



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

APLICACIÓN DE TÉCNICAS DE FILTRADO BAYESIANO PARA  
DETECCIÓN DE EXOPLANETAS Y ESTIMACIÓN DE SUS MASAS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL ELÉCTRICO

JAVIER IGNACIO ACUÑA PAGLIERO

PROFESOR GUÍA:  
MARCOS ORCHARD CONCHA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
JORGE SILVA SÁNCHEZ  
RENÉ MÉNDEZ BUSSARD

SANTIAGO DE CHILE  
MAYO 2014

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR  
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL ELÉCTRICO  
POR: JAVIER IGNACIO ACUÑA PAGLIERO  
FECHA: MAYO 2014  
PROF. GUÍA: DR. MARCOS ORCHARD CONCHA

## APLICACIÓN DE TÉCNICAS DE FILTRADO BAYESIANO PARA DETECCIÓN DE EXOPLANETAS Y ESTIMACIÓN DE SUS MASAS

La última década de investigación planetaria extrasolar ha permitido determinar de manera concluyente la existencia de planetas fuera de nuestro propio sistema planetario. Más aún, se posee evidencia de que estos son de variadas formas y que el sistema solar no es único en su especie. A la fecha, la técnica más exitosa para la detección de exoplanetas ha sido la de velocidades radiales, midiendo el efecto Doppler inducido por la fuerza gravitacional de un planeta orbitando alrededor de una estrella. Utilizando esta metodología los investigadores han sido capaces de inferir la presencia de exoplanetas orbitantes, confirmando además la inmensa mayoría de los que se conocen actualmente; generando resultados concluyentes a un ritmo acelerado.

En el presente Trabajo de Título se ha propuesto la utilización de técnicas de inferencia Bayesiana para la detección de exoplanetas, a partir de datos de velocidad radial simulados. Se ha planteado además estudiar las limitantes intrínsecas asociadas al instrumento de observación, modelando su rango de error y obteniendo una medida del intervalo en donde es posible lograr la detección. Finalmente, a partir de la información obtenida y la utilizando técnicas de filtrado secuencial se consigue una estimación de la masa del planeta extrasolar.

Dadas las simplificaciones consideradas durante la realización de este estudio se considera que los resultados obtenidos implican un avance inicial en la solución de un problema que posee una envergadura muy amplia, pero resultan significativos a la hora de abordarlo en mayor profundidad. Se logró de manera satisfactoria la simulación de los datos necesarios para el trabajo y la implementación de la metodología de detección de exoplanetas, junto con la obtención de la curva que define las limitantes del mismo proceso. Luego, haciendo uso de los Métodos Secuenciales de Monte Carlo fue posible estimar de manera certera la masa del planeta bajo los distintos parámetros orbitales, analizando también los casos límites de importancia.

# Agradecimientos

En primer lugar quisiera agradecer a mi profesor guía, Dr. Marcos Orchard, por mantener siempre una excelente disposición, conocimientos y paciencia admirables. Al resto de los miembros de mi comisión, Dr. Jorge Silva y Prof. René Méndez, por sus sugerencias y aportes a este trabajo. A Pablo Espinoza por el gran apoyo otorgado y su guía referente al área de astronomía, además por su contribución en la revisión de la teoría en este documento. También a los miembros del laboratorio de Automática por otorgar un lugar para trabajar.

A todos mis amigos y compañeros que he conocido a lo largo de la carrera. Agradecimientos especiales a Manuel Iglesias con quien he compartido una significativa amistad durante todo el proceso, incluyendo estudio, desarrollo de proyectos e incontables alegrías y sufrimientos con los ramos. También a Paulina Flores quien además de ser una muy buena compañera en la universidad es una valiosa amiga a quien le tengo gran aprecio; agradezco a ambos por todo el apoyo brindado. Al resto de mis amigos más cercanos de eléctrica: Felipe Castro, Pablo Bilbao, Felipe Zuñiga, Cristóbal Inostroza, entre otros.

Finalmente, y de forma más profunda, agradezco a mi familia, en especial a mi madre quien siempre ha creído en mi y me ha dado todo el apoyo e impulso necesarios, motivándome desde pequeño a salir adelante. A mis tíos Blanca Pagliero, Miguel Denis, Cecilia Pagliero y Juan Huerta quienes siempre han estado presentes y nos han brindado su apoyo en los momentos en que más lo hemos necesitado, sin su ayuda no me habría sido posible llegar a este punto.

# Tabla de contenido

Índice de tablas	v
Índice de figuras	vi
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Marco Teórico y Estado del Arte</b>	<b>3</b>
2.1. Mecánica Celeste . . . . .	3
2.1.1. Leyes de Kepler . . . . .	3
2.1.2. Geometría del Movimiento Elíptico . . . . .	5
2.1.3. Mecánica Newtoniana . . . . .	6
2.1.4. Trabajo y Energía . . . . .	9
2.1.5. Movimiento Baricéntrico . . . . .	10
2.2. Métodos de Detección de Exoplanetas . . . . .	11
2.2.1. Velocidad Radial . . . . .	12
2.2.2. Astrometría . . . . .	14
2.2.3. Tránsitos . . . . .	15
2.2.4. Microlente Gravitacional . . . . .	17
2.2.5. Imágenes . . . . .	18
2.2.6. Sincronía . . . . .	19
2.3. Teoría de Detección . . . . .	21
2.3.1. Enfoque de Neyman-Pearson . . . . .	22
2.4. Inferencia Bayesiana e Integración de Monte Carlo . . . . .	23
2.4.1. Inferencia Bayesiana . . . . .	24
2.4.2. Métodos Secuenciales de Monte Carlo: Filtro de Partículas . . . . .	27
<b>3. Metodología e Implementación</b>	<b>36</b>

3.1.	Descripción del Problema y Motivación . . . . .	37
3.1.1.	Supuestos y Simplificaciones Iniciales . . . . .	37
3.1.2.	Modelo Vectorial . . . . .	38
3.2.	Simulación de Datos Orbitales . . . . .	39
3.3.	Detección Exoplanetaria . . . . .	43
3.3.1.	Implementación del Detector . . . . .	43
3.3.2.	Área de Detección . . . . .	46
3.4.	Procedimiento de Estimación de Masa Planetaria . . . . .	48
3.4.1.	Diseño del Filtro de Partículas . . . . .	50
<b>4.</b>	<b>Resultados y Análisis</b>	<b>52</b>
4.1.	Simulación de Datos Orbitales . . . . .	52
4.2.	Detección de Exoplanetas . . . . .	54
4.2.1.	Frontera de Detección . . . . .	58
4.3.	Estimación de Masa Planetaria . . . . .	60
4.3.1.	Resultados Obtenidos . . . . .	61
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>77</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>79</b>

# Índice de tablas

3.1. Descripción de vectores que componen el esquema de observación. . .	39
3.2. Variables necesarias para el cálculo de las condiciones iniciales del sistema. . . . .	41
4.1. Matriz de confusión que representa el peor caso a partir de pruebas de detección para distintos valores de masa crítica. . . . .	57
4.2. Resultados de estimación de Masa 1 en Iteración N°1. . . . .	62
4.3. Resultados estimación de masa 1, Iteración N°2, con ECM obtenido. .	63
4.4. Resultados estimación de masa 1, Iteración N°10, con ECM obtenido.	64
4.5. Resultados estimación de masa 1, Iteración N°20, con ECM obtenido.	65
4.6. Resultados estimación de masa 2, Iteración N°1, con ECM obtenido. .	66
4.7. Resultados estimación de masa 2, Iteración N°2, con ECM obtenido. .	67
4.8. Resultados estimación de masa 2, Iteración N°5, con ECM obtenido. .	68
4.9. Resultados estimación de masa 2, Iteración N°10, con ECM obtenido.	69
4.10. Resultados estimación de masa 3, Iteración N°1, con ECM obtenido. .	70
4.11. Resultados estimación de masa 3, Iteración N°2, con ECM obtenido. .	71
4.12. Resultados estimación de masa 3, Iteración N°10, con ECM obtenido.	72
4.13. Resultados estimación de masa 3, Iteración N°20, con ECM obtenido.	73
4.14. Resultados estimación de masa 3, Iteración N°10 y 200 partículas, con ECM obtenido. . . . .	74
4.15. Resultados estimación de masa 3, Iteración N°20 y 200 partículas, con ECM obtenido. . . . .	75

# Índice de figuras

2.1. Representación de la primera y segunda ley de Kepler, donde cada punto de la elipse representa la posición del planeta en intervalos de tiempo igualmente espaciados. Las áreas más oscuras, entre el planeta y uno de los focos de la elipse, es siempre la misma para un intervalo de tiempo dado. . . . .	4
2.2. Geometría de una órbita elíptica. . . . .	5
2.3. Representación de la tercera Ley de Newton. . . . .	7
2.4. Efecto de $e$ y $\omega_*$ en las curvas de velocidad radial. Cada columna muestra las curvas con $e$ constante y cada fila con valor $\omega_*$ constante [42]. . . . .	14
2.5. Ejemplo de Curva de Luminosidad de un estrella durante el tránsito planetario, cuando planeta pasa frente a la estrella disminuye se detecta una disminución en el brillo de la misma. . . . .	16
2.6. Curva de brillo de la estrella HD209458. Se denotan los tránsitos entre las fechas 9 y 16 de Septiembre de 1999 [8]. . . . .	16
2.7. Ejemplo de curvas de luz por microlensing, mostrando la magnificación total $\mu_T$ como función del tiempo [25]. . . . .	17
2.8. Imagen de la luz de 3 planetas orbitando la estrella HR8799 a 120 años luz de distancia. Los tres planetas llamados HR8799b, c, d, se cree que son gigantes gaseosos como Jupiter, pero más masivos. Sus órbitas son de 24, 38 y 68 [AU] respectivamente. . . . .	18
3.1. Esquema de observación utilizado. Desde el baricentro del sistema solar se realizan observaciones a la estrella, la cual posee una órbita propia debido a las fuerzas influidas por la presencia del planeta acompañante. En este caso $\dot{\mathbf{r}}_0 = V_r$ , $\dot{\mathbf{r}}_G = 0$ y $\dot{\mathbf{r}}_\mu = 0$ . . . . .	38

3.2.	Representación de las componentes iniciales en los ejes $x$ e $y$ correspondientes a las posición y velocidad del planeta $(x_{P_0}, \dot{y}_{P_0})$ y la estrella $(x_{S_0}, \dot{y}_{S_0})$ . . . . .	40
3.3.	Ejemplo de simulación de órbitas del planeta (izquierda) y estrella (derecha) en función de ambos ejes en coordenadas cartesianas ( $x$ e $y$ ). La coordenada $(0,0)$ corresponde al centro de masa del sistema, ambos cuerpos se encuentran en lados opuestos a este punto. . . . .	42
3.4.	Ejemplo de simulación de datos puros de velocidad radial de la estrella en unidades de $[m/s]$ . . . . .	42
3.5.	Función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria de distribución <i>chi-cuadrado</i> utilizada en la implementación de un test de hipótesis con un 95 % de confianza. El área en color rojo denota error de tipo I (Sección 2.3). . . . .	44
3.6.	Área de Detección teórica limitada por los valores mínimos y máximos tanto de la masa del planeta como del radio de la órbita, así como también de la potencia del test de hipótesis utilizado. . . . .	47
3.7.	Representación del método utilizado para la estimación del error entre ambas curvas (real y estimada). La curva en color azul corresponde a los datos reales RV, mientras que la roja a los simulados por una partícula. Los datos simulados se comparan punto a punto con los reales y se conserva el instante en que la correlación es máxima, luego se calcula el ECM. . . . .	50
4.1.	Dos ejemplos de datos de velocidad radial con un ruido de observación Gaussiano y radio orbital fijo. La masa del planeta en el primer caso es de $0,16[M_J]$ y en segundo es de $0,5[M_J]$ . . . . .	53
4.2.	Función de densidad de probabilidad $\chi^2$ utilizada en la implementación del test de hipótesis, con un índice de confianza del 95 %. . . . .	55
4.3.	Representación de toma de intervalo de datos de largo $n_x$ . Cada vector de datos es elevado al cuadrado punto a punto y luego se calcula la media. El valor obtenido en cada caso es comparado con el umbral de decisión. . . . .	55
4.4.	Ejemplo de un caso de aceptación y rechazo de la hipótesis nula para dos sistemas con radios orbitales constantes y distintas masas. . . . .	56

4.5. Gráfico de curvas que representan el área de detección para cada caso de ruido de la señal, en unidades de $[M_J]$ y $[AU]$ . Los planetas cuyas características estén por sobre la curva podrán ser detectados. . . . .	58
4.6. Distribución inicial de partículas respecto al rango de masas determinado por el radio orbital, a partir de la curva que determina la frontera de detección. . . . .	61
4.7. Estimación Masa 1, Iteración N°1. <b>Izquierda:</b> Distribución inicial de partículas, <b>Centro:</b> Partículas iteración actual, <b>Derecha:</b> Estimación vs Observación. . . . .	62
4.8. Estimación Masa 1, Iteración N°2. <b>Izquierda:</b> Distribución inicial de partículas, <b>Centro:</b> Partículas iteración actual, <b>Derecha:</b> Estimación vs Observación. . . . .	63
4.9. Estimación Masa 1, Iteración N°10. <b>Izquierda:</b> Distribución inicial de partículas, <b>Centro:</b> Partículas iteración actual, <b>Derecha:</b> Estimación vs Observación. . . . .	64
4.10. Estimación Masa 1, Iteración N°20. <b>Izquierda:</b> Distribución inicial de partículas, <b>Centro:</b> Partículas iteración actual, <b>Derecha:</b> Estimación vs Observación. . . . .	65
4.11. Estimación Masa 2, Iteración N°1. <b>Izquierda:</b> Distribución inicial de partículas, <b>Centro:</b> Partículas iteración actual, <b>Derecha:</b> Estimación vs Observación. . . . .	66
4.12. Estimación Masa 2, Iteración N°2. <b>Izquierda:</b> Distribución inicial de partículas, <b>Centro:</b> Partículas iteración actual, <b>Derecha:</b> Estimación vs Observación. . . . .	67
4.13. Estimación Masa 2, Iteración N°5. <b>Izquierda:</b> Distribución inicial de partículas, <b>Centro:</b> Partículas iteración actual, <b>Derecha:</b> Estimación vs Observación. . . . .	68
4.14. Estimación Masa 2, Iteración N°10. <b>Izquierda:</b> Distribución inicial de partículas, <b>Centro:</b> Partículas iteración actual, <b>Derecha:</b> Estimación vs Observación. . . . .	69
4.15. Estimación Masa 3, Iteración N°1. <b>Izquierda:</b> Distribución inicial de partículas, <b>Centro:</b> Partículas iteración actual, <b>Derecha:</b> Estimación vs Observación. . . . .	70
4.16. Estimación Masa 3, Iteración N°2. <b>Izquierda:</b> Distribución inicial de partículas, <b>Centro:</b> Partículas iteración actual, <b>Derecha:</b> Estimación vs Observación. . . . .	71

4.17. Estimación Masa 3, Iteración N°10. <b>Izquierda:</b> Distribución inicial de partículas, <b>Centro:</b> Partículas iteración actual, <b>Derecha:</b> Estimación vs Observación. . . . .	72
4.18. Estimación Masa 3, Iteración N°20. <b>Izquierda:</b> Distribución inicial de partículas, <b>Centro:</b> Partículas iteración actual, <b>Derecha:</b> Estimación vs Observación. . . . .	73
4.19. Estimación Masa 3 con 200 partículas, Iteración N°10. <b>Izquierda:</b> Distribución inicial de partículas, <b>Centro:</b> Partículas iteración actual, <b>Derecha:</b> Estimación vs Observación. . . . .	74
4.20. Estimación Masa 3 con 200 partículas, Iteración N°20. <b>Izquierda:</b> Distribución inicial de partículas, <b>Centro:</b> Partículas iteración actual, <b>Derecha:</b> Estimación vs Observación. . . . .	75

# Lista de Acrónimos

c.r.a	Con respecto a.
fdp	Función de Densidad de Probabilidad.
ECM	Error cuadrático medio.
IAU	Unión Astronómica Internacional.
i.e.	Es decir ( <i>That is</i> ).
$M_{\odot}$	Unidad de Masa Solar.
$M_J$	Unidad de Masa de Jupiter.
PF	Filtro de Partículas ( <i>Particle Filter</i> ).
RV	Velocidad Radial ( <i>Radial Velocity</i> ).
VA	Variable Aleatoria.

# Capítulo 1

## Introducción

La búsqueda de planetas extrasolares, es decir de planetas que orbitan estrella distintas al Sol, es un trabajo que comenzó hace escasos años atrás. Hace ya más de dos décadas [41] fue anunciada la detección de un sistema planetario alrededor del pulsar PSR 1257+12. En la época, este descubrimiento fue muy controversial dado que el año anterior [4] se anunció un resultado similiar, el cual fue descartado por el mismo grupo unos meses después. Adicionalmente, dado que los pulsares son remanentes de explosiones de estrellas masivas, no se esperaba encontrar algún planeta orbitando alrededor. Sin embargo, tres años después, al medir la variación Doppler de las líneas de absorción estelar fue detectado un planeta con masa joviana (51 Peg b) alrededor de una estrella de tipo solar [29]. Este nuevo descubrimiento no sólo confirmó la presencia de planetas orbitando otras estrellas aparte del Sol, sino la existencia de planetas donde no se creía que existían.

Estos descubrimientos revolucionaron la Astronomía moderna, abriendo un nuevo campo de investigación, el cual ha experimentado un rápido crecimiento en los últimos años. Al día de hoy, cientos de exoplanetas han sido detectados orbitando varias estrellas diferentes, cubriendo un amplio rango de masas, edades, órbitas, entornos y periodos orbitales. Existen variadas técnicas para la detección de exoplanetas, la mayoría permite su observación a través de métodos indirectos como la técnica de velocidad radial, tránsitos, pulsar timing, micro-lensing o detección astrométrica; por otro lado, una forma directa es a través de la técnica de toma de imágenes a exoplanetas.

En este contexto, se definen como objetivos generales del presente documento la detección de la presencia de algún exoplaneta orbitando una estrella y la estimación de su masa. Se utilizarán datos de velocidad radial, cuya simulación también forma parte importante del trabajo. La solución propuesta consiste en la implementación de algoritmos de inferencia Bayesiana (Test de Hipótesis) para la detección del cuerpo extrasolar, y Métodos Secuenciales de Monte Carlo (Filtro de Partículas) que permiten una certera estimación de la masa del astro acompañante a la estrella observada.

Como objetivos específicos figuran la modelación del sistema a analizar, el cual requiere de variadas simplificaciones debido a la gran envergadura que posee. Se considera además el estudio de la teoría correspondiente a la mecánica de astros, lo cual permitirá realizar las simulaciones necesarias. Con respecto a la detección exoplanetaria se propone además la obtención del área de detección sujeta a la masa del cuerpo y radio de la órbita que describe, de modo de determinar el rango de masas en el cual puede encontrarse el planeta, caracterizando así las limitantes del método de observación utilizado. Finalmente, luego de haber realizado una estimación de la masa con ayuda del Filtro de Partículas, se realizará un análisis de sus resultados, concluyendo acerca de la efectividad del procedimiento utilizado.

Este documento se separa en 5 secciones principales, además de un apartado de referencias bibliográficas. La primera parte consta del presente apartado. El resto se estructura de la siguiente forma: en el Capítulo 2 se hace una síntesis de los aspectos teóricos que fundamentan el trabajo. En el Capítulo 3 se describe el problema a abordar, tanto aspectos experimentales como teóricos, así como la implementación de los algoritmos. Los resultados y las discusiones acerca de los mismos se presentan en el Capítulo 4. Finalmente, en el último capítulo se plantean las principales conclusiones a partir de los resultados obtenidos.

# Capítulo 2

## Marco Teórico y Estado del Arte

En el presente capítulo se expondrán los conceptos básicos necesarios que permiten una buena comprensión de los tópicos abordados en este trabajo. La revisión bibliográfica comprende conocimientos asociados tanto al área de la astronomía, como los correspondientes a técnicas avanzadas de detección y estimación de parámetros.

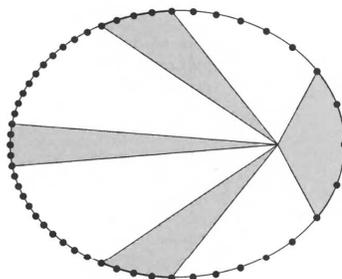
### 2.1. Mecánica Celeste

De modo de lograr un mejor entendimiento de los fundamentos utilizados en el presente informe, situados en el contexto de la astronomía, se hará una breve revisión de los conceptos principales utilizados. La presente sección resulta de vital importancia para lograr las simulaciones necesarias, de modo de cumplir con el trabajo propuesto.

#### 2.1.1. Leyes de Kepler

Rechazando la teoría fundamental del modelo Ptolemaico (o Geocéntrico), Kepler consideró la posibilidad de que las órbitas planetarias fueran elípticas en lugar de circulares. Kepler descubrió que la velocidad orbital de un planeta no es constante, variándose la misma en forma precisa dependiendo de su ubicación en la órbita. En el año 1609, Kepler publicó las primeras dos de sus tres leyes de movimiento planetario [7]:

- **Primera Ley** Todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas. El Sol se encuentra en uno de los focos de la elipse.
- **Segunda Ley** El radio vector que une un planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.



**Figura 2.1:** Representación de la primera y segunda ley de Kepler, donde cada punto de la elipse representa la posición del planeta en intervalos de tiempo igualmente espaciados. Las áreas más oscuras, entre el planeta y uno de los focos de la elipse, es siempre la misma para un intervalo de tiempo dado.

La equivalencia de las áreas barridas es equivalente además a la constancia del momento angular, i.e. cuando el planeta está más alejado del Sol su velocidad es menor que cuando se encuentra más cercano a él. En ambos puntos, el momento angular es el producto de la masa del planeta, su velocidad y su distancia al centro del Sol.

La tercera ley de Kepler fue publicada 10 años después y establece:

- **Tercera Ley** Para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica.

$$T^2 = a^3 \tag{2.1}$$

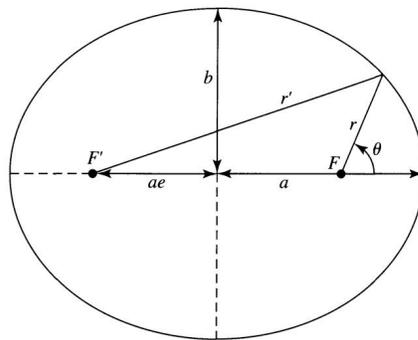
donde  $T$  es el periodo orbital del planeta, medido en *años*, y  $a$  es la distancia promedio del planeta al sol, en *unidades astronómicas*,  $AU$ . **Una unidad astronómica** es, por definición, la distancia promedio entre la Tierra y el Sol, con un valor aproximado de  $1,496 \times 10^{11} m$ .

### 2.1.2. Geometría del Movimiento Elíptico

Una elipse está definida por un conjunto de puntos que satisfacen la ecuación:

$$r + r' = 2a \quad (2.2)$$

donde  $a$  es una constante conocida como el **semieje mayor** (eje mayor de la elipse), y  $r$  y  $r'$  representan las distancias de la elipse desde ambos **puntos focales**,  $F$  y  $F'$ , respectivamente. La distancia  $b$  es conocida como el **semieje menor**. La **eccentricidad**,  $e$  ( $0 \leq e < 1$ ), de la elipse está definida como la distancia entre los focos dividido por el eje mayor,  $2a$ , de la elipse, lo que implica que la distancia de cada punto focal al centro de la elipse puede ser expresada como  $ae$ . Para un círculo,  $e = 0$  y se cumple que ( $F = F'$ ). El punto en la elipse que se encuentra más cercano al foco principal (ubicado en el semieje mayor) es llamado **periastro**; el punto en el extremo opuesto del semieje mayor y más alejado del foco principal es conocido como **apoastro**.



**Figura 2.2:** Geometría de una órbita elíptica.

Es posible obtener una relación geométrica entre  $a$ ,  $b$ , y  $e$  utilizando el teorema de Pitágoras, obteniendo:

$$b^2 = a^2(1 - e^2) \quad (2.3)$$

La segunda ley de Kepler establece que la velocidad orbital de un planeta depende de su ubicación en la órbita. Para describir en detalle el comportamiento orbital de un planeta, es necesario especificar donde se encuentra, así como su velocidad y la dirección en que se está moviendo el mismo. Expresando en coordenadas polares, la

distancia  $r$  en términos del ángulo  $\theta$  [7]:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (0 \leq e < 1) \quad (2.4)$$

con  $p$  denotando el llamado **semi-latus rectum** de la elipse, que corresponde a la distancia entre un foco y la misma elipse sobre una línea perpendicular al semieje mayor que pasa por el foco.

### 2.1.3. Mecánica Newtoniana

Al día de hoy, las tres leyes de Newton, junto a su ley de gravitación universal, proveen una completa descripción de la mecánica clásica. La física newtoniana ha demostrado ser muy exitosa en la explicación de los resultados en observaciones y experimentos. Se presentan a continuación las tres leyes de movimiento establecidas por Newton:

- **Primera Ley de Newton** Un objeto en reposo permanecerá en reposo y un objeto en movimiento permanecerá en movimiento en línea recta a una velocidad constante a menos que actúe una fuerza externa.

Esta ley puede ser expresada también como “*El momentum de un objeto permanece constante a menos que experimente una fuerza externa.*”

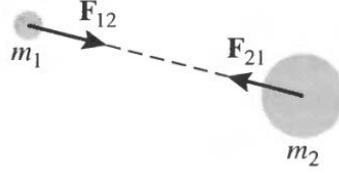
- **Segunda Ley de Newton** La fuerza neta actuando sobre un objeto es proporcional a la masa del objeto y su aceleración resultante.

$$\mathbf{F}_{\text{neta}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = m \mathbf{a} \quad (2.5)$$

- **Tercera Ley de Newton** Para toda acción hay una reacción igual y en sentido contrario.  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ .

#### 2.1.3.1. Ley de Gravitación Universal

Usando sus tres leyes de movimiento junto con la tercera ley de Kepler, Newton fue capaz de encontrar una expresión que describe las fuerzas que mantienen a los planetas en sus órbitas. Considerando el caso especial de una órbita *circular* descrita



**Figura 2.3:** Representación de la tercera Ley de Newton.

por un cuerpo de masa  $m$  alrededor de una masa mucho mayor  $M$  ( $M \gg m$ ), deducida en [7] y dada por:

$$\mathbf{F} = G \frac{M m}{r^3} \mathbf{r} \quad (2.6)$$

donde  $G = 6,673 \times 10^{-11} N m^2 kg^{-2}$  (**Constante de Gravitación Universal**) y  $r$  es la distancia entre ambos objetos.

Considerando los vectores de posición  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  del planeta y la estrella respectivamente, referidos a un origen  $\mathbf{O}$  sujeto a un marco de referencia inercial. El movimiento relativo del planeta con respecto a la estrella está dado por el vector  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ . Las fuerzas gravitacionales que actúan en la estrella y el planeta son [38]:

$$\mathbf{F}_1 = m\ddot{\mathbf{r}}_1 = +G \frac{M \cdot m}{r^3} \mathbf{r} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{F}_2 = M\ddot{\mathbf{r}}_2 = -G \frac{M \cdot m}{r^3} \mathbf{r} \quad (2.8)$$

respectivamente. Ahora considerando el movimiento del planeta con respecto a la estrella, si se escribe  $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1$ , se puede utilizar la ecuación 2.6 para obtener:

$$\ddot{\mathbf{r}} + G(M + m) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0 \quad (2.9)$$

Si se toma el producto de vectores de  $\mathbf{r}$  con la ecuación 2.9 se tiene  $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0$ , la cual puede ser integrada resultando:

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{h} \quad (2.10)$$

donde  $\mathbf{h}$  es un vector constante que es simultáneamente perpendicular a  $\mathbf{r}$  y  $\dot{\mathbf{r}}$ . Por lo tanto el movimiento del planeta alrededor de la estrella yace en un plano (plano orbital) perpendicular a la dirección definida por  $\mathbf{h}$ . Otra consecuencia de este resultado es que los vectores de posición y velocidad siempre se mantendrán en el mismo plano. La ecuación 2.10 corresponde a la integral del momento angular y  $\mathbf{h}$  representa el momento angular relativo específico, el cual es una cantidad que se conserva en órbitas planetarias.

La ecuación 2.9 está definida por un sistema en coordenadas polares  $(r, \theta)$  referido a un origen centrado en la estrella con una línea de referencia arbitraria correspondiente a  $\theta = 0$ . En coordenadas polares los vectores de posición, velocidad y aceleración pueden ser escritos como:

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}} \quad (2.11)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.12)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.13)$$

donde  $\hat{\mathbf{r}}$  y  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  denotan los vectores unitarios a lo largo y perpendicular al vector del radio respectivamente. Reemplazando la ecuación 2.12 en la ecuación 2.10 resulta  $\mathbf{h} = r^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{z}}$ , donde  $\hat{\mathbf{z}}$  es el vector unitario perpendicular al plano de la órbita a partir de la regla de la mano derecha respecto a  $\hat{\mathbf{r}}$  y  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ . La magnitud del vector resulta:

$$h = r^2\dot{\theta} \quad (2.14)$$

Por lo tanto, aunque  $r$  y  $\theta$  varían a medida que el planeta se mueve alrededor de la estrella, el valor de  $r^2\dot{\theta}$  se mantiene constante. El área  $dA$  barrida por el vector del radio estrella/planeta en un intervalo de tiempo  $dt$  esta dado en coordenadas polares por:

$$dA = \int_0^t r dr d\theta = \frac{1}{2}r^2 d\theta \quad (2.15)$$

y así

$$\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}h = \text{constante} \quad (2.16)$$

Lo que corresponde a un equivalente de la segunda ley de Kepler de movimiento planetario.

Luego, de la ecuación 2.16 es posible deducir que:

$$A = \frac{T}{2}h \quad (2.17)$$

con  $T$  el tiempo que tarda el planeta en describir la órbita completa. Reemplazando el área de la elipse dada por  $A = \pi ab$  se obtiene:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}a^3 \quad (2.18)$$

La ecuación corresponde a la tercera ley de Kepler de movimiento planetario. Implica que el período de la órbita del planeta es independiente de  $e$  y es sólo función de la suma de las masas de los cuerpos y  $a$ .

#### 2.1.4. Trabajo y Energía

La cantidad de energía (trabajo) necesario para levantar un objeto de masa  $m$  una altura  $h$  en contra de la fuerza gravitacional es igual al cambio en la *energía potencial* del sistema. El cambio de energía potencial resultante debido a un cambio de posición entre dos puntos está dado por:

$$U_f - U_i = \Delta U = - \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (2.19)$$

donde  $\mathbf{F}$  es el vector de fuerza,  $\mathbf{r}_i$  y  $\mathbf{r}_f$  son los vectores de posición iniciales y finales respectivamente, y  $d\mathbf{r}$  es el cambio infinitesimal en el vector posición para un sistema de coordenadas determinado. Si la fuerza gravitacional en  $m$  es debida a una masa  $M$  el cambio de energía potencial se vuelve:

$$\Delta U = - \int_{r_i}^{r_f} G \frac{M m}{r^2} dr, \quad (2.20)$$

De manera simplificada se tiene que:

$$U = -G \frac{M m}{r} \quad (2.21)$$

Escribiendo la integral del trabajo en función del tiempo se tiene [7]:

$$W = -\Delta U = \dots = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 \quad (2.22)$$

Pudiendo identificarse la variable:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \quad (2.23)$$

como la **energía cinética** del objeto. Considerando una partícula de masa  $m$  que tiene una velocidad inicial  $\mathbf{v}$  a una distancia  $r$  del centro de una masa mayor  $M$ . ¿Qué tan rápido debe moverse la masa para escapar a la fuerza gravitacional? Para

calcular la **velocidad de escape**, se debe utilizar conservación de la energía. La energía mecánica total inicial de la partícula está dada por:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} \quad (2.24)$$

Asumiendo que, en un caso crítico, la velocidad final de la masa será cero en el infinito alejado de  $M$ , implicaría que las energía cinética y potencial se volvería cero. Claramente, por conservación de la energía, la energía total de la partícula debe ser idénticamente cero en todo el tiempo. Entonces

$$\frac{1}{2}mv^2 = G\frac{Mm}{r} \quad (2.25)$$

y despejando el valor de la velocidad se obtiene:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad (2.26)$$

correspondiente a la velocidad de escape de la partícula. Este valor resulta de importancia para el trabajo, ya que para lograr que las órbitas simuladas permanezcan ligadas es necesario el cálculo de las condiciones iniciales del sistema, de modo que el planeta no alcance la velocidad de escape. Es importante considerar además que para el sistema que será simulado, tanto el planeta como la estrella se mueven en torno a un centro de masa común, por lo que la ecuación de fuerzas entre ambos cuerpos (Ecuación 2.6) debe ser calculada en los dos sentidos. En el Capítulo 3 se explica el procedimiento para ello.

### 2.1.5. Movimiento Baricéntrico

Con el propósito de determinar los efectos observables de una órbita planetaria en una estrella resulta útil considerar el movimiento en el centro de masa (o baricentro). El vector posición del centro de masa del sistema es:

$$\mathbf{R} = \frac{m\mathbf{r}_1 + M\mathbf{r}_2}{m + M}. \quad (2.27)$$

De 2.7 y 2.8 se tiene que:

$$\ddot{\mathbf{R}} = \frac{m\ddot{\mathbf{r}}_1 + M\ddot{\mathbf{r}}_2}{m + M} = 0 \quad (2.28)$$

y por integración directa  $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V} = \text{constante}$ . Estas ecuaciones implican que (1) el centro de masa es estacionario ( $\mathbf{V} = 0$ ), o (2) el sistema se está moviendo con velocidad constante ( $\mathbf{V} \neq 0$ ) en línea recta con respecto al origen  $O$ . Entonces, escribiendo  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}$  y  $\mathbf{R}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}$ , se tiene:

$$m\mathbf{R}_1 + M\mathbf{R}_2 = 0 \quad (2.29)$$

Luego, esto implica que (1)  $\mathbf{R}_1$  va siempre en la dirección opuesta a  $\mathbf{R}_2$ , y, por lo tanto que (2) el centro de masa está siempre en la línea que une  $M$  y  $m$ . Luego, considerando todo lo anterior se puede decir que:

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 = \mathbf{r} \quad (2.30)$$

donde  $r$  es la separación entre ambos cuerpos, y la distancias de la estrella y el planeta desde su centro de masa común está relacionado por  $m\mathbf{R}_1 = -M\mathbf{R}_2$  (ecuación 2.29). Por lo tanto:

$$\mathbf{R}_1 = \frac{M}{m+M}\mathbf{r} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{R}_2 = -\frac{m}{m+M}\mathbf{r} \quad (2.32)$$

## 2.2. Métodos de Detección de Exoplanetas

Mientras más grande y masivo es un objeto, se vuelve más facil de detectar. Los primeros exoplanetas descubiertos eran grandes, y en variados casos más masivos que Jupiter. Debido a la numerosa cantidad de cuerpos adicionales pequeños orbitando alrededor del Sol, los astrónomos se vieron forzados a decidir que tan pequeño un objeto puede ser, en tanto pueda clasificársele como un planeta.

Luego de mucho debate la definición final acordada de *planeta* que pertenece al sistema solar es un cuerpo celeste que:

- Orbita alrededor de una estrella o remanente de ella.
- Tiene suficiente masa para que su gravedad supere las fuerzas del cuerpo rígido, de manera que asuma una forma en equilibrio hidrostático (prácticamente esférica).

- Ha limpiado la vecindad de su órbita (o lo que es lo mismo, tiene dominancia orbital).

En el año 2003 la Unión Astronómica Internacional (IAU) estableció una definición de los atributos requeridos para que un objeto ubicado fuera de nuestro sistema solar sea considerado como un planeta [38]:

- Los objetos con masas reales por debajo de la masa límite para la fusión termonuclear del deuterio (actualmente calculada en 13 masas de Júpiter [ $M_J$ ] para objetos de metalicidad solar) que orbitan estrellas o remanentes estelares son planetas (no importa cómo se formaron). La masa mínima/tamaño requerido para que un objeto extrasolar sea considerado como un planeta debe ser la misma masa que la utilizada en nuestro sistema solar.
- Los objetos sub-estelares con masas reales por encima de la masa límite para la fusión termonuclear del deuterio son “enanas marrones”, no importa cómo se formaron ni dónde estén ubicados.
- Los objetos que flotan libremente en cúmulos de estrellas jóvenes con masas por debajo de la masa límite para la fusión termonuclear del deuterio no son planetas, pero son enanas marrones.

Habiendo definido el concepto de *planeta*, se exponen a continuación las ideas básicas detrás de las técnicas utilizadas actualmente para la detección directa o indirecta de exoplanetas.

### 2.2.1. Velocidad Radial

Entre los métodos desarrollados para la búsqueda de planetas, la técnica de Velocidades Radiales (RV) ha sido una de las más exitosa en términos de cantidad de descubrimientos (alrededor de 558 exoplanetas confirmados a Marzo de 2014 [44]), obteniendo sus primeros éxitos en los años 90 a partir del primer exoplaneta detectado (51 Pegasi b [6]). La idea básica detrás de ésta técnica es la medición del efecto Doppler inducido por la fuerza gravitacional producida por un planeta orbitante en la estrella.

Este efecto puede ser medido a partir de los corrimientos en longitudes de onda de

la estrella, que están relacionados con su velocidad radial relativa al observador:

$$\frac{v}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \quad (2.33)$$

donde  $v$  es la velocidad de la estrella en la dirección del observador y  $c$  es la velocidad de la luz.  $\Delta\lambda$  corresponde a la variación de la longitud de onda  $\lambda$ .

Seis parámetros determinan la forma funcional de las variaciones periódicas de velocidad radial y por lo tanto las observaciones de una órbita espectroscópica de la estrella [43]:  $P$ ,  $T_0$ ,  $K$ ,  $\omega_*$ ,  $e$  y  $\gamma$ , donde las primeras tres representan respectivamente el período, la fase y la amplitud de la curva RV, mientras que  $\omega_*$  (desfase) y  $e$  (excentricidad) determinan la curva de velocidad radial de un planeta orbitante, como se muestra en la Figura 2.4. Luego se tiene que:

$$V_r = K[\cos(\nu + \omega_*) + e \cos(\omega_*)] + \gamma \quad (2.34)$$

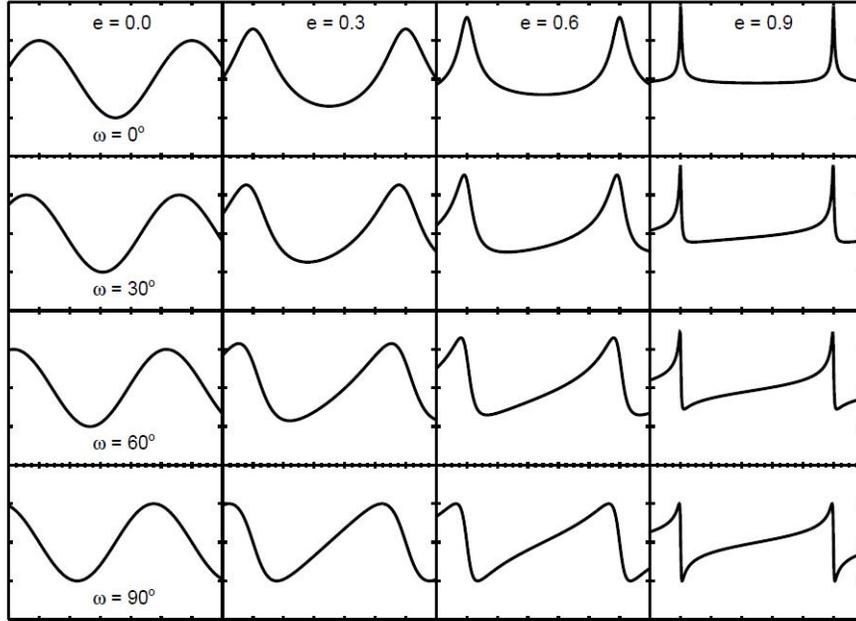
donde  $\nu$  está relacionado a  $P$ ,  $e$  y  $T_0$  relativo a  $E$ . La semi-amplitud de la señal en unidades de velocidad es  $K$ . La velocidad del centro de masa del sistema está dado por  $\gamma$ .

Para  $e = 0$  se tiene una órbita circular, por lo que  $T_0$  y  $\omega_*$  están indefinidas; en ese caso un valor nominal de  $\omega_0$  (como 0 o  $\pi/2$ ) establece  $T_0$  (alternativamente, se puede especificar el valor de uno de los ángulos en un tiempo determinado).

La caracterización de las órbitas de planetas no visibles e individuales, tales como exoplanetas es, en última instancia, un ejercicio de ajuste de velocidades radiales observadas a la familia de curvas de la Figura 2.4, para luego determinar los seis parámetros orbitales.

El método descrito tiene la ventaja de ser independiente de la distancia de la estrella que se mide, pero está sujeta a un límite mínimo en la masa del planeta. Se requieren señales a ruido muy buenas y en general se trabaja con estrellas de magnitudes aparentemente bajas. Lo anterior se debe a que la inclinación de la órbita es desconocida respecto a la línea de visión. Es por ello que el método es capaz de obtener solamente un masa aparente de:  $m \cdot \sin(i)$ .

Para la realización de las observaciones RV se utiliza un espectrógrafo, el cual es un instrumento utilizando para obtener y registrar un espectro astronómico. El espectrógrafo divide o dispersa la luz proveniente de un objeto en sus componentes



**Figura 2.4:** Efecto de de  $e$  y  $\omega_*$  en las curvas de velocidad radial. Cada columna muestra las curvas con  $e$  constante y cada fila con valor  $\omega_*$  constante [42].

de longitudes de onda, registrándolas para su análisis posterior. Un ejemplo muy representativo corresponde al espectrógrafo HARPS [34] de alta precisión instalado en 2002 en el telescopio de 3,6 metros de ESO en el observatorio de La Silla, Chile. Este instrumento permitió un avance significativo, reduciendo el nivel de ruido en mediciones de velocidades radiales para estrellas de tipo solar a un rango de  $1 \text{ ms}^{-1}$ .

### 2.2.2. Astrometría

Este método consiste en la medición de la posición de la estrella en el plano del cielo, de modo de detectar pequeñas variaciones inducidas por un planeta orbitante no observable con respecto a un fondo de estrellas fijas [42]. Considerando que tanto la estrella como el planeta orbitan alrededor de un centro de masa común, la amplitud esperada de la elipse descrita por la estrella, luego de corregir el paralaje (desplazamiento angular aparente de una estrella en el cielo debido al movimiento de la Tierra alrededor del Sol) y el movimiento propio (variación real de la posición de una estrella en el cielo debido al movimiento relativo entre ella y el Sol), está dado por:

$$a_* = \frac{a_p M_p}{M_*} \quad (2.35)$$

donde  $a_*$  y  $a_p$  corresponden a la distancia de la estrella y el planeta respecto al centro de masa del sistema.  $M_*$  y  $M_p$  son sus correspondientes masas. De la Ecuación 2.35 es posible deducir que esta técnica es más efectiva para planetas masivos orbitando a grandes distancias de la estrella. Planetas más cercanos son más difíciles de detectar a través de este método [18].

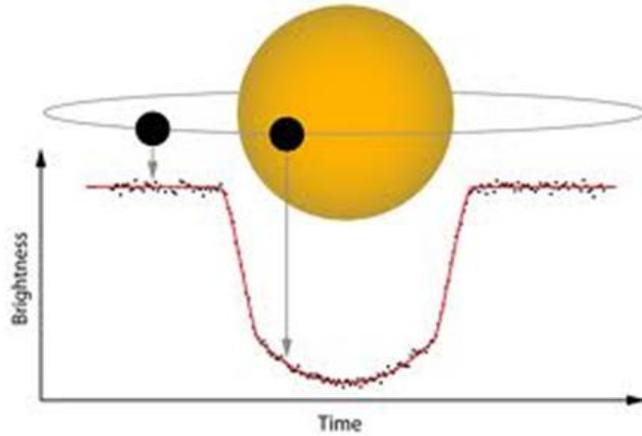
Dado que el método de RV está sujeto a un límite mínimo en la masa del planeta, es posible resolver esta ambigüedad gracias a la astrometría, debido a que mide dos componentes del movimiento orbital, haciendo y posible derivar la inclinación. Esto ayuda a clarificar el estado de un objeto individual y mejora la definición de la masa de un planeta, especialmente en límites superiores, donde la estadística es pobre [38].

### 2.2.3. Tránsitos

Un tránsito planetario se produce cuando el planeta se atraviesa entre la estrella y el observador, ocultando una porción del disco estelar y disminuyendo el brillo de ésta en un cierto porcentaje. Monitoreando estrellas durante un largo período de tiempo es posible detectar tránsitos, los cuales se producen cuando el plano orbital del planeta se encuentra alineado con la línea de observación.

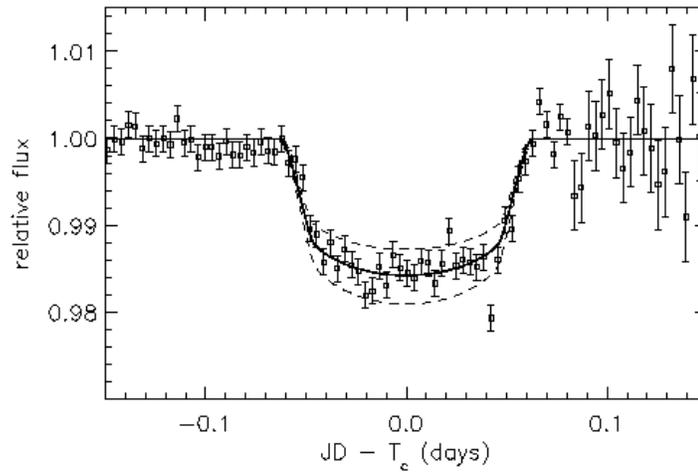
El monitoreo de estas estrellas se realiza con instrumentos fotométricos de precisión, captando durante varias semanas o meses la luz que proviene de ellas y buscando detectar pequeñas atenuaciones periódicas de brillo. La gráfica del brillo de una estrella en función del tiempo recibe el nombre de “Curva de Luminosidad” o simplemente “Curva de Luz” de la estrella. Una estrella que presenta tránsitos planetarios tendrá una curva de luz similar a la de la Figura 2.5.

Durante el tránsito, es posible también estudiar la atmósfera del planeta vía transmisión espectroscópica. Parte de la luz de la estrella atraviesa la atmósfera del planeta, superponiendo las características de absorción de los elementos presentes en el espectro estelar [18]. Otra ventaja de este método es que permite determinar el tamaño del planeta que orbita a la estrella, ya que la variación del brillo de ésta va en directa relación a las dimensiones del cuerpo acompañante.



**Figura 2.5:** Ejemplo de Curva de Luminosidad de un estrella durante el tránsito planetario, cuando planeta pasa frente a la estrella disminuye se detecta una disminución en el brillo de la misma.

Un ejemplo representativo del uso de esta técnica es el caso de la estrella HD209458, en la cual se observa una significativa disminución en el brillo de la estrella durante el tránsito.

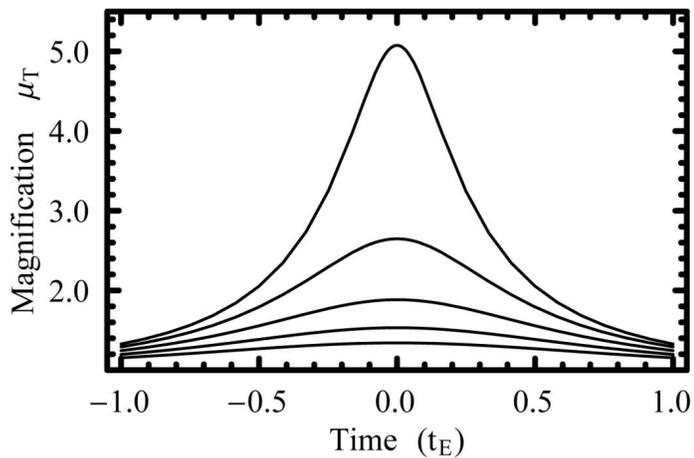


**Figura 2.6:** Curva de brillo de la estrella HD209458. Se denotan los tránsitos entre las fechas 9 y 16 de Septiembre de 1999 [8].

## 2.2.4. Microlente Gravitacional

El efecto de microlente se basa en la medición del aumento temporal del brillo aparente de un objeto, el cual es producido por la reorientación de la luz de la fuente en la dirección al observador, por algún objeto que interviene y actúa como una lente gravitacional. Este efecto se explica por la curvatura del espacio-tiempo producida por un objeto compacto, como predice la Relatividad General de Einstein [13]. Este principio puede ser utilizado para detectar planetas que inducen un aumento temporal del brillo de la fuente. Sin embargo, este efecto sólo se puede medir cuando dos estrellas, el origen y el sistema de lentes (una estrella anfitrión de un planeta), están más o menos alineados y el planeta produce un efecto de aumento adicional, que se superpone al producido por el efecto de lente estrella.

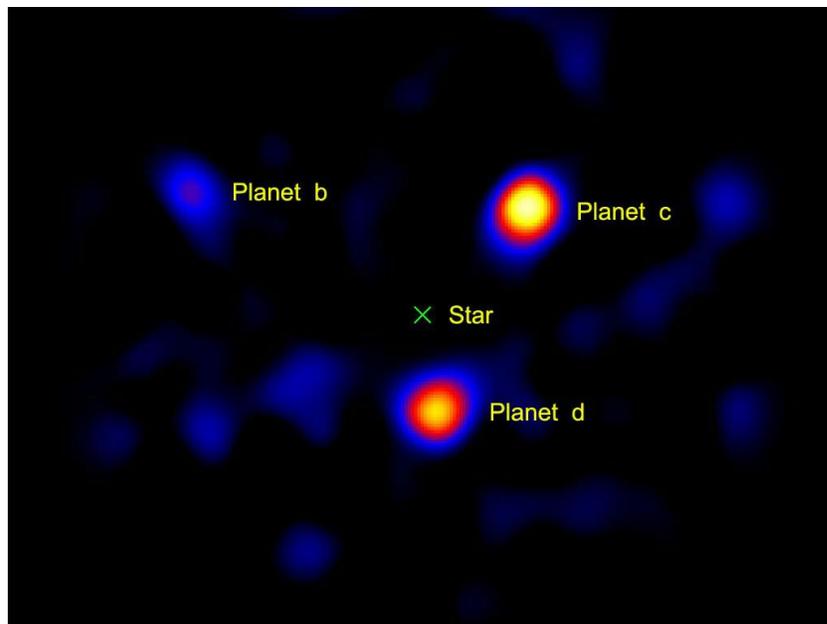
La principal ventaja de esta técnica es que los planetas se pueden detectar muy lejos de nosotros, hasta varios kiloparsecs, y con órbitas muy amplias. Las desventajas son la baja probabilidad de estos eventos (baja probabilidad de dos estrellas alineadas), y que el evento no se repetirá (ya que las estrellas se mueven una respecto a la otra).



**Figura 2.7:** Ejemplo de curvas de luz por microlensing, mostrando la magnificación total  $\mu_T$  como función del tiempo [25].

### 2.2.5. Imágenes

Las técnicas de detección presentadas en las secciones anteriores están basadas en métodos indirectos para detectar la presencia de un planeta. La detección directa de exoplanetas es extremadamente difícil debido a la pequeña separación angular entre el planeta y la estrella, y debido al gran contraste entre sus brillos. Sin embargo, con el uso de nuevas tecnologías ha sido posible la observación directa de cuerpos alrededor de varias estrellas. Un ejemplo es el uso del coronógrafo, que permite bloquear la luz de la estrella, permitiendo observar objetos débiles cerca de la misma.



**Figura 2.8:** Imagen de la luz de 3 planetas orbitando la estrella HR8799 a 120 años luz de distancia. Los tres planetas llamados HR8799b, c, d, se cree que son gigantes gaseosos como Jupiter, pero más masivos. Sus órbitas son de 24, 38 y 68 [AU] respectivamente.

Las primeras imágenes directas de planetas extrasolares se lograron hace unos pocos años, con el descubrimiento de un planeta alrededor de una *enana marrón* [9]. Más recientemente [28] se encontró un sistema de múltiples planetas alrededor de la estrella HR 8799 (Figura 2.8), todos ellos orbitando más allá de los 20 AU. Al mismo tiempo [19] se observó un planeta orbitando en el cinturón alrededor de la estrella Fomalhaut. A la fecha, varios otros sistemas han sido detectados a través de este método, usando diferentes instrumentos y técnicas. La ventaja principal de

esta técnica es que no está limitada por la masa del planeta y además es sensitiva a planetas en órbitas grandes, por lo tanto nos permiten sondear la parte externa de los sistemas planetarios, así como también medir directamente la emisión térmica y propiedades espectrales del planeta.

### **2.2.6. Sincronía**

Una estrella o remanente estelar que presenta regular variabilidad fotométrica periódica, tales como pulsares, enanas blancas pulsantes, estrellas binarias eclipsantes, subenanas calientes pulsantes, o incluso las estrellas con planetas en tránsito, pueden mostrar evidencia de un planeta acompañante a través de variaciones temporales en los fenómenos periódicos. Hay tres fuentes principales de estas variaciones: el efecto Doppler, tiempo de viaje de la luz, y las perturbaciones gravitacionales.

La primera de estas fuentes es exactamente análoga al método de velocidad radial, pero con cambios en las mediciones en frecuencias de algunas propiedades distintas de los fotones. Si el período de las pulsaciones o los eclipses se puede medir con suficiente precisión, entonces la interpretación de dichas variaciones es idéntica a la del método de velocidad radial.

El efecto del viaje de la luz en el tiempo se produce cuando la órbita reflejada de una estrella alrededor del centro de masas del sistema estrella/planeta es lo suficientemente grande para que el tiempo de viaje de luz adicional a través de esta órbita es detectable como una variación de tiempo. Este no es un fenómeno verdaderamente distinto del método de sincronización del cambio Doppler, ya que es esencialmente la acumulación de los efectos del periodo del desplazamiento Doppler que producen la anomalía temporal. Dependiendo del período de la variación intrínseca y el tamaño físico de la órbita reflejada de la estrella, cualquiera de estos efectos, o ambos, pueden ser detectables.

Los métodos anteriores se han empleado con gran éxito con los púlsares (a través de los tiempos de llegada del pulso) y sistemas binarios eclipsantes (por medio de la sincronización de la entrada y la salida del eclipse), y fue responsable de la detección de los primeros exoplanetas.

Por último, en el caso de un sistema eclipsante, como una binaria eclipsante o un

planeta en tránsito, cuerpos adicionales en el sistema perturbarán las órbitas de los cuerpos eclipsantes. Estas perturbaciones pueden ser especialmente grandes si el cuerpo perturbador está cerca de una resonancia media de movimiento con los demás cuerpos. Cuando se aplica a los sistemas de planetas en tránsito este método se llama variación de tiempo de tránsito y se ha utilizado con gran éxito.

## 2.3. Teoría de Detección

En lo que resta del capítulo se hará una introducción a la teoría correspondiente al método de detección, a través del Test de Hipótesis, dada su importancia para el trabajo realizado. Se abordará en detalle además la teoría correspondiente a la estimación Bayesiana, y de esa forma tener un acercamiento para la implementación de los métodos secuenciales de Monte Carlo.

La ciencia plantea explicaciones tentativas o hipótesis acerca de fenómenos naturales, demostrando o refutando estas hipótesis a través de la evidencia empírica, la modelización y la predicción. A nivel estadístico, el método científico se ha implementado mediante el desarrollo del método de inferencia llamado “Test de Hipótesis”, que a través de una muestra evalúa una afirmación hecha sobre un conjunto de valores o población.

En un problema de detección, una observación de una variable aleatoria (o señal)  $x$  es utilizada para tomar decisiones acerca de un número finito de resultados. Más específicamente, en una hipótesis  $M$ -aria de un problema, se asume que el espacio de parámetros está dado por  $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1 \cup \dots \cup \Theta_{M-1}$ , donde  $\Theta_i$  son mutuamente disjuntos. Correspondientemente a cada uno de estos sets de alternativas -o hipótesis- denotadas como [30]:

$$\begin{aligned} H_0 : \theta \in \Theta_0 & & (2.36) \\ H_1 : \theta \in \Theta_1 & \\ \vdots & \\ H_{M-1} : \theta \in \Theta_{M-1} & \end{aligned}$$

El parámetro  $\theta$  determina la distribución de una variable aleatoria  $x$  que toma valor en un espacio  $\mathcal{X}$  de acuerdo a la función de distribución  $F_X(x|\theta)$ . Basado en la observación  $x = x$  una decisión es tomada por un agente. En el caso más simple, el espacio de decisión es  $\Delta = \{\delta_0, \delta_2, \dots, \delta_{M-1}\}$ , con una opción correspondiente a cada hipótesis, de forma que  $\delta_i$  representa la decisión de “aceptar la hipótesis  $H_i^n$ ” (rechazando las demás).

### 2.3.1. Enfoque de Neyman-Pearson

El test de Neyman-Pearson se aplica en el clásico problema de decisión binaria, con  $H_0$  conocida como la *hipótesis nula*, mientras que  $H_1$  es la *hipótesis alternativa*. Sólo una de estas hipótesis disjuntas es cierta, y la tarea del agente que toma las decisiones es detectar cuál de las hipótesis es verdadera. El espacio de decisión es  $\Delta = \{\delta_0(\text{aceptar } H_0), \delta_1(\text{rechazar } H_0)\}$ .

La probabilidad de rechazar la hipótesis nula  $H_0$  cuando ésta es cierta se conoce como el **tamaño** de la regla  $\phi$ , y se denota como  $\alpha$ . Es llamado un *error de tipo I* o *falsa alarma* (falso positivo) y se denota por  $P_{FA}$ .

$$\alpha = \mathbb{P}[\text{Decidir por } H_1 / H_0 \text{ es verdadero}] = \mathbb{P}[\phi(x) = 1 / \theta_0] = \mathbb{E}_{\theta_0}[\phi(x)] = P_{FA} \quad (2.37)$$

La **potencia**, o **probabilidad de detección**, de una regla de decisión  $\phi$  es la probabilidad de aceptar la hipótesis alternativa  $H_1$ , cuando es cierta y es denotada como  $\beta$  y su notación estandar es  $P_D$ . El test de Neyman-Pearson está diseñado para maximizar la probabilidad de detección. La probabilidad de aceptar  $H_0$  cuando  $H_1$  es cierta es  $1 - \beta$ , resultado en un *error de tipo II*, o *fallo en la detección*.

$$\beta = \mathbb{P}[\text{Decidir por } H_1 / H_1 \text{ es verdadero}] = \mathbb{P}[\phi(x) = 1 / \theta_1] = \mathbb{E}_{\theta_1}[\phi(x)] = P_D \quad (2.38)$$

Por otro lado, el lema de Neyman-Pearson establece que dado  $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$  y que las distribuciones de  $X$  tienen densidades  $f_x(x|\theta)$ . Sea  $\nu$  el umbral de decisión. Cualquier test  $\phi(X)$  de la forma:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } f_x(x|\theta_1) > \nu f_x(x|\theta_0) \quad H_1 \text{ es verdadera} \\ \gamma & \text{si } f_x(x|\theta_1) = \nu f_x(x|\theta_0) \quad \text{"Adivinanza"} \\ 0 & \text{si } f_x(x|\theta_1) < \nu f_x(x|\theta_0) \quad H_0 \text{ es verdadera} \end{cases} \quad (2.39)$$

para  $0 \leq \gamma \leq 1$ , describe el resultado óptimo para distinguir las hipótesis  $H_0 : \theta = \theta_0$  y  $H_1 : \theta = \theta_1$ .

## 2.4. Inferencia Bayesiana e Integración de Monte Carlo

Distintas disciplinas científicas involucran el uso de un conjunto de observaciones para estimar cantidades desconocidas. Desde el punto de vista Bayesiano, el conocimiento disponible del sistema en estudio se puede utilizar para formular distribuciones *a priori* de la evolución de las cantidades desconocidas, y funciones de verosimilitud para relacionar éstas con las observaciones. En este contexto, la inferencia sobre las variables latentes del sistema se basa en la distribución *a posteriori* obtenida mediante el Teorema de Bayes. Adicionalmente, para realizar estimaciones en línea es necesario actualizar esta distribución posterior en forma secuencial cada vez que nuevas observaciones son recibidas.

Si las relaciones que definen los procesos de observación y evolución de estado están dadas por un modelo de espacio-estado lineal y Gaussiano, es posible obtener una expresión analítica óptima para la evolución de las distribuciones *a posteriori* a partir de la minimización del error cuadrático medio. La expresión corresponde al bien conocido Filtro de Kalman [20], el cual asume los supuestos anteriores para asegurar la existencia de soluciones analíticas al problema de estimación. Sin embargo, los procesos reales son en general bastante complejos como para ser descritos por este tipo de relaciones, puesto que generalmente involucran no-linealidades, ruidos multiplicativos, no Gaussianos, y alta dimensionalidad; en donde consecuentemente la sucesión de densidades posteriores a estimar son integrales multidimensionales con argumentos no lineales que no tienen forma explícita para el caso general. Este problema es conocido por distintos nombres dependiendo del área en que se presente, entre los que se encuentran filtrado Bayesiano, filtrado óptimo no-lineal, filtrado estocástico, e inferencia en línea [2]-[39]-[31].

Entre las técnicas utilizadas para resolver el problema del filtrado Bayesiano, una que ha captado la atención de la comunidad científica por su facilidad de implementación, y su amplio campo de aplicación es Filtro de Partículas (PF). Estos métodos son capaces de aproximar una secuencia de medidas de probabilidad de dimensión creciente mediante un conjunto de muestras ponderadas del espacio de estado, las que evolucionan en base al conocimiento previo del sistema y a las observaciones obtenidas del proceso. PF ha mostrado ser una alternativa superior al filtro extendido

de Kalman y al filtro unscented de Kalman para sistemas no lineales no Gaussianos, en el sentido de que con suficientes muestras se obtiene una estimación óptima del problema Bayesiano, convergiendo a su valor real de forma más exacta [35]. Una ventaja de PF es que sus propiedades de convergencia no dependen de la naturaleza del modelo subyacente del esquema de estimación, pudiendo incorporar no linealidades y procesos de innovación de diversas distribuciones. Las aplicaciones de PF están presentes en múltiples disciplinas, como seguimiento de trayectorias [35], detección de fallas [32], pronóstico de eventos catastróficos [33], y econometría [17].

En lo que sigue de este capítulo se presentará el problema de la estimación de estado desde el punto de vista Bayesiano y su solución óptima, para luego presentar dos estructuras que aproximan dicha solución.

### 2.4.1. Inferencia Bayesiana

El filtrado Bayesiano está definido como el proceso de usar observaciones ruidosas para estimar la densidad de probabilidad posterior del estado de un sistema dinámico no lineal y no necesariamente Gaussiano [16]. Además, dependiendo del conjunto de observaciones que se utilicen para la estimación, surgen también los conceptos de predicción y suavizado [24]. En vista de que la gran mayoría de los sistemas de interés considera observaciones secuenciales, en lo que sigue de éste trabajo se pondrá énfasis en los sistemas de tiempo discreto.

Se definirá en primer lugar el concepto de *estado*, el cual corresponde a las variables que describen la evolución de un sistema y relacionan las entradas con las salidas.

Ahora, el enfoque Bayesiano asume que la evolución de los estados del sistema en el tiempo puede ser descrita por un proceso de Markov, es decir:

$$x_0 \sim p_{x_0}(x) \tag{2.40}$$

$$x_{k+1}|x_k \sim p_{x_{k+1}|x_k}(x|x_k) \tag{2.41}$$

$$y_k|x_k \sim p_{y_k|x_k}(y|x_k) \tag{2.42}$$

donde al instante  $k$ ,  $x_k \in \mathcal{X}$  es el **estado del sistema**, e  $y_k \in \mathcal{Y}$  es el **proceso** (o resultado) **observado**.

Un caso particular de esta estructura son los sistemas factibles de ser representados a través de un conjunto de ecuaciones de diferencia no lineales de evolución de estado y observación, respectivamente:

$$x_{k+1} = f_k(x_k, \omega_k) \quad \text{estado} \quad (2.43)$$

$$y_k = h_k(x_k, v_k) \quad \text{observación} \quad (2.44)$$

donde

$$f_t(\cdot) : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_\omega} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x} \quad (2.45)$$

$$h_t(\cdot) : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_v} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y} \quad (2.46)$$

son funciones no lineales,  $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  y  $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  son secuencias de variables aleatorias independientes, llamadas ruido de proceso y ruido de observación respectivamente, y  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_\omega$  y  $n_v$  son respectivamente las dimensiones de  $x_k$ ,  $y_k$ ,  $\omega_k$  y  $v_k$ .

Además de la distribución *a posteriori*  $p(x_{0:k}|y_{1:k})$ , es de interés estimar recursivamente cantidades relacionandas a ésta, tales como la densidad de filtrado  $p(x_k|y_{1:k})$ , la densidad de predicción  $p(x_\tau|y_{1:k})$ ,  $\tau > k$ , y las esperanzas:

$$I(\phi) = \mathbb{E}_{p(x_{0:k}|y_{1:k})} \{\phi(x_{0:k})\} = \int_{\mathcal{X}^{(k+1)}} \phi(x_{0:k}) p(x_{0:k}|y_{1:k}) dx_{0:k} \quad (2.47)$$

para alguna función de interés  $\phi : \mathcal{X}^{(k+1)} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\phi}$ , integrable con respecto a  $p(x_{0:k}|y_{1:k})$ . Estas esperanzas permiten representar -al menos- todos los momentos del proceso  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  mediante el uso de determinadas funciones  $\phi(\cdot)$ .

Con el fin de resolver el problema de estimación de estas cantidades, considérese que la ecuación de evolución de estado 2.41 define la densidad *a priori* del proceso  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , mientras que la ecuación de observación 2.42 define la función de verosimilitud, esto es:

$$p(x_{1:k}) = p(x_1) \prod_{j=1}^k p(x_j|x_{j-1}) \quad (2.48)$$

y

$$p(y_{1:k}|x_{1:y}) = p(x_1) \prod_{j=1}^k p(y_j|x_j). \quad (2.49)$$

En el contexto Bayesiano, la inferencia sobre  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  dado un conjunto de observaciones  $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , se puede expresar mediante la distribución *a posteriori*:

$$p(x_{1:k}|y_{1:k}) = \frac{p(y_{1:k}|x_{1:k})p(x_{1:k})}{p(y_{1:k})}, \quad (2.50)$$

donde

$$p(y_{1:k}) = \int_{\mathcal{X}^k} p(x_{1:k}, y_{1:k}) dx_{1:k}. \quad (2.51)$$

En aplicaciones que consideran la disponibilidad de observaciones en forma secuencial, es de interés contar con una relación recursiva para la densidad *a posteriori* 2.50, esta relación puede ser obtenida mediante el Teorema de Bayes de la forma:

$$\begin{aligned} p(x_{1:k}|y_{1:k}) &= p(y_{1:k}|x_{1:k}) \frac{p(x_{1:k})}{p(y_{1:k})} \\ &= p(y_{1:k-1}|x_{1:k}) \frac{p(x_{1:k})p(y_k|x_k)}{p(y_{1:k-1})p(y_k|y_{1:k-1})} \\ &= p(x_{1:k}|y_{1:k-1}) \frac{p(y_k|x_k)}{p(y_k|y_{1:k-1})} \\ &= p(x_{1:k-1}|y_{1:k-1}) \frac{p(x_k|x_{k-1})p(y_k|x_k)}{p(y_k|y_{1:k-1})}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

donde:

$$p(y_k|y_{1:k-1}) = \int_{\mathcal{X}^2} p(y_k, x_k)p(x_k|x_{k-1})p(x_{k-1}|y_{1:k-1})dx_{k-1:k}. \quad (2.53)$$

Otro resultado importante es la forma recursiva para la densidad marginal  $p(x_k|y_{1:k})$  pues en general interesa estimar el estado actual y no todo el camino recorrido por éste. Esta relación es derivada mediante dos etapas: predicción y actualización. La primera de éstas consiste en estimar  $p(x_{0:k}|y_{1:k-1})$  suponiendo  $p(x_{0:k-1}|y_{1:k-1})$  conocida, lo cual es posible considerando la densidad de evolución de estado  $p(x_k|x_{k-1})$  dada por 2.43, y la relación de Chapman-Kolmogorov. De esta forma es posible expresar  $p(x_k|y_{1:k-1})$  como:

$$p(x_k|y_{1:k-1}) = \int_{\mathcal{X}} p(x_k, x_{k-1})p(x_{k-1}|y_{1:k-1})dx_{k-1} \quad (2.54)$$

Notar que en 2.54 se asumió que  $p(x_k|x_{0:k-1}, y_{1:k-1}) = p(x_k|x_{k-1})$  ya que 2.43 y las estadísticas de  $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  definen en forma única a  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  como un proceso de Markov de primer orden.

Por otro lado, la etapa de actualización consiste en incorporar la información recibida para mejorar la estimación de  $x_k$  realizada en la etapa de predicción. En este sentido,

evaluando la densidad de observación  $p(y|x_k)$  -obtenida de 2.43- en la muestra  $y_k$ , y utilizando el Teorema de Bayes, se tiene:

$$\begin{aligned}
 p(x_k|y_{1:k}) &= p(y_{1:k}|x_k) \frac{p(x_k)}{p(y_{1:k})} \\
 &= p(y_k|x_k)p(y_{1:k-1}|x_k) \frac{p(x_k)}{p(y_k|y_{1:k-1})p(y_{1:k-1})} \\
 &= p(y_k|x_k) \frac{p(x_k|y_{1:k-1})}{p(y_k|y_{1:k-1})}.
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

En aplicaciones de tiempo real, o bien cuando los recursos computacionales son limitados, no es de interés estimar valores pasados del estado, por esta razón el cálculo de la densidad  $p(x_k|y_{1:k})$  es preferido por sobre  $p(x_{0:k}|y_{1:k})$ . Las relaciones 2.52 y 2.53 representan la base para la solución óptima de estimación Bayesiana. Sin embargo, debido a la complejidad de la constante de normalización  $p(y_k|y_{1:k-1})$ , las densidades  $p(y_{1:k}|x_{1:k})$  y  $p(x_{1:k})$ , e  $I(\phi)$ , la propagación de la densidad posterior es, en general, sólo una solución conceptual y muchas veces no puede ser calculada en forma explícita. Soluciones analíticas como el filtro de Kalman existirán en casos restringidos, básicamente imponiendo Gaussianidad y linealidad, mientras que en los casos en que la solución óptima no es deducible, es posible implementar métodos aproximados como el filtro de Kalman extendido, el filtro *unscented* de Kalman, métodos en Grilla, y los métodos secuenciales de Monte Carlo. En lo que sigue de este capítulo se hará revisión del filtro de partículas en la estimación de parámetros.

## 2.4.2. Métodos Secuenciales de Monte Carlo: Filtro de Partículas

Métodos convencionales de Monte Carlo como Markov Chain Monte Carlo (MCMC) han sido extensamente usados para aproximar integrales y densidades de probabilidad. Sin embargo, su uso en el problema de inferencia Bayesiana no es directo, ya que este involucra una secuencia de densidades de probabilidad variantes en el tiempo, mientras que MCMC asume que la densidad objetivo es invariante. Por esta razón, es necesario contar con una versión secuencial de los métodos de Monte Carlo que permita incorporar las observaciones para mejorar las estimaciones realizadas en forma recursiva.

Una herramienta que enfrenta este problema es el filtro de partículas (FP), una

técnica numérica para aproximar integrales multidimensionales c.r.a una secuencia de medidas de probabilidad [10]. Suponiendo que la secuencia de densidades que se desea aproximar es  $\{\pi_k(x_{0:k})\}_{k \geq 1}$ , donde  $\forall k$   $\pi_k(x_{0:k})$  está definido en un espacio medible  $(\mathcal{X}^{k+1}, \Sigma_{k+1})$  y puede ser evaluada punto a punto salvo una constante de normalización, la implementación del filtro de partículas consiste en generar una colección de  $N \gg 1$  muestras aleatorias ponderadas  $\{\omega_k^{(i)}, x_{0:k}^{(i)}\}_{k=1 \dots N}$ ,  $\omega_k^{(i)} \geq 0, \forall i, k$ ; que permitan aproximar  $\pi_k(x_{0:k}), \forall k$  por la distribución empírica:

$$\pi_k^N(x_{0:k}) = \sum_{i=1}^N \omega_k^{(i)} \delta_{x_{0:k}^{(i)}}(x_{0:k}), \quad (2.56)$$

donde  $\delta_\alpha(\cdot)$  es el delta de Dirac centrado en  $\alpha$ .

Para resolver el problema de aproximación de esperanzas en el contexto de inferencia Bayesiana, se debe considerar que la distribución objetivo  $\pi_k(x_{0:k}) = p(x_{0:k}|y_{1:k})$  es la fdp posterior de  $x_{0:k}$  y reemplaza la distribución empírica 2.56 en 2.47. Con esta sustitución, las esperanzas pueden ser aproximadas mediante [3]:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}^{k+1}} \phi_k(x_{0:k}) \pi_k(x_{0:k}) dx_{0:k} &\simeq \int_{\mathcal{X}^{k+1}} \phi_k(x_{0:k}) \pi_k^N(x_{0:k}) dx_{0:k} & (2.57) \\ &= \int_{\mathcal{X}^{k+1}} \phi_k(x_{0:k}) \sum_{i=1}^N \omega_k^{(i)} \delta_{x_{0:k}^{(i)}}(x_{0:k}) dx_{0:k} \\ &= \sum_{i=1}^N \omega_k^{(i)} \phi_k(x_{0:k}^{(i)}). \end{aligned}$$

Con estas relaciones, el problema de inferencia Bayesiana se reduce a la selección secuencial de las muestras y sus respectivos pesos tal que la sumatoria en la Ecuación 2.57 converja a la integral en 2.47. El algoritmo basado en PF más básico que resuelve este problema es el remuestreo secuencial de importancia (SIR).

Además, una ventaja importante de los enfoques basados en PF, es su alta flexibilidad de implementación, permitiendo la incorporación de diversas técnicas para mejorar su funcionamiento en problemas específicos, por ejemplo, lazos de corrección externa [33]-[40]

### 2.4.2.1. Muestreo de Importancia (IS)

El problema de aproximar la integral 2.47 puede ser resuelto mediante algoritmos de Monte Carlo, es decir, generando  $N$  caminos  $x_{0:k}^{(i)}$   $i = 1, \dots, N$  y ajustando sus pesos tal que su promedio tienda a la integral para  $N \rightarrow \infty$ . Una forma directa de resolver este problema es extraer las  $N$  muestras según  $p(x_{0:k}|y_{1:k})$  y realizar una estimación de Montecarlo de  $I(\phi)$  con pesos uniformes de las forma:

$$\hat{I}(\phi) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(x_{0:k}^{(i)}), x_{0:k}^{(i)} \sim p(x_{0:k}|y_{1:k}). \quad (2.58)$$

Sin embargo, los casos de interés son justamente en los que  $p(x_{0:k}|y_{1:k})$  no es conocida, o bien no es posible extraer muestras de ella.

Para evitar la extracción de muestras directamente de  $p(x_{0:k}|y_{1:k})$ , es posible suponer que existe una densidad  $q(x_{0:k}|y_{1:k})$  llamada densidad o función de importancia, de la cual es posible muestrear y evaluar puntualmente salvo una constante de normalización. Considerando esta nueva densidad,  $I(\phi)$  se puede escribir como [14]

$$\begin{aligned} I(\phi) &= \int_{\mathcal{X}^{k+1}} \phi(x_{0:k}) p(x_{0:k}|y_{1:k}) dx_{0:k} \\ &= \frac{\int_{\mathcal{X}^{k+1}} \phi(x_{0:k}) \omega(x_{0:k}) q(x_{0:k}|y_{1:k}) dx_{0:k}}{\int_{\mathcal{X}^{k+1}} \omega(x_{0:k}) q(x_{0:k}|y_{1:k}) dx_{0:k}}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

donde los pesos de importancia  $\omega(x_{0:k})$  están dados por la razón (derivada de Radon-Nikodym):

$$\omega(x_{0:k}) = \frac{p(x_{0:k}|y_{1:k})}{q(x_{0:k}|y_{1:k})} \quad (2.60)$$

claramente, para que estos pesos estén bien definidos es necesario que el soporte de  $q(\cdot|y_{1:k})$  contenga al soporte de  $p(\cdot|y_{1:k})$ . Notar además que el denominador de 2.59 permite que  $q(x_{0:k}|y_{1:k})$  no sea necesariamente una f.d.p.

Consecuentemente, mediante la obtención de  $N$  muestras extraídas según  $q(x_{0:k}|y_{1:k})$  es posible construir una aproximación de Monte Carlo de  $I(\phi)$  basado en 2.59, es decir:

$$\begin{aligned} \hat{I}(\phi) &= \frac{\sum_{i=1}^N \phi(x_{0:k}^{(i)}) \omega(x_{0:k}^{(i)})}{\sum_{i=1}^N \omega(x_{0:k}^{(i)})} \\ &= \sum_{i=1}^N \phi(x_{0:k}^{(i)}) \bar{\omega}(x_{0:k}^{(i)}), \end{aligned} \quad (2.61)$$

donde los pesos de importancia normalizados están dados por:

$$\bar{\omega}(x_{0:k}^{(i)}) = \frac{\omega(x_{0:k}^{(i)})}{\sum_{j=1}^N \omega(x_{0:k}^{(j)})} \quad (2.62)$$

Notar que para  $N$  finito, el estimador  $\hat{I}_\pi[\phi(x_{0:k})]$  es sesgado, pues es una razón de dos estimadores. Sin embargo, bajo ciertos supuestos la ley de los grandes números garantiza la consistencia asintótica de  $\hat{I}_\pi[\phi(x_{0:k})]$ , es decir,

$$\hat{\mathbb{E}}_\pi[\phi(x_{0:k})] \xrightarrow{c.s.} \mathbb{E}_\pi[\phi(x_{0:k})]. \quad (2.63)$$

Además, el teorema central del límite garantiza convergencia independiente de la dimensión del integrando. Para una explicación detallada referirse a [14].

El método de muestreo de importancia es ampliamente usado en los métodos de MC para reducir la varianza de estimación. La idea detrás de esta aplicación es aprovechar el hecho de que ciertos valores tienen un mayor impacto en la estimación que otros. En este caso, IS enfatiza la utilización de estos valores, lo cual -debido al uso de distribuciones no representativas del proceso- puede llevar a estimaciones sesgadas a no ser que se ponderen correctamente las estimaciones obtenidas según sus pesos de importancia.

Si bien el método de muestreo de importancia representa un enfoque simple para aproximar integrales definidas invariantes, no es adecuado dentro del contexto de estimación recursiva, ya que cada vez que se desee estimar  $\pi(x_{0:k}|y_{1:k})$  se necesita de todo el conjunto de valores  $y_{1:k}$ , haciendo el procedimiento computacionalmente ineficiente debido a la alta dimensionalidad de la densidad objetivo. Además, el uso de IS en el contexto de estimación recursiva ha dejado de ser manifiesto que la varianza de los pesos de las estimaciones divergen si no se incluyen rutinas de remuestreo [11]. En resumen, cada vez que una observación  $y_k$  es recibida, interesa simplemente recalcular los pesos y las muestras representativas de la densidad de filtrado de forma secuencial y sin degeneración de los pesos. En la siguiente subsección se presenta una alternativa de estimación resursiva basada en IS.

#### 2.4.2.2. Muestreo de Importancia Secuencial y Remuestreo

Para evitar la necesidad de altos recursos computacionales relacionados con la utilización de toda la secuencia  $y_{1:k}$  cada vez que se quiera estimar  $p(x_{0:k}|y_{1:k})$ , es posible

derivar una relación recursiva para la estimación de la densidad *a posteriori*, en la que en el instante  $k$  se conservan las muestras anteriores del estado  $\{x_{0:k-1}^{(i)}; i = 1, \dots, N\}$ , y sólo se extraen las muestras  $\{x_k^{(i)}; i = 1, \dots, N\}$  en base a la observación recibida  $y_k$ , y a la estimación anterior de la densidad de filtrado  $p(x_{0:k-1}|y_{1:k-1})$ . Adicionalmente, para solucionar el problema de degeneración de pesos es posible introducir un paso de remuestreo a la población de partículas, el que asegura una varianza mínima de los pesos, permitiendo que la densidad empírica  $\pi_k^N(x_{0:k}^{(i)})$  sea representativa de  $p(x_{0:k}|y_{1:k})$ .

Para asegurar que las muestras  $\{x_{0:k-1}^{(i)}; i = 1, \dots, N\}$  pueden ser conservadas para la estimación de  $\{x_{0:k}^{(i)}; i = 1, \dots, N\}$ , se debe disponer de una función de importancia  $q(x_{0:k}|y_{1:k})$  que admita a la función de importancia en el instante anterior  $q(x_{0:k-1}|y_{1:k-1})$  como distribución marginal, es decir:

$$q(x_{0:k}|y_{1:k}) = q(x_{0:k-1}|y_{1:k-1})q(x_k|x_{0:k-1}, y_{1:k}) \quad (2.64)$$

i.e. el muestreo de  $x_{0:k-1}$  desde  $q(x_{0:k-1}|y_{1:k-1})$  no depende de  $y_k$ , lo cual es bastante sencillo de obtener.

Con este supuesto para la función de importancia, es posible obtener una muestra  $x_{0:k}^{(i)}$  sin alterar la muestra anterior correspondiente  $x_{0:k-1}^{(i)}$ , esto es:

$$x_{0:k}^{(i)} = [x_{0:k-1}^{(i)}, x_k^{(i)}], \quad (2.65)$$

con

$$x_k^{(i)} \sim q(x_k|x_{0:k-1}^{(i)}). \quad (2.66)$$

También se necesita una relación recursiva para los pesos de importancia, la cual considerando 2.64, está dada por:

$$\bar{\omega}(x_{0:k}^{(i)}) \propto \bar{\omega}(x_{0:k-1}^{(i)}) \frac{p(y_k|x_k^{(i)})p(x_k^{(i)}|x_{k-1}^{(i)})}{q(x_k^{(i)}|x_{0:k-1}^{(i)}, y_{1:k})} \quad (2.67)$$

Un caso importante es cuando se considera la densidad *a priori* del estado como la función de importancia, es decir,  $q(x_{0:k}|y_{1:k}) = p(x_{0:k})$ . Con esta relación, la recursión para los pesos de importancia se puede expresar como:

$$\bar{\omega}(x_{0:k}^{(i)}) \propto \bar{\omega}(x_{0:k-1}^{(i)})p(y_k|x_{0:k}^{(i)}) \quad (2.68)$$

lo que implica que los pesos pueden ser ajustados en forma recursiva directamente de la obtención de nuevas mediciones evaluadas en la función de verosimilitud.

Este enfoque, conocido como Muestreo de Importancia Secuencial (SIS), resuelve el problema de estimación recursiva de manera mucho más eficiente que IS. Sin embargo, es bien sabido [11] que la distribución de los pesos de importancia en SIS se vuelve cada vez más disímil hasta el punto en que sólo una partícula tiene peso no nulo, lo cual no permite una representación acabada de la distribución *a posteriori*.

Para resolver este problema, el enfoque de Remuestreo de Importancia Secuencial (SIR) considera la estructura anterior para generar muestras recursivamente y ponderarlas de acuerdo a su verosimilitud, incorporando además un paso de remuestreo. En este paso se remueven las partículas con bajo peso -y por ende baja verosimilitud- para (i) generar nuevas partículas en una región donde la densidad objetivo es alta, y (ii) evitar el esfuerzo computacional perdido en la actualización de partículas que no son significativas para el esquema de estimación.

La pregunta de cuando es el mejor instante para ejecutar el *resampling* puede ser abordada considerando el criterio del tamaño efectivo de muestras  $N_{eff}$  introducido en [27] y definido en [23] como:

$$\begin{aligned} N_{eff} &= \frac{N}{1 + var_{p(\cdot|y_{1:k})}[\omega(x_{0:k})]} \\ &= \frac{N}{\mathbb{E}_{p(\cdot|y_{1:k})}[\omega(x_{0:k})^2]} \leq N \end{aligned} \quad (2.69)$$

$N_{eff}$  no puede ser calculado, sin embargo, una estimación  $\hat{N}_{eff}$  dada por [12] es:

$$\hat{N}_{eff} = \frac{\left(\sum_{i=1}^N \omega(x_{0:k}^{(i)})\right)^2}{\sum_{j=1}^N \left(\omega(x_{0:k}^{(j)})\right)^2} \quad (2.70)$$

Básicamente, cuando  $\hat{N}_{eff}$  cae bajo cierto umbral, la rutina de resamplero es ejecutada [36]. Uno de los métodos más usados es el enfoque multinomial [10], el cual consiste en extraer muestras (con reemplazo) del conjunto  $\{x_{0:k}^{(i)}\}_{i=1\dots N}$ , en donde cada muestra es elegida con probabilidad proporcional a su peso.

Una forma de obtener las nuevas muestras  $\{\hat{x}_{0:k}^{(i)}\}_{i=1\dots N}$  del conjunto de partículas  $\{x_{0:k}^{(i)}\}_{i=1\dots N}$  acorde a sus pesos es mediante:

$$\hat{x}_{0:k}^{(i)} = Inv(u_i), \quad i = 1\dots N \quad (2.71)$$

donde las muestras  $\{u_i\}_{i=1\dots N}$  son uniformemente distribuidas  $[0,1]$ , e  $Inv(u) = x$  es la inversa de la distribución empírica acumulada de  $x_k$ ,

$$\Pi_k^N = \int_{-\infty}^x \sum_{i=1}^N \bar{\omega}^{(i)} \delta_{x_{0:k}^{(i)}}(x) dx, \quad (2.72)$$

es decir,

$$Inv(u) \doteq x_{0:k}^{(i)} \iff u \in \left( \sum_{j=1}^{i-1} \omega(x_{0:k}^{(j)}), \sum_{j=1}^i \omega(x_{0:k}^{(j)}) \right] \quad (2.73)$$

Cabe destacar que en este esquema de remuestreo, los nuevos pesos serán uniformes, ya que las muestras fueron extraídas según la estimación de la propia estimación de la densidad *a posteriori* del estado.

Si bien el remuestreo es una herramienta fundamental para evitar la degeneración de las partículas, la aplicación del SIR conlleva consecuencias teóricas y prácticas [12]. Teóricamente, esta rutina de remuestreo remueve la independencia estadística de las muestras, por lo que importantes resultados de los algoritmos de Monte Carlo ya no se cumplen, sin embargo, en [5] se establece el teorema central del límite para  $\hat{I}(\phi)$  cuando SIR es aplicado en cada iteración. Por otro lado, desde el punto de vista práctico, el remuestreo -además de demandar recursos computacionales adicionales- no permite la propagación de las partículas en paralelo, pues al ocupar SIR, todas la partículas deben ser combinadas.

#### 2.4.2.3. PF en estimación de parámetros

En el contexto de la estimación de estado, es fundamental contar con un modelo representativo del sistema presentado 2.43, sin embargo, los parámetros del modelo generalmente son desconocidos, o bien varían durante rutinas de estimación para horizontes muy extensos. Es por esta razón que la identificación recursiva es necesaria en estas rutinas. Para abordar este tópico desde el punto de vista de PF, considérese la función de verosimilitud logarítmica del vector de parámetros  $\theta$ , condicional a las

observaciones  $y_{1:K}$  según:

$$\begin{aligned}
l(\theta) &= \log L(\theta) \\
&= \log p(y_{1:K}|\theta) \\
&= \log \prod_{k=1}^K p(y_k|y_{1:k-1}, \theta) \\
&= \sum_{k=1}^K \log p(y_k|y_{1:k}, \theta)
\end{aligned} \tag{2.74}$$

En general, la presencia de variables latentes en 2.43 hace que 2.74 sea una integral multidimensional cuya maximización no es directa, por lo que la determinación de  $\theta$  mediante máxima verosimilitud no puede ser realizada. Incluso si la maximización de  $p(y_k|y_{1:k-1}, \theta)$  fuese abordada con un enfoque numérico, por ejemplo, realizando una estimación de Monte Carlo de la forma:

$$p(y_k|y_{1:k-1}, \theta) \cong \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \omega_k^{(i)} y_k^i \tag{2.75}$$

el error de muestreo y el alto esfuerzo computacional relacionado hacen que el método de máxima verosimilitud pierda sentido de todas formas [11].

En estos casos, en [22] se propone la estimación Bayesiana de los parámetros del modelo, aumentando el vecto de estado  $x_k$  con los parámetros desconocidos  $\theta$  de la forma:

$$z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ \theta_k \end{bmatrix}, \tag{2.76}$$

con  $\theta_k = \theta$ , definiendo la evolución trivial de los parámetros  $\theta_k = \theta_{k-1}$ .

Mediante la densidad  $p(z_k|y_{1:k})$  es posible obtener las distribuciones posteriores tanto del estado como de los parámetros desconocidos. Los modelos de esta forma reciben el nombre de *Self-Organising State-Space Models* y varias aplicaciones de éstos pueden ser encontradas en [21]. Para poder ocupar esta formulación en conjunto con PF, es necesario que la evolución de  $\theta_k$  sea afectada por una fuente de incertidumbre, asegurando la existencia de su propia fdp no trivial.

#### 2.4.2.4. Evolución Artificial de Parámetros

Al considerar el estado variante en el tiempo [15] sugiere un enfoque para reducir la degeneración de las muestras mediante la incorporación de pequeñas perturbaciones a las partículas (llamadas *roughening penalties*) además de los ruidos inherentes del modelo. Esta idea ha sido extrapolada al problema de identificación de parámetros invariantes, donde -con la inclusión de perturbaciones aleatorias en el proceso de evolución de parámetros- estos son vistos como si fueran variantes en el tiempo, es decir, una “evolución artificial”.

La implementación de esta idea, según [26], considera la ecuación de estado de los parámetros como:

$$\theta_k = \theta_{k-1} + \varepsilon_k \tag{2.77}$$

$$\varepsilon_k \sim \mathcal{N}(0, W_k) \tag{2.78}$$

para una matriz de covarianza determinada  $W_k$  y donde  $\theta_{k-1}$  y  $\varepsilon_k$  son condicionalmente independientes dadas las observaciones hasta el instante  $k - 1$ . Ejemplos en donde la matriz de varianza es manipulada en función de cierta medida de eficiencia pueden ser encontrados en [32] y [40].

La incorporación de 2.77-2.78 en el modelo de evolución de estado permite que enfoques de filtro de partículas como el SIR puedan ser usados para estimar conjuntamente el estado no observable y los parámetros del sistema, sin sufrir degeneración de las muestras. Sin embargo, una desventaja relacionada con la implementación de este enfoque es que, al introducir fuentes de incertidumbre externas en la evolución de parámetros, las densidades resultantes para el estado original son más difusas que las densidades teóricas resultantes para el caso de parámetros fijos. En otras palabras, la consideración de un modelo donde los parámetros están expuestos a perturbaciones aleatorias artificiales, implica que la precisión de la inferencia sea limitada.

# Capítulo 3

## Metodología e Implementación

El presente capítulo se encuentra dividido en cuatro secciones principales en las cuales se expone una descripción minuciosa del trabajo realizado. En la primera sección se detallan los alcances del Trabajo de Memoria y los supuestos considerados en el desarrollo del mismo. La Sección 3.2 describe el proceso para llevar a cabo las simulaciones de orbitas extrasolares, obteniendo así los datos necesarios para cumplir con los objetivos propuestos.

La siguiente sección está referida a la implementación de un test de hipótesis que, dada la órbita de una estrella en particular con la presencia (o ausencia) de un planeta, sea capaz de determinar la existencia del mismo. Se propone además un análisis de las limitaciones correspondientes al test con respecto a los parámetros intrínsecos de los datos generados, a partir de las características del instrumento utilizado.

La última etapa del proyecto (Sección 3.4) corresponde a la utilización de métodos secuenciales de Monte Carlo. Se plantea obtener una estimación de la masa del planeta en el caso en que éste haya sido detectado, junto a su error de estimación asociado.

## 3.1. Descripción del Problema y Motivación

En el presente trabajo de memoria se propone una metodología de detección de exoplanetas a partir de datos de velocidad radial simulados, los cuales son procesados con el objetivo de determinar si la estrella observada posee un planeta orbital acompañante o no. Ello es posible a través del efecto que el planeta ejerce sobre la estrella dada la fuerza gravitacional entre ambos cuerpos, de esa forma la estrella también posee un desplazamiento orbital o *bamboleo* detectable a través de las observaciones. Teniendo conocimiento de la existencia del planeta, y a partir de la utilización de los métodos secuenciales de Monte Carlo, se propone una estimación certera de la masa real del cuerpo más pequeño, haciendo uso de una menor carga computacional al disminuir ya sea, el número de iteraciones del algoritmo, o el número de partículas utilizadas.

El precedente más significativo de este tema consiste en el desarrollo del problema utilizando Filtro de Kalman para la caracterización de órbitas exoplanetarias [37] a partir de datos de astrometría y velocidad radial. En el documento, bajo variadas simplificaciones al modelo, se obtiene una aproximación de las posiciones y velocidades del planeta y a través de la utilización del filtro de partículas se estima también la masa del mismo. En el desarrollo de este trabajo de memoria se propone la replicación de este estudio añadiendo el proceso de detección y la utilización de métodos secuenciales de Monte Carlo para la estimación de masas de exoplanetas, esperando obtener una cuantificación del error asociado entre la masa real y la estimada.

### 3.1.1. Supuestos y Simplificaciones Iniciales

Se consideran algunas hipótesis simplificadoras relacionadas al problema, facilitando el desarrollo del mismo, sin opacar los objetivos principales del trabajo y que permiten obtener los primeros resultados y análisis a un problema de una envergadura mucho mayor.

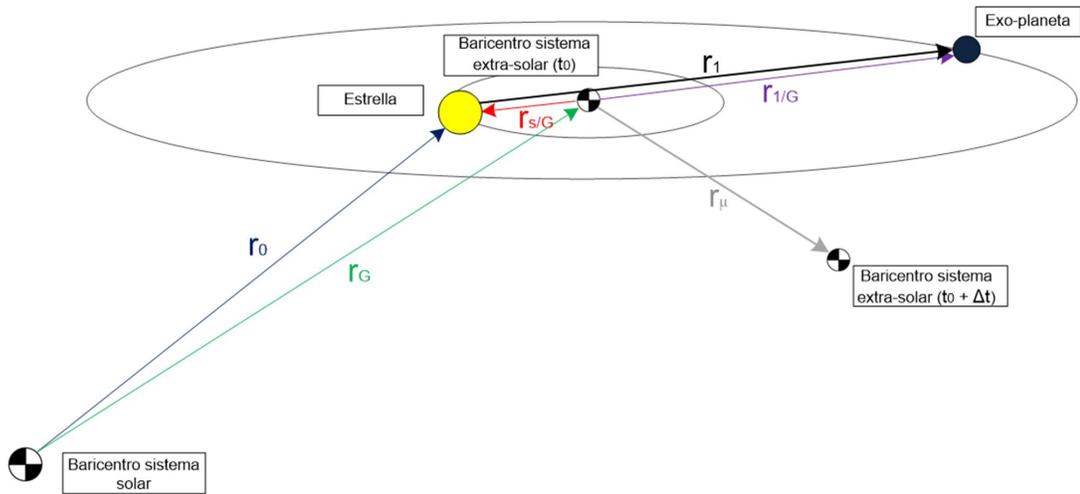
- Existe 0 o 1 planeta orbitando alrededor de la estrella observada.
- Las simulaciones consideraran únicamente órbitas circulares.
- La masa de la estrella observada es:  $1 [M_{\odot}]$ .
- Se utilizarán datos de velocidad radial (RV).

Durante el resto del capítulo se darán a conocer algunos supuestos adicionales y más específicos que debieron ser considerados en el desarrollo del trabajo.

### 3.1.2. Modelo Vectorial

Para la modelación del sistema a analizar se considera en primer lugar que las observaciones se realizan desde el baricentro del sistema solar, eliminando efectos de paralaje. Otro supuesto importante es la ausencia de movimiento propio entre ambos sistemas, por lo tanto,  $\dot{r}_\mu = 0$  (Figura 3.1). Luego la distancia entre el baricentro del sistema solar y el baricentro del sistema extrasolar se mantiene constante en el tiempo, permitiendo que la información obtenida a partir de las simulaciones sea más simple de interpretar.

El esquema del modelo utilizado se muestra en la Figura 3.1 en donde se consideran todos los vectores relevantes en la etapa de observación y que son descritos en la Tabla 3.1:



**Figura 3.1:** Esquema de observación utilizado. Desde el baricentro del sistema solar se realizan observaciones a la estrella, la cual posee una órbita propia debido a las fuerzas influidas por la presencia del planeta acompañante. En este caso  $\dot{r}_0 = V_r$ ,  $\dot{r}_G = 0$  y  $\dot{r}_\mu = 0$ .

En la Tabla 3.1 se describen cada uno de los vectores del modelo.

$\mathbf{r}_0$	Vector desde el baricentro del sistema solar a la estrella observada.
$\mathbf{r}_G$	Vector desde el baricentro del sistema solar al baricentro del sistema extra-solar en un tiempo $t = t_0$ (constante pues $\dot{r}_\mu=0$ )
$\mathbf{r}_{1/G}$	Vector desde el baricentro del sistema extra-solar al exoplaneta.
$\mathbf{r}_{s/G}$	Vector desde el baricentro del sistema extra-solar a la estrella observada.
$\mathbf{r}_1$	Vector desde la estrella observada al exoplaneta.
$\mathbf{r}_\mu$	Vector desde el baricentro del sistema extra-solar en un tiempo $t = t_0$ al baricentro del sistema extra-solar en un tiempo $t = t_0 + \Delta t$ .

**Tabla 3.1:** Descripción de vectores que componen el esquema de observación.

## 3.2. Simulación de Datos Orbitales

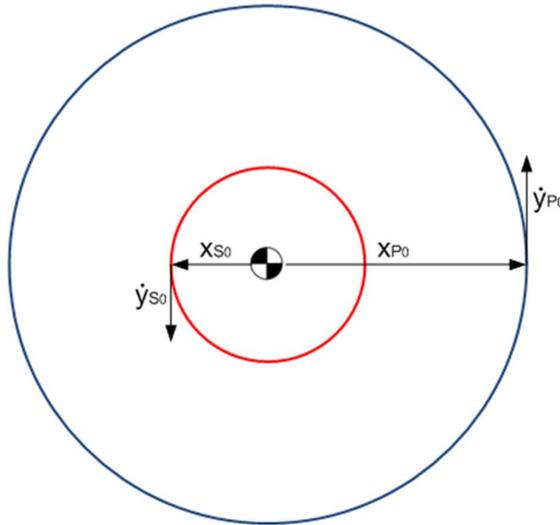
Haciendo uso de la teoría de mecánica celeste introducida en el capítulo anterior, se implementó un simulador de órbitas que depende conjuntamente de la masa del planeta que orbita una estrella de masa fija y del largo del semieje mayor de la órbita. Dado que se considera una órbita circular (Sección 3.1.1), la distancia entre ambos cuerpos permanece constante, obteniendo como respuesta las posiciones y velocidades tanto del planeta como de la estrella en el tiempo. Se describen entonces órbitas con un radio fijo alrededor del centro de masa del sistema.

Se optó por generar las órbitas de ambos cuerpos utilizando coordenadas cartesianas en dos dimensiones, para ello se propone un vector de estados  $X$  que representa las posiciones y velocidades en los ejes  $x$  e  $y$  (Ecuación 3.1). Luego se deduce la derivada del vector de estados  $\dot{X}$ , representando esta vez la velocidad y aceleración en ambos ejes. De esta forma, utilizando las fórmulas dadas por 2.7, es posible obtener los estados mencionados e integrarlos en el tiempo para determinar las posiciones y velocidades de las órbitas respecto a ambos ejes. El intervalo de tiempo de la simulación corresponde al periodo de la órbita del planeta alrededor de la estrella dado por la ecuación 2.18. Es importante mencionar que el sistema que se muestra a continuación se encuentra definido tanto para el planeta como para la estrella por separado, calculando así tanto el efecto inducido por el planeta sobre la estrella y a su vez el que ejerce la estrella sobre el cuerpo acompañante.

$$X = \begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \\ x_3 = y \\ x_4 = \dot{y} \end{cases} \Rightarrow \dot{X} = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{G \cdot M}{(x_1^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} x_1 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -\frac{G \cdot M}{(x_1^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} x_3 \end{cases} \quad (3.1)$$

Para que las órbitas permanezcan ligadas, es decir, el planeta no alcance la velocidad de escape haciendo que la órbita diverja (ecuación 2.26), se determinan las condiciones iniciales de posición y velocidad de ambos cuerpos a través del cálculo del potencial efectivo del sistema y la conservación del momento angular.

Inicialmente se considera que las posiciones de los astros se encuentran alineados en el eje  $x$ , por lo que las posiciones no poseen componente inicial en el eje  $y$ , mientras que sus velocidades tendrán sus componentes de forma contraria, tal como se muestra en la Figura 3.2.



**Figura 3.2:** Representación de las componentes iniciales en los ejes  $x$  e  $y$  correspondientes a la posición y velocidad del planeta ( $x_{P_0}$ ,  $\dot{y}_{P_0}$ ) y la estrella ( $x_{S_0}$ ,  $\dot{y}_{S_0}$ ).

El cálculo de las posiciones iniciales de ambos cuerpos están dados por las ecuaciones 2.31 y 2.32, dicho de otra forma:

$$x_{P_0} = \frac{d \cdot M}{m + M}, \quad x_{S_0} = \frac{-d \cdot m}{m + M}, \quad (3.2)$$

Siendo  $x_{P_0}$  y  $x_{S_0}$  las posiciones iniciales del planeta y de la estrella en el eje  $x$  respectivamente. Ahora, de la misma forma, las velocidades iniciales en el eje  $y$  están dadas por:

$$\dot{y}_{P_0} = \frac{v_0 \cdot M}{m + M}, \quad \dot{y}_{S_0} = \frac{-v_0 \cdot m}{m + M}, \quad (3.3)$$

con:

$$v_0 = d \cdot \dot{\theta}_0 \quad (3.4)$$

dada la Ecuación 2.12. Luego de la Ecuación 2.14 se tiene:

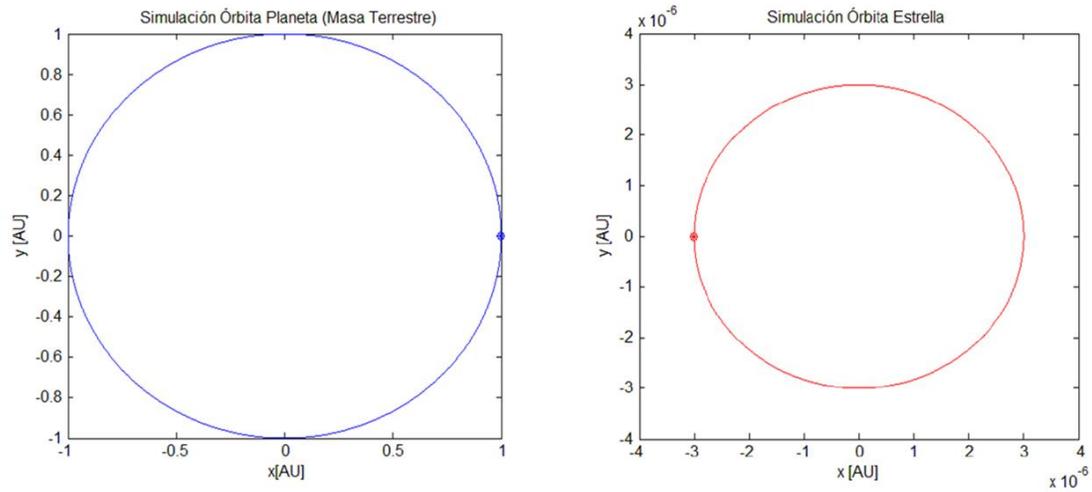
$$\dot{\theta}_0 = \frac{h}{d^2}, \quad (3.5)$$

donde:

$d$	Radio de la órbita circular que describe el planeta alrededor de la estrella [ $AU$ ].
$m$	Masa del planeta [ $M_J$ ].
$M$	Masa de la estrella [ $M_\odot$ ].
$v_0$	Velocidad orbital inicial [ $m/s$ ].
$h$	Momento angular relativo específico (Constante de Kepler) [ $m^2/s$ ].
$\dot{\theta}_0$	Velocidad angular inicial [ $rad/s$ ].

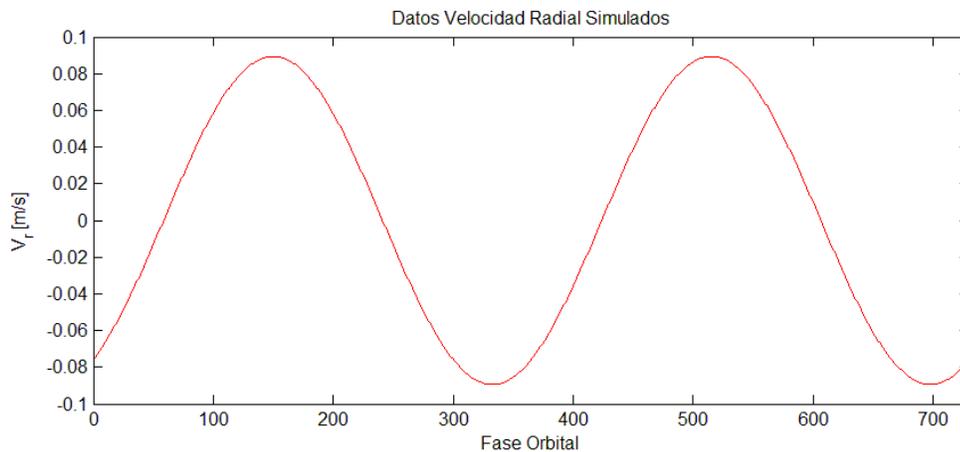
**Tabla 3.2:** Variables necesarias para el cálculo de las condiciones iniciales del sistema.

Se presenta en la Figura 3.3 un ejemplo de las posiciones de la estrella y del planeta en el tiempo dadas las características de la órbita terrestre ( $m = 3,1 \times 10^{-3}[M_J]$  y  $a = 1[AU]$ ):



**Figura 3.3:** Ejemplo de simulación de órbitas del planeta (izquierda) y estrella (derecha) en función de ambos ejes en coordenadas cartesianas (x e y). La coordenada (0,0) corresponde al centro de masa del sistema, ambos cuerpos se encuentran en lados opuestos a este punto.

Las simulaciones de velocidad de la estrella constituyen los datos de velocidad radial necesarios para el resto del trabajo. En la Figura 3.4 se muestra el gráfico de velocidad respecto al tiempo de la estrella observada en unidades de  $[m/s]$ , considerando el mismo ejemplo anterior.



**Figura 3.4:** Ejemplo de simulación de datos puros de velocidad radial de la estrella en unidades de  $[m/s]$ .

Dado que las simulaciones constituyen una representación de datos reales que serían posibles de obtener a través de observaciones a alguna estrella, es necesario integrar los ruidos de observación y medición correspondientes, modelados con un ruido Gaussiano de  $media = 0$  y  $\sigma \sim 1[m/s]$ . La desviación estándar empleada se determinó a partir de la información recopilada referente a tecnologías empleadas en la búsqueda de exoplanetas, especialmente la expuesta en [34], donde la tecnología de observación utilizada permite obtener datos dentro de ese rango de error.

### 3.3. Detección Exoplanetaria

Debido a que los datos de velocidad radial poseen forma sinusoidal centrada en cero (en caso de existir un planeta orbitante), se propone realizar un test de hipótesis compuesto en el cual se considera una hipótesis nula  $H_0$  que corresponde a **asumir que no existe un planeta orbitando la estrella observada**, mientras que la hipótesis alternativa está representada por el complemento de la hipótesis nula.

Los propósitos principales de la etapa de detección es la implementación de una metodología capaz de determinar la presencia (o ausencia) de un planeta acompañante orbitando una estrella en particular. El segundo objetivo corresponde a la obtención, considerando un ruido de observación fijo, del área de detección que define la presencia de un planeta, sujeto al valor de la masa del mismo y la distancia que separa a los cuerpos. Existe un compromiso entre ambas características; un planeta orbitando a una distancia mayor ejercerá un menor efecto en la estrella haciendolo más difícil de detectar, a su vez al tener una mayor masa requerirá de un menor esfuerzo para su detección (Sección 3.3.2). La curva obtenida será de utilidad en la etapa correspondiente a la estimación de las masas de exoplanetas dado que determina un rango más preciso de posibles casos donde se encuentra el valor real, permitiendo que se incurra en un menor gasto de recursos computacionales.

#### 3.3.1. Implementación del Detector

El procedimiento para la implementación del detector consiste, en primer lugar, de aplicar la etapa de simulación de datos de velocidad radial  $\dot{r}_0$  sin la presencia de un planeta acompañante. Dado el supuesto considerado respecto a los datos RV, se

obtendrá un vector de datos  $\hat{r}_0$  ruidosos de distribución  $\mathcal{N}(0, \sigma_v)$ , de los cuales se desea adquirir su valor cuadrático ( $\hat{r}_0^2$ ) lo que implica que estos poseerán una función de distribución de probabilidad diferente a la de  $\hat{r}_0$ .

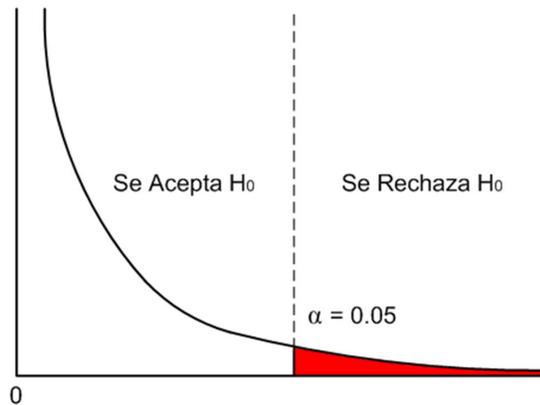
Por definición, si se tiene que, dado un conjunto de variables aleatorias  $Y_i, i = 1, \dots, n$  independientes y con distribución  $\mathcal{N}(0, 1)$ , la variable aleatoria

$$Z = \sum_{i=1}^n Y_i^2 \quad (3.6)$$

se dice que posee distribución *chi-cuadrado* con  $n$  grados de libertad, denotada como  $Z \sim \mathcal{X}_n^2$ .

Considerando intervalos de la señal de largo  $n_y$ , y dado que el ruido de observación posee distribución *Normal* centrada en cero y desviación estándar  $\sigma_v$ , se procede a normalizar el vector de datos (logrando una distribución *Normal* con varianza unitaria) y se eleva al cuadrado el valor de cada uno por separado, así individualmente los datos poseerán una distribución *chi-cuadrado* con grado de libertad unitario, dada la definición anteriormente expuesta.

Con los datos obtenidos, y dado que su distribución es conocida, es posible obtener su función de densidad de probabilidad. La hipótesis nula  $H_0$  está representada por esa fdp, con la que se implementa el test de hipótesis con un índice de confianza del 95 %, como se muestra en la Figura 3.5.



**Figura 3.5:** Función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria de distribución *chi-cuadrado* utilizada en la implementación de un test de hipótesis con un 95 % de confianza. El área en color rojo denota error de tipo I (Sección 2.3).

El siguiente paso consiste en realizar simulaciones de  $\dot{r}_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$ , esta vez con la existencia de un planeta orbitando la estrella. Considerando varios intervalos de largo  $n_x$  dentro del vector de datos, se obtiene un promedio de cada uno, cuya distribución será  $\mathcal{N}(0, \sigma_v^2/n_x)$ . Normalizando los datos y elevándolos al cuadrado se compara cada valor con respecto al umbral determinado, obteniendo así dos posibles resultados:

- Si una cantidad mínima de puntos cae fuera del área de aceptación de la fdp (valor mayor al del umbral de decisión), se considera que existe la presencia de un planeta orbitante.
- Si la mayoría de los puntos caen dentro del área de aceptación de la curva (valor menor al del umbral de decisión), entonces se considera que no hay un planeta presente.

Dado que para evaluar la presencia de un planeta se está trabajando con el promedio de un vector de datos de una función sinusoidal, se corre el riesgo de que la cantidad de datos escogido  $n_x$  coincida con el período de la señal, haciendo que el promedio obtenido sea muy cercano a cero y en consecuencia se determine un falso negativo como resultado de detección de la existencia de un planeta. Se decidió trabajar con la media cuadrática de los datos en vez de solo el promedio, reduciendo en gran medida el riesgo que ello ocurra ya que se trabajará sólo con datos de valor positivo.

Se establece un criterio de detección a partir de varias pruebas realizadas utilizando el método de detección descrito y a través de la base de datos de exoplanetas descubiertos por medio del método RV [44], obteniendo un valor mínimo de puntos que deben caer fuera de la curva para considerar que existe un planeta orbitando la estrella.

Resulta de importancia determinar la **probabilidad de detección** o **potencia** del test implementado debido a que, estando sujeto a datos ruidosos, el test de hipótesis posee una probabilidad tanto de acertar como de fallar cuando se declara que la hipótesis nula es rechazada. En este caso en particular la forma en la que se acepta a la hipótesis alternativa como cierta es cuando una cantidad establecida de datos  $\dot{r}_0^2$  superan el umbral determinado por la confiabilidad del test por lo que no se posee una distribución de probabilidad representativa de  $H_1$ . La única forma de calcular el poder del test es hacerlo empíricamente, i.e. para valores de masa crítica, determinar el número de aciertos que posee el test dependiendo si existe un planeta o no y determinar su precisión a través de una *matriz de confusión*. Los resultados

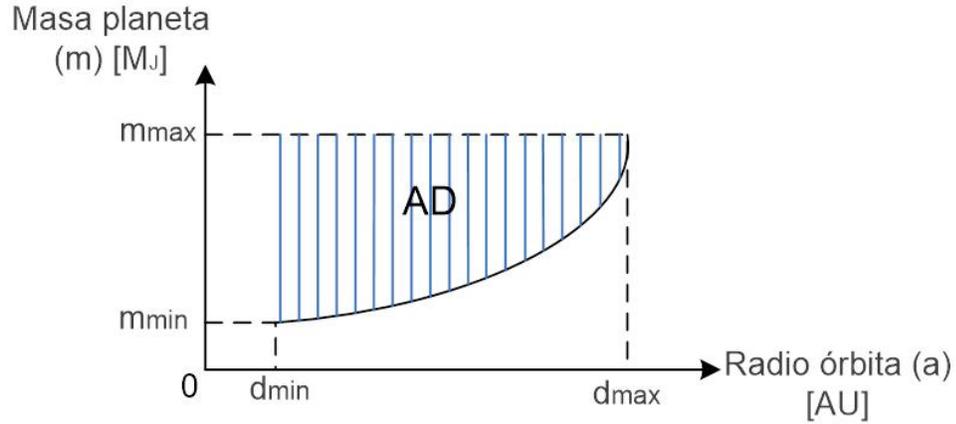
correspondientes se exponen en el Capítulo 4.

### 3.3.2. Área de Detección

Uno de los objetivos fundamentales del presente trabajo es el ahorro de recursos de procesamiento computacional, en particular en la etapa correspondiente a la estimación de la masa del planeta en el sistema exo-solar. Para ello se ha propuesto determinar (sujeto a un valor de varianza constante del ruido de observación) la curva que describe el valor mínimo de la masa del planeta necesaria, sujeta a cada valor de distancia entre ambos cuerpos, para obtener un resultado positivo en la detección. La curva también está sujeta al desempeño del test de hipótesis implementado, cuya potencia determina la probabilidad de asumir la presencia de un planeta cuando realmente existe.

A partir de una distancia de separación fija (radio orbital)  $d$ , para que la fuerza ejercida por el planeta sobre la estrella sea suficiente y el cuerpo acompañante pueda ser detectado, se requiere un valor mínimo de masa del cuerpo orbitante, y a medida que la distancia crece el valor de la masa mínima debe ser aún mayor. De forma contraria, si el radio de la órbita es pequeño la masa mínima necesaria del planeta es menor.

Realizando iteraciones de la etapa de detección y manteniendo fijo en primer lugar el valor de la distancia entre ambos cuerpos, se hace crecer el valor de la masa del planeta hasta el instante en que se obtenga la detección, para luego incrementar el valor de la distancia y repetir el proceso anterior hasta lograr nuevamente la detección del planeta, así sucesivamente. El rango de error utilizado en este estudio será de 1  $[m/s]$ , dado lo explicado en la Sección 2.2.1. La curva teórica que se plantea obtener se representa por la Figura 3.6:



**Figura 3.6:** Área de Detección teórica limitada por los valores mínimos y máximos tanto de la masa del planeta como del radio de la órbita, así como también de la potencia del test de hipótesis utilizado.

Se comienza por el supuesto de que se tienen valores de masa y distancia mínimos y máximos para el estudio. Se utilizan los siguientes:

$$\begin{aligned}
 m_{min} &= 1 \times 10^{-7} [M_J] & (3.7) \\
 m_{max} &= 100 [M_J] \\
 d_{min} &= 1 \times 10^{-2} [AU] \\
 d_{max} &= 10000 [AU]
 \end{aligned}$$

Inicialmente se consideran algunos valores muy extremos de los parámetros, esto es para tener en consideración todo el rango posible de valores de masa y distancia donde podría ocurrir la detección. En el capítulo siguiente se presenta la curva final obtenida.

### 3.4. Procedimiento de Estimación de Masa Planetaria

La última etapa del proyecto corresponde a la estimación de la masa del planeta que ya ha sido detectado en la etapa anterior. Dado que se tiene la certeza de la existencia de un planeta orbitando la estrella observada se considerará el supuesto que a través del uso de la técnica de *Imágenes Directas* (Sección 2.2.5) es posible obtener una estimación del radio de la órbita  $d$  (dado que se asumen órbitas circulares) a través de las observaciones. El planteamiento descrito no posee hasta ahora un desarrollo previo, dado que no hay precedentes de detección de exoplanetas utilizando ambas técnicas en conjunto (RV e Imágenes), por lo que el presente trabajo corresponde a una visión teórica que utiliza ambos métodos.

La metodología propuesta para la estimación de las masas corresponde a la utilización de los métodos secuenciales de Monte Carlo, y consiste en la estimación de los parámetros que representan las condiciones iniciales de una órbita en particular, dadas por las ecuaciones 3.2 y 3.3. Luego, se define el vector de estados de la Ecuación 3.8, donde  $x_{10}$  y  $\dot{x}_{10}$  representan la posición y velocidad iniciales de la estrella (*primary*) respectivamente. De la misma forma  $x_{20}$  y  $\dot{x}_{20}$  constituyen la dinámica inicial del planeta (*secondary*).

$$X = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-d \cdot m}{m + M} \\ \frac{d \cdot M}{m + M} \\ \frac{-v_0 \cdot m}{m + M} \\ \frac{v_0 \cdot M}{m + M} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Considerando lo anteriormente descrito en la Sección 3.2, los valores de  $v_0$  son constantes y dependientes de  $d$  y  $m$ . Dado que se asume una masa estelar  $M = 1[M_\odot]$  conocida y una estimación certera del semi-eje de la órbita del planeta  $d$ , el vector de estados que describe una órbita en particular sólo posee una incógnita que viene dada por la masa del planeta  $m$ .

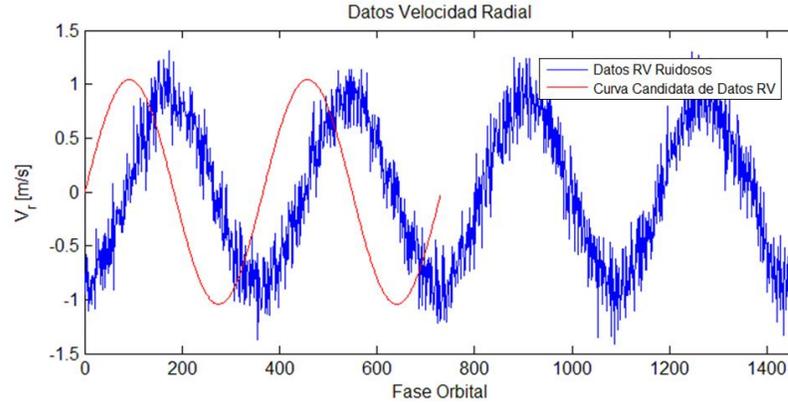
De manera no convencional, el propósito del filtro de partículas es promover variados escenarios de masa posibles y con cada uno generar una trayectoria orbital en el tiempo (no solo en un instante determinado), y por consiguiente la simulación de los

datos de velocidad radial asociados, sin ruido. El propósito es realizar una comparación entre los datos de la órbita simulados, los cuales se encuentran contaminados con ruido Gaussiano, y los generados con ayuda del filtro a partir de cada *apuesta* de trayectoria.

Así, obteniendo una medición del error entre las trayectorias (simulada y estimada) el filtro será capaz de obtener una estimación certera, *premiando* o *castigando* a las partículas dependiendo si el error de estimación disminuye o aumenta respectivamente, a través de la ecuación de verosimilitud del error (Ecuación 2.68). Dado que se posee un valor estimado del radio de la órbita del planeta, se utilizará la curva que representa el área de detección (Sección 3.3.2), obteniendo el valor mínimo de la masa para generar aleatoriamente los valores iniciales candidatos, considerando el valor mínimo otorgado por la curva y el valor máximo de masa que puede poseer un planeta. De esta forma se reduce el intervalo a analizar disminuyendo el número de partículas necesarias, o bien necesitando una menor cantidad de iteraciones del algoritmo.

Es importante considerar que no se tiene conocimiento del momento exacto en el cual comenzó la observación de la estrella, por lo que no conoce a priori qué intervalo de la senoide debe compararse con los datos de la velocidad radial propuestos. La forma en que se abordará el problema mencionado es analizar cómo la trayectoria estimada se condice con los datos observados, desplazando en una unidad de tiempo los datos de órbita estimada sobre la real y conservando el instante en el cual la correlación es máxima (Figura 3.7).

De esa forma es posible comparar con más precisión ambas curvas y obtener una medida del error cuadrático medio entre ellas, en unidades de  $[m^2/s^2]$ .



**Figura 3.7:** Representación del método utilizado para la estimación del error entre ambas curvas (real y estimada). La curva en color azul corresponde a los datos reales RV, mientras que la roja a los simulados por una partícula. Los datos simulados se comparan punto a punto con los reales y se conserva el instante en que la correlación es máxima, luego se calcula el ECM.

### 3.4.1. Diseño del Filtro de Partículas

Se ha diseñado el filtro de manera que cada partícula represente una realización del vector de estados de la Ecuación 3.8, condicional a cada valor de masa propuesto. Finalmente el objetivo principal del filtro de partículas es encontrar la mejor condición inicial para la simulación de una trayectoria libre de ruido.

El procedimiento consiste en generar de manera aleatoria un conjunto de valores de masa propuestos representados por una distribución *Gamma*, dentro de un intervalo que considera el escenario entre una masa mínima (obtenida a través del estudio del Área de Detección) y máxima posible. En cada iteración el filtro obtendrá un valor del error cuadrático medio para cada órbita generada en los distintos escenarios de masa, incrementando o disminuyendo los pesos de cada partícula a través de la ecuación de verosimilitud que posee una distribución *chi-cuadrado*. Finalmente se obtiene como respuesta la estimación de la órbita más certera a la real.

Como ecuación que describe al proceso se utilizará la *evolución artificial de parámetros*, incorporando pequeñas perturbaciones al sistema a través de un ruido Gaussiano  $\omega \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ , con  $\Sigma$  una matriz de covarianza diagonal. De esa forma el algoritmo “explora” a través del intervalo de posibles masas hasta encontrar una aproximación

cercana de la masa real.

$$\vec{X}(k+1) = |\vec{X}(k) + \omega(t)| \quad (3.9)$$

Para reducir la degeneración de las partículas se utiliza el *resampling* (Sección 2.4.2.2), removiendo las partículas con bajo peso (baja verosimilitud) y generando nuevas en una región donde la densidad de partículas es mayor. En este problema en especial la tasa de remuestreo es de valor unitario, en otras palabras, se realiza el *resampling* en todas las iteraciones. Lo anterior es debido a que el algoritmo se encarga de revisar todo el rango de posibles valores de masa planetaria (dada la ecuación del proceso), por lo que es muy fácil que ocurra una degeneración de las partículas con pesos muy bajos.

En este caso en particular no se posee una ecuación de observación para el filtro dado que, como se explicó anteriormente, se comparan punto a punto las curvas a través del cálculo de la correlación entre ellas. Para lograr el objetivo propuesto se define la función  $Y$ :

$$Y(k) = h(\vec{X}(k), \dot{r}_{1:k}, v(k)) \quad (3.10)$$

donde  $h$  es dependiente de las condiciones iniciales del sistema en el instante determinado, las mediciones de  $\dot{r}_0$  en la ventana de tiempo correspondiente a los datos generados, y a un ruido Gaussiano  $v$  que va asociado a la observación. Esta función se encarga de generar los datos de velocidad radial simulados y una trayectoria candidata sujeta al valor de las condiciones iniciales correspondientes al vector de estados. Finalmente habiendo calculado el vector donde la correlación de las señales es máxima, se obtiene la medida del error cuadrático medio asociado.

En el capítulo siguiente se expondrán los resultados obtenidos tanto para la detección como la estimación de las masas planetarias, realizando un análisis profundo respecto a los resultados obtenidos enfocados a la etapa de estimación.

# Capítulo 4

## Resultados y Análisis

En los capítulos anteriores se ha presentado la forma en que se abordará el problema planteado y los conocimientos necesarios para su desarrollo. Habiendo realizado las pruebas necesarias, se exponen en este capítulo los resultados obtenidos y los análisis pertinentes.

Es importante destacar que durante la implementación y realización de las pruebas asociadas al presente estudio, se trabajó siempre en unidades de *Días* [ $D$ ], *Unidades Astronómicas* [ $AU$ ], y *Masa Solar* [ $M_{\odot}$ ], no obstante, los resultados expuestos se presentan en las unidades correspondientes, es decir, datos de velocidad radial en [ $m/s$ ] y masas planetarias en unidades de *Masa de Jupiter* [ $M_J$ ].

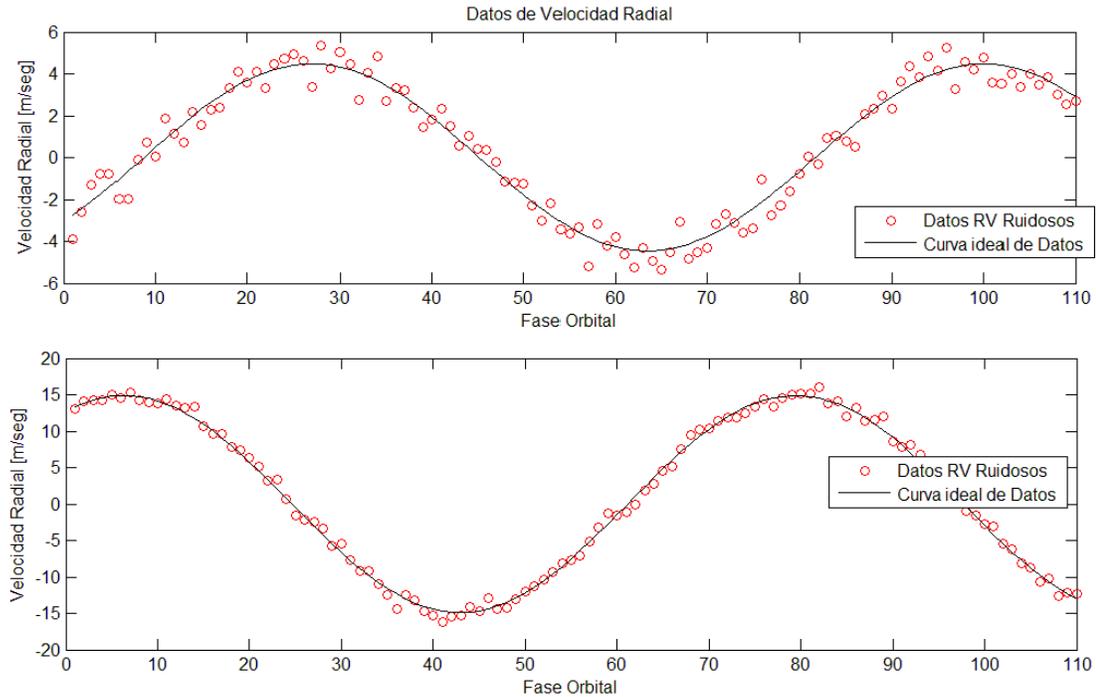
### 4.1. Simulación de Datos Orbitales

Considerando el Modelo Vectorial (Figura 3.1) y la información descrita en la Sección 3.2, los datos de velocidad radial corresponden a la derivada del vector  $r_0$ , es decir, a la observación de los cambios de posición de la estrella observada en el tiempo ( $\dot{r}_0$ ).

Se presentaron en el capítulo anterior los resultados a las simulaciones de las posiciones de ambos cuerpos (Figura 3.3) con respecto a ambos ejes coordenados, mientras que la Figura 3.4 corresponde a la simulación de datos RV en el tiempo sin los efectos de ruido asociado. Como resultado de la etapa de simulación de datos, se presenta un

ejemplo de datos de velocidad radial simulados considerando el ruido de observación definido anteriormente.

Las Figuras 4.1 representan un ejemplo de simulación de datos de velocidad radial con ruido de desviación estándar fija de  $1[m/s]$  y un radio orbital de  $1[AU]$ . En el primer caso la masa del planeta es de  $0,16[M_J]$ , mientras que en el segundo el valor de la masa es de  $0,5[M_J]$ .



**Figura 4.1:** Dos ejemplos de datos de velocidad radial con un ruido de observación Gaussiano y radio orbital fijo. La masa del planeta en el primer caso es de  $0,16[M_J]$  y en segundo es de  $0,5[M_J]$ .

Se puede observar que dado que la varianza del ruido considerado es fijo, a medida que la simulación de datos de velocidad radial posean mayor amplitud, en este caso aumentando el valor de la masa, el ruido será cada vez menos significativo, lo cual tiene sentido debido a que un mayor efecto provocado por el planeta sobre la estrella permite obtener observaciones más claras. Existe consistencia además desde el punto de vista de señal a ruido, dado que el cálculo del factor se realiza a partir del cociente entre la potencia de la señal y la del ruido de observación (Ecuación 4.1).

$$SNR = \frac{P_{signal}}{P_{noise}} \quad (4.1)$$

En este caso en particular la potencia del ruido es contante en ambos escenarios, sin embargo la potencia de la señal está directamente relacionada a la masa del planeta y por lo tanto a la amplitud de la curva, haciendo que el factor SNR sea mayor para masas más grandes, por lo que el ruido será menos significativo.

Se hace distinción además que el punto inicial de los datos es generado al azar ya que en una situación real de captura de datos no se posee conocimiento de las condiciones iniciales de la posición o velocidad de la estrella.

## 4.2. Detección de Exoplanetas

La implementación del Test de Hipótesis se realizó a partir del procemiento explicado en la Sección 3.3.1, donde se considera la Hipótesis nula:

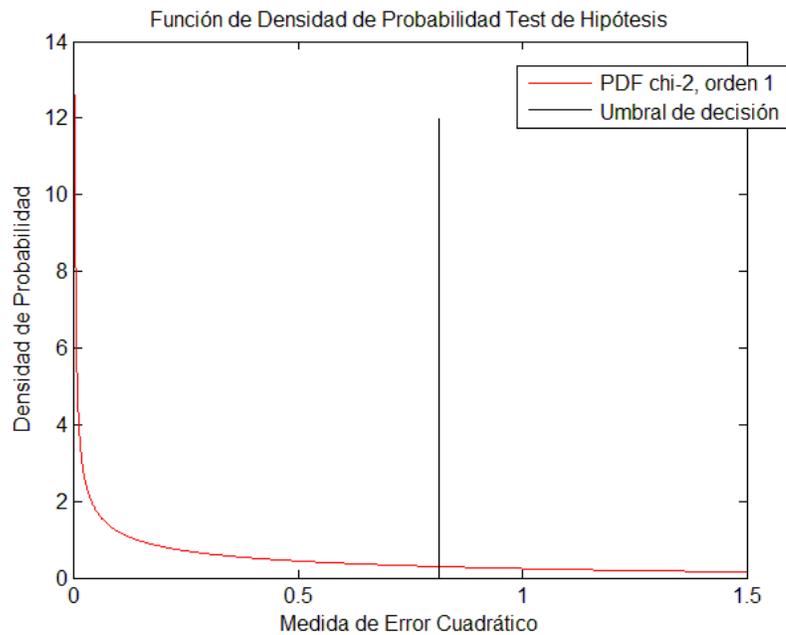
$H_0$  : *Asumir que no existe un planeta orbitando la estrella observada.*

Se simuló un vector de datos RV sin contar con la presencia de un planeta orbitante, por lo que el vector está constituido sólo por el ruido de observación. Normalizando cada valor y luego de elevándolos al cuadrado, se creó un histograma para obtener la fdp correspondiente, la cual se ajusta a una distribución *chi-cuadrado* con grado de libertad igual a uno.

Habiendo obtenido la distribución de probabilidad referente al test, se calcula el umbral que corresponde al 5% del área de la fdp. El valor determinado del umbral de decisión fue de 0,81275. Luego, el gráfico correpondiente al test de hipótesis, habiendo calculado este umbral, viene dado por la Figura 4.2.

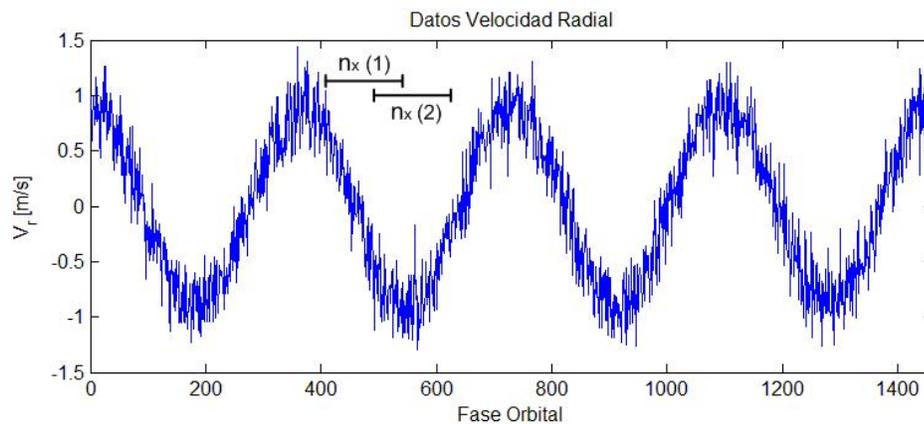
El siguiente paso implica nuevamente la simulación de datos  $\dot{r}_0$ , esta vez con la presencia de un planeta orbitando alrededor de la estrella.

Considerando lo explicado en la Sección 3.3.1, a partir de simulaciones de datos  $\dot{r}_0$  y tomando un intervalos de largo  $n_x$  (Figura 4.3), se observa si la verosimilitud de los promedios cuadráticos  $\bar{r}_0^2$  son menores o mayores que el valor del umbral de decisión.



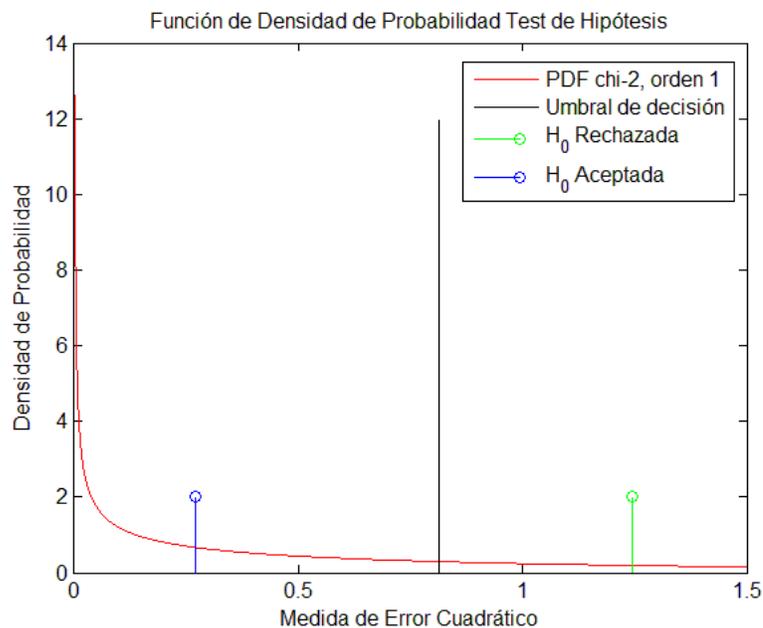
**Figura 4.2:** Función de densidad de probabilidad  $\chi^2$  utilizada en la implementación del test de hipótesis, con un índice de confianza del 95 %.

Si todos los puntos (o la gran mayoría) son menores que el umbral determinado, se considera que no existe la presencia de un planeta orbitando la estrella. Por otro lado, si un valor mínimo de puntos son mayores que el umbral, se determina que existe un planeta orbitante.



**Figura 4.3:** Representación de toma de intervalo de datos de largo  $n_x$ . Cada vector de datos es elevado al cuadrado punto a punto y luego se calcula la media. El valor obtenido en cada caso es comparado con el umbral de decisión.

Un ejemplo del funcionamiento del algoritmo de detección se encuentra ilustrado en la Figura 4.4 en donde se analizan dos casos para sistemas planetarios independientes, de radios orbitales iguales ( $10[AU]$ ) y masas de  $2[M_J]$  y  $0,5[M_J]$ . En el primer caso se rechaza la hipótesis nula (color verde) debido a que el promedio de la media cuadrática de un vector de los datos es mayor al umbral de decisión determinándose la existencia de un planeta orbitante. El valor calculado fue de  $1,2449[m^2/s^2]$ . Mientras que en el segundo caso (color azul) el valor obtenido fue de  $0,2697[m^2/s^2]$ , aceptándose la hipótesis nula por lo que se asume que no existe un planeta alrededor de la estrella.



**Figura 4.4:** Ejemplo de un caso de aceptación y rechazo de la hipótesis nula para dos sistemas con radios orbitales constantes y distintas masas.

La sensibilidad del test implementado, o sea, la cantidad mínima de veces que el valor de la media cuadrática de cada fragmento de los datos, es mayor que el valor crítico, determina el valor de masa de planeta más pequeño que es posible detectar. Dado que no existe un valor a priori de masa mínima se optó por utilizar los valores otorgados por la base de datos existente, observando los planetas de menor masa que han sido detectados con la técnica de Velocidades Radiales. Luego de la realización de variadas pruebas, se determinó que el valor mínimo de puntos que deben ser mayores al umbral de decisión es de 5, para que de esa forma sea posible detectar planetas lo suficientemente pequeños.

Habiendo generado el Test y evaluado los valores cuadráticos mencionados, disminuye la probabilidad de que al ocurrir el caso en que el largo del vector de datos sea de un valor muy cercano al período de la señal sinusoidal, haciendo que el valor promedio converja a cero, lo que daría como resultado que el Test determine que no hay presencia de un planeta cuando sí lo hay, o sea un *Fallo en la detección*.

Como se mencionó en el capítulo anterior, se cuantificó la potencia del test a través de pruebas empíricas para valores de masa crítica en donde se obtiene un mayor número de fallos en la detección. Para distintos valores de radio orbital, se realizaron múltiples pruebas para sets de  $N = 1000$  casos en los que existitía un planeta, a partir de masa crítica determinada para cada escenario. Se observó que para distintos valores del radio orbital, la cantidad de detecciones tendía a ser variable y no está sujeta a una tendencia respecto al largo del radio. Finalmente se optó por tomar el peor caso obtenido, el cual se refleja en la Tabla 4.1 que representa la matriz de confusión de las pruebas realizadas. Allí se reflejan los resultados de detección para 1000 casos donde existe un planeta con masa crítica  $m = 0,8436[M_J]$  y radio orbital  $d = 10[AU]$ . Además de otros 1000 casos sin la existencia de un planeta  $m = 0[M_J]$ .

	Se detectó	No se detectó
Existe planeta	948	52
No existe planeta	0	1000

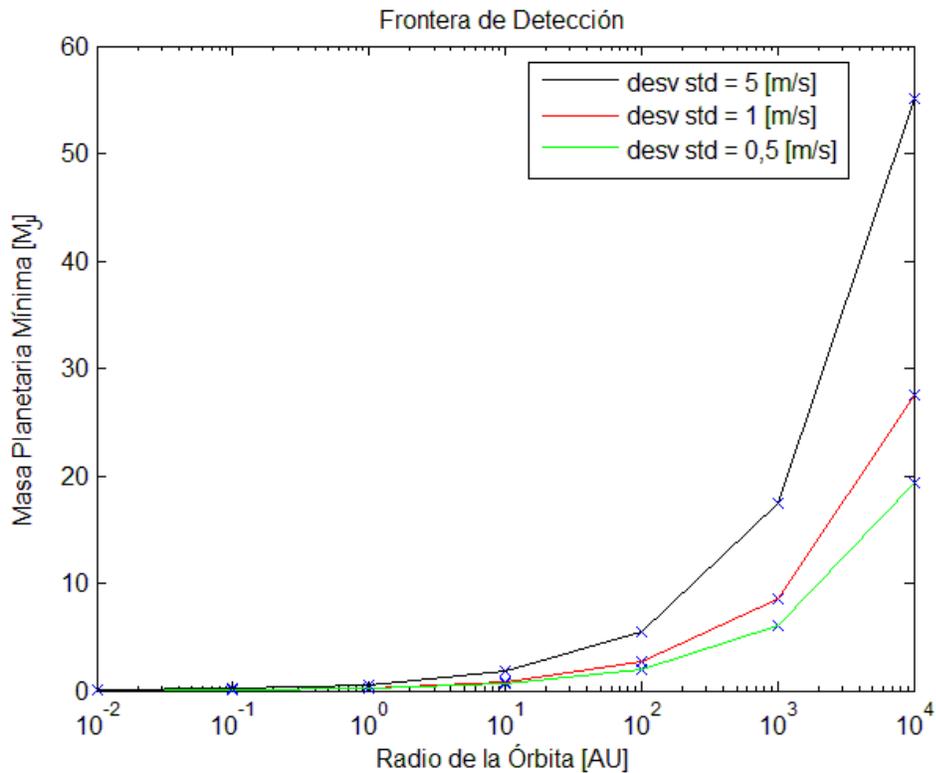
**Tabla 4.1:** Matriz de confusión que representa el peor caso a partir de pruebas de detección para distintos valores de masa crítica.

Luego, la precisión del test calculado a partir de la matriz de confusión es de 0,974; valor que equivale a la probabilidad de detección del test de hipótesis implementado. Entonces, en el peor caso,  $\beta = P_D = 0,974$  por lo que se considera que el sistema de detección implementado es lo suficientemente robusto para la obtención resultados concisos en el modelo de trabajo utilizado.

### 4.2.1. Frontera de Detección

Tomando en cuenta el procedimiento explicado en la Sección 3.3.2 se obtuvieron los valores de masa mínima necesarias para lograr detectar un planeta con un radio orbital particular. El procedimiento consistió en generar datos de velocidades radiales para un intervalo de posibles radios de órbitas y masas planetarias, conservando los puntos en la que se lograba la detección.

Sujeto a ruidos de distribución *Normal*  $\mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$ , para tres casos de ruido con desviaciones estándar  $\sigma_v = 0,5; 1$  y  $5 [m/s]$ , se muestran los resultados en la Figura 4.5, describiendo la frontera de detección para cada uno de los casos. Cada curva determina la masa mínima necesaria que debe poseer el planeta para cada uno de los radios posibles de la órbita. En otras palabras, cualquier valor de masa que se encuentre **sobre** su curva de masa mínima, el planeta asociado posee una alta probabilidad de ser detectado (sujeto a la potencia del test) a través del método propuesto.



**Figura 4.5:** Gráfico de curvas que representan el área de detección para cada caso de ruido de la señal, en unidades de  $[M_J]$  y  $[AU]$ . Los planetas cuyas características estén por sobre la curva podrán ser detectados.

Se observa que cada curva posee una representación muy similar a la propuesta en la Figura 3.6. El resultado es consistente debido a que al incrementar el valor del radio de la órbita planetaria, la masa requerida para la detección del planeta debe ser mayor. Se distingue además que dependiendo del valor de la desviación estándar del ruido, el valor de la masa necesaria para lograr detectar la presencia del planeta es mayor a medida que el ruido de observación es más grande.

En adelante se trabajará sólo con la curva que describe la frontera de detección asociada a  $\sigma = 1 [m/s]$  para la estimación de las masas planetarias (curva de color rojo en la Figura 4.5).

A partir de los puntos obtenidos, es posible determinar una función no lineal que describe el área de detección, encontrando los coeficientes del polinomio que determina el valor de la masa ( $m$ ) en función del radio orbital ( $d$ ). La aproximación obtenida fue:

$$m_{min} [M_J] = -4,7803 \times 10^{-11} \cdot d^6 + 5,3116 \times 10^{-7} \cdot d^5 - 5,3665 \times 10^{-4} \cdot d^4 + 5,3851 \times 10^{-2} \cdot d^3 - 5,5221 \times 10^{-1} \cdot d^2 + 7,5307 \times 10^{-1} \cdot d + 0,01332 \quad (4.2)$$

Esta ecuación será de utilidad en el proceso de estimación ya que permite definir el intervalo en el cual se encuentra el valor real de la masa, dado que el radio de la órbita se asume conocido. Se trabajó con un alto orden del polinomio ya que es necesario que la aproximación de la curva sea lo más certera posible.

### 4.3. Estimación de Masa Planetaria

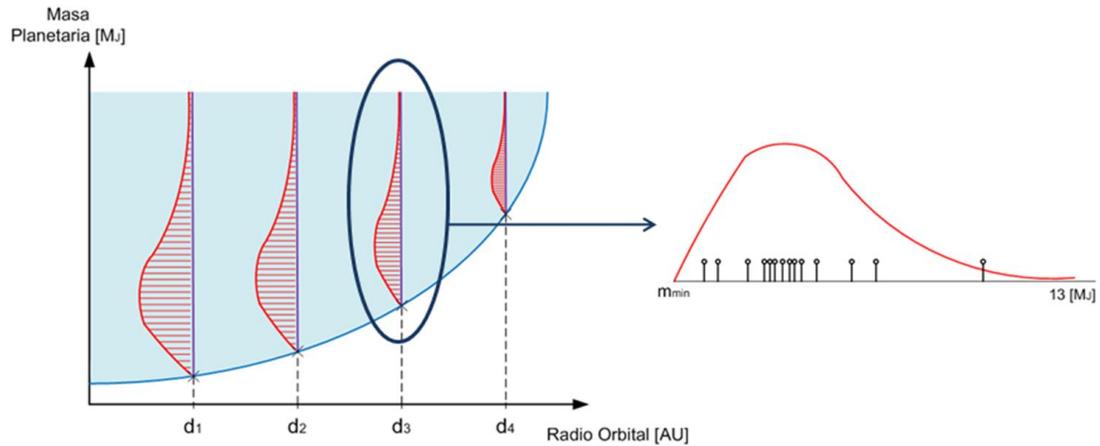
Una vez detectada la presencia de un exoplaneta (se ha rechazado la hipótesis nula  $H_0$ ) a partir de los datos de velocidad radial simulados y ya conocido el radio orbital (Método de *Imágenes*), se utiliza la curva de detección obtenida para determinar el rango de masas posibles del planeta. Luego, considerando una distribución de probabilidad particular, se determina una población inicial de partículas proponiendo variados escenarios de masa.

Para la generación de la población inicial de partículas se requiere una distribución de probabilidad cuyo rango de valores sea fácilmente controlable y además cumpla con el supuesto de que la mayor probabilidad de encontrar la masa real se concentre en un rango de valores pequeños. Teniendo en cuenta las características antes mencionadas se optó por utilizar la distribución *Gamma*, la cual posee dos grados de libertad por lo que permite mayor facilidad en la manipulación del rango de valores que se necesiten dependiendo del caso.

Tal como se observa en la Figura 4.6, dependiendo del valor de masa mínima necesario para la detección, el rango que determina la distribución inicial de partículas está comprendido entre el valor de masa mínima ( $m_{min} > 0$ ) y la masa máxima ( $m_{max} > m_{min}$ ). Dado que la distribución *Gamma* se extiende entre cero y un valor determinado, que es manipulable, se generan las partículas considerando la fdp entre cero y el valor dado por el rango inicial ( $m_{max} - m_{min}$ ). Finalmente basta con *desplazar* las partículas, haciendo que estén comprendidas entre los valores de masa mínima y máxima.

El procedimiento para la estimación de la masa exoplanetaria consiste en simular un vector de datos de velocidad radial ( $\dot{r}_0$ ) que constituirían los datos reales para el estudio. Se genera una población inicial de partículas sujetas a la distribución *Gamma* dentro del intervalo entre la masa mínima y la masa máxima posible. Como se ha explicado anteriormente, cada una de las partículas corresponde a un valor de masa candidato al valor real, determinando una realización del vector de estados de la ecuación 3.8, lo que corresponde a una órbita planetaria particular, y por lo tanto un vector de datos de velocidad radial.

Durante las iteraciones que realiza el filtro, para cada una de las partículas se simulará un set de datos RV, determinando el error existente respecto a los datos reales



**Figura 4.6:** Distribución inicial de partículas respecto al rango de masas determinado por el radio orbital, a partir de la curva que determina la frontera de detección.

punto a punto. Una vez calculado el vector de errores en todos los casos, se procede a normalizarlos y elevar cada uno al cuadrado determinando el error asociado. Luego, el error cuadrático medio para cada escenario poseerá una distribución conocida *chi-cuadrado*, que determina la función de verosimilitud del error.

Ahora, dada la definición de *planeta* determinada por la IAU (Sección 2.2), el valor máximo de masa para que un cuerpo sea considerado como tal es de  $13 [M_J]$ . Luego, bajo este supuesto, se considera ese valor como cota máxima para este estudio.

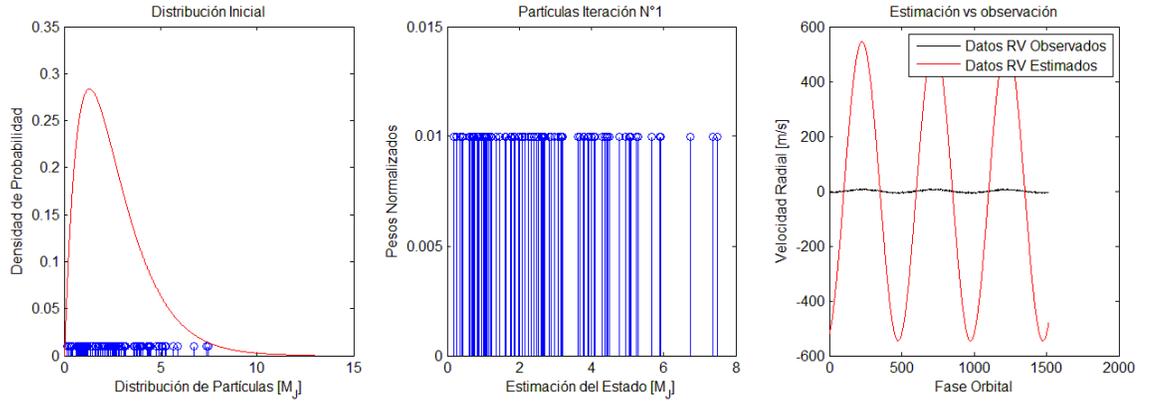
### 4.3.1. Resultados Obtenidos

Se realizaron variadas pruebas utilizando el algoritmo de Filtro de Partículas implementado, utilizando en primer lugar 100 partículas en cada caso. Se cubrieron los escenarios de masas planetarias muy pequeñas, medianas y grandes; midiendo además la eficacia del algoritmo en distintos ámbitos. Los resultados más representativos se presentan a continuación:

### 4.3.1.1. Prueba 1

En primer lugar se optó por analizar un caso límite para un masa pequeña del planeta. Dado un radio orbital de  $0,02[AU]$ , el valor de la masa mínima según la ecuación 4.2, es de  $0,028158[M_J]$ . El valor de masa escogido fue entonces de  $0,03[M_J]$ . Para casos como este, en que la masa a estimar es muy pequeña, se requiere que la ecuación del proceso sea siempre positiva, ya que no tendría sentido físico trabajar con masas negativas (Ecuación 3.9). El resultado obtenido fue:

#### Iteración N° 1



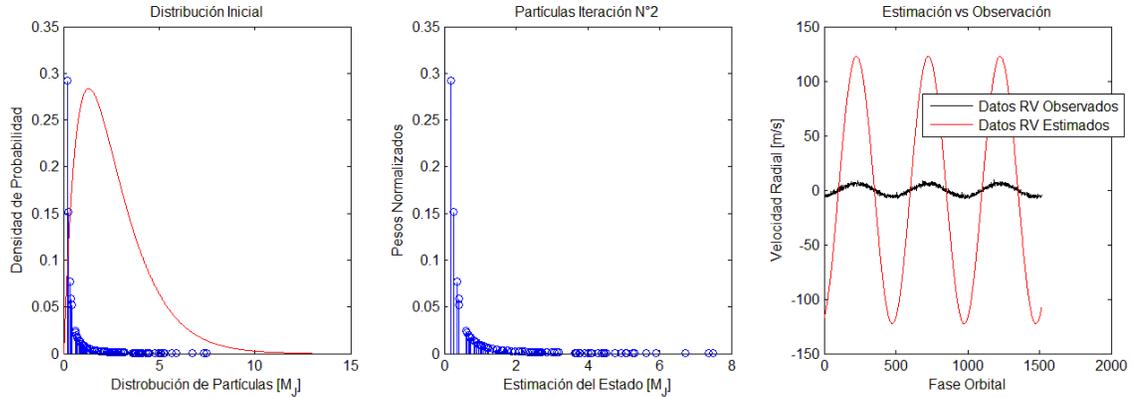
**Figura 4.7:** Estimación Masa 1, Iteración N°1. **Izquierda:** Distribución inicial de partículas, **Centro:** Partículas iteración actual, **Derecha:** Estimación vs Observación.

Es posible apreciar en la Figura 4.7 que la distribución inicial está comprendida entre el valor de la masa mínima calculada y la máxima ( $13[M_J]$ ). En esta etapa las partículas poseen el mismo peso y los datos RV estimados difieren en gran medida respecto a los reales ya que la primera estimación de la masa está dada por una ponderación de la estimación de cada partícula y su peso respectivo. Se resumen los resultados en la Tabla 4.2.

<i>Masa Real</i> [ $M_J$ ]	<i>Masa Estimada</i> [ $M_J$ ]	<i>ECM</i> [ $m^2/s^2$ ]
0,03	2,61542	$3,9774 \times 10^{-8}$

**Tabla 4.2:** Resultados de estimación de Masa 1 en Iteración N°1.

## Iteración N° 2



**Figura 4.8:** Estimación Masa 1, Iteración N°2. **Izquierda:** Distribución inicial de partículas, **Centro:** Partículas iteración actual, **Derecha:** Estimación vs Observación.

En la segunda iteración se observa que las partículas que representan menores valores de masa son altamente premiadas, al contrario de aquellas que representan una masa mayor. Se distingue una disminución en el valor de la media cuadrática del error (Tabla 4.3).

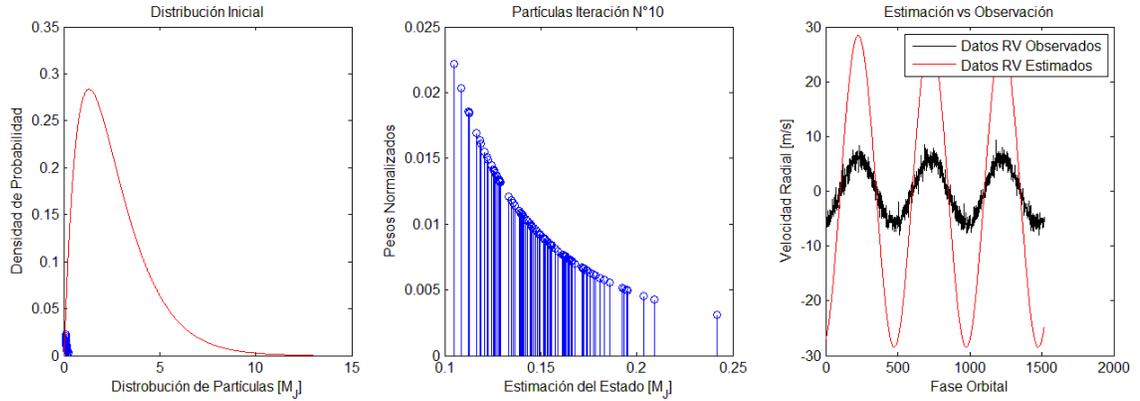
<i>Masa Real</i> [ $M_J$ ]	<i>Masa Estimada</i> [ $M_J$ ]	<i>ECM</i> [ $m^2/s^2$ ]
0,03	0,58802	$1,8617 \times 10^{-9}$

**Tabla 4.3:** Resultados estimación de masa 1, Iteración N°2, con ECM obtenido.

En siguientes iteraciones se observó que el filtro, a medida que promovía masas más pequeñas, el peso de éstas resultaba ser mayor y la distribución de las partículas tienen una forma similar durante los pasos siguientes, tal como se observa en los resultados en la Iteración 10.

## Iteración N° 10

Durante las últimas iteraciones se observó que las partículas con menor valor son las que ganan un mayor peso, dado que el valor real de la masa sigue siendo menor al mínimo propuesto por el algoritmo hasta el momento.



**Figura 4.9:** Estimación Masa 1, Iteración N°10. **Izquierda:** Distribución inicial de partículas, **Centro:** Partículas iteración actual, **Derecha:** Estimación vs Observación.

En la décima iteración se observa un acercamiento cada vez mayor al valor real de la masa y se distingue como el vector de datos RV simulado va convergiendo al real, respecto a las iteraciones anteriores.

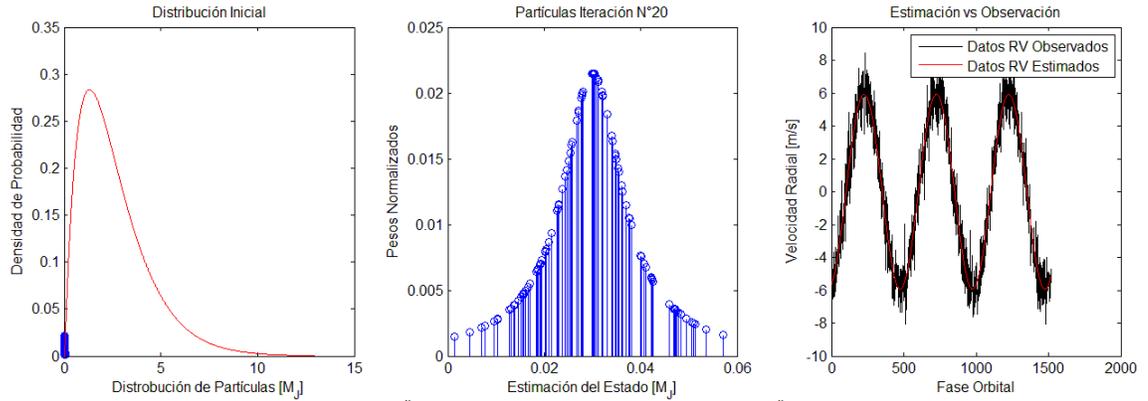
$Masa Real [M_J]$	$Masa Estimada [M_J]$	$ECM [m^2/s^2]$
0,03	0,1503	$6,9124 \times 10^{-11}$

**Tabla 4.4:** Resultados estimación de masa 1, Iteración N°10, con ECM obtenido.

Se continuó iterando de la misma forma hasta que la estimación de la masa resultó más certera y la tasa de reducción del error de los datos RV observados con respecto a los estimados fuera ínfima, lo cual se observa en la Iteración número 20.

## Iteración N° 20

Los resultados de la Iteración 20 para la primera prueba se muestran en la Figura 4.10.



**Figura 4.10:** Estimación Masa 1, Iteración N°20. **Izquierda:** Distribución inicial de partículas, **Centro:** Partículas iteración actual, **Derecha:** Estimación vs Observación.

Finalmente se logró una estimación muy certera, tanto de los datos de velocidades radiales como de la masa del planeta, con un valor muy bajo valor de error cuadrático medio (Tabla 4.5).

Se observó además que para las siguientes iteraciones no se tiene un mayor aumento en la precisión de la estimación ya que el error obtenido varía muy poco respecto al anterior, por lo que en este caso se considera que 20 iteraciones fueron suficientes para obtener una estimación satisfactoria.

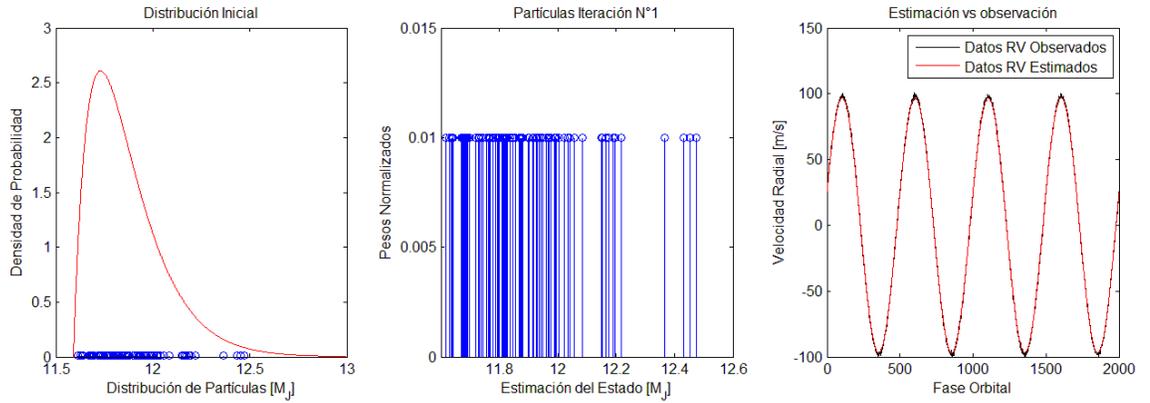
$Masa Real [M_J]$	$Masa Estimada [M_J]$	$ECM [m^2/s^2]$
0,03	0,03016	$2,0494 \times 10^{-13}$

**Tabla 4.5:** Resultados estimación de masa 1, Iteración N°20, con ECM obtenido.

### 4.3.1.2. Prueba 2

El siguiente set de resultados corresponde a la estimación de una masa mayor, cercana al valor máximo ( $13[M_J]$ ). En este caso el valor de masa real del planeta corresponde a  $m = 12[M_J]$  y se considera un radio orbital de  $d = 12[AU]$ . El valor mínimo de la masa obtenido a partir de la ecuación 4.2 fue de  $11,5903[M_J]$ . Para este caso también se utilizaron 100 partículas.

#### Iteración N° 1



**Figura 4.11:** Estimación Masa 2, Iteración N°1. **Izquierda:** Distribución inicial de partículas, **Centro:** Partículas iteración actual, **Derecha:** Estimación vs Observación.

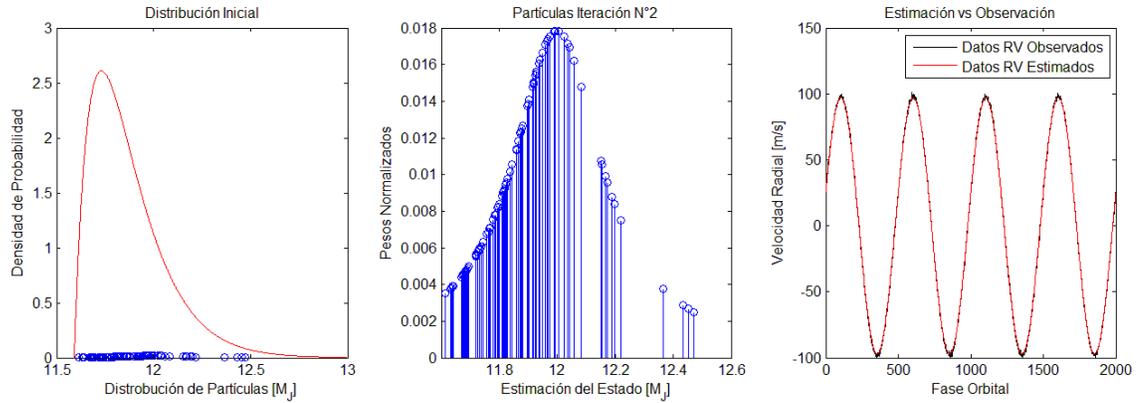
Nuevamente se observa la primera iteración del filtro. En este caso la distribución inicial se encuentra comprendida entre  $11,5903$  y  $13[M_J]$ , lo cual reduce en gran medida el espectro de masas candidatas y como resultado se tiene que el primer valor estimado de masa es muy cercano al real. Es notorio también al observar la Figura 4.11 derecha, en donde los datos RV estimados son notoriamente aproximados a los reales.

$Masa Real [M_J]$	$Masa Estimada [M_J]$	$ECM [m^2/s^2]$
12	11,87329	$3,2449 \times 10^{-13}$

**Tabla 4.6:** Resultados estimación de masa 2, Iteración N°1, con ECM obtenido.

## Iteración N° 2

La distribución de los pesos de las partículas para la segunda iteración puede distinguirse en la Figura 4.12, junto a la comparación entre los vectores de datos de velocidad radial real y simulado.



**Figura 4.12:** Estimación Masa 2, Iteración N°2. **Izquierda:** Distribución inicial de partículas, **Centro:** Partículas iteración actual, **Derecha:** Estimación vs Observación.

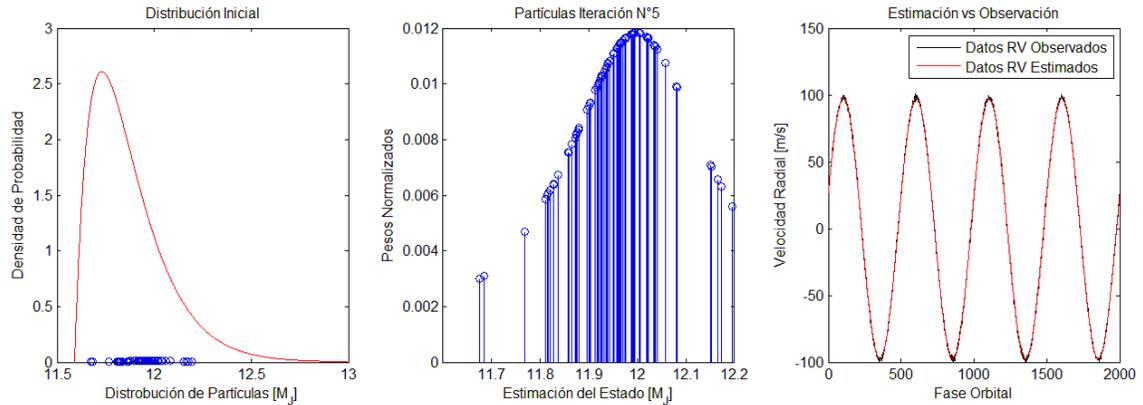
Se observa que las partículas que representan un valor de masa cercano al correspondiente a la simulación obtienen una mayor ponderación en sus pesos. Se tiene una pequeña disminución en el valor del error respecto a la iteración anterior, al igual que en la estimación de la masa.

<i>Masa Real</i> [ $M_J$ ]	<i>Masa Estimada</i> [ $M_J$ ]	<i>ECM</i> [ $m^2/s^2$ ]
12	11,90637	$2,7895 \times 10^{-13}$

**Tabla 4.7:** Resultados estimación de masa 2, Iteración N°2, con ECM obtenido.

### Iteración N° 5

A continuación se exponen los resultados obtenidos en la iteración número 5 del algoritmo.



**Figura 4.13:** Estimación Masa 2, Iteración N°5. **Izquierda:** Distribución inicial de partículas, **Centro:** Partículas iteración actual, **Derecha:** Estimación vs Observación.

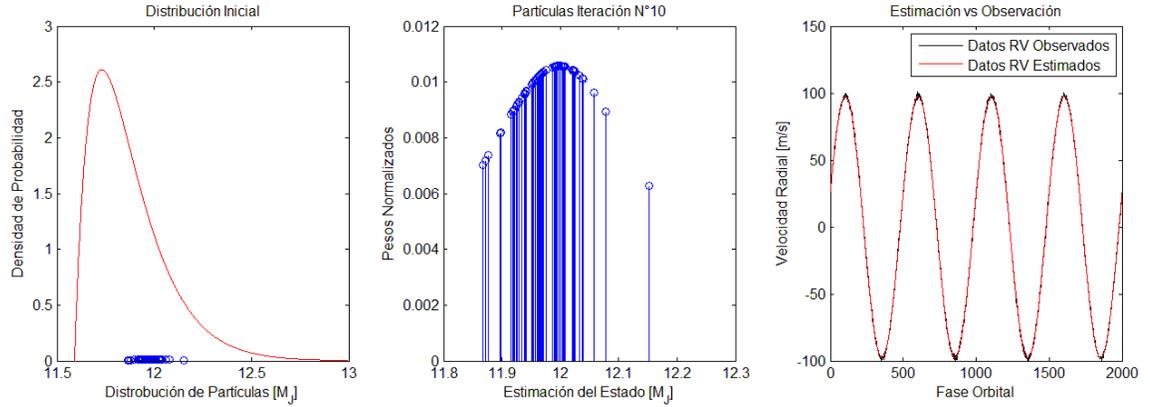
En la quinta iteración el error cuadrático medio disminuyó en un factor muy bajo, lo cual se debe a que la estimación en la segunda iteración ya era muy cercano al real. Se continuará iterando a la espera de conseguir un valor de la masa planetaria cada vez más certera y un ECM aún menor.

<i>Masa Real</i> [ $M_J$ ]	<i>Masa Estimada</i> [ $M_J$ ]	<i>ECM</i> [ $m^2/s^2$ ]
12	11,9653	$2,2442 \times 10^{-13}$

**Tabla 4.8:** Resultados estimación de masa 2, Iteración N°5, con ECM obtenido.

## Iteración N° 10

La iteración número 10 es la última concerniente a esta prueba, debido a que en las siguientes repeticiones no se observa un cambio significativo en la mejora de la estimación de la masa planetaria.



**Figura 4.14:** Estimación Masa 2, Iteración N°10. **Izquierda:** Distribución inicial de partículas, **Centro:** Partículas iteración actual, **Derecha:** Estimación vs Observación.

En la décima repetición el valor de la masa estimada se mantiene muy cercano al real, variando muy poco el valor del error cuadrático medio respecto a la Iteración 5. Se considera que no son necesarias un mayor número de iteraciones en este caso.

<i>Masa Real</i> [ $M_J$ ]	<i>Masa Estimada</i> [ $M_J$ ]	<i>ECM</i> [ $m^2/s^2$ ]
12	11,9929	$2,1679 \times 10^{-13}$

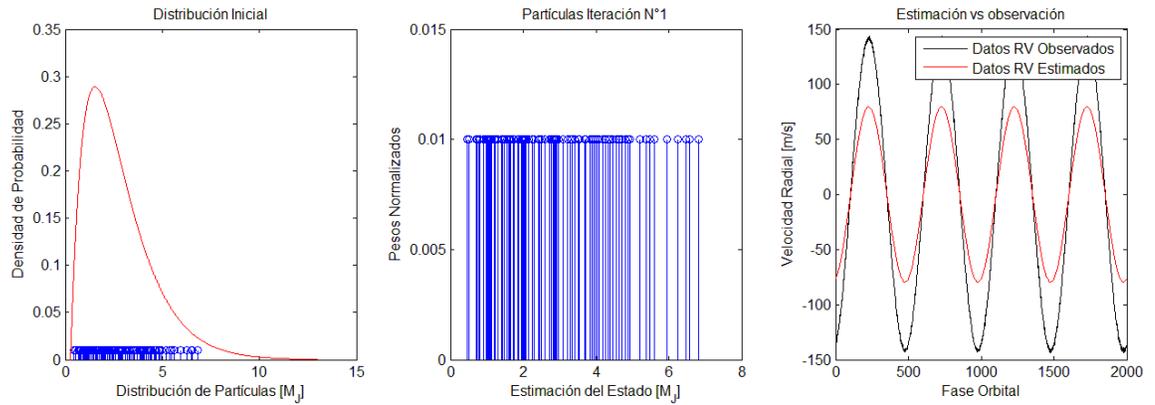
**Tabla 4.9:** Resultados estimación de masa 2, Iteración N°10, con ECM obtenido.

Dados los resultados obtenidos en esta prueba, se puede determinar que para la estimación de masas cercanas al valor máximo ( $13[M_J]$ ), el número de iteraciones necesarias es muy bajo (entre 5 y 10) dada la reducción del intervalo de masas candidatas.

### 4.3.1.3. Prueba 3

Como tercer caso de estudio se realizaron simulaciones para una órbita de radio  $1[AU]$ , cuya masa mínima a ser detectada es de  $0,2675[M_J]$ . La masa real escogida en este caso es de  $5[M_J]$  determinando así un estudio para la estimación de masas que se encuentran dentro de un gran espectro de posibilidades.

#### Iteración N° 1



**Figura 4.15:** Estimación Masa 3, Iteración N°1. **Izquierda:** Distribución inicial de partículas, **Centro:** Partículas iteración actual, **Derecha:** Estimación vs Observación.

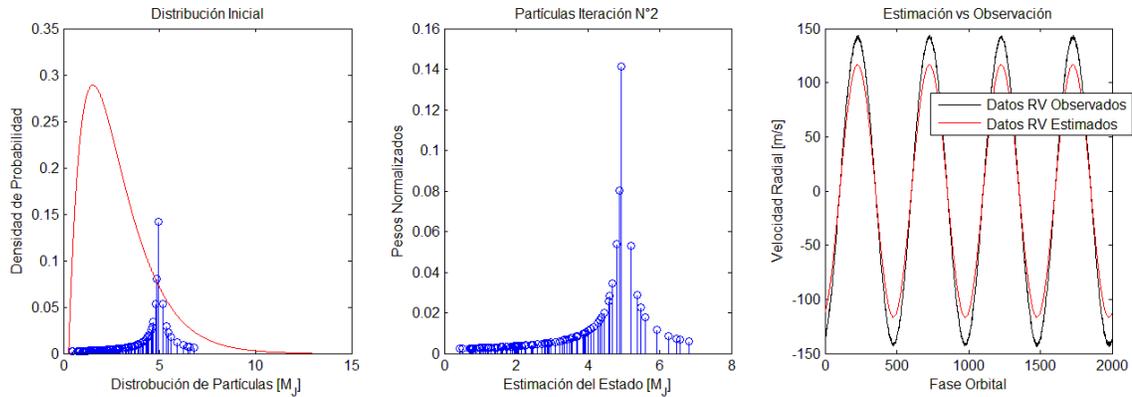
Se observa nuevamente en la Figura 4.15 que en la primera iteración todas las partículas poseen un mismo peso y la estimación de los datos se obtiene a partir de una ponderación de ellas. Los resultados se resumen en la Tabla 4.10

$Masa Real [M_J]$	$Masa Estimada [M_J]$	$ECM [m^2/s^2]$
5	3,1246	$5,2282 \times 10^{-10}$

**Tabla 4.10:** Resultados estimación de masa 3, Iteración N°1, con ECM obtenido.

## Iteración N° 2

Los resultados obtenidos en la segunda iteración del algoritmo se muestran en la Figura 4.16, donde se distingue una clara tendencia en la distribución de pesos de las partículas.



**Figura 4.16:** Estimación Masa 3, Iteración N°2. **Izquierda:** Distribución inicial de partículas, **Centro:** Partículas iteración actual, **Derecha:** Estimación vs Observación.

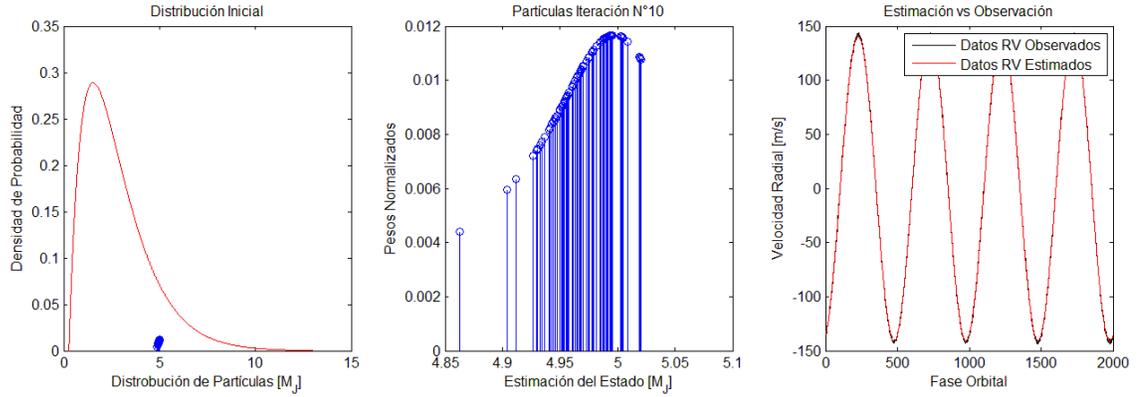
En la segunda iteración se observa como la distribución de los pesos de las partículas crece en torno al valor real de la masa, permitiendo que para las siguientes iteraciones se obtenga un aproximación más certera del estado.

$Masa Real [M_J]$	$Masa Estimada [M_J]$	$ECM [m^2/s^2]$
5	4,6267	$8,5952 \times 10^{-11}$

**Tabla 4.11:** Resultados estimación de masa 3, Iteración N°2, con ECM obtenido.

## Iteración N° 10

A continuación se muestran los resultados para la décima iteración de la tercera prueba.



**Figura 4.17:** Estimación Masa 3, Iteración N°10. **Izquierda:** Distribución inicial de partículas, **Centro:** Partículas iteración actual, **Derecha:** Estimación vs Observación.

En la Iteración 10 el error cuadrático medio es muy pequeño y se tiene una estimación de la masa muy cercana al valor real. Se decide continuar con las iteraciones del filtro para lograr observar que tan precisa logra ser la estimación.

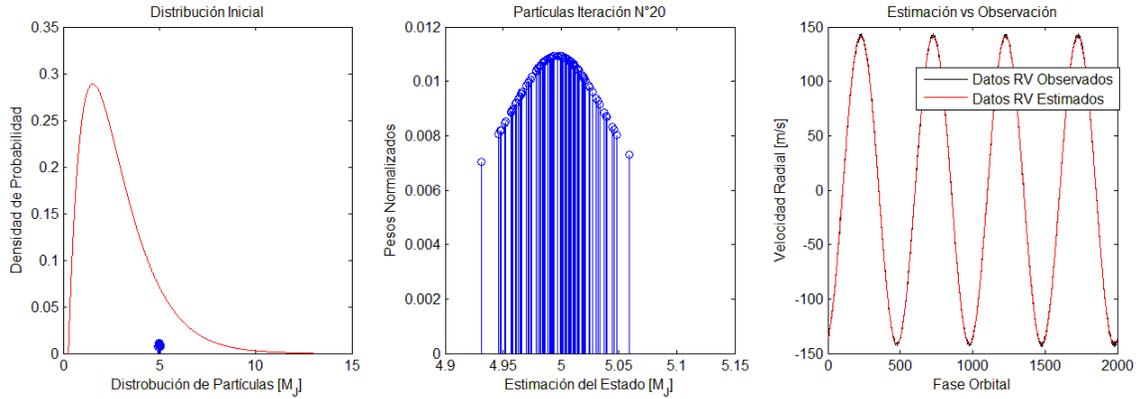
Se observa además que el rango que abarcan las partículas se ha reducido considerablemente debido al *resampling*, encargado de eliminar las partículas con bajo peso y crear nuevas dentro de un intervalo cercano a las que poseen pesos mayores.

$Masa Real [M_J]$	$Masa Estimada [M_J]$	$ECM [m^2/s^2]$
5	4,9883	$2,6167 \times 10^{-13}$

**Tabla 4.12:** Resultados estimación de masa 3, Iteración N°10, con ECM obtenido.

## Iteración N° 20

La última iteración considerable de esta prueba viene dada por la número 20, donde los resultados son suficientemente cercanos al valor real tanto de la masa planetaria como de los datos de velocidad radial.



**Figura 4.18:** Estimación Masa 3, Iteración N°20. **Izquierda:** Distribución inicial de partículas, **Centro:** Partículas iteración actual, **Derecha:** Estimación vs Observación.

Se observó que para la iteración 20 en adelante no existen mejoras significativas en la estimación de los estados. Los valores obtenidos se resumen en la tabla 4.13.

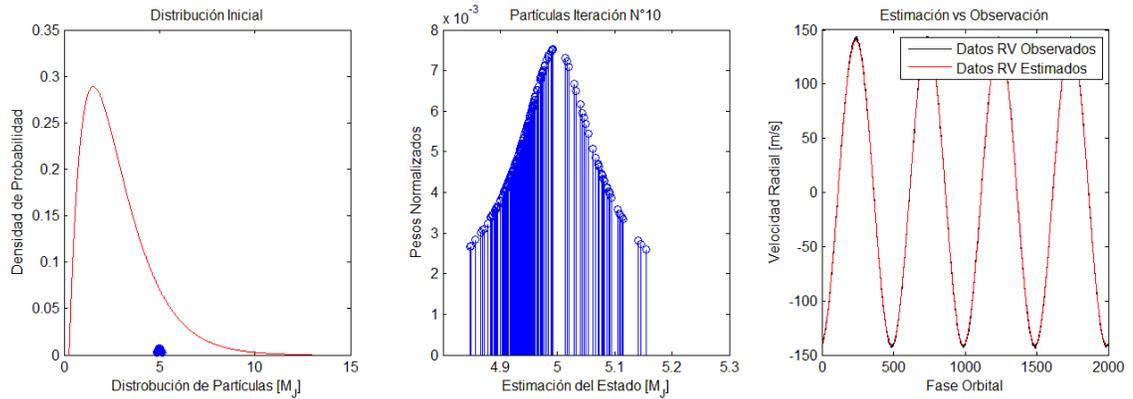
<i>Masa Real</i> [ $M_J$ ]	<i>Masa Estimada</i> [ $M_J$ ]	<i>ECM</i> [ $m^2/s^2$ ]
5	4,99953	$2,0891 \times 10^{-13}$

**Tabla 4.13:** Resultados estimación de masa 3, Iteración N°20, con ECM obtenido.

#### 4.3.1.4. Prueba 4

Se realizaron pruebas para el mismo caso anterior, o sea para  $d = 1$  y  $m = 5$ , esta vez duplicando el número de partículas utilizadas (200 partículas). A continuación se presentan los resultados para las mismas iteraciones que en el caso anterior.

#### Iteración N° 10



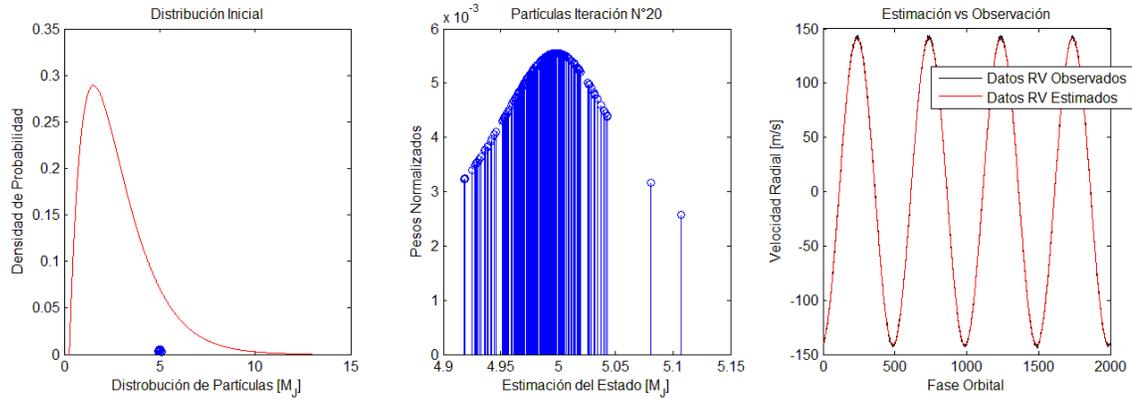
**Figura 4.19:** Estimación Masa 3 con 200 partículas, Iteración N°10. **Izquierda:** Distribución inicial de partículas, **Centro:** Partículas iteración actual, **Derecha:** Estimación vs Observación.

No se observan mejoras respecto a la prueba anteriormente realizada en esta iteración, por lo que realizar un aumento en el número de partículas no está implicando una mejora en la velocidad de la estimación.

$Masa Real [M_J]$	$Masa Estimada [M_J]$	$ECM [m^2/s^2]$
5	4,5992	$3,3969 \times 10^{-13}$

**Tabla 4.14:** Resultados estimación de masa 3, Iteración N°10 y 200 partículas, con ECM obtenido.

## Iteración N° 20



**Figura 4.20:** Estimación Masa 3 con 200 partículas, Iteración N°20. **Izquierda:** Distribución inicial de partículas, **Centro:** Partículas iteración actual, **Derecha:** Estimación vs Observación.

Al igual que en el caso anterior no existe mayor diferencia entre la estimación para el caso en que se utilizaron 100 partículas, por lo que se considera que un mayor número de éstas generan un esfuerzo computacional innecesario.

<i>Masa Real</i> [ $M_J$ ]	<i>Masa Estimada</i> [ $M_J$ ]	<i>ECM</i> [ $m^2/s^2$ ]
5	4,9896	$2,3359 \times 10^{-13}$

**Tabla 4.15:** Resultados estimación de masa 3, Iteración N°20 y 200 partículas, con ECM obtenido.

Como resultado de esta prueba puede concluirse que incrementando el número de partículas utilizadas en el algoritmo no se distingue una mejora en la estimación del estado, por lo que se considera que 100 partículas representan un número adecuado en todos los casos.

Se optó inicialmente por utilizar una cantidad de 100 partículas para la realización de las pruebas debido a que en el caso de se posea un amplio rango de masas candidatas y el valor real se encuentre cercano al valor máximo, la probabilidad de que en la primera iteración una partícula se sitúe en un valor cercano al real es muy pequeña, dada la distribución de probabilidad escogida. Es por ello que un número grande de

partículas aumenta la probabilidad de que alguna sea generada más cerca del valor real y no se incurra en la necesidad de una gran cantidad de iteraciones para obtener una buena estimación del estado, dado que se está trabajando con un sistema que no es dinámico.

Al analizar las pruebas realizadas y dados los casos considerados, se acepta que el número de partículas máximo a utilizar es de 100. La cantidad de iteraciones mínimo a realizar para obtener una buena estimación en forma segura, dado que se desconoce el valor de la masa real es de al menos 20 repeticiones. Finalmente, dado que se posee un solo estado a estimar y las partículas siempre se centrarán respecto a un solo valor, el umbral de remuestreo debe ser de 1, en otras palabras, es necesario utilizar *resampling* en cada iteración debido a que siempre se tiene una mayor concentración de partículas con alto peso en torno a un punto. Para el ruido correspondiente a la ecuación del proceso se utilizó una distribución *Normal* de media cero y varianza 0,001, logrando reducir la degeneración de las partículas y obteniendo así un valor certero en la estimación de la masa exoplanetaria.

# Capítulo 5

## Conclusiones

A la fecha existen múltiples técnicas e incontables investigaciones centradas en la detección y caracterización exoplanetaria, cuyo rango se incrementa cada vez más a medida que mejoran las tecnologías y los estudios realizados. El principal interés en el desarrollo de este trabajo está relacionado con la utilización de los conocimientos relacionados a la inferencia Bayesiana, permitiendo a través de este estudio indagar en nuevas maneras de abarcar el problema de detección, otorgando una herramienta que a la larga pueda resultar de utilidad en la materia.

La metodología propuesta consistió en la implementación de un software de detección, a partir de datos RV simulados, determinando la presencia de un exoplaneta orbitando una estrella en particular. Además, al recorrer un amplio rango de órbitas fue posible caracterizar las limitaciones correspondientes al proceso de detección y, por consiguiente, del instrumento que se utiliza. La curva obtenida permite además reducir el intervalo de posibles valores del estado a estimar, en este caso, de la masa planetaria. Luego, se incurre en una reducción del requerimiento computacional necesario para ello.

Mediante la utilización del filtro de partículas y la información otorgada por la curva que define el área de detección, fue posible además estimar con gran precisión la masa planetaria en cada caso propuesto, poniendo énfasis especial en casos límites donde el proceso de estimación requiere de un mayor tiempo de ejecución. Se determinó así un número fijo de partículas e iteraciones necesarias para cubrir de forma consistente cualquier escenario que pueda presentarse.

Los resultados obtenidos denotan la efectividad del método dado que puede observarse que los errores en cada caso son de una magnitud muy pequeña, aún en donde el ruido de observación era considerable, alcanzando estimaciones que difieren en un muy bajo orden del valor real de la masa planetaria. Dado que el esquema presentado en el presente trabajo no ha sido aplicado anteriormente al utilizar una combinación de dos técnicas de detección para lograr la estimación, se requerirá una mayor profundización en el tema.

Finalmente, dadas las simplificaciones utilizadas, se considera que el proceso presentado podría ser más robusto, en el sentido de plantear estrategias más consistentes para la detección. De manera similar se propone como trabajo futuro una ampliación de la investigación, reduciendo la cantidad de supuestos simplificadorios e incorporando más estados a estimar en el sistema como por ejemplo el radio orbital. También es necesario extender el problema a un mayor número de planetas y con órbitas elípticas en vez de circulares. A medida que el estudio se vuelva más sólido será posible trabajar con datos reales, posiblemente logrando mayores avances y nuevos resultados en el área de la astronomía correspondiente a la detección de planetas de sistemas extrasolares.

# Bibliografía

- [1] S. Alonso. *Métodos para la Detección de Exoplanetas*. University of Arizona Press, (2010).
- [2] B.D. Anderson and J.B. Moore. *Optimal Filtering*. University of Newcastle, New South Wales, Australia, Dover Publications, (1979).
- [3] C. Andrieu, A. Doucet, and E. Punkskaya. *Sequential Monte Carlo Methods in Practice, chapter Sequential Monte Carlo Methods for Optimal Filtering*. Springer, (2001).
- [4] M. A. Bailes et al. *The origin of the planet orbiting PSR1829 – 10*. Nature, 352, 311, (1991).
- [5] C. Berzuini, N.G. Best, W.R. Gilks, and C. Larizza. *Dynamic conditional independence models and markov chain monte carlo methods*. Journal of the American Statistical Association 92: 1403-1412, (1997).
- [6] R. Butler. *Catalog of Nearby Exoplanets*. Astrophysical Journal 646(2-3): p:25-33, (2006).
- [7] B.W. Carroll and D.A. Ostlie. *An Introduction to Modern Astrophysics*. Pearson, U.S.A., 2nd edition, (2007).
- [8] D. Charbonneau et al. *Detection of Planetary Transits Across a Sun-like Star*. Astrophysical Journal Letters, (1999).
- [9] S. Chauvin et al. *A giant planet candidate near a young brown dwarf*. A&A 425, L29–L32, (2004).

- [10] P. Del Moral. *Feynman-Kac Formulae: Genealogical and Interacting Particulate Systems with Applications*. Springer, New York, (2004).
- [11] A. Doucet, N. de Freitas, and N. Gordon. *Sequential Monte Carlos Methods in Practice, Statistics for engineering and information science*. New York: Springer-Verlag, (2001).
- [12] A. Doucet, S. Godsill, and C. Andrieu. *On sequential monte carlo sampling methods for bayesian filtering*. *Statistics and Computing* 10: 197-208, (2000).
- [13] A. Einstein. *Relativity: The Special and General Theory*. Methuen & Co Ltd, (1916).
- [14] J.F. Geweke. *Bayesian inference in econometric models using monte carlo integration*. *Econometrica* 57: 1317-1340, (1989).
- [15] N.J. Gordon, D.J. Salmond, and A.F.M. Smith. *Novel approach to nonlinear/nongaussian bayesian state estimation, Radar and Signal Processing*. IEE Proceedings F 140(2): 107-113, (2002).
- [16] A.J. Haug. *A Tutorial on Bayesian Estimation and Tracking Techniques Applicable to Nonlinear and Non-Guassian Processes*. Mitre, (2005).
- [17] M.S. Johannes, N.G. Polson, and J.R. Stroud. *Optimal filtering of jump-diffusions: Extracting latent states from asset prices*. *Review of Financial Studies*, (2009).
- [18] M.I. Jones. *Study of Planetary Systems in Close-In Orbits Around Giant Stars*. Universidad de Chile, Departamento de Astronomía, (2013).
- [19] P. Kalas et al. *Optical Images of an Exosolar Planet 25 Light-Years from Earth*. *Science*, 322, 1345, (2008).
- [20] R.E. Kalman. *A new approach to linear filtering and prediction problems*. *Journal of Basic Engineering* 82(1): 35-45, (1960).
- [21] G. Kitagawa. *Self-organizing state space model*. *Journal of the American Statistical Association* 93(443): 1203-1215, (1998).
- [22] G. Kitagawa and S. Sato. *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. chap-

- ter Monte Carlo Smoothing and Self-Organising State-Space Model, Springer, (2001).
- [23] A. Kong, J. S. Liu, and W. H. Wong. *Sequential imputations and bayesian missing data problems*. Journal of the American Statistical Association 89(425): 278-288, (1994).
- [24] V. Krishnan. *Nonlinear Filtering and Smoothing: An Introduction to Martingales, Stochastic Integrals and Estimation*. Dover, (2005).
- [25] S. Lee. *Gravitational Microlensing by Extrasolar Planetary Systems: A Review of Theory, Models, and Observations*. Astrophysics Department, Cambridge, (2008).
- [26] J. Liu and M. West. *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. chapter Combined Parameter and State Estimation in Simulation-Based Filtering, Springer, (2001).
- [27] J.S. Liu. *Metropolized independent sampling with comparisons to rejection sampling and importance sampling*. Statistics and Computing 6(2): 113-119, (1996).
- [28] C. Maris et al. *Direct Imaging of Multiple Planets Orbiting the Star HR8799*. Science, 322, 1348, (2008).
- [29] M. Mayor and D. Queloz. *A Jupiter-mass companion to a solar-type star*. Nature, 378, 355, (1995).
- [30] T. K. Moon and W.C. Stirling. *Mathematical Methods and Algorithms*. Marsha Horton, (2000).
- [31] B. Oksendal. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications (Universitext)*. 6th edn, Springer, (2007).
- [32] M.E. Orchard. *On-Line Fault Diagnosis and Failure Prognosis Using Particulate Filters: Theoretical Framework and Case Studies*. VDM Verlag, (2009).
- [33] M.E. Orchard, F.A. Tobar, and G. Vachtsevanos. *Outer feedback correction loops in particle filtering-based prognostic algorithms: Statistical performance comparison*. Studies in Informatics and Control 18(4), (2009).

- [34] F. Pepe and others. *HARPS: ESO's Coming Planet Searcher, Chasing Exoplanets with the La Silla 3.6-m Telescope*. ESO Messenger, 110, 9, (2002).
- [35] B. Ristic, S. Arumlampalam, and N. Gordon. *Beyond the Kalman filter:particle filters for tracking applications*. Artech House, (2004).
- [36] D. Rubin. *Bayesian Statistics*. Vol. 3, Oxford University Press, chapter Using the SIR algorithm to simulate posterior distributions, (1988).
- [37] D. Savransky and N.K. Kasdin. *Dynamic Filtering for the Analysis of Astrometric and Radial Velocity Data Sets for the Detection of Exoplanets*. Princeton University, (2009).
- [38] S. Seager. *Exoplanets*. University of Arizona Press, (2010).
- [39] D. Simon. *Optimal State Estimation. Kalman, H-Infinity, and Nonlinear Approaches*. Wiley-Interscience, (2006).
- [40] F.A. Tobar and M.E. Orchard. *Efectos de lazos externos de corrección en algoritmos de pronóstico de fallas basados en filtro de partículas*. Anales del Instituto de Ingenieros de Chile, (2009).
- [41] A. Wolszczan and D.A. Frail. *A planetary system around the millisecond pulsar PSR1257*. Nature, 355, 145, (1992).
- [42] J.T. Wright and B.S. Gaudi. *Exoplanet Detection Methods*. arXiv:1210.2471v2, (2012).
- [43] J.T. Wright and A.W. Howard. *Efficient Fitting of Multiplanet Keplerian Models to Radial Velocity and Astrometry Data*. U.S.A., (2009).
- [44] I. Zolotukhin. *The Extrasolar Planets Encyclopaedia*, <http://exoplanet.eu/>.