

Analyse numérique

# Construction d'une courbe régulière d'approximation d'un ensemble de points

Alexandra Claisse<sup>a</sup>, Pascal Frey<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> UPMC Université Paris-06, UMR 7598, laboratoire Jacques-Louis-Lions, 75005 Paris, France

<sup>b</sup> Universidad de Chile, UMI 2807, Centro de Modelamiento Matemática, Santiago, Chile

## Résumé

Dans cette Note, on s'intéresse au problème de la construction d'une courbe régulière  $\Gamma$  telle que  $\forall x \in \Gamma, d(x, V) \leq \varepsilon$ , où  $d(x, V) = \min_{\bar{x} \in V} \|x - \bar{x}\|$  pour un ensemble de points donné  $V$  supposé appartenir à la frontière d'un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , et pour  $\varepsilon$ , petit fixé. Pour approcher cette courbe, on résout un problème de minimisation basé sur une formulation de type ligne de niveau. La particularité du schéma numérique utilisé est qu'il s'appuie sur une triangulation anisotrope d'un domaine convexe  $\Omega$  contenant  $V$ . Un exemple de construction est proposé pour illustrer cette approche.

## Abstract

**Construction of a regular curve to approximate a point set.** In this Note, we deal with the problem of constructing a regular (smooth) curve  $\Gamma$  such that  $\forall x \in \Gamma, d(x, V) \leq \varepsilon$ , where  $d(x, V) = \min_{\bar{x} \in V} \|x - \bar{x}\|$  for a given point cloud  $V$  assumed to belong to the boundary of an open subset of  $\mathbb{R}^2$  and for  $\varepsilon$  small. To approximate this curve, we solve a minimization problem based on a levelset formulation. The particularity of the corresponding numerical scheme is to solve on an anisotropic triangulation of a convex domain  $\Omega$  enclosing  $V$ . A numerical example is provided to show the efficiency of the proposed approach. **To cite this article:** A. Claisse, P. Frey, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **346** (2008).

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## Abridged English version

In this Note, we address the problem of constructing a smooth curve  $\Gamma$  such that, for all  $x \in \Gamma, d(x, V) \leq \varepsilon$  ( $\varepsilon$  small), where  $d(x, V) = \min_{\bar{x} \in V} \|x - \bar{x}\|$ , for a given point cloud  $V$  assumed to belong to the boundary of an open subset of  $\mathbb{R}^2$ . We don't look for an explicit parametrization of this curve, however, we would like to define it as the zero isovalue of an implicitly defined function  $u$ . To this end, we propose to express this problem using the levelset method, that has been originally designed to propagate interfaces with a velocity related to the local curvatures of the manifolds, [8]. In this spirit and according to previous works [8,11], we will consider that the desired curve  $\Gamma$  (i.e. a

best regular approximation of the points in  $V$ ) results from the advection of a smooth curve  $\Gamma(t)$ . In addition, we can show that this solution is also the solution of a minimization problem and leads to the desired minimal curve. Notice that this approach is neither similar to methods based on the resolution of a PDE derived from an energy functional [11] nor Delaunay-based triangulation algorithms [2,4]. Indeed, the formulation we propose is composed of two terms, namely a regularization term (depending on the local curvature and acting as a superficial tension force) and an attraction term (related to  $d(x, V)$ ). On the other hand, geometric approaches lead to a piecewise affine interpolation of  $\Gamma$ , usually extracted from a Delaunay triangulation  $T$ , the points of  $V$  being the vertices of  $T$ .

In this paper, we start with the generation of a triangulation  $T_h$  of a domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  which will serve to compute a numerical solution  $u_h$  at each vertex. In order to improve the accuracy of the numerical approximation, it is desirable to increase the local mesh density in the vicinity of the point cloud. To this end, we start from a quasi-uniform unstructured simplicial mesh with respect to an anisotropic metric tensor field, [5]. The latter is defined based on the local mean curvature of the zero levelset, here  $d(x, V) = 0$ .

The levelset method assumes that a Lipschitz continuous function  $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \mapsto u(t, x)$  is such that  $u(t, x) < 0$  (resp.  $u(t, x) > 0$ ) for  $x \in \Omega(t)$  (resp.  $x \notin \bar{\Omega}(t)$ ) and  $u(t, x) = 0$  on  $\partial\Omega(t) = \Gamma(t)$  for a given domain  $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^2$ . The natural strength of this method is its ability to handle all topological and geometrical changes during the time evolution contrary to the Lagrangian approaches. In general, we focus on the displacement of the boundary  $\Gamma(t)$  under a prescribed velocity field in the normal direction  $v_n(t, x)$ , which yields the Hamilton–Jacobi equation (1). Usually, the velocity field is related to the geometrical properties of  $\Gamma(t)$  as well as to physical parameters of the problem at hand. From a mathematical point of view, the concept of viscosity solutions has been proposed to provide a physical meaning to the solution, [3]. From the numerical point of view, however, such a solution is really difficult to obtain because of the existence of singularities that require implicit numerical schemes [9]. Here, we seek a viscosity solution that coincides with the minimal smooth curve  $\Gamma$  passing at best through all points in  $V$ . Since this solution is related to the curvature  $\kappa(u)$  at each  $x \in \Gamma(t)$  (geometrical property), we suggest then to solve Eq. (2) where  $d(x)$  denotes the distance  $d(x, V)$  and  $\alpha \in \mathbb{R}$ . The second order term  $d(x)\kappa(u(t, x))$  acts as a regularization term; it is combined with an attraction term  $\alpha d(x)$ . Whenever  $d$  tends to zero, the resulting minimum corresponds to the desired minimal curve  $\Gamma$ . Using an asymptotic analysis, we can show that the elliptic part of an equation is indeed equivalent to the derivative of an energy functional  $I(\cdot)$  (cf. Eq. (3)) and the function  $u$  is solution of a  $p$ -Laplace equation.

Numerically speaking, we advocate the use of anisotropic triangulations to solve the Hamilton–Jacobi equation as well as the advection problem. From our point of view, it seems an interesting way of limiting the diffusive effect of the numerical scheme without requiring high-order schemes (ENO, WENO). Nonetheless, after several time steps, the diffusive effect leads to  $|\nabla u| \gg 1$  thus imposing to renormalize the solution  $u$  so as to solve the Eikonal equation  $|\nabla u| = 1$ . This can be obtained by solving a PDE equation of the form  $\tilde{u} = \text{sgn}(u)(1 - |\nabla u|)$  [10] or by a Fast Marching algorithm [9]. In our implementation, the process terminates when  $\max_{x \in V} |u_h(x)| < \varepsilon$  or  $\|\nabla u_h^{n+1}(x) - \nabla u_h^n(x)\| \leq \varepsilon$ , where  $u_h(x)$  is obtained through a  $L^2$  projection scheme.

We provide an example to show the efficiency and robustness of this approach in which the anisotropic triangulation contains 6634 vertices for a minimal element size  $h_{\min} = 0.001$ . We used a first order explicit solver to obtain the minimal curve shown Fig. 1.

## 1. Introduction

On considère un ensemble de points  $V \subset \partial U$ , où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  (typiquement un domaine de calcul) et  $\partial U$  est une courbe simple fermée et éventuellement en plusieurs composantes connexes. Dans cette Note, on s'intéresse au problème de la construction d'une courbe régulière  $\Gamma$  passant au mieux par  $V$  donné, c'est-à-dire telle que :

$$\forall x \in \Gamma, \quad d(x, V) \leq \varepsilon, \quad \text{où } d(x, V) = \min_{\bar{x} \in V} \|x - \bar{x}\|,$$

pour  $\varepsilon$ , petit fixé. Plus précisément, on ne s'attache pas à obtenir une paramétrisation de cette courbe, mais on souhaite la définir comme l'ensemble d'isovaleur  $u(x) = 0$  d'une fonction implicite  $u$ . Pour cela, on formule ce problème à l'aide de la méthode des lignes de niveau, initialement conçue pour propager des interfaces avec une vitesse dépendant de la courbure locale de ces variétés, [8]. En s'inspirant de divers travaux [8,11], on va postuler que la courbe  $\Gamma$  cherchée, passant au mieux par les points de  $V$ , est le résultat de l'advection d'une courbe régulière  $\Gamma(t)$  au cours du temps. En outre, nous pouvons montrer que la solution de cette équation d'advection est aussi celle d'un problème de minimisation dont l'équation d'Euler–Lagrange associée correspond à la courbe minimale  $\Gamma$  cherchée. Notons

que cette approche se distingue à la fois des méthodes analogues basées sur la résolution d'une EDP issue d'une fonctionnelle d'énergie [11] et de celles basées sur la construction d'une triangulation de Delaunay [2,4]. En effet, la formulation que nous proposons est composée d'un terme de régularisation (dépendant de la courbure et jouant le rôle de tension superficielle) et d'un terme d'attraction (impliquant  $d(x, V)$ ). D'un autre côté, les approches géométriques fournissent une interpolation affine par morceaux de  $\Gamma$  à partir d'une triangulation (de Delaunay) dont les points de  $V$  sont des sommets, et non une courbe régulière.

La méthode des surfaces minimales [11], initialement développée pour reconstruire des formes régulières à partir d'un échantillon de points donnés à des fins de visualisation, introduit la notion de modèle de surface minimale basé sur une fonctionnelle d'énergie. La déformation d'une surface régulière selon le flux de gradient de l'énergie a depuis été reprise et appliquée à de nombreux autres domaines. Citons par exemple, la reconnaissance de formes [12] et la segmentation et l'interpolation d'images basées sur la notion de contours géodésiques actifs [6].

Dans notre approche, on commence par construire une triangulation  $T_h$  d'un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , englobant les points de  $V$ , qui servira à calculer une solution approchée  $u_h$ , en chaque sommet. Pour améliorer la précision de l'approximation numérique à convergence, il est souhaitable d'augmenter la densité de sommets au voisinage du nuage de points. Pour obtenir cette anisotropie locale, on génère un maillage non structuré simplicial quasi uniforme dans une métrique riemannienne [5]. Celle-ci est définie à partir de la courbure moyenne locale de l'isovaleur 0 d'une fonction de ligne de niveau, ici  $d(x, V)$ . La spécificité et l'originalité de notre méthode résident donc dans la combinaison de la formulation lignes de niveau avec l'adaptation de maillage anisotrope.

Le problème de minimisation et la formulation de type ligne de niveau sont introduits Section 1. La mise en œuvre numérique de la méthode est présentée Section 2. Un exemple d'application est proposé Section 3 pour illustrer l'efficacité et la robustesse de la méthode proposée.

## 2. Problème de minimisation

On considère une fonction  $k$ -lipschitz  $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \mapsto u(t, x)$ , telle que, pour un ouvert borné  $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^2$  donné, on a les propriétés suivantes :  $u(t, x) < 0$  (resp.  $u(t, x) > 0$ ) pour  $x \in \Omega(t)$  (resp.  $x \notin \bar{\Omega}(t)$ ) et  $u(t, x) = 0$  sur la frontière  $\partial\Omega(t) = \Gamma(t)$  du domaine. Ainsi, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $u(t, \Gamma(t)) = 0$ . En effet, on s'intéresse généralement au déplacement de  $\Gamma(t)$  sous un champ de vitesse prescrit  $v(t, x)$ , ce qui conduit à l'équation du type Hamilton–Jacobi suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + v_n(t, x) |\nabla u(t, x)| = 0, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

où  $v_n(t, x)$  décrit la composante normale de  $v(t, x)$  avec

$$v_n(t, x) = \frac{d\Gamma(t)}{dt} \cdot n(u(t, x)) = \frac{d\Gamma(t)}{dt} \cdot \frac{\nabla u(t, x)}{|\nabla u(t, x)|}.$$

Cette méthode présente l'avantage de gérer de manière naturelle les changements de topologie de la frontière  $\Gamma(t)$  au cours du temps. En principe, le champ de vitesse  $v_n(t, x)$  dépend des propriétés géométriques de  $\Gamma(t)$  et des paramètres physiques du problème. D'un point de vue mathématique, la notion de solution de viscosité a été introduite pour donner un sens physique à la solution de l'équation de Hamilton–Jacobi, [3]. Du point de vue numérique, une telle solution est difficile à trouver en raison de l'existence de singularités et nécessite en principe l'utilisation de schémas implicites [9]. On cherche ici une solution de viscosité qui coïncide avec la courbe régulière minimale  $\Gamma$  passant au mieux par tous les points de  $V$ . Comme la régularité de cette solution est liée à la courbure  $\kappa(u(t, x))$  en chaque point  $x$  de  $\Gamma(t)$  (propriété géométrique), on propose donc de résoudre l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - d(x)\kappa(u(t, x)) = \alpha d(x) \quad (2)$$

où  $d(x)$  est la distance  $d(x, V)$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  une constante. Le terme de second ordre  $d(x)\kappa(u(t, x))$  agit comme un terme de régularisation, et est combiné ici à un terme d'attraction  $\alpha d(x)$ . On constate que lorsque  $d(x)$  tend vers 0, on obtient un minimum qui correspond à la courbe minimale cherchée passant par les points de  $V$ . D'une étude asymptotique, ne subsiste de l'équation (2), à convergence, que l'équation elliptique suivante :

$$-\operatorname{div} \frac{\nabla u(t, x)}{|\nabla u(t, x)|} = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad A(u) = \alpha$$

où  $A$  est un opérateur elliptique non linéaire du second ordre. Le calcul des variations nous indique que  $A(u) = I'(u)$ , où  $I(\cdot)$  est une fonctionnelle d' "énergie". On cherche donc maintenant la fonction  $u$  inconnue comme un point critique de  $I(\cdot)$ . Pour calculer l'expression de  $I$ , on introduit l'opérateur lagrangien  $L: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , de la forme :  $L(p, z, x) = |p| - \alpha z$  et on postule que  $I$  est de la forme : pour toute fonction  $w: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$I(u) = \int_{\Omega} L(p(u), u, x) dx = \int_{\Omega} (|p| - \alpha z) dx. \quad (3)$$

L'équation d'Euler-Lagrange associée à  $I$  est alors donnée par la condition nécessaire pour que  $I$  soit stationnaire :

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \operatorname{div}_x(\nabla_p L) = 0. \quad (4)$$

Poser  $p(x) = \nabla u(x)$ ,  $z(x) = u(x)$ , conduit bien à  $-\operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} = \alpha$  et la fonctionnelle que l'on minimise est donc  $I(u(x)) = \int_{\Omega} (|\nabla u(x)| - \alpha u(x)) dx$ . Si  $u$  est solution du problème elliptique, alors  $u$  est solution du problème de minimisation et inversement.

### 3. Mise en œuvre numérique

Les équations de Hamilton-Jacobi sont en général résolues sur des grilles régulières avec des schémas d'ordre élevé peu dissipatifs (de type ENO ou WENO) pour éviter les singularités des solutions [7]. Ils ont été étendus à des maillages triangulaires non structurés [1]. Nous proposons de limiter la diffusion numérique et d'améliorer la précision numérique en introduisant de l'anisotropie dans les maillages au lieu d'augmenter l'ordre d'approximation dans les schémas. Pour construire ces triangulations anisotropes, nous définissons un champ de métrique discret basé sur la matrice hessienne de la fonction  $u$ , ce qui permet de prendre en compte la courbure locale de  $\Gamma(t)$  [5]. Toutes les variables ( $u, d, \kappa$ ) étant définies en chaque noeud du maillage, on utilise une projection  $L^2$  de la valeur discrète  $u_h$  pour calculer le gradient  $\nabla u_h$  en chaque sommet et une deuxième projection  $L^2$  des composantes de  $\nabla u_h$  pour obtenir la matrice hessienne [5]. La courbure  $\kappa(u_h)$  est prise comme la trace de cette matrice. Le choix d'utiliser un schéma numérique d'ordre un implique nécessairement d'être confronté au problème de diffusion numérique, même si celle-ci est contrôlée par l'anisotropie. Cela se traduit par le fait que  $|\nabla u| \gg 1$  après quelques itérations et il faut donc recourir à une étape de renormalisation, qui permet à la fonction  $u$  de satisfaire à nouveau l'équation eikonale  $|\nabla u| = 1$ . Ceci s'obtient en résolvant habituellement, soit l'équation  $\tilde{u} = \operatorname{sgn}(u)(1 - |\nabla u|)$  [10] pour retrouver la condition  $|\nabla u| = 1$ , soit par une approche algorithmique dite de Fast Marching [9].

La convergence est garantie par l'équation (2) d'un point de vue théorique. En pratique néanmoins, on préfère ajouter un critère d'arrêt basé sur une projection  $L^2$  de la valeur de  $u_h$  aux points de  $V$ . Plus précisément, l'algorithme termine lorsque :

$$\max_{x_i \in V} |u_h^n(x_i)| < \varepsilon.$$

On peut aussi utiliser un critère d'arrêt se basant sur le calcul des gradients de la fonction discrète  $u_h$  au temps  $n$  et  $n + 1$ , de la forme :

$$|\nabla u_h^{n+1}(x) - \nabla u_h^n(x)| \leq \varepsilon, \quad \text{pour } x \in \Omega(t).$$

### 4. Exemple numérique

Pour valider notre approche, on considère un premier exemple pour lequel les coordonnées des points de  $V$  sont connues de manière analytique et l'échantillonnage est non uniforme. Le domaine  $\Omega$  est ici un disque unité centré en  $(0,5, 0,5)$ . La triangulation anisotrope  $T_h$ , avec une taille de maille minimale  $h_{\min} = 0,001$  au voisinage du nuage, comprend 6634 points (Fig. 1). Pour illustrer l'évolution et le comportement global de  $\Gamma(t)$ , on choisit de partir d'un cercle relativement éloigné de  $V$ , donc de ne pas initialiser  $\Gamma(t)$  avec une isovaleur de la fonction  $d(x, V)$ . On a utilisé un schéma d'Euler explicite d'ordre un en temps, sous une condition de stabilité imposant  $\delta t = O(h_{\min}^2)$ , et une valeur du paramètre  $\alpha = 0,5 \times h_{\min}$ . La convergence est ainsi obtenue en 9800 pas de temps, avec une renormalisation de la fonction  $u$  tous les 100 pas de temps. Un maillage uniforme de taille  $h = h_{\min}$  pour une précision identique demanderait 400 000 points, d'où un gain relatif d'un facteur 60 dans notre cas. Sur la Fig. 2 (à gauche), quelques

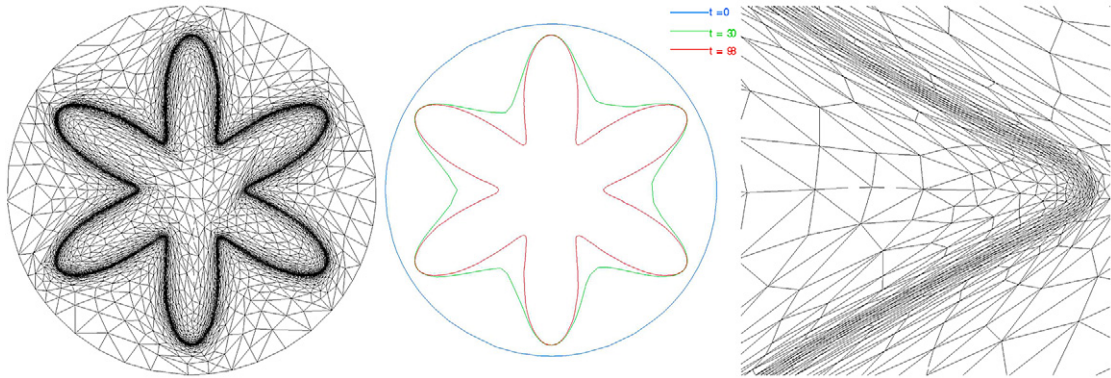


Fig. 1. Exemple de courbe régulière obtenue à partir d'un nuage de points donné (gauche), triangulation anisotrope du domaine de calcul (milieu) et zoom local sur la triangulation (droite).

Fig. 1. Example of a regular curve approximating a given point set (left), related anisotropic triangulation of the domain (middle) and local enlargement on the triangulation (right).

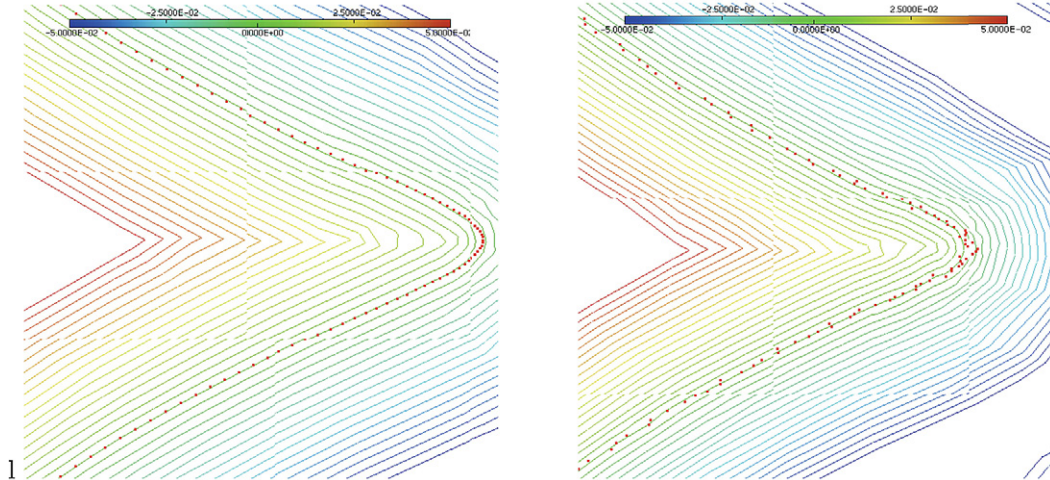


Fig. 2. Quelques lignes d'isovaleur de la fonction  $u$  sur le nuage  $V$  donné (gauche) et sur le nuage  $V$  perturbé aléatoirement (droite).

Fig. 2. Several iso-value lines of the function  $u$  on the initial data set  $V$  (left) and on the randomly perturbed data set (right).

lignes de niveau de la fonction  $u_h$  permettent de constater que la ligne  $\Gamma(t)$  est très proche des points de  $V$  (à  $\varepsilon = h_{\min}$  près), même dans le cas où les coordonnées des points ont été perturbées aléatoirement de plusieurs  $h_{\min}$  (Fig. 2, à droite). Notons qu'à convergence de la méthode, il est facile d'obtenir une approximation affine par morceaux précise de  $\Gamma(t)$  par des méthodes algorithmiques (cf. Fig. 2).

Notre approche permet également de traiter des courbes non simples ou composées de plusieurs composantes connexes, comme le montre la Fig. 3.

## 5. Conclusion et perspectives

Ce travail préliminaire a permis de montrer la validité du couplage d'une approche par minimisation d'une fonctionnelle, basée sur une méthode des lignes de niveau, avec une triangulation anisotrope. A l'évidence, au vu de la précision et de la régularité des résultats numériques obtenus, l'utilisation d'un schéma implicite, pour s'affranchir de la condition de stabilité, ne pourra qu'accélérer la convergence. D'un autre côté, introduire un terme de pénalisation dans l'équation d'advection permettrait de remplacer l'étape de renormalisation et d'optimiser encore le processus. Enfin, parmi les extensions naturelles, le passage en dimension trois, s'il ne pose pas de difficulté au niveau théo-

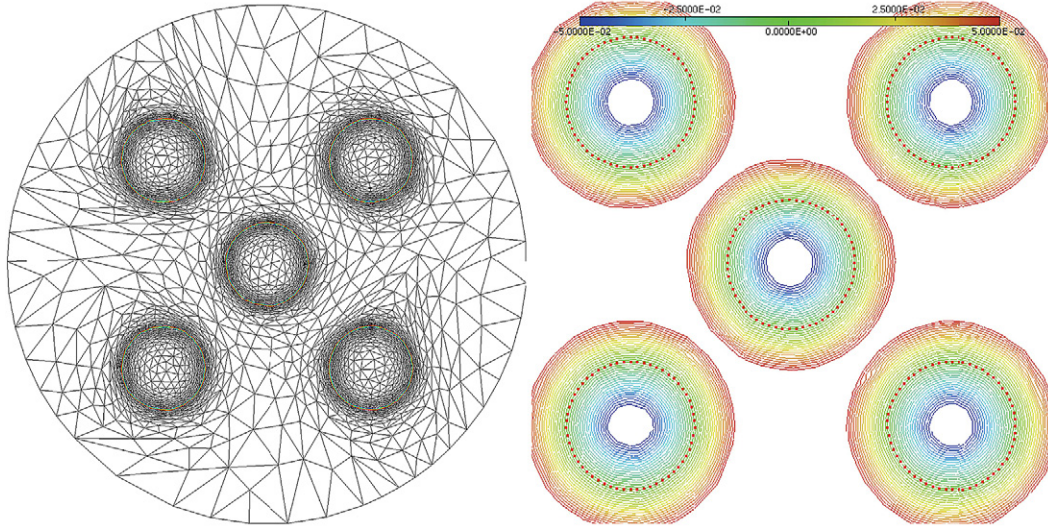


Fig. 3. Un autre exemple de construction d'une courbe régulière sur un nuage de points donné contenant plusieurs composantes connexes avec la triangulation anisotrope associée.

Fig. 3. Another example of construction of a regular curve approximating a given point set with a few connected components and the related anisotropic triangulation.

rique, présente en revanche un certain nombre de défis numériques à relever comme notamment la génération de triangulations anisotropes, l'étape de renormalisation des lignes de niveau, l'approximation des gradients et hessiens.

## Remerciements

Ce travail a été partiellement financé par une bourse doctorale de la Région Ile-de-France accordée au premier auteur. Les auteurs tiennent à remercier V. Ducrot (UPMC) pour son code de renormalisation de la fonction  $u$  ainsi que L. Rosier (IECN) pour son avis sur la fonctionnelle de minimisation.

## Références

- [1] R. Abgrall, Numerical discretisation of boundary conditions for first order Hamilton–Jacobi equation  $n$  triangular meshes, *Comm. Pure Appl. Math.* 49 (1996) 1339–1373.
- [2] D. Cohen-Steiner, F. Da, A greedy Delaunay based surface reconstruction algorithm, preprint INRIA RR-4564, 2002.
- [3] M. Crandall, P.L. Lions, Two approximations of solutions of Hamilton–Jacobi equations, *Math. Comp.* 43 (1984) 1–19.
- [4] T.K. Dey, J. Giesen, J. Hudson, Delaunay based shape reconstruction from large data, in: *Proc. IEEE Symposium in Parallel and Large Data Visualization and Graphics*, 2001, pp. 19–27.
- [5] V. Ducrot, P. Frey, Contrôle de l'approximation géométrique d'une interface par une métrique anisotrope, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 345 (2007) 537–542.
- [6] C. Gout, C. Le Guyader, L. Vese, Segmentation under geometrical conditions using geodesic active contours and interpolation using level set methods, *Numer. Algorithms* 39 (1–3) (2005) 155–173.
- [7] G. Jiang, D. Peng, Weighted ENO schemes for Hamilton–Jacobi equations, *SIAM J. Sci. Comput.* 21 (2000) 2126–2143.
- [8] S. Osher, J.A. Sethian, Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton–Jacobi formulations, *J. Comput. Phys.* 79 (1988) 12–49.
- [9] J.A. Sethian, Fast marching methods, *SIAM Rev.* 41 (2) (1999) 199–235.
- [10] M. Sussman, P. Smereka, S. Osher, A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow, *J. Comput. Phys.* 114 (1994) 146–159.
- [11] H.K. Zhao, S. Osher, B. Merriman, M. Kang, Implicit and nonparametric shape reconstruction from unorganized data using a variational level set method, *Comput. Vision and Image Understanding* 80 (2000) 295–314.
- [12] H.K. Zhao, S. Osher, Visualization, analysis and shape reconstruction of unorganised datasets, in: S. Osher, N. Paragios (Eds.), *Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision and Graphics*, Springer, 2002.