



**UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE MINAS**

**MODELO DE FRAGMENTACIÓN SECUNDARIA Y COLGADURAS EN MINERÍA DE
CAVING**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL DE MINAS

RENÉ ESTEBAN GÓMEZ PUIGPINOS

**PROFESOR GUÍA:
ALDO CASALI BACELLI**

**MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
RAÚL CASTRO RUIZ
JAIME CHACÓN FERNÁNDEZ**

**SANTIAGO DE CHILE
2014**

RESUMEN

La minería subterránea masiva es cada vez más frecuente debido al agotamiento de las reservas mineras de superficie. En particular, la profundización en yacimientos explotados por métodos de *block/panel caving* incrementan las condiciones de esfuerzos bajo las cuales se lleva a cabo la extracción de mineral. Por otro lado, el flujo gravitacional presente en estas operaciones tiene un impacto directo en el diseño minero y por ende en el negocio; a causa de esto, se busca cuantificar en la presente investigación, la influencia que tiene el confinamiento asociado al peso de la columna de mineral en la fragmentación secundaria y en la capacidad de flujo que presenta la roca hundida.

El objetivo de este trabajo consiste en acrecentar el conocimiento de parámetros importantes que forman parte de la minería de *caving*, a través de la realización de experimentos de flujo de material granular bajo altas condiciones de confinamiento. Modelando así la fragmentación secundaria y las colgaduras, a través de ensayos de laboratorio en donde es aplicada una carga vertical para simular la sobrecarga de mineral presente en una columna de extracción.

En los experimentos realizados se observó que el esfuerzo vertical aplicado tiene un efecto considerable en la capacidad de fluir y en la fragmentación del material, así como también el efecto que ejercen el tamaño de partícula y las curvas granulométricas ensayadas. La fragmentación secundaria está influenciada principalmente por la carga vertical aplicada y la distribución del tamaño de la roca fragmentada. En cuanto a la generación de eventos de colgaduras, se ven principalmente influenciados por la carga vertical aplicada y el tamaño de los fragmentos.

En base a los resultados obtenidos, se presenta un nuevo modelo de fragmentación secundaria conformado por un set de ecuaciones basadas en las características del material y las condiciones de operación. El modelo propuesto es capaz de predecir la distribución de tamaños de partículas a obtener en un punto de extracción. Este modelo es análogo al modelo de molienda continua en flujo pistón, basado en un balance de masa de la población de fragmentos al cual se le ha incorporado el efecto de la carga vertical.

Por otra parte, en los experimentos realizados se encontró una relación exponencial entre la carga vertical aplicada y la frecuencia de colgaduras. Bajo este contexto, se cuantifica el impacto de la carga para altas condiciones de esfuerzos, y el tamaño de los fragmentos en los parámetros de ajuste. Como resultado el modelo entrega la frecuencia de colgaduras dada una carga vertical aplicada, requiriéndose un ajuste de los parámetros y una validación con datos de terreno.

Los ensayos realizados pueden tener una directa aplicación en el diseño minero, al predecir la fragmentación a obtener en el nivel de producción e indicar la frecuencia de colgaduras para una configuración dada. Previamente, deben ser consideradas las restricciones del modelo y el factor de escala.

ABSTRACT

Massive underground mining is becoming ever more prevalent due to the depletion of surface mining reserves. Particularly, the deepening of deposits exploited by block/panel caving methods will increase stresses conditions of ore extraction. Gravity flow present in these operations has an impact on mine design and hence in it business. This research is looking for to quantify the confinement influence associated with the weight of the ore column on secondary fragmentation and flow-ability in caved rock.

Aims of this work are to increase the knowledge about important parameters that are part of caving mining, through an experimental set up of flow in granular material under high confinement conditions. To model secondary fragmentation and hang-up laboratory tests were conducted, where vertical load was used to simulate the ore overload in an extraction column.

The experimental result show that the vertical stress applied has a significant effect on the flow-ability and material fragmentation, as well as the particle size and particle size distribution tested. Secondary fragmentation is mainly influenced by vertical load applied and particle size distribution of fragmented rock. Hang-ups are mainly influenced by vertical load and the fragments sizes.

In this work a model of secondary fragmentation is presented, composed of equations based in material properties and operating parameters. The model is able to predict the particle size distribution obtained in a drawpoint. This model is analogous to the plug flow grinding model, based on a mass balance on the particles population and incorporating the vertical load effect.

On the other hand, an exponential relationship between vertical load and hang-up frequency is found from the experimental result. Impact of high stress conditions is quantified, and fragments size influence is found on fitted parameters. As a result, the model indicates hang-ups frequency of a given vertical load. Adjustment parameters and validation with data mine is required.

Tests performed may have a direct application in mining design, predicting fragmentation in production level and indicating the hang-up frequency for a given configuration. Previously, it should be considering the model constraints and the mine scale.

AGRADECIMIENTOS

Primer que todo me gustaría agradecer a mis padres por la educación entregada que me llevo a lograr llegar a esta instancia. También quiero agradecer los compañeros que conocí a lo largo de la vida universitaria, entre ellos a los del Laboratorio de Block Caving por su apoyo, y a mis amigos del equipo tricampeones del departamento Los Refinos, por los buenos momentos.

Tabla de Contenido

Capítulo 1: Introducción	1
1.1 Motivación de la investigación.....	1
1.2 Antecedentes previos.....	1
1.3 Objetivos.....	4
1.3.1 Objetivo general.....	4
1.3.2 Objetivos específicos	5
1.4 Alcances.....	5
Capítulo 2: Revisión bibliográfica.....	6
2.1 Comportamiento de material granular.....	6
2.2 Fragmentación secundaria en minería de caving.....	7
2.2.1 Modelos predictivos de fragmentación.....	11
2.3 Colgaduras en el proceso productivo.....	13
2.3.1 Geometrías adoptadas por arcos de rocas	17
2.3.2 Métodos de detección y eliminación	21
2.3.3 Mediciones en terreno.....	22
2.4 Conclusiones del capítulo.....	23
2.4.1 Fragmentación en caving.....	23
2.4.2 Eventos de colgadura.....	24
Capítulo 3: Metodología.....	25
3.1 Principales variables.....	25
3.2 Caracterización del material	27
3.2.1 Coeficiente de uniformidad	28
3.2.2 Coeficiente de curvatura	29
3.2.3 Factor de forma.....	29
3.2.4 Índice de carga puntual	30
3.3 Metodología experimental.....	31
3.3.1 Preparación del material	31
3.3.2 Montaje.....	32
3.3.3 Ensayos	32
3.3.4 Post ensayo	32
3.4 Equipamiento.....	33
3.5 Ensayos realizados.....	34
3.6 Conclusiones del capítulo.....	35
Capítulo 4: Modelo de fragmentación.....	36

4.1 Origen del modelo	36
4.2 Modelamiento	37
4.3 Conclusiones del capítulo	41
Capítulo 5: Resultados y análisis	42
5.1 Fragmentación	42
5.1.1 Curva 1 $d_{50} = 6$ mm	42
5.1.2 Curva 2 $d_{50} = 8$ mm	43
5.1.3 Curva 3 $d_{50} = 12$ mm	44
5.1.4 Ajuste del modelo de fragmentación	44
5.1.5 Fragmentación por tamaño	46
5.2 Colgaduras	48
5.2.1 Frecuencia de colgaduras	49
5.3 Conclusiones del capítulo	52
5.3.1 Modelo de fragmentación	52
5.3.2 Modelo de colgaduras	52
Capítulo 6: Conclusiones y recomendaciones	54
6.1 Conclusiones generales	54
6.1.1 Régimen de esfuerzos	54
6.1.2 Fragmentación	55
6.1.3 Generación de colgaduras	55
6.2 Recomendaciones	56
Bibliografía	57
Anexos	60
Anexo A: Caracterización de material utilizado	61
Anexo B: Detalle resultados de fragmentación	63
Anexo C: Detalle resultados colgadura	69
Anexo D: Ejemplo de cálculo para modelo de fragmentación	71

Índice de Figuras

Figura 1. Esquema Método Block Caving.	2
Figura 2. Crecimiento de columna de mineral in situ por propagación del hundimiento.	3
Figura 3: Evolución de alturas de columna en block caving.	3
Figura 4: Esquema objetivo general.	4
Figura 5: Fuerzas de contactos presentes entre el material granular, Craig 2007 [21].	7
Figura 6: Modelo conceptual de columna de extracción en <i>block/panel caving</i> [14].	8
Figura 7: Distribución de esfuerzos en material granular.	10
Figura 8: Distribución de tamaños en caving, Laubscher 1994.	12
Figura 9: Curvas de distribución de tamaños para modelo de Bridwater 2003 [33].	13
Figura 10: Diámetro de abertura vs tamaño máximo determinado por diversos autores [1].	14
Figura 11: Condición de flujo considerando carga vertical, Fuenzalida 2012.	15
Figura 12: Formación de arcos presentes en métodos de caving [34].	16
Figura 13: Impacto del ángulo de fricción en la altura de las colgaduras.	18
Figura 14: Distribución de fuerza en arco de rocas alto, Kvapil 2004.	19
Figura 15: Distribución de fuerza en arco de roca bajo, Kvapil 2004.	19
Figura 16: Esfuerzos horizontales sobre batea	20
Figura 17: Nivel secundario de perforación para eliminación de colgaduras [34].	22
Figura 18: Curva granulométrica de puntos de extracción, El Teniente [32].	25
Figura 19: Efecto del radio hidráulico en la carga vertical [27].	26
Figura 20: Curvas granulométricas utilizadas en ensayos.	28
Figura 21: Círculos generados por material granular.	29
Figura 22: Matriz de forma de partícula.	30
Figura 23: Montaje de modelo físico bajo confinamiento.	32
Figura 24: Prensa hidráulica con cilindro montado.	33
Figura 25: Tecele.	34
Figura 26: Tambor rotatorio	34
Figura 27: Esquema flujo pistón.	37
Figura 28: Ilustración de flujo pistón para tiempo τ	38
Figura 29: Esquema función de ruptura en modelo cinético [29].	39
Figura 30: Flujo de masa modelo cinético	39
Figura 31: Curvas de fragmentación, $d_{50} = 6$ mm.	42
Figura 32: Curvas de fragmentación, $d_{50} = 8$ mm.	43
Figura 33: Curvas de fragmentación, $d_{50} = 12$ mm.	44
Figura 34: Colgaduras en material con $d_{50} = 6$ mm.	50
Figura 35: Colgaduras en material con $d_{50} = 12$ mm.	51

Índice de Tablas

Tabla 1: Condición de flujo en sistemas de traspaso.....	14
Tabla 2: Altura máxima y mínima de un arco de roca sobre batea.	20
Tabla 3: Frecuencia de colgaduras medidas en Andina, Troncoso 2006 [34].....	22
Tabla 4: Mediciones de colgaduras en función de la altura la extracción.	22
Tabla 5: Mediciones de colgaduras en función del porcentaje de extracción.	23
Tabla 6: Características de curvas granulométricas estudiadas.....	28
Tabla 7: Resumen de características de material.....	31
Tabla 8: Curvas granulométricas utilizadas por malla	31
Tabla 9: Parámetros del modelo de fragmentación.	44
Tabla 10: Ajuste de modelo de fragmentación.....	45
Tabla 11: Ajuste chi-cuadrado del modelo de fragmentación.....	46
Tabla 12: D_{80} resultante.	47
Tabla 13: D_{50} resultante.....	47
Tabla 14: D_{10} resultante.....	47
Tabla 15: Resultados experimentales de condición de flujo.	48
Tabla 16: Resultados colgadura material $d_{50} = 6$ mm.	49
Tabla 17: Resultados colgadura material $d_{50} = 12$ mm.	50
Tabla 18: Parámetros del modelo de colgaduras, material grava.	51

Capítulo 1: Introducción

1.1 Motivación de la investigación

El continuo cambio y los nuevos desafíos que se van presentando en minería, en particular en minería subterránea, donde se busca asegurar la continuidad de la operación, hace importante comprender los mecanismos presentes al momento de diseñar y planificar una operación (tales como: flujo gravitacional, propagación del caving, fragmentación, entrada de dilución). Es necesario entonces conocer las condiciones en las que se encuentra material en los puntos de extracción al momento de operar en niveles de mayor profundidad.

A su vez, el impacto de las colgaduras dentro del proceso productivo afectando la extracción de mineral; impidiendo su flujo, y como consecuencia de ello, provocando el cierre de calles de producción para poder llevar a cabo actividades de reducción secundaria. Estas interrupciones afectan la disponibilidad de la infraestructura minera, impactando en la capacidad de producción de la faena al no ser consideradas dentro de la planificación [1]. A la vez, tienen un costo asociado debido al tiempo de detención (e interferencias) en la zona productiva, personal dedicado a esta labor e insumos necesarios. Se estima que el costo de reducción secundaria, mediante el uso de explosivos, en un punto de extracción es de 55 USD por intento de descuelgue; proceso que tiene una eficiencia de alrededor de un 56% [2]. Por lo tanto, realizando un ejercicio simple y considerando un índice de colgaduras típico (1,6 – 3,8 colgaduras/1000 t), para una producción de 140 ktpd (producción en régimen de Chuquicamata Subterráneo ó Nuevo Nivel Mina), se tendrían costos de entre 7,9 a 18,8 MUSD anuales.

Dicho lo anterior, el contar con una estimación de la frecuencia de este tipo de eventos de interferencias del proceso, podría permitir conocer de antemano el área requerida que debe estar abierta para alcanzar una meta productiva dada.

A esto se le agrega el impacto en la seguridad de la operación, que implica la ocurrencia y eliminación de una colgadura en un punto de extracción.

1.2 Antecedentes previos

La explotación por *block/panel caving* es utilizada en operaciones mineras subterráneas masivas, donde por lo general se extrae bajo altos ritmos de producción. En este método se induce el hundimiento del macizo rocoso, realizando un corte basal en el bloque mineralizado, iniciando así la propagación y colapso progresivo de bloques de mineral desde el *cave back*. Se genera así un flujo gravitacional del material quebrado una vez iniciada la operación a medida que va siendo extraído el mineral desde los puntos de extracción, ubicados en un nivel de producción.

La técnica de *block caving* es un método de explotación a gran escala aplicable a yacimientos de baja ley, con cuerpos mineralizados masivos cuyas características principales son [3]:

- Grandes dimensiones tanto verticales como horizontales.
- Macizo rocoso se debe fragmentar en tamaños manejables.
- Superficie que permite subsidencia.

Panel caving y otras variantes del método, como el *panel caving* inclinado y el *front caving*, operan con los mismos principios que el *block caving*. En el método de *panel caving* el cuerpo mineralizado no es hundido discretamente, más bien, se hunde de forma continua por paneles o módulos pequeños de la mineralización. Como resultado el frente de *caving* se mueve a través del cuerpo mineralizado manteniendo un ángulo constante en la dirección de avance del hundimiento [4]. A diferencia, en el *block caving* se realiza un hundimiento discreto de áreas o bloques.

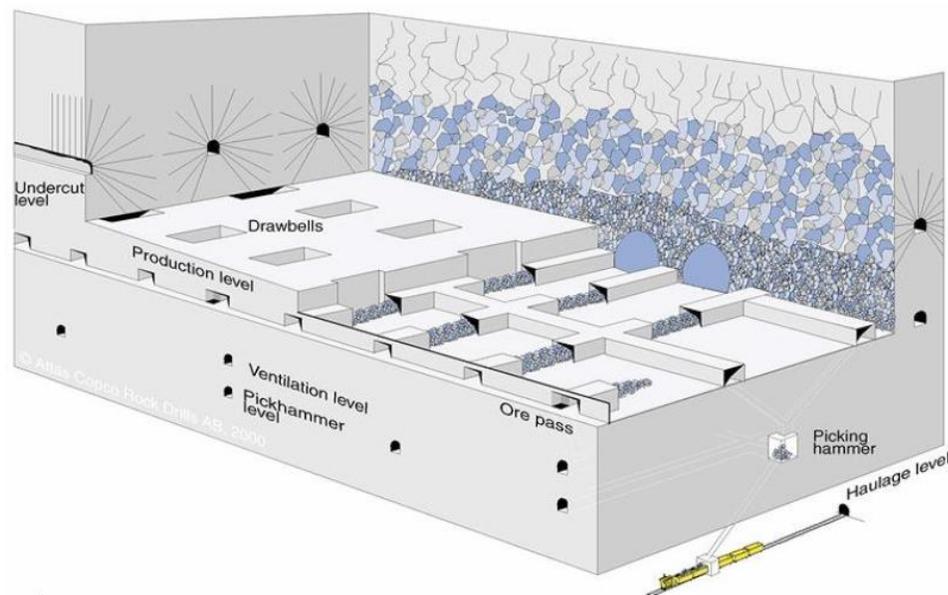


Figura 1. Esquema Método Block Caving.

Una vez iniciada la propagación del *caving* se comienza a formar una columna de material fragmentado proveniente del *cave back* o techo de la mineralización sin soporte, lo cual da origen a una columna de mineral de altura creciente al comienzo de la operación y luego decreciente a medida que se va extrayendo el mineral. Esta columna genera esfuerzos sobre las bateas de extracción en el nivel de producción, debido a la sobrecarga de material quebrado (llamado *caving stress* por Laubscher, 2006 [5]). La siguiente figura ilustra la situación descrita:

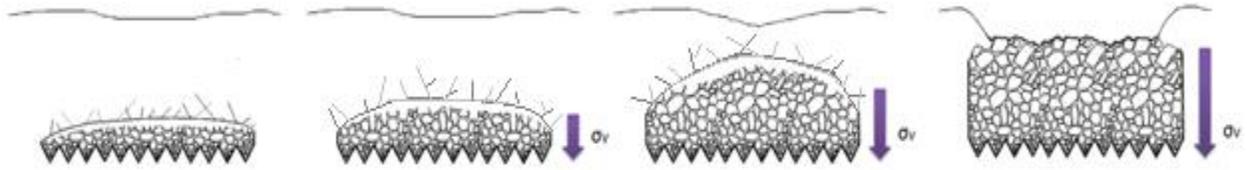


Figura 2. Crecimiento de columna de mineral in situ por propagación del hundimiento.

La evolución registrada (actualizada hasta el 2002) de alturas de columna en minas de *block caving* se indican en la Figura 3. Como se observa, la altura del *block caving* ha ido aumentando progresivamente con el tiempo [6, 7].

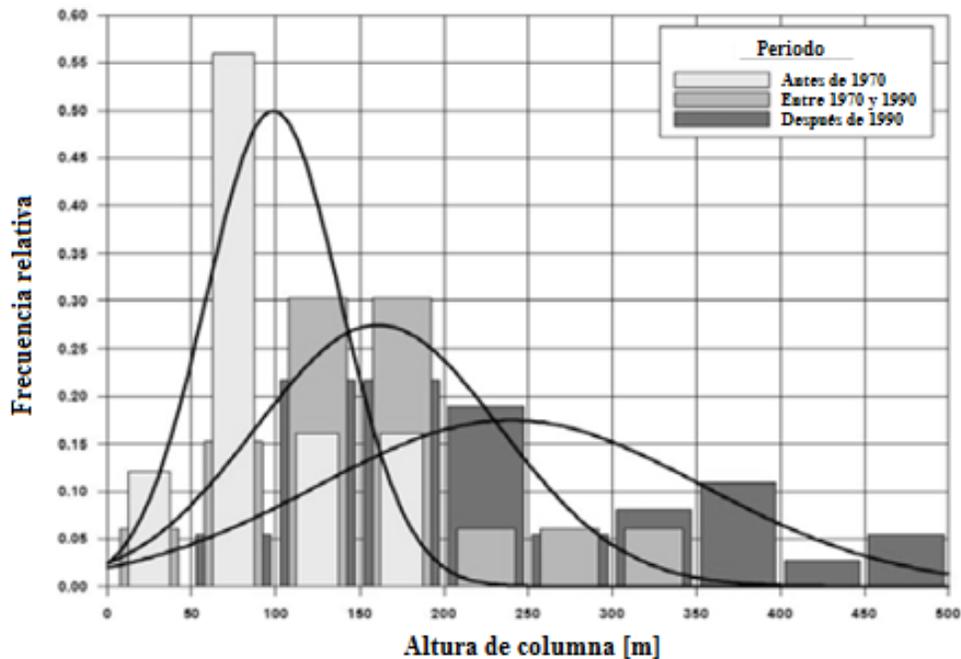


Figura 3: Evolución de alturas de columna en block caving.

A medida que se incrementa la profundidad de las operaciones mineras, se encuentra casi exclusivamente mineral primario, el cual implica serias dificultades para aplicar el método de *panel caving* convencional, tales como una alta sismicidad, fragmentación gruesa y daño en los sistemas de traspaso [8]. Junto con ello, la altura de columna de una operación masiva de *caving* está principalmente limitada por la geometría del cuerpo mineralizado a explotar. Los criterios elegidos para determinar la altura óptima deben considerar aspectos del negocio de la explotación maximizando beneficios o retorno [9].

Por otra parte, el grado de fragmentación del material generado en la columna de mineral in situ, una vez iniciada la propagación del *caving*, influye directamente en la cadena productiva aguas abajo. Los principales problemas se ubican en el nivel de producción en los puntos de extracción, tales como interferencias en el flujo gravitacional de material a causa de colgaduras y sobretamaños, siendo una de las principales perturbaciones en el sistema productivo minero. Los eventos de colgadura, motivo de interés en la presente investigación, corresponden a la formación de un arco estable de rocas de mineral o bloques que se atascan en lo alto de la columna de

mineral, impidiendo el libre flujo gravitacional, dejando inoperante el o los puntos de extracción involucrados.

Es posible distinguir en la minería por hundimiento tres diferentes niveles de fragmentación presentes: preexistente o in-situ, primaria y secundaria. La fragmentación in-situ corresponde a aquella presente naturalmente en el macizo rocoso como un conjunto de discontinuidades. Posteriormente, durante el proceso de *caving* se observa la fragmentación primaria, originada por el desprendimiento de bloques desde el *cave back* por efecto de la relajación de los esfuerzos inducidos al generarse una gran área sin soporte. Finalmente, y de interés en la presente investigación, la fragmentación secundaria es generada en la columna de mineral in situ, asociada al movimiento de los bloques a través de la columna hasta llegar a los puntos de extracción [10].

Una adecuada estimación de la ocurrencia de colgaduras permite mejorar la productividad y el plan de producción, así como también la selección de equipos para la mitigación de éstas [11].

En este contexto se busca desarrollar un modelo de fragmentación y un modelo de predicción de colgaduras, independientes entre sí, donde ambos componentes se encuentran ligados en cuanto a una primera etapa del manejo de minerales, dentro de la minería de *caving*.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

El objetivo general de este estudio, es proponer un modelo de conminución de material granular. Además, se plantea generar una estimación de la frecuencia de colgaduras, aplicado a minería por hundimiento. Ambos modelos basados en la realización de ensayos experimentales a escala de laboratorio, bajo altos esfuerzos verticales.

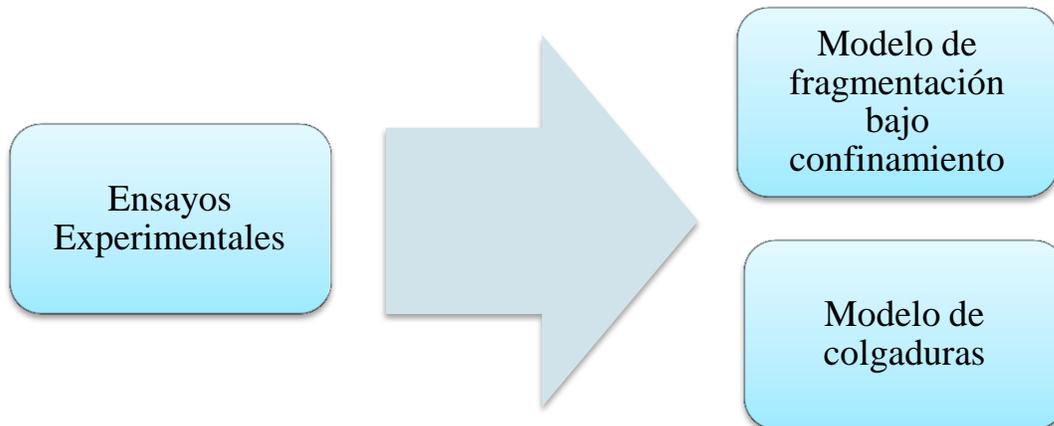


Figura 4: Esquema objetivo general.

1.3.2 Objetivos específicos

- i. Replicar ensayos previos realizados en modelo físico bajo confinamiento.
- ii. Con información de experimentos anteriores más replicas realizadas, desarrollar un modelo de fragmentación secundaria considerando presión vertical.
- iii. De igual manera que en el punto ii, determinar el comportamiento (modelando una ecuación) de la frecuencia de colgaduras en función del confinamiento.
- iv. Ajustar parámetros de ambos modelos para el material utilizado.

1.4 Alcances

- i. Generar modelo de predicción de colgaduras en función de las siguientes variables;
 - Presión vertical.
 - Distribución granulométrica.
- ii. Generar modelo de fragmentación secundaria en función de las siguientes variables;
 - Presión vertical.
 - Distribución granulométrica.
- iii. No será considerado el efecto de la presión horizontal.
- iv. No se considerará la incidencia de la presencia de finos ni humedad.
- v. Se evaluará una geometría de abertura cilíndrica.
- vi. El material utilizado corresponde a grava.

Capítulo 2: Revisión bibliográfica

Comportamiento del material granular, fragmentación secundaria y eventos de colgaduras

En el presente capítulo se presenta el estudio y revisión bibliográfica realizada de los principales temas que motivan el desarrollo de la investigación.

2.1 Comportamiento de material granular

El desarrollo de la presente investigación requiere entender el comportamiento del material granular a utilizar en los experimentos, el cual se busca asemejar al material presente en la columna de extracción generada en la minería de *block/panel caving*.

Diversos estudios se han realizado en material granular con el fin de entender su comportamiento [12-19], enfocados principalmente al análisis del comportamiento de suelos y material en silos. Varios principios desarrollados para contenedores y silos pueden aplicarse directamente o bajo ciertas modificaciones a aspectos del flujo gravitacional en operaciones mineras [20].

Dado el tamaño de las partículas, para estudiar la dinámica del sistema lo que se debe considerar es la mecánica clásica. Debido a esto, las fuerzas presentes entre partículas son estrictamente repulsivas, permitiendo obviar así la cohesión entre ellas. En minería de *caving* esto solo puede ocurrir cuando no hay una presencia significativa de finos y/o humedad, factores los cuales tienden a favorecer la cohesión entre las partículas.

El material granular puede definirse como un conglomerado de partículas macroscópicas discretas. Si no hay cohesión entre las partículas la forma que toma el material queda determinada por las condiciones de borde y la fuerza de gravedad. Si el material está seco, cualquier fluido intersticial puede ser despreciado al determinar la mayoría de las propiedades estáticas y de flujo del sistema [12]. Así el material granular muestra un comportamiento tanto como de sólidos como de líquidos. Si los fragmentos son lo suficientemente grandes y la viscosidad del fluido intersticial es lo suficientemente pequeña o no existe, es posible omitir fuerzas electrostáticas, aerodinámicas y capilares, y se habla de material granular seco sin cohesión. Por ende, las principales fuerzas presentes son dictadas exclusivamente por transferencia de momento y de disipación de energía (fricción y colisiones inelásticas) que ocurren en los contactos entre los granos y con las paredes [13].

La sobrecarga presente en el material granular producto de su propio peso (como la presente en una columna de extracción), generará esfuerzos entre los fragmentos. Esta presión ejercida sobre material granular seguirá trayectorias en función del empaquetamiento y distribución del material a través de los puntos de contacto entre fragmentos, como se ilustra en la Figura 5.

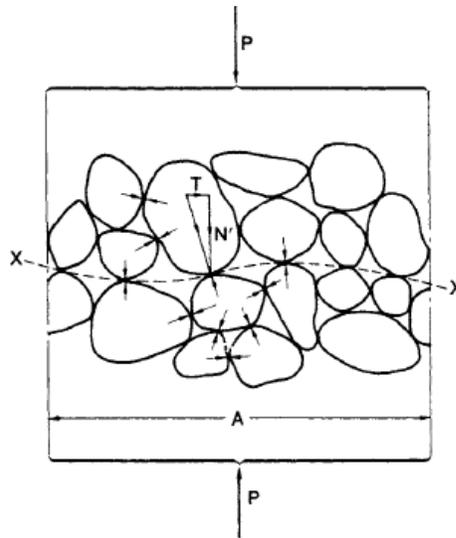


Figura 5: Fuerzas de contactos presentes entre el material granular, Craig 2007 [21].

Esta distribución de las trayectorias de esfuerzo dentro del material granular, favorecerá la fragmentación por compresión dentro del material al aplicarse sobre las singularidades de los fragmentos si logra sobrepasar su resistencia. A la vez, esta configuración adquirida por la trayectoria de esfuerzos se ve afectada por la geometría bajo la cual se encuentre el material (como bateas en un nivel de producción), modificando las trayectorias y generando arcos de esfuerzos dentro del material provocando colgaduras.

2.2 Fragmentación secundaria en minería de caving

Se entiende por fragmentación secundaria a la producida en la columna de mineral a medida que el material fluye a través de ésta, donde diversos factores presentes descritos en esta sección, van a influir en el grado de fragmentación a generar.

Diferentes autores identifican al menos tres niveles de fragmentación generada en minería de *caving*: fragmentación in situ, primaria y secundaria [10, 22-24], anteriormente definidas. Con el fin de determinar la distribución de tamaños que se obtendrán en los puntos de extracción, es necesario comprender estos tres niveles de fragmentación a los cuales se ve enfrentado el material quebrado del macizo rocoso.

La presente investigación se concentra en la fragmentación secundaria, la cual es generada por el flujo de material presente en la columna de material quebrado, representado esquemáticamente en la Figura 6.

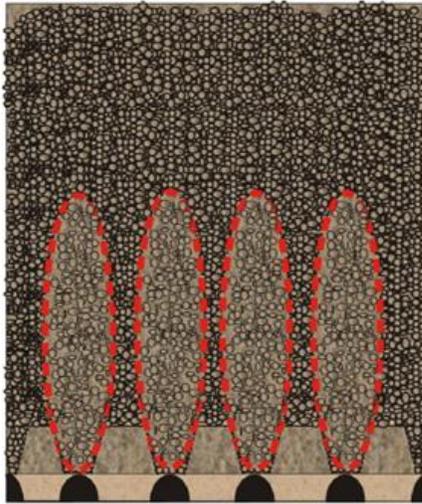


Figura 6: Modelo conceptual de columna de extracción en *block/panel caving* [14].

No es sencillo determinar el grado de fragmentación que se genera dentro del proceso de *caving*, para ello es necesario identificar los principales factores presentes, Laubscher plantea una serie de parámetros que influyen en la fragmentación generada dentro de las operaciones de *caving* [5]:

- El espaciamiento entre puntos de extracción.
- Entrada de dilución en la columna de extracción.
- Control de tiraje.
- Productividad de los puntos de extracción.
- Voladura secundaria y costos de reducción secundaria.
- Daño por voladura secundaria.

El grado de fragmentación del material se considera como uno de los principales factores que determina la productividad que se puede alcanzar en un punto de extracción, producto de la capacidad de flujo del material. En particular, en la última etapa de fragmentación sufrida por el mineral dentro de la columna de extracción, la fragmentación secundaria, se pueden identificar las principales propiedades y características que se deben conocer para poder determinar el grado de fragmentación, tales como [25]:

- El efecto de los finos.
- Estrategias y velocidad de tiraje.
- Resistencia de bloques.
- Forma de fragmentos.
- Factor de fricción de fragmentos.
- Chancabilidad.
- Altura de columna y esfuerzos de *caving* por presencia de arcos.

La distribución de tamaños no solo influirá en la capacidad de flujo del material en los niveles de producción, también puede influir en otros factores como lo es la propagación del *caving*; por ejemplo, la propagación puede disminuir producto de una baja densidad aparente del material quebrado presente en la columna de extracción, esto se debe a un notorio aumento en el volumen aparente de material fragmentando (esponjamiento). Esta disminución en la propagación del *caving* puede ser contrarrestada aumentando la velocidad de tiraje.

La fragmentación secundaria puede ser representada como un proceso de conminución [24], donde a una mayor altura de la columna de mineral, mayor es la probabilidad que tienen los fragmentos de sufrir reducción de tamaño. A su vez, este proceso puede asemejarse a una molienda autógena [23], debido a que los bloques son reducidos por el contacto con otros bloques adyacentes a medida que son extraídos. Una de las principales diferencias con la molienda autógena, es que los *inputs* vienen dados por las condiciones bajo las cuales se encuentra la operación y no pueden ser modificados directamente, tales como la distribución granulométrica y propiedades del material.

Se han identificado diversos parámetros que influyen dentro la fragmentación, pero se deben conocer también los mecanismos presentes. En la columna de mineral podemos encontrar diferentes procesos de fragmentación, tales como; compresión, impacto y abrasión. En particular el enfoque de este trabajo considera nula o casi nula la presencia de fragmentación por impacto. Por otro lado, la literatura indica que la compresión y la abrasión son los principales mecanismos de falla que ocurre dentro de la columna de mineral [24, 26], observados también a escala de laboratorio [27]. Otros mecanismos presentes propuestos por Brown (2007) que influyen en la fragmentación secundaria son [10, 23]:

- Extensión de discontinuidades pre-existentes.
- Aplastamiento por carga sobrepuesta.
- Aberturas de discontinuidades.
- Planos de debilidad horizontal.
- Fallas compresivas de bloques bajo la influencia de esfuerzos dentro del *cave-back*.
- Quiebre de bloques individuales por contacto con otros bloques.
- Abrasión por molienda autógena de las esquinas y/o aristas de bloques generando finos.

La fractura por abrasión ocurre cuando se aplica una energía insuficiente para fracturar la roca y sólo se producen esfuerzos localizados en pequeñas zonas que se quiebran generando así una distribución de partículas muy finas. Esta es la principal causa de la generación de material fino, y los factores que influyen en este mecanismo se asocian a propiedades del material (abrasividad, factor de forma, resistencia), como también a situaciones operacionales como el ritmo de extracción y políticas de tiraje. Esto último producto de la generación de finos generada en los límites de las zonas de movimiento del material dentro de una columna de extracción, por la aparición de esfuerzos de cortes [26, 28].

Ensayos realizados por Pierce (2010) muestran que la abrasión domina bajo cizallamiento a bajos esfuerzos [26], en donde la distribución de tamaños en este caso desarrolla un mayor porcentaje de material fino el cual tiende a amortiguar el bloque más grande, disminuyendo así el desgaste en éste bloque de mayor tamaño [5].

Por otra parte, la fractura por compresión ocurre cuando la energía aplicada es justo lo suficiente para cargar pocas regiones del bloque al punto de ruptura y sólo resultan unas pocas partículas gruesas. En la práctica estos eventos no ocurren aislados. Por ejemplo, es bastante común que ocurra abrasión en los puntos de carga en compresión [29]. Para que se produzca fractura por compresión de una roca el esfuerzo aplicado debe exceder la resistencia del material [30].

Los materiales con una porosidad inicial más baja pueden experimentar menos rotura bajo compresión, al encontrarse en un ensamblado más compacto las fuerzas se distribuyen entre un mayor número de partículas, disminuyendo de ese modo los esfuerzos de tracción generados en una partícula [26].

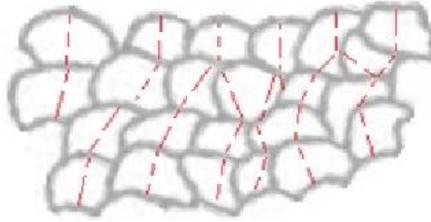


Figura 7: Distribución de esfuerzos en material granular.

Al parecer, el factor más importante que afecta tanto a la resistencia al corte y a la compresión, es el fenómeno de quiebre que sufre el cuerpo granular cuando se somete a cambios en su estado de tensiones durante la aplicación de carga [15]. El aumento de la dureza del mineral disminuye la cantidad de quiebre de las partículas, los materiales más duros o más resistentes muestran una menor cantidad de rotura durante un esfuerzo dado [18]. Los factores que influyen en el quiebre o fragmentación de partículas bajo condiciones de esfuerzos son:

- Distribución granulométrica.
- Forma de los fragmentos.
- Estado de estrés.
- Distribución efectiva de las trayectorias de esfuerzos.
- Índice de vacíos.
- Dureza de las partículas.
- Presencia de agua.

También se pueden apreciar fracturas secundarias que se ocasionan a altos esfuerzos de cizalle particularmente en la superficie de los bloques. Debido a la propagación de la fractura, se pueden generar nuevas regiones de esfuerzos de tensión, aunque la magnitud de las tensiones puede ser baja en comparación con un esfuerzo de compresión aplicado, la relativamente baja resistencia a la tracción de la roca hace que tales regiones sean zonas potenciales para la formación de grietas adicionales [31]. Una grieta necesita sólo una cierta cantidad de energía para propagarse, al alcanzar un cierto largo se bifurcará y así sucesivamente, causando la fragmentación en lo que se denomina el árbol de bifurcación.

La mayoría de los minerales son frágiles y resisten la tendencia a deformarse plásticamente. Sin embargo, generalmente no son tenaces y pueden ser fracturados con relativa facilidad, debido a la presencia de micro y macro fallas causadas por su origen y tratamiento anterior. Dureza y tenacidad son conceptos diferentes; la dureza de un material representa su capacidad a resistir la indentación y la deformación, los minerales son generalmente bastante duros, mientras que la tenacidad, es la capacidad de resistir esfuerzos sin fractura o falla, esta última característica es de primordial interés para la conminución.

El tamaño de los fragmentos de roca observado en los puntos de extracción tiende a disminuir a medida que el *caving* va progresando. Esto se atribuye a la mayor probabilidad de quiebre de fragmentos que puede ocurrir a medida que se desplazan desde su origen (cada vez

más distante) hasta los puntos de extracción. Como consecuencia de la disminución del tamaño de los fragmentos al progresar la extracción, se genera un impacto en la geometría del elipsoide de movimiento (IMZ) y la migración de finos [24, 26, 32].

2.2.1 Modelos predictivos de fragmentación

Existen diversos métodos predictivos de fragmentación aplicados a la minería de *block/panel caving*, tanto modelos empíricos como la utilización de softwares, algunos de los cuales son mencionados a continuación.

Block caving fragmentation (BCF, 1999)

Es un programa desarrollado para estimar el tamaño de los fragmentos de roca que se reportan a un punto de extracción durante el hundimiento por bloques. Mide los tipos de fragmentación presentes en la minería por *caving*; en particular, de interés en la presente investigación, la fragmentación secundaria. Para ello considera la resistencia del bloque, presión del *cave*, esfuerzos inducidos por arqueamiento de la columna y altura de extracción. Genera como resultado gráficos de distribución de tamaños de partículas.

El concepto inicial BCF fue desarrollado por DH Laubscher en colaboración con AR Guest y PJ Bartlett. El programa utiliza una técnica simplificada para la determinación de tamaños de bloque in situ y reglas empíricas para predecir cómo los bloques reducirían su tamaño en una columna de extracción (Esterhuizen 1994). El programa se ha mejorado durante 1998 y 1999 como parte del estudio Internacional de Caving I (Esterhuizen 1999). BCF es actualmente el método más utilizado para evaluar la fragmentación in situ, primaria y secundaria en *block/panel caving*.

SIZE (Merino 1986)

Es una herramienta que calcula la fragmentación secundaria y primaria. La fragmentación secundaria la determina evaluando una función de selección (basada en la forma de los fragmentos y frecuencia de fractura) y una función de quiebre (asumiendo que un bloque se quiebra en 2). En general, este método se basa principalmente en la información de las frecuencias de fractura por metro de los sets de discontinuidades. Información de entrada relevante no es considerada, como la condición de esfuerzos o información del relleno de discontinuidades.

Chart Laubscher (1994)

Indica la disminución que se tiene en la fragmentación para diferentes alturas de extracción, y de acuerdo al tipo de material presente: bloques gruesos de mineral (utilizando LHD) hasta material de menores dimensiones, como se muestra en el siguiente gráfico.

CAVE FRAGMENTATION – SIZE DISTRIBUTION

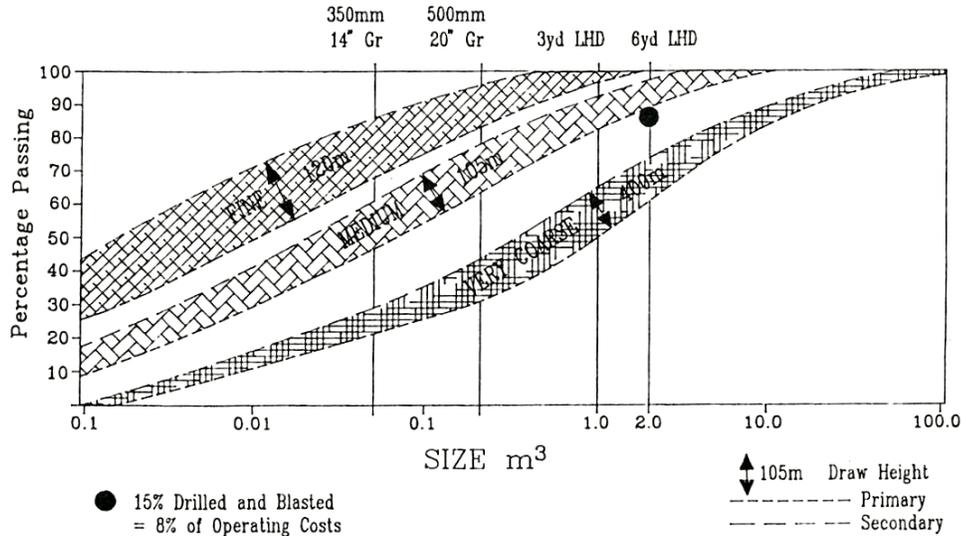


Figura 8: Distribución de tamaños en caving, Laubscher 1994.

Core2Frag

Este programa, también utilizado para medir la fragmentación producto de pozos de tronadura, incorpora un módulo de fragmentación secundaria, el que considera que los bloques se rompen a una relación de aspecto constante. La altura de extracción se utiliza para controlar el número de veces que los bloques se dividen dentro de la columna de extracción. También se plantea que cada vez que un bloque se divide, una cierta cantidad de fino es generada. Así, la distribución de la fragmentación secundaria se genera y el programa almacena la información para su uso en un análisis posterior sobre la generación de colgaduras.

The empirical breakage (modelo de Bridgwater et al. 2003)

Este modelo fue considerado por su potencial para estimar la fragmentación secundaria inducida por esfuerzos de cizalle en el contexto de minería de *caving*. Se basa en los resultados de los experimentos realizados por Bridgwater et al. (2003), los cuales confirman el efecto de la mecánica de desgaste presente en un agrupamiento inicial de partículas del mismo tamaño, para un intervalo de tensiones y deformaciones, los cuales se relacionan por medio de una ley de desgaste empírica:

$$W = K_N \left(\frac{\sigma_N \cdot \Gamma^\phi}{\sigma_{SCS}} \right)^\beta$$

Donde “*W*” es la fracción de masa conminuida para una tensión normal dada “ σ_N ”; “ Γ ” la tensión de cizalle; “ σ_{SCS} ” es la resistencia a la tracción; K_N , ϕ y β son constantes empíricas. Este modelo sugiere que la fragmentación secundaria, bajo esfuerzos de corte, está fuertemente controlada por el producto del esfuerzo y la tensión de cizalle, que es esencialmente el trabajo realizado sobre el material. Bridgwater proporciona las constantes empíricas para un número variado de formas de fragmentos, combinados en un rango de tamaños. Así, la obtención de un set de curvas de distribución de tamaño producto de conminución, son las bases de la ecuación planteada. Los resultados para los diferentes set de partículas se muestran en la Figura 9.

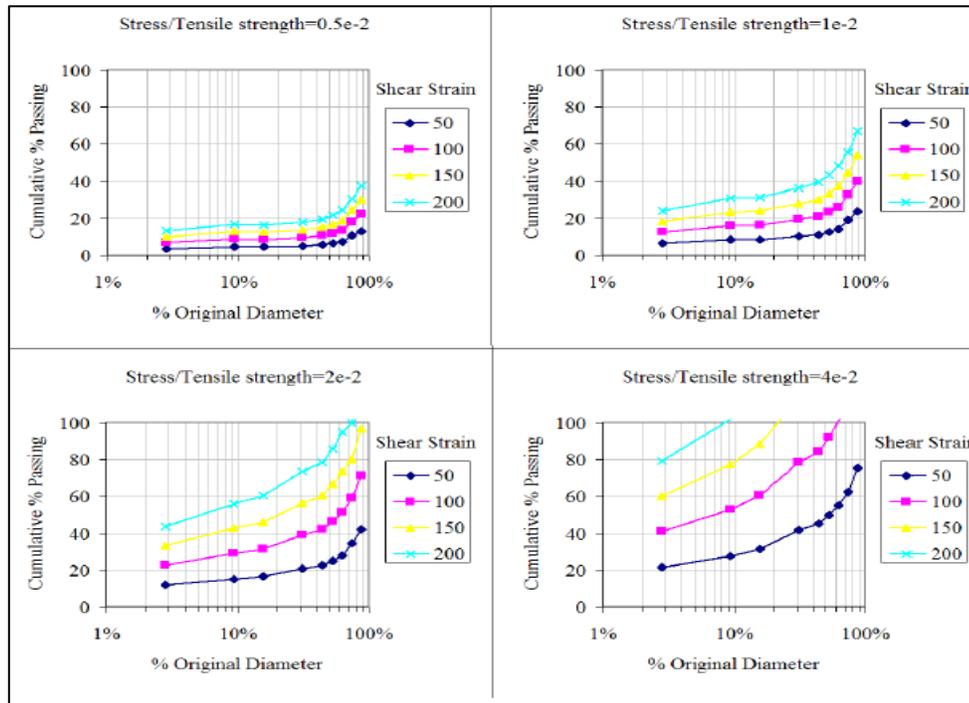


Figura 9: Curvas de distribución de tamaños para modelo de Bridwater 2003 [33].

DFN modelling and applications

El modelo de rotura por corte (cizalle) se ha incorporado en el paquete de simulación de ReboP, así un análisis de fragmentación secundaria puede llevarse a cabo de forma automática, como parte de los estudios de simulación de flujo. También propone un enfoque para la predicción de la fragmentación utilizando la metodología SRM.

Se debe tener en cuenta que una de las principales dificultades encontradas en los modelos de fragmentación de *caving* es el desarrollo y validación de los datos (o imposibilidad en algunos casos) debido a lo difícil que resulta muestrear la cámara o columna in situ para medir la distribución de los tamaños de bloques en las diferentes etapas de la fragmentación.

2.3 Colgadas en el proceso productivo

La mayor cantidad de reportes de sobretamaños y colgadas de rocas en puntos de extracción provienen de explotaciones por *block caving* en cuerpos mineralizados competentes y de fragmentación gruesa. Estos eventos generan interrupciones en la etapa de carguío inhabilitando puntos de extracción.

Una colgadura corresponde a la formación de un arco estable de rocas de mineral o bloques que se atascan en lo alto de la columna de extracción, impidiendo el libre flujo gravitacional, y dejando inoperante el o los puntos de extracción afectados [34]. Se pueden distinguir principalmente dos tipos de colgadas: asociadas a arcos de rocas y/o por presencia de material cohesivo [20, 35, 36]. La formación de arcos sobre una pared rugosa se genera por la rotación de los esfuerzos principales sobre la pared, esto produce distribuciones de esfuerzos en la pared esencialmente triangulares [37], el exceso de presión puede reducirse si la pared es lisa. La

distribución de los esfuerzos generada por la formación de un arco va a determinar la magnitud de las fuerzas aplicadas sobre la pared, también influirá la geometría del arco.

Para las colgaduras asociadas a arcos de roca, se aplica una relación entre el *diámetro máximo de partícula* (d) y la *abertura de la estructura* (D), con el fin de determinar la condición de flujo que puede presentar el material. Diversos autores han definido una relación “ D/d ” como se puede apreciar en el siguiente gráfico.

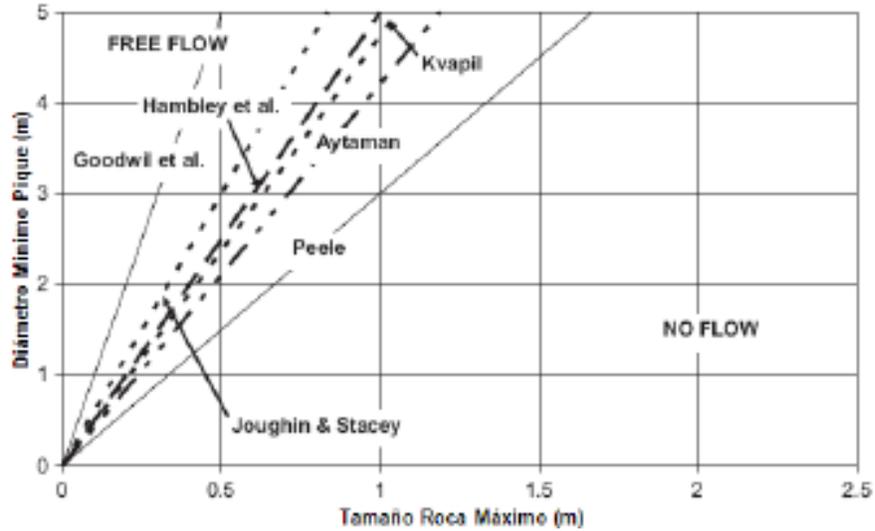


Figura 10: Diámetro de abertura vs tamaño máximo determinado por diversos autores [1].

En función del gráfico anterior, se ha generado la siguiente tabla para determinar la condición de flujo que puede tener un sistema de traspaso de mineral:

Tabla 1: Condición de flujo en sistemas de traspaso.

Razón	Frecuencia de colgaduras
$D/d > 5$	Baja
$5 > D/d > 3$	Probable
$D/d < 3$	Muy alta

Si bien estas relaciones surgen a partir de ensayos y experiencia en silos y piques de traspaso, dan una idea de la importancia que tiene la relación entre el tamaño de los bloques y el ancho de la abertura por la cual fluye el material, el cual bien podría ser un punto de extracción.

Si bien la relación entre el tamaño de los fragmentos y la abertura es un parámetro relevante cuando se estudia el flujo del material granular, otros parámetros deben ser considerados. Tras ensayos realizados a escala de laboratorio [27,38], se ha considerado también el efecto del confinamiento (por la carga vertical) en la capacidad de flujo que presenta el material, como se ilustra en la Figura 11.

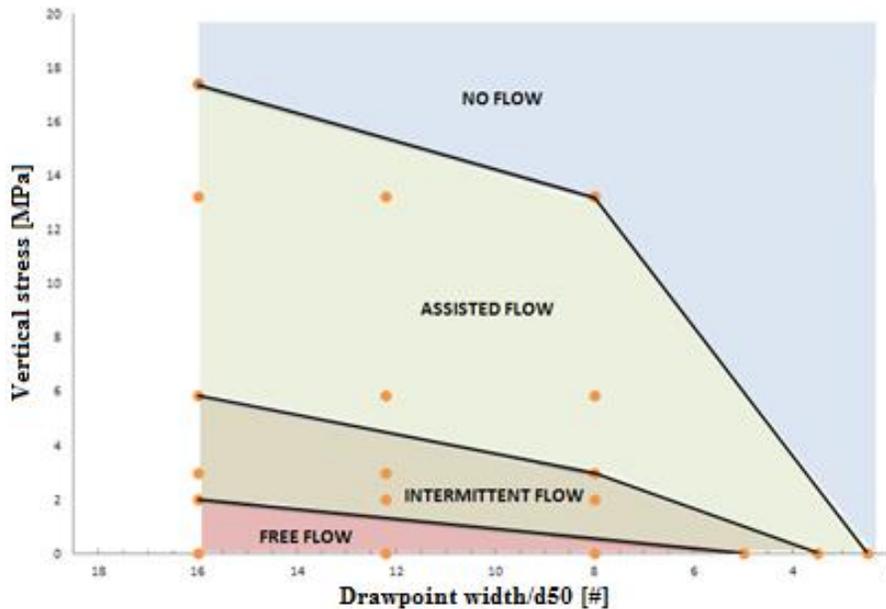


Figura 11: Condición de flujo considerando carga vertical, Fuenzalida 2012.

La capacidad de flujo del material se define como la condición de flujo o la habilidad del material granular a fluir bajo un cierto set de propiedades del material, geometría de la infraestructura de extracción y condiciones de esfuerzos [38]. Identificándose cualitativamente; el flujo libre, flujo intermitente, flujo asistido y sin flujo, a medida que se dificulta la capacidad de fluir del material.

Por otro lado, las colgaduras producidas por arcos cohesivos están principalmente relacionadas con la presencia de humedad y material fino en el material quebrado [20, 37]. En la actualidad los diseños de las infraestructuras mineras en el nivel de producción no apuntan a prevenir este tipo de arcos, por su complejidad y escasez de entendimiento.

Es posible determinar el esfuerzo vertical (considerando la presencia de finos) generado por la sobrecarga de material, extendiendo la ecuación de Janssen, como se indica a continuación [35, 39].

$$\sigma_v = \frac{\gamma \cdot \left(\frac{A}{P}\right) - c \cdot M}{M \cdot \tan(\phi)} \left[1 - \exp\left(\frac{-z \cdot M \cdot \tan(\phi)}{A/P}\right) \right]$$

Donde “ σ_v ” corresponde al esfuerzo vertical medio; “ z ” es profundidad de material cohesivo; “ A ” el área de sección transversal; “ P ” el perímetro; “ γ ” peso específico de material cohesivo; “ c ” corresponde a la cohesión; “ ϕ ” al ángulo de fricción del material y $M = 1/[1+2(\tan \phi)^2]$. Esta ecuación fue diseñada para piques de traspaso (estudios realizados en silos) con geometría cilíndrica, por lo que se deben considerar cambios en la geometría y condiciones de borde correspondientes para realizar un cálculo análogo a nivel de puntos de extracción.

Independiente del tipo de colgadura generada, ya sea por colpas o por presencia de material cohesivo, en la minería de *caving* las colgaduras no necesariamente pueden generarse a nivel de puntos de extracción sino que pueden aparecer en diversas zonas de la columna de mineral, las cuales se identifican en la Figura 12.

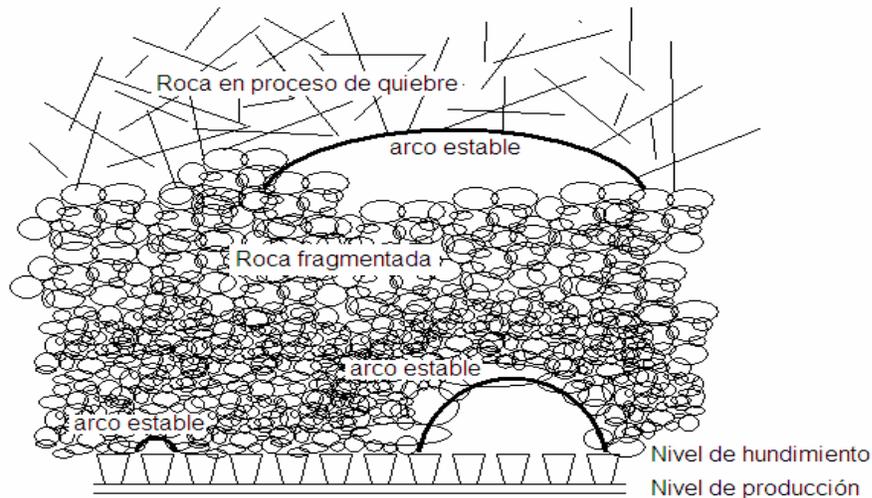


Figura 12: Formación de arcos presentes en métodos de caving [34].

Dependiendo a la altura donde se genere el arco, el impacto en la operación es diferente, como también, la forma de enfrentarlo y mitigarlo. Es por ello que en minería de *caving* se dispone de la siguiente clasificación de colgaduras [2]:

- 1- Originadas por encadenamientos naturales de fragmentos de roca de gran tamaño que impiden el flujo de mineral a través de los puntos de extracción.
- 2- Colgaduras originadas por la compactación de material fino en presencia de humedad, en la parte inferior de la pila de material fragmentado al interior de la batea, lo que genera un piso natural de apoyo para fragmentos de gran tamaño, impidiendo el flujo de mineral.
- 3- Originadas por el diseño y dimensiones del embudo o batea de extracción inadecuada en relación al tamaño de los fragmentos que fluyen gravitacionalmente por ella.

Así grandes arcos formados en la columna de mineral por fragmentación gruesa, requieren una gran zona interactiva para desestabilizar el arco o un determinado periodo de tiempo para que el bloque en el arco pueda fallar [5]. Dentro de los principales factores que influyen en la presencia de colgaduras se destacan los siguientes [20, 40]:

- Distribución de tamaños de los fragmentos de roca.
- Tamaño máximo de los fragmentos.
- Forma de los fragmentos.
- Rugosidad de la superficie de las partículas.
- Fricción entre las partículas.
- Resistencia de los fragmentos.
- Presencia de finos.
- Contenido de humedad.
- Compresibilidad y compactación.
- Geometría del punto de extracción.
- Magnitud, distribución y dirección de fuerzas y cargas externas.
- Tasa de extracción.

En base a esto, se pueden distinguir factores asociados al diseño de ingeniería y factores naturales propios de la roca heterogénea.

2.3.1 Geometrías adoptadas por arcos de rocas

Dependiendo de la redistribución de esfuerzos que experimente el material durante la formación de arcos, va a depender la geometría que estos van a adoptar. Las configuraciones generadas por arcos estables de roca y los diversos factores que influyen en éstas ha dado origen a diversos estudios experimentales llevados a cabo principalmente por DR Kvapil en materiales granulares [20].

Una de las principales propiedades que inciden en las dimensiones de estos arcos y en la movilidad del material es su ángulo de fricción interna. Al determinar la altura del arco se consideran las siguientes dos situaciones:

- Si el ángulo de fricción converge a 90° , la altura del arco tiende a 0 (materiales extremadamente resistentes).
- Si el ángulo de fricción converge a 0° , la altura del arco tiende a infinito (materiales extremadamente débiles).

Por otra parte, la altura a la cual se generen los arcos va a afectar su geometría, es por ello la importancia de considerar la carga vertical aplicada sobre el material quebrado. Al aumentar la sobrecarga, el ángulo de fricción interna disminuye en un cierto ángulo Ψ de reducción, el cual se determina mediante la fórmula empírica [20]:

$$\psi = \frac{\gamma \cdot z \cdot \cos(\phi)}{S \cdot \sin(\phi)} \cdot \frac{9,81}{3}$$

Donde “ γ ” es la densidad del material [t/m^3]; “ z ” la profundidad [m] a la cual se desea determinar la disminución del ángulo de fricción interna; “ S ” es la resistencia al corte de la roca y “ ϕ ” el ángulo de fricción interna. Así queda definido el ángulo de fricción aparente como:

$$\phi_{ap} = \phi - 2 \cdot \Psi$$

Una vez corregido el ángulo de fricción interna del material en función de la profundidad se puede determinar la altura del arco “ h ” para dos situaciones:

Caso 1, cuando ϕ es menor de 45° :

$$h = l \cdot \frac{4 \cdot \cos(\phi - 2 \cdot \Psi)}{2,415 \cdot \sin(\phi - 2 \cdot \Psi)}$$

Caso 2, cuando ϕ es mayor de 45° :

$$h = l \cdot \frac{4 \cdot \cos(\phi - 2 \cdot \Psi)}{1 + \sin(\phi - 2 \cdot \Psi)}$$

Donde “ l ” corresponde al ancho del arco de roca el cual se determina mediante la siguiente relación:

$$l = a + D \cdot \cos(\alpha)$$

Donde “ D ” el diámetro medio del bloque [m]; “ a ” es la abertura de la batea [m] y “ α ” el ángulo de la pared en la batea.

El ángulo de fricción interna del material juega un rol importante en la altura de la colgadura que se generará, gráficamente se puede ver en la Figura 13 como a medida que aumenta este ángulo la altura de la colgadura decrece, dado un set fijo de parámetros (geometrías consideradas en ejemplo ilustrado; $a = 3$ m, $D = 1,5$ m, $\alpha = 70^\circ$).

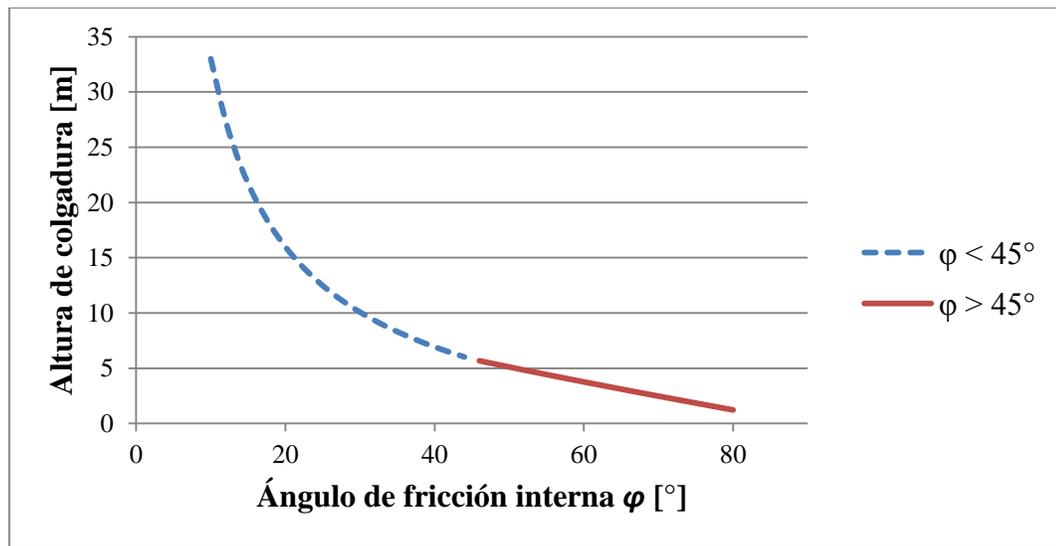


Figura 13: Impacto del ángulo de fricción en la altura de las colgaduras.

En la figura anterior, no se considera el efecto de la profundidad sobre el ángulo de fricción interna, $\phi - 2 \cdot \Psi$, el cual disminuye la pendiente de la curva ilustrada.

Los diferentes parámetros geométricos descritos pueden observarse en las Figuras 14 y 15 para cada caso respectivamente. Una vez determinados “ h ” y “ l ” queda definida la geometría del arco. Para el caso 1, la geometría y distribución de esfuerzos se observan en la Figura 14.

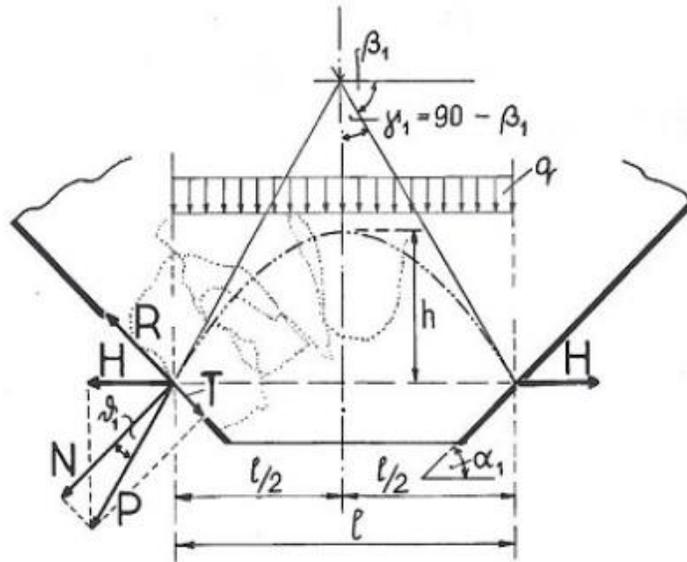


Figura 14: Distribución de fuerza en arco de rocas alto, Kvapil 2004.

Por otra parte, para el caso 2 se tiene la configuración ilustrada en la Figura 15. En este caso la altura del arco disminuye (cuando ϕ es mayor de 45°).

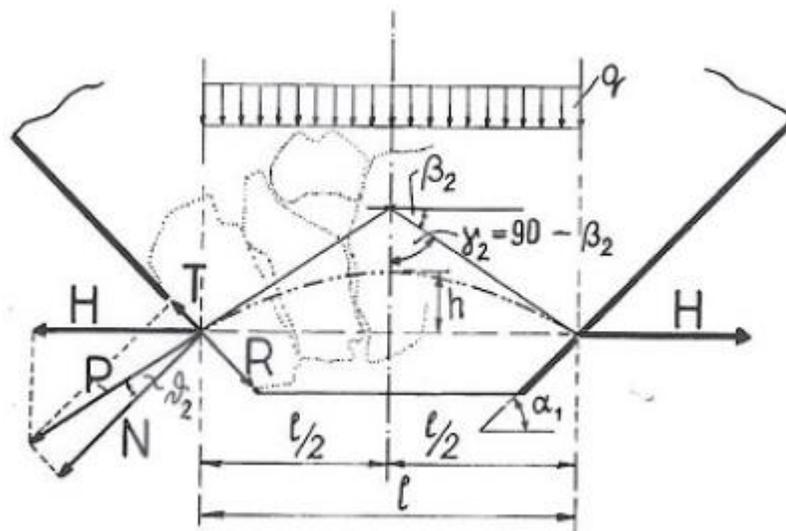


Figura 15: Distribución de fuerza en arco de roca bajo, Kvapil 2004.

Como se observa en las Figuras 14 y 15, las fuerzas de roce "R" generadas sobre la pared que ofrece soporte y estabilidad al arco, son opuestas en cada caso producto de la distribución de esfuerzos generada en cada configuración.

La fuerza horizontal "H", aplicada sobre la pared de la batea puede estimarse con la siguiente relación:

$$H = \frac{q \cdot l}{2 \cdot \tan \beta}$$

Donde “ q ” corresponde a la carga aplicada por el material quebrado sobre el arco. El impacto que tiene el ángulo de fricción interno del material con respecto a los esfuerzos horizontales sobre la pared de la batea es graficado en la Figura 16.

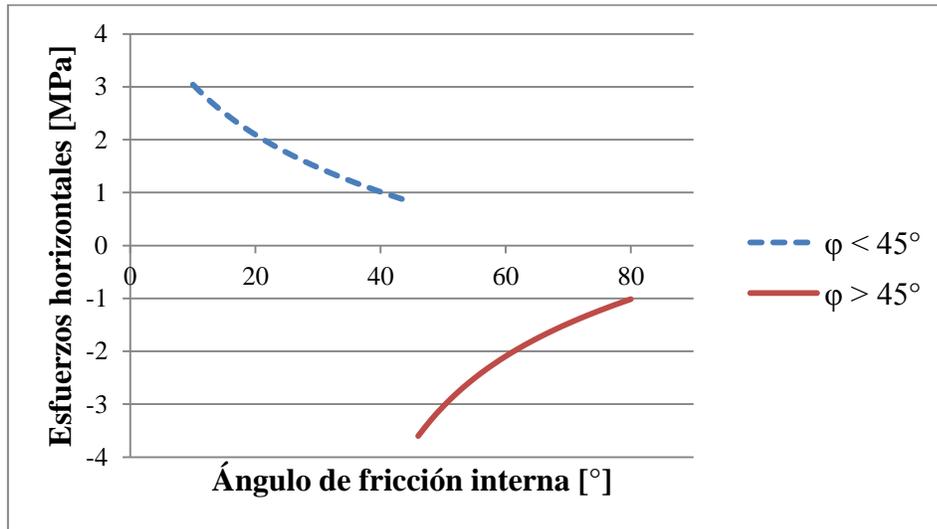


Figura 16: Esfuerzos horizontales sobre batea

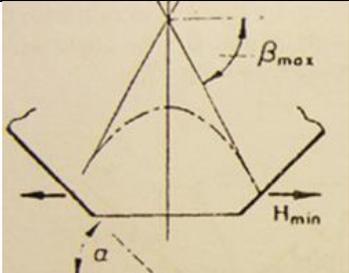
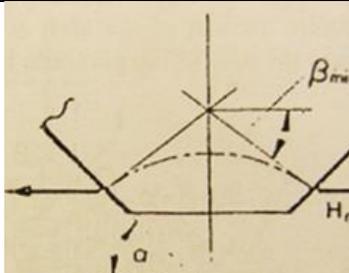
Para determinar esta carga “ q ” generada por la columna de mineral en minería de *caving*, Fuenzalida (2012) propone la utilización de la fórmula de Nedderman [27] para una columna de material granular, derivada a partir de la ecuación de Janssen [39]:

$$q = \frac{R_h \cdot \gamma}{k \cdot \tan\phi} \left(1 - \exp\left(-\frac{k \cdot \tan\phi}{R_h} \cdot z\right) \right)$$

Donde “ R_h ” corresponde al radio hidráulico [m]; “ γ ” el peso específico del material [$\text{kg/m}^2\text{s}^2$]; “ k ” la relación entre esfuerzo vertical y horizontal; “ ϕ ” el ángulo de fricción interna del material, y “ z ” la altura de columna [m].

Los bloques de material grueso pueden acoplarse en una configuración aleatoria, ahora bien las características del arco pueden expresarse en términos de β . La altura del arco variará dentro de ciertos límites, que corresponden a $\beta_{max} > \beta > \beta_{min}$, sin perturbar el equilibrio como se indica en la Tabla 2.

Tabla 2: Altura máxima y mínima de un arco de roca sobre batea.

Máxima altura del arco de roca	Mínima altura del arco de roca
	
$\beta_{max} = 90^\circ - \alpha + \phi$	$\beta_{min} = 90^\circ - \alpha - \phi$
$H_{min} = (q \cdot l/2) \cdot \tan(\alpha - \phi)$	$H_{max} = (q \cdot l/2) \cdot \tan(\alpha + \phi)$

Ensayos realizados en modelos físicos [20] y la evidencia empírica [2, 34], dan cuenta que las colgaduras pueden ocurrir a cualquier altura sobre el nivel de extracción e incluso en la misma zona de flujo. La falla repentina de grandes arcos sobre puntos de extracción puede dar a lugar una explosión de *air blast*, generando serios daños en el sector. A partir de la recopilación de datos en terreno con respecto a las colgaduras generadas en puntos de extracción, se ha observado lo siguiente [2]:

- Fluye más tonelaje entre colgadura a medida que aumenta el porcentaje y altura de extracción. Esto implica que el índice de colgaduras (# colgaduras/1000 ton) disminuye con el porcentaje y altura de extracción.
- La altura de colgadura aumenta a medida que el porcentaje de extracción y la altura de extracción aumentan.
- La mayor cantidad de colgaduras se encuentra entre los 4 y 4,5 m de altura.

2.3.2 Métodos de detección y eliminación

Operacionalmente los arcos generan una interferencia en el proceso la cual debe ser identificada y eliminada. Para detectar puntos de extracción colgados básicamente se utiliza inspección visual o mediante cámaras. Existe tecnología más avanzada para la detección de colgaduras como la utilización de láser, radar, reflexión de microondas y ultrasonido. Estas últimas son utilizadas principalmente para la detección de colgaduras situadas en piques de traspaso [35].

Al momento de eliminar una colgadura (descuelgue), algunas propiedades del material pueden favorecer el descuelgue natural de arcos en puntos de extracción. Por ejemplo, un ángulo de fricción bajo tiende a facilitar el flujo de material favoreciendo así el colapso de arcos [5], también una baja resistencia de los bloques implica una rápida falla de estos.

Artificialmente, la principal práctica utilizada para eliminar colgaduras en los puntos de extracción es la reducción secundaria mediante perforación y tronadura, que ha demostrado ser un método eficiente y efectivo [2]. Aunque para colgaduras ubicadas a gran altura, son requeridos equipos especializados, donde se adhiere un paquete con explosivo colocado en el sector que se encuentra colgado sin necesidad de realizar perforación. Otro método menos común para eliminar estas colgaduras es el disparo de proyectil. Los métodos con explosivos utilizados para remover colgaduras, no son recomendados cuando se tienen colgaduras de arcos cohesivos, debido a que la tronadura puede provocar una mayor adhesión y compactación del material que se desea remover. Estos tipos de arcos también pueden generar un potencial riesgo al personal que se encuentre en la zona si llegase a ocurrir un escurrimiento de barro [41].

Existen métodos alternativos como el desarrollado en *Premier Mine*, donde construyen un nivel secundario de perforación, entre en nivel de hundimiento y la batea, situado en el *rift pillar* para así perforar los arcos de roca formados sobre ella. El esquema utilizado se muestra en la siguiente figura.

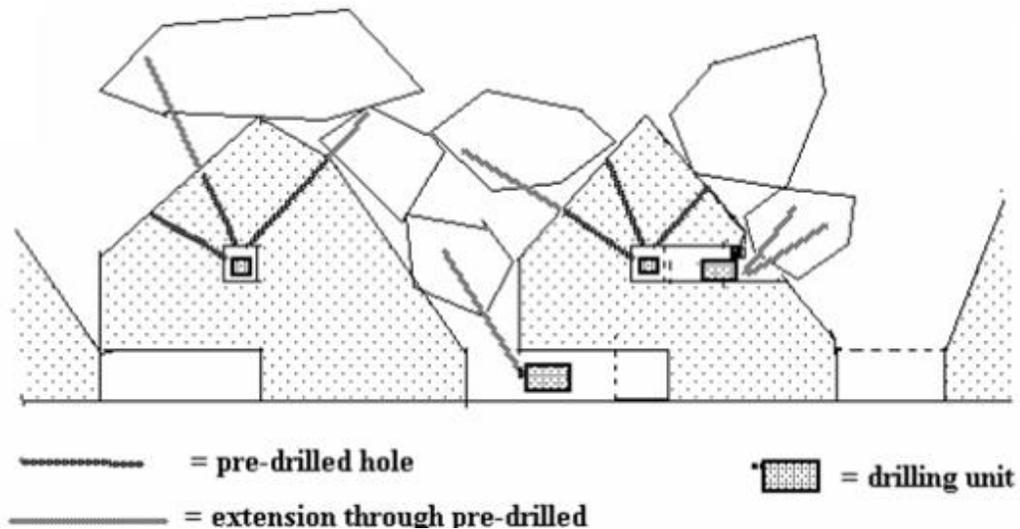


Figura 17: Nivel secundario de perforación para eliminación de colgaduras [34].

2.3.3 Mediciones en terreno

Con el fin de validar o ajustar posteriormente un modelo predictivo de colgaduras, se recopiló información de eventos ocurridos en diversas faenas de *block caving* en Chile.

La Tabla 3 contiene datos tomados de colgaduras desde Andina de Codelco, considerando material primario y secundario, los cuales fueron separados en tres sectores principales A, B y C. La zona A corresponde a material primario y las zonas B y C a material secundario. Se indican los tonelajes promedios (entre puntos de extracción) extraídos de cada sector entre cada evento de colgadura, y el índice de colgadura, parámetro que representa la frecuencia con que ocurren estas interferencias para un cierto tonelaje.

Tabla 3: Frecuencia de colgaduras medidas en Andina, Troncoso 2006 [34].

Zona	Tonelaje entre evento	Índice de colgaduras*
A	921	1,1
B	2.048	0,5
C	5.320	0,2

*Cantidad de colgaduras cada 1000 t

También Maass (2012) recopiló información de la mina El Teniente y Salvador, separando la frecuencia de colgaduras en función de la altura de columna de extracción asociada a un cierto porcentaje de extracción.

Tabla 4: Mediciones de colgaduras en función de la altura la extracción.

Altura de extracción				
Altura [m]	0-50	0-100	0-200	0-300
Frecuencia [ton/colgadura]	251	327	461	514
Índice	3,79	3,06	2,09	1,91
Altura promedio [m]	3,87	4,19	4,92	4,98

Tabla 5: Mediciones de colgaduras en función del porcentaje de extracción.

Porcentaje de extracción [%]	0-20	0-30	0-50	0-70
Frecuencia [ton/colgadura]	317	357	461	514
Índice	3,14	2,69	2,09	1,19
Altura promedio [m]	4,08	4,7	4,92	4,98

En la Tabla 3 se observa una mayor frecuencia de colgaduras en material primario, mientras que en las Tablas 4 y 5, se aprecia una disminución de la frecuencia de colgaduras a medida que se progresa en la extracción, como fue planteado por otros autores anteriormente, asociado a la disminución del tamaño de los fragmentos.

2.4 Conclusiones del capítulo

A continuación se describen las conclusiones obtenidas a partir de la revisión bibliográfica realizada del estado del arte, con respecto a la fragmentación secundaria y eventos de colgadura en minería de *caving*.

2.4.1 Fragmentación en *caving*

La fragmentación del mineral que se obtiene en el nivel de producción en operaciones de *block/panel caving* va a depender de diversos factores, tanto de sus propiedades como del ambiente en el cual se encuentra el mineral. También de parámetros artificiales como lo son el diseño minero y la operación del sistema propiamente tal. En particular la fragmentación secundaria, que es la de interés en la presente memoria, corresponde a la última etapa de fragmentación sufrida por los bloques de mineral dentro de la columna in situ, antes de ser extraídos desde los puntos de extracción (obviando la tronadura utilizada para descolgar puntos y eliminar sobretamaños). La granulometría de este material es la variable más importante para el diseño del nivel de producción.

Los fenómenos que inciden en esta fragmentación del material granular asociado a un flujo gravitacional se asocian principalmente a la compresión y la abrasión entre partículas, como también a la abertura y extensión de discontinuidades preexistentes. Esfuerzos de corte en zonas de flujo tienen un impacto en la generación de finos, fomentando la abrasión. Por otro parte, los esfuerzos de compresión entre partículas se ven influenciados principalmente por la sobrecarga de material.

Si bien existen mecanismos para determinar la fragmentación que se genera en el proceso de *caving*, ninguna de las herramientas actuales considera el impacto que generan los esfuerzos asociados a la sobrecarga de mineral, siendo un factor relevante en la fragmentación secundaria como se plantea en la revisión. A causa de esto, nace el interés de modelar la fragmentación generada dentro de la columna de extracción, considerando el efecto del esfuerzo vertical.

2.4.2 Eventos de colgadura

Una colgadura es un fenómeno producido en un material granular cuando se forma un arco estable de partículas producto de una redistribución de los esfuerzos, generando así una interrupción en el libre flujo del mineral.

Los factores que inciden en la aparición de estos eventos dependen tanto de las propiedades del material y las condiciones del entorno (ángulo de fricción interna y condiciones de esfuerzos respectivamente); como también de factores artificiales asociados al diseño minero y a parámetros operacionales, como las políticas de tiraje desde los puntos de extracción. A su vez, la forma de estos arcos de roca depende principalmente de la resistencia al corte, ángulo de fricción interna, granulometría del material, la profundidad, así como también de las dimensiones y geometría de la batea (abertura e inclinación de paredes).

A partir del análisis realizado de datos en terreno se observa que, a medida que aumenta la extracción de la columna de mineral la frecuencia de aparición de eventos de colgadura va decreciendo, este comportamiento se relaciona con la reducción del tamaño de los fragmentos que se produce a medida que progresa la extracción.

Si bien existen gráficos y tablas que dan cuenta de la capacidad de fluir del material considerando factores geométricos y esfuerzo vertical, para fines de la planificación y el diseño podría resultar práctico un modelo que entregue la frecuencia de colgaduras a obtener dado un set de parámetros, dentro de un cierto intervalo.

Capítulo 3: Metodología

En el presente capítulo se indica la metodología llevada a cabo para realizar los experimentos de material fragmentado bajo confinamiento.

3.1 Principales variables

Los principales parámetros considerados en los ensayos corresponden al tamaño de los fragmentos utilizados y la carga vertical aplicada. En la realización de los ensayos se buscó replicar la distribución granulométrica presente en los puntos de extracción, para representar el material fragmentado presente en la columna de mineral, en un yacimiento explotado mediante *block/panel caving*.

La curva granulométrica utilizada en los ensayos se obtuvo a partir de información recopilada desde puntos de extracción en sectores de la mina El Teniente, a través de un análisis de procesamiento de imágenes [32]. Se asumieron tres bandas (o curvas): una superior (suponiendo que el diámetro de los fragmentos es del eje menor de las colpas), una banda inferior (suponiendo que el diámetro de los fragmentos es del eje mayor de las colpas), y una banda intermedia entre estas dos.

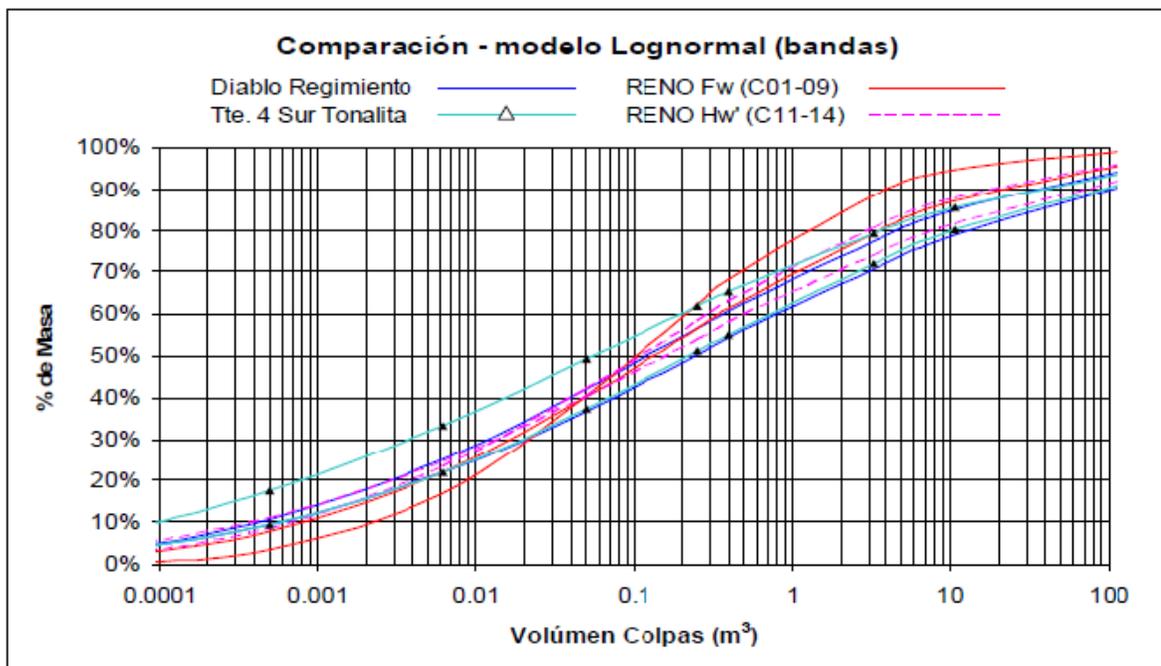


Figura 18: Curva granulométrica de puntos de extracción, El Teniente [32].

Por otra parte, el esfuerzo vertical aplicado sobre el nivel de producción, producto de la sobrecarga del material en columna de mineral no va a generar el mismo esfuerzo que la carga litoestática, la cual es proporcional a la profundidad y masa de la sobrecarga. Al tratarse de material quebrado, existen otros factores que influyen en las trayectorias de esfuerzos, como lo son la formación y ruptura de arcos de rocas, los cuales aparecen a medida que el material fluye por gravedad. La distribución de esfuerzos en este material genera la aparición de esfuerzos horizontales, los que disminuyen el esfuerzo vertical total del material (producto de su propio peso). Es por ello que Fuenzalida (2012) propone la utilización de la ecuación de Janssen [27] en

donde realiza un equilibrio de las fuerzas interactuantes, considerando tanto esfuerzos verticales como horizontales, lo que se traduce en la siguiente ecuación, derivada a partir de estudios llevados a cabo en silos con material granular [39]:

$$\sigma_{zz}(z) = \frac{\gamma \cdot Rh}{\mu \cdot k} \left[1 - \exp\left(\frac{-z \cdot k \cdot \mu}{Rh}\right) \right] + Q_0 \cdot \exp\left(\frac{-z \cdot k \cdot \mu}{Rh}\right)$$

Donde “ σ_{zz} ” es el esfuerzo vertical en la base [Pa]; “ γ ” es el peso específico del material [$\text{kg/m}^2\text{s}^2$]; “ Rh ” radio hidráulico de la base de la geometría a considerar [m]; “ μ ” coeficiente de fricción entre el material con las paredes del silo; “ k ” el coeficiente entre esfuerzos horizontales y verticales; “ z ” la altura de material quebrado [m] y “ Q_0 ” el esfuerzo vertical [Pa] para $z = 0$.

Walker et al realizó una corrección al factor “ k ” [39], representado la relación entre los esfuerzos en función del ángulo de fricción interna del material (ϕ);

$$k = \frac{1 - \text{sen}^2(\phi)}{1 + \text{sen}^2(\phi)}$$

Considerando este esfuerzo vertical, es posible escalar la carga vertical a aplicar durante los experimentos, utilizando el siguiente gráfico, para una geometría dada de la columna de extracción.

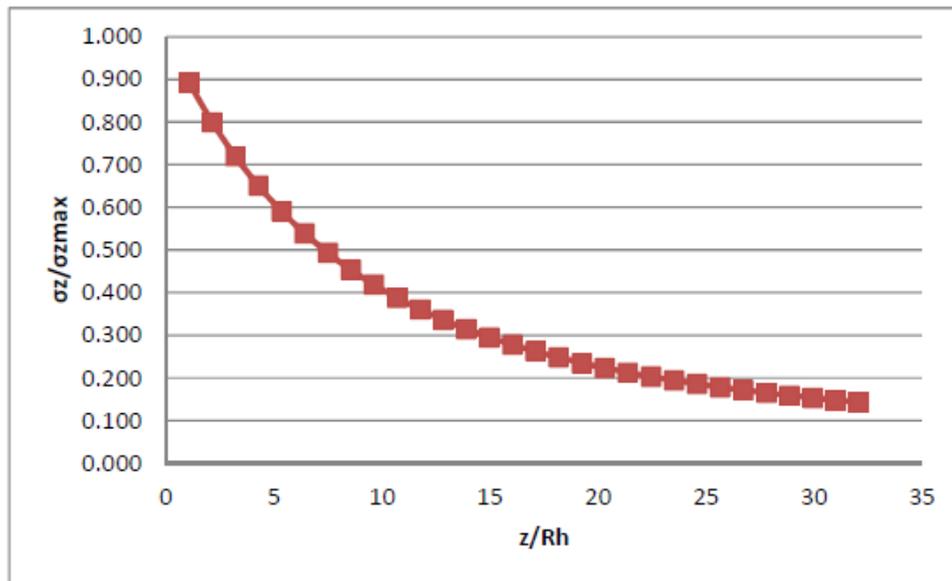


Figura 19: Efecto del radio hidráulico en la carga vertical [27].

Este gráfico muestra el esfuerzo vertical, obtenido a partir de la ecuación de Janssen, normalizado por el esfuerzo vertical máximo ($\sigma_{\text{max}} = \rho \cdot g \cdot z$). A medida que la razón de aspecto aumenta (z/Rh), la carga vertical se aleja del esfuerzo litoestático, producto de la distribución de esfuerzos hacia las paredes. Esto implica que gran parte del peso total de los fragmentos es absorbido por las paredes laterales (caso silo). Un factor no considerado durante los ensayos, es la influencia que tiene la temperatura, ya que el peso observado en el fondo de un silo varía hasta en un 20% con variaciones de esta [19].

La utilización de modelos físicos a escala de laboratorio hace necesario comprender el efecto de la reducción de escala. Esto lleva a pensar que, a mayor tamaño del modelo físico, de mejor forma se replican los fenómenos presentes en la naturaleza. Sin embargo, el manejo de un modelo demasiado grande trae consigo dificultades en relación a la construcción, manejo de materiales y tiempo de ejecución de las simulaciones, lo cual implica que las ventajas asociadas a grandes modelos físicos, pierden sustento. Por otro lado un modelo físico muy pequeño es difícil de construir, y pueden aparecer otros factores preponderantes que no reproducen los fenómenos presentes en la realidad, distorsionando los resultados [42].

Un problema que se presenta al escalar el material granular es que para mayores tamaños de partícula, la fragmentación de las partículas también es mayor. Esto debido a que las partículas más grandes presentan más discontinuidades o planos de debilidad, que van desapareciendo a medida que se va quebrando el material. Las partículas más pequeñas son generalmente creadas a partir de partículas más grandes a lo largo de fracturas preexistentes [12]. Ahora bien, este problema puede disminuir al generar fracturas por compresión, las cuales usualmente generan fracturas secundarias en el material.

Bajo estas consideraciones es posible investigar la ruptura y la compactación que ocurre durante el flujo de roca hundida a escala mina, mediante un modelo físico a escala. (Fuenzalida 2012 [27]).

3.2 Caracterización del material

El material granular utilizado en los ensayos es grava, la cual es chancada y separada a través de harneros para generar las curvas granulométricas requeridas. En los ensayos realizados (y sus respectivas réplicas) se utilizaron 3 curvas granulométricas diferentes, caracterizadas por su tamaño medio (d_{50}) y su coeficiente de uniformidad (C_u), los cuales se detallan en la Tabla 6.

Como se mencionó, se busca replicar la granulometría presente en faena, pero a escala de laboratorio, con tal de que el material utilizado sea representativo en el modelo. Además, se incluyeron experimentos utilizando mono tamaños o con distribuciones granulométricas cerradas. En una primera instancia la curva es escogida en relación al ancho de la base de la batea, considerando una razón de diámetro *partícula* : *diámetro apertura* de 1 : 8. Lo anterior se obtiene considerando todo el material retenido en alguna de las mallas de tamizaje. Para cada curva granulométrica definida se tienen 90 [kg] de material por ensayo (capacidad máxima del modelo físico). Una vez reunido el material, se debe homogeneizar la muestra mediante de tambores rotatorios.

Las tres curvas granulométricas utilizadas se muestran en la Figura 20 (a escala de laboratorio). Estas curvas provienen de curvas de fragmentación secundaria obtenidas en terreno [32], de la cual se escaló una curva granulométrica con su respectivo d_{50} , y adicionalmente, se varió el coeficiente de uniformidad y tamaño medio para generar una curva fina y una gruesa como se muestra en el gráfico, obteniendo así 3 curvas granulométricas a escala de laboratorio.

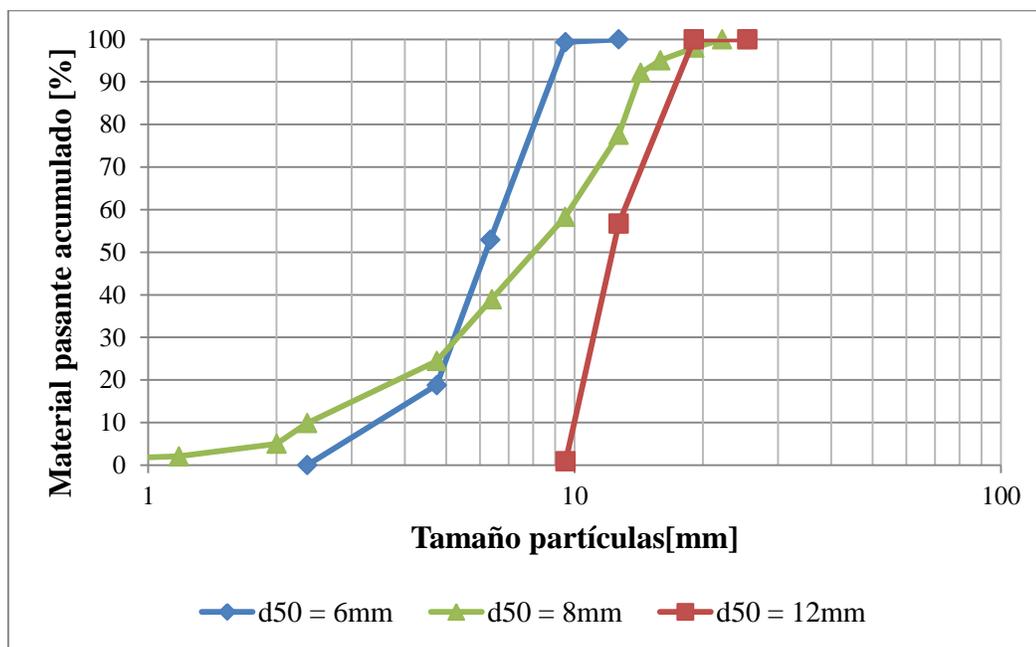


Figura 20: Curvas granulométricas utilizadas en ensayos.

En la siguiente tabla se incluyen las principales características del material y de las curvas de distribución de tamaño estudiadas.

Tabla 6: Características de curvas granulométricas estudiadas.

Curva	Tamaño medio d ₅₀ [mm]	d ₈₀ [mm]	Coefficiente de Uniformidad Cu	Coefficiente de curvatura Cz	Porosidad [%]	Razón abertura/tamaño medio d _w /d ₅₀
1	6,25	8,3	1,5	0,92	44	16
2	8,17	13,4	4,1	1,25	40	12
3	12,59	16,2	1,2	1	44	8

Para caracterizar el material se midieron diferentes parámetros y propiedades indicados en la Tabla 6 y 7, para los cuales su metodología de cálculo es descrita continuación.

3.2.1 Coeficiente de uniformidad

El coeficiente de uniformidad “Cu” de la distribución se define como [21]

$$Cu = \frac{d_{60}}{d_{10}}$$

donde d₁₀ y d₆₀ son el tamaño correspondiente al 10% y 60 % pasante de la muestra respectivamente, los cuales se determinan interpolando a partir de la distribución granulométrica.

3.2.2 Coeficiente de curvatura

Con el fin de tener una descripción más completa de la distribución granulométrica, Craig (2007) define el coeficiente de curvatura como

$$C_z = \frac{d_{30}}{d_{60} \cdot d_{10}}$$

donde d_{10} y d_{60} están definidos anteriormente y d_{30} es el tamaño correspondiente al 30% pasante de la muestra respectivamente.

3.2.3 Factor de forma

El factor de forma queda definido (Cho et al, 2006) a través de dos características: esfericidad y redondez [27]:

Esfericidad (S), se refiere a la forma global de la partícula y refleja la similitud entre la altura, ancho y alto de la partícula

$$S = \frac{r_{max-in}}{r_{max-cir}}$$

donde, " r_{max-in} " es el radio del círculo mayor inscrito y " $r_{max-cir}$ " corresponde al radio del círculo menor circunscrito. En la siguiente figura se puede ver un ejemplo de los círculos mencionados.

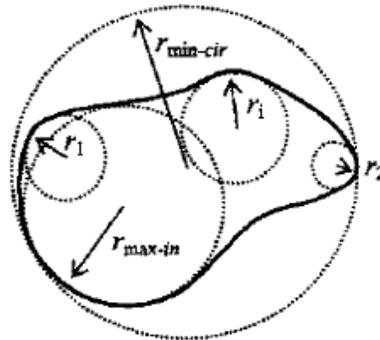


Figura 21: Círculos generados por material granular.

Redondez o angularidad (R), describe las principales características de la superficie que son típicamente de un orden de magnitud menor que el tamaño de la partícula

$$R = \frac{\sum \frac{r_i}{N}}{r_{max-in}}$$

donde, $\sum \frac{r_i}{N}$ es el promedio de los radios de curvatura de la superficie.

En la siguiente figura se muestra la matriz de clasificación del factor de forma, donde se especifica la esfericidad y la redondez de las partículas.

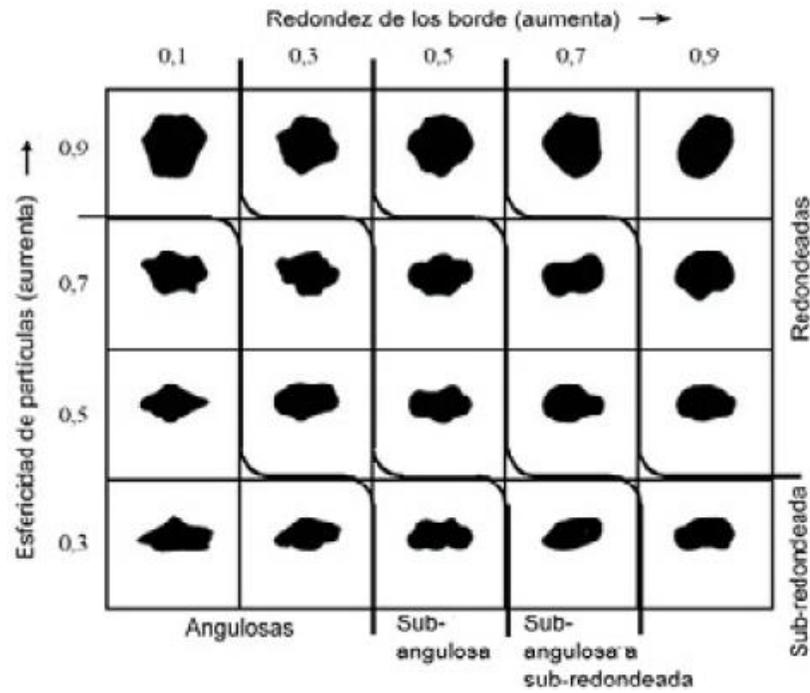


Figura 22: Matriz de forma de partícula.

3.2.4 Índice de carga puntual

La prueba de carga puntual [43] se puede utilizar para obtener una estimación indirecta de la resistencia a la compresión uniaxial del material (Comisión ISRM 1985). Se mide el valor de la fuerza P a la cual la probeta se rompe y se le asocia un índice de carga puntual no corregido, que es calculado como

$$I_s = \frac{P}{De^2}$$

donde, " De " corresponde al diámetro equivalente; el índice de carga puntual " I_s ", varía con el diámetro equivalente de la muestra " De ". El tamaño que se debe aplicar con el fin de obtener un índice de resistencia a la carga puntual único para una muestra de roca en particular, debe ser corregido. Siempre que sea posible, es preferible llevar a cabo pruebas diametrales en especímenes de 50-55 mm de diámetro. El tamaño correcto para aplicar la carga se define como el valor que se hubiese podido medir en una prueba diametral con $D = 50$ mm.

$$I_{s(50)} = I_s \cdot \left(\frac{De}{50}\right)^{0,45}$$

Comenzando con Broch y Franklin (1972), varios investigadores han desarrollado una correlación del índice de carga puntual con la resistencia a la compresión uniaxial σ_c . La correlación más comúnmente utilizada es:

$$\sigma_c \approx (22 - 24) \cdot I_{s(50)}$$

En la siguiente tabla se incluye un resumen de las características determinadas para el material ensayado.

Tabla 7: Resumen de características de material

Índice de carga puntual I_{S50} (ASTM D5731-08)	[MPa]	6,3 ($\pm 1,6$)
Factor de forma	Esfericidad	0,65
	Redondez	0,51
Densidad material	[ton/m³]	2,69
Ángulo de fricción residual	[°]	42
Ángulo de fricción peak	[°]	48
Ángulo de fricción de la pared	[°]	20

Mayores detalles de la caracterización del material se encuentran en anexo A.

3.3 Metodología experimental

3.3.1 Preparación del material

Previo a cada ensayo el material a utilizar debe ser preparado (para cada curva granulométrica correspondiente). Para ello, el material de cada curva es seleccionado como se muestra en la Tabla 8, indicando la masa requerida entre mallas.

Tabla 8: Curvas granulométricas utilizadas por malla

Malla	Tamaño	Curva 1, $d_{50} = 6 \text{ mm}$		Curva 2, $d_{50} = 8 \text{ mm}$		Curva 3, $d_{50} = 12 \text{ mm}$	
	[mm]	Masa [g]	Fu [%]	Masa [g]	Fu [%]	Masa [g]	Fu [%]
-1" + 3/4"	25,40	0	-	1.700	100	0	-
-3/4" + 1/2"	19,05	0	-	18.000	98,1	38.934	100
-1/2" + 3/8"	12,70	0	-	17.000	77,6	50.247	57
-3/8" + 1/4"	9,53	41.787	100	17.000	58,3	819	1
-1/4" + 4#	6,35	30.744	53	12.800	39	0	0
-4# + 8#	4,75	16.902	19	12.800	24,4	0	-
-8# + 10#	2,36	0	0	4.300	9,9	0	-
-10# + 16#	2,00	0	-	2.600	5	0	-
-16# + 30#	1,18	0	-	900	2	0	-
-30# + 70#	0,60	0	-	900	1	0	-

Para obtener el material entre cada malla, en caso de requerirse la grava es fragmentada en chancadores de rodillo (de laboratorio), y luego el material es pasado a través de harneros y tamices. Posteriormente, se pesa en una balanza y se obtiene la cantidad requerida por ensayo.

Tras obtener las masas requeridas de cada tamaño, el material es mezclado y homogeneizado por medio de un tambor rotario (el cual se indica posteriormente en equipos utilizados, Figura 26).

3.3.2 Montaje

Una vez preparado el material, se introduce en el cilindro por la parte superior, para posteriormente colocar el modelo físico en la prensa hidráulica como se muestra en la Figura 23.



Figura 23: Montaje de modelo físico bajo confinamiento

Una vez montado el modelo en la prensa hidráulica, la presión es aplicada por la prensa hasta obtener el confinamiento requerido para el ensayo.

3.3.3 Ensayos

Luego de tener el sistema montado y una vez alcanzada la presión vertical requerida, esta se mantiene constante hasta finalizar el experimento.

Durante el ensayo se extraen 10 [kg] de material (a presión constante) extrayendo aproximadamente 500 gramos por ciclo, y se registra la cantidad de eventos de colgadura que se observan durante el ensayo. Una vez extraída esta cantidad de material y anotada la información requerida (fecha, presión aplicada, curva granulométrica utilizada y cantidad de eventos de colgadura), se da por finalizado el ensayo.

En caso de ocurrir una colgadura durante los experimentos, se registra y posteriormente se realiza un descuelgue (mediante una herramienta manual) para reanudar el flujo. En caso de no ser posible descolgar el material producto de un alto confinamiento, se registra estado sin flujo.

3.3.4 Post ensayo

Al finalizar el ensayo se desmonta el sistema, se vacía el material remanente del cilindro, luego todo el material (remanente del cilindro y los 10 kg extraídos) se mezcla y homogeneiza nuevamente. Después se separa una muestra representativa de 15 kg, y de ésta muestra se mide la curva de distribución de tamaños resultante tras aplicar las presiones correspondientes en cada experimento.

Así se obtiene una curva granulométrica inicial (antes de realizar el ensayo) y una curva granulométrica final tras cada ensayo. De este modo se cuantifica el grado de fragmentación para los diferentes esfuerzos verticales aplicados.

Finalmente, el material utilizado tras cada ensayo es desechado, el material ensayado no es reutilizado.

3.4 Equipamiento

Los ensayos realizados apuntan a simular la extracción bajo confinamiento a escala de un punto de extracción. Para ello se dispuso de los siguientes equipos de laboratorio:

- i. Prensa hidráulica
- ii. Cilindro de acero y sistema de extracción del material
- iii. Tecla
- iv. Harneros y tamices
- v. Tambor rotatorio

Descripción de los equipos

- i. Se utilizó una prensa hidráulica Figura 24, ubicada en el Laboratorio de Block Caving de la Universidad de Chile, capaz de ejercer fuerzas entre [0,1800] kN, con el fin de producir el confinamiento deseado, escalando la presión vertical presente en faena.



Figura 24: Prensa hidráulica con cilindro montado

- ii. Modelo de acero: diseñado para contener el material a ensayar, de forma cilíndrica para evitar la concentración de esfuerzos locales en singularidades y capaz de resistir una presión máxima de 30 [MPa]. Las dimensiones del cilindro son: un diámetro interno de 340 [mm] y una altura de 700 [mm]. Además, contempla un pistón de acero mediante el cual la prensa ejerce la presión sobre el material granular dentro del cilindro. La cantidad de material con la que puede llenarse el cilindro es de 80-90 kg. En su base se dispone de una abertura cilíndrica de 100 mm de diámetro, por donde es extraído el material. Figura 24.
- iii. Tecla: debido al peso del cilindro se requiere la utilización de un tecla para su montaje y desmontaje sobre la prensa hidráulica. El peso máximo capaz de soportar es de una tonelada. Figura 25.



Figura 25: Tecele

- iv. Harneros y tamices: utilizados para seleccionar el material por tamaño y preparar así las distribuciones granulométricas requeridas antes de cada ensayo, como también para obtener los resultados de las distribuciones granulométricas al final de cada ensayo.
- v. Tambor rotatorio: utilizado para homogeneizar el material antes y después de cada ensayo, de manera de evitar el predominio de una cierta granulometría ubicada en alguna zona del modelo físico en particular. Figura 26.



Figura 26: Tambor rotatorio

3.5 Ensayos realizados

Los ensayos realizados corresponden a réplicas de ensayos previos de confinamiento, con el fin de interpretar y encontrar la tendencia seguida al aumentar la carga vertical desde el punto de vista de las colgaduras, y a su vez lograr el ajuste de un modelo de fragmentación secundaria aplicado a minería de *caving*.

Se realizaron 30 ensayos (incluyendo réplicas y originales), considerando las 3 curvas descritas anteriormente y los casos bases sin confinamiento. En el marco de estos ensayos, por cada curva granulométrica se realizaron 10 experimentos, considerando réplicas para 5 diferentes presiones aplicadas: de 0, 2, 3, 6 y 12 MPa.

3.6 Conclusiones del capítulo

Existen numerosos estudios del comportamiento de flujo granular aplicado a silos y pilas de material, sus resultados y observaciones se aplican o asumen sin ajustes al flujo de material quebrado presente en minería de *caving*. Se hace necesario, por lo tanto, fomentar el desarrollo de modelos que representen de manera más fidedigna el material presente en estas operaciones. Primero por el uso de curvas de distribución de tamaños, dejando de lado así el comportamiento de partículas con mono-tamaño; también la preferencia por el uso de mineral directamente de la operación en vez de arenas o arcillas, los cuales poseen distintas propiedades físicas (resistencia, abrasividad, factor forma, tenacidad) las que tienen un impacto sobre el grado de compactación, fragmentación y la fluidez del material.

Por otro lado, las condiciones de esfuerzos presentes en la columna de mineral quebrado, es lo que se busca replicar mediante la metodología descrita en este capítulo, por medio de la aplicación de carga vertical a través de una prensa hidráulica.

Finalmente al generar modelos que representen el comportamiento del material, es necesario realizar replicas con el fin de tener un respaldo estadístico, y cuantificar así el error de cada ensayo y la variabilidad de los procesos involucrados. Ahora bien, como los ensayos considerados son costosos en tiempo; producto del tiempo de ensayo (4 a 5 hr considerando montaje y desmontajes) y la preparación del material el cual puede tomar varios días, tener una gran cantidad de réplicas es complejo, es por ello que son consideradas dos réplicas por ensayo para cada uno de los 15 ensayos considerados.

Capítulo 4: Modelo de fragmentación

En el presente capítulo, se describe el modelo de conminución propuesto para el proceso de fragmentación secundaria.

4.1 Origen del modelo

El modelo de fragmentación propuesto tiene su origen en el *Matrix Model*, desarrollado por Broadbent y Callcott [44], el cual es utilizado para analizar el quiebre de un conjunto de partículas dentro de cualquier proceso en donde existe un cambio en sus características. Este modelo fue desarrollado con el fin de describir los mecanismos de quiebre presentes en sólidos. Epstein (1948) por otro lado, propone que un evento de quiebre se puede considerar como un evento simple dentro de un proceso de conminución, y plantea estudiar este proceso como un número finito de eventos [45], de esta manera el enfoque será analizar el proceso de quiebre como una sucesión de eventos discretos.

Para este análisis se consideran dos funciones de origen estadístico las cuales van definiendo el progreso del quiebre de las partículas. Estas funciones corresponden a: una función selección, que determina la fracción de partículas que sufren quiebre mientras el resto se mantienen intactas; una función de quiebre o ruptura, la cual representa la probabilidad que tiene una fracción de partículas de un tamaño i terminen de un tamaño j .

Como la conminución se genera sobre una distribución de tamaños de partículas, en base a esto es posible pensar que las partículas de mayor tamaño tendrán una mayor probabilidad de participar en un evento de quiebre que las de menor tamaño, las que requerirán de una mayor cantidad de eventos para poder fragmentarse. De este modo, el quiebre de las partículas en un procesos de conminución dependerá principalmente del tamaño de las partículas, forma y homogeneidad, así como otras variables específicas [46].

La alimentación que entra en un proceso de conminución corresponde a una distribución acumulada de los tamaños de partículas, $F(y)$, la cual es diferenciable, así la función de frecuencia, $f(y)$ se puede determinar como:

$$f(y) = \frac{dF(y)}{dy}$$

En donde $f(y)$ representa la fracción másica de partículas de tamaño y . Si las partículas sufren un proceso de quiebre, representados funcionalmente por $b(x,y)$, la frecuencia de la producción x , por cada tamaño y , se puede obtener mediante [24]:

$$P_1(x) = \int b(x,y)dFy = \int b(x,y)f(y)dy$$

En la ecuación anterior $b(x,y)$ se define como la matriz de ruptura, de b_{ij} elementos donde $i, j = 1, \dots, n$; corresponde a la fracción de partículas entre a_{j-1} y a_j antes del quiebre que terminan en a_{i-1} y a_i tras el quiebre.

Como en una operación de caving no se tiene recirculación de los fragmentos, si una fracción S_i es seleccionada para sufrir quiebre desde f_i , la masa de fragmentos seleccionados en el intervalo i queda representado por $S_i f_i$ y $(1-S_i)f_i$ representa los fragmentos no seleccionados. Donde S_i se define como la función de selección [47].

El modelo de fragmentación estudiado, corresponde a un conjunto de ecuaciones, utilizadas en los procesos de conminución [29], el cual es capaz de reproducir la distribución de tamaños a obtener en un punto de extracción. Para utilizar el modelo se hace una analogía de los mecanismos de fragmentación que ocurren en la columna de material quebrado, como si fuese una mollienda autógena. Las características del material y las condiciones operacionales son la base que definen los parámetros del modelo.

4.2 Modelamiento

Teniendo en cuenta que los experimentos realizados consisten en aplicar presión sobre material confinado en un cilindro de acero, se asume un comportamiento de flujo pistón, bajo el supuesto de que no ocurre mezcla vertical en el sistema, como se muestra esquemáticamente en la Figura 27.

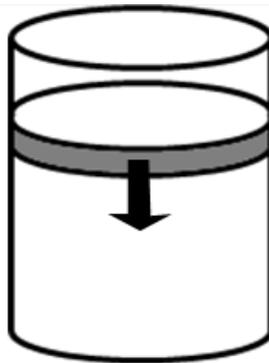


Figura 27: Esquema flujo pistón

La forma general del modelo de conminución es la siguiente:

$$p_i = \int_0^{\infty} f_i(t) E(t) dt$$

Donde " p_i " es la fracción másica de mineral en el intervalo del tamaño i ; " f_i " es la fracción másica de mineral en el intervalo de tamaño i del material que se está fragmentado en el tiempo t , y " $E(t)$ " es la esperanza de la distribución del tiempo de residencia del material sometido a fragmentación.

Como se asume un comportamiento del tipo flujo pistón dentro del cilindro, el término $E(t)$ tiene un valor de 1 para un tiempo τ de residencia fija y 0 para el resto del tiempo (Figura 28).



Figura 28: Ilustración de flujo pistón para tiempo τ .

Luego, la ecuación anterior se expresa de la siguiente manera:

$$p_i = \int_{i=0}^{\infty} f_i^{batch}(t) \cdot E(t) \cdot dt = f_i(\tau)$$

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \neq \tau \\ 1 & t = \tau \end{cases}$$

Y por ende el flujo pistón tiene la misma solución que el modelo cinético de molienda *batch* [48] que se representa como:

$$\frac{d[H f_i(t)]}{dt} = -S_i H f_i(t) + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} S_j H f_j(t)$$

Donde “ H ” es el *holdup* de mineral o la masa total a ser fragmentada; “ S_i ” corresponde a la función selección que indica la tasa a la cual las partículas se rompen en un proceso de reducción de tamaño y “ b_{ij} ” es la función de ruptura la cual representa la fracción de mineral en el intervalo de tamaño j que, al fracturarse, termina en el intervalo de tamaño i .

Estos dos set de parámetros introducidos, función selección y función de ruptura, se describen a continuación.

➤ Función selección

Representa la tasa a la cual las partículas se rompen en un proceso de reducción de tamaño, se puede representar por una ecuación cinética de primer orden [48]:

$$\frac{dm_i}{dt} = -S_i \cdot m_i$$

La constante cinética de esta ecuación de primer orden corresponde a la función selección S_i . Esta función representa entonces la tasa de reducción de tamaño, es decir la velocidad a la que se reducen de tamaño las partículas de tamaño “ i ” de un cierto mineral y por supuesto es característico de cada mineral y del tipo de conminución empleado.

➤ **Función ruptura**

La distribución de tamaños de los fragmentos resultantes de un evento de conminución, que da cuenta del tamaño final de la partícula originalmente conminuida, recibe el nombre de función ruptura b_{ij} . Esta función representa entonces la fracción de mineral de tamaño “ j ” que, al fracturarse, termina de tamaño “ i ”.

La figura siguiente ilustra cómo operan de manera esquemática estas funciones del modelo cinético propuesto:

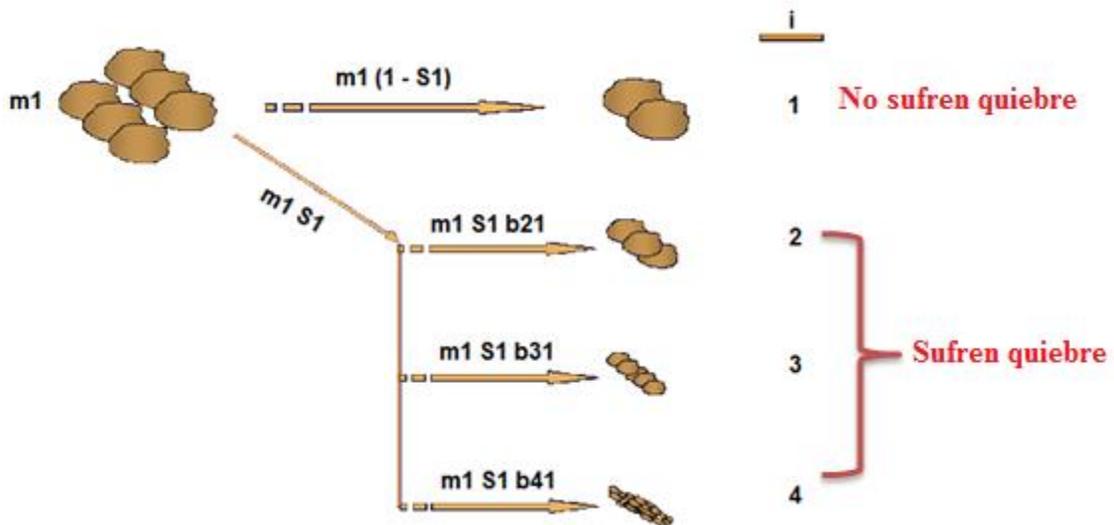


Figura 29: Esquema función de ruptura en modelo cinético [29].

Donde a partir de una fracción másica m_1 , el intervalo $i = 1$ corresponde a la fracción que no fue seleccionada para sufrir ruptura ($1 - S_1$), mientras que S_1 indica la fracción seleccionada. Dentro del porcentaje seleccionado para sufrir ruptura, las fracciones másicas de cada tamaño resultante queda determinado por b_{i1} .

Para establecer un modelo que represente el proceso de conminución, es conveniente considerar un balance de masas simple, a un cierto tiempo “ t ” y para una fracción de tamaño particular “ i ” presente en una masa m_i en el proceso [29]:

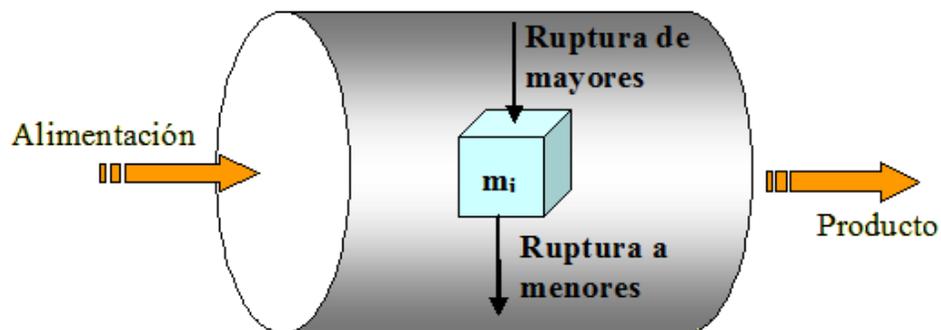


Figura 30: Flujo de masa modelo cinético

Para la función de selección se tiene la siguiente expresión:

$$S_i^E = S_1^E \exp \left\{ Z_1 \ln \left(\frac{d_i}{d_1} \right) + Z_2 \left[\ln \left(\frac{d_i}{d_1} \right) \right]^2 \right\}$$

Donde “ Z_1 ”, “ Z_2 ” and “ S_1^E ” son parámetros del modelo a ajustar con datos experimentales; “ d_i ” es la media geométrica del intervalo de tamaño i , $d_i = \sqrt{x_i \cdot x_{i+1}}$; “ S_i^E ” representa la razón de quiebre específica de partículas de tamaño i , la cual se considera invariante para cada material bajo el mismo mecanismo de fragmentación.

Para obtener la función selección debe considerarse la presión aplicada. Una relación entre la tasa de quiebre y el cociente entre la potencia y el *holdup*, permite su escalamiento mediante la siguiente expresión [29]:

$$S_i = S_i^E \left(\frac{P}{H} \right)$$

Donde “ P ” es la potencia aplicada. Como “ H ” es constante y “ S_i^E ” invariante con respecto al tamaño de partícula, la expresión anterior puede ser escrita como presión / constante, quedando:

$$S_i = S_i^E \sigma_V$$

Con “ σ_V ” como el esfuerzo vertical aplicado (MPa). Así se puede obtener un modelo de predicción de la fragmentación secundaria a escala de laboratorio, ajustando el conjunto de parámetros (α_1 , α_2 , α_3 , τ , Z_1 , Z_2 y S_1^E) a través de los ensayos de laboratorio, y tomando en cuenta la carga vertical.

4.3 Conclusiones del capítulo

El modelo de fragmentación secundaria planteado busca representar las principales características presentes en el proceso de conminución producido dentro de la columna de mineral, incorporando el esfuerzo vertical mediante un ajuste en la función selección, aumentando así la probabilidad de que una partícula sea seleccionada para ser fragmentada. Se debe tener presente al momento de aplicar el modelo, que el esfuerzo vertical aplicado variará durante el desarrollo de la extracción en función de la altura de columna mineral que se tendrá en diferentes periodos de tiempo.

Con el fin de evaluar el modelo de conminución propuesto, es requerido un análisis de bondad de ajuste con los resultados experimentales, tomando en cuenta cantidad de parámetros de ajustes del modelo.

Capítulo 5: Resultados y análisis

En el presente capítulo se muestran los resultados obtenidos con los modelos de fragmentación y de colgadura propuestos, tras el desarrollo de los ensayos de material granular bajo confinamiento, con los respectivos ajustes realizados en cada caso.

5.1 Fragmentación

Se graficaron las curvas de distribución de tamaños (para el material pasante acumulado, F_u) obtenidas tras cada ensayo, junto con el ajuste del modelo y la distribución de tamaño inicial, para las 3 curvas granulométricas estudiadas con las respectivas cargas verticales consideradas.

5.1.1 Curva 1 $d_{50} = 6 \text{ mm}$

La Figura 31 presenta las curvas de distribución de tamaños obtenidas una vez realizados los ensayos bajo diferentes cargas verticales, para la curva de entrada caracterizada con su d_{50} de 6 mm ($C_u = 1,5$).

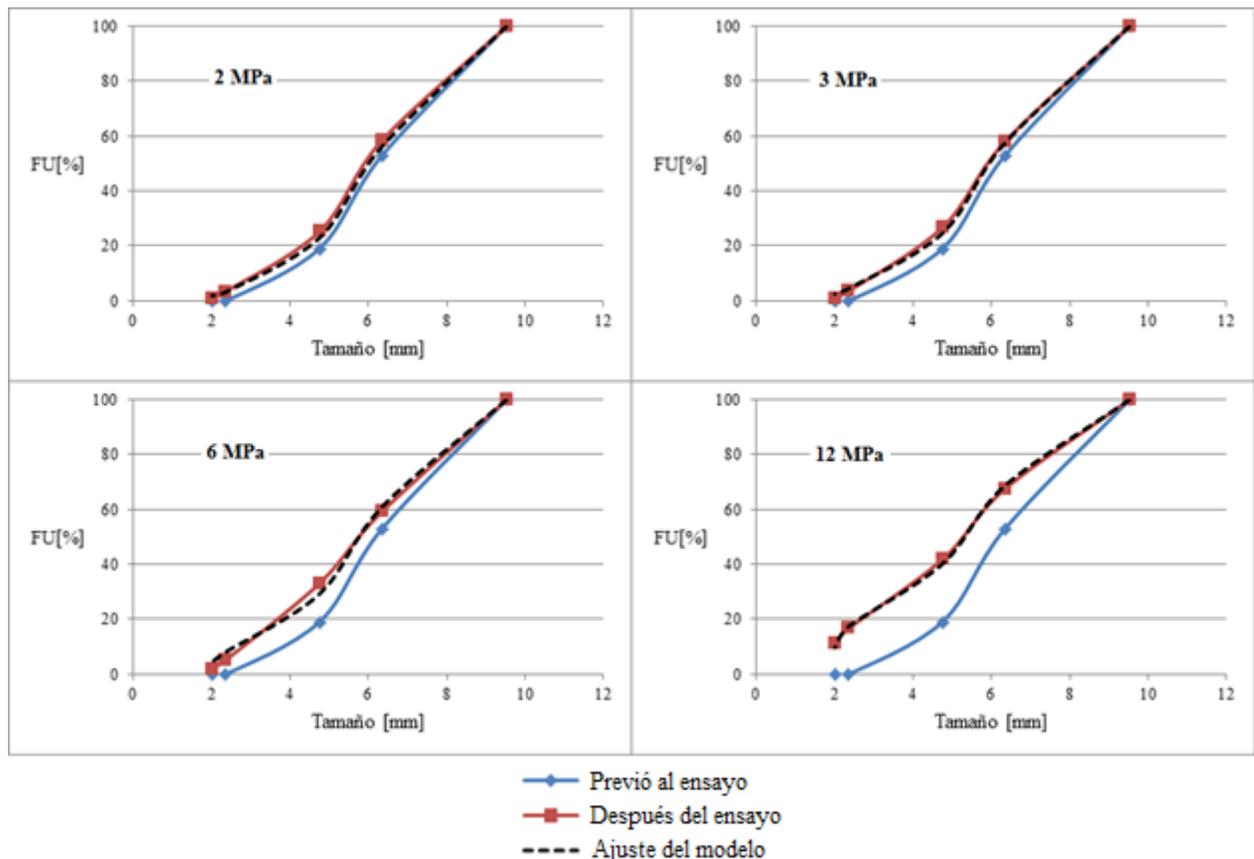


Figura 31: Curvas de fragmentación, $d_{50} = 6 \text{ mm}$.

Se puede observar en los resultados que a medida que se incrementa la carga vertical aplicada aumenta la fragmentación producida, observándose una disminución en el tamaño de los fragmentos (desplazamiento de las curvas granulométricas hacia la izquierda). También se aprecia en el gráfico que el ajuste del modelo de fragmentación es coherente con la curva granulométrica resultante tras cada ensayo.

Por otra parte, los coeficiente de uniformidad van aumentando en cada caso, esto producto del incremento de finos tras los ensayos, asociados principalmente al mecanismo de abrasión por el contacto entre partículas.

5.1.2 Curva 2 $d_{50} = 8 \text{ mm}$

Para la curva de entrada caracterizada con un d_{50} de 8 mm ($C_u = 4,1$), los resultados son presentados en la Figura 32. Estas curvas a diferencia de las otras dos distribuciones (C_u de 1,5 y 1,2) presentan una mayor distribución de tamaños y un coeficiente de uniformidad mayor.

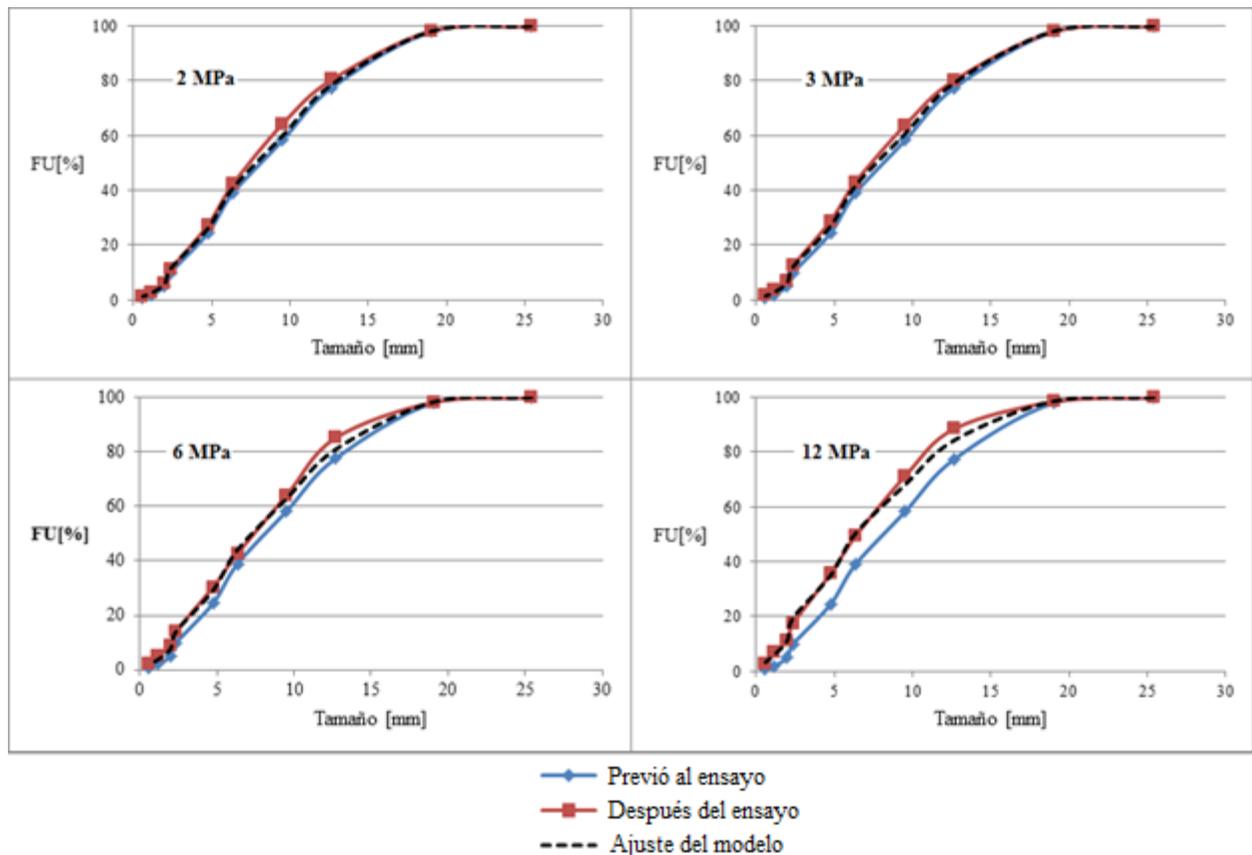


Figura 32: Curvas de fragmentación, $d_{50} = 8 \text{ mm}$.

Si bien como en el caso anterior (curva con d_{50} de 6 mm) se aprecia un aumento de la fragmentación a medida que se incrementa el esfuerzo vertical aplicado, esto genera una menor cantidad de finos en comparación a los otros casos (incluyendo curva para d_{50} de 12 mm). A su vez, el modelo propuesto también presenta un buen ajuste de la fragmentación tras cada ensayo. El coeficiente de uniformidad en este caso se mantiene prácticamente constante.

5.1.3 Curva 3 $d_{50} = 12 \text{ mm}$

Finalmente, en la figura siguiente se presenta la curva de fragmentación obtenida para el material caracterizado con el d_{50} de 12 mm ($C_u = 1,2$).

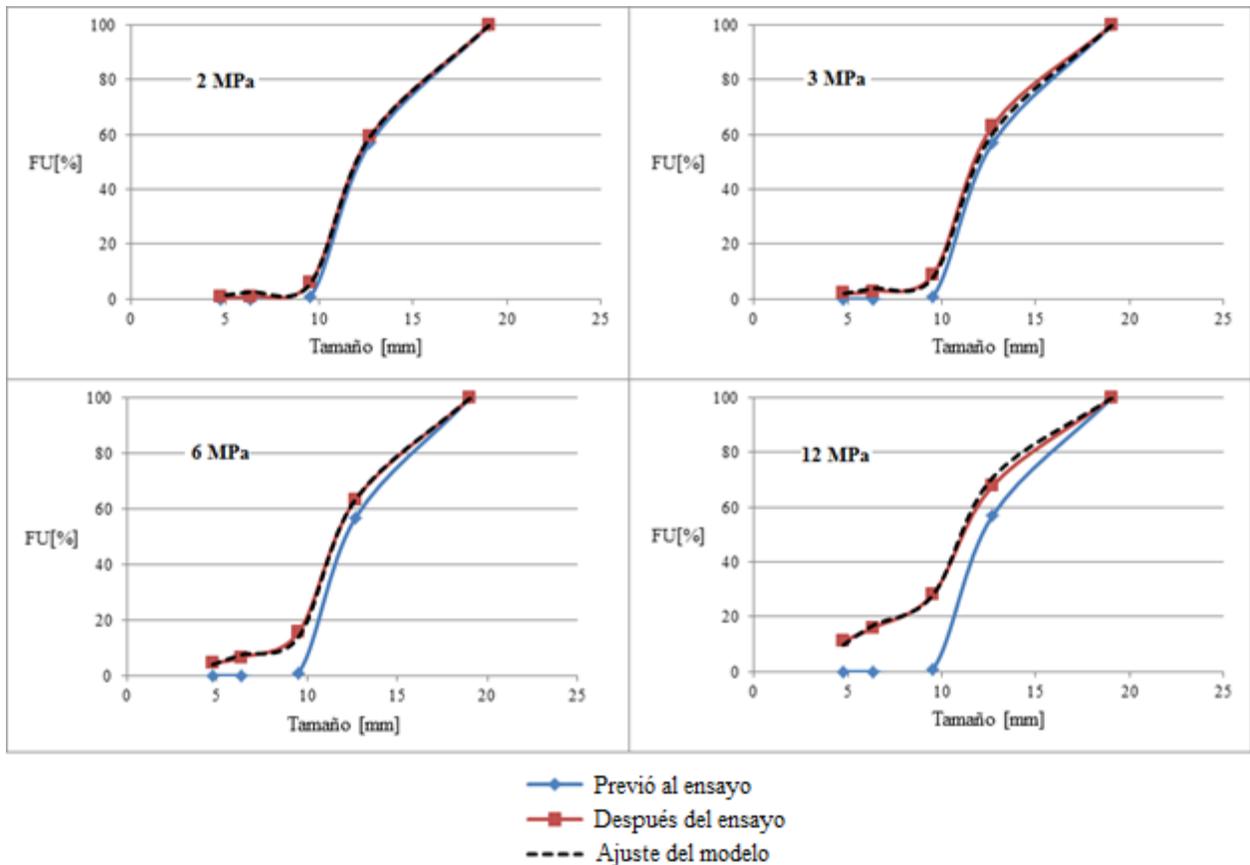


Figura 33: Curvas de fragmentación, $d_{50} = 12 \text{ mm}$.

Siguiendo la tendencia de los resultados de las curvas anteriores, el comportamiento de la fragmentación se mantiene al aumentar la carga vertical. También se aprecia el mismo buen ajuste del modelo. Por otro lado, se puede apreciar que el grado de fragmentación obtenido se asemeja más al caso del d_{50} de 6 mm, donde se tiene un C_u bajo (curvas de mayor inclinación vertical), y en donde se genera una mayor cantidad de finos, variando así el coeficiente de uniformidad con tendencia al alza.

5.1.4 Ajuste del modelo de fragmentación

Como se mencionó en el Capítulo 4, el modelo planteado está representado por dos funciones principales, una función de selección y una función de ruptura, conformadas por diversos parámetros los cuales deben ajustarse con los ensayos de laboratorio. Es por ello que en la Tabla 9 se presentan los valores correspondientes de cada parámetro ajustados con el material ensayado.

Tabla 9: Parámetros del modelo de fragmentación.

S_1^E	Z_1	Z_2	α_1	α_2	α_3	τ
0,12	0,054	-0,058	0,13	1,518	2,277	0,27

El ajuste fue realizado minimizando el error cuadrático de las fracciones másicas del material pasante acumulado (Fu), entre las obtenidas tras cada ensayo y las generadas por el modelo. Así, el modelo de fragmentación secundaria para el material de grava utilizado queda representado de la siguiente manera:

Función de ruptura

$$B_{i1} = 0,13 \left(\frac{x_i}{x_2}\right)^{1,518} + (1 - 0,13) \left(\frac{x_i}{x_2}\right)^{2,277}$$

Función de selección

$$S_i = 0,12 \cdot \exp \left\{ 0,054 \cdot \ln \left(\frac{d_i}{d_1}\right) - 0,058 \cdot \left[\ln \left(\frac{d_i}{d_1}\right) \right]^2 \right\} \times \sigma_v$$

Fracción másica obtenida, para cada tamaño i

$$p_i = \sum_{j=1}^i A_{ij} e^{-S_j \cdot 0,27}$$

Un ejemplo de cálculo del modelo de fragmentación se encuentra en el Anexo D.

Por otra parte, la bondad de ajuste del modelo se evaluó mediante el coeficiente de correlación, R^2 , así como el error cuadrado medio,

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_{i,exp} - y_{i,mod})^2$$

Donde “ $y_{i,exp}$ ” y “ $y_{i,mod}$ ” son las fracciones de tamaño acumulado de tamaño i , medido y simulado respectivamente. Los resultados se presentan en la Tabla 10, en donde el ajuste del modelo fue realizado con respecto al promedio de cada experimento con su respectiva réplica.

Tabla 10: Ajuste de modelo de fragmentación

Ensayo	d_{50} mm	Carga aplicada MPa	Coefficiente de correlación R^2 , %	MSE $\% ^2$
1	6	2	99,94	2,83
2		3	99,95	2,05
3		6	99,78	8,18
4		12	99,95	1,65
5	8	2	99,93	2,76
6		3	99,96	1,75
7		6	99,91	2,71
8		12	99,88	4,36
9	12	2	99,96	0,83
10		3	99,96	2,52
11		6	99,92	1,01
12		12	99,93	3,06

Con el fin de poder evaluar el modelo de conminución en función de la cantidad de parámetros de ajuste, se considera el test de bondad de ajuste de Chi-cuadrado, donde se determina el estadístico del test el cual se define como [49]:

$$c = \sum_{i=1}^m \frac{(E_i - O_i)^2}{E_i}$$

Donde “ m ” corresponde a los intervalos en este el rango de tamaños para las diferentes fracciones másicas (el cuál varía para las 3 curvas granulométricas ensayadas), “ E_i ” corresponde a la frecuencia esperada (entregada por el modelo) y “ O_i ” la frecuencia observada en cada intervalo (resultantes de cada ensayo).

Así se obtienen los estadísticos para cada curva, y presión vertical considerada, detalle de cálculo en Anexo B:

Tabla 11: Ajuste chi-cuadrado del modelo de fragmentación

Ensayo	d_{50} mm	Carga aplicada MPa	Estadístico Chi-cuadrado “ c ”	Intervalos “ m ”	Confianza del ajuste
1	6	2	2,66	17	60%
2		3	2,64		
3		6	6,57		
4		12	2,14		
5	8	2	1,24	40	99%
6		3	1,28		
7		6	3,49		
8		12	4,36		
9	12	2	2,42	24	90%
10		3	1,99		
11		6	1,76		
12		12	2,58		

La confiabilidad del ajuste para cada curva se determina a partir de las tablas de Chi-cuadrado. La baja confiabilidad obtenida para la curva con su $d_{50} = 6$ mm se asocia principalmente a la variabilidad en los resultados, en particular para las fracciones de material más fino, y también la baja cantidad de intervalos considerados castiga el ajuste. Detalles se observan en anexo B.

Tanto el coeficiente de correlación R^2 y el estadístico para el test de Chi-cuadrado fueron evaluados considerando las fracción acumuladas de la distribución de tamaños. Esto a causa de que el ajuste de los parámetros fue realizado minimizando el error entre las fracciones acumuladas resultantes tras los ensayos y las entregadas por el modelo.

5.1.5 Fragmentación por tamaño

El grado de fragmentación sufrida por el material es distinto para cada fracción másica, por ello se analiza la fragmentación sufrida por los tamaños característicos d_{10} , d_{50} y d_{80} ,

estableciendo la siguiente relación para medir la diferencia entre el tamaño característico inicial (previo al ensayo) y el final (tras ensayar bajo la presión correspondiente):

$$\Delta dx = \frac{dx_{final} - dx_{inicial}}{dx_{inicial}} [\%]$$

Donde dx representa el tamaño característico “ x ” y Δdx su variación porcentual con respecto al tamaño inicial. En la Tabla 12 se presentan los valores obtenidos para el d_{80} de las curvas estudiadas.

Tabla 12: D_{80} resultante.

Presión vertical [MPa]	Curva 1 ($d_{50} = 6$ mm)			Curva 2 ($d_{50} = 8$ mm)			Curva 3 ($d_{50} = 12$ mm)		
	d_{80} i [mm]	d_{80} f [mm]	Δd_{80} [%]	d_{80} i [mm]	d_{80} f [mm]	Δd_{80} [%]	d_{80} i [mm]	d_{80} f [mm]	Δd_{80} [%]
2	8,26	8,05	-2,6	13,39	12,59	-5,9	16,22	16,01	-1,3
3	8,26	8,07	-2,3	13,39	12,63	-5,7	16,22	15,64	-3,6
6	8,26	8,01	-3,0	13,39	11,92	-11,0	16,22	15,61	-3,7
12	8,26	7,56	-8,4	13,39	11,09	-17,2	16,22	15,08	-7,0

* $dx_f = dx_{final}$, $dx_i = dx_{inicial}$.

La mayor disminución del d_{80} ocurre en la curva 2 ($d_{50} = 8$ mm, $Cu = 4,1$) para cada presión aplicada. Resultados similares se observaron respecto al d_{50} , en donde la mayor fragmentación se observa en la curva 2, como se muestra en la Tabla 13.

Tabla 13: D_{50} resultante.

Presión vertical [Mpa]	Curva 1 ($d_{50} = 6$ mm)			Curva 2 ($d_{50} = 8$ mm)			Curva 3 ($d_{50} = 12$ mm)		
	d_{50} i [mm]	d_{50} f [mm]	Δd_{50} [%]	d_{50} i [mm]	d_{50} f [mm]	Δd_{50} [%]	d_{50} i [mm]	d_{50} f [mm]	Δd_{50} [%]
2	6,25	6,02	-3,7	8,16	7,47	-8,4	12,58	12,43	-1,2
3	6,25	6,01	-3,8	8,16	7,41	-9,2	12,58	12,27	-2,5
6	6,25	5,83	-6,6	8,16	7,42	-9,0	12,58	12,09	-3,9
12	6,25	5,29	-15,3	8,16	6,45	-20,9	12,58	11,48	-8,7

Sin embargo, cuando se observa la disminución de tamaño en fragmentos finos, representados por el d_{10} característico, la mayor fragmentación se genera en las curvas 1 y 3 ($d_{50} = 6$ mm con Cu de 1,5 y $d_{50} = 12$ mm con CU de 1,2), alcanzando una disminución de tamaño sobre un 60% para la mayor presión vertical, como se observa en la siguiente tabla.

Tabla 14: D_{10} resultante.

Presión vertical [Mpa]	Curva 1 ($d_{50} = 6$ mm)			Curva 2 ($d_{50} = 8$ mm)			Curva 3 ($d_{50} = 12$ mm)		
	d_{10} i [mm]	d_{10} f [mm]	Δd_{10} [%]	d_{10} i [mm]	d_{10} f [mm]	Δd_{10} [%]	d_{10} i [mm]	d_{10} f [mm]	Δd_{10} [%]
2	4,54	3,44	-24,3	2,38	2,29	-3,6	11,22	10,16	-9,5
3	4,54	3,38	-25,6	2,38	2,21	-7,1	11,22	9,68	-13,7
6	4,54	3,02	-33,4	2,38	2,09	-12,3	11,22	7,71	-31,3
12	4,54	1,59	-64,9	2,38	1,90	-20,1	11,22	4,14	-63,1

La curva que presenta una mayor distribución de tamaños ($d_{50} = 8$ mm) asociada a un mayor coeficiente de uniformidad ($C_u = 4,1$), es la que presenta una mayor disminución de sus tamaños gruesos. Por otro lado, como se observa en la Tabla 14, las curvas 1 y 3 asociadas a un menor C_u (1,5 y 1,2 respectivamente) presentan una mayor disminución en sus tamaños finos (d_{10}), lo que indica una mayor generación de finos bajo el d_{10} original.

Posiblemente el hecho de tener una curva más inclinada (menor C_u) genera un mayor índice de vacíos entre los fragmentos, esto se puede apreciar al comparar el esponjamiento (sección 3.2), donde para bajos C_u se tiene un 44% de esponjamiento versus un 40%, provocando la aparición de esfuerzos de cizalle sobre singularidades de los fragmentos, y de esta manera generando el quiebre de los fragmentos que no se encuentran confinados o apoyados sobre otros. Se puede resumir, que el mecanismo de falla por cizalle es más significativo en las curvas 1 y 3 de mayor pendiente (C_u de 1,5 y 1,2).

Se debe tener presente que la fragmentación generada en las zonas de flujo y la porosidad del material, son consideradas como parámetros relevantes en los modelos de flujo al fijar parámetros de diseño [50]. La granulometría del material influye en la geometría del IMZ, siendo más angosta en material fino, lo que podría significar que las zonas de flujo entre puntos de extracción vecinos no se intersecten.

5.2 Colgaduras

La medición cuantitativa y cualitativa de colgaduras registradas en los ensayos fue realizada para las curvas caracterizadas por su d_{50} de 6 y 12 mm. Los resultados obtenidos de estos eventos se presentan en la Tabla 15 a través de la frecuencia de colgadura (masa/colgadura) obtenida a escala de laboratorio.

Tabla 15: Resultados experimentales de condición de flujo.

Ensayo	σ_v [MPa]	Condición de flujo	Interferencias [g/colgadura]	Desv, est. [g/colgadura]
1 A	2	Flujo libre	955	156
2 A	3	Flujo intermitente	625	0
3 A	6	Flujo intermitente	703	559
4 A	12	Flujo asistido	489	105
1 B	2	Flujo libre	∞	-
2 B	3	Flujo libre	∞	-
3 B	6	Flujo intermitente	680	160
4 B	12	Flujo asistido	546	127
6 A	2	Flujo intermitente	778	133
7 A	3	Flujo asistido	383	225
8 A	6	Flujo asistido	403	229
9 A	12	Sin flujo	0	0
6 B	2	Flujo libre	∞	-
7 B	3	Flujo asistido	493	445
8 B	6	Flujo asistido	303	99
9 B	12	Sin flujo	0	-

Las condiciones de flujo indicadas en la Tabla 15 corresponden a [38]:

- Flujo libre: El material fluye libremente sin interrupción debido a la acción de la gravedad a través del punto de extracción.
- Flujo intermitente: El material fluye con interrupciones intermitentes debido a los arcos mecánicos formados por la compactación del material. Éstos fallan por el esfuerzo vertical aplicado por la prensa hidráulica.
- Flujo asistido: Para que el material pueda fluir es necesario perturbar los arcos mecánicos interviniéndolos manualmente.
- Sin flujo: El material no fluye de ningún modo, inclusive perturbándolo manualmente.

Como se observa en la tabla anterior a una mayor aplicación de carga vertical, menor es la masa de material que fluye entre colgaduras; es decir, ocurre una mayor cantidad de colgaduras. En cuanto a la influencia de la distribución de tamaño en la frecuencia de colgaduras, los resultados muestran que el comportamiento, al aumentar la carga vertical, es similar independientemente del tamaño; pero como era de esperar por resultados previos (descritos en el Capítulo 2) el material de menor tamaño (caracterizado por su d_{50} de 6mm) presenta una fluidez o capacidad de fluir más favorable, con respecto a las curvas de mayores tamaños.

5.2.1 Frecuencia de colgaduras

Con el fin de representar el comportamiento de los eventos de colgadura al incrementar el confinamiento del material, se grafican los resultados en función de la frecuencia de colgaduras (masa / colgadura) versus el esfuerzo vertical (MPa) aplicado para ambas curvas granulométricas analizadas, Figuras 34 y 35.

En la Tabla 16 se presentan los resultados y el ajuste realizado para material de menor tamaño, caracterizado con su d_{50} de 6 mm:

Tabla 16: Resultados colgadura material $d_{50} = 6$ mm.

Ensayo	Esfuerzo vertical [MPa]	Colgaduras observadas	[g/colgaduras]	Ajuste
0 A	0	0	-	
0 B	0	0	-	
1 A	2	2	3.333	7.945
1 B	2	0	10.000	7.945
2 A	3	1	5.000	5.198
2 B	3	0	10.000	5.198
3 A	6	5	1.667	2.551
3 B	6	3	2.500	2.551
4 A	12	10	909	1.098
4 B	12	16	588	1.098
4 C	17,4	Sin flujo	0	684

Fue evaluado un esfuerzo máximo al cual se llega a una zona sin flujo producto del confinamiento del material (17,4 MPa). Gráficamente se observa la tendencia seguida por los resultados de colgaduras presentados en la Tabla 16, como se observa en la siguiente figura.

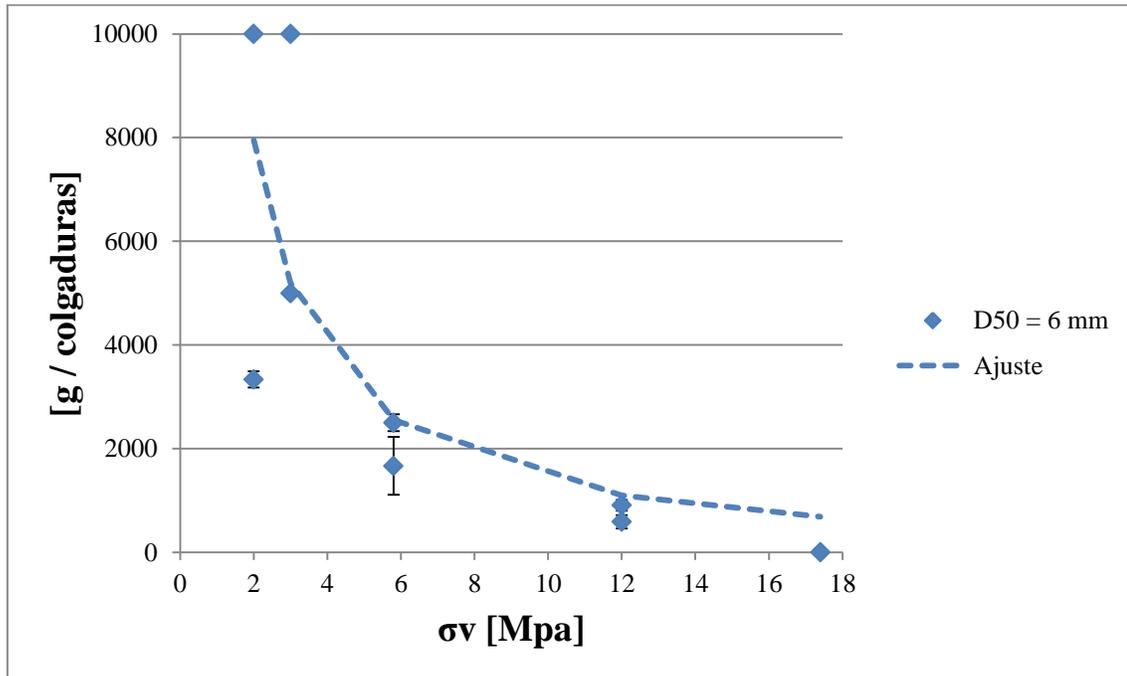


Figura 34: Colgaduras en material con $d_{50} = 6$ mm.

Se observa como decrece la frecuencia de colgaduras al incrementar el esfuerzo vertical σ_v . Este comportamiento es similar en ambas curvas granulométricas estudiadas como se observa en la Figura 35. Para el material de mayor tamaño (d_{50} de 12 mm) se tienen los detalles en la Tabla 17.

Tabla 17: Resultados colgadura material $d_{50} = 12$ mm.

Ensayo	Esfuerzo vertical [MPa]	Colgaduras observadas	[g/colgaduras]	Ajuste
5 A	0	0	10.000	
5 B	0	0	10.000	
6 A	2	3	2.500	6.235
6 B	2	0	10.000	6.235
7 A	3	6	1.429	1.513
7 B	3	6	1.429	1.513
8 A	6	13	714	46
8 B	6	11	833	46
9 A	12	Sin flujo	0	0
9 B	12	Sin flujo	0	0

Para esta granulometría la característica sin flujo se alcanza a los 12 MPa, el comportamiento de la frecuencia de colgadura sigue similar comportamiento que el caso anterior donde se tiene flujo libre para una condición de bajos esfuerzos.

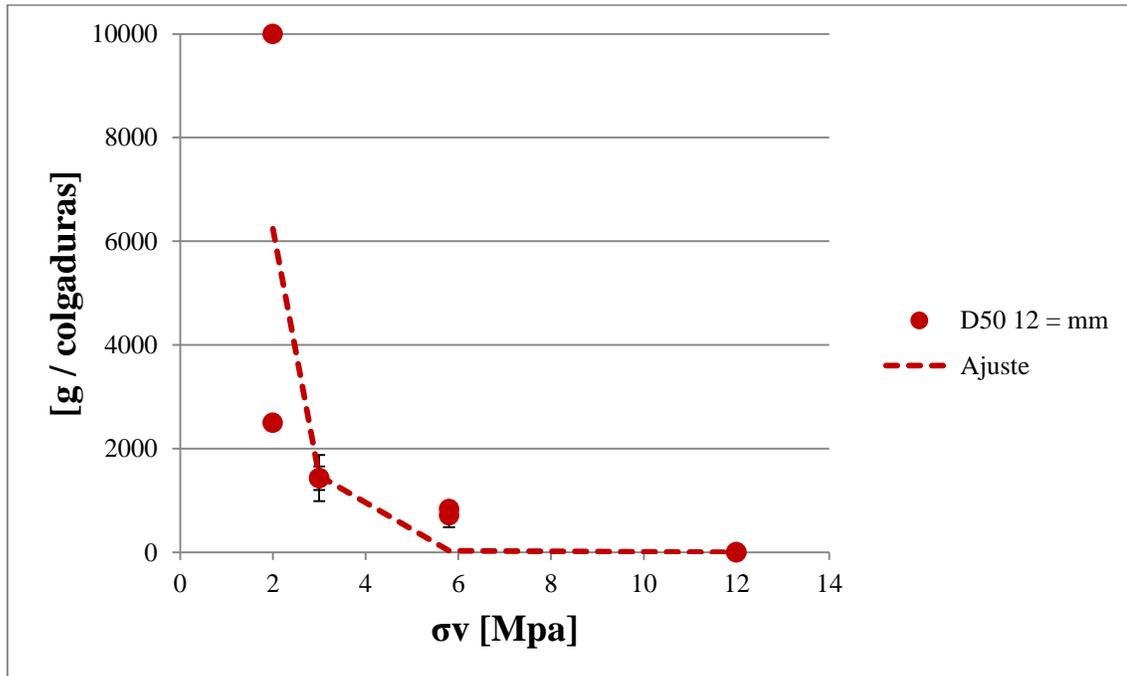


Figura 35: Colgaduras en material con $d_{50} = 12$ mm.

Como se observa en los gráficos presentados, el ajuste muestra la tendencia seguida por los resultados a escala de laboratorio. Con el fin de entender el impacto del confinamiento sobre generación de eventos de colgaduras, se buscó un modelo simple capaz de representar ambas situaciones, compatible con el comportamiento observado. Así, se encontró la siguiente relación exponencial:

$$H_g = H_{go} \cdot \exp(-r \cdot \sigma_v)$$

Donde “ H_g ” es el material que pasa entre eventos de colgadura (frecuencia de colgadura) [masa/ # coladuras]; “ H_{go} ” y “ r ” son parámetros de ajuste del modelo que dan cuenta de la tendencia a colgarse para diferentes esfuerzos aplicados propios del material ensayado. “ H_{go} ” representa condiciones ideales del material al someterse a una baja carga vertical y “ r ” varía considerablemente con el tamaño de partícula utilizado, “ σ_v ” corresponde al esfuerzo vertical aplicado (MPa).

Los valores de los parámetros ajustados a escala de laboratorio se encuentran en la siguiente tabla.

Tabla 18: Parámetros del modelo de colgaduras, material grava.

Parámetros de ajuste	Curva 1, $d_{50} = 6$ mm	Curva 3, $d_{50} = 12$ mm
H_{go}	16.498	111.125
r	0,02	1,44

Se prefirió el modelo exponencial frente a otros debido a que permite ajustar mejor ambas curvas granulométricas con los parámetros descritos anteriormente y, además, debido a que se comporta bien en los extremos, llevando el modelo a casos razonables. Por ejemplo, al tender a 0

la carga vertical, la frecuencia de colgaduras dependerá del caso base del material representado por H_{go} (debido a que la exponencial tiende a 1), y al aplicar una gran carga vertical la frecuencia de colgaduras tiende a 0, denotando una condición de no flujo producto de un gran confinamiento aplicado, situación observada en los ensayos.

Se debe tener en cuenta que los resultados presentados en este trabajo son a escala de laboratorio, por lo cual, se requiere un estudio posterior para ser llevados a escala mina, considerando el material y diseño del punto de extracción presente en faena. Los resultados obtenidos buscan por ende, lograr un mayor conocimiento de los principales procesos y comportamiento de la fragmentación secundaria y colgaduras en presencia de un alto confinamiento. Detalle de resultados de colgaduras en Anexo C.

5.3 Conclusiones del capítulo

5.3.1 Modelo de fragmentación

El modelo utilizado para predecir la fragmentación logra incorporar el efecto que tiene la carga vertical (σ_v) en la conminución del material, aumentando la probabilidad de que un fragmento sea seleccionado para sufrir un evento de quiebre. Por otra parte, la disminución de los tamaños de partícula la cual alcanza hasta un 20% con respecto al tamaño medio un condiciones de altos esfuerzos, y de hasta un 60% en material fino (caracterizado con su d_{10}), refleja este efecto al incorporar la carga vertical.

Al analizar la fragmentación sufrida por las diferentes curvas de distribución de tamaños, las que poseen un menor coeficiente de uniformidad (Cu) predomina el mecanismo de falla por abrasión del material y en la curva de mayor Cu predomina la compresión, posiblemente debido a las diferencias en los vacíos que genera el empaquetamiento del material en cada caso, permitiendo mayor movilidad sobre su propio eje a las partículas en el caso de un bajo coeficiente de uniformidad.

Si bien se observa un buen ajuste del modelo a través del coeficiente de correlación R^2 , al considerar un test de ajuste que tome en cuenta la cantidad de parámetros del modelo, la calidad del ajuste disminuye, aun así, la confianza del ajuste es aceptable salvo para la curva con d_{50} de 6 mm. Una mayor cantidad de datos mejoraría este último ajuste, mientras no presenten una mayor variación que los resultados actuales.

El material utilizado corresponde a grava, esto no debe ser obviado debido a que gran parte de los parámetros que definen el modelo dependen de características propias del material a utilizar.

5.3.2 Modelo de colgaduras

La relación propuesta para comportamiento de la frecuencia de colgaduras con respecto a la carga vertical aplicada corresponde a una primera etapa de desarrollo de un modelo de colgaduras, en el cual se identificaron los parámetros que modelan la ecuación en función de la tendencia representada por los datos obtenidos tras los experimentos. La siguiente etapa para el desarrollo del modelo (antes de poder ser escalado a casos mina), es representar las diversas

propiedades del material que influyen en la generación de un evento de colgadura, como el diseño de las excavaciones presentes en el nivel de producción (batea de extracción).

En suma, se puede concluir que tanto el tamaño de los fragmentos como el esfuerzo vertical aplicado inciden en el flujo de material, esto debido al incremento de las interferencias en el flujo de mineral a medida se consideran condiciones de mayores esfuerzos verticales, como se observa en las Figuras 34 y 35. A medida que decrece el esfuerzo vertical, la cantidad de masa que se obtiene entre colgaduras crece exponencialmente, comportamiento similar (pero inverso) al aumentar el confinamiento.

Capítulo 6: Conclusiones y recomendaciones

6.1 Conclusiones generales

En el presente trabajo se llevaron a cabo ensayos con material granular en un modelo a escala laboratorio bajo confinamiento. Esto se realizó con el fin de ajustar un modelo cinético de conminución propuesto, enfocado a modelar la fragmentación secundaria que ocurre en métodos de *caving*. Adicionalmente se estudió el comportamiento del material granular frente a la generación de eventos de colgaduras.

A partir de los resultados se concluye lo siguiente:

- Los experimentos realizados en material granular buscan representar el material presente en una operación de *block/panel caving*, lo que es más sencillo de replicar a través de ensayos físicos a escala como es el caso. Con métodos computacionales no es tan sencillo representar la variedad de la geometría de las partículas presentes.
- El modelo de fragmentación planteado logra representar las curvas granulométricas obtenidas tras los ensayos realizados, incorporando dentro del modelo la carga vertical aplicada representada por σ_v , logrando así representar los mecanismos de conminución presentes en la columna de mineral.
- Al someter el material a diferentes condiciones de esfuerzo se obtuvo una relación exponencial encontrada para la frecuencia de colgaduras, esta relación representa el efecto del confinamiento del material al variar la carga vertical, en condiciones de bajos y altos esfuerzos, aumentando y disminuyendo la frecuencia de colgaduras respectivamente. La tendencia que siguen los datos es reflejada en las dos curvas granulométricas analizadas (con d_{50} de 6 mm y 12 mm).

6.1.1 Régimen de esfuerzos

Como se ha mencionado, la formación de colgaduras afecta fuertemente la productividad de la explotación por *block/panel caving*, pero aun así, existen pocos estudios que señalen la capacidad de fluir de distintos materiales en las minas de *caving*, en particular sobre puntos de extracción, sometidos a altos esfuerzos. Lo anterior se debe a que la mayor parte de los estudios se han realizado en relación al flujo de material en piques de traspaso, silos o modelos a escala con un bajo esfuerzo vertical presente.

El régimen de esfuerzos bajo el cual se encuentra el mineral quebrado va a depender principalmente de la altura de columna in situ generada en diferentes profundidades a la cual se encuentre la operación, pero la distribución o trayectorias que sigan los esfuerzos a través del material va a depender del empaquetamiento de éste, condiciones de operación y parámetros de diseño. Debido a la complejidad que puede llegar a adoptar la configuración de esfuerzos presentes, es que solo se representan mediante el esfuerzo vertical aplicado. Debido a lo anterior, con el fin de generar modelos representativos, los *inputs* como el diseño del punto de extracción deben ser desarrollados acorde a las condiciones presentes en la operación.

Se debe tener presente que la zona de extracción no se ve afectada directamente por toda la carga vertical aplicada, debido a los esfuerzos horizontales que aparecen por la configuración del material hacia las paredes del cilindro, y también debido a que en la base del modelo al costado de la abertura de extracción, actúa como pilar, concentrando el esfuerzo vertical y relajando los esfuerzos hacia el centro de la abertura.

6.1.2 Fragmentación

En cuanto a la predicción de la fragmentación secundaria, es posible que se esté subdimensionado, a causa de que la columna de material ensayado esta definida por las condiciones de borde propias del cilindro quitándole movilidad al sistema (con respecto al desplazamiento horizontal del mineral que puede ocurrir en la operación). El desplazamiento horizontal genera una mayor distancia de traslado para algunas partículas aumentando así la probabilidad de que sufran un evento de quiebre.

El modelo de fragmentación ajustado a partir de las curvas de fragmentación obtenidas tras los ensayos en el modelo físico utilizado, debiese ser representativo en cuanto a los mecanismos de fragmentación secundaria presentes en minería de *caving*, ya que en el modelo físico también se aprecian los principales modos de falla asociados a la fragmentación secundaria que son: la abrasión y la compresión.

A su vez, la función de selección del modelo; $S_i = S_i^E \cdot \sigma_v$, al incorporar el esfuerzo vertical presente, implica que al existir una carga vertical hay una mayor probabilidad de que las partículas puedan sufrir un proceso quiebre, debido a que se incrementa la tasa de selección.

6.1.3 Generación de colgaduras

Si bien el tamaño de los fragmentos es uno de los principales factores que influye en la formación de arcos de roca, los resultados de los experimentos muestran que la presión vertical ejercida también es un parámetro que debiese ser considerado.

En particular el modelo exponencial planteado logra representar la tendencia de lo observado en los ensayos. Por ejemplo, cuando el confinamiento es despreciable (tendiendo a cero) se tiene la situación donde la frecuencia de colgaduras parte de un caso base " H_{go} ", donde no influye el confinamiento;

$$H_g = H_{go} \exp(-r \cdot 0) \rightarrow H_{go}$$

El cual vendrá siendo un caso óptimo para una configuración en particular bajo ciertas condiciones iniciales. Y cuando el esfuerzo presente crece considerablemente ($\sigma_v \rightarrow \infty$) se tiene;

$$H_g \sim H_{go} \cdot 0 = 0$$

Lo que da cuenta que ante altos esfuerzos se llega a un estado sin flujo.

Finalmente, es importante tener presente que a lo largo de la investigación, se trabaja desde un único punto de extracción, el cual no interactúa con puntos vecinos como si ocurre en una operación de *block/panel caving*, por lo que al buscar escalar el efecto de las variables y

parámetros considerados en los modelos, se debe tener presente que los alcances de estos modelos fueron diseñados a nivel de lo que ocurre en un punto aislado sin considerar interacción.

6.2 Recomendaciones

Dado que el presente trabajo busca una aplicación a la minería de *block/panel caving*, se enumeran a continuación una serie de recomendaciones, las cuales apoyarían al desarrollo e implementación de los modelos predictivos propuestos:

1. Incorporar una geometría de extracción y sistema de extracción acorde a la aplicada en faena (batea de extracción y sistema *LHD*).
2. Considerar diversos materiales que representen las propiedades encontradas en el mineral presente en operaciones de *caving* a gran profundidad (mineral primario). Tomando en cuenta diversas propiedades de éste tales como su resistencia, abrasividad, ángulo de fricción interna, tenacidad, densidad, índice de uniformidad, factor de forma, las que podrían tener un impacto en los parámetros de los modelos.
3. Tomar en cuenta la presencia de finos y humedad presente en los puntos de extracción. Estudiar así el comportamiento en arcos cohesivos.
4. Evaluar la extracción por más de una abertura o batea, con el fin de lograr una interacción entre los IMZ de diferentes puntos, y de esta manera debilitar columnas de “alta presión” generadas alrededor de la extracción desde un solo punto, lo que podría favorecer el flujo de material.
5. Una vez generados los modelos predictivos de colgaduras, tomando en cuenta idealmente las recomendaciones dadas, validar el modelo en terreno con datos mina.
6. Estudiar el impacto en el diámetro del IMZ al aplicar carga vertical en diferentes materiales.

Bibliografía

- [1] Cornejo M. 2008. Impacto en la productividad del nivel de traspaso en la confiabilidad de un programa de producción. Memoria de Título. Santiago, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
- [2] Maass S. 2013. Alternativas Tecnológicas para el descuelgue de zanjas. Tesis de Magister. Santiago, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
- [3] Hustrulid W. 2000. Method Selection for Large-Scale Underground Mining. En: Massmin 2000 Proceeding. pp 29-56.
- [4] Brown E T. 2007. Introduction. En: Block Caving Geomechanics. pp 1-36.
- [5] Laubscher D H. 2006. Cave mining handbook.
- [6] Brown E T. 2007. Caving Mechanics, cave propagation, pre-conditioning and cave inducement. En: Block Caving Geomechanics. Second edition, pp 288-329.
- [7] Chitombo G P. 2010. Cave mining: 16 years after Laubscher's 1994 paper 'Cave mining–state of the art'. En: Caving 2010. pp 45-62.
- [8] Jofre J, Yáñez P, and Ferguson G. 2000. Evolution in Panel Caving Undercutting and Drawbell Excavation, El Teniente Mine. En: Massmin 2000 Proceeding. pp 249-260.
- [9] Pesce J, Ovalle A. 2004. Mass Mining method I: Fundamentals - Production capacity of a mass caving. En: Massmin 2004 Proceeding. pp 75-78.
- [10] Brown E T. 2004. Fragmentation assessment .En: Block Caving Geomechanics. Second edition. pp 184-227.
- [11] Nicholas D E, and Srikant A. 2004. Geotechnical characterization for mass mining - Assessment of primary fragmentation from drill core data. En: Massmin 2004 Proceeding. pp 55-58.
- [12] Jaeger H M, Nagel S R. 2011. Physics of the Granular State. En: Science. pp 1523- 1531.
- [13] Pouliquen O, Chevoir F. 2002. Dense flows of dry granular material. Comptes Rendus Physique, 3(2), pp 163-175.
- [14] Melo F. 2004. The physic of granular materials. [Diapositivas]. Santiago, Universidad de Santiago de Chile.
- [15] Hardin B O. 1985. Crushing of soil particles. En: Journal of Geotechnical Engineering, 111(10), pp 1177-1192.
- [16] Sayeed M A, Sazzad M M, and Suzuki K. 2012. Mechanical Behavior of Granular Materials Considering Confining Pressure Dependency. InGeoCongress 2012@ sState of the Art and Practice in Geotechnical Engineering. pp 2197-2206. ASCE.
- [17] Alramahi B A, and Alshibli K A. 2006. Particle-to-Particle Interaction during Shearing of Granular Materials. In Earth & Space 2006@ sEngineering, Construction, and Operations in Challenging Environment. pp. 1-8. ASCE.
- [18] Lade P V, Yamamuro J A, and Bopp P A. 1996. Significance of particle crushing in granular materials. En: Journal of Geotechnical Engineering, 122(4), pp 309-316.
- [19] Gonzales G. 2012. Estudio del comportamiento de un material granular mediante modelos computacionales. Memoria de Título. Santiago, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.

- [20] Kvapil D R. 2008. Gravity flow in sublevel and panel caving – A common sense approach.
- [21] Craig R F. 2004. Basic characteristics of soils. En: Craig's Soil Mechanics. 7^{ma} edición. pp 1-29.
- [22] Laubscher D H. 1994. Cave mining - the state of the art. En: Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy. pp. 279-293.
- [23] Brady B H, and Brown E T. 2004. Longwall and Caving Mining Methods. En: Rock Mechanics for underground mining, third edition.
- [24] Merino L. 1986. Predicting the size distribution of ore fragments in block caving mines. Tesis de Magíster. Imperial College. Inglaterra.
- [25] Laubscher D H. 2001. Cave mining - the state of the art. En: Underground Mining Method. pp. 455-463.
- [26] Pierce M E. 2010. A model for gravity flow of fragmented rock in block caving mines. PhD Thesis. The University of Queensland.
- [27] Fuenzalida M. 2012. Estudio del flujo gravitacional confinado y su aplicación a la minería del caving. Tesis de Magister. Santiago, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
- [28] Paredes P. 2012. Mecanismos de entrada de dilución en minas de block/panel caving. Tesis de Magister. Santiago, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
- [29] Casali A. 2012. Modelos de conminución; Apunte Fundamentos de Procesos Mineralúrgicos. [Diapositivas]. Santiago, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. Material Docente.
- [30] Ouchterlony F. 1983. Analysis of cracks related to rock fragmentation. En: Rock Fracture Mechanics. pp 31-66.
- [31] Ingraffea A R. 1983. Numerical Modelling of Fracture Propagation. En: Rock Fracture Mechanics. pp 151-204.
- [32] Montecino N. 2011. Modelo de mezcla de fragmentación secundaria en minería de block/panel caving. Tesis de Magister. Santiago, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
- [33] Bridgwater J, Utsumi R, Zhang Z, & Tuladhar T. 2003. Particle attrition due to shearing—the effects of stress, strain and particle shape. En: Chemical engineering science, 58(20), pp 4649-4665.
- [34] Troncoso S. 2006. Simulación del impacto de interferencias operacionales para la planificación de producción. Memoria de Título. Santiago, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
- [35] Beus M J, Pariseau W G, Stewart B M, Iverson S R. 2001. Design of Ore Passes. En: Underground Mining Method. pp 627-634.
- [36] Hadjigeorgiou J, and Lessard J F. 2007. Numerical investigations of ore pass hang-up phenomena. En: International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 44(6), pp 820-834.
- [37] Handy R L. 1985. The arch in soil arching. En: Journal of Geotechnical Engineering, 111(3), pp 302-318.

- [38] Castro R, Fuenzalida MA, Lung F. 2014. Experimental study of gravity flow under confined condition. En: International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, vol 67, pp. 164-169.
- [39] Nedderman R M. 1992. The Method of differential slices. En: Statics and Kinematics of Granular Material. pp 84-126.
- [40] Le-feaux R. 1998. Manejo de materiales en explotaciones subterráneas. Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile.
- [41] Buthcer R, Joughin W and Stacey TR. 2000. Methods of combating mudrushes in diamond and base metal mines.
- [42] Orellana L. 2012. Estudio de variables de diseño del sistema de minería continua a partir del experimentación en laboratorio. Tesis de Magister. Santiago, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
- [43] Brady B H , and Brown E T. 2004. Rock strength and deformability. En: Rock Mechanics for underground mining, third edition.
- [44] Broadbent, S.R. Callcot, T.G. A Matrix analysis of processes involving particle assemblies, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. 1956, Vol 249, pp. 99-123.
- [45] Epstein, B. Logarithmico-normal distribution in breakage of solids. En: Industrial & Engineering Chemistry. 1948, 40(12), pp. 2289-2291.
- [46] National Materials Advisory Broad. Comminution and energy consumption. 1981. U.S. Dept. of Energy, U.S. Bureau of mines, National Science Foundations, Report No. NMAB-364.
- [47] Reid K J. 1965. A solution to the batch grinding equation. Chemical Engineering Science, Volume 20, pp 953-963.
- [48] Austin L G, Klimpel R R and Luckie P T. 1984. The Batch Grinding Equation: The Size-Mass Rate Balance. En: Process Engineering of Size Reduction: Ball Milling. pp 61-78.
- [49] García D, García H & Cárdenas L. 2006. Variables aleatorias. En: Simulación y análisis de sistemas con Promodel. 1^{ra} Ed. México. Pearson Educación. pp. 56-72.
- [50] Vas As A, Van Hout G J. 2008. Implication of widely spaced drawpoints. En: Massmin 2008. pp 147-154.

Anexos

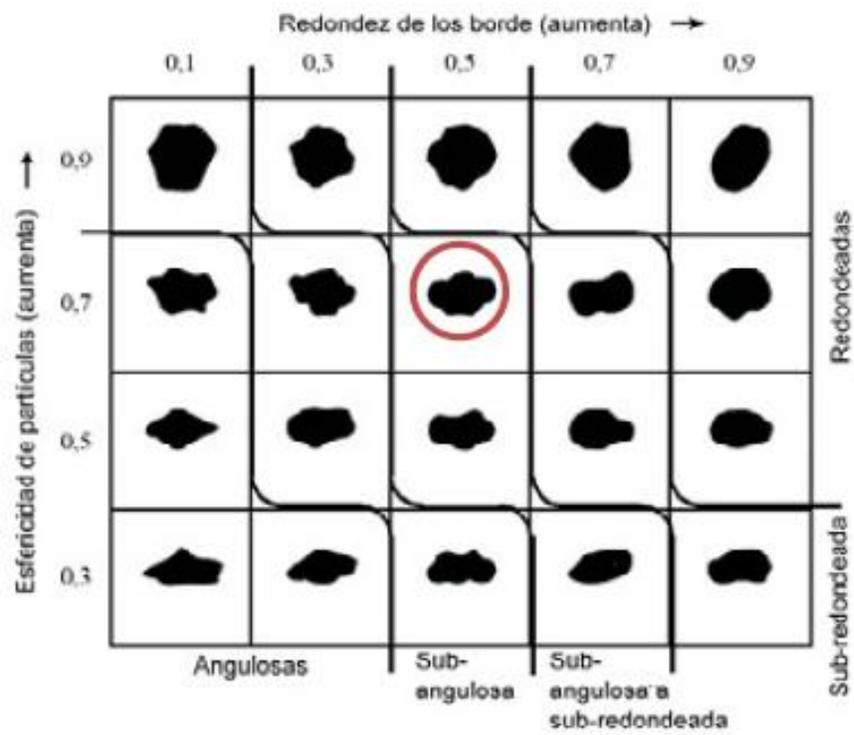
Anexo A: Caracterización de material utilizado.

Ensayos de carga puntual en Grava.

Distancia entre puntas (D) [mm]	Ancho superior [mm]	Ancho inferior [mm]	Ancho Promedio [mm]	Fuerza de Ruptura [N]	Fuerza de Ruptura [KN]	De ² mm ²	De mm	Índice de Carga Puntual (Is) [MPa]	Factor de Corrección (F)	Índice de Carga Puntual (Is50) [MPa]
23	60	30	45	7580	7,58	1757	42	4,31	0,92	3,98
18	50	40	45	7630	7,63	1146	34	6,66	0,84	5,59
30	60	30	45	8310	8,31	2292	48	3,63	0,98	3,56
16	60	45	52,5	9660	9,66	1222	35	7,90	0,85	6,73
20	55	30	42,5	10660	10,66	1401	37	7,61	0,88	6,68
22	50	30	40	9420	9,42	1401	37	6,73	0,88	5,90
25	65	40	52,5	15470	15,47	2069	45	7,48	0,96	7,17
21	65	40	52,5	7670	7,67	1738	42	4,41	0,92	4,07
15	60	40	50	9900	9,9	1146	34	8,64	0,84	7,25
17	50	35	42,5	8800	8,8	1082	33	8,13	0,83	6,74
19	55	40	47,5	12140	12,14	1331	36	9,12	0,87	7,92
20	62	19	40,5	7530	7,53	1579	40	4,77	0,90	4,30
21	46	26	36	12230	12,23	1230	35	9,94	0,85	8,48
12	55	20	37,5	8110	8,11	840	29	9,65	0,78	7,55
15	60	13	36,5	7280	7,28	1146	34	6,35	0,84	5,33
17	44	21	32,5	9290	9,29	952	31	9,75	0,80	7,85
									Promedio	6,2

Anexo A

Factor de forma de grava utilizada en ensayos.



Anexo B: Detalle resultados de fragmentación

Estadístico “c” para test de bondad de ajuste de chi-cuadrado material $d_{50} = 6$ mm. Fu:

Mallas	2mpa	2mpa	Oi	Ei	c
-3/8 +1/4	100	100	100	100	0
-1/4 + 4#	55,44	61,57	58,51	56,48	0,07236573
-4# +8#	26,06	24,33	25,20	23,14	0,18177009
-8# +10#	4,25	2,60	3,43	3,34	0,00204519
-10# +16#	0,00	1,50	0,75	1,87	0,67418418
					0,9303652
Mallas	3mpa	3mpa	Oi	Ei	c
-3/8 +1/4	100	100	100	100	0
-1/4 + 4#	58,83	57,22	58,03	57,87	0,00041194
-4# +8#	29,45	23,93	26,69	24,95	0,12090041
-8# +10#	4,25	2,90	3,58	4,70	0,2692186
-10# +16#	0,00	1,63	0,82	2,53	1,16091146
					1,5514424
Mallas	6mpa	6mpa	Oi	Ei	c
-3/8 +1/4	100	100	100	100	0
-1/4 + 4#	60,86	57,70	59,28	61,52	0,08187113
-4# +8#	35,84	30,38	33,11	29,82	0,36304246
-8# +10#	3,95	6,42	5,19	8,50	1,28974765
-10# +16#	0,00	4,01	2,01	4,46	1,35360749
					3,08826873
Mallas	12mpa	12mpa	Oi	Ei	c
-3/8 +1/4	100	100	100	100	0
-1/4 + 4#	66,61	68,46	67,54	69,73	0,06889172
-4# +8#	42,18	41,45	41,82	41,35	0,00518141
-8# +10#	17,74	15,71	16,73	18,36	0,14579369
-10# +16#	12,10	10,44	11,27	10,17	0,11937184
					0,33923866
					Estadístico 5,909

Anexo B

Estadístico “c” para test de bondad de ajuste de chi-cuadrado material $d_{50} = 8$ mm. Fu:

Mallas	2mpa	2mpa	Oi	Ei	c
-1 +3/4	100	100	100	100	0
-3/4 +1/2	98,05	98,46	98,26	98,19	4,1587E-05
-1/2 +3/8	78,17	82,90	80,54	78,92	0,03318757
-3/8 +1/4	65,47	63,03	64,25	60,03	0,29611533
-1/4 + 4#	45,38	39,14	42,26	40,91	0,04469471
-4# +8#	30,13	24,48	27,31	26,13	0,05328605
-8# +10#	12,36	9,79	11,08	11,40	0,00951378
-10# +16#	7,12	5,14	6,13	5,93	0,00697495
-16# +30#	3,59	2,20	2,90	2,62	0,02883606
-30# +70#	1,48	0,97	1,23	1,32	0,00702004
					0,47967009
Mallas	3mpa	3mpa	Oi	Ei	c
-1 +3/4	100	100	100	100	0
-3/4 +1/2	98,14	98,13	98,14	98,25	0,00013174
-1/2 +3/8	76,28	84,47	80,38	79,54	0,00874031
-3/8 +1/4	64,43	63,25	63,84	60,88	0,14410762
-1/4 + 4#	45,74	40,29	43,02	41,86	0,03208586
-4# +8#	31,42	26,14	28,78	26,97	0,12151556
-8# +10#	14,22	10,68	12,45	12,16	0,00678164
-10# +16#	8,48	5,92	7,20	6,40	0,10000112
-16# +30#	4,46	2,78	3,62	2,91	0,1707289
-30# +70#	1,89	1,24	1,57	1,48	0,00492983
					0,58902257
Mallas	6mpa	6mpa	Oi	Ei	c
-1 +3/4	100	100	100	100	0
-3/4 +1/2	98,78	97,67	98,23	98,40	0,00031353
-1/2 +3/8	88,02	82,35	85,19	81,19	0,19621204
-3/8 +1/4	68,73	59,60	64,17	63,16	0,01587279
-1/4 + 4#	47,11	38,40	42,76	44,46	0,06504979
-4# +8#	34,89	25,83	30,36	29,32	0,03679383
-8# +10#	17,77	10,38	14,08	14,29	0,00320076
-10# +16#	11,03	6,76	8,90	7,76	0,16650301
-16# +30#	6,33	3,52	4,93	3,77	0,35282283
-30# +70#	2,47	1,49	1,98	1,95	0,00047699
					0,83724555
	12mpa	12mpa	Oi	Ei	c
-1 +3/4	100	100	100	100	0
-3/4 +1/2	98,47	98,51	98,49	98,74	0,0006411
-1/2 +3/8	89,67	87,66	88,67	84,95	0,16262098
-3/8 +1/4	72,77	69,82	71,30	68,67	0,10050099
-1/4 + 4#	49,63	48,93	49,28	50,93	0,05323365
-4# +8#	37,15	34,18	35,67	35,41	0,00179158
-8# +10#	17,54	17,29	17,42	19,90	0,31083266
-10# +16#	11,76	11,02	11,39	11,55	0,00234185
-16# +30#	7,34	6,51	6,93	6,25	0,07238431
-30# +70#	3,03	2,68	2,86	3,38	0,08031317
					0,78466029
				Estadístico	2,691

Anexo B

Estadístico “c” para test de bondad de ajuste de chi-cuadrado material $d_{50} = 12$ mm. Fu:

Mallas	2mpa	2mpa	Oi	Ei	c
-3/4 +1/2	100	100	100	100	0
-1/2 +3/8	60,76	57,99	59,38	59,45	0,00010591
-3/8 +1/4	2,41	9,57	5,99	5,87	0,00263939
-1/4 + 4#	0,40	1,56	0,98	2,70	1,09312744
-4# +8#	0,22	0,99	0,61	1,32	0,38861878
-8# +10#	0,09	0,46	0,28	0,64	0,2075454
					1,69203693
Mallas	3mpa	3mpa	Oi	Ei	c
-3/4 +1/2	100	100	100	100	0
-1/2 +3/8	60,76	57,99	59,38	59,45	0,00010591
-3/8 +1/4	2,41	9,57	5,99	5,87	0,00263939
-1/4 + 4#	0,40	1,56	0,98	2,70	1,09312744
-4# +8#	0,22	0,99	0,61	1,32	0,38861878
-8# +10#	0,09	0,46	0,28	0,64	0,2075454
					1,69203693
Mallas	6mpa	6mpa	Oi	Ei	c
-3/4 +1/2	100	100	100	100	0
-1/2 +3/8	59,88	67,07	63,48	64,15	0,00712889
-3/8 +1/4	11,49	19,69	15,59	14,65	0,06091781
-1/4 + 4#	5,73	7,57	6,65	7,84	0,18158265
-4# +8#	3,73	5,20	4,47	4,08	0,03722105
-8# +10#	1,71	2,54	2,13	2,08	0,00086588
					0,28771628
Mallas	12mpa	12mpa	Oi	Ei	c
-3/4 +1/2	100	100	100	100	0
-1/2 +3/8	62,84	72,96	67,90	71,79	0,211164
-3/8 +1/4	25,00	31,64	28,32	29,57	0,05289115
-1/4 + 4#	15,45	16,66	16,06	17,76	0,16331901
-4# +8#	10,74	11,93	11,34	10,14	0,14159276
-8# +10#	5,20	6,25	5,73	5,64	0,0011846
					0,57015152
				Estadístico	4,242

Anexo B

Resultados curva con $d_{50} = 6$ mm.

Clase	Tamaño [mm]	Tamaño medio [mm]	$\sigma_v = 2$ [Mpa]		$\sigma_v = 3$ [Mpa]		$\sigma_v = 6$ [Mpa]		$\sigma_v = 12$ [Mpa]	
			fi	Fu	fi	Fu	fi	Fu	fi	Fu
			[%]	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]
-1 +3/4	25,40	22,00								
-3/4 +1/2	19,05	15,55								
-1/2 +3/8	12,70	11,00								
-3/8 +1/4	9,53	7,78	44,56	100	41,17	100	39,14	100	33,39	100
-1/4 + 4#	6,35	5,49	29,38	55,4	29,38	58,8	25,02	60,9	24,43	66,6
-4# +8#	4,75	3,35	21,81	26,1	25,20	29,5	31,89	35,8	24,44	42,2
-8# +10#	2,36	2,17	4,25	4,3	4,25	4,3	3,95	3,9	5,64	17,7
-10# +16#	2,00	1,54	0	0	0	0	0	0	12,10	12,1
-16# +30#	1,18	0,84							0	0

Resultados curva con $d_{50} = 6$ mm. Réplica.

Clase	Tamaño [mm]	Tamaño medio [mm]	$\sigma_v = 2$ [Mpa]		$\sigma_v = 3$ [Mpa]		$\sigma_v = 6$ [Mpa]		$\sigma_v = 12$ [Mpa]	
			fi	Fu	fi	Fu	fi	Fu	fi	Fu
			[%]	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]
-1 +3/4	25,40	22,00								
-3/4 +1/2	19,05	15,55								
-1/2 +3/8	12,70	11,00								
-3/8 +1/4	9,53	7,78	38,43	100	42,78	100	42,30	100	31,54	100
-1/4 + 4#	6,35	5,49	37,24	61,57	33,29	57,22	27,32	57,7	27,01	68,46
-4# +8#	4,75	3,35	21,73	24,33	21,03	23,93	23,96	30,38	25,74	41,45
-8# +10#	2,36	2,17	1,10	2,60	1,27	2,90	2,41	6,42	5,27	15,71
-10# +16#	2,00	1,54	0,53	1,50	0,56	1,63	1,31	4,01	3,20	10,44
-16# +30#	1,18	0,84	0,44	0,97	0,50	1,07	1,21	2,70	3,17	7,24
-30# +70#	0,60	0,36	0,30	0,53	0,30	0,57	0,85	1,49	2,24	4,07
-70#	0,21	0,15	0,23	0,23	0,27	0,27	0,64	0,64	1,83	1,83

Anexo B

Resultados curva con $d_{50} = 8$ mm.

Clase	Tamaño [mm]	Tamaño medio [mm]	$\sigma_v = 2$ [Mpa]		$\sigma_v = 3$ [Mpa]		$\sigma_v = 6$ [Mpa]		$\sigma_v = 12$ [Mpa]	
			fi	Fu	fi	Fu	fi	Fu	fi	Fu
			[%]	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]
-1 +3/4	25,40	22,00	1,95	100	1,86	100	1,22	100	1,53	100
-3/4 +1/2	19,05	15,55	19,88	98,05	21,86	98,14	10,76	98,78	8,80	98,47
-1/2 +3/8	12,70	11,00	12,70	78,17	11,85	76,28	19,29	88,02	16,90	89,67
-3/8 +1/4	9,53	7,78	20,09	65,47	18,69	64,43	21,62	68,73	23,14	72,77
-1/4 + 4#	6,35	5,49	15,25	45,38	14,32	45,74	12,22	47,11	12,48	49,63
-4# +8#	4,75	3,35	17,77	30,13	17,20	31,42	17,12	34,89	19,61	37,15
-8# +10#	2,36	2,17	5,24	12,36	5,74	14,22	6,74	17,77	5,78	17,54
-10# +16#	2,00	1,54	3,53	7,12	4,02	8,48	4,70	11,03	4,42	11,76
-16# +30#	1,18	0,84	2,11	3,59	2,57	4,46	3,86	6,33	4,31	7,34
-30# +70#	0,60	0,36	1,48	1,48	1,89	1,89	2,47	2,47	3,03	3,03

Resultados curva con $d_{50} = 8$ mm. Réplica.

Clase	Tamaño [mm]	Tamaño medio [mm]	$\sigma_v = 2$ [Mpa]		$\sigma_v = 3$ [Mpa]		$\sigma_v = 6$ [Mpa]		$\sigma_v = 12$ [Mpa]	
			fi	Fu	fi	Fu	fi	Fu	fi	Fu
			[%]	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]
-1 +3/4	25,40	22,00	1,54	100	1,87	100	2,33	100	1,49	100
-3/4 +1/2	19,05	15,55	15,56	98,46	13,66	98,13	15,32	97,67	10,85	98,51
-1/2 +3/8	12,70	11,00	19,87	82,90	21,22	84,47	22,75	82,35	17,84	87,66
-3/8 +1/4	9,53	7,78	23,89	63,03	22,96	63,25	21,20	59,60	20,89	69,82
-1/4 + 4#	6,35	5,49	14,66	39,14	14,15	40,29	12,57	38,40	14,75	48,93
-4# +8#	4,75	3,35	14,69	24,48	15,46	26,14	15,45	25,83	16,89	34,18
-8# +10#	2,36	2,17	4,65	9,79	4,76	10,68	3,62	10,38	6,27	17,29
-10# +16#	2,00	1,54	2,94	5,14	3,14	5,92	3,24	6,76	4,51	11,02
-16# +30#	1,18	0,84	1,23	2,2	1,54	2,78	2,03	3,52	3,83	6,51
-30# +70#	0,60	0,36	0,97	0,97	1,24	1,24	1,49	1,49	2,68	2,68

Anexo B

Resultados curva con $d_{50} = 12$ mm.

Clase	Tamaño [mm]	Tamaño medio [mm]	$\sigma_v = 2$ [Mpa]		$\sigma_v = 3$ [Mpa]		$\sigma_v = 6$ [Mpa]		$\sigma_v = 12$ [Mpa]	
			fi	Fu	fi	Fu	fi	Fu	fi	Fu
			[%]	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]
-1 +3/4	25,40	22,00								
-3/4 +1/2	19,05	15,55	39,24	100	36,43	100	40,12	100	37,16	100
-1/2 +3/8	12,70	11,00	58,35	60,76	56,67	63,57	48,39	59,88	37,84	62,84
-3/8 +1/4	9,53	7,78	2,01	2,41	3,92	6,90	5,76	11,49	9,55	25,00
-1/4 + 4#	6,35	5,49	0,18	0,4	0,65	2,98	2,00	5,73	4,71	15,45
-4# +8#	4,75	3,35	0,13	0,22	1,10	2,33	2,02	3,73	5,54	10,74
-8# +10#	2,36	2,17	0,09	0,09	1,23	1,23	1,71	1,71	5,20	5,20

Resultados curva con $d_{50} = 12$ mm. Réplicas.

Clase	Tamaño [mm]	Tamaño medio [mm]	$\sigma_v = 2$ [Mpa]		$\sigma_v = 3$ [Mpa]		$\sigma_v = 6$ [Mpa]		$\sigma_v = 12$ [Mpa]	
			fi	Fu	fi	Fu	fi	Fu	fi	Fu
			[%]	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]
-1 +3/4	25,40	22,00								
-3/4 +1/2	19,05	15,55	42,01	100	37,11	100	32,93	100	27,04	100
-1/2 +3/8	12,70	11,00	48,42	57,99	51,92	62,89	47,38	67,07	41,32	72,96
-3/8 +1/4	9,53	7,78	8,01	9,57	8,34	10,97	12,12	19,69	14,98	31,64
-1/4 + 4#	6,35	5,49	0,57	1,56	0,83	2,63	2,37	7,57	4,73	16,66
-4# +8#	4,75	3,35	0,53	0,99	0,79	1,8	2,66	5,2	5,68	11,93
-8# +10#	2,36	2,17	0,11	0,46	0,21	1,01	0,69	2,54	1,58	6,25
-10# +16#	2,00	1,54	0,09	0,35	0,14	0,8	0,45	1,85	1,25	4,67
-16# +30#	1,18	0,84	0,10	0,26	0,18	0,66	0,58	1,4	1,28	3,42
-30# +70#	0,60	0,36	0,16	0,16	0,13	0,48	0,43	0,82	1,05	2,14

Anexo C: Detalle resultados colgadura

Ensayos para $d_{50} = 6$ mm.

ENSAYOS 6 mm					
gr	Masa extraída /colgadura	masa entre colg [kg]	Desv std	Masa promedio entre colg [g]	Sigma V
1065	1.065	1.065	156	955	2
845	1.91	0.845			2
625	0.625	0.625	-	625	3
530	0.53	0.53	559	703	6
1615	2.145	1.615			6
530	2.675	0.53			6
104	2.779	0.104			6
735	3.514	0.735			6
560	0.56	0.56	105	489	12
370	0.93	0.37			12
540	1.47	0.54			12
425	1.895	0.425			12
360	2.255	0.36			12
640	2.895	0.64			12
590	3.485	0.59			12
355	3.84	0.355			12
480	4.32	0.48			12
570	4.89	0.57			12

Ensayos para $d_{50} = 6$ mm (réplicas).

REPLICAS 6 mm					
gr	Masa extraída /colgadura	masa entre colg [kg]	Desv std	Masa promedio entre colg [g]	Sigma V
680	0.68	0.68	160.2	495	6
405	1.085	0.405			6
400	1.485	0.4			6
690	0.69	0.69	127.1	546	12
470	1.16	0.47			12
500	1.66	0.5			12
490	2.15	0.49			12
500	2.65	0.5			12
500	3.15	0.5			12
470	3.62	0.47			12
460	4.08	0.46			12
450	4.53	0.45			12
535	5.065	0.535			12
550	5.615	0.55			12
955	6.57	0.955			12
610	7.18	0.61			12
535	7.715	0.535			12
440	8.155	0.44			12
580	8.735	0.58			12

Anexo C

Ensayos para $d_{50} = 12$ mm.

ENSAYOS 11 mm					
gr	Masa extraída /colgadura	masa entre colg [kg]	Desv std	Masa promedio entre colg [g]	Sigma V
680	0.68	0.68	133	778	2
725	1.405	0.725			2
930	2.335	0.93			2
770	0.77	0.77	225	383	3
140	0.91	0.14			3
480	1.39	0.48			3
210	1.6	0.21			3
310	1.91	0.31			3
385	2.295	0.385			3
570	0.57	0.57			6
460	1.03	0.46	229	403	6
440	1.47	0.44			6
275	1.745	0.275			6
185	1.93	0.185			6
255	2.185	0.255			6
950	3.135	0.95			6
220	3.355	0.22			6
330	3.685	0.33			6
120	3.805	0.12			6
370	4.175	0.37			6
365	4.54	0.365			6
700	5.24	0.7	6		

Ensayos para $d_{50} = 12$ mm (réplicas).

REPLICAS 11 mm					
gr	Masa extraída /colgadura	masa entre colg [kg]	Desv std	Masa promedio entre colg [g]	Sigma V
1395	1.395	1.395	445	493	3
230	1.625	0.23			3
330	1.955	0.33			3
315	2.27	0.315			3
300	2.57	0.3			3
390	2.96	0.39			3
560	0.56	0.56	99	303	6
245	0.805	0.245			6
255	1.06	0.255			6
265	1.325	0.265			6
385	1.71	0.385			6
360	2.07	0.36			6
265	2.335	0.265			6
275	2.61	0.275			6
260	2.87	0.26			6
210	3.08	0.21			6
255	3.335	0.255			6

Anexo D: Ejemplo de cálculo para modelo de fragmentación

Se consideraron los parámetros de ajuste del obtenidos en resultados para el cálculo (Sección 5.1.4), y se utiliza la curva 1 de distribución de tamaños ($d_{50} = 6$ mm). La cual se muestra en la siguiente tabla:

Tamaño superior malla	Tamaño medio	Fu	fi0
[mm]	[mm]	[%]	
9,53	7,78	99,37	0,4643
6,35	5,49	52,94	0,3416
4,75	3,35	18,78	0,1878
2,36	2,17	0	0
2,00	1,54	0	0

Para obtener la fracción másica en un cierto intervalo se tiene que:

$$p_i = \sum_{j=1}^i A_{ij} e^{-S_j \cdot 0,27} \quad (D1)$$

Donde S_j corresponde a la función selección al considerar la carga vertical aplicada:

$$S_i^E = S_1^E \exp \left\{ Z_1 \ln \left(\frac{d_i}{d_1} \right) + Z_2 \left[\ln \left(\frac{d_i}{d_1} \right) \right]^2 \right\} \quad (D2)$$

Para este caso,

$$S_i = 0,12 \cdot \exp \left\{ 0,054 \cdot \ln \left(\frac{d_i}{7,78} \right) - 0,058 \cdot \left[\ln \left(\frac{d_i}{7,78} \right) \right]^2 \right\} \times \sigma_v \quad (D3)$$

Ahora falta describir la matriz A_{ij} ,

$$A_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if } i < j \\ f_{i0} - \sum_{k=1}^{i-1} A_{ik} & \text{if } i = j \\ \sum_{k=j}^{i-1} \frac{b_{ik} S_k}{S_i - S_j} A_{kj} & \text{if } i > j \end{cases} \quad (D4)$$

En la curva estudiada se tienen 5 intervalos de los tamaños resultantes medidos tras los ensayos, entonces se tiene una matriz de 5x5:

$A_{ij} =$	$f_{i0} - \sum_{k=1}^0 A_{1k}$	0	0	0	0
	$\sum_{k=1}^1 \frac{b_{2k} S_k}{S_2 - S_1} A_{k1}$	$f_{2,0} - \sum_{k=1}^1 A_{2k}$	0	0	0
	$\sum_{k=1}^2 \frac{b_{3k} S_k}{S_3 - S_1} A_{k1}$	$\sum_{k=2}^2 \frac{b_{3k} S_k}{S_3 - S_2} A_{k2}$	$f_{3,0} - \sum_{k=1}^2 A_{3k}$	0	0
	$\sum_{k=1}^3 \frac{b_{4k} S_k}{S_4 - S_1} A_{k1}$	$\sum_{k=2}^3 \frac{b_{4k} S_k}{S_4 - S_2} A_{k2}$	$\sum_{k=3}^3 \frac{b_{4k} S_k}{S_4 - S_3} A_{k3}$	$f_{4,0} - \sum_{k=1}^3 A_{4k}$	0
	$\sum_{k=1}^4 \frac{b_{5k} S_k}{S_5 - S_1} A_{k1}$	$\sum_{k=2}^4 \frac{b_{5k} S_k}{S_5 - S_2} A_{k2}$	$\sum_{k=3}^4 \frac{b_{5k} S_k}{S_5 - S_3} A_{k3}$	$\sum_{k=4}^4 \frac{b_{5k} S_k}{S_5 - S_4} A_{k4}$	$f_{5,0} - \sum_{k=1}^4 A_{5k}$

En la matriz, los valores para S_i se determinan como se explicó anteriormente (Ec. D3), en la diagonal (salvo el cuadrante [1,1]) a la fracción másica de la distribución original (f_{i0}) se le resta el término que se obtiene del cuadrante ubicado a su izquierda. Para resolver la matriz se deben determinar los términos b_{ij} .

Se tiene que b_{i1} ,

$$B_{i1} = \alpha_1 \left(\frac{x_i}{x_2}\right)^{\alpha_2} + (1 - \alpha_1) \left(\frac{x_i}{x_2}\right)^{\alpha_3} \quad (D5)$$

En este caso,

$$B_{i1} = 0,13 \left(\frac{x_i}{6,35}\right)^{1,518} + (1 - 0,13) \left(\frac{x_i}{6,35}\right)^{2,277}$$

Luego los b_{ij} completan las fracciones en el intervalo j . Así la matriz b_{ij} se expresa como:

$b_{ij} =$	1,0000	0	0	0	0
	1,0000	$b_{21}-b_{31}$	0	0	0
	0,5503	$b_{31}-b_{41}$	b_{22}	0	0
	0,1351	$b_{41}-b_{51}$	b_{32}	b_{33}	0
	0,0977	$1-\sum_{k=0}^4 b_{k2}$	$1-\sum_{k=0}^4 b_{k3}$	$1-\sum_{k=0}^4 b_{k4}$	$1-\sum_{k=0}^4 b_{k5}$

Evaluando se tiene,

$b_{ij} =$	1,000	0	0	0	0
	1,000	0,450	0	0	0
	0,550	0,415	0,450	0	0
	0,135	0,037	0,415	0,450	00
	0,098	0,098	0,135	0,550	1,000

Con estos resultados se puede evaluar la matriz A_{ij} .

$A_{ij} =$	0,464	0	0	0	0
	-8,088	8,430	0	0	0
	39,967	-63,654	23,875	0	0
	-87,116	181,296	-145,010	50,830	0
	255,040	-650,015	847,613	-683,324	230,686

Así una vez determinados los valores de la matriz A_{ij} es posible determinar las fracciones másicas para los intervalos considerados utilizando la ecuación D1.