

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS QUIMICAS Y FARMACEUTICAS
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LOS ALIMENTOS Y TECNOLOGIA QUIMICA

S E R I E

MONOGRAFIAS SOBRE INGENIERIA EN ALIMENTOS, PUBLICACION N° 9

"TRANSMISION DE CALOR EN PROCESOS DE INGENIERIA EN ALIMENTOS"

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS QUIMICAS
Y FARMACEUTICAS
BIBLIOTECA

13649

PROF. EDUARDO S. CASTRO M.

1988

A Tere, que las esperanzas que tiene
se cumplan para que alcance su desa-
rrollo integral.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a la Sra. Irma Pennacchiotti M. por las palabras de aliento y las correcciones efectuadas al manuscrito.

A mi estimado colega, Ingeniero en Alimentos, Sr. Misael Miranda M. por revisar texto, tablas y gráficos.

Debo agradecer además, a la Sra. Nadira Kifafi O. por la paciencia y esfuerzo en confeccionar el original.

PROLOGO

Este libro es la continuación de las clases de Tratamiento de Alimentos por Bajas Temperaturas, dictadas a Ingenieros en Alimentos.

Si el estudiante o el profesional interesado en comprender las bases teóricas, puede en una primera etapa empezar por "Cálculos de tiempo de congelación y descongelación de alimentos" de Osorio, F. y otros y seguir con el tratamiento teórico de los fenómenos de transmisión de calor para formas geométricas definidas y geometría indefinida.

Creo que este libro será de apoyo y de interés para los profesionales dedicados a los tratamientos de alimentos por calor y en especial los por bajas temperaturas.

INDICE DE MATERIAS

	INTRODUCCION	I
	TRANSMISION DE CALOR	1
1.0	ECUACION GENERAL	3
1.1	Flujo de calor a régimen estacionario y sin generación de calor	4
1.1.1	Pared plana a régimen estacionario	4
1.1.2	Cilindro simple	6
1.1.3	Cilindro con generación interna en su eje	8
2.0	CONDUCCION DE CALOR MULTIDIMENSIONAL A REGIMEN ESTACIONARIO	10
2.1	Placa delgada	10
2.2	Cilindro de longitud finita a régimen estacionario	13
3.0	METODOS NUMERICOS EN TRANSMISION DE CALOR	20
3.1	Método de la Relajación	20
3.2	Métodos numéricos en conducción a régimen estacionario unidimensional	24
3.3	Método numérico en conducción a régimen estacionario tridimensional	32
3.4	Método numérico en conducción a régimen estacionario bidimensional para cuerpos irregulares	45
4.0	* CONDUCCION TRANSIENTE UNIDIMENSIONAL	47
4.1	Resistencia interna despreciable	47
4.2	Resistencia externa despreciable	50
4.2.1	Placa infinita	50
4.2.2	Cilindro infinito	53
4.3	Resistencias interna y externa finitas	57
4.3.1	Placa infinita	57
4.3.2	Cilindro infinito	61
4.3.3	Esfera	63
4.3.4	Sólido semi-infinito	71

5.0	CONDUCCION TRANSIENTE MULTIDIMENSIONAL	79
5.1	Gráficos Temperatura - Tiempo	85
5.2	Esfera con generación de calor	92
5.3	Paralelepípedo recto con generación de calor	95
5.4	Enfriamiento sin generación de calor	97
5.5	Enfriamiento con generación de calor	102
5.6	Cilindro finito	108
6.0	MÉTODOS NUMERICOS Y GRAFICOS EN CONDUCCION TRANSIENTE	110
6.1	Método numérico	110
6.2	Método gráfico	119
6.2.1	Pared simple	119
6.2.2	Paredes compuestas	124
6.2.3	Cilindros macizos o con hueco interior	128
7.0	APLICACION A ALIMENTOS	133
7.1	Tratamiento por bajas temperaturas	133
7.1.1	Refrigeración de hortofrutícolas	146
7.1.2	Congelación	157
7.1.3	Generalidades sobre tiempos de congelación y descongelación	161
7.1.4	Curvas de enfriamiento de alimentos	163
7.2	Tiempo de congelación de alimentos	176
7.2.1	Experiencia de transferencia de calor	177
7.2.2	Fórmulas teóricas	177
7.2.3	Fórmulas semi-teóricas	178
7.2.4	Modelos para predecir el tiempo de congelación	178
	- Modelo de Plank	178
	- Modelo de Nagaoka	182
	- Modelo de Levy o Modificación de Levy	183
	- Modelo de I.I.R. o Modificación del I.I.R.	183
	- Modelo de Mellor o Modificación de Mellor	183
	- Método de Cowell	184
	- Procedimiento de Mott	184
	- Fórmulas de Tanaka y Nishimoto	185
	- Modificaciones de Cleland y Earle	188

	- Modificación de Ramaswamy y Tung	192
	- Soluciones de Luikov	193
	- Aproximación de Bakal y Hayakawa	193
	- Modelo nuevo de Plank	194
	- Modificaciones de Mascheroni, Calvello y De Michelis	195
	- Modificación de Hung y Thompson (1983)	196
	- Solución de Newmann	196
	- Gráficos de Tao	198
	- Solución de Tien y colaboradores	202
	- Métodos numéricos	205
8.0	DISCUSION	207
9.0	BIBLIOGRAFIA	209
10.0	ANEXO	228

INDICE DE FIGURAS

FIGURA N° 1	Distribución de temperatura adimensional en una placa semi-infinita sometida a un cambio brusco de temperatura ambiente	77
FIGURA N° 2	Gráfico de Heisler - Temperatura central de una pared infinita	86
FIGURA N° 3	Corrección de posición	86
FIGURA N° 4	Gráfico de Heisler - Temperatura central de un cilindro infinito	87
FIGURA N° 5	Corrección de posición	87
FIGURA N° 6	Gráfico de Heisler - Temperatura central de una esfera	88
FIGURA N° 7	Corrección de posición	88
FIGURA N° 8	Temperaturas central y superficial en cilindro y placa infinita	89
FIGURA N° 9	Gráfico de Dalglish y Ede para la temperatura central de placa	97
FIGURA N° 10	Gráfico de Meffert para la temperatura en un cuerpo semi-infinito	98
FIGURA N° 11	Temperatura adimensional de superficie de una placa	99
FIGURA N° 12	Relación entre F_0 y Bi para placa	101
FIGURA N° 13	Factor de forma para la superficie, centro y media de una placa	101
FIGURA N° 14	Valores del número característico B_1	104
FIGURA N° 15	Factor de forma en función de las dimensiones	105
FIGURA N° 16	Influencia del número de Biot en el factor de forma en el centro geométrico del cuerpo	134

FIGURA N° 17	Relación entre el factor de tiempo y el número de Biot para transmisión de calor transiente	135
FIGURA N° 18	Dimensiones consideradas en el desarrollo del índice geométrico para un elipsoide	138
FIGURA N° 19	Nomograma para calcular la distribución de la temperatura en cuerpos con formas anómalas	139
FIGURA N° 20	Distribución de temperatura transiente para la temperatura del centro de masa con parámetro del índice geométrico para los casos de resistencia despreciable en la superficie	140
FIGURA N° 21	Gráfico para determinar la temperatura en el centro de un objeto con $G = 0,30$	141
FIGURA N° 22	Gráfico para determinar la temperatura en el centro de un objeto con $G = 0,50$	142
FIGURA N° 23	Gráfico para determinar la temperatura en el centro de un objeto con $G = 0,70$	143
FIGURA N° 24	Gráfico para determinar la temperatura en el centro de un objeto con $G = 0,90$	144
FIGURA N° 25	Generación de calor de algunos productos hortícolas	151
FIGURA N° 26	Nomograma para la generación de calor y pérdida de masa	152
FIGURA N° 27	Curvas típicas de congelación para agua y solución	164
FIGURA N° 28	Curvas de congelación de arroz graneado y carne mechada	165
FIGURA N° 29	Congelación de arroz graneado	166
FIGURA N° 30	Congelación de carne mechada	167
FIGURA N° 31	Congelación de arroz en cámara a -40°C expuesto a distinto caudal de aire frío	168

FIGURA N° 32	Curva de enfriamiento para apios de la variedad Gigante de Pascal c/s hilo y piel	169
FIGURA N° 33	Curva de enfriamiento para arvejas de la variedad Perfection	170
FIGURA N° 34	Curva de enfriamiento para Salad Dressings congelados en freezer (Bouknecht GK 29)	172
FIGURA N° 35	Curva de congelación, leudación mixta	173
FIGURA N° 36	Curva de congelación, leudación química	174
FIGURA N° 37	Congelación de queques (amarillo y chocolate), leudación mixta	175
FIGURA N° 38	Gráfico para calcular P y R para paralelepípedo	181
FIGURA N° 39	Valores de G para una varilla rectangular infinita	185
FIGURA N° 40	Valores de G para paralelepípedo d x dB1 x dB2	185
FIGURA N° 41	Gráfico de Tao para estimar tiempos de conge- lación y descongelación para placa infinita	199
FIGURA N° 42	Gráfico de Tao para estimar tiempos de congelación y descongelación para cilindro infinito	200
FIGURA N° 43	Gráfico de Tao para estimar tiempo de congelación y descongelación para esfera	201

INDICE DE TABLAS

TABLA N° 1	Primeras 6 raíces de la ecuación $\text{Cot } \mu = \mu / \text{Bi}$	59
TABLA N° 2	Primeras 6 raíces de la ecuación $\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = \frac{\mu}{\text{Bi}}$	62
TABLA N° 3	Primeras 6 raíces de la ecuación $\tan \mu = -\mu (\text{Bi} - 1)$	64
TABLA N° 4	Valores de la función erf (u)	74
TABLA N° 5	Coefficientes de transpiración y de difusión a granel	148
TABLA N° 6	Densidad y porosidad para algunos productos hortícolas	150
TABLA N° 7	Permeabilidad y factor de resistencia a la difusión de material de envase	154
TABLA N° 8	Coefficiente de transferencia de masa en función del área de perforaciones y del espesor del material de envase	155
TABLA N° 9	Métodos de expresión de velocidades de congelación	159

INTRODUCCION

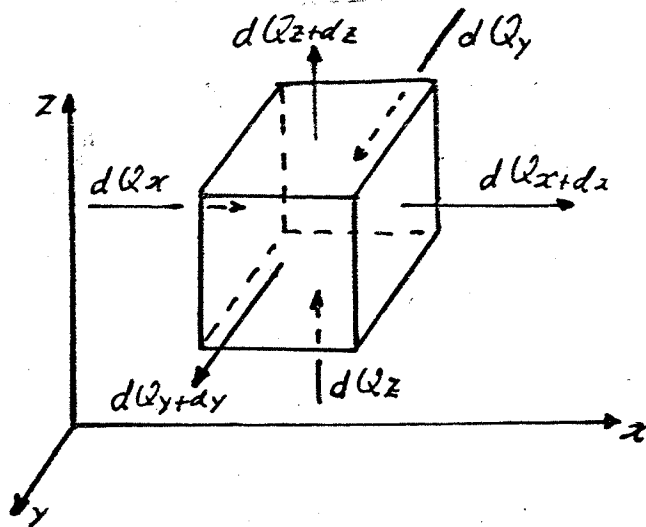
La transmisión de calor es un fenómeno de transferencia, que cada vez tiene mayor importancia en la Ingeniería, debido al alza que tuvo el costo de la energía en la última década.

En Ingeniería de Alimentos, la comprensión de los mecanismos de transmisión de calor juega un papel vital, tanto en los procesos de transformación como en los de mantención de alimentos, ya que éstos presentan formas geométricas anómalas; ésto se transforma en un gran desafío para el Ingeniero para poder elegir el modelo teórico y establecer las condiciones de borde adecuadas.

Para tener los conceptos claros de los fenómenos involucrados, se parte con el estudio teórico de transmisión de calor y se termina con la aplicación en alimentos, especialmente en el tratamiento por bajas temperaturas.

TRANSMISION DE CALOR

Se va a analizar el flujo de calor en un elemento de volumen $dx dy dz$, que tiene una densidad ρ y calor específico c . El cuerpo está sometido a un gradiente térmico, la conductividad térmica del material es función de la temperatura y está generando calor " q ".



Se va a analizar el fenómeno de balance de energía, según el eje x , eje y , y eje z .

Según el eje x : La energía térmica que llega a la cara $dydz$ en el tiempo $d\theta$ es:

$$dQ_x = -dydz \left(Kt \frac{\partial t_x}{\partial x} \right) d\theta$$

y la que sale, se puede evaluar desarrollando en serie de Taylor.

$$dQ_x + dx = -dydz \left[Kt \frac{\partial t_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(Kt \frac{\partial t}{\partial x} \right) dx \right] d\theta$$

Para los ejes y y z se pueden plantear relaciones análogas.

El cuerpo está generando calor:

$$q'' \, dV \, d\theta$$

y el cambio de energía interna en el elemento dV durante $d\theta$ es dU

$$dU = c \rho \, dV \, \frac{\partial t}{\partial \theta} \, d\theta$$

El balance general de energía es:

$$dQ_x + dQ_y + dQ_z + q'' \, dV \, d\theta = (dQ_x + dx) + (dQ_y + dy) + (dQ_z + dz) + dU$$

reemplazando, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial t}{\partial z} \right) + q'' = c \rho \frac{\partial t}{\partial \theta}$$

Si se considera la conductividad media:

$$K \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right) + K \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right) + K \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial t}{\partial z} \right) + q'' = c \rho \frac{\partial t}{\partial \theta}$$

1.0 ECUACION GENERAL

La ecuación general para la transmisión de calor, considerando generación de calor es:

$$K \nabla^2 t + q = c \rho \frac{\partial t}{\partial \theta}$$

$$K \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] t + q'' = c \rho \frac{\partial t}{\partial \theta}$$

en que:

K : Conductividad térmica

C : Calor específico

t : Temperatura

θ : Tiempo

ρ : Densidad

q'' : Calor generado en el sistema

dividiendo por K :

$$\nabla^2 t + \frac{q''}{K} = \frac{c \rho}{K} \frac{\partial t}{\partial \theta}$$

si se denomina α a la difusividad térmica: $\alpha = \frac{c \rho}{K}$

queda :

$$\nabla^2 t + \frac{q''}{K} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial t}{\partial \theta}$$

Si la generación interna de calor es nula, la ecuación resultante es la de Fourier :

$$\nabla^2 t = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial t}{\partial \theta}$$

Si el proceso es estacionario, se tiene la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 t + \frac{q''}{K} = 0$$

Si se está produciendo un flujo de calor a régimen estacionario y sin generación de calor, se tiene la ecuación de Laplace:

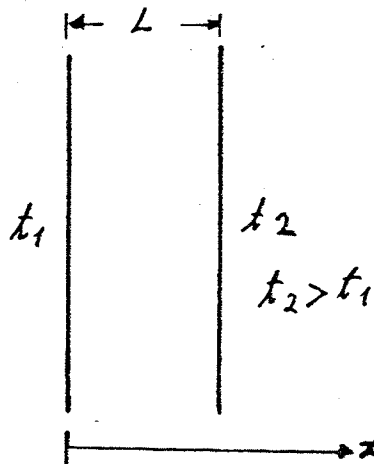
$$\nabla^2 t = 0$$

El estudio se centrará en este tipo de fenómeno para pasar posteriormente al estudio del estado transiente.

1.1 FLUJO DE CALOR A REGIMEN ESTACIONARIO Y SIN GENERACION DE CALOR.

A. Condición de calor unidimensional

1.1.1. Pared plana a régimen estacionario:



La ecuación general es:

$$\nabla^2 t = 0$$

Pared plana:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0 \dots\dots\dots (1i)$$

con las siguientes condiciones de borde:

Condición de borde 1 :

$$\text{para } x = 0 \qquad t = t_1$$

Condición de borde 2 :

$$\text{para } x = L \qquad t = t_2$$

Integrando la ecuación (1i) queda:

$$\frac{d t}{d x} = A$$

volviendo a integrar:

$$t = Ax + B$$

Para evaluar las constantes hay que aplicar las condiciones de borde.

Aplicando la C.B.1 (condición de borde 1) :

$$t_1 = B$$

y con la C.B.2., queda:

$$t_2 = AL + B$$

dos ecuaciones para las dos incógnitas, reemplazando B en la segunda:

$$t_2 = AL + t_1$$

$$A = \frac{t_2 - t_1}{L}$$

L

Luego, la solución es:

$$t = t_1 + \left(\frac{t_2 - t_1}{L} \right) x$$

ésta es la distribución de temperatura en función de x .

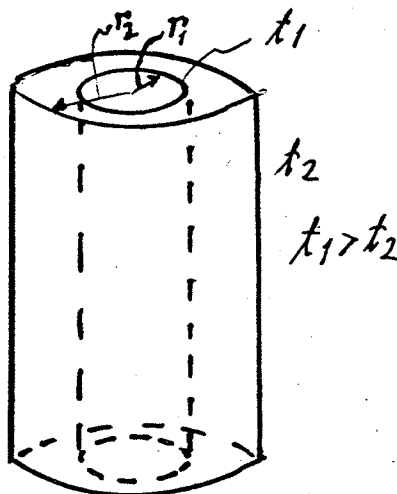
Para evaluar el calor transferido es necesario aplicar:

$$q = -K \frac{dt}{dx} \quad y$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{t_2 - t_1}{L}$$

$$\text{Luego, } q = \frac{+K}{L} (t_1 - t_2)$$

1.1.2. CILINDRO SIMPLE



En coordenadas cilíndricas la ecuación de Laplace es:

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} = 0$$

Con las condiciones de borde siguientes:

Condición de borde 1 :

$$r = r_1 \quad t = t_1$$

Condición de borde 2 :

$$r = r_2 \quad t = t_2$$

Este tipo de ecuación diferencial es más sencilla de resolver, si se hace el reemplazo siguiente:

$$p = \frac{dt}{dr} \quad \text{y} \quad \frac{dp}{dr} = \frac{d^2t}{dr^2}$$

reemplazando queda:

$$\frac{dp}{dr} + \frac{p}{r} = 0$$

separando variables

$$\frac{dp}{p} + \frac{dr}{r} = 0$$

integrando:

$$Lp + Lr = LC_1$$

$$Lpr = LC_1$$

$$p = \frac{C_1}{r}$$

a su vez :

$$p = \frac{dt}{dr} = \frac{C_1}{r} \quad dt = -C_1 \frac{dr}{r}$$

que al integrar

$$t = C_1 Lr + C_2 \dots\dots (i)$$

para calcular las constantes se aplicarán las condiciones de borde.

Aplicando C.B.1

$$t_1 = C_1 Lr_1 + C_2$$

Aplicando C.B.2

$$t_2 = C_1 Lr_2 + C_2$$

resolviendo, queda:

$$C_1 = \frac{t_2 - t_1}{L \frac{r_2}{r_1}}, \text{ y } C_2 = \frac{t_1 L r_2 - t_2 L r_1}{L \frac{r_2}{r_1}}$$

reemplazando en i) y ordenando:

$$t = \frac{1}{L \frac{r_2}{r_1}} \left[(t_2 - t_1) L r + t_1 L r_2 - t_2 L r_1 \right] \quad (\text{ii})$$

tambi3n se puede expresar como:

$$\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} = \frac{L (r/r_1)}{L (r_2/r_1)} \quad (\text{iii})$$

El calor transferido es:

$$Q = -2 \tilde{\tilde{K}} r \frac{dt}{dr}$$

$\frac{dt}{dr}$ se calcula de ii) o iii)

y da
$$Q = \frac{2 \tilde{\tilde{K}} (t_1 - t_2)}{L (r_2/r_1)}$$

1.1.3. CILINDRO CON GENERACION INTERNA EN SU EJE

La ecuaci3n diferencial del campo de temperatura es:

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} + \frac{q''}{K} = 0 \quad (\text{i})$$

con las condiciones de borde siguientes:

Condici3n de borde 1:

para $r = 0$ $\frac{dt}{dr} = 0$

Condición de borde 2:

para $r = 0$ $t = t \text{ máx.}$

Se sabe que:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dt}{dr} \right) = \frac{dt}{dr} + r \frac{d^2t}{dr^2}$$

reemplazando en (3i)

$$q''r = -K \frac{d}{dr} \left(r \frac{dt}{dr} \right)$$

Integrando:

$$q'' \frac{r^2}{2} = -K r \frac{dt}{dr} + C_1$$

si se aplica C.B.1 da $C_1 = 0$

$$y \frac{-q''}{K} \frac{r}{2} = \frac{dt}{dr}$$

separando variables e integrando:

$$t = \frac{-q'' r^2}{4K} + C_2$$

se aplica C.B.2 :

$$C_2 = t \text{ máx}$$

Luego,

$$t = t \text{ máx} - \frac{q'' r^2}{4K}$$

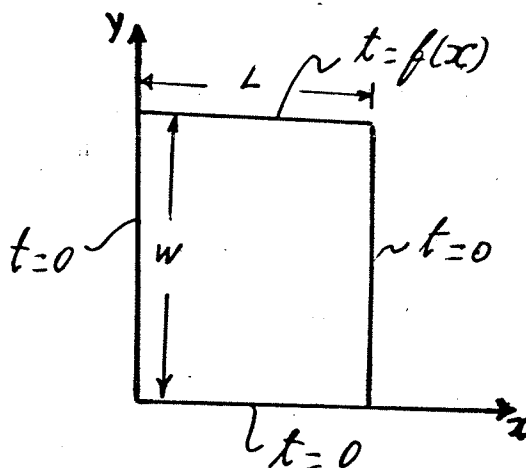
La distribución de temperatura en el cilindro es parabólica.

2.0 CONDUCCION DE CALOR MULTIDIMENSIONAL A REGIMEN ESTACIONARIO

2.1. Placa plana delgada

Se analizará el caso de una placa plana delgada de medidas L , w y con sus tres bordes con $t = 0$, para entender esto, elijo por ejemplo una $T = t_1 - t_1$ y en el cuarto borde tiene una temperatura que es función de x .

El sistema de coordenadas se elige tal como está en la figura:



La ecuación diferencial del campo de temperatura es:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0 \quad (2.1.1)$$

Para resolverla, se postula que:

$$t = X(x) Y(y) \quad (2.1.2)$$

reemplazando en la ecuación (2.1.1)

$$Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0$$

separando variables:

$$\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = - \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \quad (2.1.3)$$

Esto da origen a dos ecuaciones:

$$\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial Y^2} = \lambda^2 \quad (2.1.4) \quad \text{y} \quad \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial X^2} = -\lambda^2 \quad (2.1.5)$$

en que λ es un parámetro por determinar.

La ecuación (2.1.5) da:

$$X = A e^{i\lambda x} + B e^{-i\lambda x}$$

Del cálculo se sabe que:

$$e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$$

luego:

$$X = A_1 \sin \lambda x + B_1 \cos \lambda x \quad (2.1.6)$$

La ecuación (2.1.4) da:

$$Y = C e^{\lambda Y} + D e^{-\lambda Y}$$

y el cálculo permite que:

$$Y = C_1 \sinh \lambda y + D_1 \cosh \lambda y \quad (2.1.7)$$

Reemplazando en (2.1.2)

$$t = (A_1 \sin \lambda x + B_1 \cos \lambda x) (C_1 \sinh \lambda y + D_1 \cosh \lambda y) \quad (2.1.8)$$

que tiene las siguientes condiciones de borde:

Condición de borde 1

$$x = 0 \quad y = y \quad t = 0$$

Condición de borde 2

$$x = L \quad y = y \quad t = 0$$

Condición de borde 3

$$x = x \quad y = 0 \quad t = 0$$

Condición de borde 4

$$x = x \quad y = w \quad t = f(x)$$

Aplicando C.B.3 a ec. (2.1.8)

$$0 = (A_1 \operatorname{sen} \lambda x + B_1 \operatorname{cos} \lambda x) D_1$$

$$D_1 = 0$$

Aplicando C.B.1 a ec. (2.1.8)

$$0 = B_1 (C_1 \operatorname{senh} \lambda y + D_1 \operatorname{cosh} \lambda y)$$

$$B_1 = 0$$

Aplicando C.B.2 a ec. (2.1.8)

$$0 = E \operatorname{sen} \lambda L \operatorname{senh} \lambda y$$

se cumple cuando $\operatorname{sen} \lambda L = 0$ y $\lambda = \frac{n \tilde{\pi}}{L}$

Esto significa que la solución general es:

$$t = \sum_1^{\infty} E_n \operatorname{sen} \lambda_n x \operatorname{senh} \lambda_n y \quad (2.1.9)$$

para conocer E_n se aplica la C.B.4

$$f(x) = \sum_1^{\infty} E_n \operatorname{senh} \lambda_n W \operatorname{sen} \lambda_n x$$

y la teoría de las funciones hiperbólicas da:

$$E_n \operatorname{senh} \lambda_n W = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \lambda_n x dx$$

y reemplazando en (2.1.9)

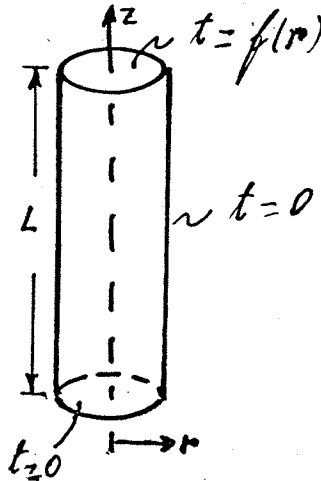
$$t = \frac{2}{L} \sum_1^{\infty} \frac{\operatorname{senh} \frac{n \tilde{\pi} y}{L}}{\operatorname{senh} \frac{n \tilde{\pi} W}{L}} \operatorname{sen} \frac{n \tilde{\pi} x}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n \tilde{\pi} x}{L} dx$$

Si la cara $y = w$ está a temperatura constante, $f(x) = t_0$, queda lo siguiente:

$$\frac{t}{t_0} = \frac{4}{\tilde{\pi}} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\operatorname{senh} \frac{n \tilde{\pi} y}{L}}{\operatorname{senh} \frac{n \tilde{\pi} W}{L}} \operatorname{sen} \frac{n \tilde{\pi} x}{L}$$

con $n = 1, 3, 5, 7, \dots$

2.2 Cilindro de longitud finita a régimen estacionario



Se supone que la base y el manto están a $t = 0$, la cara superior tiene $t = f(r)$.

La ecuación diferencial del campo de temperatura en coordenadas cilíndricas es:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0 \quad (2.2.1)$$

Para resolverla, se postula que:

$$t = R(r) Z(z) \quad (2.2.2)$$

reemplazando en ec. (2.2.1)

$$Z \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{Z}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + R \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0$$

separando variables:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{Rr} \frac{\partial R}{\partial r} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \quad (2.2.3)$$

Da origen a dos ecuaciones:

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{Rr} \frac{dR}{dr} = -\lambda^2 \quad (2.2.4)$$

$$y \frac{1}{z} \frac{dz}{dz} = \lambda^2 \quad (2.2.5.)$$

en que λ es un parámetro por determinar

La ecuación (2.2.4) da:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + \lambda^2 R r^2 = 0 \quad (2.2.6)$$

Este tipo de ecuación es del tipo:

$$r^2 \frac{d^2 t}{dr^2} + [(1-2a)r - 2br^2] \frac{dt}{dr} + [c^2 d^2 r^{2c} + b^2 r^2 - b(1-2a)r + a^2 - c^2 n^2] t = 0$$

que es una ecuación de Bessel y su solución es:

$$t = r^a e^{br} [C_1 J_n(dr^c) + C_2 Y_n(dr^c)]$$

Hay que determinar a , b , c , d y n

$$1 - 2a = 1$$

$$b = 0$$

$$c = 1$$

$$d = \lambda$$

$$n = 0$$

Luego la solución de (2.2.6) es:

$$R = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r) \quad (2.2.7)$$

En que $J_0(u)$ y $J_1(u)$ son funciones de Bessel de primera clase e $Y_0(u)$, $Y_1(u)$ son de segunda clase.

La ecuación (2.2.5) tiene la solución siguiente:

$$Z = A \sinh \lambda z + B \cosh \lambda z \quad (2.2.8)$$

reemplazando (2.2.7) y (2.2.8) en (2.2.2):

$$t = [C_1 J_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r)] [A \sinh \lambda z + B \cosh \lambda z]$$

con las condiciones de borde siguientes:

Condición de borde 1:

$$Z = 0 \qquad r = r \qquad t = 0$$

Condición de borde 2:

$$Z < L \qquad r = r_0 \qquad t = 0$$

Condición de borde 3:

$$Z = L \qquad r = r \qquad t = f(r)$$

Condición de borde 4:

$$Z = Z \qquad r = 0 \qquad t \text{ es finita}$$

Aplicando C.B.4:

$$Y_0(0) = -\infty \qquad C_2 = 0$$

Aplicando C.B.1:

$$0 = [C_1 J_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r)] B$$

luego $B = 0$

La solución t es: $t = D J_0(\lambda r) \sinh \lambda Z$

Aplicando C.B.2:

$$0 = D J_0(\lambda r_0) \sinh \lambda Z$$

La única posibilidad es que

$$J_0(\lambda r_0) = 0$$

porque si $D = 0$ conduciría a soluciones triviales.

Las raíces M_n de la ecuación:

$$J_0(\lambda r_0) = 0$$

están tabuladas. También está indicando que hay una solución particular para cada raíz y la solución general sería la sumatoria de todas las soluciones particulares.

La solución general es:

$$t = \sum_1^{\infty} D_n J_0 \left(M_n \frac{r}{r_0} \right) \sinh \left(M_n \frac{z}{r_0} \right) \quad (2.9)$$

falta por determinar D_n , lo que se logra aplicando C.B.3

$$f(r) = \sum_1^{\infty} \left(D_n \sinh M_n \frac{L}{r_0} \right) J_0 \left(M_n \frac{r}{r_0} \right)$$

La teoría de las funciones de Bessel establece la propiedad de ortogonalidad de ellos, lo que permite plantear:

$$D_n \sinh M_n \frac{L}{r_0} = \frac{\int_0^{r_0} r f(r) J_0 \left(M_n \frac{r}{r_0} \right) dr}{\frac{r_0^2}{2} J_1^2(M_n r_0)}$$

reemplazando en (2.2.9) y ordenando, queda:

$$t = \frac{2}{r_0^2} \sum_1^{\infty} \frac{\left(\frac{\sinh M_n \frac{z}{r_0}}{\sinh \left(M_n \frac{L}{r_0} \right)} \right) J_0 \left(M_n \frac{r}{r_0} \right)}{J_1^2(M_n r_0)} \int_0^{r_0} r f(r) J_0 \left(M_n \frac{r}{r_0} \right) dr$$

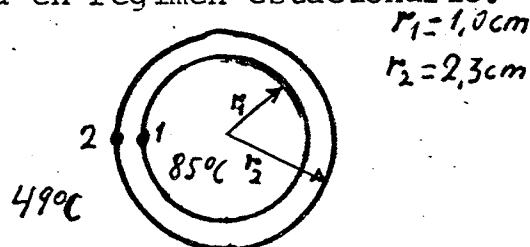
PROBLEMA:

Determinar la corriente máxima que pasa por un alambre de cobre N°12 ($D = 2,0 \text{ mm}$) aislado con 1,3 mm de goma ($K = 0,15 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m.}^\circ\text{C}}$)

El coeficiente de convección exterior es $h = 15 \text{ Kcal/h.m}^2\text{C}$ y la conductividad del Cobre $K_1 = 400 \text{ Kcal/h.m.}^\circ\text{C}$. La temperatura máxima del alambre no debe exceder 85°C , cuando la temperatura exterior sea 49°C (Wisniak)

Solución:

El modelo sería el siguiente: cilindro compuesto con generación de calor interna en régimen estacionario.



El calor generado por el alambre debe disiparse hacia el exterior con convección, la ecuación es:

$$(i) \quad 2 \tilde{h} r_2 (t_2 - 49) = \frac{2 \tilde{K}_2 (t_1 - t_2)}{2,3 \log \frac{r_2}{r_1}} = q'' \tilde{r}_1^2 \frac{\text{Kcal}}{\text{m.h.}}$$

Para un cilindro con generación interna de calor:

$$(ii) \quad t_1 = t_{\text{máx.}} - \frac{q''}{4K} r_1^2$$

Con las ecuaciones de i) se conoce q'' , Pero. la teoría eléctrica da:

$$(iii) \quad q'' (\tilde{r}_1^2) = R i^2 \cdot J = \rho \frac{L}{r_1^2} i^2 \cdot J$$

en que J es factor de conversión (1watt=860 cal) y ρ es la resistividad específica del cobre ($1,72 \cdot 10^8$ Ohm m^2/m)

Con la ecuación iii) se conoce la corriente i.

Considerando las dos primeras ecuaciones de i)

$$\frac{2,3}{1000} (15) (t_2 - 49) = \frac{0,15 (t_1 - t_2)}{2,3 \log 2,3}$$

$$t_2 = 0,84t_1 + 7,9 \quad (iii)$$

Para conocer t_2 , se combina la primera y la última ecuación de i)

$$(2) \quad \frac{2,3}{1000} (15) (t_2 - 49) = q'' 10^{-6}$$

$$t_2 = 49 + (1,42) (10^{-5}) q'' \quad (iv)$$

combinando (iii) e (iv):

$$0,84 t_1 + 7,9 = 49 + (1,42) (10^{-5}) q'' \quad (v)$$

De ii)

$$t_1 = 85 - \frac{q''}{1600} \quad (10^{-6})$$

introduciendo este valor en (v):

$$49 + (1,42) (10^{-5}) q'' = 0,84 \left(85 - \frac{q''}{1600} \cdot 10^{-6} \right)$$

ordenando queda:

$$q'' = (2,1) (10^6) \text{ Kcal/h.m}^3$$

reemplazando en iii) y considerando 1 unidad de longitud:

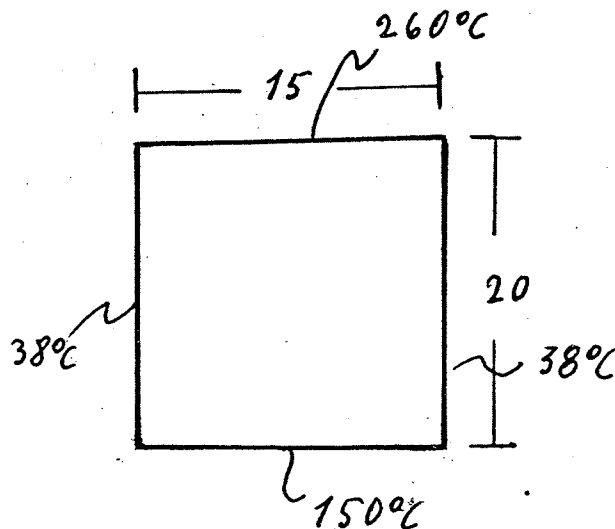
$$(1) (2,6) (10^6) (\tilde{r}_1^2)^2 = 1,72 (10^{-8}) (0,860) i^2$$

$$i = 37,5 \text{ Amp.}$$

PROBLEMA:

Una placa rectangular de 15 x 20 cm, tiene los dos lados más largos a 38°C, el borde inferior a 150°C y el borde superior a 260°C. Calcular la temperatura en el centro (Wisniak).

Solución:



Para utilizar el principio de superposición se resta 38°C de todas las temperaturas, con lo que el problema se hace equivalente a una placa con dos lados a 0°C y los otros a 112°C y 222°C .

Esta nueva situación es equivalente a la superposición de dos placas, una con tres bordes a 0°C y el cuarto a 112°C y la otra placa tiene tres bordes a 0°C y el cuarto a 222°C .

Para la primera placa la temperatura central es:

$$\frac{t}{112} = \frac{4}{\tilde{H}} \frac{\sinh \frac{10}{15}}{\sinh \frac{20}{15} \tilde{H}} \operatorname{sen} \frac{\tilde{H}}{2} + \frac{\sinh \frac{30}{15} \tilde{H}}{3 \sinh \frac{60}{15} \tilde{H}} \operatorname{sen} \frac{3\tilde{H}}{2} + \dots$$

$$\frac{t}{112} = \frac{4}{\tilde{H}} (0,121 - 0,0006)$$

$$t = 17,2^{\circ}\text{C}$$

Para la segunda placa:

$$\frac{t}{222} = \frac{4}{\tilde{H}} (0,121 - 0,0006)$$

$$t = 34^{\circ}\text{C}$$

La temperatura en el centro de la placa original será:

$$t = 17,2 + 34 + 38$$

$$t = 89,2^{\circ}\text{C}$$

3.0 MÉTODOS NUMÉRICOS EN TRANSMISIÓN DE CALOR

Las ecuaciones diferenciales que representan el campo de temperatura son difíciles de resolver; pero se pueden aplicar métodos numéricos que permiten llegar a sus soluciones.

Un método que se aplica a este tipo de problemas es:

3.1 Método de la Relajación

Este método fue utilizado por primera vez en el caso de estructuras por Sir Richard Southwell en 1935 y se puede aplicar a la resolución de sistemas de ecuaciones o a ecuaciones diferenciales (Kreith, 1963).

Para entender sus conceptos, se partirá aplicándolo al sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{array}{l|l} -4x + y + 56 = 0 & \dots \quad i \\ \hline x - 2y + 34 = 0 & \end{array}$$

Se escriben las ecuaciones de la forma siguiente, en que F_1 y F_2 son los residuos de ellas.

$$F_1 = -4x + y + 56$$

$$F_2 = x - 2y + 34$$

El objetivo del procedimiento numérico es reducir en forma sistemática los valores de los residuos a cero o muy cercanos a cero.

Aquellos valores de x e y que hacen cero los residuos, serían las soluciones de las ecuaciones involucradas.

El primer paso del método es seleccionar valores iniciales para x e y . Se recomienda para ecuaciones algebraicas, que

no representan problemas físicos elegir $x = 0$; $y = 0$.

En este caso

para

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad F_1 = -4.0 + 0 + 56 = 56 \\ y = 0 & \quad F_2 = 0 - 2.0 + 34 = 34 \end{aligned}$$

El segundo paso es construir una tabla de operaciones que muestre el efecto del incremento de una unidad positiva de las variables en los residuos.

Tabla de Operación

	ΔF_1	ΔF_2
$x = 1$	-4	1
$y = 1$	1	-2

El fin de cada paso de la relajación es reducir el valor del residuo mayor a cero.

Para ello se empieza con $x = 0$; $y = 0$ línea 1 del cuadro siguiente.

		F_1	F_2	Línea
$x = 0$	$y = 0$	56	34	1
$\Delta x = 14$		0	48	2
	$\Delta y = 24$	24	0	3
$\Delta x = 6$		0	6	4
	$\Delta y = 3$	3	0	5
$\Delta x = 1$		-1	1	6
$0+14+6+1 = 21$	$0+24+3 = 27$	-1	1	7

$\Delta x = -0,3$		0,2	0,7	8
	$\Delta y = 0,4$	0,6	-0,1	9
$\Delta x = 0,1$		0,2	0	10

$$21 - 0,3 + 0,1 = 20,8 \quad 27 + 0,4 = 27,4 \quad 0,2 \quad 0 \quad 11$$

En la línea 2 el valor $\Delta x = 14$ logra $F_1 = 0$ y $F_2 = 48$.

En la línea 3 con $\Delta y = 24$ se logra $F_2 = 0$ y $F_1 = 24$.

En la línea 4 con $\Delta x = 6$ se logra $F_1 = 0$ y $F_2 = 6$.

En la línea 5 con $\Delta y = 3$ se logra $F_2 = 0$ y $F_1 = 3$.

En la línea 6 con $\Delta x = 1$ se logra $F_1 = -1$ y $F_2 = 1$.

En la línea 7 se suman los cambios de Δx y los Δy que dan respectivamente 21 y 27 y sus residuos $F_1 = -1$ y $F_2 = 1$.

En la línea 8 con $\Delta x = -0,3$ da $F_1 = 0,2$ y $F_2 = 0,7$.

En la línea 9 con $\Delta y = 0,4$ da $F_1 = 0,6$ y $F_2 = -0,1$.

En la línea 10 con $\Delta x = 0,1$ da $F_1 = 0,2$ y $F_2 = 0$.

En la línea 11 se suman los cambios Δx y Δy que dan respectivamente 20,8 y 27,4 con residuos $F_1 = 0,2$ y $F_2 = 0$.

Las soluciones del sistema de ecuaciones son $x = 20,8$; $y = 27,4$

Método abreviado de solución:

Para resolver el sistema

$$F_1 = -4x + y + 56$$

$$F_2 = x - 2y + 34$$

se va a utilizar un método abreviado.

Se recomienda partir dando los valores $x = 0$ e $y = 0$; si representan problemas físicos partir con sus restricciones.

El método se basa que en vez de reducir cada residuo a cero es deseable producir cambios de los residuos desde valores positivos a negativos y viceversa.

Se introduce una operación de bloque, que consiste en cambiar cada variable en las mismas cantidades. Esto se logra con un bloque unitario cuyos efectos se obtienen sumando los cambios, debido a los incrementos unitarios individuales en la tabla de operación.

1^o) Etapa Unitaria

	ΔF_1	ΔF_2	Línea
$\Delta x = 1$	-4	1	1
$\Delta y = 1$	1	-2	2
$\Delta x=1; \Delta y=1$	$-4 + 1 = -3$	$1-2 = -1$	3

En la línea 1 con $\Delta x = 1$, da $\Delta F_1 = -4$ y $\Delta F_2 = 1$

En la línea 2 con $\Delta y = 1$, da $\Delta F_1 = 1$ y $\Delta F_2 = -2$

En la línea 3 se suman los cambios.

La suma de los residuos con $x = 0$ e $y = 0$ da:
 $56 + 34 = 90$ y el efecto total del bloque unitario es:

$$-3 - 1 = -4$$

Con esto se puede empezar el cuadro siguiente:

línea 1 con $x = 0$ e $y = 0$ da $\Delta F_1 = 56$ y $\Delta F_2 = 34$

Línea 2 con $\Delta x = \Delta y = \frac{90}{4} \approx 22$ da $\Delta F_1 = -10$ y $\Delta F_2 = 12$

	ΔF_1	ΔF_2	Línea
$x = 0$ $y = 0$	56	34	1
$\Delta x = \Delta y = \frac{90}{4} = 22$	-10	12	2
$\Delta y = 6$	- 4	0	3
$\Delta x = -1$	0	- 1	4
$x = 0+22-1=21$; $y=0+22+6=28$	0	- 1	5

línea 3 con $\Delta y = 6$ da $\Delta F_1 = -4$ y $\Delta F_2 = 0$

línea 4 con $\Delta x = -1$ da $\Delta F_1 = 0$ y $\Delta F_2 = -1$

línea 5 se suman los valores Δx y Δy que dan respectivamente:

$$\Delta F_1 = 0 \text{ y } \Delta F_2 = -1 \text{ con } x = 21 \text{ e } y = 28$$

Aunque se produzcan errores en los cálculos intermedios de todas maneras converge a los resultados.

Después de esta introducción se puede empezar a estudiar su aplicación a problemas de transmisión de calor en conducción a régimen estacionario.

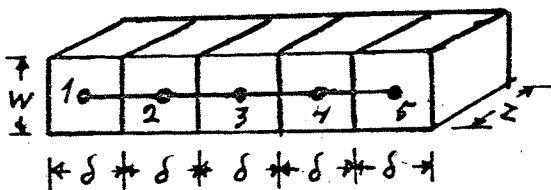
3.2 Métodos numéricos en conducción a régimen estacionario unidimensional

El método se basa en que el sistema puede subdividirse en secciones adecuadas, de modo que sólo un punto represente toda la sección. Con estos puntos discretos seleccionados se pueden calcular los valores de la temperatura que cada uno de ellos tiene.

En el fondo lo que se está realizando es reemplazar la ecuación diferencial por otra de diferencias finitas y la solución que se logre es más exacta mientras más fina es la división realizada.

Lo primero que hay que realizar es dividir el cuerpo en un número adecuado de sub-volúmenes para luego suponer que el centro de cada uno de ellos tiene la temperatura del sub-volumen.

Los sub-volúmenes se reemplazan por una red ficticia de barras conductoras que unen dos puntos nodales, de acuerdo al esquema siguiente:



División del cuerpo en sub-volúmenes

A cada barra se le asigna una conductancia térmica equivalente al material que une los dos nodos.

Al realizar el balance de calor para el nodo; (cualquiera) se tiene:

$$Q_{ij} = Q_{jk}$$

y aplicando diferencia finita:

$$Q_{ij} + Q_{jh} = Q'_j$$

Si se está en régimen estacionario:

$$Q'_j = 0$$

aplicando la ecuación de Fourier a cada nodo, se tiene:

$$Q'_j = \frac{Kwz}{\delta} (t_i - t_j) + \frac{Kwz}{\delta} (t_k - t_j)$$

$$Q'_j = \frac{Kwz}{\delta} (t_i + t_k - 2t_j)$$

$$\frac{\delta Q'_j}{Kwz} = t_i + t_k - 2t_j$$

$$\frac{\delta Q'_j}{Kwz} \text{ es el residuo del punto } j; R_j$$

luego,

$$R_j = t_i + t_k - 2t_j$$

Ecuaciones residuales análogas se pueden escribir para cada nodo y las temperaturas obtenidas harán que el residuo de cada punto valga cero.

Para aclarar las ideas explicadas se resolverá el problema siguiente:

Problema:

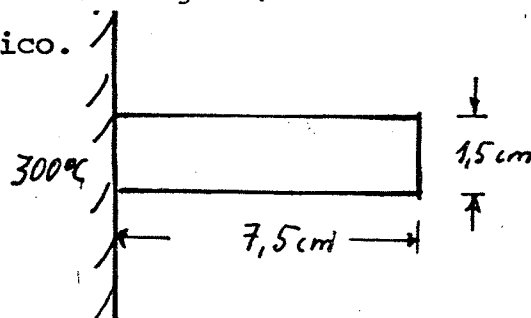
Para la aleta cilíndrica de la figura, determinar su perfil térmico por el método numérico.

$$t_g = 100^\circ\text{C}$$

$$h = 100 \text{ Kcal/h.m}^2 \cdot \text{C}$$

$$K = 15 \text{ Kcal/h.m.C}$$

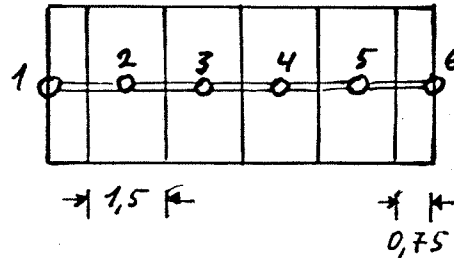
(Wisniak)



Solución:

$$\text{Sea } T = t - t_g \text{ y el área } A = \frac{\pi D^2}{4}$$

Se divide el sistema en sub-volúmenes de 1,5 cm de largo y se tiene



Para el nodo 2 se tiene:

$$q_{1-2} + q_{3-2} + q_{c-2} = 0 \quad (i)$$

Y

$$q_{1-2} = \frac{K \tilde{\mu}_D^2}{4 \Delta x} (T_1 - T_2)$$

$$q_{3-2} = \frac{K \tilde{\mu}_D^2}{4 \Delta x} (T_3 - T_2)$$

$$q_{c-2} = h \tilde{\mu}_D \Delta x T_2$$

reemplazando en (i), se tiene:

$$\frac{K \tilde{\mu}_D^2}{4 \Delta x} (T_1 - T_2) + \frac{K \tilde{\mu}_D^2}{4 \Delta x} (T_3 - T_2) - h \tilde{\mu}_D \Delta x T_2 = 0$$

$$(T_1 - T_2) + (T_3 - T_2) - \frac{h 4 (\Delta x)^2}{KD} T_2 = 0$$

en función del residuo:

$$Q'_2 = (T_1 - T_2) + (T_3 - T_2) - h 4 (\Delta x)^2 T_2$$

reemplazando:

$$Q'_2 = T_1 + T_3 - 2T_2 - \frac{100(4)(1,5)^2}{15 \frac{1,5}{100} 10.000} T_2$$

$$Q'_2 = T_1 + T_3 - 2T_2 - 0,4T_2$$

$$Q'_2 = T_1 + T_3 - 2,4T_2 \quad (\text{ii})$$

Las ecuaciones residuales de los nodos 3, 4 y 5 son análogas.

En el nodo 1 se tiene el balance siguiente:

$$q_b + q_{2-1} + q_{c-1} = 0$$

$$q_b + \frac{K \tilde{h}_D^2}{4 \Delta x} (T_2 - T_1) - h \tilde{h}_D \frac{\Delta x}{2} T_1 = 0$$

$$q_b + \frac{K \tilde{h}_D^2}{4 \Delta x} T_2 - \left(\frac{K \tilde{h}_D^2}{4 \Delta x} + h \tilde{h}_D \frac{\Delta x}{2} \right) T_1 = 0$$

$$q_b + \frac{4 \Delta x}{K \tilde{h}_D^2} T_2 - \left(1 + \frac{2h (\Delta x)^2}{KD} \right) T_1 = 0$$

en función del residuo:

$$Q'_1 = q_b \frac{4 \Delta x}{K \tilde{h}_D^2} + T_2 - \left(1 + \frac{2h (\Delta x)^2}{KD} \right) T_1 = 0$$

reemplazando:

$$Q'_1 = q_b \frac{4 (0,015)}{15 \tilde{h}_D^2 (0,015)^2} + T_2 - \left(1 + \frac{2 (100) (0,015)^2}{(15) (0,015)} \right) T_1$$

$$Q'_1 = q_b 5,66 + T_2 - (1,2) T_1$$

$$Q'_1 = 5,7 q_b + T_2 - 240 \quad (\text{iii})$$

Para el nodo 6, se tiene:

$$q_{5-6} + q_{c-6} = 0 \quad (\text{iv})$$

$$q_{5-6} = \frac{K \tilde{\alpha} D^2}{4 \Delta x} (T_5 - T_6)$$

$$q_{c-6} = -h \tilde{\alpha} D \frac{\Delta x}{2} T_6 - h \frac{\tilde{\alpha} D^2}{4} T_6$$

reemplazando en iv:

$$\frac{K \tilde{\alpha} D^2}{4 \Delta x} (T_5 - T_6) - h \tilde{\alpha} D \frac{\Delta x}{2} T_6 - h \frac{\tilde{\alpha} D^2}{4} T_6 = 0$$

$$T_5 - T_6 - \frac{2h (\Delta x)^2}{KD} T_6 - h \frac{\Delta x}{K} T_6 = 0$$

en función de residuo:

$$Q'_6 = T_5 - \left(1 + \frac{2h (\Delta x)^2}{KD} + \frac{h \Delta x}{K} \right) T_6$$

reemplazando se tiene:

$$Q'_6 = T_5 - (1 + 0,2 + 0,1) T_6$$

$$Q'_6 = T_5 - 1,3 T_6 \quad (\text{v})$$

y resumiendo, para todos los nodos se tiene:

$$Q'_1 = 5,7 q_b + T_2 - 240$$

$$Q'_2 = T_1 + T_3 - 2,4 T_2$$

$$Q'_3 = T_2 + T_4 - 2,4 T_3$$

$$Q'_4 = T_3 + T_5 - 2,4 T_4$$

$$Q'_5 = T_4 + T_6 - 2,4 T_5$$

$$Q'_6 = T_5 - 1,3 T_6$$

Etapa unitaria:

	$\Delta Q'_1$	$\Delta Q'_2$	$\Delta Q'_3$	$\Delta Q'_4$	$\Delta Q'_5$	$\Delta Q'_6$
$\Delta T_2 = 1$	1	-2,4	1	-	-	-
$\Delta T_3 = 1$	-	1	-2,4	1	-	-
$\Delta T_4 = 1$	-	-	1	-2,4	1	-
$\Delta T_5 = 1$	-	-	-	1	-2,4	1
$\Delta T_6 = 1$	-	-	-	-	1	-1,3
$\Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T_3 = \Delta T_4 = \Delta T_5 = \Delta T_6 = 1$	1	-1,4	-0,4	-0,4	-0,4	-0,3

Se empieza el cuadro siguiente:

- Se elige una distribución arbitraria de temperatura, la que se coloca en la línea 1.
- En la línea 2 están los residuos calculados con las temperaturas de la línea 1.

Debido a que la gran mayoría de los residuos es negativo; para introducir cambios se realiza la operación del bloque unitario:

$$T = \frac{-50-34-32-10-11}{-1,4-0,4-0,4-0,4-0,3} = \frac{-115}{-2,9} \approx 40$$

- En la línea 4 están los residuos producidos.
- En la línea 5 se cambia T_6 en +20 y da los residuos indicados

T_1	Q_2	T_2	Q_3	T_3	Q_4	T_4	Q_5	T_5	Q_6	T_6	Línea
200		150		110		80		50		30	1
	-50		-34		-32		-10		11		2
		-40		-40		-40		-40		-40	3
	+6		-18		-16		+6		+23		4
							+26		-3	+20	5
					-4		-2,8	+12	+9		6
	-4		+6	-10	-14						7
			0		+0,4	-6	-8,8				8
							-0,8		-1,4	+8	9
	-1,6	-1	-1								10
200	-1,6	109	-1	60	+0,4	34	-0,8	22	-1,4	18	11
	+1,2	-2	-0,2	-2	-0,4	-2	0,0	-2	-0,8	-2	12
200		107		58		32		20		16	13

En la línea 6 se produce un cambio de +12 en T_5 y se producen los residuos indicados.

En la línea 7 se produce un cambio de -10 en T_3 , ésto mueve los residuos indicados de positivo a negativo y viceversa.

En la línea 8 se produce el cambio de T_4 en -6 y cambio de signo en los residuos.

En la línea 9 se produce el cambio de T_6 en +8, cambiando de signo los residuos.

En la línea 10 se produce el cambio de T_2 en -1, cambia los residuos Q_2 y Q_3 .

En la línea 11 se suman los cambios de temperatura. Por ejemplo:

$$T_2 = 150 - 40 - 1 = 109$$

En la línea 12, se produce un cambio de -2 en todas las temperaturas, achicando bastante los residuos o cambiándolos de signo.

En la línea 13 se suman los cambios de temperatura.

Se podría seguir produciendo cambios, pero ya serían en los decimales.

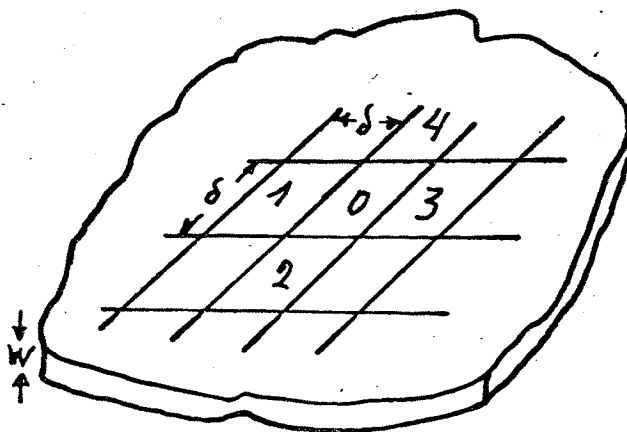
Si se quiere evaluar el calor que está recibiendo en la base de la aleta, se deberá considerar que:

De la expresión para Q'_1 , se despeja:

$$q_b = \frac{T_2 - 40}{5,7} = \frac{107 - 240}{5,7} = 23,3 \frac{\text{Kcal}}{\text{h}}$$

3.3 Método numérico en conducción a régimen estacionario tridimensional

Para un cuerpo de dos dimensiones, se construye una malla como la indicada en la figura.



El balance térmico para un punto interior, tal como el punto 0 es:

$$q_{10} + q_{20} + q_{30} + q_{40} = 0$$

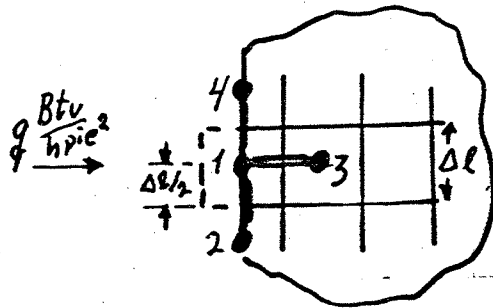
La ecuación residual es:

$$Q'_0 = \frac{KW}{\delta} (t_1 - t_0) + \frac{KW}{\delta} (t_2 - t_0) + \frac{KW}{\delta} (t_3 - t_0) + \frac{KW}{\delta} (t_4 - t_0)$$

$$y R_0 = \frac{Q'_0}{WK} = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - 4t_0$$

y se podría seguir así con los otros puntos, pero la variación más importante es el caso de los nodos situados en los bordes y para ello se presentan los casos siguientes:

a) Nodo situado en un borde isotérmico:



Por ser el borde isotérmico $T_1 = T_2 = T_4$.

Para el nodo 1 el balance de calor es:

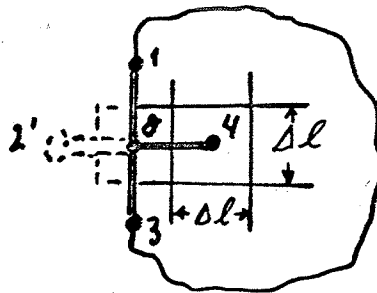
$$qW\Delta l + \frac{KW}{\Delta l} (T_3 - T_1) = 0$$

y en función del residuo:

$$Q'_0 = \frac{\sigma \Delta l}{K} + (T_3 - T_1)$$

b) Nodo situado en una superficie adiabática:

La superficie adiabática AB puede, ser considerada como un plano de simetría para la celda:



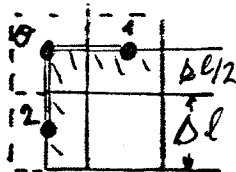
El balance de calor para el nodo 0 es:

$$KW \frac{\Delta l}{2} \frac{T_1 - T_0}{\Delta l} + KW \frac{\Delta l}{2} \frac{T_3 - T_0}{\Delta l} + KW \Delta l \frac{T_4 - T_0}{\Delta l} = 0$$

y en función del residuo

$$Q'_0 = \frac{1}{2} (T_1 + T_3) + T_4 - 2T_0$$

c) Nodo en un rincón exterior entre dos superficies adiabáticas:



El balance de calor para el nodo cero es:

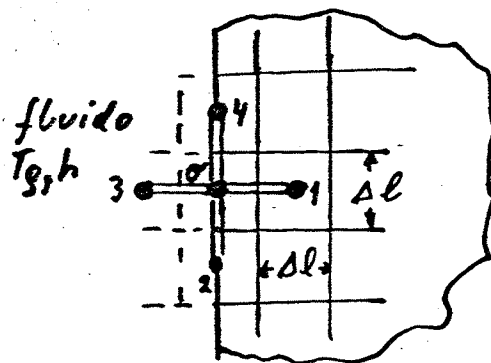
$$kW \frac{\Delta l}{2} \frac{T_1 - T_0}{\Delta l} + kW \frac{\Delta l}{2} \frac{T_2 - T_0}{\Delta l} = 0$$

y en función del residuo:

$$Q'_0 = \frac{1}{2} (T_1 - T_0) + \frac{1}{2} (T_2 - T_0)$$

$$Q'_0 = \frac{1}{2} (T_1 + T_2) - T_0$$

d) Nodo sobre una superficie en contacto con un fluido a temperatura T_q .



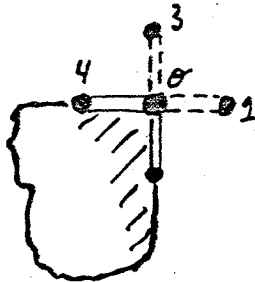
El balance de calor para el nodo cero es:

$$KW \Delta l \frac{T_1 - T_0}{\Delta l} + KW \frac{\Delta l}{2} \frac{T_4 - T_0}{\Delta l} + KW \frac{\Delta l}{2} \frac{T_2 - T_0}{\Delta l} + hW \Delta l (T_g - T_0) = 0$$

y en función del residuo:

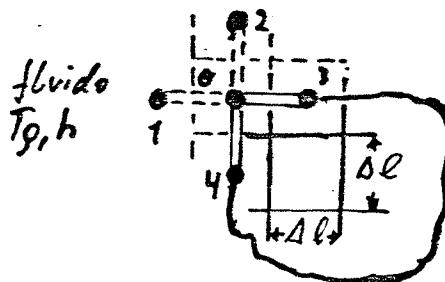
$$Q'_0 = \frac{1}{2} (T_2 + T_4) + \frac{h \Delta l}{K} T_g - \left(2 + h \frac{\Delta l}{K}\right) T_0$$

e) Nodo en un rincón exterior entre dos superficies isotérmicas:



No hay ecuación residual por ser el flujo térmico nulo desde o hacia el nodo.

f) Nodo en un rincón cuyas superficies están en contacto con un fluido a temperatura T_g .



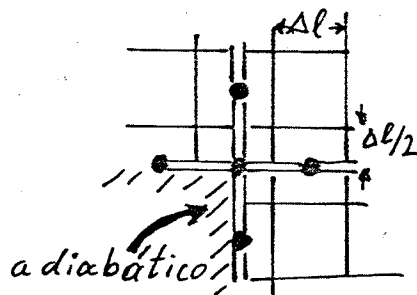
El balance de calor para el nodo cero es:

$$KW \frac{\Delta l}{2} \frac{T_4 - T_0}{\Delta l} + KW \frac{\Delta l}{2} \frac{(T_3 - T_0)}{\Delta l} + hW \frac{\Delta l}{2} (T_g - T_0) + hW \frac{\Delta l}{2} (T_g - T_0) = 0$$

y en función del residuo es:

$$Q'_0 = \frac{1}{2} (T_3 + T_4) + h \frac{\Delta l}{K} T_g - (h \frac{\Delta l}{K} + 1) T_0$$

g) Nodo en un rincón interior formado por dos superficies adiabáticas



El balance de calor para el nodo cero es:

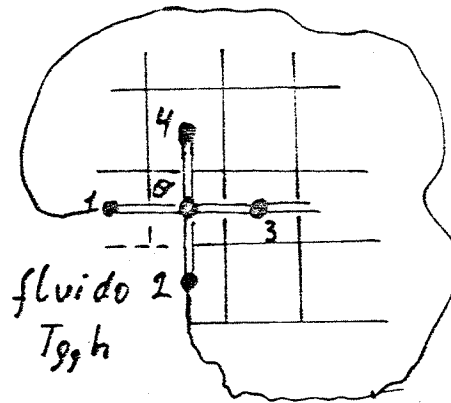
$$KW \Delta l \frac{(T_1 - T_0)}{\Delta l} + KW \frac{\Delta l}{2} \frac{(T_2 - T_0)}{\Delta l} + KW \frac{\Delta l}{2} \frac{(T_3 - T_0)}{\Delta l} + KW \frac{\Delta l}{2} \frac{(T_4 - T_0)}{\Delta l} = 0$$

y en función del residuo es:

$$Q'_0 = T_1 - T_0 + \frac{T_2 - T_0}{2} + \frac{T_3 - T_0}{2} + T_4 - T_0$$

$$Q'_0 = \frac{1}{2} (T_2 + T_3) + T_1 + T_4 - 3T_0$$

h) Node in an interior corner formed by two surfaces in contact with a fluid at temperature: T_g



El balance de calor para el nodo cero es:

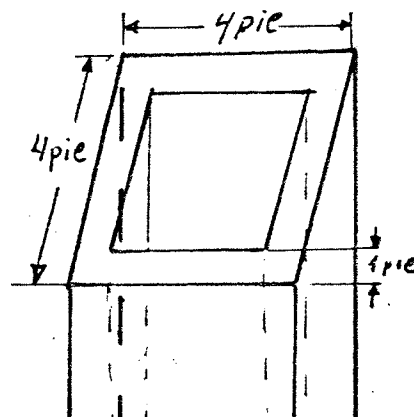
$$KW \frac{\Delta l}{2} \frac{T_1 - T_o}{\Delta l} + KW \frac{\Delta l}{2} \frac{T_2 - T_o}{\Delta l} + KW \Delta l \frac{T_4 - T_o}{\Delta l} + KW \Delta l \frac{T_3 - T_o}{\Delta l} + hW \Delta l (T_g - T_o) = 0$$

y en función del residuo es:

$$Q'_o = \frac{1}{2} (T_1 + T_2) + T_3 + T_4 + \frac{h \Delta l}{K} T_g - (3 + \frac{h \Delta l}{K}) T_o$$

PROBLEMA:

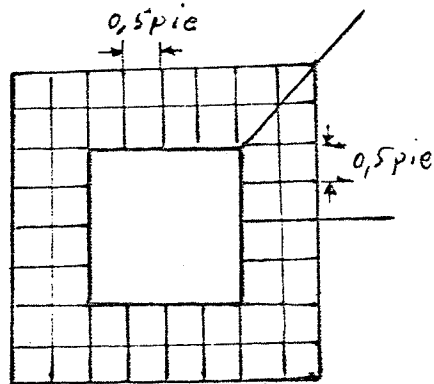
Determinar la distribución de temperatura en el plano medio de la chimenea que se indica en la figura, utilizando una red cuadrada de 0,5 pie y calcular la pérdida de calor por metro de longitud, si el K del material es 1,0 Btu/h.pie.F. Las caras exteriores están a 0°F y el interior está a 100°F. Los coeficientes de convección son $h_e = 3 \text{ Btu/h.pie}^2 \cdot \text{F}$ y $h_i = 12 \text{ Btu/h.pie}^2 \cdot \text{F}$.



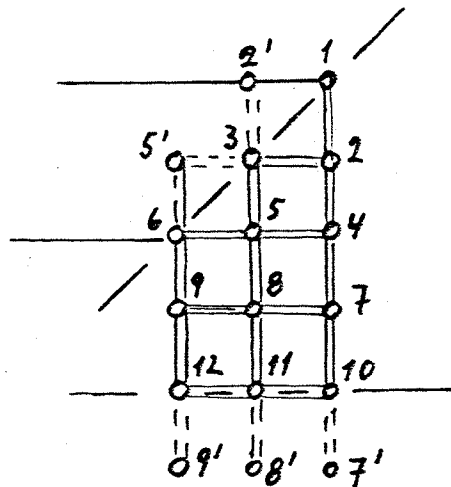
(Wisniak)

SOLUCION:

Se elige una sección transversal y se traza la red.



Tiene simetría y se puede elegir la sección entre los dos planos marcados:



Las ecuaciones residuales son:

$$Q'_1 = T_2 - 2,5 T_1 \quad \text{caso f) con } T_3 = T_4$$

$$Q'_2 = 0,5T_1 + T_3 + 0,5T_4 - 3,5T_2 \quad \text{caso c)}$$

$$Q'_3 = 2T_2 + 2T_5 - 4T_3$$

$$Q'_4 = 0,5T_2 + T_5 + 0,5T_7 - 3,5T_4 \quad \text{caso c)}$$

$$Q'_5 = T_3 + T_4 + T_6 + T_8 - 4T_5$$

$$Q'_6 = 2T_5 + T_9 + 600 - 9T_6 \quad \text{caso h)}$$

$$Q'_7 = 0,5T_4 + T_8 + 0,5T_{10} - 3,5T_7 \quad \text{caso c)}$$

$$Q'_8 = T_5 + T_7 + T_9 + T_{11} - 4T_8$$

$$Q'_9 = 0,5T_6 + T_8 + 0,5T_{12} + 600 - 8T_9 \quad \text{caso c)}$$

$$Q'_{10} = T_7 + T_{11} - 3,5T_{10} \quad \text{caso c)}$$

$$Q'_{11} = 2T_8 + T_{10} + T_{12} - 4T_{11}$$

$$Q'_{12} = T_9 + T_{11} + 600 - 8T_{12}$$

Con estas ecuaciones se puede establecer el cuadro de variación unitaria,

CUADRO DE VARIACION UNITARIA

	$\Delta Q'_1$	$\Delta Q'_2$	$\Delta Q'_3$	$\Delta Q'_4$	$\Delta Q'_5$	$\Delta Q'_6$	$\Delta Q'_7$	$\Delta Q'_8$	$\Delta Q'_9$	$\Delta Q'_{10}$	$\Delta Q'_{11}$	$\Delta Q'_{12}$
1 = 1	-2,5	0,5										
2 = 1	1,0	-3,5	2,0	0,5								
3 = 1		1,0	-4,0	-	1,0	-						
4 = 1	-	0,5	-	-3,5	1,0	-	0,5					
5 = 1	-	-	2,0	1,0	-4,0	2,0						
6 = 1	-	-			1,0	-9,0	-	1,0	0,5			
7 = 1	-			0,5	-	-	-3,5	1,0	-	1,0		
8 = 1	-	-			1,0	-	1,0	-4,0	1,0	-	2,0	
9 = 1	-	-				1,0	-	1,0	8,0	-	-	1,0
10 = 1	-	-					0,5	-	-	-3,5	1,0	-
11 = 1	-	-						1,0	-	1,0	-4,0	1,0
12 = 1	-	-							0,5	-	1,0	-8,0
1 = 12 = 1	-1,5	-1,5	0	-1,5	0	-6,0	-1,5	0	-6,0	-1,5	0	-6,0

Para construir el cuadro siguiente se establecen los supuestos siguientes:

Los nodos 6,9,12 están muy cercanos en temperatura a la del interior de la chimenea que se supone que es de 95°F.

La temperatura en 7,10 se supone de 20°F y en 1 es de 10°F.

Las temperaturas en los nodos interiores será el promedio.

Con estos datos se completa la línea 1.

En la línea 2 se introduce el efecto de la variación unitaria.

La suma de los residuos iniciales es -95 y del cuadro de variación unitaria, los cambios residuales suman -25,5.

Por lo tanto, la operación inicial es: $95/25,5 = 3,73^{\circ}\text{F} \approx 4^{\circ}\text{F}$.

En la línea 16 se establece el resultado final.

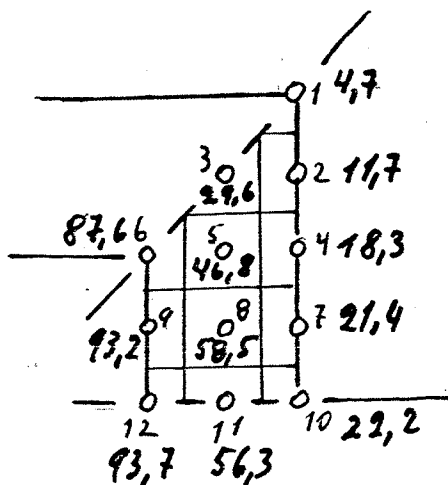
Se siguen estableciendo cambios en valores decimales hasta que en la línea 34 se conoce el resultado final.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Línea
	Q' 1 T1	Q' 2 T2	Q' 3 T3	Q' 4 T4	Q' 5 T5	Q' 6 T6	Q' 7 T7	Q' 8 T8	Q' 9 T9	Q' 10 T10	Q' 11 T11	Q' 12 T12	
Valores inic.	-10	12,5 15	-50 50	7,5 20	-15 60	-40 95	10 20	-5 60	-5 95	10 20	-5 60	-5 95	1
Unitario	- 4 - 4	18,5 -4	-50 - 4	13,5 - 4	-15 - 4	-16 - 4	16 - 4	- 5 - 4	19 - 4	16 - 4	- 5 - 4	19 - 4	2
$\Delta T_3 = -14$		4,5	6 -14		-29								3
$\Delta T_5 = - 8$			-10	5,5	3 - 8	-32		-13					4
$\Delta T_6 = - 4$					- 1	4 - 4			17				5
$\Delta T_7 = + 6$				8,5			-5 + 6	- 7		22			6
$\Delta T_9 = + 2$					6			- 5	1 + 2			21	7
$\Delta T_{10} = + 6$							-2			1 + 6	1		8
$\Delta T_{12} = + 3$									4		4	- 3 + 3	9
$\Delta T_8 = - 2$					- 3		-4	3 - 2					10
$\Delta T_3 = - 3$		1,5	2 - 3		- 6								11
$\Delta T_4 = + 2$		2,5		1,5 2			-3						12
$\Delta T_1 = - 2$	1 - 2	1,5											13
$\Delta T_6 = 0,6$					-5,4	0,6 0,6			4,3				14
$\Delta T_{11} = 1$								4		2	0 1	- 2	15
	1 4	1,5 11	2 29	1,5 18	5,4 48	0,6 87,6	-3 22	4 58	4,3 93	2 22	0 57	- 2 94	16*

* Se repite en la página siguiente.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	lines
	Q'1 T1	Q'2 T2	Q'3 T3	Q'4 T4	Q'5 T5	Q'6 T6	Q'7 T7	Q'8 T8	Q'9 T9	Q'10 T10	Q'11 T11	Q'12 T12	
	1 4	1,5 11	2 29	1,5 18	-5,4 48	0,6 87,6	-3 22	4 58	4,3 93	2 22	0 57	-2 94	16*
$\Delta T_8 = 1$					-4,4		-2	0 1	5,3		2		17
$\Delta T_5 = -1,1$			-0,2	0,4	0	-1,1		-1,1					18
$\Delta T_{10} = 0,6$							-1,7			-0,1 0,6 2,6			19
$\Delta T_9 = 0,2$						-1,4		-0,9	3,7 0,2			-1,8	20
$\Delta T_{12} = -0,3$								3,6			2,3	0,6 -0,3	21
$\Delta T_{11} = -0,5$										-0,6	0,3 -0,5	0,1	22
$\Delta T_7 = -0,6$				0,1			0,4 -0,6	-2,0		-1,2			23
$\Delta T_2 = 0,6$	1,6	-0,6 0,6	1,0	0,4									24
$\Delta T_3 = 0,6$		0	-1,4 0,6		0,6								25
$\Delta T_1 = 0,6$	0,1 0,6 0,3												26
$\Delta T_8 = -0,5$					0,1		-0,1	0 -0,5	3,1		-0,7		27
$\Delta T_{10} = -0,4$							-0,3			0,2 -0,4 -0,11			28
$\Delta T_4 = 0,3$		0,45		-0,15 0,3	0,4		-0,15						29
$\Delta T_5 = 0,1$			-1,2	-0,55	0	0,1 -1,2		0,1					30
$\Delta T_{11} = -0,2$								-0,1		0	0,69 -0,2	-0,1	31
$\Delta T_2 = 0,1$	0,2	0,15 0,1	-1,0	-0,5									32
$\Delta T_1 = 0,1$	-0,05 0,1	0,20											33
	4,7	11,7	29,6	18,3	46,8	87,6	21,4	58,5	93,2	22,2	56,3	93,7	34

En el gráfico siguiente se colocan los valores de temperatura a los nodos.

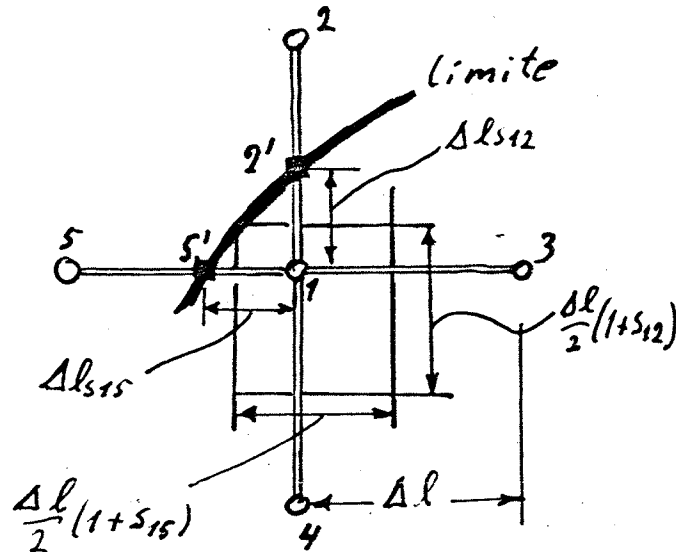


3.4 Método numérico en conducción a régimen estacionario bidimensional para cuerpos irregulares.

Al ser irregular el cuerpo, el desarrollo de la malla cuadrada tiene dificultad en los bordes irregulares. En tal caso, las ecuaciones residuales para los nodos adyacentes a los bordes deben ser modificadas, pero en el interior se puede desarrollar la malla cuadrada.

Punto nodal en la vecindad de un borde irregular.

Para solucionar este caso se utiliza el factor S que es una fracción de la distancia Δl ; así cualquier borde queda definido tal como se indica en la figura siguiente:



La ecuación residual para el nodo 1 es:

$$Q'_1 = -K \frac{\Delta l (1+s_{15})/2}{\Delta l s_{12}} (T_{2'} - T_1) + K \frac{\Delta l (1+s_{12})/2}{\Delta l} (T_3 - T_1) +$$

$$+ K \frac{\Delta l (1+s_{15})/2}{\Delta l} (T_4 - T_1) + K \frac{\Delta l (1+s_{12})/2}{\Delta l s_{15}} (T_{5'} - T_1)$$

$$Q'_1 = K \frac{(1+s_{15})}{2s_{12}} (T_{2'} - T_1) + K \frac{(1+s_{12})}{2} (T_3 - T_1) + K \frac{(1+s_{15})}{2} (T_4 - T_1) +$$

$$+ K \frac{(1+s_{12})}{2s_{15}} (T_{5'} - T_1)$$

rearrreglando y dividiendo por $K (1+s_{12}) (1+s_{15})/4$ queda:

$$Q'_1 = \frac{2}{s_{12}(1+s_{12})} T_{2'} + \frac{2}{1+s_{15}} T_3 + \frac{2}{1+s_{12}} T_4 + \frac{2}{s_{15}(1+s_{15})}$$

$$T_{5'} - 2 \left(\frac{1}{s_{12}} + \frac{1}{s_{15}} \right) T_1$$

4.0 CONDUCCION TRANSIENTE UNIDIMENSIONAL

En este capítulo se analizará la transmisión de calor en los casos en que la temperatura varía con el tiempo en forma aperiódica.

Hay que tener presente, que la velocidad de transmisión de calor se verá afectada por la resistencia externa e interna, y también se presentarán casos en que una de ella es despreciable frente a la otra.

4.1 Resistencia interna despreciable

El número de Biot ($Bi = \frac{h \delta}{K}$) representa la razón de la resistencia interna frente a la resistencia externa y se considera que para $Bi < 0,1$ el proceso de transferencia de calor está regulado por la resistencia externa.

Con estas condiciones el cuerpo está a temperatura uniforme, porque no existe gradiente de temperatura en su interior.

Se supone un cuerpo a temperatura inicial uniforme t_i puesto en contacto con un medio a temperatura t_g y coeficiente h .



El balance de calor es:

$$Q = c \rho V \frac{dt}{d\theta} = h A (t_g - t)$$

$$\frac{dt}{t_g - t} = \frac{hA}{cV} d\theta$$

integrando:

$$\int_0^t \frac{dt}{t_g - t} = \int_0^\theta \frac{hA}{cV} d\theta$$

$$L (t_g - t) = - \frac{hA}{c\rho V} \theta + C$$

Para evaluar la constante se aplica la condición de borde:

$$\text{para } \theta = 0 \quad t = t_0$$

$$C = L (t_g - t_0)$$

$$L (t_g - t) = - \frac{hA}{c\rho V} \theta + L (t_g - t_0)$$

$$L \frac{t_g - t}{t_g - t_0} = - \frac{hA}{c\rho V} \theta$$

$$\frac{t_g - t}{t_g - t_0} = e^{- \frac{hA}{c\rho V} \theta}$$

$$\frac{t - t_g}{t_0 - t_g} = e^{- \frac{hA}{c\rho V} \theta} \dots\dots\dots i$$

El término $\frac{t - t_g}{t_0 - t_g}$ es la temperatura adimensional.

El exponente $\frac{c\rho V}{hA}$ recibe el nombre de constante de tiempo del cuerpo, porque tiene dimensión tiempo e indica la inercia del cuerpo a un cambio brusco de temperatura.

$$\text{si } \frac{V}{A} = \delta$$

$$\frac{hA}{c\rho V} e = \frac{h}{c\rho\delta} e$$

multiplicando y dividiendo por δK , se tiene:

$$\frac{he}{c\rho\delta} \frac{\delta K}{\delta K} = \left(\frac{h\delta}{K} \right) \left(\frac{Ke}{\rho c \delta^2} \right)$$

$$\text{y } \frac{Ke}{c\rho\delta^2} = Fo \text{ (número de Fourier)}$$

$$\text{si } \alpha = \frac{K}{\rho c}$$

se cumple:

$$Fo = \alpha \frac{e}{\delta^2}$$

Luego:

$$\frac{he}{c\rho\delta} = (Bi) (Fo)$$

y reemplazando en i)

$$\frac{t - t_g}{t_o - t_g} = e^{-(Bi) (Fo)} \dots\dots\dots ii)$$

Las ecuaciones i) e ii) están representando el campo de temperaturas.

Si se quiere conocer el calor transferido:

$$Q_i = c\rho V \frac{dt}{d\theta}$$

De ii)

$$\frac{dt}{d\theta} = - (t_o - t_g) \frac{hA}{c\rho V} e^{-(Bi) (Fo)}$$

Por lo tanto:

$$Q_i = hA (t_g - t_o) e^{-(Bi) (Fo)}$$

Este calor es el que se está transfiriendo en el tiempo θ en forma instantánea.

La cantidad de calor que se ha transferido desde que comenzó el proceso hasta el tiempo θ es:

$$Q = \int_0^{\theta} Q_{id} d\theta = c \rho V (t_g - t_0) (1 - e^{-\frac{hA}{c \rho V} \theta})$$

4.2 Resistencia externa despreciable

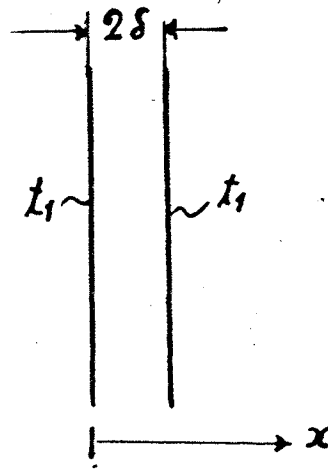
En este caso, en el que influye el material en la transmisión de calor, se estudiaron formas geométricas elementales y considerando flujo unidimensional.

El valor del número de $Bi > 40$, indica que la resistencia externa es despreciable.

4.2.1. Placa infinita.

El espesor de la placa es muy pequeño frente a las otras dimensiones. La placa tiene una distribución de temperatura $t_i(x)$ y en un momento dado se ponen en contacto ambas caras con un fluido a t_1 .

Si la resistencia exterior es despreciable las dos caras alcanzan la misma temperatura T_1 en forma instantánea.



La ecuación general es:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial e^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial t}{\partial e}$$

Se hace el cambio de variable siguiente:

$$T = t - t_1$$

reemplazando:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial e}$$

Se supone una solución del tipo

$$T = X(x) \zeta(e)$$

reemplazando, queda:

$$\zeta \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{X}{\alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial e}$$

separando variables e igualando a un parámetro:

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial e} = -\lambda^2$$

Esto da origen a:

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\lambda^2 \text{ (i)} \quad \text{y} \quad \frac{1}{\alpha \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial e} = -\lambda^2 \text{ (ii)}$$

cuyas soluciones son:

$$X = B \cos \lambda x + C \operatorname{sen} \lambda x$$

$$\zeta = A e^{-\alpha \lambda^2 e}$$

Luego, la solución general es:

$$T = e^{-\alpha \lambda^2 e} (D \cos \lambda x + E \operatorname{sen} \lambda x)$$

con las condiciones de borde siguientes:

Condición de borde 1:

$$\text{para } \theta = 0 \quad 0 \leq x \leq 2\delta \quad T = t_i(x) - t_1$$

Condición de borde 2:

$$\text{para } \theta > 0 \quad x = 0 \quad T = 0$$

Condición de borde 3:

$$\text{para } \theta > 0 \quad x = 2\delta \quad T = 0$$

Aplicando C.B.2

$$0 = e^{-\alpha \theta \lambda^2 D}$$

$$\text{y } D = 0$$

Aplicando C.B.3

$$0 = e^{-\alpha \theta \lambda^2 D} E \text{ sen } 2\delta \lambda$$

$$\text{sen } 2\delta \lambda = 0$$

$$\text{y } \lambda = \frac{n \tilde{\lambda}}{2\delta} \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots$$

Luego la solución es una sumatoria de las soluciones parciales:

$$T = \sum_1^{\infty} E_n e^{-\alpha \theta \lambda^2} \text{ sen } \frac{n \tilde{\lambda} x}{2\delta}$$

Aplicando C.B.1

$$t_i(x) - t_1 = \sum_1^{\infty} E_n \text{ sen } \frac{n \tilde{\lambda} x}{2\delta}$$

que es el desarrollo en Serie de Fourier de $t_i(x) - t_1$, por lo tanto:

$$E_n = \frac{2}{2\delta} \int_0^{2\delta} [t_i(x) - t_1] \text{ sen } \frac{n \tilde{\lambda} x}{2\delta} dx$$

Luego la ecuación del campo de temperatura es:

$$T = \frac{1}{\delta} \sum_1^{\infty} e^{-\left(\frac{n \tilde{\lambda}}{2\delta}\right)^2 \alpha \theta} \text{ sen } \frac{n \tilde{\lambda} x}{2\delta} \int_0^{2\delta} [t_i(x) - t_1] \text{ sen } \frac{n \tilde{\lambda} x}{2\delta} dx$$

si la pared está inicialmente a temperatura uniforme t_0 , la expresión se reduce a:

$$\frac{t - t_1}{t_0 - t_1} = \frac{4}{\tilde{l}} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\left(\frac{n\tilde{l}}{2\delta}\right)^2 \alpha \theta} \operatorname{sen} \frac{n\tilde{l}x}{2\delta} \quad \text{con } n = 1, 3, 5, \dots$$

La placa tiene temperatura uniforme para $\theta = 0$ y también va a tener temperatura uniforme en otro valor para un tiempo θ muy grande (∞).

Para conocer la velocidad instantánea de transmisión de calor se debe calcular:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{4}{\tilde{l}} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\left(\frac{n\tilde{l}}{2\delta}\right)^2 \alpha \theta} \frac{n\tilde{l}}{2\delta} \cos \frac{n\tilde{l}x}{2\delta}$$

y por lo tanto:

$$Q_i = \frac{2KA (t_1 - t_0)}{\delta} \sum_1^{\infty} e^{-\left(\frac{n\tilde{l}}{2\delta}\right)^2 \alpha \theta} \cos \frac{n\tilde{l}x}{2\delta}$$

con $n = 1, 3, 5, \dots$

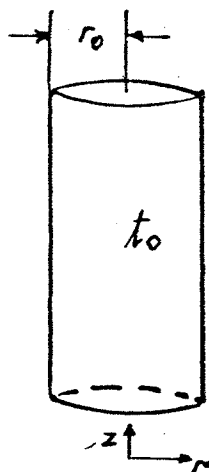
y el calor total transferido desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \theta$ es:

$$Q = \frac{8}{\tilde{l}^2} \frac{KA\delta}{\alpha} (t_1 - t_0) \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[1 - e^{-\left(\frac{n\tilde{l}}{2\delta}\right)^2 \alpha \theta} \right] \cos \frac{n\tilde{l}x}{2\delta}$$

4.2.2. Cilindro infinito

El cilindro infinito tiene una distribución de temperatura inicial $t_i(r)$.

Al tiempo $\theta = 0$ se cambia la temperatura del manto lateral a t_1 y se mantiene en ese valor.



La ecuación del campo térmico es:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial t}{\partial \theta}$$

El cambio de variable $T = t - t_1$, deja:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

se supone solución del tipo:

$$T = R(r) \zeta(\theta)$$

reemplazando y ordenando, queda:

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} = \frac{1}{\alpha \zeta} \frac{d\zeta}{d\theta}$$

que se reduce a:

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} = -\lambda^2$$

y

$$\frac{1}{\alpha \zeta} \frac{d\zeta}{d\theta} = -\lambda^2$$

Las soluciones son:

$$R = B J_0(\lambda r) + c Y_0(\lambda r) \quad \text{y} \quad \zeta = A e^{-\alpha \lambda^2 \theta}$$

y el campo de temperatura:

$$T = e^{-\alpha \lambda^2 \theta} [D J_0(\lambda r) + E Y_0(\lambda r)]$$

con las condiciones de borde siguientes:

Condición de borde 1:

$$\text{para } \theta = 0 \quad r = r \quad t = t_i(r) \quad T = t_i - t_1$$

Condición de borde 2:

$$\text{para } \theta > 0 \quad r = r_0 \quad t = t_1 \quad T = 0$$

Condición de borde 3:

$$\text{para } \theta = 0 \quad r = 0 \quad t \text{ es finita}$$

Aplicando C.B.3 :

$$E = 0$$

$$T = D e^{-\alpha \lambda^2 \theta} J_0(\lambda r)$$

Aplicando C.B.2 :

$$0 = D e^{-\alpha \lambda^2 \theta} J_0(\lambda r_0)$$

Y sólo $J_0(\lambda r_0) = 0$, sus primeros ceros están tabulados y la solución general será la sumatoria de las soluciones particulares:

$$T = \sum_1^{\infty} D_n e^{-\left(\frac{M_n}{r_0}\right)^2 \alpha \theta} J_0\left(M_n \frac{r}{r_0}\right)$$

M_n es cero de $J_0(\lambda r_0) = 0$

Aplicando C.B.1 :

$$t_i = \sum_1^{\infty} D_n J_0 \left(M_n \frac{r}{r_0} \right)$$

que representa el desarrollo de t_i en serie de funciones de Bessel J_0 . La teoría de Bessel permite escribir:

$$D_n = \frac{\int_0^1 t_i(r) J_0 \left(M_n \frac{r}{r_0} \right) dr}{\frac{r_0^2}{2} J_1^2(M_n)}$$

Luego, la solución general es:

$$T = \frac{2}{r_0^2} \sum_1^{\infty} e^{-\left(\frac{M_n}{r_0}\right)^2 \alpha \theta} \frac{J_0 \left(M_n \frac{r}{r_0} \right)}{J_1^2(M_n)} \int_0^1 r t_i(r) J_0 \left(M_n \frac{r}{r_0} \right) dr$$

si la temperatura inicial del cilindro es la misma t_0 en todo el cuerpo, la expresión queda:

$$\frac{t - t_1}{t_0 - t_1} = 2 \sum_1^{\infty} e^{-\left(\frac{M_n}{r_0}\right)^2 \alpha \theta} \frac{J_0 \left(M_n \frac{r}{r_0} \right)}{M_n J_1(M_n)}$$

La velocidad instantánea de transmisión de calor es:

$$Q_i = -2 \tilde{K} r \frac{\partial t}{\partial r}$$

calculando $\frac{\partial t}{\partial r}$ y reemplazando queda:

$$Q_i = 4 \tilde{K} (t_1 - t_0) \frac{r}{r_0} \sum_1^{\infty} e^{-\left(\frac{M_n}{r_0}\right)^2 \alpha \theta} \frac{J_1 \left(M_n \frac{r}{r_0} \right)}{J_1(M_n)}$$

Y el calor acumulado desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \theta$ es:

$$Q = \int_0^{\theta} Q_{id} d\theta$$

$$Q = \frac{4 \tilde{h} K}{\alpha} (t_1 - t_0) (r_0 r) \sum_1^{\infty} \frac{1}{Mn^2} \left[1 - e^{-\left(\frac{Mn}{r_0}\right)^2 \alpha \theta} \right] \frac{J_1 \left(Mn \frac{r}{r_0} \right)}{J_0 (Mn)}$$

4.2.3. Esferas

Para el caso de una esfera que está inicialmente a t_0 y se cambia la temperatura de superficie a t_1 , se sigue un razonamiento análogo y se logra lo siguiente:

$$\frac{t - t_1}{t_0 - t_1} = \frac{2}{\tilde{h} r} \frac{r_0}{r} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-\left(\frac{n}{r_0}\right)^2 \alpha \theta} \operatorname{sen} \frac{n \tilde{h} r}{r_0}$$

$$\frac{\tilde{h}^2 \alpha Q}{8K(t_1 - t_0) r_0^3 r^2} = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \left[1 - e^{-\left(\frac{n}{r_0}\right)^2 \alpha \theta} \right] \left[\frac{1}{r^2} \operatorname{sen} \frac{n \tilde{h} r}{r_0} - \frac{n \tilde{h}}{r_0 r} \cos \frac{n \tilde{h} r}{r_0} \right]$$

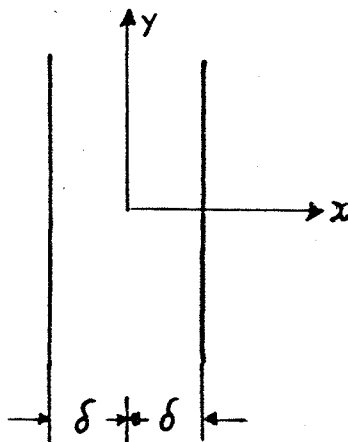
4.3 Resistencias interna y externa finitas

Este es el caso en que las dos son de la misma magnitud y el número de Biot está entre 0,1 y 40.

4.3.1. Placa infinita

La placa se pone en contacto con fluido a temperatura t_1 y coeficiente de convección h .

El eje x tiene su origen en el plano de simetría:



La ecuación que representa el campo de temperatura es la siguiente, deducida con la metodología ya expuesta:

$$T = e^{-\alpha \theta \lambda^2} (D \cos \lambda x + E \sin \lambda x)$$

con las condiciones de borde siguientes:

Condición de borde 1 :

$$\text{para } \theta = 0 \quad -\delta \leq x \leq \delta \quad T = t_0 - t_1$$

Condición de borde 2 :

$$\text{para } \theta = \theta \quad x = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

Condición de borde 3 :

$$\text{para } \theta = \theta \quad x = \delta \quad -KA \frac{\partial T}{\partial x} = hAT$$

Condición de borde 4 :

$$\text{para } \theta = \theta \quad x = -\delta \quad KA \frac{\partial T}{\partial x} = hAT$$

Aplicando C.B.2 :

$$0 = e^{-\alpha e \lambda^2} E \lambda$$

$$E = 0$$

$$y \quad T = D e^{-\alpha e \lambda^2} \cos \lambda x$$

Aplicando C.B.3 o C.B.4 :

$$K A D e^{-\alpha e \lambda^2} \lambda \operatorname{sen} \lambda \delta = h A D e^{-\alpha e \lambda^2} \cos \lambda \delta$$

$$\lambda \tan \lambda \delta = \frac{h}{K}$$

si

$$\delta \lambda \tan \lambda \delta = \frac{h \delta}{K} = \text{Bi}$$

que tiene infinitas soluciones.

TABLA N° 1

PRIMERAS 6 RAICES DE LA ECUACION $\text{Cot } \mu = \mu/\text{Bi}$

Bi	1	2	3	4	5	6
0	0	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080
0,01	0,0998	3,1448	6,2848	9,4258	12,5672	15,7086
0,1	0,3111	3,1731	6,2991	9,4354	12,5743	15,7143
0,2	0,4328	3,2039	6,3148	9,4459	12,5823	15,7207
0,5	0,6533	3,2923	6,3616	9,4775	12,6060	15,7397
1,0	0,8603	3,4256	6,4373	9,5293	12,6453	15,7713
2,0	1,0769	3,6436	6,5783	9,6296	12,7223	15,8336
5,0	1,3138	4,0336	6,9096	9,8928	12,9352	16,0107
10,0	1,4289	4,3058	7,2281	10,2003	13,2142	16,2594
100,0	1,5552	4,6658	7,7764	10,8871	13,9981	17,1093
00	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372	17,2788

(Loncin)

La solución general será la sumatoria de las soluciones particulares:

$$T = \sum_1^{\infty} D_n e^{-\alpha \theta \lambda^2} \cos \lambda_m x$$

Aplicando C.B.1 :

$$t_0 - t_1 = \sum_1^{\infty} D_n \cos \lambda_n x$$

Los valores posibles de λ_n no corresponden a números enteros.

Multiplicando por $\cos \lambda_m x dx$ e integrando de 0 a δ se tiene:

$$(t_0 - t_1) \int_0^{\delta} \cos \lambda_m x dx = \sum_1^{\infty} D_n \int_0^{\delta} \cos \lambda_n x \cos \lambda_m x dx$$

Cada integral del lado derecho vale:

$$\int_0^{\delta} \cos \lambda_n x \cos \lambda_m x dx = \frac{\lambda_n \operatorname{sen} \lambda_n \delta \cos \lambda_m \delta - \lambda_m \cos \lambda_n \delta \operatorname{sen} \lambda_m \delta}{\lambda_n^2 - \lambda_m^2}$$

y también:

$$\lambda_n \tan \lambda_n \delta = \lambda_m \tan \lambda_m \delta$$

$$\lambda_n \operatorname{sen} \lambda_n \delta \cos \lambda_m \delta = \lambda_m \operatorname{sen} \lambda_m \delta \cos \lambda_n \delta$$

Se anula toda integral para $m \neq n$ y la ecuación queda:

$$(t_0 - t_1) \int_0^{\delta} \cos \lambda_m x dx = D_m \int_0^{\delta} \cos^2 \lambda_m x dx$$

y

$$D_m = \frac{4 (t_0 - t_1) \operatorname{sen} \lambda_n \delta}{2 \lambda_n \delta + \operatorname{sen} 2 \lambda_n \delta}$$

y el campo de temperatura es:

$$\frac{t - t_1}{t_0 - t_1} = 4 \sum_1^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 \theta \alpha} \operatorname{sen} \lambda_n \delta}{2 \lambda_n \delta + \operatorname{sen} 2 \lambda_n \delta} \cos \lambda_n x$$

El calor transferido es:

$$Q_i = -K \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=\delta}$$

y

$$Q = \int_0^\theta Q_i d\theta$$

$$Q = \frac{2K}{\delta} (t_0 - t_1) \sum_1^\infty \frac{\text{sen}^2 \lambda_n \delta}{\lambda_n^2 \delta + \lambda_n \text{sen} \lambda_n \delta \cos \lambda_n \delta} (1 - e^{-\alpha \theta \lambda_n^2})$$

Si se tiene el caso de placa que intercambia calor por ambas caras el resultado anterior se multiplica por 2.

4.3.2 Cilindro infinito:

La ecuación que representa el campo de temperatura es:

$$T = e^{-\alpha \lambda^2 \theta} [D J_0(\lambda r) + E Y_0(\lambda r)]$$

Con las condiciones de borde siguientes:

Condición de borde 1:

$$\text{para } \theta = 0 \quad r = r \quad T = t_0 - t_1$$

Condición de borde 2:

$$\text{para } \theta > 0 \quad r = r_0 \quad -K \frac{\partial T}{\partial r} = hT$$

Condición de borde 3:

$$\text{para } \theta \geq 0 \quad r = 0 \quad T \text{ es finita}$$

Aplicando C.B.3, se tiene:

$$E = 0 \quad \text{y,} \quad T = D e^{-\alpha \lambda^2 \theta} J_0(\lambda r)$$

Aplicando C.B.2, se tiene:

$$\lambda K D e^{-\alpha \lambda^2 \theta} J_1(\lambda r_0) = h D e^{-\alpha \lambda^2 \theta} J_0(\lambda r_0)$$

$$\frac{(\lambda r_0) J_1(\lambda r_0)}{J_0(\lambda r_0)} = \frac{h r_0}{K}, \text{ que tiene infinitas soluciones.}$$

TABLA N° 2

PRIMERAS 6 RAICES DE LA ECUACION $\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = \frac{\mu}{Bi}$

Bi	1	2	3	4	5	6
0	0	3,8137	7,0156	10,1735	13,3237	16,4706
0,01	0,1412	3,8343	7,0170	10,1745	13,3244	16,4712
0,1	0,4417	3,8577	7,0298	10,1833	13,3312	16,4767
0,2	0,6170	3,8835	7,0440	10,1931	13,3387	16,4828
0,5	0,9408	3,9594	7,0864	10,2225	13,3611	16,5010
1,0	1,2558	4,0795	7,1558	10,2710	13,3984	16,5312
2,0	1,5994	4,2910	7,2884	10,3658	13,4719	16,5910
5,0	1,9898	4,7131	7,6177	10,6223	13,6786	16,7630
10,0	2,1795	5,0332	7,9569	10,9363	13,9580	17,0099
100,0	2,3809	5,4652	8,5678	11,6747	14,7834	17,8931
∞	2,4808	5,5201	8,6537	11,7915	14,9309	18,0711

(Loncin)

Luego la solución es:

$$1 = \sum_1^{\infty} D_n e^{-d \lambda_n^2} J_0(\lambda_n r)$$

Aplicando C.B.1, se tiene:

$$t_0 - t_1 = \sum_1^{\infty} D_n J_0(\lambda_n r) \dots \quad i)$$

multiplicando por $[r J_0(\lambda_m r)]$ e integrando de 0 a r_0 :

$$(t_0 - t_1) \int_0^{r_0} J_0(\lambda_m r) dr = D_n \int_0^{r_0} J_0(\lambda_m r) J_0(\lambda_n r) dr$$

y utilizando las relaciones de la teoría de Bessel:

$$(t_0 - t_1) \frac{r_0}{\lambda_n} J_1(\lambda_n r_0) = \frac{r_0^2}{2} \left[J_0^2(\lambda_n r_0) + J_1^2(\lambda_n r_0) \right] D_n$$

reemplazando en i), se tiene:

$$\frac{t - t_1}{t_0 - t_1} = 2 \sum_1^{\infty} \frac{1}{\lambda_n r_0} \frac{J_1(\lambda_n r_0)}{J_0^2(\lambda_n r_0) + J_1^2(\lambda_n r_0)} e^{-\alpha \theta \lambda_n^2} J_0(\lambda_n r)$$

4.3.3. Esfera

En el caso de la esfera de r_0 , que está a $\theta = 0$ con una temperatura t_0 y que se le sumerge en un fluido a temperatura t_1 , se tiene para el campo de temperatura.

$$\frac{t - t_1}{t_0 - t_1} = 4 \left(\frac{r_0}{r} \right) \sum_1^{\infty} \frac{\text{sen } \lambda_n r_0 - \lambda_n r_0 \cos \lambda_n r_0}{2 \lambda_n r_0 - \text{sen } 2 \lambda_n r_0} e^{-\alpha \lambda_n^2 \theta} \text{sen}(\lambda_n r)$$

en que los λ_n corresponden a los ceros de:

$$1 - \lambda_n r_0 \cot \lambda_n r_0 = \frac{h r_0}{K}$$

TABLA N° 3

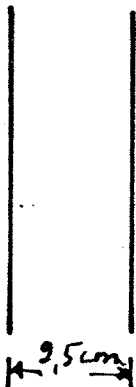
PRIMERAS 6 RAICES DE LA ECUACION $\tan \mu = -\mu / (Bi-1)$

Bi	1	2	3	4	5	6
0	0	4,4934	7,7253	10,9041	14,0662	17,2208
0,01	0,1730	4,4956	7,7265	10,9050	14,0669	17,2213
0,1	0,5423	4,5157	7,7382	10,9133	14,0733	17,2266
0,2	0,7593	4,5379	7,7511	10,9225	14,0804	17,2324
0,5	1,1656	4,6042	7,7899	10,9499	14,1017	17,2498
1,0	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372	17,2788
2,0	2,0288	4,9132	7,9787	11,0856	14,2075	17,3364
5,0	2,5704	5,3540	8,3029	11,3349	14,4080	17,5034
10,0	2,8363	5,7172	8,6587	11,6532	14,6870	17,7481
100,0	3,1102	6,2204	9,3309	12,4414	15,5522	18,6633
∞	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496

(Loncin)

PROBLEMA:

Una plancha de acero de las características señaladas más abajo, está inicialmente a 1000°C. Si se la sumerge en un baño de aceite a 93°C, determinar el tiempo para que la temperatura central baje a 425°C. El coeficiente de convección puede suponerse constante e igual a 480 Kcal/h. m². C.



$$K = 30 \text{ Kcal/h. m. } \text{C}$$

$$= 7700 \text{ Kg/m}^3$$

$$c = 0,116 \text{ Kcal/Kg. } \text{C}$$

(Wisniak)

SOLUCION:

$$Bi = \frac{(480)(0,0125)}{30} = 0,200$$

Por lo tanto, las resistencias externa e interna son del mismo orden.

El campo de temperatura está dado por:

$$\frac{t - t_1}{t_0 - t_1} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 \theta \alpha} \operatorname{sen} \lambda_n \delta}{2 \lambda_n \delta + \operatorname{sen} 2 \lambda_n \delta} \cos \lambda_n x$$

en que:

$$t = 425^\circ\text{C}$$

$$t_1 = 93^\circ\text{C}$$

$$t_0 = 1000^\circ\text{C}$$

$$y \delta \lambda \operatorname{tang} \lambda \delta = \frac{h \delta}{K} = 0,200$$

Las raices de la ecuación son:

$$\lambda_1 \delta = 0,4328$$

$$\lambda_1 = 34,62$$

$$\lambda_2 \delta = 3,2039$$

$$\lambda_2 = 256,3$$

$$\lambda_3 \delta = 6,3148$$

$$\lambda_3 = 505,2$$

$$y, \alpha = \frac{K}{c \rho} = \frac{30}{(0,116)(7700)} = 0,0336 \text{ m}^2/\text{h}$$

Limitando la serie a dos primeros términos, se tiene:

$$\frac{\operatorname{sen} \lambda_1 \delta}{2 \lambda_1 \delta + \operatorname{sen} 2 \lambda_1 \delta} = \frac{\operatorname{sen} \frac{360}{2 \pi} 0,4328}{(2)(0,4328) + \operatorname{sen} \frac{360}{2 \pi} (2)(0,4328)} = 0,258$$

$$\frac{\operatorname{sen} \lambda_2 \delta}{2 \lambda_2 \delta + \operatorname{sen} 2 \lambda_2 \delta} = \frac{\operatorname{sen} \frac{360}{2 \pi} 3,2039}{(2)(3,2039) + \operatorname{sen} \frac{360}{2 \pi} (2)(3,2039)} = -0,0095$$

$$\frac{t - t_1}{t_0 - t_1} = 4 \left[0,258 e^{-(34,621)^2 (0,0336)} e^{-0,0095} e^{-(256,3)^2 (0,0336)} e \right]$$

Se calcula en forma aproximada con el primer término de la serie:

$$\frac{425 - 93}{1000 - 93} = 1,032 e^{-40,271 \theta}$$

$$\frac{332}{907} = 1,032 e^{-40,271 \theta}$$

$$\frac{0,3660}{1,032} = e^{-40,271 \theta}$$

$$0,3547 = e^{-40,271 \theta}$$

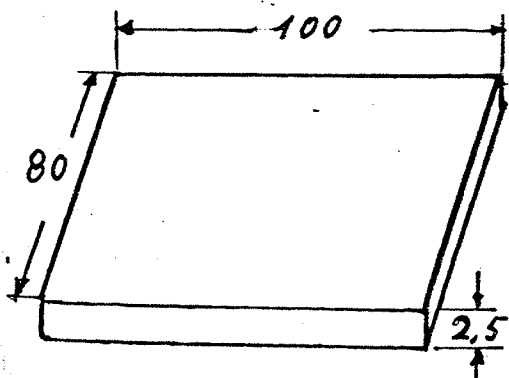
$$-1,0365 = -40,271 \theta$$

$$\theta = 0,026 \text{ h}$$

Esto indica que el segundo término de la sumatoria es despreciable.

PROBLEMA:

Una pieza rectangular de níquel de las características indicadas en la figura, se calienta a 1090°C para ser trabajada en frío en contacto con aire a 27°C. Determinar el tiempo de operación disponible si la temperatura mínima para trabajar en frío es 918°C.



$$\begin{aligned} K &= 51 \text{ Kcal/h. m. } ^\circ\text{C} \\ \rho &= 8900 \text{ Kg/m}^3 \\ C &= 0,105 \text{ Kcal/Kg. } ^\circ\text{C} \\ h &= 30 \text{ Kcal/h. m}^2 \cdot ^\circ\text{C} \end{aligned}$$

(Wisniak)

SOLUCION:

El campo de temperatura está dado por:

$$\frac{t - t_g}{t_o - t_g} = e^{-(Bi) (Fo)}$$

en que:

$$t_g = 27^\circ\text{C}$$

$$t_o = 1090^\circ\text{C}$$

$$t = 918^\circ\text{C}$$

$$Bi = \frac{h \delta}{K}$$

$$Fo = \frac{K\theta}{\rho c \delta^2}$$

Llamando 2δ al espesor de la pieza,

$$\delta = 0,0125 \text{ m}$$

$$\text{Luego } Bi = \frac{h \delta}{K} = \frac{(30) (0,0125)}{51} = 0,00735$$

por ser $Bi \ll 0,1$ la resistencia interna es despreciable:

$$Fo = \frac{K\theta}{\rho c \delta^2} = \frac{51 \theta}{(8900) (0,105) (0,0125)^2} = 349,3 \theta$$

Luego,

$$\frac{918 - 27}{1090 - 27} = e^{-(0,00735) (349,3) \theta}; \quad 0,838 = e^{-2,567 \theta}$$

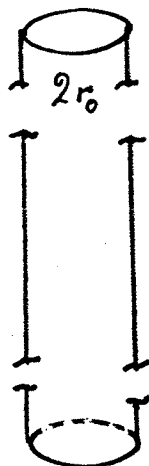
$$0,1765 = -2,567 \theta$$

$$\theta = 0,068 \text{ h}$$

$$\theta = 0,07 \text{ h (4,1 min)}$$

PROBLEMA:

Un cilindro largo de las características señaladas más abajo, está inicialmente a la temperatura de 535°C. Si la temperatura de la cara lateral disminuye bruscamente a 0°C. Determinar la temperatura central al cabo de 1 hora de operación



$$r_0 = 30 \text{ cm}$$

$$K = 1,5 \text{ Kcal/h.m.}^{\circ}\text{C}$$

$$\alpha = 0,0093 \text{ m}^2/\text{h}$$

$$t_0 = 535 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

(Wisniak)

SOLUCION:

El campo de temperatura es:

$$\frac{t - t_1}{t_0 - t_1} = 2 \sum_1^{\infty} e^{-\left(\frac{M_n}{r_0}\right)^2 \alpha \theta} \frac{J_0 \left(M_n \frac{r}{r_0}\right)}{M_n J_1(M_n)}$$

en que:

$$t_0 = 535 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$t_1 = 0$$

De la tabla de Raíces de $J_m(M_n) = 0$ se toman las primeras raíces y con eso se tiene:

$$M_1 = 2,405 \text{ y } M_2 = 5,520$$

$$\left(\frac{M_1}{r_0}\right)^2 \alpha \theta = \left(\frac{2,405}{0,30}\right)^2 (0,0093) (2) = 1,19$$

$$\left(\frac{M_2}{r_0}\right)^2 \alpha \theta = \left(\frac{5,520}{0,30}\right)^2 (0,0093) (2) = 6,3$$

De la tabla de Funciones de Bessel de Primera Clase $J_0(u)$ y $J_1(u)$, se tiene:

$$J_1(M_1) = J_1(2,405) = 0,519$$

$$J_1(M_2) = J_1(5,520) = 0,340$$

$$J_0\left(M_1 \frac{r}{r_0}\right) = 1$$

$$J_0\left(M_2 \frac{r}{r_0}\right) = 1$$

$$\frac{t - t_1}{t_0 - t_1} = 2 \left[e^{-1,19} \frac{(1)}{(2,405) (0,519)} - e^{-6,3} \frac{(1)}{(5,520) (0,340)} \right]$$

$$\frac{t - t_1}{t_0 - t_1} = 2 \left[\frac{0,304}{(2,405) (0,519)} - \frac{0,0018}{(5,520) (0,340)} \right] = 0,485$$

$$\frac{t - 0}{535 - 0} = 0,485$$

$$t = 259,6^\circ\text{C}$$

PROBLEMA:

Una barra cilíndrica de acero, con las características señaladas a continuación, está inicialmente a 985°C . Si se la sumerge en un baño de aceite a 38°C , determinar el tiempo necesario para que la temperatura central baje a 260°C .

El coeficiente de convección puede suponerse constante e igual a $500 \text{ Kcal/h.m}^2.\text{C}$.

diámetro = 20 cm

 $c = 0,11 \text{ Kcal/Kg.}^{\circ}\text{C}$ $K = 22,5 \text{ Kcal/h.m.}^{\circ}\text{C}$ $\rho = 7800 \text{ Kg/m}^3$ SOLUCION:

El campo de temperatura esta representado por:

$$\frac{t - t_1}{t_0 - t_1} = 2 \sum_1^{\infty} \frac{1}{\lambda_n r_0} \frac{J_1(\lambda_n r_0)}{J_0^2(\lambda_n r_0) + J_1^2(\lambda_n r_0)} e^{-\alpha e \lambda_n^2} J_0(\lambda_n r)$$

en que:

$$t = 260^{\circ}\text{C}$$

$$t_1 = 38^{\circ}\text{C}$$

$$t_0 = 985^{\circ}\text{C}$$

$$(\lambda r_0) \cdot \frac{J_1(\lambda r_0)}{J_0(\lambda r_0)} = \frac{h r_0}{K} = \frac{(500)(0,10)}{22,5} = 2,22$$

De Tabla N°2:

$$\lambda_1 r_0 = 1,64$$

$$\lambda_2 r_0 = 4,33$$

$$\lambda_1 = 16,4$$

$$\lambda_2 = 43,3$$

$$\alpha = \frac{K}{c\rho} = \frac{22,5}{(0,11)(7800)} = 0,0262 \text{ m}^2/\text{h}$$

Evaluando el primer término de la serie, queda:

$$\frac{1}{\lambda_1 r_0} \frac{J_1(\lambda_1 r_0)}{J_0^2(\lambda_1 r_0) + J_1^2(\lambda_1 r_0)} = \frac{0,5735}{(1,64) [(0,4325)^2 + (0,5735)^2]} = 0,678$$

$$\frac{260 - 38}{985 - 38} = (2) (0,678) e^{-(0,0262) (16,4)^2} e$$

$$\frac{222}{947} = 1,356 e^{-7,0468} e$$

$$0,1729 = e^{-7,0468} e$$

$$-1,7552 = -7,0468 e$$

$$e = 0,25 h$$

4.3.4. Sólido semi-infinito

Este modelo se refiere a un cuerpo limitado a la izquierda por un plano en la abscisa cero y se extiende libremente en el sentido del otro eje; por consiguiente la transmisión de calor es unidireccional, en nuestro caso sería una pared infinita calentada por una sola de sus caras y tiene que transcurrir cierto tiempo para que la señal térmica llegue a la otra cara (Kreith, 1963).

La temperatura inicial es T_0 y la superficie a $x=0$, tiene temperatura T_1 constante con el tiempo.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Con las condiciones de borde siguientes:

Condición de borde 1:

$$\text{para } t = 0 \quad T = T_1 \text{ en } x = 0 \quad \text{y } T = T_0 \text{ en } x > 0$$

Condición de borde 2:

$$\text{para } t = t \quad T = T_1 \text{ en } x = 0 \quad \text{y } T = T \text{ en } x > 0$$

Condición de borde 3 :

$$\text{Para } \theta = 00 \quad T = T_1 \text{ en } x = 0 \quad T = T_1 \text{ en } x > 0$$

Se multiplica ambos miembros por $e^{-P\theta}$

$$\alpha e^{-P\theta} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = e^{-P\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

e integrando de 0 a 00

$$\alpha \int_0^{\infty} e^{-P\theta} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} d\theta = \int_0^{\infty} e^{-P\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} d\theta$$

La integral de la izquierda es la de Laplace y la de la derecha se puede integrar por partes, dando:

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \left[C(e^{-P\theta}) \right]_0^{\infty} + P \int_0^{\infty} T e^{-P\theta} d\theta$$

Para $\theta = 0$ y para $\theta = 00$ el término entre paréntesis, se hace nulo y la otra integral es de Laplace.

Luego, la ecuación se reduce a:

$$\alpha \left(\frac{d^2 T}{dx^2} \right) = PT$$

La solución de este tipo de ecuación es:

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_0} = \text{erf} \left[\frac{x}{2} (\alpha \theta)^{-1/2} \right]$$

o

$$\frac{T - T_1}{T_0 - T_1} = \text{erf} \left[\frac{x}{2} (\alpha \theta)^{-1/2} \right]$$

$$\text{y, erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-u^2} du$$

es la integral de probabilidad y la función complemento, se define como:

$$\operatorname{erfc}(u) = 1 - \operatorname{erf}(u)$$

TABLA N° 4

VALORES DE LA FUNCION erf(u)

(u)	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0113	0,0226	0,0338	0,0451	0,0564	0,0676	0,0789	0,0901	0,1013
0,1	0,01125	0,1236	0,1348	0,1459	0,1569	0,1680	0,1790	0,1900	0,2009	0,2118
0,2	0,2227	0,2335	0,2443	0,2550	0,2657	0,2763	0,2869	0,2974	0,3079	0,3183
0,3	0,3286	0,3389	0,3491	0,3593	0,3664	0,3794	0,3893	0,3992	0,41090	0,4187
0,4	0,4284	0,4380	0,4475	0,4569	0,4662	0,4755	0,4847	0,4937	0,5027	0,5117
0,5	0,5205	0,5292	0,5379	0,5465	0,5549	0,5633	0,5716	0,5798	0,5879	0,5959
0,6	0,6039	0,6117	0,6194	0,6270	0,6346	0,6420	0,6494	0,6566	0,6638	0,6708
0,7	0,6778	0,6847	0,6914	0,6981	0,7047	0,7112	0,7175	0,7238	0,7300	0,7361
0,8	0,7421	0,7480	0,7538	0,7595	0,7651	0,7707	0,7761	0,7814	0,7867	0,7918
0,9	0,7969	0,8019	0,8068	0,8116	0,8163	0,8209	0,8254	0,8299	0,8342	0,8385
1,0	0,8427	0,8468	0,8568	0,8548	0,8586	0,8624	0,8661	0,8689	0,8733	0,8768
1,1	0,8802	0,8835	0,8868	0,8900	0,8931	0,8961	0,8991	0,9020	0,9048	0,9076
1,2	0,9103	0,9130	0,9155	0,9181	0,9205	0,9229	0,9252	0,9275	0,9297	0,9319
1,3	0,9340	0,9361	0,9381	0,9400	0,9419	0,9438	0,9456	0,9473	0,9490	0,9507
1,4	0,9523	0,9539	0,9554	0,9569	0,9583	0,9597	0,9611	0,9624	0,9637	0,9649

(Lancin)

TABLA

VALORES DE LA FUNCION erf(u)

(u)	erf(u)	(u)	erf(u)	(u)	erf(u)
1,50	0,9661	1,70	0,9838	2,00	0,9953
1,55	0,9716	1,75	0,9867	2,10	0,9970
1,60	0,9763	1,80	0,9891	2,20	0,9981
1,65	0,9804	1,90	0,9928	2,50	0,9996

(Lancin)

El calor instantáneo se calcula evaluando la gradiente de temperatura.

$$Q_i = -KA \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0}$$

$$= -KA \frac{T_0 - T_1}{\sqrt{\pi \alpha \theta}} e^{-x^2/4\alpha\theta} \Big|_{x=0}$$

$$Q_i = KA \frac{T_0 - T_1}{\sqrt{\pi \alpha \theta}}$$

El cambio total de calor es:

$$Q = \int_0^{\theta} Q_i d\theta = \int_0^{\theta} KA \frac{T_0 - T_1}{\sqrt{\pi \alpha \theta}} e^{-1/2} d\theta = 2KA (T_0 - T_1) \sqrt{\frac{\theta}{\pi \alpha}}$$

PROBLEMA:

En la instalación de un tubo subterráneo de agua, es importante conocer hasta que profundidad alcanza la temperatura de la superficie en un período de 12 horas.

Si la temperatura inicial del suelo es 40°F y la temperatura de la superficie cae a 25°F, determinar la profundidad en que se tiene 25°F, si el suelo tiene $\alpha = 0,012 \text{ pie}^2/\text{h}$.

(Kreith)

SOLUCION:

Es el caso de un sólido semi-infinito y el campo de temperatura está dado por:

$$\frac{T - T_1}{T_0 - T_1} = \text{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\theta}} \right)$$

en que:

$$T = 32^{\circ}\text{F}$$

$$T_1 = 25^{\circ}\text{F}$$

$$T_0 = 40^{\circ}\text{F}$$

se tiene:

$$\frac{32 - 25}{40 - 25} = \text{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\theta}} \right)$$

$$0,467 = \text{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\theta}} \right)$$

De las tablas:

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\theta}} = 0,44$$

$$x = 0,334 \text{ pie}$$

El tubo de agua no se congelará si está enterrado a una profundidad mayor que 0,3 pie.

Para valores finitos del coeficiente de transmisión de calor de la superficie en el caso de sólidos semi-infinitos, existen gráficos donde está la solución de la ecuación en función de $\frac{T - T_1}{T_0 - T_1}$ versus el Biot puntual $\left(\frac{hx}{K} \right)$, en que x es la distancia de la superficie. El parámetro de las curvas es el módulo de borde de Fourier $\left(\frac{h}{K} \right) \alpha \theta$

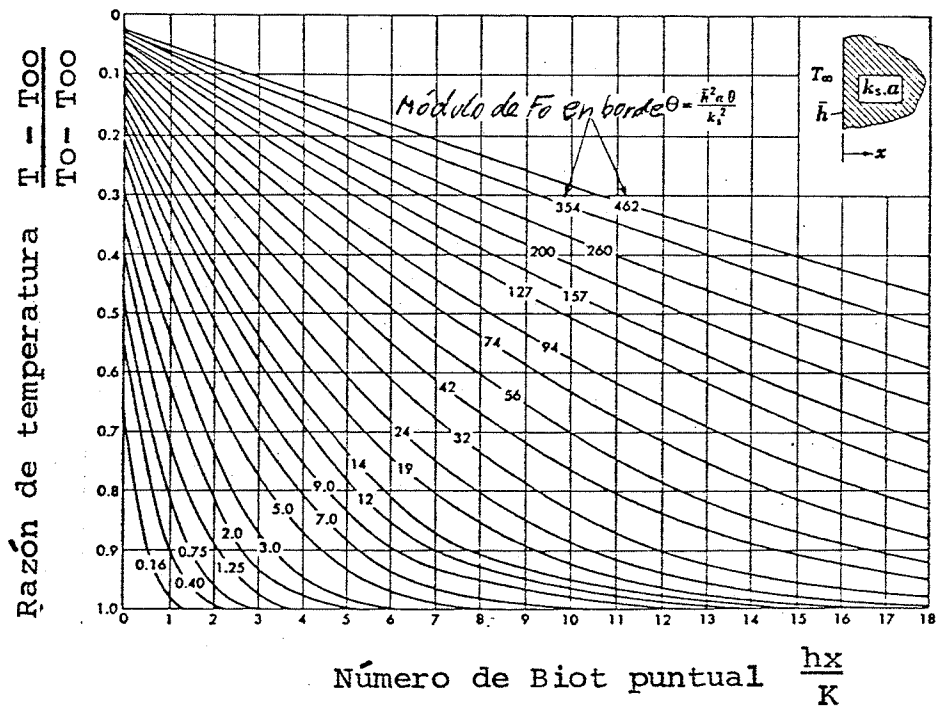
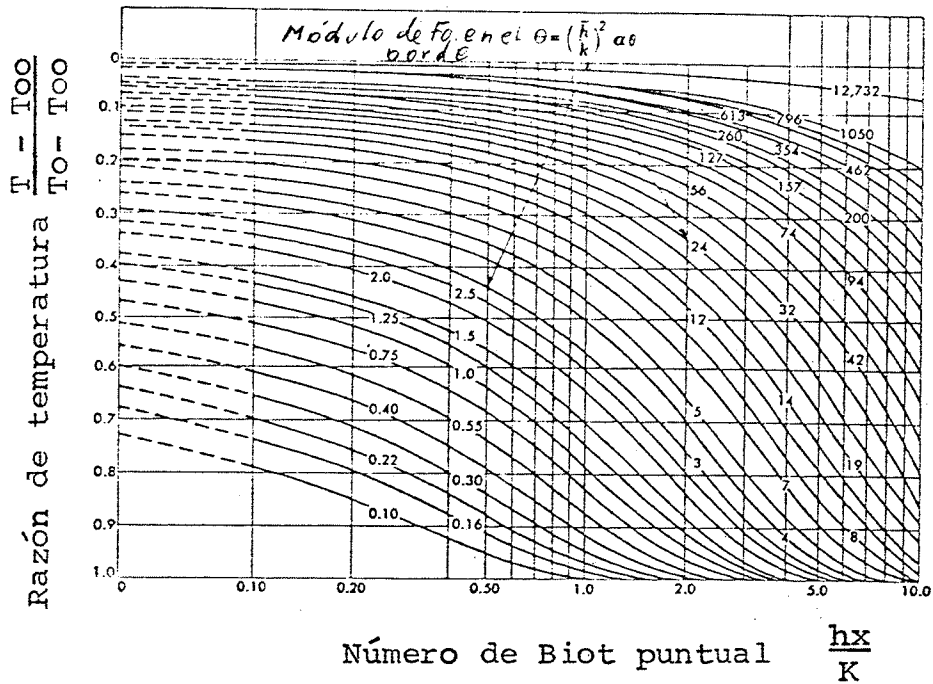


Figura N°1: Distribución de temperatura adimensional en una placa semi-infinita sometida a un cambio brusco de temperatura ambiente

(Kreith)

PROBLEMA:

Una cámara de combustión cilíndrica de 10 pulg de diámetro interior, tiene refractario de 1 pulg de espesor para que la temperatura no dañe la cubierta externa. Para conocer las tensiones producidas en el refractario, se necesita conocer la distribución de temperatura en el refractario después que se inicia la combustión.

$$T_1 = 3000^\circ\text{F}$$

$$h = 40 \text{ Btu/h pie}^2 \text{ }^\circ\text{F}$$

$$\alpha = 0,020 \text{ pie}^2/\text{h}$$

$$K = 0,6 \text{ Btu/h.pie.F}$$

$$T_0 = 100^\circ\text{F}$$

(Kreith)

SOLUCION:

El radio de curvatura de la pared es grande comparado con el espesor y el tiempo es muy corto y se puede tratar como placa semi-infinita.

Para utilizar los gráficos se debe calcular:

$$\frac{h^2 \alpha \theta}{K^2} = \frac{(40)^2 (0,02)}{(0,6)^2 (60)} = 1,48$$

$$\theta = \frac{1}{60}$$

Con los datos del gráfico se construye la tabla siguiente:

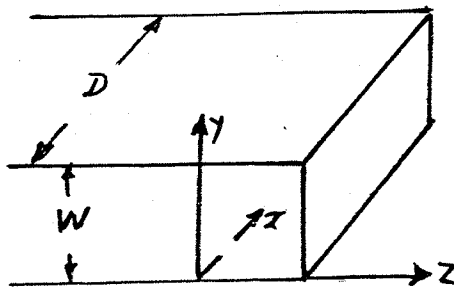
x (pulg)	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
h x/K	0,0	1,11	2,22	3,33	4,44	5,55
$\frac{T - T_1}{T_0 - T_1}$	0,38	0,7	0,9	0,97	1,0	1,0
T (°F)	1900	960	390	190	100	100

que es la distribución de temperatura pedida

5.0 CONDUCCION TRANSIENTE MULTIDIMENSIONAL

Para formas geométricas sencillas se puede encontrar la distribución de temperaturas combinando las ecuaciones unidimensionales.

Se va a analizar el caso de la barra rectangular, con una distribución inicial de temperatura $t_0(x, y)$.



Al tiempo $\theta = 0$ la barra se pone en contacto con un fluido a temperatura t_1 .

La ecuación diferencial del campo de temperatura es:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial t}{\partial \theta} \dots\dots\dots (i)$$

Con las condiciones de borde siguientes:

Condición de borde 1:

$$\text{Para } \theta = 0 \quad x = x \quad x = y \quad t = t_0(x, y)$$

Condición de borde 2:

$$\text{Para } \theta > 0 \quad x = 0 \quad y = y \quad \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{h(t - t_1)}{K}$$

Condición de borde 3:

$$\text{Para } \theta > 0 \quad x = D \quad y = y \quad - \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{h(t - t_1)}{K}$$

Condición de borde 4:

$$\text{Para } \theta > 0 \quad x = x \quad y = 0 \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{h(t - t_1)}{K}$$

Condición de borde 5:

$$\text{Para } \theta > 0 \quad x = x \quad y = w \quad - \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{h(t - t_1)}{K}$$

Se supone que:

$$t_0(x, y) = t_a(x) t_b(y)$$

y la solución final es:

$$t = t_x(x, \theta) t_y(y, \theta)$$

Reemplazando en i, la ecuación queda:

$$t_y \frac{\partial^2 t_x}{\partial x^2} + t_x \frac{\partial^2 t_y}{\partial y^2} = \frac{t_y}{\alpha} \frac{\partial t_x}{\partial \theta} + \frac{t_x}{\alpha} \frac{\partial t_y}{\partial \theta}$$

ordenando:

$$\left(\frac{\partial^2 t_x}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial t_x}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\partial^2 t_y}{\partial y^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial t_y}{\partial \theta} \right) \frac{t_x}{t_y} = 0$$

Por lo tanto, la relación $t = t_x \cdot t_y$ satisface la ecuación y la solución final se puede lograr mediante el producto de las soluciones de las ecuaciones semidimensionales siguientes:

$$\frac{\partial^2 t_x}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial t_x}{\partial \theta} \dots\dots\dots i)$$

$$y \quad \frac{\partial^2 t_y}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial t_y}{\partial \theta} \dots\dots\dots ii)$$

Con las condiciones de borde siguientes:

- Para la ecuación i)

Condición de borde 1:

$$\text{para } \theta = 0 \quad t_x = t_a(x)$$

Condición de borde 2:

$$\text{para } \theta > 0 \quad x = 0 \quad y = 0; \quad \frac{\partial t_x}{\partial x} = \frac{h}{K} (t_x - t_1)$$

Condición de borde 3:

$$\text{para } \theta > 0 \quad x = D \quad y = y; \quad -\frac{\partial t_x}{\partial x} = \frac{h}{K} (t_x - t_1)$$

- Para la ecuación ii)

Condición de borde 1:

$$\text{para } \theta = 0 \quad t_y = t_b(y)$$

Condición de borde 2:

$$\text{para } \theta > 0 \quad x = x \quad y = 0; \quad \frac{\partial t_y}{\partial y} = \frac{h}{K} (t_y - t_1)$$

Condición de borde 3:

$$\text{para } \theta > 0 \quad x = x \quad y = w \quad - \frac{\partial t_y}{\partial y} = \frac{h}{K} (t_y - t_1)$$

Luego para encontrar la solución se deberá multiplicar las soluciones de las placas infinitas de espesor D y W, respectivamente.

Para el caso de un paralelepípedo de dimensiones finitas, se encuentra por la intersección de tres placas y en el caso de un cilindro finito se encuentra por la intersección de una placa infinita y de un cilindro infinito.

Todo este procedimiento se conoce por "la aplicación de la regla de Newman".

PROBLEMA:

Un cilindro sólido de 15 cm de alto y 15 cm de diámetro tiene conductividad térmica 1,5 Kcal/h.m.C y difusividad térmica 0,00093 m²/h. Si el cilindro está inicialmente a 260°C y se comienza a enfriar en aire a 27°C (h=50 Kcal/h.m².C).

Determinar la temperatura en el centro de las caras planas, después de una hora de enfriamiento.

(Wisniak)

SOLUCION:

El cuerpo es generado mediante la intersección de un cilindro infinito de radio 7,5 cm y de una placa infinita de espesor 15 cm :

a) Para la placa infinita:

$$\frac{\alpha \theta}{\delta^2} = \frac{(0,00093)(1)}{(0,075)^2} = 0,166$$

$$\frac{K}{h \delta} = \frac{1,5}{(50)(0,075)} = 0,4$$

Con estos datos, se obtiene lo siguiente de la figura N°8:

$$1 - \frac{t - t_1}{t_0 - t_1} = 0,58 \quad 0,45$$

$$\frac{t - t_1}{t_0 - t_1} = 0,42$$

b) Para el cilindro infinito:

$$\frac{\alpha \cdot \theta}{r_0^2} = 0,166$$

$$\frac{K}{h r_0} = 0,4$$

$$\frac{r}{r_0} = 0$$

Con estos datos, se obtiene de la Figura N°8 lo siguiente:

$$1 - \frac{t_c - t_1}{t_o - t_1} = 0,17$$

$$\frac{t_c - t_1}{t_o - t_1} = 0,83$$

Luego, la temperatura buscada, se encuentra:

$$\frac{t - t_1}{t_o - t_1} = \left(\frac{t - t_1}{t_o - t_1} \right)_p \left(\frac{t_c - t_1}{t_o - t_1} \right)_c = (0,42) (0,83)$$

$$\frac{t - 27}{260 - 27} = 0,348$$

$$t = 108^\circ\text{C}$$

5.1 Gráficos Temperatura - Tiempo

Las ecuaciones deducidas para esferas, cilindros y paredes infinitas, han sido representadas gráficamente por Heissler.

En los gráficos la abscisa representa el módulo de Fourier ($\alpha \theta / \delta^2$), la ordenada representa el cambio adimensional de temperatura $\frac{t - t_1}{t_0 - t_1}$ y el recíproco del número de Nusselt es el valor del parámetro para las distintas curvas.

Las figuras siguientes dan la temperatura central t_c de las formas geométricas indicadas y se presentan gráficos que corrigen por posición.

La temperatura en una posición cualquiera se obtiene multiplicando los valores correspondientes de las ordenadas de ambas figuras.

Para intervalos de tiempo muy pequeños, es conveniente utilizar los gráficos de la Figura N° 8.

Para valores de $l/\text{Nu} > 10$ la distribución de temperatura dentro del sólido es esencialmente uniforme.

Las curvas $l/\text{Nu} = 0$ corresponden al caso de resistencia despreciable.

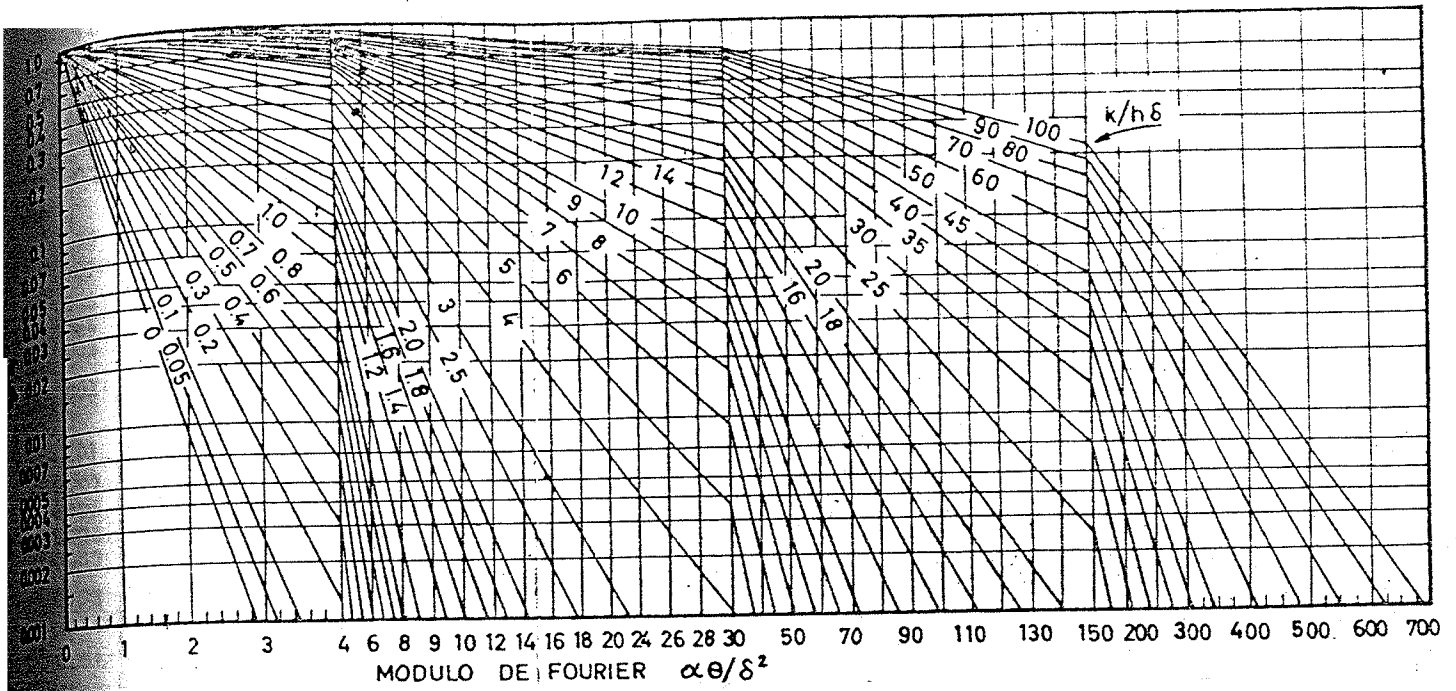


FIGURA N° 2 : GRAFICO DE HEISLER - TEMPERATURA CENTRAL DE UNA PARED INFINITA

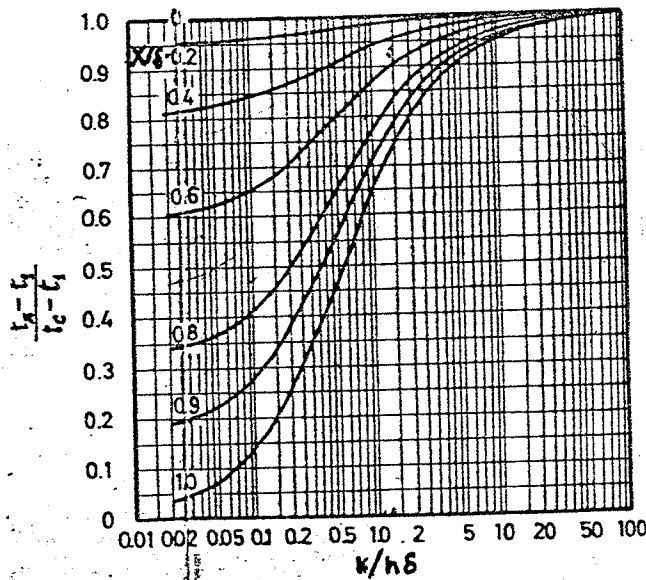


FIGURA N° 3 : CORRECCION DE POSICION

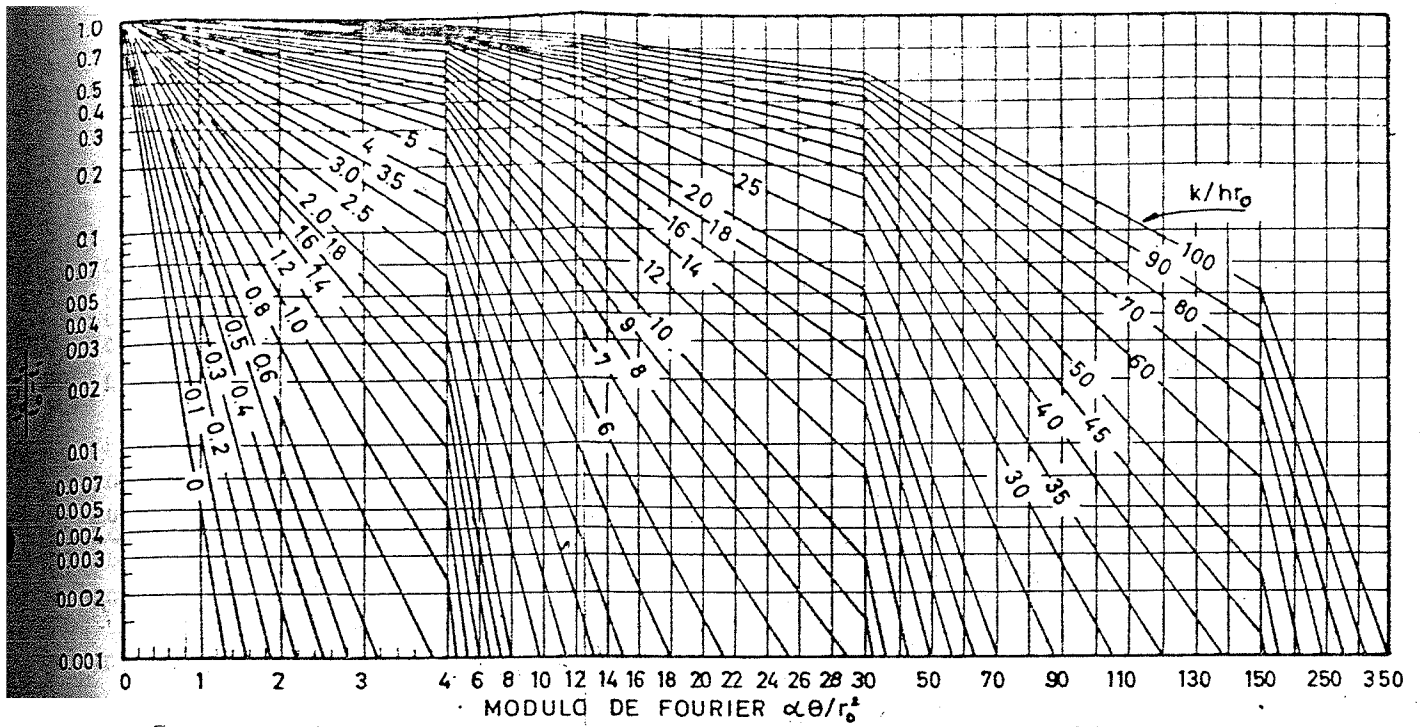


FIGURA N° 4 : GRAFICO DE HEISLER - TEMPERATURA CENTRAL DE UN CILINDRO INFINITO.

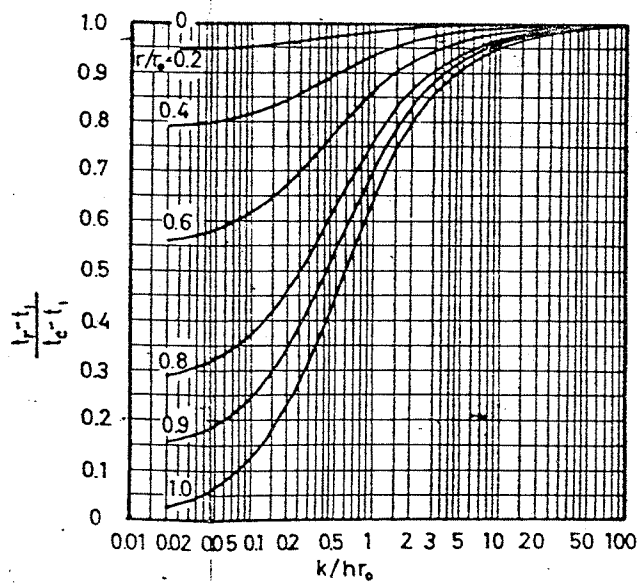


FIGURA N° 5 : CORRECCION DE POSICION.

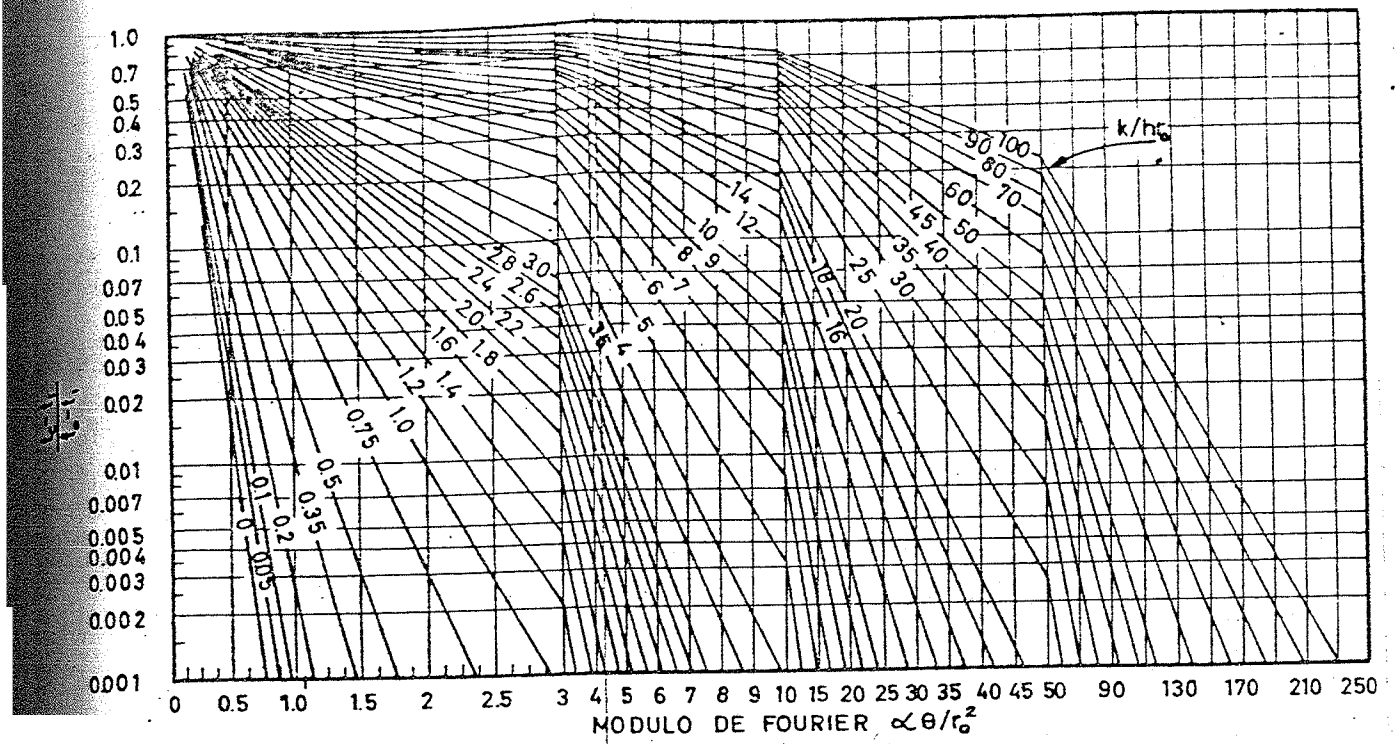


FIGURA N° 6 : GRAFICO DE HEISLER - TEMPERATURA CENTRAL DE UNA ESFERA.

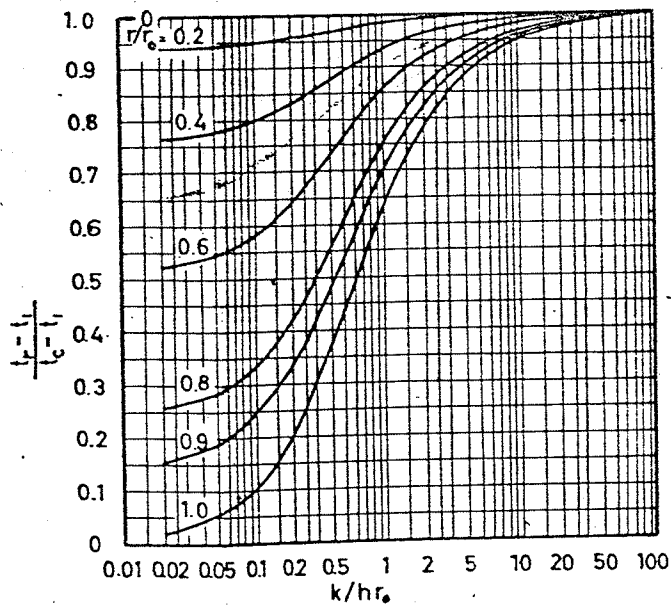


FIGURA N° 7 : CORRECCION DE POSICION.

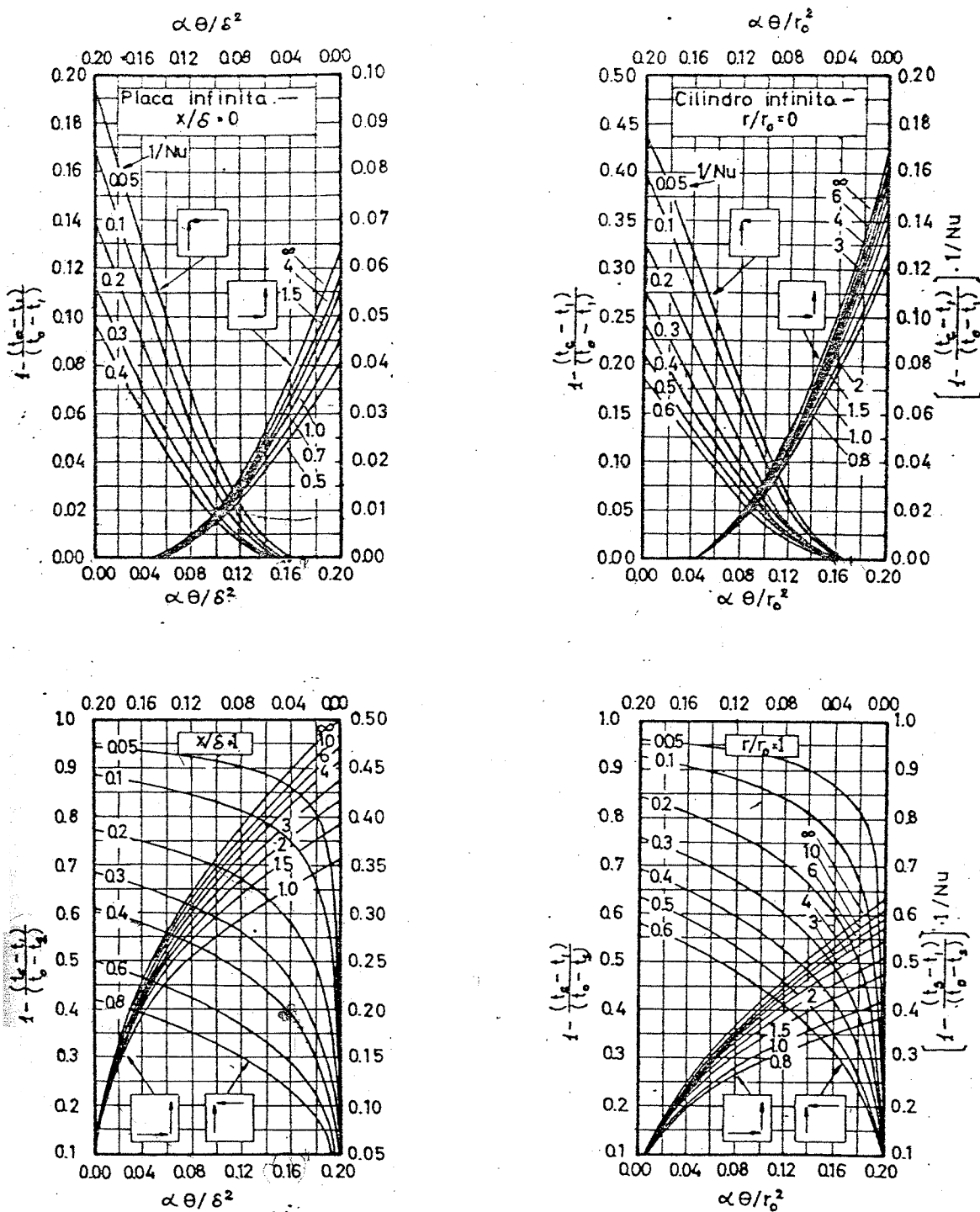


FIGURA N° 8 : TEMPERATURAS CENTRAL Y SUPERFICIAL EN CILINDRO Y PLACA INFINITA.

PROBLEMA :

Un cilindro largo de las características señaladas más abajo, se calienta en un horno hasta adquirir una temperatura uniforme de 204°C. Si le saca del horno y se enfría en aire a 27°C, determinar la temperatura en la superficie media, después de 28 minutos de enfriamiento. (Wisniak)

$$r_o = 6,3 \text{ cm}$$

$$K = 54 \text{ Kcal/h.m.C}$$

$$h = 145 \text{ Kcal/h.m}^2.\text{C}$$

$$c = 0,106 \text{ Kcal /Kg.C}$$

$$\rho = 7900 \text{ Kg/m}^3$$

SOLUCION :

$$\alpha = \frac{K}{c \rho} = \frac{54}{(0,106)(7900)} = 0,0645 \text{ m}^2/\text{h}$$

Para utilizar los gráficos de Heisler 3 y 4, se debe calcular:

$$\frac{\alpha \theta}{r_o^2} = \frac{(0,0645)(28/60)}{(0,063)^2} = 7,58$$

$$1/\text{Nu} = \frac{K}{hr_o} = \frac{54}{(145)(0,063)} = 5,90$$

$$\frac{r}{r_o} = 0,5$$

De la Figura N° 4 :

$$\frac{t_c - t_1}{t_o - t_1} = 0,08$$

y de la Figura N° 5:

$$\frac{tr - t_1}{to - t_1} = 0,98$$

multiplicando :

$$\frac{tr - t_1}{to - t_1} = 0,078$$

$$tr = 40,8^\circ\text{C}$$

5.2 Esfera con generación de calor

La ecuación que rige el campo de temperatura es:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\alpha}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{Q}{\rho C_p} \quad (i)$$

sujeta a las condiciones de borde siguientes:

Condición de borde 1 :

La temperatura en el centro de la esfera es finita :

$$r = 0 \quad T \text{ es finita}$$

Condición de borde 2 :

$$\text{para } \theta = 0 \quad T = T_i \quad \text{para } r = r$$

Condición de borde 3 :

$$\text{para } \theta > 0 \quad T = T_s \quad \text{para } r = s$$

s = superficie

$$\text{Sea } G = \frac{Q}{\rho C_p} \quad \text{y } u = rT \quad (ii)$$

luego,

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial r} = r \frac{\partial T}{\partial r} + T$$

reemplazando en (i) :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = G + \frac{\alpha}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\frac{\partial u}{\partial r} - T}{r} \right)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = G + \frac{\alpha}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = rG + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

La solución de este tipo de ecuación es:

$$u = H + Kr - \frac{G r^3}{6\alpha} + \sum e^{-n^2 \alpha \theta} [M \cos (n r) + N \operatorname{sen} (n r)]$$

H, K, M y N son constantes por determinar.

Sustituyendo en ii) queda :

$$T = \frac{H}{r} + K - \frac{G r^2}{6\alpha} + \frac{1}{r} \sum e^{-n^2 \alpha \theta} [M \cos (n r) + N \operatorname{sen}(n r)]$$

Aplicando C.B.1 :

Se tiene $H = 0$ y $M = 0$

$$T = K - \frac{G r^2}{6\alpha} + \frac{1}{r} \sum e^{-n^2 \alpha \theta} [N \operatorname{sen} (n r)] \quad (\text{iv})$$

Aplicando C.B.2 :

$$T_i = K - \frac{G r^2}{6\alpha} + \frac{1}{r} \sum N \operatorname{sen} (n r) \quad (\text{iii})$$

Aplicando C.B.3 :

$$T_s = K - \frac{G r^2}{6\alpha} + \frac{1}{s} \sum N e^{-n^2 \alpha \theta} \operatorname{sen} (n s)$$

Para que se cumpla la relación anterior, debe ser :

$$\operatorname{sen} (n s) = 0 \quad \text{para } n s = \sqrt{\frac{\pi}{s}}; \quad n = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{s}}}{s}$$

Luego,

$$T_s = K - \frac{G s^2}{6\alpha} \quad \text{y} \quad K = T_s + \frac{G s^2}{6\alpha}$$

reemplazando en iii), se tiene :

$$T_i = T_s + \frac{G s^2}{6\alpha} - \frac{G r^2}{6\alpha} + \frac{1}{r} \sum N \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{\frac{\pi}{s}}}{s} r \right)$$

$$0 = (T_s - T_i) + \frac{G}{6\alpha} (s^2 - r^2) + \frac{1}{r} \sum N \operatorname{sen} \left(\frac{y \tilde{\eta}}{s} r \right)$$

$$T_i - T_s = \frac{G}{6\alpha} (s^2 - r^2) + \frac{1}{r} \sum N \operatorname{sen} \left(\frac{y \tilde{\eta}}{s} r \right)$$

$$r (T_i - T_s) = \frac{G r}{6\alpha} (s^2 - r^2) + \sum N \operatorname{sen} \left(\frac{y \tilde{\eta}}{s} r \right)$$

$$r (T_i - T_s) - \frac{G r}{6\alpha} (s^2 - r^2) = \sum N \operatorname{sen} \left(\frac{y \tilde{\eta}}{s} r \right)$$

Los valores de N son los coeficientes de una serie de Fourier y por lo tanto, cumplen :

$$N_y = \frac{2}{s} \int_0^s \left[r t_i - \frac{G r}{6\alpha} (s^2 - r^2) \right] \operatorname{sen} \left(\frac{y \tilde{\eta}}{s} r \right) dr$$

Awbery logró encontrar la solución siguiente (Jacob, 1949) :

$$N_y = (-1)^y \frac{2 G s^3}{y^3 \tilde{\eta}^3 \alpha} - \frac{2 s t_i}{y \tilde{\eta}}$$

t_i : temperatura que tiene la esfera para tiempo cero.

reemplazando en iv) :

$$T = T_s + \frac{G s^2}{6\alpha} - \frac{G r^2}{6\alpha} + \frac{1}{r} \sum N_y e^{-\frac{y^2 \tilde{\eta}^2}{s^2} \alpha \theta} \operatorname{sen} \frac{y \tilde{\eta}}{s} r$$

$$T - T_s = \frac{G}{6\alpha} (s^2 - r^2) + \frac{1}{r} \sum N_y e^{-\frac{y^2 \tilde{\eta}^2}{s^2} \alpha \theta} \operatorname{sen} \frac{y \tilde{\eta}}{s} r$$

$$T - T_s = \frac{G}{6\alpha} (s^2 - r^2) + \frac{1}{r} \sum N e^{-\frac{y^2 \tilde{\eta}^2}{s^2} \alpha \theta} \operatorname{sen} \frac{y \tilde{\eta}}{s} r$$

5.3 Paralelepípedo recto con generación de calor

Como el paralelepípedo es formado por la intersección de dos placas infinitas, el problema se reduce a estudiar el caso de placa infinita con generación de calor sometida a enfriamiento .

Para transmisión unidimensional, se tiene:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{Q}{\rho c_p}$$

que puede resolverse bajo los siguientes supuestos:

- 1) La placa es homogénea e isótropa.
- 2) Las propiedades térmicas son constantes.
- 3) Los coeficientes de transmisión de calor son constantes.
- 4) Al tiempo cero la temperatura de la placa es uniforme.
- 5) La temperatura del medio enfriador es constante.
- 6) La generación de calor es constante.

Beek y Meffert plantean lo siguiente:

El origen de la coordenada está en el centro de la placa y la solución es la siguiente:

$$\frac{T - T_a}{T_o - T_a} = \frac{P_o}{2} \left(1 - \frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{Bi} \right) + \sum \left(1 - \frac{P_o}{\beta n^2} \right) A_n e^{(-\beta n^2 Fo)}$$

en que :

$$A_n = \frac{2 \operatorname{sen}(\beta n)}{\beta n + \operatorname{sen} \beta n \cos \beta n}$$

T_0 = Temperatura inicial

T_a = Temperatura del medio ambiente

$Po = \frac{Q X^2}{K (T_0 - T_a)}$, Número de Pomerantser

X = Distancia menor al centro

β = Número característico

La temperatura en el centro de la placa ($x = 0$) está dada por:

$$\frac{T_{x=0} - T_a}{T_0 - T_a} = \frac{Po}{2} \left(1 + \frac{2}{Bi} \right) + \sum_1^{\infty} \left(1 - \frac{Po}{\beta n^2} \right) A_n e^{-\beta n^2 Fo}$$

La temperatura media de la placa que es la temperatura relacionada con el flujo de calor es:

$$\frac{T - T_a}{T_0 - T_a} = \frac{Po}{3} \left(1 + \frac{2}{Bi} \right) + \sum_1^{\infty} \left(1 - \frac{Po}{\beta n^2} \right) B_n e^{-\beta n^2 Fo}$$

en que :

$$B_n = A_n \frac{\text{sen } \beta n}{\beta n}$$

Si $Fo > 0,2$, sólo es necesario el primer término y la ecuación para la temperatura del centro queda:

$$\frac{T_{x=0} - T_a}{T_0 - T_a} = \frac{Po}{2} \left(1 + \frac{2}{Bi} \right) + \left(1 - \frac{Po}{\beta_1^2} \right) A_1 e^{-\beta_1^2 Fo}$$

La ecuación para la temperatura media es:

$$\frac{T - T_a}{T_0 - T_a} = \frac{Po}{3} \left(1 + \frac{3}{Bi} \right) + \left(1 - \frac{Po}{\beta_1^2} \right) B e^{-\beta_1^2 Fo}$$

y la temperatura de la superficie de la placa puede ser calculada por medio de:

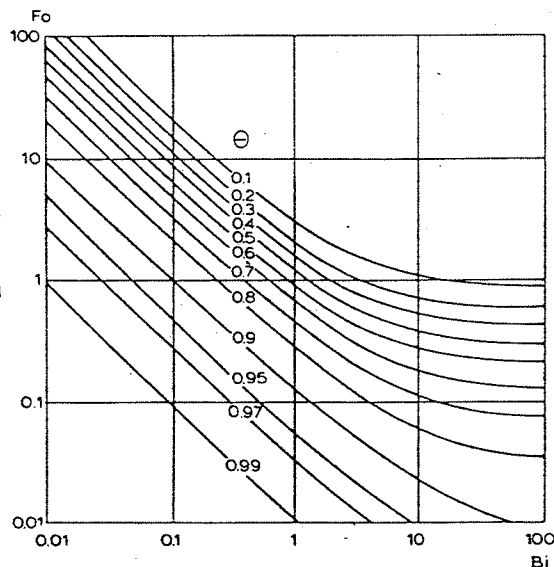
$$\frac{T_s - T_a}{T_o - T_a} = \frac{Po}{Bi} + \left(1 - \frac{Po}{\beta_1^2}\right) A_1 \cos \beta_1 e^{-\beta_1^2 Fo}$$

5.4 Enfriamiento sin generación de calor

La temperatura central de un cuerpo con transmisión de calor en tres direcciones es:

$$\left(\frac{T - T_a}{T_o - T_a}\right)_{x y z} = \left(\frac{T - T_a}{T_o - T_a}\right)_x \left(\frac{T - T_a}{T_o - T_a}\right)_y \left(\frac{T - T_a}{T_o - T_a}\right)_z$$

Para la temperatura central de una placa se puede utilizar el gráfico de Dalglish y Ede.



$$\theta = \frac{T - T_a}{T_o - T_a}$$

FIGURA N° 9 : Gráfico de Dalglish y Ede para la temperatura central de placa.

Para las etapas iniciales del enfriamiento, el método presenta error apreciable.

Otra solución gráfica más completa es la de Meffert (Beek y Meffert)

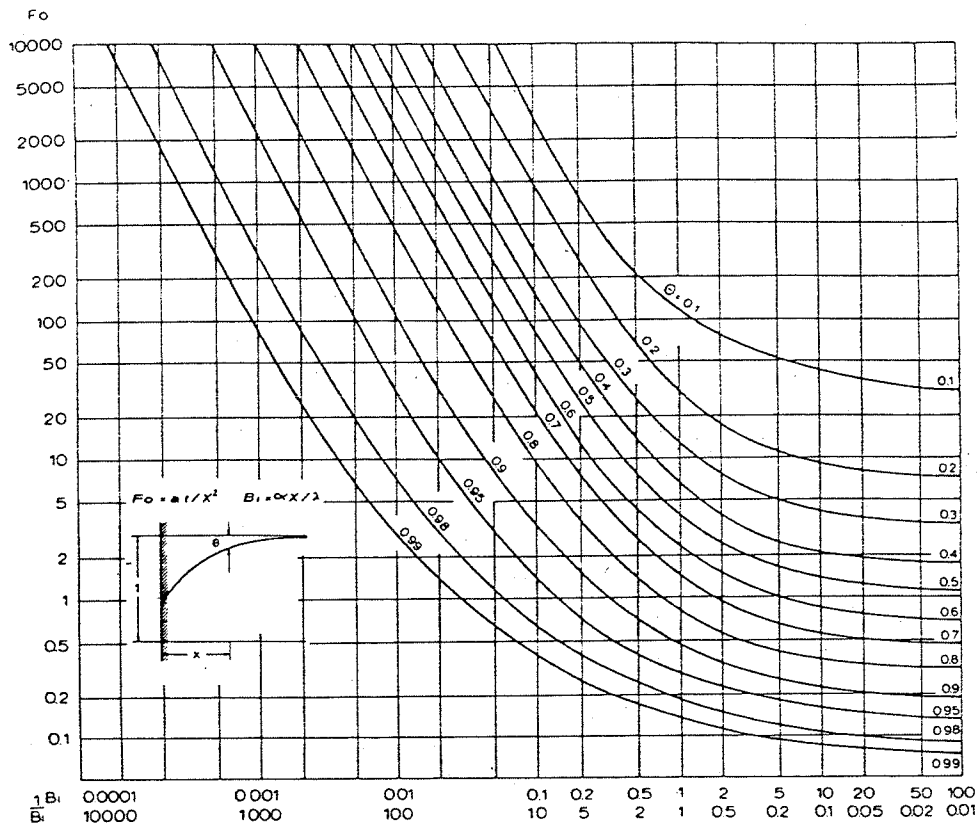


FIGURA N° 10 : Gráfico de Meffert para la temperatura en un cuerpo semi-infinito.

Es posible utilizarlo hasta el momento en que una cara de la placa alcance la temperatura que tenía la otra placa.

En el caso de tener que calcular el flujo de calor al cuerpo es necesario conocer la temperatura de la superficie del cuerpo:

$$\left(\frac{T - T_a}{T_o - T_a} \right)_s = A e^{(B \frac{h}{x} \sqrt{K t})}$$

las constantes son: $A = 0,982$ $B = -0,919$

Si :

$$\left(\frac{T - T_a}{T_o - T_a} \right)_s > 0,3$$

las constantes son:

$$A = 0,409$$

$$B = 0,218$$

La temperatura adimensional de la superficie, se puede obtener con el gráfico de Grigull (Beek y Meffert)

Temperatura adimensional

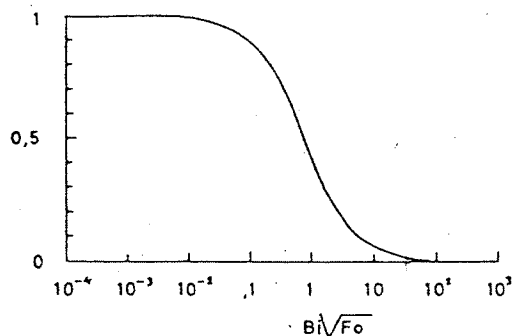


FIGURA N° 11 : Temperatura adimensional de superficie de una placa.

En el caso de la temperatura central de la placa infinita sin generación de calor y considerando sólo el primer término.

$$\left(\frac{T - T_a}{T_o - T_a} \right)_c = A_1 e^{-\beta_1^2 Fo}$$

$$\circ \left(\frac{T - T_a}{T_o - T_a} \right)_c = j_c e^{-\beta_1^2 Fo}$$

y en el caso de la temperatura media :

$$\left(\frac{T - T_a}{T_o - T_a} \right)_m = B_1 e^{-\beta_1^2 Fo}$$

$$\circ \quad \left(\frac{T - T_a}{T_o - T_a} \right)_m = j_m e^{-l^2 Fo}$$

A su vez f se puede aproximar a 1/10 del tiempo de enfriamiento.

En el caso de un cuerpo en que se produce transmisión de calor, según los tres ejes se tiene:

$$\frac{1}{f_{xyz}} = \frac{1}{f_x} + \frac{1}{f_y} + \frac{1}{f_z}$$

$$\text{y } j_{xyz} = j_x \cdot j_y \cdot j_z$$

Por lo tanto, el tiempo de enfriamiento es:

$$t = f_{xyz} \log \left(j_{xyz} \frac{1}{\frac{T - T_a}{T_o - T_x}} \right)$$

Pero, las etapas iniciales del enfriamiento no son representadas por esta función y sólo se tiene una buena aproximación para:

$$\frac{T - T_a}{T_o - T_x} = 0,6$$

Si se aplica la simplificación:

$$f \frac{\alpha}{x^2} \approx 1 + \frac{2}{Bi}$$

el 1/10 del tiempo de enfriamiento se encuentra rápidamente.

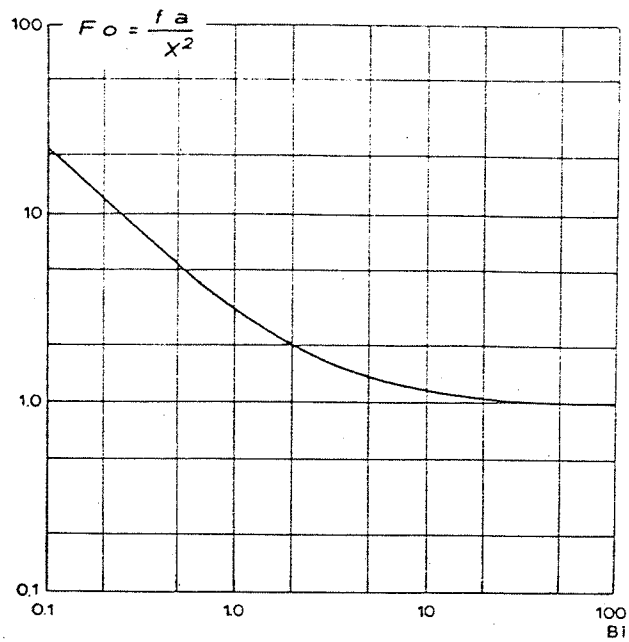


FIGURA N° 12 : Relación entre Fo y Bi para placa

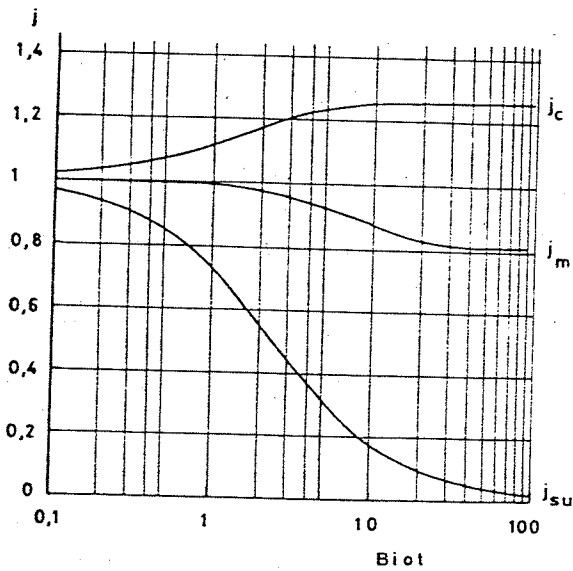


FIGURA N° 13 : Factor de forma para la superficie, centro y media de una placa.

5.5 Enfriamiento con generación de calor

En los productos con generación de calor se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{Q}{\rho c_p}$$

para

$$t = 0 \quad \text{y} \quad x = 0 \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

hay que recordar que el cuerpo tiene temperatura uniforme al comienzo del proceso:

$$\frac{dT}{d\theta} = \frac{Q}{\rho c_p}$$

Se produce un alza de temperatura que depende de las características específicas del producto; por eso se llama calentamiento adiabático. Después la temperatura empieza a descender manteniendo una diferencia entre la temperatura del objeto y la del medio refrigerante.

Después que ha pasado bastante tiempo, esto significa números de Fourier grandes y despreciando los términos pequeños, se tiene:

- para temperatura del centro:

$$\left(\frac{T - T_a}{T_o - T_a} \right)_{ce} = \frac{Po}{2} \left(1 + \frac{3}{Bi} \right)$$

- para la temperatura media:

$$\left(\frac{T - T_a}{T_o - T_a} \right)_m = \frac{Po}{3} \left(1 + \frac{3}{Bi} \right)$$

- para la temperatura de la superficie:

$$\left(\frac{T - T_a}{T_o - T_a} \right)_s = \frac{Po}{Bi}$$

reemplazando Po , se tiene:

- temperatura del centro:

$$(T_c - T_a)_c = \frac{Q X^2}{2K} \left(1 + \frac{2}{Bi} \right)$$

- temperatura media:

$$(T_c - T_a)_m = \frac{Q X^2}{K} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3}{Bi} \right)$$

- temperatura de la superficie:

$$(T_c - T_a)_s = \frac{Q X^2}{K} \frac{1}{Bi}$$

y suponiendo válido:

$$\frac{f \alpha}{X^2} = 1 + \frac{2}{Bi}$$

se tiene:

$$(T_c - T_a)_c = \frac{Q}{2K} f \alpha$$

Solución del primer término para placa infinita con generación de calor.

La ecuación siguiente:

$$\left(\frac{T - T_a}{T_o - T_a} \right)_c = \frac{Po}{2} \left(1 + \frac{2}{Bi} \right) + \left(1 - \frac{Po}{\beta_1^2} \right) A_1 e^{-\beta_1^2 Fo}$$

transformada queda:

$$\left(\frac{T - T_a}{T_o - T_a} \right)_c - \frac{Po}{2} \left(1 + \frac{2}{Bi} \right) = \left(1 - \frac{Po}{\beta_1^2} \right) A_1 e^{-\beta_1^2 Fo}$$

$$\left(\frac{T - T_a}{T_o - T_a} \right)_c - \left(\frac{T_c - T_a}{T_o - T_a} \right)_{ce} = \left(1 - \frac{Po}{\beta_1^2} \right) A_1 e^{-\beta_1^2 Fo}$$

Dividiendo ambos miembros por $1 - \left(\frac{T_c - T_a}{T_o - T_a} \right)_{ce}$ y reemplazando en el de la derecha, queda:

$$\frac{\left(\frac{T - T_a}{T_o - T_a} \right)_c - \left(\frac{T_c - T_a}{T_o - T_a} \right)_{ce}}{1 - \left(\frac{T_c - T_a}{T_o - T_a} \right)_{ce}} = \frac{1 - \frac{Po}{\beta_1^2}}{1 - \frac{Po}{2} \left(1 + \frac{2}{Bi} \right)} A_1 e^{-\beta_1^2 Fo}$$

$$\frac{T - T_c}{T_o - T_c} = jch \cdot j_c e^{-\beta_1^2 Fo}$$

$$y \quad jch = \frac{1 - \frac{Po}{\beta_1^2}}{1 - \frac{Po}{2} \left(1 + \frac{2}{Bi} \right)}$$

La generación de calor influye en el tiempo de enfriamiento y puede expresarse como un factor de retraso térmico. Los valores de β_1 pueden obtenerse de la figura:

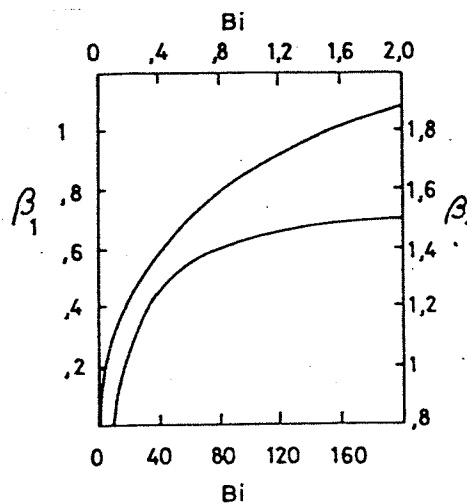


FIGURA N° 14 : Valores del número característico β_1

y también de:

$$\frac{1}{\beta_1^2} = \frac{1}{2,303} \frac{f \cdot \alpha}{x^2}$$

reemplazando en jch, queda:

$$jch = \frac{1 - \frac{Po}{2,303} \frac{f \cdot \alpha}{x^2}}{1 - \frac{Po}{2} \left(1 + \frac{2}{Bi}\right)}$$

El enfriamiento es posible si se cumple:

$$\frac{Po}{2} \left(1 + \frac{2}{Bi}\right) \leq 1$$

Para números de Biot muy grandes se produce enfriamiento si $Po < 2$.

Beek y Meffert definen un "radio seguro" que sería el tamaño de un cuerpo para que cierta diferencia de temperatura dada no se exceda.

En el producto, se tiene:

$$T_c - T_{su} = \frac{Q x^2}{2K}$$

luego,

$$x^2 = \frac{2K \Delta T}{Q}$$

$$x = \sqrt{\frac{2K \Delta T}{Q}} = \text{radio seguro} = R \Delta T$$

La relación es válida cuando aumenta Q con la temperatura; en este caso se recomienda tomar el nivel máximo de generación de calor.

solución para paralelepípedo recto con generación de calor, con el primer término:

En este caso de transmisión de calor multidimensional se utiliza un factor de forma N que se obtiene de la figura siguiente:

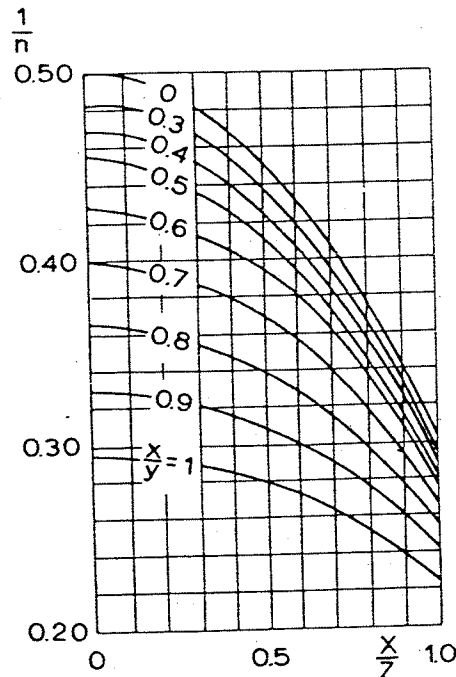


FIGURA N° 15 : Factor de forma en función de las dimensiones.

Respecto a la dimensión más pequeña, se tiene la ecuación siguiente:

$$\left(\frac{T - T_a}{T_o - T_a} \right)_c = \frac{Po}{N} \left(1 + \frac{2}{Bi} \right) + \left(1 - \frac{Po}{\beta_1^2} \right) A_1 e^{-\beta_1^2 Fo}$$

y

$$\left(\frac{T_c - T_a}{T_o - T_a} \right)_{ce} = \frac{Po}{N} \left(1 + \frac{2}{Bi} \right)$$

o

$$\left(\frac{T_c - T_a}{T_o - T_a} \right)_{ce} = \frac{Q x^2}{N K} \left(1 + \frac{2}{Bi} \right)$$

El factor de retraso térmico es:

$$jch = \frac{1 - \frac{Po}{\beta_1}}{1 - \frac{Po}{N} \left(1 + \frac{2}{Bi}\right)}$$

y β_1 cumple:

$$\frac{1}{\beta_1^2} = \frac{1}{\beta_1 X^2} + \left(\frac{X}{Y}\right)^2 \frac{1}{\beta_1 X^2} + \left(\frac{X}{Y}\right)^2 \frac{1}{\beta_1 X^2}$$

Por otra parte, si se utilizan las simplificaciones vistas anteriormente, se tiene:

$$jch = \frac{1 - \frac{Po \times \frac{\alpha}{2,303} f_{xyz}}{X}}{1 - \frac{Po \times \left(1 + \frac{2}{Bi}\right)}{N}}$$

$$y \quad \frac{1}{f_{xyz}} = \frac{1}{f_x} + \frac{1}{f_y} + \frac{1}{f_z}$$

También se tiene:

$$\frac{f \cdot \alpha}{X} = 1 + \frac{2}{Bi}$$

$$y \quad \left(\frac{T_c - T_a}{T_o - T_a}\right)_{ce} = \frac{Q \alpha f}{NK} = \frac{Q f}{Ncp}$$

Como N y f son dependientes del cuerpo, los autores nombrados presentan relaciones entre el 1/10 del tiempo de enfriamiento y la temperatura residual para cuerpos rectangulares.

Geometría	$f \frac{\alpha}{X^2} \left \left(\frac{T_c - T_a}{T_o - T_a} \right)_{ce} \frac{\alpha}{K^2} \frac{cp}{Q} \left \left(\frac{T_c - T_a}{T_o - T_a} \right)_{ce} \frac{cp}{fQ} \right. \right. ^{108.-}$
Placa	$1 + \frac{2}{Bi} \left \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{Bi} \right) \right. \left. \left \frac{1}{2} \right. \right.$
Varilla cuadrada	$1/2 \left(1 + \frac{2}{Bi} \right) \left 1/3,4 \left(1 + \frac{2}{Bi} \right) \right. \left. \left 1/1,7 \right. \right.$
Cubo	$1/3 \left(1 + \frac{2}{Bi} \right) \left 1/4,5 \left(1 + \frac{2}{Bi} \right) \right. \left. \left 1/1,5 \right. \right.$

5.6 Cilindro finito

Para un cilindro finito a temperatura inicial uniforme expuesto a un ambiente a temperatura constante y que tiene una resistencia convectiva de superficie despreciable, el campo de temperatura es:

$$\frac{T_s - T}{T_s - T_i} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 (-1)^{m+1} \cos \left(\beta_m \frac{x}{l} \right)}{\beta_m} \cdot \frac{2 J_0 \left(\beta_n \frac{r}{R} \right)}{R^n J_1 \left(\beta_n \right)} e \left[- \left(\frac{\beta_n^2}{R^2} \right) + 4 \frac{\beta_m^2}{l^2} \alpha t \right]$$

en que:

β_m : raíz de la función coseno

β_n : raíz de la función de Bessel

T_s : Temperatura del medio ambiente

T_i : Temperatura inicial

con las condiciones de borde siguientes:

Condición de borde 1 :

$$\text{Para } t = 0 \quad \frac{T_s - T}{T_s - T_i} (r, z, 0) = 1$$

Condición de borde 2 :

$$\text{Para } r = r_0 \quad \frac{T_s - T}{T_s - T_i} (r_0, z, t) = 0$$

Condición de borde 3 :

$$\text{Para } z = L \text{ y } z = -L \quad \frac{T_s - T}{T_s - T_i} (r, L, t) = \frac{T_s - T}{T_s - T_i} (r, -L, t) = 0$$

Las series del campo de temperatura convergen rápidamente para números de Fourier, mayores que 0,2 (Singh, 1982) y tiempos largos, cuando ha pasado algún tiempo es posible considerar sólo los dos primeros términos (Yañez, 1983).

El campo de temperatura queda:

$$\frac{T_s - T}{T_s - T_i} = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \frac{2}{\beta_m J_1(\beta_n)} \frac{(-1)^{m+1} \cos(\beta_m \frac{2x}{1})}{\beta_m}$$

$$2 \frac{J_0(\beta_n r/R)}{\beta_n} e^{\left[-\frac{(\beta_n^2)}{R^2} + 4 \frac{\beta_m^2}{e^2} \alpha t \right]}$$

6.0 MÉTODOS NUMÉRICOS Y GRÁFICOS EN CONDUCCIÓN TRANSIENTE

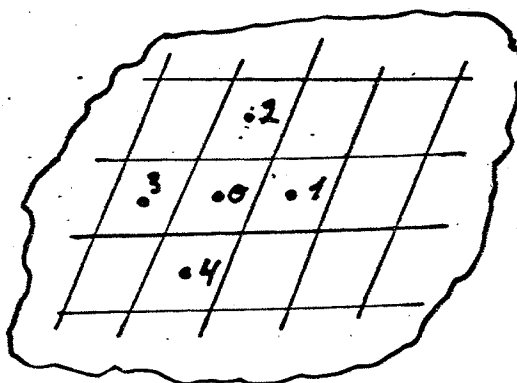
En forma análoga al caso ya estudiado, se procede a reemplazar el cuerpo en cuestión por una red de nodos y barras ficticias.

Lo que se logra es que la ecuación diferencial se transforma en un sistema de ecuaciones diferenciales finitas que expresan la temperatura futura de un nodo en función de su temperatura actual y la de los nodos vecinos.

Este sistema de ecuaciones se puede resolver por medio de un proceso iterativo.

6.1 Método numérico

Se aplicará lo dicho a un sólido de espesor b . En él se construye una red de cuadrados de lados Δx y Δx , tal como está en la figura N° 16.



Para el tiempo $\theta = 0$ las temperaturas de los nodos 0, 1, 2, 3 y 4 son t_0 , t_1 , t_2 , t_3 y t_4 , respectivamente.

El nodo 0 pasa de t_0 a t'_0 en el tiempo $\Delta\theta$ y si éste es bastante pequeño se puede utilizar la ecuación de Fourier para pared plana. El balance térmico del nodo 0 es el siguiente:

$$K \Delta x_b \frac{t_2 - t_0}{\Delta x} + K \Delta x_b \frac{t_3 - t_0}{\Delta x} + K \Delta x_b \frac{t_4 - t_0}{\Delta x} + K \Delta x_b \frac{t_1 - t_0}{\Delta x} \\ = \rho c b \frac{(\Delta x)^2}{\Delta \theta} (t'_0 - t_0)$$

Simplificando y ordenando:

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - 4 t_0 = \rho c \frac{(\Delta x)^2}{K \Delta \theta} (t'_0 - t_0)$$

Definiendo:

$$M = \frac{K}{\rho c} \frac{\Delta \theta}{(\Delta x)^2} = \alpha \frac{\Delta \theta}{(\Delta x)^2}$$

Reemplazando, se tiene:

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - 4 t_0 = \frac{1}{M} (t'_0 - t_0)$$

$$M (t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - 4 t_0) = t'_0 - t_0$$

$$y \quad t'_0 = M \left[t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \left(\frac{1}{M} - 4 \right) t_0 \right]$$

Expresiones análogas se pueden escribir para cada nodo de la malla.

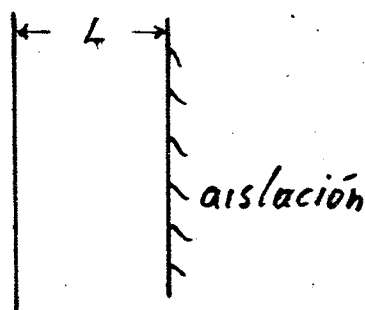
Hay que elegir valores de M adecuados y se puede seguir un procedimiento iterativo que indique las variaciones

de temperatura de cada nodo para intervalos de tiempo Δt sucesivos.

Para aclarar el procedimiento se resolverá el problema siguiente:

PROBLEMA:

Sea una placa infinita con las características señaladas más abajo y que inicialmente está a 100°C al tiempo $t = 0$. Se sube bruscamente la temperatura de la cara $x = 0$ a 300°C . Se pide determinar la variación de la temperatura interior con el tiempo.



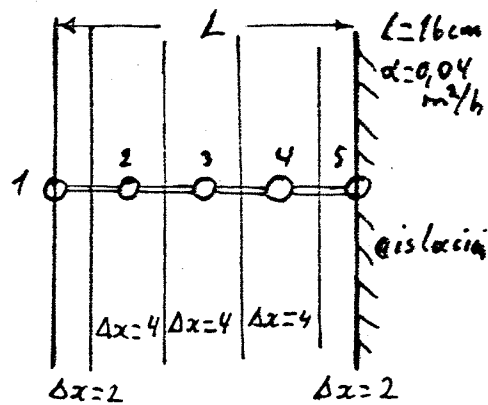
$$L = 16 \text{ cm}$$

$$= 0,04 \text{ m}^2/\text{h}$$

(Wisniak)

SOLUCION:

La placa se divide en cuatro secciones de 4 cm cada una, y la mitad de una sección se ubica en contacto con la cara exterior y la otra mitad al lado de la pared adiabática y se tiene una situación de nodos y barras como indica la figura siguiente:



Para el nodo 2 se puede plantear el balance térmico siguiente por unidad de espesor:

$$K \Delta x (1) \frac{t_1 - t_2}{\Delta x} + K \Delta x (1) \frac{t_3 - t_2}{\Delta x} = c \rho \Delta x \Delta x (1) \frac{t'_2 - t_2}{\Delta \theta}$$

Definiendo:

$$M = \frac{K \Delta \theta}{c \rho (\Delta x)^2} = \alpha \frac{\Delta \theta}{(\Delta x)^2}$$

Ordenando y despejando, queda:

$$t'_2 = M \left[t_1 + t_3 + \left(\frac{1}{M} - 2 \right) t_2 \right]$$

En forma análoga se obtienen:

$$t'_3 = M \left[t_2 + t_4 + \left(\frac{1}{M} - 2 \right) t_3 \right]$$

$$t'_4 = M \left[t_3 + t_5 + \left(\frac{1}{M} - 2 \right) t_4 \right]$$

Para el nodo 5 se puede considerar la superficie adiabática como una línea de simetría y se tendría:

$$t'_5 = M \left[t_4 + t_4 + \left(\frac{1}{M} - 2 \right) t_5 \right]$$

Se tiene el sistema de ecuaciones y hay que elegir el valor de M , aparentemente se podría elegir cualquier valor; pero, físicamente se debe cumplir:

$$\frac{1}{M} - 2 \geq 0$$

$$M \leq 1/2$$

o sea,

$$\Delta\theta \leq \frac{(\Delta x)^2}{2\alpha}$$

Eligiendo el valor mayor $M = \frac{1}{2}$, se tiene:

$$t'_2 = \frac{1}{2} (t_1 + t_3)$$

$$t'_3 = \frac{1}{2} (t_2 + t_4)$$

$$t'_4 = \frac{1}{2} (t_3 + t_5)$$

$$t'_5 = \frac{1}{2} (2 t_4) = t_4$$

los intervalos de tiempo se obtienen de:

$$\Delta\theta = \frac{(\Delta x)^2}{2\alpha} = \frac{(0,04)^2}{2 (0,04)} = 0,02 \text{ h (1,2 min)}$$

Con estos datos y relaciones se puede construir la tabla siguiente.

Para el tiempo cero se recomienda utilizar una temperatura media superficial entre dos valores extremos.

θ min	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
0	200	100	100	100	100
1,2	300	150	100	100	100
2,4	300	200	125	100	100
3,6	300	212,5	150	112,5	100
4,8	300	225	162,5	125	112,5
6,0	300	231,3	175	137,5	125
7,2	300	237,5	184,4	150	137,5
8,4	300	242,2	193,8	161	150
9,6	300	246,9	201,6	171,9	161
10,8	300	250,8	236	181,3	171,9

Si se elige M menor, mejora la precisión del resultado. Por ejemplo: $M = \frac{1}{3}$

$$t'_2 = \frac{1}{3} (t_1 + t_2 + t_3)$$

$$t'_3 = \frac{1}{3} (t_2 + t_3 + t_4)$$

$$t'_4 = \frac{1}{3} (t_3 + t_4 + t_5)$$

$$t'_5 = \frac{1}{3} (2 t_4 + t_5)$$

$$\Delta\theta = \frac{(0,04)^2}{3(0,04)} = 0,0133 \text{ h} = 0,8 \text{ min}$$

La tabla queda:

θ min	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
0	200	100	100	100	100
0,8	300	133,3	100	100	100
1,6	300	177,8	111,1	100	100
2,4	300	196,3	129,6	103,7	100
3,2	300	208,6	143,2	111,1	102,5
4,0	300	217,3	154,3	118,9	108,2
4,8	300	223,9	163,5	127,1	115,3
5,6	300	229,1	171,5	135,3	123,2
6,4	300	233,5	178,6	143,3	131,3

PROBLEMA:

Sea una placa infinita de las características señaladas más abajo y que inicialmente está a la temperatura uniforme de 0°C . Si al tiempo $\theta = 0$ se pone la placa en contacto con un fluido a 1000°C , determinar la variación de la temperatura con el tiempo.

$$\alpha = 0,05 \text{ m}^2/\text{h} ; K = 10\text{Kcal}/\text{h.m.C} ; h = 50\text{Kcal}/\text{h.m}^2.\text{C}$$

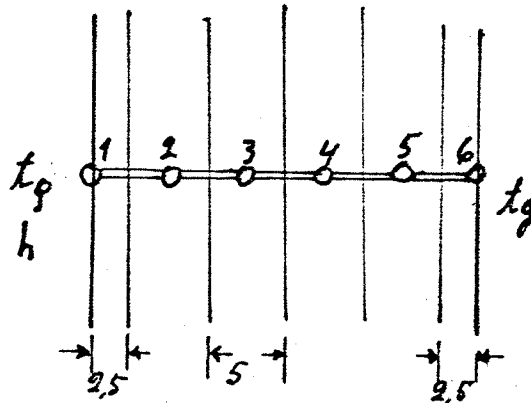
$$L = 25 \text{ cm} , \text{ espesor } l$$

(Wisniak)

SOLUCION:

La placa se divide en 5 secciones de 5 cm cada una y la mitad de una sección se coloca en contacto con el fluido

y la otra mitad al otro lado de la placa y se tiene una situación de barras y nodos como indica la figura siguiente:



Para el nodo 1, se tiene:

$$h\Delta x (1) (t_g - t_1) + K\Delta x(1) \frac{t_2 - t_1}{\Delta x} = c \rho \frac{\Delta x \Delta x(1)}{2} \frac{t'_1 - t_1}{\Delta \theta}$$

$$\frac{h\Delta x}{K} (t_g - t_1) + t_2 - t_1 = \frac{c \rho}{K} \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{t'_1 - t_1}{\Delta \theta}$$

Definiendo:

$$M = \frac{K\Delta \theta}{c \rho (\Delta x)^2} \quad \text{y} \quad Nu = \frac{h\Delta x}{K}$$

Reemplazando y ordenando:

$$t'_1 = 2M \left[t_2 + Nu t_g + \left(\frac{1}{2M} - Nu - 1 \right) t_1 \right]$$

Para los nodos interiores:

$$t'_2 = M \left[t_1 + t_3 + \left(\frac{1}{M} - 2 \right) t_2 \right]$$

$$t'_3 = M \left[t_2 + t_4 + \left(\frac{1}{M} - 2 \right) t_3 \right]$$

$$t'_4 = M \left[t_3 + t_5 + \left(\frac{1}{M} - 2 \right) t_4 \right]$$

$$t'_5 = M \left[t_4 + t_6 + \left(\frac{1}{M} - 2 \right) t_5 \right]$$

y para el nodo 6:

$$t'_6 = 2M \left[t_5 + Nu \, tg + \left(\frac{1}{2M} - Nu - 1 \right) t_6 \right]$$

Físicamente, se debe cumplir:

$$\frac{1}{2M} - Nu - 1 \geq 0$$

$$M \leq \frac{1}{2Nu + 2}$$

Reemplazando los datos del problema, se tiene:

$$M \leq \frac{1}{2 \frac{50(0,05)}{10} + 2}$$

$$M \leq 0,40$$

con $M = \frac{1}{3}$, se tiene:

$$t'_1 = \frac{1}{6} (tg + t_1 + 4t_2)$$

$$t'_2 = \frac{1}{3} (t_1 + t_2 + t_3)$$

$$t'_3 = \frac{1}{3} (t_2 + t_3 + t_4)$$

$$t'_4 = \frac{1}{3} (t_3 + t_4 + t_5)$$

$$t'_5 = \frac{1}{3} (t_4 + t_5 + t_6)$$

$$t'_6 = \frac{1}{6} (tg + t_6 + 4t_5)$$

el intervalo de tiempo:

$$\frac{\Delta \theta}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{3}$$

$$\Delta \theta = 1 \text{ min}$$

θ min	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
0	0	0	0	0	0	0
1	166,7	0	0	0	0	166,7
2	194,5	55,6	0	0	55,6	194,5
3	236,2	83,4	18,5	18,5	83,4	236,2
4	261,6	112,7	40,1	40,1	112,7	261,6
5	285,4	138,1	64,3	64,3	138,1	285,4

6.2 Método gráfico

El método de Binder-Smith se basa en el módulo

$$M = \frac{1}{2} \quad (\text{Kreith, 1963})$$

6.2.1 Pared simple

Ocupando los datos del problema (P.112), se tiene:

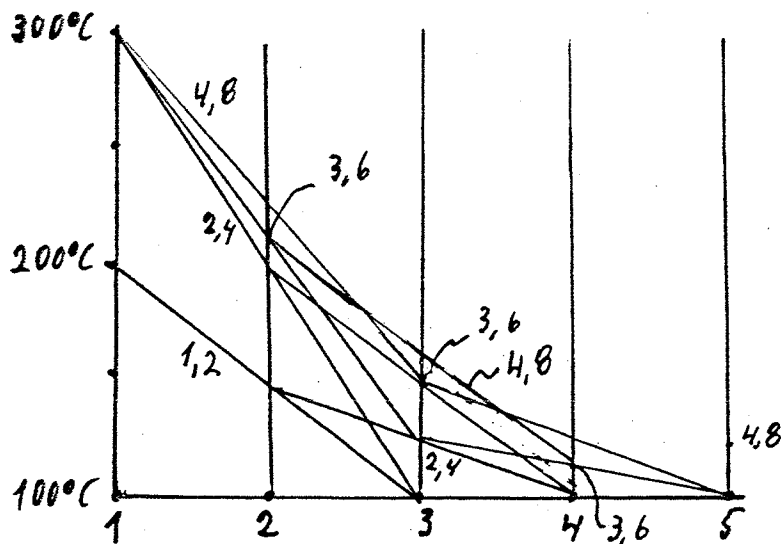
$$\Delta \theta = 1,2 \text{ min}$$

$$t'_2 = \frac{1}{2} (t_1 + t_3)$$

$$t'_3 = \frac{1}{2} (t_2 + t_4)$$

$$t'_4 = \frac{1}{2} (t_3 + t_5)$$

$$t'_5 = t_4$$



Se empieza suponiendo para $\theta = 0$ la temperatura de 200°C , se dibuja la línea que une los nodos 1 y 3, esto determina que la temperatura del nodo 2 sube a 150°C .

El segundo paso es suponer la temperatura de la pared 300°C . Se une el nodo 1 con el 3. Se dibuja la línea que une 150°C del nodo 2 con el nodo 4 y la temperatura del nodo 5 no cambia. Se sigue así sucesivamente.

Supóngase una pared infinita que está inicialmente a la temperatura t_0 y que se pone bruscamente en contacto con un fluido a temperatura t_1 . En todo momento se deberá cumplir con que el calor que recibe la cara a $x = 0$ debe ser igual al que ella transmite por conducción al interior del sólido.

$$Q = h A (t_1 - t_s) = -K A \frac{d t_s}{dx}$$

t_s : temperatura superficie pared a θ . Se supone que la pared se extiende al fluido en un espesor ficticio Δx^* tal que la caída de temperatura sea igual al $\frac{d t_s}{dx}$

$$\frac{t_1 - t_s}{\Delta x^*} = - \frac{d t_s}{dx}$$

$$y t_1 - t_s = -K/h \frac{d t_s}{dx}$$

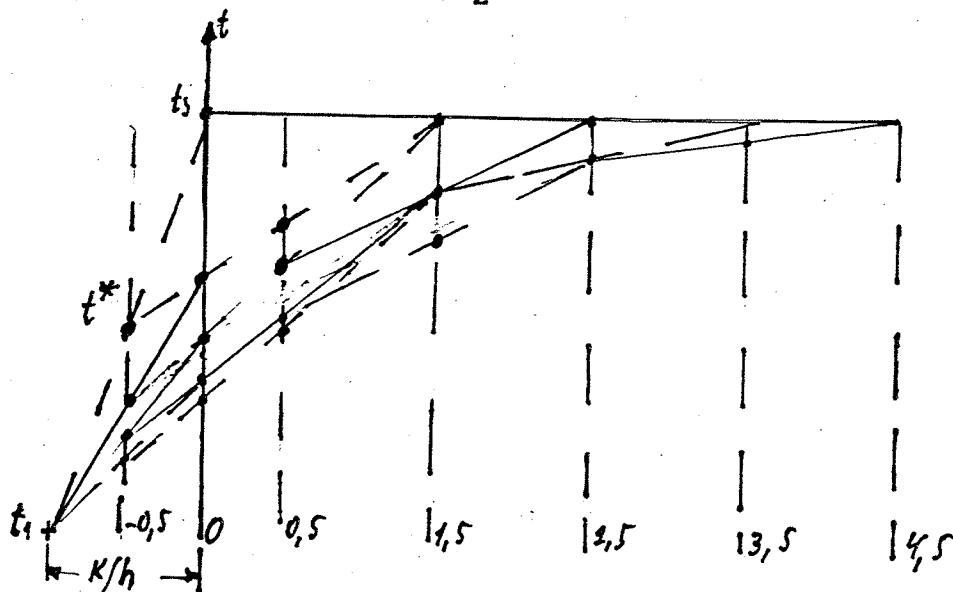
Luego,

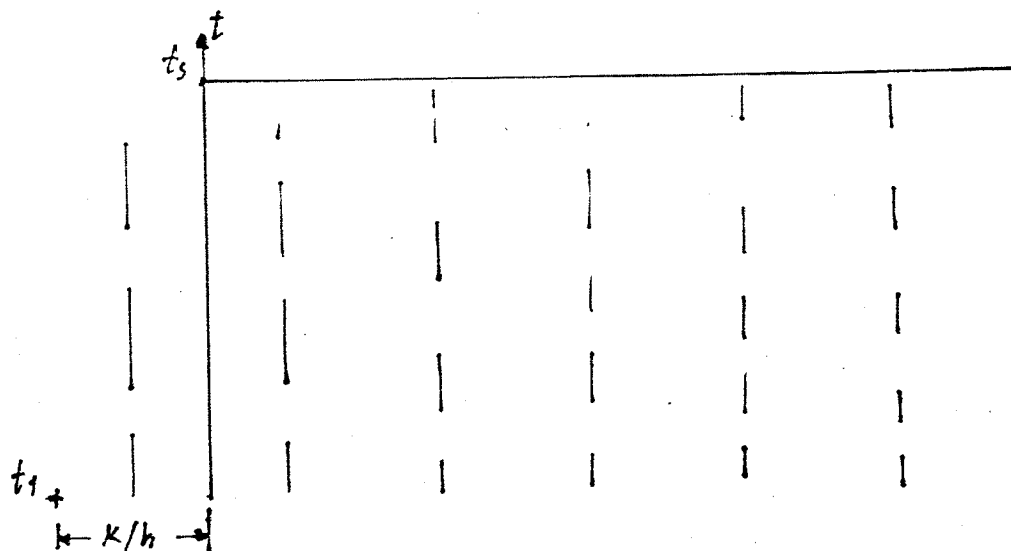
$$x^* = \frac{K}{h}$$

$$t'_{0,5} = \frac{t^* + t_{1,5}}{2}$$

$$t'_{1,5} = \frac{t_{0,5} + t_{2,5}}{2}$$

$$t'_{2,5} = \frac{t_{1,5} + t_{3,5}}{2}$$





(Diagrama para repetir el cálculo gráfico)

El método de Schmidt se puede aplicar también a problemas, cuyas condiciones de borde varían con el tiempo.

Ejemplo:

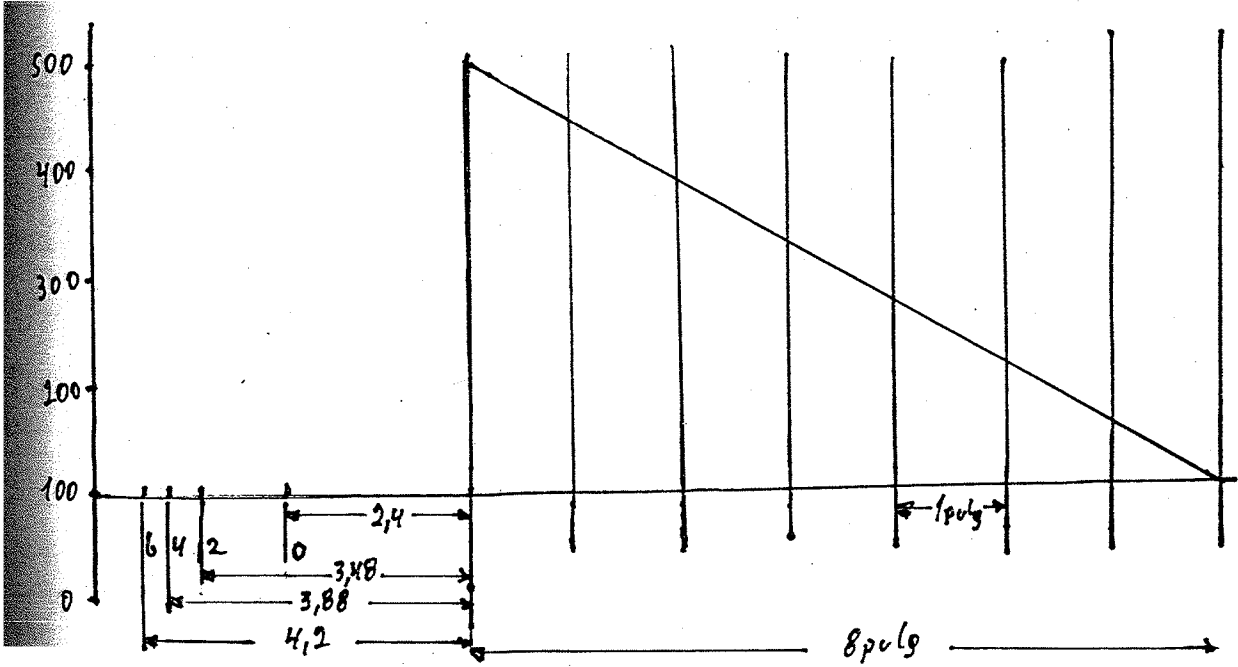
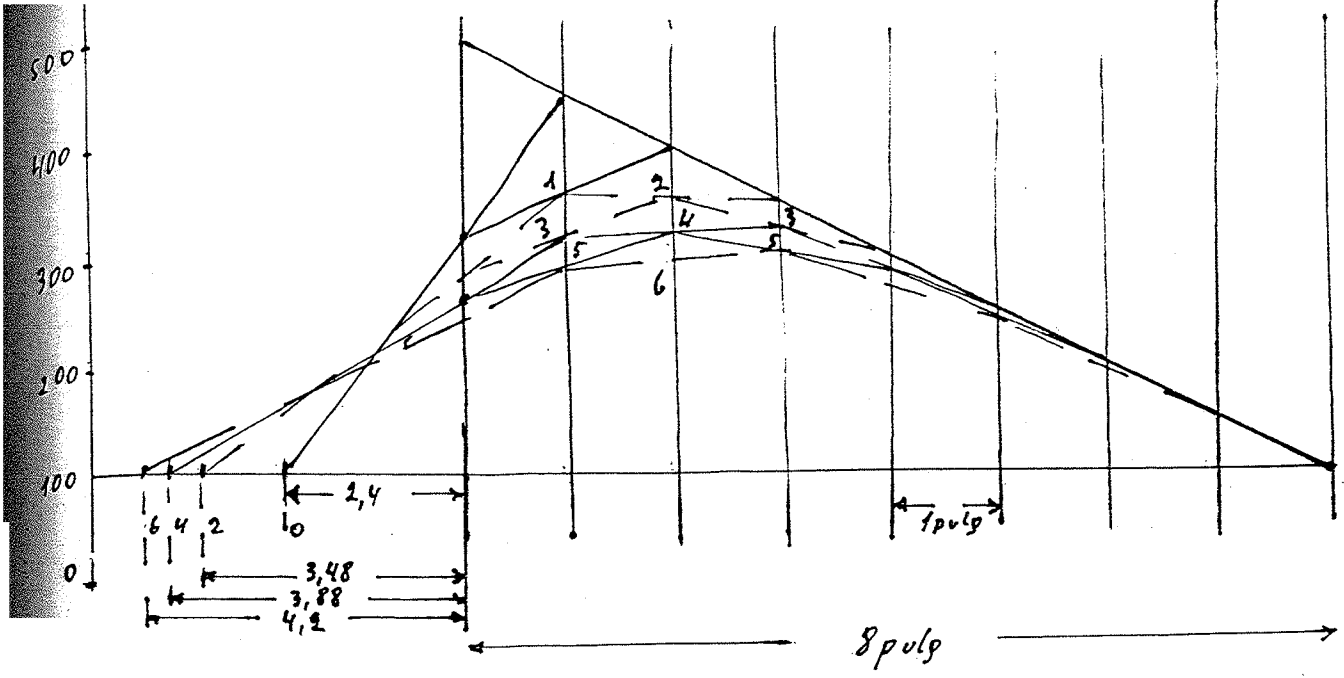
Una placa plástica de 8 pulg de espesor tiene una cara caliente y otra fría. Repentinamente la temperatura de la cara caliente baja a 100°F y el h cumple: $h = 2,0 + 0,02 (T_s - T_{\infty})$; $K_s = 2 \text{ Btu/h pie } ^{\circ}\text{F}$ y $\alpha = 0,003 \text{ pie}^2/\text{h}$.

t_s caliente inicial 100°F y t_s fría inicial 100°F

SOLUCION:

θ	$T_s (^{\circ}\text{F})$	$T_s - T_{\infty} (^{\circ}\text{F})$	$h (\text{Btu/h.pie}^2 \cdot \text{F})$	$\frac{K}{h} \cdot 12 (\text{pulg})$
0	500	400	10	2,4
2	345	245	6,9	3,48
4	310	210	6,2	3,88
6	285	185	5,7	4,2

Si $\Delta x = 1 \text{ pulg}$ y de $\frac{(4x)^2}{2\alpha\Delta\theta} = 1 \rightarrow \Delta\theta = 1,15 \text{ h}$



(Diagrama para repetir el cálculo gráfico)

6.2.2 Paredes compuestas:

La ecuación básica es: $\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{K}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

Se reemplaza x por ξ tal que:

$$\xi = \frac{x}{K} \quad \text{y} \quad \Delta \xi = \frac{\Delta x}{K}$$

Y queda:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{1}{K \rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}$$

En la forma de diferencia finita:

$$\frac{\Delta_{sT}}{\Delta \theta} = \frac{1}{K \rho c} \frac{\Delta^2 \xi T}{\Delta \xi^2}$$

Se obtiene: $T_n^* + 1 = \frac{2 \Delta \theta}{K \rho c \Delta \xi^2} \left(\frac{T_{n+1}^* + T_{n-1}^*}{2} \right)$

Con el cambio de variables, en la interfase los gradientes son:

$$\left(\frac{\Delta T}{\Delta \xi} \right)_I = \left(\frac{\Delta T}{\Delta \xi} \right)_{II}$$

Si se elige $\Delta \theta$ tal que: $\frac{2 \Delta \theta}{K \rho c \Delta \xi^2} = 1$

y que sean los mismos en ambos materiales:

$$\frac{\Delta \theta I}{\Delta \theta II} = 1 = \frac{K \rho c (\Delta \xi)_{II}^2}{K \rho c (\Delta \xi)_I^2} \rightarrow \frac{\Delta \xi I}{\Delta \xi II} = \sqrt{\frac{(K \rho c)_{II}}{(K \rho c)_I}}$$

y en función de Δx

$$\frac{\Delta x I}{\Delta x II} = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$$

Una cámara de combustión tiene una pared compuesta de una capa interior de refractario (alúmina) de 1/8 pulgada y una capa exterior de acero inoxidable de 1,0 pulg de espesor.

Refractario

$$K_r = 2 \text{ Btu/h.pie.F}$$

$$\alpha_r = 0,05 \text{ pie}^2/\text{h}$$

Acero

$$K_s = 10 \text{ Btu/h.pie.F}$$

$$\alpha_s = 0,20 \text{ pie}^2/\text{h}$$

No hay enfriamiento externo y las paredes fallarán si el refractario alcanza 3.000 °F y el acero 1600 °F. Si el $h_i = 15 \text{ Btu/h.pie.F}$.

Calcular el tiempo de operación posible si la temperatura inicial es de 100 °F y los gases de combustión alcanzan 5.000 °F.

SOLUCION:
$$\frac{\Delta x_s}{\Delta x_r} = \sqrt{\frac{\alpha_s}{\alpha_r}} = \sqrt{4} = 2$$

si $\Delta x_r = 0,05 \text{ pulg} = 0,00417 \text{ pie}$

5 partes

$$\Delta x_s = 0,00417 \times 2 = 0,00834$$

10 partes

Sin embargo el ancho real de cada capa es:

$$L_r/K_r = 0,25/2 = 0,125 \text{ unidades de espesor, da 5 capas.}$$

$$L_s/K_s = 1,0/10 = 0,10 \text{ unidades de espesor, da 10 capas.}$$

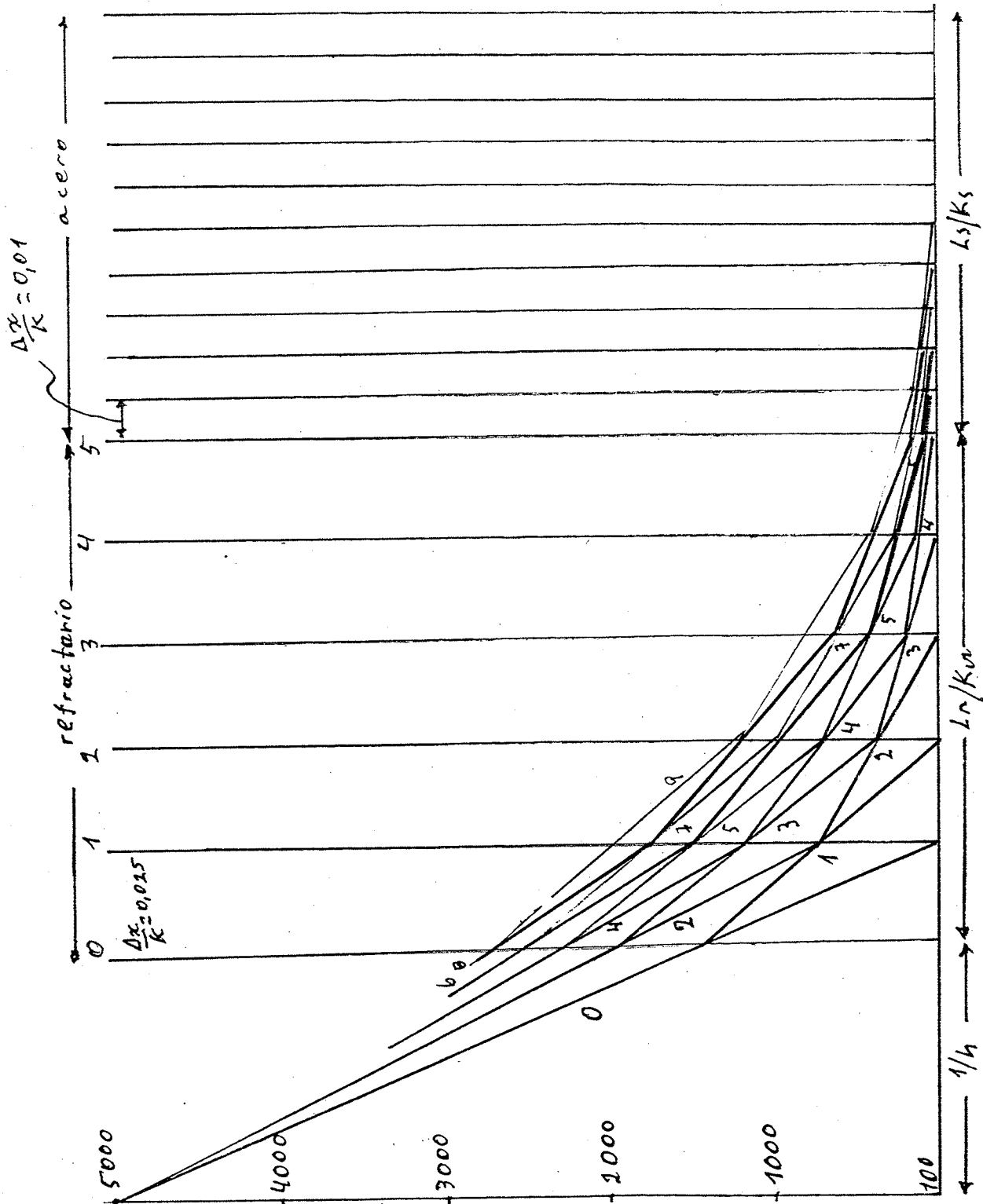
Entre el refractario y el gas

$$q = K \frac{\Delta T}{\Delta x} \Big|_{x=0} = \frac{\Delta T}{4\xi} \Big|_{\xi=0} = h (T_{\xi=0} - T_{00}) = \frac{T_{\xi=0} - T_{00}}{1/h}$$

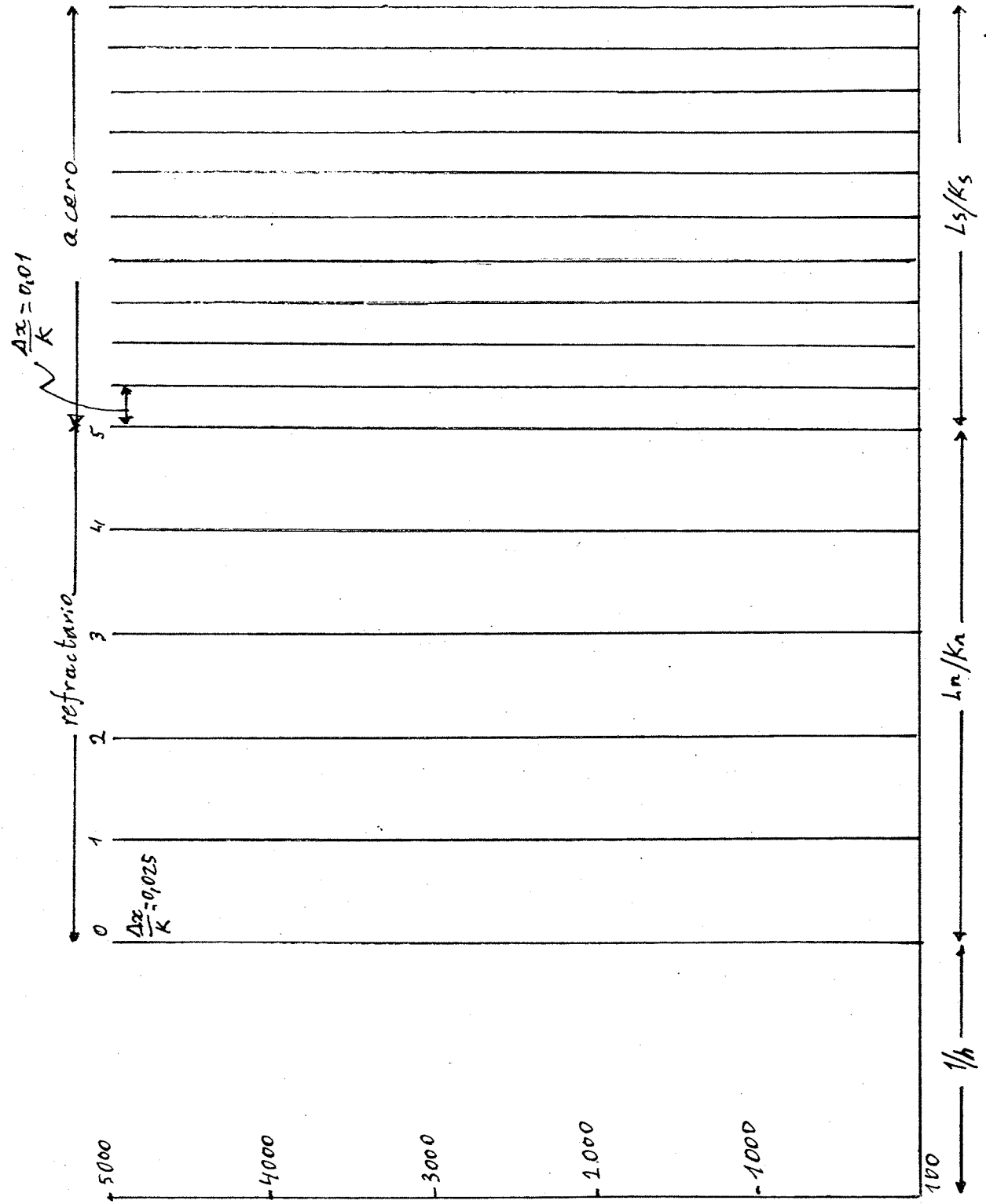
$$\Delta \theta = \frac{K \rho_c \Delta \xi^2}{2} = \frac{\Delta x^2}{2\alpha_r} \left(3600 \frac{\text{s}}{\text{h}} \right) = 0,625 \text{ s}$$

SOLUCION: Del gráfico se obtienen $16\Delta\theta$

$$16\Delta\theta = 10s$$



(Diagrama para repetir el cálculo gráfico)



6.2.3 Cilindros macizos o con hueco interior.

Si la pared es muy delgada se hace el cálculo considerando placa.

O sino se aplica el método siguiente:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = d \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (i)$$

puede ser transformada en una ecuación de diferencias finitas, si se supone

$$M = Lr \quad r = e^{\frac{M}{L}} \rightarrow \frac{1}{r} = e^{-\frac{M}{L}}$$

$$\frac{dM}{dr} = \frac{1}{r}$$

$$y, \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial M}$$

$$y, \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial M} \right) = \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial M} \right) \frac{\partial M}{\partial r}$$

Diferenciando el último término, da:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial M^2} + \frac{\partial T}{\partial M} \frac{\partial(1/r)}{\partial M} \right] \frac{1}{r}$$

$$\frac{\partial(1/r)}{\partial M} = \frac{\partial}{\partial M} (e^{-M/L}) = -e^{-M/L} = -\frac{1}{r}$$

Reemplazando, queda:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial M^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial T}{\partial M}$$

sustituyendo en (i):

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \alpha \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial M^2} + \frac{1}{r^2} \frac{T}{M} - \frac{1}{r^2} \frac{T}{M} \right]$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \alpha \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial M^2}$$

y en forma de diferencia finita:

$$\frac{T_n^{t+1} - T_n^t}{\Delta \theta} = \frac{\alpha}{r^2} \frac{T_{n+1}^t + T_{n-1}^t - 2T_n^t}{M^2}$$

$$T_n^{t+1} - T_n^t = \frac{2\alpha \Delta \theta}{(r \Delta M)^2} \left(\frac{T_{n+1}^t + T_{n-1}^t}{2} - T_n^t \right)$$

y se debe cumplir que:

$$\frac{2\alpha \Delta \theta}{(r \Delta M)^2} = 1$$

luego: $T_n^{t+1} = \frac{T_{n+1}^t + T_{n-1}^t}{2}$ idem placa

Las divisiones son de incremento constante $r \Delta M$, luego el espesor debe ser $\Delta r/r$.

PROBLEMA:

Un fluido que tiene una temperatura de copa igual a 300°F fluye por un tubo de ss tipo 347 DI = 1 pulg, DE = 2 1/2 pulg. Inicialmente la temperatura en la superficie exterior del tubo es 100°F y está en estado estacionario. La conductancia unitaria superficial es 250 Btu/h.pie².F en la superficie interior del tubo.

Si el fluido se calienta repentinamente y su temperatura aumenta linealmente a 100°F/S. Calcular la distribución de temperatura en el tubo 6 segundos después que se inició el calentamiento del fluido.

Las propiedades medias son:

$$K_s = 10,5 \text{ Btu/h.pie.F}$$

$$\alpha_s = 0,197 \text{ pie}^2/\text{h}$$

$$1 \frac{1}{2} = 1 \frac{4}{8} = \frac{12}{8} \rightarrow r = \frac{6}{8}$$

(Kreith)

SOLUCION:

El tubo se divide en 6 secciones anulares de $\Delta r = 1/8$ pulg.

Hay que calcular ΔM

Sección N°	Radio interior pulg	Radio exterior pulg	Radio medio pulg pie	$\Delta M = \frac{\Delta r}{r}$
1	0,500	0,625	0,563 0,0494	0,222
2	0,625	0,750	0,688 0,0573	0,182
3	0,750	0,875	0,813 0,0678	0,154
4	0,875	1,000	0,938 0,0782	0,133
5	1,000	1,125	1,063 0,0886	0,118
6	1,125	1,250	1,188 0,0990	<u>0,105</u>
				0,914

La resistencia equivalente en la capa interior:

$$q = \bar{h} (2 \tilde{r}_{ri}) (T_{oo} - T_o) = 2 \tilde{r}_{ri} \left(K \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=r_i}$$

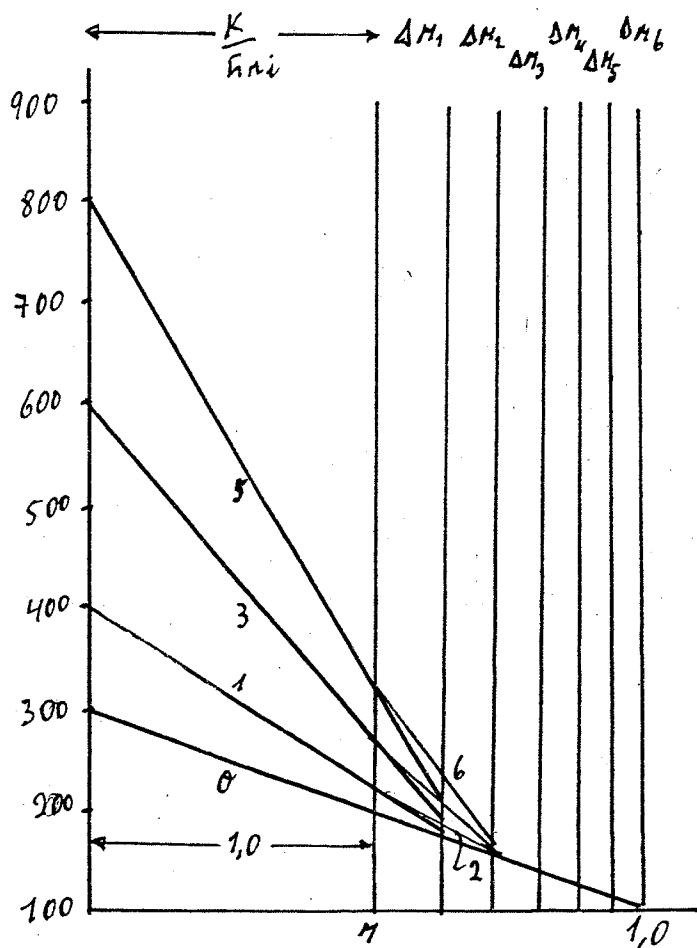
$$\frac{q}{A} = \bar{h} (T_{oo} - T_o) = K_s \left(\frac{\partial T}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial r} \right)_{r=r_i} = \frac{K_s}{r_i} \frac{\partial T}{\partial M}$$

para $r = r_i$ $\frac{\partial T}{\partial M} = \frac{T_{oo} - T_o}{K/\bar{h}r_i}$

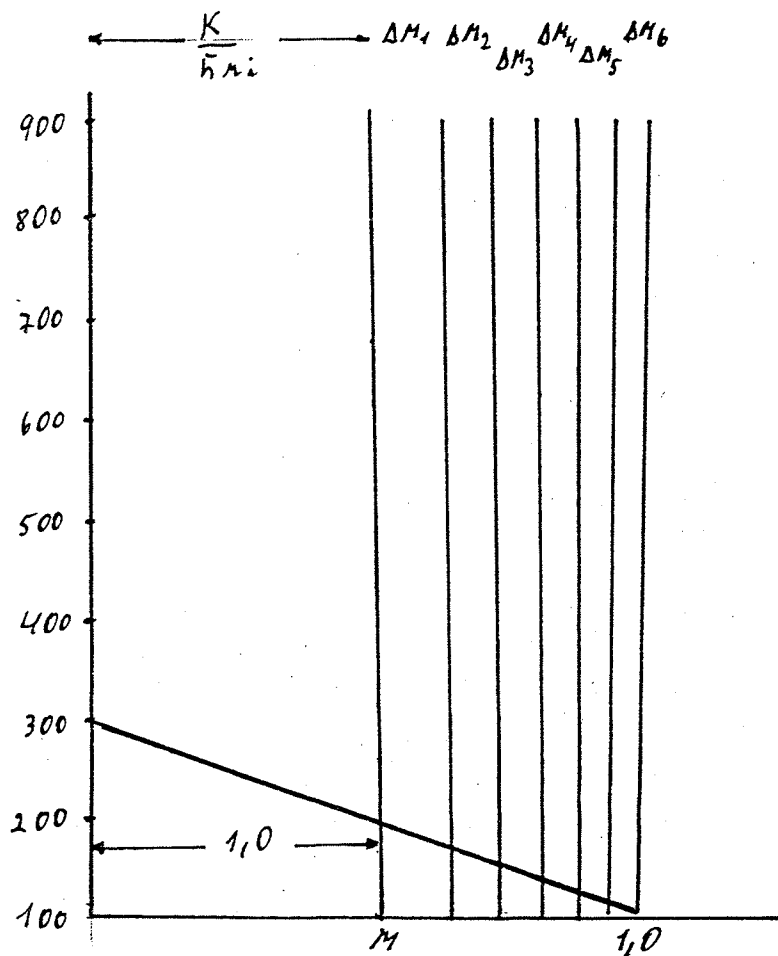
La distancia equivalente a K/hri

$$\frac{10,5 \text{ Btu/h.pie.F (12 pulg/pie)}}{250 \text{ Btu/h.pie}^2\text{.F (0,5 pulg)}} = 1,0$$

$$y \Delta e = \frac{\Delta r^2}{2\alpha} = \frac{0,125/12 \text{ pie}^2}{(2) (0,197 \text{ pie}^2/\text{h})} \quad 3600 \text{ s/h} = 1,0\text{s}$$



(Diagrama para repetir el cálculo gráfico)



7.0 APLICACION A ALIMENTOS

Las expresiones estudiadas y analizadas en los capítulos anteriores se pueden aplicar a los alimentos con sus diversas formas geométricas y en los distintos procesos tecnológicos disponibles.

Se dará especial énfasis a los tratamientos por bajas temperaturas de los alimentos.

7.1 Tratamiento por bajas temperaturas:

En alimentos se utiliza un mismo tipo de ecuación, tanto para el calentamiento como para el enfriamiento para cualquier figura geométrica.

En el caso de resistencia interna despreciable, se tenía:

$$\frac{T - T_M}{T_0 - T_M} = e^{-\frac{h A}{c_p V} t}$$

Tomando logaritmo y separando variables, queda:

$$\log (T - T_M) = -\frac{t}{f_h} + \log j ; (T_0 - T_M)$$

$$y f_h = \frac{2,303 C_p V}{h A} ; j = 1$$

físicamente f_h es un factor de tiempo que representa la velocidad de calentamiento. En un gráfico semi-log es igual al tiempo necesario para reducir en un ciclo la diferencia de temperatura entre el medio de calentamiento o enfriamiento y la temperatura inicial del objeto.

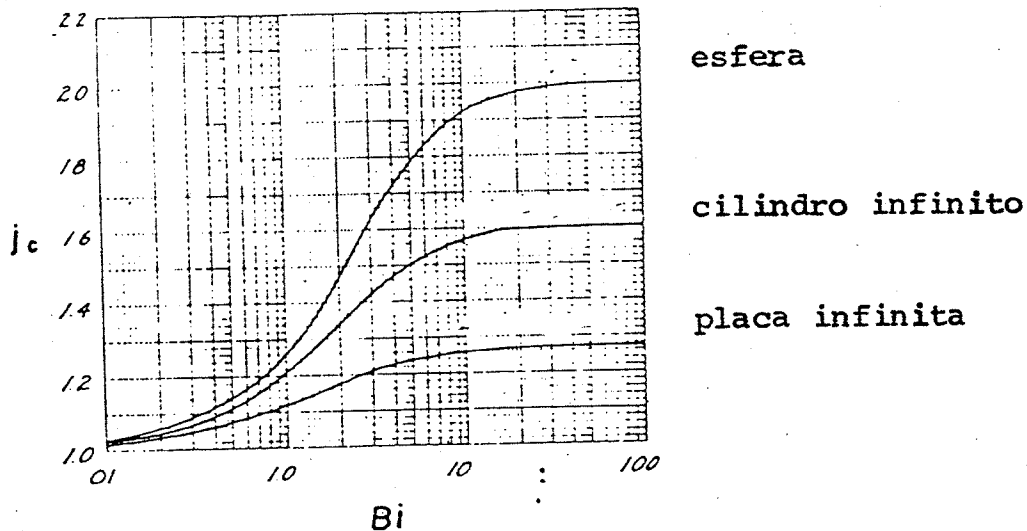
El valor j representa un factor de forma definido por:

$$j = \frac{T_a - T_M}{T_o - T_M}$$

en que:

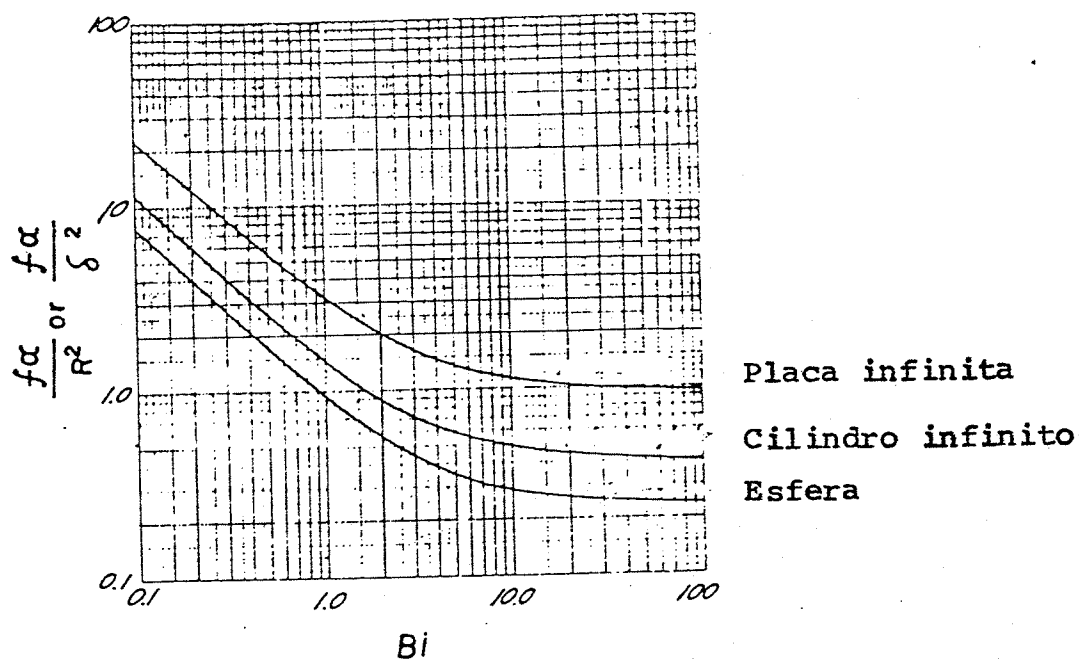
T_a : el intercepto de la curva de calentamiento o enfriamiento en papel semi-log.

Para predecir los valores de los parámetros en el centro geométrico de los cuerpos Pflug et al., desarrolló gráficos de estos parámetros en función del número de Biot. Ver figura 16 y 17.



(Pflug et al., 1965)

FIGURA 16 : Influencia del número de Biot en el factor de forma en el centro geométrico del cuerpo.



(Pflug et al., 1965)

FIGURA 17 : Relación entre el factor de tiempo y el número de Biot para transmisión de calor transiente.

En el caso de objetos finitos se puede aplicar la metodología de obtener sus formas por intersección de formas geométricas infinitas.

En el caso de un paralelepípedo, se tiene:

$$\left(\frac{T - T_M}{T_o - T_M} \right)_{\text{paralelepípedo}} = \left(\frac{T - T_M}{T_o - T_M} \right)_x \cdot \left(\frac{T - T_M}{T_o - T_M} \right)_y \left(\frac{T - T_M}{T_o - T_M} \right)_z$$

En el caso de un cilindro finito:

$$\left(\frac{T - T_M}{T_o - T_M} \right)_{\text{cilindro finito}} = \left(\frac{T - T_M}{T_o - T_M} \right)_{\text{cilindro infinito}} \left(\frac{T - T_M}{T_o - T_M} \right)_{\text{placa infinita}}$$

y para los parámetros f y j , se tiene :

$$\frac{1}{f \text{ paralelepipedo}} = \frac{1}{f_x} + \frac{1}{f_y} + \frac{1}{f_z}$$

en el caso de cilindro finito:

$$\frac{1}{f \text{ cilindro finito}} = \frac{1}{f \text{ cilindro infinito}} + \frac{1}{f \text{ altura}}$$

$$j \text{ paralelepipedo} = j_x \cdot j_y \cdot j_z$$

Alimentos de forma irregular :

Los procedimientos de cálculo han sido desarrollados para objetos de formas geométricas regulares, pero muchos alimentos tienen otra forma y los cálculos del campo de temperatura se pueden realizar asimilándolos a alguna forma geométrica regular. Pero, existen alimentos que no pueden ajustarse a alguna figura geométrica regular y para ello se han desarrollado los procedimientos que a continuación se exponen.

Smith et al., (1967) propuso usar el Índice Geométrico (G') cuando el objeto se asemeja a un elipsoide y el índice cumple la relación siguiente:

$$\beta_1^2 = G' / \tilde{l}^2$$

β_1 : es el coeficiente del primer término de la raíz de la ecuación transcendental para conducción de calor cuando la resistencia interna y externa son finitas.

La ecuación anterior es válida para cualquier geometría que cumpla :

$$0,25 < G' < 1$$

que son los límites de la placa infinita y la esfera respectivamente.

A su vez se cumple :

$$G' = \frac{1}{4} + \frac{3}{8 A'^2} + \frac{3}{8 B'^2}$$

Y

$$A' = \frac{a'}{e}$$

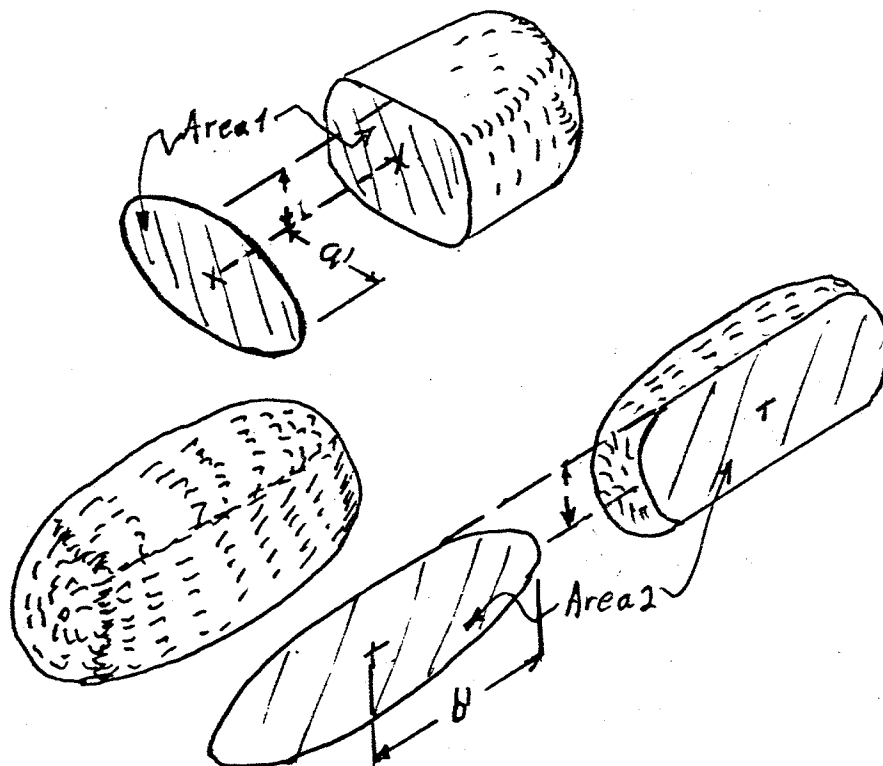
$$B' = \frac{b'}{e}$$

b' : representa la mitad del semi-eje mayor de la elipse de área equivalente al área mayor del objeto.

a' : representa la mitad del semi-eje mayor de la elipse de área equivalente al área menor del objeto.

e : es la longitud característica o el mínimo semi espesor del objeto.

Para aclarar la aplicación de estas definiciones, ver figura 18.



(Smith et al., 1967)

FIGURA 18 : Dimensiones consideradas en el desarrollo del índice geométrico para un elipsoide.

Smith et al. también propone el normógrafo de la figura 19 para calcular la distribución de temperatura en objetos de formas anómalas basado en G' , aunque los datos han sido probados para formas elipsoidales.

También, encontraron que la temperatura del centro de masa depende de G' y la localización del centro de masa es:

$$I_{ma} = G' 0,14 - 0,25$$

Ima : es la razón de cualquier distancia que involucra la longitud característica dividida por la longitud característica (e).

También elaboraron un gráfico que presenta el campo de temperatura en función del número de Fourier y como parámetro está G' . Relación que se puede aplicar al caso de transmisión de calor de la resistencia de superficie despreciable.

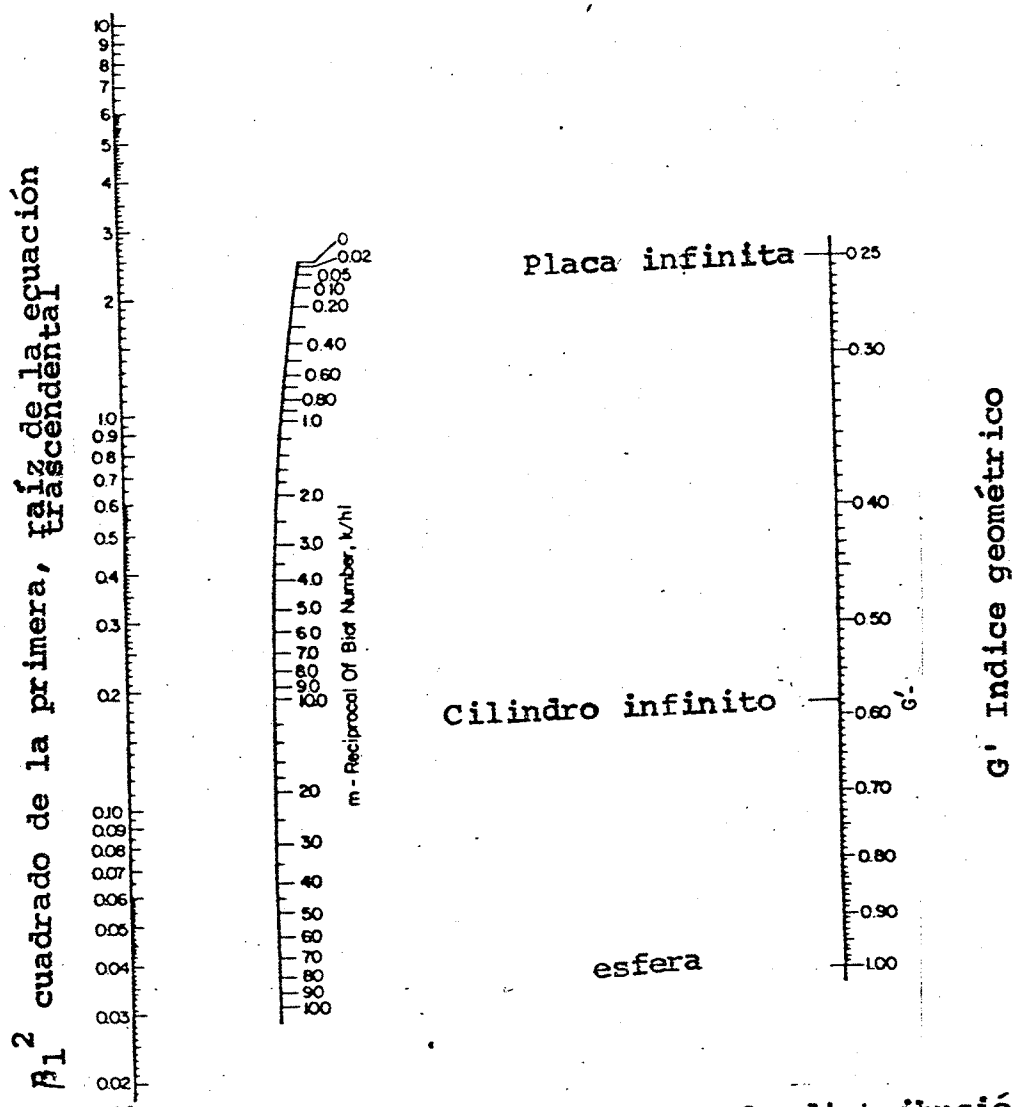
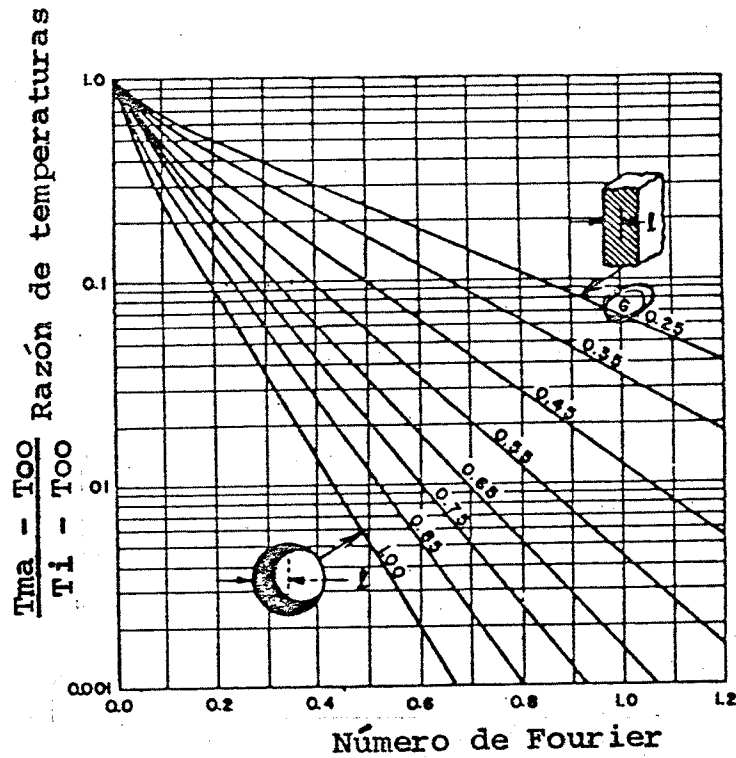


FIGURA 19 : Nomograma para calcular la distribución de la temperatura en cuerpos con formas anómalas.

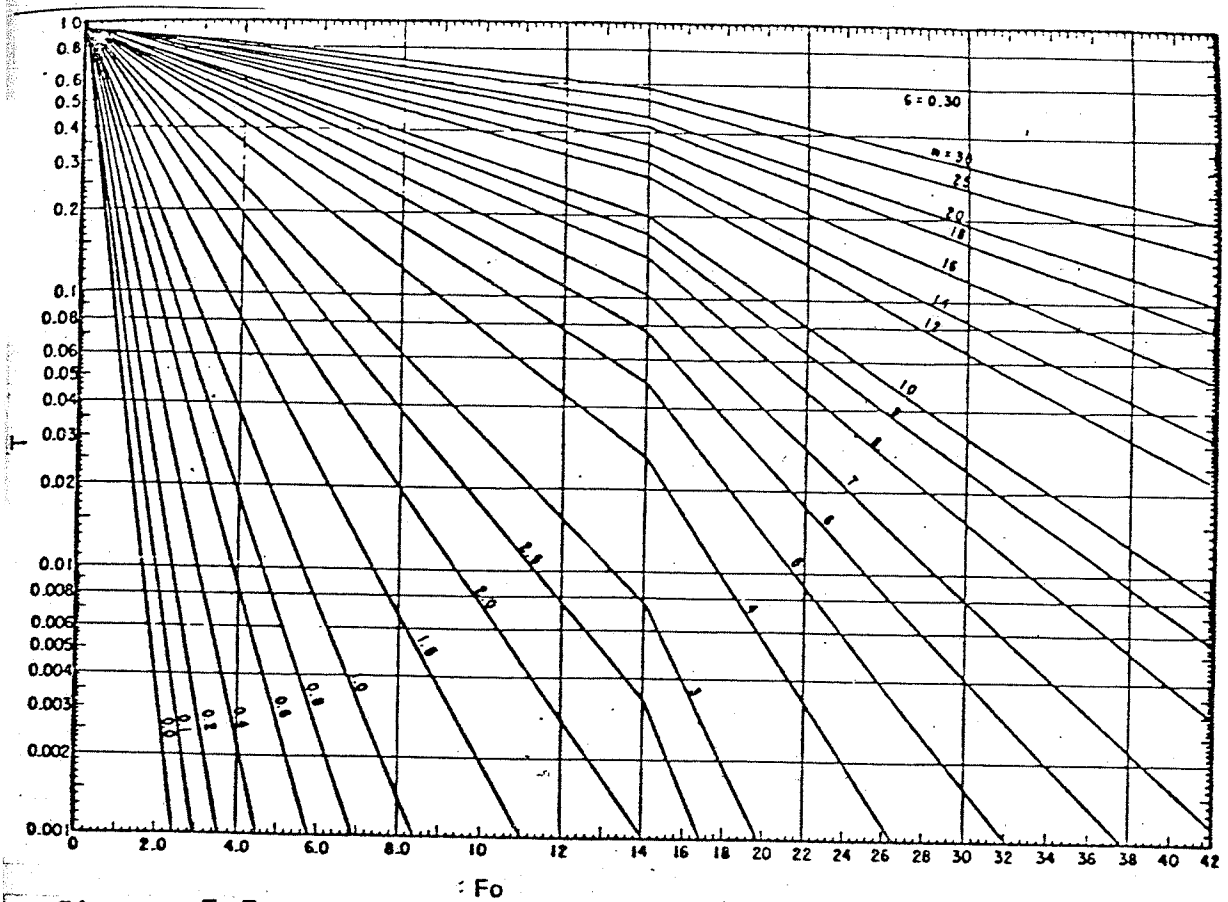
(Smith et al, 1967)

Los gráficos 20, 21, 22, 23 y 24 se pueden utilizar para encontrar la temperatura adimensional que permita el cálculo de la temperatura del centro de masa.



(Smith y Nelson, 1969)

FIGURA 20 : Distribución de temperatura transiente para la temperatura del centro de masa con parámetro del índice geométrico para los casos de resistencia despreciable en la superficie.



$$Fo = \frac{\alpha t}{l^2}$$

$$T = \frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}}$$

(Clary et al., 1971)

FIGURA 21 : Gráfico para determinar la temperatura en el centro de un objeto con $G = 0,30$.

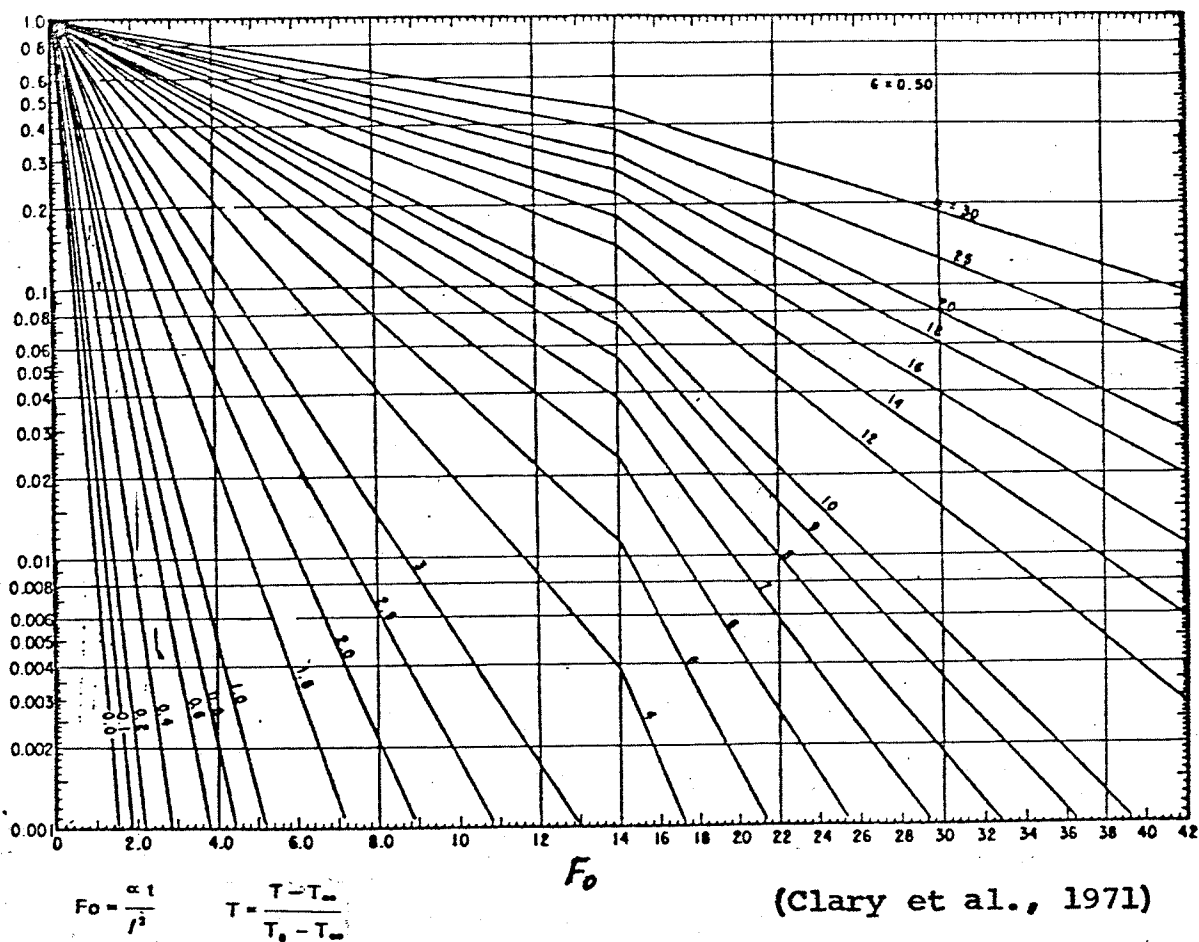
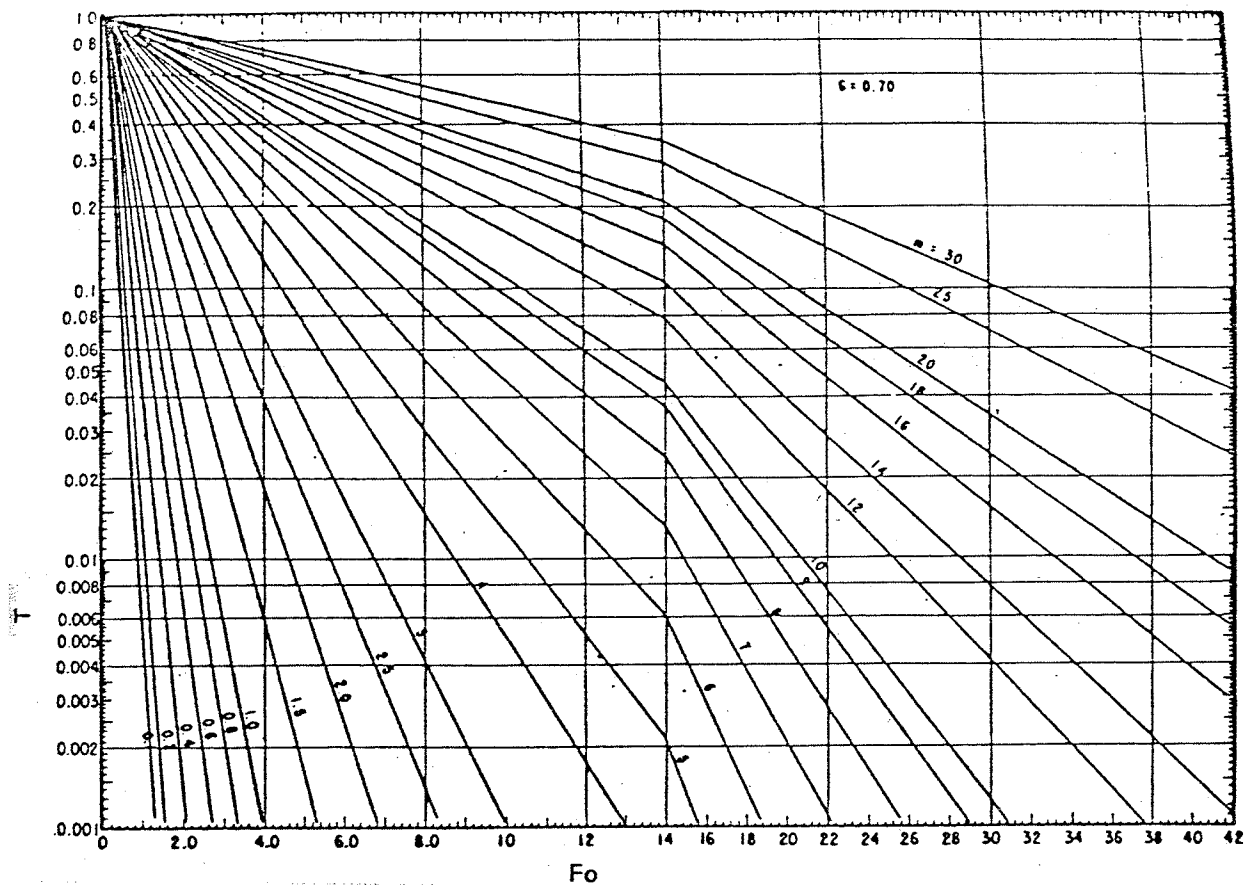


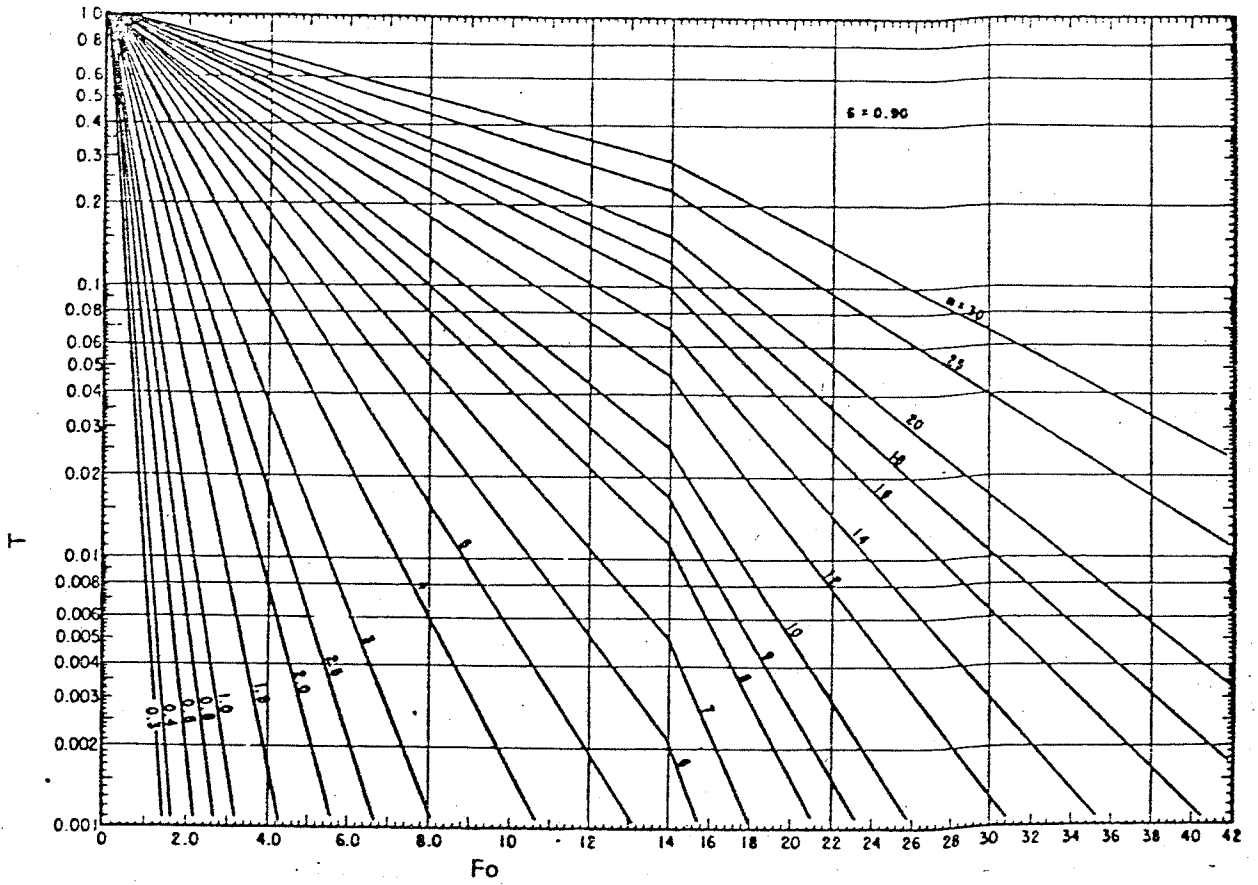
FIGURA N° 22 : Gráfico para determinar la temperatura en el centro de un objeto con $G = 0,50$.



$$Fo = \frac{\alpha t}{l^2} \quad T = \frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}}$$

(Clary et al., 1971)

FIGURA N°23 : Gráfico para determinar la temperatura en el centro de un objeto con $G = 0,70$.



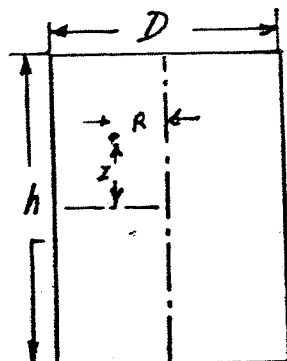
$$Fo = \frac{\alpha t}{l^2} \quad T = \frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}}$$

(Clary et al., 1971)

FIGURA N° 24 : Gráfico para determinar la temperatura en el centro de un objeto con $G = 0,90$.

Alimento sólido envasado en lata cilíndrica:

Para un alimento sólido envasado en una lata cilíndrica, tal como se indica en la figura siguiente:



Loncin presenta la relación siguiente para el campo de temperatura, suponiendo Biot infinito:

$$\frac{T - T_c}{T_r - T_c} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{m=1}^{m=\infty} \left(1 - \frac{T_r - T_0}{T_r - T_c} \exp \left\{ - \left[\left(\frac{h}{D} \right)^2 B_n^2 + (2m-1)^2 \left(\frac{\tilde{t}}{2} \right)^2 \right] \cdot Fo_t \right\} \right) \times$$

$$\times \frac{8}{(2m-1) B_n J_1(B_n)} \exp \left\{ - \left[\left(\frac{h}{D} \right)^2 B_n^2 + (2m-1)^2 \left(\frac{\tilde{t}}{2} \right)^2 \right] (Fo_t - Fo_h) \right\}$$

$$\times J_0 \left(B_n \frac{R}{1/2 D} \right) \text{sen} \left[(2m-1) \frac{\tilde{t}}{2} \frac{1/2 h - z}{1/2 h} \right]$$

donde:

T_0 : temperatura inicial uniforme antes del calentamiento,

a $t = 0$

T_r : temperatura del medio calefactor en la autoclave.

T_c : temperatura del agua de enfriamiento.

$$Fo_t : \frac{(K/\rho cp) \times (\text{tiempo total})}{(1/2 h)^2}$$

$$Fo_h : \frac{(K/\rho cp) \times (\text{tiempo de calentamiento})}{(1/2 h)^2}$$

Bn : es la raíz enésima de la ecuación $Jo (Bn) = 0$
 tiempo total = tiempo de calentamiento + tiempo de enfriamiento.

7.1.1 Refrigeración de hortofrutícolas:

En el rango de temperaturas cubierto por la refrigeración, se ha encontrado que la transferencia de masa del agua del producto hace una contribución importante (Beek y Meffert, 1981), desde el punto de vista de la energía.

La evaporación del agua del producto ayuda a aumentar la velocidad de enfriamiento a expensas de la pérdida de masa.

Cowell ha desarrollado expresiones analíticas para predecir la diferencia de concentración en una placa de sólido granular homogénea, cubierta con una membrana de permeabilidad μ :

$$\bar{T} = \frac{C - C_a}{C_s - C_a} = 1 - \frac{\frac{\mu}{D} \cosh \left(X \sqrt{\frac{E}{D}} \right)}{\frac{\mu}{D} \cosh \left(X \sqrt{\frac{E}{D}} \right) + \sqrt{\frac{E}{D}} \sinh \left(X \sqrt{\frac{E}{D}} \right)}$$

C_a : concentración de vapor de agua en el ambiente (Kg/m^3).

C_s : concentración de vapor de agua saturado.

D : coeficiente de definición.

E ; coeficiente de transpiración (1/s)

x : distancia (m)

X : distancia menor del centro a la superficie.

La velocidad de evaporación del agua en una placa es:

$$W = E (C_s - \bar{C})$$

C : Concentración media de vapor de agua (Kg/m^3)

y para:

$$C_s - \bar{C} = \frac{C_s - C_a}{\frac{1}{\sqrt{\frac{E}{D}}} \text{ constante} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{E}{D}}} + \frac{E}{H} \right)}$$

H : Coeficiente total de transferencia de masa (m/s)

Para calcular la transferencia de masa en un paralelepípedo, se puede aplicar:

$$\bar{r}_{x,y,z} = \bar{r}_x \cdot \bar{r}_y \cdot \bar{r}_z$$

en que:

\bar{r}_x : transferencia adimensional según el eje x

\bar{r}_y : transferencia adimensional según el eje y

\bar{r}_z : transferencia adimensional según el eje z

Los coeficientes E y D, para algunos productos, están en la tabla siguiente:

TABLA N° 5

COEFICIENTES DE TRANSPIRACION Y DE DIFUSION
A GRANEL

<u>PRODUCTO</u>	E (1/s.10 ⁻³)	D (m ² /s.10 ⁻⁶)
Huevo	1,10	-
Bulbos de flores	1,14	4,03
Peras	3,26	5,04
Flores cortadas (especie tulipán)	32,2	11,3
Pimiento dulce	5,42	6,10
Berries	10,0	7,40
Manzana	2,88	4,46
Papas	1,54	5,94

El coeficiente de difusión a granel, se puede calcular:

$$D = D_{w-a} (1 - \sqrt{1-\epsilon_b})$$

ϵ_b : porosidad a granel

y con la ecuación de Schirmer, se calcula:

$$D_{w-a} = 23 \cdot 10^{-6} \left(\frac{10^5}{P}\right) \left(\frac{TK}{273}\right) 1,81$$

en que:

P : presión en (Pa)

TK: temperatura (°K)

La porosidad a granel:

$$\epsilon_b = 1 - \frac{\rho_b}{\rho_p}$$

ρ_b : densidad a granel

ρ_p : densidad del producto

La porosidad total es:

$$\epsilon_{\text{total}} = \epsilon_{\text{producto}} \frac{\rho_b}{\rho_p} + \epsilon_b$$

y

$$\epsilon_{\text{producto}} = 1 - \frac{\rho_{\text{medido del producto}}}{\rho_{\text{calculada}}}$$

$\rho_{\text{calculada}}$: es la densidad del producto sin tomar en cuenta el espacio de aire.

$$\rho_{\text{calculada}} = \frac{1}{\sum \frac{x_i}{\rho_i}}$$

x_i : fracción de masa de los componentes.

Algunos valores están tabulados.

TABLA N° 6

DENSIDAD Y POROSIDAD PARA ALGUNOS PRODUCTOS HORTICOLAS

Producto	DENSIDAD		POROSIDAD		
	Producto Kg/m ³	A granel Kg/m ³	Producto %	Granel %	Total %
Manzana	779	500	27	35	52
Pera	990	600	6	39	43
Bulbos de flores	880	600	16	32	43
Flores cortadas	780	200	23	74	80
Pimiento dulce	480	260	53	46	75
Berries (rojas)	1050	580	0	54	45
Papas	1075	590	0	45	45

GENERACION DE CALOR :

Es otro factor importante en los productos hortícolas.

Así hay valores encontrados experimentalmente en función de la temperatura.

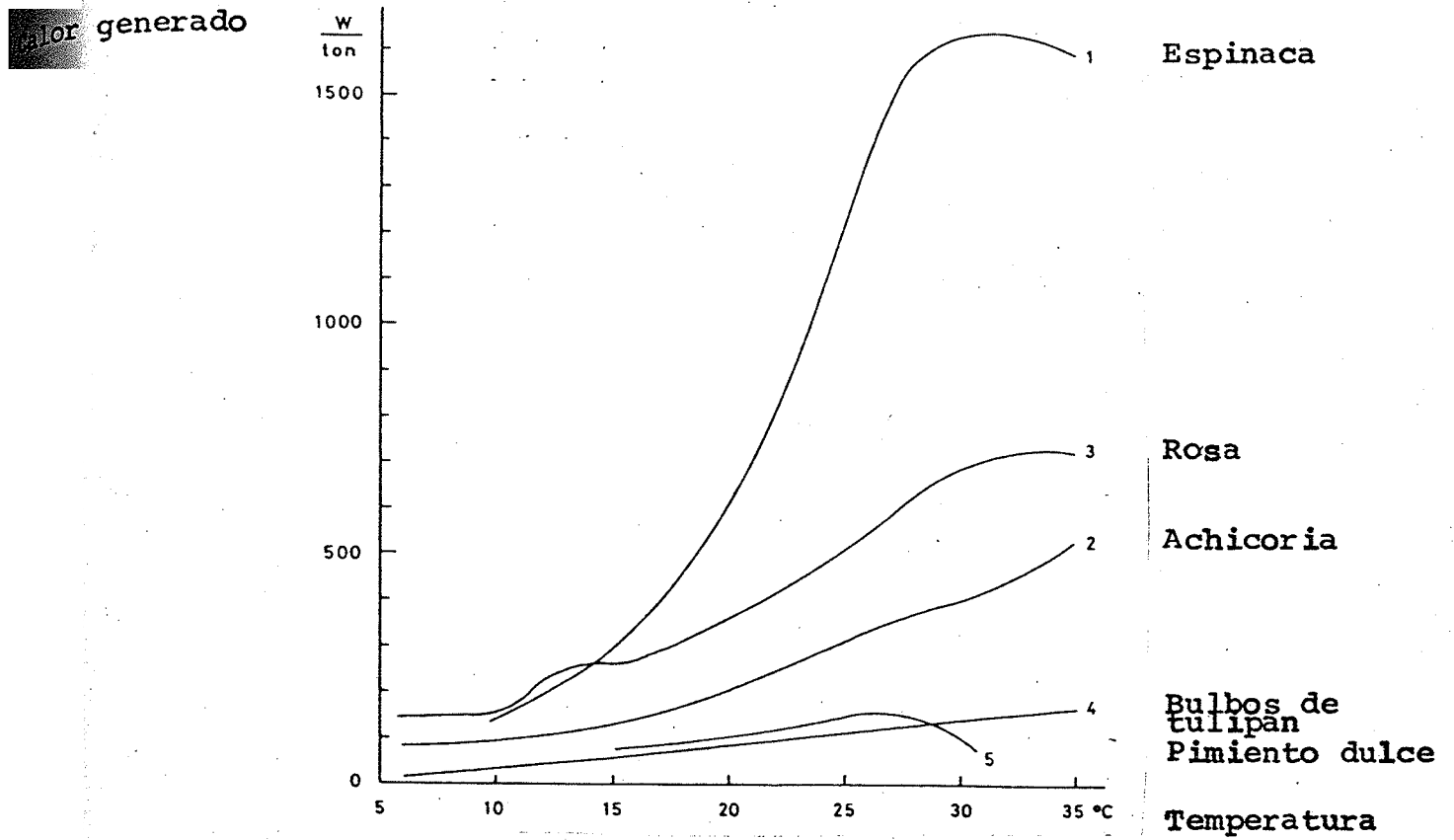


FIGURA N° 25: Generación de calor de algunos productos hortícolas.

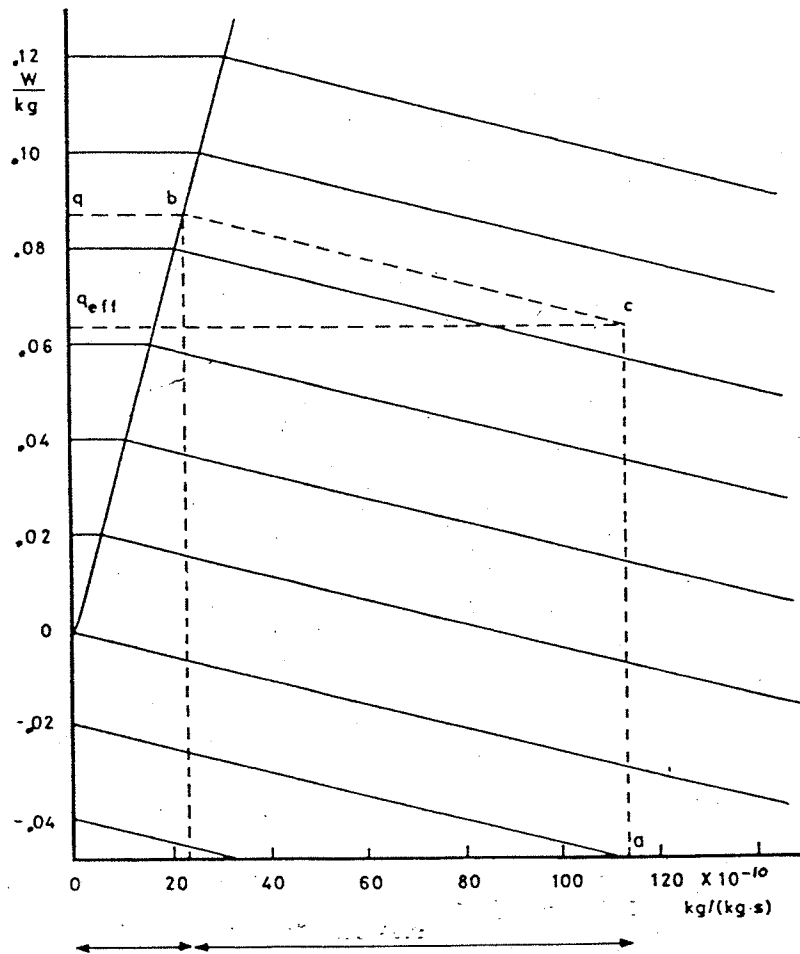
El calor generado efectivo es inferior al calor de respiración y puede calcularse a partir de la pérdida de masa, durante el período en que se está evaluando. La pérdida de masa es pérdida de carbono que se oxida y pérdida de humedad.

La relación que predice esta propiedad es:

$$q_{ef} = 1,063q - 2,48 \cdot 10^{-6} \left(\frac{\Delta m}{m \Delta t} \right)$$

Esta relación se encuentra graficada en la figura N°26.

calor generado



pérdida velocidad de pérdida de masa
y pérdida de humedad.

FIGURA N°26 : Nomograma para la generación de calor y pérdida de masa.

También,

$$Q_{\text{eff}} = Q - r \cdot w$$

en que:

- Q_{eff} : producción de calor efectivo (W/m^3)
 Q : producción de calor (W/m^3)
 r : calor latente de evaporación (J/Kg)
 w : velocidad de evaporación ($Kg/m^3 \cdot s$)

y,

$$w = E (C_s - C)$$

en que:

- C_s : concentración de vapor de agua en el producto (kg/m^3)
 C : concentración de vapor de agua alrededor del producto (Kg/m^3)

Hay que considerar la influencia del material de los envases en estas transferencias.

Así en el caso de productos hortícolas, el envase tiene perforaciones y las propiedades se pueden calcular aplicando:

$$H = \frac{1}{\frac{1}{H_{\text{conv}}} + \frac{1}{\xi \left(\frac{D}{d}\right)_{\text{aire}} + (1 - \xi) \left(\frac{D}{d}\right)_{\text{mat}}}}$$

en que:

- d : espesor del material
 ξ : fracción de huecos del área (m^2/m^2)

$$D_{\text{mat}} = \frac{D_w - a}{\mu}$$

y el coeficiente total convectivo:

$$H_{\text{conv}} = \frac{K}{\left(\frac{\xi}{\gamma} C\right)_{\text{aire}}}$$

El flujo de agua por los envases, se calcula por:

$$\dot{w} = \frac{\tilde{\mu}}{d} R T_k \Delta c$$

$\tilde{\mu}$: permeabilidad del material de envase (Kg/m.s.Pa)

y también se cumple:

$$\dot{w} = \frac{Dw - a}{\mu d} \Delta c$$

A su vez la permeabilidad y el factor de resistencia a la difusión μ' están relacionados por :

$$R T_k = \frac{Dw - a}{\mu'}$$

Beek y Meffert presentan valores que se entregan en las tablas siguientes:

TABLA N° 7

PERMEABILIDAD Y FACTOR DE RESISTENCIA A LA DIFUSION DE MATERIAL DE ENVASE

Material	$\tilde{\mu}$ (Kg/(m.s.Pa).10 ⁻¹⁵)	μ' (x10 ³)
Acetato de celulosa	63	2,9
Polipropilano	0,34	536
Polietileno	0,17	1070
Cloruro de polivinilo	1,7	107
Cartón/papel	180	1,0

TABLA N° 8

COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE MASA EN FUNCION DEL AREA DE PERFORACIONES Y DEL ESPESOR DEL MATERIAL DE ENVASE

ξ (%)	d = 1mm	d = 5 mm
30	3,22 (10 ⁻³)	1,12 (10 ⁻³)
10	1,68 (10 ⁻³)	4,31 (10 ⁻⁴)
5	9,81 (10 ⁻⁴)	2,26 (10 ⁻⁴)
1	2,42 (10 ⁻⁴)	5,01 (10 ⁻⁵)
0	2,29 (10 ⁻⁵)	4,60 (10 ⁻⁶)

Beck y Meffert establece la comparación siguiente entre los métodos para predecir el tiempo de enfriamiento y el tiempo de almacenamiento de productos hortícolas.

	Factor	Fórmula	Consecuencias por	
			Calidad	Pot.refrigerac.
Tiempo de enfriamiento	f	$\frac{X}{\alpha} \left(1 + \frac{2}{Bi}\right)$	optimista	demasiado
	f.j	fx y z gráfico	levemente optimista	cercano a la realidad y de difícil determinación
	jh	$1 + \frac{Po \alpha fxyz}{2,303 X^2}$ $1 - \frac{Po}{N} \left(1 + \frac{2}{Bi}\right)$	pesimista	cercano a la realidad
Condiciones de almacenamiento	θ_c	$\frac{Q_T X^2}{NK} \left(1 + \frac{2}{Bi}\right)$	pesimista con evaporación manejable	cercano a la realidad

A su vez afirman que la solución de seis términos y la de un término dan buenos resultados en la estimación de la curva de enfriamiento del centro del producto, enfriados con aire que está circulando a su alrededor.

Cada método de cálculo da resultados pobres, si no se considera el fenómeno de evaporación de agua del producto en estudio y que los modelos dan resultados alejados de la realidad, bajo las condiciones siguientes:

i) Velocidad baja del aire si existen perforaciones de ventilación.

Una velocidad alta de circulación en torno de las cajas con perforaciones, produce variaciones de presión en torno de la caja y esto produce una velocidad baja de circulación en la caja; desde el punto de vista del calor, la convección está ayudando a los efectos de transferencia de masa y hay que tomar en cuenta los efectos de difusión.

ii) Generación de calor constante durante el período de enfriamiento.

Las soluciones analíticas suponen calor constante.

Además, existe la transpiración de los productos y no se mantiene constante el calor. Por eso, el cálculo del déficit de concentración de agua es importante por sus efectos correctivos.

iii) Más de una caja en la pila.

El cálculo del déficit de concentración de vapor de agua en estas condiciones es bastante difícil.

7.1.2 Congelación

Conceptos Generales:

Cualquier discusión de procesos de congelación necesitará eventualmente alguna descripción de la velocidad a la cual ellos conducen (Osorio y otros, 1982).

Términos comunes como lento ("sharp" or "low"), rápido ("rapid" or "quick") y ultrarápido se usan en congelación. Hay una gran variación en los métodos de expresión y la velocidad asociada con ellos; lo que un autor define como congelación lenta, otro la puede definir como rápida.

En la Tabla N°1, se ilustra este punto clasificando los métodos de expresión de velocidad de congelación, junto con ejemplos específicos encontrados en la literatura.

La variabilidad en la definición parece deberse a tres causas básicas:

- i) Diferencias en el tamaño de la muestra estudiada,
- ii) Diferencias en las facilidades disponibles y la exactitud deseada, y
- iii) Debilidad para reconocer los méritos relativos de los diferentes métodos para expresar la velocidad de congelación.

Factores que afectan la velocidad de congelación y descongelación.

- i) La diferencia de temperatura entre el producto y el medio enfriador (o calefactor).
- ii) El medio de transferencia de la energía térmica hacia,

- desde, y dentro del producto (conducción, convección, radiación).
- iii) El tipo, tamaño y forma del paquete.
 - iv) El tipo, forma y propiedades térmicas del producto.

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS
LIBRERÍA

Descripción

<u>Lento</u>	<u>Rápido</u>	<u>Ultrarrápido</u>	<u>Aplicación</u>	<u>Referencia</u>
<u>I. Cambio de temperatura por unidad de tiempo.</u>				
1°C/min	Aprox. 50°C/min bajo 30°C o menos	-	muestras pequeñas	Mazur (1960)
1-20°C/min	5-20°C/min	100°C/min	muestras pequeñas	Levitt (1960)
20°C/min	-	-	muestras grandes	Levitt (1960)
0,01-0,02°C/min	1-100°C/min	5-100°C/seg	cualquier muestra	Borgstrom (1961)

II. Tiempo para atravesar un rango específico de temperatura.

Aprox. 1 hr a temp. de congelación (plateau)	Pocos seg. a temp. de congelación en plateau.	Aprox. 0,01 seg. a temp. de cong. en el plateau.	muestras pequeñas	Luyot (1961)
-	>2 hr en en rango 32°F-23°F	-	muestras grandes	Long (1955)
-	>30 min en en rango 31°F - 25°F	-	muestras grandes	Nicholas (1945)
-	>30 min desde comienzo de la formación del hielo hasta la temp. a la cual la formación del hielo es completa.	-	muestras grandes de tejidos de plantas.	Josly and Hohl (1948)
10min o más en el rango 0° a -79°C.	2 seg a 5 min en el rango de 0° a -79°C.	2 seg o menos en rango de 0° a -190°C.	muestras pequeñas	Schmith (1961)

<u>Lento</u>	<u>Rápido</u>	<u>Ultrarrápido</u>	<u>Aplicación</u>	<u>Referencia</u>
--------------	---------------	---------------------	-------------------	-------------------

III. Naturaleza del frente de hielo.

Frente hielo sólido
Fase simple en la
superficie de separa-
ción sólido y líquido

Numerosos crista-
les de hielo.

Pequeños cristales de
hielo, no detectables
con microscopio elec-
trónico.

muestras pequeñas

Stephenson (1960)

IV. Velocidad del frente de hielo.

a) 0.3cm/s en
frutillas.

b) cristales de
hielo uniforme-
mente distribui-
dos, del tamaño
de las células
aprox.

Woodroof (1941)

V. Localización de cristales.

Todos los cristales loca-
lizados extracelularmen-
te.

tejido animal

Meryman (1956)

VI. Otros

a) Veloc. de liberación
de calor

b) cantidad de hielo for-
mado por unidad de
peso del material por
unidad de tiempo.

aplicación general

Luyet (1957)

7.1.3 Generalidades sobre tiempo de congelación y descongelación

La velocidad de congelación y descongelación es uno de los factores más importante que influye en la calidad de los alimentos. Así, frecuentemente se requiere estimar tiempos de congelación y descongelación para determinar procedimientos adecuados para la producción o distribución de alimentos congelados. Ya que muchas de las fórmulas son aplicables para congelación y descongelación, el término "tiempo de congelación" se usará en lugar de tiempo de congelación o tiempo de descongelación.

La definición de "tiempo de congelación" es fuente de confusión en la literatura. Esta confusión se debe a las siguientes dificultades:

-) El tiempo de congelación se tiene que definir en términos de una posición dada en la distribución de temperatura dentro de la muestra. El "centro térmico" o la posición que se enfría más lentamente, se usa comúnmente como la posición de referencia.
-) Los alimentos no tienen el punto de congelación característico que está asociado con los materiales puros. Una definición de tiempo de congelación requiere una definición del punto de congelación.

Para algunos autores, el tiempo de congelación es la duración del período del cambio de fase, mientras que otros autores lo definen como la duración del proceso completo de congelación, incluyendo: pre-enfriamiento, cambio de fase y el período de sobre-enfriamiento (Osorio y otros, 1982).

En el rango de temperatura entre -1°C y -5°C , se produce la máxima formación de cristales de hielo (International Institute of Refrigeration, 1972).

"Thermal arrest time". Tiempo de detención térmica es el término empleado por Long (1955) para referirse al tiempo que se demora el producto en el proceso de enfriamiento al cruzar el rango de -1°C a -5°C , debido a que se produce un cambio muy lento de temperatura en este rango.

Fennema et al., 1973, establece cuatro métodos para determinar la velocidad de congelación:

i) Método tiempo temperatura:

Es el método más utilizado, el cambio de temperatura en función del tiempo es el más apropiado cuando la calidad del producto congelado es el objetivo principal, porque la velocidad de congelamiento regula la calidad del producto, pero esta velocidad varía durante la congelación del producto y el valor medio no representaría realmente el proceso.

ii) Velocidad del frente de hielo.

iii) Apariencia del producto.

iv) Métodos térmicos.

Por otra parte, se tiene "el tiempo nominal de congelación" (dado por el International Institute of Refrigeration, 1972), es el tiempo para que el centro térmico de un producto dado y con dimensiones especificadas pase de 0°C , que es la temperatura inicial uniforme, a una temperatura 10°C más baja que el punto inicial de congelación.

Luego "el tiempo real de congelación" es el tiempo total, necesario para bajar la temperatura del centro térmico desde el valor inicial del producto hasta una temperatura dada.

La "velocidad de congelación" de un alimento, se refiere a la razón entre la distancia mínima de la superficie al centro

térmico y el tiempo que se demora en que la superficie alcance a 0°C y el centro térmico llegue a una temperatura 10°C más bajo que la temperatura donde se inicia la formación de hielo en dicho centro.

Parece ser más aceptable la definición de "tiempo real de congelación" para todos los efectos, aunque tiene algunas limitaciones es la definición utilizada por Ramaswamy y Tung y otros investigadores.

7.1.4 Curvas de enfriamiento de alimentos :

Holdsworth (1968) propone que en el proceso de congelación se pueden distinguir tres etapas:

- i) Etapa de preenfriamiento, el material se enfría desde la inicial (T_i) hasta la temperatura de congelación (T_f).
- ii) Etapa de cambio de fase en que se extrae el calor latente
- iii) Etapa de enfriamiento en que la temperatura baja desde T_f hasta la temperatura que se desea para el producto (T_c).

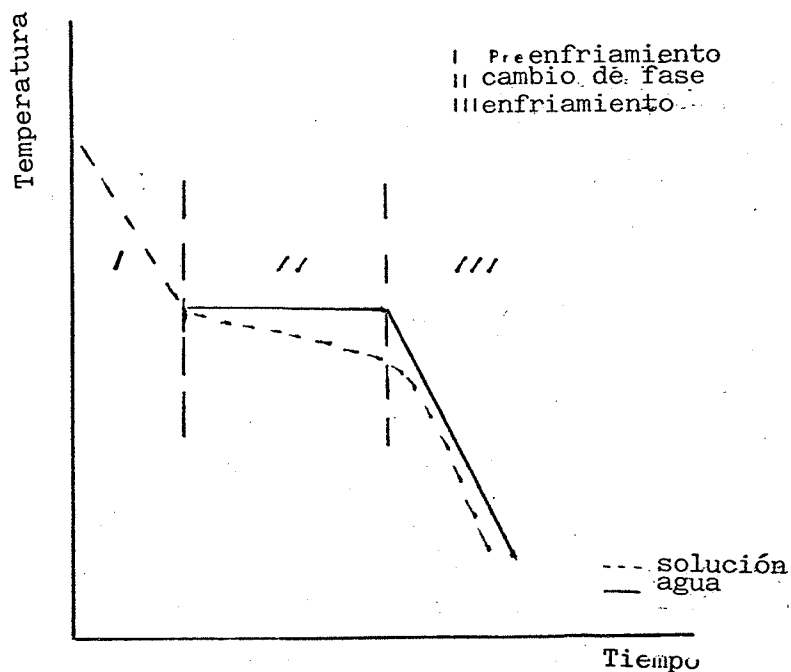
En la etapa de preenfriamiento influyen las propiedades térmicas del material no congelado y la diferencia de temperatura ($T_i - T_f$).

En la etapa de enfriamiento influyen las propiedades térmicas del material congelado y la diferencia de temperatura ($T_f - T_c$).

En la etapa de cambio de fase, la cristalización del agua es el fenómeno que la caracteriza.

El proceso es una nucleación seguida por crecimiento de los cristales.

Debido a los sólidos disueltos en la fase acuosa, se produce un descenso del punto de congelación y a su vez la interacción de los componentes del alimento con el agua hacen que el punto de congelación sea distinto al del agua pura.



(Ramaswamy y Tung)

FIGURA N° 27 : Curvas típicas de congelación para agua y solución.

En la Figura N°27 se presenta el caso típico de agua y una solución acuosa, en la cual se pueden distinguir las tres etapas y el descenso del punto de congelación al tener sólidos disueltos.

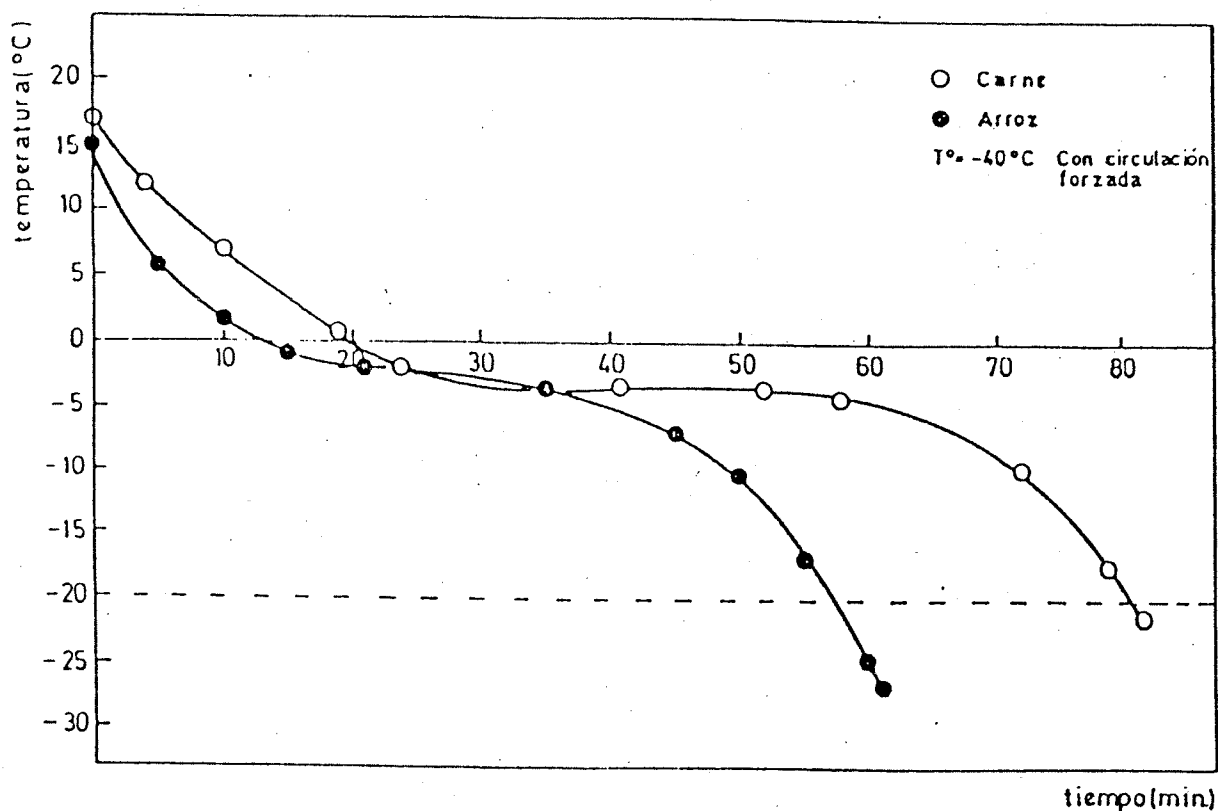


FIGURA N° 28 : Curvas de congelación de arroz graneado y carne mechada.

En esta Figura N° 28 se presentan las curvas de congelación de carne mechada y arroz graneado en un túnel con circulación forzada a -40°C (Castro y otros, 1985), ya no son tan claras las tres etapas, especialmente en el caso arroz, en la curva de la carne se notan claramente las tres etapas y en la etapa ii) el plateau se distingue fácilmente.

También las curvas cambian si los productos están sometidos a convección natural o forzada, como se puede apreciar en las figuras N° 29 y 30

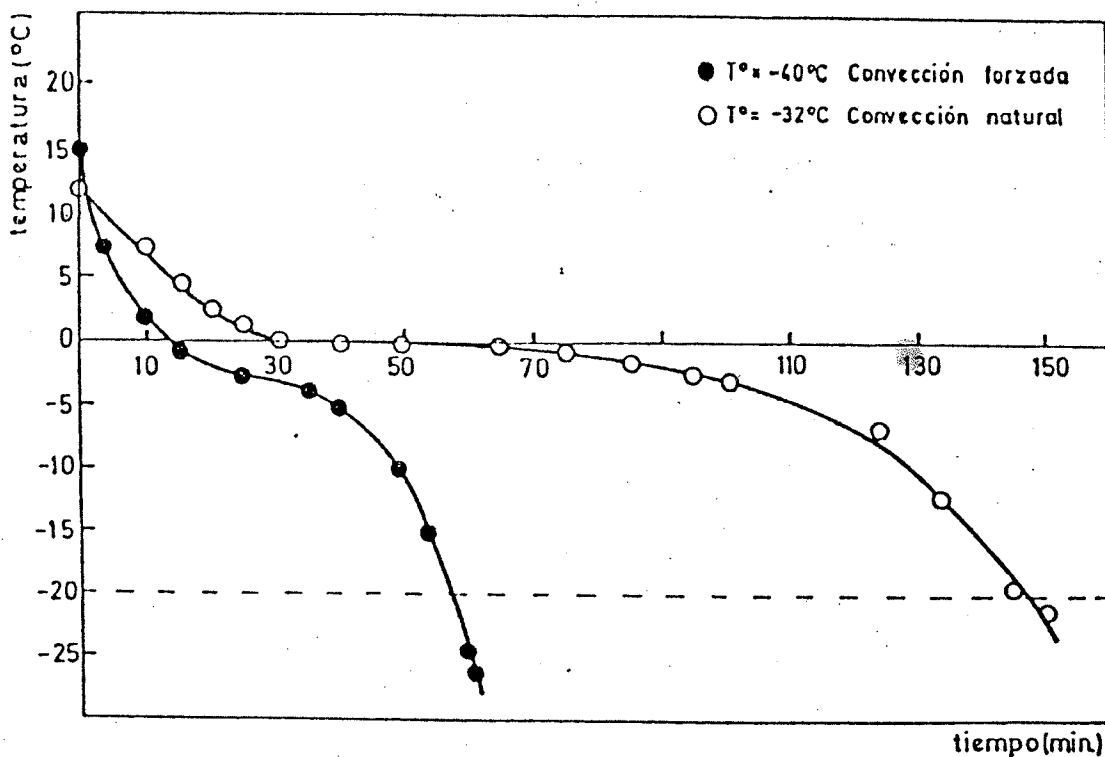


FIGURA N° 29 : Congelación de arroz graneado.

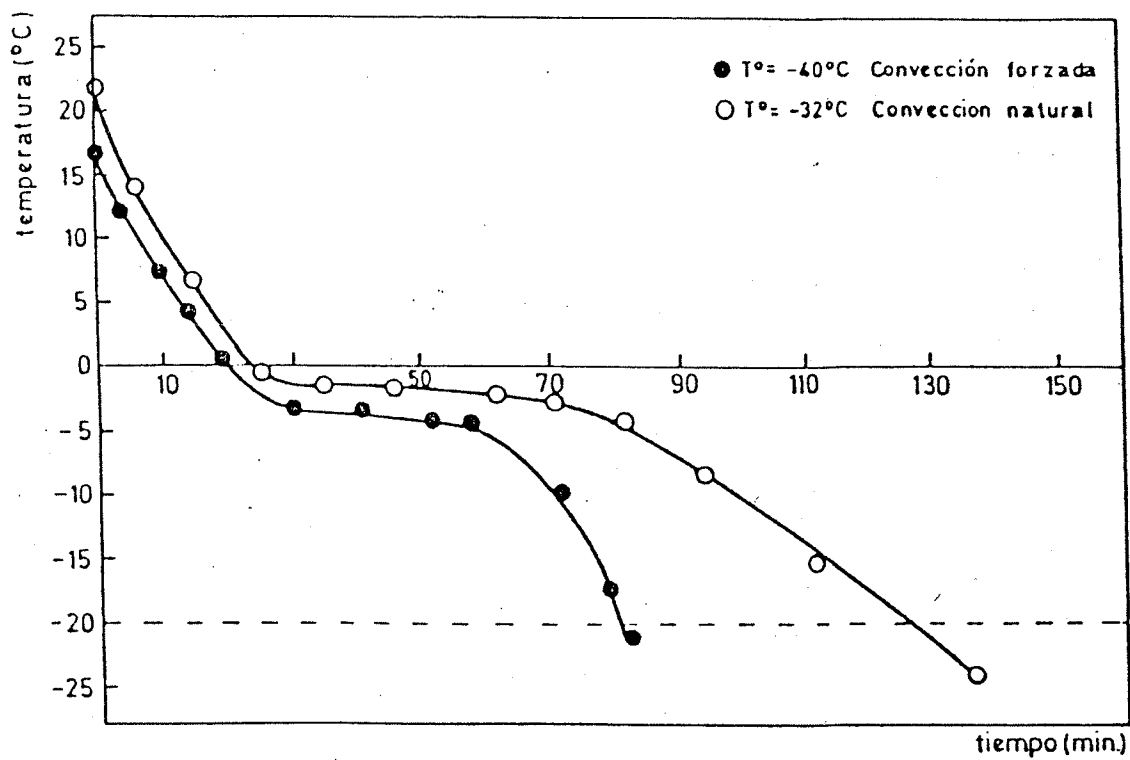


FIGURA N° 30 : Congelación de carne mechada.

A su vez el caudal de aire en el tunel de congelación también influye en las curvas de congelación, como se puede apreciar en la Figura N° 31:

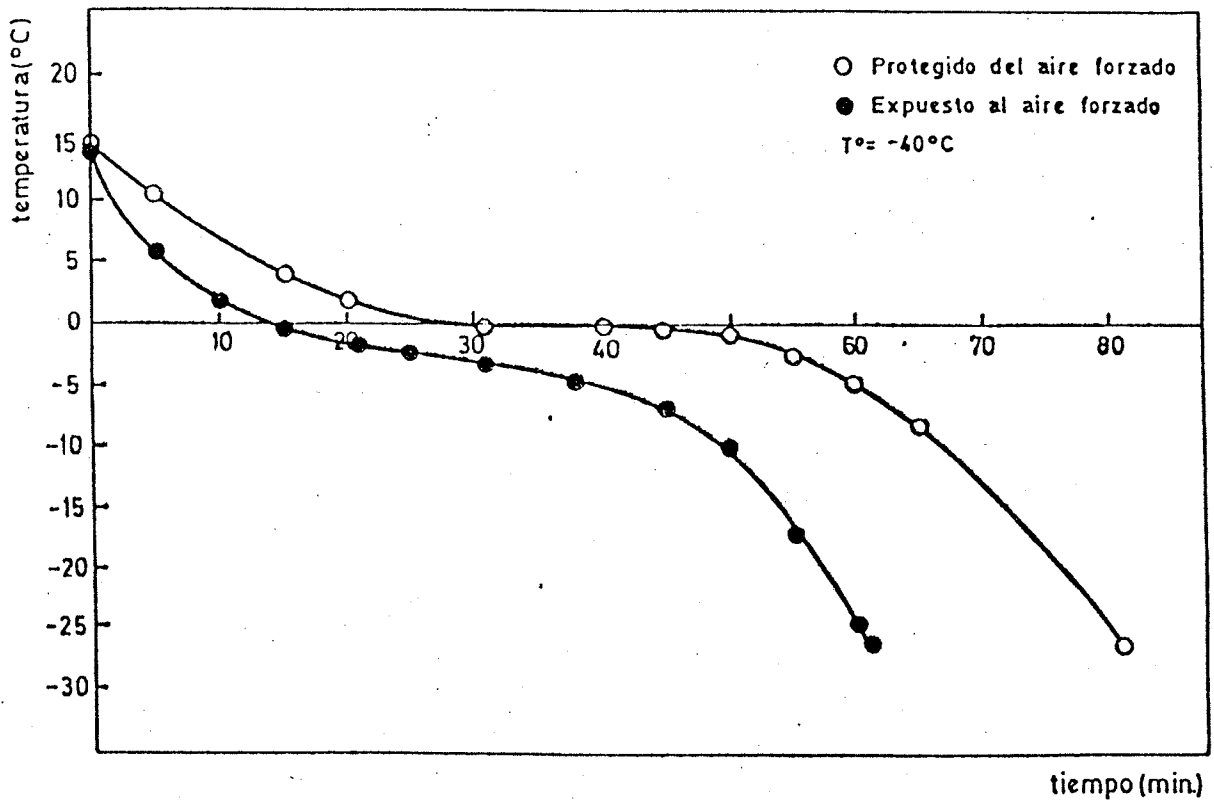


FIGURA N° 31 : Congelación de arroz en cámara a -40°C , expuesto a distinto caudal de aire frío.

En la Figura N° 32 se presenta la curva de enfriamiento de apios de la variedad Gigante de Pascal con y sin hilo y piel (Castro y otros).

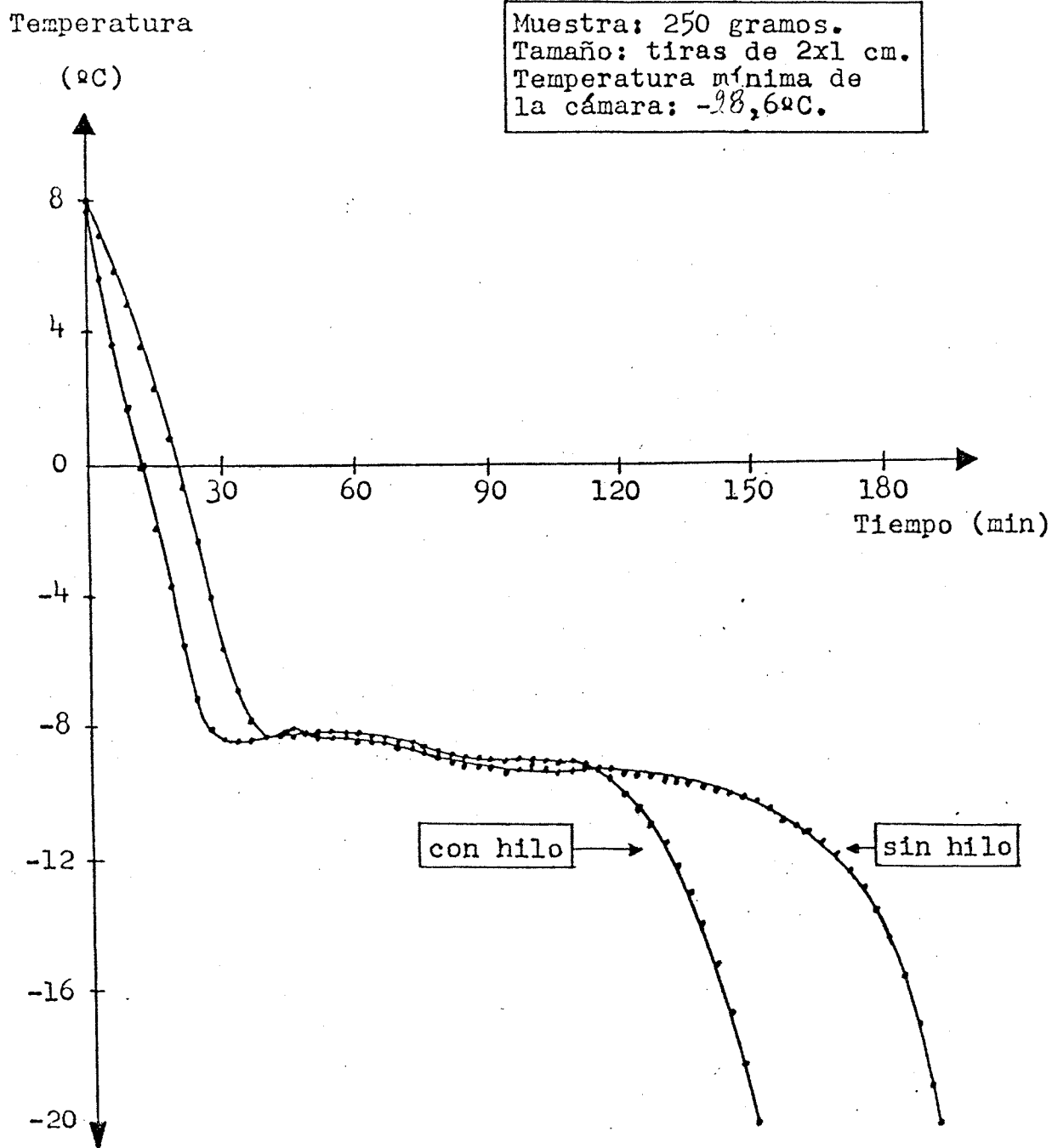


FIGURA N° 32 : Curva de enfriamiento para apios de la variedad Gigante de Pascal c/s hilo y piel.

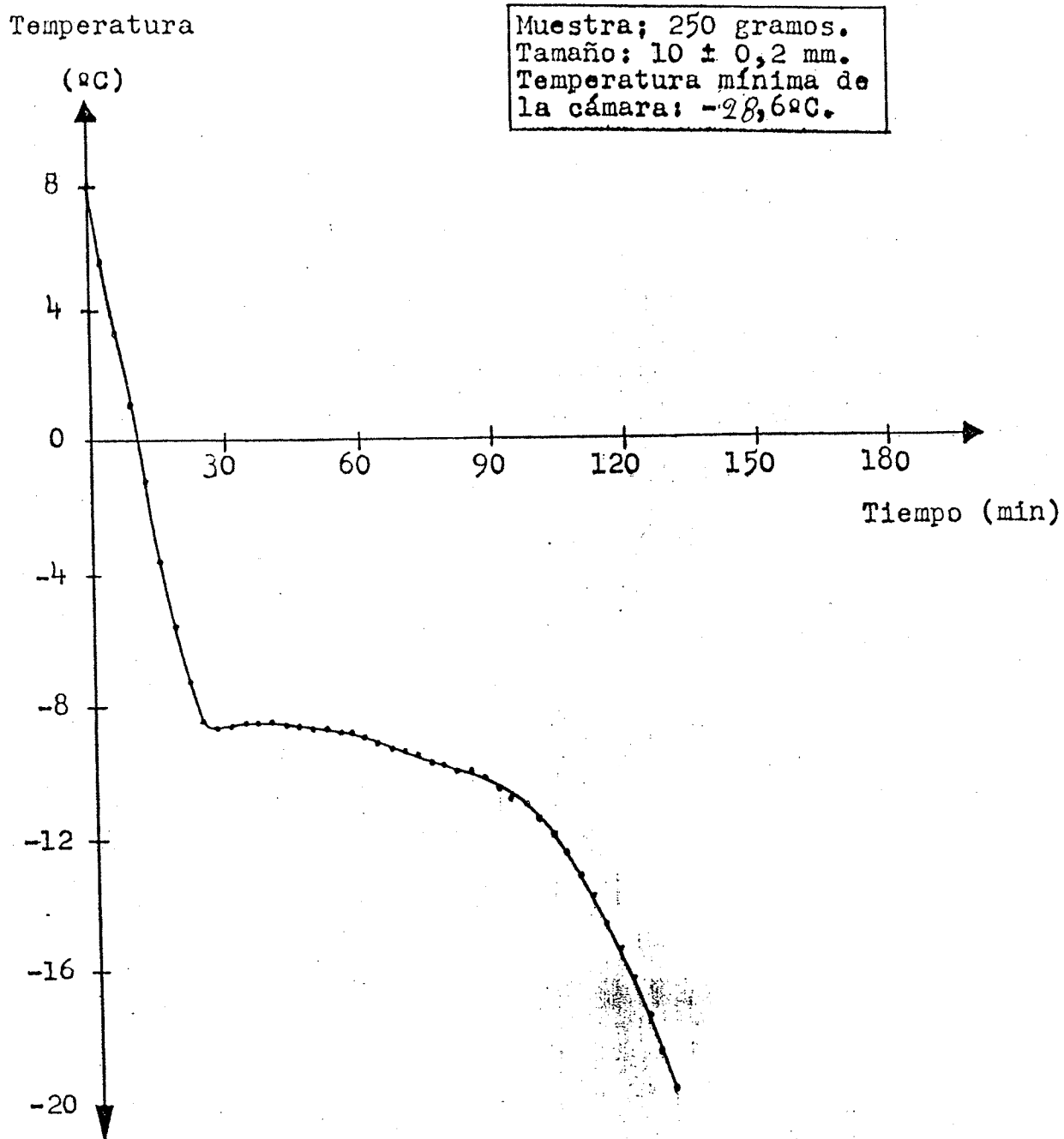


FIGURA N° 33 : Curva de enfriamiento para arvejas de la variedad Perfection.

En la Figura N° 33 se presenta la curva de enfriamiento de arvejas de variedad Perfection (Castro y otros), ya la segunda etapa de enfriamiento no presenta el plateau tan claro.

En la Figura N° 34 está la curva de enfriamiento para Salad Dressings congelados (Castro y otros).

Temperatura
(°C)

Temperatura mínima de
la cámara: -28,3 °C.

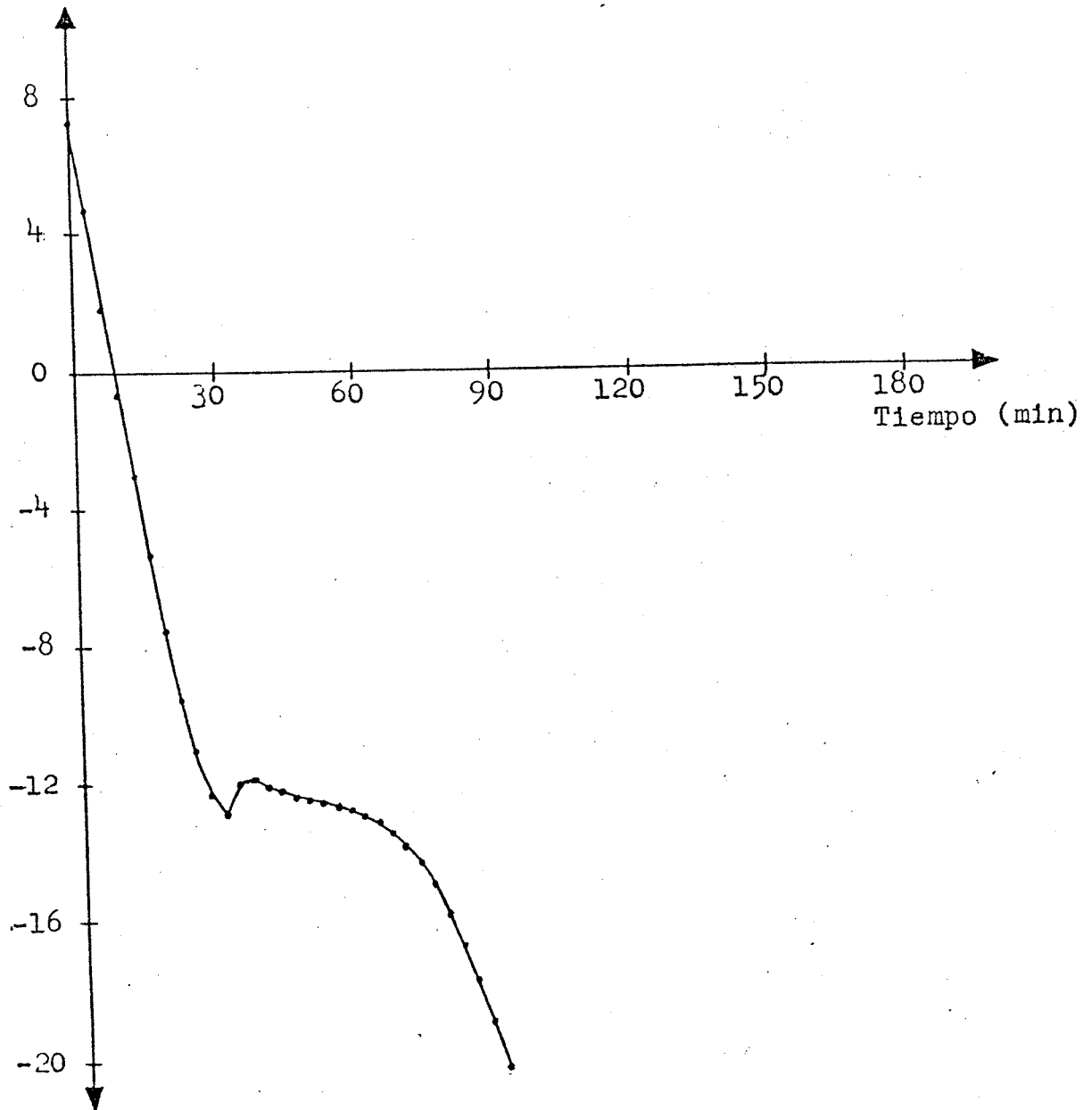


FIGURA N° 34 : Curva de enfriamiento para Salad Dressings congelados en freezer (Bouknecht Gk 29).

En el caso de roscas fritas congeladas las curvas de congelación cambian con el tipo de leudación si es mixta (Figura N° 35) o química (Figura N° 36) (Craddock y otros)

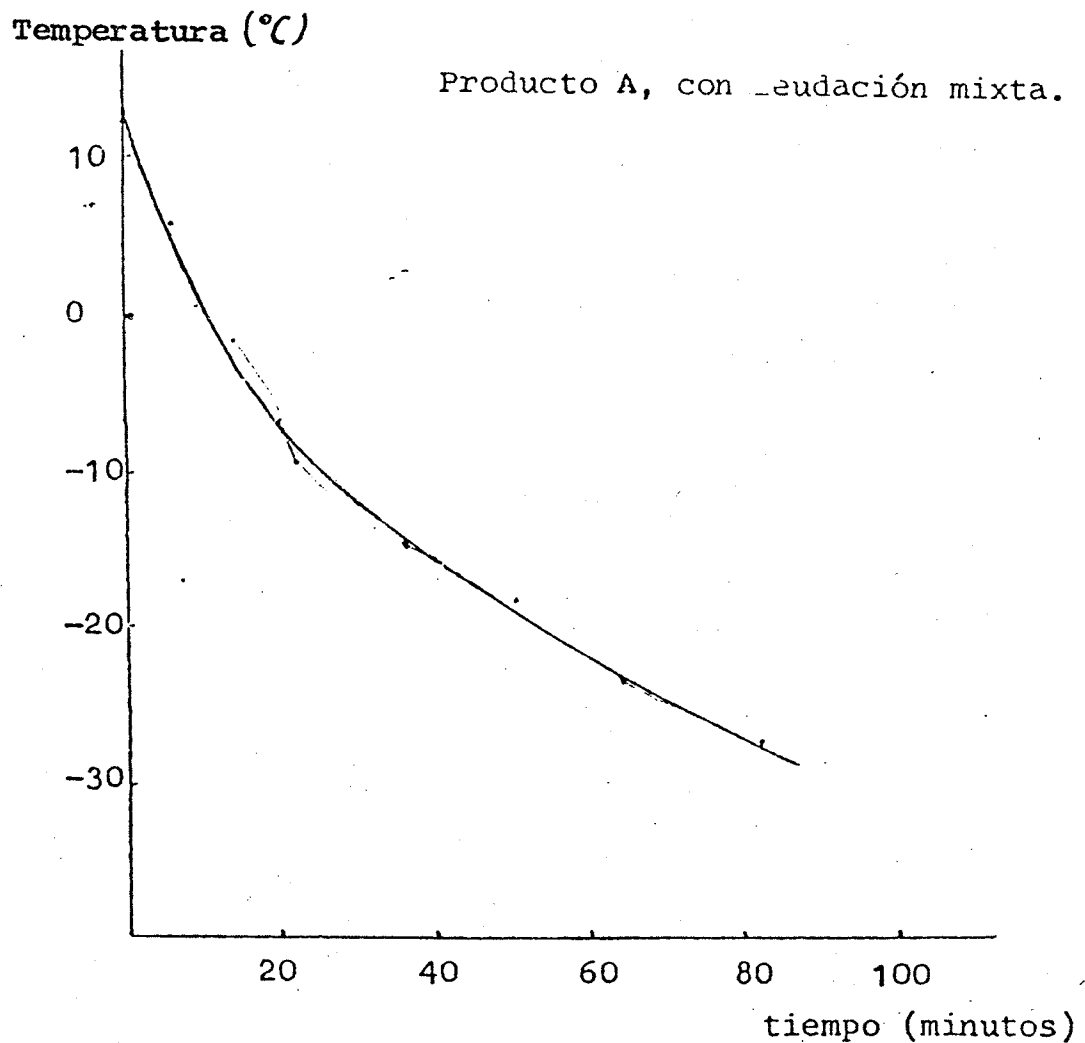


FIGURA N° 35 : Curva de congelación, leudación mixta.

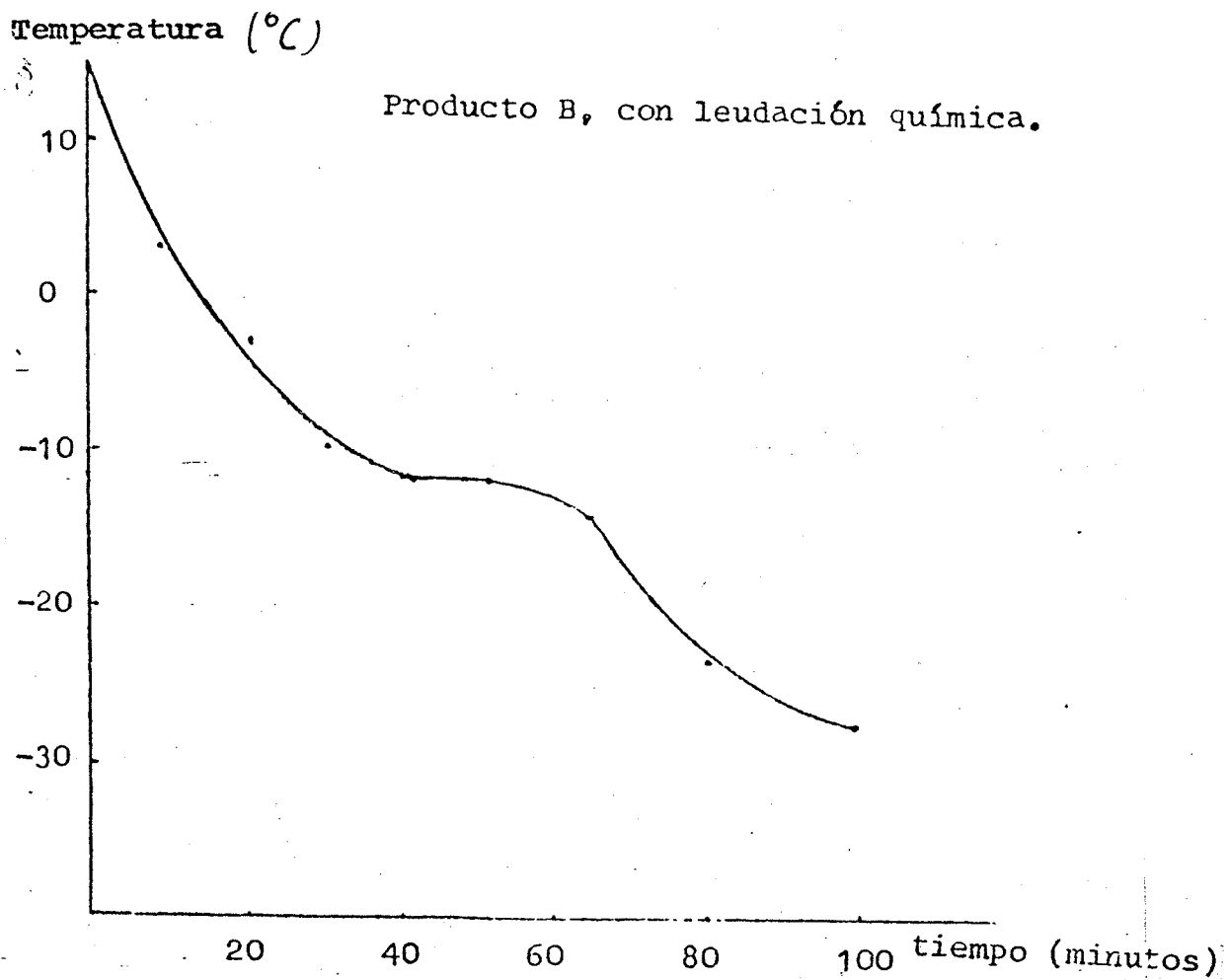


FIGURA N° 36 : Curva de congelación, leudación química.

Por ejemplo, en el caso de queques congelados, tales como: queque amarillo y de chocolate, ya no se distinguen las tres etapas, como en el caso de leudación mixta (Figura N°37).

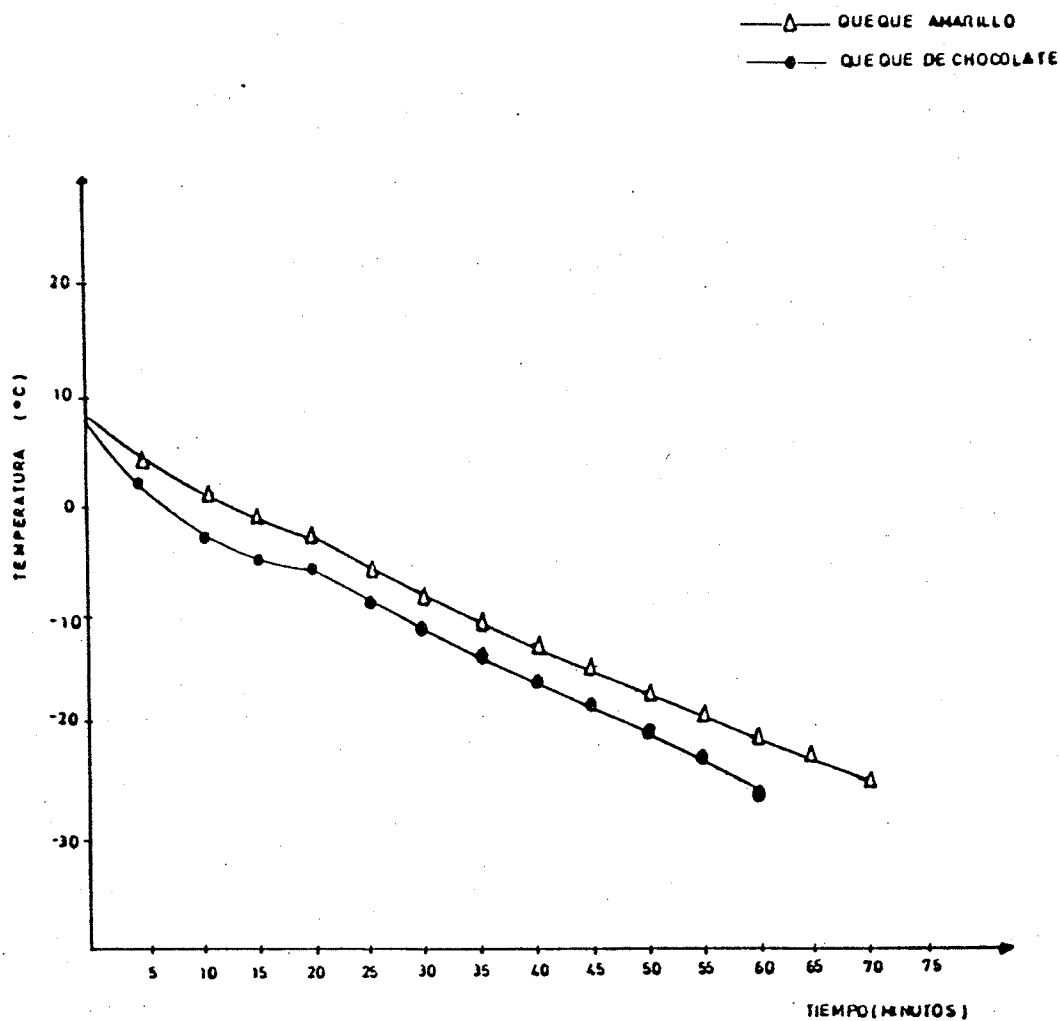


FIGURA N° 37 : Congelación de queques (amarillo y chocolate), leudación mixta.

Con los casos ya vistos, se puede concluir que los alimentos presentan una acción compleja frente al proceso de congelación y que las curvas de enfriamiento están presentando problemas para reconocer las etapas y se pueden entender mejor las diferentes definiciones de tiempo de congelación, existentes en la literatura (Craddock y otros, 1987).

7.2. Tiempo de congelación de alimentos:

Existen varios artículos publicados para el cálculo de tiempo de congelación, entre ellos Brennan et al. (1969), Charm (1971) y recientemente el de Ramaswamy y Tung (1984).

Los procedimientos para determinar tiempos de congelación, se pueden clasificar en 3 grupos (Bakal y Hayakawa, 1973):

- 1.- Experiencias de transferencia de calor. Se evalúa el tiempo de congelación a través de mediciones de la temperatura del alimento, durante la operación de congelación específica.
- 2.- Fórmulas teóricas: cálculo del tiempo de congelación mediante el uso de fórmulas que se obtienen por resolución de las ecuaciones de transferencia de calor.
- 3.- Fórmulas semiteóricas: cálculo del tiempo de congelación, usando fórmulas que se obtienen a través de la combinación de fórmulas teóricas y datos experimentales.

(Hayakawa, 1977)

7.2.1 Experiencia de transferencia de calor:

Esta metodología es la más simple, aún para obtener estimaciones más exactas de tiempos de congelación, ya que se determina mediante el registro de la temperatura, durante la congelación. Sin embargo, los datos de tiempo de congelación no se pueden usar para estimar los tiempos de congelación de procesos diferentes, ya que los datos son aplicables solamente al conjunto específico de condiciones usadas.

A pesar de lo anterior, frecuentemente se publican determinaciones experimentales de tiempos de congelación, debido a su simplicidad y acuciosidad.

Algunas investigaciones típicas de estas determinaciones, han sido publicadas por Fanelli y Gunclerson (1961) y Klose et al. (1968).

7.2.2 Fórmulas teóricas:

Muchas fórmulas teóricas se pueden usar en la evaluación de tiempos de congelación.

Estas fórmulas se obtuvieron, ya sea resolviendo ecuaciones de balance de calor o bien resolviendo la ecuación de Fourier para transferencia de calor en estado no estacionario por conducción.

Para solucionar estas ecuaciones, se imponen varias suposiciones; así, estas suposiciones se deben examinar cuidadosamente antes de aplicar estas fórmulas.

Muchas de las fórmulas teóricas se obtuvieron, suponiendo las siguientes condiciones:

- Propiedades termofísicas del alimento constantes, aunque las propiedades de éste en su punto de congelación y congelado son diferentes.
- El alimento tiene un punto de congelación característico.
- La densidad del alimento en su estado congelado es idéntica a la de su estado no congelado.

En general, el tiempo de congelación que se obtiene al solucionar las fórmulas disponibles, son menos exactas, ya que las suposiciones para derivarlas no se satisfacen completamente durante el tratamiento real de congelación (Osorio y otros, 1982).

7.2.3 Fórmulas semiteóricas:

Se obtuvieron fórmulas semiteóricas combinando matemáticamente datos experimentales con fórmulas teóricas.

Estas fórmulas se pueden usar para la estimación de tiempos de congelación, sin las restricciones mayores causadas por suposiciones impuestas al derivar las fórmulas teóricas.

7.2.4 Modelos para predecir el tiempo de congelación:

1.- Modelo de Plank:

Es el modelo más ampliamente utilizado para predecir el tiempo de congelación, a pesar del tiempo transcurrido desde su proposición (1913, 1941).

El modelo supone lo siguiente:

- i) El calor se transfiere por convección desde la superficie del objeto al medio refrigerante.
- ii) En el punto de congelación hay liberación de calor latente.
- iii) El calor se transfiere por conducción en el material que se está congelando.
- iv) La temperatura del material que se está congelando, permanece constante en el punto de congelación desde el comienzo del proceso hasta que termina.
- v) La transferencia de calor es estacionaria, entre el medio de enfriamiento y el producto.
- vi) Toda el agua está líquida antes del proceso de congelación.

Al aplicar estas condiciones, se tiene lo siguiente:

$$\text{Aplicando i)} \quad q = -hA (T_a - T_s) \quad (1)$$

$$\text{Aplicando ii)} \quad q = AL \rho' \left(\frac{dx}{dt} \right) \quad (2)$$

$$\text{Aplicando iii)} \quad q = -K'A \frac{(T_s - T_f)}{x} \quad (3)$$

en que:

q : calor transferido

A : área de intercambio de calor

L : calor latente de fusión

ρ' : densidad bajo el punto de congelación

$\frac{dx}{dt}$: velocidad del frente de congelamiento

T_a : temperatura ambiente

- T_s : temperatura de la superficie
 T_f : temperatura de congelación
 h : coeficiente de convección
 K' : conductividad térmica del producto congelado

Combinando (1) y (3) para eliminar T_s queda:

$$q = \frac{-A (T_a - T_f)}{\left(\frac{1}{h} + \frac{x}{K'}\right)} \quad (4)$$

Se igualan (2) y (4) dando:

$$L \rho' \frac{dx}{dt} = \frac{(T_f - T_a)}{\frac{1}{h} + \frac{x}{K'}} \quad (5)$$

Separando variables de la ecuación (5) e integrando desde $x = 0$ hasta $x = \frac{d}{2}$, suponiendo una placa infinita, se tiene:

$$t = \frac{\rho' L}{(T_f - T_a)} \left[\frac{d}{2h} + \frac{d^2}{8K'} \right] \quad (6)$$

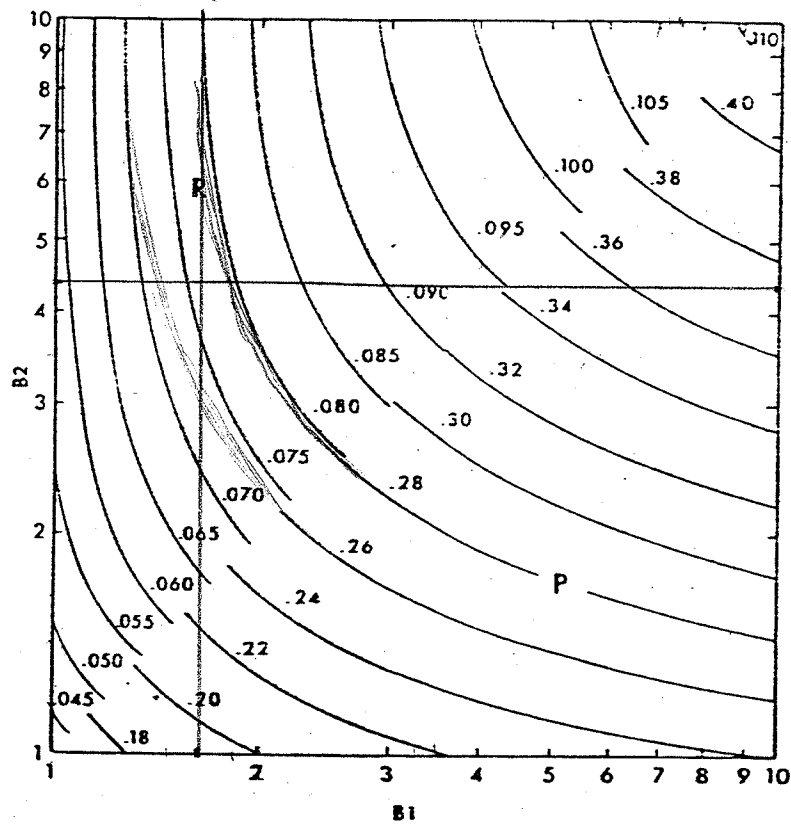
y en general la ecuación de Plank queda:

$$t = \frac{\rho' L}{(T_f - T_a)} \left[\frac{Pd}{h} + \frac{Rd^2}{K'} \right] \quad (7)$$

en que P y R son constantes que dependen de la geometría del sistema.

Para placa infinita	$P = 0,500; R = 0,125$
Para cilindro infinito	$P = 0,250; R = 0,0625$
Para esfera	$P = 0,167; R = 0,0416$

Para un paralelepípedo P y R pueden obtenerse de la Figura N° 38, obtenida por Ede (1949). La dimensión d es la medida más corta del paralelepípedo y B_1 es el factor que multiplicado por d da la segunda dimensión más grande y B_2 es el factor que multiplicado por d da la mayor dimensión del paralelepípedo.



Ramaswamy y Tung

FIGURA N° 38 : Gráfico para calcular P y R para paralelepípedo.

Hay que hacer notar que el modelo de Plank no toma en cuenta el calor que es transferido durante el preenfriamiento y el enfriamiento del producto congelado.

A pesar de estas limitaciones, los investigadores han encontrado que el modelo predice el tiempo de congelamiento con un error pequeño (Ede, 1949).

Para canales de cordero, Earle y Fleming (1967) encontraron que el tiempo predicho por Plank estaba bastante cerca de los experimentales.

También se recomienda utilizar el cambio de entalpía en el proceso en vez del calor de congelación, en este caso se habla de Plank modificado, y de todas maneras es el modelo más sencillo, ya se tiene concenso acerca de que predice tiempos menores que los reales (Cleland and Earle, 1977, Heldman and Singh, 1981; Hung and Thompson, 1983; Ramaswamy, 1979).

2.- Modelo de Nagaoka o Modificación de Nagaoka:

Nagaoka et al. (1955) modificó el modelo de Plank para predecir el tiempo de congelación de pescado fresco en un congelador de aire forzado:

$$t = \left[1 + 0,008 (Ti) \right] \frac{Q \rho'}{Tf - Ta} \left[\frac{Pd}{h} + \frac{Rd^2}{K'} \right]$$

y Q que es el calor transferido por unidad de masa del producto en el preenfriamiento, en el cambio de fase y en el enfriamiento está dado por:

$$Q = C (Ti - Tf) + L + C' (Tf - Tc)$$

en que:

C : calor específico sobre el punto de congelación

C' : calor específico bajo el punto de congelación

3.- Modelo de Levy o Modificación de Levy :

Levy (1958) utilizó para predecir el tiempo de congelación de pescado fresco en un congelador de aire forzado, la relación siguiente:

$$t = \left[1 + 0,008 (T_i - T_f) \right] \frac{Q \rho'}{(T_f - T_a)} \left[\frac{Pd}{h} + \frac{Rd^2}{K'} \right]$$

el factor $[1 + 0,008 (T_i - T_f)]$ se cambia por $[1 + 0,00445 (T_i - T_f)]$ al utilizar unidades inglesas.

4.- Modelo del I.I.R. o Modificación del I.I.R.

El I.I.R. (International Institute of Refrigeration, 1972) estableció una modificación en que Q^* es la entalpía del cambio entre T_f y T_c .

$$t = \frac{Q^* \rho'}{(T_f - T_a)} \left[\frac{Pd}{h} + \frac{Rd^2}{K'} \right]$$

5.- Modelo de Mellor o Modificación de Mellor :

Mellor (1976) toma en cuenta sólo la mitad del calor sensible en el preenfriamiento y en el enfriamiento más el calor latente.

$$t = \left[0,5c (T_i - T_f) + L + 0,5 (t_f - T_c) \right] \frac{\rho'}{(T_f - T_a)} \left[\frac{Pd}{h} + \frac{Rd^2}{K'} \right]$$

6.- Método de Cowell :

Cowell (1967) presentó la ecuación de Plank en forma adimensional:

$$\frac{Fo}{Ko} = F \left(G + \frac{1}{Bi} \right)$$

en que:

Fo : Número de Fourier $\frac{t}{a}$

α : difusividad térmica sobre el punto de congelación

a : dimensión característica

Ko : número de Kossovitch $\frac{L}{C' (Tf-Ta)}$

Bi : número de Biot $\frac{ha}{K'}$ de la fase congelada

FyG : constantes que dependen de la geometría del producto.

F : 1,0 para placa infinita

F : 0,5 para cilindro infinito

F : 0,33 para esfera

G : 0,5 para las tres formas geométricas y para varilla infinita se puede predecir el valor de G utilizando la Figura N°39 y para paralelepípedo la Figura N° 40.

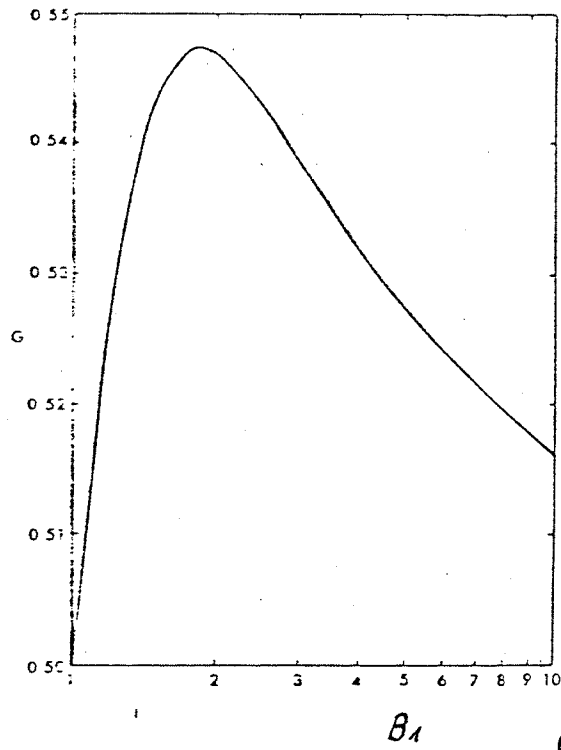
7.- Procedimiento de Mott :

Mott (1964) utilizó tres números adimensionales:

$$S = \frac{Bi + 1}{G'} = A \left(\frac{d}{v} \right)$$

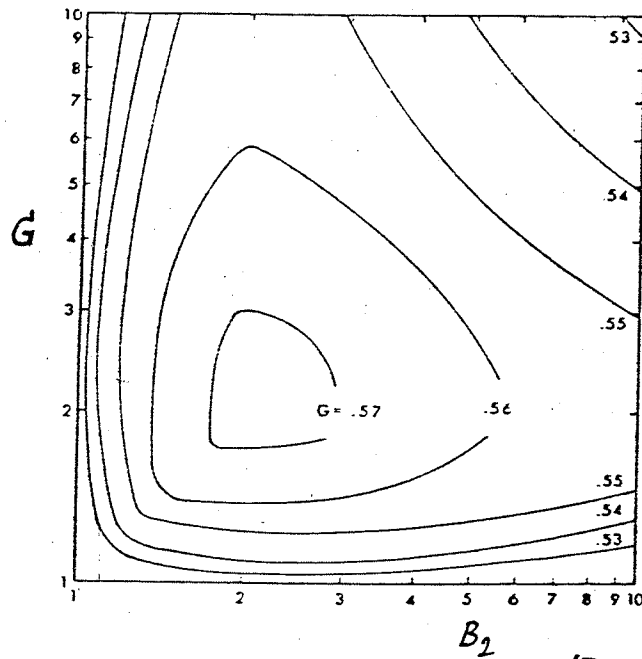
$$Bi = \frac{hd}{2K'}$$

$$G' = \frac{th (Tf-Ta)}{Qd}$$



(Ramaswamy y Tung)

Figura N° 39 : Valores de G para una varilla rectangular infinita



(Ramaswamy y Tung)

Figura N° 40 : Valores de G para paralelepípedo $d \times dB_1 \times dB_2$.

Utilizándolos, obtuvo una ecuación similar a la de Plank :

$$t = \frac{\rho \rho'}{(T_f - T_a)} \frac{V}{A} \left[\frac{1}{h} + \frac{d}{2K'} \right]$$

Gutschmidt (1964) recomienda la utilización de las relaciones para productos con formas irregulares.

8.- Fórmulas de Tanaka y Nishimoto :

Tanaka y Nishimoto (1959, 1960 y 1964), derivaron fórmulas para la estimación de tiempos de congelación para alimentos de formas geométricas diversas.

Para esta derivación usaron una ecuación de balance de calor.

Se hicieron las siguientes suposiciones:

- Las configuraciones geométricas de los alimentos, se supone que son: paralelepípedo, cilindros circulares finitos, esferas, conos de sección circular rectos o una combinación de dos conos rectos de sección circular.
- El frente de congelación avanza uniformemente desde la superficie del alimento y la configuración geométrica de esta superficie es siempre paralela a la superficie del alimento. Por ejemplo, la forma geométrica de la superficie del frente de avance en un alimento de forma de ladrillo, es también una forma de ladrillo durante cualquier tiempo de congelación.

- La congelación procede seccionalmente. En otras palabras, la temperatura en una capa no congelada localizada por el frente de congelación cambia desde la temperatura inicial del alimento, T_o , a la temperatura final deseada en el alimento, T_b , durante un incremento de tiempo, t .
- La transferencia de calor desde un frente de congelación en el alimento al medio enfriador ocurre en estado estacionario.

De estas cuatro suposiciones, la 2° y 3° son físicamente no válidas y así, la validez de la fórmula de Tanaka es cuestionable (Osorio y otros, 1982).

Sin embargo, a continuación se dan sus fórmulas para dos formas geométricas, ya que no hay otras fórmulas publicadas disponibles para estas formas: cono recto de sección circular y la combinación de dos conos rectos de sección circular que se obtiene uniendo dos conos en sus bases planas.

$$T_f = \frac{\rho}{24 K_1} S \left(S + \frac{4 K_2}{L} \right) \frac{Q}{T_f - T_a}$$

en que :

$$Q = C_2 (T_o - T_b) - (C_2 - C_1)r (T_s - T_b) + Lr$$

$$S = \begin{cases} d \cos \beta (1 + \operatorname{sen} \beta) & \text{para Cono} \\ d \cos \beta & \text{para 2 Conos} \end{cases}$$

ρ : densidad

K_1 : conductividad térmica del material o zona congelada

K_2 : conductividad térmica del material o zona no congelada

L : calor latente de fusión

- Q : calor que hay que retirar para congelar el alimento
 C_2 : calor específico del material no congelado
 T_o : temperatura inicial del alimento
 T_b : temperatura al final de la congelación
 C_1 : calor específico del material congelado
 r : razón de agua congelada en T_b a contenido de agua total
 T_s : punto de congelación final
 d : diámetro base del cono recto de sección circular
 β : la mitad del ángulo del cono circular

La validez de las fórmulas anteriores se debe verificar mediante experiencias de transferencia de calor antes de aplicarlas, ya que esto no fue totalmente investigado por los autores Tanaka y Nishimoto.

9.- Modificaciones de Cleland y Earle :

Cleland y Earle (1976, 1977) recomendaron hacer modificaciones significativas a la Ecuación de Plank, por medio de los siguientes números adimensionales:

$$Fo = \frac{P}{Bi \cdot Ste} \quad \frac{R}{Ste}$$

donde :

$$Ste : \text{número de Stefan} = \frac{C' (T_f - T_a)}{Q^*}$$

Q^* : diferencia de entalpía entre T_f y T_c

Para tomar en cuenta las variaciones en la etapa de preenfriamiento, introdujeron el número de Plank ($PK = \frac{C(T_i - T_f)}{Q^*}$)

Por medio de trabajos experimentales, Cleland y Earle (1976) llegaron a establecer correlaciones para los valores de P^* y R^* .

Que son los parámetros de :

$$t = \frac{Q^* \rho'}{(T_f - T_a)} \left[\frac{P^* d}{h} \quad \frac{R^* d^2}{K'} \right]$$

para placa infinita:

$$P^* = 0,5072 + 0,2018 PK + Ste \left[0,3224 PK + (0,0105/Bi) + 0,0681 \right]$$

$$R^* = 0,1684 + Ste (0,2740 PK + 0,0135)$$

Estas tienen un error de más o menos 3% para productos homogéneos tipo placas y contenido de humedad del 77% y con las siguientes condiciones:

$$T_i < 40^\circ\text{C}$$

$$-15 < T_a < -40^\circ\text{C}$$

$$10 < h < 500 \text{ W/m}^2 \text{ C}$$

$$\text{espesor placa} \leq 0,12 \text{ m}$$

para cilindro infinito:

$$P^* = 0,3751 + 0,0999 PK + Ste \left[0,4008 PK + (0,0710/Bi) - 0,5865 \right]$$

$$R^* = 0,0133 + Ste \left[0,0415 PK + 0,3957 \right]$$

para esferas :

$$P^* = 0,1084 + 0,0924 PK + Ste \left[0,2310 PK - (0,3114/Bi) + 0,6739 \right]$$

$$R^* = 0,0784 + Ste \left[0,0386 PK - 0,1694 \right]$$

Las correlaciones para cilindro tienen un error de más o menos 5,2% en la predicción del tiempo de congelación y para la esfera tiene un error de más o menos de 3,8%.

Se pueden aplicar cuando se cumple:

$$0,155 < Ste < 0,345$$

$$0,5 < Bi < 4,5$$

$$0 < PK < 0,55$$

Los modelos fueron probados hasta 77% de humedad, utilizando un gel de metilcelulosa.

Cleland y Earle (1979) presentaron relaciones generales para los factores geométricos:

$$P' = P(1,026 + 0,5808 PK + Ste\{0,2296 PK + (0,0182/Bi + 0,1050)\})$$

$$R' = R [1,202 + Ste (3,410 PK + 0,73666)]$$

en que:

- para placa infinita:

$$P'' = P'$$

$$R'' = R'$$

- para cilindro infinito o esfera:

$$P'' = P' + 0,1278 P$$

$$R'' = R' + 0,1888 R$$

- para paralelepípedo rectangular:

$$P'' = P' + P [0,1136 + Ste (5,766 P - 1,242)]$$

$$R'' = R' + R [0,7344 + Ste (49,49 R - 2,900)]$$

que reemplazados en la ecuación siguiente, dan el tiempo de congelación:

$$t = \frac{Q^* \rho'}{(T_f - T_a)} \left[\frac{P''d}{h} \quad \frac{R''d^2}{K'} \right]$$

Con estas modificaciones los errores serían los siguientes:

± 5% para placas infinitas

± 7% para cilindros infinitos y esferas

±10% para paralelepípedos

Loeffen et al. (1981) incluyó modificaciones que tomarán en cuenta condiciones de borde, variables con el tiempo.

Un método está basado en la integración de la ecuación:

$$L \rho' \frac{dx}{dt} = \frac{T_f - T_a}{\left(\frac{1}{h} + \frac{x}{K'} \right)}$$

con T_a y h dependientes del tiempo.

Además, modificaron la ecuación de modo que se pudieran incluir los factores geométricos P'' y R'' junto con Q .

El otro método se basa en aplicar:

$$t = \frac{Q^* \rho'}{T_f - T_a} \left[\frac{P''d}{h} \quad \frac{R''d^2}{K'} \right]$$

en que T_a y h son constantes para intervalos pequeños de t . Seleccionando los intervalos se pueden calcular valores de t , que en el fondo es $\frac{\Delta t}{t}$

Cuando la congelación se completa, el tiempo total será cuando $\sum_t \frac{\Delta t}{t} = 1$ y la suma de los tiempos de los intervalos da el tiempo de congelación.

Con estos procedimientos se logra diferencias menores que 10% entre los valores predichos y los experimentales

10.- Modificación de Ramaswamy y Tung :

Estudiando la predicción del tiempo de congelación para manzanas envasadas en cilindros con los extremos aislados con los distintos modelos, encontraron los siguientes errores:

Plank (1941) error medio absoluto	18,2%
Nagaoka et al. (2955) error medio absoluto	18,8%
I.I.R. (1976) error medio absoluto	12,8%
Mellor (1976) error medio absoluto	13,9%

y sugieren utilizar el modelo siguiente:

$$t = \left[0,3022 C(T_i - T_f) + L + 2,428 C' (T_f - T_c) \frac{\rho'}{T_f - T_a} \left(\frac{Pd}{h} + \frac{Rd^2}{K'} \right) \right]$$

El error medio absoluto es 6,6% en las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} T_i &= 1 \text{ a } 25^\circ\text{C} \\ T_c &= -10 \text{ a } -18^\circ\text{C} \\ T_a &= -18 \text{ a } -178^\circ\text{C} \\ h &= 13,9 \text{ a } 68,4 \text{ W/m}^2\text{C} \end{aligned}$$

11.- Soluciones de Luikov :

Luikov (1968) impone que no hay resistencia de superficie para la transmisión de calor y por lo tanto, la superficie alcanza inmediatamente la temperatura del medio ambiente.

Las soluciones que logra son las siguientes:

- cilindro infinito :

$$t = \frac{\rho L a^2}{4K' (T_f - T_a)}$$

- esfera :

$$t = \frac{\rho L a^2}{6K' (T_f - T_a)}$$

- placa infinita :

$$t = \frac{a^2 [\rho L + 0,4444 C (T_i - T_f) + 0,5 C' (T_f - T_a) \rho']}{2K' (T_f - T_a)}$$

12.- Aproximación de Bakal y Hayakawa (1973):

Estudiaron el caso de la placa infinita bajo condiciones de borde lineales con el modelo estudiado para el enfriamiento de aleaciones. Consideraron seis etapas: preenfriamiento, primer cambio de fase (zona no congelada, zona mixta con cristales y no congelada), zona intermedia de fase (mezcla de cristales y no congelado), segunda zona de cambio de fase (zona congelada y zona mixta), enfriamiento (todo está congelado) y tres zonas (zona de congelado, zona mixta y zona no congelada).

Pero, las soluciones son dependientes del producto.

13.- Modelo nuevo de Plank :

En 1963, Plank propone la siguiente ecuación:

$$t = \frac{\rho' a^2 Q'}{(T_f - T_a) K'} \left[\frac{1}{Bi} + \frac{1}{2} \right] \left[(1 + 0,0053 (T_i - T_f)) \right] + t'$$

donde:

$$Bi : \frac{ha}{K'}$$

$$\rho' : 1$$

Q' : es el cambio de entalpía entre T_f y -12°C

K' : es la conductividad térmica a -12°C

$$t' : \frac{1,886 a^2 n \rho' C''}{K'} \left[\log \frac{T_f - T_a}{T_c - T_a} - 0,0913 \right] \left[\left[\frac{1}{Bi} + \frac{1}{2} \right] \right]$$

para:

$Bi = 0,25$	$n = 1,210$
$Bi = 0,50$	$n = 1,118$
$Bi = 1,0$	$n = 1,156$
$Bi = 2,0$	$n = 1,112$
$Bi = 4,0$	$n = 1,065$
$Bi = 10,0$	$n = 1,020$
$Bi = 20,0$	$n = 1,008$
$Bi = 00$	$n = 1,00$

C'' : cambio de entalpía entre -4°C y T_c dividido por $(-4 - T_c)$.

Mascheroni y Calvelo que lo aplicaron informan de errores menores que 10%.

14.- Modificaciones de Mascheroni, Calvello y De Michelis :

El modelo combina en forma independiente el preenfriamiento, el cambio de fase y el enfriamiento.

El periodo de preenfriamiento es el tiempo que se demora desde que comienza el enfriamiento hasta que alcanza la temperatura T_f en el punto medio de la distancia entre el centro de la placa y la superficie.

El cambio de fase se produce a T_f y el enfriamiento desde la temperatura T_f hasta que el centro alcanza T_c .

Para el cambio de fase:

$$t = \frac{\rho M L'' C' a^2}{(T_f - T_a) K''} \left[\frac{1}{Bi} + \frac{1}{2} \right]$$

donde :

- ρ : densidad sobre el punto de congelación
 M : % de humedad (base húmeda)
 L'' : calor latente del hielo puro
 C' : contenido promedio de hielo entre T_f y T_c
 K'' : conductividad térmica a $\frac{T_f + T_a}{2}$
 Bi : $\frac{h a}{K''}$

En las etapas de preenfriamiento y enfriamiento, la determinación se realiza utilizando cartas que presentan propiedades térmicas modificadas.

Este modelo aplicado a carne en un rango amplio de condiciones, da un error promedio absoluto de 3,6%.

También comprobaron su aplicación a alimentos con forma de paralelepípedo y cilindros.

para carne congelada no simétricas, también desarrollaron relaciones y encontraron que el centro térmico se iba desplazando a medida que el producto se congelaba.

15.- Modificación de Hung y Thompson (1983) :

Tomando en cuenta el agua no congelada al final de la etapa de enfriamiento, calculan la diferencia de entalpía, que reemplaza al calor latente.

También reemplazan la diferencia de temperatura ($T_i - T_a$) por una diferencia ponderada para el preenfriamiento, cambio de fase y enfriamiento. Los factores P y R se calculan por relaciones en que están Bi , PK y Ste .

El error del modelo varía entre -3,54 a + 6,14% en una aplicación a placas infinitas de gel de metilcelulosa.

16.- Solución de Newmann :

Carslaw y Jaeger en 1959 presentaron las soluciones de Newmann para transmisión de calor unidireccional en sólido semiinfinito.

La ecuación diferencial que da la distribución de temperatura en el producto es:

para la zona no congelada :

$$\frac{\partial^2 e_i}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial e_i}{\partial t}$$

para la zona congelada :

$$\frac{\partial^2 \theta_c}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta_f}{\partial t}$$

y el flujo de calor está dado por :

$$K' \frac{\partial \theta_c}{\partial x} - K \frac{\partial \theta_i}{\partial x} = \rho' L \frac{dx}{dt}$$

Las condiciones de borde serían las siguientes:

$$\begin{aligned} \text{para } t = 0 & \quad \theta_i(x, 0) = \theta_i \\ \text{para } x = 0 & \quad \theta_i(0, t) = \theta_s(t) \\ \text{para cualquier } x \text{ y } t & \quad \theta_i(x, t) = \theta_f(x, t) = \theta_f \\ \text{en el límite de la} & \\ \text{placa} & \quad \frac{\partial \theta_i(x/2, t)}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

Newmann obtuvo la solución siguiente:

$$\theta_c = \frac{\theta_f}{\text{erf}(\gamma)} \text{erf} \left[\frac{x}{2(\alpha' t)^{1/2}} \right]$$

y γ satisface :

$$\frac{\exp(-\gamma^2)}{\text{erf}(\gamma)} - \frac{K}{K'} \left(\frac{\alpha'}{\alpha} \right)^{1/2} \frac{(\theta_i - \theta_f) \exp(-\alpha' \gamma^2 / \alpha)}{\theta_f \text{erf} \left[\gamma (\alpha' / \alpha)^{1/2} \right]} = \frac{L}{C'} \frac{\gamma^{1/2}}{\theta_f}$$

$$\text{y si } \theta_c = \theta_f = \theta_i \quad x = 2 \gamma (\alpha' t)^{1/2}$$

Charm y Slaivin (1962) aplicaron la ecuación:

$$\theta_c = \frac{\theta_c}{\text{erf}(\gamma)} = \text{erf} \left[\frac{x}{2(\alpha' t)^{1/2}} \right]$$

a la congelación de filetes de bacalao con:

$$x = \left[(d/2) + \frac{K'}{h} \right]$$

Pero, Cowell (1967) demostró que se producía una sobreestimación del tiempo de congelación si $Bi < 1,0$.

A su vez, otros investigadores han seguido trabajando para tomar en cuenta otros factores.

17.- Gráficos de Tao :

L.C. Tao (1967) desarrolló cartas para estimar los tiempos de congelación de tres formas geométricas diferentes, mediante la solución numérica de la ecuación de Fourier de conducción de calor.

Los supuestos son:

- La forma geométrica de la muestra en una placa infinita, en cilindro infinito o una esfera .
- La muestra está expuesta a temperatura constante.
- La muestra está inicialmente en su punto de congelación, pero no está congelada.

Para los gráficos hay que utilizar tres números adimensionales :

$$t^* = t K' (\theta_f - \theta_a) / (L \rho' a^2)$$

$$B^* = K' / (ha)$$

$$r^* = C' (\theta_f - \theta_a) / L$$

Se calculan B^* y r^* , se entra a los gráficos 41,42 y 43 y se lee t^* , con este valor se calcula t .

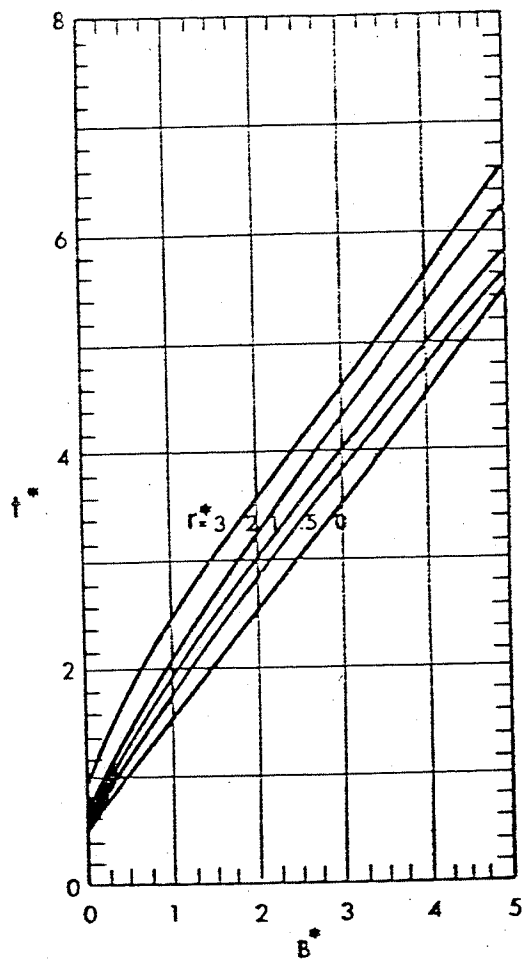


FIGURA N° 41 : Gráfico de T_{ao} para estimar tiempos de congelación y descongelación para placa infinita.

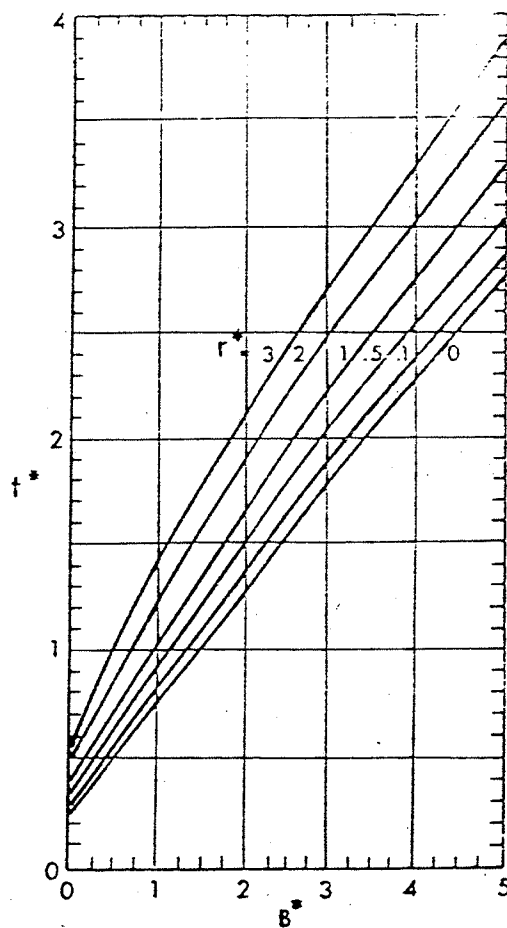
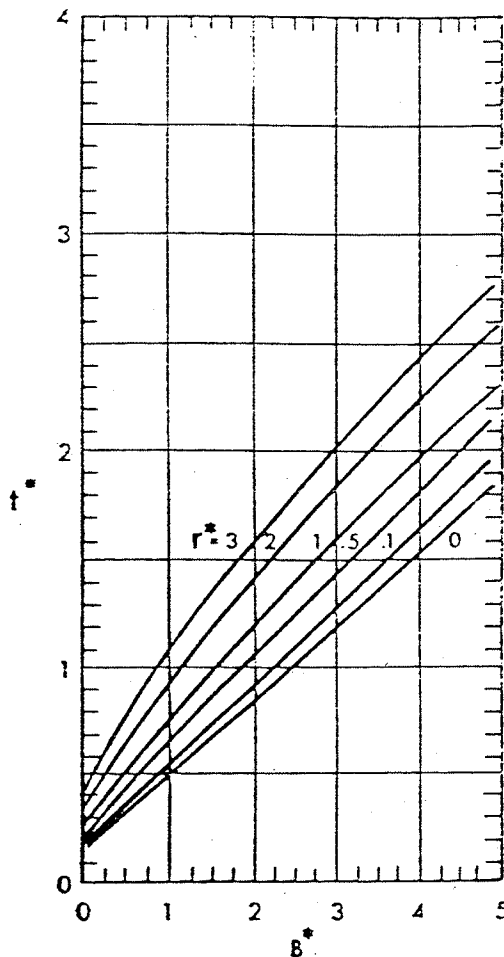


FIGURA N° 42 : Gráfico de Tao para estimar tiempos de congelación y descongelación para cilindro infinito.



(Ramaswamy y Tung)

FIGURA N° 43 : Gráfico de Tao para estimar tiempo de congelación y descongelación para esfera.

18.- Solución de Tien y Colaboradores:

Las fórmulas teóricas presentadas antes, se derivan suponiendo que no hay diferencia en la densidad entre la muestra congelada y no congelada, y que también la congelación termina a una temperatura única. Tien y colaboradores obtuvieron muchas soluciones sin estas dos suposiciones.

Una de estas soluciones (Tien y Koump, 1968) es la única que se muestra a continuación (Osorio y otros, 1982)

Esta solución se obtiene suponiendo lo siguiente:

- La forma geométrica de la muestra es semi-infinita.
 - La congelación ocurre en un rango específico de temperaturas $T_s \leq T \leq T_L$ (temperaturas de congelación).
 - La muestra está inicialmente a la temperatura más alta, T_L , en este rango de temperaturas, pero no congelada.
 - Hay una diferencia en densidad entre la muestra congelada y no congelada.
-
- La superficie de la muestra se mantiene a temperatura constante durante la congelación.

Debido a la 2ª suposición, hay una capa de congelación en lugar de un plano o frente de congelación. El porcentaje de agua congelada cambia en la posición y está distribuida desde 0 - 100% en esta zona "de congelación".

$$T_1 = (T_s - T_c) \left[\frac{\operatorname{erf} (x/2 (\alpha_1 t)^{1/2})}{\operatorname{erf} (\lambda_1/\alpha_1^{1/2})} - 1 \right] + T_s$$

$$T_{12} = (T_L - T_s) \left[\frac{2(x - E)}{\Delta E - (x - E) / \Delta E^2} \right] + T_s$$

$$E = 2 \lambda_1 t^{1/2}$$

$$E = 2 \lambda_2 t^{1/2}$$

$$B_1 \frac{\lambda_1}{\alpha_1^{1/2}} + B_2 \frac{(T_L - T_s)}{(T_s - T_c)} \frac{K_{12}}{K_1} \frac{1}{\alpha_1^{1/2}} \frac{\operatorname{erf}(\lambda_1 / \alpha_1^{1/2})}{\exp(-\lambda_1^2 / \alpha_1)}$$

$$= \frac{(T_s - T_c)}{(T_L - T_s)} \frac{K_1}{\rho_2 C_{12}} \frac{1}{\alpha_1^{1/2}} \frac{\exp(\lambda_1^2 / \alpha_1)}{\operatorname{erf}(\lambda_1 / \alpha_1^{1/2})}$$

$$B_1 \lambda_1 + B_2 \lambda_2 = \frac{B_3}{2 \lambda_2}$$

$$B_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \left[\frac{L}{(T_L - T_s) C_{12}} - 1 \right] - \frac{5}{6} \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_2}$$

$$B_2 = \frac{2 \rho_1}{3 \rho_2} \left[\frac{L}{C_{12} (T_L - T_s)} - 1 \right] - \frac{47}{30} \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_2} + 1$$

$$B_3 = \frac{2 K_{12}}{\rho_2 C_{12}}$$

en que :

T_1	:	temperatura de la zona congelada
T_s	:	punto de congelación final
T_c	:	temperatura en el centro de la placa
x	:	variable, distancia desde la superficie del alimento
α_1	:	difusividad térmica del material congelado
t	:	variable tiempo
erf	:	función error
λ_1, λ_2	:	constantes
T_{12}	:	temperatura del material en la zona "en congelación"
T_L	:	punto de congelación inicial
E	:	posición del frente de congelación
ΔE	:	espesor de la zona congelada
B_1, B_2, B_3	:	constantes definidas por las ecuaciones anteriores
K	:	conductividad térmica
ρ	:	densidad
c	:	calor específico

Subíndices

1	:	zona congelada
2	:	zona no congelada
12	:	material en la zona de congelación

Las ecuaciones anteriores se obtienen asumiendo que la distribución de la fracción congelada en la capa de congelación se aproxima con una ecuación cuadrática.

Debido a que la densidad de la muestra cambia durante la congelación, hay un movimiento de agua no congelada en la capa de congelación.

La velocidad lineal de este movimiento se estima mediante la ecuación:

$$v = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \left[\frac{dE}{dt} + \frac{(x-E)}{2(\Delta E)} + \frac{d(\Delta E)}{dt} \right] \left[\frac{\text{longitud}}{t} \right] = [v]$$

en esta ecuación, la dirección positiva del movimiento es la dirección que se aleja de la superficie de la muestra. Es decir, si un valor de v obtenido con la ecuación anterior es negativo, la masa de muestra se mueva hacia la superficie durante la congelación.

19.- Métodos numéricos :

Todos los métodos vistos suponen que las propiedades térmicas se mantienen constantes durante las etapas del proceso.

En general debiera ser :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right]$$

Para placa infinita :

$$\rho(\theta) c(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} = K(\theta) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

Para cilindro infinito (b=1) o esfera (b=2) :

$$\rho(\theta) c(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left[K(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{b K(\theta)}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right]$$

En el límite del cuerpo se puede plantear :

Para placa infinita :

$$h(\theta_a - \theta_s) = -K(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

y para cilindro infinito o esfera :

$$h(\theta_a - \theta_s) = -K(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial r}$$

Estas ecuaciones diferenciales son difíciles de resolver, aún con métodos numéricos y los más utilizados son el método de las diferencias finitas y el de los elementos finitos.

8.0 DISCUSION

En el presente trabajo se han presentado varias fórmulas para transferencia de calor, con sus características, en alimentos congelados.

Es importante hacer notar que muchas de estas fórmulas no han sido probadas a través de experimentaciones de transferencia de calor. Por lo cual, la aplicabilidad de las fórmulas deben ser cuidadosamente evaluadas.

Muchas de las fórmulas existentes presentadas, se desarrollaron suponiendo que el alimento está sometido a una temperatura ambiente constante. Ya que durante muchas operaciones industriales de congelación o descongelación, los alimentos están sometidos a temperaturas ambientales variables en el tiempo, se deberían desarrollar fórmulas aplicables a esas operaciones para que sirvan en la determinación de procedimientos adecuados para dichas operaciones.

Muchas de las fórmulas presentadas son aplicables para conducción de calor en una placa infinita o semi-infinita. Fórmulas para geometrías más reales son escasas en la literatura, propio de las dificultades encontradas en la solución de las ecuaciones diferenciales involucradas.

Una de las grandes ventajas de las fórmulas teóricas es que se pueden obtener fácilmente relaciones entre los diversos parámetros físicos y el tiempo de congelación al usar estas fórmulas. Sin embargo, hay severas limitaciones en el

uso de las fórmulas teóricas, ya que se imponen muchas suposiciones en su derivación (Osorio y otros, 1982)

Las fórmulas semiteóricas tienen pocas limitaciones en su aplicación cuando se comparan con las teóricas, ya que aquellas se obtienen con menor dependencia de varias suposiciones.

A su vez se necesita conocer las propiedades térmicas de los alimentos que han sido presentados en varias publicaciones (Dicherson, 1969, Polley et al., 1980, Castro, 1986).

Por otra parte, el conocimiento del coeficiente de transmisión de calor de superficie es de gran importancia en los problemas de congelación, hay datos publicados por Heldman y Singh (1981) o métodos para su determinación experimental, como el de Charm (1978).

9.0 BIBLIOGRAFIA

- BAKAL, A. y HAYAKAWA, K.I. (1973)
"Heat transfer during freezing and thawing of foods"
Adv. Food Res. 20, 217.

- BEEK, G. VAN y MEFFERT, H.F. (1981)
"Cooling of horticultural product with heat and mass transfer
by diffusion" en "Developments in food preservation-1"
Editado por Stuart Thorne. Applied Science Publishers, London.

- BRENNAN, J.G.; BUTTERS, J.R.; COWELL, N.D. y LILLY, A.E.
(1969)
"Food Engineering Operations"
Sect 13.2 Amer. Elsevier, New York, N.Y.

- CARSLAW, H.S. y JAEGER, J.C. (1959)
"Conduction of heat in solids"
Oxford Univ. Press (Clarendon) London, England.

- CASTRO M., E.; GUARDA M., A.; CRADDOCK M., M.; WITTEG R., E.;
OSORIO L., F.; VINAGRE L., J.; LOPEZ V., L.; ROMERO R., J. y
OLIVER A., H. (1985)
"Factibilidad técnica-económica de productos congelados"
Proyecto I 1182 DIB, Universidad de Chile, Santiago, Chile.

- CASTRO, E.S. (1986)
"Propiedades térmicas de los alimentos"
Serie Monografía sobre Ingeniería en Alimentos N° 8. Depto.
de Ciencia de los Alimentos y Tecnología Química, Facultad
de Ciencias Químicas y Farmacéuticas, Universidad de Chile,
Santiago, Chile.

- CHARM, S.E. y SLAVIN, J. (1962)
"A method for calculating freezing time of rectangular packages of food"
I.I.R. Commission 2,3,4,6A,9 p. 567.

- CHARM, S.E. (1971)
"Fundamentals of food engineering"
AVI Publishing Co., Westport, CT.

- CHARM, S.E. (1978)
"Fundamentals of food engineering"
2nd Ed. AVI Publishing Co, Westport, CT.

- CLARY, B.L.; NELSON, G.L. y SMITH, R.E. (1971)
"The application of the geometry analysis technique in determining the heat transfer rates from biological materials"
ASAE Trans 14, N° 3, 586.

- CLELAND, A.C. y EARLE, R.L. (1976)
"A comparison of freezing calculations including modifications to take into account the initial superheat"
I.I.R. Commissions C2, D1, D2, D3, E1, Melbourne, p. 369.

- CLELAND, AC. y EARLE, R.L. (1977)
"A comparison of analytical and numerical methods for predicting freezing times of foods"
J. Food Sci. 42, 1390.

- CLELAND, A.C. y EARLE, R.L. (1979)
"Predicting freezing times of foods in rectangular packages"
J. Food Sci. 44, 964.

- COWELL, N.D. (1967)
"The calculation of freezing time"
Proc. XII Int. Congr. Refrig. 2, 667.

- CRADDOCK, M; WITTIG, E.; LOPEZ, L. y MARTINEZ M. (1987)
"Factibilidad técnica y estudio de vida útil de diferentes formulaciones de queques"
Alimentos 12 (2), 15-22.

- DE MICHELIS y CALVELLO, A. (1982)
"Mathematical models for nonsymmetric freezing of beef"
J. Food Sci. 47, 1211.

- DICKERSON, R.W. JR. (1969)
"Thermal properties of food" in "The freezing preservation of foods"
4th Ed. Vol. 2, D.K. TRESSLER, W.B. Van ARSDEL y M.J. COPLEY (editores) AVI Publishing Co., Westport, Conn.

- EARLE, R.L. y FLEMING, A.K. (1967)
"Cooling and freezing of lamb and mutton carcasses I Cooling and freezing rates in legs"
Food Technology 21, 79.

- EDE, A.J. (1949)
"The calculation of freezing and thawing of foodstuffs"
Modern Refrig. 52, 52.

- FANELLI, M.J. y GUNCLERSON, M.F. (1961)
"Defrost of prepared frozen foods I, Defrost temperatures of frozen fruit pies, frozen meat pies and frozen soups"
Food Technology 15, 419.

- FENNEMA, O.R.; POWRIE, W.D. y MARTH, E.H. (1973)
"Low temperature preservation of foods and living matter"
Marcel Dekker, Inc., New York, N.Y.

- GUTSCHMIDT, J. (1964) citado por RAMASWAMY, H.S. y TUNG, M.A. (1984)
"A review on predicting freezing times of foods"
Journal of Food Processing 7, 169.

- HAYAKAWA, K.I. (1977)
"Estimation of heat transfer during freezing or defrosting of foods"
I.I.R. Commissions C1, C2, Karlsruhe, p. 293.

- HEISSLER, M.P. (1947)
"Temperature charts for induction and constant temperature heating"
Trans. ASME 69, 227-236.

- HELDMAN, D.R. y SINGH, R.P. (1981)
"Food Process Engineering"
2nd Ed. AVI Publishing Co., Westport, CT.

- HOLDSWORTH, S.D. (1968)
"Current aspects of preservation by freezing"
Food Manuf. 43 (7), 38.

- HUNG, Y.C. y THOMPSON, D.R. (1983)
"Freezing time prediction for slab shape foodstuffs by an improved analytical method"
J. Food Sci. 48, 555.

- INTERNATIONAL INSTITUTE OF REFRIGERATION (1972)
"Recommendations for the Processing and Handling of Frozen Foods"
2nd Ed. París.

- JAKOB, M. (1949)
"Heat Transfer"
Vol. I y II, John Wiley & Sons, New York

- KLOSE, A.A.; LINEWEAVER, H. y PALMER, H.H. (1968)
"Thawing turkeys at ambient air temperatures"
Food Technology 22, 1310.

- KREITH, FRANK (1963)
"Principles of heat transfer"
International Textbook Company, Scranton, U.S.A.

- LEVY, F.L. (1958)
"Calculating freezing time of fish in airblast freezers"
J. Refrig. 1, 55.

- LOEFFEN, M.P.F., EARLE, R.L. y CLELAND, A.C. (1981)
"Two simple methods for predicting food freezing times with time-variable boundary conditions"
J. Food Sci. 46, 1032.

- LONCIN, MARCEL y MERSON, RICHAR LARRY (1979)
"Food Engineering, principles and selected applications"
Academic Press, New York, N.Y.

- LONG, R.A. (1955)
"Some thermodynamic properties of fish and their effect on
the rate of freezing"
J. Sci. Food Agric. 6, 621.

- LUIKOV, A.V. (1968)
"Analytical Heat Diffusion Theory"
Academic Press, New York, N.Y.

- MASCHERONI, R.H. Y CALVELLO, A. (1982)
"A simplified model for freezing time calculations in foods"
J. Food Sci. 47, 1201.

- MELLOR, J.D. (1976) citado por CLELAND, A.C. y EARLE, R.L.
(1979)
"A comparison of methods for predicting the freezing times
of cylindrical and spherical foodstuffs"
J. Food Sci. 44, 958.

- MOTT, L.F. (1964)
"Prediction of product freezing time"
Aust. Refrig. Air Cond. Heat. 18, 16.

- NAGAOKA, J.; TAKAJI, S. y HOTANI, S. (1955)
"Experiments on the freezing of fish by the air-blast
freezer"
J. Tokyo Univ. Fish 42 (1), 65.

- NEWMANN citado por CARSLAW, H.S. y JAEGER, J.C. (1959)
"Conduction of heat in solids"
Oxford Univ. Press (Clarendon), London, England.

- OSORIO, F.; GUARDA, A. y CASTRO, E. (1982)
"Cálculos de tiempo de congelación y descongelación de alimentos"
Serie Monografía sobre Ingeniería en Alimentos N° 3. Depto. de Ciencia de los Alimentos y Tecnología Química, Facultad de Ciencias Químicas y Farmacéuticas, Universidad de Chile, Santiago, Chile.

- FELUG, I.J. y KOPELMAN, I.J. (1966)
"Correlating and predicting transient heat transfer rates in food products"
Annexe 1966-2, Trondheim, IIF, París

- PLANK, R. (1913) citado por EDE, A.J. (1949)
"The calculation of freezing and thawing of foodstuffs"
Modern Refrig. 52, 52.

- PLANK, R. (1941) citado por CLELAND, A.C. y EARLE, R.L. (1976)
"A comparison of freezing calculations including modifications to take into account the initial superheat"
I.I.R. Commissions C2, D1, D2, D3, E1 Melbourne, p. 369.

- PLANK, R. (1963) citado por MASCHERONI, R.H. y CALVELLO, A. (1982)
"A simplified model for freezing time calculations in foods"
J. Food Sci. 47, 1201.

- POLLEY, S.L.; SNYDER, O.P. y KOTNOUR, P. (1980)
"A compilation of thermal properties of foods"
Food Technology 34 (11), 76.

- RAMASWAMY, H. (1979)
"Thermo-physical properties of apples and prediction of freezing times"
Tesis M. Sc. Dept. Food Sci. Univ. of British Columbia, Vancouver, Canadá.

- RAMASWAMY, H.S. y TUNG, M.A. (1984)
"A review on predicting freezing times of foods"
Journal of Food Process Engineering , 7, 169-203.

- SINGH, R. PAUL (1982)
"Thermal diffusivity in food processing"
Food Technology 36 (2) 87-91.

- SMITH, R.E.; NELSON, G.L. y HENRICSON R.L. (1967)
"Analysis of transient heat transfer from anomalous shapes"
Trans. Am. Soc. Agr. Engrs. 10, N° 2, 236.

- SMITH, R.E. y NELSON, G.L. (1969)
"Transient heat transfer in solids theory vs. experimental"
Trans. Am. Soc. Agr. Engrs. 12, 833.

- TANAKA, K. y NISHIMOTO, J.I. (1959)
"Determination of time required for freezing of shipjack"
J. Tokyo Univ. Fish. 47, 81.

- TANAKA, K. y NISHIMOTO, J.I. (1960)
"Determination of time required for freezing of whale meat"
J. Tokyo Univ. Fish. 47,81.

- TANAKA, K. y NISHIMOTO, J.I. (1964)
"Determination of time required for contact freezing of whale meat"
J. Tokyo Univ. Fish. 50, 49.

- TAO, L.C. (1967)
"Generalized numerical solutions of freezing a saturated liquid in cylinders and spheres"
AICHE J. 13, 165.

- TIEN, R.H. y GEIGER, G.E. (1967)
"A heat transfer analysis of the solidification of a binary eutectic system"
J. Heat Transfer 9, 230.

- TIEN, R.H. y KOUMP, V. (1968)
"Unidimensional solidification of a slab: variable surface temperature"
Trans. AIME. 242, 283.

- WISNIAK, JAIME (1964)
"Conducción calórica"
Publicación N° 5, Depto. de Ingeniería Química, Universidad Católica de Chile, Santiago de Chile.

- YAÑEZ, S.M. (1983)
"Modelo general de transferencia de calor en conservas"
Tesis de Grado, Depto. de Ingeniería Química, Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile.

A N E X O

- Funciones de Bessel de Primera Clase $J_0(u)$ y $J_1(u)$
- Funciones de Bessel de Segunda Clase $Y_0(u)$ e $Y_1(u)$
- Funciones de Bessel Modificad̄s de Primera Clase $I(u)$ e $I_1(u)$
- Funciones de Bessel Modificad̄s de Segunda Clase $K_0(u)$ y $K_1(u)$
- Raíces de $J_m(M_n) = 0$

Funciones de Bessel de Primera Clase $J_0(u)$ y $J_1(u)$

u	$J_0(u)$	$J_1(u)$	u	$J_0(u)$	$J_1(u)$
0.0	1.0000	0.0000	2.0	0.2239	0.5767
0.1	0.9975	0.0499	2.1	0.1666	0.5683
0.2	0.9900	0.0995	2.2	0.1104	0.5560
0.3	0.9776	0.1483	2.3	0.0555	0.5399
0.4	0.9604	0.1960	2.4	0.0025	0.5202
0.5	0.9385	0.2423	2.5	-0.0484	0.4971
0.6	0.9120	0.2867	2.6	-0.0968	0.4708
0.7	0.8812	0.3290	2.7	-0.1424	0.4416
0.8	0.8463	0.3688	2.8	-0.1850	0.4097
0.9	0.8075	0.4059	2.9	-0.2243	0.3754
1.0	0.7652	0.4400	3.0	-0.2600	0.3391
1.1	0.7196	0.4709	3.1	-0.2921	0.3009
1.2	0.6711	0.4983	3.2	-0.3202	0.2613
1.3	0.6201	0.5220	3.3	-0.3443	0.2207
1.4	0.5669	0.5419	3.4	-0.3643	0.1792
1.5	0.5118	0.5579	3.5	-0.3801	0.1374
1.6	0.4554	0.5699	3.6	-0.3918	0.0955
1.7	0.3980	0.5778	3.7	-0.3992	0.0538
1.8	0.3400	0.5815	3.8	-0.4026	0.0128
1.9	0.2818	0.5812	3.9	-0.4018	-0.0272
4.0	-0.3971	-0.0660	8.0	0.1716	0.2346
4.1	-0.3887	-0.1033	8.1	0.1475	0.2476
4.2	-0.3766	-0.1386	8.2	0.1222	0.2580
4.3	-0.3610	-0.1719	8.3	0.0960	0.2657
4.4	-0.3423	-0.2028	8.4	0.0692	0.2708

u	$J_0(u)$	$J_1(u)$	u	$J_0(u)$	$J_1(u)$
4.5	-0.3205	-0.2311	8.5	0.0419	0.2731
4.6	-0.2961	-0.2566	8.6	0.0146	0.2728
4.7	-0.2693	-0.2791	8.7	-0.0125	0.2697
4.8	-0.2404	-0.2985	8.8	-0.0392	0.2641
4.9	-0.2097	-0.3147	8.9	-0.0652	0.2559
5.0	-0.1776	-0.3276	9.0	-0.0903	0.2453
5.1	-0.1443	-0.3371	9.1	-0.1142	0.2324
5.2	-0.1103	-0.3432	9.2	-0.1368	0.2174
5.3	-0.0758	-0.3460	9.3	-0.1577	0.2004
5.4	-0.0412	-0.3453	9.4	-0.1768	0.1816
5.5	-0.0068	-0.3414	9.5	-0.1939	0.1613
5.6	0.0270	-0.3343	9.6	-0.2090	0.1395
5.7	0.0599	-0.3241	9.7	-0.2218	0.1166
5.8	0.0917	-0.3110	9.8	-0.2323	0.0928
5.9	0.1220	-0.2951	9.9	-0.2403	0.0684
6.0	0.1506	-0.2767	10.0	-0.2459	0.0435
6.1	0.1773	-0.2559	10.1	-0.2490	0.0184
6.2	0.2017	-0.2329	10.2	-0.2496	-0.0066
6.3	0.2238	-0.2081	10.3	-0.2477	-0.0313
6.4	0.2433	-0.1816	10.4	-0.2434	-0.0555
6.5	0.2601	-0.1538	10.5	-0.2366	-0.0788
6.6	0.2740	-0.1250	10.6	-0.2276	-0.1012
6.7	0.2851	-0.0953	10.7	-0.2164	-0.1224
6.8	0.2931	-0.0652	10.8	-0.2032	-0.1422
6.9	0.2981	-0.0349	10.9	-0.1881	-0.1604
7.0	0.3001	-0.0047	11.0	-0.1712	-0.1768
7.1	0.2991	0.0252	11.1	-0.1528	-0.1913
7.2	0.2951	0.0543	11.2	-0.1330	-0.2038
7.3	0.2882	0.0826	11.3	-0.1121	-0.2143
7.4	0.2786	0.1096	11.4	-0.0902	-0.2224
7.5	0.2663	0.1352	11.5	-0.0677	-0.2284
7.6	0.2516	0.1592	11.6	-0.0446	-0.2320
7.7	0.2346	0.1813	11.7	-0.0213	-0.2333
7.8	0.2154	0.2014	11.8	0.0020	-0.2323
7.9	0.1944	0.2192	11.9	0.0250	-0.2290

Funciones de Bessel de Segunda Clase $Y_0(u)$ e $Y_1(u)$

u	$Y_0(u)$	$Y_1(u)$	u	$Y_0(u)$	$Y_1(u)$
0.0	- ∞	- ∞	1.5	0.3824	-0.4123
0.1	-1.5342	6.4590	1.6	0.4204	-0.3476
0.2	-1.0811	-3.3238	1.7	0.4520	-0.2847
0.3	-0.8073	-2.2931	1.8	0.4774	-0.2237
0.4	-0.6060	-1.7809	1.9	0.4968	-0.1644
0.5	-0.4445	-1.4715	2.0	0.5104	-0.1070
0.6	-0.3085	-1.2604	2.1	0.5183	-0.0517
0.7	-0.1907	-1.1032	2.2	0.5208	0.0015
0.8	-0.0868	-0.9781	2.3	0.5181	0.0523
0.9	0.0056	-0.8731	2.4	0.5104	0.1005
1.0	0.0883	-0.7812	2.5	0.4981	0.1459
1.1	0.1622	-0.6981	2.6	0.4813	0.1884
1.2	0.2281	-0.6211	2.7	0.4605	0.2276
1.3	0.2865	-0.5485	2.8	0.4359	0.2635
1.4	0.3379	-0.4791	2.9	0.4079	0.2959
3.0	0.3768	0.3247	7.0	-0.0260	-0.3027
3.1	0.3431	0.3496	7.1	0.0042	-0.2995
3.2	0.3070	0.3707	7.2	0.0338	-0.2934
3.3	0.2691	0.3878	7.3	0.0628	-0.2846
3.4	0.2296	0.4010	7.4	0.0907	-0.2731
3.5	0.1890	0.4102	7.5	0.1173	-0.2591
3.6	0.1477	0.4154	7.6	0.1424	-0.2428
3.7	0.1061	0.4167	7.7	0.1658	-0.2243
3.8	0.0645	0.4141	7.8	0.1872	-0.2039
3.9	0.0234	0.4078	7.9	0.2065	-0.1817
4.0	-0.0169	0.3979	8.0	0.2235	-0.1581
4.1	-0.0561	0.3846	8.1	0.2381	-0.1332
4.2	-0.0938	0.3680	8.2	0.2501	-0.1072
4.3	-0.1296	0.3484	8.3	0.2595	-0.0806
4.4	-0.1633	0.3260	8.4	0.2662	-0.0535
4.5	-0.1947	0.3010	8.5	0.2702	-0.0262
4.6	-0.2235	0.2737	8.6	0.2715	0.0011
4.7	-0.2444	0.2445	8.7	0.2700	0.0280
4.8	-0.2723	0.2136	8.8	0.2659	0.0544
4.9	-0.2921	0.1812	8.9	0.2592	0.0799

u	$Y_0(u)$	$Y_1(u)$	u	$Y_0(u)$	$Y_1(u)$
5.0	-0.3085	0.1479	9.0	0.2499	0.1043
5.1	-0.3216	0.1137	9.1	0.2383	0.1275
5.2	-0.3312	0.0792	9.2	0.2245	0.1491
5.3	-0.3374	0.0445	9.3	0.2086	0.1691
5.4	-0.3402	0.0101	9.4	0.1907	0.1871
5.5	-0.3395	-0.0238	9.5	0.1712	0.2032
5.6	-0.3354	-0.0568	9.6	0.1502	0.2171
5.7	-0.3282	-0.0887	9.7	0.1279	0.2287
5.8	-0.3177	-0.1192	9.8	0.1045	0.2379
5.9	-0.3044	-0.1481	9.9	0.0804	0.2447
6.0	-0.2882	-0.1750	10.0	0.0557	0.2490
6.1	-0.2694	-0.1998	10.1	0.0307	0.2508
6.2	-0.2483	-0.2223	10.2	0.0056	0.2502
6.3	-0.2251	-0.2422	10.3	-0.0193	0.2471
6.4	-0.2000	-0.2596	10.4	-0.0437	0.2416
6.5	-0.1732	-0.2741	10.5	-0.0675	0.2337
6.6	-0.1452	-0.2857	10.6	-0.0904	0.2236
6.7	-0.1162	-0.2945	10.7	-0.1122	0.2114
6.8	-0.0364	-0.3002	10.8	-0.1326	0.1973
6.9	-0.0562	-0.3029	10.9	-0.1516	0.1813
11.0	-0.1688	0.1637	13.0	-0.0782	-0.2101
11.1	-0.1843	0.1446	13.1	-0.0569	-0.2152
11.2	-0.1977	0.1243	13.2	-0.0352	-0.2182
11.3	-0.2091	0.1029	13.3	-0.0134	-0.2190
11.4	-0.2183	0.0807	13.4	0.0085	-0.2176
11.5	-0.2252	0.0579	13.5	0.0301	-0.2140
11.6	-0.2299	0.0348	13.6	0.0512	-0.2084
11.7	-0.2322	0.0114	13.7	0.0717	-0.2007
11.8	-0.2322	-0.0118	13.8	0.0913	-0.1912
11.9	-0.2298	-0.0347	13.9	0.1099	-0.1798
12.0	-0.2252	-0.0571	14.0	0.1272	-0.1666
12.1	-0.2184	-0.0787	14.1	0.1431	-0.1520
12.2	-0.2095	-0.0994	14.2	0.1575	-0.1359
12.3	-0.1986	-0.1190	14.3	0.1703	-0.1186
12.4	-0.1858	-0.1371	14.4	0.1812	-0.1003
12.5	-0.1712	-0.1538	14.5	0.1903	-0.0810
12.6	-0.1551	-0.1689	14.6	0.1974	-0.0612
12.7	-0.1375	-0.1821	14.7	0.2025	-0.0408
12.8	-0.1187	-0.1935	14.8	0.2056	-0.0202
12.9	-0.0989	-0.2028	14.9	0.2066	0.0005

Funciones de Bessel Modificadas de Primera Clase $I_0(u)$ e $I_1(u)$

u	$I_0(u)$	$I_1(u)$	u	$I_0(u)$	$I_1(u)$
0.0	1.0000	0.0000	1.0	1.2661	0.5652
0.1	1.0025	0.0501	1.1	1.3262	0.6375
0.2	1.0100	0.1005	1.2	1.3937	0.7147
0.3	1.0226	0.1517	1.3	1.4693	0.7973
0.4	1.0404	0.2040	1.4	1.5534	0.8861
0.5	1.0635	0.2579	1.5	1.6467	0.9817
0.6	1.0920	0.3137	1.6	1.7500	1.0848
0.7	1.1263	0.3710	1.7	1.8640	1.1963
0.8	1.1665	0.4329	1.8	1.9896	1.3172
0.9	1.2130	0.4971	1.9	2.1277	1.4482
2.0	2.280	1.591	4.0	11.30	9.76
2.1	2.446	1.746	4.1	12.32	10.69
2.2	2.639	1.914	4.2	13.44	11.71
2.3	2.830	2.098	4.3	14.67	12.82
2.4	3.049	2.298	4.4	16.01	14.05
2.5	3.290	2.517	4.5	17.48	15.39
2.6	3.553	2.755	4.6	19.09	16.86
2.7	3.842	3.016	4.7	20.86	18.48
2.8	4.157	3.301	4.8	22.79	20.25
2.9	4.503	3.613	4.9	24.91	22.20
3.0	4.881	3.953	5.0	27.24	24.34
3.1	5.294	4.326	5.1	29.79	26.68
3.2	5.747	4.734	5.2	32.58	29.25
3.3	6.243	5.181	5.3	35.65	32.08
3.4	6.785	5.670	5.4	39.01	35.18
3.5	7.378	6.206	5.5	42.70	38.59
3.6	7.028	6.793	5.6	46.74	42.33
3.7	8.739	7.436	5.7	51.17	46.44
3.8	9.517	8.140	5.8	56.04	50.95
3.9	10.369	8.913	5.9	61.38	55.90

u	$J_0(u)$	$J_1(u)$	u	$J_0(u)$	$J_1(u)$
12.0	0.0477	-0.2234	13.5	0.2150	0.0380
12.1	0.0697	-0.2158	13.6	0.2101	0.0590
12.2	0.0908	-0.2060	13.7	0.2032	0.0791
12.3	0.1108	-0.1943	13.8	0.1943	0.0984
12.4	0.1296	-0.1807	13.9	0.1836	0.1165
12.5	0.1469	-0.1655	14.0	0.1711	0.1334
12.6	0.1626	-0.1487	14.1	0.1570	0.1488
12.7	0.1766	-0.1307	14.2	0.1414	0.1626
12.8	0.1887	-0.1114	14.3	0.1245	0.1747
12.9	0.1988	-0.0912	14.4	0.1065	0.1850
13.0	0.2069	-0.0703	14.5	0.0875	0.1934
13.1	0.2129	-0.0488	14.6	0.0679	0.1998
13.2	0.2167	-0.0271	14.7	0.0476	0.2043
13.3	0.2183	-0.0052	14.8	0.0271	0.2066
13.4	0.2177	0.0166	14.9	0.0064	0.2069
			15.0	-0.0142	0.2051

Funciones de Bessel Modificadas de Segunda Clase $K_0(u)$ y $K_1(u)$

u	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} K_0(u)$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} K_1(u)$	u	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} K_0(u)$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} K_1(u)$
0.0	∞	∞	1.0	0.268	0.383
0.1	1.545	6.270	1.1	0.233	0.324
0.2	1.116	3.040	1.2	0.203	0.277
0.3	0.874	1.946	1.3	0.177	0.237
0.4	0.710	1.391	1.4	0.155	0.204
0.5	0.588	1.054	1.5	0.136	0.177
0.6	0.495	0.829	1.6	0.120	0.153
0.7	0.420	0.669	1.7	0.105	0.133
0.8	0.360	0.549	1.8	0.093	0.116
0.9	0.310	0.456	1.9	0.082	0.102
2.0	0.072	0.089	3.0	0.022	0.026
2.1	0.064	0.078	3.1	0.020	0.023
2.2	0.057	0.069	3.2	0.018	0.020
2.3	0.050	0.060	3.3	0.016	0.018
2.4	0.045	0.053	3.4	0.014	0.016
2.5	0.040	0.047	3.5	0.012	0.014
2.6	0.035	0.042	3.6	0.011	0.013
2.7	0.031	0.037	3.7	0.010	0.011
2.8	0.028	0.032	3.8	0.009	0.010
2.9	0.025	0.029	3.9	0.008	0.009

Raíces de $J_m (M_n) = 0$

m	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
0	2,4048	5,5201	8,6537	11,7915	14,9309
1	3,8317	7,0156	10,1735	13,3237	16,4706
2	5,1356	8,4172	11,6198	14,7960	17,9598
3	6,3802	9,7610	13,0152	16,2235	19,4094
4	7,5883	11,0647	14,3725	17,6160	20,8269