Estudios de Administración, vol. 2, N° 1, 1995

Nota técnica

Derivación del modelo de precios por arbitraje (APT)

Jorge Gregoire C.
Salvador Zurita L.
Universidad de Chile

El propósito de esta nota es el de clarificar un aspecto de álgebra lineal que aparece en el desarrollo de la teoría de arbitraje de Ross 1976, como se presenta, por ejemplo, en Copeland y Weston 1988. Por lo tanto, nos centramos específicamente en el enfoque de tipo heurístico, para una economía grande.

La presentación, ya mencionada, de la teoría procede de la formación y definición de *portfolios* de arbitraje, que implican condiciones de ortogonalidad de ciertos vectores. De ahí las pruebas saltan a la ecuación de precios, pero este último paso no queda claro. El propósito de esta nota consiste, precisamente, en entregar una explicación en el contexto de un espacio vectorial de dimensión (k+1), esto es, para el caso general de k dimensiones de riesgo sistemático.

El modelo de precios por arbitraje (APT) postula que el retorno de cualquier activo depende de k factores de riesgo más un ruido blanco:

$$\tilde{R}_i = E(\tilde{R}_i) + b_{i1}\tilde{F}_1 + \dots + b_{ik}\tilde{F}_k + \epsilon_i \,, \tag{1}$$

donde

R_i	=	Retorno del activo i; $i = 1,2,...,n$ (con $n >> k$)
$E(R_i)$	=	Retorno esperado del activo i
b_{ij}	=	Sensibilidad del retorno del activo i frente al factor de riesgo j
F_j	=	Factor de riesgo j
ϵ_i	=	Riesgo idiosincrático del activo i

Combinando activos en portfolios bien diversificados, es posible eliminar el ruido blanco o riesgo idiosincrático, por la ley de los grandes números.[1] Así, el espacio riesgo-retorno esperado de portfolios bien diversificados tiene dimensión $(k + 1)$.

Matemáticamente, la ecuación de retorno esperado para cualquier activo individual se obtiene mostrando por un argumento de arbitraje que $(k + 2)$ vectores pertenecen a este espacio vectorial de dimensión $(k + 1)$, con lo cual necesariamente dichos vectores son linealmente dependientes. En efecto, un portfolio de arbitraje se define por tres condiciones, según se expone a continuación.

a. Condición de cero riqueza

Un portfolio de arbitraje no requiere de inversión inicial, por lo que deberá consistir en posiciones cortas y largas en distintos activos. Algebraicamente, esta condición se representa como

$$\underline{w}' \underline{1} = 0, \qquad (2)$$

donde

$\underline{w}$	=	Vector de dimensión n que indica el porcentaje invertido en cada activo n
$\underline{1}$	=	Vector constante de dimensión n compuesto por unos

[1] Se supone que el riesgo idiosincrático es no correlacionado serialmente ni en corte transversal con el de otros activos.

b. Condición de cero riesgo

Un portfolio de arbitraje es libre de riesgo. Puesto que estamos considerando porfolios bien diversificados, está libre de riesgo idiosincrático. Para que además esté libre de riesgo sistemático se deben elegir las ponderaciones de forma tal que la sensibilidad del portfolio con respecto a cada factor de riesgo sea cero:

$$\underline{w}' \underline{b}_j = 0, \tag{3}$$

donde

$\underline{b}_j$ = Vector de dimensión n que indica la sensibilidad frente al factor j de los n activos

Un portfolio que satisface (2) y (3) debe tener un retorno cero, o habría posibilidades de arbitraje en la economía, lo que conduce a la condición que sigue.

c. Condición de no arbitraje

En equilibrio, el portfolio debe obtener un retorno cero:

$$\underline{w}' \underline{\mu} = 0, \tag{4}$$

donde

$\underline{\mu}$ = Vector de retornos esperados de los activos de la economía, de dimensión n.

Nótese que (a), (b) y (c) conllevan que hay (k + 2) vectores en un espacio de dimensión (k +1). Esto implica que ellos deben ser linealmente dependientes, y en consecuencia es posible escribir cualquiera de ellos como combinación lineal de los restantes. Como lo que nos interesa es obtener una ecuación para el retorno esperado en equilibrio, podemos escribir $\underline{\mu}$ como combinación lineal del vector de constantes $\underline{1}$ y de los k vectores de sensibilidades $\underline{b}$. Así, tomando un elemento de esta ecuación vectorial, se obtiene el resultado del APT:

$$\mu_i = \lambda_0 + \lambda_1 b_{i1} + \ldots + \lambda_k b_{ik}. \tag{5}$$

Referencias

ROSS, S. (1976). "Return, Risk and Arbitrage", en I.FRIEND y J.BISCKSLER eds., *Risk and Return in Finance*. Cambridge, Mass.: Ballinger.

COPELAND, T. y F. WESTON (1988). *Financial Theory and Corporate Policy*, 3 ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley.