Estudios de Economía. Vol. 25 - Nº 1, Junio 1998. Págs. 99-131

PROGRAMA OPTIMO DE VENTA Y PROTECCION PARA CODELCO*

JAIME A. BATARCE
OSCAR F. ORELLANA

Abstract

This paper discusses and analyzes the optimal commercial agreement and/or financial instruments positions that Codelco must maintain with its client and/or in the market, respectively. The results of the present work, obtained from an optimization program in a discrete model of two periods, implies that Codelco must consider a commercial agreement with its client or add positions in derivative financial instruments of copper, which consequently implies a sharing of the sale price risk with its customer or a transference of part of the risk to the market. Therefore, on one hand, Codelco's optimal marketing and protection strategy is reduced, under certain conditions, to write call options over its production of copper and, on the other hand, the interventions of Codelco in the future market are understood as position in order to dynamically reply the short call option and not as isolated actions.
In short, Codelco can accomplish an optimal marketing and protection strategy, through passive strategies and/or dynamic programs. From these analysis it is briefly discussed the distinct strategies and considerations that the administration of Codelco must pay attention at the moment of deciding which particular program will carry out in the marketing and protection of its copper.
The main contributions of the present work are, on one side, the formal treatment and modelling of the subject matter proposed in the title, and on the other side, the calculation and economic interpretation of the model solution within the formal framework stated. Moreover, it follows that the obtained solution is feasible in reality and has full economic significance, in the sense commented in the previous paragraphs.

Resumen

En el presente trabajo, se investiga y analiza el óptimo arreglo comercial o las posiciones en instrumentos financieros que debe mantener Codelco con su cliente

---

* Los autores agradecen a los árbitros anónimos por sus sugerencias y comentarios.

□ Profesor de la Universidad de Chile y su dirección es Departamento de Administración, Universidad de Chile, Diagonal Paraguay 257, Santiago-Chile. La investigación de este autor ha sido financiada parcialmente *por Chile Factoring S.A.*

□ Profesor de la Universidad Técnica Federico Santa María y su dirección es Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María, Avenida España #1680, Valparaíso-Chile. La investigación de este autor ha sido financiada completamente por el Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico (FONDECYT) Santiago-Chile, por medio del proyecto Nº 1950681.

y/o en el mercado. El resultado de la presente investigación, derivado a partir de un programa de optimización en un modelo discreto de dos períodos, es que Codelco debe considerar un convenio comercial con su cliente o agregar posiciones en instrumentos financieros derivados de cobre, lo cual tiene como implicación un compartimiento del riesgo del precio de venta del cobre con su cliente o una transferencia de parte del riesgo al mercado. En efecto, la óptima estrategia de comercialización y protección se resume en que Codelco debe escribir opciones call sobre su producción futura de cobre. Las intervenciones de Codelco en el mercado de futuros de cobre se explican como posiciones en orden a replicar dinámicamente la opción call corta y no como posiciones aisladas.
Codelco puede llevar a cabo una óptima estrategia de comercialización y protección, a través de estrategias pasivas y/o programas dinámicos. A partir de este estudio se discute brevemente la conveniencia de las distintas estrategias y consideraciones que la administración de Codelco debiera tener presente a la hora de decidir el programa particular que llevará a cabo en la comercialización y protección del precio del cobre.
Las contribuciones principales del presente trabajo son, por una parte, la formalización y modelación del problema propuesto en el título, y por otra, el cálculo e interpretación económica de la solución del modelo resultante. Además, se establece que la solución obtenida dentro del marco conceptual propuesto es factible de implementar en la realidad y tiene pleno significado económico, en el sentido señalado en los párrafos previos.

1. Introducción

El caso Dávila, que significó a Codelco[1] una pérdida de 174 millones de dólares americanos por su intervención en los mercados de futuros, ha llamado la atención del público y sin duda ha estimulado el interés académico tendiente a elaborar una estrategia educada de venta y protección del cobre para Codelco, que sea consecuencia lógica de un proceso de optimización que tome en consideración principios de máxima eficiencia.

Es conveniente mencionar que el interés de analizar la estrategia de venta del cobre de Chile se ha visto magnificado también por otros eventos de naturaleza similar a la pérdida de Codelco causada por posiciones en futuros de cobre en 1994. En efecto, el banco más antiguo de Inglaterra, Barings, tuvo pérdidas del orden de los 950 millones de dólares por contratos de futuros en acciones Nikkei 225, lo que le significó su quiebra, y Sumitomo, un banco japonés que transaba unos 20 mil millones de dólares al año en futuros de cobre, reveló pérdidas por 2.600 millones de dólares en 1996.

Sin entrar a analizar el significado de las posiciones en futuros, se puede colegir, a partir de lo que aparece en la prensa, que éstas imponen un nivel de riesgo descomunal a los agentes que intervienen en los mercados de futuros. Aunque las posiciones en futuro se justifican por demandas de protección, en la realidad muchas de las pérdidas ocurren por posiciones con motivaciones puramente especulativas. Si las pérdidas son el producto de una estrategia de

---

1 Corporación Nacional del Cobre de Chile.

protección en la venta de cobre, habrá que agregar las ganancias que se generan en el mercado *spot*, para así analizar la estrategia en su conjunto.

Las pérdidas en mercados de futuros ponen de manifiesto la existencia de una estrategia de venta y protección que en la práctica no parece derivarse de un proceso de optimización, no considera las preferencias de los agentes que intervienen en la negociación y gran parte de las posiciones en futuros parecen motivadas más bien por elementos puramente especulativos que por principios de eficiencia.

Es menester mencionar que a pesar de que es de conocimiento público que Codelco interviene en los mercados de futuros, oficialmente no entrega información. La memoria anual de 1995 no hace referencia alguna a las actividades en los mercados de activos derivados, ni a medidas relativas a la protección del precio. La única referencia que hace Codelco en dicha memoria a los activos derivados es que está contribuyendo en el proceso del caso Dávila y eventualmente va a iniciar una demanda contra un broker que intervino en las operaciones de futuros que causaron pérdidas.

La memoria anual de Codelco de 1995 expresa que sus ventas de cobre están orientadas a clientes que mantienen una relación más bien de largo plazo. En efecto, Codelco textualmente consigna en la memoria que "La cartera de productos comerciales de cobre de la empresa, del orden de 1,2 millones de toneladas por año, obliga a mantener un sistema de ventas sustentado en relaciones de largo plazo con los clientes, asumiendo que se deberá mantener una presencia en los principales centros consumidores acorde con el porcentaje de metal que estos requieran importar". Por lo tanto, es de interés investigar el arreglo comercial que debería considerar Codelco con su cliente y cuál deberá ser su estrategia de venta y protección.

El instrumento óptimo que se investiga en el presente artículo envuelve decisiones de financiamiento o anticipos del valor de la venta, como asimismo decisiones relativas a las condiciones de venta y cómo se comparte el riesgo, las cuales son medidas de protección que Codelco debiera tomar en consideración para estabilizar sus ingresos.

En principio se distinguen básicamente dos tipos de precios en los contratos de venta de Codelco: *precio a firme* y *venta en el mercado spot.* En la modalidad de *precio a firme,* se fija un precio, período y lugar de entrega, calidad de producto y demás condiciones. Cuando Codelco satisface las condiciones de la venta, el cliente se obliga a pagar el precio establecido previamente. El cobre es una mercancía, cuya calidad está completamente definida en los mercados. La característica esencial de este arreglo comercial es un precio conocido por las partes y, en consecuencia, los riesgos de futuros cambios en él son asumidos enteramente por el cliente. Este arreglo es similar a que Codelco tenga posiciones en forwards o futuros por la cantidad que va a producir en el período, luego vende en el mercado spot a precio de mercado y cierra las posiciones de futuros. En resumen, debería obtener el precio futuro que fijó u operó, excepto por el riesgo de base asumido. En el otro extremo está la modalidad de venta spot en la cual el precio que recibe Codelco corresponde al precio que obtiene en el mercado cuando la producción está disponible, en este caso, el riesgo del precio lo asume enteramente Codelco.

Todos los gastos en que incurre Codeldo durante el proceso de exportación del Cobre, por cualquiera de las modalidades mencionadas, se conocen anticipadamente con suficiente certidumbre. En consecuencia, el riesgo de todo el proceso de comercialización reside esencialmente en el precio de venta del cobre en los mercados consumidores y este riesgo es asumido enteramente por Codelco bajo la modalidad de venta spot, toda vez que su retorno se relaciona uno a uno con el precio final. En esta modalidad de venta se espera la disponibilidad de la producción para intervenir en el mercado spot.

Entre los dos posibles contratos mencionados, en este trabajo se visualiza un convenio más general en que ambos, Codelco y cliente, comparten el riesgo del precio de venta del cobre. Este consiste en compartir las variaciones del precio en determinadas proporciones dependiendo de las preferencias de los agentes.

El contrato óptimo entre los agentes para comercializar cobre va a depender de las preferencias de los agentes. Además, el arreglo puede permitir que el cliente anticipe parte del precio antes de concretar el despacho, posibilidad que en los dos arreglos extremos anteriores no se considera. El anticipo de precio contribuye a estabilizar los ingresos como también a financiar el consumo y proyectos de inversión. En un concepto de protección más amplio, la estabilización de los ingresos debe cubrir períodos intertemporales, lo que significa que Codelco necesariamente debe considerar un período que vaya más allá del período de tiempo que toma producir y despachar el cobre.

Como se observará en el presente artículo, el problema de Codelco que derivó en el caso Dávila podría residir no solamente en la falta de control interno de Codelco, lo cual permitió a determinados ejecutivos tomar posiciones especulativas en el mercado de futuros, sino que también es un problema de fondo que dice relación con el diseño de la estrategia de venta y protección del cobre.

Los hechos descritos en los párrafos precedentes motivaron este trabajo y en orden a elaborar una estrategia educada de comercialización y protección del cobre para Codelco que sea consecuencia lógica de un proceso de optimización que tome en cuenta las preferencias de los agentes. En este artículo se considera un modelo discreto de dos períodos, en el cual Codelco y su cliente exhiben funciones de utilidad Von Neumann-Morgenstern, con lo cual se logra formalizar el problema en comento, reduciéndose éste a la optimización de la utilidad esperada asociada a Codelco, bajo ciertas restricciones. Además, haciendo uso de técnicas estándar de optimización (condiciones de Kuhn-Tucker) se obtiene un contrato óptimo.

En la sección (2) se modela el problema propuesto y se explica la notación que se usará en las restantes secciones.

En la sección (3) se caracteriza tanto a Codelco como al cliente como aversos al riesgo. Este modelo da origen a un contrato eficiente cuya concavidad representada en el plano de servicio del segundo período y precio del cobre es, obviamente, contingente a las preferencias (o la aversión absoluta al riesgo local) relativas de los agentes. Por otro lado, la solución obtenida en la sección (3) establece un óptimo comportamiento del riesgo, tiene significado económico, pero no se observa en la realidad, en consecuencia, es de interés puramente académico por de pronto.

En la sección (4), caracterizando a Codelco y al cliente averso y neutral al riesgo respectivamente, se obtiene una solución que establece un óptimo compartimiento del riesgo asociado a las fluctuaciones del precio del cobre. La solución es perfectamente factible de llevar a cabo en la práctica y tiene pleno significado económico, como se argumentará en la misma sección. En efecto, la estrategia de comercialización y protección se reduce, en términos simples, a que Codelco escriba opciones *call* europea por su futura disponibilidad de cobre. La solución que dicta el modelo, en este caso, deja abiertas las posibilidades de los agentes a múltiples programas, tanto pasivos como activos, para implementar una estrategia de comercialización y protección del precio del cobre.

Por último en la sección (5) se resumen las conclusiones.

2. Modelación del problema

Se presenta un modelo de dos períodos en que Codelco es averso al riesgo y su cliente puede ser averso o neutral al riesgo (ver secciones (3) y (4), respectivamente) y ambos exhiben funciones de utilidad Von Neumann-Morgenstern. Codelco es propietario de la producción de cobre, su valor o precio es observado libre de costos por todos los agentes y es independiente de sus acciones. El valor del cobre neto de gastos necesarios del proceso de exportación a los mercados consumidores finales es representado por la variable x, una variable aleatoria.

Codelco desea entrar en un contrato con un cliente para la venta de cobre que se va a producir en el segundo período con el objeto de estabilizar sus ingresos y obtener anticipos de precio para los fines que estime conveniente. No se modela la disponibilidad de proyectos de inversión para capturar lo esencial de la estrategia.

Codelco maximiza su utilidad esperada, seleccionando el monto del anticipo o crédito que otorga el cliente y el mejor convenio entre ellos para fijar el precio del cobre. En este caso, Codelco recibe un anticipo A, a cuenta de la exportación de cobre, luego cuando la producción está disponible la entrega al cliente y recibe el saldo de precio por el monto indicado por $S(x)$. S es entonces una función del precio o pago que realiza el cliente a Codelco. Este precio es contingente a la realización de x y resume parte importante del arreglo contractual entre ambos agentes.

Caracterizar a Chile o a Codelco como averso al riesgo parece razonable. Codelco es la principal empresa del país, es el primer productor y exportador del mundo de cobre con 1,2 millones de toneladas por año que representa el 15 por ciento de la producción mundial. A pesar de que Chile ha diversificado sus exportaciones, los ingresos de cobre son aproximadamente el 20 por ciento del total de exportaciones. En consecuencia, Chile no es indiferente a lo que suceda con Codelco y debería imponer políticas de ventas que le obliguen a comportarse como averso al riesgo. Además, el precio del cobre entra como variable determinb te ˙n el presupuesto de la nación, y dado que los traspasos de Codelco al Estado superan el 12 por ciento de los ingresos fiscales, el comportamiento de Codelco debería modelarse como un agente averso al riesgo si los intereses de Chile son los que se deben cuidar.

2.1 Notaciones y definiciones del modelo

La relación contractual entre Codelco y su cliente se resume en que el primero entrega su dotación de cobre en el segundo período y recibe de su cliente un anticipo en el primer período y saldo de precio *S(x)* en el segundo período. La variable *x* representa el valor estocástico de la dotación de cobre de propiedad de Codelco disponible para la exportación, con función de distribución *F(x)* y función de densidad *f(x)* de soporte compacto $[a, b] \subset (0, \infty)$ y medias y varianzas finitas. *S(x)* denotará la función de precio o pago del cliente a Codelco, contingente a la realización del valor del cobre en el mercado "spot". Además, en lo que sigue a continuación, *A* denotará el monto del anticipo de libre disponibilidad otorgado por el cliente, y *E[ ]* denotará el operador expectativas.

2.2 Utilidad esperada de Codelco

Si $U_0()$ y $U_1()$ denotan las funciones de utilidad de Codelco para el primer y segundo período respectivamente y son funciones suficientemente diferenciables respecto de su argumento (es decir, que tengan primera y segunda derivada continua), entonces las utilidades esperadas de Codelco son:

$$U_0(w_0) + E[U_1(w_1 + x)] = \pi \tag{2.1}$$

sin contrato con el cliente y

$$U_0(w_0 + A) + E[U_1(w_1 + S(x))] \tag{2.2}$$

con contrato con el cliente, donde w_0 y w_1 denotan la dotación o riqueza no estocástica de Codelco en el primer y segundo período, respectivamente, y *A* denota el anticipo.

Note que si Codelco entra en un arreglo con su cliente y se compromete a entregar la dotación de cobre en el siguiente período cuando está disponible para su despacho, éste obtiene un anticipo *A* en el primer período y ya no recibe *x*, precio o valor de la exportación, sino que recibe el valor *S(x)* en el segundo período. Luego, Codelco entra en el arreglo con su cliente si su utilidad esperada con el contrato de venta es superior o igual que sin él y, por lo tanto, el contrato debe satisfacer la siguiente restricción de compatibilidad con los incentivos de Codelco:

$$U_0(w_0 + A) + E[U_1(w_1 + S(x))] \geq \pi \tag{2.3}$$

2.3 Utilidad esperada del cliente

Si $V_0()$ y $V_1()$ denotan las funciones de utilidad del cliente para el primer y segundo período respectivamente y son funciones suficientemente diferenciables respecto de su argumento (es decir, que tengan primera y segunda derivada continua), entonces las utilidades esperadas del cliente son:

$$V_0(z_0) + V_1(z_1) = \theta \tag{2.4}$$

sin contrato con Codelco y

$$V_0(z_0 - A) + E[V_1(z_1 + x - S(x))] \tag{2.5}$$

con contrato con Codelco, donde z_0 y z_1 denotan la dotación o riqueza no estocástica del cliente en el primer y segundo período respectivamente.

El cliente contrata la compra de cobre con Codelco si su utilidad esperada con el contrato de venta es superior o igual que sin él. Luego, el contrato debe satisfacer la siguiente restricción de compatibilidad con los incentivos del cliente:

$$V_0(z_0 - A) + E[V_1(z_1 + x - S(x))] \geq \theta \tag{2.6}$$

Ambos agentes van a entrar en un contrato de venta en la medida que esperen que su utilidad con el contrato supere a la utilidad esperada sin él, de lo contrario no va a existir un convenio que satisfaga a ambas partes y Codelco no lleva a cabo la venta de cobre. Es por ello que el valor contratado o la función *S(x)* debe ser buscado dentro de las funciones de pago factibles que respete las restricciones de compatibilidad con los incentivos expresadas por las ecuaciones (2.3) y (2.6).

2.4 Restricción en la capacidad de pago del cliente

Es evidente, de la naturaleza del problema, que la función de valor *S(x)* debe cumplir con algunas restricciones. Por de pronto, *S(x)* debe ser continua en la variable estocástica *x*.

Además, en este tipo de problemas, se observan dos hechos que imponen sus correspondientes restricciones a la función de valor *S(x)*. Por un lado, el cliente tendrá incentivos a no honrar el contrato en el segundo período, toda vez que deba pagar un valor superior al valor spot del cobre que recibe. Por otro lado, si el contrato obliga al cliente a pagar un valor superior a la dotación de recursos que posee en el segundo período, el cumplimiento forzado de tal pago llevará al cliente a la quiebra. En efecto, el cliente va a la quiebra en todos aquellos eventos en que el contrato especifica un pago superior a la dotación de recursos que posee en el segundo período y Codelco no recibirá lo que indica el contrato.

En consecuencia, por una parte, para que el cliente siempre tenga incentivo a honrar el contrato, la función de valor *S(x)*, debe cumplir con la restricción:

$$S(x) \leq x, \quad \text{y}$$

por otra parte, para que el cliente sea solvente y pueda cumplir lo especificado por el contrato, la función de valor *S(x)*, debe cumplir con la restricción:

$$S(x) \leq x + z_1$$

Evidentemente, de estas dos restricciones, la que se debe considerar es $S(x) \leq x$, porque es la más exigente y su cumplimiento garantiza el cumplimiento de la segunda, eliminando los efectos negativos de los dos hechos comentados previamente. En otratJpalabras, $S(x) \leq x$ garantiza que el contrato que se obtenga será uno en que el cliente siempre tiene incentivos a honrar sus obligaciones contractuales y la probabilidad de quiebra derivada del cumplimiento del contrato se reduce a cero.

Por otro lado, Codelco acude al mercado por financiamiento y, en consecuencia, buscaremos los contratos eficientes dentro de los admisibles, que generen un anticipo de precio positivo. Contratos que especifiquen un anticipo negativo no se observan en la realidad y tendrían un interés puramente académico, sin aplicación práctica. En consecuencia, estamos interesados en estudiar aquellos contratos en que se especifique un anticipo mayor que cero, porque es lo que se observa en la realidad.

Por lo tanto, en las siguientes secciones se buscará un contrato óptimo $C = (A, S(x))$ perteneciente al conjunto de contratos admisibles definido por:

$\zeta := \{ C = (A, S(x)) : A > O$ y $S(x)$ es una función continua sobre $[a, b]$ tal que $S(x) \leq x, \ \forall x \in [a, b] \}$.

3. Estrategia óptima de venta y protección; planteamiento del problema y solución (cliente averso al riesgo)

Caracterizando al cliente de Codelco como averso al riesgo, la restricción de participación del cliente, ecuación (2.6), no sufre modificación alguna. Por lo tanto, dadas las funciones de utilidad de Codelco y de su cliente, el problema consiste en escoger un contrato $C = (A, S(x)) \in \zeta$ (donde A es el monto del anticipo y $S(x)$ es la función de pago o condición de venta del cobre), que maximice la utilidad esperada de Codelco:

(3.1) $$U_0(w_0 + A) + E\,[U_1(w_1 + S(x))\,],$$

sujeta a las restricciones que se explicitan a continuación.

Compatibilidad con los incentivos del cliente

(3.2) $V_0(z_0 - A) + E[V_1(z_1 + x - S(x))\,] \geq \theta$ donde $\theta = V_0\,(z_0) + V_1\,(z_1)$,

factibilidad del pago de parte del cliente

(3.3) $$S(x) \leq x, \quad \forall x \in [a, b],$$

y anticipo mayor que cero para Codelco

(3.4) $$A > 0$$

Solución

Las condiciones de Kuhn-Tucker implican que existen λ, μ y $\beta(x)$ tal que:

(A) $$U_0'\,(w_0 + A) + \mu = \lambda\, V_0'\,(z_0 - A)$$

(S) $$U_1'\,(w_1 + S(x)) = \lambda\ V_1'\,(z_1 + x - S(x)) + \beta(x), \ \forall x \in [a, b]$$

(1) $\lambda\{ V_0 (z_0 - A) + E[V_1(z_1+ x - S(x))] - \theta \} = 0, \lambda \geq 0$ y

$V_0(z_0 - A) + E[V_1 (z_1+ x - S(x))] \geq \theta$

(2) $\beta(x) \{ x - S(x) \} = 0;\ \beta(x) \geq 0$ y $x - S(x) \geq 0,\ \forall x \in [a, b]$.

(3) $\mu A = 0, \mu \geq 0$ y $A > 0$.

De la ecuación $\mu A = 0$ y la desigualdad $A > 0$ en (3) se sigue inmediatamente que $\mu = 0$ y en consecuencia de la ecuación (A) obtenemos:

(3.5) $$\lambda = \frac{U_0'(w_0 + A)}{V_0'(z_0 - A)} \quad \text{con } \lambda > 0$$

En consecuencia, para que se satisfagan las ecuaciones e inecuaciones restantes, en (1) se debe cumplir la ecuación:

(3.6) $$V_0 (z_0 - A) + E[V_1 (z_1+ x - S(x))] = \theta,$$

donde $\theta = V_0 (z_0) + V_1(z_1)$, A es el anticipo y *S(x)* es la función de pago.

Por otro lado la ecuación $\beta(x) \{ x - S(x) \} = 0$ en (2) implica que $\beta(x) = 0$ o $S(x) = x$, lo cual da origen a las dos alternativas complementarias que estudiamos a continuación.

Alternativa I

Si $\beta(x) = 0\ \forall x \in [a, b]$, entonces la ecuación (S) se reduce a:

(3.7) $$U_1' (w_1 + S(x)) = \lambda V_1' (z_1 + x - S(x)) \qquad \forall x \in [a, b],$$

donde λ está determinada por la ecuación (4.5).

Derivando (4.7) respecto de *x* se obtiene:

(3.8) $$S'(x) = \frac{A_v (x)}{A_v (x) + A_u (x)} = H(x, S(x)),$$

donde $A_u(x)$ y $A_v(x)$ denotan las respectivas aversiones absolutas al riesgo local de acuerdo a la definición de Arrow-Pratt.[2] La solución general de la ecuación diferencial ordinaria (3.8) $S = S(x, k)$ existe, depende de una constante de integración arbitraria *k* y $0 < S'(x, k) < 1$. De aquí sigue que si $S(a, k) = a$, es decir, si fijamos la constante k de manera que $S(a, k) = a$, entonces $S(x, k) \leq x$, $\forall x \in [a, b]$ (en estricto rigor si escogemos *k* de manera que $S(a, k) = v$, dado

---

[2] $A_u(x) = -U_1''(w_1+S(x))/ U_1'(w_1 + S(x))$; $A_v(x) = -V_1''(z_1 + x - S(x))/V_1'(z_1 + x - S(x))$.

cualquier $v \leq a$ obtenemos que $S(x) \leq x \ \forall x \in [a, b]$). Además, reemplazando esta solución particular de la ecuación diferencial ordinaria (3.8) en la ecuación (3.6), obtenemos que el anticipo es:

$$(3.9) \qquad A = z_0 - V_0^{-1} \{ \theta - E [V_1 (z_1 + x - S(x, k)] \},$$

de donde se sigue que A es mayor que cero. A continuación resumimos este resultado en el siguiente Lema preparatorio.

Lema 3.I Si $\beta = \beta(x) = 0, \forall x \in [a, b]$. Entonces existe una única solución $S = S(x, k)$ de la ecuación diferencial ordinaria de primer orden (3.8) sujeta a la condición inicial $S(a, k) = a$ tal que:

$$(3.I.1) \qquad S(x, k) \leq x \qquad \forall x \in [a, b]$$

$$(3.I.2) \qquad A = z_0 - V_0^{-1} \{ \theta - E [V_1(z_1 + x - S(x, k))] \} > 0$$

$$(3.I.3) \qquad \lambda = \frac{U_0'(w_0 + A)}{V_0'(z_0 - A)} > 0$$

Observaciones

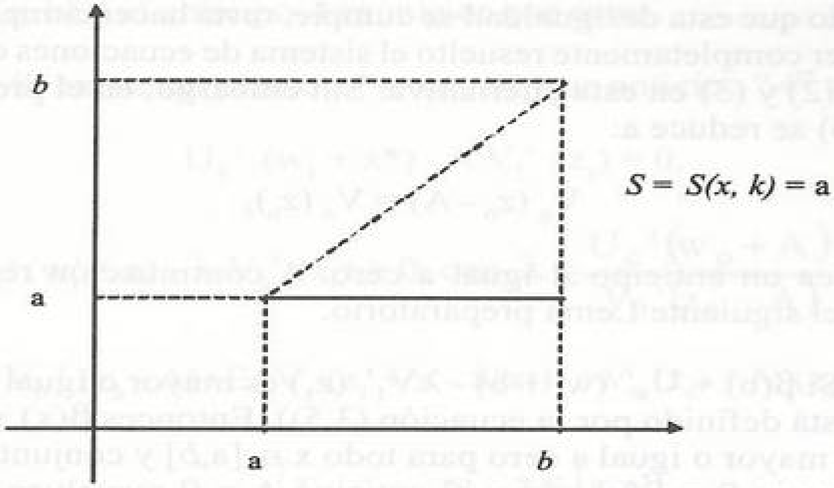
(1) Por lo tanto, si $\mu = 0$, $\beta(x) = 0 \ \ \forall x \in [a, b]$ y $S(a, k) = a$, existe una única función de pago $S=S(x, k)$, un único anticipo A y un único escalar λ que satisfacen el sistema de ecuaciones e inecuaciones (A), (S), (1), (2) y (3). Además, conocidas las aversiones absolutas al riesgo de Codelco y su cliente, la función de pago $S = S(x, k)$ se obtiene resolviendo el problema de valor inicial:

$$(3.10) \qquad S'(x) = \frac{A_v(x)}{A_v(x) + A_u(x)} = H(x, S(x)) \qquad \text{tal que } S(a, k) = a$$

Para resolver este problema existen técnicas analíticas y numéricas. Una vez resuelto el problema del valor inicial (3.10) y suponiendo conocida la función distribución de probabilidad del precio "*x*", se puede calcular el anticipo "*A*" directamente de la fórmula (3.I.2) en el Lema 3.I o de la ecuación (3.6) y λ se obtiene de la ecuación (3.5), con lo cual queda completa la solución del problema planteado en esta sección bajo las hipótesis definidas en esta primera alternativa.

(2) Note que la función de pago $S = S(x, k)$, obtenida en esta alternativa, satisface la desigualdad $S(x,k) < x \ \forall x \in (a, b]$ y la igualdad $S(a, k) = a$, debido a que $0 \leq S'(x, k) \leq 1$ según (3.10).

Ilustración



Por lo tanto, la solución obtenida en esta alternativa equivale a que Codelco reciba un anticipo $A = z_0 - V_0^{-1}\{\theta - E[V_1(z_1 + x - S(x,k))]\}$ en el primer período y un pago $S(x) = a$, independientemente del valor del cobre que se realice en el mercado, en el segundo período. Evidentemente esta solución es un caso especial y como se puede observar del lema 3.III corresponde a un caso particular de la solución general encontrada.

(3) Note que la condición inicial $S(a, k) = a$, es la que garantiza $S(x, k) < x$, $\forall\, x \in (a, b]$. En otras palabras, si en lugar de escoger la constante de integración arbitraria k de manera que $S(a, k) = a$, la escogemos de manera que $S(x^*, k) = x^*$ para algún $x^* \in (a, b)$, entonces la constante k evidentemente sería otra y la correspondiente función de pago satisface la desigualdad $S(x, k) < x\ \forall\, x \in (x^*, b]$. Esta observación juega un rol fundamental en la construcción de la solución definitiva, que se presenta más adelante en esta sección.

Alternativa II

Si $S(x) = x \quad \forall\, x \in [a, b]$, entonces la ecuación (S) se reduce a:

$$U_1'(w_1 + x) = \lambda V_1'(z_1) + \beta(x) \qquad \forall\, x \in [a, b], \tag{3.11}$$

donde λ queda determinada por la ecuación (3.5) y $\beta = \beta(x)$ debe ser mayor o igual que cero para todo x perteneciente al intervalo [a, b]. De (3.11) se sigue:

$$\beta(x) = U_1'(w_1 + x) - \frac{U_0'(w_0 + A)}{V_0'(z_0 - A)} V_1'(z_1), \tag{3.12}$$

entonces $\beta'(x) = U_1''(w_1 + x) < 0$, es decir, $\beta = \beta(x)$ es una función decreciente sobre todo el intervalo [a,b]. En consecuencia, para que $\beta = \beta(x)$ sea mayor o igual a cero $\forall\, x \in [a, b]$, se debe cumplir la siguiente desigualdad:

$$\beta(b) = U_1{}'\ (w_1 + b) - \lambda\, V_1{}'\ (z_1) \geq 0 \tag{3.13}$$

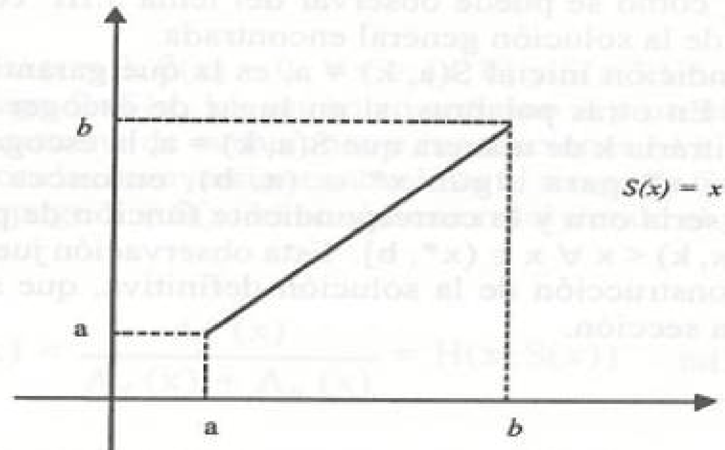
Asumiendo que esta desigualdad se cumple, resta hacer cumplir la ecuación (3.6) para tener completamente resuelto el sistema de ecuaciones e inecuaciones (A), (S), (1), (2) y (3) en esta alternativa. Sin embargo, en el presente caso, la ecuación (3.6) se reduce a:

$$V_0\ (z_0 - A) = V_0\ (z_0), \tag{3.14}$$

lo cual implica un anticipo *A* igual a cero. A continuación resumimos este resultado en el siguiente Lema preparatorio.

Lema 3.II Si $\beta(b) = U_1{}'\ (w_1 + b) - \lambda V_1{}'\ (z_1)$ es mayor o igual a cero (donde el escalar λ está definido por la ecuación (3.5)). Entonces $\beta(x) = U_1{}'\ (w_1 + x) - \lambda V_1{}'\ (z_1)$ es mayor o igual a cero para todo $x \in [a,b]$ y conjuntamente con la función de precio $S = S(x) = x$ y el anticipo $A = 0$ resuelven el sistema de ecuaciones e inecuaciones (A), (S), (1), (2) y (3), excepto por la desigualdad $A > 0$ en (3).

Ilustración:



Observación

Puesto que la solución: $S(x) = x\ \forall\, x \in [a, b]$ y $A = 0$ es equivalente a que no hubiera contrato, los resultados obtenidos en el contexto de la segunda alternativa no representan una solución satisfactoria al problema planteado inicialmente. Sin embargo, si combinamos apropiadamente la solución de la alternativa uno con la solución de la alternativa dos, se pueden construir soluciones compatibles con los incentivos de ambos agentes, para el problema planteado en la presente sección.

En efecto, lo primero que debemos notar es que la solución obtenida en el contexto de la segunda alternativa tiene sentido económico solamente si la igualdad $S(x) = x$ es válida en un subconjunto propio del intervalo [a, b] para así poder obtener un anticipo $A > 0$. A continuación en el Lema 3.III, utilizando los dos lemas preparatorios previos, se presenta la solución definitiva al problema planteado inicialmente en que *S(x)* es igual a *x* para todo $x \in [a, x^*] \subset [a, b]$, donde $x^* \in (a, b)$ y el anticipo *A* es mayor que cero.

Lema 3.III Si existe un precio $x^* \in (a, b)$ y un anticipo "*A*" tal que:

(3.15) $$U_1'(w_1 + x^*) - \lambda V_1'(z_1) = 0,$$

(3.16) $$U_1'(w_1 + a) - \lambda V_1'(z_1) > 0, \text{ con } \lambda = \frac{U_0'(w_0 + A)}{V_0'(z_0 - A)} \text{ y}$$

(3.17) $$V_0'(z_0 - A) + E[V_1(z_1 + x - S(x))] = V_0(z_0) + V_1(z_1),$$

con $$S(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in [a, x^*] \\ \hat{S}(x,k), & \text{si } x \in [x^*, b], \end{cases}$$

donde $\hat{S}(x, k)$ es la solución del problema de valor inicial:

(3.18) $$\hat{S}'(x,k) = H(x, \hat{S}(x,k)) \quad \text{tal que} \quad \hat{S}(x^*, k) = x^*.$$

Entonces:

(3.19) $$\mu = 0$$

(3.20) $$\lambda = \frac{U_0'(w_0 + A)}{V_0'(z_0 - A)} > 0$$

(3.21) $$\beta(x) = \begin{cases} \hat{\beta}(x), & \text{si } x \in [a, x^*] \\ 0, & \text{si } x \in [x^*, b], \end{cases}$$

donde $$\hat{\beta} = \hat{\beta}(x) = U_1'(w_1 + x) - \lambda V_1'(z_1)$$

(3.22) $$S(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in [a, x^*] \\ \hat{S}(x,k), & \text{si } x \in [x^*, b] \end{cases},$$

donde $\hat{S}(x, k)$ es la solución del problema de valor inicial (3.18) y

(3.23) $$A = z_0 - V_0^{-1}\{V_0(z_0) + V_1(z_1) - E[V_1(z_1 + x - S(x))]\} > 0,$$

constituyen una solución única del sistema de ecuaciones e inecuaciones (A), (S), (1), (2) y (3) donde $\beta = \beta(x)$ y $S = S(x)$ son funciones continuas de la variable estocástica "*x*".

Demostración del Lema 3.III

1. Note que $\forall x^* \in (a, b)$ fijo, la solución $\hat{S}=\hat{S}(x,k)$ del problema de valor inicial (3.18) es única. Además $\hat{S}(x^*, k) = x^*$ y $\hat{S}'(x, k) < 1$ $\forall x \in (x^*, b]$. Entonces la función de pago $S = S(x)$ definida por la ecuación (3.22) es única, satisface la desigualdad $S(x) \leq x$ y es continua en todo el intervalo $[a, b]$.
2. Puesto que $S = S(x)$ definida por la ecuación (3.22) es única y las funciones de utilidad asociadas a Codelco y su cliente son crecientes, las ecuaciones (3.15) y (3.17) tienen solución única. Además,

$$x^* = U_1'^{-1}\left\{V_1'(z_1)\,\frac{U_0'(w_0 + A)}{V_0'(z_0 - A)}\right\} - w_1$$

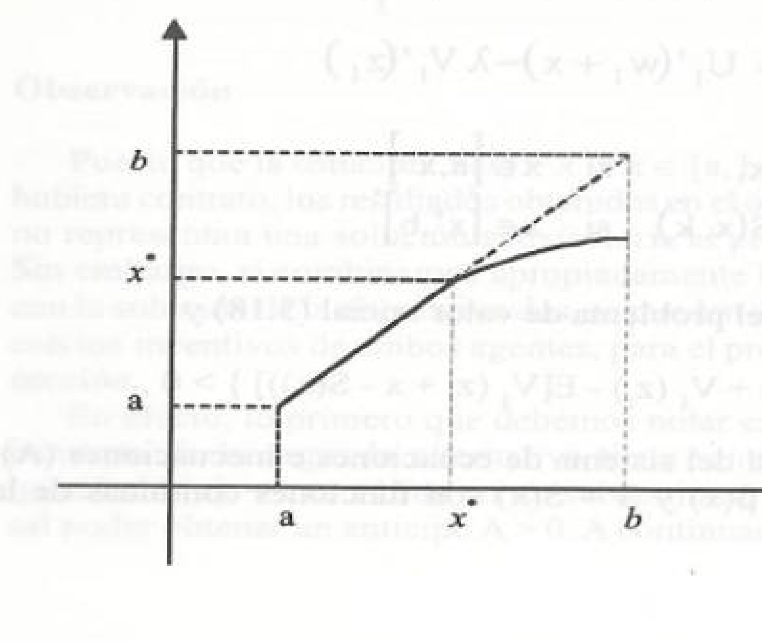
y

$$A = z_0 - V_0^{-1}\,\{\,V_0(z_0) + V_1(z_1) - E\,[\,V_1(z_1 + x - S(x))]\,\}.$$

   Usando el teorema del valor medio de la integral y un poco de álgebra se puede deducir que el anticipo "*A*" definido por la ecuación (3.23) es mayor que cero.
3. Por hipótesis $U_1'(w_1 + x^*) - \lambda V_1'(z_1) = 0$ y $U_1'(w_1 + a) - \lambda V_1'(z_1) > 0$. Entonces, $\hat{\beta}(x^*) = 0$ y $\hat{\beta}(x) > 0$ $\forall x \in [a, x^*]$, en consecuencia la función $\beta = \beta(x)$ definida por la ecuación (3.21) es continua y mayor o igual a cero sobre todo el intervalo $[a, b]$. Además, de la unicidad de x^* y *A* se sigue inmediatamente la unicidad de la función $\beta = \beta(x)$.
4. Por último, note que el conjunto de escalares μ, λ, A y las funciones $\beta = \beta(x)$; $S = S(x)$ definidas en (3.19), (3.20), (3.21) y (3.23) respectivamente son solución del sistema de ecuaciones e inecuaciones (A), (S), (1), (2) y (3) por construcción.

Observaciones

(1) Bajo las hipótesis del Lema 3.III la función de pago propuesta, cualitativamente se ve como se ilustra a continuación:



$$S(x)=\begin{cases} x; & \text{si } x\in[a,x^*] \\ \hat{S}(x,k); & \text{si } x\in[x^*,b] \end{cases}$$

Además y puesto que la ecuación (3.15) tiene una única solución x^* y, si $x^* \in (a, b)$, entonces la función de pago definida por (3.22) es la única función continua que satisface los requerimientos del problema planteado en esta sección, es decir, satisface las restricciones de compatibilidad con los incentivos de ambos agentes y establece un compartimiento del riesgo. La otra alternativa consiste en definir $S(x) = \hat{S}(x,k)\ \ \forall x \in [a, x^*]$ y $S(x) = x$ $\forall x \in [x^*, b]$, pero inevitablemente $S = S(x)$ será discontinua en $x = x^*$ y, por lo tanto, no pertenece a ζ. En efecto, para garantizar que *S(x)* sea menor o igual a "*x*" sobre todo el intervalo [a, *b*] se requiere $\hat{S}(a,k) = a$ y, puesto que $\hat{S}'(x,k)$ es menor que uno, se sigue que $\hat{S}(x^*,k) < x^*$.

(2) En general, no está garantizado que $x^* = U_0'^{-1}\left\{V_1'(z_1)\dfrac{U_0'(w_0 + A)}{V_0'(z_0 - A)}\right\} - w_1$ pertenezca al intervalo (a, b), tampoco está garantizado que $U_1'(w_1 + a) - \lambda V_1'(z_1)$ sea mayor que cero. Por ello que tiene sentido considerar (3.15) y (3.16) como hipótesis del Lema 3.III y pueden ser pensadas como restricciones sobre los valores factibles que pueden tomar las riquezas no estocásticas de Codelco y su cliente en el primer y segundo período (w_0, w_1, z_0 y z_1) y/o como restricciones sobre las funciones de utilidad asociadas a Codelco y su cliente en el primer y segundo período (U_0, U_1, V_0, V_1). La ecuación (3.17) es una hipótesis adicional del Lema 3.III, que también puede ser pensada como una restricción en las riquezas no estocásticas de ambos agentes y/o las funciones de utilidad asociadas a ambos agentes y/o como una restricción sobre la función densidad de probabilidad $f = f(x)$ del precio.

(3) (Condición necesaria y suficiente para que $x^* \in (a, b)$)

$$x^* \in (a, b) \Leftrightarrow \frac{U_1'(b + w_1)}{V_1'(z_1)} < \frac{U_0'(w_0 + A)}{V_0'(z_0 - A)} < \frac{U_1'(a + w_1)}{V_1'(z_1)}$$

La demostración de esta proposición es inmediata.

(4) Note que $U_1'(w_1 + a) - \lambda V_1'(z_1) > 0$ **ssi** $\dfrac{U_1'(w_1 + a)}{V_1'(z_1)} > \dfrac{U_0'(w_0 + A)}{V_0'(z_0 - A)}$.

Por lo tanto, la hipótesis (3.16) en el Lema 3.III es redundante. Además si $x^* \in (a, b)$ inmediatamente sigue que existe un único anticipo $A > 0$ que satisface la ecuación (3.17). En efecto, el anticipo que satisface la ecuación (3.17) es el definido por la ecuación (3.23). En consecuencia, la única hipótesis relevante del Lema 3.III es que exista $x^* \in (a, b)$ tal que $U_1'(w_1 + x^*) - \lambda V_1'(z_1) = 0$.

Lema 3.III (Reformulado)

Si $$\frac{U_1'(b + w_1)}{V_1'(z_1)} < \frac{U_0'(w_0 + A)}{V_0'(z_0 - A)} < \frac{U_1'(a + w_1)}{V_1'(z_1)},$$

entonces:

(3.III.1) Existe un único $x^* \in (a, b)$ tal que $U_1'(w_1 + x^*) - \lambda V_1'(z_1) = 0$ y, por lo tanto,

$$x^* = U_1'^{-1}\left\{V_1'(z_1)\frac{U_0'(w_0 + A)}{V_0'(z_0 - A)}\right\} - w_1$$

(3.III.2) Existe un único anticipo *A* que satisface la ecuación (3.17) y está definido por (3.23) y,

(3.III.3) $\mu = 0, \lambda = \dfrac{U_0'(w_0 + A)}{V_0'(z_0 - A)} > 0$, *A* definido como en (3.23), $\beta = \beta(x)$ definida como en (3.21) y $S=S(x)$ definida como en (3.22) constituyen un conjunto único de soluciones del sistema de ecuaciones e inecuaciones (A), (S), (1), (2) y (3). Además, $\beta = \beta(x)$ y $S = S(x)$ son funciones continuas de la variable estocástica "x"

Observaciones

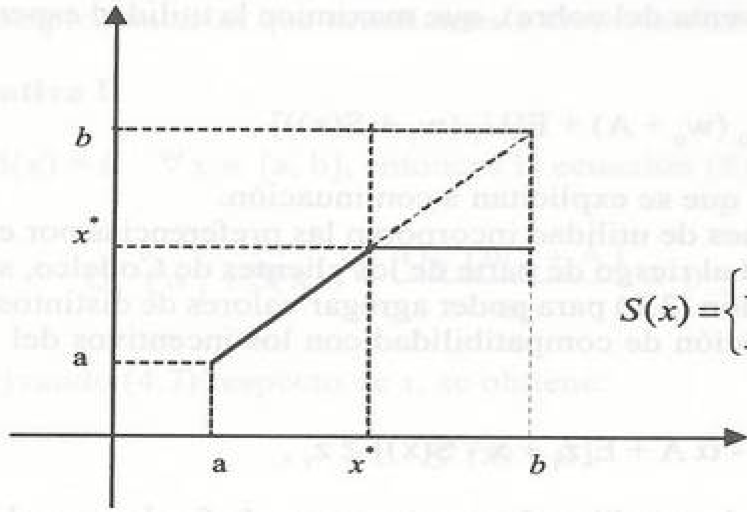
(1) Dadas las funciones de utilidad de ambos agentes para el primer y el segundo período, no es fácil verificar la hipótesis del Lema 3.III (Reformulado), porque implica el conocimiento del anticipo "*A*" y, por lo tanto, el conocimiento de la función de pago $S = S(x)$. En consecuencia, dada una situación particular, se debe desarrollar una argumentación o estrategia del tipo "boot-trap" para resolver el problema y encontrar el contrato de compraventa óptimo. En otras palabras, dadas las funciones de utilidad de ambos períodos asociadas a Codelco y su cliente (U_0, U_1, V_0, V_1), lo primero que debemos calcular es la función de pago $S = S(x)$ para posteriormente volver atrás y verificar si tal solución satisface la hipótesis del Lema 3.III reformulado.

(2) En el Apéndice 1 se desarrolla un par de ejemplos que ilustran el Lema 3.III reformulado, en el caso que las riquezas no estocásticas de Codelco y su cliente en el primer y segundo período (w_0, w_1, z_0, z_1) y/o las funciones de utilidad asociadas a Codelco y su cliente en el primer y segundo período (U_0, U_1, V_0, V_1) y/o la función de densidad de probabilidad $f = f(x)$ asociada a la variable estocástica *x* conjuntamente con los extremos del intervalo de definición de la misma {a, b}, satisfacen el sistema de inecuaciones:

$$\frac{U_1'(b + w_1)}{V_1'(z_1)} < \frac{U_0'(w_0 + A)}{V_0'(z_0 - A)} < \frac{U_1'(a + w_1)}{V_1'(z_1)} \tag{3.24}$$

(3) Los ejemplos desarrollados en el Apéndice 1 nos sugieren considerar un contrato del tipo descrito en el siguiente gráfico, por ser un arreglo o instrumento financiero ampliamente utilizado en los mercados desarrollados.

Ilustración:



$$S(x)=\begin{cases} x, & \text{si } x\in[a,x^*] \\ x^*, & \text{si } x\in[x^*,b] \end{cases}$$

En la sección siguiente se obtiene esta solución como un caso particular del modelo general estudiado en la presente sección, al considerar que los clientes de Codelco son neutrales al riesgo, o el mercado es lo suficientemente desarrollado que permite a los agentes intervenir y proteger sus posiciones de cobre.

(4) Por último, dados el anticipo *A* y la función de pago S = S(x), debe verificarse la desigualdad (2.3), a saber: $U_0(w_0 + A) + E[U_1(w_1 + S(x))] \geq \pi$, la cual garantiza la compatibilidad de la solución propuesta con la participación de Codelco.

4. Estrategia óptima de venta y protección; planteamiento del problema y solución (cliente neutral al riesgo, o el mercado dispone instrumentos de protección)

En esta sección se caracteriza al cliente o mercado que enfrenta Codelco como neutral al riesgo. Esta caracterización es razonable, porque existe un mercado de cobre spot y futuros muy profundo que permite a los agentes que tienen posiciones protegerlas, cosa que está vedada en aquellos productos que no cuentan con un mercado de futuros o forwards desarrollado. Si ese es el caso, el espacio de instrumentos factibles se expande y el arreglo óptimo va llevar a Codelco a alcanzar mayores niveles de utilidad al ser factible la emisión de nuevos instrumentos, además de los arreglos logrados en la sección anterior.

La solución o instrumento óptimo que debe emitir Codelco de acuerdo al nuevo modelo entrega evidencia de lo apropiada y sólida que es la simplificación incorporada, al obtenerse como solución al problema planteado un instrumento factible que se transa en el mercado y para el cual el desarrollo y estado actual de las finanzas tiene métodos analíticos para su valoración.

Por lo tanto, si el cliente de Codelco es neutral al riesgo o el mercado entrega los instrumentos para que los agentes evalúen los contratos como si fueran neutrales al riesgo, en la presente sección el problema consiste en escoger un contrato $C = (A, S(x)) \in \zeta$ (donde *A* es el monto del anticipo y *S(x)* es la función de pago o condición de venta del cobre), que maximice la utilidad esperada de Codelco:

$$U_0 (w_0 + A) + E[U_1 (w_1 + S(x))] , \tag{4.1}$$

sujeta a las restricciones que se explicitan a continuación.

Dado que las funciones de utilidad incorporan las preferencias por el tiempo, al asumir neutralidad al riesgo de parte de los clientes de Codelco, se tiene que modificar la restricción (3.2) para poder agregar valores de distintos períodos. En efecto, la restricción de compatibilidad con los incentivos del cliente toma la forma siguiente:

$$- \alpha A + E[z_1 + x - S(x)] \geq z_1 , \tag{4.2}$$

donde α denota una más la tasa libre de riesgo o costo de fondo para el cliente de Codelco. Además, factibilidad del pago por parte del cliente

$$S(x) \leq x \forall x \in [a, b] , \tag{4.3}$$

y anticipo mayor que cero para Codelco

$$A > 0 \tag{4.4}$$

Solución

Las condiciones de Kuhn-Tucker implican que existen $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ y $\beta(x)$ tal que:

(A) $U_0 ' (w_0 + A) + \mu = \alpha \lambda$

(S) $U_1 ' (w_1 + S(x)) = \lambda + \beta(x), \ \forall x \in [a, b].$

(1) $E[x - S(x) - \alpha A] \lambda = 0$

(2) $\beta (x) \{ x - S(x) \} = 0; \beta (x) \geq 0$ y $x - S(x) \geq 0 \ \forall x \in [a, b].$

(3) $\mu A = 0$, $\mu \geq 0$ y $A > 0.$

De (3) y (A) se sigue inmediatamente que $\mu = 0$ y

$$\lambda = \frac{U_0 '(w_0 + A)}{\alpha} > 0 \cdot \tag{4.5}$$

En consecuencia, para que se satisfaga la ecuación (1), se debe cumplir la ecuación:

$$E[x - S(x)- \alpha A] = 0 \tag{4.6}$$

Por otro lado la ecuación $\beta(x)\ \{\ x - S(x)\ \} = 0$ en (2) implica que $\beta(x) = 0$ o $S(x) = x$, lo cual, al igual que en la sección anterior da origen a las dos alternativas complementarias que estudiamos a continuación.

Alternativa I

Si $\beta(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$, entonces la ecuación (S) se reduce a:

$$(4.7) \qquad U_1'(w_1 + S(x)) - \frac{U_0'(w_0 + A)}{\alpha} = 0\ , \quad \forall x \in [a,b]$$

Derivando (4.7) respecto de *x*, se obtiene:

$$(4.8) \qquad S'(x) = 0\ ,$$

cuya solución general es $S = S(x, k) = k$ con k constante de integración arbitraria. Si $S(a, k) = a$, entonces $k = a$ y $S(x, k) \le x \ \ \forall x \in [a, b]$.

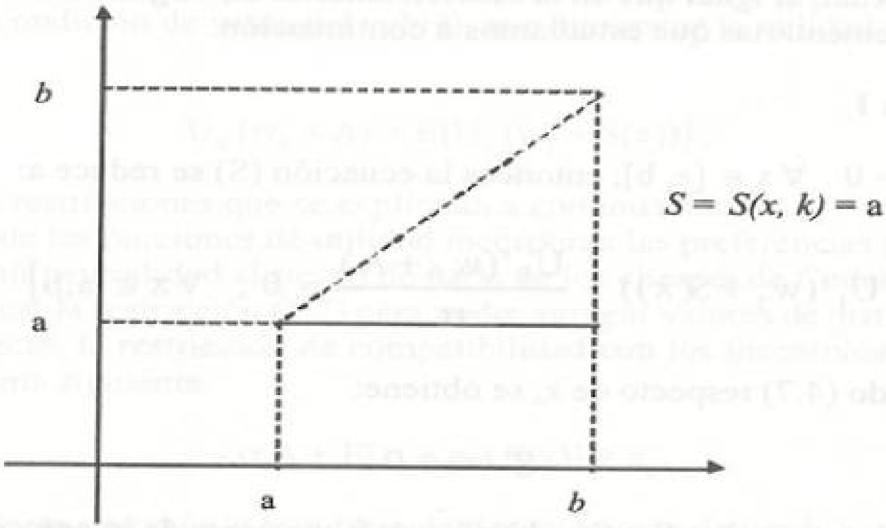
Por último reemplazando esta solución particular de la ecuación diferencial ordinaria (4.8) en la ecuación (4.6), obtenemos que el valor del anticipo es:

$$(4.9) \qquad A = \frac{1}{\alpha}\int_a^b (x-a)\ f(x)\,dx\ \ ,$$

de donde se sigue que el valor del anticipo es mayor que cero. A continuación resumimos este resultado en el siguiente Lema preparatorio.

Lema 4.I Si $\beta = \beta(x) = 0\ ,\ \forall x \in [a\ ,\ b]$. Entonces $S = S(x, k) = a$ es la única solución de la ecuación diferencial ordinaria de primer orden (4.8) tal que $S(x, k) \le x\ \forall\ x \in [a, b]$ que conjuntamente con $A = \frac{1}{\alpha}\int_a^b (x-a)\ f(x)\,dx$, $\mu = 0$ y $\lambda = \frac{U_0'(w_0 + A)}{\alpha}$ constituyen un conjunto único de soluciones del sistema de ecuaciones e inecuaciones (A), (S), (1), (2) y (3).

Ilustración



Observaciones

(1) Note que la solución obtenida en esta alternativa equivale a que Codelco reciba un anticipo $A = \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_a^b (x-a)\ f(x)\,dx$ en el primer período y un pago $S(x) = a$, independiente del valor del cobre que se realice en el mercado, en el segundo período. Evidentemente, esta solución es un caso especial y como se observará en el lema 4.III, corresponde a un caso particular de la solución general encontrada.

(2) Note que la condición inicial $S(a, k) = a$ es la que fija la constante $k = a$ y garantiza que $S(x, k)$ sea menor que x, para todo $x \in (a, b]$. En otras palabras, si en lugar de escoger la constante de integración arbitraria k de manera que $S(a, k) = a$, la escogemos de manera que $S(x^*, k) = x^*$ para algún $x^* \in (a, b)$, entonces la constante k evidentemente sería igual a x^* y la correspondiente función de pago sería $S(x, k) = x^*$. Pero esta función de pago satisface la desigualdad $S(x, k) \leq x$ tan sólo en el intervalo $[x^*, b]$. Esta observación, al igual que en la sección 3, juega un rol fundamental en la construcción de la solución definitiva que se presenta más adelante en esta sección.

Alternativa II

Si $S(x) = x \quad \forall x \in [a, b]$, entonces la ecuación (S) se reduce a:

$$U_1{}'\ (w_1 + x) = \lambda + \beta(x) \ \ \forall x \in [a, b] \tag{4.10}$$

con λ definida por la ecuación (4.5) y $\beta = \beta(x)$ debe ser mayor o igual a cero para todo x perteneciente al intervalo [a, b]. De (4.10) se sigue:

(4.11) $$\beta(x) = U_1'(w_1 + x) - \frac{U_0'(w_0 + A)}{\alpha},$$

entonces $\beta'(x) = U_1''(w_1 + x) < 0$, es decir $\beta = \beta(x)$ es una función decreciente sobre todo el intervalo [a,b]. En consecuencia para que $\beta = \beta(x)$ sea mayor o igual a cero $\forall x \in [a, b]$, se debe cumplir la siguiente desigualdad:

(4.12) $$\beta(b) = U_1'(w_1 + b) - \frac{U_0'(w_0 + A)}{\alpha} > 0$$

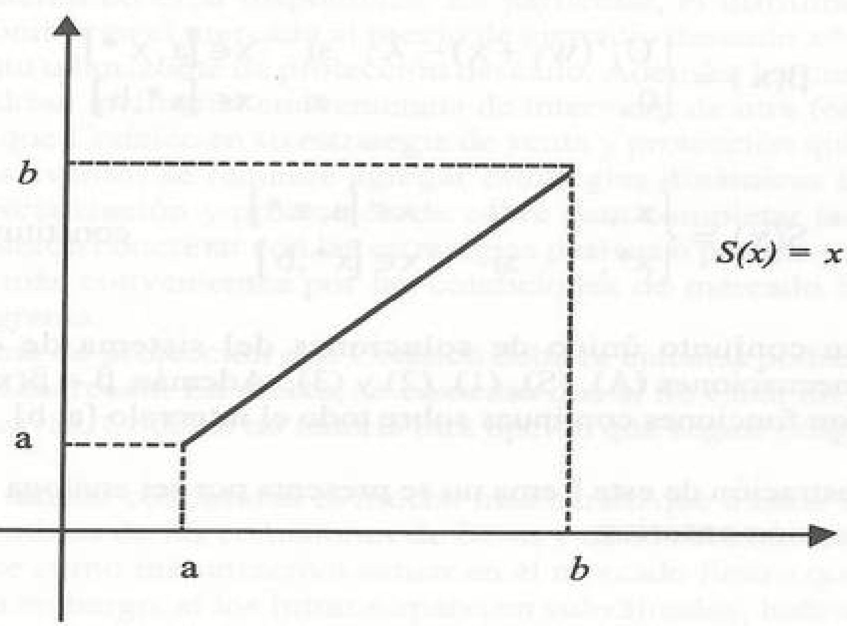
Si esta desigualdad se cumple, resta hacer cumplir la ecuación (4.6) para tener completamente resuelto el sistema de ecuaciones e inecuaciones (A), (S), (1), (2) y (3) en el contexto de la presente alternativa. En este caso la ecuación (4.6) se reduce a:

(4.13) $$A = 0$$

A continuación resumimos este resultado en el siguiente lema preparatorio:

Lema 4.II Si $\beta(b) = U_1'(w_1 + b) - \lambda$ es mayor o igual a cero (donde el escalar λ está definido por la ecuación (4.5)). Entonces $\beta(x) = U_1'(w_1 + x) - \lambda$ es mayor o igual a cero para todo $x \in [a, b]$ y conjuntamente con la función de precio $S = S(x) = x$, el anticipo $A = 0$, y los escalares $\mu = 0$ y $\lambda = \dfrac{U_0'(w_1 + A)}{\alpha}$ constituyen un conjunto único de soluciones del sistema de ecuaciones e inecuaciones (A), (S), (1), (2) y (3) excepto por la desigualdad $A > 0$.

Ilustración:



Observaciones

(1) Los resultados obtenidos en el contexto de la segunda alternativa no representan una solución satisfactoria al problema planteado inicialmente, porque la solución propuesta en el lema (4.II): $S(x) = x \quad \forall x \in (a, b)$ y $A = 0$, es equivalente a que no hubiera contrato.

(2) Siguiendo de manera análoga los desarrollos de la sección (3), se pueden combinar apropiadamente las soluciones obtenidas en la Alternativa I con las soluciones obtenidas en la Alternativa II de la presente sección, para dar origen a una solución definitiva al problema planteado al comienzo de la presente sección, todo lo cual se resume en el siguiente Lema:

Lema 4.III Si $\alpha U_1'(b + w_1) < U_0'(w_0 + A) < \alpha U_1'(a + w_1)$, entonces:

(4.III.1) Existe un único $x^* \in (a, b)$ tal que $U_1'(w_1 + x^*) - \lambda = 0$ y, por lo tanto,

$$x^* = U_1'^{-1}\left\{\frac{U_0'(w_0 + A)}{\alpha}\right\} - w_1.$$

(4.III.2) Existe un único anticipo $A > 0$ que satisface la ecuación (4.5) y es igual a

$$\frac{1}{\alpha}\int_{x^*}^{b}(x - x^*)\,f(x)\,dx, \text{ y}$$

(4.III.3.) $$\mu = 0,\ \lambda = \frac{U_0'(w_0 + A)}{\alpha} > 0,\ A = \frac{1}{\alpha}\int_{x^*}^{b}(x - x^*)\,f(x)\,dx,$$

$$\beta(x) = \begin{cases} U_1'(w_1 + x) - \lambda, & \text{si} \quad x \in [a, x^*] \\ 0, & \text{si} \quad x \in [x^*, b] \end{cases}, \quad \text{y}$$

$$S(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad x \in [a, x^*] \\ x^*, & \text{si} \quad x \in [x^*, b] \end{cases}, \quad \text{constituyen}$$

un conjunto único de soluciones del sistema de ecuaciones e inecuaciones (A), (S), (1), (2) y (3). Además, $\beta = \beta(x)$ y $S = S(x)$ son funciones continuas sobre todo el intervalo [a, b].

La demostración de este Lema no se presenta por ser análoga a la del Lema 3.III de la sección anterior.

Interpretación financiera y aplicaciones del Lema 4.III.

La solución al problema planteado debe interpretarse de la siguiente forma: Codelco debe escribir un contrato en el primer período en el cual recibe el anticipo *A* y en el segundo período se ejecuta la parte del acuerdo que consiste en despachar el cobre y recibir *S(x)*, donde S(x) es igual a x cuando $x \leq x^*$ y toma el valor x^* cuando $x \geq x^*$. El cliente obviamente debe anticipar *A* en el primer período y recibe *x* y paga *S(x)* en el segundo período.

Alternativamente, Codelco podría escribir una opción call europea $C_0(x; x^*, (1 - 0))$, para lo cual recauda la prima *A* y, en el segundo período, si la opción no se ejerce, esto es, si $x \leq x^*$, Codelco vende su existencia en el mercado spot recibiendo *x*. Si la opción se ejerce, despacha el cobre y recibe x^*.

En efecto, si Codelco escribe opciones call $C_0(x; x^*; (1 - 0))$, su posición junto a su producción al vencimiento de la opción corresponde a, $x - \max(x - x^*; 0)$. En consecuencia, si la realización de *x* es inferior a x^*, $x - \max(x - x^*; 0) = x$; y si la realización de *x* es superior a x^*, $x - \max(x - x^*, 0) = x^*$. El flujo contingente anterior es exactamente igual al flujo resultante del contrato derivado en lema 4.III.

Las estrategias de comercialización y protección mencionadas son pasivas porque el administrador se enfrenta a la decisión de intervenir en los mercados sólo al inicio y al vencimiento u horizonte de protección donde debe hacerse cargo del ajuste que ordena la estrategia y, por lo tanto, no se revisan las posiciones en el intertanto. Cuando se trata de estrategias pasivas las decisiones tomadas al inicio y término de protección son entonces definitivas.

Codelco maneja el 15 por ciento de la producción mundial y pudiera no satisfacer sus necesidades de comercialización y protección por no existir la demanda suficiente por el contrato o instrumento que debe escribir u ofrecer. Además, el número de contratos u opciones call que Codelco deba escribir podría no encontrar demandantes ya sea porque no hay liquidez en el mercado para aceptar las cantidades que Codelco requiere o porque las opciones call europeas pudieran no estar disponibles. En particular, el instrumento pudiera no estar disponible en el mercado al precio de ejercicio deseado x^* o al período de vencimiento u horizonte de protección deseado. Además, las condiciones de mercados podrían inclinar la conveniencia de intervenir de otra forma o existir ineficiencias que Codelco en su estrategia de venta y protección quisiera explotar. Para estos eventos se requiere agregar estrategias dinámicas a los programas de comercialización y protección de cobre para completar las posiciones que no se pudieron concretar con las estrategias pasivas o porque sencillamente pudieran ser más convenientes por las condiciones de mercado imperante al iniciar el programa.

El programa de protección que Codelco debiera ejecutar pudiera ser determinado por el mercado. En efecto, se comentó que si no están disponibles las estrategias pasivas, Codelco no tendría otra opción que seguir programas dinámicos.

Dado que transar con futuros es mucho más barato que transar en el mercado spot en términos de las comisiones de bolsa y de los broker (corredoras de bolsa), aparece como más atractivo actuar en el mercado futuro que en el mercado spot. Sin embargo, si los futuros aparecen subvaluados, habría incentivos a intervenir en el mercado spot o con estrategias pasivas.

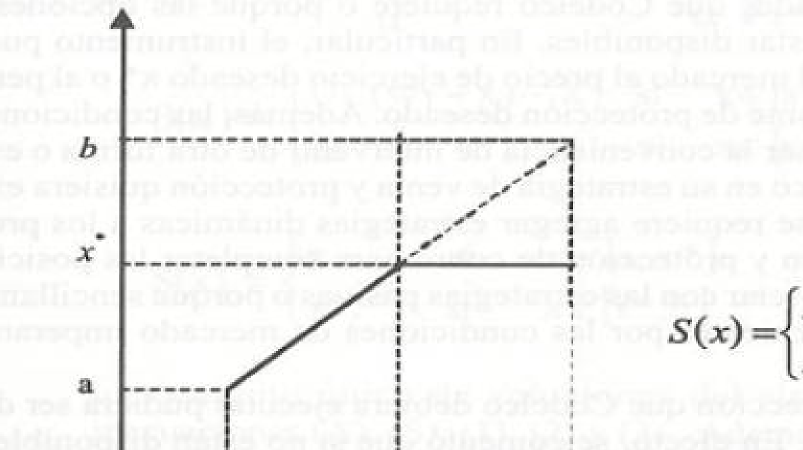
La volatilidad del precio del cobre es una variable determinante en el precio de las opciones. Si la volatilidad del precio aparece inusualmente baja, el administrador no querría escribir opciones call y atarse a esa volatilidad en un programa pasivo. A su vez, si la volatilidad es inusualmente alta, al administrador le gustaría capturar el beneficio de dicha volatilidad y favorecería estrategias pasivas.

Todas las consideraciones anteriores deberán ser tomadas en cuenta por el administrador al momento de elegir un determinado programa. Además, el desafío del administrador para llevar a cabo cualquiera de los programas dinámicos no es trivial. Cuándo hacer los ajustes en las posiciones, ya sea de cobre corto o futuros corto, qué criterios usar para iniciar el ajuste en las posiciones, y por qué monto se ajusta, son problemas que se deben tener resueltos al iniciar un determinado programa, toda vez que existen costos de transacción en la compra y venta de cobre.

En presencia de costos de transacción, los programas dinámicos descritos que sugieren transar continuamente podrían llegar a ser infinitamente caros. Por lo tanto, se deben llevar a cabo replicaciones imperfectas del instrumento óptimo encontrado, y se está aceptando en cierta medida el trade-off entre los costos de transacción y perfección de la replicación. Hay varios criterios para enfrentar el problema de la frecuencia de ajuste de las posiciones y a nivel empírico está debidamente documentado.[3]

En resumen, a Codelco se le abren múltiples posibilidades para llevar a cabo su estrategia óptima de comercialización y protección. Codelco está en posición de utilizar distintos programas dinámicos y/o utilizar la estrategia pasiva al contratar con su cliente el arreglo dado por el lema 4.III y/o escribir opciones call europeas sobre su futura producción de cobre.

Ilustración:



$$S(x)=\begin{cases} x, & \text{si } x\in[a,x^*] \\ x^* & \text{si } x\in[x^*,b] \end{cases}$$

---

[3] Se le sugiere al lector revisar Batarce [6] donde se discuten los distintos programas dinámicos y la conveniencia de cada uno de ellos.

Observaciones

1) Al igual que en la sección (3), es conveniente notar en la presente sección que la hipótesis del Lema 4.III no es verificable a priori. En efecto, primero se debe hallar el valor de x^* de la ecuación:

$$(4.14) \qquad U_1'(w_1 + x^*) - \frac{U_0'(w_0 + A)}{\alpha} = 0 \, ,$$

la cual se reduce a:

$$(4.15) \qquad U_1'(w_1 + x^*) - \frac{1}{\alpha} U_0' \left(w_0 + \frac{1}{\alpha} \int_{x^*}^{b} (x - x^*) f(x) \, dx \right) = 0$$

Por lo tanto, si conocemos las funciones de utilidad asociada a Codelco durante el primer y segundo período y la función distribución de probabilidad de la variable estocástica *x*, entonces podemos calcular x^* de la ecuación (4.15). Una vez calculado x^* podemos tratar de verificar si $x^* \in (a, b)$ o lo que es lo mismo, si "*A*" satisface el sistema de desigualdades que aparece en la hipótesis del Lema 4.III.

2) En el apéndice 2 se presentan cuatro ejemplos que ilustran la ecuación (4.15). Como debe ser obvio, con la obtención de x^*, el contrato queda completamente descrito.

3) Note que si x^* es igual a "a", la solución general se reduce a la solución obtenida en la alternativa I.

4) Por último, descrito el contrato, debe procederse a verificar la desigualdad (2.3), a saber: $U_0(w_0+A)+E(w_1+S(x))] \geq \pi$, la cual garantiza la compatibilidad de la solución con la participación de Codelco.

5. Conclusión

Se caracterizó al cliente o mercado que enfrenta Codelco como neutral al riesgo. Esta caracterización es razonable, porque existe un mercado de cobre spot y futuros muy profundo, el cual permite a los agentes proteger sus posiciones, cosa que está vedada para aquellos productos que no cuentan con un mercado de futuros o forwards desarrollados. La caracterización del cliente como neutral al riesgo, queda plenamente justificada, además, porque al caracterizarlo de esta forma, se maximiza el área de contratos admisibles relativa a la que se obtiene al caracterizar al cliente como averso al riesgo. Lo anterior, agregado al hecho de que la solución que se obtiene es un contrato o un instrumento factible que se observa y se negocia con relativa liquidez en el mercado, entrega la evidencia plena de que la caracterización es más que razonable. Además, el desarrollo y estado actual de las finanzas nos entrega un método analítico para valorar este tipo de instrumentos. Todo lo cual viene a demostrar lo apropiado, válido y sólido que es la caracterización y la modelación al problema propuesto.

El modelo descrito reafirma la esencia de un óptimo compartimiento del riesgo. La estrategia óptima de comercialización y protección de Codelco será una que especifique una participación de todos los agentes que intervienen en el riesgo del precio del cobre y, en particular, indica que Codelco debe escribir un contrato en el primer período en el cual recibe el anticipo A y en el segundo período se ejecuta la parte del acuerdo que consiste en despachar el cobre y recibir $S(x)$, donde $S(x)$ es igual a x cuando $x \leq x^*$ y toma el valor x^* cuando $x \geq x^*$. El cliente obviamente debe anticipar A en el primer período y recibe x y paga $S(x)$ en el segundo período. Alternativamente, Codelco podría escribir opciones call europeas sobre su futura producción de cobre. Si Codelco interviene en el mercado de futuros, lo debe hacer para replicar sintéticamente la posición corta en opciones call europeas sobre cobre.

El administrador tiene un desafío no trivial de determinar qué programa lleva a cabo o si combina algunos para completar sus demandas de venta y protección.

Un programa dinámico que consiste en replicar sintéticamente la opción call corta, implica la intervención en mercados futuros y la solicitud de créditos. Codelco toma, sin duda, ambas posiciones. En efecto, Codelco recurrió al mercado internacional y recibió un crédito sindicado por 500 millones de dólares. Aunque es de conocimiento público y no hay información oficial, también se sabe que Codelco interviene en el mercado de futuros de cobre con ventas cortas. Evaluar la eficiencia de las decisiones de Codelco es entonces una materia empírica que consiste (una vez sabido el horizonte de protección que la administración determinó y las cifras y posiciones en futuros) en verificar en qué medida los contratos cortos en el mercado futuro mantenidos por Codelco se ajustan al número determinado por un programa dinámico de replicación de una opción call corta.

Apéndice 1

Ejemplo 1: Si las aversiones absolutas al riesgo de Codelco y su cliente son constantes, es decir, las funciones de utilidad asociadas a Codelco y su cliente en el primer y segundo período son:

$$U_i = U_i(\zeta) = -m_i e^{-n_i \zeta} + u_i \ , \quad m_i \, , \, n_i \ \text{y} \ u_i \quad ; \quad i = 0,1$$

constantes positivas

$$V_i = V_i(\zeta) = -p_i e^{-q_i \zeta} + v_i \ , \quad p_i \, , \, q_i \ \text{y} \ v_i \quad ; \quad i = 0,1$$

constantes positivas

respectivamente. Entonces de la ecuación diferencial ordinaria (3.8) se obtiene que $\hat{S} = \hat{S}(x) = \gamma x + k$, donde k es una constante de integración arbitraria y $\gamma = \dfrac{q_1}{n_1 + q_1} \in (0, 1)$. Por lo tanto, la solución es:

$$S(x) = \begin{cases} x & , \quad \text{si} \quad x \in [a, x^*] \\ \gamma x + k & , \quad \text{si} \quad x \in [x^*, b] \end{cases},$$

y la continuidad de S = S(x) en x = x* implica k = (1 - γ) x* > 0. Además,

$$\beta(x) = \begin{cases} U_1{}'(w_1 + x) - \lambda V_1{}'(z_1) & , \quad \text{si} \quad x \in [a, x^*] \\ 0 & , \quad \text{si} \quad x \in [x^*, b] \end{cases}$$

con $\lambda = \dfrac{U_0{}'(w_0 + A)}{V_0{}'(z_0 - A)}$ y *A* definido por la ecuación (3.23)

Ejemplo 2: Si las funciones de utilidad asociadas a Codelco y su cliente en el primer y segundo período son:

$$U_i = U_i(\zeta) = m_i \sqrt{\zeta} + u_i \ , \quad m_i \ \text{y} \ u_i \quad ; \quad i = 0,1$$

constantes positivas,

$$V_i = V_i(\zeta) = p_i \sqrt{\zeta} + v_i \ , \quad p_i \ \text{y} \ v_i \quad ; \quad i = 0,1$$

constantes positivas,

respectivamente. Entonces de la ecuación diferencial ordinaria (3.8) se obtiene que $\hat{S} = \hat{S}(x) = kx + ((k-1)w_1 + kz_1)$, donde k es una constante de integración arbitraria. Por lo tanto la solución es:

$$S(x)=\begin{cases} x & , \quad \text{si} \quad x\in[a,x^*] \\ kx+((k-1)w_1+kz_1) & , \quad \text{si} \quad x\in[x^*,b] \end{cases},$$

y la continuidad de $S = S(x)$ en $x = x^*$ implica $k=\dfrac{x^*+w_1}{x^*+w_1+z_1}$ y, en consecuencia $k \in (0, 1)$.

$$\beta(x)=\begin{cases} U_1'(w_1+x)-\lambda V_1'(z_1) & , \quad \text{si} \quad x\in[a,x^*] \\ 0 & , \quad \text{si} \quad x\in[x^*,b] \end{cases}$$

con $\lambda=\dfrac{U_0'(w_0+A)}{V_0'(z_0-A)}$ y A definido por la ecuación (3.23).

Observaciones

(1) Note que la constante de integración arbitraria proveniente del proceso de integración de la ecuación diferencial ordinaria (3.8) queda determinada por la condición de continuidad que debe cumplir $S = S(x)$ en $x = x^*$.

(2) Dadas las funciones de utilidad asociadas a los agentes en el primer y segundo período y calculada la función de pago $S = S(x)$, el valor del anticipo "A" se obtiene de (3.23), es decir:

$$A=z_0-V_0^{-1}\left\{V_0(z_0)+V_1(z_1)-\int_a^b V_1(z_1+x-S(x))f(x)\,dx\right\}$$

que es equivalente a:

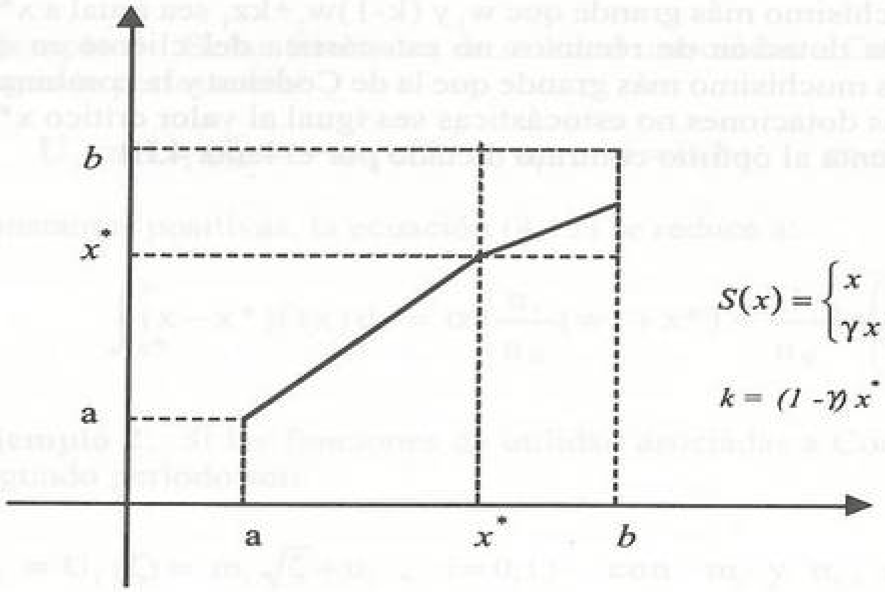
$$A=z_0-V_0^{-1}\left\{V_0(z_0)+V_1(z_1)\left[1-\int_a^{x^*} f(x)\,dx\right]-\int_{x^*}^b V_1(z_1+x-\hat{S}(k,x))f(x)\,dx\right\}.$$

reemplazando $\hat{S} = \hat{S}(k, x)$ en esta ecuación y a continuación reemplazando A en (3.24) se procede a verificar bajo qué condiciones en w_0, w_1, z_0, z_1 se cumplen tales desigualdades con a, b y $f = f(x)$ conocidos.

(3) Note que las funciones de pago $S = S(x)$ obtenidas en los ejemplos (1) y (2) precedentes son lineales por tramo, con pendiente igual a uno en el intervalo $[a, x^*]$ y pendientes $\gamma=\dfrac{q_1}{n_1+q_1}\in(0,1)$ y $k=\dfrac{x^*+w_1}{x^*+w_1+z_1}\in(0,1)$

en el intervalo $[x^*, b]$, respectivamente.

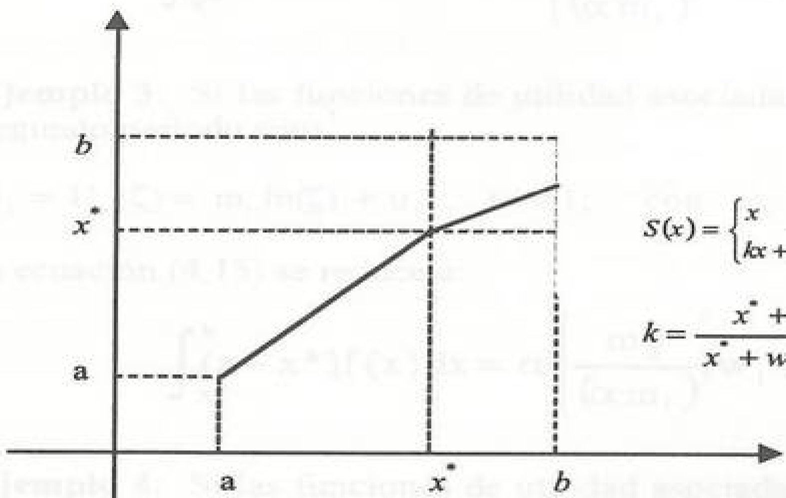
Ilustración: Ejemplo (1)



$$S(x)=\begin{cases} x & \text{, si } x\in[a,x^*] \\ \gamma x+k & \text{, si } x\in[x^*,b] \end{cases}$$

$$k=(1-\gamma)x^*$$

Ilustración: Ejemplo (2)



$$S(x)=\begin{cases} x & \text{, si } x\in[a,x^*] \\ kx+((k-1)w_1+kz_1) & \text{, si } x\in[x^*,b] \end{cases}$$

$$k=\frac{x^*+w_1}{x^*+w_1+z_1}$$

(4) Por lo tanto, en el intervalo [x*, b] ambas soluciones pueden ser más o menos horizontales dependiendo del valor de γ y k respectivamente. En el ejemplo (1), la pendiente "γ" depende de las aversiones absolutas al riesgo (n_1 y q_1), mientras que en el ejemplo (2), la pendiente k depende de las riquezas no estocásticas de los agentes en el segundo período (w_1 y z_1) y también de x*. Por lo tanto, en el contexto del ejemplo (1), el caso límite $\hat{S} = x^*$ se obtiene cuando γ es cero, es decir, cuando q_1 tiende a cero o cuando n_1 tiende al infinito. Es decir, se logra el equivalente al lema 4.III

cuando Codelco es infinitamente más averso al riesgo que su cliente. En el contexto del ejemplo (2), nos aproximamos al caso límite $\hat{S} = x^*$ en la medida que z_1 sea muchísimo más grande que w_1 y $(k-1)w_1+kz_1$ sea igual a x^*. Es decir, cuando la dotación de recursos no estocástica del cliente en el segundo período es muchísimo más grande que la de Codelco y la combinación convexa de las dotaciones no estocásticas sea igual al valor crítico x^*, se logra el equivalente al óptimo contrato dictado por el lema 4.III.

Apéndice 2

Ejemplo 1: Si las funciones de utilidad asociadas a Codelco en el primer y segundo período son:

$$U_i = U_i(\zeta) = -m_i e^{-n_i \zeta} + u_i \;, \quad i = 0{,}1 \;; \quad \text{con } m_i \,,\, n_i \text{ y } u_i$$

constantes positivas, la ecuación (4.15) se reduce a:

$$\int_{x^*}^{b} (x - x^*) f(x)\, dx = \alpha \left\{ \frac{n_1}{n_0}(w_1 + x^*) + \frac{1}{n_0} \ln\left(\frac{n_0\, m_0}{\alpha\, n_1\, m_1} \right) - w_0 \right\} ,$$

Ejemplo 2: Si las funciones de utilidad asociadas a Codelco en el primer y segundo período son:

$$U_i = U_i(\zeta) = m_i \sqrt{\zeta} + u_i \;, \quad i = 0{,}1; \quad \text{con } m_i \text{ y } u_i \text{, constantes positivas}$$

la ecuación (4.15) se reduce a:

$$\int_{x^*}^{b} (x - x^*) f(x)\, dx = \alpha \left\{ \frac{m_0^2}{(\alpha\, m_1)^2}(w_1 + x^*) - w_0 \right\} ,$$

Ejemplo 3: Si las funciones de utilidad asociadas a Codelco en el primer y segundo período son:

$$U_i = U_i(\zeta) = m_i \ln(\zeta) + u_i \;, \quad i = 0{,}1; \quad \text{con } m_i \text{ y } u_i \text{, constantes positivas}$$

la ecuación (4.15) se reduce a:

$$\int_{x^*}^{b} (x - x^*) f(x)\, dx = \alpha \left\{ \frac{m_0}{(\alpha\, m_1)}(w_1 + x^*) - w_0 \right\} ,$$

Ejemplo 4: Si las funciones de utilidad asociadas a Codelco en el primer y segundo período son:

$$U_0 = U_0(\zeta) = m_0 \sqrt{\zeta} + u_0 \;, \quad \text{con } m_0 \text{ y } u_0 \text{, constantes positivas, y}$$

$$U_i = U_i(\zeta) = m_i \ln(\zeta) + u_i \;, \quad \text{con } m_i \text{ y } u_i \text{, constantes positivas}$$

respectivamente, la ecuación (4.15) se reduce a:

$$\int_{x^*}^{b} (x - x^*) f(x)\, dx = \alpha \left\{ \frac{m_0^2}{4(\alpha\, m_1)^2}(w_1 + x^*)^2 - w_0 \right\}$$

Referencias

Arrow, K. J. (1971). *Essays in the Theory of Risk Bearing*. Markham, Chicago III.

Arrow, K. J. (1974). "Limited Information and Economics Analysis", *The American Economic Review*, 64: pp 1-10.

Arvan, L. y J. K. Brueckner. (1986). "Efficient Contracts in Credit Markets Subject to Interest Rate Risk: An Application of Raviv's Insurance Model", *The American Economic Review*, pp. 259-263, marzo.

Batarce, J. A. (1991). "Diseño del Contrato Optimo de Créditos y sus Contingencias Implícitas en el caso de Países en Desarrollo", *Revista de Análisis Económico*, 6: 171-191, noviembre.

Batarce, J. A. (1991). "Evidencia Empírica de un Contrato Implícito en los Créditos Internacionales", *Estudios de Economía*, 18, N° 2, diciembre.

Batarce, J. A. (1993). *Protección de Carteras de Acciones*, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas, Departamento de Administración, pp. 92-99.

Batarce, J. A. (1992). "The Long Contract in International Lending and the Standard Domestic Loan Agreement", *Academia, Revista Académica de Estudios en Administración*, pp. 31-49.

Black, F. y M. Scholes. (1979). "The Pricing of Options and Corporate Liabilites", *Journal of Political Economy*, 81, pp 637-654.

Borch, K. (1962). "Equilibrium in Reinsurance Market", *Econometrica*, (3).

Courant, R. y D. Hilbert. (1966). *Method of Mathematical Physics*, Editorial John Wiley.

Krasnov, M. L., Kiseliov, A. I. y G. I. Makarenko. (1971). *Ecuaciones Integrales*, Editorial Mir.

Leland, E. Hayne (1978). "Optimal Risk Sharing and the Leasing of Natural Resources, with Application to Oil and Gas Leasing on the OCS", *The Quarterly Journal of Economica* (3), agosto.

Merton, R. (1973). "Theory of Rational Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, pp. 141-183.

Merton, R. (1982). "On the Mathematics and Economics Assumptions of Continuous Time Models", en W.P. Sharpe y C.M. Cootner, eds., Financial Economics: Essays in Honour of Paul Cootner. Englewood Cliffs N.J., Prentice Hall.

Morse, P. M. y H. Freshbach. (1953). *Method of Theoretical Physics*, Editorial McGraw-Hill.

Petrowvki, I. (1971). *Lecciones de Teoría de las Ecuaciones Integrales*, Editorial Mir.

Polinsky, A. M. (1989). *An Introduction to Law and Economics*. Boston: Little, Brown and Company.

Posner, R. y A. Rosenfield. (1988). "Impossibility and Related Doctrines in Contract Law: an Economic Analysis", *Journal of Legal Studies* 6, Enero.

Pratt, J. (1964). "Risk Aversion in the Small and in the Large", *Econometrica*, 32.

Raviv, A. (1979). "The Design of an Optimal Insurance Policy". *The American Economic Review*, 69, pp 84-96, marzo.

Rogerson, W. (1985). "The first Order Approach to the Principal-Agent Problem", *Econometrica*, 53.

Rothschild, M. y J. E. Stiglitz. (1970). "Incrising Risk: I, A Definition", *Journal of Economic Theory*, 2.

Townsend, R.(1979). "Optimal Contracts and Competitive Markets with Costly State Verification", *Journal of Economics Theory*, 21, pp. 265-293.

Wilson, Ch. y J. A. Batarce. (1990). "DC Debt as an Implicit Contract", CVSTARR NEWSLETTER, New York University, 8.

Wilson, R. B., (1968). "The Theory of Syndicates", *Econometrica*, 36.