



**UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL**

**FORMULACIÓN DE UN MODELO DE EQUILIBRIO ESTOCÁSTICO PARA
ASIGNACIÓN DE PASAJEROS EN SISTEMAS DE TRANSPORTE PÚBLICO**

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN CIENCIAS DE LA
INGENIERIA, MENCIÓN TRANSPORTE**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

CRISTÓBAL FELIPE PINEDA ANDRADEZ

PROFESOR GUÍA:
CRISTIÁN CORTÉS CARRILLO

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
MARCELA MUNIZAGA MUÑOZ
PEDRO JARA MORONI
EDUARDO MORENO ARAYA

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por Proyecto FONDEF D10I-1002
“Tecnología Avanzada para Ciudades del Futuro”

SANTIAGO DE CHILE
2014

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL

TÍTULO DE: Ingeniero Civil y grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería
Mención Transporte

POR: Cristóbal Felipe Pineda Andradez

FECHA: Enero 2014

PROFESOR GUÍA: Cristián Cortés Carrillo

FORMULACIÓN DE UN MODELO DE EQUILIBRIO ESTOCÁSTICO PARA ASIGNACIÓN DE PASAJEROS EN SISTEMAS DE TRANSPORTE PÚBLICO

En esta tesis, se desarrolla un modelo de equilibrio de pasajeros en transporte público, donde las decisiones de abordar un bus se toman en forma estocástica por parte de los usuarios. La formulación es una generalización de los modelos deterministas de equilibrio, donde uno de los supuestos fundamentales que éstos tienen es que los usuarios siempre escogen la estrategia o hiperruta mínima para realizar sus viajes, lo cual no siempre ocurre en redes de transporte público densas o de gran tamaño, donde por desconocimiento de la red, o incerteza sobre los tiempos de viaje o frecuencias, los usuarios escogen otras hiperrutas adicionales.

El modelo de equilibrio estocástico incorpora la congestión, reflejado mediante tiempos de espera y de viaje crecientes en los flujos. Se propone un algoritmo de solución basado en el *Método de Promedios Sucesivos* para obtener los flujos de equilibrio, aplicándose a redes pequeñas para probar distintas particularidades del modelo, y también a una red real de transporte público, para analizar el rendimiento general del algoritmo.

Luego, el modelo de equilibrio estocástico en transporte público se integra con un modelo similar en transporte privado, resultando en un modelo integrado de equilibrio estocástico, donde parte de los usuarios tienen la posibilidad de escoger el modo a utilizar, o incluso, combinar ambos, donde la primera parte del viaje se realiza en auto hasta un estacionamiento, y desde allí se continúa el viaje en transporte público. También se propone y se analiza un algoritmo de solución para este equilibrio.

El modelo de equilibrio estocástico en transporte público tiene como finalidad entregar una herramienta de planificación urbana que, por un lado, sea capaz de reproducir los volúmenes actuales de flujo de pasajeros observados en las calles y, por otro, pueda utilizarse como un modelo de predicción del comportamiento de la demanda ante cambios relevantes en la oferta de transporte público.

A mis papás,
por haberme dado una educación de calidad

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
2. Revisión Bibliográfica	4
2.1. Introducción	4
2.2. Conceptos Preliminares	4
2.2.1. El Problema de la Asignación de Pasajeros en Transporte Público	4
2.2.2. El Problema de Líneas Comunes	6
2.2.3. Estrategias e Hiperrutas	7
2.3. Modelos de Equilibrio Global	7
2.4. El Problema de la Parada de Bus	10
2.4.1. Modelos de Distribución de Demanda	10
2.4.2. Modelos de Tiempo de Espera	12
2.5. Modelo de Equilibrio Markoviano en Transporte Privado (MTE)	13
2.5.1. Descripción del Modelo MTE	13
2.5.2. Formulación del Modelo MTE	14
2.6. Modelos de Equilibrio con Elección Modal	17
3. Modelo de Equilibrio Estocástico en Transporte Público (STE) e Integración con Transporte Privado	18
3.1. Introducción	18
3.2. Modelo STE: Líneas Comunes	19
3.3. Modelo STE: Formulación General	22
3.4. Análisis del Tiempo de Espera en Paraderos	24
3.5. Modelos Integrados de Equilibrio (IEM)	27
3.5.1. Modelo Integrado con Elección de Modos Puros (IEM-PM)	28
3.5.2. Modelo Integrado con Elección de Modos Combinados (IEM-CM)	29
4. Algoritmos de Solución y Resultados Empíricos	33
4.1. Implementación STE	33
4.1.1. Red Extendida	33
4.1.2. Resolución de Tiempos Esperados de Viaje	36
4.1.3. Probabilidad Condicional de Abordar un Bus	36
4.1.4. Resolución del Flujo Inducido	38
4.1.5. Algoritmo STE	38
4.2. Experimentos STE	40
4.2.1. Experimento STE en Líneas Comunes	40
4.2.2. Experimentos STE en Redes de Gran Tamaño	42

4.3. Implementación IEM	47
4.4. Experimentos IEM	50
4.4.1. Experimento IEM-PM	50
4.4.2. Experimento IEM-CM	53
5. Conclusiones y Líneas Futuras de Investigación	61
Bibliografía	64
Anexo A. Tiempos de Espera en Paradero	67
A.1. Distribución del Tiempo de Espera para Llegadas Cowan M3	67
A.2. Probabilidad de la Llegada del Primer Bus con Cowan M3	67
Anexo B. Implementación IEM en C++	69

Capítulo 1

Introducción

La operación de los sistemas de transporte público impacta directamente en la calidad de vida de las personas en cualquier zona urbana, ya que su funcionamiento tiene distintos efectos sobre la forma en la cual los pasajeros se trasladan desde un origen a un destino, para realizar sus actividades de trabajo o de ocio. Además, la operación del transporte público interactúa con otros modos como el automóvil, dado que utilizan el mismo espacio vial. Por lo anterior, es relevante estudiar la forma en que los pasajeros utilizan los sistemas de transporte público y cómo se comportan frente a las distintas opciones disponibles, pues permite definir y evaluar las políticas públicas que sean las más adecuadas para tener un sistema de transporte público eficiente.

Durante los últimos años se han propuesto distintos modelos de equilibrio que describen la asignación de pasajeros que utilizan los sistemas de transporte público, los que intentan reproducir el comportamiento observado de los usuarios en zonas urbanas. En general, los modelos existentes en la literatura asumen que los pasajeros, cuando necesitan viajar desde un origen a un destino, se ven enfrentados a una serie de opciones de rutas y hacen una selección de rutas atractivas que minimizan su tiempo esperado de viaje, donde se incluyen el tiempo de acceso, el tiempo de espera en paraderos o estaciones, y el tiempo a bordo del vehículo. Por lo mismo, el problema de equilibrio en redes de transporte público, en comparación con el de transporte privado, difiere al incorporar el tiempo de espera en el análisis. Al existir esta componente, no basta con encontrar la ruta que minimiza el tiempo de viaje entre un origen y un destino, como se asume habitualmente en los modelos de asignación de transporte privado. En el ámbito del transporte público, la ruta estará determinada en gran parte por la línea o servicio del transporte público que finalmente sea escogida por el usuario, decisión que está influenciada por el tiempo de espera que experimenta un pasajero en una parada.

Uno de los supuestos fundamentales sobre los cuales se basan estos modelos, es que los pasajeros tienen un conocimiento completo de la operación del sistema, en términos de líneas, rutas, frecuencias y tiempos de viaje, lo cual les permite realizar, a priori, la selección de líneas atractivas para realizar un determinado viaje. Esto puede ser cierto en ciudades con una red de transporte público pequeña o intermedia, donde los tiempos de viaje y las frecuencias de los distintos servicios tienen poca variabilidad y las redes no tienen una gran cantidad de servicios. Por lo tanto, este supuesto de tipo determinista, donde los usuarios siempre escogerán aquellas opciones que minimizan sus tiempos de viaje, es una suposición válida. Sin embargo, en las megaciudades existentes en el mundo, con redes densas y una gran cantidad de servicios disponibles en el sistema, el conocimiento acabado por parte de los usuarios ya no puede ser un supuesto válido, notando en este caso una gran variabilidad en tiempos de viaje y frecuencia. Por otro lado, en los modelos deterministas se asume que el modelador

incluye los atributos que influyen en la decisión de viajar de manera exacta y precisa, lo que tampoco es siempre completamente válido, aún en ciudades de menor tamaño. Luego, es conveniente introducir un elemento que refleje el grado de incerteza por parte de los usuarios. Así, el gran objetivo de esta tesis es extender el modelo determinista de equilibrio en sistemas de transporte público, convirtiéndolo en un **Modelo de Equilibrio Estocástico en Transporte Público (STE)**, capturando de mejor forma los efectos de la información incompleta con la que cuentan los usuarios para realizar sus viajes en el contexto urbano. De esta forma, se levanta el supuesto de que los usuarios siempre escogen la estrategia óptima, haciendo que la asignación y equilibrio del flujo de pasajeros sea más dispersa dentro de la red, reflejando la variabilidad y percepción que tienen los pasajeros sobre la operación del sistema de transporte público.

El modelo STE está basado en el concepto de estrategias o *hiperrutas* en transporte público, pero al introducir incerteza en las decisiones de viaje, la asignación de pasajeros no solo se realiza sobre la estrategia óptima entre un par origen-destino, sino que el modelo integra otras estrategias subóptimas pero que pudiesen parecer mejores bajo la percepción de los propios usuarios. Para ello, se asume que las decisiones de viaje están basadas en una elección sucesiva de arcos en la red en función de los tiempos de viaje esperados -o percibidos- hasta alcanzar el destino.

Otro de los grandes objetivos de esta tesis es que, una vez desarrollado el modelo STE de transporte público, éste se combine con el Modelo Markoviano de Equilibrio en Transporte Privado (MTE) de Baillon y Cominetti (2008), dando origen al **Modelo Integrado de Equilibrio (IEM)**. Ambos modos comparten aspectos esenciales al momento de realizar un viaje, como la elección modal y la infraestructura vial sobre la cual operan, por lo cual es plausible buscar un equilibrio conjunto entre ambas redes. Además, ambos modelos de equilibrio tienen ciertas similitudes en sus formulaciones, como es el hecho de que son modelos estocásticos de equilibrio, y están basados en una elección secuencial de arcos a través de la red. Luego, es posible realizar una integración entre ambos modelos de forma natural, definiendo los elementos comunes que ambos modelos comparten, tanto en la formulación como en el procedimiento de búsqueda del equilibrio.

En cuanto a la estructura de esta tesis, se ha dividido en 5 capítulos. En el primero de ellos, se indica el contexto del trabajo a desarrollar, el problema a resolver y los objetivos generales que se busca abordar. En el capítulo 2, se realiza una revisión bibliográfica del desarrollo de la investigación en materia de asignación de pasajeros en transporte público, y a la vez, se profundiza en aquellos elementos que servirán posteriormente para desarrollar la tesis, como es el modelo MTE de equilibrio en transporte privado.

En el capítulo 3, se desarrolla el modelo STE, donde en una primera parte, se presentan los elementos constitutivos y la base del modelo, para luego dar una definición apropiada del equilibrio estocástico en transporte público. Hacia el final del capítulo, se presenta una metodología para la integración del modelo STE con el modelo MTE de equilibrio estocástico en transporte privado, dando origen al Modelo Integrado de Equilibrio.

El capítulo 4 muestra la implementación algorítmica para resolver el equilibrio estocástico en transporte público, junto con algunos ejemplos que muestran las diferencias fundamentales del modelo STE en comparación con un modelo determinista. Luego, se desarrolla la implementación del modelo de equilibrio integrado, junto con algunas instancias de prueba en redes reales para observar el rendimiento del algoritmo.

Finalmente, en el capítulo 5 se encuentran las conclusiones de esta tesis, junto con posibles líneas de investigación futura, en aspectos que pudiesen robustecer los modelos STE e IEM y que fueron identificados a lo largo del desarrollo del presente trabajo.

Capítulo 2

Revisión Bibliográfica

2.1. Introducción

En este capítulo se realiza una revisión de varios modelos de asignación de pasajeros en transporte público existentes en la literatura. En general, estos modelos están basados en un supuesto común: cuando los usuarios necesitan viajar desde un origen a un destino, ellos escogen un subconjunto de líneas atractivas en el paradero, entre todas las disponibles, para completar su viaje, lo que se ha designado en la literatura como la *elección de estrategia o hiperruta*. Sin embargo, este supuesto implica que los pasajeros tienen un alto grado de conocimiento de la estructura y las condiciones de operación de la red de transporte público, en términos de líneas, rutas y tiempos de viaje, obviando el hecho de que los pasajeros toman decisiones de viaje basados en su propia percepción, la que muchas veces puede diferir de la operación real del sistema.

En la primera parte de éste capítulo, se presentan algunos elementos preliminares en el estudio de la asignación de pasajeros en redes de transporte público, como son el *problema de líneas comunes*, o el concepto de *estrategia*. Luego, se analizan modelos macroscópicos de equilibrio global en este tipo de redes, para finalizar con la descripción de modelos que permiten realizar la asignación de pasajeros en las distintas líneas de buses en forma desagregada, resolviendo el llamado *problema de la parada de bus*.

2.2. Conceptos Preliminares

2.2.1. El Problema de la Asignación de Pasajeros en Transporte Público

En el marco el modelo de transporte de cuatro etapas, los modelos de asignación de pasajeros en transporte público constituyen la última etapa del proceso clásico de modelación de viajes (Ortúzar y Willumsen, 2001), una vez resueltas las fases de generación, distribución y partición modal, y en las cuales el modelador ya conoce todos los aspectos que determinan las elecciones involucradas en todas las etapas anteriores. Los modelos de asignación en transporte público reciben como variable de entrada una matriz de demanda origen-destino (OD) y tienen como objetivo distribuir esta demanda en las distintas rutas de la red, las cuales están asociadas a las líneas o servicios que conforman el sistema de transporte público. Luego, cualquier modelo de asignación de pasajeros debe centrarse en describir adecuadamente la elección de ruta, lo cual está asociado al comportamiento de los pasajeros y sus percepciones.

Muchos de los modelos existentes han adoptado los principios de los modelos de asignación en transporte privado para implementarlos en la dimensión del transporte público. El más importante de ellos es que, asumiendo que los usuarios tienen un comportamiento racional, ellos escogerán la ruta que minimice sus tiempos esperados de viaje. Sin embargo, entre el transporte público y el transporte privado existe una diferencia irremediable: mientras que para el transporte privado basta con escoger aquella ruta que minimice el tiempo esperado de viaje en el vehículo, en la dimensión del transporte público la ruta de un usuario queda definida por la línea o servicio en particular que finalmente aborda, entre una gama de servicios que sirven un paradero, y que pueden utilizarse para llegar al destino. Por lo tanto, además de considerar el tiempo de viaje en el vehículo, en la dimensión del transporte público juega además un papel importante el tiempo de espera, ligado a otras variables intrínsecas de todo sistema de transporte público urbano, como son la frecuencia y la capacidad de los buses. Este elemento aumenta la complejidad en la modelación de asignación de pasajeros en transporte público, en comparación con el problema equivalente en transporte privado.

Bajo un enfoque convencional, es posible diferenciar dos tipos de modelos para el problema de asignación de pasajeros, que dependen de la forma de operación del servicio de transporte público: los modelos basados en frecuencias -*frequency-based*-, y los modelos basados en itinerarios -*schedule-based*- (Cats, 2011). En el primer tipo, la red está representada a nivel de línea, donde la frecuencia de los buses resulta ser el parámetro más relevante. Este tipo de modelos está orientado para la planificación estratégica o de largo plazo en sistemas de transporte público. Por otro lado, los modelos basados en itinerarios incluyen una representación más detallada -dependiente del tiempo- de cada uno de los vehículos utilizados en el sistema, y por lo tanto, son aplicables para la operación de corto plazo. A pesar de que el concepto de hiperruta es asociado al ámbito de los modelos basados en frecuencia, y que este capítulo estará casi en su totalidad enfocado a este tipo de modelos, se debe hacer la salvedad de que en los modelos basados en itinerarios también se ha incluido previamente aquel concepto. En particular, Hamdouch y Lawphongpanich (2008) proponen un modelo de asignación para un sistema basado en itinerarios que incluye restricción de capacidad en vehículos de forma explícita, donde los pasajeros realizan elecciones de viaje utilizando estrategias. Se concluye que la proporción de pasajeros que decide esperar por el siguiente bus en un paradero es similar a la probabilidad de no abordar que aparece mencionada en modelos de asignación basados en frecuencias, alguno de los cuales se presentarán más adelante en este capítulo. Adicionalmente, Hamdouch et al. (2011) extienden el modelo previo diferenciando niveles de comodidad entre pasajeros que viajan sentados y de pie, capturando la incertidumbre por obtener un asiento. Sin embargo, ninguno de los dos modelos considera los efectos de la incertidumbre existente en la redes de transporte público en cuanto a la elección de ruta.

Por otro lado, desarrollos más recientes han abordado el problema de asignación en transporte público utilizando herramientas de simulación, que capturan en forma dinámica la operación de los sistemas y también de los pasajeros. También, se han propuesto modelos alternativos basados en elección discreta, donde se presentan métodos tanto para generar conjuntos de líneas atractivas, como para la elección de rutas (Cats, 2011).

Para el modelamiento de asignación de pasajeros en un sistema basado en la frecuencia, (Bouzaïène-Ayari et al., 2001) reconocen dos enfoques, según el nivel de agregación al realizar el análisis. A nivel macroscópico, está el problema de equilibrio global, cuyos modelos describen los mecanismos mediante los cuales la asignación alcanza un equilibrio basándose en el Primer Principio de Wardrop, el cual indica que todos los usuarios, en forma racional, minimizarán sus tiempos o costos esperados de viaje, y ninguno de ellos podrá reducirlos en forma unilateral. A nivel microscópico, se ha estudiado

el problema de distribución de la demanda en un paradero -llamado *bus stop problem*-, para el cual deben realizarse las formulaciones necesarias para asignar la demanda en las distintas rutas o líneas de transporte público disponibles en un paradero de origen para alcanzar el destino correspondiente, tema que se analizará en detalle en la sección 2.4.

Ambos subproblemas están íntimamente ligados, y generalmente, se resuelven en conjunto, aunque existen líneas de investigación dedicadas exclusivamente al segundo problema, asumiendo previamente que el equilibrio global existe y es posible computarlo. Según (Bouzaïène-Ayari et al., 2001) existen principalmente tres tipos de modelos: los modelos aplicables a sistemas no congestionados, parcialmente congestionados, y enteramente congestionados. En el primer tipo, se considera que la congestión de las líneas de buses no tiene ningún impacto sobre la distribución de pasajeros. En la segunda, sólo los tiempos de espera se ven afectados por la congestión. Por último, en los sistemas enteramente congestionados la congestión repercute tanto en los tiempos de espera como en la distribución de pasajeros. Estos modelos son los más difíciles de formular, pues la distribución de pasajeros, que a su vez determina la asignación de flujos en las diferentes líneas, depende justamente de los mismos flujos, habiendo una interacción directa entre ambas componentes. Por último, (Bouzaïène-Ayari et al., 2001) indican que los modelos para sistemas enteramente congestionados se pueden clasificar a su vez en dos subgrupos: en el primero, las capacidades de las distintas líneas son percibidas como capacidades prácticas y, por lo tanto, los flujos resultantes pueden ser eventualmente superiores a ella. En el segundo grupo, las capacidades se consideran como restricciones reales, y los flujos no pueden exceder aquellos parámetros. Este último grupo representa mejor lo que ocurre con el transporte público en las zonas urbanas.

2.2.2. El Problema de Líneas Comunes

Una forma básica de representar la asignación de pasajeros en transporte público es el *problema de líneas comunes*, descrito por Chriqui y Robillard (1975). Este problema puede describirse de la siguiente forma: consideremos una red simple compuesta por dos nodos, un origen O y un destino D , conectado por n líneas de buses, donde la línea l_a , con $a \in A = \{1, \dots, n\}$, se caracteriza por un tiempo en el vehículo t_a y una frecuencia f_a (fig. 2.1). Luego, los pasajeros que viajan desde O a D seleccionan antes de abordar un subconjunto de líneas $s \subset A$, para luego abordar el primer bus de este subconjunto que llega al paradero. La estrategia de elección de este subconjunto s de *líneas atractivas* es aquel que minimiza el tiempo esperado total de viaje T_s , definido como la suma de los tiempos involucrados para la realización de un viaje cualquiera: el tiempo de espera $1/\sum_{a \in s} f_a$ y el tiempo esperado de viaje en el vehículo $\sum_{a \in s} t_a \pi_a^s$, donde $\pi_a^s = f_a/\sum_{a' \in s} f_{a'}$ es la probabilidad de abordar la línea l_a , es decir,

$$T_s = \frac{1 + \sum_{a \in s} t_a f_a}{\sum_{a \in s} f_a}. \quad (2.1)$$

Intuitivamente, si un pasajero considera utilizar la línea l_a para realizar el viaje, también debiera considerar una línea más rápida l_j , cuando $t_j < t_a$. Este razonamiento conduce a los autores a desarrollar un algoritmo para computar el subconjunto de líneas atractivas s^* . El modelo asume que los pasajeros siempre pueden abordar el primer bus que llegue al paradero, y que pertenezca al subconjunto s^* , lo cual no siempre ocurre en sistemas altamente congestionados.

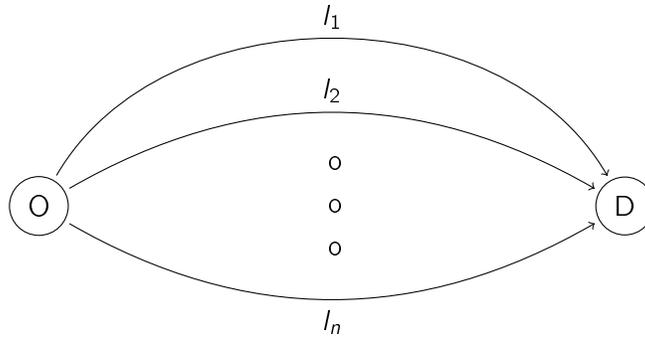


Figura 2.1: El Problema de Líneas Comunes

2.2.3. Estrategias e Hiperrutas

A finales de la década de los '70 y durante la primera parte de los '80, el problema de la asignación de pasajeros en transporte público fue desarrollado como un problema separado de cualquier otro ámbito del transporte (Andreasson, 1976; Rapp et al., 1976), o como una parte de modelos más complejos, ya sea en equilibrios multimodales en redes de transporte (Florian, 1977) o en el diseño de redes en transporte público (Hasselstrom, 1982). Sin embargo, a finales de la década de los '80 se produjo un avance notable en el campo de la asignación de pasajeros en transporte público, mediante la introducción del concepto de *estrategia* o *hiperruta*. Spiess y Florian (1989) definieron una *estrategia* como un conjunto de reglas que, cuando son aplicadas, permiten a un pasajero alcanzar su destino. Supongamos una red de transporte público como la de la fig. 2.2. Sin ningún tipo de información al pasajero, una estrategia es una ruta simple, como “tomar el próximo bus de la línea 1 en A, y bajar en B”. En cambio, si el usuario conoce a que línea pertenece el próximo bus que llegará al paradero, una estrategia posible es “tomar el próximo bus de la línea 1 o 2; si se aborda la línea 1, bajar en B; si se aborda la línea 2, hacer transbordo en el nodo Y a las líneas 3 o 4, y luego bajar en B”. Se asume que este es el nivel de información que tiene el pasajero en un paradero, y por lo tanto, el pasajero puede decidir si abordar el bus que llega al paradero o esperar el próximo.

A su vez, Nguyen y Pallotino (1988) definen una *hiperruta* como un subgrafo acíclico que conecta un origen con un destino, junto con un vector de valores reales para cada arco. Esta descripción representa, tanto gráfica como matemáticamente, una estrategia en transporte público, y permite convertir el problema de asignación de pasajeros en un problema de equilibrio estándar de transporte privado, los cuales han sido ampliamente estudiados en la literatura.

2.3. Modelos de Equilibrio Global

El mayor desafío en el desarrollo de un modelo de asignación de pasajeros de transporte público es la dificultad de modelar la elección de ruta cuando los usuarios se encuentran en una parada. Para ello, los modelos propuestos hasta ahora coinciden en que los pasajeros, de forma racional, intentan minimizar su tiempo total esperado de viaje, y se basan en el Primer Principio de Wardrop para lograr un equilibrio. Entre los modelos, varía la forma de incluir el fenómeno de la congestión, así como las formulaciones para la asignación de pasajeros en cada paradero.

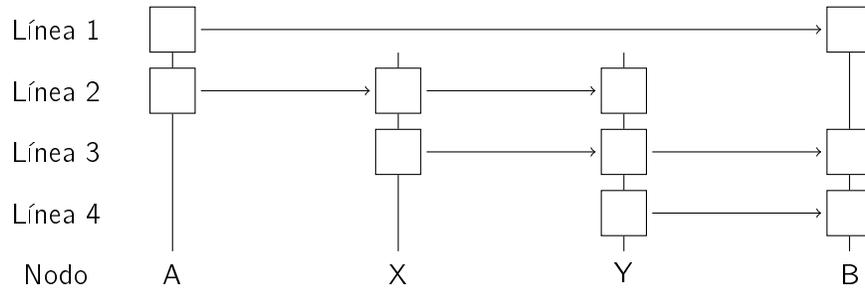


Figura 2.2: Red Simple de Transporte Público

Spieß y Florian (1989) desarrollaron un modelo para encontrar la *estrategia óptima*. Se trata de un problema de optimización que minimiza la suma de los tiempos totales esperados de viaje -espera y a bordo del vehículo- de todo el sistema, sujeto a restricciones de no negatividad de los flujos en arcos -que representan segmentos de línea entre paraderos-, y conservación de flujo en los nodos de parada, en los cuales se observan transbordos de pasajeros, y también una demanda intrínseca desde aquella parada hacia otros destinos. La asignación de usuarios se realiza mediante una formulación de probabilidades para abordar una línea, que son proporcionales a la frecuencia de cada una de ellas. Luego, se asume que los pasajeros son capaces de abordar el primer bus dentro del conjunto de líneas contenido en la estrategia óptima resultante, obviando el efecto de la congestión en paraderos. El problema de optimización planteado originalmente es del tipo entero mixto. Sin embargo, los autores fueron capaces de transformarlo en un problema de programación lineal, lo que resulta ventajoso desde el punto de vista analítico y también computacional, al proponer un algoritmo de solución para la asignación. Además, fueron los primeros en señalar que al enfocar el problema de asignación de usuarios en transporte público mediante la introducción del concepto de *estrategia*, se tiene una semejanza con el problema en transporte privado. De hecho, este último problema puede ser visto como un caso especial de problema de transporte público, en donde no existe tiempo de espera involucrado, y donde todos los arcos tienen frecuencia infinita.

A su vez, Nguyen y Pallotino (1988), además de desarrollar el concepto de hiperruta, demuestran que es posible alcanzar un equilibrio en la asignación de pasajeros, suponiendo que se cumple el Primer Principio de Wardrop en términos de estrategias, a diferencia del transporte privado, en el cual debe cumplir este principio en términos de ruta. Luego, basta con encontrar aquella estrategia óptima, que minimice el tiempo de viaje total esperado, para luego realizar la asignación. A primera vista, enumerar y encontrar la estrategia que cumple este objetivo, llamada *hiperruta mínima*, se aprecia altamente impracticable, pues, por ejemplo, para un par OD servido por k líneas comunes, se tienen k rutas y $2^k - 1$ estrategias o hiperrutas distintas. Sin embargo, ellos proponen un algoritmo eficiente para calcular la hiperruta mínima, emulando los procedimientos realizados para encontrar las rutas mínimas en el problema de asignación en transporte privado: para cada destino, se calcula la hiperruta mínima recorriendo la red en orden topológico inverso, desde un destino a todos los orígenes, mediante un algoritmo de corrección de etiquetas. Por lo tanto, y dado que una hiperruta es un grafo acíclico, la asignación de flujos se realiza en el mismo orden topológico inverso, y en forma proporcional a las frecuencias de las líneas de buses. Por último, los tiempos o costos en arcos son dependientes del volumen de pasajeros, pero los autores justifican este hecho sólo como una medida de la incomodidad que experimentan los usuarios cuando abordan buses llenos, y no como un efecto de aumento en los

tiempos de viaje.

A pesar de los avances producto de los conceptos de estrategia e hiperruta, que permitieron utilizar las herramientas desarrolladas para la asignación de usuarios de transporte privado en aplicaciones de transporte público, tales modelos aún no eran capaces de considerar los efectos que tiene la congestión de pasajeros en paraderos sobre los tiempos de espera, los cuales eran constantes e independientes de los flujos. Por ello, De Cea y Fernández (1993) presentaron una formulación para el problema de asignación en transporte público en donde la congestión está relacionada con el aumento en los tiempos de espera cuando el nivel de flujos se aproxima a la capacidad del sistema. Se definen dos nuevos conceptos: la *ruta de transporte público* y la *sección de ruta*. El primero, es una secuencia de nodos que describe cualquier ruta que un pasajero puede utilizar para viajar entre dos nodos, siendo el primero el nodo de origen, el último de ellos el nodo destino, y los nodos intermedios representan puntos de transbordo; el segundo concepto se define como una porción de ruta entre dos nodos de transbordo consecutivos. Luego, el modelo está basado fundamentalmente en la resolución sucesiva de subproblemas de *líneas comunes* entre las distintas secciones de ruta que existen para completar un viaje, suponiendo que los usuarios escogen previamente aquella ruta que minimiza el tiempo total de viaje. Para representar la congestión se introduce el concepto de *frecuencia efectiva*, la cual es una función decreciente, que depende del flujo de pasajeros a bordo de los buses. Su máximo es igual a la frecuencia nominal de las líneas, cuando la congestión es nula, y tiende a 0 a medida que la línea alcanza mayores niveles de congestión. Luego, la frecuencia efectiva representa la porción de buses de una línea que *efectivamente* puede abordar un pasajero que espera en un paradero, aumentando los tiempos de espera cuando se incrementa la congestión. Por otro lado, se modifica el planteamiento del problema de líneas comunes descrito en el punto 2.2.2, pues ahora se incluye la congestión: se resuelve en primera instancia el problema de líneas comunes sin congestión, que arroja como resultado el conjunto de líneas atractivas más rápidas. Si aún después de este paso hay líneas que sirven el mismo par OD fuera del conjunto de líneas óptimas, se resuelve nuevamente el problema de líneas comunes dentro de este subconjunto de líneas restantes. Este procedimiento se repite hasta que todas las líneas están asociadas a algún subconjunto fijo de líneas, que se harán atractivos a medida que aumenta el nivel de congestión.

Aunque este modelo de asignación es uno de los primeros que incorporan el efecto de la congestión, la forma funcional para representarla y la selección de los subconjuntos de líneas atractivas en una sección de ruta tienen fundamentos heurísticos, que producen en algunos casos asignaciones que van más allá de las capacidades de las líneas. Tampoco se garantiza que las condiciones de Wardrop para el equilibrio se cumplan a cabalidad; y por último, los autores proponen un algoritmo que realiza la asignación de pasajeros en forma proporcional a las frecuencias nominales y no efectivas, obviando el efecto de la congestión.

Nguyen et al. (1998) presentan un modelo de asignación estocástico basado en el concepto de hiperrutas, donde la estocasticidad está dada a través de una estructura de asignación logit. Los autores demuestran que existe una diferencia entre la forma global de asignación, con probabilidades de escoger una ruta específica para un viaje; y la forma secuencial, con probabilidades condicionales de elección de arcos en cada nodo. Sólo esta última forma redundante en un algoritmo de implementación, donde no es necesaria la enumeración de hiperrutas. A pesar de introducir estocasticidad al modelo, no se consideran condiciones para alcanzar un equilibrio general ni tampoco restricciones de capacidad.

Cominetti y Correa (2001) desarrollaron un modelo de equilibrio con congestión, basado también

en el Primer Principio de Wardrop para estrategias y en el hecho de que los pasajeros viajan escogiendo la hiperruta mínima. Los tiempos de viaje no son necesariamente monótonos y la congestión afecta los tiempos de espera -utilizando el concepto de frecuencia efectiva- así como también la distribución de la demanda. Este modelo se basa en un enfoque de programación dinámica, resolviendo subproblemas de líneas comunes de la siguiente forma: un pasajero ha alcanzado un nodo i en su viaje, y desea llegar al destino d . Denotando por A_i^+ el conjunto de arcos que salen desde el nodo i , cada arco $a \in A_i^+$ representa una de las líneas que el pasajero puede abordar, para alcanzar el siguiente nodo $j(a)$. Además, si se denota t_a al tiempo de viaje del arco a , y $\tau_{j(a)}^k$ al tiempo desde el nodo $j(a)$ al destino d , en el nodo i existe un problema de *líneas comunes* con tiempos de viaje $t_a + \tau_{j(a)}^k$ y frecuencias efectivas correspondientes a los arcos $a \in A_i^+$. Solucionando este problema, se obtiene el tiempo de viaje desde i a d , el que luego puede ser usado para resolver el problema de líneas comunes de los nodos *aguas arriba* de la red. El modelo abre toda una nueva línea de investigación para redes urbanas de gran tamaño, pues a pesar de estar basado en el concepto de hiperruta mínima, es formulado en términos de flujo en arcos. Además, los autores proponen un nuevo algoritmo para encontrar la hiperruta mínima basado en el algoritmo de Dijkstra para redes de transporte privado, y junto con esto, prueban la existencia del equilibrio, pero no son capaces de proponer un algoritmo efectivo para computarlo.

Por último, Cepeda et al. (2006) extienden el desarrollo anterior, describiendo una formulación alternativa para el modelo: se obtiene una función *gap* cuyo mínimo global, que tiene un valor igual a 0, caracteriza la solución del equilibrio en la asignación de pasajeros, aunque no logran probar que cada una de las soluciones locales es también una solución global, a pesar de que las pruebas computacionales que ellos realizan sugieren empíricamente que esto se cumple. Se demuestra este resultado para el caso de líneas comunes, con dos nodos y una cantidad finita de líneas. A pesar de lo anterior, el algoritmo propuesto para la asignación, basado en el método de los promedios sucesivos (MSA) resulta útil, al converger en forma rápida hacia el equilibrio.

2.4. El Problema de la Parada de Bus

En esta sección, se analizan los distintos mecanismos y formulaciones para distribuir la demanda y para representar el tiempo de espera en los modelos de asignación ya mencionados. La mayoría de ellos realiza este procedimiento a nivel de paradero, por lo que este problema es llamado *bus stop problem* en la literatura. En primer lugar, se presentan los modelos de distribución, y luego, los de tiempos de espera.

2.4.1. Modelos de Distribución de Demanda

Antes de presentar las características que comparten los distintos modelos de distribución de demanda, se define a continuación la notación que se usará para describir la operación de un paradero cualquiera de la red (Bouzaiene-Ayari et al., 2001).

- A :conjunto de líneas que se detienen en la parada
- Δ :conjunto de tipos de pasajeros que esperan bus en la parada (pasajeros del tipo $\delta \in \Delta$ comparten el mismo conjunto de líneas atractivas)
- v_δ :flujo de pasajeros del tipo $\delta \in \Delta$ en la parada; $0 < v_\delta < +\infty, \forall \delta \in \Delta$
- A_δ :subconjunto de líneas atractivas para los pasajeros del tipo $\delta \in \Delta$; $A_\delta \subseteq A$ y $A_\delta \neq \emptyset, \forall \delta \in \Delta$
- $v_{a\delta}$:flujo de pasajeros en la parada del tipo $\delta \in \Delta$ distribuidos en la línea $a \in A_\delta$
- c_a :capacidad de un bus de la línea $a \in A$

v_a :flujo agregado de pasajeros en la línea $a \in A$ que abordan en la parada
 μ_a :frecuencia nominal de la línea a
 f_a :frecuencia efectiva de la línea $a \in A$

Si se analiza una parada en particular de la red, entonces se tiene:

$$\sum_{\delta \in \Delta} v_{a\delta} = v_a, \quad \forall a \in A \quad (2.2)$$

En general, los modelos de distribución de demanda comparten la siguiente formulación:

$$v_{a\delta} = v_a \frac{\xi_a}{\sum_{d \in A_\delta} \xi_d}, \quad \forall a \in A_\delta, \forall \delta \in \Delta \quad (2.3)$$

donde ξ_a es un *factor de atracción* positivo asociado con la línea a , $\forall a \in A$ de aquella parada. La principal diferencia radica en la definición de este factor. Comúnmente, los modelos asocian este factor a la frecuencia de las líneas. Sin embargo, se deben diferenciar dos casos: en los modelos *no congestionados* como los de Spiess y Florian (1989) y Nguyen y Pallotino (1988), el factor es fijo e igual a la frecuencia nominal, $\xi_a = \mu_a$. En cambio, en los modelos *enteramente congestionados*, como los de Cominetti y Correa (2001) y Cepeda et al. (2006), el factor es variable, e igual a la frecuencia efectiva de las líneas, como una forma de que la congestión tenga un efecto sobre la distribución de pasajeros.

De Cea y Fernández (1993) fueron pioneros en proponer una formulación para la frecuencia efectiva: se define un *indicador de tiempo promedio de espera equivalente* ω_a para cada una de las líneas a que se detienen en el paradero. Sea \tilde{v}_a el flujo total de pasajeros a bordo del bus de la línea a que lo toman antes de la parada, y se bajan después de ella. Luego:

$$\omega_a \equiv \frac{\alpha_a}{\mu_a} + \varphi_a \left(\frac{\tilde{v}_a}{\mu_a c_a} \right) \quad (2.4)$$

donde φ_a debe ser una función monótona creciente de \tilde{v}_a . Una posible formulación para φ_a es una *función potencia*:

$$\varphi_a = \beta_a \left(\frac{\tilde{v}_a}{\mu_a c_a} \right)^n. \quad (2.5)$$

Los parámetros β_a y n deben ser calibrados mediante un modelo de simulación para cada línea a . Notar que el valor del indicador ω_a es el mismo para todos los pasajeros en la parada, independiente del tipo $\delta \in \Delta$ que sea. Por otro lado, el valor α_a depende de la distribución para el intervalo entre llegadas de los buses y también para la llegada de pasajeros al paradero. Normalmente, $\alpha = 0,5$ corresponde a una distribución uniforme para la llegada de pasajeros al paradero, y un tiempo determinista (fijo) para el tiempo entre llegadas de buses; mientras que $\alpha = 1$ representa una distribución exponencial para esta última variable. Finalmente, si denotamos al vector de todos los flujos agregados como $v = (v_a)_{a \in A}$, la formulación para la frecuencia efectiva se define como:

$$f_a(v) = \frac{\alpha_a}{\omega_a}. \quad (2.6)$$

Notar que si el bus llega vacío a la parada, entonces $\varphi_a = 0$ pues el flujo \tilde{v}_a es igual a cero. Luego, en esta parada, la frecuencia efectiva será igual a la frecuencia nominal de la línea. De otra forma, cuando la congestión aumenta, el valor de φ_a también crece, y por lo tanto, siempre se cumple que $f_a \leq \mu_a$. Esta formulación de frecuencia efectiva tiende a 0 si el nivel de congestión se hace muy alto,

pero dado que el modelo planteado por los autores no considera una restricción de capacidad estricta sobre las líneas, la asignación podría eventualmente superar la capacidad.

Cepeda et al. (2006) desarrollan una expresión alternativa para la frecuencia efectiva en los arcos de subida:

$$f_a(v) = \begin{cases} \mu_a \left[1 - \left(\frac{v_a}{\mu_a c_a - v_a + v_a} \right)^\beta \right] & \text{si } v_a < \mu_a c_a \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad (2.7)$$

donde v_a es el flujo agregado a bordo de la línea a justo después de la parada, y β es un parametro a calibrar. Notar que $\mu_a c_a - v_a$ es la capacidad residual de la línea después de la parada, por lo que esta función incorpora explícitamente la restricción de capacidad $v_a < \mu_a c_a$.

2.4.2. Modelos de Tiempo de Espera

En forma similar al caso de los modelos de distribución de la demanda, existen dos tipos de modelos de tiempo de espera: los modelos para sistemas *no congestionados* y para sistemas *congestionados*. En el primer grupo se encuentran aquellos modelos donde la congestión no tiene ningún efecto sobre los tiempos de espera. En el modelo propuesto por Spiess y Florian (1989) se asume que el tiempo entre llegadas de los buses a las paradas sigue una distribución exponencial. Como este modelo no tiene restricción de capacidad, el tiempo de espera se modela de la siguiente forma:

$$W_\delta = \frac{1}{\sum_{a' \in A_\delta} \mu_{a'}}, \quad \forall \delta \in \Delta. \quad (2.8)$$

A consecuencia de suponer una distribución exponencial para el intervalo entre llegadas de buses, esta formulación asume una coordinación perfecta de las diferentes líneas atractivas. Sin embargo, Nökel y Wekeck (2009) indican que esta aproximación no es realista en sistemas de transporte público que pudiesen tener otras distribuciones arbitrarias, aunque es un supuesto recurrente en los modelos de asignación de pasajeros.

Algunos modelos de tipo congestionado, como Cominetti y Correa (2001) y Cepeda et al. (2006) modelan el tiempo de espera en forma similar al descrito en (2.8), pero utilizan la frecuencia efectiva en lugar de la frecuencia nominal:

$$W_\delta(v) = \frac{1}{\sum_{a' \in A_\delta} f_{a'}(v)}, \quad \forall \delta \in \Delta. \quad (2.9)$$

Nguyen y Pallotino (1988) proponen una formulación alternativa, multiplicando la expresión dada en (2.8) por un *factor de corrección* basado en distribuciones más generales del intervalo entre llegadas. Pero para considerar el efecto de la congestión, Wu et al. (1994) modifican el modelo anterior de la siguiente forma: un pasajero de tipo $\delta \in \Delta$ aborda un bus de alguna línea atractiva $a \in A_\delta$. Luego, su tiempo de espera $W_{a\delta}(v_a)$ está compuesto por un valor constante $\psi \left[\sum_{a' \in A_\delta} \mu_{a'} \right]^{-1}$ que es común a todos los pasajeros de tipo δ , y un tiempo de espera inherente a la línea dado por $n \left(\frac{v_a}{\bar{c}_a} \right)^b$, a causa de la congestión en la línea a , donde \bar{c}_a es la capacidad residual de la línea al llegar a la parada. Luego,

$$W_{a\delta}(v_a) = \frac{\psi}{\sum_{a' \in A_\delta} \mu_{a'}} + n \left(\frac{v_a}{\bar{c}_a} \right)^b \quad \forall a \in A_\delta, \forall \delta \in \Delta \quad (2.10)$$

donde n y b son parámetros positivos y ψ es un factor positivo de corrección similar al propuesto por Nguyen y Pallotino (1988). Notar que bajo este modelo, pueden producirse distintos valores de tiempo de espera para pasajeros del mismo tipo δ -pues también depende de cual línea a se aborda efectivamente-, lo que es un punto débil del modelo.

Por otro lado, Bouzaïene-Ayari et al. (2001) demuestran que los modelos antes mencionados que consideran la congestión no siempre producen tiempos de espera *consistentes* con el subconjunto de líneas atractivas. Es decir, que satisfagan la siguiente condición intuitiva: mientras más grande sea el subconjunto de líneas atractivas, menor debiera ser el valor del tiempo de espera promedio. Por ello, desarrollan un nuevo modelo para el tiempo de espera, llamado *general bus stop model (GSM)*. En primer lugar, se asume que cada línea $a \in A$ tiene una función de tiempo de espera continua y diferenciable $\omega_a(\cdot)$, creciente en los flujos v_a , y que también incluye otros parámetros de la línea, como la frecuencia, capacidad, y la distribución del intervalo entre llegadas. Luego, el tiempo de espera, para un pasajero de tipo $\delta \in \Delta$, está dado por:

$$W_\delta(v) = \frac{1}{\sum_{a' \in A_\delta} [\omega_{a'}(v_{a'})]^{-1}}, \quad \forall a \in A_\delta, \quad (2.11)$$

expresión que cumple siempre la condición intuitiva señalada.

Los autores desarrollan dos casos especiales para esta expresión del tiempo de espera. El primer caso pertenece a la modelación de este valor con restricción estricta de capacidad, donde asumiendo una distribución Erlang para el intervalo entre llegadas de buses, el tiempo de espera adopta la expresión:

$$W_\delta(v) = \frac{1}{\sum_{a' \in A_\delta} [\alpha_{a'} + \gamma_{a'} v_{a'} / (c_{a'} - v_{a'})]^{-1}}, \quad \forall a \in A_\delta, \quad (2.12)$$

donde α_a y γ_a son funciones dependientes de la frecuencia, capacidad y parámetro de forma k_a de la distribución Erlang. El segundo caso especial se refiere a la modelación del tiempo de espera sin restricción de capacidad, donde proponen una aproximación hiperbólica del tipo:

$$W_\delta(v) = \left[\sum_{a' \in A_\delta} \frac{1}{2f_{a'}} \left[1 + \frac{1}{k_{a'}} + \left(\psi \frac{v_{a'}}{c_{a'}} \right)^\tau \right] \right]^{-1}, \quad \forall a \in A_\delta, \quad (2.13)$$

donde ψ y τ son parámetros positivos que pueden ser calibrados en base a datos reales o por simulación.

2.5. Modelo de Equilibrio Markoviano en Transporte Privado (MTE)

A continuación, se describirá el Modelo de Equilibrio Markoviano en Redes de Transporte Privado (MTE), puesto que su formulación se utilizará en el desarrollo de esta tesis.

2.5.1. Descripción del Modelo MTE

Los modelos de equilibrio en transporte privado describen la distribución de la demanda a través de la red utilizando el principio de Wardrop, el cual indica que los usuarios utilizarán aquellas rutas más cortas para realizar sus viajes. Generalmente, el efecto de la congestión se introduce mediante formulaciones de tiempos o costos generalizados en arcos, crecientes con los flujos. Por otro lado, los modelos existentes pueden clasificarse en *deterministas*, si los costos de las rutas percibidos por los

usuarios se asumen idénticos entre ellos; o *estocásticos*, si los costos son percibidos en forma particular por cada usuario, que conduce a un modelo de elección discreta de rutas.

Un primer enfoque para abordar este problema es la enumeración de rutas. En forma determinista, se calculan los costos de todas las rutas posibles, y se escoge la ruta óptima; y en forma estocástica, se desarrolla una asignación en rutas basada en modelos de elección discreta como el logit o probit. Desde el punto de vista de la modelación, este enfoque tiene severas deficiencias. La principal de ellas es que se asume independencia entre las rutas, lo cual no siempre ocurre cuando hay segmentos traslapados. Por otro lado, los modelos estocásticos tienen la particularidad de asignar flujo en todas las rutas, aún cuando los tiempos de viaje esperados de algunas de ellas sea muy grande. Por último, para redes de gran tamaño en zonas urbanas, enumerar todas las rutas posibles para todos los pares orígenes-destino puede resultar demasiado costoso en términos computacionales.

Baillon y Cominetti (2008) consideran un enfoque que, aunque también se basa en un modelos de elección discreta, está incluido en un marco de programación dinámica. La elección de ruta no es un problema que deba resolverse en un solo paso para todos los orígenes y destinos, sino que puede ser un procedimiento resuelto secuencialmente mediante una selección de arcos en cada nodo intermedio. Así, el flujo de usuarios se asimila al comportamiento de una cadena de Markov dentro de la red, por lo que este modelo es llamado **Equilibrio Markoviano en Transporte Privado** -MTE por sus siglas en inglés-. Este enfoque permite modelar tanto formulaciones deterministas como estocásticas, y no asume independencia entre rutas. Por último, una de las mayores ventajas es que se evita la enumeración de rutas para todos los pares OD.

2.5.2. Formulación del Modelo MTE

El fundamento del modelo MTE es que los usuarios viajan a sus destinos mediante un proceso secuencial de selección de arcos, basado en un modelo de elección discreta en cada nodo intermedio que alcanzan en su viaje.

Sean los tiempos de viaje en arcos las variables aleatorias $\tilde{t}_a = t_a + \nu_a$, donde t_a es el valor esperado del tiempo de viaje en el arco a , y ν_a el término estocástico, que representa la variabilidad de las percepciones entre los conductores. Se asume que estos términos tienen una distribución continua, donde $\mathbb{E}(\nu_a) = 0$. Luego, el tiempo óptimo de viaje entre del par id considerando todas las rutas disponibles contenidas en el conjunto R_{id} está dado por

$$\tilde{\tau}_{id} = \min_{r \in R_{id}} \left\{ \sum_{a \in r} \tilde{t}_a \right\}$$

Dado un destino d , un usuario llega a un nodo i y compara (en forma estocástica) los tiempos -o costos generalizados- de viaje usando cada uno de los arcos salientes del nodo i . Se define \tilde{z}_{ad} al tiempo o costo (estocástico) hasta el destino d utilizando el arco a , que corresponde a:

$$\tilde{z}_{ad} = \tilde{t}_a + \tilde{\tau}_{jad} = z_{ad} + \epsilon_{ad} \quad (2.14)$$

donde $z_{ad} = \mathbb{E}(\tilde{z}_{ad})$ y $\mathbb{E}(\epsilon_{ad}) = 0$. El usuario selecciona aquel arco que tenga el menor tiempo entre aquellos arcos salientes $a \in A_i^+$, según su propia percepción. Este proceso lo va repitiendo en cada nodo intermedio durante su viaje. Entonces, para cada destino $d \in D$, existe una cadena de Markov

subyacente en la red representada, donde para un nodo $i \neq d$, las probabilidades de transición están dadas por:

$$p_{i,j}^d = \begin{cases} \mathbb{P}(\tilde{z}_{ad} \leq \tilde{z}_{a'd}, \forall a' \in A_i^+) & \text{si } (i,j) = a \in A_i^+ \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

mientras que el nodo destino es un estado absorbente de la cadena, i.e. $P_{d,d}^d = 1$.

Basta saber con que la probabilidad de utilizar el arco a desde el nodo i puede expresarse como:

$$\mathbb{P}(z_{ad} \leq z_{a'd} \quad \forall a' \in A_i^+) = \frac{\partial \varphi_{id}}{\partial z_{ad}}(z_d) \quad (2.15)$$

donde $z_d \equiv (z_{ad})_{a \in A}$ y $\varphi_{id}(\cdot)$ son las funciones de tiempo esperado de viaje:

$$\varphi_{id}(z_d) \equiv \mathbb{E} \left(\min_{a \in A_i^+} \{z_{ad} + \epsilon_{ad}\} \right) \quad (2.16)$$

Estas funciones, que son no decrecientes por componente y cóncavas, están determinadas por las variables aleatorias ϵ_{ad} , y a su vez, por las variables ν_a . Las funciones que pertenecen a esta clase, denotada por \mathcal{E} , y en donde $\varphi_{dd} \equiv 0$, admiten una caracterización analítica, como se verá más adelante.

Con estos elementos, es posible describir las ecuaciones de Bellman de programación dinámica, de la forma $\tilde{\tau}_{id} = \min_{a \in A_i^+} \tilde{z}_{ad}$. Calculando el valor esperado a ambos lados de esta última la ecuación, se tiene que:

$$\begin{cases} z_{ad} = t_a + \tau_{jad} \\ \tau_{id} = \varphi_{id}(z_d) \end{cases}$$

las cuales pueden expresarse solo en términos de las variables τ_{id} :

$$\tau_{id} = \varphi_{id} \left((t_a + \tau_{jad})_{a \in A} \right). \quad (2.17)$$

Por otro lado, sea x_{id} el flujo esperado que entra al nodo i con destino d . A_i^+ y A_i^- son los conjuntos de arcos salientes y entrantes del nodo i respectivamente. Luego, la condición de conservación de flujo requiere que:

$$x_{id} = g_{id} + \sum_{a \in A_i^-} v_{ad} \quad (2.18)$$

donde g_{id} es la demanda intrínseca desde el nodo i al destino d . El flujo esperado x_{id} se distribuirá entre los distintos arcos a siguiendo la relación:

$$v_{ad} = x_{id} \cdot p_a^d. \quad (2.19)$$

Las restricciones (2.18) y (2.19) pueden reescribirse utilizando una ecuación vectorial:

$$x_d = g_d + P^t x_d \quad (2.20)$$

donde P es la matriz que contiene las probabilidades que distribuyen el flujo x_{id} . Luego, computando las variables z_{ad} y las probabilidades en P , es posible resolver un sistema lineal de tipo *sparse*

$(I - P^t)x_d = g_d$ para encontrar los flujos en cada arco.

Dada una familia de funciones $\varphi_{id} \in \mathcal{E}$ con $\varphi \equiv 0$, y funciones estrictamente crecientes para los tiempos en arcos $s_a : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, el modelo MTE se formaliza con la siguiente definición:

Definición 2.1 *Un vector $v \in \mathbb{R}^{|A|}$ es un equilibrio Markoviano en transporte privado ssi $v_a = \sum_{d \in D} v_{ad}$ donde los valores v_{ad} satisfacen las ecuaciones (2.18) y (2.19) de conservación y distribución de flujos respectivamente, junto con los tiempos esperados de viaje τ_{id} como solución de (2.17) para $t_a = s_a(v_a)$.*

Baillon y Cominetti (2008) utilizan, para pruebas en redes de gran tamaño, una formulación de tipo BPR para los tiempos en arcos para incluir el efecto de la congestión, y una formulación de tipo logit para la función $\varphi(\cdot)$ de parámetros β_{id} :

$$\varphi_{id}(x) = -\frac{1}{\beta_{id}} \ln \left(\sum_{a \in A_i^+} e^{-\beta_{id} z_{ad}} \right) \quad (2.21)$$

obteniendo:

$$\tau_{id} = -\frac{1}{\beta_{id}} \ln \left(\sum_{a \in A_i^+} e^{-\beta_{id} z_{ad}} \right), \quad (2.22)$$

$$p_a^d = \frac{e^{-\beta_{id}(t_a + \tau_{jad})}}{\sum_{a' \in A_i^+} e^{-\beta_{id}(\tau_{a'd} + \tau_{j_a'd})}}. \quad (2.23)$$

El modelo MTE es suficientemente flexible para utilizar otras formulaciones para la asignación. En particular, es posible realizar asignaciones de tipo mixto, donde en ciertos nodos exista una asignación determinista, y en otros, estocástica. Además, en el modelo pueden incluirse procesos de decisión más complejos, como la elección de modo y ruta simultáneamente, así como también la posibilidad de no realizar un viaje si se consideran demandas elásticas: bastaría con adicionar un arco de no-viaje que conecte directamente el origen con el destino, con costo igual al inverso de la función de demanda.

Un aspecto importante sobre el modelo de equilibrio markoviano de transporte privado es asegurar su convergencia. Para ello, se requiere que los automovilistas lleguen a sus destinos durante un tiempo finito. Es decir, en el modelo no pueden existir tiempos esperados negativos dentro de la red, pues eso implicaría que cierto volumen de vehículos se mantuviera cautivo dentro de ciertos ciclos, al tratar de disminuir el tiempo de viaje entre un punto y otro. Por ello, Cominetti et al. (2012) indican que se asegura la convergencia si el vector de tiempos en arcos t pertenece al conjunto

$$\mathcal{C} = \left\{ t \in \mathbb{R}^{|A|} : \exists \hat{t} \text{ con } \hat{t}_{id} < \varphi_{id} \left((t_a + \hat{t}_{jad})_{a \in A} \right) \forall i \neq d \right\}.$$

Además, se indica que como las funciones $\varphi_i^d(\cdot)$ son continuas, cóncavas y no decrecientes por componente, para cualquier $t' > t$ se cumplirá que $t' \in \mathcal{C}$. Luego, si el vector de tiempos inicial t^0 pertenece al conjunto \mathcal{C} , cualquier vector con tiempos mayores a los iniciales asegurará que los tiempos esperados no sean negativos, y por lo tanto, no existirán ciclos dentro de la red.

Como los valores contenidos en el vector de tiempos en arcos t están comúnmente definidos por diseños y condiciones viales existentes al momento de correr este tipo de modelos y son imposible de modificar sin intervenir la red vial -mediante la construcción de nueva infraestructura, por ejemplo-, para cumplir la restricción asociada al conjunto \mathcal{C} se deben modificar los parámetros de las funciones $\varphi_i^d(\cdot)$, que en el caso particular de distribuciones logit, concretamente significa utilizar aquellos valores de los parámetros β_{id} tal que el vector t obtenido pertenezca al conjunto \mathcal{C} . Estos parámetros tienen una doble función dentro del modelo: por un lado, muestran la valoración del tiempo de viaje que tienen los usuarios; y por otro, es el parámetro que modifica -en forma inversamente proporcional- la varianza de los tiempos de viaje al escoger un arco, z_{ad} , cuyo error sigue una distribución Gumbel.

2.6. Modelos de Equilibrio con Elección Modal

En la formulación de modelos de equilibrio para redes multimodales, se observan avances importantes durante los últimos 25 años (Florian, 1977; Florian y Spiess, 1983; Wong, 1998). Estos modelos asumen que los pasajeros escogerán, desde el nodo de origen, solo un modo -también llamados *modos puros*- para hacer el viaje completo, por ejemplo, solo auto o solo bus. Por otro lado, utilizan una formulación logit para obtener la proporción de viajes en cada modo, de acuerdo al costo generalizado de cada una de las alternativas modales.

Durante los últimos años, la tendencia ha sido atraer pasajeros al transporte público y remover automóviles de las calles, por lo que han proliferado en los núcleos urbanos los sistemas *park'n ride*, donde la primera parte del viaje se realiza en automóvil, y luego el viaje es completado en algún otro modo de transporte público -trenes, buses, o metro-. Estas opciones de viaje se denominan *modos combinados*.

El incentivo a escoger estos modos combinados por parte de los pasajeros está relacionado con la congestión en las calles, frecuencia y precio de los servicios de transporte público, así como tarifa y la localización de los estacionamientos. La modelación de equilibrio en redes que incluyan modos combinados no ha sido una línea de investigación con grandes desarrollos, y los modelos existentes que toman en cuenta este aspecto en forma explícita son dos. En el primero, Florian y Los (1979) desarrollaron un modelo que determina las matrices origen-destino para la primera parte de los modos combinados, esto es, desde el hogar hasta el estacionamiento. El objetivo es predecir cambios en los flujos dependiendo de las políticas adoptadas en torno a los estacionamientos, tales como capacidad, tarifa o infraestructura asociada. El segundo modelo que trata los modos combinados es el de Fernández et al. (1994), donde se presentan algunos enfoques para formular un equilibrio en redes incluyendo modos combinados, que indican la elección de nodos de transferencia mediante un modelo logit anidado. Pero, una de las desventajas de este modelo es que asume funciones de costos simétricas, lo que reduce la gama de aplicaciones del modelo.

Para subsanar este último aspecto, García y Marín (2005) extienden el modelo previo para formulaciones de costos asimétricas. Esto es relevante, pues amplía las aplicaciones del modelo hacia redes en donde la congestión no tiene el mismo efecto en todos los arcos. Los autores utilizan también una formulación logit anidada en dos etapas: en la primera, se describe la elección de modo por parte del usuario, y en la segunda, la elección del nodo de transferencia, pero asumen un principio determinista de usuario que rige el modelo de elección de ruta en cada modo, despreciando la variabilidad en la percepción de los tiempos de viaje entre los usuarios.

Capítulo 3

Modelo de Equilibrio Estocástico en Transporte Público (STE) e Integración con Transporte Privado

3.1. Introducción

Los modelos de asignación y equilibrio de pasajeros en transporte público descritos en el cap. 2 coinciden mayormente al momento de representar el comportamiento de los pasajeros cuando abordan buses en paraderos. Aquellos modelos asumen que los pasajeros minimizan su tiempo esperado total de viaje, incluyendo tiempo de espera así como tiempo a bordo del vehículo, lo que redundaría en la selección de un conjunto de líneas óptimas que se desprende a partir de este criterio.

Por otro lado, estos modelos incorporan un elemento importante: la inclusión de la congestión en paraderos en las distintas formulaciones. La congestión está relacionada principalmente con la imposibilidad de los pasajeros para abordar algún bus, dado que puede darse eventualmente el caso de que no exista capacidad disponible dentro de él una vez que éste ha llegado al paradero. Sin embargo, también puede darse el caso que algunos pasajeros no aborden algún bus, aún cuando aquel bus tenga capacidad disponible. Este comportamiento podría explicarse por la propia percepción que tienen los pasajeros sobre el sistema, y que puede diferir de su operación real. Por ello, se hace necesario incluir un efecto estocástico al momento de tomar la decisión de abordar un bus en el paradero dentro de un modelo de equilibrio de transporte público con congestión, que refleje este tipo de decisiones y percepciones de los usuarios. Esta es la premisa del modelo que se formulará en el actual capítulo, y que lleva por nombre **Modelo de Equilibrio Estocástico en Transporte Público** -ó *Stochastic Transit Equilibrium, STE* por sus siglas en inglés- (Cortés et al., 2013).

El modelo STE es una extensión de la propuesta de Cominetti y Correa (2001) y de Cepeda et al. (2006), donde se asume que los pasajeros escogen efectivamente aquellas líneas que minimizan sus tiempos esperados de viaje, es decir, los usuarios computan y escogen la hiperruta óptima. La estocasticidad del modelo está dada por la inclusión de una distribución de probabilidades al momento de abordar un bus de alguna línea en específico, y que puede caracterizarse por la frecuencia observada o efectiva en el paradero en estudio, y los tiempos de viaje que conlleva la elección de esta línea. La formulación genera un problema estocástico de líneas comunes, en donde cada línea tiene una probabilidad intrínseca de ser escogida, aún cuando el servicio que se ofrece sea excesivamente lento

para alcanzar el destino requerido.

Por otro lado, el equilibrio en el modelo STE puede encontrarse en forma eficiente, pues las expresiones para el tiempo esperado a destino dan lugar a un sistema lineal de ecuaciones, lo que no representa una mayor dificultad para ser resuelto. Aquí, se debe hacer la diferencia con otros modelos de equilibrio, en donde es necesario computar la hiperruta óptima en forma previa antes de realizar la asignación de pasajeros (Spiess y Florian, 1989; Nguyen y Pallotino, 1988) o con los modelos de equilibrio deterministas (Cominetti y Correa, 2001; Cepeda et al., 2006), donde se resuelve un conjunto de ecuaciones generalizadas de Bellman, las cuales podrían llegar a ser no triviales de resolver.

3.2. Modelo STE: Líneas Comunes

En esta sección, se formula el modelo STE para el caso de líneas comunes, es decir, para un sólo par OD conectado por un conjunto de líneas. Dentro de la formulación, se incluye el concepto de *random incidence* (Larson y Odoni, 1981), redundando en una formulación general para el tiempo medio de espera que experimenta un pasajero en una parada, dado que para computar este valor basta con conocer la esperanza y la varianza del intervalo entre llegadas de buses.

Consideremos una red simple, formada por un nodo de origen O y un destino D , conectados por un conjunto finito de líneas o arcos A , como se muestra en la fig. 3.1. Cada arco $a \in A$ representa una línea de bus que sirve aquel único par OD, y es posible caracterizarlo por dos elementos. El primero es el tiempo de viaje fijo $t_a \in \mathbb{R}_+$. El segundo es la frecuencia nominal de servicio de la línea, μ_a . Sin embargo, hay casos en donde la capacidad limitada de los buses impide a algunos pasajeros abordar un determinado vehículo. Para modelar esta situación, se asume que la frecuencia de cada línea es posible representarla mediante una función de *frecuencia efectiva*, denotada por f_a , la cual es continua y decreciente en el flujo total de la línea a , denotado por v_a . Luego, $f_a : [0, c_a[\rightarrow]0, \mu_a[$, con la propiedad de que es igual a la frecuencia nominal de la línea cuando no hay flujo en aquel arco, y tiende a cero cuando se alcanza la capacidad c_a de la línea, es decir, $f_a \rightarrow \mu_a$ cuando $v_a \rightarrow 0$; y $f_a \rightarrow 0$ cuando $v_a \rightarrow c_a$ (Cominetti y Correa, 2001).

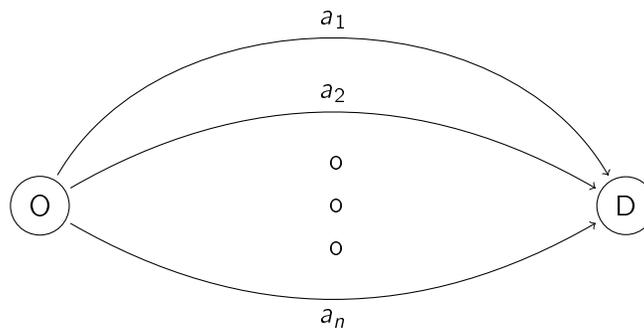


Figura 3.1: Problema de Líneas Comunes

El modelo estocástico incorpora la probabilidad condicional p_a de que un pasajero aborde un bus de la línea a en el paradero, dado que aquel bus llegó a la parada:

$$p_a = \mathbb{P}(\text{pasajero aborde bus de línea } a | \text{bus de la línea } a \text{ está en la parada}).$$

Cada pasajero que desee viajar desde O hasta D compara el tiempo de viaje si es que aborda el bus que está en la parada, respecto del tiempo total esperado si no aborda el bus, y se mantiene esperando en el paradero hasta la llegada del próximo bus:

$$\begin{aligned} \text{si pasajero aborda el bus} &\rightsquigarrow \text{ tiempo de viaje } t_a; \\ \text{si pasajero no aborda el bus} &\rightsquigarrow \text{ tiempo de viaje } T. \end{aligned}$$

Un supuesto fuerte detrás de esta formulación es que el proceso de llegadas se renueva completamente cuando un bus llega a una parada en particular. Luego, bajo este supuesto, el tiempo esperado total de viaje τ_d puede ser calculado como la suma entre el tiempo medio de espera en el paradero hasta la llegada del primer bus T_w y el tiempo esperado de viaje T_v .

El término del tiempo medio de espera T_w está relacionado con el fenómeno de *random incidence*. Supongamos que llega un pasajero a un paradero, y que la llegada de buses a la misma parada es una variable aleatoria Y con una distribución genérica. Es posible demostrar que el tiempo medio de espera T_w , medido como el lapso desde que llega el pasajero al paradero hasta que llega el primer bus -y que en la literatura es denominado como *random incidence*- está dado por la expresión (Larson y Odoni, 1981):

$$T_w = \frac{\sigma_Y^2 + \mathbb{E}^2[Y]}{2\mathbb{E}[Y]} \quad (3.1)$$

donde $\mathbb{E}[Y]$ y σ_Y^2 son la esperanza y la varianza de la variable aleatoria Y respectivamente.

El tiempo medio de viaje T_v considera la posibilidad de que un pasajero no aborde un bus en el paradero, en cuyo caso aquel pasajero ocupará un tiempo medio extra T en completar su viaje. Si se denota por \bar{p}_a a la probabilidad de que llegue un bus de la línea a antes que cualquier otro al paradero, el tiempo esperado de viaje que transcurre desde que el primer bus abandona el paradero hasta que el pasajero llega a destino es:

$$T_v = \sum_a \bar{p}_a (p_a t_a + (1 - p_a) T). \quad (3.2)$$

Luego, el tiempo medio total de viaje T es la suma del tiempo de espera T_w y el tiempo de viaje T_v .

$$\begin{aligned} T &= T_w + \sum_a \bar{p}_a (p_a t_a + (1 - p_a) T) \\ \Rightarrow T &= \frac{T_w}{\sum_a \bar{p}_a p_a} + \frac{\sum_a \bar{p}_a p_a t_a}{\sum_a \bar{p}_a p_a}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

La expresión (3.3) representa el tiempo estocástico esperado total de viaje, desde el origen O hasta el destino D , y depende mayoritariamente de la distribución de las llegadas de los buses al paradero. Esta es la formulación genérica del modelo STE. Pueden asumirse distintas distribuciones para el intervalo entre llegadas de buses: en la literatura existente, comúnmente se asume una distribución con intervalos constantes (Spiess y Florian, 1989) o distribución exponencial negativa para aquel intervalo (Cominetti y Correa, 2001; Cepeda et al., 2006) por su facilidad para incluirla analíticamente. Sin embargo, también pueden incluirse otras distribuciones como una Cowan M3, que es similar a una exponencial negativa, pero incluyendo términos adicionales para representar apaltonamiento de

buses. Una comparación entre algunas distribuciones se analiza profundamente en la sección 3.4.

En lo que sigue, se asumirá una distribución de llegadas Poisson de buses -ó, lo que es lo mismo, una distribución exponencial negativa para el intervalo entre llegadas-, en donde para cada línea se tiene un proceso de llegadas a tasa $f_a(v_a)$. Luego, es posible modelar la llegada de buses al paradero como un solo proceso de llegadas Poisson a tasa $\sum_a f_a(v_a)$. La media y la varianza de este proceso están dadas por:

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{\sum_a f_a(v_a)} \quad \sigma_Y^2 = \frac{1}{(\sum_a f_a(v_a))^2}. \quad (3.4)$$

Reemplazando las expresiones de (3.4) en la ecuación (3.1) de *random incidence*, resulta en un tiempo medio de espera de un pasajero hasta la llegada del primer bus T_w dado por:

$$T_w = \frac{1}{\sum_a f_a(v_a)}. \quad (3.5)$$

Por último, considerando llegadas Poisson de buses al paradero, el tiempo medio de viaje T en la expresión (3.3) desde O hasta D se transforma en:

$$T(v, \rho) = \frac{1}{\sum_a f_a(v_a) p_a} + \sum_a t_a \frac{f_a(v_a) p_a}{\sum_{a'} f_{a'}(v_a) p_{a'}}. \quad (3.6)$$

Es posible reinterpretar la ecuación (3.6) de la siguiente forma: $\frac{1}{\sum_a f_a(v_a) p_a}$ es el tiempo medio de espera que incorpora el elemento estocástico al momento de abordar el bus, mientras que el término $\frac{f_a(v_a) p_a}{\sum_{a'} f_{a'}(v_a) p_{a'}}$ es la probabilidad (absoluta) de abordar la línea a .

Ahora, considerando un flujo de pasajeros $x > 0$ que desea viajar desde O hasta D , notar que este flujo se divide entre todas las líneas, tal que $x = \sum_{a \in A} v_a$. Dado que la probabilidad absoluta de abordar un bus de la línea a está dada por $\frac{f_a(v_a) p_a}{\sum_{a'} f_{a'}(v_a) p_{a'}}$, entonces la asignación de pasajeros en un paradero puede calcularse mediante la siguiente expresión:

$$v_a = x \frac{f_a(v_a) p_a}{\sum_{a'} f_{a'}(v_a) p_{a'}} \quad \forall a \in A. \quad (3.7)$$

La formulación desarrollada en (3.6) y la expresión (3.7) determinan un conjunto de ecuaciones para $v = (v_a)_{a \in A}$ y $\rho = (p_a)_{a \in A}$. La solución a este sistema resulta ser el equilibrio en transporte público para una red simple conformada por un par OD. La demostración de la existencia de este equilibrio está contenida en Cortés et al. (2013).

Por otro lado, la inclusión del factor de estocasticidad en el modelo, dada por la probabilidad p_a , determina dos casos que se estudiarán a continuación, según cual sea la caracterización de este elemento: el caso determinista y el caso estocástico.

Caso Determinista

Si la decisión de subirse o no a un bus, dado que ese bus está en el paradero, se toma en forma determinista, entonces se tendrá la siguiente expresión para p_a :

$$p_a = \begin{cases} 0 & \text{si } t_a > \tau_d \\ 1 & \text{si } t_a \leq \tau_d \end{cases}$$

Es decir, los pasajeros hacen la comparación entre el tiempo que se demorarán hasta el destino si se suben al bus, y el tiempo medio de viaje si se quedan en el paradero y esperan el siguiente. Esta formulación conduce al clásico paradigma de líneas comunes (Chriqui y Robillard, 1975; De Cea y Fernández, 1993). Este mismo caso, pero incluyendo congestión, fue desarrollado por Cominetti y Correa (2001) y extendido por Cepeda et al. (2006).

Caso Estocástico

En este caso, la decisión de subirse al bus no se toma en forma determinista. Esto quiere decir que existe una probabilidad condicional p_a de subirse a un bus de la línea a , dado que un bus de esa línea se encuentra en la parada. Se modelará esta probabilidad de la siguiente forma: sea p_a una función φ_a continua y estrictamente decreciente, que depende de la diferencia entre el tiempo de viaje de la línea a y el tiempo medio de viaje τ_d , $\varphi_a : \mathbb{R} \rightarrow]0,1[$:

$$p_a \equiv \varphi_a(t_a - \tau_d). \quad (3.8)$$

Introduciendo este tipo de formulación para la probabilidad p_a , ya no es posible obtener el tiempo medio de viaje T como función de (v,p) tal como se demostró en (3.6). Luego, se definen las condiciones de equilibrio en función de la variable τ , que representa el tiempo esperado de viaje en equilibrio desde O hasta D . Agregando a lo anterior el sistema de ecuaciones (3.7), es posible definir formalmente las condiciones de equilibrio del modelo STE.

Definición 3.1 *Un equilibrio estocástico de líneas comunes es un par $(v^*, \tau^*) \in \prod_{a \in A}]0, c_a[\times \mathbb{R}_+$, tal que*

$$\begin{aligned} \tau^* &= T(v^*, p); \\ v_a^* &= x \frac{f_a(v_a^*) p_a}{\sum_{a' \in A} f_{a'}(v_{a'}^*) p_{a'}} \quad \forall a \in A; \\ p_a &= \varphi_a(t_a(v_a^*) - \tau^*) \quad \forall a \in A. \end{aligned}$$

3.3. Modelo STE: Formulación General

En esta sección se formulará el modelo de equilibrio estocástico en transporte público para una red general, descrito también en Cortés et al. (2013). Supongamos un grafo $G = (N, A)$ que representa una red genérica. Se denota i_a y j_a a los nodos cola y cabezal del arco $a \in A$ respectivamente; y se denota $A_i^+ = \{a \in A : i_a = i\}$ y $A_i^- = \{a \in A : j_a = i\}$ a los conjuntos de arcos salientes y entrantes del (al) nodo $i \in N$.

El conjunto de destinos se denota $D \subseteq N$, y para cada $d \in D$ y para cada nodo $i \neq d$ existe una demanda fija $g_{id} \geq 0$ dada. El conjunto $\mathcal{V} := \mathbb{R}_+^{|A| \times |D|}$ denota el espacio de los vectores de flujos arco-destino, con componentes no negativas $v_{ad} \geq 0$, mientras que \mathcal{V}_0 es el conjunto de los flujos factibles $v \in \mathcal{V}$ tal que $v_{ad} = 0$ para todo $a \in A_i^+$ y que satisface la siguiente restricción de conservación de flujo:

$$g_{id} + \sum_{a \in A_i^-} v_{ad} = \sum_{a \in A_i^+} v_{ad} \quad \forall i \neq d. \quad (3.9)$$

La formulación propuesta admite que los tiempos de viaje a bordo t_a y la frecuencia efectiva f_a dependan del vector de flujos v de la red, generalizando el modelo. En el primer caso, el tiempo a

bordo podría no solo depender del flujo en el propio arco, sino también de los flujos aguas abajo en la red. En el segundo, los tiempos de espera -caracterizados por la frecuencia de las distintas líneas- pueden verse afectados tanto por el flujo que aborda un bus como el que viene a bordo, consumiendo parte de la capacidad de la línea.

Precisando la idea, se asume que cada arco $a \in A$ se caracteriza por una función de tiempo a bordo $t_a : \mathcal{V} \rightarrow [0, \bar{t}_a]$, donde \bar{t}_a es la cota superior, conocido como *tiempo a flujo libre*; y una función de frecuencia efectiva $f_a : \mathcal{V} \rightarrow [0, +\infty[$ que puede ser igual a $+\infty$ o finita. En este último caso, para cada arco se asume que $f_a \rightarrow 0$, cuando se alcanza la capacidad de la línea, i.e., $v_a = \sum_d v_{ad} \rightarrow c_a$ con $f_a(v)$ estrictamente decreciente con respecto a v_a cuando este valor es positivo.

El principio fundamental detrás de la noción de equilibrio estocástico en transporte público es similar al definido en los modelos deterministas de Cominetti y Correa (2001) y Cepeda et al. (2006) en cuanto al procedimiento de elección de arcos para conformar una ruta. Consideremos un pasajero que viaja hacia el destino d y alcanza el nodo intermedio i en su viaje, como en la fig. 3.2. Para salir desde el nodo i , el pasajero puede usar cualquier arco $a \in A_i^+$ para alcanzar el próximo nodo j_a . Si el pasajero toma el tiempo de viaje en el arco $t_a(v)$ y el tiempo esperado $\tau_{j_a d}$ desde el próximo nodo j_a hasta d como fijos, entonces la decisión que enfrenta el pasajero en el nodo i es un problema de líneas comunes con un tiempo de viaje $t_a(v) + \tau_{j_a d}$ y frecuencias efectivas f_a que corresponden a cada línea $a \in A_i^+$. La solución de este problema estocástico de líneas comunes determina el tiempo esperado τ_{id} desde i hasta d . Esto genera un sistema lineal a través de los nodos de la red, que resuelve los tiempos $\tau_{id} \forall i \in N$, dado un destino d . Luego, el modelo de equilibrio estocástico es un conjunto de problemas estocásticos de líneas comunes -uno para cada par id -, en conjunto con restricciones de conservación de flujos (ec. 3.9).

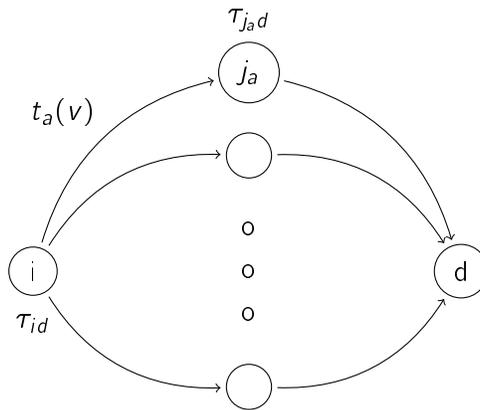


Figura 3.2: Problema de Líneas Comunes en una Red General

Se define el *flujo entrante en el nodo i con destino d* como:

$$x_{id}(v) := g_{id} + \sum_{a \in A_i^-} v_{ad}. \quad (3.10)$$

Para mantener consistente el modelo en cuanto a la continuidad de flujo, se fija:

$$g_{dd} = - \sum_{i \in D: i \neq d} g_{id} \quad (3.11)$$

Con estos elementos, se indica a continuación la definición formal del equilibrio STE.

Definición 3.2 *Un par de vectores de flujos factible y de tiempos esperados de viaje $(v^*, \tau^*) \in \prod_{a \in A} [0, c_a] \times \mathbb{R}_+^{N \times D}$ es un Equilibrio Estocástico de Transporte Público si $\forall d \in D$ y $\forall i \in N$, con $i \neq d$, se tiene:*

$$\begin{aligned} \tau_{id}^* &= \frac{1 + \sum_{a \in A_i^+} p_a^d f_a(v^*) (t_a(v^*) + \tau_{jad}^*)}{\sum_{a \in A_i^+} f_a(v^*) p_a^d} ; \\ v_{ad}^* &= x_{id}(v^*) \frac{f_a(v^*) p_a^d}{\sum_{a \in A_i^+} f_a(v^*) p_a^d}, & \forall a \in A_i^+; \\ p_a^d &= \varphi(t_a(v^*) - \tau_{jad}^* - \tau_{id}^*) & \forall a \in A_i^+. \end{aligned}$$

Las condiciones de equilibrio aquí expuestas son una adaptación de las condiciones deterministas desarrolladas en Cominetti y Correa (2001) y Cepeda et al. (2006). Sin embargo, una de las diferencias principales del modelo determinista con respecto al modelo STE, es que este último no utiliza el cómputo de la estrategia óptima entre cada par OD previo a realizar la asignación, pues todas las líneas tienen una probabilidad de ser escogidas -aún en el caso en que los niveles de servicio de alguna de ellas sea muy bajo con respecto a las otras, esta línea tendrá una probabilidad p_a baja, pero mayor a 0-. Adicionalmente, debe notarse que no es necesario utilizar un enfoque de programación dinámica para el cómputo de los tiempos esperados τ_{id} , pues la definición 3.2 determina un sistema de ecuaciones lineales para la resolución de estos valores, como se verá en mayor profundidad en el capítulo 4, haciendo que la búsqueda del equilibrio sea más simple.

3.4. Análisis del Tiempo de Espera en Paraderos

En esta sección, se analizará el término del tiempo de espera en paraderos dentro del modelo STE. Como ya se señaló en la sección 3.2, el tiempo medio de espera de un pasajero que desea abordar un bus está relacionado con el fenómeno de *random incidence*. Este valor, denotado por T_w , queda establecido por la expresión (3.2). Luego, el tiempo de espera estocástico T_w^{st} que se obtiene desde el modelo STE para una distribución genérica de llegada de buses al paradero puede determinarse a partir de la ec. (3.3):

$$T_w^{st} = \frac{T_w}{\sum_a \bar{p}_a p_a}. \quad (3.12)$$

Si bien el modelo STE se desarrolló en un principio asumiendo una distribución Poisson para la llegada de buses, el modelo es suficientemente flexible para adoptar otras distribuciones, a partir de la ecuación anterior. Por ejemplo, es posible asumir una distribución Cowan M3 para el intervalo entre llegadas, cuya función de distribución acumulativa (cdf) es:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \Delta \\ 1 - \Phi e^{-\lambda(t-\Delta)} & \text{si } t \geq \Delta \end{cases} \quad (3.13)$$

donde Δ es un parámetro de tiempo mínimo entre buses consecutivos -*headway de seguridad*-, Φ es la proporción de los vehículos no apelonados -vehículos libres-, y λ es la tasa de llegada de buses

al paradero. Luego, la distribución Exponencial es un caso particular de la Cowan M3, que se obtiene cuando no ocurre apelsonamiento de buses ($\Phi = 1$) y el headway de seguridad es inexistente ($\Delta = 0$).

Ahora, si cada una de las líneas a tuvieran una distribución de llegada $Y_a \rightsquigarrow \text{Cowan}(f_a, \Phi_a, \Delta)$, entonces la llegada de buses al paradero entre un conjunto acotado de líneas atractivas, dado que un pasajero llega en un instante aleatorio, sigue una distribución $Y \rightsquigarrow \text{Cowan}(\sum_a f_a, \prod_a \Phi_a, \Delta)$ (ver anexo A.1).

La esperanza y la varianza de la variable aleatoria Y están dadas por (Vasconcellos et al., 2012):

$$\mathbb{E}[Y] = \Delta + \frac{\prod_a \Phi_a}{\sum_a f_a} \quad \sigma_Y^2 = \frac{\prod_a \Phi_a (2 - \prod_a \Phi_a)}{(\sum_a f_a)^2}. \quad (3.14)$$

Además, la probabilidad \bar{p}_a de que llegue un bus de la línea a antes que cualquier otro al paradero es (ver anexo A.2):

$$\bar{p}_a = \prod_{a'} \Phi_{a'} \frac{\lambda_a}{\sum_{a'} \lambda_{a'}} \quad (3.15)$$

Reemplazando las expresiones (3.14) y (3.15) en el tiempo de espera T_w de la ec. (3.2), y a su vez, en el tiempo de espera estocástico de la ec. (3.12), se obtiene la siguiente expresión para T_w^{st} :

$$T_w^{st} = \frac{2(\prod_a \Phi_a)(1 + \Delta \sum_a f_a) + (\Delta \sum_a f_a)^2}{\underbrace{2(\Delta \sum_a f_a + \prod_a \Phi_a) \prod_a \Phi_a}_\omega} \cdot \frac{1}{\sum_a f_a p_a} \quad (3.16)$$

Luego, cuando el intervalo del tiempo entre llegadas de las líneas de buses se asume Cowan M3, el tiempo de espera estocástico difiere en un factor ω de aquel escenario en donde tal intervalo distribuye Exponencial. Este factor puede amplificar o disminuir el tiempo de espera con respecto a la distribución de llegadas Poisson original del modelo STE, como se discute más adelante en esta sección.

Para validar el tiempo de espera estocástico obtenido en la ec. (3.16), se realizaron dos tipos de simulaciones. En la primera, se simula la operación de un paradero aislado, con dos líneas de buses, al cual los pasajeros llegan según una distribución Poisson a tasa v . La capacidad residual de cada bus que llega al paradero es una variable aleatoria uniforme entre 0 y C , y cada pasajero aborda un bus de la línea a con una probabilidad condicional p_a fija, dado que un bus de aquella línea se detuvo en la parada. Entonces, se calcula el tiempo promedio empírico de espera T_w^{sim} entre todos los pasajeros, y la partición entre líneas $\hat{\delta}_a$.

En la segunda simulación, se calcula el tiempo promedio estimado de espera de la línea a , $T_{w,a}^{est}$, mediante la simulación de cada línea por separado, en las mismas condiciones que la primera simulación, pero ahora la llegada de pasajeros distribuye Poisson a tasa $v_a = \hat{\delta}_a v$ según sea la línea simulada. Por último, se obtiene el tiempo promedio estimado de espera T_w^{est} como:

$$T_w^{est} = \left(\frac{1}{T_{w,1}^{est}} + \frac{1}{T_{w,2}^{est}} \right)^{-1} \quad (3.17)$$

Se fijaron distintas combinaciones para los parámetros de frecuencia nominal μ_a , probabilidad condicional de abordar p_a y capacidad total de los buses C , haciendo un total de 126 instancias de simulación para cada una de las distribuciones señaladas en la tabla 3.1, donde en cada instancia

se simularon 10.000 llegadas de pasajeros. Se obtuvo una diferencia entre los tiempos simulados y estimados de solo un 2,1 % en promedio, validando la estimación del tiempo de espera estocástico en el modelo STE.

Tabla 3.1: Distribuciones Simuladas y Diferencia Promedio entre Tiempo de Espera Simulado y Estimado

Distribución	Δ [min]	Φ	Diferencia Promedio T_w^{sim} y T_w^{est}
Exponencial M1	0	1	1,79 %
Cowan M3	2	1	2,13 %
Cowan M3	2	0,9	1,92 %
Cowan M3	2	0,8	1,91 %
Cowan M3	2	0,6	2,80 %

De las 126 instancias simuladas, para efectos de comparación entre las distintas distribuciones, se escogieron 10 de ellas bajo el criterio de variación en las probabilidades p_a . Estas instancias se precisan en la tabla 3.2, manteniendo la misma frecuencia nominal para ambas líneas: $\mu_a = 12[buses/hr]$. Los tiempos de espera promedio simulados para estas instancias, con capacidades C iguales a 42, 80 y 160 [pax/bus] se muestran en las figs. 3.3, 3.4 y 3.5 respectivamente.

Tabla 3.2: Instancias Comparables para Validación de Tiempos de Espera

# Instancia	Probabilidad	
	p_1	p_2
1	1	1
2	1	0,8
3	0,8	0,8
4	1	0,5
5	1	0,4
6	0,8	0,5
7	0,8	0,4
8	0,5	0,5
9	0,5	0,4
10	0,4	0,4

De estos resultados, se desprende que el factor ω que modifica el tiempo de espera estocástico en el modelo STE para las distribuciones Cowan M3 puede ser mayor o menor a 1, dependiendo de los parámetros que se le asignen a estas distribuciones, aumentando o disminuyendo el tiempo de espera con respecto al escenario original con una distribución exponencial para el intervalo de tiempo entre llegadas de buses.

Imponiendo un headway mínimo de seguridad y permitiendo una alta proporción de vehículos libres (Cowan M3 con $\Delta = 2$, $\Phi \geq 0,8$), ningún bus llegará en un intervalo menor a ese headway, y los tiempos de espera serán mayores para la proporción de pasajeros que, comparado a la situación base con distribución exponencial, arriban al paradero cuando el intervalo entre llegadas de buses es igual o menor al headway de seguridad.

Por otro lado, dejando fijo el headway de seguridad, pero aumentando el apelonamiento, -i.e. disminuyendo el parámetro Φ de proporción de vehículos libres- los tiempos de espera son gradualmente menores. Esto ocurre porque la proporción de vehículos apelonotados -cuyos intervalos entre llegadas tiende a igualarse al headway de seguridad- es mayor, y por tanto, la espera para los pasajeros disminuye.

Por último, al realizar una comparación de los tiempos de espera entre las instancias seleccionadas, se observa una tendencia al alza de este valor mientras las probabilidades condicionales disminuyen. Esto es totalmente esperable: cuando se introduce el efecto estocástico, habrá pasajeros que aumentarán sus tiempos de espera porque tomarán la decisión de no subirse al bus que está detenido en el paradero, prefiriendo esperar el próximo.

Los resultados obtenidos en términos generales con las instancias de simulación coinciden con las ideas intuitivas que existen al modificar la distribución de llegadas de buses, introduciendo los efectos de apelonamiento y headway de seguridad. Además, es evidente el efecto de aumentos en los tiempos de espera al introducir la componente estocástica en la decisión de abordar un bus.

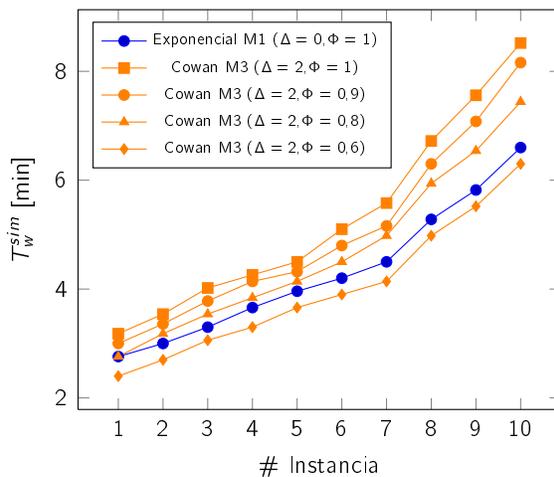


Figura 3.3: Tiempos Medios de Espera Simulados, $Q = 42$ [pax/bus]

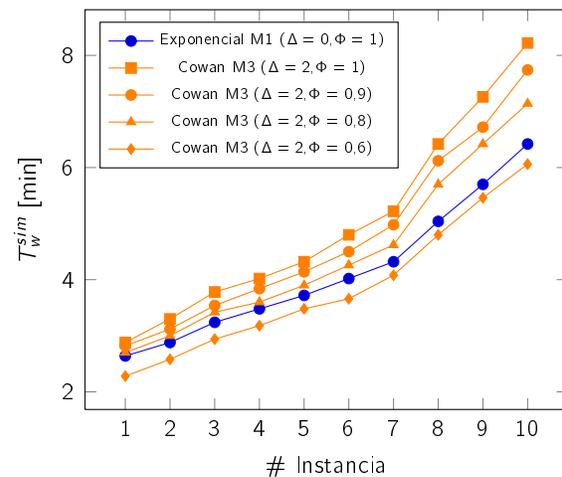


Figura 3.4: Tiempos Medios de Espera Simulados, $Q = 80$ [pax/bus]

3.5. Modelos Integrados de Equilibrio (IEM)

En esta sección se presentan dos versiones del Modelo Integrado de Equilibrio de Transporte Público y Privado (*Integrated Equilibrium Model, IEM*), tomando como base el modelo STE por un lado, y el modelo MTE de Baillon y Cominetti (2008) por otro. Ambos modelos interactúan a nivel de infraestructura -pues ambos modos podrían utilizar el mismo espacio físico en el contexto urbano-, y también a nivel de partición modal, pues existe una parte de la población que tiene opción de escoger en cual modo realizar el viaje, o incluso combinar ambos.

En primer lugar, se resolverá el caso particular en donde los usuarios de transporte privado tienen la posibilidad de escoger los llamados *modos puros*, es decir, utilizar solo el automóvil para realizar sus viajes; o dejarlo en sus hogares y utilizar solo el transporte público. En una segunda parte, el modelo

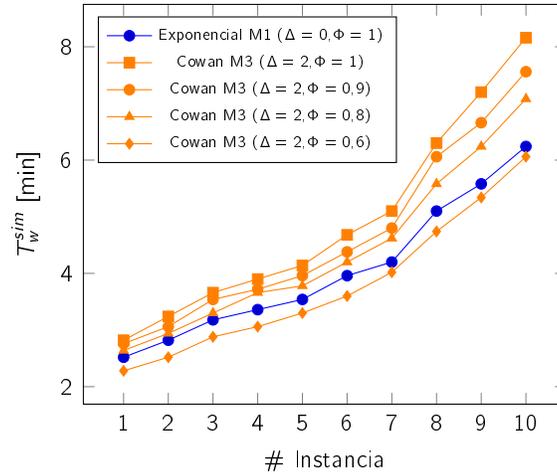


Figura 3.5: Tiempos Medios de Espera Simulados, $Q = 160[\text{pax}/\text{bus}]$

previo se extenderá hacia la elección de *modos combinados*, donde se agrega la opción en los cuales los usuarios con disponibilidad de auto pueden realizar la primera parte de sus viajes en este medio, y luego, en alguna estación intermedia de transferencia, realizar la segunda parte del viaje en transporte público, como en los sistemas de *park & ride* que han proliferado en algunas ciudades alrededor del mundo, como una manera de evitar la congestión vehicular dentro de zonas urbanas e incentivar el uso eficiente del transporte público.

3.5.1. Modelo Integrado con Elección de Modos Puros (IEM-PM)

El modelo integrado con elección de modos puros -denotado por la sigla *IEM-PM*- permite obtener una asignación de equilibrio entre la red de transporte público -basado en el modelo STE- y la red de transporte privado -basado en el modelo MTE-, aprovechando la misma plataforma en la cual están diseñados ambos modelos.

La idea detrás del modelo IEM es la siguiente: los usuarios con disponibilidad de automóvil realizan una elección modal en el nodo de origen, antes de comenzar el viaje. Estos usuarios tienen la posibilidad de escoger si utilizar el auto, manteniéndose en esta red, o utilizar el bus, traspasándose a la red de transporte público. A su vez, los usuarios que sólo tienen disponibilidad de bus son *usuarios cautivos* de esta última red.

La elección modal para los usuarios que tienen la opción de escoger el modo se realiza mediante una función logit, que toma en cuenta los costos generalizados de viajar en una u otra red, función denotada por $U_{i,d}^m$ para el origen i y el destino d en el modo m , con $m \in \{B,C\}$ que representan los modos *bus* y *auto* respectivamente. La función de costo generalizado o función de utilidad modal puede contener los tiempos de viaje esperados $\tau_{i,d}^m$ de la red respectiva, los costos monetarios de utilizar cada modo -tarifa, precio del combustible, etc.- y una serie de otros aspectos que involucran la elección modal, como el confort o hacinamiento en los vehículos.

Sea $G_{i,d}^B$ la variable que denota la cantidad de usuarios que solo tienen disponibilidad de bus entre

el par id , y sea G_{id}^C la variable que denota la cantidad de usuarios que pueden escoger libremente entre el auto o el bus para realizar el viaje en aquel par. Luego, en el equilibrio, las demandas en ambas redes que alimentan los modelos STE y MTE respectivamente, son las siguientes:

$$g_{id}^{B*} = G_{id}^B + G_{id}^C \cdot \frac{e^{U_{id}^{B*}}}{e^{U_{id}^{B*}} + e^{U_{id}^{C*}}} \quad (3.18)$$

$$g_{id}^{C*} = G_{id}^C - G_{id}^C \cdot \frac{e^{U_{id}^{B*}}}{e^{U_{id}^{B*}} + e^{U_{id}^{C*}}} \quad (3.19)$$

Notar que la expresión $G_{id}^C \cdot \frac{e^{U_{id}^{B*}}}{e^{U_{id}^{B*}} + e^{U_{id}^{C*}}}$ representa la cantidad total de usuarios que, observando los costos generalizados de viajar en ambas redes, prefieren utilizar el bus, y traspasarse desde la red de transporte privado a la de transporte público. Gráficamente, la partición modal en las distintas redes se muestra en la fig. 3.6.

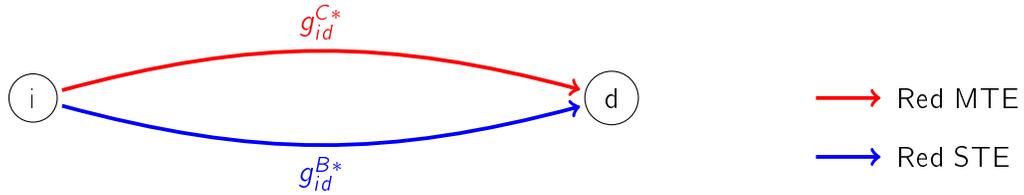


Figura 3.6: Partición Modal de IEM-PM en Redes MTE y STE

3.5.2. Modelo Integrado con Elección de Modos Combinados (IEM-CM)

La extensión natural del modelo previo es la inclusión de modos combinados, en el cual un usuario que tiene disponibilidad de auto podría escoger realizar la primera parte del viaje en este medio, dejarlo estacionado en alguna estación intermedia de transferencia dispuesta para ese fin, y desde allí, completar el viaje en transporte público hasta el destino final. Así operan los modelos de *park & ride* implementados en algunas ciudades, donde las estaciones de transferencia se ubican generalmente en la periferia de la ciudad, para incentivar la utilización del transporte público dentro de ellas y así disminuir los niveles de congestión de vehículos en las calles mas céntricas. Esta extensión del modelo IEM se denotará por la sigla *IEM-CM*.

Alrededor del mundo, una gran cantidad de ciudades cuentan desde hace décadas con esquemas de *park & ride*. Por ejemplo, en la ciudad de Oxford, en el Reino Unido, se implementó un esquema que conecta cinco estacionamientos en la periferia con un sistema de buses hacia el centro de la ciudad. Este mismo esquema fue replicado en la década pasada por la ciudad de Norwich, también en el Reino Unido, la cual cuenta con seis sitios de estacionamiento. También, el tren ha sido otro de los modos de transporte público que han funcionado en forma exitosa en conjunto con sitios de estacionamiento, como en las ciudades de Bristol, Tiverton y Didcot en el Reino Unido. Y en Estados Unidos, destaca la ciudad de Boston, la cual cuenta con estacionamientos conectados tanto al sistema de trenes interurbanos como a la red de metro.

Para modelar este tipo de elección modal, se utilizará la formulación logit jerárquica de García y Marín (2005), donde la decisión del modo de viaje incluye simultáneamente la elección del estacionamiento donde hacer la transferencia entre el auto y el sistema de transporte público, si se ha escogido realizar el viaje en un modo combinado. Sin embargo, al existir una correlación fuerte entre las opciones de modos combinados, que comparten ciertos atributos que definen la elección modal, como son la tarifa del estacionamiento o la incomodidad del trasbordo, el supuesto de alternativas independientes que sustenta el modelo logit multinomial no es aplicable en ese caso. Luego, se justifica utilizar una estructura logit jerárquica en estos casos de elección modal.

Sea m el modo, con $m \in \{B, C, P\}$ para los modos *bus*, *auto* y *modo combinado* respectivamente, y sea $K_P \subset D$ el conjunto de nodos de transferencia dispuestos en la red vial para realizar el traspaso desde el automóvil hacia el transporte público. La localización de los estacionamientos es fija.

Se denota por $g_{id,k}^P$ a la cantidad total de usuarios que viajan entre el origen i y el destino d en el modo combinado P , y que escogen el nodo de transferencia $k \in K_P$. Esquemáticamente, la desagregación de la demanda debido a la elección modal de los usuarios con disponibilidad de auto entre las diferentes opciones se muestra en la fig. 3.7, donde cada nivel representa una decisión que aquellos usuarios deben tomar.

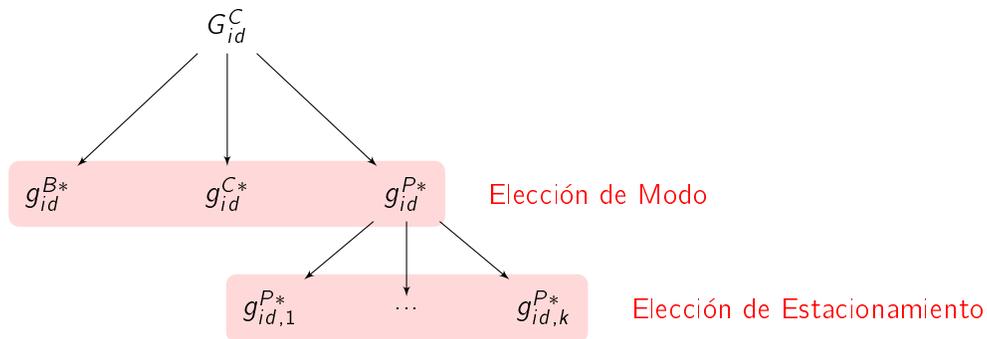


Figura 3.7: Arbol de Decisión entre Distintos Modos y Estaciones de Transferencias

Al igual que en el modelo integrado con modos puros, en el modelo que incorpora los modos combinados se debe realizar una elección primaria del modo a utilizar, considerando los costos generalizados de cada opción. Sea γ_{id}^m la probabilidad de escoger el modo m para viajar entre el par id . Entonces:

$$\gamma_{id}^m = \frac{e^{U_{id}^{m*}}}{\sum_{m' \in \{B, C, P\}} e^{U_{id}^{m'*}}} \quad (3.20)$$

Los costos generalizados en el caso de los modos puros tienen la misma expresión utilizada en el modelo IEM-PM, donde acá solo falta estimar el costo generalizado de escoger el modo combinado. Sea $U_{id,k}^P$ la función del costo generalizado de utilizar el modo combinado entre el par id y utilizando el nodo de transferencia k . Esta función puede depender, además de los tiempos de viajes esperados tanto en auto como en el bus, de otros aspectos como seguridad del estacionamiento, comodidad, accesibilidad, tarifa, etc. Luego, la estimación del mínimo de los costos generalizados entre todos los nodos de transferencia existentes, que finalmente será el costo generalizado de escoger el modo combinado, puede hacerse mediante una formulación log-suma de la forma:

$$U_{id}^{P*} = \frac{1}{\beta_P} \ln \left(\sum_{k \in K_P} e^{\beta_P \cdot U_{id,k}^{P*}} \right) \quad (3.21)$$

donde β_P pondera la importancia de la percepción del costo generalizado en la elección del nodo de transferencia, o también se puede interpretar como el parámetro de escala de la distribución Gumbel que rige en el nivel inferior del logit jerárquico.

Para aquellos usuarios que escogen el modo combinado, la probabilidad de elegir el nodo k como transferencia es entonces:

$$\gamma_{id,k}^P = \frac{e^{\beta_P \cdot U_{id,k}^{P*}}}{\sum_{k' \in K_P} e^{\beta_P \cdot U_{id,k'}^{P*}}} \quad (3.22)$$

Finalmente, la demanda entre el par id en los modos auto y bus son:

$$g_{id}^{B*} = G_{id}^{B*} + \gamma_{id}^B \cdot G_{id}^C \quad (3.23)$$

$$g_{id}^{C*} = \gamma_{id}^C \cdot G_{id}^C \quad (3.24)$$

y la cantidad total de usuarios que escogen el modo combinado entre el par id y que utilizan el nodo de transferencia k es:

$$g_{id,k}^{P*} = \gamma_{id,k}^P \cdot \underbrace{\gamma_{id}^P \cdot G_{id}^C}_{g_{id}^{P*}} \quad (3.25)$$

Gráficamente, la partición modal en las distintas redes para el modelo IEM-CM se muestra en la fig. 3.8.

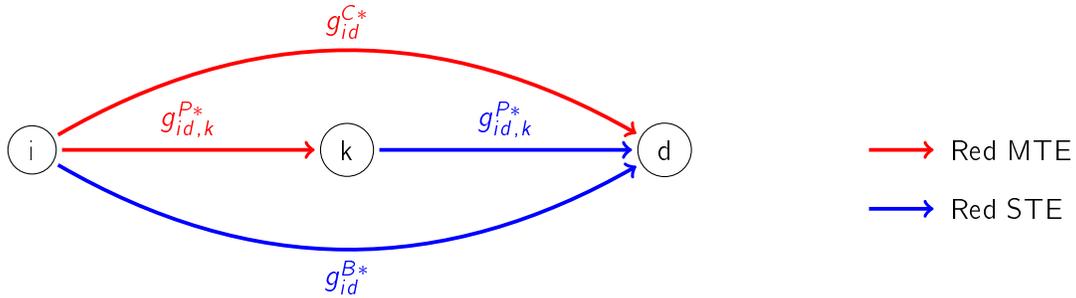


Figura 3.8: Partición Modal Modelo IEM-CM en Redes MTE y STE

En síntesis, se desarrolló un modelo de equilibrio estocástico de pasajeros en transporte público, introduciendo la incertidumbre que tienen los usuarios frente a las condiciones existentes en un sistema de transporte público. Por otro lado, se propusieron dos versiones para conformar un modelo integrado de equilibrio en transporte público y privado basado en los modelos STE y MTE respectivamente, los cuales interactúan entre sí a nivel de la demanda: hay una proporción de usuarios que pueden escoger el modo que utilizarán para sus viajes (IEM-PM) o incluso combinarlos (IEM-CM), por lo que existe un volumen de demanda que es traspasada desde la red de transporte privado hacia la de transporte

público por el modelo integrado. En el próximo capítulo, se discutirán aspectos de implementación, tanto del modelo STE como del modelo integrado IEM, y se analizarán resultados en redes pequeñas, para observar como se comportan los modelos frente a cambios paramétricos; como el rendimiento en redes de gran tamaño de una ciudad real.

Capítulo 4

Algoritmos de Solución y Resultados Empíricos

En este capítulo se presenta, en primer lugar, el algoritmo de resolución del equilibrio STE, para luego aplicarlo en ciertos experimentos numéricos con una red pequeña, para probar el comportamiento del modelo y la eficiencia del algoritmo de resolución. Luego, se integra este algoritmo con un módulo de resolución del modelo MTE, para obtener un equilibrio conjunto entre transporte público y privado correspondiente al modelo IEM. Además, se analizan algunos resultados empíricos y rendimiento de la implementación de estos algoritmos en redes de gran tamaño.

4.1. Implementación STE

El algoritmo propuesto en esta sección permite encontrar el equilibrio de pasajeros para el modelo estocástico en transporte público. El modelo STE contiene dependencias cruzadas entre los términos del tiempo esperado de viaje τ_{id} , las probabilidades de abordar un bus p_a , las frecuencias efectivas f_a , los tiempos en arcos t_a y los flujos arco-destino v_{ad} . Por ello, el algoritmo básicamente trata de resolver de un problema de punto fijo entre estos valores, que están interrelacionados entre sí bajo la definición 3.2 de equilibrio estocástico y la ecuación (3.9) de conservación de flujo.

El algoritmo está basado en el *Método de Promedios Sucesivos (Method of Successive Averages, MSA)*, el cual es un método iterativo (Sheffi, 1985). En cada ciclo n del método, se genera una asignación de flujo inducido \hat{v} , y se promedia mediante un ponderador $\alpha_n \in [0,1]$ con la asignación obtenida en la iteración anterior v^{n-1} , obteniendo un nuevo vector de flujos v^n . Al final de cada ciclo, se computa la diferencia entre las normas euclidianas normalizadas de los vectores de flujos \hat{v} y v^{n-1} , deteniéndose cuando esta diferencia se encuentre por debajo de un criterio de convergencia previamente definido.

Antes de analizar el algoritmo en forma más profunda, se describe en la siguiente subsección una construcción auxiliar de la red, la cual es necesaria para la implementación del algoritmo de equilibrio STE.

4.1.1. Red Extendida

Para poder implementar en forma consistente el algoritmo STE, además de ser capaces de realizar un seguimiento a los flujos resultantes y verificar las condiciones de conservación de flujo, se debe

describir en detalle la operación del transporte público y de los pasajeros al momento de abordar o descender de un bus. Para ello, es necesario añadir nodos y arcos auxiliares a la red original. Esta red se denota como *red extendida*.

Típicamente, las codificaciones de las redes de transporte público contienen dos tipos de nodo: los centroides, que representan las zonas urbanas desde donde se genera y se atrae demanda, y los paraderos, que es donde los buses se detienen físicamente a recoger y dejar pasajeros. Para los primeros, en el algoritmo STE se crea un *nodo centroeide* $d \in N_z$, y para los segundos, se crea un *nodo de parada* $s \in N_s$, representando el paradero. Luego, por cada línea l que se detenga en el nodo de parada s , se crea un *nodo de línea* $h_s^l \in N_l$ adicional. Al conjunto completo de nodos de la red extendida se denota por $N = N_z \cup N_s \cup N_l$.

La topología original de la red contempla arcos de caminata entre los centroides y las paradas cercanas a él, con frecuencias efectivas $f_a = \infty$, pues estos arcos están siempre disponibles una vez que el pasajero decide ir hasta el paradero, y no tienen tiempo de espera asociado. El tiempo de viaje en estos arcos es igual al tiempo de caminata entre el centroeide y el paradero.

Por otro lado, la red original se extiende agregándole arcos de subida (s, h_s^l) y arcos de bajada (h_s^l, s) por cada línea l que se detenga en la parada s . En los arcos de subida la frecuencia es igual a la frecuencia efectiva f_a que tenga la línea correspondiente en aquella parada, mientras que a priori, el tiempo de viaje t_a en estos arcos se asume despreciable e igual a cero, aunque el modelo es suficientemente flexible para poder fijar valores mayores a cero en caso de incluir, por ejemplo, tiempos de transferencia en paraderos. A su vez, los arcos de bajada tienen tiempos de viaje $t_a = 0$ por la misma razón que en el caso anterior, y frecuencia efectiva $f_a = \infty$, pues un pasajero no tendrá que esperar para descender de un bus, una vez que éste se ha detenido en un paradero. Por último, se agrega a la topología de la red original arcos a bordo ($h_s^l, h_{s'}^l$) para cada segmento de línea existente entre los nodos consecutivos s y s' en la ruta de la línea l , con tiempos de viaje correspondientes a aquellos computados entre paraderos en la red original, y frecuencia efectiva $f_a = \infty$. Una representación gráfica de una parada con una línea y conectada a un centroeide se muestra en la fig. 4.1.

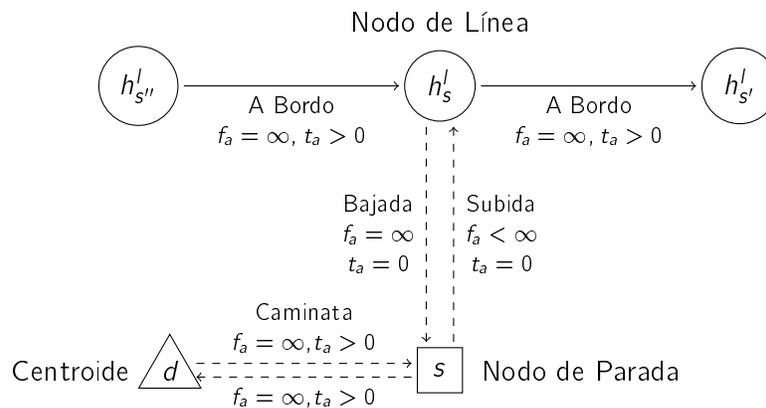


Figura 4.1: Representación de una Parada en la Red Extendida

Notar que para los nodos de línea, todos los arcos salientes -arcos de bajada y a bordo-, tienen frecuencia efectiva infinita, al igual que en los nodos centroides, donde los arcos de caminata presentan tales características. En estos casos, el término para el tiempo esperado en equilibrio τ_{id}^* de la definición

3.2 se reformulará de la siguiente forma: se reemplazan los términos $f_a(v^*) = f_\infty$ para todos los arcos salientes desde ese nodo, y luego se toma el límite con respecto a $f_\infty \rightarrow \infty$. Es decir:

$$\tau_{id}^* = \lim_{f_\infty \rightarrow \infty} \frac{1 + \sum_{a \in A_i^+} p_a^d f_\infty (t_a(v^*) + \tau_{jad}^*)}{\sum_{a \in A_i^+} f_\infty p_a^d} = \frac{\sum_{a \in A_i^+} p_a^d (t_a(v^*) + \tau_{jad}^*)}{\sum_{a \in A_i^+} p_a^d}, \quad \forall i \in N_z \cup N_l. \quad (4.1)$$

Así mismo, la expresión de flujos arco-destino de la definición 3.2 también se reformulará para los nodos centroide y de línea como sigue:

$$v_{ad}^* = \lim_{f_\infty \rightarrow \infty} x_{id}(v^*) \frac{f_\infty p_a^d}{\sum_{a \in A_i^+} f_\infty p_a^d} = x_{id}(v^*) \frac{p_a^d}{\sum_{a \in A_i^+} p_a^d}, \quad \forall a \in A_i^+, \forall i \in N_z \cup N_l. \quad (4.2)$$

Por otro lado, los nodos de parada presentan arcos salientes que combinan frecuencias finitas e infinitas. Para utilizar las expresiones de la definición 3.2, es necesario hacer la siguiente consideración en el algoritmo: cuando se esté resolviendo el problema para el destino d , se comprueba en cada nodo de parada si el centroide d es inmediatamente contiguo. En ese caso, se suprimen los arcos de subida desde aquel nodo, pues se asume que los pasajeros son racionales y no se subirán a algún otro bus, sino que caminarán desde el paradero hacia el centroide de destino. Al contrario, si ninguno de los centroides contiguos al nodo de parada corresponde al destino d analizado, entonces se suprimen los arcos salientes de caminata desde este nodo de parada, obligando a los pasajeros a abordar algún otro bus para llegar a destino. Gráficamente, estas modificaciones se muestran en la fig.4.2, con los arcos suprimidos en color rojo.

Con lo anterior, es posible utilizar las expresiones de la definición 3.2 si todos los arcos salientes tienen frecuencia finita, o las expresiones condensadas (4.1) y (4.2) cuando todos los arcos salientes tienen frecuencia infinita.

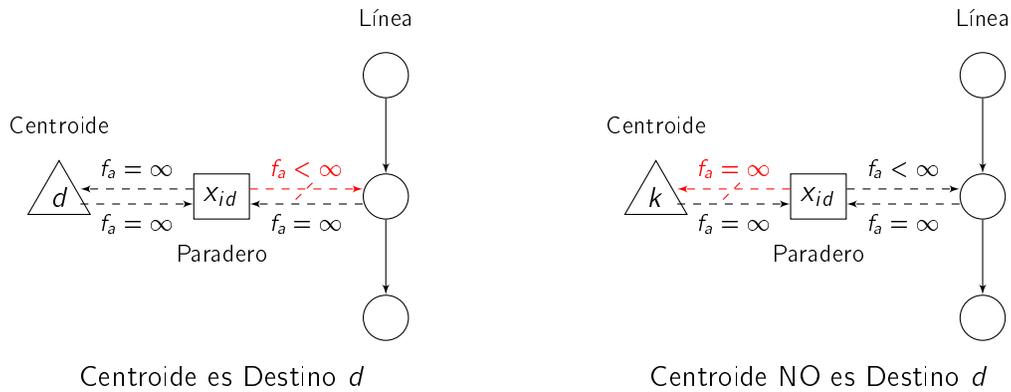


Figura 4.2: Modificación de Red para Nodos de Parada

Para efectos de notación en este capítulo, $[\delta_{ij}]$ denotará la matriz de incidencia en la red extendida, de manera que:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si existe arco } a = (i,j) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Con la definición de la red extendida ya señalada, se describirá a continuación cómo computar el equilibrio para el modelo STE. Para ello, es necesario precisar cómo se determinan los tiempos esperados de viaje τ_{id} en la red, definir formas funcionales para las probabilidades condicionales p_a^d , y por último, cómo se obtiene el vector de flujo inducido, dado un par de vectores de tiempos esperados y de probabilidades.

4.1.2. Resolución de Tiempos Esperados de Viaje

Los tiempos esperados de viaje τ_{id} se resuelven mediante un sistema de ecuaciones lineales. En cada nodo $i \in N$ de la red extendida, y para cada destino $d \in D$, se cuenta con la expresión para τ_{id} descrita en la definición 3.2. En el caso en que i sea un nodo de parada y el destino d no es contiguo a i , reordenando los términos de la definición 3.2, se obtiene:

$$\sum_{i \in A_i^+} f_a(v) p_a^d (\tau_{id} - \tau_{jad}) = 1 + \sum_{i \in A_i^+} f_a(v) p_a^d t_a(v), \quad \forall i \in N_s \text{ con } \delta_{id} = 0. \quad (4.3)$$

Si i es un nodo de línea, nodo centroide, o nodo de parada contiguo a d , entonces para todos los arcos salientes de i se cumple que $f_a(v) \rightarrow \infty$. Luego, la expresión para τ_{id} de la definición 3.2, se convierte en la ecuación (4.1). Reordenando términos:

$$\sum_{i \in A_i^+} p_a^d (\tau_{id} - \tau_{jad}) = \sum_{i \in A_i^+} p_a^d t_a(v), \quad \forall i \in N_z, N_l \text{ y } \forall i \in N_s \text{ con } i \neq d \wedge \delta_{id} = 1. \quad (4.4)$$

Para el caso $i = d$, el modelo exige que $\tau_{dd} = 0$. Dado lo anterior, y para evitar una sobredeterminación del sistema lineal de ecuaciones para los tiempos esperados, esta relación no se incluye en su resolución. Entonces, las expresiones (4.3) y (4.4) conforman un sistema lineal de ecuaciones de tamaño $N - 1 \times N - 1$, el que entrega los valores τ_{id} con $i \neq d$, para un vector de flujos v dado. El sistema puede ser resuelto mediante librerías o paquetes computacionales ya existentes, que obtienen un vector de soluciones en forma eficiente. Para efectos de prueba, en esta tesis se utilizó una licencia académica de la librería PARDISO (Schenk et al., 2007, 2008) programado en lenguaje C++, y que puede descargarse en <http://www.pardiso-project.org>.

4.1.3. Probabilidad Condicional de Abordar un Bus

Como se mencionó en la sección 3.2, el modelo de equilibrio estocástico incorpora la probabilidad de que un pasajero aborde un bus de la línea a , dado que un bus de esa línea se detuvo en el paradero. Para el caso de una red general, esta probabilidad denotada por p_a^d , es una función continua y estrictamente decreciente $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow]0,1[$, que depende de la diferencia entre la suma del tiempo de viaje de la línea a , t_a , y el tiempo esperado desde el siguiente nodo τ_{jad} por un lado; y el tiempo total esperado de viaje τ_{id} por otro, tal como se indica en la definición 3.2.

Existen varias formas de definir las funciones φ , siempre que cumplan con las condiciones de continuidad y decrecimiento estricto. Además, hay una condición que asegura existencia del equilibrio STE en el caso de líneas comunes, con un par OD y n líneas paralelas (Cortés et al., 2013):

$$s\varphi'_a(s) + \varphi_a(s) > 0 \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad (4.5)$$

Sin embargo, existen otras definiciones para la función φ que, aunque no cumplan la condición 4.5, igualmente convergen a un equilibrio estocástico en transporte público en el caso general -con más de un par OD-, como se verá en la sección 4.2. Algunos ejemplos para estas funciones son:

$$p_a^d \equiv \varphi_a^d(t_a + \tau_{jad} - \tau_{id}) = \frac{1}{1 + e^{\theta(t_a + \tau_{jad} - \tau_{id})}}, \quad \forall a \in A; \forall d \in D; \theta \in \mathbb{R}_+; \quad (4.6)$$

o también:

$$p_a^d \equiv \varphi_a^d(t_a + \tau_{jad} - \tau_{id}) = \frac{1}{2} + \frac{\arctan(\theta(t_a + \tau_{jad} - \tau_{id}))}{\pi}, \quad \forall a \in A; \forall d \in D; \theta \in \mathbb{R}_+. \quad (4.7)$$

Para efectos de pruebas de los algoritmos de solución STE, se ocupará la formulación (4.6), la cual es conocida como una formulación de tipo *logística*. En este caso, el parámetro θ representa el grado de estocasticidad de un pasajero al momento de abordar un bus que está actualmente en la parada, o quedarse en ella y esperar el siguiente. Todo esto, para reflejar la variabilidad por parte de los usuarios frente a la elección de rutas en sistemas de transporte público. En el límite, cuando θ se hace muy grande, se recupera el caso determinista, donde $p_a^d = \{0,1\}$. Esto se observa en la fig. 4.3, donde se ha graficado la formulación logística para distintos valores de θ .

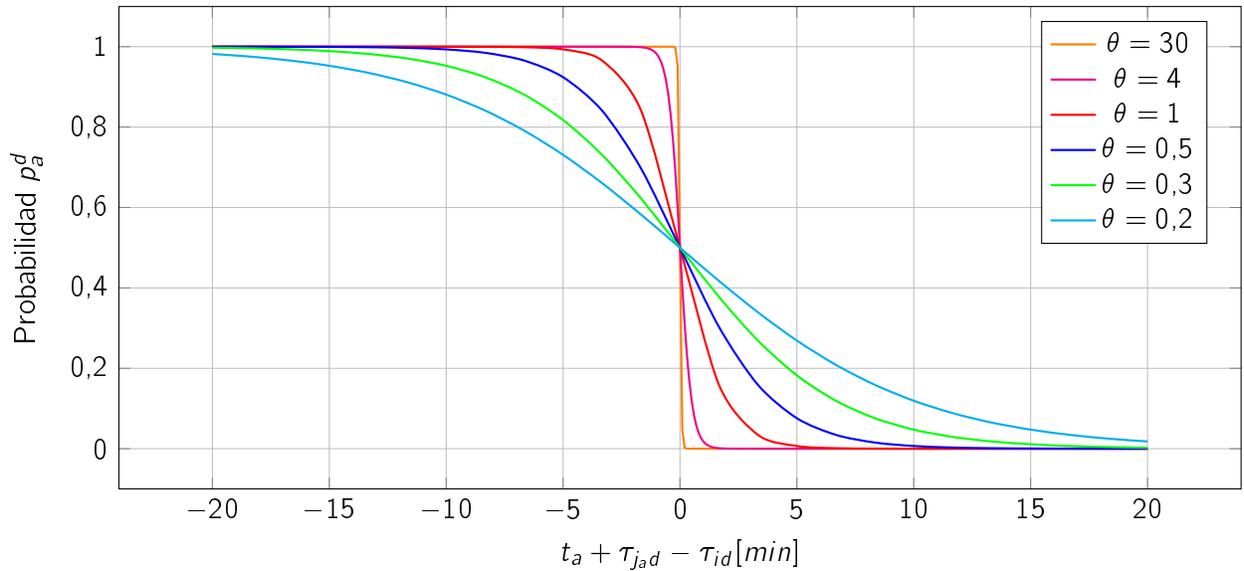


Figura 4.3: Formulación Logística para Probabilidad de Abordar un Bus, p_a^d

Notar que $p_a^d \rightarrow 1$ a medida que la diferencia entre $t_a + \tau_{jad}$ y τ_{id} se hace muy negativa; es decir, si el tiempo promedio al esperar por el proximo bus supera por mucho al tiempo de viaje si se aborda el bus que está actualmente en el paradero. Esto último es intuitivo: un pasajero no esperaría el siguiente bus si el tiempo total esperado de viaje -que incluye el tiempo de espera- es mucho más alto que tomar el bus que está en el paradero, y preferiría entonces tomar este último para llegar a destino. Por otro lado, si el tiempo promedio al esperar el próximo bus y el tiempo de viaje si se aborda el bus que está actualmente en el paradero es el mismo, entonces el pasajero es indiferente entre subirse al bus o quedarse en el paradero esperando el siguiente, por lo que la probabilidad de abordar es 0,5.

4.1.4. Resolución del Flujo Inducido

En esta sección, se analiza la resolución de la asignación de flujo resultante o *vector de flujo inducido* \hat{v} para un destino d , dado un par de vectores de frecuencias efectivas y de probabilidades condicionales de abordar un bus en cada arco. Se introduce esta notación para diferenciar estos valores del vector de flujos finales v de cada iteración del algoritmo MSA (ver alg. 4.1).

Para cualquier nodo $i \in N$ de la red extendida, se debe cumplir la restricción de conservación de flujo descrita en (3.9). Por otro lado, la asignación inducida en arcos se realiza mediante la siguiente expresión:

$$\hat{v}_{ad} = \hat{x}_{id}(v) \frac{f_a(v)p_a^d}{\sum_{a' \in A_i^+} f_{a'}(v)p_{a'}^d}, \quad \forall a \in A_i^+. \quad (4.8)$$

Reemplazando la ecuación (4.8) en la expresión de conservación de flujo (3.9), entonces:

$$\hat{x}_{id}(v) = g_{id} + \sum_{a \in A_i^-} \underbrace{\hat{x}_{ia}d}_{\hat{v}_{ad}} \frac{f_a(v)p_a^d}{\sum_{a' \in A_{ia}^+} f_{a'}(v)p_{a'}^d}, \quad \forall i \in N \quad (4.9)$$

donde el nodo i_a es el nodo cola de cada arco entrante a en el nodo i , como se muestra esquemáticamente en la fig. 4.4.

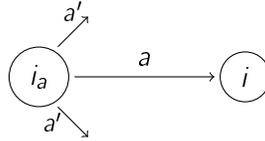


Figura 4.4: Esquema Sistema Lineal de Ecuaciones para el Flujo Inducido

Recordar que en el caso de nodos centroide, de línea, o de parada contiguo a destino, se debe tomar límite de las expresiones (4.8) y (4.9) con respecto a $f_a \rightarrow \infty$ para integrarlos al algoritmo STE. Las expresiones de (4.9) definen para cada destino $d \in D$ un sistema de ecuaciones lineales de tamaño $N \times N$ para el flujo saliente inducido desde el nodo i con destino d , \hat{x}_{id} , el cual puede resolverse mediante los mismos paquetes computacionales descritos en la sección anterior. Luego, con estos valores ya resueltos, se realiza la asignación inducida en arcos \hat{v}_{ad} como indica la ecuación (4.8).

4.1.5. Algoritmo STE

Con la definición de la red extendida en transporte público, el cómputo de los valores esperados del tiempo de viaje, la caracterización de la función de probabilidad para abordar un bus, y la resolución del flujo inducido, se cuenta con los elementos necesarios para presentar el algoritmo STE, que encuentra el equilibrio de pasajeros en transporte público, mediante el Algoritmo 4.1.

Cabe destacar que existen diversos métodos para definir el tamaño del paso α_n de MSA en cada iteración. Es posible asegurar la convergencia del método MSA en el algoritmo 4.2 si el tamaño del

Algoritmo 4.1 Implementación del Modelo de Equilibrio Estocástico en Transporte Público (STE)

- 1: Realizar una asignación inicial v^0 para cada arco.
- 2: Fijar $n \leftarrow 0$.
- 3: **repeat**
- 4: Fijar $n \leftarrow n + 1$.
- 5: Computar frecuencias efectivas $f_a^n = f_a(v^{n-1})$.
- 6: Computar tiempos de viaje $t_a^n = t_a(v^{n-1})$.
- 7: **for all** destino $d \in D$ **do**
- 8: Resolver sistema lineal de ecuaciones:

$$\tau_{id}^n = \frac{1 + \sum_{a \in A_i^+} f_a^n p_a^d \cdot (t_a^n + \tau_{jad}^n)}{\sum_{a \in A_i^+} f_a^n p_a^d} \quad \forall i \in N_s \text{ con } \delta_{id} = 0$$

ó bien,

$$\tau_{id}^n = \frac{\sum_{a \in A_i^+} p_a^d \cdot (t_a^n + \tau_{jad}^n)}{\sum_{a \in A_i^+} p_a^d} \quad \forall i \in N_z, N_l \text{ y } \forall i \in N_s \text{ con } i \neq d \wedge \delta_{id} = 1$$

- 9: Computar probabilidades $p_a^d = \varphi(t_a^n + \tau_{jad}^n - \tau_{id}^n)$.
- 10: Computar flujos inducidos en arcos:

$$\hat{v}_{ad} = x_{id} \frac{f_a^n p_a^d}{\sum_{d' \in A_i^+} f_{d'}^n p_{d'}^d} \quad \forall i \in N_s \text{ con } \delta_{id} = 0$$

ó bien:

$$\hat{v}_{ad} = x_{id} \frac{p_a^d}{\sum_{d' \in A_i^+} p_{d'}^d} \quad \forall i \in N_z, N_l \text{ y } \forall i \in N_s \text{ con } \delta_{id} = 1$$

- 11: **end for**
 - 12: Actualizar asignación de flujos $v^n = (1 - \alpha_n)v^{n-1} + \alpha_n \hat{v}$.
 - 13: **until** $\frac{\|\hat{v} - v^{n-1}\|}{\|\hat{v}\|} < \epsilon$.
-

paso α_k satisface las siguientes condiciones (Sheffi, 1985):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty \quad (4.10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty \quad (4.11)$$

Comúnmente, el valor considerado para esta metodología algorítmica en la literatura es el de $\alpha_n = \frac{1}{n}$. Sin embargo, para las diferentes redes evaluadas, se utilizaron distintas formulaciones para este parámetro, que si bien no cumplen las condiciones (4.10) y (4.11), igualmente convergen hacia el equilibrio. Dependiendo del tamaño y la topología de la red, la formulación que alcanza una convergencia más rápida que las otras varía, como se verá en las instancias evaluadas con el algoritmo en la siguiente sección.

4.2. Experimentos STE

En esta sección se describen y analizan algunos experimentos numéricos que permiten observar el comportamiento del modelo STE con los correspondientes equilibrios obtenidos. En primer lugar, se implementa el algoritmo STE en una red simple con líneas comunes, para realizar una comparación entre el equilibrio que se obtiene con el modelo estocástico y el modelo determinista (Cominetti y Correa, 2001; Cepeda et al., 2006). Luego, se analizan instancias en una red de tamaño medio, correspondiente a la ciudad de Sioux Falls, en EE.UU., que permite comparar cómo cambian las estrategias y segmentos de ruta escogidos por los usuarios, en base a distintos grados de estocasticidad. Finalmente, se prueba el algoritmo STE en una red real de transporte público, perteneciente a la ciudad de Iquique, Chile.

4.2.1. Experimento STE en Líneas Comunes

La red que se ocupa para la implementación del algoritmo STE en el caso de líneas comunes será la misma de Cepeda et al. (2006), para comparar su modelo determinista con el modelo estocástico desarrollado en esta tesis. La red se conforma de tres nodos, entre los cuales existe demanda de pasajeros entre tres pares OD. Se ejecutan dos corridas de ambos modelos: el primero corresponde al caso *no congestionado*, con bajos niveles de demanda entre los pares OD y el otro, es el *caso congestionado*, donde se aumenta fuertemente el nivel de demanda para uno de esos pares. Ambas redes se ejemplifican en la fig. 4.5, donde en cada arco se registran las demandas g_{id} para cada par OD, en unidades de [pax/hr].

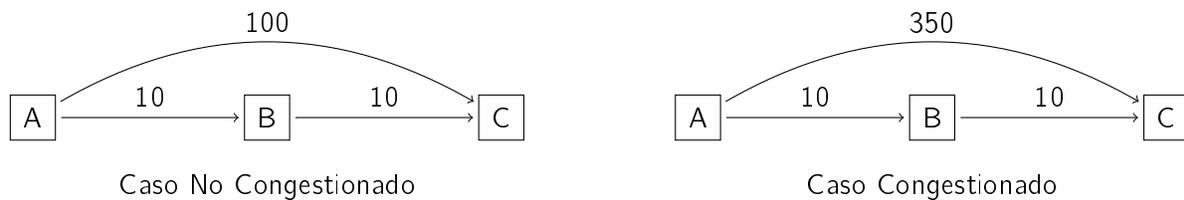


Figura 4.5: Volumen de Demandas para Ejemplo STE Líneas Comunes, en [pax/hr]

La red de Cepeda et al. (2006) cuenta con dos líneas de transporte público. Una línea expresa que sólo sirve el par AC, y otra línea local que recorre los tres nodos, tal como se muestra en la fig. 4.6. Las frecuencias nominales y capacidades de las líneas, además de los tiempos de viaje en arco en cada caso -constantes para este ejemplo- se presentan en las tablas 4.1 y 4.2.

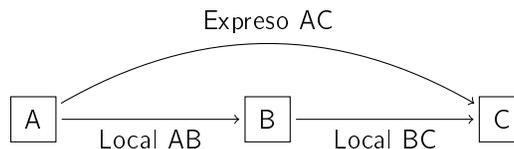


Figura 4.6: Líneas de Transporte Público para Ejemplo STE Líneas Comunes

La frecuencia efectiva $f_a(v)$ para los arcos de subida utilizada es la mostrada en la ecuación (2.7) de Cepeda et al. (2006), con un exponente $\beta = 0,2$, y la formulación para la probabilidad de abordar un bus p_a^d es la de tipo logística (ec. 4.6), para una gama amplia de valores del parámetro θ . La

Tabla 4.1: Parámetros de Líneas de Buses para Ejemplo STE Líneas Comunes

Línea	Frecuencia [buses/hr]	Capacidad [pax/hr]
Expreso	16	320
Local	6	120

Tabla 4.2: Parámetros de Segmentos para Ejemplo STE Líneas Comunes

Segmento	Tiempo de Viaje [min]
Expreso	24
Local AB	20
Local BC	20

precisión del algoritmo para esta instancia es de $\epsilon = 1 \cdot 10^{-9}$, y el parámetro MSA utilizado es $\alpha_n = \frac{1}{n}$.

Los flujos en equilibrio del modelo STE y la comparación con el modelo determinista de Cepeda et al. (2006) se reportan en la tablas 4.3 y 4.4.

Tabla 4.3: Flujos en Equilibrio de Ejemplo STE Líneas Comunes, Caso No Congestionado

Segmento	Cepeda et al. (2006)	$\theta = 30$	$\theta = 10$	$\theta = 1$	$\theta = \frac{1}{4}$	$\theta = \frac{1}{16}$
Expreso	84.3	84.1	84.0	83.4	82.8	81.0
Local-AB	25.7	25.9	26.0	26.6	27.2	29.0
Local-BC	25.7	25.9	26.0	26.6	27.2	29.0

Tabla 4.4: Flujos en Equilibrio de Ejemplo STE Líneas Comunes, Caso Congestionado

Segmento	Cepeda et al. (2006)	$\theta = 30$	$\theta = 10$	$\theta = 1$	$\theta = \frac{1}{4}$	$\theta = \frac{1}{16}$
Expreso	260.5	260.5	260.5	260.5	260.5	260.8
Local-AB	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.2
Local-BC	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.2

En el caso no congestionado, los resultados muestran una cierta influencia del parámetro θ : cuando este valor es alto, el modelo STE se acerca al equilibrio obtenido por el modelo determinista, lo cual es un resultado esperado, pues en el límite, cuando θ es muy grande, se recupera la formulación determinista para la probabilidad p_a^d . En cambio, cuando el valor de θ es bajo, los pasajeros tienen una percepción distinta a la operación real del sistema, producto del efecto estocástico, e incrementando la asignación de flujo en la línea local.

Para el caso congestionado, se observa que el valor de θ no influye mayormente en los resultados, y el equilibrio STE es prácticamente idéntico al obtenido por el modelo determinista.

Luego, con este ejemplo, es posible observar que el modelo estocástico produce asignaciones más dispersas que el modelo determinista, para escenarios de baja congestión. En cambio, en escenarios

de alta congestión, ambos modelos producen asignaciones similares, independiente del valor de θ , lo cual habla de la generalidad del modelo estocástico.

4.2.2. Experimentos STE en Redes de Gran Tamaño

El algoritmo STE también fue testeado en algunas redes de mayor tamaño. En primer lugar, se tomó como base la red de transporte privado de la ciudad de Sioux Falls en el estado de Dakota del Sur, EE.UU., de Bar-Gera (2011), pero aplicando aquella codificación de red como si perteneciera a un sistema de transporte público de tipo metro. Por otro lado, se probó el modelo STE en la red real de transporte público de la ciudad de Iquique, en el norte de Chile.

Sioux Falls, SD (EE.UU.)

La red de transporte privado de Sioux Falls tiene 24 nodos y 76 arcos unidireccionales, como se muestra en la fig. 4.7. Para efectos de pruebas del modelo STE en esta red, se asumió la matriz de viajes de transporte privado contenida en Bar-Gera (2011) como la matriz de transporte público, que totalizan 360.600 [viajes/hr]. Cada nodo de la red genera y atrae demanda, por lo que cada uno de ellos es un nodo de parada y centroide a la vez.

Se diseñaron cuatro líneas bidireccionales de transporte público. Cada línea tiene una frecuencia nominal de $\mu_l = 30[tren/hr]$ y una capacidad de $c_l = 1500[pax/tren]$. La red diseñada, basada en una red de ferrocarril urbano, se muestra en la fig. 4.8, donde solo se representan los nodos de parada.

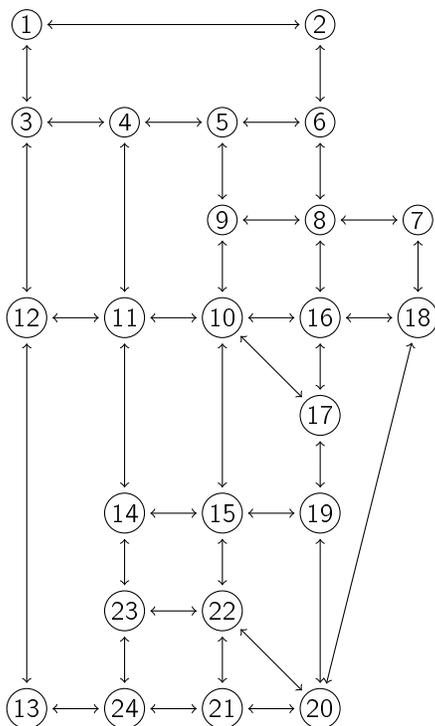


Figura 4.7: Red Original de Transporte Privado en Sioux Falls

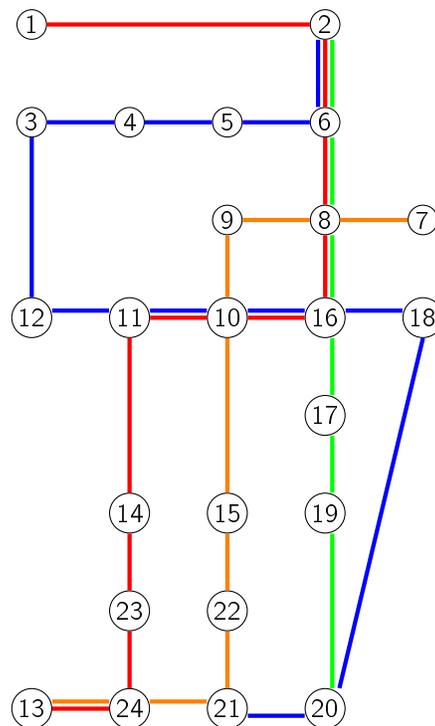


Figura 4.8: Diseño de Líneas de Transporte Público en Sioux Falls

Al implementar el algoritmo STE en Sioux Falls, los números de nodos y arcos utilizados en la codificación de la red se muestran en la tabla 4.5. Notar que el término *arcos* en la red real se refiere a segmentos de línea entre dos paraderos consecutivos, mientras que en el caso de la red extendida define un segmento de línea, un arco de subida o bajada, o un arco de caminata.

Tabla 4.5: Tamaño de Red Sioux Falls en Modelo STE

Tipo de Red	Centroides	Paraderos	Nodos Totales	Arcos
Real	24	24	48	70
Extendida	24	24	102	210

Se probaron un conjunto de instancias para la red de Sioux Falls, en donde la única diferencia es el parámetro θ de la función de probabilidad de abordar un bus, p_a^d , utilizando una formulación logística (ec. 4.6). Luego, lo que varía entre las distintas instancias es la estocasticidad en la toma de decisiones por parte de los usuarios. La formulación de frecuencia efectiva es la de Cepeda et al. (2006) (ec. 2.7), con exponente $\beta = 5,0$. Además, el criterio de convergencia se fijó en $\epsilon = 10^{-9}$ y el ponderador MSA es $\alpha_n = \frac{1}{n}$. Las instancias probadas alcanzaron el criterio de convergencia en torno a 250 interacciones, con un tiempo de ejecución de 80 segundos¹.

Para el análisis de resultados obtenidos en la red de Sioux Falls, es posible realizar comparaciones entre instancias deterministas y estocásticas si se definen algunos indicadores de dispersión de flujos en equilibrio en la red. En principio, en las instancias altamente deterministas los usuarios tienden a escoger en forma mayoritaria la hiperruta mínima, ocasionando que aquellos arcos o segmentos contenidos en esta hiperruta resulten con flujos $v_{ad}^* > 0$, mientras que en aquellos arcos que pertenecen a hiperrutas subóptimas, $v_{ad}^* = 0$. Entonces, se define el *grado de uso de red*, denotado ψ_d^B , como el cociente entre el número de segmentos de línea utilizados en la red para alcanzar el destino d , y el número total de segmentos de línea disponibles. No entran en este análisis los arcos de caminata o de subida/bajada, pues lo que interesa es analizar la operación del transporte público.

Un *segmento o arco utilizado* es aquel que cumple $v_{ad}^* > 0$. Sin embargo, como se trata de implementaciones y resoluciones numéricas, se considera para este ejemplo que un segmento utilizado es aquel que cumple $v_{ad}^* > \xi \approx 0$. En el caso de Sioux Falls, $\xi = 0,5[pax/hr]$.

Para ejemplificar esto último, se grafican los segmentos utilizados para el destino $d = 10$ en un caso altamente determinista ($\theta = 30$) en la fig. 4.9; y otro caso de alta estocasticidad ($\theta = 0,5$) en la fig. 4.10. En ellos, se aprecia que el uso de la red aumenta fuertemente, pasando de un patrón basado en hiperruta mínima en el caso determinista, con $\psi_{10}^B = 0,46$, hacia el caso estocástico en donde el flujo está más disperso, utilizando una mayor cantidad de segmentos, pues ahora el grado de uso de red indica $\psi_{10}^B = 0,91$.

Otro indicador interesante de analizar para observar la dispersión de flujos es la *diferencia relativa* D_d existente entre los vectores de flujo en equilibrio del caso determinista con respecto al caso estocástico para el destino d . Este indicador se calcula de la siguiente manera:

$$D_d = \frac{\|v_d^{det} - v_d^{ins}\|}{\|v_d^{det}\|}, \quad (4.12)$$

¹CPU Intel Core 2 Quad Q6600 @ 2.4GHz y RAM 3.5GB

donde v_d^{det} es el vector de flujo-destino en equilibrio para el caso determinista, y v_d^{ins} es el vector de flujo-destino en equilibrio para cualquier otra instancia comparable, ambos para el destino d en análisis, y cambiando sólo el nivel de estocasticidad en cada instancia.

Por otro lado, también es posible aplicar este indicador sobre el vector de flujos totales por arco, para observar variaciones generales en la red:

$$\bar{D} = \frac{\|v^{det} - v^{ins}\|}{\|v^{det}\|} \quad (4.13)$$

Por último, para observar si las diferencias entre instancias de los vectores flujo-destino y también de los vectores de flujos totales son estadísticamente significativas, se realiza la prueba estadística *t-test* para muestras pareadas, comparando los vectores obtenidos en cualquier instancia con respecto a los vectores de flujos en la situación determinista. En esta prueba, la hipótesis nula indica que la diferencia componente a componente de los vectores v_d^{det} y v_d^{ins} tiene una media igual a cero, con una varianza desconocida, a un nivel de significancia estándar de 5%. En otras palabras, si con la prueba estadística se obtiene un *p-valor* mayor a 0,05, se acepta la hipótesis nula. En caso contrario, se rechaza esta hipótesis, encontrándose diferencias estadísticamente significativas entre ambos vectores. Esta misma idea se aplica a la diferencia de los vectores de flujos totales v^{det} y v^{ins} .

Los resultados obtenidos para distintas instancias en la red de Sioux Falls, junto con los indicadores señalados anteriormente, se muestran en la tabla 4.6 cuando se analizan los resultados para el destino $d = 10$. Además, a modo de graficar la influencia de la estocasticidad sobre otras variables del modelo, se incluyó el valor del tiempo esperado de equilibrio $\tau_{1,10}^{B*}$ desde el origen 1 hasta el destino 10 de la red, el cual va aumentando progresivamente mientras aumenta la estocasticidad del modelo STE. El resultado es esperable, pues si se aumenta la estocasticidad, los usuarios integran otras estrategias subóptimas para viajar entre este par OD y que tienen tiempos de viaje mayores al mínimo, obtenido en el caso determinista. Por lo tanto, el tiempo esperado recoge este efecto, aumentando su valor. Por otro lado, con la prueba estadística *t-test* realizada, se encuentra que en el intervalo $\theta \in [30,1]$ no existen diferencias significativas en los flujos de equilibrio obtenidos, pudiéndose asegurar que cuando se fija el parámetro θ en ese intervalo se replican los resultados obtenidos con la instancia determinista. Mientras, cuando $\theta < 1,0$, los vectores de flujo-destino obtenidos en estas instancias de tipo estocásticas tienen diferencias significativas con respecto a la instancia determinista, pues el *t-test* arroja *p-valores* muy bajos -mucho menores a 0,05- en estas instancias probadas. Por último, la dispersión de flujos con respecto al caso determinista también se refleja en el aumento de la diferencia relativa D_{10} cuando se incrementa la estocasticidad del modelo.

Los resultados e indicadores para la red general, basado en los vectores de flujo v , se muestran en la tabla 4.7. El promedio del grado de uso de la red para todos los destinos $\bar{\psi}^B$ aumenta progresivamente mientras se aumenta la estocasticidad, correlacionada con la dispersión de flujos \bar{D} reflejada en aquellas instancias. En las instancias altamente estocásticas, la dispersión de flujos es tan alta que, en promedio, casi la totalidad de los segmentos de línea de la red son utilizados por un volumen de flujo-destino mayor a cero. Por último, al igual que en el análisis anterior para el destino $d = 10$, la prueba estadística *t-test* arroja que si $\theta \geq 1$ los vectores de flujo resultantes no difieren significativamente del vector de flujo resultante en la instancia determinista, mientras que si $\theta < 1$ ya se encuentran diferencias estadísticamente significativas.

Tabla 4.6: Resultados e Indicadores STE para destino $d = 10$ en Red Sioux Falls

θ	$\tau_{1,10}^{B*} [min]$	D_{10}	Estad. t_{10}	p-valor
30,0	28,73	–	–	–
15,0	28,73	0,00	-0,375	0,709
8,0	28,74	0,01	-0,379	0,706
4,0	28,82	0,01	-0,536	0,594
2,0	29,22	0,03	-0,498	0,621
1,0	30,14	0,06	-0,637	0,526
0,5	32,20	0,11	-2,289	0,025
0,3	35,67	0,21	-4,541	< 0,001
0,2	40,77	0,32	-6,694	< 0,001

Tabla 4.7: Resultados e Indicadores Generales STE en Red Sioux Falls

θ	$\bar{\psi}^B$	\bar{D}	Estad. t	p-valor
30,0	0,44	–	–	–
15,0	0,44	0,00	-0,305	0,761
8,0	0,46	0,00	-0,310	0,758
4,0	0,49	0,01	-0,620	0,538
2,0	0,65	0,05	-0,716	0,476
1,0	0,93	0,09	-1,237	0,221
0,5	0,96	0,14	-4,909	< 0,001
0,3	0,96	0,29	-11,295	< 0,001
0,2	0,96	0,51	-17,982	< 0,001

Iquique, Chile

La red real de transporte público de la nortina ciudad de Iquique, en Chile, contiene 72 zonas o centroides y 485 paraderos, además de 2.118 segmentos de línea unidireccionales. La red pertenece al periodo Punta Mañana (PM), calibrada para el año 1998, con un total de 5.449 viajes/hr en el periodo entre todos los pares OD. Toda la codificación y parámetros de la red fue proporcionada por la Secretaría de Planificación de Transportes (SECTRA), dependiente del Ministerio de Transportes y Telecomunicaciones del Gobierno de Chile. Algunos indicadores relevantes del tamaño de red para la ciudad de Iquique se muestran en la tabla 4.8.

Tabla 4.8: Tamaño de Red Iquique PM Año 1998 en Modelo STE

Tipo de Red	Centroides	Paraderos	Nodos Totales	Arcos
Real	72	485	557	2118
Extendida	72	485	2711	7144

En la ciudad de Iquique, se probó una instancia del modelo STE, con un valor de $\theta = 0,5$ para la probabilidad condicional p_a de abordar un bus, la cual tiene una formulación logística, y una precisión de $\epsilon = 10^{-4}$. Sin embargo, se impuso un número máximo de 100 iteraciones. Los volúmenes de flujos en equilibrio obtenidos por el algoritmo STE pueden verse gráficamente en la fig. 4.11. Cabe

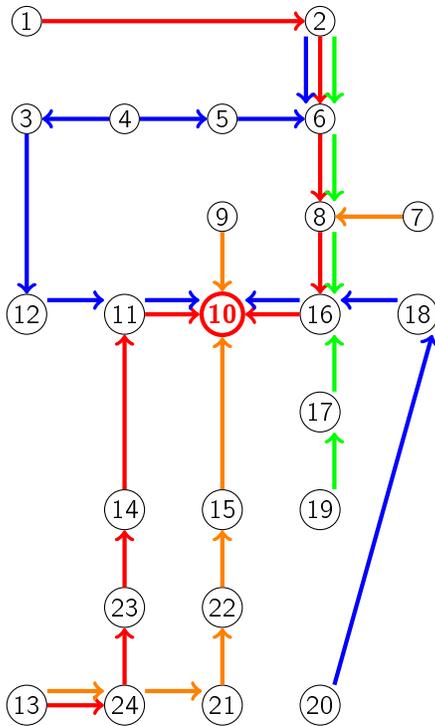


Figura 4.9: Segmentos de Línea Utilizados en Equilibrio Determinista STE en Sioux Falls.
 $\theta = 30$ y $\psi_{10}^B = 0,46$

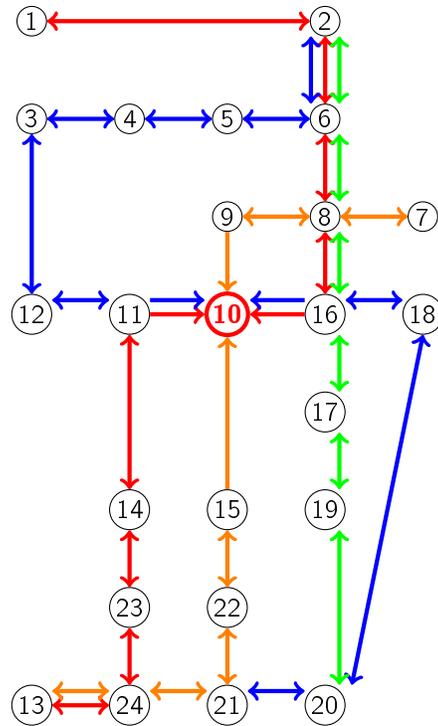


Figura 4.10: Segmentos de Línea Utilizados en Equilibrio Estocástico STE en Sioux Falls.
 $\theta = 0,5$ y $\psi_{10}^B = 0,91$

mencionar que todas las zonas codificadas están conectadas a una o más paradas cercanas mediante arcos de caminata, arcos que no se muestran en la fig. 4.11, así como tampoco se muestran los arcos ficticios de subida/bajada de la red extendida utilizada por el algoritmo STE; sólo están desplegados los arcos viales de la red, en los cuales se han agregado los flujos y también las capacidades de cada segmento de línea entre cada par de nodos adyacentes para graficar el grado de saturación de la red.

Los mayores volúmenes de flujo se observan en la zona centro de Iquique -zona superior izquierda del plano de la ciudad-, y también en los ejes norte-sur. Por otro lado, no se observan grandes aglomeraciones desde la localidad de Alto Hospicio, núcleo suburbano adyacente a Iquique que se encuentra en la zona oeste de la ciudad.

Para obtener el equilibrio con el algoritmo STE en la red de Iquique, se probaron distintos valores para el paso α_n de MSA. El que tuvo mejores resultados, medidos como la mayor precisión en las 100 iteraciones definidas previamente, es el parámetro $\alpha_n = \frac{1}{\ln(n)}$, como se muestra en la fig. 4.12. En esta instancia, el algoritmo alcanza una norma de 10^{-12} , con un tiempo de ejecución del algoritmo de 40 mins². También se probó una instancia en esta red con el parametro MSA $\alpha_n = 0,125$ que, aunque no cumple con las condiciones de aseguramiento de convergencia expuestas en las ecuaciones (4.10) y (4.11), el algoritmo de todas formas converge hacia el mismo equilibrio encontrado mediante otros parámetros MSA que sí cumplen con aquellas condiciones.

²CPU Intel Core 2 Quad Q6600 @ 2.4GHz y RAM 3.5GB

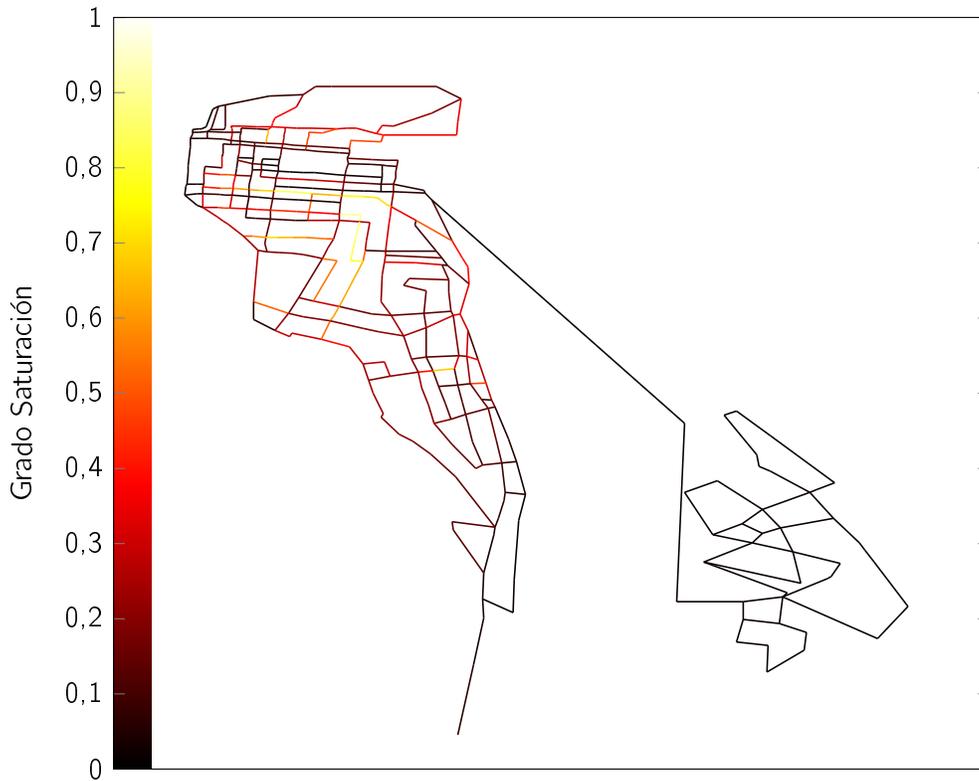


Figura 4.11: Equilibrio STE Red Iquique PM Año 1998

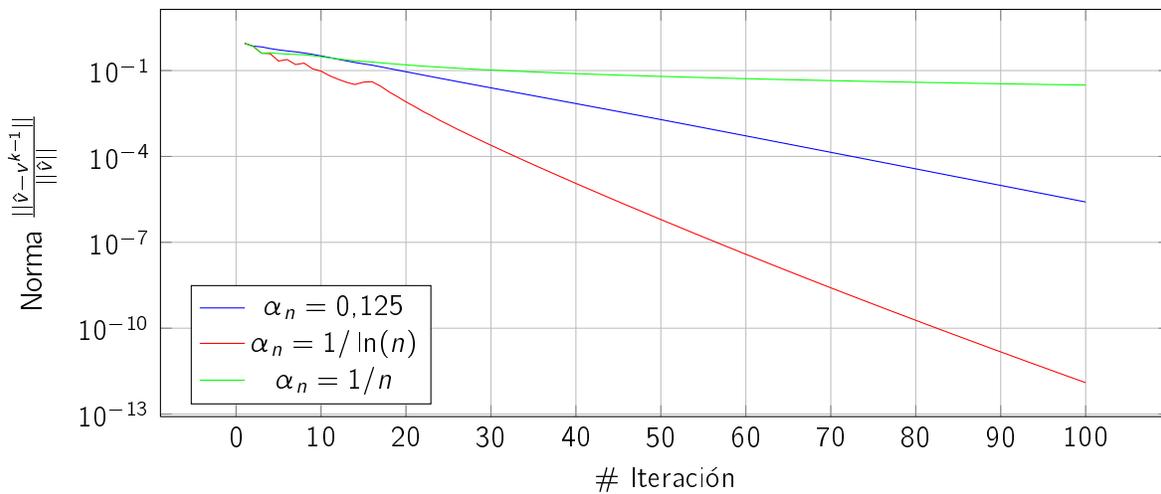


Figura 4.12: Evolución de la Norma MSA en Algoritmo STE en Red Iquique PM Año 1998

4.3. Implementación IEM

Dado que el modelo IEM-PM es una instancia particular del modelo más general IEM-CM, la implementación de un algoritmo para resolver el equilibrio en un modelo integrado multimodal se diseña para la versión más genérica. La estructura que utiliza la implementación de IEM-CM es la siguiente:

se trata de un algoritmo iterativo basado en MSA donde en primer lugar, para tiempos esperados de viaje dados en ambas redes, deben identificarse cuales son los niveles de demanda en cada una de ellas, a través de un modelo de partición modal, y luego, con aquellas demandas, resolver submodelos de equilibrio en cada modo. Por un lado, para resolver el subequilibrio de transporte público, ya se cuenta con el algoritmo STE descrito y probado en la sección 4.1. Por otro, se debe adicionar un módulo para resolver el subequilibrio de transporte privado, para el cual se utilizará un algoritmo del modelo MTE basado en la misma plataforma que el algoritmo STE, pues ambos modelos son bastante similares en sus elementos característicos. Gráficamente, la implementación del modelo IEM-CM puede observarse en el diagrama de flujo de la fig. 4.13, mientras que la resolución paso a paso del modelo se describe en el algoritmo 4.2, junto con los módulos de resolución de STE y MTE en los algoritmos 4.3 y 4.4 respectivamente. Por supuesto, para implementar el modelo IEM-PM basta con que el subconjunto de nodos de estacionamiento se defina como $K_P = \{\emptyset\}$.

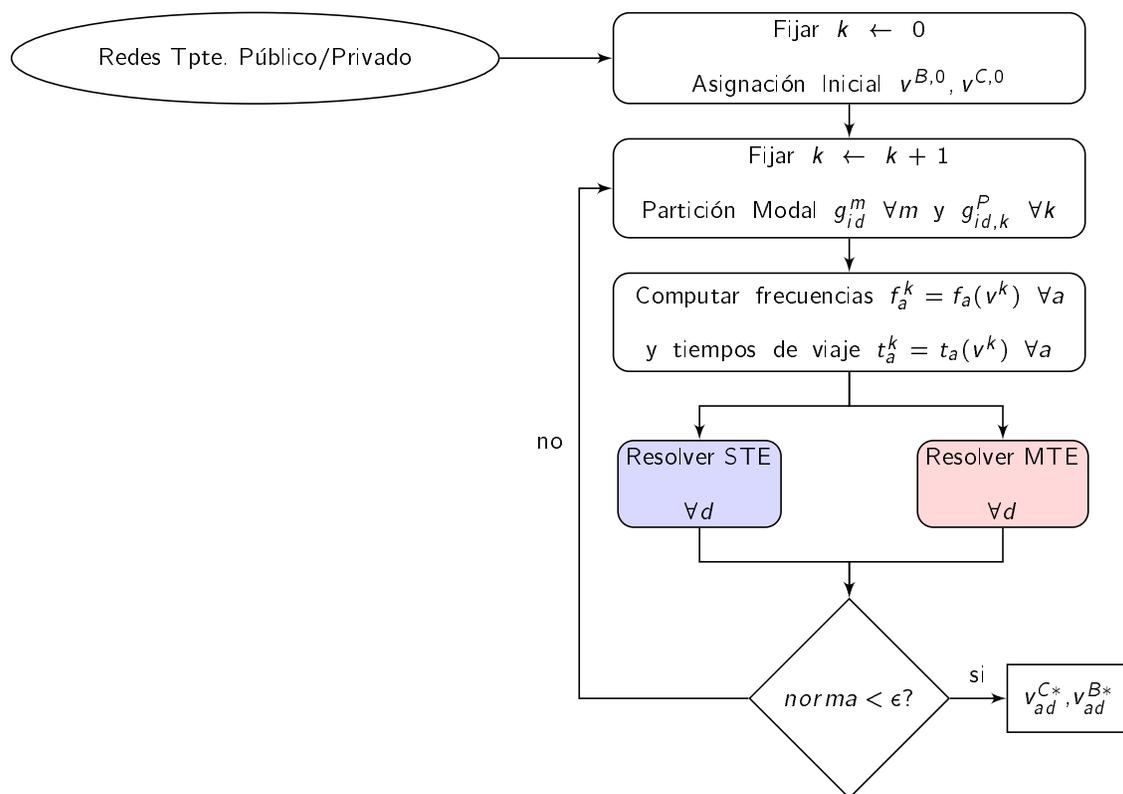


Figura 4.13: Implementación del Algoritmo IEM-CM

Notar que en el paso 5 del algoritmo 4.2, se adiciona un modelo genérico de partición modal para ambos modos considerados, y también para el modo combinado. En el paso 7, se computan los tiempos de viaje para los vehículos en la red de transporte privado, los cuales ya contienen los flujos de buses utilizados en la rutas fijas de transporte público de esta última red. A su vez, el modelo STE utiliza los tiempos de viaje en arcos de la red MTE, asumiendo que los buses operan en tráfico mixto. Sin perjuicio de ello, también es posible adicionar arcos en la red de transporte público con tiempos propios, modelando de esta forma los corredores exclusivos del modo bus o adicionando líneas de metro o trenes urbanos, los cuales no comparten infraestructura vial con el transporte privado.

Algoritmo 4.2 Implementación del Modelo de Integrado de Equilibrio con Elección de Modos Combinados (IEM-CM)

- 1: Realizar una asignación inicial $v^{C,0}$ y $v^{B,0}$ en ambas redes
 - 2: Fijar $n \leftarrow 0$.
 - 3: **repeat**
 - 4: Fijar $n \leftarrow n + 1$.
 - 5: Modelo de Partición Modal: $g_{id}^{B,n}, g_{id}^{C,n}, g_{id,k}^{P,n}$
 - 6: Computar frecuencias efectivas $f_a^n = f_a(v^{B,n-1})$.
 - 7: Computar tiempos de viaje $t_a^{C,n} = t_a(v^{C,n-1})$.
 - 8: **Resolver equilibrio STE** (ver alg. 4.3)
 - 9: **Resolver equilibrio MTE** (ver alg. 4.4)
 - 10: **until** $\frac{\sqrt{\sum_a (\bar{v}_a^{B,n+1} - \bar{v}_a^{B,n})^2}}{\sum_a \bar{v}_a^{B,n}} \leq \epsilon$ y $\frac{\sqrt{\sum_a (\bar{v}_a^{C,n+1} - \bar{v}_a^{C,n})^2}}{\sum_a \bar{v}_a^{C,n}} \leq \epsilon$.
-

Adicionalmente, se debe hacer hincapié en que los módulos de resolución de STE y MTE -en los pasos 8 y 9 del algoritmo 4.2- pueden ejecutarse en forma simultánea, y resolver equilibrios parciales para ambos modelos en forma separada, en caso de contar con equipamiento computacional que así lo permita.

Nota: en ciertas ocasiones, la convergencia de MSA no es monótona. Esto ocurre porque la dirección de descenso puede apuntar en una dirección tal que la norma aumenta en algunas iteraciones, o porque el paso, dado por el valor α_n , está fijado a priori, y puede exceder la ponderación óptima de descenso (Sheffi, 1985). Un criterio de convergencia que en general es monótonamente decreciente puede obtenerse si se promedian las medidas de los flujos durante las últimas q iteraciones. En este caso, si \bar{v}_a^n denota el flujo promedio en la iteración n :

$$\bar{v}_a^n = \frac{1}{q} (v_a^n + v_a^{n-1} + \dots + v_a^{n-q+1}) \quad (4.14)$$

entonces el criterio de convergencia puede basarse en la similaridad de los flujos, por ejemplo:

$$\frac{\sqrt{\sum_a (\bar{v}_a^{n+1} - \bar{v}_a^n)^2}}{\sum_a \bar{v}_a^n} \leq \epsilon. \quad (4.15)$$

Notar que este criterio es utilizable cuando el número de iteración n es mayor al parámetro q . En aplicaciones, $q = 3$ es un valor suficiente.

Uno de los cambios sustanciales entre el algoritmo que resuelve el equilibrio del modelo STE (algoritmo 4.1) y el módulo que resuelve este mismo modelo dentro del algoritmo de IEM-CM (algoritmo 4.3), es que en el primero, en cada iteración sólo se realiza una asignación, en base a un vector de frecuencias efectivas y tiempos en arco dados al comienzo de la iteración, no estando en equilibrio los tiempos esperados junto con las probabilidades por arco. En cambio, en el módulo STE del algoritmo IEM-CM se busca un equilibrio parcial en cada iteración. Este cambio, que fue introducido luego de las pruebas realizadas en redes de gran tamaño descritas en detalle en la sección 4.4.2, posibilita, en desmedro de aumentar el tiempo de ejecución en cada iteración del algoritmo, encontrar el equilibrio global del modelo en un menor número de iteraciones, aumentando en términos generales el rendimiento del algoritmo IEM-CM.

Algoritmo 4.3 Módulo STE dentro de Algoritmo IEM-CM

- 1: **for all** destino $d \in D$ **do**
- 2: Fijar $l \leftarrow 0$.
- 3: Fijar probabilidades $p_a^{0,d} = \varphi_i^d(t_a^{B,n} + \tau_{jad}^{B,n} - \tau_{id}^{B,n})$.
- 4: **repeat**
- 5: Fijar $l \leftarrow l + 1$.
- 6: Resolver sistema lineal de ecuaciones:

$$\tau_{id}^{B,l} = \frac{1 + \sum_{a \in A_i^+} f_a^n p_a^{l-1,d} \cdot (t_a^{B,n} + \tau_{jad}^{B,l})}{\sum_{a \in A_i^+} f_a^n p_a^{l-1,d}} \quad \forall i \in N_s \text{ con } \delta_{id} = 0$$

ó bien,

$$\tau_{id}^{B,l} = \frac{\sum_{a \in A_i^+} p_a^{l-1,d} \cdot (t_a^{B,n} + \tau_{jad}^{B,l})}{\sum_{a \in A_i^+} p_a^{l-1,d}} \quad \forall i \in N_z, N_l \text{ y } \forall i \in N_s \text{ con } \delta_{id} = 1$$

- 7: Computar probabilidades $p_a^{l,d} = \varphi_i^d(t_a^n + \tau_{jad}^{B,l} - \tau_{id}^{B,l})$.
- 8: **until** $\frac{\|\tau_{id}^{B,l} - \tau_{id}^{B,l-1}\|}{\|\tau_{id}^{B,l}\|} < \epsilon$.
- 9: Fijar $p_a^{n,d} = p_a^{l,d}$
- 10: Computar flujos inducidos en arcos:

$$\hat{v}_{ad} = x_{id}^B \frac{f_a^n p_a^{n,d}}{\sum_{a \in A_i^+} f_a^n p_a^{n,d}} \quad \forall i \in N_s \text{ con } \delta_{id} = 0$$

ó bien:

$$\hat{v}_{ad} = x_{id}^B \frac{p_a^{n,d}}{\sum_{a \in A_i^+} p_a^{n,d}} \quad \forall i \in N_z, N_l \text{ y } \forall i \in N_s \text{ con } \delta_{id} = 1$$

- 11: **end for**
 - 12: Actualizar asignación de flujos $v^{B,n} = (1 - \alpha_n)v^{B,n-1} + \alpha_n \hat{v}$.
-

4.4. Experimentos IEM

En esta sección, se abordan dos experimentos numéricos para probar el algoritmo IEM realizados sobre redes ya descritas durante la implementación del algoritmo STE en secciones anteriores de este capítulo. El primer experimento se refiere a la prueba del algoritmo IEM-PM en la red de Sioux Falls, donde se analizará como se comporta la elección modal de esta red cuando los tiempos esperados de viaje en los modos puros disponibles -solo auto o solo bus- aumentan su estocasticidad. El segundo experimento se refiere a a implementación del algoritmo IEM-CM en la red de Iquique, adicionando lugares de estacionamientos y por lo tanto, incluyendo modos combinados para esta ciudad.

4.4.1. Experimento IEM-PM

En el experimento de prueba del algoritmo de equilibrio integrado con modos puros IEM-PM se utilizó la red de transporte privado de la ciudad de Sioux Falls (Bar-Gera, 2011), la cual tiene 24 zonas generadoras de viaje, y 76 arcos unidireccionales (ver fig. 4.7). La demanda total en el

Algoritmo 4.4 Módulo MTE dentro de Algoritmo IEM-CM

- 1: **for all** destino $d \in D$ **do**
- 2: Fijar $l \leftarrow 0$.
- 3: Fijar $z_{ad}^0 = t_a^{C,n}$ para todos los arcos.
- 4: Fijar $\tau_{id}^{C,0} = 0$ para todos los nodos y destinos.
- 5: **repeat**
- 6: Fijar $l \leftarrow l + 1$.
- 7: Computar $\tau_{id}^{C,l} = \varphi_{id}(z_{ad}^{l-1})$
- 8: Computar $z_{ad}^l = t_a^{C,n} + \tau_{jad}^{C,l}$.
- 9: **until** $\frac{\|\tau_{id}^{C,l} - \tau_{id}^{C,l-1}\|}{\|\tau_{id}^{C,l}\|} < \epsilon$.
- 10: Computar probabilidades:

$$p_a^{n,d} = \frac{\partial \varphi_{id}(z_{ad}^l)}{\partial z_{ad}^l}$$

- 11: Computar flujos inducidos en arcos:

$$\hat{v}_{ad} = x_{id}^C \frac{p_a^{n,d}}{\sum_{a \in A_i^+} p_a^{n,d}} \quad \forall i \in N_z, N_s$$

- 12: **end for**

- 13: Actualizar asignación de flujos $v^{C,n} = (1 - \alpha_n)v^{C,n-1} + \alpha_n \hat{v}$.
-

periodo analizado alcanza los 360.000[veh/hr]. Los arcos tienen tiempos de viaje $t_a(v_a)$ estrictamente crecientes y dependientes de los flujos, con una formulación tipo BPR:

$$t_a(v_a) = T_a \left(1 + k \left(\frac{v_a}{c_a} \right)^b \right) \quad (4.16)$$

donde T_a es el tiempo a flujo libre en el arco a , mientras que k y b son parámetros de calibración.

Por otro lado, en el caso del transporte público, la red y los parámetros de simulación son idénticos a los utilizados en las pruebas del algoritmo STE de la sección 4.2.2, con un diseño de metro que cuenta con 24 zonas y 70 segmentos de línea, además de una demanda total de 360.000[pax/hr] en la red.

El objetivo de este experimento es observar la incidencia que tiene el efecto de la estocasticidad tanto en el modelo STE como en el MTE. Para ello, en el caso del transporte público, se utiliza la formulación logística para la probabilidad condicional p_a (ec. 4.6), variando el parámetro θ ; mientras que en el caso del transporte privado, se utiliza una formulación log-suma para la esperanza del tiempo mínimo de viaje τ_{id}^C , y en cuyo caso, se varía el parámetro β para alcanzar distintos niveles de estocasticidad.

Las funciones de utilidad modal están basadas solo en los tiempos de viaje de cada red, es decir:

$$U_{id}^C = -\tau_{id}^C \quad (4.17)$$

$$U_{id}^B = -\tau_{id}^B. \quad (4.18)$$

Los resultados generales obtenidos mediante el algoritmo IEM-PM para la red de Sioux Falls, en términos de partición modal para aquellos usuarios con disponibilidad de elección, y otros indicadores sobre uso de red y dispersión de flujos, se presentan en las tablas 4.9, 4.10 y 4.11. Para todos los análisis que siguen, el punto de comparación de cada una de las instancias se realiza con respecto a una instancia determinista en ambos modelos, la que corresponde a aquella con $\theta = 30,0$ en el modelo STE, y a $\beta = 12,0$ en el MTE, y que se muestra al principio de cada tabla de resultados.

Tabla 4.9: Resultados e Indicadores Generales IEM-PM en Red Sioux Falls, Estocasticidad en STE

θ STE	β MTE	Partición Auto	Partición Bus	$\bar{\psi}^B$	$\bar{\psi}^C$	\bar{D}^B
30,0	12,0	67,8 %	32,2 %	0,43	0,48	—
15,0	12,0	67,8 %	32,2 %	0,44	0,48	0,00
8,0	12,0	67,8 %	32,2 %	0,44	0,48	0,00
4,0	12,0	67,8 %	32,2 %	0,46	0,48	0,01
2,0	12,0	68,2 %	31,8 %	0,49	0,48	0,03
1,0	12,0	69,4 %	30,6 %	0,65	0,49	0,06
0,5	12,0	72,3 %	27,7 %	0,93	0,49	0,10
0,3	12,0	76,9 %	23,1 %	0,96	0,50	0,20
0,2	12,0	81,7 %	18,3 %	0,96	0,52	0,36

Tabla 4.10: Resultados e Indicadores Generales IEM-PM en Red Sioux Falls, Estocasticidad en MTE

θ STE	β MTE	Partición Auto	Partición Bus	$\bar{\psi}^B$	$\bar{\psi}^C$	\bar{D}^C
30,0	12,0	67,8 %	32,2 %	0,43	0,48	—
30,0	6,0	67,9 %	32,1 %	0,43	0,49	0,00
30,0	3,0	68,0 %	32,0 %	0,43	0,49	0,00
30,0	1,5	68,0 %	32,0 %	0,43	0,57	0,02
30,0	1,0	67,8 %	32,2 %	0,43	0,69	0,03
30,0	0,5	66,6 %	33,4 %	0,44	0,98	0,14
30,0	0,4	65,8 %	34,2 %	0,44	1,00	0,19
30,0	0,35	64,9 %	35,1 %	0,44	1,00	0,23

Es posible observar en la tabla 4.9 que al aumentar el grado de estocasticidad en el modelo STE, y mantener en forma determinista los tiempos esperados en el modelo MTE, los usuarios tienden a escoger en mayor proporción el automóvil. Esto ocurre porque el cómputo tiempos de viaje en el modelo STE integran estrategias subóptimas, aumentando estos valores. Esto concuerda con el resultado intuitivo, pues los usuarios que tienen libre elección modal tienden a escoger aquel modo que sea más predecible en relación a los tiempos de viaje. Por otro lado, desde los mismos resultados se desprende que el uso de segmentos de línea en el modelo STE aumenta fuertemente mientras se aumenta la estocasticidad, al igual que el grado de dispersión de flujos: el indicador \bar{D}^B aumenta progresivamente hasta llegar a un 36 % de diferencia del vector de flujos en el caso más alto de estocasticidad con respecto a la instancia determinista.

Un análisis similar se puede realizar observando los resultados en la tabla 4.10 cuando se aumenta

Tabla 4.11: Resultados e Indicadores Generales IEM-PM en Red Sioux Falls, Estocasticidad en STE y MTE

θ STE	β MTE	Partición Auto	Partición Bus	$\bar{\psi}^B$	$\bar{\psi}^C$	\bar{D}^B	\bar{D}^C
30,0	12,0	67,8 %	32,2 %	0,43	0,48	—	—
3,0	3,0	68,1 %	31,9 %	0,47	0,49	0,01	0,01
1,5	1,5	68,7 %	31,3 %	0,53	0,57	0,04	0,02
1,0	1,0	69,4 %	30,6 %	0,65	0,68	0,06	0,04
0,5	0,5	71,2 %	28,8 %	0,93	0,96	0,10	0,17
0,2	0,35	80,2 %	19,8 %	0,96	0,98	0,11	0,25

el grado de estocasticidad del modelo MTE y se mantiene determinista el modelo STE. En este caso, aumentando la estocasticidad del MTE habrá una proporción mayor de usuarios escogiendo el transporte público, pues este modo presenta menor variabilidad en los tiempos de viaje esperados, aunque los cambios en la partición modal son menores si se compara con el caso anterior. Por otro lado, la estocasticidad en el MTE hace aumentar el uso de arcos en la red de transporte privado de tal forma que, en promedio, para todos los destinos se utilizan todos los arcos disponibles. Y por último, las diferencias de la instancia de mayor nivel de estocasticidad presenta un 23 % de diferencia en el vector de flujos con respecto a la instancia base determinista.

Si bien es posible aumentar la estocasticidad en el modelo MTE al disminuir el parámetro β , en la red de Sioux Falls no es posible seguir disminuyendo este parámetro más allá de 0,35, pues en ese caso, la variabilidad es tan alta que podrían computarse tiempos negativos, resultado que no tiene ningún sentido físico. No ocurre lo mismo en el modelo STE: podría aumentarse el grado de estocasticidad tanto como sea posible mientras $\theta > 0$. En ese caso, el sentido físico que tiene el modelo con grados de estocasticidad tan altos es que cada vez que un bus llega a una parada, los eventos de subirse al bus o esperar el próximo son equiprobables, asimilable a que los usuarios arrojen una moneda para tomar una decisión. Esto ocasiona que cierto volumen de flujo realice ciclos dentro de la red.

4.4.2. Experimento IEM-CM

El escenario de prueba del algoritmo IEM-CM corresponde al de la ciudad de Iquique, donde la red de transporte público es idéntica a la utilizada en la sección 4.2.2 con el algoritmo STE. A su vez, la red de transporte privado, que también fue proporcionada por SECTRA, incluye 72 zonas o centroides, 485 nodos y 2180 arcos viales, los que son idénticos a los contenidos en la red de transporte público. En síntesis, ambos sistemas tienen matrices de demanda total G_{id}^C y G_{id}^B correspondientes al periodo punta mañana, con un total de 10.646 veh/hr y 5.449 pax/hr respectivamente, y utilizan la misma infraestructura vial.

En una primera etapa, para utilizar el algoritmo IEM-CM es necesario definir un modelo de partición modal que alimente las demandas en cada submodelo. En esta instancia, se utiliza el modelo de García y Marín (2005) ya mencionado en la sección 3.5.2. Luego, se debe definir las funciones y parámetros de utilidad de cada modo, para obtener la partición modal de aquellos usuarios que tienen disponibilidad de auto, pero que se enfrentan a la decisión de escoger una de las siguientes opciones: modo automóvil, bus o el modo combinado. Las siguientes utilidades y parámetros fueron escogidos

con el fin de simular un escenario y analizar la convergencia y resultados del modelo IEM-CM, y si bien se consideran algunos parámetros calibrados en forma empírica para la ciudad de Iquique -como se señalará en detalle más adelante-, no constituyen en forma alguna resultados aplicables a esta ciudad en forma real en la actualidad.

Considerando lo anterior, se utiliza entonces la siguiente función de utilidad para el modo automóvil:

$$U_{id}^C = \theta_C + \theta_{tgen} \cdot \tau_{id}^C + \theta_{cost} \cdot \frac{\tau_{id}^C c_{unit}}{I} + \theta_{ncars} \cdot n_C \quad (4.19)$$

donde:

θ_C	constante modal del automóvil [útiles]
θ_{tgen}	parámetro de la utilidad para el tiempo generalizado [útiles/min]
θ_{cost}	parámetro de la utilidad para el costo monetario [útiles/\$]
θ_{ncars}	parámetro de la utilidad para el número de automóviles disponibles en el hogar [útiles/\$]
c_{unit}	costo monetario por unidad de tiempo por el uso del automóvil [\$/min]
I	nivel de ingreso [\$]
n_C	número de automóviles disponibles en el hogar [autos]

Por otro lado, la función de utilidad para el modo bus en la ciudad de Iquique es:

$$U_{id}^B = \theta_B + \theta_{tgen} \cdot \tau_{id}^B + \theta_{cost} \cdot \frac{c_{bus}}{I} + \theta_{atrac} \quad (4.20)$$

donde:

θ_B	constante modal del bus [útiles]
θ_{atrac}	constante de atractividad del bus [útiles]
c_{bus}	tarifa del transporte público [\$]

Los parametros restantes para la utilidad del modo bus son los mismos definidos en el caso del automóvil (ec. 4.19).

Ambas funciones de utilidad modal (ecs. 4.19 y 4.20) son utilizadas por SECTRA, y están contenidas dentro de la calibración que esta repartición estatal realizó para la ciudad de Iquique en el año 1998 (Secretaría de Planificación de Transporte, 2012).

Para calcular la utilidad representativa del modo combinado U_{id}^P , mediante la formulación log-suma de la ec. (3.21), es necesario computar primero el valor de la utilidad al hacer el intercambio modal en el estacionamiento k , $U_{id,k}^P$. Para esto, se asumirá que esta utilidad tiene una estructura de costos y tiempo similar a la que tienen las utilidades de escoger el auto y el bus en cada uno de los tramos correspondientes, junto con una constante modal que represente el disgusto por el trasbordo modal en el estacionamiento, que refleje otras condiciones no recogidas en otras variables como seguridad, accesibilidad, infraestructura, etc. En el caso de Iquique, esta constante no se encuentra calibrada, por lo que se asumirá un valor razonable para poder realizar la simulación y obtener resultados.

Junto con lo anterior, a la utilidad de hacer el intercambio modal en el estacionamiento k se le agrega el costo monetario por estacionar el automovil, y el tiempo de espera en cola ocasionado por

los otros vehículos al entrar al estacionamiento. Este último término, denotado por T_{wp}^k , se computa de la siguiente forma: se considera que la entrada al estacionamiento es una cola del tipo M/G/r, donde se tienen llegadas markovianas al estacionamiento, con tiempo entre llegadas de tipo exponencial; y un tiempo entre servicios con una distribución genérica G en los r_k servidores disponibles en el estacionamiento k . Luego, el tiempo medio de espera en una cola con estas características es aproximadamente (Larson y Odoni, 1981):

$$T_{wp}^k \approx \frac{\lambda_k \left(\frac{1}{(r_k \mu_k)^2} + \frac{\sigma_{S_k}^2}{r_k} \right)}{2 \left(1 - \frac{\lambda_k}{r_k \mu_k} \right)} + \mathbb{E}[S_k] \quad (4.21)$$

donde λ_k es la tasa de llegada de vehículos a la cola, $\mathbb{E}[S_k]$ y $\sigma_{S_k}^2$ son el tiempo medio de servicio y la varianza para *uno* de los r_k servidores disponibles en el estacionamiento k respectivamente, mientras que μ_k es el tiempo medio entre servicios -considerando los r_k servidores- que experimenta un observador en la cola.

Ahora, si el proceso de servidores en el estacionamiento tiene una distribución $G \rightsquigarrow Exponencial(\mu_k)$, entonces la expresión T_{wp}^k se reduce a:

$$T_{wp}^k \approx \frac{\frac{\lambda_k}{(r_k \mu_k)^2}}{1 - \frac{\lambda_k}{r_k \mu_k}} + \frac{1}{\mu_k} \quad (4.22)$$

Esta expresión tiene una restricción de capacidad implícita, pues sólo es válida cuando $\frac{\lambda_k}{r_k \mu_k} < 1$. En la implementación del algoritmo, la tasa de llegada al estacionamiento es igual a la suma de todos los flujos entrantes al centroide que lo representa, es decir, $\lambda_k = \sum_{a \in A_k^-} v_a$.

Así, la utilidad de escoger el modo combinado utilizando el estacionamiento k para el intercambio modal tiene la siguiente formulación:

$$U_{id,k}^P = \theta_P + \theta_{tgen} \cdot (\tau_{ik}^C + T_{wp}^k + \tau_{kd}^B) + \theta_{cost} \cdot \frac{(\tau_{ik}^C c_{unit} + c_{park}^k + c_{bus})}{l} \quad (4.23)$$

donde:

θ_P constante modal del modo combinado [útiles]
 c_{park}^k tarifa de uso de estacionamiento k [\$]

Los parámetros restantes son los mismos indicados en las ecs. (4.19) y (4.20).

Como se mencionó anteriormente, para efectos de este experimento numérico se utilizaron algunos parámetros reales calibrados por SECTRA en la ciudad de Iquique, que corresponden a la situación en el año 1998. En particular, estos parámetros se refieren a los ponderadores de cada elemento dentro de las utilidades modales, la tarifa del transporte público, el ingreso medio por hogar, y la ubicación y tarifa de uso por estacionamiento. Por otro lado, se indica dentro de la calibración realizada por SECTRA el costo medio de uso del automóvil por unidad de longitud, y la velocidad media de desplazamiento dentro de la ciudad. Luego, es posible aproximar el costo medio de uso del automóvil por unidad de tiempo como el cociente entre los dos últimos valores mencionados.

Todos los parámetros señalados anteriormente se explicitan en las tablas 4.12, 4.13 y 4.14.

Tabla 4.12: Ponderadores Calibrados Utilidad Modal para Red Iquique, Año 1998

Parámetro	Modo		
	Auto	Bus	Combinado
θ_m	-1,038	0,278	-1,500 ³
θ_{tgen}	-0,023	-0,023	-0,023
θ_{cost}	-43,800	-43,800	-43,800
$\theta_{ncars}, \theta_{atrac}$	1,540	0,000	—

Tabla 4.13: Tarifas, Costos e Ingreso Medio para Red Iquique, Año 1998

Parámetro	Valor
c_{unit}	57 [\$/min]
c_{bus}	150 [\$]
I	528.123 [\$]

Tabla 4.14: Parámetros de Estacionamientos Red Iquique, Año 1998

Nodo	Tarifa (c_{park}^k) [\$]	Capacidad Total ³ ($r_k \mu_k$) [veh/hr]	Servidores ³ (r_k)
37	720	360	2
43	720	360	2

Por último, para efectos de realizar la simulación, y al no contar con todos los parámetros calibrados para un escenario real, se supusieron valores razonables para algunos de ellos: β_{id} de la distribución Logit del modelo MTE -idéntico para todos los pares OD- y θ para la formulación logística en la probabilidad condicional de abordar un bus en el modelo STE. Para el parámetro estructural del logit jerárquico β_p en la elección entre estacionamientos del modo combinado, se supuso lo siguiente: al no contar con una calibración para obtener este parámetro en forma empírica, se impone que el cociente entre la varianza del nivel inferior del logit jerárquico -la elección del estacionamiento para el modo combinado- y el nivel superior -elección del modo- sea $\rho = 0,5$. Esta relación toma valores en el rango $[0,1]$. Entonces, $\beta_p = \frac{1}{\sqrt{\rho}} = 1,41$. A modo de resumen, la lista de todos parámetros supuestos se muestra en la tabla 4.15. Al final de esta sección, se realiza un análisis de sensibilidad para distintos valores del parámetro estructural del logit jerárquico.

En las distintas simulaciones realizadas para la red de Iquique, el ponderador MSA escogido -señalado en la tabla 4.15- obtiene un mejor rendimiento en términos de convergencia. Otro comportamiento que se pudo observar en las pruebas del algoritmo IEM-CM es que el parámetro de precisión ϵ influye altamente en la rapidez de la convergencia, y en la consistencia de los flujos asignados, particularmente en el módulo MTE. Con valores de $\epsilon \leq 10^{-4}$, el modelo MTE asigna un gran volumen de flujos en ciclos dentro de la red en las primeras iteraciones, lo cual no es realista, aunque progresivamente se va obteniendo un vector de flujos en forma más consistente, pero a una velocidad de convergencia lenta. Esto ocurre porque el problema de resolución del punto fijo de los valores de los tiempos esperados τ_{id} no se realiza con una precisión adecuada, por lo que debe elevarse el nivel de precisión. Luego, a

³Parámetro no entregado por SECTRA, definido para efectos de simulación

Tabla 4.15: Parámetros de Simulación, Red Iquique Año 1998

Parámetro	Valor
β_{id} (Logit MTE)	12,0
β_P (Modo Combinado IEM)	1,41
θ (Logística STE)	0,5
α_n (Ponderador MSA)	$\frac{1}{n}$

costa de aumentar el tiempo de ejecución en las primeras iteraciones del algoritmo, la velocidad de convergencia y la consistencia del vector de flujos se obtiene más rápidamente. Para esta simulación, el parámetro de precisión escogido fue de $\epsilon = 10^{-5}$.

Por último, cabe señalar que otro supuesto que se realizó para este experimento numérico es que cada vehículo sólo es ocupado por un pasajero, i.e. $n_C = 1$. Por supuesto, el modelo es suficientemente flexible para adaptarse a tasas de ocupación del automóvil mayores, pero debe contarse con modelos de estimación de demanda calibrados para la ciudad.

El equilibrio obtenido por el modelo IEM-CM, tanto en la red vial de transporte público como transporte privado, se muestran en las figs. 4.14 y 4.15 respectivamente. En ambos casos, no se muestran las zonas codificadas ni los arcos de acceso a la red.

En la red de transporte público, se observa un mayor nivel de congestión en la zona sur de la ciudad, en los arcos que rodean a los estacionamientos. En aquellos lugares, los usuarios que escogen el modo combinado hacen el intercambio modal desde el auto hacia los buses del transporte público, los cuales en su mayoría se dirigen a la zona central de Iquique, ubicada en la parte superior izquierda de la fig. 4.14. Además, en comparación con el equilibrio original en transporte público obtenido con el modelo STE en la sección 4.2.2, en este caso se observa una red más cargada, pues el modo bus ahora recibe una demanda adicional ocasionada tanto por aquellos usuarios que, teniendo disponibilidad de auto, escogen el transporte público para realizar sus viajes, como por aquellos que escogen el modo combinado, y por tanto, deben realizar un segmento de sus viajes en transporte público. Numéricamente, ahora la red de transporte público tiene un 53% más de demanda en comparación con la red original de la sección 4.2.2. Las demandas originales para cada tipo de usuario, y las particiones modales en equilibrio obtenidas para los usuarios con disponibilidad de auto se muestran en las tablas 4.16 y 4.17. Por otro lado, el uso de los dos estacionamientos en la instancia experimental de esta sección se muestran en la tabla 4.18.

Tabla 4.16: Demandas Originales por Tipo de Usuario, Red Iquique Año 1998

Tipo de Usuario	Demanda
Auto Disponible	10.374 [<i>veh/hr</i>]
Solo Bus	5.449 [<i>pax/hr</i>]

Por último, cabe destacar que en 50 iteraciones, el algoritmo alcanza una norma de $2,67 \cdot 10^{-6}$ en el modelo STE y de $6,56 \cdot 10^{-6}$ en el modelo MTE, con un tiempo de ejecución de 38 minutos,⁴ logrando una alta precisión en un bajo número de iteraciones.

⁴CPU Intel Core 2 Quad Q6600 @ 2.4GHz y RAM 3.5GB

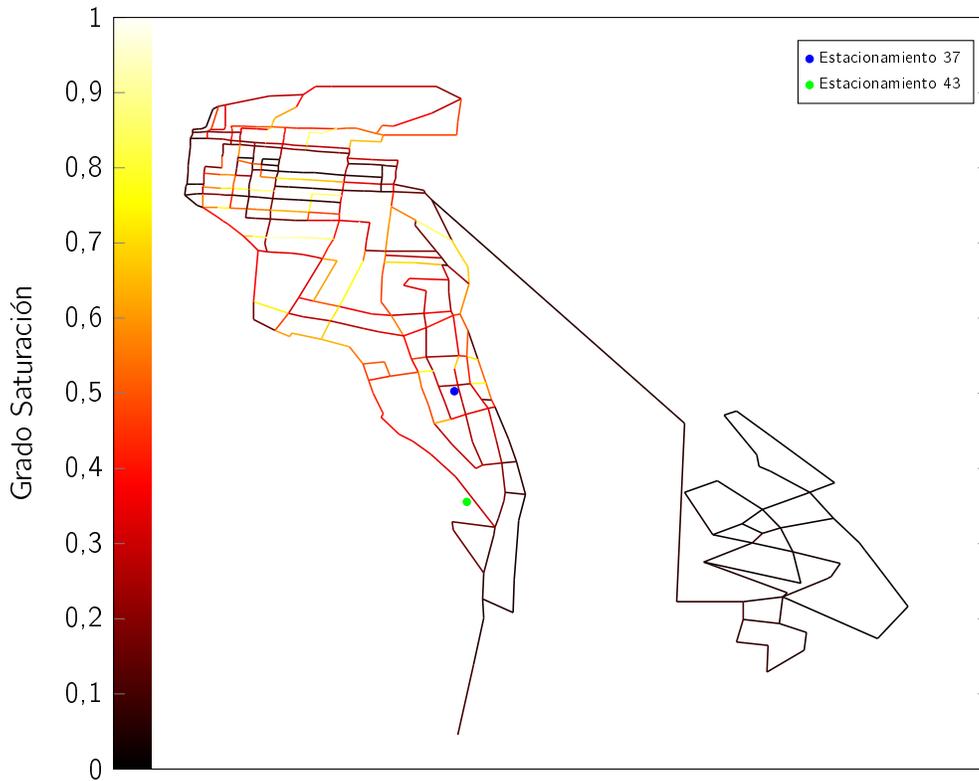


Figura 4.14: Equilibrio IEM-CM en Transporte Público, Red Iquique Año 1998

Además de la simulación ya descrita para la red de Iquique, se realizaron otras pruebas para medir la sensibilidad que tiene el modelo frente a la variación del parámetro estructural del logit jerárquico en la elección entre estacionamiento del modo combinado. Para ello, si bien originalmente se supuso una relación media entre las varianzas del término del error al interior del nido y el nivel superior (i.e. $\rho = 0,5$), se probaron dos valores más: $\rho = 0,75$ y $\rho = 0,25$, obteniéndose variaciones en la elección del modo combinado, como muestra la tabla 4.19 en el uso de estacionamientos.

Cuando se aumenta la varianza dentro de la elección del estacionamiento en el modo combinado, existe una cantidad mayor de usuarios para los cuales éste es el modo que genera una mayor utilidad. Luego, la partición de mercado del modo combinado aumenta con respecto a los otros modos.

Tabla 4.17: Partición Modal Modelo IEM-CM para Usuarios con Disponibilidad de Auto, Red Iquique Año 1998

Modo	Demanda	Porcentaje
Auto	6.955 [veh/hr]	67,0 %
Bus	2.874 [pax/hr]	27,7 %
Combinado	545 [veh/hr]	5,3 %
Total	10.374 [veh/hr]	100 %

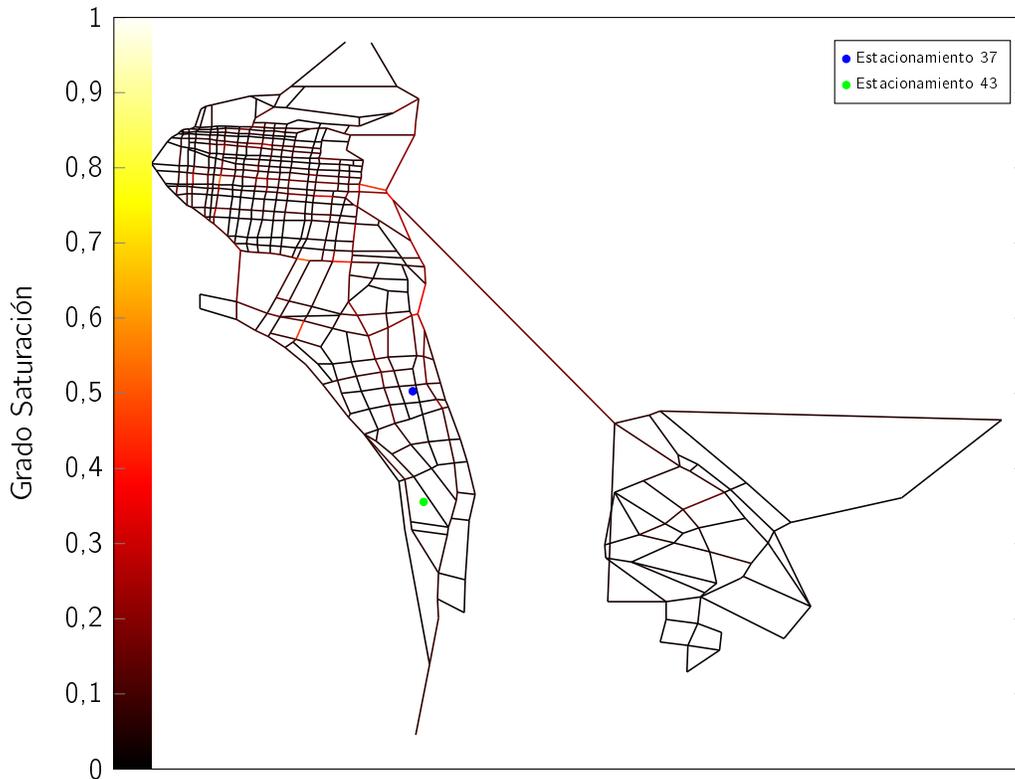


Figura 4.15: Equilibrio IEM-CM en Transporte Privado, Red Iquique Año 1998

Tabla 4.18: Uso de Estacionamientos, Red Iquique Año 1998

Nodo	Demanda [veh/hr]	Capacidad [veh/hr]	Grado Saturación	Tiempo de Espera Prom. (T_{wp}^k) [seg]	Largo de Cola Prom. [veh]
37	291	360	0,81	62	5,0
43	254	360	0,71	44	3,1

En síntesis, en este capítulo se presentó un algoritmo de resolución para el modelo STE, y se analizaron diferencias entre este modelo de equilibrio estocástico en transporte público con respecto a formulaciones de tipo determinista para el mismo problema. Una formulación estocástica permite reflejar de mejor forma la variabilidad en la percepción de los tiempos de viaje que experimentan los usuarios de transporte público. Por otro lado, también se propuso un algoritmo para el modelo conjunto de equilibrio IEM, el que integra tanto el transporte público mediante el modelo STE, como el equilibrio en transporte privado con el modelo MTE de Baillon y Cominetti (2008).

Los algoritmos de STE e IEM fueron probados en redes de tamaño medio para realizar análisis de sensibilidad frente a la variación de parámetros relevantes de ambos modelos. En particular, se generaron distintas instancias modificando el grado de estocasticidad en las redes, que reflejaran en mayor medida la variabilidad en los tiempos de viaje. Los resultados encontrados son consistentes, al haber una mayor dispersión de flujos dentro de la red, pues una proporción de los usuarios escogen

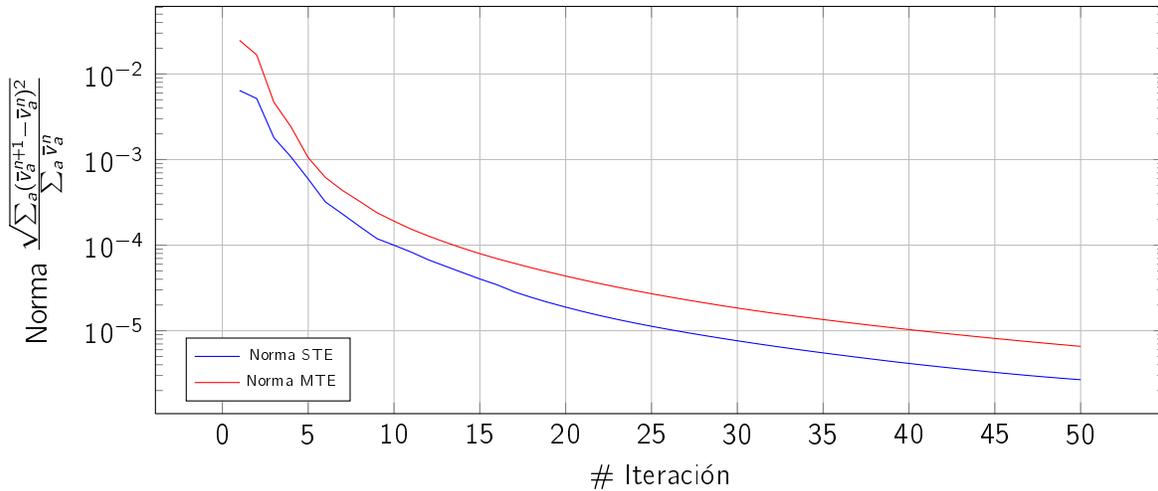


Figura 4.16: Norma IEM-CM, Red Iquique Año 1998

Tabla 4.19: Sensibilidad en el Uso de Estacionamientos Mediante Variación del Parámetro β_P

ρ	β_P	Nodo	Demanda [veh/hr]	Capacidad [veh/hr]	Grado Saturación	T_{wp}^k [seg]	L [veh]
0,25	2,0	37	263	360	0,73	47	3,4
		43	216	360	0,60	35	2,1
0,5	1,41	37	291	360	0,81	62	5,0
		43	254	360	0,71	44	3,1
0,75	1,15	37	314	360	0,87	88	7,7
		43	285	360	0,79	58	4,6

rutas o estrategias subóptimas para realizar sus viajes, capturando de mejor forma lo que ocurre en zonas urbanas.

Por último, cabe mencionar que ambos algoritmos de solución fueron probados en una red de tamaño real, comprobándose que es posible encontrar un equilibrio tanto en transporte público como privado en tiempos de ejecución y equipamientos computacionales razonables.

Capítulo 5

Conclusiones y Líneas Futuras de Investigación

Durante las últimas décadas, los modelos de asignación y equilibrio de pasajeros en transporte público han tenido avances notorios, donde las propuestas comparten en mayor grado los mismos objetivos. Por un lado, ser capaces de reproducir los flujos observados en las calles de extensiones urbanas y las elecciones que los usuarios hacen al momento de realizar un viaje, decisiones que están influidas por el conocimiento que ellos tienen de las características y de la operación de la red, tales como rutas, tiempos de viaje y frecuencia. Por otro lado, estos modelos deben convertirse en herramientas de planificación urbana, que ayuden a operadores y autoridades con predicciones certeras frente a cambios relevantes en el sistema de transporte.

Hasta ahora, los modelos de equilibrio de transporte público han representado en forma eficiente el proceso de elección de los usuarios, mediante la introducción del concepto de hiperrutas, la cual es en sí misma una estrategia que debe seguir el usuario para realizar un viaje. Luego, aprovechando los avances en los modelos de equilibrio en transporte privado en términos de resolución e implementación -altamente estudiados durante los últimos 30 años-, fue posible obtener resultados computacionalmente eficientes. Sin embargo, en general los modelos de equilibrio en transporte público adoptan un supuesto fundamental: los usuarios conocen a la perfección las características y operación de la red. Luego, siempre adoptan aquella estrategia que minimiza sus tiempos esperados de viaje (Nguyen y Pallotino, 1988; Spiess y Florian, 1989; De Cea y Fernández, 1993; Cominetti y Correa, 2001; Cepeda et al., 2006). Este supuesto puede ser plausible en ciudades de tamaño intermedio, donde la red de transporte público no es demasiado grande, y la variabilidad en tiempos de viaje y frecuencia es más bien baja; sin embargo, no lo es cuando el tamaño de la ciudad obliga a codificar redes más grandes y densas, y con mayor variabilidad en las variables de operación del sistema.

Por lo anterior, se hace necesario incluir un elemento que refleje, en primer lugar, un cierto nivel de incerteza y desconocimiento por parte de los usuarios; y en segundo lugar, el desconocimiento que el modelador tiene al analizar la conducta y decisiones de viaje por parte de los pasajeros. En esta tesis se propone un modelo de equilibrio en transporte público que introduce un elemento de estocasticidad en las decisiones de los pasajeros, modelo al que se denotó por la sigla STE. Concretamente, este elemento probabilístico se refleja al momento de abordar un bus en una parada determinada, recogiendo las percepciones que tienen los pasajeros sobre el sistema de transporte, la cual puede diferir en mayor o menor grado de la real operación del sistema. Este modelo extiende el planteamiento determinista de Cominetti y Correa (2001) y de Cepeda et al. (2006) al ámbito estocástico, haciéndolo adaptable

para ciudades en donde los usuarios tienen información incompleta. Luego, el modelo de equilibrio determinista es un caso especial del modelo STE.

Las pruebas realizadas durante el desarrollo de esta tesis son promisorias, pues el modelo STE es altamente flexible a las condiciones del sistema de transporte público que se encuentran en las zonas urbanas -aspecto también considerado en los modelos deterministas-, pero integra también aquella flexibilidad para adaptarse a las percepciones de los usuarios, reflejando de mejor manera lo que ocurre en el sistema con las decisiones de viaje. Por otro lado, se propone un algoritmo que encuentra en forma fehaciente el equilibrio de pasajeros, y que incluso fue probado con datos reales y calibrados para una ciudad de gran tamaño, no encontrándose dificultades en la resolución, aunque para validar totalmente el modelo, se requieren mediciones y conteos de pasajeros y vehículos, lo cual se encuentra fuera del alcance de esta tesis.

Adicionalmente, se desarrolló la integración del modelo STE con el modelo estocástico de equilibrio en transporte privado MTE propuesto por Baillon y Cominetti (2008), los cuales comparten la concepción del modelo: el modelamiento de las decisiones de los usuarios -pasajeros o automovilistas- en un punto particular del viaje son similares en ambos casos. Esta integración de ambos modelos refleja la interacción que existe en redes de transporte, pues existe parte de la población que tiene la opción de escoger entre ambos modos -o combinarlos- y además, en la ciudad autos y buses comparten infraestructura vial. Para este modelo integrado de equilibrio, denotado por la sigla IEM, también se propone un algoritmo de resolución, que converge y encuentra el equilibrio conjunto, tanto en términos de pasajeros como de vehículos.

Cabe mencionar que si bien durante el desarrollo de esta tesis se propuso un modelo de partición modal entre ambos sistemas, el modelo IEM es lo suficientemente flexible para integrar en forma simple otros modelos de partición modal existentes, no perdiendo con ello los elementos estructurales del equilibrio estocástico integrado.

Por otro lado, se deben indicar algunas líneas futuras de investigación que surgen como aspectos fundamentales para seguir mejorando el modelo STE, y el modelo conjunto IEM. Una de ellas tiene relación con la formulación de la probabilidad de abordar un bus. Esta probabilidad, que tiene ciertos requerimientos mínimos que sirvan para el propósito de modelar la decisión de subirse a un bus o quedarse en la parada esperando el próximo, admite formulaciones variadas, junto con la inclusión de parámetros de acuerdo a la incerteza que tengan los pasajeros en el contexto urbano. En esta tesis, se presentaron dos de ellas, y una se incluyó en las simulaciones realizadas. Es posible expandir este ámbito mediante la proposición de nuevas formulaciones por un lado; y por otro, desarrollando metodologías para calibrar empíricamente los parámetros necesarios de aquellas formulaciones mediante datos recogidos de la operación en terreno, que permitan utilizar el modelo en condiciones reales. Además, y como ya se mencionó anteriormente, el modelo IEM puede robustecerse con otros modelos de partición modal, utilizando formulaciones distintas al logit jerárquico propuesto.

En términos algorítmicos, es posible buscar un aumento en la velocidad de convergencia hacia el equilibrio del modelo conjunto utilizando otros métodos distintos al MSA. Por ejemplo, optimizando el valor del ponderador -o valor del paso- entre el vector de flujo inducido y el vector de flujo resultante en la iteración anterior mediante otros métodos numéricos basados en búsqueda lineal o en el método de Newton. Y finalmente, en términos teóricos, cabe mencionar que la existencia del equilibrio en el modelo STE está garantizada para el problema de líneas comunes (Cortés et al., 2013). Sin embargo,

queda abierta la demostración de la existencia -y también unicidad- para el caso de una red general de transporte público.

Bibliografía

- Andreasson, I. A method for the analysis of transit networks. In *Second European Congress on Operations Research*. Amsterdam, North-Holland, 1976.
- Baillon, J.R. y Cominetti, R. Markovian traffic equilibrium. *Mathematical Programming Series B*, 111 (1-2):33–56, 2008.
- Bar-Gera, H. Transportation test problems, 2011. URL <http://www.bgu.ac.il/~bargera/tntp/>.
- Bouzaïène-Ayari, B., Gendreau, M., y Nguyen, S. Modeling bus stops in transit network: A survey and new formulations. *Transportation Science*, 35(3):304–321, 2001.
- Cats, O. *Dynamic Modelling of Transit Operations and Passenger Decisions*. PhD thesis, KTH-Royal Institute of Technology, 2011.
- Cepeda, M., Cominetti, R., y Florian, M. A frequency-based assignment model for congested transit networks with stric capacity constrains: characterization and computation of equilibria. *Transportation Research Part B*, 40(6):437–459, 2006.
- Chriqui, C. y Robillard, P. Common bus lines. *Transportation Science*, 9:115–121, 1975.
- Cominetti, R. y Correa, J. Common-lines and passenger assignment in congested networks. *Transportation Science*, 35(3):250–267, 2001.
- Cominetti, R., Facchinei, F., y Lasserre, J.B. *Modern Optimization Techniques*. Birkhäuser, 2012.
- Cortés, C.E., Jara-Moroni, P., Moreno, E., y Pineda, C. Stochastic transit equilibrium. *Transportation Research Part B*, 51:29–44, 2013.
- De Cea, J. y Fernández, F. Transit assignment for congested public transport systems: An equilibrium model. *Transportation Science*, 27(2):133–147, 1993.
- Fernández, E., De Cea, J., Florian, M., y Cabrera, E. Network equilibrium models with combined modes. *Transportation Science*, 28(3):182–192, 1994.
- Florian, M. A traffic equilibrium model of travel by car and public transit modes. *Transportation Science*, 11(2):166–179, 1977.
- Florian, M. y Los, M. Determining intermediate origin-destination matrices for the analysis of composite mode trips. *Transportation Research Part B*, 13(2):91–103, 1979.
- Florian, M. y Spiess, H. On binary mode choice/assignment models. *Transportation Science*, 17(1): 32–47, 1983.

- García, R. y Marín, A. Network equilibrium with combined modes: models and solution algorithms. *Transportation Research Part B*, 39:223–254, 2005.
- Hamdouch, Y. y Lawphongpanich, S. Schedule-based transit assignment model with travel strategies and capacity constraints. *Transportation Research Part B*, 42(7):663–684, 2008.
- Hamdouch, Y., Ho, H.W., Sumalee, A., y Wang, G. Schedule-based transit assignment model with vehicle capacity and seat availability. *Transportation Research Part B*, 45(10):1805–1830, 2011.
- Hasselstrom, D. *Public transportation planning: A mathematical programming approach*. PhD thesis, Department of Business Administration, University of Gothenburg, Suecia, 1982.
- Larson, R.C. y Odoni, A.R. *Urban Operation Research*. Prentice-Hall, NJ, 1981.
- Nguyen, S. y Pallotino, S. Equilibrium traffic assignment for large scale transit networks. *European Journal of Operational Research*, 37(2):176–186, 1988.
- Nguyen, S., Pallotino, S., y Gendreau, M. Implicit enumeration of hyperpaths in a logit model for transit networks. *Transportation Science*, 32(1):54–64, 1998.
- Nökel, K. y Wekeck, S. Boarding and alighting in frequency-based transit assignment. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, 2111:60–67, 2009.
- Ortúzar, J. de D. y Willumsen, L.G. *Modelling transport*, volume 7. Wiley Chichester, 2001.
- Rapp, M.H., Mattenberger, P., Piguet, S., y Robert-Grandpierre, A. Interactive graphics system for transit route optimization. *Transportation Research Record*, (559), 1976.
- Schenk, O., Wächter, A., y Hagemann, M. Matching-based preprocessing algorithms to the solution of saddle-point problems in large-scale nonconvex interior-point optimization. *Comput. Optim. Appl.*, 36(2-3):321–341, 2007.
- Schenk, O., Bollhoefer, M., y Roemer, R. On large-scale diagonalization techniques for the Anderson model of localization. *SIEM Review*, 50:91–112, 2008.
- Secretaría de Planificación de Transporte, Gobierno de Chile Ministerio de Transportes y Telecomunicaciones. *Vivaldi: Manual del Usuario Versión 6.3*, 2012.
- Sheffi, Y. *Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods*. Prentice-Hall, NJ, 1985.
- Spiess, H. y Florian, M. Optimal strategies: a new assignment model for transit networks. *Transportation Research Part B*, 23(2):83–102, 1989.
- Vasconcellos, L., Bastos-Silva, A., Seco, A., y Silva, J. Estimating the parameters of Cowan's m3 headway distribution for roundabout capacity analyses. *The Baltic Journal of Road and Bridge Engineering*, 7(4):261–268, 2012.
- Wong, S.C. Multi-commodity traffic assignment by continuum approximation of network flow with variable demand. *Transportation Research Part B*, 32(8):567–581, 1998.
- Wu, J.H., Florian, M., y Marcotte, P. Transit equilibrium assignment: A model and solution algorithms. *Transportation Science*, 28(3):193–203, 1994.

Anexos

Anexo A

Tiempos de Espera en Paradero

A.1. Distribución del Tiempo de Espera para Llegadas Cowan M3

Sea $Y = \min\{Y_1, \dots, Y_n\}$ el tiempo de espera de un pasajero que llega a un paradero que tiene n líneas atractivas, con $Y_a \rightsquigarrow \text{Cowan M3}(f_a, \Phi_a, \Delta) \forall a \in \{1, \dots, n\}$ independientes entre sí. Entonces, la función de distribución acumulativa (cdf) de Y puede calcularse como:

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P[Y \leq t] \\ &= 1 - P[Y > t] \\ &= 1 - P[\min\{Y_1, \dots, Y_n\} > t] \\ &= 1 - \prod_a P[Y_a > t] \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < \Delta \\ 1 - \prod_a (\Phi_a \cdot e^{-f_a(t-\Delta)}) & \text{si } t \geq \Delta \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < \Delta \\ 1 - (\prod_a \Phi_a) \cdot e^{-\sum_a f_a(t-\Delta)} & \text{si } t \geq \Delta \end{cases} \\ &\Rightarrow Y \rightsquigarrow \text{Cowan M3} \left(\sum_a f_a, \prod_a \Phi_a, \Delta \right) \end{aligned}$$

A.2. Probabilidad de la Llegada del Primer Bus con Cowan M3

Sean n líneas, cada con una distribución del intervalo entre llegadas independientes del tipo $Y_a \rightsquigarrow \text{Cowan M3}(f_a, \Phi_a, \Delta) \forall a \in \{1, \dots, n\}$. Sea \bar{p}_a la probabilidad de que la línea a sea la primera en llegar al paradero. Luego:

$$\begin{aligned}
\bar{p}_a &= P[Y_a = \min\{Y_1, \dots, Y_n\}] \\
&= \int_0^\infty \prod_{a' \neq a} P[Y_{a'} > t] \cdot f_{Y_a}(t) dt \\
&= \underbrace{\int_0^\Delta \prod_{a' \neq a} P[Y_{a'} > t] \cdot 0 dt}_0 + \int_\Delta^\infty \prod_{a' \neq a} P[Y_{a'} > t] \cdot \Phi_a \lambda_a e^{-\lambda_a(t-\Delta)} dt \\
&= \int_\Delta^\infty \prod_{a' \neq a} \left(\Phi_{a'} \cdot e^{-\lambda_{a'}(t-\Delta)} \right) \cdot \Phi_a \lambda_a e^{-\lambda_a(t-\Delta)} dt \\
&= \prod_{a'} \Phi_{a'} \cdot e^{\sum_{a'} \lambda_{a'} \Delta} \cdot \lambda_a \cdot \int_\Delta^\infty e^{-\sum_{a'} \lambda_{a'} t} dt \\
&= \prod_{a'} \Phi_{a'} \cdot e^{\sum_{a'} \lambda_{a'} \Delta} \cdot \lambda_a \cdot \left[\frac{-e^{-\sum_{a'} \lambda_{a'} t}}{\sum_{a'} \lambda_{a'}} \right]_\Delta^\infty \\
&= \prod_{a'} \Phi_{a'} \cdot e^{\sum_{a'} \lambda_{a'} \Delta} \cdot \lambda_a \cdot \left[\frac{e^{-\sum_{a'} \lambda_{a'} \Delta}}{\sum_{a'} \lambda_{a'}} \right] \\
\Rightarrow \bar{p}_a &= \prod_{a'} \Phi_{a'} \frac{\lambda_a}{\sum_{a'} \lambda_{a'}}
\end{aligned}$$

Anexo B

Implementación IEM en C++

La implementación del algoritmo para encontrar el equilibrio conjunto se realizó en lenguaje C++, utilizando el compilador integrado en *Microsoft Visual Studio 2010*. El código fuente y la documentación en forma detallada pueden encontrarse en <http://www.cec.uchile.cl/~crpineda/iem> (en inglés).

El algoritmo utiliza la librería externa *PARDISO v4.1.2* (<http://www.pardiso-project.org/>) para resolver los sistemas de ecuaciones lineales de tipo sparse, presentes en el cálculo de los tiempos esperados de viaje en el modelo STE, y la asignación de flujo tanto en este modelo como en el MTE.