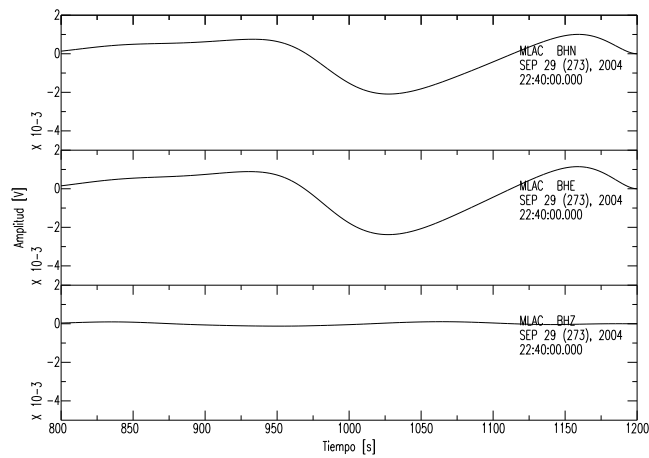


Figura B.18: Señal de baja frecuencia registrada en la estación MLAC, parte del evento del 29 de Septiembre del 2004 en California.

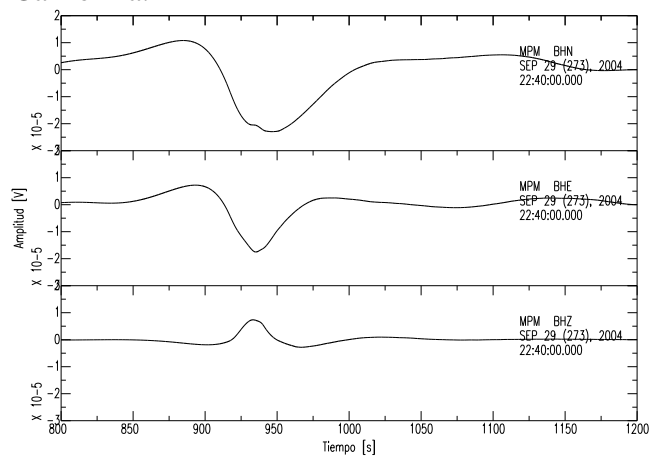


Figura B.19: Señal de baja frecuencia registrada en la estación MPM, parte del evento del 29 de Septiembre del 2004 en California.

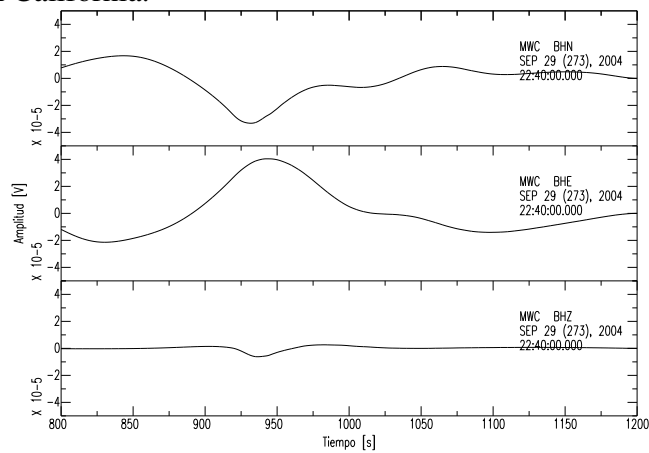


Figura B.20: Señal de baja frecuencia registrada en la estación MWC, parte del evento del 29 de Septiembre del 2004 en California.

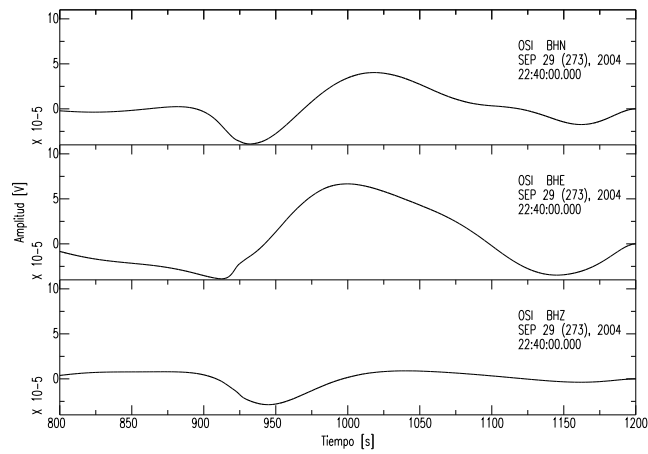


Figura B.21: Señal de baja frecuencia registrada en la estación OSI, parte del evento del 29 de Septiembre del 2004 en California.

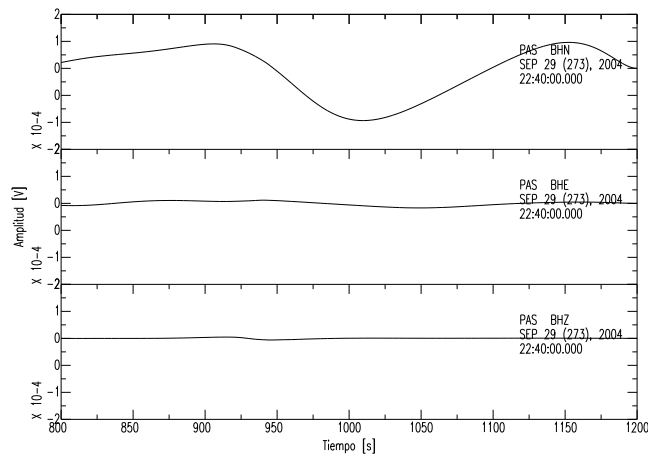


Figura B.22: Señal de baja frecuencia registrada en la estación PAS, parte del evento del 29 de Septiembre del 2004 en California.

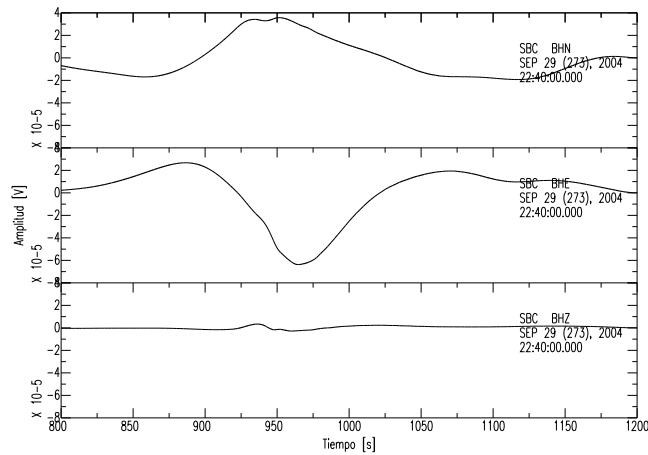


Figura B.23: Señal de baja frecuencia registrada en la estación SBC, parte del evento del 29 de Septiembre del 2004 en California.

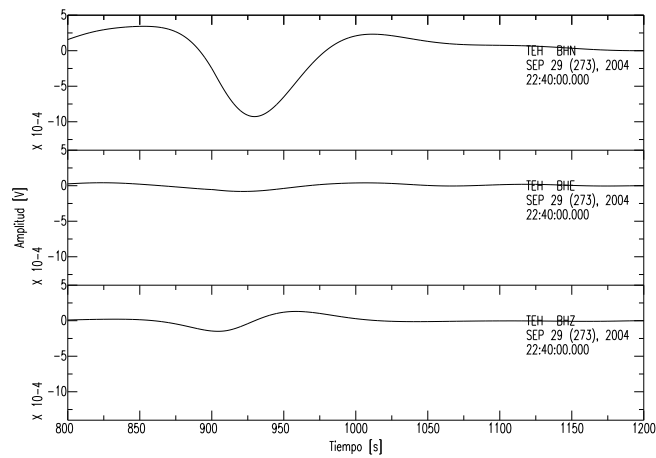


Figura B.24: Señal de baja frecuencia registrada en la estación TEH, parte del evento del 29 de Septiembre del 2004 en California.

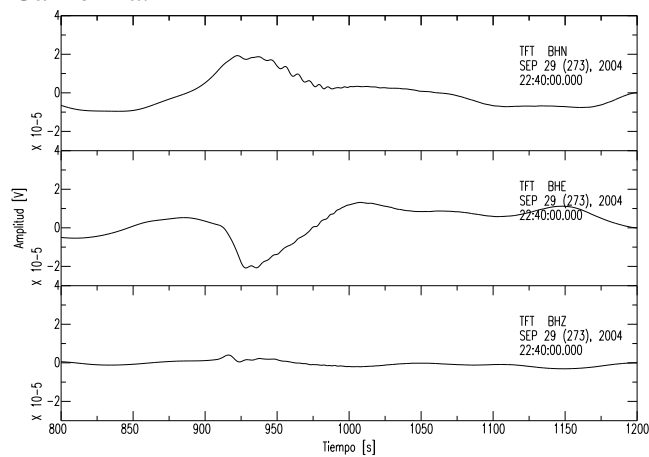


Figura B.25: Señal de baja frecuencia registrada en la estación TFT, parte del evento del 29 de Septiembre del 2004 en California.

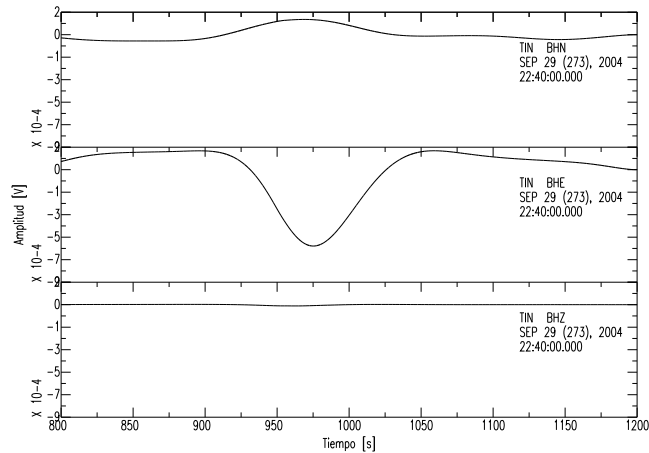


Figura B.26: Señal de baja frecuencia registrada en la estación TIN, parte del evento del 29 de Septiembre del 2004 en California.

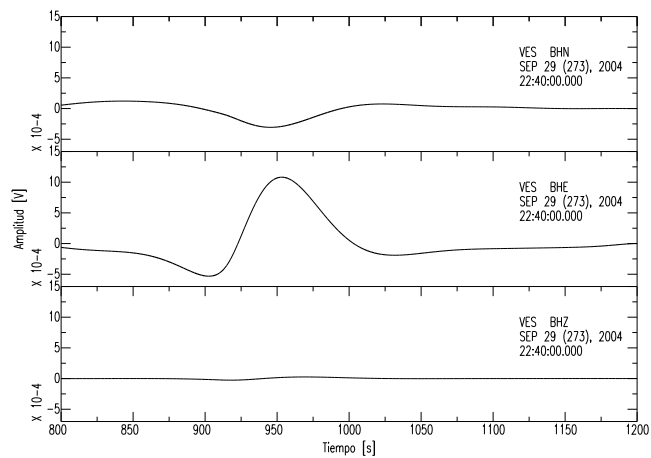


Figura B.27: Señal de baja frecuencia registrada en la estación VES, parte del evento del 29 de Septiembre del 2004 en California.

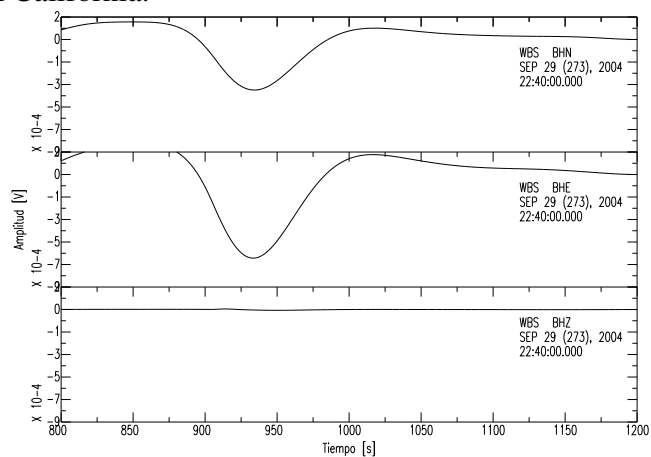


Figura B.28: Señal de baja frecuencia registrada en la estación WBS, parte del evento del 29 de Septiembre del 2004 en California.

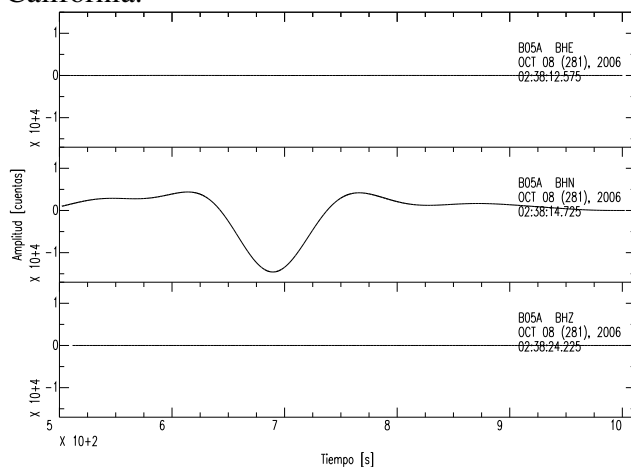


Figura B.29: Señal de baja frecuencia registrada en la estación B05A, parte del evento del 8 de Octubre del 2006 en Volcán Rainier.

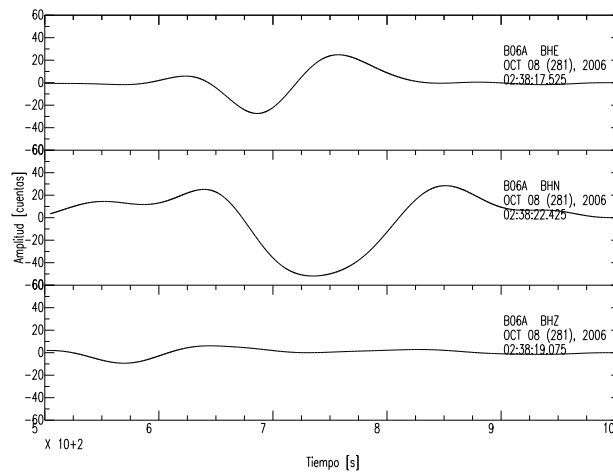


Figura B.30: Señal de baja frecuencia registrada en la estación B06A, parte del evento del 8 de Octubre del 2006 en Volcán Rainier.

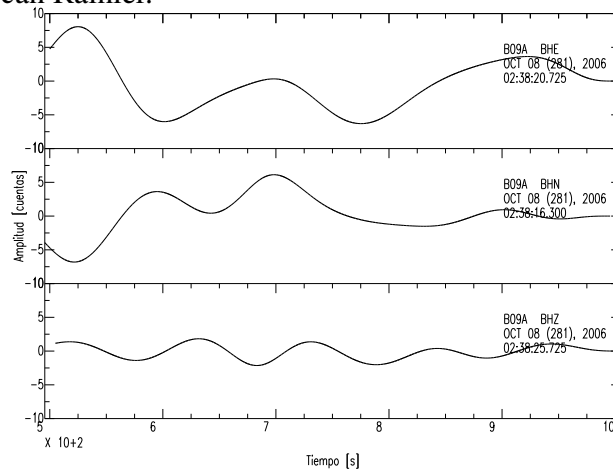


Figura B.31: Señal de baja frecuencia registrada en la estación B09A, parte del evento del 8 de Octubre del 2006 en Volcán Rainier.

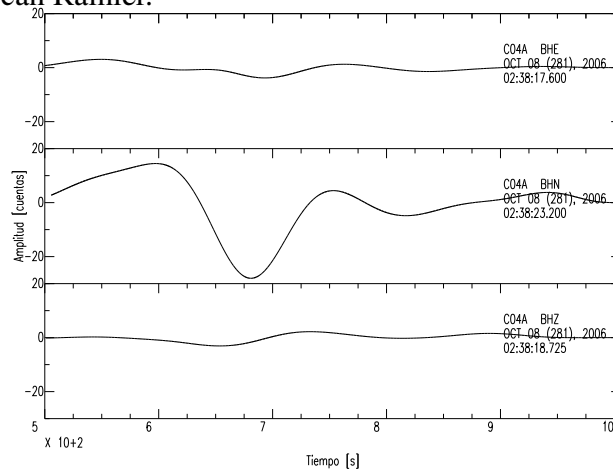


Figura B.32: Señal de baja frecuencia registrada en la estación C04A, parte del evento del 8 de Octubre del 2006 en Volcán Rainier.

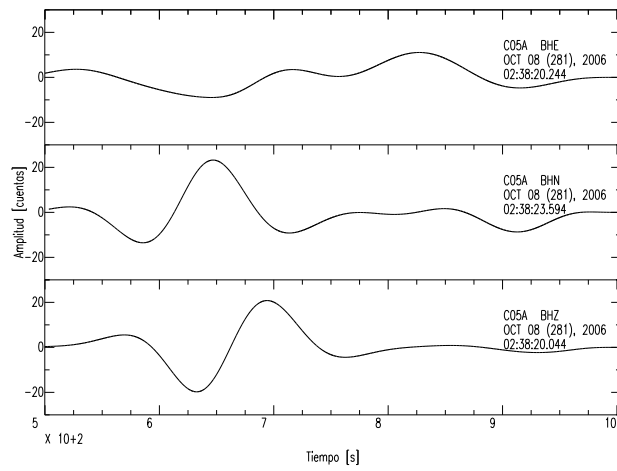


Figura B.33: Señal de baja frecuencia registrada en la estación C05A, parte del evento del 8 de Octubre del 2006 en Volcán Rainier.

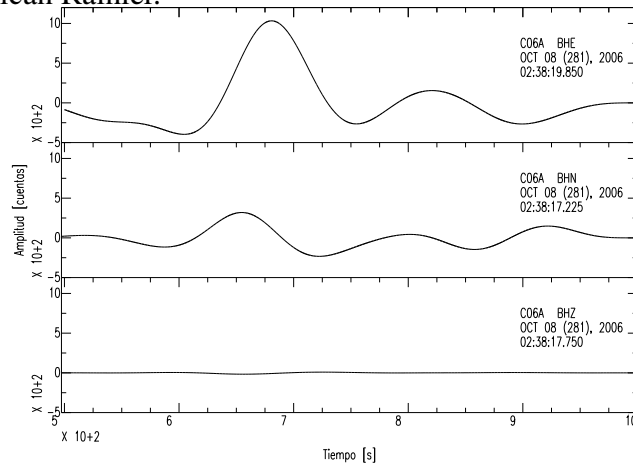


Figura B.34: Señal de baja frecuencia registrada en la estación C06A, parte del evento del 8 de Octubre del 2006 en Volcán Rainier.

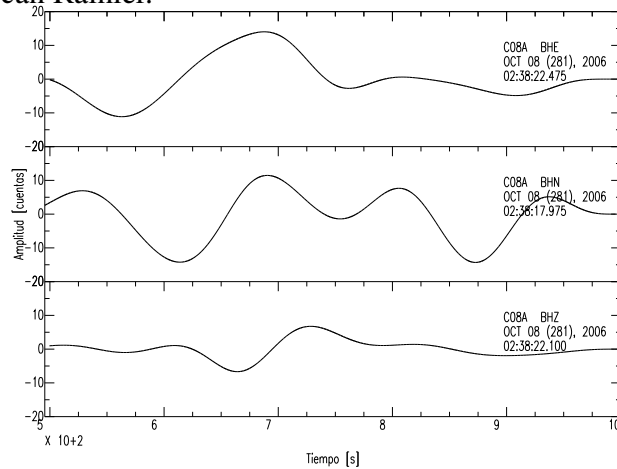


Figura B.35: Señal de baja frecuencia registrada en la estación C08A, parte del evento del 8 de Octubre del 2006 en Volcán Rainier.

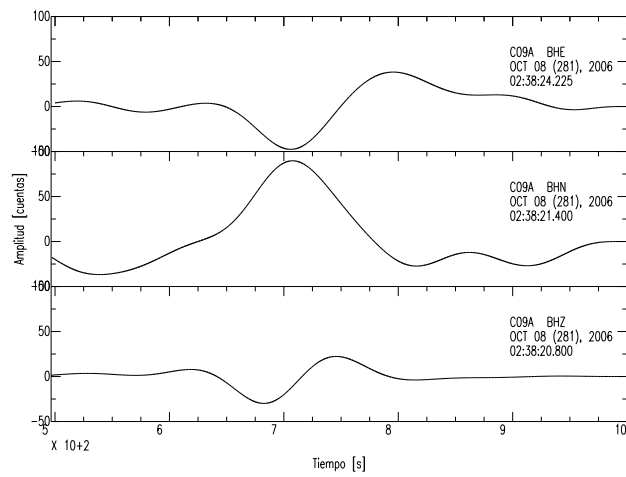


Figura B.36: Señal de baja frecuencia registrada en la estación C09A, parte del evento del 8 de Octubre del 2006 en Volcán Rainier.

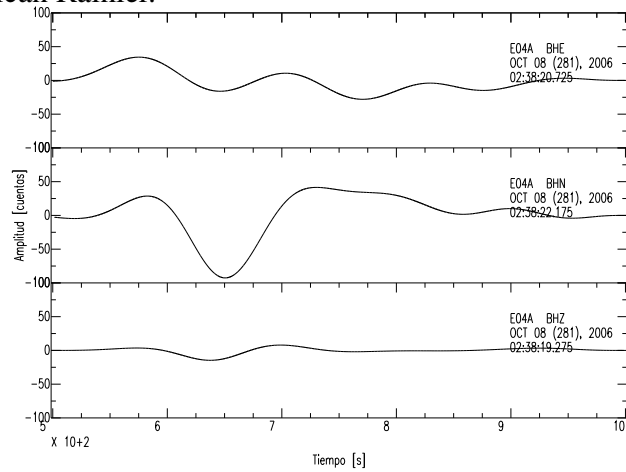


Figura B.37: Señal de baja frecuencia registrada en la estación E04A, parte del evento del 8 de Octubre del 2006 en Volcán Rainier.

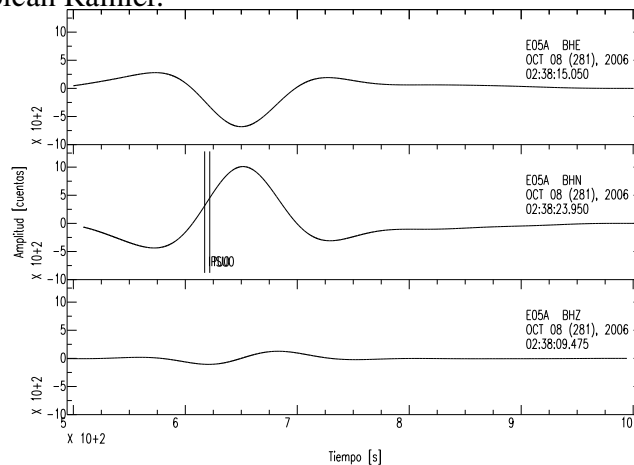


Figura B.38: Señal de baja frecuencia registrada en la estación E05A, parte del evento del 8 de Octubre del 2006 en Volcán Rainier.

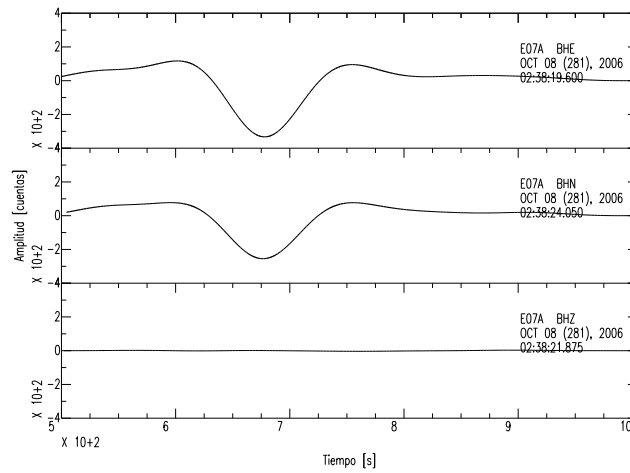


Figura B.39: Señal de baja frecuencia registrada en la estación E07A, parte del evento del 8 de Octubre del 2006 en Volcán Rainier.

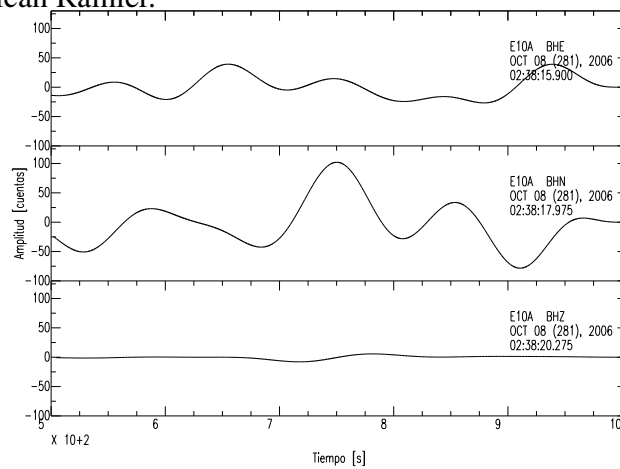


Figura B.40: Señal de baja frecuencia registrada en la estación E10A, parte del evento del 8 de Octubre del 2006 en Volcán Rainier.

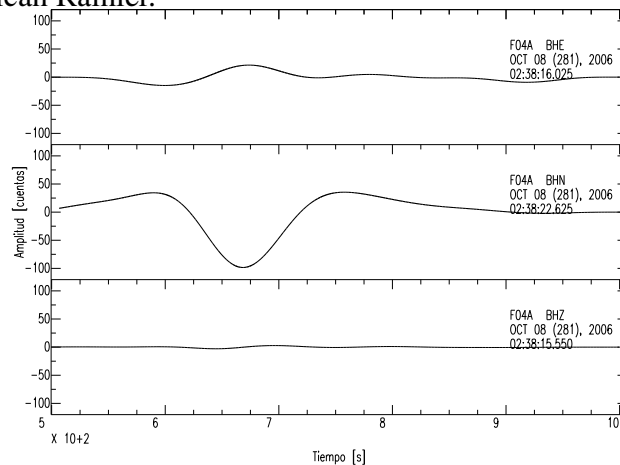


Figura B.41: Señal de baja frecuencia registrada en la estación F04A, parte del evento del 8 de Octubre del 2006 en Volcán Rainier.

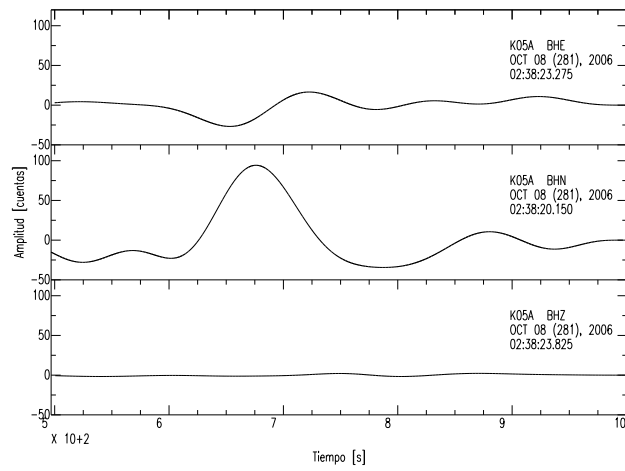


Figura B.42: Señal de baja frecuencia registrada en la estación K05A, parte del evento del 8 de Octubre del 2006 en Volcán Rainier.

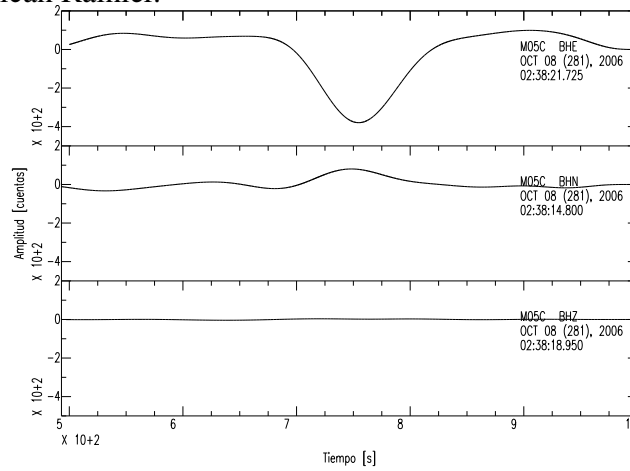


Figura B.43: Señal de baja frecuencia registrada en la estación M05C, parte del evento del 8 de Octubre del 2006 en Volcán Rainier.

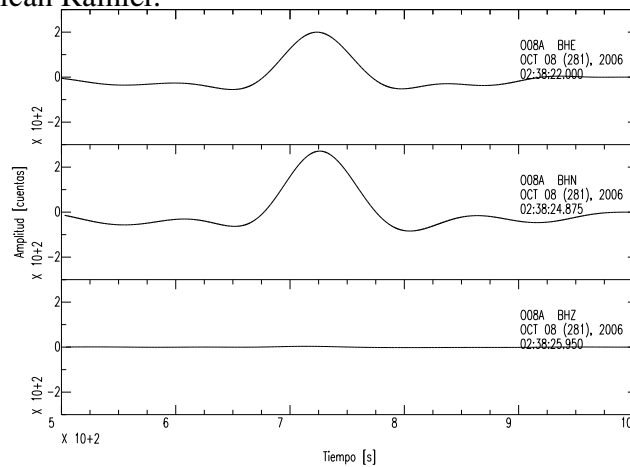


Figura B.44: Señal de baja frecuencia registrada en la estación O08A, parte del evento del 8 de Octubre del 2006 en Volcán Rainier.