



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

RIESGO DEL PRECIO DEL COBRE A LARGO PLAZO Y SU APLICACIÓN EN LAS
INVERSIONES DE CODELCO

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

JUAN LUIS ARACENA ARAYA

PROFESOR GUÍA:
JOSÉ M. CRUZ GONZÁLEZ

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
ANDRÉS KETTLUN LEYTON
HERMAN BENNETT CONTZEN

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por Codelco.

SANTIAGO DE CHILE
MARZO 2014

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL
POR: JUAN LUIS ARACENA ARAYA
FECHA: 2014
PROF. GUÍA: JOSÉ MIGUEL CRUZ GONZÁLEZ

RIESGO DEL PRECIO DEL COBRE A LARGO PLAZO Y SU APLICACIÓN EN LAS INVERSIONES DE CODELCO

El objetivo de esta memoria es modelar y analizar el precio del cobre en conjunto de su riesgo a largo plazo. Además se considera el efecto que puede tener los precios modelados y su volatilidad en las inversiones de Codelco.

Se implementaron tres modelos, los cuales fueron el Movimiento Browniano Geométrico (MGB), el Proceso de Ornstein Uhlenbeck (POU) y el Proceso Generalizado Autoregresivo con Heterocedasticidad Condicional (GARCH). Los datos para obtención de parámetros fueron los precios promedios mensuales desde enero de 1973 hasta septiembre de 2013.

Los modelos fueron probados con diferentes tests para observar el cumplimiento de las hipótesis de los modelos, como la normalidad, independencia y varianza constante en los retornos. Además se realizó un test de reversión a la media. Para las tres primeras los tests presentaron rechazos de las hipótesis, mientras que para la última se demostró que existe una reversión a la media a largo plazo.

Luego de obtener los parámetros y las simulaciones, y con el objetivo de representar una estimación del precio y su riesgo en el futuro se realizó un pronóstico paramétrico para los próximos 10 años. Además para probar cuál modelo presenta una mejor precisión se realizaron diferentes simulación *in sample* para los periodos 2012-2013, 2008-2013, 2003-2013 y 1993-2013.

La medición de precisión por medio del indicador MAPE determinó que el modelo GARCH presenta un mejor rendimiento en nivel general.

Por último, se realizó un análisis de riesgo en relación a las inversiones de Codelco. En este sentido, se implementó la metodología VaR a un proyecto tipo de Codelco con los diferentes precios obtenidos en los modelos expuestos, evaluando un VAN esperado y un VAN seguro.

En base a los indicadores VaR obtenidos se concluye que el modelo MBG sobreestima la evaluación VAN con un mayor riesgo incluido, el POU subestima la evaluación VAN con un riesgo bajo, mientras que el modelo GARCH presenta un VAN más equilibrado con un riesgo relativamente bajo.

Finalmente, en base al rendimiento en precisión por medio del MAPE y en base a una evaluación de riesgo en un proyecto inversional, se concluye que el modelo GARCH es el que tiene un mejor rendimiento entre los modelos presentados.

“Drunk again in the rhododendrons.”

Agradecimientos

Primero que todo quiero agradecer a mi familia por acompañarme en todo momento al terminar este proceso. Si no fuera por mis padres, no podría estar terminando esta importante etapa la cual es terminar la enseñanza universitaria. Además de darles las gracias por confiar en mí al momento de venirme a Santiago, y de siempre apoyarme con consejos y sus cariños. También le doy las gracias a mi hermano por siempre estar allí, aconsejándome en cada momento preciso y ayudándome a enfrentar cada desafío.

También quiero darle las gracias a mis profesores que me acompañaron en todo el proceso de la construcción de esta memoria. Dar gracias a mi profesor guía el cual me abrió la oportunidad de trabajar en un proyecto relacionado a finanzas y la minería, y a pesar de todo, siempre tener los consejos adecuados para el óptimo desarrollo del proyecto. También darle las gracias a mi profesor co-guía el cual siempre estuvo disponible en cada momento que lo necesité para la orientación del proyecto, por permitirme contribuir un poco más en los estudios del cobre y en especial por ayudarme a trabajar para Codelco. También agradecer a mi profesor integrante, el cual siempre tuvo un comentario preciso para mejorar este proyecto.

Finalmente le quiero dar las gracias a mis amigos. Incontables son las personas que he conocido en todo este proceso universitario de los cuales cada uno aportado en mí una experiencia única, por medio de una historia, una ayuda, algunas palabras y también algunas sonrisas. Todos esos gestos lo he considerado y agradezco que hayan estado allí.

Tabla de Contenido

| | |
|---|-----------|
| Indice de Ilustraciones | 3 |
| Indice de Tablas | 4 |
| 1. Introducción | 5 |
| 1.1. Motivación | 5 |
| 1.2. Objetivo General | 6 |
| 1.3. Objetivos Específicos | 6 |
| 1.4. Metodología | 6 |
| 1.5. Alcances | 7 |
| 1.6. Estructura de la Memoria | 7 |
| 2. Antecedentes Generales | 9 |
| 2.1. Commodities | 9 |
| 2.2. La importancia del precio del cobre en la industria minera | 10 |
| 2.3. Factores importantes para el pronóstico del precio | 12 |
| 3. Marco Conceptual | 15 |
| 3.1. Movimiento Geométrico Browniano | 15 |
| 3.2. Proceso de Ornstein-Uhlenbeck Geométrico | 16 |
| 3.3. Modelo Generalizado Autoregresivo con Heterocedasticidad Condicional | 18 |
| 4. Implementación de los Modelos | 20 |

| | |
|--|-----------|
| 4.1. Datos | 20 |
| 4.2. Implementación del Movimiento Geométrico Browniano | 21 |
| 4.3. Implementación del Proceso de Ornstein-Uhlenbeck Geométrico | 21 |
| 4.4. Implementación del Modelo Generalizado Autoregresivo con Heterocedasticidad Condiciona l | 23 |
| 5. Validación de los Modelos | 26 |
| 5.1. Distribución normal en los retornos del precio del cobre | 26 |
| 5.2. Independencia en los retornos del precio del cobre | 29 |
| 5.3. Reversión a la media en los retornos del precio del cobre | 29 |
| 6. Resultados de los Modelos | 32 |
| 6.1. Pronósticos | 32 |
| 6.2. Comparación entre los Modelos | 33 |
| 7. Implicancias de los Modelos de Precio en las Inversiones de Codelco | 37 |
| 7.1. El Valor en Riesgo y su importancia en las inversiones | 37 |
| 7.2. Aplicación de los resultados de los modelos en un proyecto de inversión de Codelco | 38 |
| 7.3. Resultados del VaR | 40 |
| 8. Conclusiones | 41 |
| 8.1. Trabajos Futuros | 42 |
| 9. Bibliografía | 44 |
| A. Apéndice A: Ecuaciones | I |
| A.1. Lema de Itô | II |
| A.2. Ecuaciones de Kolmogorov | III |
| B. Apéndice B: Tablas | VI |

Índice de Ilustraciones

| | |
|--|----|
| 2.1. Comparación entre precio real y variación de producción entre 1973 y 2011 | 11 |
| 2.2. Precio real del cobre entre 1973 y 2013 | 13 |
| 2.3. Precio promedio del cobre entre 1973 y 2013 | 13 |
| 4.1. Simulación del Movimiento Geométrico Browniano para el periodo 1973-2013 . . . | 22 |
| 4.2. Simulación del Proceso de Ornstein-Uhlenbeck Geométrico para el periodo 1973- 2013 | 24 |
| 4.3. Simulación del Proceso de GARCH para el periodo 1973-2013 | 25 |
| 5.1. Gráfico de distribución normal de los retornos mensuales del precio del cobre . . . | 27 |
| 5.2. Gráfico Q-Q de los retornos del precio del cobre | 28 |
| 5.3. Volatilidad mensual en los retornos mensuales del precio del cobre | 30 |
| 5.4. Test de reversión a la media | 31 |
| 6.1. Pronóstico del precio del cobre bajo el modelo Movimiento Browniano Geométrico | 34 |
| 6.2. Pronóstico del precio del cobre bajo el modelo con reversión a la media | 35 |
| 6.3. Pronóstico del precio del cobre bajo el modelo con reversión a la media con GARCH | 36 |
| 7.1. Gráfico de VaR | 38 |
| 7.2. Gráfico de Precios Esperados y Precios Críticos | 39 |

Indice de Tablas

| | |
|--|------|
| 6.1. Tabla comparación MAPE periodo 1 | 35 |
| 6.2. Tabla comparación MAPE periodo 2 | 36 |
| 7.1. Tabla comparación VaR | 40 |
| B.1. Tabla de precios mensuales reales del cobre | VII |
| B.2. Tabla de precios bajo MGB | VIII |
| B.3. Tabla de precios bajo POU | VIII |

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Chile cuenta con la mayor cantidad de reservas mineras de cobre a nivel mundial [1], además de ser líder en la producción con un 32% del total a nivel global [2]. La importancia del mercado del cobre se considera fundamental para la economía interna del país. Esto se representa por la importancia que ha tenido el metal rojo en las exportaciones en los últimos años. En el año 2011 se exportaron cerca de 5 millones de toneladas métricas de cobre [3], traducéndose en un total de 43.154 millones de dólares, siendo un 46.9% del total de exportaciones del país para ese mismo año [4].

Por lo anterior, se determina que el estudio del mercado del cobre es de gran prioridad para entidades públicas como privadas, en particular de las empresas mineras. Esto se debe a que las decisiones que pueden tomar las empresas con respecto a los diferentes proyectos de inversión tienen un gran impacto en la rentabilidad de las mismas. En particular, la industria minera se caracteriza por evaluar proyectos a varios años de implementación, por lo tanto, su evaluación está determinado por los precios esperados a largo plazo.

Actualmente existen diferentes metodologías para calcular el precio del cobre, ya sea para el corto, mediano y largo plazo. Para el corto y mediano plazo, las metodologías existentes se basan en los cambios e impactos repentinos del mercado, ya sea por shocks exógenos o variaciones basadas en las especulaciones de los mercados financieros internacionales. También se considera que en el corto plazo el precio no está dado por el equilibrio entre las variables de flujo como consumo o producción, si no que está basado en el equilibrio de la oferta y la demanda por stocks de cobre. Para el largo plazo, existen diferentes modelos de proyección, como el análisis de equilibrios económicos por variables reales como modelos con equilibrios financieros.

Es aquí donde modelos de *commodity pricing* han trabajado para determinar valores de primas por riesgo, retornos futuros, precios spot esperados y precios futuros esperados en mercados de *commodities*, además de estudiar la volatilidad o riesgo que tienen estos valores generando diferentes modelos financieros que buscan simular los procesos de precios.

El enfoque que se ocupará en esta memoria será de estudiar diferentes modelos de *commodity pricing*, en particular de *stochastic pricing*, cual usa como argumento el no arbitraje, generando las dinámicas de precios.

1.2. Objetivo General

Modelar, obtener y analizar el riesgo del precio del cobre a largo plazo, y en cómo afectan a las decisiones de inversión de Codelco.

1.3. Objetivos Específicos

- Adaptar diferentes modelos de *stochastic pricing* al mercado actual del cobre.
- Probar el modelo con datos reales y analizar la validez con respecto a los resultados.
- Obtener el riesgo del precio del cobre a largo plazo.
- Analizar y comprender cómo influyen estos resultados en las decisiones de inversión en Codelco.

1.4. Metodología

La estructura de este trabajo está diseñada a partir de los objetivos específicos anteriormente planteados. Por lo tanto, la primera etapa de este proyecto se enfocará en conocer las diferentes metodología, alcance y parámetros de los modelos estocásticos a ocupar.

A continuación, luego de adaptar los modelos para el caso del mercado actual del cobre, se espera ocupar datos reales para la implementación y posterior validación de los modelos. Los datos necesarios para la evaluación de los modelos se obtendrán de bases de datos disponibles por Codelco.

Después se espera obtener los resultados de la implementación, como bandas de precios, riesgo de precios a largo plazo e indicadores probabilísticos relacionados al precio esperado y su riesgo.

Finalmente, al conocer los resultados entregados por los modelos, y luego de la implementación y validación hecha anteriormente, se busca conocer cuáles son los impactos que tienen estos resultados en las decisiones de inversión de Codelco. Particularmente, los efectos que tiene el precio esperado como su riesgo en la evaluación de Valor de Riesgo de un proyecto con el fin de medir y comparar los resultados modelados para entregar mejor información en las decisiones de inversión.

1.5. Alcances

El alcance de esta memoria es realizar una adaptación de diferentes modelos de procesos estocásticos para el precio del cobre, donde se busca obtener precios esperados y riesgo de lo mismos para el largo plazo. Los tiempos de evaluación de los proyectos mineros varían grandemente en su tiempo, desde proyectos para 1 año hasta proyectos con 60 años de evaluación. Para efectos de esta memoria, el corto plazo se determinará hasta 1 año, el mediano plazo de 1 a 5 años y el largo plazo será considerado desde 5 años hacia adelante.

Lo que no se abordará será la comparación de efectividad de los modelos de esta memoria con respecto a otras metodologías ocupadas por Codelco, además no tendrá como alcance el abordar la totalidad de las inversiones de Codelco.

En relación a la adaptación, resultados directos como los que siguen pueden ser obtenidos por el modelo:

- Estructura simulada del precio spot del cobre, donde se obtienen los precio esperados y riesgo de los mismo.
- Pronóstico paramétrico del precio spot esperados del cobre, además de su volatilidad.

El siguiente resultado importante, se basa en el análisis dirigido a la inversión de un proyecto de Codelco. El impacto que tiene los precios en las inversiones presenta características volátiles en el sentido de que existen diferentes riesgos en la evaluación financiera de los proyectos. Por lo mismo, se espera entregar como resultado el impacto que tienen los precios simulados por los modelos de precios en la evaluación económica del proyecto seleccionado, específicamente la Valoración en Riesgo.

1.6. Estructura de la Memoria

La estructura de los capítulos en esta memoria es la siguiente:

- **Capítulo 1. Introducción:** Corresponde a la descripción del tema, la motivación de éste y los alcances y objetivos del trabajo realizado.
- **Capítulo 2. Antecedentes Generales:** En este capítulo se explican los conceptos necesarios para la comprensión y contextualización del trabajo.
- **Capítulo 3. Marco Conceptual:** En este capítulo se presentarán los modelos matemáticos y probabilísticos necesarios para el desarrollo empírico posterior.
- **Capítulo 4. Implementación de los Modelos:** Es este capítulo se presentará la metodología de implementación, ocupando los datos empíricos para la construcción de los modelos.

- **Capítulo 5. Validación de los Modelos:** Es este capítulo se presentará la metodología de validación de los diferentes modelos.
- **Capítulo 6. Resultados de los Modelos:** Se refiere a los resultados obtenidos en el desarrollo empírico del modelo.
- **Capítulo 7. Implicancias de los Modelos de Precio en las Inversiones de Codelco:** Se realiza un análisis de Valoración en Riesgo de un proyecto de inversión determinada, ocupando los resultados obtenidos por los modelos.
- **Capítulo 8. Conclusiones:** Se enumeran las conclusiones del trabajo realizado y se proponen trabajos a realizar en el futuro.

Capítulo 2

Antecedentes Generales

2.1. Commodities

El término *commodity* es aplicado principalmente a un conjunto de bienes los cuales cumplen la características de tener una oferta sin diferenciación cualitativa entre ellos [5]. Es decir, para un demandante de un *commodity* le es indiferente quién fue el productor, generando un mercado único, similar y universal para demandantes y oferentes.

Por lo tanto, una de las características de los bienes *commodity* es que su precio esta determinado en función de su mercado como un todo, provocando que algún *shock* externo (como efectos climáticos) o interno (quiebre de alguna importante empresa productora) afecte a todo el mercado por completo.

Variados han sido los intento de modelar y predecir los precios de los *commodities* a los largo de los últimos años. Luego de ser modelado bajo conceptos fundamentalmente económicos, a fines de los años 80, el estudio y predicción de los precios de los *commodities* se han basado en diferentes modelos estocásticos.

Estudios tempranos en el área asumían que los precios de los *commodities* siguen un “camino aleatorio” descrito por un Movimiento Geométrico Browniano [6] [7] [8]. Este es el modelo de acciones basado en la incertidumbre que soporta la conocida fórmula de Black-Scholes en la valoración de activos [9] el cual permite soluciones cerradas. En este modelo, se observa que los precios crecen a una tasa constante dentro de un rango determinado por su varianza, la cual se incrementa proporcional al tiempo. Si los precios incrementan (o disminuyen) más que lo anticipado en un periodo, todos los precios pronosticados aumentan (o disminuyen) proporcionalmente.

Luego, algunos autores consideraron que el uso de modelos de precios con reversión a la media son más apropiados para describir los *commodities* [10] [12] [13] [14]. Es intuitivo pensar que si los precios de un *commodity* es más alto que la media a largo plazo o el precio de equilibrio, la oferta del *commodity* aumentará debido a que entrarán nuevos productores que tienen lo más

altos costos, y con el nuevo precios pueden cubrirlos, provocando que el precio vaya a la baja por el aumento de oferta. De la misma forma, si el precio está relativamente bajo, los productores con los mayores costos tendrán que salir del mercado provocando que se eleve el precio por la disminución de la oferta. Cuando las entradas y salidas de los productores no son instantáneos, los precios pueden ser temporalmente altos o bajo pero siempre va a tender al precio de equilibrio.

Ambos tipos de modelos, el Movimiento Geométrico Browniano (MGB) y dos versiones del proceso con reversión a la media, el Proceso de Ornstein-Uhlenbeck (POU) y el Modelo Generalizado Autoregresivo con Heterocedasticidad Condicional (GARCH) serán considerados en este estudio, presentando su marco teórico, implementación, validación y resultados.

2.2. La importancia del precio del cobre en la industria minera

La producción del cobre está directamente afectada por los movimientos de su precio. Cuando los precios son altos, aumentan las utilidades provocando un aumento de inversión para nuevos proyectos, nuevas expansiones, aumento de exploración y reapertura de yacimientos que anteriormente no eran viables de producir. El caso contrario ocurre cuando el precio del cobre esta bajo, ya que al disminuir las utilidades se tienden a restringir el presupuesto de inversión disminuyendo las exploraciones, postergando proyectos y cerrando yacimientos con altos costos.

Por lo tanto, los movimientos de precios afectan directamente a las producción minera. Este efecto no es inmediato y depende de la capacidad de reacción que tengan las empresas. En la Figura 2.1 se puede observar la variación porcentual de la producción para la industria Chilena desde el año 1973 hasta el año 2011. También se presenta de forma superpuesta el movimiento del precio del cobre anualizado. Por ejemplo, se observa que en el año 1986 hay un aumento de precio y luego un aumento de producción cerca del 10%. También desde 1996 hasta el 2002 hay una tendencia a la baja del precio del cobre y también se observa una disminución promedio en las tasas de producción desde 23% hasta un -3%.

Es entonces, que las proyecciones del precio del cobre permiten conocer en cierta medida el panorama de inversión de los años venideros. Esto ayuda a que los productores del metal puedan contar con información relevante para la reducción del error del precio estimado en la planificación minera y en las evaluaciones de nuevos proyectos.

Es importante mencionar que los efectos del precio influyen en varios otros aspectos, entre ellos está la recaudación de fondos por parte del Estado Chileno, el cual recoge un porcentaje de las utilidades de las empresas mineras privadas (Impuesto específico más *Royalty*) y un porcentaje determinado por el mismo Estado hacia la Corporación Nacional del Cobre (Históricamente el Estado se ha quedado con todas las utilidades de la Corporación). Por lo tanto, varios debates y discusiones se han generado a nivel técnico y político de como enfrentar los vaivenes del precio de forma óptima para aprovechar estos ingresos fiscales y ser usados para proyectos sociales. Esto provoca que las estimaciones del precio ayuden a afinar las políticas sociales por parte del Estado. Para mayor detalle ver [15].

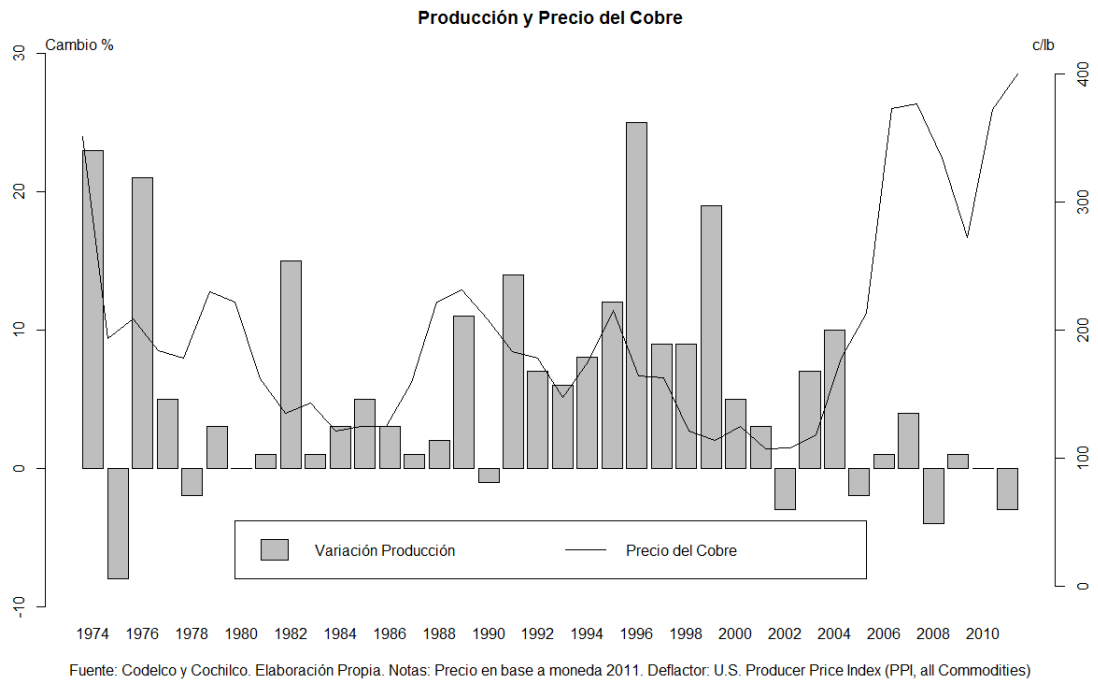


Figura 2.1: Precio real del cobre entre los años 1973 y 2011 con moneda base 2011. Variación porcentual entre la producción.

2.3. Factores importantes para el pronóstico del precio

Para poder pronosticar una variable, es necesario que el comportamiento de su dinámica esté fundada por patrones o relaciones identificables que permitan ser simulables y proyectables en el futuro. En particular, el éxito del pronóstico basado en una simulación depende de [16]:

- La existencia de regularidades que pueden ser capturadas.
- Que las regularidades sean informativas acerca del futuro.
- La adecuada captura de estas regularidades por parte del modelo construido.

En el caso del cobre, las dinámicas o shocks que pueden dar una explicación a la variación de su precio son de diversas y distintas naturalezas. Como se observa en la Figura 2.2 existe una marcada volatilidad. Algunos de las razones de esta variación en el precio pueden ser explicado por algunas de estas razones [17]:

- Fuertes cambios en la industria minera. Ya sea, por cambios significativos de los insumos productivos, grandes innovaciones tecnológicas o creación de nuevos mercados relacionados los cuales pueden perdurar por varios años. Estos cambios son llamados shocks con efectos permanentes.
- Desajuste transitorio entre la demanda y la oferta en el mercado del cobre. Generalmente se debe a la existencia de aumentos repentinos en la demanda y la flexibilidad del ajuste de la oferta no es inmediato, provocando que existan shocks transitorios en el precio.
- Shocks exógenos como desastres naturales, accidentes, fallas de equipos, huelgas o decisiones políticas.
- Desde los años noventa se ha empezado a usar el mercado del cobre como herramienta financiera. Algunos de sus usos son la cobertura, aprovechamiento de arbitraje, uso de derivados y operaciones financieras en general. Esto ha provocado que los precios estén sujetos por aspectos especulativos de agentes financieros provocando que el precio sea afectado por varios meses o años.

La suma de todos estos eventos determinan el precio en cada momento. Como se observa en la Figura 2.3, la serie histórica de precios presenta diferentes niveles de shocks. El promedio por cada década es diferentes (shocks temporales), siempre sujeto a una media permanente (shocks permanentes).

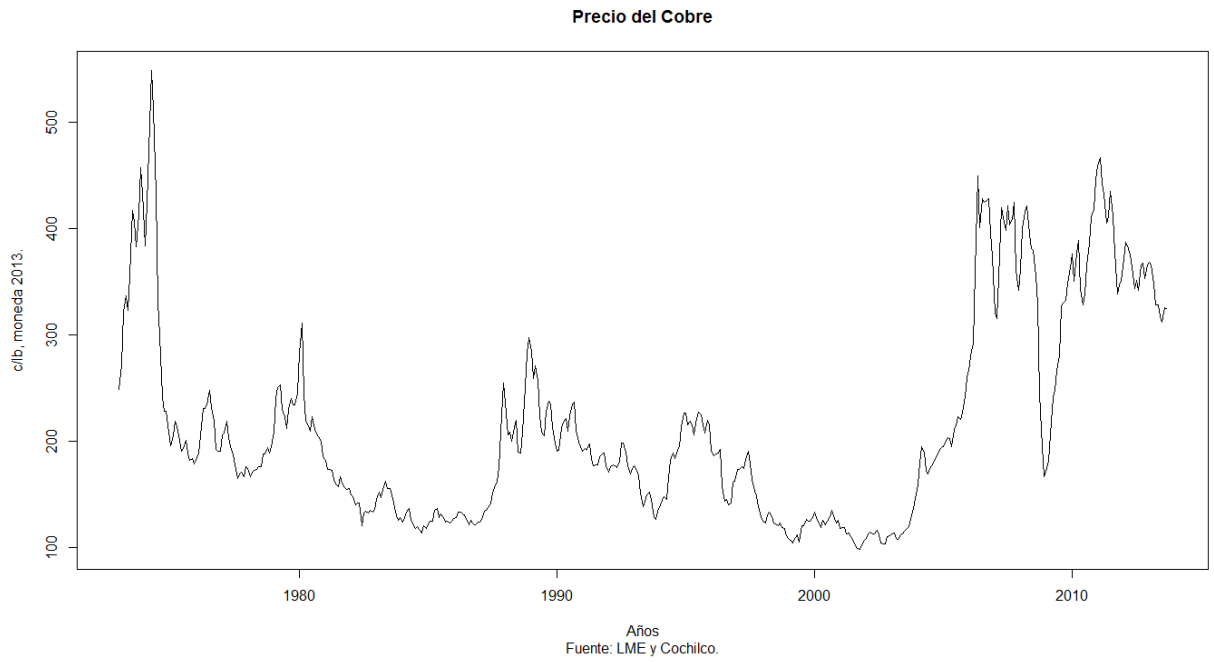


Figura 2.2: Precio promedio mensual real entre los años 1973 y 2011 con moneda base 2013.

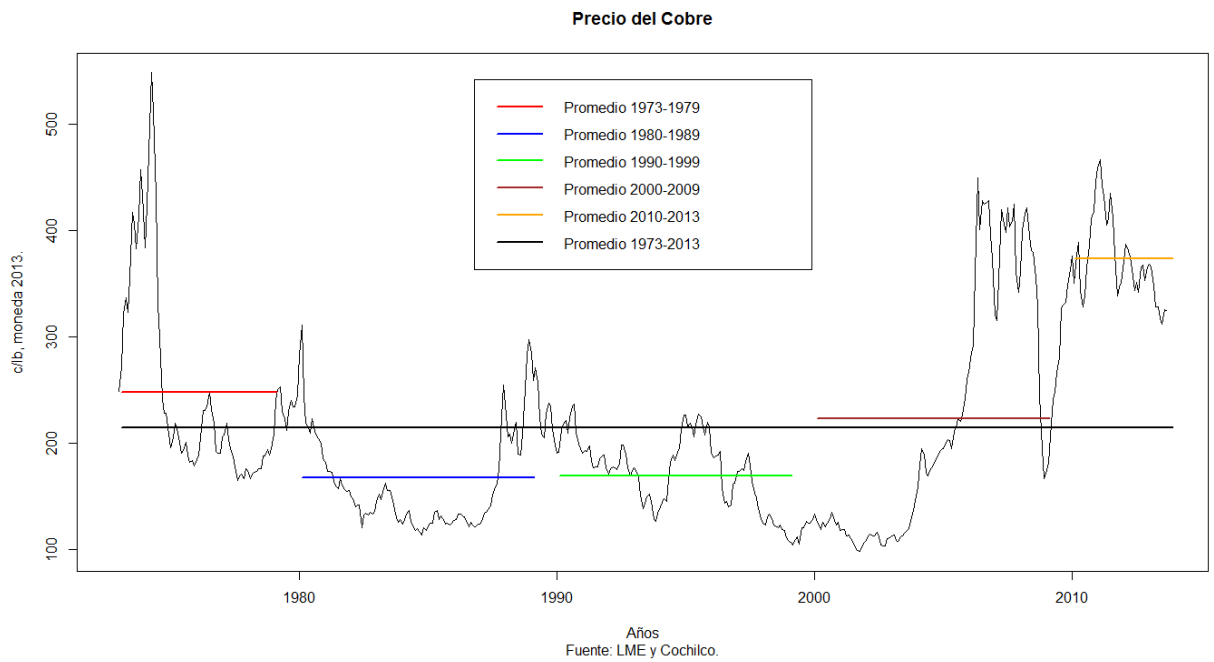


Figura 2.3: Precio promedio del cobre a través del tiempo, con moneda base 2013.

La dificultad en el pronóstico del precio yace en la complejidad que resulta en adelantarse a los shocks antes mencionados. Por otra parte, el potencial pronóstico del precio del cobre se basa en la habilidad de comprender y simular los tipos de shocks registrados, esperando que los shocks temporales tengan un decaimiento y los shocks permanentes sean considerados en la modelación [18].

La predictibilidad del precio se respalda por la tendencia económica de ajustar la demanda y la oferta del cobre al mediano y largo plazo. Por ejemplo, desde el año 2003 la demanda de cobre ha superado notablemente la oferta ofrecida por el mercado. Esto provocó que el precio alcanzara un techo histórico (en valores nominales) por la falta de oferta. Luego el aumento de oferta y la disminución de la demanda provocaron que en el año 2011 los precios bajaran, tendiendo a la media histórica.

Distinta es la situación cuando el pronóstico se hace para el corto plazo. Los factores especulativos, causas exógenas bruscas y baja reacción de las empresas, dificultan una proyección precisa.

Finalmente, al considerarse un pronóstico a mediano y largo plazo basado en los ajustes económicos, y evidenciando patrones en la dinámica de los precios, se puede deducir que las tendencias pueden ser capturadas por modelos de pronósticos [19].

Capítulo 3

Marco Conceptual

Un proceso estocástico es una secuencia de variables aleatorias que describe la evolución de un sistema a través del tiempo [20]. Los procesos estocásticos son regularmente usados en los modelos dinámicos de incertidumbre, incluyendo la incertidumbre de los precios [25].

En este capítulo se presentará de forma general tres de los modelos estocásticos más usados para la simulación de precios. Los parámetros de cada modelo son estimados usando los datos de los precios del cobre de los últimos 40 años, además se presentarán diferentes gráficos con las simulaciones de los precios.

Primero se presentará el Movimiento Geométrico Browniano, siguiendo con el Proceso de Ornstein-Uhlenbeck, finalizando con un proceso Modelo Generalizado Autoregresivo con Heterocedasticidad Condicional o mejor conocido como proceso GARCH.

3.1. Movimiento Geométrico Browniano

El movimiento Geométrico Browniano es definido por la siguiente ecuación estocástica diferencial:

$$(3.1) \quad dP = \mu P dt + \sigma P dW$$

Donde μ es el parámetro de la tendencia, dt es el cambio en el tiempo, σ es el parámetro de la volatilidad y

$$(3.2) \quad dW = \varepsilon(t) \times \sqrt{dt}$$

es el incremento del proceso de Wiener [25]. Aquí, $\varepsilon(t)$ es un proceso de error de ruido

blanco que sigue una distribución normal. En tiempo discreto, si el precio P_t sigue una distribución log-normal, ocupando el Lema de Itô [Apéndice A.1] la ecuación (3.1) puede ser expresada como:

$$(3.3) \quad P_t = P_{t-1} e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2}) + \sigma \varepsilon_t}$$

Donde $dt = 1$ y $\varepsilon_t \sim N(0,1)_{iid}$. El parámetro μ representa el promedio esperado de los retornos logarítmicos del precio sobre un periodo y σ es la variabilidad del proceso.

El pronóstico de precio condicional es [25]:

$$(3.4) \quad E[P_{s+t}|P_t] = P_t e^{\mu s}$$

Y la varianza condicional de el precio es [25] :

$$(3.5) \quad Var[P_{s+t}|P_t] = P_t^2 e^{2\mu s} (e^{\sigma^2 s} - 1)$$

Cuando $\mu = 0$, el Movimiento Geométrico Browniano es un proceso de Martingala. Notar que la varianza del proceso incrementa sin límite a lo largo del tiempo. Es decir:

$$(3.6) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} Var[P_{s+t}|P_t] = \infty$$

Dando como resultado, que el rango del precio esperado crezca a través del tiempo.

3.2. Proceso de Ornstein-Uhlenbeck Geométrico

Supongamos que el precio del cobre converge a una media de largo plazo. El proceso de Ornstein-Uhlenbeck permite una reversión a la media en los precios. El proceso estándar de Ornstein-Uhlenbeck se expresa como:

$$(3.7) \quad dP = \eta(\mu - P)dt + \sigma dW$$

Donde $\eta \geq 0$ es la medida de la velocidad de la reversión a la media, μ es el precio de equilibrio, y dW es el proceso de Wiener, definido en la ecuación (3.2).

Para este caso, se ocupará el proceso definido en [25], donde la volatilidad está sujeta al movimiento del precio. Es decir, se considera el término $\sigma P dW$, definiendo el proceso Geométrico de Ornstein-Uhlenbeck como:

$$(3.8) \quad dP = \eta(\mu - P)dt + \sigma P dW$$

Una aproximación de la ecuación (3.8) en tiempo discretos sería:

$$(3.9) \quad P_t = P_{t-1} + \eta(\mu - P_{t-1}) + \sigma P_{t-1} \varepsilon_t$$

Donde $dt = 1$ y $\varepsilon_t \sim N(0,1)_{iid}$. Para $\eta = 0$, el proceso es equivalente al movimiento Geométrico Browniano con el parámetro de tendencia igual a cero (representando un camino aleatorio).

El pronóstico de precio condicional es [25]:

$$(3.10) \quad E[P_{s+t}|P_t] = \mu + e^{-\eta s} (P_t - \mu)$$

La ecuación (3.10) implica que si $P_t > \mu$, entonces $E[P_{s+t}|P_t] < P_t$. Es decir, si el precio actual es mayor que μ , el precio en el siguiente periodo se espera que sea menor que el precio actual. Para el Proceso de Ornstein-Uhlenbeck Geométrico, la variabilidad del precio está en función del parámetro de la reversión a la media η como también del parámetro de volatilidad σ . La varianza condicional del precio para el periodo s es [25]:

$$(3.11) \quad Var[P_{s+t}|P_t] = \frac{\sigma^2 P_t}{2\eta} (1 - \exp(-2\eta s))$$

Un incremento en la reversión a la media (un valor alto en η) implica una disminución en la varianza del precio:

$$(3.12) \quad \frac{\delta Var[P_{s+t}|P_t]}{\delta \eta} = \frac{-\sigma^2 P_t}{2\eta^2} + \frac{\sigma^2 P_t}{2\eta^2} \exp(-2\eta s) - \frac{2s\sigma^2 P_t}{2\eta} \exp(-2\eta s) < 0$$

Sin embargo, el rango del precio esperado decrece a medida que la reversión a la media aumenta. Para bajos valores de η se indica que existe una débil reversión a la media, resultando un proceso similar al Movimiento Geométrico Browniano. Finalmente, la varianza del precio aumenta a través del tiempo, pero al largo plazo alcanza un límite el cual es:

$$(3.13) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} Var[P_{s+t}|P_t] = \frac{\sigma^2 P_t}{2\eta}$$

3.3. Modelo Generalizado Autoregresivo con Heterocedasticidad Condicional

Robert Engle en 1982 desarrolló un modelo de *asset pricing* conocido como Heterocedasticidad Autoregresiva Condicional (ARCH), el cual identifica las fluctuaciones en la volatilidad de los precios [21]. A diferencia de los modelos antes presentados, el modelo ARCH permite que el parámetro de la varianza cambie a través del tiempo acorde a un modelo autoregresivo. Luego, en 1986 Tim Bollerslev desarrolla el modelo generalizado de ARCH (GARCH) donde la varianza condicional del proceso es un modelo autoregresivo de media móvil (ARMA) [22]. La forma general del modelo GARCH(p,q) es:

$$(3.14) \quad P_t = F[P_{t-1}, \sigma_t]$$

Donde $\varepsilon_t \sim N(0, 1)_{iid}$ y

$$(3.15) \quad \sigma_t = \sqrt{\omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2}$$

En la ecuación 3.15, α_i representa los ponderadores de los q términos autoregresivos y β_i representa los ponderadores de las p medias móvil. El término $F[P_{t-1}, \sigma_t]$, puede representar un proceso estocástico discreto el cual puede ser el Movimiento Geométrico Browniano o el Proceso de Ornstein-Uhlenbeck Geométrico.

El proceso GARCH puede tomar diferentes formas. En esta ocasión, se asumirá que el precio sigue un Proceso de Ornstein-Uhlenbeck Geométrico y σ_t sigue un proceso ARMA(1,1). En tiempo discreto el proceso GARCH con reversión a la media es simulado como:

$$(3.16) \quad P_t = P_{t-1} + \eta(\mu - P_{t-1}) + P_{t-1} \sigma_t \varepsilon_t$$

Donde

$$(3.17) \quad \sigma_t = \sqrt{\omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2}$$

y $\varepsilon_t \sim N(0, 1)_{iid}$. La varianza promedio del proceso (varianza incondicional) es:

$$(3.18) \quad Var(P_t) = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$$

En el caso que $\alpha = \beta = 0$, la ecuación 3.16 es equivalente a un Proceso de Ornstein-Uhlenbeck Geométrico con volatilidad constante igual a ω .

Capítulo 4

Implementación de los Modelos

4.1. Datos

Los modelos fueron estimado para un set de datos del *commodity* cobre. Los precios spot fueron proporcionados por Codelco donde las fuentes son London Metal Exchange (LME)¹ y Cochilco².

El precio spot usado en el análisis es el precio promedio mensual del cobre desde enero de 1973 hasta septiembre de 2013. Hay 489 observaciones en la series de precios promedios. Esos precios representan el valor de una libra de cobre, y están expresados por centavos de dolar la libra (*c/lb*). El precio real fue calculado usando el *Producer Prices Indexes* (PPI) [23] proporcionado como medida de inflación. El precio real se expresa como:

$$(4.1) \quad P_t^R = P_t \left[\frac{PPI_T}{PPI_t} \right]$$

La normalización de los datos se hizo en base al precio de septiembre de 2013. Por lo tanto, PPI_T es el precio de septiembre de 2013 y PPI_t es el precio promedio mensual a principio de cada mes t hacia atrás.

¹<http://www.lme.com>

²<http://www.cochilco.cl>

4.2. Implementación del Movimiento Geométrico Browniano

Sea

$$(4.2) \quad R_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

el retorno logarítmico del precio desde el periodo $t - 1$ al periodo t . Se puede notar que la expresión (3.3) puede ser representada como:

$$(4.3) \quad R_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma\varepsilon_t$$

Si se considera a $\alpha = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$. La estimación de los parámetros serían por lo tanto:

$$(4.4) \quad \hat{\alpha} = E[R_t - \sigma\varepsilon_t] = \bar{R}$$

$$(4.5) \quad \hat{\sigma} = s_R$$

Donde \bar{R} es la media muestral de R y s_R es la desviación estándar muestral de R . Para los datos del precio del cobre, los parámetros estimados son $\hat{\alpha} = 0.0005487898$ y $\hat{\sigma} = 0.0657327$. Una simulación de series de precios usando los coeficientes estimados es presentado en la Figura 4.1. La ecuación de simulación es:

$$(4.6) \quad P_t = P_{t-1}e^{0.0005487898+0.0657327\varepsilon_t}$$

Donde $P_0 = 248.52$ y $\varepsilon_t \sim N(0, 1)_{iid}$. La propiedad de aumentar la varianza a través del tiempo puede dar valores poco realistas en la simulación de precios de este modelo.

4.3. Implementación del Proceso de Ornstein-Uhlenbeck Geométrico

La ecuación 3.9 puede ser expresada como:

$$(4.7) \quad R_t = -\eta + \frac{1}{P_{t-1}}\eta\mu + \sigma\varepsilon_t$$

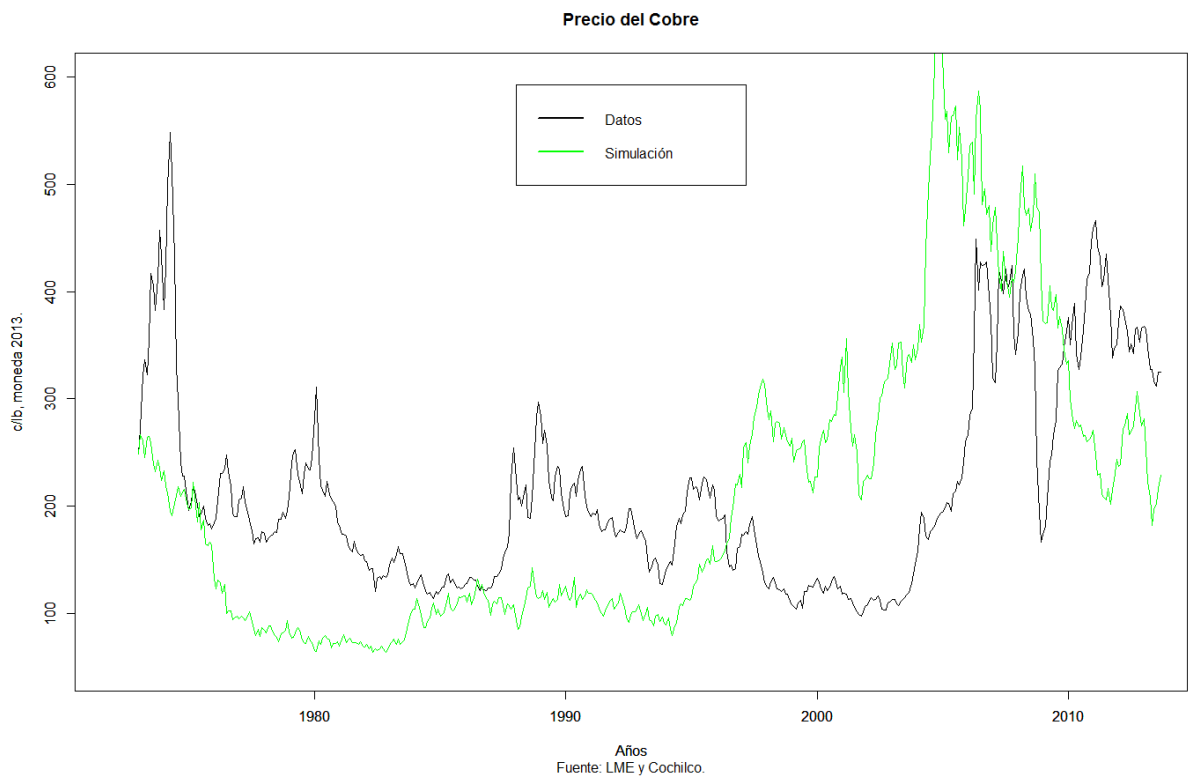


Figura 4.1: Comparación de los datos del precio del cobre y una simulación por medio de un Movimiento Geométrico Browniano.

Donde R_t es definida en la ecuación 4.2. Los parámetros del proceso puede ser estimados usando la siguiente regresión:

$$(4.8) \quad R_t = \alpha + \beta \frac{1}{P_{t-1}} + e_t$$

Donde $\alpha = -\eta$, $\beta = \eta\mu$, y $e_t = \varepsilon_t$. Para los datos del precio del cobre, los estimadores son los siguientes: $\hat{\alpha} = -0.005586$ y $\hat{\beta} = 1.500166$. El σ estimado es la desviación estándar de los residuos de la regresión, es decir: $\hat{\sigma}_t = \sqrt{\text{Var}(\hat{e}_t)}$. Los parámetros estimados del Proceso de Ornstein-Uhlenbeck Geométrico son $\hat{\eta} = -\hat{\alpha} = 0.005586$, $\hat{\mu} = -\frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}} = 268.5582$, y $\hat{\sigma} = 0.06555$.

Una simulación de series de precios usando los coeficientes estimados es presentado en la Figura 4.2. La ecuación de simulación es:

$$(4.9) \quad P_t = P_{t-1} + 0.005586(268.5582 - P_{t-1}) + 0.06555P_{t-1}\varepsilon_t$$

Donde $P_0 = 268.5582$ y $\varepsilon_t \sim N(0, 1)_{iid}$

4.4. Implementación del Modelo Generalizado Autoregresivo con Heterocedasticidad Condicional

La estimación de los parámetros de la componente del proceso estocástico en GARCH se obtuvo de la misma forma que se realizó en el Proceso de Ornstein-Uhlenbeck Geométrico. Por otro lado, para obtener los parámetros del proceso autoregresivo en GARCH en la volatilidad se ocupó la función de máxima verosimilitud, la cual es [22]

$$(4.10) \quad \ln FL(\omega, \alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left(-\ln 2\pi - \ln \sigma_t^2 + \frac{R_t^2}{\sigma_t^2} \right)$$

Donde R_t es el cambio porcentual en el tiempo t . El modelo GARCH(1,1) fue elegido por minimizar el Criterio de Información de Akaike ³. Los parámetros estimados para el modelo GARCH de los precios promedios mensuales son : $\hat{\omega} = 5.049 \times 10^{-4}$, $\hat{\alpha} = 0.2180526$, y $\hat{\beta} = 0.6736745$.

³El Criterio de Información de Akaike (AIC) es una medida de la calidad relativa de un modelo estadístico, para un conjunto dado de datos. Su índice se calcula como $AIC(k) = -\ln FL(\hat{\theta}(k)) + 2k$, donde $\ln FL(\theta(k))$ es la función de máxima verosimilitud, $\hat{\theta}(k)$ es la estimación máximo verosímil del vector de parámetros θ y k el número de parámetros independientes dentro del modelo. [24]

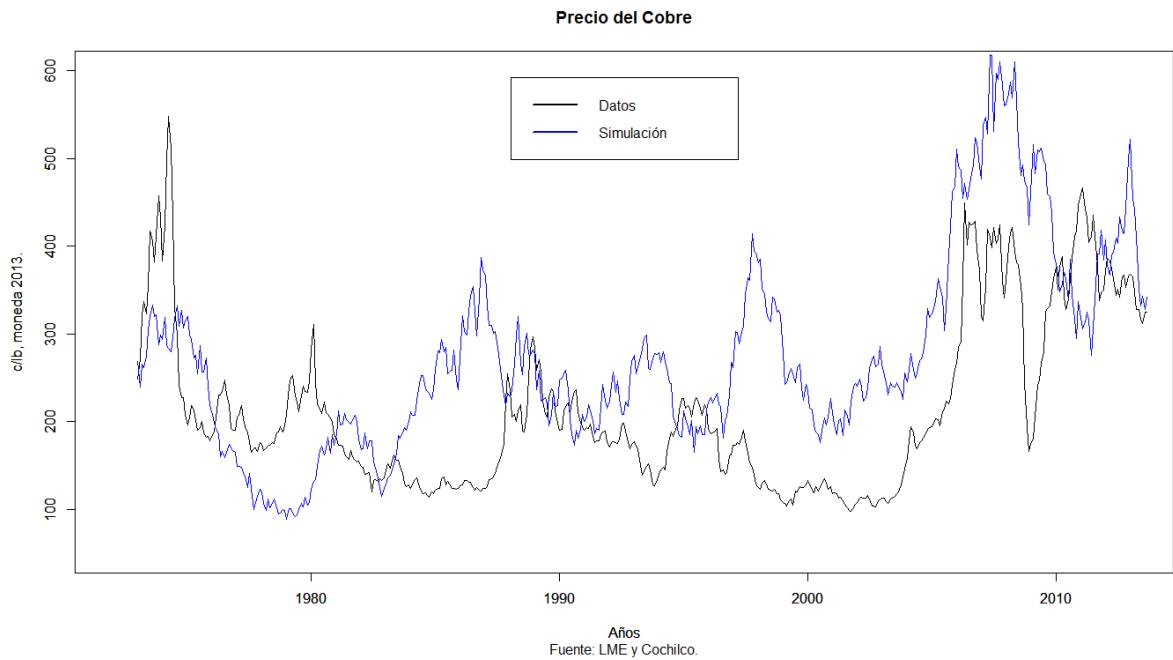


Figura 4.2: Comparación de los datos del precio del cobre y una simulación por medio de un Proceso de Ornstein-Uhlenbeck Geométrico.

La ecuación de simulación es:

$$(4.11) \quad P_t = P_{t-1} + 0.005586(268.5582 - P_{t-1}) + P_{t-1}\sigma_t\varepsilon_t$$

Donde $P_0 = 268.5582$ y $\sigma_0 = 0$,

$$(4.12) \quad \sigma_t = \sqrt{5.049 + 0.2180526\varepsilon_{t-1}^2 + 0.6736745\sigma_{t-1}^2}$$

Donde $\varepsilon_t \sim N(0, 1)_{iid}$. Una simulación del proceso GARCH usando los coeficientes estimados es presentado en la Figura 4.3.

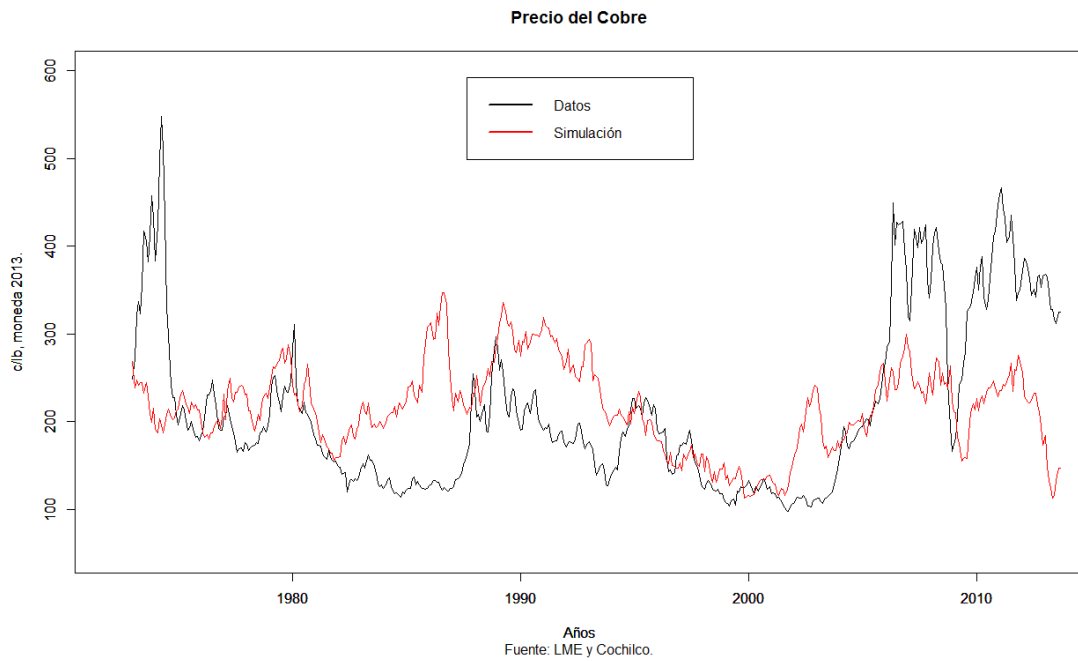


Figura 4.3: Comparación de los datos del precio del cobre y una simulación por medio de un proceso GARCH.

Capítulo 5

Validación de los Modelos

Si los precios siguen un Movimiento Geométrico Browniano o un Proceso Ornstein Uhlenbeck Geométrico, los retornos deben ser:

1. Normalmente distribuidos
2. Independientes
3. Tener una varianza constante (En el modelo GARCH se asume una varianza variable)
4. En el último caso (Ornstein Uhlenbeck Geométrico y GARCH), se supone una reversión a la media.

Cada una de esas hipótesis pueden ser probadas de forma empírica, presentando los resultados en los siguientes párrafos.

5.1. Distribución normal en los retornos del precio del cobre

La distribución de los retornos de los precios se presenta en la Figura 5.1. Para realizar un análisis más detallado se presenta el gráfico de distribución normal por cuantiles presentado en la Figura 5.2, el cual sugiere que la distribución de los retornos esta caracterizada por colas pesadas demostrando no normalidad. En el gráfico, los valores puntuados representan los valores empíricos mientras que la línea representa los valores teórico que una distribución normal debe tener. Lo puntos que se alejan de la recta representan valores atípicos relativos a la estimación de distribución normal.

Según el test de Shapiro-Wilk que sugiere normalidad (la hipótesis nula es que la serie sigue una distribución normal) provee evidencia por falta de normalidad en los cambios porcentuales mensuales de los precios del cobre. La hipótesis nula es rechazada con un p-valor de 1.049×10^{-8} . Es decir, existe un 1.049×10^{-8} de probabilidad que se cumpla la hipótesis nula.

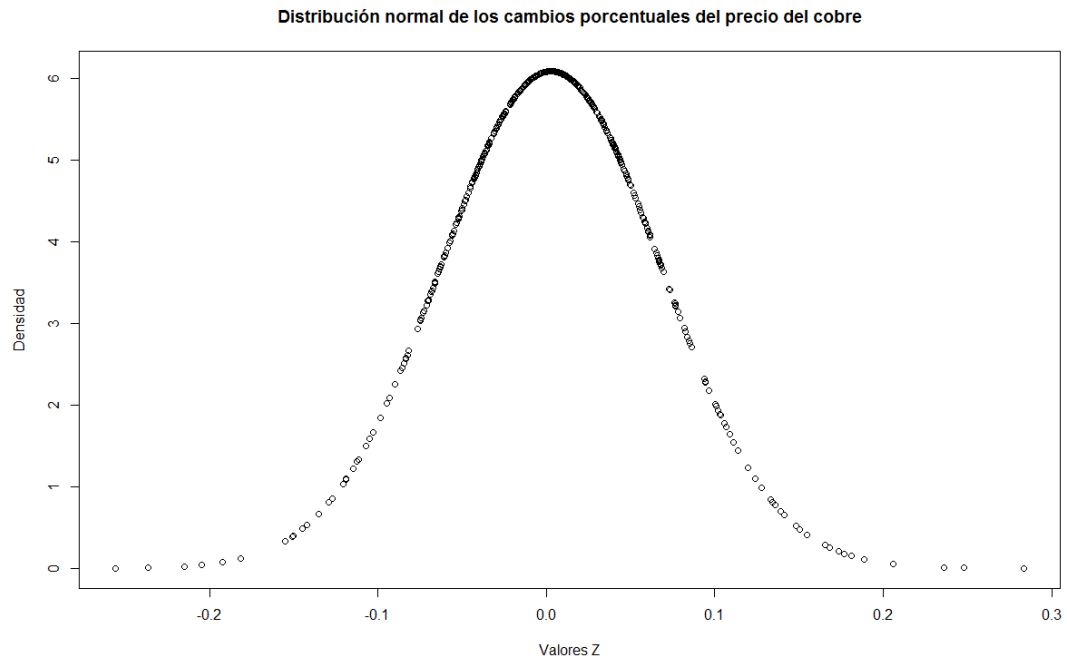


Figura 5.1: Gráfico de distribución normal de los retornos mensuales del precio del cobre.

La asimetría estadística (*skewness*) y la curtosis son importantes propiedades de los retornos de los precios. Para una distribución normal, la asimetría es igual a cero y la curtosis es igual a tres. Una asimetría de cero implica que la distribución es simétrica. Para los retornos de los precios la asimetría obtenida es de 0.1416201, indicando una leve asimetría en el conjunto de datos. Sin embargo, la asimetría es no significativa acorde al test Mann-Whitney, el cual tiene como hipótesis nula que dos muestras proceden de poblaciones continuas idénticas. En este caso, confirma la hipótesis nula de que no existe una diferencia estadística que presente comportamientos asimétricos sobre la media. En este caso el p-valor es de 0.4506, no pudiendo rechazar la hipótesis nula. Se usó el test Mann-Whitney ya que no hace suposición de una distribución de probabilidad específica (es no paramétrica) [26].

El indicador obtenido en la curtosis es de 2.30575. Esto indica una menor concentración de datos alrededor de la media. Se caracteriza por tener una altura menor que una distribución normal teórica.

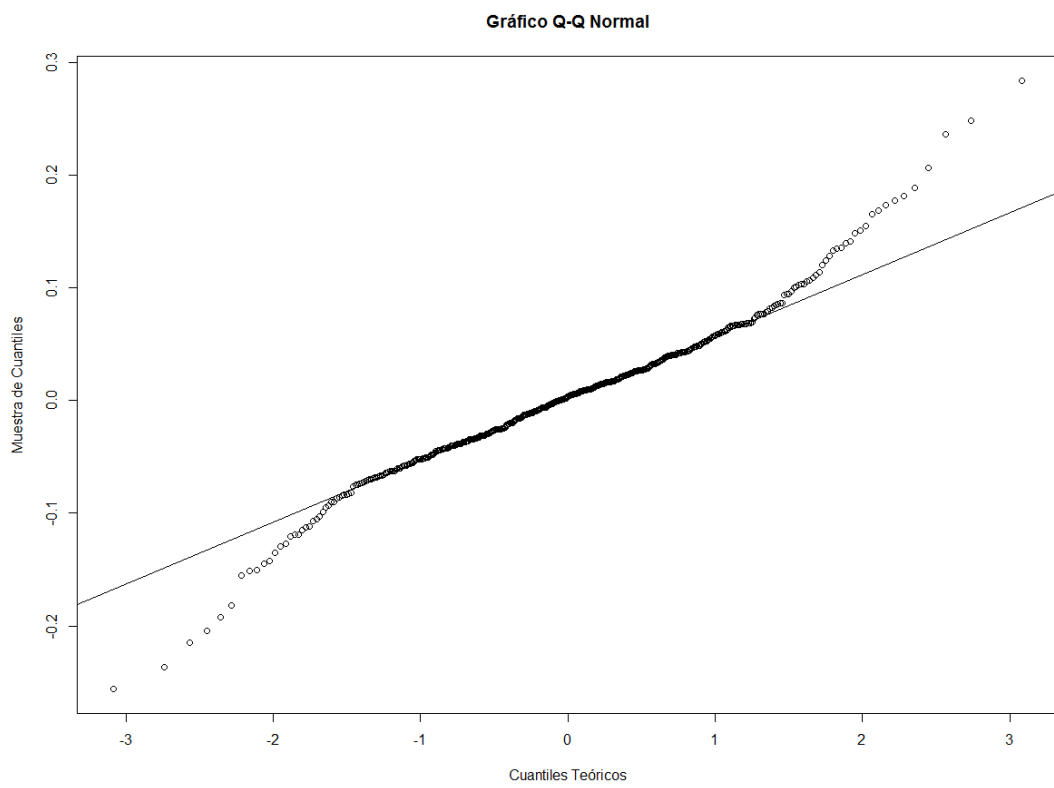


Figura 5.2: Gráfico de distribución normal por cuantiles en los retornos mensuales del precio del cobre.

5.2. Independencia en los retornos del precio del cobre

Una de las características que detecta el modelo ARCH es la variación en la volatilidad de las series de tiempo. Es decir, el modelo intenta demostrar que si existen grandes cambios de precios, en el próximo periodo también existirá grandes cambios en el precio. Para tener una idea sobre los cambios de la volatilidad, en la Figura 5.3 se presentan la volatilidad para cada mes de los retornos de los precios del cobre. Como se observa, la volatilidad del precio no parece ser constante ni menos un ruido blanco, sino que hay periodos de alta y baja volatilidad.

Para probar la independencia de los cambios porcentuales del precio del cobre se usó el test de Ljung-Box. El test se describe como sigue:

H0: Los datos tienen una distribución independiente.

HA: Los datos no tienen una distribución independiente.

El estadístico para este test es:

$$(5.1) \quad Q = n(n+2) \sum_{k=1}^h \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k}$$

Donde n es el número de datos, $\hat{\rho}_k$ es la autocorrelación de la muestra con el valor retrasado k , y h es el número de valores retrasados el cual se quieren testear. Para un nivel de significancia $\alpha = 0.05$, la región crítica para rechazar la hipótesis nula es $Q > \chi_{1-\alpha, h}^2$ donde $\chi_{1-\alpha, h}^2$ es el α -cuantil de la distribución Chi-Cuadrado con h grados de libertad.

Para el caso de los retornos de los precios del cobre el p-valor obtenido por este test es de 1.221×10^{-15} . Por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula de independencia en los datos de la distribución.

5.3. Reversión a la media en los retornos del precio del cobre

Para probar la reversión a la media se usará el test de Lo-MacKinlay [27], el cual ocupa como estimador razones de varianzas. La q -ésima razón de varianzas se define como:

$$(5.2) \quad VR = \frac{\hat{\sigma}_b^2}{\hat{\sigma}_a^2}$$

Donde

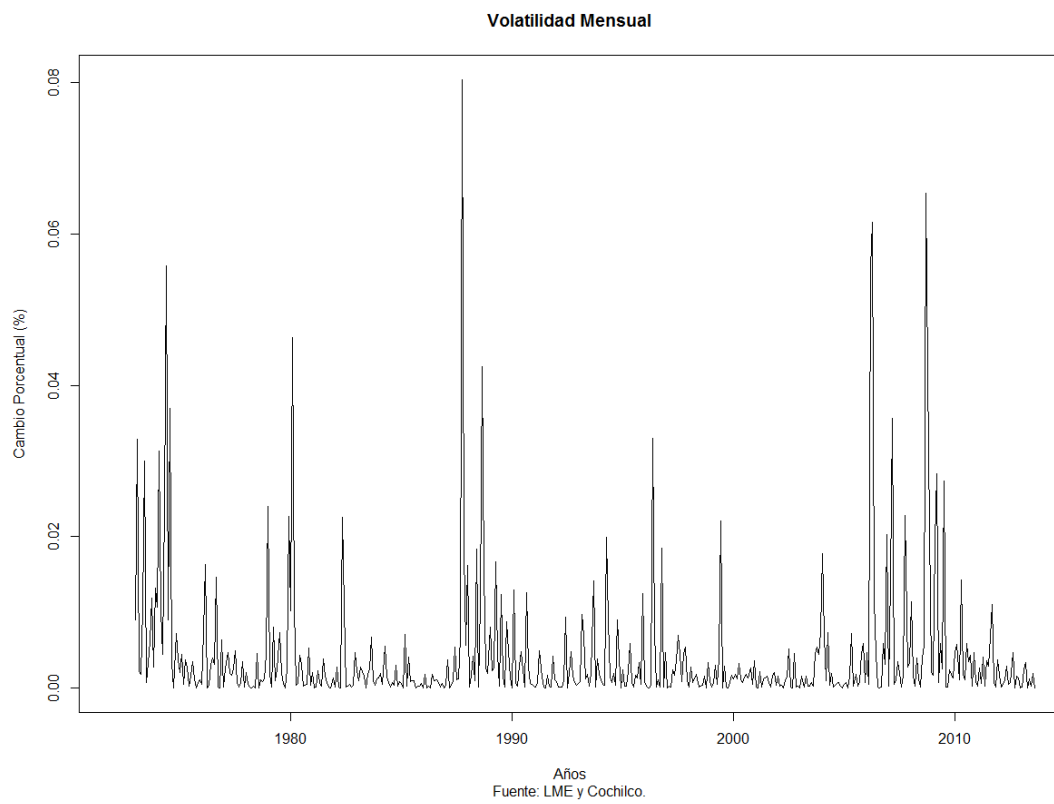


Figura 5.3: Volatilidad mensual en los retornos mensuales del precio del cobre.

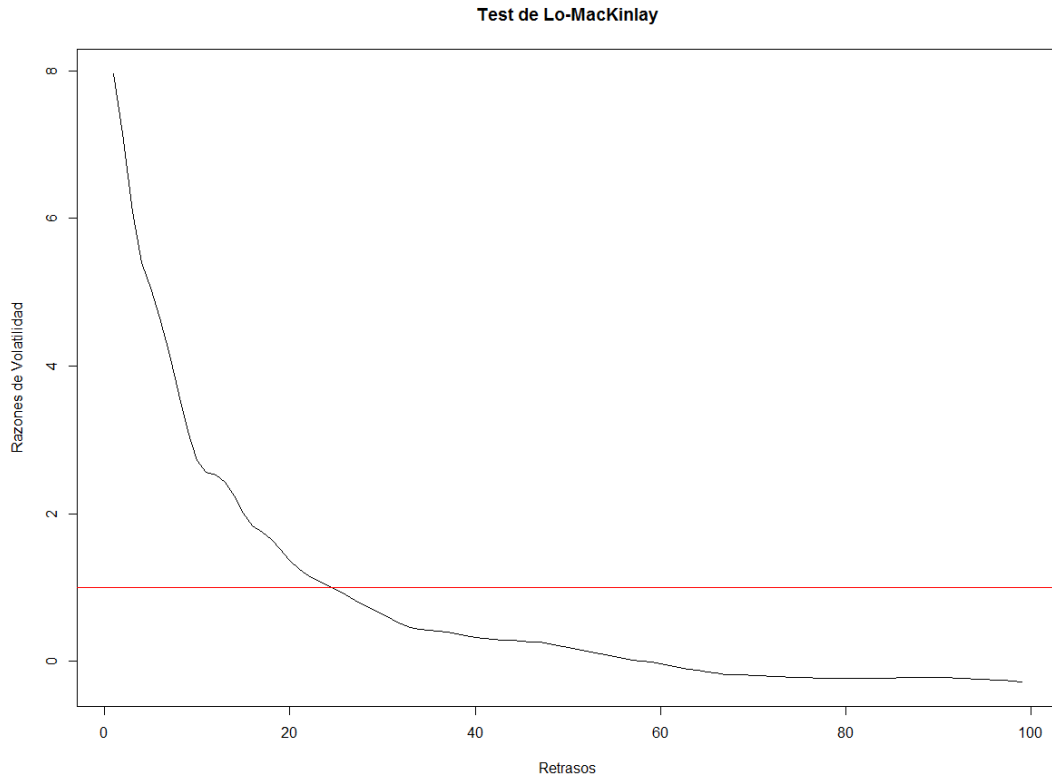


Figura 5.4: Razones de volatilidad para los primeros 100 retrasos. Test para la reversión a la media de los precios promedios mensuales del precio del cobre.

$$(5.3) \quad \hat{\sigma}_a^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n (P_i - P_{i-1} - \hat{\mu})^2$$

$$(5.4) \quad \hat{\sigma}_b^2 = \frac{1}{nq-q} \sum_{i=3}^n (P_i - P_{i-q} - 2\hat{\mu})^2$$

$\hat{\mu}$ es la media de los retornos y n es el número de datos. Para cada valor de q , si la razón de varianza es igual a 1, el proceso es un camino aleatorio. Si la razón de varianza es menor que 1, el proceso es con reversión a la media. Por último, si la razón de varianza es mayor que 1, el proceso es una aversión a la media. Un gráfico de las razones de varianza es presentado en la Figura 5.3. En la imagen se observa que los primeros 24 razones de varianza están sobre 1, luego el resto de razones de varianza están bajo 1 presentando mayor característica de reversión a la media.

Capítulo 6

Resultados de los Modelos

6.1. Pronósticos

Para obtener un pronóstico del precio del cobre esperado como su rango de volatilidad para los próximos periodos se puede obtener por medio de simulación o de forma paramétrica. Con el propósito de presentar las dos opciones, se calculará de forma paramétrica. Para este método se deben ocupar la esperanza condicional y varianza condicional para cada modelo. Para obtener estos valores condicionales se debe ocupar las Ecuaciones de Kolmogorov (Apéndice A.2) sobre los procesos estocásticos presentados en 3.1 y 3.7¹ y de esta forma se obtienen la esperanza condicional y la varianza condicional para cada modelo.

En la Figura 6.1 se muestra el pronóstico de precios promedio mensual del cobre bajo el Modelo Geométrico Browniano para los próximos 10 años partiendo desde Octubre del 2013. En ella se observa que la esperanza condicional a través de los periodos mensuales va aumentando en conjunto con su volatilidad. Las bandas de volatilidad son una desviación estándar con respecto a la esperanza condicional, el cual representa que en un 66% de los casos el precio estará dentro de esas bandas para el periodo determinado.

Al igual que en el gráfico anterior, en la Figura 6.2 se presenta el pronóstico del precio promedio mensual del cobre bajo un Proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Esta vez se ve como la curva de la esperanza condicional tiende a revertir a la media de largo plazo. Además se observa que las bandas de volatilidad (1 desviación estándar) en primera instancia aumentan y luego se mantienen constante. En Figura 6.3 se presentan el mismo Proceso de Ornstein-Uhlenbeck aplicando un modelo GARCH en la volatilidad. En la imagen se observa que las bandas de volatilidad se anchan con respecto al gráfico anterior. La razón de este efecto es que la varianza ocupada para calcular la volatilidad condicional fue la varianza promedio incondicional del proceso GARCH.

En las tablas B.2 y B.3 en Apéndice B se presentan los precios pronosticados para los modelos correspondientes.

¹Para obtener la esperanza y varianza condicional en el modelo GARCH, se calcula de la misma forma que en el modelo de Ornstein-Uhlenbeck con la diferencia que se ocupa la varianza promedio de GARCH 3.18

6.2. Comparación entre los Modelos

Para comparar la precisión en los modelos antes expuestos, se usó la medida de error absoluto en la media porcentual (MAPE)². Esta medida se expresa como:

$$(6.1) \quad M = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{A_t - F_t}{A_t} \right|$$

Donde A_t es el valor real y F_t es el valor pronosticado, ambos para el periodo t .

Para hacer más clara la diferencia entre los valores pronosticados y los valores reales, el periodo analizado es dividido en dos sub periodos estructurales, Periodo 1 y Periodo 2. La razón de esta división yace en las fuertes diferencias en el comportamiento del precio del Cobre para el periodos 1973-2015 (periodo 1) y el periodo 2006 y 2013 (periodo 2).

La diferencia fundamental entre estos periodos es el valor promedio que tiene el cobre. Es tan alta la diferencia entre estos periodos, que se considera una diferencia estructural y un pronóstico único para todo el periodo comprendería resultados no robustos. Por lo tanto se presenta un análisis para los sub periodos.

En la Tabla 6.1 se presenta los valores MAPE comparando los precios reales de la muestra y los precios obtenidos por los pronósticos bajo el Modelo Browniano Geométrico (MBG), el Proceso de Ornstein-Uhlenbeck (POU) y el Proceso GARCH para el periodo 1. Esta comparación se realizó dentro de la muestra. Es decir, para la categoría “1 año” se comparó los precios reales de marzo del 2005 a marzo del 2006 con los datos generados por la esperanza condicional de los modelos en el mismo periodo. También se presentan los valores obtenidos para los periodos de 5, 10 y 20 años *out of sample* siempre hasta marzo del 2006.

Con la misma metodología, pero para el periodo 2, se presentan los valores MAPE para las proyecciones de los tres modelos y los valores reales *out of sample* en la Tabla 6.2. Por lo reducido del periodo y las muestras, sólo se hizo una comparación para los periodos de 1 año, es decir desde septiembre del 2012 hasta septiembre del 2013, y un periodo de 4 años, que comienza de septiembre del 2009 hasta septiembre del 2013.

Como se puede observar en ambas tablas, para el año 1, los valores obtenidos por medio del proceso MGB, POU y GARCH son muy similares llegando a tener una mejor rendimiento el proceso MGB. Pero a medida que aumenta los rangos de pronósticos, los procesos POU y GARCH tienen un mayor rendimiento. Entre estos dos últimos, el de mejor rendimiento en todas las comparaciones es el proceso GARCH.

²Se ocupó esta medida por su simplicidad y directa comparación entre el modelo y los datos reales. Además la justificación para no ocupar esta medida es que al ocupar datos reales que son iguales a cero, no se puede hacer la medición por dividir por cero. Pero al ser los precios siempre positivos no se hace efectivo este inconveniente.

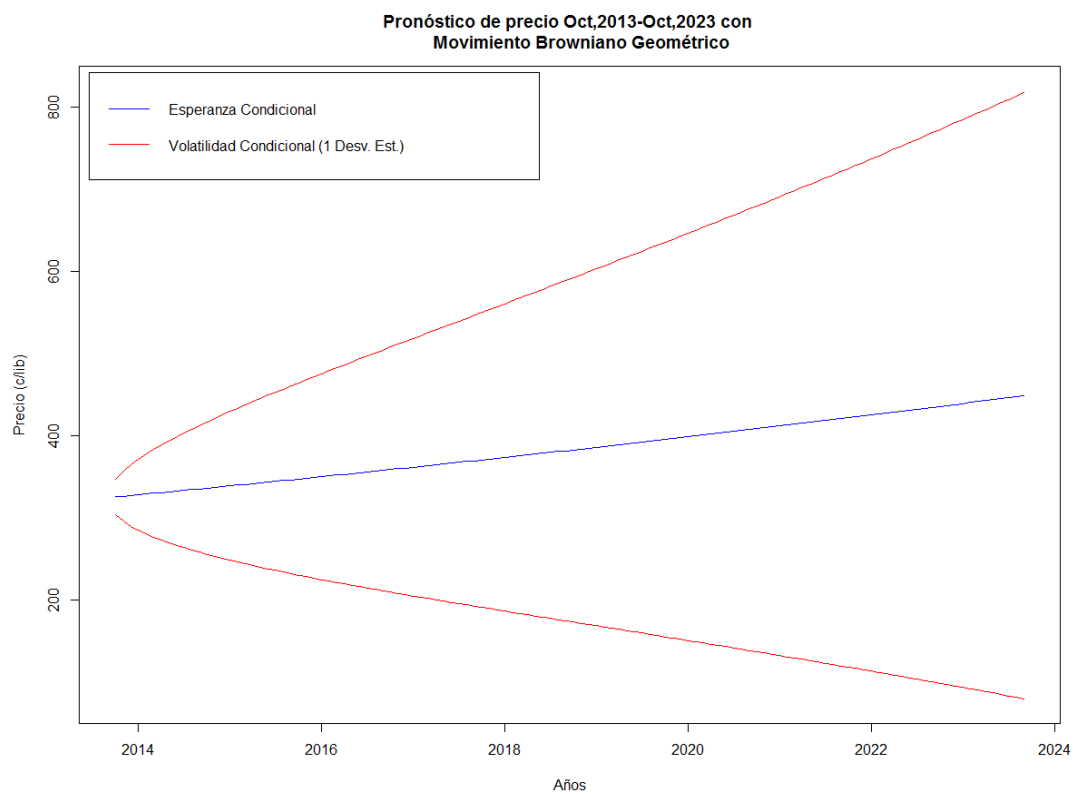


Figura 6.1: Gráfico del pronóstico del precio del cobre bajo el modelo de Movimiento Browniano Geométrico para los próximos 10 años.

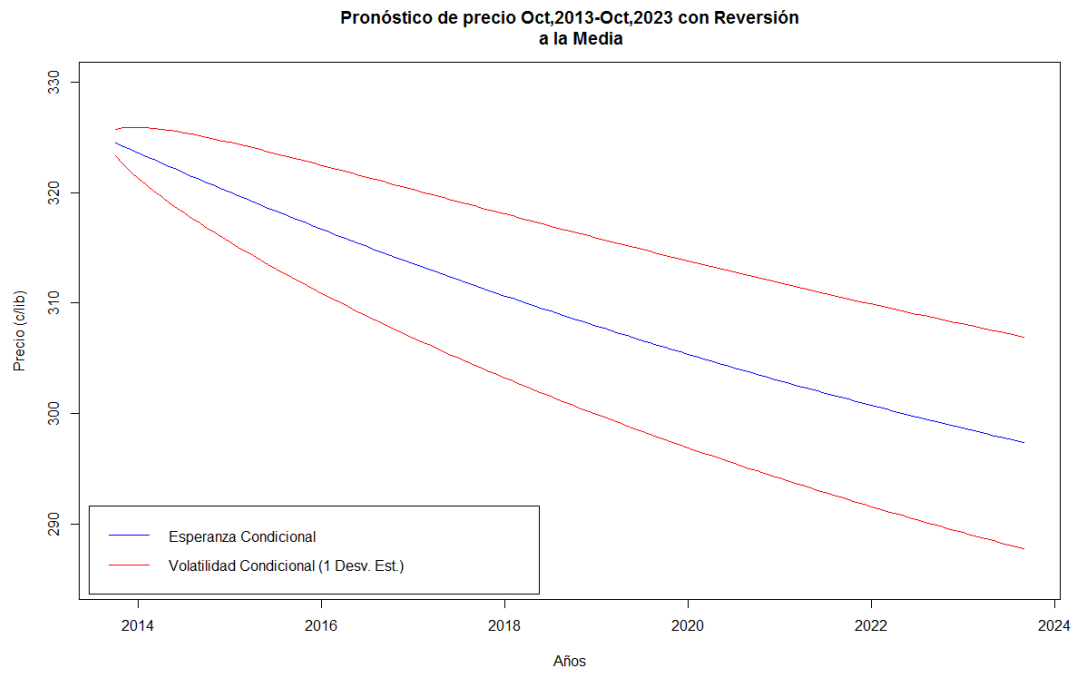


Figura 6.2: Gráfico del pronóstico del precio del cobre bajo el modelo con reversión a la media para los próximos 10 años.

| | MBG | POU | GARCH |
|---------|------------|------------|--------------|
| 1 año | 13.44 % | 13.92 % | 13.94 % |
| 5 años | 25.22 % | 21.78 % | 21.86 % |
| 10 años | 46.96 % | 43.13 % | 42.99 % |
| 20 años | 46.48 % | 24.56 % | 24.49 % |

Tabla 6.1: Valores MAPE para el modelo Movimiento Geométrico Browniano, el Proceso de Ornstein-Uhlenbeck y el Modelo GARCH para un pronóstico de 1, 5, 10 y 20 años dentro de la muestra para el periodo 1.

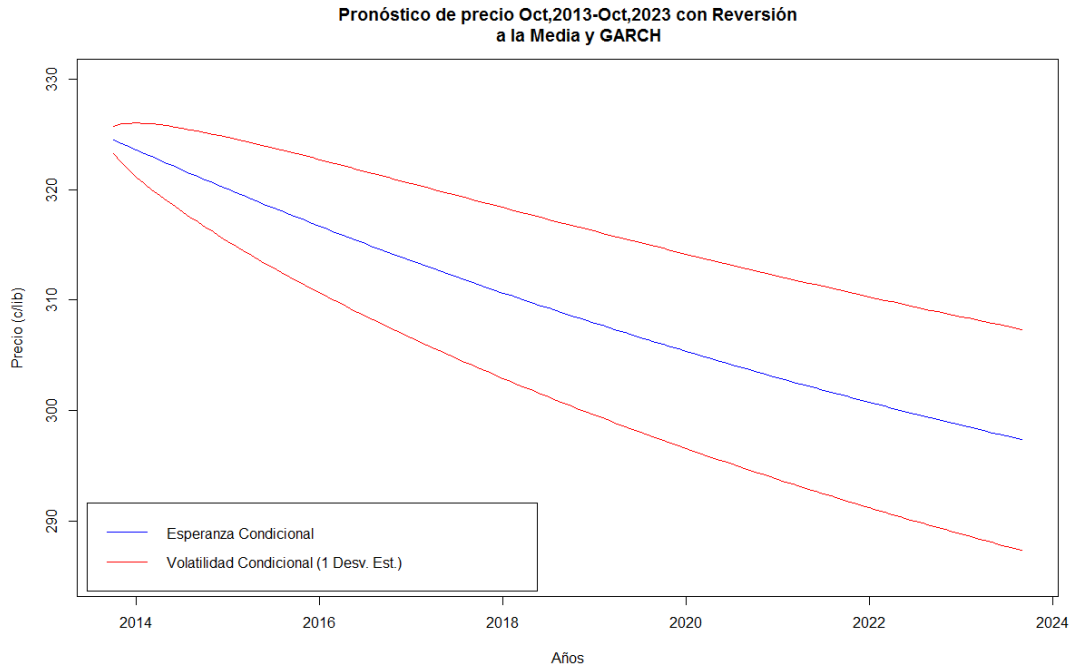


Figura 6.3: Gráfico del pronóstico del precio del cobre bajo el modelo con reversión a la media con GARCH para los próximos 10 años.

| | MBG | POU | GARCH |
|--------|------------|------------|--------------|
| 1 año | 5.63 % | 6.35 % | 6.32 % |
| 4 años | 16.88 % | 10.44 % | 10.27 % |

Tabla 6.2: Valores MAPE para el modelo Movimiento Geométrico Browniano, el Proceso de Ornstein-Uhlenbeck y el Modelo GARCH para un pronóstico de 1 y 4 años dentro de la muestra para el periodo 2.

Capítulo 7

Implicancias de los Modelos de Precio en las Inversiones de Codelco

7.1. El Valor en Riesgo y su importancia en las inversiones

Con el fin de analizar el riesgo y hacer uso de los resultados encontrados en los diferentes modelos analizados en los capítulos anteriores, se ocupará la metodología de Valor en Riesgo (*Value at Risk o VaR*) para medir el riesgo en una evaluación de inversión en un proyecto de Codelco.

El VaR se define como la pérdida potencial máxima que puede ocurrir a causa de un evento riesgoso, con un intervalo de confianza, y en un determinado horizonte de tiempo. [29]

El VaR considera al valor de una inversión o valor presente de un proyecto como una variable aleatoria, ya que ésta está determinada en base a variables aleatorias posibles en una planificación de inversión o comercial. Generalmente se presenta un valor de pérdida que está determinada por una probabilidad dada el cual es menor al valor medio o esperado.

Para este proyecto de estudio, se analizará el VaR sobre la evaluación VAN. Es decir, se evaluará un proyecto por medio de un VAN tradicional y se presentarán un monto de pérdida potencial del VAN. Este monto corresponde a la fracción del valor que está en riesgo, el cual podría sustraerse al VAN estimado inicialmente si es que ocurriese eventos extremos o escenarios desfavorables de acuerdo a una probabilidad que se fija arbitrariamente. Si al VAN se le resta la pérdida potencial o valor de riesgo, se obtiene un valor presente mínimo o valor asegurado para una probabilidad determinada. El proyecto puede, de ocurrir efectos desfavorables, mostrar valores presentes menores que el valor presente mínimo, pero esto ocurre con una probabilidad baja (típicamente un 5%). Lo más probable, es que el valor presente del proyecto sea finalmente mayor que el valor presente mínimo, y por ello se podría interpretar este valor como el Valor Presente Asegurado del proyecto.

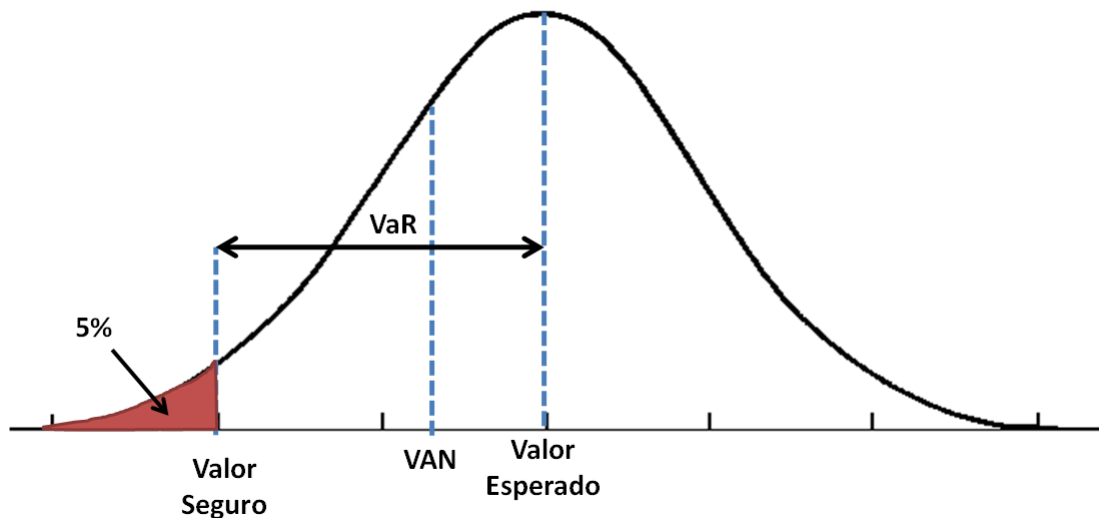


Figura 7.1: Representación del VaR y el VAN en una distribución de valores posibles de un proyecto.

En el Figura 7.1 se presentan tres valores: El Valor Esperado, el VAN y el Valor Seguro del proyecto con cierto nivel de confiabilidad, que en este caso es de 95%. El VaR corresponde a la diferencia entre el Valor Esperado y el Valor Seguro.

En el cálculo del VAN del proyecto que se utiliza para la estimación de VaR, se debe utilizar en rigor la tasa libre de riesgo para que represente el mismo Valor Esperado del proyecto. Sin embargo, en la práctica se utiliza la tasa de descuento obtenida por el CAPM calculado para Codelco, siendo más intuitivo el descuento del VaR como la fracción que está en riesgo del VAN calculado.

7.2. Aplicación de los resultados de los modelos en un proyecto de inversión de Codelco

Los resultados de los modelos presentados en los capítulos anteriores son un conjunto de precios esperados y su volatilidad, obtenidos por medio de diferentes simulaciones estocásticas.

Con el propósito de investigar cuáles son los impactos que tienen los precios obtenidos de forma simulada en la evaluación del riesgo en un proyecto medido con VAN, se eligió un proyecto estándar proporcionado por la Gerencia de Inversión de Codelco para analizar los resultados prácticos que las simulaciones pueden provocar.

El proyecto al cual se hará una medición de VaR por medio de los diferentes precios entregados por los tres modelos propuestos será el proyecto Gaby. Básicamente, este proyecto busca aumentar la capacidad de producción de cobre de la Corporación. El tiempo de evaluación del proyecto comienza desde el año 2007 hasta el año 2013.

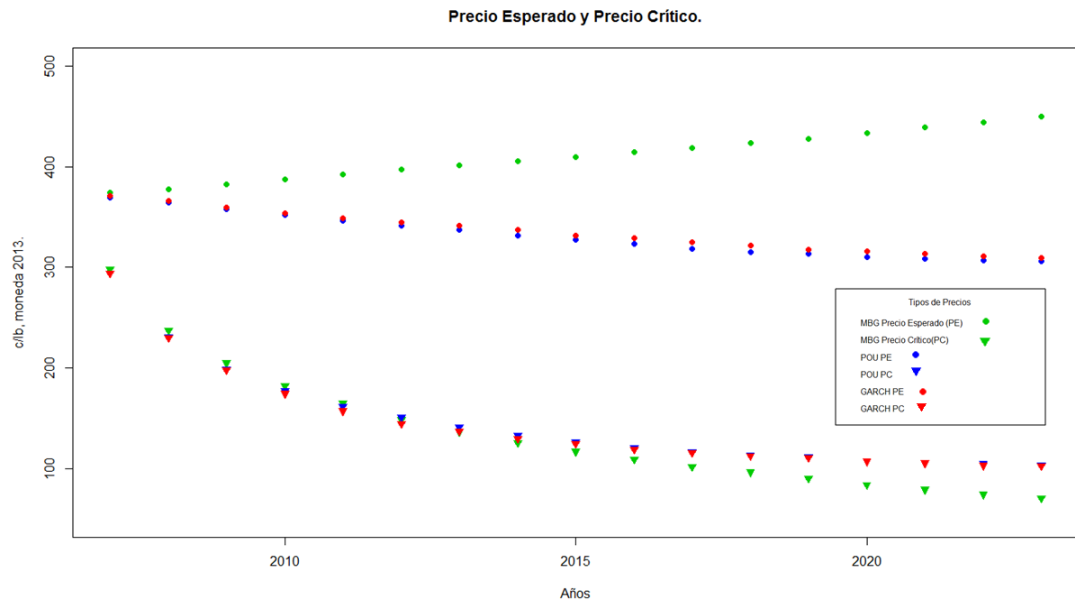


Figura 7.2: Gráfico de Precios Esperados y Precios Críticos para los diferentes modelos.

El cálculo de VaR para este proyecto se enfocó que considerar únicamente como factor de riesgo el precio, el cuál generalmente es el factor de riesgo más importante en una evaluación de inversión [30]. Además, el procedimiento para su cálculo se basa en la simulación de precios en base a los procesos estocásticos desarrollados. Obteniendo así, los precios medios esperados y los precios críticos (que pertenecen al la banda del 5 % inferior).

Para este procedimiento, primero se calcularon los parámetros históricos de los precios de Cobre desde 1973 hasta el año 2006. Luego se hizo 10 mil simulaciones por modelo desde el año 2007 hasta el año 2023, obteniendo así, los precios medio esperados y los precios críticos. Con estos precios obtenidos se realizó un VAN esperado y un VAN seguro, con los precios antes mencionados respectivamente.

Como se observa en la Figura 7.2, los precios medios esperados y los precios críticos para los diferentes modelos se basan en su distribución de probabilidad determinados por su esperanza y su riesgo. Se observa como el Modelo Geométrico Browniano (MGB) entrega un precio medio creciente a diferencia del Proceso de Ornstein Uhlenbeck (POU) y el modelo GARCH, el cual el precio medio tiende a la media de largo plazo. Además se ve como el precio crítico del MGB es más bajo que los otros dos modelos, ya que su riesgo al largo plazo es más grande, provocado por un riesgo creciente en el tiempo.

| | VAN Esperado (kUS\$) | VAN Seguro (kUS\$) | VaR (kUS\$) |
|--------------|----------------------|--------------------|-------------|
| MBG | 5.630.243 | 582.201 | 5.048.042 |
| POU | 4.380.840 | 662.414 | 3.718.426 |
| GARCH | 4.453.396 | 614.229 | 3.839.167 |

Tabla 7.1: Valores VaR para cada tipo de modelo en base a los precios simulados.

7.3. Resultados del VaR

Con los precios obtenidos anteriormente, se calculó el VAN esperado y el VAN seguro en base a los precios esperados y precios críticos respectivamente. Los valores de inversión y los costos fueron actualizado a moneda 2003 para hacer la comparación con los precios generados. Como se dijo anteriormente, la tasa de descuento que se ocupó para el calculo del VAN no fue la tasa libre de riesgo, si no que se usó la tasa de descuento típica que usa Codelco para descontar los proyectos de inversión.

En la Figura 7.1 se presentan los valores del VAN esperado, el VAN seguro al 95% de confianza y el VaR. Como se observa, el modelo que entrega un mayor VAN esperado es el Movimiento Browniano Geométrico con un resultado de 5,63 mil millones de dólares. En cambio el modelo con reversión a la media y el modelo GARCH estiman 4.38 y 4.45 mil millones de dólares respectivamente. Por otro lado, el VAN seguro es menor para el Movimiento Geométrico Browniano, entregando un valor de 0.58 mil millones de dólares, en cambio el modelo con reversión a la media y GARCH entregan un VAN seguro de 0.66 y 0.61 mil millones de dólares respectivamente. Finalmente, el VaR obtenido para cada modelo lo lidera el MGB con 5.05 mil millones de dólares luego el modelo GARCH con 3.84 mil millones de dólares y por último el POU con 3.79 mil millones de dólares.

Con el fin del impacto que tienen las diferentes metodologías de predicción en una evaluación VAR, estos valores dan a entender que el Movimiento Browniano Geométrico a pesar que entrega una evaluación VAN más alto que los otro modelos, también entrega el Valor en Riesgo más alto. Por otro lado, el modelo de Ornstein Uhlenbeck o con reversión a la media, entrega el menor VAN entre los modelos, pero también es el que entrega el menor Valor en Riesgo en ellos. Finalmente, el modelo que presenta un mejor equilibrio en esta evaluación es el modelo GARCH, ya que este presenta un VAN equilibrado en la evaluación (no hay una subestimación del Valor Actual Neto) pero presenta un Valor en Riesgo más realista que la reversión a la media, y mucho más bajo que el Movimiento Browniano.

Capítulo 8

Conclusiones

En esta memoria se modeló, se obtuvo y se analizó el precio del cobre en conjunto de su riesgo a largo plazo. Además se consideró el efecto que puede tener los precios modelados y su volatilidad en las inversiones de Codelco. A continuación se describen las actividades en particular y sus conclusiones correspondientes:

Se implementaron tres modelos, los cuales fueron el Movimiento Browniano Geométrico, el Proceso de Ornstein Uhlenbeck y el Proceso Generalizado Autoregresivo con Heterocedasticidad Condicional. Los datos para obtención de parámetros fueron los precios promedios mensuales desde enero de 1973 hasta septiembre de 2013.

Los modelos fueron probados con diferentes tests para observar el cumplimiento de las hipótesis de los modelos:

1. Retornos Normales: En base a los test aplicados, los retornos no presentan una distribución normal. Esto puede deberse a la poca cantidad de datos en la modelación, pero a medida que se registren más datos históricos existe la posibilidad que se confirme esta hipótesis.
2. Independencia en los Retornos: La independencia también fue rechazada demostrando que los retornos tienen una correlación temporal.
3. Varianza constante en los Retornos: La heterocedasticidad no se cumple en los retorno de los precios. Este es uno de los test que más respalda la decisión de usar el modelo GARCH y considerar la varianza como condicional al periodo anterior.
4. Reversión a la media: En la literatura aún no existe un acuerdo para demostrar por medio de tests la reversión a la media en los precios. El test hecho en esta memoria, demuestra una reversión a la media en el largo plazo, siendo respaldada por un análisis cualitativo en la serie de tiempo de los precios.

A pesar que las hipótesis de los modelos no son cumplidas, los modelos entregan un acercamiento al movimiento de los precios del cobre en su corto, mediano y largo plazo, las cuales deben ser consideradas como guías y no como normas totales en su dinámica.

Luego de obtener los parámetros y las simulaciones, y con el objetivo de representar una estimación del precio y su riesgo en el futuro se realizó un pronóstico paramétrico para los próximos 10 años. Además para probar cuál modelo presenta una mejor precisión se realizaron diferentes simulación *out of sample* para los periodos 2012-2013, 2008-2013, 2003-2013 y 1993-2013.

La medición de precisión por medio del indicador MAPE presentó que el modelo GARCH presenta un mejor rendimiento en nivel general. Superando al modelo MBG y PAU en los mismos periodos a excepción del año 20 donde el modelo MBG tiene una mejor precisión. El inconveniente de esta medida es que no representa la volatilidad que tiene el precio en esos periodos. Por lo tanto, a pesar que el modelo MBG tiene una mayor precisión en base a su precio esperado, en base a su volatilidad, este modelo es el más riesgoso por no tener una cota en el riesgo a diferencia de los otros dos modelos con reversión a la media y volatilidad constante a largo plazo.

Finalmente se realizó un análisis de riesgo en relación a las inversiones de Codelco. En este sentido, se implementó la metodología VaR al proyecto Gaby con los diferentes precios obtenidos en los modelos expuestos, evaluando un VAN esperado y un VAN seguro con el único factor de riesgo a estudiar, el cual fueron los precios simulados para un periodo de 16 años.

En base a los indicadores VaR obtenidos se concluye que el modelo MBG a pesar que presenta un VAN esperado más alto, su VaR es también es el más alto obtenido. Significando que el proyecto está sobre estimado en su valor actual, en conjunto con un alto riesgo. Por otro lado, el modelo POU presenta el VAN esperado menor entre los modelos, así como también su VaR. Se concluye que el modelo POU subestima la valoración del proyecto, ya que el modelo GARCH presenta un VAN esperado un poco más alto en conjunto con un Valor en Riesgo un poco más alto también.

Finalmente, en base al rendimiento en precisión por medio del MAPE y en base a una evaluación de riesgo en un proyecto inversional, se concluye que el modelo GARCH es el que tiene un mejor rendimiento entre los modelos.

8.1. Trabajos Futuros

Varias metodologías pueden ser mejoradas en relación al proyecto de estudios presentado. Por ejemplo, se podría aumentar la base de datos para tener una mejor precisión en los parámetros calculados, como en las hipótesis de los modelos de simulación, como por ejemplo, la normalidad en los retornos. También se podrían considerar nuevos procesos estocásticos como media determinista o media estocástica, la cual aumentaría la complejidad en la implementación y el sobre ajuste en los datos, pero podría entregar resultados interesantes con el objetivo de tener una mejor representación de la dinámica de los precios.

Por el lado de la evaluación de riesgos en proyectos de Codelco, se podría aumentar los factores de riesgos correlacionados con el precio para aumentar la precisión en el cálculo de VaR. Esto permitiría tener una visión más realista en la medida de riesgo en los proyectos. También se podría considerar carteras de proyectos que tengan riesgos similares, y considerar riesgos latentes en la evaluación de carteras de inversiones de Codelco.

Finalmente, en la actualidad existe una variedad de modelos que intentan simular y predecir el precio del cobre, el cual ha generado que no exista un acuerdo de cual modelo es mejor que otro, si no que se han empezado a integrar y enfocarse en el corto, mediano y largo plazo.

En base a lo anterior, la integración de modelos se ve como una gran posibilidad de mejorar las simulaciones sin entrar al sobre ajuste en los modelos. Actualmente se ha comenzado a integrar el área de *Asset Pricing* en los modelos de *Commodity Pricing*. Esto se respalda por el hecho de que los mercados de *commodities* cada vez tienen más características de mercados financieros [31]. La integración de *Asset Pricing* en los modelos hace considerar variables relevantes que actualmente no son tomados en cuenta en los modelos estocásticos, como los fundamentos económicos, equilibrios de producción, valoración de activos entre otros, incentivando nuevos estudios para trabajos futuros.

Capítulo 9

Bibliografía

- [1] U.S. Geological Survey (USGS). (2013, January). “Mineral Commodity Summaries 2012”. [Online]. Available: <http://minerals.usgs.gov/minerals/pubs/commodity/copper/mcs-2013-coppe.pdf>
- [2] International Copper Study Group (ICSG). (2013, May). “Copper: Preliminary Data for February 2013”. [Online]. Available: <http://www.icsg.org/index.php/component/jdownloads/finish/114/1538>
- [3] Comisión Chilena del Cobre (COCHILCO). (2013, Mayo). “Exportaciones Mineras”. [Online]. Disponible: <http://www.cochilco.cl/estadisticas/exportaciones.asp>
- [4] Banco Central de Chile. (2013, Mayo) “Cuentas Nacionales de Chile 2008-2012”. [Online]. Disponible: <http://www.bcentral.cl/publicaciones/estadisticas/actividad-economica-gasto/aeg01i.htm>
- [5] O’Sullivan, Arthur and Steven M. Sheffrin, 2003, “Economics: Principles in action”, Upper Saddle River, New Jersey 07458, Pearson Prentice Hall. p. 152.
- [6] Brennan, M.J., and E.S. Schwartz, “Evaluating Natural Resources Investments”, *Journal Bussines* 58, pp. 135-157.
- [7] Paddock, J.L., D.R. Siegel and J.L. Smith, 1988, “Option valuation of claims on real assets: The case of offshore petroleum leases”, *Quart Journal Economics* 103, pp. 479-503.
- [8] Smith, J.E. and K.F. McCardle, 1998, “Valuing oil properties: Integrating option pricing and decision analysis approaches”. *Oper. Res.* 46, pp. 198-217.
- [9] Shreve, Steven E., “Stochastic calculus for finance II: Continuous-Time Models”, New York, Springer Finance, pp. 153-182.
- [10] Laughton, D. G. and Henry D. Jacoby, 1993, “Reversion, timing options, and long-term decision making”, *Financial Management* 33, pp. 225–240.

- [11] Laughton, D. G. and Henry D. Jacoby, 1995, "The effects of reversion on commodity projects of different length", L. Trigeorgis, *ed. Real Options in Capital Investment: Models, Strategies and Applications*. Praeger, Westport, CT, pp. 185–205.
- [12] Cortazar, G. and E. S. Schwartz, 1994, "The evaluation of commodity contingent claims", *J. Derivatives* 1, pp. 27–39.
- [13] Dixit, A. K. and R. S. Pindyck, 1994, "Investment Under Uncertainty", Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [14] Smith, J. E. and K. F. McCardle, 1999, "Options in the real world: Lessons learned in evaluating oil and gas investments", *Oper. Res.* 47, pp. 1–15.
- [15] Meller, P., 2013, "La viga Maestra y el Sueldo de Chile", Uqbar Editores.
- [16] Clements, M. and D. Hendry, 2001, "Forecasting Non-Stationary Economic Time Series", The MIT Press.
- [17] Marshall, I. y E. Silva, 1998, "Fluctuaciones del Precio del Cobre", Informe Macroeconómico para la Empresa. N°35: 38-60. Instituto de Economía, Pontificia Universidad Católica de Chile.
- [18] Phillips, S., and A. Swiston, 2002, "Forecasting Copper Prices in the Chilean context. Chile: Selected Issues", IMF Country Report N°. 02/163, International Monetary Fund.
- [19] Foix, C., 2006, "Proyección del precio del cobre: ¿Herramienta de Inteligencia Computacional o Series de Tiempo?", Tesis para optar al grado de Magister en Gestión de Operaciones, Universidad de Chile.
- [20] Clapham, C. and J. Nicholson, 2009, "Concise dictionary of mathematics", Oxford University.
- [21] Engle, R. F., 1982, "Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation", *Econometrica* 50, 987-1008.
- [22] Bollerslev, T., 1986, "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity", *Journal of Econometrics* 31, 307-327.
- [23] Bureau of Labor Statistic (BLS), "Producer Price Indexes: All Commodities". November 2013. [Online]. Available: <http://www.bls.gov/ppi>
- [24] Caballero, F., 2011, "Selección de Modelos mediante Criterios de Información en Análisis Factorial. Aspectos Teóricos y Computacionales.", Tesis Doctoral, Universidad de Granada.
- [25] Dixit, A.K., and R.S. Pindyck, 1994, "Investment Under Uncertainty", Princeton University Press.
- [26] Higgins, J. J., 2004, "Introduction to modern nonparametric statistics", Thomson Learning Inc.

- [27] Lo, A. W. and A. C. MacKinlay, 1988, "Stock market prices do not follow random walks: Evidence from a simple specification test", *Review of Financial Studies* 1, 41-66.
- [28] Karlin, S. and H. Taylor, 1981, "A Second Course in Stochastic Processes", Vol. 2., Gulf Professional Publishing.
- [29] Cruz, J. Miguel, 2004, "Medición de Riesgo en la Evaluación de Proyectos Mineros: El VaR del VAN", Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Chile. Acatama Resource Proyecto Fondef 1087.
- [30] Paredes, Tomas, 2006, "Medición de Valor en Riesgo de un Proyecto Minero en Codelco Chile", Memoria de Título, Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Chile.
- [31] Henderson, B.J., Person, N.D., & Wang, L 2012. "New Evidence on The Financialization of Commodity", *Working Paper*.

Apéndice A

Apéndice A: Ecuaciones

A.1. Lema de Itô

El Lema de Itô es más fácil entenderlo como una serie expandida de Taylor. Se supone un proceso $x(t)$ de la siguiente forma:

$$(A.1) \quad dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

Y también se supone una función $F(x,t)$ que es al menos dos veces diferenciable en x y una en t . Bajo el marco teórico del cálculo clásico los términos de la primera derivada expresados en x y t se expresa como sigue:

$$(A.2) \quad dF = \frac{\delta F}{\delta x} dx + \frac{\delta F}{\delta t} dt$$

Pero también se pueden incluir los términos de mayor orden:

$$(A.3) \quad dF = \frac{\delta F}{\delta x} dx + \frac{\delta F}{\delta t} dt + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 F}{\delta x^2} (dx)^2 + \frac{1}{6} \frac{\delta^3 F}{\delta x^3} (dx)^3 + \dots$$

Según el cálculo clásico, los términos de mayor orden desaparecen cuando los diferencias tienden al límite. Para comprobar si pasa lo mismo con el cálculo estocástico, se expandirá el tercer y cuarto término de la derecha de la ecuación A.3. Primero, se ocupará la ecuación A.1 para determinar $(dx)^2$:

$$(A.4) \quad (dx)^2 = a^2(x,t)(dt)^2 + 2a(x,t)b(x,t)(dt)^{\frac{3}{2}} + b^2(x,t)dt$$

Los términos $(dt)^{\frac{3}{2}}$ y $(dt)^2$ tienden a cero mas rápido que dt siendo infinitesimalmente despreciables. Por lo tanto, la ecuación se puede escribir como

$$(A.5) \quad (dx)^2 = b^2(x,t)dt$$

En cuanto al cuarto término de la derecha de la ecuación A.3 todos los términos de $(dx)^3$ tienen una potencia mayor a 1, tendiendo a cero más rápido que dt en el límite. Y ocurre lo mismo para términos de mayor orden como $(dx)^4$ hacia adelante. Por lo tanto, el Lema de Itô entrega el diferencial de dF como:

$$(A.6) \quad dF = \frac{\delta F}{\delta t} dt + \frac{\delta F}{\delta x} dx + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 F}{\delta x^2} (dx)^2$$

Ahora sustituyendo los términos de A.1 en A.6 se obtiene la expresión del Lema de Itô para una función $F(x)$:

$$(A.7) \quad dF = \left[\frac{\delta F}{\delta t} + a(x,t) \frac{\delta F}{\delta x} + \frac{1}{2} b^2(x,t) \frac{\delta^2 F}{\delta x^2} \right] dt + b(x,t) \frac{\delta F}{\delta x} dz$$

Ejemplo: Movimiento Browniano Geométrico. Si se considera un proceso $x(t)$ tal que sigue un Movimiento Browniano Geométrico como sale en 3.1, se ocupa el Lema de Itô para encontrar el proceso para el caso de $F(x) = \ln(x)$ [Generalmente se ocupa esta transformación para casos donde $x(t)$ no puede tomar valores negativos]. En este caso $\frac{\delta F}{\delta t} = 0$, $\frac{\delta F}{\delta x} = \frac{1}{x}$, y $\frac{\delta^2 F}{\delta x^2} = -\frac{1}{x^2}$ Entonces se obtiene por A.6:

$$(A.8) \quad dF = \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2x^2} (dx)^2 = \mu dt + \sigma dz - \frac{1}{2} \sigma^2 dt = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dz$$

Por lo tanto, para un intervalo finito de T , el cambio en el $\ln(x)$ es normalmente distribuido con media $(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)T$ y varianza $\sigma^2 T$

A.2. Ecuaciones de Kolmogorov

El objetivo de las Ecuaciones de Kolmogorov es describir la distribución de probabilidad de una proceso estocástico $x(t)$ y cuál es su evolución a través del tiempo.

En principio se presentará para el Movimiento Browniano con tendencia. Primero se supone un intervalo de tiempo T dicretizado en $n = \frac{T}{\Delta t}$ partes, en cada paso, con probabilidad p , x podría aumentar un cantidad de Δh y con probabilidad $q = 1 - p$, ésta podría decrecer una cantidad Δh . Se supone además una varianza de $(x_1 - x_0)$ en cada paso, la cuál es independiente para cada Δt , por lo que se tiene $\Delta h = \sigma \sqrt{\Delta t}$.

Sea $\phi(x_0, t_0; x, t)$ la función de densidad para $x(t)$. La distribución de probabilidad para un tiempo inicial t_0 con $x(0) = x_0$ es:

$$(A.9) \quad Prob[a \leq x(t) \leq b | x(t_0) = x_0] = \int_a^b \phi(x_0, t_0; u, t) du$$

Sobre el intervalo de tiempo desde $t - \Delta t$ a t , el proceso puede alcanzar el punto x de dos maneras, ya sea por el incremento desde el punto $x - \Delta h$ o por decrecimiento desde el punto $x + \Delta h$. Por lo tanto:

$$(A.10) \quad \phi(x_0, t_0; x, t) = p \phi(x_0, t_0; x - \Delta h, t - \Delta t) + q \phi(x_0, t_0; x + \Delta h, t - \Delta t)$$

Haciendo una expansión de Taylor a $\phi(x_0, t_0; x - \Delta h, t - \Delta t)$ alrededor de $\phi(x_0, t_0; x, t)$:

$$(A.11) \quad \phi(x_0, t_0; x - \Delta h, t - \Delta t) = \phi(x_0, t_0; x, t) - \Delta t \frac{\delta \phi}{\delta t} - \Delta h \frac{\delta \phi}{\delta x} + \frac{1}{2} (\Delta h)^2 \frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2} + \dots$$

Es importante considerar que los términos de mayor orden como $(\Delta t)^3/2$, $(\Delta t)^2$, etc. en el límite tienden a cero más rápido que Δt . Haciendo la expansión de Taylor para $\phi(x_0, t_0; x + \Delta h, t - \Delta t)$ y ocupando la expresión de A.10 se obtiene:

$$(A.12) \quad \phi(x_0, t_0; x, t) = (p + q)\phi(x_0, t_0; x, t) - (p + q)\Delta t \frac{\delta \phi}{\delta t} - (p - q)\Delta h \frac{\delta \phi}{\delta x} + \frac{1}{2}(p + q)(\Delta h)^2 \frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2}$$

Finalmente, usando $p + q = 1$ y $p - q = \left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) \sqrt{\Delta t}$ ¹. Además de substituir $\Delta h = \sigma \sqrt{\Delta t}$, dividiendo por Δt y ordenando queda:

$$(A.13) \quad \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\delta^2}{\delta x^2} \phi(x_0, t_0; x, t) - \alpha \frac{\delta}{\delta x} \phi(x_0, t_0; x, t) = \frac{\delta}{\delta t} \phi(x_0, t_0; x, t)$$

La ecuación A.13 se llama “Ecuación de Kolmogorov hacia adelante” para el Movimiento Browniano con tendencia, el cuál describe su evolución sobre el tiempo en base a la función de densidad de probabilidad $\phi(x_0, t_0; x, t)$. De forma similar se puede describir para un proceso de Itô A.1 [28]:

$$(A.14) \quad \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta x^2} [b^2(x, t) \phi(x_0, t_0; x, t)] - \frac{\delta}{\delta x} [a(x, t) \phi(x_0, t_0; x, t)] = \frac{\delta}{\delta t} \phi(x_0, t_0; x, t)$$

Las ecuaciones A.13 y A.14 son llamadas “hacia adelante” ya que son soluciones que al considerar valores de borde como x_0 y t_0 resuelve la función de densidad para los valores futuros de x . De forma análoga, existe una “Ecuación de Kolmogorov hacia atrás”, la cual inicialmente considera valores de borde y luego presenta la dinámica de la función de densidad pasada. Esta ecuación para un proceso de Itô es el siguiente:

$$(A.15) \quad \frac{1}{2} b^2(x_0, t_0) \frac{\delta^2}{\delta x_0^2} \phi(x_0, t_0; x, t) + a(x_0, t_0; x, t) \frac{\delta}{\delta x_0} \phi(x_0, t_0; x, t) = - \frac{\delta}{\delta t_0} \phi(x_0, t_0; x, t)$$

Ejemplo: Proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Para dar un ejemplo, se considerará el proceso con reversión a la media con media a largo plazo igual a cero. Por lo tanto, el proceso quedará como:

$$(A.16) \quad dx = -\eta x dt + \sigma dz$$

¹Para más detalle del cálculo ver [25] página 66.

El objetivo es calcular la esperanza condicional y la varianza condicional vista en 3.10 y 3.11.

Primero se expresa el generado de momentos en función de $x(t)$ como:

$$(A.17) \quad M(\theta, t) \equiv \varepsilon(e^{-\theta x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x_0, t_0; x, t) e^{-\theta x} dx$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$(A.18) \quad \frac{\delta M}{\delta t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta \phi}{\delta t} e^{-\theta x} dx$$

La Ecuación de Kolmogorov hacia Adelante para este proceso es:

$$(A.19) \quad \frac{\delta \phi}{\delta t} = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2} - \eta x \frac{\delta \phi}{\delta x} + \eta \phi$$

Sustituyendo A.19 en A.18 e integrando se obtiene la siguiente ecuación para $M(\theta, t)$:

$$(A.20) \quad \frac{1}{2} \sigma^2 \theta^2 M - \eta \theta \frac{\delta M}{\delta \theta} = \frac{\delta M}{\delta t}$$

Para resolver esta ecuación diferencial se debe considerar las condiciones de borde:

$$M(0, t) = 1, \quad -M_\theta(0, 0) = x_0, \quad \text{y} \quad \text{vol}[x(0)] = M_{\theta\theta}(0, 0) - x_0^2 = 0$$

Finalmente, la solución se expresa como:

$$(A.21) \quad M(\theta, t) = e^{\frac{\sigma^2 \theta^2}{4\eta}} \left[1 - x_0 \theta e^{-\eta t} + \left(\frac{1}{2} x_0^2 - \frac{\sigma^2}{4\eta} \right) \theta^2 e^{-2\eta t} \right]$$

Si se considera que $\varepsilon(x_t) = -M_\theta(0, t)$ y $\varepsilon(x_t^2) = M_{\theta\theta}(0, t)$, se verifica que se obtienen los valores presentados en 3.10 y 3.11.

Apéndice B

Apéndice B: Tablas

| Año/Mes | Jan | Feb | Mar | Apr | May | Jun | Jul | Aug | Sep | Oct | Nov | Dec |
|-------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1973 | 249 | 272 | 321 | 337 | 322 | 355 | 417 | 406 | 382 | 412 | 457 | 433 |
| 1974 | 384 | 423 | 498 | 548 | 512 | 432 | 330 | 299 | 241 | 228 | 228 | 209 |
| 1975 | 196 | 205 | 218 | 214 | 201 | 190 | 193 | 201 | 189 | 182 | 183 | 178 |
| 1976 | 184 | 188 | 205 | 231 | 230 | 234 | 247 | 232 | 219 | 192 | 191 | 191 |
| 1977 | 206 | 208 | 218 | 204 | 195 | 187 | 177 | 165 | 169 | 171 | 166 | 176 |
| 1978 | 175 | 167 | 170 | 172 | 173 | 176 | 176 | 188 | 188 | 194 | 189 | 195 |
| 1979 | 208 | 240 | 250 | 253 | 230 | 223 | 212 | 230 | 240 | 234 | 234 | 246 |
| 1980 | 282 | 311 | 244 | 219 | 215 | 209 | 223 | 211 | 208 | 204 | 200 | 185 |
| 1981 | 182 | 174 | 173 | 172 | 164 | 160 | 157 | 167 | 160 | 156 | 154 | 155 |
| 1982 | 149 | 148 | 140 | 141 | 142 | 120 | 133 | 134 | 132 | 135 | 133 | 136 |
| 1983 | 145 | 152 | 147 | 155 | 162 | 156 | 156 | 149 | 142 | 130 | 126 | 128 |
| 1984 | 124 | 128 | 134 | 136 | 126 | 122 | 118 | 119 | 116 | 114 | 120 | 118 |
| 1985 | 122 | 124 | 124 | 135 | 137 | 128 | 132 | 128 | 124 | 124 | 123 | 124 |
| 1986 | 127 | 128 | 133 | 133 | 131 | 131 | 125 | 122 | 125 | 122 | 121 | 124 |
| 1987 | 124 | 126 | 134 | 135 | 137 | 141 | 152 | 156 | 162 | 175 | 224 | 255 |
| 1988 | 236 | 206 | 208 | 200 | 213 | 219 | 190 | 189 | 209 | 251 | 283 | 297 |
| 1989 | 284 | 259 | 271 | 257 | 224 | 209 | 205 | 228 | 237 | 235 | 213 | 198 |
| 1990 | 191 | 191 | 213 | 218 | 221 | 209 | 224 | 235 | 237 | 210 | 199 | 194 |
| 1991 | 190 | 193 | 192 | 197 | 183 | 176 | 178 | 178 | 185 | 188 | 189 | 177 |
| 1992 | 171 | 176 | 178 | 176 | 175 | 180 | 198 | 198 | 189 | 176 | 170 | 174 |
| 1993 | 177 | 173 | 168 | 151 | 139 | 144 | 150 | 152 | 145 | 128 | 127 | 135 |
| 1994 | 140 | 145 | 148 | 145 | 166 | 182 | 188 | 184 | 192 | 195 | 213 | 227 |
| 1995 | 227 | 216 | 218 | 216 | 205 | 221 | 227 | 225 | 215 | 208 | 220 | 215 |
| 1996 | 191 | 186 | 187 | 189 | 192 | 157 | 144 | 145 | 140 | 142 | 161 | 163 |
| 1997 | 174 | 173 | 176 | 174 | 183 | 190 | 179 | 164 | 153 | 149 | 139 | 129 |
| 1998 | 125 | 123 | 130 | 133 | 129 | 123 | 122 | 121 | 123 | 118 | 118 | 111 |
| 1999 | 108 | 107 | 104 | 110 | 112 | 105 | 121 | 120 | 127 | 125 | 125 | 128 |
| 2000 | 133 | 128 | 123 | 119 | 126 | 121 | 125 | 129 | 135 | 130 | 123 | 126 |
| 2001 | 118 | 119 | 118 | 113 | 114 | 110 | 106 | 102 | 99 | 98 | 102 | 106 |
| 2002 | 108 | 113 | 114 | 113 | 113 | 116 | 112 | 104 | 103 | 103 | 110 | 111 |
| 2003 | 113 | 113 | 109 | 107 | 112 | 113 | 115 | 118 | 120 | 128 | 137 | 146 |
| 2004 | 159 | 180 | 195 | 188 | 172 | 169 | 176 | 178 | 181 | 186 | 191 | 194 |
| 2005 | 194 | 198 | 203 | 203 | 195 | 211 | 214 | 223 | 220 | 226 | 241 | 260 |
| 2006 | 267 | 285 | 291 | 360 | 449 | 401 | 428 | 424 | 425 | 428 | 395 | 373 |
| 2007 | 320 | 315 | 353 | 419 | 410 | 398 | 421 | 403 | 408 | 424 | 360 | 341 |
| 2008 | 361 | 399 | 416 | 421 | 395 | 381 | 379 | 355 | 329 | 245 | 195 | 166 |
| 2009 | 174 | 181 | 206 | 241 | 248 | 266 | 280 | 326 | 329 | 332 | 348 | 363 |
| 2010 | 376 | 350 | 377 | 389 | 342 | 328 | 339 | 365 | 386 | 411 | 418 | 446 |
| 2011 | 459 | 466 | 443 | 432 | 405 | 411 | 435 | 412 | 378 | 338 | 347 | 350 |
| 2012 | 372 | 387 | 383 | 375 | 363 | 344 | 351 | 342 | 365 | 367 | 353 | 366 |
| 2013 | 368 | 366 | 348 | 328 | 328 | 317 | 312 | 325 | 325 | | | |

Tabla B.1: Tabla de precios mensuales reales del cobre en el periodo 1973-2013. Actualizado a moneda 2013.

| | Jan | Feb | Mar | Apr | May | Jun | Jul | Aug | Sep | Oct | Nov | Dec |
|-------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 2013 | | | | | | | | | | 326 | 327 | 327 |
| 2014 | 328 | 329 | 330 | 331 | 332 | 333 | 334 | 335 | 336 | 336 | 337 | 338 |
| 2015 | 339 | 340 | 341 | 342 | 343 | 344 | 345 | 346 | 347 | 347 | 348 | 349 |
| 2016 | 350 | 351 | 352 | 353 | 354 | 355 | 356 | 357 | 358 | 359 | 360 | 361 |
| 2017 | 362 | 363 | 364 | 365 | 366 | 367 | 368 | 369 | 370 | 371 | 372 | 373 |
| 2018 | 374 | 375 | 376 | 377 | 378 | 379 | 380 | 381 | 382 | 383 | 384 | 385 |
| 2019 | 386 | 387 | 388 | 389 | 390 | 391 | 392 | 393 | 394 | 396 | 397 | 398 |
| 2020 | 399 | 400 | 401 | 402 | 403 | 404 | 405 | 406 | 407 | 409 | 410 | 411 |
| 2021 | 412 | 413 | 414 | 415 | 416 | 417 | 419 | 420 | 421 | 422 | 423 | 424 |
| 2022 | 425 | 427 | 428 | 429 | 430 | 431 | 432 | 433 | 435 | 436 | 437 | 438 |
| 2023 | 439 | 441 | 442 | 443 | 444 | 445 | 447 | 448 | 449 | | | |

Tabla B.2: Tabla de precios esperados mensuales del cobre bajo el Modelo Geométrico Browniano.

| | Jan | Feb | Mar | Apr | May | Jun | Jul | Aug | Sep | Oct | Nov | Dec |
|-------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 2013 | | | | | | | | | | 325 | 324 | 324 |
| 2014 | 324 | 323 | 323 | 323 | 322 | 322 | 322 | 321 | 321 | 321 | 321 | 320 |
| 2015 | 320 | 320 | 319 | 319 | 319 | 319 | 318 | 318 | 318 | 318 | 317 | 317 |
| 2016 | 317 | 316 | 316 | 316 | 316 | 315 | 315 | 315 | 315 | 314 | 314 | 314 |
| 2017 | 314 | 313 | 313 | 313 | 313 | 312 | 312 | 312 | 312 | 311 | 311 | 311 |
| 2018 | 311 | 310 | 310 | 310 | 310 | 309 | 309 | 309 | 309 | 309 | 308 | 308 |
| 2019 | 308 | 308 | 307 | 307 | 307 | 307 | 307 | 306 | 306 | 306 | 306 | 306 |
| 2020 | 305 | 305 | 305 | 305 | 305 | 304 | 304 | 304 | 304 | 304 | 303 | 303 |
| 2021 | 303 | 303 | 303 | 302 | 302 | 302 | 302 | 302 | 301 | 301 | 301 | 301 |
| 2022 | 301 | 301 | 300 | 300 | 300 | 300 | 300 | 300 | 299 | 299 | 299 | 299 |
| 2023 | 299 | 298 | 298 | 298 | 298 | 298 | 298 | 298 | 297 | | | |

Tabla B.3: Tabla de precios esperados mensuales del cobre bajo el Proceso de Ornstein Uhlenbeck.