



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

IDENTIFICACIÓN DE UN CUERPO INMERSO EN UN FLUIDO USANDO EL
MÉTODO LEVEL SET

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

CAMILO EDUARDO LABORDA RAMOS

PROFESOR GUÍA:
JAIME ORTEGA PALMA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
RODRIGO LECAROS LIRA
JUAN DÁVILA BONCZOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por FONDECYT
a través del proyecto 1111012

SANTIAGO DE CHILE
ABRIL 2014

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: CAMILO LABORDA RAMOS
FECHA: 29/04/2014
PROF. GUÍA: JAIME ORTEGA P.

IDENTIFICACIÓN DE UN CUERPO INMERSO EN UN FLUIDO USANDO EL MÉTODO LEVEL SET

El objetivo central de esta memoria es estudiar un problema inverso geométrico en mecánica de fluidos y realizar un procedimiento de reconstrucción numérica que permita recuperar distintos cuerpos rígidos inmersos en un fluido viscoso, siendo de especial interés el caso de cuerpos no convexos. Para llevar a cabo esta reconstrucción numérica se utiliza el llamado método level set. El método level set fue introducido por S. Osher[2] y J. A. Sethian[3] como un método simple y versátil para calcular y analizar el movimiento de una interface Γ bajo un campo de velocidades V , en dos y tres dimensiones, donde Γ es la frontera de una región Ω . Por otra parte en los problemas inversos geométricos, es decir, problemas donde la incógnita es una forma geométrica, el enfoque estándar para la solución de estos consiste en parametrizar la forma geométrica y aplicar métodos de regularización directamente a la parametrización. Este enfoque sufre de la limitación que para obtener aproximaciones convergentes se tiene que tener un conocimiento a priori de la estructura y topología de la forma geométrica buscada. Por esta razón, recientemente se han considerado enfoques alternativos para la solución de problemas de reconstrucción de formas geométricas, entre ellos el método level set, el cual fue utilizado inicialmente en el procesamiento de imágenes digitales.

La presente memoria esta estructurada de la siguiente manera. En el Capítulo 1 se realiza una introducción al trabajo realizado. En el Capítulo 2 se hace una introducción a los problemas inversos, se define el problema inverso geométrico de detección de obstáculos dentro de un fluido y se muestran los resultados de identificabilidad y estabilidad para este problema. En el Capítulo 3 se estudia el método de los elementos finitos y la resolución del problema de Stokes usando dicho método, en donde se muestran el algoritmo de Uzawa y el algoritmo numérico para Stokes usado en esta memoria. En el Capítulo 4 se presenta el método de diferenciación con respecto al dominio, el cual resulta fundamental para posteriormente realizar el cálculo de la primera derivada local del funcional de costo asociado al problema inverso geométrico en estudio. En el Capítulo 5 se presenta el método level set, estudiando los movimientos por curvatura media y en dirección normal, la ecuación de reinicialización y la extensión del campo de velocidades. Además, se muestra su aplicación a la optimización de formas y se utiliza la diferenciación con respecto al dominio para deducir la expansión de primer orden del funcional de costo asociado al problema. En el Capítulo 6 se muestran los principales resultados numéricos obtenidos al usar el método level set, recuperando diferentes obstáculos (incluyendo algunos de geometría no convexa), para lo cual se ha utilizado el programa FreeFem. Finalmente, se presentan las principales conclusiones obtenidas de este trabajo de título.

Dedicado a mis padres y mi hermana, con cariño.

Agradecimientos

A mi madre, que ha sido un pilar fundamental a lo largo de mi vida, por su amor en todo momento y por creer en mi.

A mi padre, por inculcarme el gusto por las matemáticas desde chico, y por preocuparse siempre por mi.

A mi hermana, por sus risas, su compañía y su cariño.

A los profesores Jaime Ortega y Rodrigo Lecaros, por su dedicación, su paciencia, sus buenos consejos y por permitirme realizar esta memoria. Fue realmente un honor haber trabajado con ustedes.

A todos mis amigos, los de toda la vida, los de mi generación y los de atletismo, por todas las experiencias vividas y por estar presentes en todo momento.

Y a todos mis familiares, tíos, primos, abuelos, que de una u otra forma formaron parte del largo proceso que culmina con la elaboración de esta memoria.

Finalmente quiero agradecer al proyecto FONDECYT 1111012, que financió parcialmente este trabajo.

Tabla de contenido

1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Objetivos	2
1.3. Introducción al problema inverso geométrico de detección de obstáculos inmersos en un fluido	2
1.4. El método level set	4
1.5. Reconstrucción numérica de obstáculos inmersos en un fluido	5
1.6. Estructura de la memoria	6
2. Definición del problema inverso geométrico de detección de obstáculos dentro de un fluido	8
2.1. Problemas inversos	8
2.2. Problemas inversos y de optimización involucrando geometrías	11
2.3. Reconstrucción de un cuerpo rígido inmerso en un fluido	11
2.4. Identificabilidad y estabilidad del problema inverso	13
3. Estudio del problema de Stokes usando el método de los elementos finitos	15
3.1. El método de los elementos finitos	15
3.2. Elementos finitos en dimensión $N = 1$	16
3.2.1. Elementos finitos \mathbb{P}_1	16
3.2.2. Convergencia y estimación del error	18
3.2.3. Elementos finitos \mathbb{P}_2	18
3.3. Elementos finitos en dimensión $N \geq 2$	19
3.3.1. Elementos finitos triangulares	20
3.3.2. Convergencia y estimación del error	20
3.4. Elementos finitos para el problema de Stokes	21
3.4.1. Algoritmo de Uzawa	23
3.4.2. Algoritmo numérico para Stokes usado en esta memoria	25
4. Diferenciación con respecto al dominio	28
4.1. Definiciones básicas y derivada local	30
4.1.1. Espacios de funciones Lipchitzianas	30
4.1.2. Espacios de las variaciones	30
4.1.3. Derivada local de una función definida en un conjunto variable	31
4.1.4. Definición de la derivada local	31
4.1.5. Una condición suficiente de derivabilidad local	32

4.2.	Diferenciación de un problema de contorno	32
4.2.1.	Diferenciación de una ecuación en $\Omega + u$	33
4.2.2.	Diferenciación de una condición de contorno	33
4.3.	Diferenciación de una integral	34
4.3.1.	Diferenciación de una integral definida en el dominio	34
4.3.2.	Algunos resultados técnicos	35
4.3.3.	Diferenciación de una integral de superficie	37
5.	El método level set y su aplicación al problema inverso geométrico de detección de obstáculos dentro de un fluido	38
5.1.	Funciones implícitas y funciones de distancia signada	38
5.2.	Movimiento en un campo de velocidades generado externamente	40
5.3.	Diferenciación Upwind	40
5.4.	Movimiento por curvatura media	42
5.5.	Movimiento en la dirección normal	43
5.5.1.	Discretización numérica	44
5.6.	Métodos numéricos para la resolución de ecuaciones tipo Hamilton-Jacobi	44
5.6.1.	Discretización numérica	45
5.7.	La ecuación de reinicialización	46
5.8.	Extensión del campo de velocidades	47
5.9.	El método level set para interfaces en evolución	48
5.10.	Level set en el cálculo sobre formas	49
5.10.1.	Cálculo sobre formas usando el método de velocidad	49
5.11.	Optimización de formas basada en level set	49
5.11.1.	Métodos tipo gradiente	50
5.11.2.	Métodos tipo Newton	51
5.12.	Expansión de primer orden del funcional de costo	51
5.12.1.	Cálculo de $\langle \nabla J(0), u \rangle$ para el caso del problema del laplaciano	51
5.12.2.	Cálculo de $\langle \nabla J(0), u \rangle$ para el funcional de costo J asociado al problema inverso en estudio	54
6.	Implementación numérica del proceso de reconstrucción de obstáculos in- mersos en un fluido usando el método level set	58
6.1.	Implementación numérica del proceso de reconstrucción usando el método level set	58
6.2.	Recuperación de un obstáculo con forma circular	65
6.3.	Recuperación de un obstáculo no convexo	68
6.4.	Recuperación de un obstáculo con forma de media luna	71
	Conclusiones	75
	Bibliografía	76

Índice de figuras

1.1.	Representación gráfica del problema inverso de detección de obstáculos dentro de un canal.	3
1.2.	Ilustración del método level set, en donde se produce un cambio topológico.	5
2.1.	Representación gráfica del problema inverso en un canal.	12
3.1.	Campo de velocidades del fluido con un obstáculo, obtenido con Stokes.	26
3.2.	Presión del fluido con un obstáculo, obtenido con Stokes.	27
5.1.	Función implícita $\phi(x) = x^2 - 1$ definiendo las regiones Ω^- y Ω^+ , así como la frontera $\partial\Omega$	39
6.1.	Malla sobre el dominio con un obstáculo.	61
6.2.	Campo de velocidades del fluido con un obstáculo, obtenido con Stokes.	61
6.3.	Campo de velocidades del fluido con un obstáculo para el problema de Stokes y el problema adjunto asociado.	62
6.4.	Presión del fluido con un obstáculo, obtenido con Stokes.	63
6.5.	Magnitud de la velocidad con la que se debe mover la función de level set ϕ , en 2 y 3 dimensiones.	64
6.6.	Función de level set ϕ , en 2 y 3 dimensiones.	65
6.7.	Funcional de costo para el obstáculo con forma circular.	66
6.8.	Funcional de costo para el obstáculo con forma circular (en escala logarítmica).	66
6.9.	Evolución del nivel cero de ϕ para el caso del círculo.	67
6.10.	Funcional de costo para el obstáculo no convexo.	68
6.11.	Funcional de costo para el obstáculo no convexo (en escala logarítmica).	68
6.12.	Evolución del nivel cero de ϕ para el caso del obstáculo no convexo.	70
6.13.	Funcional de costo para el obstáculo con forma de media luna.	71
6.14.	Funcional de costo para el obstáculo con forma de media luna (en escala logarítmica).	72
6.15.	Evolución del nivel cero de ϕ para el caso de la media luna.	73

Capítulo 1

Introducción

El método level set fue introducido por S. Osher[2] y J. A. Sethian[3] para geometrías en evolución, con el objetivo principal de obtener algoritmos eficientes que permitieran hacer evolucionar curvas bajo un campo de velocidades determinado. En esta memoria se pretende usar el método level set en un problema inverso geométrico, con la finalidad de crear un método de reconstrucción numérica que permita recuperar distintos cuerpos inmersos en un fluido viscoso.

Teniendo esto en mente, la presente memoria parte introduciendo la teoría de los problemas inversos, ilustrándolos mediante el problema inverso de conductividad eléctrica, también conocido como el problema de Calderón. Además se muestran los problemas que surgen al abordar un problema inverso, que corresponden a los problemas de identificabilidad, estabilidad, caracterización, reconstrucción y reconstrucción numérica. Luego se presenta de manera formal el problema inverso geométrico que se aborda en esta memoria, el cual consiste en recuperar un cuerpo rígido inaccesible inmerso en un fluido viscoso, cuya física esta gobernada por el sistema de Stokes. Además se presentan los resultados de identificabilidad y estabilidad para este problema inverso. Después se estudia la resolución del sistema de Stokes, usando para ello el método de los elementos finitos. A continuación se estudia el método de diferenciación con respecto al dominio o “shape differentiation”, el cual permite obtener la primera derivada local del funcional de costo asociado al problema inverso en estudio. Posteriormente se presenta el método level set y se obtiene el campo de velocidades bajo el cual se moverá la curva Γ que representa a la frontera del cuerpo que está siendo deformado. Finalmente se muestra el procedimiento de reconstrucción numérica utilizado, junto con los resultados obtenidos para distintas formas geométricas, entre ellas obstáculos no convexos.

1.1. Motivación

La principal motivación para realizar esta memoria es poder implementar un método numérico que permita recuperar obstáculos dentro de un fluido con una forma geométrica mas general, ya que anteriormente sólo se había hecho esto para circunferencias y elipses, donde estos estaban parametrizados y el método de minimización buscaba recuperar estos

parámetros. La gracia del método level set es que permite ir deformando una curva cerrada sin parametrizarla, por lo que en particular permite recuperar objetos que en principio son muy difíciles de parametrizar. Además, con este método se pretende abordar un caso especial de este problema que resulta de mucho interés, y que es la recuperación de cuerpos no convexos.

1.2. Objetivos

La realización de esta memoria tiene varios objetivos. Por una parte realizar un análisis teórico del problema inverso geométrico de detección de obstáculos dentro de un fluido, estudiando los resultados de identificabilidad y estabilidad de este problema. Por otra parte analizar la resolución del problema de Stokes mediante el método de los elementos finitos y estudiar el método de diferenciación con respecto al dominio, para así poder entender el concepto de derivabilidad local de una función definida en un conjunto variable. Finalmente, se encuentra el objetivo principal de esta memoria, que es estudiar el método level set, mostrar su aplicación a los problemas de optimización de formas, y dar a conocer los resultados del proceso de reconstrucción numérica obtenidos mediante este método, para distintos obstáculos con distintas formas geométricas, incluyendo obstáculos no convexos.

1.3. Introducción al problema inverso geométrico de detección de obstáculos inmersos en un fluido

En esta memoria, el problema de interés consiste en la reconstrucción numérica de un cuerpo rígido inaccesible D inmerso en un fluido viscoso, de forma tal que D juega el rol de un obstáculo sobre el cual circula un fluido en un dominio acotado más grande $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Luego, lo que se desea es determinar D o alguna información geométrica (como su forma o su volumen), mediante mediciones de los esfuerzos de Cauchy y la velocidad del fluido sobre una parte de la frontera exterior.

Sea $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)^N$ una condición de borde Dirichlet no homogénea satisfaciendo la condición de compatibilidad estándar

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \cdot n \, ds = 0, \quad (1.1)$$

y sea $(v, p) \in H^1(\Omega \setminus \overline{D}) \times L^2(\Omega \setminus \overline{D})$ la única solución del sistema de Stokes

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma(v, p) = 0 & \text{en } \Omega \setminus \overline{D} \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{en } \Omega \setminus \overline{D} \\ v = \varphi & \text{sobre } \partial\Omega \\ v = 0 & \text{sobre } \partial D \end{cases} \quad (1.2)$$

donde σ es el tensor de esfuerzos definido como $\sigma(v, p) = -pI + 2\nu e(v)$, donde I es la matriz identidad, $\nu > 0$ es una constante representando la viscosidad cinemática del fluido y $e(v)$ es el tensor de deformaciones linealizado definido por $e(v) = \frac{1}{2}(\nabla v + (\nabla v)^t)$.

Se pretende encontrar el obstáculo D dentro de la siguiente familia de cuerpos geométricos admisibles:

$$\mathcal{D}_{ad} = \{ D \subset \subset \Omega : D \text{ es un subconjunto abierto conexo suave de } \Omega, \text{ tal que } \Omega \setminus \overline{D} \text{ es conexo} \}.$$

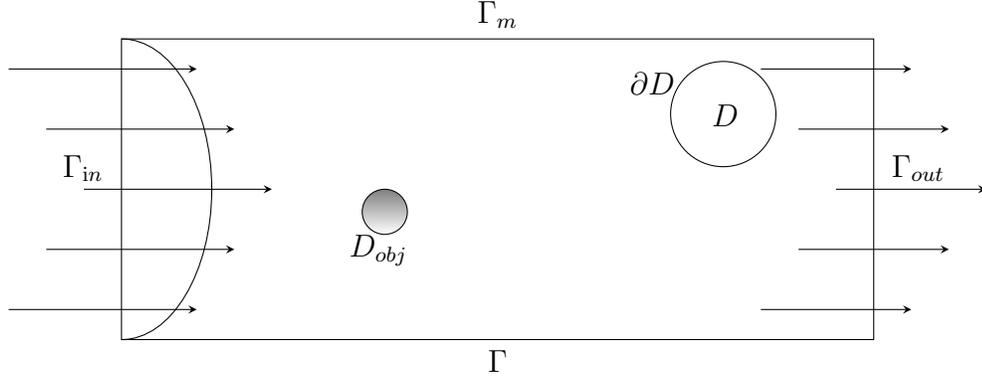


Figura 1.1: Representación gráfica del problema inverso de detección de obstáculos dentro de un canal.

Luego, se define el operador de borde o “boundary map”, del tipo velocidad-tensor de esfuerzos, como sigue:

$$\Lambda : D \longrightarrow \Lambda_D, \quad \Lambda_D(\varphi) = \sigma(v, p)n \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

actuando de $H^{1/2}(\partial\Omega)^N$ en $H^{-1/2}(\partial\Omega)^N$, donde (v, p) es la única solución del sistema de Stokes (1.2). Por lo tanto, en este caso el problema inverso consiste en desarrollar un algoritmo numérico que permita recuperar D a partir del operador de borde anterior. Para hacer esto se introduce un funcional de costo de la siguiente manera. Sea σ_m una medición de la componente normal del tensor de esfuerzos sobre $\Gamma_m \subset \partial\Omega$. El funcional de costo está dado por

$$J(u) = \int_{\Gamma_m} |\sigma(v_u, p_u)n - \sigma_m|^2 \quad (1.3)$$

donde (v_u, p_u) es la solución del sistema de Stokes (1.2), pero definido sobre el dominio perturbado $(\Omega \setminus \overline{D}) + u$.

Luego, el problema inverso se reduce a minimizar este funcional, el cual, por el resultado de identificabilidad que se muestra en el capítulo 2, tiene un único mínimo global, en donde el funcional se anula, y que corresponde justamente al valor del funcional cuando se ha encontrado el obstáculo objetivo.

1.4. El método level set

El método level set corresponde a la parte central de esta memoria, ya que es el método utilizado para llevar a cabo el proceso de reconstrucción numérica de obstáculos inmersos en un fluido. Este método fue introducido por Osher[2] y Sethian[3] como un método simple y versátil para calcular y analizar el movimiento de una interface Γ bajo un campo de velocidades V , en dos y tres dimensiones, donde Γ es la frontera de una región Ω . Por otra parte en los problemas inversos geométricos, es decir, problemas donde la incógnita es una forma geométrica, el enfoque estándar para la solución de estos consiste en parametrizar la forma geométrica y aplicar métodos de regularización directamente a la parametrización. Este enfoque sufre de la limitación que para obtener aproximaciones convergentes se tiene que tener un conocimiento a priori de la estructura y topología de la forma geométrica buscada. Por esta razón, recientemente se han considerado enfoques alternativos para la solución de problemas de reconstrucción de formas geométricas, entre los cuales se encuentra el método level set.

Una de las principales ventajas del método level set es que puede representar contornos de topología compleja e incluso permite realizar cambios topológicos como divisiones y uniones de contornos, en forma natural y eficiente. Mientras que otra de las características favorables de este método es que no requiere una parametrización de los puntos sobre el contorno, pudiendo ser procesado sobre una grilla cartesiana fija.

La teoría matemática que permite comprender y desarrollar el método level set es presentada en el capítulo 5. En este capítulo se estudian las funciones implícitas y funciones de distancia signada, el movimiento en un campo de velocidades generado externamente, la diferenciación Upwind, los movimientos por curvatura media y en la dirección normal, algunos métodos numéricos para la resolución de ecuaciones tipo Hamilton-Jacobi, la ecuación de reinicialización, la extensión del campo de velocidades y su aplicación a la evolución de interfaces.

Además, el método level set juega un rol importante en la optimización de formas. Es por eso que dicho capítulo tiene una sección dedicada al uso del método level set en la construcción de métodos eficientes para la optimización de formas. La idea es representar la forma a ser optimizada como el nivel cero de una función continua ϕ y elegir una velocidad V_n que haga a esta forma evolucionar hacia la forma óptima. La elección de la velocidad juega el mismo rol que la elección de la dirección de búsqueda en los problemas de optimización (en el caso de espacios vectoriales). Además, se analizan métodos tipo gradiente y métodos tipo Newton.

Por último, en la figura 1.2 se muestra una ilustración del método level set, en donde se puede ver que se produce un cambio topológico, dado que el cuerpo inicial es dividido en dos partes.

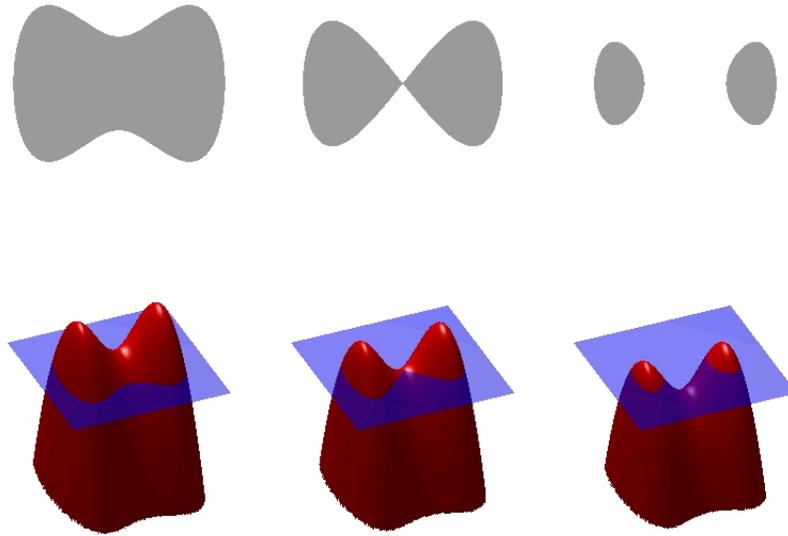


Figura 1.2: Ilustración del método level set, en donde se produce un cambio topológico.

1.5. Reconstrucción numérica de obstáculos inmersos en un fluido

El proceso de reconstrucción numérica se lleva a cabo mediante el método level set, con el cual se realiza la perturbación del obstáculo inicial, deformándolo hasta alcanzar el obstáculo objetivo. Todo esto se puede ver en detalle en el capítulo 6, donde se muestran los resultados obtenidos del proceso de reconstrucción numérica usado para resolver el problema inverso geométrico en estudio para diferentes cuerpos inmersos en un fluido (incluyendo obstáculos no convexos), utilizando para ello el método level set.

Para realizar esta implementación numérica se ha utilizado el programa FreeFem, el cual permite resolver ecuaciones en derivadas parciales mediante el método de los elementos finitos y permite realizar una enorme cantidad de simulaciones numéricas, por lo que resulta una gran herramienta para este tipo de problemas.

Para realizar la simulación se considera un canal (en 2 dimensiones) con extremos abiertos, de $28 \text{ cm} \times 14 \text{ cm}$, con un fluido viscoso que va de izquierda a derecha y que por simplicidad se considera de viscosidad 1, en donde la velocidad del fluido en la entrada satisface un perfil parabólico, mientras que las condiciones de borde en la salida son las de frontera libre (que equivalen a una condición de tipo Neumann). Para la implementación numérica de este problema inverso, se debe resolver en cada iteración el problema de Stokes y el problema de Stokes adjunto, para lo cual además en cada iteración se debe remallar el dominio para poder así imponer las condiciones de borde correspondientes. Además la implementación del método level set está dividida en dos partes, la primera consiste en la traslación de la función ϕ hasta que esta encuentra la posición del obstáculo (su centro de masas), y la segunda consiste en la

deformación del obstáculo mediante la evolución de la función ϕ hasta determinar la forma del obstáculo.

Por otra parte, un punto sumamente importante dentro de la implementación numérica es la obtención de la velocidad con la que será realizada la deformación del obstáculo inisial, la cual tiene que ser calculada en cada iteración. Con respecto a esto último, se tiene que la velocidad usada en el método level set (en FreeFem) para deformar el obstáculo está dada por

$$V = (\partial_x u_1 N_1 + \partial_y u_1 N_2)(\partial_x w_1 N_1 + \partial_y w_1 N_2) \\ + (\partial_x u_2 N_1 + \partial_y u_2 N_2)(\partial_x w_2 N_1 + \partial_y w_2 N_2)$$

en donde (u_1, u_2) y (w_1, w_2) son las velocidades del fluido para el problema de Stokes y su problema adjunto, respectivamente.

Por último, mencionar que con este método de reconstrucción numérica se realiza de forma exitosa la recuperación de 3 tipos de obstáculo, siendo estos un obstáculo con forma circular, un obstáculo no convexo (una especie de “ocho”) y un obstáculo con forma de media luna, que por cierto también es no convexo.

1.6. Estructura de la memoria

La presente memoria esta estructurada de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 se realiza una introducción al trabajo realizado.

En el Capítulo 2 se hace una introducción a los problemas inversos, se define el problema inverso geométrico de detección de obstáculos dentro de un fluido y se muestran los resultados de identificabilidad y estabilidad para este problema.

En el Capítulo 3 se estudia el método de los elementos finitos y la resolución del problema de Stokes usando dicho método, en donde se muestran el algoritmo de Uzawa y el algoritmo numérico para Stokes usado en esta memoria.

En el Capítulo 4 se presenta el método de diferenciación con respecto al dominio o “shape differentiation”, el cual resulta fundamental para posteriormente realizar el cálculo de la primera derivada local del funcional de costo asociado al problema inverso geométrico en estudio.

En el Capítulo 5 se presenta el método level set, estudiando los movimientos por curvatura media y en dirección normal, la ecuación de reinicialización y la extensión del campo de velocidades. Además, se muestra su aplicación a la optimización de formas y se utiliza la diferenciación con respecto al dominio para deducir la expansión de primer orden del funcional de costo asociado al problema.

En el Capítulo 6 se muestran los principales resultados numéricos obtenidos al usar el método level set, recuperando diferentes obstáculos (incluyendo algunos de geometría no convexa), para lo cual se ha utilizado el programa FreeFem.

Finalmente, se presentan las principales conclusiones obtenidas de este trabajo de título.

Capítulo 2

Definición del problema inverso geométrico de detección de obstáculos dentro de un fluido

En este capítulo se hace una breve introducción a los problemas inversos, se ve su aplicación a la optimización de formas geométricas, y se presenta de manera formal el problema inverso geométrico que se estudia a lo largo de esta memoria, que corresponde a la reconstrucción de un cuerpo rígido inmerso en un fluido, mostrando además los resultados de identificabilidad y estabilidad del problema inverso.

2.1. Problemas inversos

Un problema inverso es un problema en el que uno quiere encontrar ciertos parámetros o ciertos coeficientes de un modelo y el acceso que uno tiene a estos es restringido, luego no es posible acceder directamente a obtener dichos coeficientes, por lo que uno debe tomar mediciones indirectas de las cuales se pueda recuperar estos coeficientes. Los problemas inversos surgen en diversas disciplinas tales como inspección geológica, sensores remotos, imágenes médicas, prospección acústica y electromagnética en geofísica y tomografía acústica oceánica, entre otros. Además un problema inverso se dice geométrico si lo que se quiere recuperar es una forma geométrica, específicamente la posición y la forma de un cierto cuerpo geométrico que es inaccesible y que se encuentra inmerso dentro de un dominio mas grande, sobre cuya frontera es posible realizar ciertas mediciones.

Llamamos “problema directo” o también “operador de mediciones” a la aplicación Λ que a cada valor $x \in X$ del parámetro, le asocia las observaciones del modelo $y \in Y$ (X, Y espacios de Banach o Hilbert)

$$y = \Lambda(x), \quad x \in X, y \in Y. \quad (2.1)$$

Se define entonces el problema inverso como aquel que busca determinar x a partir de las mediciones y tal que se tenga (2.1).

Para entender la teoría de los problemas inversos se estudia a continuación uno de los problemas inversos mas famosos que existen, que es el problema inverso de conductividad eléctrica, también conocido como el problema de Calderón.

Para ello se supone que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, es un dominio acotado con frontera suave que representa un cuerpo conductor eléctrico. La conductividad del cuerpo se representa por una matriz simétrica y definida positiva $\gamma = (\gamma^{ij})$ en Ω . Si se supone que no existen sumideros o fuentes de corriente, por la ley de Ohm la ecuación para el potencial u en Ω está dada por

$$\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (\gamma^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}) = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.2)$$

Si se conoce el potencial f en $\partial\Omega$, el potencial inducido u en Ω satisface el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (\gamma^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}) = 0 & \text{en } \Omega \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.3)$$

La aplicación voltaje a corriente o Dirichlet a Neumann Λ_γ , mide el flujo de corriente generado en la frontera por un potencial aplicado sobre la misma. Se define dicha aplicación por

$$\Lambda_\gamma(f) = \sum_{i,j=1}^N \gamma^{ij} \nu_i \frac{\partial u}{\partial x_j} \Big|_{\partial\Omega} \quad (2.4)$$

donde u es la solución de (2.3) y ν_i es la componente i -ésima del vector unitario normal exterior a $\partial\Omega$. El problema inverso de conductividad eléctrica corresponde a la determinación de γ a partir del conocimiento de Λ_γ .

El primero que planteó este problema fue Calderón, quien consideró este problema para conductividades isotrópicas, es decir, aquellas que no dependen de la dirección. Si se supone que $\gamma(x)$ es una función real y positiva y se considera la matriz real $\gamma(x)I$, (2.2) se reduce a la ecuación en forma de divergencia

$$\text{div}(\gamma \nabla u) = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.5)$$

y la aplicación Dirichlet a Neumann (2.4) a

$$\Lambda_\gamma(f) = \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}. \quad (2.6)$$

Calderón demostró que la derivada Fréchet en conductividades constantes de la aplicación $\gamma \rightarrow Q_\gamma$, donde Q_γ es la forma cuadrática asociada a Λ_γ , es inyectiva.

Si bien este problema es mas bien de caracter teórico, tiene aplicaciones en tomografía por impedancia eléctrica y en prospección de la tierra, entre otras.

Al abordar un problema inverso surgen varias preguntas, las cuales se pueden ilustrar con el problema de Calderón. Para este problema, en el que se busca recuperar γ a partir del operador $\Lambda : \gamma \rightarrow \Lambda_\gamma$, los problemas que aparecen son los siguientes:

- Inyectividad de Λ (Identificabilidad).
- Continuidad de Λ y de su inversa Λ^{-1} , si existe (Estabilidad).
- Encontrar el rango de Λ (Caracterización).
- Fórmula para recuperar γ a partir de Λ_γ (Reconstrucción).
- Obtener un algoritmo para encontrar una aproximación de γ (Reconstrucción Numérica).

Comenzando con el trabajo de Calderón en 1980, el problema inverso de conductividad eléctrica ha sido ampliamente estudiado. En el caso donde $n \geq 3$ y todas las conductividades están en $C^2(\overline{\Omega})$, se han obtenido los siguientes resultados.

Teorema 2.1 (*Sylvester-Uhlmann 1987[15]*) Si $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$, entonces $\gamma_1 = \gamma_2$ en Ω .

Teorema 2.2 (*Nachman 1988[20]*) Hay un algoritmo convergente para reconstruir γ a partir de Λ_γ .

Teorema 2.3 (*Alessandrini 1988[21]*) Sea $\gamma_j \in H^s(\Omega)$ para $s > \frac{n}{2} + 2$, y asumamos que $\|\gamma_j\|_{H^s(\Omega)} \leq M$ y $\frac{1}{M} \leq \gamma_j \leq M$ ($j = 1, 2$). Entonces

$$\|\gamma_1 - \gamma_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \omega(\|\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)}),$$

donde $\omega(t) = C|\log t|^{-\sigma}$ para $t > 0$ pequeño, con $C = C(\Omega, M, n, s) > 0$, $\sigma = \sigma(n, s) \in (0, 1)$.

Teorema 2.4 (*Kenig-Sjöstrand-Uhlmann 2007[22]*) Asumamos que Ω es convexo y Γ es cualquier subconjunto abierto de $\partial\Omega$. Si $\Lambda_{\gamma_1}f|_\Gamma = \Lambda_{\gamma_2}f|_\Gamma \forall f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, y si $\gamma_1|_{\partial\Omega} = \gamma_2|_{\partial\Omega}$, entonces $\gamma_1 = \gamma_2$ en Ω .

Por último se mencionan algunos de los trabajos más importantes que se han realizado en el área de problemas inversos geométricos relacionados con el sistema de Stokes. En [17] G. Alessandrini, A. Morassi y E. Rosset prueban cotas superiores e inferiores para el tamaño de una cavidad desconocida, en un conductor eléctrico, en términos de mediciones de voltaje y corriente en la frontera. En [12] A. Ballerini obtiene una estimación de estabilidad de tipo log-log para el problema de un cuerpo inmerso en un fluido de Stokes estacionario. En [18] O. Imanuvilov y M. Yamamoto prueban la unicidad global para las ecuaciones de Navier-Stokes y para el sistema de Lamé isotrópico en 2 dimensiones. En [7] C. Alvarez, C. Conca, L. Friz, O. Kavian y J. Ortega prueban resultados de identificabilidad y estabilidad para el problema inverso de un cuerpo inmerso en un fluido regido por el sistema de Stokes. Por último, en [23] R. Lai, G. Uhlmann y J. Wang prueban en 2 dimensiones la identificabilidad global de la

viscosidad en un fluido incompresible haciendo mediciones sobre el borde, para las ecuaciones de Stokes y de Navier-Stokes.

2.2. Problemas inversos y de optimización involucrando geometrías

Existe una variedad de problemas inversos y problemas de diseño óptimo, donde la variable desconocida es un objeto geométrico, cuya topología es desconocida. La configuración básica de tales problemas es resolver

$$J(\Omega) = \min_{\Omega \in \mathcal{K}_{ad}} J(\Omega), \quad (2.7)$$

donde $J : \mathcal{K}_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional de forma adecuada sobre una clase $\mathcal{K}_{ad} \subset \mathcal{K}(D)$, siendo $\mathcal{K}(D)$ la clase de subconjuntos compactos de algún dominio fijo D . Problemas similares surgen en el campo de los problemas inversos, donde el objetivo es reconstruir una forma desconocida a partir de mediciones indirectas. Aquí, el funcional objetivo es usualmente de la forma

$$J(\Omega) = \frac{1}{2} \|\mathcal{F}(\Omega) - z\|^2 \quad (2.8)$$

donde $\mathcal{F} : \mathcal{K}_{ad} \rightarrow H$ es un operador no lineal con valores en un espacio de Hilbert H .

2.3. Reconstrucción de un cuerpo rígido inmerso en un fluido

En esta memoria, el problema de interés consiste en la reconstrucción numérica de un cuerpo rígido inaccesible D inmerso en un fluido viscoso (siendo de especial interés el caso en que D es no convexo), de forma tal que D juega el rol de un obstáculo sobre el cual circula un fluido en un dominio acotado mas grande $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Luego lo que se desea es determinar D o alguna información geométrica (como su forma o su volumen), mediante mediciones de los esfuerzos de Cauchy y la velocidad del fluido sobre una parte de la frontera exterior.

Sea $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)^N$ una condición de borde Dirichlet no homogénea satisfaciendo la condición de compatibilidad estándar

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \cdot n \, ds = 0, \quad (2.9)$$

y sea $(v, p) \in H^1(\Omega \setminus \overline{D}) \times L^2(\Omega \setminus \overline{D})$ la única solución del sistema de Stokes:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma(v, p) = 0 & \text{en } \Omega \setminus \overline{D} \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{en } \Omega \setminus \overline{D} \\ v = \varphi & \text{sobre } \partial\Omega \\ v = 0 & \text{sobre } \partial D \end{cases} \quad (2.10)$$

donde σ es el tensor de esfuerzos definido como $\sigma(v, p) = -pI + 2\nu e(v)$, donde I es la matriz identidad, $\nu > 0$ es una constante representando la viscosidad cinemática del fluido y $e(v)$ es el tensor de deformaciones linealizado definido por $e(v) = \frac{1}{2}(\nabla v + (\nabla v)^t)$.

Se pretende encontrar el obstáculo D dentro de la siguiente familia de cuerpos geométricos admisibles:

$$\mathcal{D}_{ad} = \{ D \subset\subset \Omega : D \text{ es un subconjunto abierto conexo suave de } \Omega, \text{ tal que } \Omega \setminus \overline{D} \text{ es conexo} \}.$$

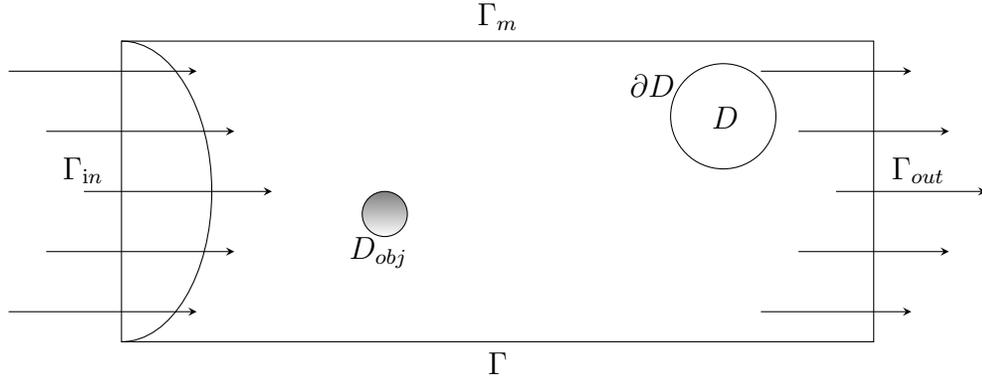


Figura 2.1: Representación gráfica del problema inverso en un canal.

Luego, se define el operador de borde o “boundary map”, del tipo velocidad-tensor de esfuerzos, como sigue:

$$\Lambda : D \longrightarrow \Lambda_D, \quad \Lambda_D(\varphi) = \sigma(v, p)n \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

actuando de $H^{1/2}(\partial\Omega)^N$ en $H^{-1/2}(\partial\Omega)^N$, donde (v, p) es la única solución del sistema de Stokes (2.10). Por lo tanto, en este caso el problema inverso consiste en desarrollar un algoritmo numérico que permita recuperar D a partir del operador de borde anterior. Para hacer esto se introduce un funcional de costo de la siguiente manera. Sea σ_m una medición de la componente normal del tensor de esfuerzos sobre $\Gamma_m \subset \partial\Omega$. El funcional de costo está dado por

$$J(u) = \int_{\Gamma_m} |\sigma(v_u, p_u)n - \sigma_m|^2. \quad (2.11)$$

donde (v_u, p_u) es la solución del sistema de Stokes (2.10), pero definido sobre el dominio perturbado $(\Omega \setminus \overline{D}) + u$.

Luego, el problema inverso se reduce a minimizar este funcional, el cual, por el resultado de identificabilidad que se muestra a continuación, tiene un único mínimo global, en donde el funcional se anula, y que corresponde justamente al valor del funcional cuando se ha encontrado el obstáculo objetivo.

2.4. Identificabilidad y estabilidad del problema inverso

A continuación se muestran los resultados de identificabilidad y estabilidad para el problema inverso en estudio probados en [7]. El primer resultado, que trata sobre la identificabilidad de D , establece que dada una condición de borde Dirichlet no homogénea φ fija, para dos cualesquiera geometrías admisibles diferentes $D_0 \neq D_1 \in \mathcal{D}_{ad}$ corresponden dos operadores de Steklov-Poincaré distintos $\Lambda_{D_0} \neq \Lambda_{D_1}$.

Teorema 2.5 [7, pág 3] *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$, un dominio Lipschitz acotado, y Γ un subconjunto abierto no vacío de $\partial\Omega$. Sean $D_0, D_1 \in \mathcal{D}_{ad}$ y $\varphi \in H^{3/2}(\partial\Omega)^N$, $\varphi \neq 0$, satisfaciendo la condición de flujo (2.9). Para $j = 0, 1$, sea (v_j, p_j) la solución de*

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma(v_j, p_j) = 0 & \text{en } \Omega \setminus \overline{D_j} \\ \operatorname{div} v_j = 0 & \text{en } \Omega \setminus \overline{D_j} \\ v_j = \varphi & \text{sobre } \partial\Omega \\ v_j = 0 & \text{sobre } \partial D_j \end{cases} \quad (2.12)$$

Si se tiene que (v_j, p_j) son tal que

$$\sigma(v_0, p_0)n = \sigma(v_1, p_1)n \quad \text{sobre } \Gamma,$$

entonces $D_0 \equiv D_1$.

Por otra parte, estudiar la estabilidad de este problema inverso se reduce a estudiar las propiedades de continuidad de la inversa del operador de borde. Dada una configuración admisible inicial $\Omega_0 := \Omega \setminus \overline{D_0}$, se considera una perturbación suave de D_0 a la que llamamos D_1 , y un operador Lipschitz biyectivo $\Psi : \overline{\Omega} \rightarrow \overline{\Omega}$, tal que Ψ^{-1} es también Lipschitz y $\Psi = I$ en una vecindad de la frontera $\partial\Omega$, con

$$\Psi(D_0) = D_1 \text{ y } \Psi(\Omega_0) = \Omega_1 = \Omega \setminus \overline{D_1}.$$

Claramente se necesita que Ω_1 sea también admisible, es decir, que $D_1 \in \mathcal{D}_{ad}$ de forma tal que el nuevo cuerpo rígido D_1 , así como D_0 , sean ambos Lipschitz y estén incluidos en un abierto fijo \mathcal{O} satisfaciendo

$$D_0 \cup D_1 \subset\subset \mathcal{O} \subset\subset \Omega.$$

En este contexto, estudiar la estabilidad del problema inverso puede ser visto como estudiar propiedades de continuidad de la aplicación $\Psi \rightarrow \Lambda_{\Psi(D_0)}^{-1}$. En la práctica, es suficiente probar la continuidad en $\Psi = I$, es decir, que para cualquier $\varphi \in H^{3/2}(\partial\Omega)^N$ dado, cuando $\|\Lambda_{D_0}(\varphi) - \Lambda_{\Psi(D_0)}(\varphi)\|$ es pequeño, entonces $\|I - \Psi\|_{W^{1,\infty}(\Omega_0; \mathbb{R}^N)}$ es también pequeño.

En realidad, el siguiente resultado sobre estabilidad es más debil que la anterior propiedad de continuidad deseada, pues aquí se muestra un tipo de continuidad direccional de la aplicación $\Psi \rightarrow \Lambda_{\Psi}^{-1}(D_0)$. Mas precisamente, se consideran deformaciones admisibles del tipo $\Psi_\tau = I + \tau\Psi_1$, donde τ es un pequeño parámetro real, y para un entero $m \geq 1$ y una constante $C > 0$, ambas dependientes de $\Psi_1 \neq 0$, se prueba que

$$\|\Lambda_{D_0}(\varphi) - \Lambda_{\Psi_\tau(D_0)}(\varphi)\| \geq C|\tau|^m, \quad (2.13)$$

siempre que $\Psi_\tau(D_0) \neq D_0$. Para ser mas específico, el desarrollo formal es como sigue. Para cada cambio de variables $\Psi : \Omega_0 \rightarrow \Omega_\tau := \Omega_\tau(\Omega_0)$, sea $(v_\tau, p_\tau) \in H^1(\Omega_\tau)^N \times L^2(\Omega_\tau)$ la única solución del sistema de Stokes en el dominio deformado, es decir,

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma(v_\tau, p_\tau) = 0 & \text{en } \Omega_\tau \\ \operatorname{div} v_\tau = 0 & \text{en } \Omega_\tau \\ v_\tau = \varphi & \text{sobre } \partial\Omega \\ v_\tau = 0 & \text{sobre } \partial D_\tau \end{cases} \quad (2.14)$$

Notar que para $\tau = 0$, $\Psi_0 = I$ y $\Omega_\tau = \Omega_0$. Se tiene el siguiente resultado de estabilidad (continuidad direccional):

Teorema 2.6 [7, pág 4] *Sea $D_0 \in \mathcal{D}_{ad}$, $\Psi_0 := I$ y $\Psi_1 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ tal que $\Psi_1 \equiv 0$ en una vecindad de la frontera $\partial\Omega$ y $\Psi_1 \neq 0$ en D_0 . Se denota por $\Psi_\tau = I + \tau\Psi_1$, (v_τ, p_τ) la solución de (2.14) (incluyendo el caso $\tau = 0$), y por $\tau_1 > 0$ un número positivo tal que $\tau \rightarrow \sigma(v_\tau, p_\tau)n$ es analítica en $(-\tau_1, \tau_1)$. Si se asume que para algún $\tau_* \in (-\tau_1, \tau_1)$ se tiene $\Psi_{\tau_*}(D_0) \neq D_0$ entonces existe una constante estrictamente positiva $C = C(\Psi_1, \Omega, D_0, \varphi)$ y un entero positivo $m = m(\Psi_1, \Omega, D_0, \varphi)$ tal que para algun $\tau_0 > 0$ y $\forall \tau \in [-\tau_0, \tau_0]$ se cumple*

$$\|\Lambda_{D_0}(\varphi) - \Lambda_{\Psi_\tau(D_0)}(\varphi)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)^N} \geq C|\tau|^m, \quad (2.15)$$

donde $\Lambda_{\Psi_\tau(D_0)} := \sigma(v_\tau, p_\tau)n$ sobre Γ .

Capítulo 3

Estudio del problema de Stokes usando el método de los elementos finitos

En este capítulo se estudia el problema de Stokes y se resuelve usando el método de los elementos finitos. Para esto primero se muestra el método de los elementos finitos en dimensión $N = 1$ y $N \geq 2$, así como los principales resultados de convergencia del método, luego se estudia el problema de Stokes con elementos finitos, y finalmente se muestra el algoritmo de Uzawa y el método numérico usado en este trabajo.

3.1. El método de los elementos finitos

El método de los elementos finitos es un método numérico creado para la aproximación de soluciones de ecuaciones en derivadas parciales ampliamente utilizado en diversos problemas de ingeniería y física, y que está basado en la formulación variacional del problema.

La idea base del método de los elementos finitos es reemplazar el espacio de Hilbert V sobre el cual se establece la formulación variacional por un subespacio V_h de dimensión finita. El problema aproximado puesto sobre V_h se reduce a la simple solución de un sistema lineal, cuya matriz es llamada la matriz de rigidez. Además, se puede elegir la construcción de V_h de forma tal que este subespacio sea una buena aproximación de V y que la solución $u_h \in V_h$ de la formulación variacional esté cerca a la solución exacta $u \in V$.

Dado un espacio de Hilbert V , una forma bilineal continua y coerciva $a(u, v)$, y una forma lineal continua $L(v)$, se considera la formulación variacional siguiente:

$$\text{Encontrar } u \in V \text{ tal que } a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V, \quad (3.1)$$

el cual se sabe que tiene una única solución por el teorema de Lax-Milgram. La aproximación interior de (3.1) consiste en reemplazar el espacio de Hilbert V por un subespacio de dimensión finita V_h , i.e. buscar la solución del siguiente problema:

$$\text{Encontrar } u_h \in V_h \text{ tal que } a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (3.2)$$

La solución de la aproximación interior (3.2) es simple como se muestra en el siguiente lema.

Lema 3.1 *Sea V un espacio de Hilbert real, y V_h un subespacio de dimensión finita. Sea $a(u, v)$ una forma bilineal continua y coerciva sobre V , y $L(v)$ una forma lineal continua sobre V . Entonces la aproximación interior (3.2) tiene una única solución. Además, esta solución puede ser obtenida resolviendo un sistema lineal con una matriz definida positiva (y simétrica si $a(u, v)$ es simétrica).*

3.2. Elementos finitos en dimensión $N = 1$

Para empezar, se presenta el método de los elementos finitos en dimensión $N = 1$. Sin pérdida de generalidad se escoge el dominio $\Omega =]0, 1[$. En dimension 1 una malla es simplemente una colección de puntos $(x_j)_{0 \leq j \leq n+1}$ tal que

$$x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1.$$

Por simplicidad, se considera para empezar el siguiente problema modelo:

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{en }]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

el cual se sabe que tiene una única solución en $H_0^1(\Omega)$ si $f \in L^2(\Omega)$. En lo que sigue, se denota por \mathbb{P}_k el conjunto de polinomios con coeficientes reales, de una variable real y con grado $\leq k$.

3.2.1. Elementos finitos \mathbb{P}_1

El método de los elementos finitos \mathbb{P}_1 usa el espacio discreto de funciones globalmente continuas que son lineales afin sobre cada elemento

$$V_h = \{v \in C([0, 1]) \text{ tal que } v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1 \quad \forall 0 \leq j \leq n\}, \quad (3.4)$$

y sobre su subespacio

$$V_{0h} = \{v \in V_h \text{ tal que } v(0) = v(1) = 0\}. \quad (3.5)$$

El método de los elementos finitos \mathbb{P}_1 es entonces simplemente el método de aproximación variacional interior aplicado a los espacios V_h o V_{0h} dados por (3.4) y (3.5). Se pueden representar las funciones de V_h y V_{0h} que son lineales afin por trozos, con la ayuda de funciones base. Se introduce la función ϕ definida por

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{si } |x| > 1. \end{cases} \quad (3.6)$$

Si la malla es uniforme, para $0 \leq j \leq n+1$ se definen las funciones base

$$\phi_j(x) = \phi\left(\frac{x - x_j}{h}\right). \quad (3.7)$$

Se tiene el siguiente

Lema 3.2 *El espacio V_h , definido por (3.4), es un subespacio de $H^1(0, 1)$ de dimensión $n+2$, y todo $v_h \in V_h$ esta definido únicamente por sus valores en los vértices $(x_j)_{0 \leq j \leq n+1}$*

$$v_h(x) = \sum_{j=0}^{n+1} v_h(x_j) \phi_j(x) \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (3.8)$$

La base (ϕ_j) definida por (3.7) permite caracterizar las funciones de V_h por sus valores en los nodos de la malla. En este caso se habla de elementos finitos de Lagrange.

A continuación se muestra la solución práctica del problema Dirichlet (3.3) usando el método de los elementos finitos \mathbb{P}_1 . La formulación variacional de la aproximación interna es la siguiente:

$$\text{Encontrar } u_h \in V_{0h} \text{ tal que } \int_0^1 u_h'(x) v_h'(x) dx = \int_0^1 f(x) v_h(x) dx \quad \forall v_h \in V_{0h}. \quad (3.9)$$

Se descompone u_h en la base $(\phi_j)_{1 \leq j \leq n}$ y se toma $v_h = \phi_i$ con lo que se llega a

$$\sum_{j=1}^n u_h(x_j) \int_0^1 \phi_j'(x) \phi_i'(x) dx = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx \quad (3.10)$$

Denotando por $U_h = (u_h(x_j))_{1 \leq j \leq n}$, $b_h = (\int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx)_{1 \leq i \leq n}$, e introduciendo la matriz de rigidez

$$\mathcal{K}_h = (\int_0^1 \phi_j'(x) \phi_i'(x) dx)_{1 \leq i, j \leq n}, \quad (3.11)$$

la formulación variacional en V_{0h} se reduce a resolver en \mathbb{R}^N el sistema lineal

$$\mathcal{K}_h U_h = b_h.$$

3.2.2. Convergencia y estimación del error

Para probar la convergencia del método de los elementos finitos \mathbb{P}_1 en una dimensión lo primero es definir un operador de interpolación r_h .

Definición 3.3 *El operador de interpolación \mathbb{P}_1 es el operador lineal r_h de $H^1(0,1)$ en V_h definido por*

$$(r_h v)(x) = \sum_{j=0}^{n+1} v_{x_j} \phi_j(x), \quad \forall v \in H^1(0,1). \quad (3.12)$$

La convergencia del método de los elementos finitos \mathbb{P}_1 se basa en el siguiente

Lema 3.4 *(interpolación) Sea r_h el operador de interpolación \mathbb{P}_1 . Para todo $v \in H^1(0,1)$ se tiene*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h v\|_{H^1(0,1)} = 0. \quad (3.13)$$

Además, si $v \in H^2(0,1)$, entonces existe una constante C independiente de h tal que

$$\|v - r_h v\|_{H^1(0,1)} \leq Ch \|v''\|_{L^2(0,1)}. \quad (3.14)$$

Teorema 3.5 [6, pág 160] *Sean $u \in H_0^1(0,1)$ y $u_h \in V_{0h}$ las soluciones de (3.3) y (3.9), respectivamente. Entonces, el método de los elementos finitos \mathbb{P}_1 converge, es decir,*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(0,1)} = 0. \quad (3.15)$$

Además, si $u \in H^2(0,1)$, entonces existe una constante C independiente de h tal que

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq Ch \|u''\|_{L^2(0,1)} = Ch \|f\|_{L^2(0,1)}. \quad (3.16)$$

3.2.3. Elementos finitos \mathbb{P}_2

El método de los elementos finitos \mathbb{P}_2 usa el espacio discreto

$$V_h = \{v \in C([0, 1]) \text{ tal que } v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_2 \quad \forall 0 \leq j \leq n\}, \quad (3.17)$$

y su subespacio

$$V_{0h} = \{v \in V_h \text{ tal que } v(0) = v(1) = 0\}. \quad (3.18)$$

El método de los elementos finitos \mathbb{P}_2 es el método de aproximación variacional interior aplicado a estos espacios. Estos están compuestos de funciones continuas, cuadráticas por trozos que pueden ser representadas con la ayuda de funciones base muy simples.

Se introducen los puntos medios de los intervalos $[x_j, x_{j+1}]$ definidos por $x_{j+1/2} = x_j + \frac{h}{2}$ para $0 \leq j \leq n$. Se definen las siguientes funciones de referencia

$$\phi(x) = \begin{cases} (1+x)(1+2x) & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ (1-x)(1-2x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{si } |x| > 1, \end{cases} \quad (3.19)$$

y

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 - 4x^2 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (3.20)$$

Si la malla es uniforme, para $0 \leq j \leq n+1$ se definen las funciones base $\psi_j(x) = \phi(\frac{x-x_j}{h})$, $0 \leq j \leq n+1$ y $\psi_{j+1/2}(x) = \psi(\frac{x-x_{j+1/2}}{h})$, $0 \leq j \leq n$.

3.3. Elementos finitos en dimensión $N \geq 2$

Ahora se estudia brevemente el caso $N \geq 2$ (en la práctica, $N = 2, 3$). Por simplicidad algunos resultados se muestran sólo para $N = 2$ pero estos se pueden extender a $N = 3$.

Se considera el siguiente problema modelo

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.21)$$

el cual se sabe que tiene una única solución en $H_0^1(\Omega)$, si $f \in L^2(\Omega)$.

En lo que sigue se asume que el dominio Ω es un poliedro (polígono si $N = 2$), es decir, $\bar{\Omega}$ es una unión finita de poliedros de \mathbb{R}^N .

3.3.1. Elementos finitos triangulares

Aquí se ve la definición de una malla del dominio Ω formada por triángulos en $N = 2$ dimensiones y por tetraedros en $N = 3$ dimensiones. Se agrupan los triángulos y los tetraedros en la familia mas general de N -símplices. Se dice que K es un N -simplex de \mathbb{R}^N si es la envoltura convexa de $N + 1$ puntos $(a_j)_{1 \leq j \leq N+1}$ de \mathbb{R}^N , llamados los vértices de K .

Definición 3.6 Sea Ω un poliedro abierto conexo de \mathbb{R}^N . Una malla triangular o una triangulación de $\bar{\Omega}$ es un conjunto \mathcal{T}_h de N -símplices $(K_i)_{1 \leq i \leq n}$ que satisface lo siguiente:

1. $K_i \subset \bar{\Omega}$ y $\bar{\Omega} = \cup_{i=1}^n K_i$.
2. La intersección $K_i \cap K_j$ de dos N -símplices distintos es un m -simplex, con $0 \leq m \leq N - 1$, cuyos vértices son también vértices de K_i y K_j .

Por convención, el parámetro h denota el máximo diámetro de los N -símplices K_i .

3.3.2. Convergencia y estimación del error

A continuación se estudia la convergencia del método de los elementos finitos \mathbb{P}_k para el problema modelo (3.21). Se necesitan algunas hipótesis geométricas sobre la calidad de la malla. Para cada N -simplex K se introducen dos parámetros geométricos: El diámetro $diam(K)$ y el diámetro de la bola más grande contenida en K , $\rho(K)$,

$$diam(K) = \max_{x,y \in K} \|x - y\|, \quad \rho(K) = \max_{B_r \subset K} (2r).$$

Definición 3.7 Sea (\mathcal{T}_h) una sucesión de mallas de Ω . Se dice que esta es una sucesión de mallas regulares si:

1. La sucesión $h = \max_{K_i \in \mathcal{T}_h} diam(K_i)$ tiende a 0.
2. Existe una constante C tal que, $\forall h > 0$ y $\forall K \in \mathcal{T}_h$,

$$\frac{diam(K)}{\rho(K)} \leq C.$$

El teorema que se presenta a continuación establece la convergencia del método de los elementos finitos \mathbb{P}_k y da una estimación de la tasa de convergencia si la solución es regular.

Teorema 3.8 [6, pág 185] Sea $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ una sucesión de mallas regulares de Ω . Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ la solución del problema modelo y $u_h \in V_{0h}$, su aproximación interior por elementos finitos \mathbb{P}_k . Entonces el método de los elementos finitos \mathbb{P}_k converge, es decir,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} = 0. \tag{3.22}$$

Además, si $u \in H^{k+1}(\Omega)$ y $k + 1 > \frac{N}{2}$, entonces se tiene la estimación del error siguiente

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^k \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}, \quad (3.23)$$

donde C es una constante independiente de h y de u .

3.4. Elementos finitos para el problema de Stokes

Se sabe que la generalización del método de los elementos finitos a sistemas de ecuaciones en derivadas parciales (como por ejemplo el sistema de elasticidad lineal) no pone problemas particulares. Pero este no es el caso del sistema de ecuaciones de Stokes debido a la condición de incompresibilidad sobre el fluido, o lo que es lo mismo, la condición de divergencia nula sobre la velocidad. La gran importancia práctica de simulaciones numéricas en mecánica de fluidos ha hecho que este problema haya sido ampliamente estudiado, por lo que ahora se procede a estudiar el sistema de Stokes usando este método.

En un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, en la presencia de fuerzas exteriores $f(x)$, y con condiciones de borde que describen la adherencia del fluido a la frontera, el sistema de Stokes es el siguiente:

$$\begin{cases} \nabla p - \mu \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.24)$$

donde $\mu > 0$ es la viscosidad del fluido.

En principio, se podría plantear como una formulación variacional de (3.24) la siguiente:

$$\text{Encontrar } u \in V \text{ tal que } \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \quad \forall v \in V, \quad (3.25)$$

donde V es el espacio de Hilbert definido por

$$V = \{v \in H_0^1(\Omega)^N \text{ tal que } \operatorname{div} v = 0 \text{ c.t.p. en } \Omega\}. \quad (3.26)$$

Como V contiene la restricción de incompresibilidad $\operatorname{div} v = 0$, es difícil en la práctica construir aproximaciones variacionales interiores de (3.25) como las que se mencionaron anteriormente. Luego, no se usa la formulación variacional (3.25) para definir un método de elementos finitos. En la práctica, se introduce otra formulación variacional del problema de Stokes la cual consiste en no forzar la incompresibilidad en la definición del espacio y mantener la presión como una incógnita en la formulación variacional. Multiplicando la primera

ecuación de (3.24) por una función test $v \in H_0^1(\Omega)^N$ y la segunda ecuación por otra función test $q \in L^2(\Omega)$, se obtiene despues de la integración por partes el siguiente problema:

Encontrar $(u, p) \in H_0^1(\Omega)^N \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div} u \, dx = 0, \end{cases} \quad (3.27)$$

$\forall (v, q) \in H_0^1(\Omega)^N \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$.

Luego es fácil construir una aproximación variacional interior de (3.24). Se introducen los espacios discretos

$$\begin{cases} V_{0h} = \{v \in C(\overline{\Omega})^N \text{ tal que } v|_{K_i} \in \mathbb{P}_K^N \ \forall K_i \in \mathcal{T}_h \text{ y } v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\} \\ Q_h = \{q \in C(\overline{\Omega})/\mathbb{R} \text{ tal que } q|_{K_i} \in P_{K'} \ \forall K_i \in \mathcal{T}_h\} \end{cases} \quad (3.28)$$

de forma que $V_{0h} \times Q_h$ es un subespacio de $H_0^1(\Omega)^N \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ de dimensión finita.

La aproximación variacional interior de (3.27) es

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \mu \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx - \int_{\Omega} p_h \operatorname{div} v_h \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v_h \, dx \\ \left(\int_{\Omega} \right) q_h \operatorname{div} u_h \, dx = 0, \end{cases} \quad (3.29)$$

$\forall (u_h, q_h) \in V_{0h} \times Q_h$. A continuación se explica cómo resolver (3.24) en la práctica. Denotando por n_V y n_Q las dimensiones de V_{0h} y Q_h respectivamente, se introduce la base $(\phi_j)_{1 \leq j \leq n_V}$ de V_{0h} y la base $(\psi_j)_{1 \leq j \leq n_Q}$ de Q_h construidas con las funciones base de elementos finitos. Se descompone u_h y p_h en estas bases

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{n_V} u_h(\hat{a}_j) \phi_j(x), \quad p_h(x) = \sum_{j=1}^{n_Q} u_h(\hat{a}'_j) \psi_j(x).$$

Denotando por $U_h = (u_h(\hat{a}_j))_{1 \leq j \leq n_V}$ y $P_h = (p_h(\hat{a}'_j))_{1 \leq j \leq n_Q}$, se obtiene el siguiente sistema lineal

$$\begin{pmatrix} A_h & B_h^* \\ B_h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_h \\ P_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_h \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

donde B_h^* es la matriz adjunta (o traspuesta) de B_h , $b_h = (\int_{\Omega} f \cdot \phi_i dx)_{1 \leq i \leq n_V}$, y

$$A_h = (\mu \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx)_{1 \leq i, j \leq n_V}, \quad B_h = (- \int_{\Omega} \psi_i \operatorname{div} \phi_j dx)_{1 \leq i \leq n_Q, 1 \leq j \leq n_V}.$$

La matriz A_h es simétrica definida positiva de orden n_V , la matriz B_h es rectangular de tamaño $n_Q \times n_V$ y, si la matriz global de (3.30) es simétrica de orden $n_V + n_Q$, esta no es definida positiva. De todas maneras, se tiene el siguiente

Lema 3.9 *El sistema lineal (3.30) siempre tiene una solución $(U_h, P_h) \in \mathbb{R}^{n_V} \times \mathbb{R}^{n_Q}$. El vector U_h es único, mientras que P_h es único salvo la adición de un elemento de $\operatorname{Ker} B_h^*$.*

El problema es que el kernel $\operatorname{Ker} B_h^*$ nunca está reducido al vector nulo y algunas veces es muy grande. Todo depende de la elección de los órdenes k y k' de los elementos finitos para la velocidad y la presión.

Lema 3.10 *El kernel $\operatorname{Ker} B_h^*$ contiene al menos el vector $\mathbf{1}$ de \mathbb{R}^{n_Q} con puros unos. En otras palabras, la presión discreta p_h está en el mejor caso definido salvo una constante.*

Lema 3.11 *Cuando $k = 2$ y $k' = 1$ (elementos finitos \mathbb{P}_2 para la velocidad y \mathbb{P}_1 para la presión), el kernel $\operatorname{Ker} B_h^*$ tiene dimensión uno, generado por el vector $\mathbf{1}$ (en otras palabras, la presión discreta p_h es única salvo una constante). Cuando $k = k' = 1$ (elementos finitos \mathbb{P}_1 para la velocidad y la presión), el kernel $\operatorname{Ker} B_h^*$ es en general de dimensión estrictamente mas grande que uno (es decir, la presión discreta p_h no es única, incluso salvo una constante).*

En la práctica, si la dimensión de $\operatorname{Ker} B_h^*$ es estrictamente mas grande que uno, el correspondiente método de los elementos finitos es inutilizable. En efecto, si $\dim \operatorname{Ker} B_h^* > 1$, el cálculo numérico de las soluciones del sistema lineal (3.30) lleva a oscilaciones numéricas de la presión: el algoritmo no puede elegir entre varias presiones discretas P_h cuya diferencia pertenece a $\operatorname{Ker} B_h^*$, es decir, el método es inestable.

Por otra parte, se sabe que el sistema de Stokes es equivalente a un problema de minimización de una energía. De la misma manera, la solución del sistema lineal (3.30) es equivalente al siguiente problema de minimización con restricciones:

$$J(U_h) = \min_{V_h \in \operatorname{Ker} B_h} J(V_h), \quad \text{con} \quad J(V_h) = \frac{1}{2} A_h V_h \cdot V_h - b_h \cdot V_h.$$

el cual puede ser resuelto usando el algoritmo de Uzawa.

3.4.1. Algoritmo de Uzawa

A continuación se estudia en algoritmo de Uzawa, para lo cual primero se recuerda el conocido teorema de Kuhn-Tucker.

Definición 3.12 Sea $K = \{v \in V, F_i(v) \leq 0 \text{ para } 1 \leq i \leq M\}$. Se dice que las restricciones dadas en K están calificadas en $u \in K$ si y solo si existe una dirección $\bar{w} \in V$ tal que se tiene $\forall i \in I(u)$ (el conjunto de restricciones activas en u) una y sólo una de las siguientes:

1. $\langle F'_i(u), \bar{w} \rangle < 0$.
2. $\langle F'_i(u), \bar{w} \rangle = 0$, y F_i es afín.

Teorema 3.13 (Kuhn-Tucker)[6, pág 319] Se asume que las funciones J, F_1, \dots, F_M son convexas, continuas sobre V y diferenciables sobre el conjunto K . Se introduce el Lagrangeano asociado \mathcal{L} dado por

$$\mathcal{L}(v, q) = J(v) + q \cdot F(v) \quad \forall (v, q) \in V \times (\mathbb{R}_+)^M \quad (3.31)$$

Sea $u \in K$ un punto de K donde las restricciones están calificadas en el sentido de la definición (3.12). Entonces u es un mínimo global de J sobre K si y solo si existe $p \in (\mathbb{R}_+)^M$ tal que (u, p) es un punto silla del Lagrangeano \mathcal{L} sobre $V \times (\mathbb{R}_+)^M$ o, de forma equivalente, tal que

$$F(u) \leq 0, \quad p \geq 0, \quad p \cdot F(u) = 0, \quad J'(u) + \sum_{i=1}^M p_i F'_i(u) = 0.$$

Ahora se considera el problema de minimización convexa

$$\inf_{F(v) \leq 0} J(v) \quad (3.32)$$

donde J es un funcional convexo definido sobre V y F una función convexa de V sobre \mathbb{R}^M .

Bajo las hipótesis del teorema de Kuhn-Tucker (3.13), la solución de (3.32) se reduce a encontrar un punto silla (u, p) del Lagrangeano

$$\mathcal{L}(v, q) = J(v) + q \cdot F(v),$$

sobre $V \times (\mathbb{R}_+)^M$.

Luego el algoritmo de Uzawa es el siguiente: comenzando de un elemento arbitrario $p^0 \in (\mathbb{R}_+)^M$, se construyen las sucesiones (u^n) y (p^n) determinadas por las iteraciones

$$\begin{cases} p^{n+1} = P_{\mathbb{R}_+^M}(p^n + \mu F(u^n)), \\ \mathcal{L}(u^n, p^n) = \inf_{v \in V} \mathcal{L}(v, p^n), \end{cases} \quad (3.33)$$

con μ un parámetro positivo fijo.

Teorema 3.14 [6, pág 339] *Se asume que J es α -convexo y diferenciable, que F es convexo y Lipschitz de V en \mathbb{R}^M , es decir, existe una constante C tal que*

$$\|F(v) - F(w)\| \leq C\|v - w\| \quad \forall v, w \in V,$$

y que existe un punto silla (u, p) del Lagrangeano (3.31) sobre $V \times (\mathbb{R}_+)^M$. Entonces, si $0 < \mu < \frac{2\alpha}{C^2}$, el algoritmo de Uzawa converge, es decir, para cualquier elemento inicial p^0 , la sucesión (u^n) definida por (3.33) converge a la solución u del problema (3.32).

3.4.2. Algoritmo numérico para Stokes usado en esta memoria

A continuación se muestra el algoritmo numérico usado para resolver el sistema de Stokes como parte del procedimiento de reconstrucción numérica implementado en esta memoria. Para esto se considera que el dominio Ω corresponde a un canal por el cual circula un fluido de izquierda a derecha. Las etiquetas de los bordes inferior, derecho, superior e izquierdo del canal son 1, 2, 3 y 4, respectivamente, mientras que 5 corresponde a la frontera del obstáculo inicial (que será perturbado hasta alcanzar el obstáculo objetivo). Además, se define la función g como:

$$\begin{aligned} \text{real } y_2 &= ((y_{\max} - y_{\min})^2)/4 \\ \text{func } g &= (y - y_{\min})(y_{\max} - y)/y_2 \end{aligned}$$

que corresponde a un perfil parabólico para la entrada del canal. El algoritmo implementado para resolver el problema de Stokes en FreeFem es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{solve Stokes } ([u_1, u_2, p], [v_1, v_2, q], \text{solver=Croust}) = \\ \int_{\mathcal{T}_h} \partial_x u_1 \partial_x v_1 + \partial_y u_1 \partial_y v_1 + \partial_x u_2 \partial_x v_2 + \partial_y u_2 \partial_y v_2 \\ + pq\varepsilon - p\partial_x v_1 - p\partial_y v_2 + \partial_x u_1 q + \partial_y u_2 q \\ + \text{on}(4, u_1 = g, u_2 = 0) \\ + \text{on}(1, 3, u_1 = 0, u_2 = 0) \\ + \text{on}(5, u_1 = 0, u_2 = 0) \end{aligned}$$

en donde (u_1, u_2) y p corresponden a la velocidad y la presión del fluido, respectivamente, mientras que (v_1, v_2) y q corresponden a las funciones test usadas en la formulación variacional.

Aquí se puede observar que para resolver el sistema de Stokes en FreeFem primero este debe ser pasado a su forma variacional y sólo después de esto puede ser resuelto por el programa.

Además, se puede observar que sobre el borde derecho de Ω (borde número 2) que corresponde a la salida del canal no se impone ninguna condición de borde, es decir, corresponde a una condición de borde natural, dejando el borde libre (lo que es equivalente a una condición de borde de tipo Neumann).

Por último, en las figuras 3.1 y 3.2 se muestran el campo de velocidades y la presión del fluido en un canal con un obstáculo, respectivamente, obtenido mediante la resolución del sistema de Stokes en FreeFem, usando el algoritmo que se acaba de describir.

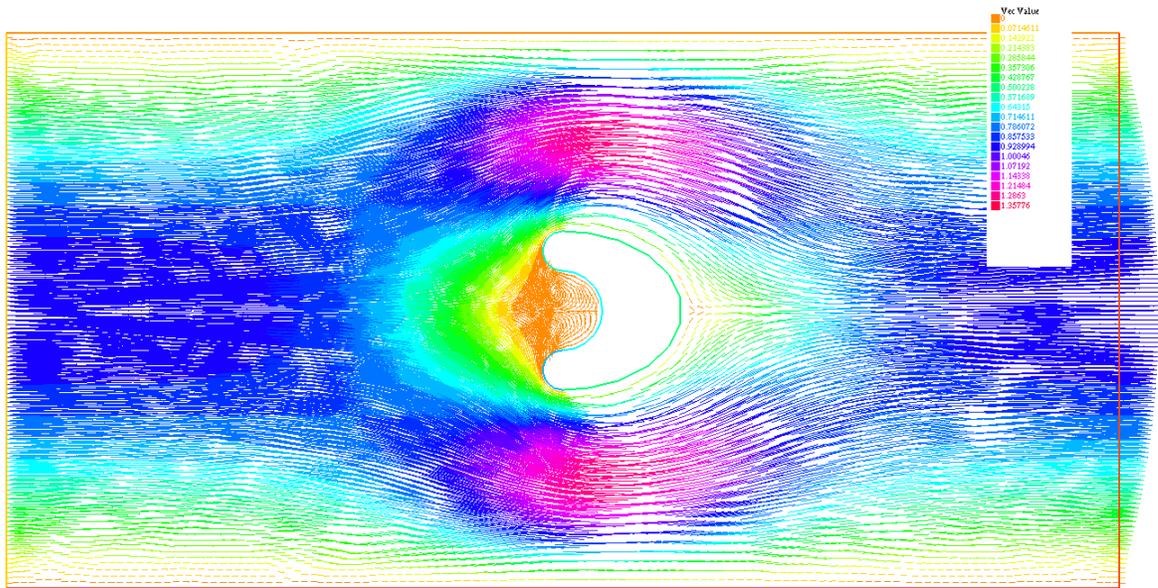


Figura 3.1: Campo de velocidades del fluido con un obstáculo, obtenido con Stokes.

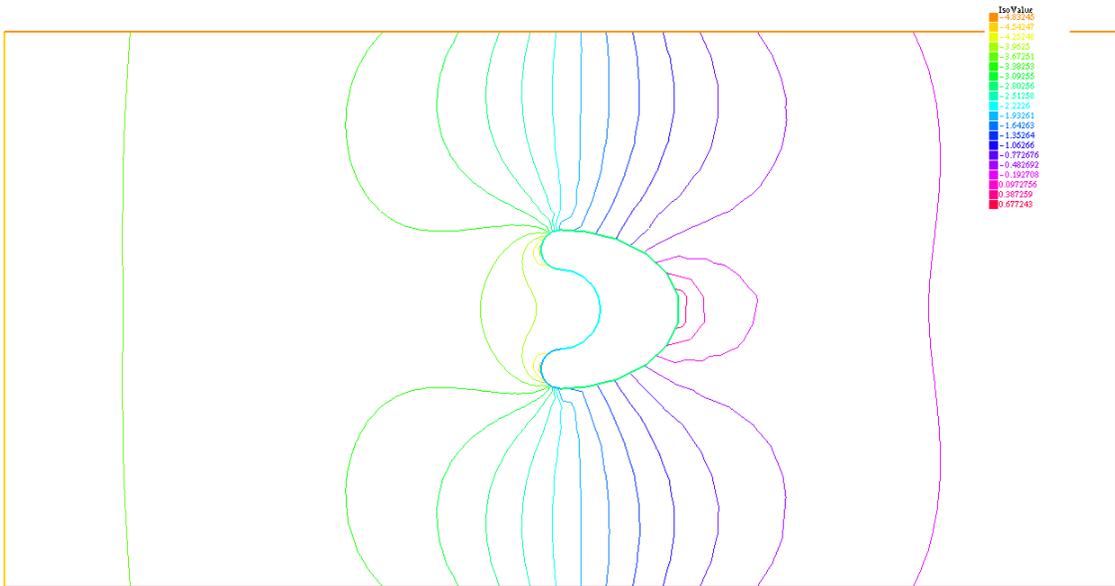


Figura 3.2: Presión del fluido con un obstáculo, obtenido con Stokes.

Capítulo 4

Diferenciación con respecto al dominio

Por el análisis realizado en el capítulo 2, se sabe que el problema inverso de detección de obstáculos dentro de un fluido puede ser formulado como un problema de optimización de formas, en donde lo que se busca es encontrar la forma del dominio $\Omega \setminus D$ que minimice el funcional de costo J asociado al problema. Es por eso que en este capítulo se presenta el método de diferenciación con respecto al dominio o “shape differentiation”, el cual resulta muy útil en la teoría de optimización de formas.

El problema de diferenciación con respecto al dominio que se estudia a continuación tiene su origen en los problemas de diseño óptimo.

Dado un abierto acotado Ω de \mathbb{R}^N ($N=2$ ó 3), se considera el estado del sistema, $z(\Omega)$, que es la solución de un problema de contorno en Ω :

$$\begin{cases} Az(\Omega) = 0 & \text{en } \Omega \\ Bz(\Omega) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

y se define un costo real por alguna de las funciones

$$J_1(\Omega) = \int_{\Omega} C_1(z(\Omega)) dx \quad (4.2)$$

o

$$J_2(\Omega) = \int_D C_2(z(\Omega)) dx \quad (4.3)$$

o

$$J_3(\Omega) = \int_{\partial\Omega} C_3(z(\Omega)) dx \quad (4.4)$$

donde A, B, C_1, C_2 y C_3 son operadores en derivadas parciales definidos en todo \mathbb{R}^N y D es un abierto fijo de \mathbb{R}^N tal que $\overline{D} \subset \Omega$. Se supone que bajo ciertas hipótesis de regularidad sobre Ω , el problema de contorno anterior tiene solución única, suficientemente regular para que tengan sentido las funciones de costo anteriores (4.2), (4.3) y (4.4). El problema de diseño óptimo consiste en encontrar un abierto Ω^* en una familia Ω_{ad} de abiertos admisibles tal que

$$J(\Omega^*) \leq J(\Omega) \quad \forall \Omega \in \Omega_{ad}$$

donde J es una de las funciones de costo anteriores. El problema anterior, al ser un problema de optimización, conduce a los tres siguientes: (a) Existencia de un dominio óptimo, (b) Caracterización del o de los dominios óptimos y (c) Construcción de un algoritmo que calcule uno de los dominios óptimos

Se sabe que los problemas (b) y (c) están íntimamente ligados al conocimiento de una derivada de la aplicación

$$\Omega \in \Omega_{ad} \longrightarrow J(\Omega) \in \mathbb{R}.$$

El objetivo del desarrollo que se hace a continuación es la definición y estudio de la existencia de una derivada de la aplicación anterior. La primera dificultad que aparece es que Ω_{ad} carece de estructura vectorial, que es el marco usual para la derivabilidad. Lo que se hace a continuación es transformar el problema inicial de la siguiente forma:

Se parte de un dominio inicial $\Omega \in \Omega_{ad}$ y se consideran funciones $u : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ suficientemente regulares, así como los nuevos dominios de la forma

$$\Omega + u = \{x + u(x) : x \in \Omega\} \equiv (I + u)(\Omega).$$

Además se considera un espacio vectorial normado W , de funciones $u : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$, tal que para cada $u \in W$ se tenga que $\Omega + u \in \Omega_{ad}$. Para cada $u \in W$ se considera el problema de contorno

$$\begin{cases} Az(u) = 0 & \text{en } \Omega + u \\ Bz(u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega + u \end{cases} \quad (4.5)$$

y se define el costo real por $J_1(u) = \int_{\Omega+u} C_1(u, z(u)) dx$ o $J_2(u) = \int_D C_2(u, z(u)) dx$ o $J_3(u) = \int_{\partial\Omega+u} C_3(u, z(u)) dx$.

Se tiene así una aplicación

$$u \in W \longrightarrow J(u) \in \mathbb{R}$$

y el concepto de derivada que se utilizará será el de la derivada-Fréchet de la aplicación anterior.

4.1. Definiciones básicas y derivada local

En esta sección se presentan algunas definiciones básicas, específicamente los espacios de funciones Lipchitzianas y los espacios de las variaciones, para luego estudiar la noción de derivabilidad local de una función definida en un conjunto variable.

4.1.1. Espacios de funciones Lipchitzianas

Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^N (eventualmente, Ω puede coincidir con todo \mathbb{R}^N).

Definición 4.1 *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^p$. Se dice que f pertenece a $(Lip(\Omega))^p$ si f es acotada y globalmente lipschitziana, es decir*

$$\begin{cases} |f(x)| \leq C_0 & \forall x \in \Omega \\ |f(x) - f(x')| \leq C_1|x - x'| & \forall x, x' \in \Omega \end{cases} \quad (4.6)$$

Se tiene el siguiente

Lema 4.2 *Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Se tiene que $f \in Lip(\Omega)$ si y sólo si $\text{grad } f \in L^\infty(\Omega)^N$, donde $\text{grad } f$ denota el gradiente de f entendido en el sentido de las distribuciones sobre Ω .*

Así pues, como conjuntos, $Lip(\Omega)$ y el espacio de Sobolev $W^{1,\infty}(\Omega)$ coinciden.

También se tiene la siguiente

Definición 4.3 *Se dice que una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^p$ está en $(C_{ub}^k(\Omega))^p$, $k \geq 0$ entero, si $\forall 0 \leq |\alpha| \leq k$, existe un representante de la clase $D^\alpha f$ que es una función uniformemente continua y acotada en todo Ω .*

4.1.2. Espacios de las variaciones

Ya se mencionó que las variaciones de un dominio inicial Ω pueden conseguirse introduciendo unas funciones $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ suficientemente regulares y los nuevos dominios asociados $\Omega + u$.

Dado que los dominios considerados serán de clase Lip^k , $k \geq 1$, parece lógico tomar el espacio para las funciones u de forma que $\Omega + u$ siga siendo de clase Lip^k .

Para $k \geq 2$ es suficiente tomar $u \in Lip^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ y así $\Omega + u$ es de nuevo de clase Lip^k . Sin embargo, si Ω es de clase Lip^1 y $u \in Lip^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$, no siempre se verifica que $\Omega + u$ sea de clase Lip^1 . Sí se tiene, no obstante, que para $u \in C_{ub}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$, $\Omega + u$ es de clase Lip^1 .

Con respecto a la invertibilidad de $I + u$ se tiene el siguiente

Lema 4.4 *Sea $u \in Lip^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ tal que $\|u\|_k \leq \beta$ (con $\beta < 1$). Entonces $I + u$ es invertible y además $(I + u)^{-1} = I + v$ para una función $v \in Lip^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$, con $\|v\|_k \leq C_k \|u\|_k$, donde C_k es una constante independiente de u .*

Además, el siguiente lema muestra la derivabilidad en 0 de $u \rightarrow Jac(I+u) = |\det [\partial_j(I + u)_i]|$.

Lema 4.5 *Sea $k \geq 1$. La aplicación*

$$\begin{cases} u \rightarrow Jac(I + u) = |\det [\partial_j(I + u)_i]|, \text{ definida de} \\ Lip^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) \text{ en } Lip^{k-1}(\mathbb{R}^N) \text{ si } k \geq 1 \\ \text{y de } Lip^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) \text{ en } Lip^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ si } k = 1, \end{cases} \quad (4.7)$$

es derivable en 0. Su derivada en la dirección u es $div u$.

4.1.3. Derivada local de una función definida en un conjunto variable

Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, se quiere estudiar la diferenciabilidad en el origen de la aplicación $u \rightarrow z(u)$, con $z(u)$ definida en el abierto $\Omega + u$, para cada $u \in Lip^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$, ($k \geq 1$). Una función de este tipo no puede ser derivada respecto de u en la forma habitual, debido a que su dominio de definición varía con u . Por ello, se estudiará la diferenciabilidad de sus restricciones a determinados abiertos ω en los que esté definida $z(u)$ para todo u de norma $\|u\|_k$ suficientemente pequeña. A partir de estas restricciones es posible definir la derivada local en el origen (en todo Ω).

4.1.4. Definición de la derivada local

Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^N . Para todo $u \in Lip^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$, ($k \geq 1$), de norma suficientemente pequeña, $\Omega + u$ es un abierto de \mathbb{R}^N . Sea $u \rightarrow z(u)$ verificando lo que sigue:

$$\begin{cases} \text{Para cada } u \in Lip^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) \text{ tal que } \|u\|_k \text{ es suficientemente pequeña,} \\ z(u) \in W^{m,r}(\Omega + u), \text{ con } k \geq m \geq 1 \text{ y } 1 \leq r \leq \infty \end{cases} \quad (4.8)$$

Dado $\omega \subset\subset \Omega$, se toma $u \in Lip^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ de norma suficientemente pequeña para que $\omega \subset\subset \Omega + u$. Entonces $z(u)$ estará definida en ω y tendrá sentido hablar de la diferenciabilidad en el origen de la función $u \rightarrow z(u)|_\omega$.

Definición 4.6 Se dice que la aplicación $u \rightarrow z(u)$ tiene una derivada local en el origen si, para cada abierto $\omega \subset\subset \Omega$, la correspondiente aplicación $u \rightarrow z_\omega(u) \equiv z(u)|_\omega$, que está definida en un entorno de 0 en $Lip^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ y toma valores en $W^{m,r}(\omega)$ es diferenciable-Fréchet en el origen. En tal caso, la derivada local en 0 en la dirección u que será denotada por $z'(u)$, está definida en todo el dominio Ω para cualquier $u \in Lip^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ por:

$$z'(u) = Dz_\omega(0)u = \frac{d}{dt}z_\omega(tu)|_{t=0} \text{ en } \omega, \quad \forall \omega \subset\subset \Omega,$$

donde $Dz_\omega(0)$ es la derivada Fréchet en el origen de $u \rightarrow z_\omega(u)$.

4.1.5. Una condición suficiente de derivabilidad local

Con $u \rightarrow z(u)$ verificando (4.8), se presenta a continuación un teorema que dice que si la aplicación

$$\begin{cases} u \rightarrow z(u) \circ (I + u), \text{ definida de un entorno de 0 en } Lip^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) \\ \text{en } W^{m,r}(\Omega), \text{ es derivable en 0,} \\ \text{con derivada en la dirección } u \text{ denotada } \dot{z}(u), \end{cases} \quad (4.9)$$

entonces $u \rightarrow z(u)$ es localmente derivable en el origen.

Teorema 4.7 (Existencia de la derivada local)[1, pág 49] Si se tiene (4.8) y (4.9), entonces para cada $\omega \subset\subset \Omega$, la aplicación

$$\begin{cases} u \rightarrow z(u)|_\omega, \text{ considerada como aplicación definida de} \\ \text{un entorno de 0 en } Lip^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) \text{ en } W^{m-1,r}(\omega), \\ \text{es derivable en 0.} \end{cases} \quad (4.10)$$

su derivada en la dirección u está dada por:

$$z'(u) = \dot{z}(u) - u \cdot \text{grad } z(0). \quad (4.11)$$

4.2. Diferenciación de un problema de contorno

Se mencionó anteriormente que, habitualmente $z(u)$ es solución de un problema de contorno definido en $\Omega + u$. Partiendo de este hecho y de la existencia de derivada local en el origen, se deduce en esta sección el problema de contorno del cual es solución $z'(u)$ para cada u .

4.2.1. Diferenciación de una ecuación en $\Omega + u$

Teorema 4.8 [1, pág 53] *Se supone que se tiene (4.8) y (4.9). Sean $f \in D'(\mathbb{R}^N)$ y A un operador que aplica de forma lineal y continua $W^{m-1,r}(\omega)$ en $D'(\omega)$ para cada abierto $\omega \subset \mathbb{R}^N$ y verifica la condición siguiente:*

$$\begin{cases} \forall u \in Lip^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N), \\ \text{tal que } \|u\|_k \text{ es suficientemente pequeña,} \\ Az(u) = f \text{ en } \Omega + u \text{ (i.e. en } D'(\Omega + u)). \end{cases} \quad (4.12)$$

Entonces la derivada local en el origen de $u \rightarrow z(u)$ en la dirección u , denotada por $z'(u)$, verifica:

$$Az'(u) = 0 \text{ en } \Omega.$$

4.2.2. Diferenciación de una condición de contorno

Se supondra ahora que se cumplen las hipotesis (4.8) y (4.9) con $m = r = 1$. Entonces se tiene el siguiente

Teorema 4.9 [1, pág 54] *Sea Ω un dominio de clase Lip^1 . Se supone que se verifican (4.8) y (4.9) con $m = r = 1$ y que además,*

$$z(0) \in W^{2,1}(\Omega),$$

$$\begin{cases} \forall u \in Lip^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N), k > 1 \\ \text{tal que } \|u\|_k \text{ es suficientemente pequeña,} \\ z(u) = 0 \text{ sobre } \partial\Omega + u. \end{cases} \quad (4.13)$$

Entonces para cada $\omega \subset\subset \Omega$, la aplicación

$$\begin{cases} u \rightarrow z_\omega(u) = z(u)|_\omega, \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } Lip^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) \text{ en } L^1(\omega), \\ \text{es derivable en } 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

En consecuencia, $u \rightarrow z(u)$ es localmente derivable en 0 y su derivada local en 0 en la dirección u , denotada por $z'(u)$, verifica:

$$z'(u) \in W^{1,1}(\Omega),$$

$$z'(u) = -u_n \frac{\partial z(0)}{\partial n} \text{ sobre } \partial\Omega \text{ (en } L^1(\partial\Omega)).$$

4.3. Diferenciación de una integral

El objetivo de la teoría de control geométrico es la determinación de un dominio $\Omega + u$ para el cual una función

$$u \longrightarrow J(u, z(u)), \quad (4.15)$$

definida en una parte de $Lip^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$, $k \geq 1$ y con valores reales, alcanza un mínimo. Luego, para resolver un problema de control geométrico, resulta útil hallar la derivada de la función (4.15) respecto de u , suponiendo que esta existe. En esta sección se estudia la derivabilidad en el origen cuando

$$J(u, z(u)) \equiv \int_{\Omega+u} C(u, z(u)) dx \quad (4.16)$$

y cuando

$$J(u, z(u)) \equiv \int_{\partial\Omega+u} G(u, z(u)) dS, \quad (4.17)$$

con C y G operadores en derivadas parciales definidos en todo \mathbb{R}^N .

4.3.1. Diferenciación de una integral definida en el dominio

El siguiente teorema trata sobre la derivabilidad en 0 de $u \longrightarrow \int_{\Omega+u} z(u) dx$.

Teorema 4.10 [1, pág 62] *Sea Ω un dominio de clase Lip^1 y además se tiene*

$$\left\{ \begin{array}{l} u \longrightarrow z(u), \text{ está definida de un entorno de } 0 \text{ en} \\ Lip^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N), (k \geq 1), \text{ en } (L^1(\Omega + u)), \end{array} \right. \quad (4.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \longrightarrow z(u) \circ (I + u), \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } Lip^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) \text{ en } L^1(\Omega), \\ \text{es derivable en } 0, \\ \text{con derivada en la dirección } u \text{ denotada } \dot{z}(u), \end{array} \right. \quad (4.19)$$

$$z(0) \in W^{1,1}(\Omega). \quad (4.20)$$

Entonces, si $k' \geq \max\{2, k\}$, para cada abierto $\omega \subset\subset \Omega$, se tiene

$$\begin{cases} u \longrightarrow z(u)|_{\omega}, \text{ definida de un entorno de } 0 \text{ en } Lip^{k'}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) \\ \text{en } (C^1(\bar{\omega}))', \text{ es derivable en } 0. \end{cases} \quad (4.21)$$

(luego, $u \longrightarrow z(u)$ es localmente derivable en 0). La correspondiente derivada local en 0 en la dirección u esta dada por (4.11). Además, $z'(u) \in L^1(\Omega) \forall u \in Lip^{k'}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ y la función

$$\begin{cases} u \longrightarrow \int_{\Omega+u} z(u) dx, \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } Lip^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) \text{ en } \mathbb{R}, \text{ es derivable en } 0. \end{cases} \quad (4.22)$$

Su derivada en la dirección u es

$$\int_{\Omega} z'(u) dx + \int_{\partial\Omega} u_n z(0) dS. \quad (4.23)$$

4.3.2. Algunos resultados técnicos

Se enuncian a continuación algunos resultados que permitirán derivar respecto de u funciones de la forma

$$u \longrightarrow \int_{\partial\Omega+u} z(u) dS.$$

Definición 4.11 (Jacobiano tangencial) *Dados Ω un dominio acotado de clase Lip^1 y u con $\|u\|_1$ suficientemente pequeña tal que $\Omega + u$ es un nuevo abierto de clase Lip^1 , se llama Jacobiano tangencial de $I+u$ a la función $Jac_{\partial\Omega}(I+u)$, definida por:*

$$Jac_{\partial\Omega}(I+u) = |{}^t [\partial_j(I+u)_i]^{-1} \cdot n| Jac(I+u) \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Se tiene

$$Jac_{\partial\Omega}(I+u) \in L^\infty(\partial\Omega).$$

A continuación se presenta un lema de cambio de variables que permite pasar de una integral definida en $\partial\Omega + u$ a una integral definida en $\partial\Omega$.

Lema 4.12 (*Cambio de variables en una integral de superficie*) [1, pág 66] Si Ω es un abierto de clase Lip^1 y acotado, $u \in C_{ub}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ y $f \in L^1(\partial\Omega + u)$, entonces

$$f \circ (I + u) \in L^1(\partial\Omega)$$

y además

$$\int_{\partial\Omega+u} f dS = \int_{\partial\Omega} f \circ (I + u) Jac_{\partial\Omega}(I + u) dS. \quad (4.24)$$

Definición 4.13 (*Divergencia tangencial*) Sea Ω un abierto acotado de clase Lip^1 y sea $v \in (W^{1,\infty}(\partial\Omega))^N$. Sea $\tilde{v} \in (W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N))^N$ una extensión de v a todo \mathbb{R}^N . Se llama divergencia tangencial de v a la función $div_{\partial\Omega}v$, dada por:

$$div_{\partial\Omega}v = div\tilde{v} - ({}^t[\partial_j\tilde{v}_i] \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Además, $div_{\partial\Omega}v$ está bien definida (es decir, no depende de la extensión \tilde{v} elegida) y

$$div_{\partial\Omega}v \in L^\infty(\partial\Omega).$$

Lema 4.14 (*Diferenciación del Jacobiano tangencial*) Sea Ω un abierto acotado de clase Lip^k ($k \geq 1$). La aplicación

$$\begin{cases} u \longrightarrow Jac_{\partial\Omega}(I + u) \text{ está definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } C_{ub}^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) \text{ en } W^{k-1,\infty}(\partial\Omega), \text{ si } k > 1 \\ \text{(respectivamente en } L^\infty(\partial\Omega) \text{ si } k = 1) \\ \text{y es derivable en } 0. \end{cases} \quad (4.25)$$

Su derivada en la dirección u es $div_{\partial\Omega}u$.

Por último, se tiene el siguiente

Teorema 4.15 [1, pág 68] Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado de clase Lip^2 , $f \in W^{2,1}(\Omega)$ y $u \in C_{ub}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$. Se tiene la fórmula

$$\int_{\partial\Omega} (u \cdot grad f + f div_{\partial\Omega}u) dS = \int_{\partial\Omega} u_n \left(\frac{\partial f}{\partial n} + Hf \right) dS, \quad (4.26)$$

donde H es la curvatura media de $\partial\Omega$.

4.3.3. Diferenciación de una integral de superficie

El siguiente teorema trata sobre la derivabilidad en 0 de $u \rightarrow \int_{\partial\Omega+u} z(u)dS$.

Teorema 4.16 [1, pág 68] *Se supone que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado de clase Lip^1 , que*

$$\left\{ \begin{array}{l} u \rightarrow z(u), \text{ está definida para } u \in C_{ub}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) \\ \text{con } \|u\|_1 \text{ suficientemente pequeña} \\ \text{y toma valores en } W^{1,1}(\Omega + u), \end{array} \right. \quad (4.27)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \rightarrow z(u) \circ (I + u), \text{ definida de} \\ \text{un entorno de 0 en } C_{ub}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) \text{ en } W^{1,1}(\Omega), \\ \text{es derivable en 0,} \\ \text{con derivada en la dirección } u \text{ denotada } \dot{z}(u), \end{array} \right. \quad (4.28)$$

y que

$$z(0) \in W^{2,1}(\Omega). \quad (4.29)$$

Entonces, para cada abierto $\omega \subset\subset \Omega$,

$$\left\{ \begin{array}{l} u \rightarrow z_\omega(u) = z(u)|_\omega, \text{ definida de} \\ \text{un entorno de 0 en } C_{ub}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) \text{ en } L^1(\omega), \\ \text{es derivable en 0.} \end{array} \right. \quad (4.30)$$

En consecuencia, $u \rightarrow z(u)$ es localmente derivable en 0. Para cada $u \in C_{ub}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$, la derivada local $z'(u)$ en la dirección u verifica (4.11) y $z'(u) \in L^1(\partial\Omega)$. Además,

$$\left\{ \begin{array}{l} u \rightarrow \int_{\partial\Omega+u} z(u)dS \text{ definida de} \\ \text{un entorno de 0 en } C_{ub}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) \text{ en } \mathbb{R}, \\ \text{es derivable en 0} \end{array} \right. \quad (4.31)$$

y su derivada en la dirección u esta dada por

$$\int_{\partial\Omega} z'(u)dS + \int_{\partial\Omega} (u \cdot \text{grad } z(0) + z(0)\text{div}_{\partial\Omega}u)dS. \quad (4.32)$$

Este último resultado será de gran utilidad al momento de obtener la expansión de primer orden del funcional de costo asociado al problema inverso en estudio.

Capítulo 5

El método level set y su aplicación al problema inverso geométrico de detección de obstáculos dentro de un fluido

En este capítulo se parte estudiando toda la teoría matemática que permite comprender y desarrollar el método level set, luego se muestra su aplicación a la optimización de formas geométricas, y por último, se estudia la aplicación del método level set al problema inverso geométrico de detección de un obstáculo inmerso en un fluido viscoso, regido por el sistema de Stokes.

Antes de empezar con el desarrollo de este capítulo, es importante mencionar que una de las principales ventajas del método level set es que puede representar contornos de topología compleja e incluso permite realizar cambios topológicos como divisiones y uniones de contornos, en forma natural y eficiente. Mientras que otra de las características favorables de este método es que no requiere una parametrización de los puntos sobre el contorno, pudiendo ser procesado sobre una grilla cartesiana fija.

5.1. Funciones implícitas y funciones de distancia signada

En una representación explícita de una interface se escriben explícitamente los puntos que pertenecen a la interface, por ejemplo, al decir que $\partial\Omega = \{-1, 1\}$, considerando que $\Omega = [-1, 1]$. Por otra parte, una representación de interface implícita define la interface como el isocontorno de alguna función, que se conoce como función implícita. Por ejemplo, el isocontorno cero de $\phi(x) = x^2 - 1$ es el conjunto de todos los puntos tal que $\phi(x) = 0$, es decir, este es exactamente $\partial\Omega = \{-1, 1\}$, como se puede ver en la figura 5.1. Además, las funciones implícitas permiten distinguir el interior del exterior del conjunto que representan mediante el signo, pues toman valores negativos en el interior y positivos en el exterior. Las funciones

implícitas incluyen algunas herramientas geométricas muy poderosas. Por ejemplo, con una representación explícita de una interface puede ser difícil saber si un punto está dentro o fuera de la interface, mientras que con las funciones implícitas basta con ver su signo.

Por otra parte, una función de distancia signada es una función implícita ϕ con $|\phi(\vec{x})| = d(\vec{x}) \quad \forall \vec{x}$. Luego, $\phi(\vec{x}) = d(\vec{x}) = 0 \quad \forall \vec{x} \in \partial\Omega$, $\phi(\vec{x}) = -d(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \Omega^-$ y $\phi(\vec{x}) = d(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \Omega^+$, es decir, una función de distancia signada indica la distancia a la que se encuentra un punto del borde de un conjunto dado, pero también permite saber si dicho punto pertenece o no al conjunto, ya que esta función toma valores negativos para puntos pertenecientes al conjunto y valores positivos para puntos que están fuera del conjunto.

Las funciones de distancia signada comparten las propiedades de las funciones implícitas que se acaban de explicar. Además, hay nuevas propiedades que sólo poseen las funciones de distancia signada. Por ejemplo, si ϕ es una función de distancia signada, entonces $|\nabla\phi| = 1$, lo cual simplifica varios cálculos en donde aparece $|\nabla\phi|$.

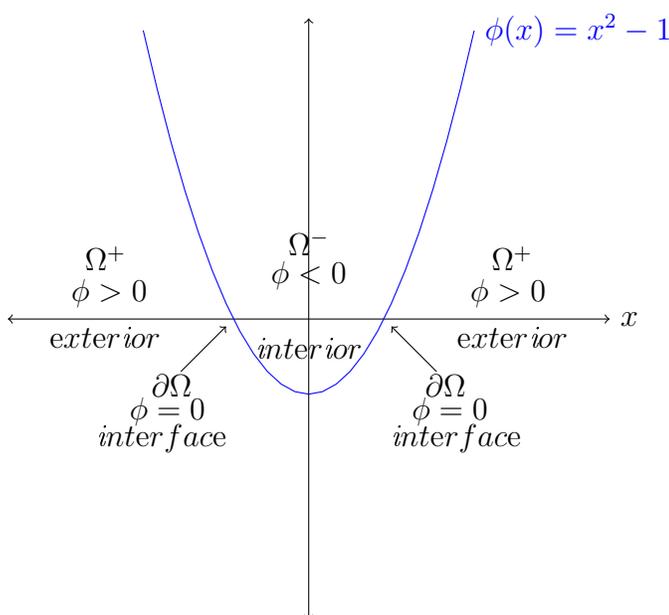


Figura 5.1: Función implícita $\phi(x) = x^2 - 1$ definiendo las regiones Ω^- y Ω^+ , así como la frontera $\partial\Omega$.

A continuación se muestran algunos ejemplos para aclarar ideas. En dimensión uno, si se tiene que $\partial\Omega = \{-1, 1\}$, entonces una función de distancia signada a este conjunto es $\phi(x) = |x| - 1$. Aquí se puede ver que $|\nabla\phi| = 1 \quad \forall x \neq 0$ (en $x = 0$ la derivada no está definida). En dimensión dos, si se tiene que $\partial\Omega = \{\vec{x} \mid |\vec{x}| = 1\}$ (el círculo unitario), entonces una función de distancia signada a este conjunto es $\phi(x) = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$. Por último, en dimensión tres, si se tiene que $\partial\Omega = \{\vec{x} \mid |\vec{x}| = 1\}$ (la superficie de la esfera unitaria), entonces una función de distancia signada a este conjunto es $\phi(x) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1$.

5.2. Movimiento en un campo de velocidades generado externamente

Se asume que la velocidad en cada punto \vec{x} de la supercifie implícita está dado por $\vec{V}(\vec{x})$, es decir, que $\vec{V}(\vec{x})$ es conocida $\forall \vec{x}$ tal que $\phi(\vec{x}) = 0$. Dado este campo de velocidades $\vec{V} = (u, v, w)$ se desea mover todos los puntos de la superficie con esta velocidad. La forma más simple de hacer esto es resolver la EDO

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{V}(\vec{x}) \quad (5.1)$$

$\forall \vec{x}$ con $\phi(\vec{x}) = 0$. Esta se conoce como formulación Lagrangiana de la ecuación de evolución de la interface.

Para evitar problemas de inestabilidad y posibles deformaciones de los elementos de superficie, se usa la función implícita ϕ tanto para representar la interface como para evolucionarla en el tiempo. Para definir la evolución de la función implícita ϕ se usa la ecuación de convección

$$\phi_t + \vec{V} \cdot \nabla \phi = 0. \quad (5.2)$$

Esta EDP define el movimiento de la interface, donde $\phi(\vec{x}) = 0$. Esta es una fomulación Euleriana de la evolución de la interface, pues la interface es capturada por la función implícita ϕ . La ecuación (5.2) se conoce como la ecuación de level set y fue introducida para la evolución numérica de interfaces por Osher [2] y Sethian [3]. Se observa que sobre una malla puede ser complicado resolver la ecuación (5.2) si el campo de velocidades esta definido sólo en la interface. Luego, usualmente se asume que \vec{V} no esta definido sólo en la interface, sino que fuera de la interface también.

5.3. Diferenciación Upwind

Una vez que ϕ y \vec{V} estan definidas en cada punto de la malla, se pueden aplicar métodos numéricos para evolucionar ϕ en el tiempo moviendo la interface sobre la malla.

Un método de primer orden bastante simple para la discretización en tiempo de la ecuación es el método “forward Euler” dado por

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + \vec{V}^n \cdot \nabla \phi^n = 0, \quad (5.3)$$

donde \vec{V}^n es el campo de velocidades externo al tiempo t^n y $\nabla \phi^n$ evalua el gradiente

usando los valores de ϕ al tiempo t^n . Primero se escribe la ecuación (5.3) en forma expandida como

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + u^n \phi_x^n + v^n \phi_y^n + w^n \phi_z^n = 0 \quad (5.4)$$

Por simplicidad, se trabaja sólo con el término $u^n \phi_x^n$ ya que los otros dos términos se pueden aproximar de la misma manera. Luego, se considera la versión uno-dimensional de (5.4), es decir,

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + u^n \phi_x^n = 0 \quad (5.5)$$

donde el signo de u^n indica si los valores de ϕ se están moviendo a la derecha o a la izquierda. Si $u_i > 0$, los valores de ϕ se están moviendo de izquierda a derecha, y el método de las características dice que hay que mirar a la izquierda de x_i para determinar que valor de ϕ habrá en el punto x_i al final de la iteración (si $u_i < 0$, es todo lo contrario). Luego la discretización upwind se resume como sigue. En cada punto x_i se define ϕ_x^- como $D^- \phi$ y ϕ_x^+ como $D^+ \phi$. Si $u_i > 0$, se aproxima ϕ_x con ϕ_x^- y si $u_i < 0$, se aproxima ϕ_x con ϕ_x^+ . Cuando $u_i = 0$, el término $u_i(\phi_x)_i$ se anula, y ϕ_x no necesita ser aproximado.

La combinación de la discretización en tiempo “forward Euler” con el esquema de diferenciación upwind es una aproximación de diferencias finitas consistente para la ecuación (5.2), pues el error de aproximación converge a 0 cuando $\Delta t \rightarrow 0$ y $\Delta x \rightarrow 0$. De acuerdo con el teorema de equivalencia de Lax-Richtmyer una aproximación de diferencias finitas a una EDP lineal es convergente, es decir, converge a la solución correcta cuando $\Delta t \rightarrow 0$ y $\Delta x \rightarrow 0$, si y sólo si esta es estable y consistente. La estabilidad garantiza que pequeños errores en la aproximación no son amplificados cuando la solución se hace evolucionar en el tiempo. La estabilidad puede ser forzada usando la condición CFL, que afirma que las ondas numéricas deberían propagarse al menos tan rápido como las ondas físicas. Esto significa que la velocidad de la onda numérica $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ debe ser al menos tan grande como la velocidad de la onda física $|u|$, es decir, $\frac{\Delta x}{\Delta t} > |u|$. Con esto se llega a la restricción de paso de tiempo CFL de

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{\max\{|u|\}}, \quad (5.6)$$

donde $\max\{|u|\}$ es escogido como el valor más grande de $|u|$ sobre toda la malla. La ecuación (5.6) es usualmente forzada escogiendo un número CFL α con

$$\Delta t \left(\frac{\max\{|u|\}}{\Delta x} \right) = \alpha \quad (5.7)$$

y $0 < \alpha < 1$.

5.4. Movimiento por curvatura media

Ya se discutió el movimiento de una interface en un campo de velocidades generado externamente $\vec{V}(\vec{x}, t)$. Ahora se discute el movimiento de interfaces para un campo de velocidades auto-generado \vec{V} que depende directamente en la función de level set ϕ . En particular, se considera el movimiento por curvatura media donde la interface se mueve en la dirección normal con una velocidad proporcional a su curvatura, es decir, $\vec{V} = -b\kappa\vec{N}$, donde $b > 0$ es una constante y κ es la curvatura. Cuando $b > 0$, la interface se mueve en la dirección de concavidad y cuando $b < 0$, en la dirección de convexidad. El campo de velocidades para el movimiento por curvatura media contiene sólo una componente en la dirección normal, es decir, la componente tangencial es nula. Como \vec{N} y $\nabla\phi$ apuntan en la misma dirección, $\vec{T} \cdot \nabla\phi = 0$ para cualquier vector tangente \vec{T} , por lo cual los componentes de la velocidad tangenciales se anulan al introducirlos en la ecuación de level set. Por ejemplo, en dos dimensiones con $\vec{V} = V_n\vec{N} + V_t\vec{T}$, la ecuación de level set

$$\phi_t + (V_n\vec{N} + V_t\vec{T}) \cdot \nabla\phi = 0 \quad (5.8)$$

es equivalente a

$$\phi_t + V_n\vec{N} \cdot \nabla\phi = 0, \quad (5.9)$$

pues $\vec{T} \cdot \nabla\phi = 0$. Además, como

$$\vec{N} \cdot \nabla\phi = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \cdot \nabla\phi = \frac{|\nabla\phi|^2}{|\nabla\phi|} = |\nabla\phi|, \quad (5.10)$$

se puede reescribir la ecuación (5.9) como

$$\phi_t + V_n|\nabla\phi| = 0 \quad (5.11)$$

donde V_n es la componente de la velocidad en la dirección normal.

Tomando $V_n = -b\kappa$ en la ecuación de level set (5.11) se obtiene

$$\phi_t = b\kappa|\nabla\phi|. \quad (5.12)$$

Se tiene que $b\kappa|\nabla\phi|$ es un término parabólico que no puede ser discretizado con un enfoque upwind. Cuando ϕ es una función de distancia signada, (5.12) se convierte en la ecuación del calor

$$\phi_t = b\Delta\phi, \quad (5.13)$$

donde ϕ es la temperatura y b es la conductividad térmica.

Por otra parte, también están las ecuaciones de convección-difusión, que son de la forma

$$\phi_t + \vec{V} \cdot \nabla \phi = b \Delta \phi \quad (5.14)$$

y que incluyen tanto los efectos de un campo de velocidades externo como un término de difusión. Escrita como ecuación de level set queda

$$\phi_t + \vec{V} \cdot \nabla \phi = b \kappa |\nabla \phi|, \quad (5.15)$$

y las dos pueden ser usadas como una misma ecuación si se mantiene una aproximación de distancia signada para ϕ fuera de la interface. Estas ecuaciones pueden ser resueltas usando los métodos upwind sobre el término $\vec{V} \cdot \nabla \phi$ y diferenciación central sobre el término parabólico $b \Delta \phi$ o $b \kappa |\nabla \phi|$.

5.5. Movimiento en la dirección normal

A continuación se estudia el movimiento de una interface bajo un campo de velocidades generado internamente para un movimiento constante en la dirección normal. Este campo de velocidades se define como $V = a \vec{N}$ o $V_n = a$, con a una constante. La correspondiente ecuación de level set es

$$\phi_t + a |\nabla \phi| = 0, \quad (5.16)$$

donde a puede ser positivo o negativo. Cuando $a > 0$ la interface se mueve en la dirección normal, y cuando $a < 0$ la interface se mueve en la dirección contraria. Cuando ϕ es una función de distancia signada, la ecuación (5.16) se reduce a $\phi_t = -a$, y los valores de ϕ crecen o decrecen, dependiendo del signo de a . La discretización en tiempo “Forward Euler” de esta ecuación es $\phi^{n+1} = \phi^n - a \Delta t$. Cuando $a > 0$, el isocontorno $\phi = 0$ se convierte en el isocontorno $\phi = -a \Delta t$ despues de realizar un paso en tiempo. Análogamente, el isocontorno $\phi = -a \Delta t$ se convierte en el isocontorno $\phi = 0$. Es decir, la interface se está moviendo en la dirección normal con velocidad a .

Cuando ϕ_0 es una función de distancia signada, la solución exacta de (5.16) esta dada por $\phi(t) = \phi_0 - at$. En cambio, cuando ϕ_0 no es una función de distancia signada, la ecuación (5.16) tiene que ser resuelta numéricamente tratándola como una ecuación tipo Hamilton-Jacobi.

5.5.1. Discretización numérica

Para realizar la discretización numérica, se toma $\vec{V} = a\vec{N}$ en (5.2) y se utiliza un enfoque de diferenciación upwind, es decir, se discretiza

$$\phi_t + \left(\frac{a\phi_x}{|\nabla\phi|}, \frac{a\phi_y}{|\nabla\phi|}, \frac{a\phi_z}{|\nabla\phi|} \right) \cdot \nabla\phi = 0 \quad (5.17)$$

con diferenciación upwind. Se considera el primer término espacial $a\phi_x|\nabla\phi|^{-1}\phi_x$, donde $a\phi_x|\nabla\phi|^{-1}$ es la velocidad en la dirección x . Como la diferenciación upwind esta basada sólo en el signo de la velocidad, se puede ignorar el denominador positivo $|\nabla\phi|$, asumiendo que este no es nulo. Luego, el signo de $a\phi_x$ puede ser usado para decidir si ϕ_x^- o ϕ_x^+ debería ser usado para aproximar ϕ_x . Cuando ϕ_x^- y ϕ_x^+ tienen el mismo signo, no importa cual de estos es reemplazado en $a\phi_x$, pues sólo el signo de este término determina si se usa ϕ_x^- o ϕ_x^+ . Este simple enfoque upwind funciona bien cuando ϕ_x^- y ϕ_x^+ tienen el mismo signo, pero no ocurre lo mismo cuando estos son de distinto signo. Por ejemplo, cuando $\phi_x^- < 0$ y $\phi_x^+ > 0$, $a\phi_x^- < 0$, indicando que se debería usar ϕ_x^+ , mientras que $a\phi_x^+ > 0$, indicando que se debería usar ϕ_x^- . Esta situación corresponde a una región con forma de “V” donde cada lado de ésta debería moverse hacia afuera. La dificultad en aproximar ϕ_x surge debido a que uno esta en la vecindad de un punto sónico, donde $\phi_x = 0$. Luego en este caso el método upwind deja de funcionar, pero se puede usar otro método conocido como el método Roe-Fix, el cual se puede consultar en la mayoría de los libros de EDP numérico.

5.6. Métodos numéricos para la resolución de ecuaciones tipo Hamilton-Jacobi

A continuación se estudian métodos numéricos para la resolución de ecuaciones tipo Hamilton-Jacobi de la forma

$$\phi_t + H(\nabla\phi) = 0, \quad (5.18)$$

donde H puede depender del espacio y del tiempo. En tres dimensiones se puede escribir

$$\phi_t + H(\phi_x, \phi_y, \phi_z) = 0. \quad (5.19)$$

La ecuación de convección en un campo de velocidades generado externamente es una ecuación tipo Hamilton-Jacobi con $H(\nabla\phi) = \vec{V} \cdot \nabla\phi$. Si se considera la ecuación de Hamilton-Jacobi uno-dimensional

$$\phi_t + H(\phi_x) = 0, \quad (5.20)$$

despues de aplicar una derivada espacial en la ecuación se obtiene

$$(\phi_x)_t + H(\phi_x)_x = 0 \quad (5.21)$$

Tomando $u = \phi_x$ se llega a

$$u_t + H(u)_x = 0, \quad (5.22)$$

que es una ley de conservación escalar. Luego, en dimensión uno hay una correspondencia entre las ecuaciones de Hamilton-Jacobi y las leyes de conservación. La solución u de una ley de conservación es la derivada de una solución ϕ de una ecuación de Hamilton-Jacobi. Inversamente, la solución ϕ de una ecuación de Hamilton-Jacobi es la integral de una solución u de una ley de conservación.

5.6.1. Discretización numérica

Una discretización en tiempo “forward Euler” de una ecuación tipo Hamilton-Jacobi se puede escribir como

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + \hat{H}^n(\phi_x^-, \phi_x^+; \phi_y^-, \phi_y^+; \phi_z^-, \phi_z^+) = 0, \quad (5.23)$$

donde $\hat{H}(\phi_x^-, \phi_x^+; \phi_y^-, \phi_y^+; \phi_z^-, \phi_z^+)$ es una aproximación numérica de $H(\phi_x, \phi_y, \phi_z)$. La condición CFL para la ecuación (5.23) es

$$\Delta t \max \left\{ \frac{|H_1|}{\Delta x} + \frac{|H_2|}{\Delta y} + \frac{|H_3|}{\Delta z} \right\} < 1, \quad (5.24)$$

donde H_1, H_2 y H_3 son las derivadas parciales de H con respecto a ϕ_x, ϕ_y y ϕ_z , respectivamente. Una conocida aproximación numérica del hamiltoniano H es el esquema de Lax-Friedrichs (LF) dado por

$$\hat{H} = H \left(\frac{\phi_x^- + \phi_x^+}{2}, \frac{\phi_y^- + \phi_y^+}{2} \right) - \alpha^x \left(\frac{\phi_x^+ - \phi_x^-}{2} \right) - \alpha^y \left(\frac{\phi_y^+ - \phi_y^-}{2} \right), \quad (5.25)$$

donde α^x y α^y son coeficientes de disipación que controlan la cantidad de viscosidad numérica y estan dados por

$$\alpha^x = \max |H_1(\phi_x, \phi_y)|, \quad \alpha^y = \max |H_2(\phi_x, \phi_y)|.$$

5.7. La ecuación de reinicialización

En 1992 Rouy y Tourin [19] propusieron un método numérico para resolver la ecuación $|\nabla\phi| = f(\vec{x})$. En el caso en que $f(\vec{x}) = 1$, la solución ϕ es una función de distancia signada. Ellos agregaron $f(\vec{x})$ al lado derecho de la ecuación (5.16) como un término fuente para obtener

$$\phi_t + |\nabla\phi| = f(\vec{x}), \quad (5.26)$$

la cual se hace evolucionar en el tiempo hasta que se alcanza un estado estable. En este estado estable los valores de ϕ dejan de cambiar, por lo que $\phi_t = 0$. Luego (5.26) se reduce a $|\nabla\phi| = f(\vec{x})$, como se quería. La ecuación (5.26) propaga información en la dirección normal, luego la información fluye de valores pequeños de ϕ a valores mas grandes. Esta ecuación es de poco uso al momento de reinicializar la función de level set, pues la localización de la interface esta influenciada por los valores negativos de ϕ , es decir, el isocontorno $\phi = 0$ no necesariamente permanece fijo, ya que este se moverá al ser influenciado por la información fluyendo de los valores negativos de ϕ . Una forma de evitar esto es calcular la función de distancia signada para todos los nodos de la malla adyacentes a la interface a mano. Luego $\phi_t + |\nabla\phi| = 1$ puede ser resuelto en Ω^+ para actualizar ϕ basado en estos puntos adyacentes a la interface. Finalmente la ecuación de reinicialización esta dada por

$$\phi_t + S(\phi_0)(|\nabla\phi| - 1) = 0, \quad (5.27)$$

donde $S(\phi_0)$ es una función signo que vale 1 en Ω^+ , -1 en Ω^- y 0 sobre la interface, donde se quiere que ϕ permanezca idénticamente nula. Típicamente la aproximación numérica con la que se trabaja es

$$S(\phi_0) = \frac{\phi_0}{\sqrt{\phi_0^2 + (\Delta x)^2}} \quad (5.28)$$

aunque también se trabaja con

$$S(\phi) = \frac{\phi}{\sqrt{\phi^2 + |\nabla\phi|^2(\Delta x)^2}} \quad (5.29)$$

que resulta ser una mejor opción, especialmente cuando la función inicial ϕ_0 es una mala aproximación de distancia signada, es decir, cuando $|\nabla\phi_0|$ está lejos de 1. En (5.29) es importante actualizar $S(\phi)$ continuamente a medida que se van realizando las iteraciones del método para que $|\nabla\phi|$ tenga el efecto deseado. Por el contrario, la ecuación (5.28) es evaluada sólo una vez usando la función inicial ϕ_0 .

5.8. Extensión del campo de velocidades

En todo el análisis que se ha hecho hasta ahora, se ha asumido que el campo de velocidades \vec{V} esta definido no sólo en la interface, sino que en todo el dominio de trabajo, pero muchas veces esto no es asi. Luego es necesaria una extensión de la velocidad, la cual partiendo con una velocidad dada en la interface, construya una extensión de esta a todo el dominio de trabajo.

En el método level set, se considera que una interface propagandose con velocidad \vec{V} está inyectada como el nivel cero de una función de dimensión superior ϕ , obteniendo

$$\phi_t + \vec{V}|\nabla\phi| = 0. \quad (5.30)$$

Pero aquí se encuentra escondido el hecho que se asume que \vec{V} está definido en todos los conjuntos de nivel y no sólo en el nivel cero donde está definida la interface. Luego, no esta sólo la interface inyectada en una función de dimensión superior, sino que también la velocidad \vec{V} de la interface está inyectada en una función de dimensión superior. Luego, se debería escribir

$$\phi_t + \vec{V}_{ext}|\nabla\phi| = 0, \quad (5.31)$$

donde \vec{V}_{ext} es un campo de velocidades tal que en la interface coincide con la velocidad \vec{V} dada. Además, se pide que

$$\lim_{x \rightarrow a} \vec{V}_{ext}(x) = \vec{V}(a), \quad (5.32)$$

donde a es un punto de la interface.

Cabe preguntarse cuáles son las propiedades deseables de una extensión de velocidad. Primero, esta debería coincidir con la velocidad dada en la interface. Segundo, es deseable que dicha velocidad mueva los conjuntos de nivel vecinos de forma tal que la función de distancia signada sea preservada. Se considera una función de distancia signada inicial $\phi(x, t = 0)$, y se construye una extensión de la velocidad que satisface

$$\nabla\vec{V}_{ext} \cdot \nabla\phi = 0. \quad (5.33)$$

Si se supone que inicialmente $|\nabla\phi(x, t = 0)| = 1$, y el movimiento se realiza bajo la ecuación de level set $\phi_t + \vec{V}_{ext}|\nabla\phi| = 0$, entonces se tiene

$$\frac{d|\nabla\phi|^2}{dt} = \frac{d}{dt}(\nabla\phi \cdot \nabla\phi) = 2\nabla\phi \cdot \frac{d}{dt}\nabla\phi$$

$$= -2\nabla\phi \cdot \nabla\vec{V}_{ext}|\nabla\phi| - 2\nabla\phi \cdot \nabla|\nabla\phi|\vec{V}_{ext}.$$

5.9. El método level set para interfaces en evolución

A continuación se estudia el método level set para movimientos geométricos. Si un conjunto $\Omega(t)$ se está moviendo con velocidad normal V_n (pues un movimiento en la dirección tangencial no cambia la forma) en su frontera, entonces se tiene por un resultado estandar para la derivada de integrales dependientes de parámetros

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} w dx = \int_{\partial\Omega(t)} w V_n d\mathcal{H}^{n-1}$$

para toda función suave w con soporte compacto. Ahora se asume que se tiene dada una velocidad V_n sobre \mathbb{R}^N tal que cada conjunto de nivel de la función continua ϕ se está moviendo con velocidad normal V_n , es decir, la anterior igualdad se tiene con $\Omega(t) = \{\phi(\cdot, t) < \eta\}$, $\forall \eta \in \mathbb{R}$. Luego se puede tomar el valor medio sobre todos los η y obtener a partir de las formulas de area y co-area

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial\phi}{\partial t} w dx &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} \phi w dx = -\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \int_{\{\phi(\cdot, t) < \eta\}} w dx d\eta \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \int_{\partial\Omega(t)} w V_n d\mathcal{H}^{n-1} d\eta = -\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi| V_n w dx. \end{aligned}$$

Como la función test es arbitraria, esto implica que ϕ tiene que satisfacer la ecuación de level set

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + V_n |\nabla\phi| = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+. \quad (5.34)$$

En aplicaciones típicas de movimientos geométricos, la velocidad normal V_n se obtiene a partir de principios físicos, y puede depender de campos y de cantidades geométricas tales como la normal n o la curvatura κ . Estas cantidades se expresan en términos de ϕ como

$$n = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}, \quad \kappa = \operatorname{div} n = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right).$$

En general, (5.34) no tiene solución clásica, sino que sólo una solución viscosa, la cual existe bajo condiciones de regularidad apropiadas en la velocidad. Al calcular soluciones viscosas para las ecuaciones de level set, se obtienen cambios topológicos tales como división

y unión de componentes conexas de forma automática, pues estos cambios no son reconocidos ni siquiera por la ecuación de level set. Incluso si no se espera un cambio topológico, uno se beneficia al usar el método level set en lugar de métodos basados en parametrizaciones, pues la discretización de la parametrización no permite controlar la precisión en la resolución de una curva o superficie.

5.10. Level set en el cálculo sobre formas

El análisis de sensibilidad de formas es un tema clásico en optimización de formas y define un cálculo natural sobre formas. Para formas suficientemente regulares (con frontera de clase C^1) hay dos formas equivalentes de introducir sensibilidades de formas, que son el método de deformación y el método de velocidad. Este último método está íntimamente relacionado con el método level set por lo que a continuación se estudia su aplicación al cálculo sobre formas.

5.10.1. Cálculo sobre formas usando el método de velocidad

Dado un conjunto Ω , se puede definir una evolución en tiempo de conjuntos $\Omega(t)$ en un campo de velocidades \vec{V} con

$$\Omega(t) = \left\{ y(t) : y(0) \in \Omega, \frac{dy}{dt}(\tau) = \vec{V}(y(\tau)) \text{ en } (0, t) \right\}.$$

La sensibilidad de forma de un funcional J en dirección de una perturbación $\vec{V} \in C^{0,1}(\mathbb{R}^N)$ esta dada por

$$dJ(\Omega; V) = \frac{d}{dt} J(\Omega(t))|_{t=0} \quad (5.35)$$

si la derivada del lado derecho existe, y $dJ(\Omega, \cdot)$ es llamada la diferencial de forma.

5.11. Optimización de formas basada en level set

En esta sección se muestra el uso del método level set en la construcción de métodos eficientes para la optimización de formas. La idea es representar la forma a ser optimizada como el nivel cero de una función continua ϕ y elegir una velocidad V_n que haga a esta forma evolucionar hacia la forma óptima. La elección de la velocidad juega el mismo rol que la elección de la dirección de búsqueda en los problemas de optimización (en el caso de espacios vectoriales). Se analizan métodos tipo gradiente y métodos tipo Newton.

5.11.1. Métodos tipo gradiente

Los algoritmos tipo gradiente fueron los primeros en aparecer en la optimización basada en level set y siguen siendo los más usados. La idea en líneas generales es elegir la actualización como un múltiplo del gradiente negativo del funcional a minimizar y elegir un paso de tiempo suficientemente pequeño que garantice una disminución del funcional objetivo. La dificultad en los métodos de optimización basados en level set es la relación entre la actualización (la velocidad) y el gradiente (la sensibilidad de forma), pues no hay estructura de espacio vectorial inherente. Un enfoque clásico en este método es trabajar con problemas donde la sensibilidad de formas está dada por

$$J'(\Omega)V_n = \int_{\partial\Omega} V_n \rho_\Omega d\mathcal{H}^{n-1},$$

con ρ_Ω una función de densidad (dependiente de Ω). En este caso se puede interpretar ρ_Ω como el gradiente de forma y la velocidad normal puede ser escogida como una extensión de

$$V_n(\cdot, t) = -\rho_\Omega(t) \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

De esta forma se obtiene

$$\frac{d}{dt}J(\Omega(t)) = J'(\Omega(t))V_n(\cdot, t) = - \int_{\partial\Omega} |\rho_\Omega(t)|^2 d\mathcal{H}^{n-1},$$

y luego la evolución en el tiempo disminuye el funcional objetivo y se detiene sólo si el gradiente de forma se anula.

Es importante mencionar que una prueba de convergencia general de métodos tipo gradiente basados en level set es aun un problema abierto, pero se puede mostrar al menos que el funcional objetivo está disminuyendo durante las iteraciones y que el método para sólo en un punto estacionario ($J'(\Omega) = 0$).

Otro asunto importante que siempre surge en los métodos de optimización es el de escoger el tamaño del paso, ya que si bien la evolución dada por el método del gradiente en tiempo continuo produce un descenso del funcional objetivo, en la práctica no se puede desarrollar una evolución continua sino más bien una evolución con pequeños pasos de tiempo. Para determinar el paso de tiempo tal que el funcional objetivo disminuya se pueden usar los métodos clásicos como las reglas de Armijo-Goldstein o de Wolfe. Sin embargo algunos resultados numéricos indican que en algunos casos podría ser conveniente violar estas reglas para escoger el paso e incluso permitir que el funcional objetivo crezca, pues esto generalmente es seguido de una disminución del funcional más pronunciada en las siguientes iteraciones, lo cual en particular es usado en la implementación numérica de esta memoria.

5.11.2. Métodos tipo Newton

Si el funcional de forma admite sensibilidades de forma de segundo orden, se puede intentar usar un método tipo Newton basado en level set. De forma análoga al método de Newton estandar en espacios métricos, se puede definir un “paso de Newton” como la minimización de una aproximación cuadrática (ahora en el sentido del cálculo de formas) con respecto a la actualización (que ahora es la velocidad), es decir

$$\min_{V_n \in \mathcal{V}(\Omega)} \frac{1}{2} J''(\Omega)(V_n, V_n) + J'(\Omega)V_n + J(\Omega) \quad (5.36)$$

A partir de este problema variacional cuadrático se obtiene la ecuación de Newton

$$J''(\Omega)(V_n, W_n) = -J'(\Omega)W_n \quad \forall W_n \in \mathcal{V}(\Omega) \quad (5.37)$$

para la velocidad V_n que minimiza (5.36). Como para el método de Newton clásico, este entrega una dirección de descenso si la forma bilineal J'' es definida positiva, pues en este caso

$$\frac{d}{dt} J(\Omega(t)) = J'(\Omega(t))V_n = -J''(\Omega)(V_n, V_n) \leq \beta \|V_n\|^2, \quad (5.38)$$

con $\beta < 0$.

5.12. Expansión de primer orden del funcional de costo

Para obtener el desarrollo de primer orden del funcional de costo J se utilizarán las herramientas del capítulo 4 de diferenciación con respecto al dominio. Pero además se debe introducir el problema adjunto asociado al problema inicial, por lo que para entender como se hace esto último, primero se procede a estudiar el caso mas sencillo del problema del laplaciano.

5.12.1. Cálculo de $\langle \nabla J(0), u \rangle$ para el caso del problema del laplaciano

A continuación se realiza el cálculo de $\langle \nabla J(0), u \rangle$ para el problema del laplaciano con condiciones de borde Dirichlet y Neumann.

Se tiene un dominio Ω , un obstáculo inaccesible en su interior D y una función u que es solución del siguiente problema del laplaciano

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \Omega \setminus D \\ u = g & \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \Gamma_N \\ u = 0 & \partial D \end{cases} \quad (5.39)$$

con $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, donde en Γ_D se impone una condición de borde Dirichlet y en Γ_N una condición de borde Neumann. Además se considera $\Gamma_m \subset \Gamma_D$ que es la porción donde se realiza la medición que permitirá encontrar el obstáculo. Como se mide sobre el borde Dirichlet, lo que se mide es el dato Neumann, denotado por m .

Dado que la letra u ya ha sido usada como la solución del problema (5.39), se utiliza ϕ para denotar la variación del dominio (lo cual sólo se hace para este caso particular por lo que no debería prestarse para confusión).

El funcional de costo esta dado por:

$$J(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_m} \left| \frac{\partial u}{\partial n} - m \right|^2 d\sigma \quad (5.40)$$

donde u corresponde a la solución del problema (5.39), pero en el dominio perturbado $\Omega + \phi$.

Luego

$$\nabla J(0)[\phi] = \int_{\Gamma_m} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - m \right) \frac{\partial u'}{\partial n} d\sigma \quad (5.41)$$

Es decir, se considera una perturbación ϕ del dominio inicial, obteniendose el mismo problema (5.39), pero ahora en $\Omega + \phi$. Tomando $u_\phi(\vec{x}) = u(\vec{x}, \vec{x} + \lambda\phi(\vec{x}))$ y derivando se obtiene $u'_\phi(\vec{x}) = u'(\vec{x}) + \nabla u \cdot \phi(\vec{x}) = 0$, con lo que se llega a

$$u' = -\nabla u \cdot \phi \quad \text{en } \partial D \quad (5.42)$$

Ahora, considerando el problema del laplaciano (5.39) pero en el nuevo dominio perturbado $\Omega + \phi$ y derivándolo se obtiene:

$$\begin{cases} \Delta u' = 0 & \text{en } \Omega \setminus D + \phi \\ u' = 0 & \text{sobre } \Gamma_D + \phi \\ \frac{\partial u'}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Gamma_N + \phi \\ u' = -\nabla u \cdot \phi & \text{sobre } \partial D + \phi \end{cases} \quad (5.43)$$

Por otra parte, al hacer la integración por partes, aparecen varios términos que uno necesita que se anulen, por lo cual al imponer estas condiciones se obtiene un problema auxiliar, conocido como problema adjunto y que es el siguiente:

$$\begin{cases} \Delta p = 0 & \text{en } \Omega \setminus D \\ p = 0 & \text{sobre } \Gamma_D \setminus \Gamma_m \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Gamma_N \\ p = \frac{\partial u}{\partial n} - m & \text{sobre } \Gamma_m \\ p = 0 & \text{sobre } \partial D \end{cases} \quad (5.44)$$

donde p es la variable asociada al problema adjunto.

Luego, se toma la ecuación $\Delta u' = 0$, se multiplica por p y se hace la integración por partes sobre $\Omega \setminus D$:

$$\int_{\Omega \setminus D} \Delta u' p = 0 \quad (5.45)$$

$$\int_{\Gamma_D \setminus \Gamma_m} \nabla u' \cdot \hat{n} p + \int_{\Gamma_m} \nabla u' \cdot \hat{n} p + \int_{\partial D} \nabla u' \cdot \hat{n} p - \int_{\Omega \setminus D} \nabla u' \cdot \nabla p = 0 \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_D \setminus \Gamma_m} \frac{\partial u'}{\partial n} p + \int_{\Gamma_m} \frac{\partial u'}{\partial n} p + \int_{\partial D} \frac{\partial u'}{\partial n} p - \int_{\Gamma_D \setminus \Gamma_m} u' \nabla p \cdot \hat{n} \\ & - \int_{\Gamma_m} u' \nabla p \cdot \hat{n} - \int_{\Gamma_N} u' \nabla p \cdot \hat{n} - \int_{\partial D} u' \nabla p \cdot \hat{n} + \int_{\Omega \setminus D} u' \Delta p = 0 \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\int_{\Gamma_m} \frac{\partial u'}{\partial n} p + \int_{\partial D} \frac{\partial u'}{\partial n} p = \int_{\partial D} u' \frac{\partial p}{\partial n} = - \int_{\partial D} \nabla u \cdot \phi \frac{\partial p}{\partial n} \quad (5.48)$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_m} \frac{\partial u'}{\partial n} p = - \int_{\partial D} \nabla u \cdot \phi \frac{\partial p}{\partial n}. \quad (5.49)$$

Luego, si se hace $p = \frac{\partial u}{\partial n} - m$ sobre Γ_m , se tiene

$$\int_{\Gamma_m} \frac{\partial u'}{\partial n} p = \int_{\Gamma_m} \frac{\partial u'}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial n} - m = \nabla J(0)[\phi] \quad (5.50)$$

pero también se tiene

$$\int_{\Gamma_m} \frac{\partial u'}{\partial n} p = - \int_{\partial D} \nabla u \cdot \phi \frac{\partial p}{\partial n} \quad (5.51)$$

Luego, de (5.50) y (5.51) se llega a

$$\langle \nabla J(0), \phi \rangle = \nabla J(0)[\phi] = - \int_{\partial D} \nabla u \cdot \phi \frac{\partial p}{\partial n} = - \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \hat{n} \cdot \phi \frac{\partial p}{\partial n} = - \int_{\partial D} \phi \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \frac{\partial p}{\partial n} \hat{n} \quad (5.52)$$

$$\Rightarrow \nabla J(0) = - \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \frac{\partial p}{\partial n} \cdot \hat{n}. \quad (5.53)$$

Finalmente, para este problema particular del laplaciano (5.39) se tiene que la dirección de máximo descenso, es decir, $-\nabla J(0)$, esta dada por $-\nabla J(0) = \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \frac{\partial p}{\partial n} \cdot \hat{n}$, que corresponde a la dirección normal y de magnitud $\frac{\partial u}{\partial n} \cdot \frac{\partial p}{\partial n}$, recordando que esta es la velocidad deseada sólo sobre ∂D y que para usar el método level set es necesario extenderla a toda la malla o por lo menos en una banda en torno a esta interface.

5.12.2. Cálculo de $\langle \nabla J(0), u \rangle$ para el funcional de costo J asociado al problema inverso en estudio

Lo que se pretende hacer a continuación, es usar el metodo de diferenciación con respecto al dominio para obtener el desarrollo de primer orden del funcional de costo J , con el fin de obtener la velocidad \vec{V} que se usará en el método level set.

Para empezar, notar que se tiene que $\forall u \in W^{k,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ de norma suficientemente pequeña,

$$v(u) = 0 \quad \text{sobre } \partial D + u, \quad (5.54)$$

así, la primera derivada local de v en $u = 0$, en la dirección u , denotada por $v'(u)$, verifica

$$v'(u) = - \left(u \cdot n \frac{\partial v(0)}{\partial n} \right) \quad \text{sobre } \partial D. \quad (5.55)$$

Se asume que el dominio deformado tiene la forma $\Omega^* + u = \Omega \setminus \overline{D} + u$. El objetivo de los cálculos que se hacen a continuación es obtener la expansión asintótica de Λ_{D+u} en torno a $u = 0$. Primero se tiene que para todo u en el espacio de deformaciones admisibles se puede escribir el siguiente sistema de Stokes

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \sigma(v_u, p_u) = 0 & \text{en } \Omega^* + u \\ \operatorname{div} v_u = 0 & \text{en } \Omega^* + u \\ v_u = \varphi & \text{sobre } \partial \Omega \\ v_u = 0 & \text{sobre } \partial D + u \end{cases} \quad (5.56)$$

A continuación se define el funcional de costo a ser minimizado como sigue. Sea σ_m una medición dada de la componente normal del tensor de esfuerzos sobre $\Gamma_m \subset \partial \Omega$, correspondiente al obstáculo objetivo. Luego, el funcional de costo está dado por

$$J(u) = \int_{\Gamma_m} |\sigma(v_u, p_u) - \sigma_m|^2. \quad (5.57)$$

De esta forma, el problema inverso geométrico se convierte en el problema de minimización

$$\min_{u \in \mathcal{U}_{ad}} J(u), \quad (5.58)$$

donde $\mathcal{U}_{ad} \subset W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ es el conjunto de deformaciones tal que $D + u \in \mathcal{D}_{ad}$, es decir, tal que $D + u$ es una geometría admisible. Se puede ver que gracias al resultado de identificabilidad, el funcional J tiene un único mínimo global, el cual es alcanzado cuando el funcional de costo J se anula.

Recordando la expresión (4.32), la cual nos entrega la derivada de $u \rightarrow \int_{\partial S+u} z(u) dS$ en 0 y en la dirección u , se tiene el siguiente desarrollo de primer orden:

$$\int_{\partial S+u} z(u) dS = \int_{\partial S} z(0) dS + \int_{\partial S} z'(u) dS + \int_{\partial S} (u \cdot \text{grad } z(0) + z(0) \text{div}_{\partial S} u) dS + o(u), \quad (5.59)$$

donde $z'(u)$ es la primera variación local de $z(u)$ en $u = 0$ y en la dirección u . Además, como $\text{sop}(u) \subset \subset \Omega$, $u = 0$ en una vecindad de $\partial\Omega$. Luego, considerando $\partial S = \Gamma_m$ y

$$z(u) = |\sigma(v_u, p_u) - \sigma_m|^2 \quad \text{sobre } \Gamma_m, \quad (5.60)$$

al reemplazar en (5.59) se llega a

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_m} |\sigma(v_u, p_u) - \sigma_m|^2 dS - \int_{\Gamma_m} |\sigma(v_0, p_0) - \sigma_m|^2 dS \\ &= \int_{\Gamma_m} 2(\sigma(v_0, p_0) - \sigma_m) \cdot \sigma(v'(u), p'(u)) n dS + o(u), \end{aligned} \quad (5.61)$$

donde $(v'(u), p'(u))$ es la solución de

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\text{div } \sigma(v'(u), p'(u)) = 0 & \text{en } \Omega \setminus \bar{D} \\ \text{div } v'(u) = 0 & \text{en } \Omega \setminus \bar{D} \\ v'(u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \\ v'(u) = -(u \cdot n) \frac{\partial v_0}{\partial n} & \text{sobre } \partial D \end{array} \right. \quad (5.62)$$

Por otra parte, se considera el siguiente problema auxiliar que corresponde al problema adjunto del original

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div} \sigma(w, q) = 0 & \text{en } \Omega \setminus \overline{D} \\ \operatorname{div} w = 0 & \text{en } \Omega \setminus \overline{D} \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \setminus \Gamma_m \\ w = 0 & \text{sobre } \partial D \\ w = 2(\sigma(v_0, p_0)n - \sigma_m) & \text{sobre } \Gamma_m \end{array} \right. \quad (5.63)$$

Luego, multiplicando la primera ecuación de (5.62) por w e integrando por partes, se obtiene

$$\int_{\partial\Omega \cup \partial D} \sigma(v'(u), p'(u))n \cdot w dS = \int_{\partial\Omega \cup \partial D} v'(u) \cdot \sigma(w, q)n dS \quad (5.64)$$

luego se tiene

$$\int_{\Gamma_m} \sigma(v'(u), p'(u))n \cdot w dS = \int_{\partial D} v'(u) \cdot \sigma(w, q)n dS \quad (5.65)$$

es decir

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_m} \sigma(v'(u), p'(u))n \cdot 2(\sigma(v_0, p_0)n - \sigma_m) dS \\ &= \int_{\partial D} \left(-(u \cdot n) \frac{\partial v_0}{\partial n} \right) \cdot \sigma(w, q)n dS \end{aligned} \quad (5.66)$$

Finalmente, se llega a la siguiente expresión

$$J(u) = J(0) - \int_{\partial D} \left((u \cdot n) \frac{\partial v_0}{\partial n} \right) \cdot \sigma(w, q)n dS + o(u) \quad (5.67)$$

la cual entrega la expansión de primer orden del funcional de costo J .

Ahora, gracias a (5.67) se tiene que

$$\langle \nabla J(0), u \rangle = - \int_{\partial D} \left((u \cdot n) \frac{\partial v_0}{\partial n} \right) \cdot (\sigma(w, q)n) dS = - \int_{\partial D} \left\{ u \cdot \left(\left(\frac{\partial v_0}{\partial n} \cdot \sigma(w, q)n \right) n \right) \right\} dS \quad (5.68)$$

Además, dado que

$$\langle \nabla J(0), u \rangle = \int_{\partial D} \nabla J(0) \cdot u dS \quad (5.69)$$

se deduce que

$$-\nabla J(0) = \left(\frac{\partial v_0}{\partial n} \cdot \sigma(w, q)n \right) n \quad (5.70)$$

es decir, $-\nabla J(0)$, que corresponde a la dirección de máximo descenso de J en 0 , es un vector que apunta en la dirección normal y su magnitud esta dada por $|\frac{\partial v_0}{\partial n} \cdot \sigma(w, q)n|$, además el signo de $\frac{\partial v_0}{\partial n} \cdot \sigma(w, q)n$ nos da el sentido en que apunta el vector normal en cada punto, apuntando hacia afuera de la curva si es positivo y hacia adentro si es negativo.

Dado que el método level set que se pretende utilizar para minimizar el funcional objetivo es un método tipo gradiente, con el cálculo de $-\nabla J(0)$ que se acaba de realizar, mas el desarrollo teórico del método level set llevado a cabo en este capítulo, se tienen todos los elementos para realizar la implementación numérica del método de reconstrucción, la cual se presenta en detalle en el siguiente capítulo.

Capítulo 6

Implementación numérica del proceso de reconstrucción de obstáculos inmersos en un fluido usando el método level set

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos del método de reconstrucción numérica utilizado para resolver el problema inverso en estudio, el cual permite recuperar diversos cuerpos inmersos en un fluido viscoso regido por el sistema de Stokes (incluyendo obstáculos no convexos), utilizando para ello el método level set.

Para realizar esta implementación numérica se ha utilizado el programa FreeFem, el cual permite resolver ecuaciones en derivadas parciales mediante el método de los elementos finitos y permite realizar una enorme cantidad de simulaciones numéricas, por lo que resulta una gran herramienta para este tipo de problemas.

6.1. Implementación numérica del proceso de reconstrucción usando el método level set

En esta sección se muestra en términos generales la implementación numérica realizada con el programa FreeFem.

Para realizar la simulación se considera un canal (en 2 dimensiones) con extremos abiertos, de $28 \text{ cm} \times 14 \text{ cm}$, con un fluido viscoso que va de izquierda a derecha y que por simplicidad se considera de viscosidad 1, en donde la velocidad del fluido en la entrada satisface un perfil parabólico, mientras que las condiciones de borde en la salida son las de frontera libre (que equivalen a una condición de tipo Neumann). Para la implementación numérica de este problema inverso, dada la estrategia a utilizar, que ya ha sido explicada, se debe resolver en cada iteración el problema de Stokes y el problema de Stokes adjunto, para lo cual además en cada iteración se debe remallar el dominio para poder así imponer las condiciones de borde correspondientes. Además la implementación del método level set está dividida en dos

partes, la primera consiste en la traslación de la función ϕ hasta que esta encuentra la posición del obstáculo (su centro de masas), y la segunda consiste en la deformación del obstáculo mediante la evolución de la función ϕ hasta determinar la forma del obstáculo.

Las etiquetas de los bordes inferior, derecho, superior e izquierdo del canal son 1, 2, 3 y 4, respectivamente, mientras que 5 corresponde a la frontera del obstáculo inicial (que será perturbado hasta alcanzar el obstáculo objetivo). Además, se define la función g como:

$$\begin{aligned} \text{real } y_2 &= ((y_{\text{máx}} - y_{\text{mín}})^2)/4 \\ \text{func } g &= (y - y_{\text{mín}})(y_{\text{máx}} - y)/y_2 \end{aligned}$$

que corresponde a un perfil parabólico para la entrada del canal.

Por otra parte, como se mostró en el capítulo 3, el algoritmo implementado para resolver el problema de Stokes en FreeFem es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{solve Stokes } ([u_1, u_2, p], [v_1, v_2, q], \text{solver=Croust}) = \\ \int_{\mathcal{T}_h} \partial_x u_1 \partial_x v_1 + \partial_y u_1 \partial_y v_1 + \partial_x u_2 \partial_x v_2 + \partial_y u_2 \partial_y v_2 \\ + pq\varepsilon - p\partial_x v_1 - p\partial_y v_2 + \partial_x u_1 q + \partial_y u_2 q \\ + \text{on}(4, u_1 = g, u_2 = 0) \\ + \text{on}(1, 3, u_1 = 0, u_2 = 0) \\ + \text{on}(5, u_1 = 0, u_2 = 0) \end{aligned}$$

siendo la resolución del problema adjunto análoga a la anterior.

Además, la ecuación de reinicialización para ϕ , usada para reinicializar ϕ de forma que esta siga siendo una función de distancia signada, esta dada por

$$\begin{aligned} V_h h_1 &= h_{\text{triangle}} \\ \text{real } h &= h_1.\text{máx} \\ \text{for } (i_{\text{init}} = 1; i_{\text{init}} \leq N_{\text{init}}; i_{\text{init}} = i_{\text{init}} + 1) \\ \{ & \nabla = (\partial_x \phi)^2 + (\partial_y \phi)^2 \\ & S = \phi / (\sqrt{\phi^2 + h^2 \nabla}) \\ & M_1 = \partial_x \phi / (\sqrt{\nabla + \varepsilon^2}) \\ & M_2 = \partial_y \phi / (\sqrt{\nabla + \varepsilon^2}) \\ & \phi_{\text{init}} = \text{convect}([-SM_1, -SM_2], T, \phi) \\ & \phi_{\text{init}} = \phi_{\text{init}} + TS \end{aligned}$$

$$\phi = \phi_{\text{init}} \quad \}$$

Otro punto importante es la definición del campo de normales, ya que en principio este está definido sólo en la frontera del cuerpo que se está deformando, por lo que es necesario extenderlo para tenerlo definido sobre toda la malla de trabajo. Para hacer esto, se define el campo de normales en cada punto como la normal de la función ϕ en dicho punto, cuya implementación es muy simple y está dada por

$$\begin{aligned} \nabla &= (\partial_x \phi)^2 + (\partial_y \phi)^2 \\ N_1 &= \partial_x \phi / (\sqrt{\nabla + \varepsilon^2}) \\ N_2 &= \partial_y \phi / (\sqrt{\nabla + \varepsilon^2}) \end{aligned}$$

Además, la velocidad usada en el método level set para deformar el obstáculo está dada por

$$\begin{aligned} V &= (\partial_x u_1 N_1 + \partial_y u_1 N_2)(\partial_x w_1 N_1 + \partial_y w_1 N_2) \\ &\quad + (\partial_x u_2 N_1 + \partial_y u_2 N_2)(\partial_x w_2 N_1 + \partial_y w_2 N_2) \end{aligned}$$

en donde (u_1, u_2) y (w_1, w_2) son las velocidades del fluido para el problema de Stokes y su problema adjunto, respectivamente.

Posteriormente, a esta velocidad se le aplica un proceso de regularización, el cual está dado por

$$\begin{aligned} \text{problem smoothing } (V_{\text{reg}}, v_r) &= \\ \int_{\mathcal{T}_h} \varepsilon (\partial_x V_{\text{reg}} \partial_x v_r + \partial_y V_{\text{reg}} \partial_y v_r) + V_{\text{reg}} v_r - \int_{\mathcal{T}_h} V v_r & \\ \text{smoothing} & \\ V &= V_{\text{reg}} \end{aligned}$$

Por otra parte, las figuras que se muestran a continuación corresponden a imágenes que ilustran los principales procesos que forman parte de esta implementación numérica.

En la figura 6.1 se muestra como fue realizado el mallado sobre el dominio Ω con un obstáculo D en su interior, es decir, sobre $\Omega \setminus D$.

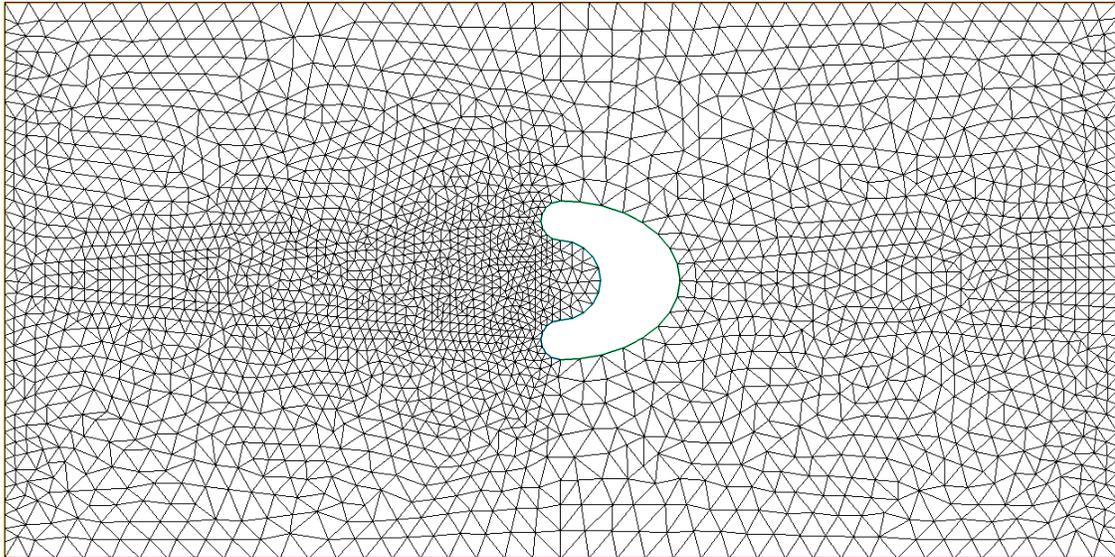


Figura 6.1: Malla sobre el dominio con un obstáculo.

En la figura 6.2 se muestra el campo de velocidades del fluido con un obstáculo, obtenido mediante la resolución del sistema de Stokes.

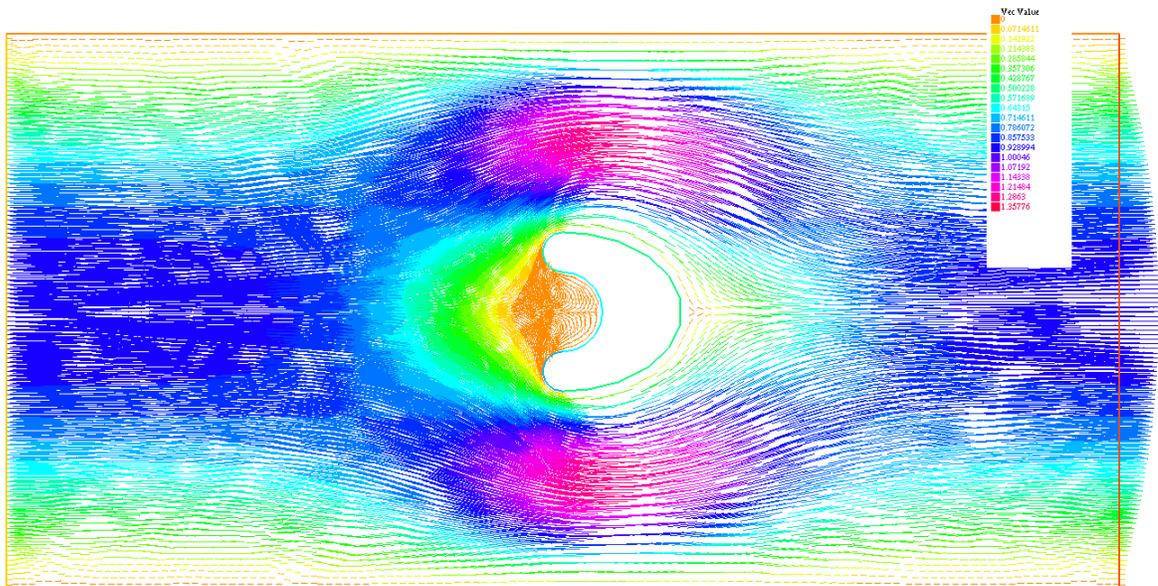
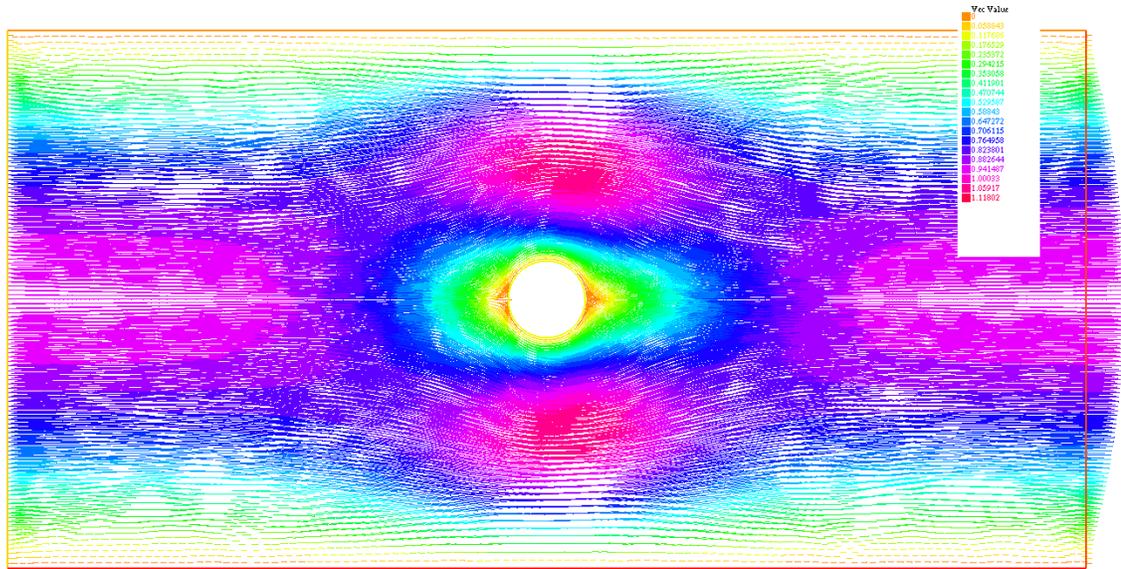
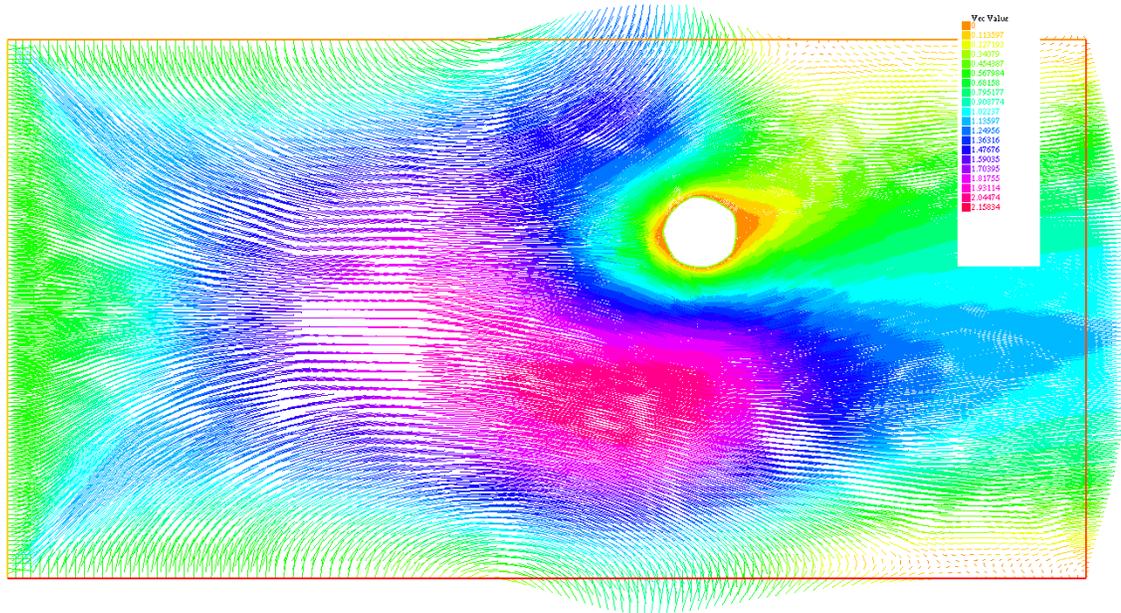


Figura 6.2: Campo de velocidades del fluido con un obstáculo, obtenido con Stokes.

En la figura 6.3 se muestran los campos de velocidades del fluido, obtenidos al resolver el sistema de Stokes y su problema adjunto asociado.



(a) Campo de velocidades del fluido con un obstáculo, obtenido con Stokes.



(b) Campo de velocidades del fluido con un obstáculo, obtenido con el problema adjunto.

Figura 6.3: Campo de velocidades del fluido con un obstáculo para el problema de Stokes y el problema adjunto asociado.

En la figura 6.4 se muestra la presión del fluido con un obstáculo, obtenido mediante la resolución del sistema de Stokes.

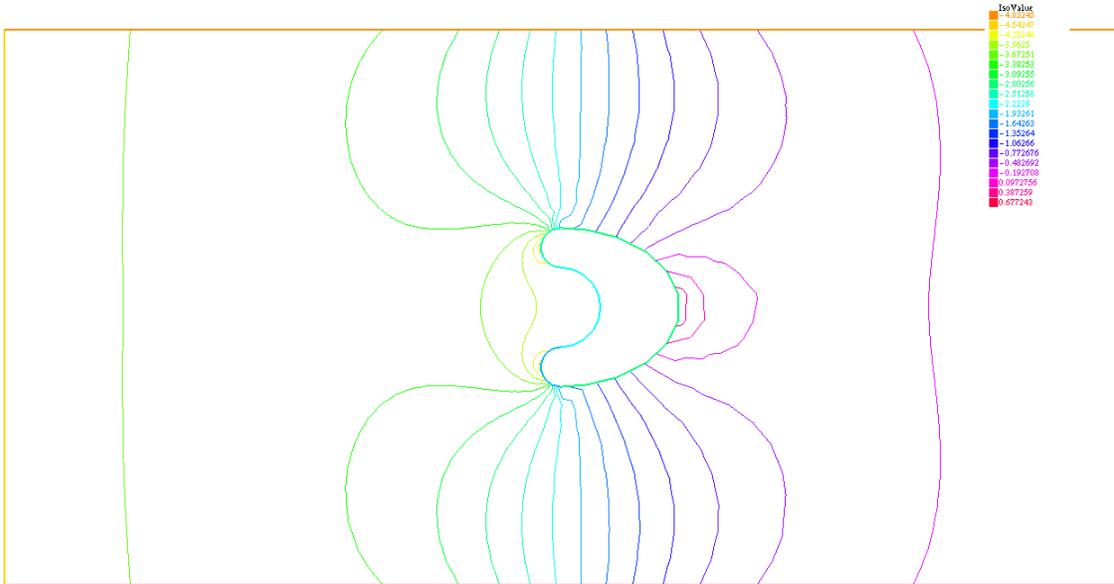
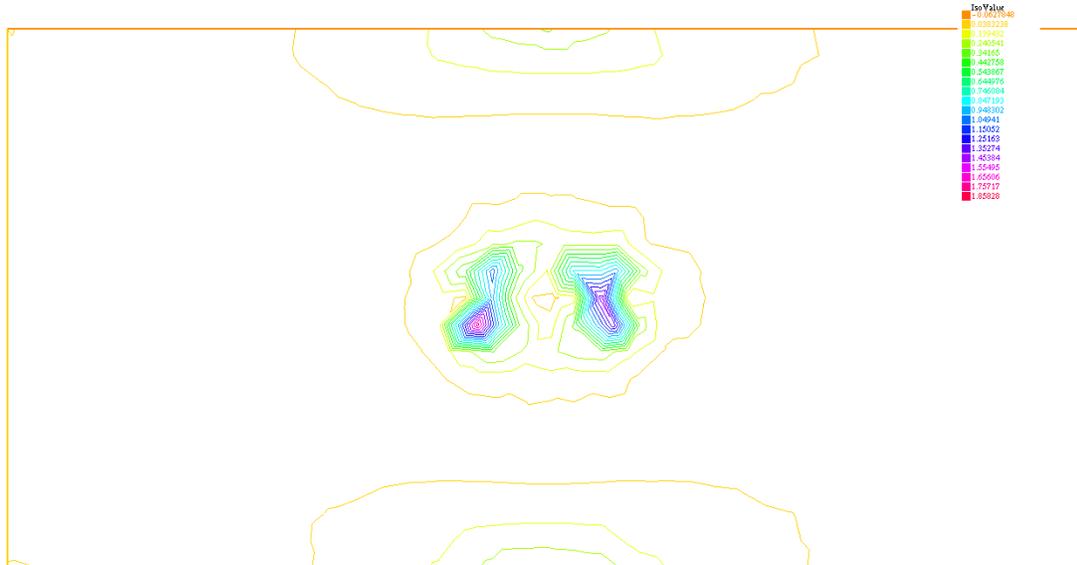
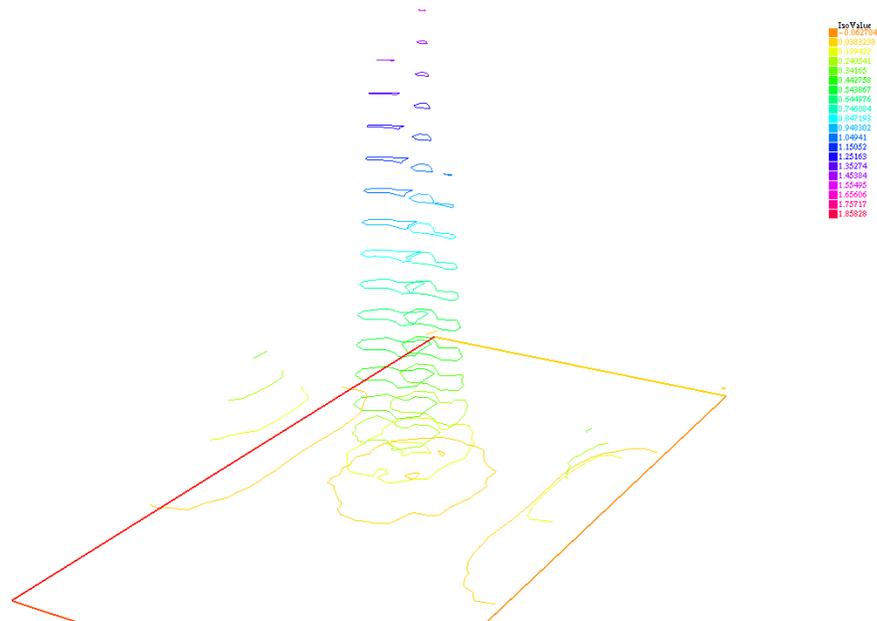


Figura 6.4: Presión del fluido con un obstáculo, obtenido con Stokes.

En la figura 6.5 se muestra la magnitud de la velocidad con la que se debe mover la función de level set ϕ en esa iteración, en 2 y 3 dimensiones. En esta parte se debe notar que en principio, la velocidad obtenida para realizar la evolución de ϕ , esta definida sólo en la frontera del cuerpo que se tiene en la iteración correspondiente, que es la velocidad obtenida mediante la expansión de primer orden del funcional de costo J . Luego, para poder realizar la evolución de la función de level set ϕ se ha realizado la extensión del campo de velocidades a todo el dominio, es decir, a la malla sin agujero.



(a) Magnitud de la velocidad con la que se debe mover ϕ , en 2 dimensiones.

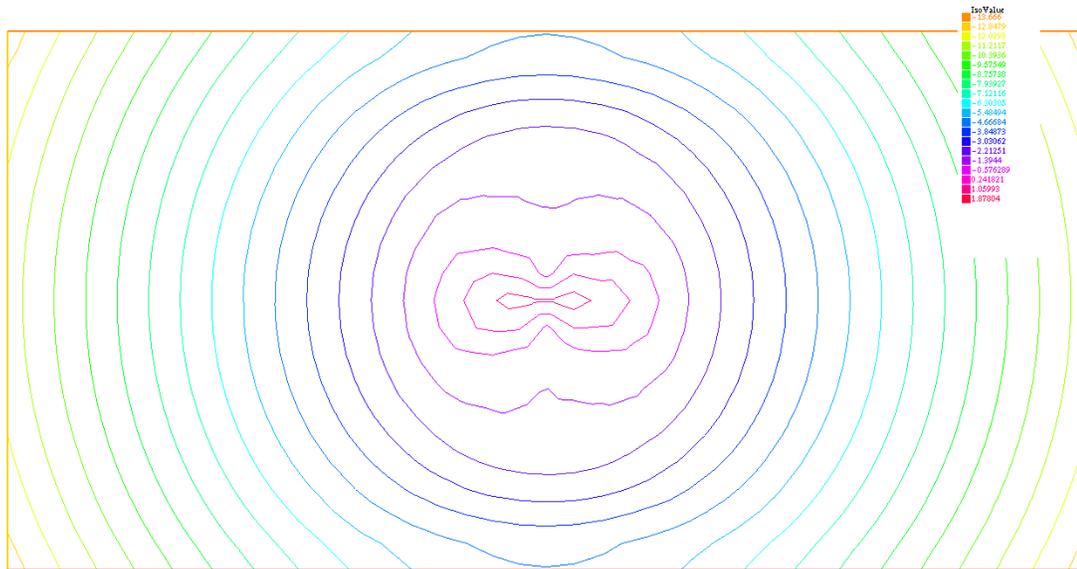


(b) Magnitud de la velocidad con la que se debe mover ϕ , en 3 dimensiones.

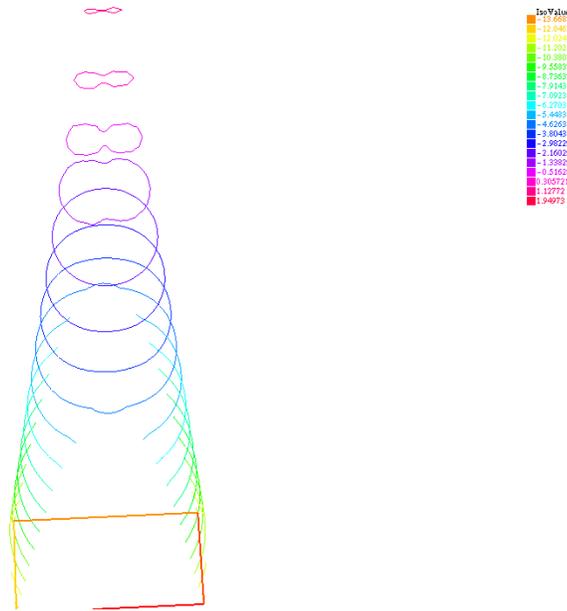
Figura 6.5: Magnitud de la velocidad con la que se debe mover la función de level set ϕ , en 2 y 3 dimensiones.

En la figura 6.6 se muestra la función de level set ϕ en esa iteración, en 2 y 3 dimensiones. Aquí se puede notar, de mejor manera en la imagen en 3 dimensiones (aunque también se aprecia bien con las curvas de nivel en la imagen en 2 dimensiones), que la función de level set ϕ es una función de distancia signada, pero en principio esta es sólo una función de distancia signada al inicio del proceso, por lo que para que siga siéndolo después de cada iteración, ha sido necesario introducir una ecuación de reinicialización con el fin de que ϕ se mantenga

como una función de distancia signada y así el método level set siga siendo válido.



(a) Función ϕ , en 2 dimensiones.



(b) Función ϕ , en 3 dimensiones.

Figura 6.6: Función de level set ϕ , en 2 y 3 dimensiones.

6.2. Recuperación de un obstáculo con forma circular

A continuación se muestran los resultados numéricos obtenidos al usar el método level set para encontrar un obstáculo con forma circular.

En la figura 6.7 se muestra el funcional de costo asociado al problema de recuperación de un obstáculo con forma circular, mientras que en la figura 6.8 se muestra este mismo funcional de costo, pero en escala logarítmica.

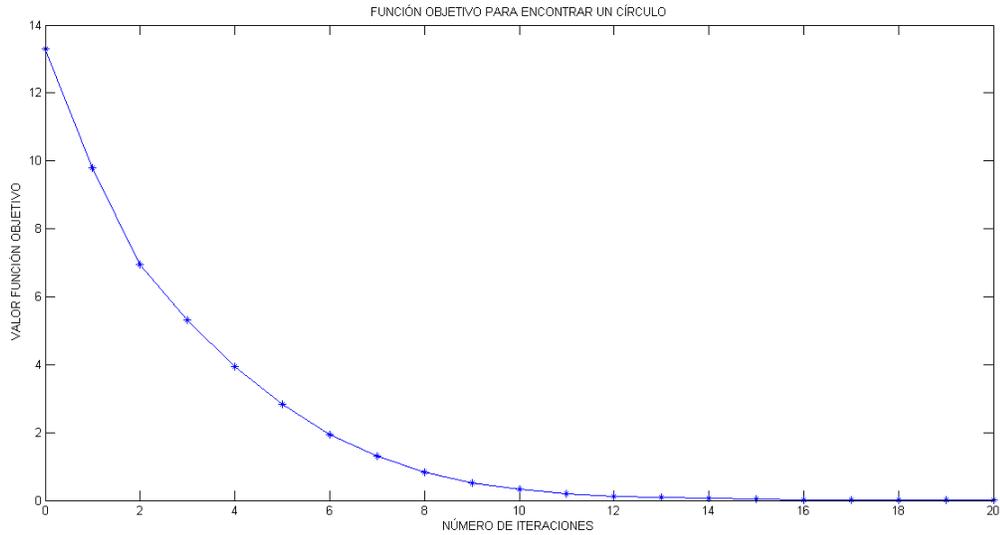


Figura 6.7: Funcional de costo para el obstáculo con forma circular.

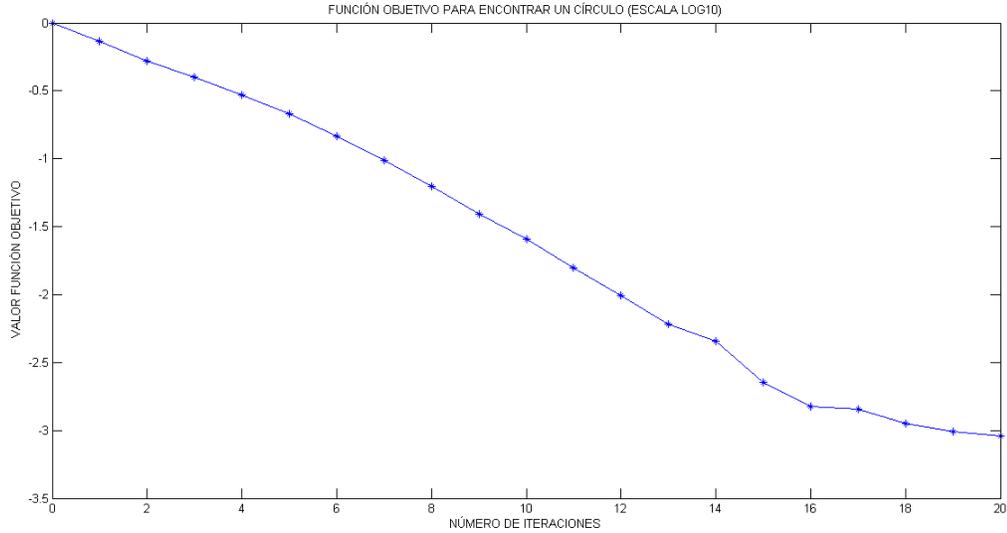
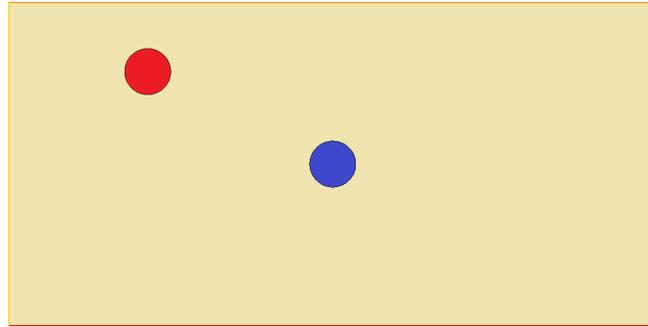
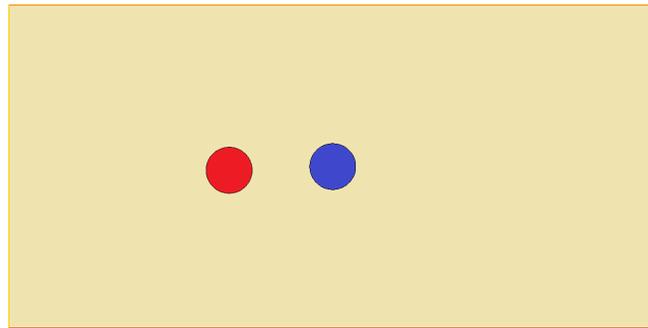


Figura 6.8: Funcional de costo para el obstáculo con forma circular (en escala logarítmica).

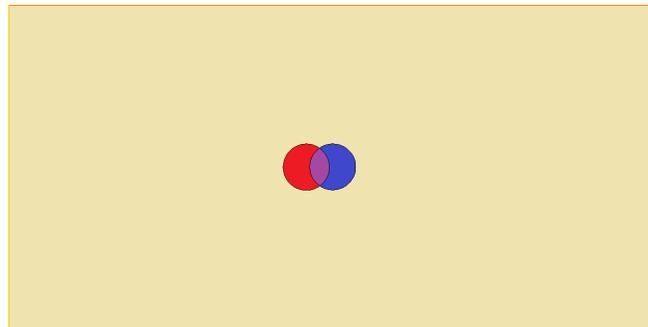
Además, en la figura 6.9 se muestra la evolución del nivel cero de ϕ , desde su configuración inicial hasta que esta encuentra el círculo.



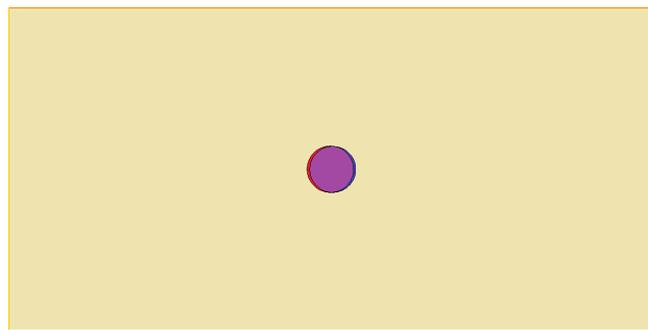
(a) Configuración inicial



(b) Iteración 4



(c) Iteración 10



(d) Iteración 17.

Figura 6.9: Evolución del nivel cero de ϕ para el caso del círculo.

6.3. Recuperación de un obstáculo no convexo

A continuación se muestran los resultados numéricos obtenidos al usar el método level set para encontrar un obstáculo no convexo.

En la figura 6.10 se muestra el funcional de costo asociado al problema de recuperación de un obstáculo no convexo, mientras que en la figura 6.11 se muestra este mismo funcional de costo, pero en escala logarítmica.

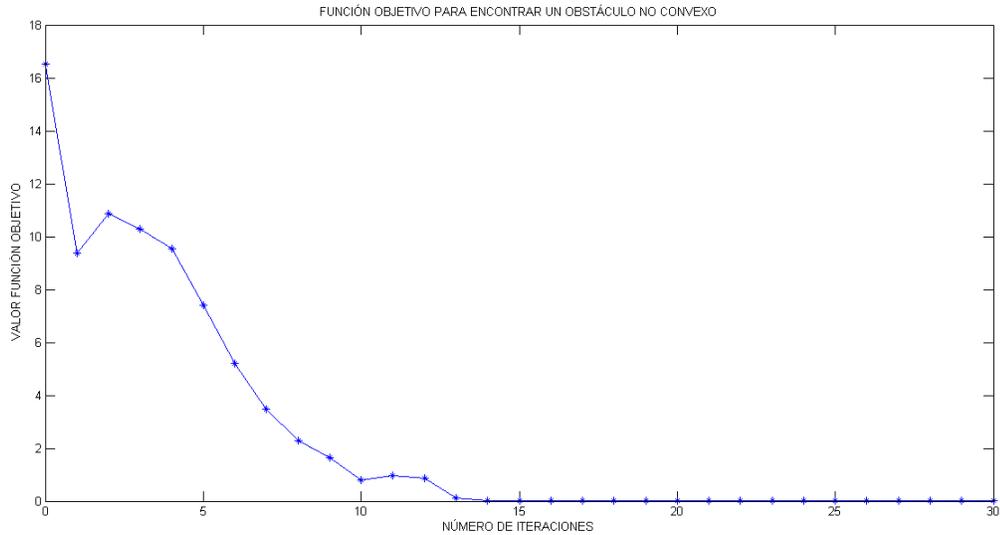


Figura 6.10: Funcional de costo para el obstáculo no convexo.

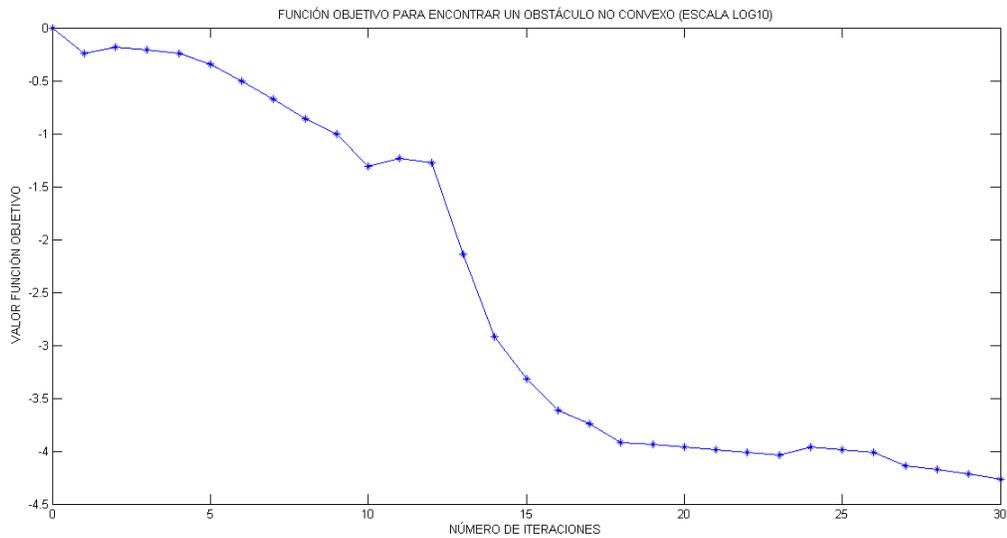
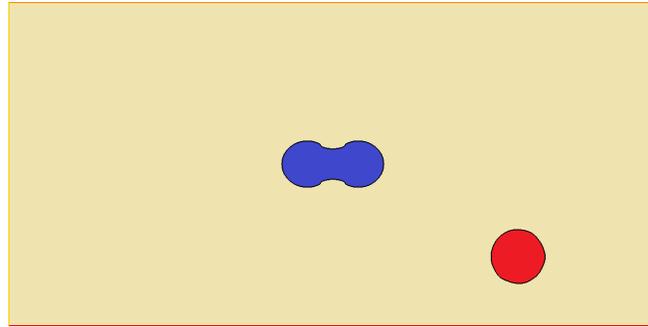


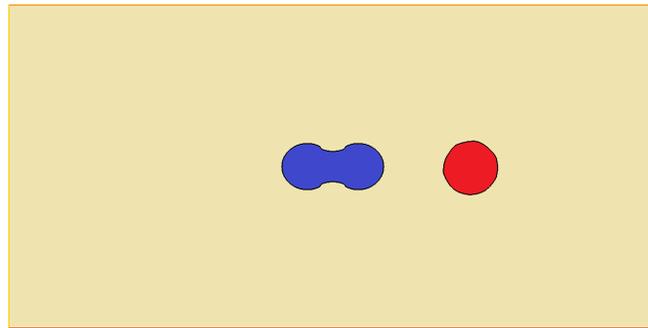
Figura 6.11: Funcional de costo para el obstáculo no convexo (en escala logarítmica).

Además, en la figura 6.12 se muestra la evolución del nivel cero de ϕ , desde su configuración inicial hasta que esta encuentra el obstáculo no convexo.

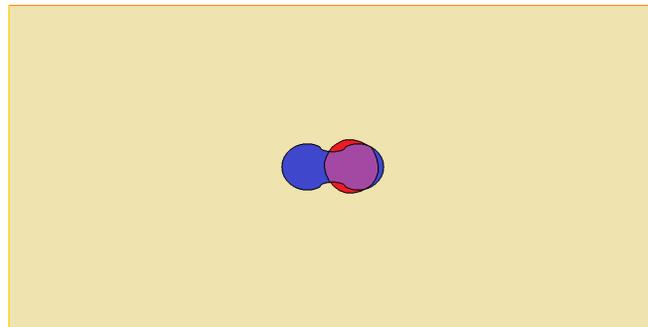
En este caso, las imágenes ilustran la evolución del nivel cero de ϕ , la cual está dividida en dos partes. Se observa que primero se realiza la traslación de la función ϕ , sin deformarla, con lo cual el nivel cero de ϕ , que corresponde a un círculo, se traslada hasta encontrar la posición del obstáculo objetivo (su centro de masas). Posteriormente, la función ϕ es deformada, consiguiendo así que su nivel cero adopte poco a poco la forma del obstáculo objetivo que se desea encontrar.



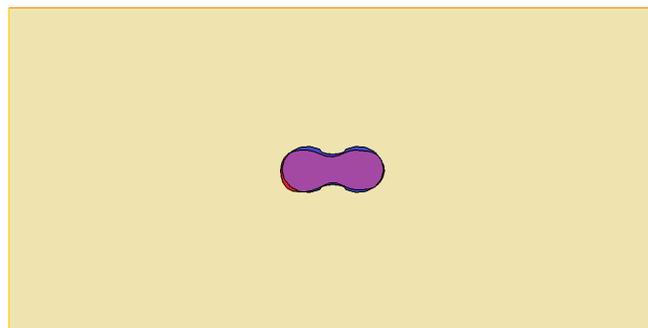
(a) Configuración inicial.



(b) Iteración 5.



(c) Iteración 10.



(d) Iteración 18.

Figura 6.12: Evolución del nivel cero de ϕ para el caso del obstáculo no convexo.

6.4. Recuperación de un obstáculo con forma de media luna

A continuación se muestran los resultados numéricos obtenidos al usar el método level set para encontrar un obstáculo con forma de media luna, que también es no convexo.

En la figura 6.13 se muestra el funcional de costo asociado al problema de recuperación de un obstáculo con forma de media luna, mientras que en la figura 6.14 se muestra este mismo funcional de costo, pero en escala logarítmica.

Además, la figura 6.14 ilustra una de las estrategias utilizadas en la implementación numérica, que es el hecho de que se ha probado que muchas veces el permitirle al funcional objetivo aumentar su valor en ciertas iteraciones, produce un descenso del funcional más pronunciado en iteraciones posteriores, que es justamente la estrategia usada para el caso de la recuperación del obstáculo con forma de media luna.

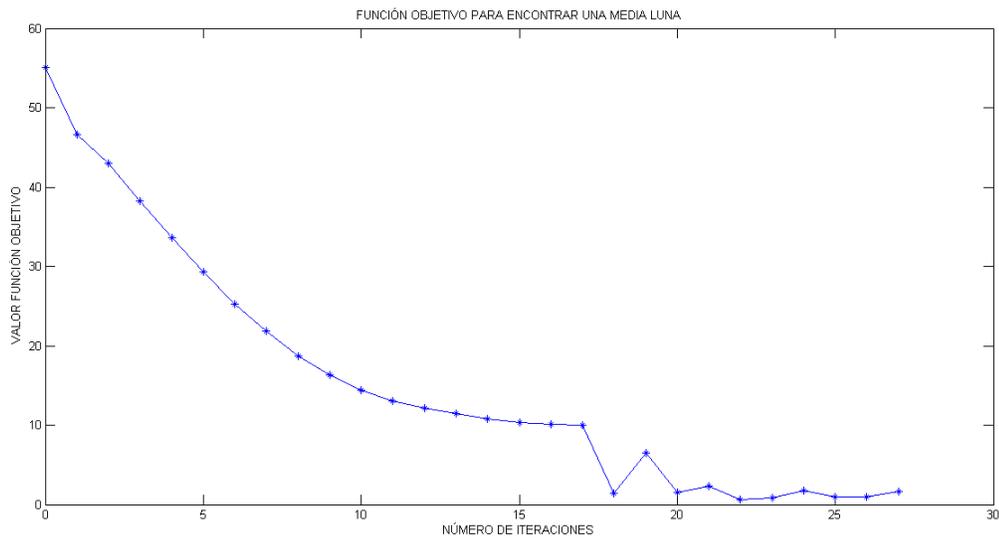


Figura 6.13: Funcional de costo para el obstáculo con forma de media luna.

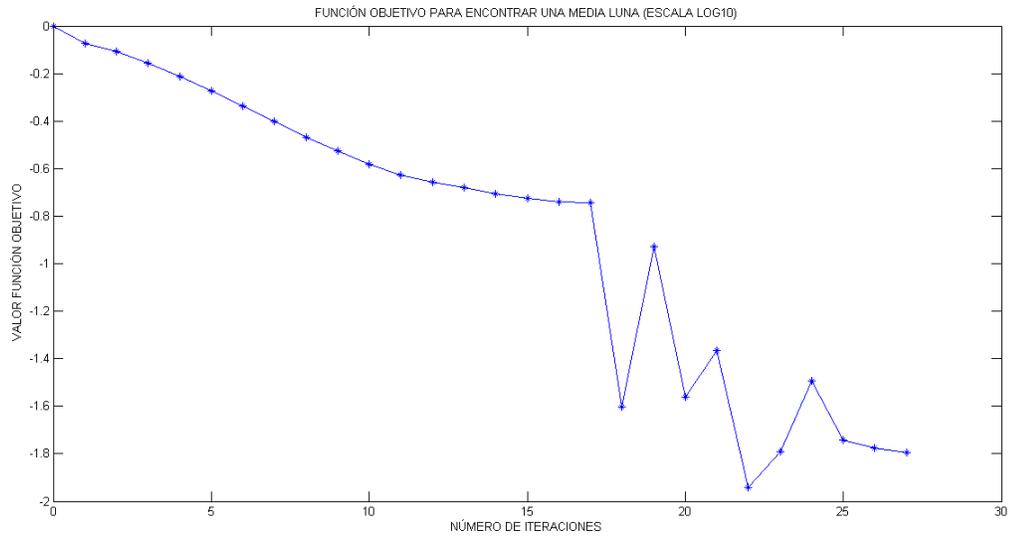
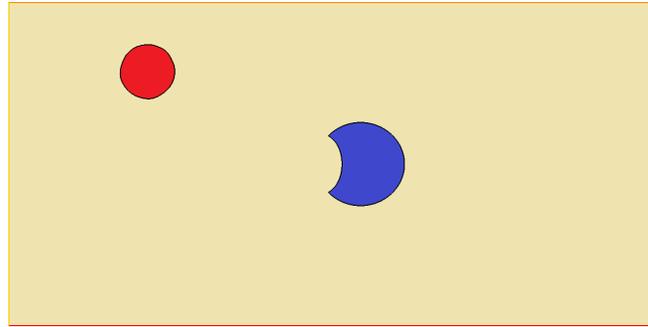
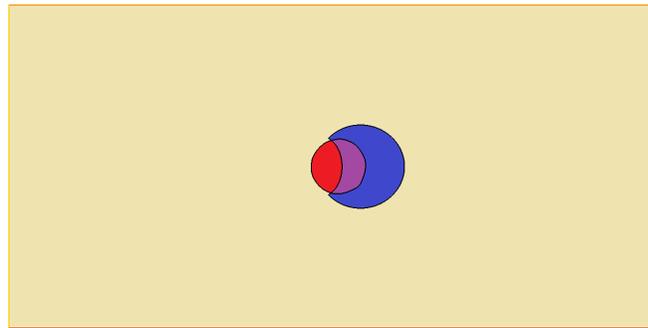


Figura 6.14: Funcional de costo para el obstáculo con forma de media luna (en escala logarítmica).

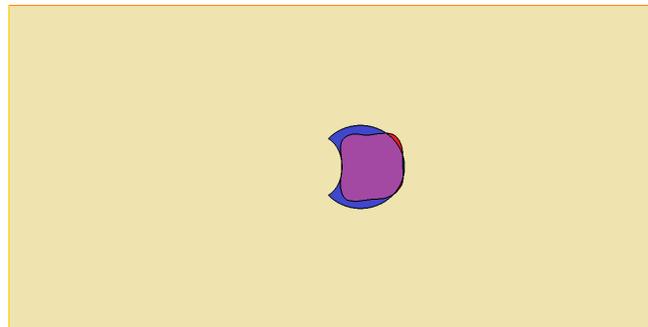
Además, en la figura 6.15 se muestra la evolución del nivel cero de ϕ , desde su configuración inicial hasta que esta encuentra la media luna.



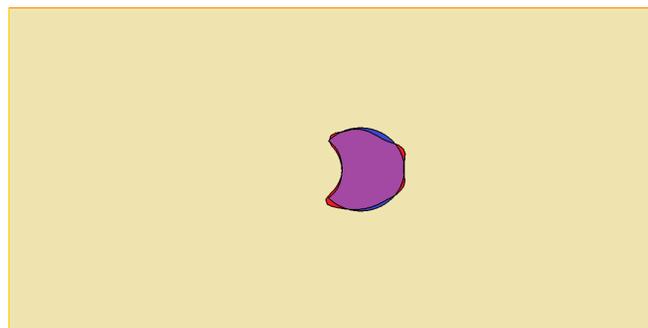
(a) Configuración inicial.



(b) Iteración 12.



(c) Iteración 19.



(d) Iteración 27.

Figura 6.15: Evolución del nivel cero de ϕ para el caso de la media luna.

Por último, mencionar que en la primera etapa del método level set, en la que sólo se realiza un movimiento de traslación de la función ϕ para encontrar la posición del obstáculo objetivo, el desplazamiento era mucho mas grande en la dirección y , es decir, la función ϕ encontraba rápidamente la posición en el eje y del obstáculo objetivo, y luego se encargaba de encontrar la posición en el eje x , lo cual resultaba ser mas lento. De todas formas, para los casos recién presentados, el método level set encontró el obstáculo objetivo en no más de 30 iteraciones.

Conclusiones

A lo largo de esta memoria se ha estudiado el problema inverso geométrico de detección de obstáculos inmersos en un fluido viscoso, y su reconstrucción numérica mediante el método level set. Para empezar, se ha definido de manera formal el problema inverso geométrico en estudio, revisando los resultados de identificabilidad y estabilidad de dicho problema. Luego, dado que la física del fluido que aparece en este problema está gobernada por el sistema de Stokes, se ha presentado el método de elementos finitos y se ha abordado la resolución del problema de Stokes usando dicho método. A continuación se ha estudiado el método de diferenciación con respecto al dominio, el cual permite definir el concepto de derivabilidad local de una función definida en un conjunto variable, obteniendo de esta forma el desarrollo de primer orden del funcional de costo asociado al problema inverso. Posteriormente se ha estudiado el método level set, haciendo énfasis en su aplicación a la optimización de formas, con lo cual se ha establecido además la estrategia a ser utilizada, con el fin de perturbar el obstáculo inicial, deformándolo hasta alcanzar el obstáculo objetivo que se desea encontrar. Finalmente, se ha presentado el proceso de reconstrucción numérica de obstáculos, el cual ha sido implementado mediante el método level set, con el objetivo de recuperar diferentes cuerpos inmersos en un fluido viscoso. Se ha llevado a cabo con éxito la recuperación de un obstáculo con forma circular, otro no convexo (una especie de “ocho”) y otro con forma de media luna, que por cierto también es no convexo. Para esto, el proceso de reconstrucción numérica ha sido dividido en dos partes, en donde la primera parte consiste en trasladar el obstáculo inicial hasta encontrar la posición del obstáculo objetivo (su centro de masas), mientras que la segunda parte corresponde a la deformación del cuerpo hasta alcanzar la forma del obstáculo que se desea encontrar.

Por otra parte, los resultados obtenidos mediante la implementación numérica realizada con el método level set, permiten concluir que efectivamente es posible reconstruir obstáculos con forma geométrica mas general que circunferencias y elipses, en donde sólo se recuperaban los parámetros que definían a estos cuerpos. Específicamente, se ha mostrado que es posible recuperar obstáculos con geometría no convexa, siendo el método level set la herramienta fundamental para llevar esto a cabo.

Bibliografía

- [1] J. SIMON, *Differentiation with respect to the domain in boundary value problems*, Laboratoire d'Analyse Numerique, Université Paris VI-Tour 55-65.
- [2] S. OSHER, R. FEDKIW, *Level set methods and dynamic implicit surfaces*, Springer, 2003.
- [3] J. A. SETHIAN, *Level set methods and fast marching methods*, Cambridge University Press, 1999.
- [4] C. ALVAREZ, C. CONCA, R. LECAROS, J. ORTEGA, *On the identification of a rigid body immersed in a fluid: A numerical approach*, 2008.
- [5] F. HECHT, *Freefem++ Manual*, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris, Third Edition, Version 3.25.
- [6] G. ALLAIRE, *Numerical analysis and optimization*, Oxford Science Publications, 2007.
- [7] C. ALVAREZ, C. CONCA, L. FRIZ, O. KAVIAN, J. ORTEGA, *Identification of immersed obstacles via boundary measurements*, IOPscience, 2005.
- [8] M. BURGUER, *A framework for the construction of level set methods for shape optimization and reconstruction*, Industrial Mathematics Institute, Johannes Kepler Universität Linz Altenbergerstr. 69, 4040 Linz, Austria, 2003.
- [9] M. BURGUER, *Levenberg-Marquardt Level Set Methods for Inverse Obstacle Problems*, 2000.
- [10] G. ALLAIRE, F. JOUVE, A. TOADER, *Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method*, Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques Appliquées, 2003.
- [11] A. KIRSCH, *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*, Springer, Second edition, 2011.
- [12] A. BALLERINI, *Stable determination of an immersed body in a stationary Stokes fluid*, 2010.
- [13] M. BURGUER, N. MATEVOSYAN, M. WOLFRAM, *A level set based optimization method for an elliptic obstacle problem*, 2009.

- [14] K. ITO, K. KUNISCH, Z. LI, *Level-set function approach to an inverse interface problem*, 2001.
- [15] J. SYLVESTER, G. UHLMANN, *A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem*, *Ann. of math.* 125, 1987.
- [16] J. HASLINGER, R. MÄKINEN, *Introduction to shape optimization*, *Advances in Design and Control*, 2003.
- [17] G. ALESSANDRINI, A. MORASSI, E. ROSSET, *Detecting cavities by electrostatic boundary measurements*, *Inverse Problems* 18, 2002.
- [18] O. IMANUVILOV, M. YAMAMOTO, *Global uniqueness in inverse boundary value problems for Navier-Stokes equations and Lamé system in two dimensions*, [math.AP], 2013.
- [19] E. ROUY, A. TOURIN, *A Viscosity Solutions Approach to Shape-From-Shading*, *SIAM J. Num. Anal.* 29, 1992.
- [20] A. I. NACHMAN, *Reconstructions from boundary measurements*, *Ann. of math. (2)* 128:3, 1988.
- [21] G. ALESSANDRINI, *Stable determination of conductivity by boundary measurements*, *Appl. Anal.* 27, 1988.
- [22] E. KENIG, J. SJÖSTRAND, G. UHLMANN, *The Calderón problem with partial data*, *Ann. of math.* 165, 2007.
- [23] R. LAI, G. UHLMANN, J. WANG, *Inverse boundary value problem for the Stokes and The Navier-Stokes equations in the plane*, *ArXiv: 1402.2615v1*, 2014.