TAMAÑO OPTIMO DE UN PROYECTO EN PRESENCIA DE BIENES DE CAPITAL DIFERENTES Y BAJO RESTRICCION PRESUPUESTARIA

Francisco J. Labbé*

EXTRACTO

En un análisis de multiperíodos, el trabajo desarrolla y generaliza el problema planteado por Fama y Miller en su libro "The Theory of Finance". Los autores concluyen que, en la selección del tamano de los proyectos de inversión con racionamiento de capital, deben igualarse las tasas marginales internas de retorno. El trabajo concluye que la regla de Fama y Miller es correcta cuando no existe racionamiento de capital. En presencia de racionamiento de capital, la regla es válida solo en el caso de dos períodos. En el caso general de multiperíodos, el trabajo concluye que la solución consiste en igualar la razón valor presente neto sobre inversion para todos los proyectos.

ABSTRACT

The paper develops and generalizes for more than two periods the problem discussed by Fama and Miller in their book The Theory of Finance. These two authors conclude that in selecting the size of the investment projects the rule of equalizing the marginal internal rates of return must be followed. The paper concludes that the Fama Miller rule is correct for the case when there is not budget constraint. In the case of more than one kind of capital good and budget constraint the Fama Miller rule is valid only in the two periods case. For more than two periods the paper concludes that the solution is to equalize, for all projects, the ratio formed by the net present value divided and the amount invested.

* Profesor e investigador del Departamento de Economía.

TAMAÑO OPTIMO DE UN PROYECTO EN PRESENCIA DE BIENES DE CAPITAL DIFERENTES Y BAJO RESTRICCION PRESUPUESTARIA

Francisco J. Labbé O.

El trabajo desarrolla matemáticamente y generaliza para varios períodos el problema planteado por Fama y Miller en su libro "The Theory of Finance".[1]

En un análisis de multiperíodos, y usando multiplicadores de Lagrange, se obtienen las condiciones de marginalidad que optimizan la inversión. Para el caso de un solo tipo de bien de capital y para el caso de varios tipos de bienes de capital, pero sin restricción presupuestaria, el trabajo confirma lo señalado por los autores indicados: sin embargo, para el caso de restricción presupuestaria, demuestra que la conclusión de Fama y Miller de igualar tasas marginales internas de retorno es válida solo en el caso de dos períodos, no pudiendo generalizarse para el caso de multiperíodos. El trabajo concluye finalmente que, en esta última situación, debe igualarse el indicador valor actual neto sobre inversión para cada tipo de bien de capital.

Esta última conclusión invalida asimismo el planteamiento de Loris y Savage[2] de que la selección de proyectos en presencia de racionamiento de capital debe efectuarse de acuerdo a la tasa interna de retorno, descontándose los proyectos de tasas mayores a la tasa del proyecto marginal.

En la primera parte se presenta un modelo simplificado que considera un solo tipo de bien de capital y para un horizonte de multiperíodos. En la segunda parte se generaliza el modelo para dos o más bienes de capital diferentes. En la tercera parte se introduce una restricción, en términos de limitar el presupuesto de inversión que dispone la unidad productiva, con las conclusiones ya indicadas.

[1] "The Theory of Finance", Dryden Press 1972.
[2] "Three Problems in Capital Rationing", *Journal of Bussiness*.

1. EL MODELO

Para construir el modelo que permitiría calcular el tamaño óptimo de la inversión en términos del número de bienes de capital a adquirir, se harán los siguientes supuestos:

i. La firma produce un bien homogéneo que vende a un precio dado.

ii. El bien es producido con unidades homogéneas de capital y trabajo, cuyos servicios pueden ser adquiridos a precios dados

iii. La tecnología de producción está representada por la función

$$q = q(K, L)$$

en donde

q : número de bienes producidos por unidad de tiempo.
K : número de bienes de capital usados en la producción.
L : número de trabajadores empleados.

La tecnología supone retornos constantes a escala y rendimientos decrecientes al factor.

iv. Se consideran n períodos en los cuales, tanto la producción como las cantidades de factores empleados son constantes.

v. Las ventas y el pago al trabajo se realizan al fin de cada período. La adquisición y pago de los bienes de capital se realizan en el período inmediato anterior al de producción y ventas.
Los bienes de capital se venden en el período **n**.

El problema se reduce a maximizar la función valor presente:

$$VP = -\pi K + \sum_{i=1}^{n} \frac{Pq - WL}{(1+r)^i} + \frac{\pi^n K}{(1+r)^n}$$

Sujeto a la restricción $q = q(K, L)$

en donde

π : precio de compra de cada bien de capital.
π^n : Valor residual de cada bien de capital en el período **n**.
P : Precio del bien
W : Precio de la unidad de trabajo.
r : Tasa de descuento pertinente.
i : Número de períodos de producción y ventas.

Para la maximización, se construye la siguiente función de Lagrange:

$$Z = \pi K + \sum_{i=1}^{n} \frac{P\,q - W\,L}{(1+r)^i} + \frac{\pi^n K}{(1+r)^n} + \lambda\,(q(K,L) - q)$$

En donde las variables son **K, L y q** considerándose dados los precios del bien, de los factores y la tasa de descuento (igual para todos los períodos).

Derivando parcialmente con respecto a las tres variables e igualando a 0 se obtienen las ecuaciones (1), (2) y (3).

$$\frac{\partial Z}{\partial K} = \pi + \frac{\pi^n}{(1+r)^n} + \lambda \frac{\partial q}{\partial K} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial L} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{W}{(1+r)^i} + \lambda \frac{\partial q}{\partial L} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P}{(1+r)^i} - \lambda = 0 \qquad (3)$$

reemplazando la ecuación (3) en la ecuación (1),y reordenando términos:

$$\pi + \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial q}{\partial K}\,P}{(1+r)^i} + \frac{\pi^n}{(1+r)^n} = 0 \qquad (4)$$

La parte de la ecuación (4) a la izquierda del signo igual representa el valor presente de invertir en un bien de capital extra. Mientras esta expresion tenga un valor positivo, convendrá continuar invirtiendo. La tasa interna de retorno de adquirir una unidad extra de inversión (un bien de capital más) se conoce con la denominación de la tasa marginal interna de retorno. Esta tasa irá decreciendo a medida que aumente el número de bienes de capital. El tamaño óptimo, en término del número de bienes de capital, se obtiene cuando la ecuación (4) tienda a 0.

En el límite, la tasa de descuento es por definición la tasa marginal interna de retorno. En otras palabras, la ecuación (4) nos indica que el tamano óptimo de inversión se encuentra donde la tasa marginal interna de retorno iguala a la tasa de descuento.

Siendo ρ^M la tasa marginal interna de retorno.

El número de bienes de capital óptimo se encuentra, cuando

$$\rho^M = r \tag{5}$$

Esto corresponde, a su vez, al máximo valor presente de la firma.

Reemplazando la ecuación (3) en la ecuación (5), y reordenando, se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial q}{\partial L} P}{(1+r)^i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{W}{(1+r)^i} = 0 \tag{6}$$

La parte de la ecuación (6) a la izquierda del signo igual representa el valor presente de contratar una unidad de trabajo extra.

Dado que en el óptimo **K** y **L** son constantes en el tiempo, $\frac{\partial q}{\partial L}$ también lo será, y la ecuación queda:

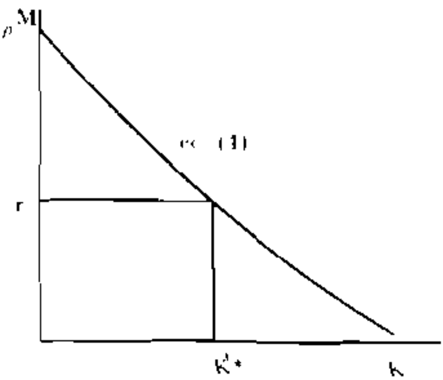
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^i} \left(\frac{\partial q}{\partial L} P - W \right) = 0$$

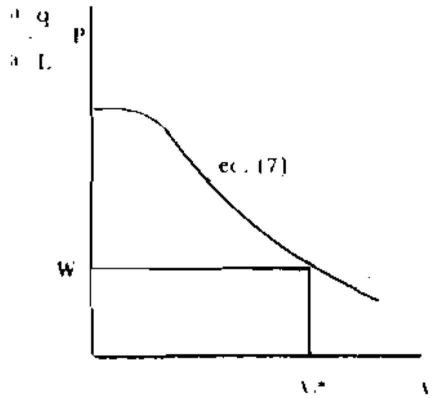
Lo que representa el óptimo de la firma en la contratación del factor trabajo: La firma contratará trabajo hasta que el valor producto marginal del trabajador extra sea igual a su salario.

$$\frac{\partial q}{\partial L} P = W \tag{7}$$

Del punto de vista de la firma, corresponde al tradicional óptimo económico donde se iguala ingreso marginal al costo marginal.

Las ecuaciones (4) y (7) conjuntamente con la función de producción definen **K***, **L*** y **q*** óptimos; como se puede observar en el gráfico que se presenta.





2 INVERSION EN BIENES DE CAPITAL DIFERENTES

Para analizar este caso, modificaremos el supuesto de unidades homogéneas de capital en el sentido de permitir dos unidades de capital diferentes. Los resultados pueden generalizarse el caso de n unidades diferentes sin mayor complejidad.

Al igual que en el modelo preliminar, la función objetivo que se maximizará es el valor presente neto de invertir en ambos tipos de bienes de capital.

$$VPN = -\pi_1 K_1 - \pi_2 K_2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{P\,q - W\,L}{(1+r)^i} + \frac{\pi_1^R K_1 + \pi_2^R K_2}{(1+r)^n}$$

Sujeto a la restricción que impone la función de producción

$q = q\,(K_1, K_2, L)$

en donde:

K_1 : es el número de bienes de capital del tipo 1.
K_2 : es el número de bienes de capital del tipo 2.
π_1 y π_2 : son el precio unitarios de cada tipo de bien de capital, respectivamente.
π_1^R y π_2^R : los valores residuales de cada tipo de bien de capital, respectivamente.

La función de Lagrange que se maximizará será entonces:

$$Z = -\pi_1 K_1 - \pi_2 K_2 + \sum_{1}^{n} \frac{P\,q - W\,L}{(1+r)^i} + \frac{\pi_1^R K_1 + \pi_2^R K_2}{(1+r)^n} + \lambda\,(q(K_1 K_2, L) - q)$$

En donde las variables son, K_1, K_2, L y q.

Derivando parcialmente con respecto a cada una de las variables e igualando a 0 se tiene:

$$\frac{\partial Z}{\partial K_1} = -\pi_1 + \frac{\pi_1^R}{(1+r)^n} + \lambda \frac{\partial q}{\partial K_1} = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial K_2} = -\pi_2 + \frac{\pi_2^R}{(1+r)^n} + \lambda \frac{\partial q}{\partial K_2} = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial L} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{W}{(1+r)^i} + \lambda \frac{\partial q}{\partial L} = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P}{(1+r)^i} - \lambda = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen la ecuación (7) anterior y las formas modificadas de la ecuación (4):

$$\pi_1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial q}{\partial K_1} P}{(1+r)^i} + \frac{\pi_1^R}{(1+r)^n} = 0$$

$$\pi_2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial q}{\partial K_2} P}{(1+r)^i} + \frac{\pi_2^R}{(1+r)^n} = 0$$

Estas ecuaciones nos indican, al igual que antes, que el tamaño óptimo de inversión en cada tipo de bien de capital se obtiene cuando las tasas marginales internas de retorno de ambos tipos de inversión igualan la tasa de descuento pertinente.

$$\rho_1^M = r$$

$$\rho_2^M = r$$

y en consecuencia, se igualan entre sí.

3. INVERSION EN BIENES DE CAPITAL DIFERENTES CON RESTRICCION DE CAPITAL

Un problema más interesante se presenta cuando se requiere invertir en bienes de capitales diferentes, pero existiendo una restricción adicional en términos del presupuesto de inversión.

Sea I la inversión total (restringida) en bienes de capital de los tipos 1 y 2.

$$\pi_1 K_1 + \pi_2 K_2 = I \tag{8}$$

Agregando la restricción (8) a la función de Lagrange anterior, se obtiene

$$Z = -\pi_1 K_1 - \pi_2 K_2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{Pq - WL}{(1+r)^i} + \frac{\pi_1^R K_1 + \pi_2^R K_2}{(1+r)^n} + \lambda(q(K_1, K_2, L) - q) - \Omega(\pi_1 K_1 + \pi_2 K_2 - I)$$

e igual que antes, derivando parcialmente e igualando a 0.

Se obtiene:

$$\frac{\partial Z}{\partial K_1} = -\pi_1 + \frac{\pi_1^R}{(1+r)^n} + \lambda \frac{\partial q}{\partial K_1} - \Omega \pi_1 = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial K_2} = -\pi_2 + \frac{\pi_2^R}{(1+r)^n} + \lambda \frac{\partial q}{\partial K_2} - \Omega \pi_2 = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial L} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{W}{(1+r)^i} + \lambda \frac{\partial q}{\partial L} = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P}{(1+r)^i} - \lambda = 0$$

Las dos últimas ecuaciones son las mismas anteriores y las dos primeras se pueden ordenar de la siguiente forma:

$$-\pi_1 (1 + \Omega) + \frac{\pi_1^R}{(1+r)^n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial q}{\partial K_1} P}{(1+r)^i} = 0 \tag{9}$$

$$\pi_2 (1 + \Omega) + \frac{\pi_2^R}{(1+r)^n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial q}{\partial K_2} P}{(1+r)^i} = 0 \tag{10}$$

Ambas ecuaciones son similares a la ecuación (4) con la diferencia de que el precio inicial del bien de capital esta amplificado por un factor $(1 + \Omega)$ que representa un *precio sombra* necesario para cumplir con la restricción de capital.

Derivando parcialmente la función de Lagrange con respecto al capital I, se obtiene:

$$\frac{\partial Z}{\partial I} = \Omega$$

Ω representa entonces el cambio en el valor presente neto de la firma si aumenta la restricción de capital en una unidad. En el límite cuando deja de existir la restricción, Ω será 0, por cuanto el valor presente neto es máximo.

Siendo Ω positivo, se requiere, obviamente, productividades marginales del capital mayores que en el caso no restrictivo, lo que implica números de bienes de capital K_1 y K_2 menores. Estas consideraciones implican para el óptimo restrictivo que el término

$$\pi_1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial q}{\partial K_1} P}{(1+r)^i} + \frac{\pi_1^R}{(1+r)^n} > 0 \tag{11}$$

en donde $\frac{\partial q}{\partial K_1}$ corresponde a la productividad marginal de bien de capital K_1 para un *stock* K** restrictivo.

Lo mismo sucede con la expresión similar de K_2

$$\pi_2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial q}{\partial K_2} P}{(1+r)^i} + \frac{\pi_2^R}{(1+r)^n} > 0 \tag{12}$$

de ambas desigualdades se deduce que las tasas marginales internas de retorno que maximizan el tamaño de la inversión con restricción de capital debe ser mayor que la tasa de descuento.

$\rho_1^M > r$

$\rho_2^M > r$

Esta es la misma conclusión de Fama y Miller, quienes además afirman, basados en un análisis de dos períodos, que dichas tasas marginales deben ser iguales entre sí.

La ecuación (9) en el caso de dos períodos se convierte en:

$$-\pi_1 (1 + \Omega) + \frac{\frac{\partial q}{\partial K_1} P}{(1 + r)} + \frac{\pi_1^R}{(1 + r)} = 0$$

dividiendo por $(1 + \Omega)$ se obtiene:

$$-\pi_1 + \frac{\frac{\partial q}{\partial K_1} P}{(1 + r)(1 + \Omega)} + \frac{\pi_1^R}{(1 + r)(1 + \Omega)} = 0$$

La tasa marginal interna de retorno para el caso de dos períodos, con restricción de capital, será entonces:

$$\rho_1^M = (1 + r)(1 + \Omega) - 1$$

Siguiendo el mismo procedimiento para la ecuación (10), se obtiene un resultado similar.

$$\rho_2^M = (1 + r)(1 + \Omega) - 1$$

En consecuencia, para el caso de dos períodos, el óptimo restrictivo requiere igualdad de las tasas marginales internas de retorno para cada tipo de bien de capital.

Sin embargo, ya para el caso de tres períodos, ello no es válido:

de la ecuación 9:

$$\pi_1 + \frac{\frac{\partial q}{\partial K_1} P}{(1 + \Omega)(1 + r)} + \frac{\frac{\partial q}{\partial K_1} P}{(1 + \Omega)(1 + r)^2} + \frac{\pi_1^R}{(1 + r)(1 + \Omega)^2} = 0$$

La tasa marginal interna de retorno deja de ser $(1 + r)(2 + \Omega) - 1$ y dependerá de π_1, π_1^R y $\left(\frac{\partial q}{\partial K_1}\right)$.

En consecuencia, las tasas marginales internas de retorno no son ya necesariamente iguales. En el anexo 1 se demuestra que sólo para un caso particular dichas tasas no difieren.

El tamaño óptimo de la inversión en cada tipo de bien de capital se logra pues. para tasas marginales internas de retorno mayores que la tasa de mercado; pero, exceptuando el caso de dos períodos, no hay razón valedera para afirmar que dichas tasas deben ser iguales.

En consecuencia, deberá buscarse otro indicador que permita optimizar la inversión en presencia de restricción presupuestaria.

Según Euler

$$q = \frac{\partial q}{\partial K_1} K_1 + \frac{\partial q}{\partial K_2} K_2 + \frac{\partial q}{\partial L} L,$$

multiplicando por P

$$q\,P = \frac{\partial q}{\partial K_1} P\,K_1 + \frac{\partial q}{\partial K_2} P\,K_2 + \frac{\partial q}{\partial L} P\,L,$$

sumando para todos los períodos, y haciendo $\frac{\partial q}{\partial L} P = W$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{q\,P - W\,L}{(1+r)^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial q}{\partial K_2} P\,K_1}{(1+r)^i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial q}{\partial K_2} P\,K_2}{(1+r)^i}$$

Los términos a la derecha del signo igual representan al valor presente de las remuneraciones en los dos tipos de inversión 1 y 2, respectivamente.

Por consiguiente, el valor presente de invertir en cada tipo de bien de capital es:

$$VP_1 = \pi_1 K_1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial q}{\partial K_1} P\,K_1}{(1+r)^i} + \frac{\pi_1^R K_1}{(1+r)^n}$$

$$VP_2 = -\pi_2 K_2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial q}{\partial K_2} P K_2}{(1+r)^i} + \frac{\pi_2^R K_2}{(1+r)^n},$$

reemplazando en las ecuaciones (9) y (10) queda:

$$VP_1 = -\pi_1 K_1 + \pi_1 K_1 (1 + \Omega)$$

$$VP_2 = -\pi_2 K_2 + \pi_2 K_2 (1 + \Omega),$$

reordenando:

$$\frac{VP_1}{K_1} = \pi_1 \Omega$$

y

$$\frac{VP_2}{K_2} = \pi_2 \Omega,$$

despejando Ω en ambas ecuaciones e igualando se obtiene

$$\frac{VP_1}{K_1 \pi_1} = \frac{VP_2}{K_2 \pi_2}$$

Esta ecuación nos indica que el tamaño óptimo de cada tipo de inversión se obtiene al igualar la razón valor presente sobre la inversión de cada tipo de bien de capital.

Esta razón es conocida en Evaluación de Proyectos como el indicador "IVAN" que se usa justamente para seleccionar inversiones en caso de restricción de capital.

En consecuencia, no es la igualdad de las tasas internas de retorno, ni de las tasas marginales internas de retorno la herramienta para optimizar el tamaño de una inversión en presencia de racionamiento de capital.

Asimismo, en la elección del tipo de bien de capital o, generalizando, en el caso de proyectos independientes, las tasas internas de retorno no serán buenos indicadores si existe restricción presupuestaria y en consecuencia usar la tasa interna de retorno del proyecto marginal para descontar las otras inversiones, como proponen algunos autores no tiene sentido alguno, pues el proyecto marginal (desechado) puede perfectamente tener una tasa interna de retorno mayor qne el de alguna inversión aceptada. Sólo en el caso de dos periodos ello es correcto, pues, para ese caso un ordenamiento de inversiones de acuerdo al indicador "IVAN" coincidirá exactamente con un ordenamiento según la tasa interna de retorno. (Ver anexo 2.)

En general, sólo es el indicador valor actual neto sobre inversión, el que asegura una optimización de la rentabilidad de las inversiones en presencia de racionamiento de capital.

ANEXO I

Para demostrar que, para el caso de tres períodos, las tasas marginales internas de retorno en general difieren en cada bien de capital, se buscará más bien el caso particular, si existe, o las condiciones que deben darse, para la igualdad de dichas tasas.

Sea

$$\frac{\pi_1^R}{\pi_1} = \alpha \frac{\pi_2^R}{\pi_2} \tag{13}$$

La tasa marginal interna de retorno ρ_1^M para el caso de tres períodos se puede obtener de la ecuación (11)

$$\pi_1 + \frac{\frac{\partial q}{\partial K_1} P}{(1 + \rho_1^M)} + \frac{\frac{\partial q}{\partial K_1} P}{(1 + \rho_2^M)^2} + \frac{\pi_1^R}{(1 + \rho_1^M)^2} = 0$$

Multiplicando por $-\dfrac{(1 + \rho_1^M)^2}{\frac{\partial q}{\partial K_1} \rho}$ queda:

$$+ \frac{\pi_1}{\frac{\partial q}{\partial K_1} \rho} (1 + \rho_1^M)^2 - (1 + \rho_1^M) - 1 - \frac{\pi_1^R}{\frac{\partial q}{\partial K_1} \rho} = 0$$

Sea $\Lambda = \dfrac{\pi_1}{\frac{\partial q}{\partial K_1} P}$ reemplazando.

$$\Lambda(1 + \rho_1^M)^2 - (1 + \rho_1^M) - 1 - \Lambda \frac{\pi_1^R}{\pi_1} = 0$$

resolviendo esta ecuación de 2º grado en $(1 + \rho_1^M)$ queda:

$$1 + \rho_1^M = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\Lambda \left(1 + \Lambda \frac{\pi_1^R}{\pi_1}\right)}}{2 \Lambda} \tag{14}$$

En donde la solución negativa no tiene sentido económico.

Del mismo modo, para el caso del bien de capital 2, se puede obtener

$$1 + \rho_2^M = \frac{1 + \sqrt{1 + 4B\left(1 + B \cdot \frac{\pi_2^R}{\pi_2}\right)}}{2B} \qquad (15)$$

con $B = \dfrac{\pi_2}{\dfrac{\partial q}{\partial K_2}\,\rho}$

Ahora bien, de las ecuaciones 9 y 10 aplicadas al caso de tres períodos, se obtiene:

$$1 + \Omega = \frac{\pi_1^R}{\pi_1 (1 + r)^2} + \frac{\dfrac{\partial q}{\partial K_1} P}{\pi_1 (1 + r)^2} (2 + r)$$

$$1 + \Omega = \frac{\pi_2^R}{\pi_2 (1 + r)^2} + \frac{\dfrac{\partial q}{\partial K_2} P}{\pi_2 (1 + r)^2} (2 + r)$$

pero

$$\frac{\dfrac{\partial q}{\partial K_1} P}{\pi_1} = \frac{1}{A} \quad \text{y} \quad \frac{\dfrac{\partial q}{\partial K_2} P}{\pi_2} = \frac{1}{B}$$

luego:

$$\frac{\pi_1^R}{\pi_1} + \frac{2 + r}{A} = \frac{\pi_2^R}{\pi_2} + \frac{2 + r}{B} \qquad (16)$$

reemplazando la ecuación (13) en la ecuación (16) queda:

$$\alpha \frac{\pi_2^R}{\pi_2} + \frac{2 + r}{A} = \frac{\pi_2^R}{\pi_2} + \frac{2 + r}{B}$$

$$\frac{2 + r}{A} = \frac{\pi_2^R}{\pi_2}(1 - \alpha) + \frac{2 + r}{B}$$

despejando A queda:

$$A = \frac{(2 + r)\,B}{2 + r + B\,\frac{\pi_2^R}{\pi_2}\,(1 - \alpha)}$$

definamos

$$C \equiv \frac{2 + r}{2 + r + B\,\frac{\pi_2}{\pi_2}\,(1 - \alpha)} \tag{17}$$

luego

$$A = BC$$

reemplazando en la ec. (14).

$$1 + \rho_1^M = \frac{1 + \sqrt{1 + 4BC\left(1 + BC\alpha\,\frac{\pi_2^R}{\pi_2}\right)}}{2\,B\,C} \tag{18}$$

Ahora bien, despejando α de la ecuación (17) se obtiene

$$\alpha = \frac{\frac{2 + r}{C}(C - 1)}{B\,\frac{\pi_2^R}{\pi_2}} + 1$$

$$\alpha\,B\,\frac{\pi_2^R}{\pi_2} = \frac{2 + r}{C}(C - 1) + B\,\frac{\pi_2^R}{\pi_2}$$

y

$$\alpha\,BC\,\frac{\pi_2^R}{\pi_2} = (2 + r)(C - 1) + BC\,\frac{\pi_2^R}{\pi_2}$$

reemplazando en la ecuación 18 se obtiene:

$$1 + \rho_1^M = \frac{1 + \sqrt{1 + 4BC\,(1 + (2 + r)\,(C - 1) + BC \dfrac{\pi_2^R}{\pi_2})}}{2\,BC} \tag{19}$$

Si se comparan las ecuaciones (19) y (15) para que $\rho_1^M = \rho_2^M$ debe cumplirse que

$$C = 1$$

lo que representa en la ecuación (17) que

$$2 + r = 2 + r + B\,\frac{\pi_2^R}{\pi_2}\,(1 - \alpha)$$

lo que implica que $\alpha = 1$ dado que en general $B \neq 0$ y $\dfrac{\pi_2^R}{\pi_2} \neq 0$.

En otras palabras, para que las tasas marginales internas de retorno sean iguales en el caso de tres períodos, debe cumplirse que las razones de precio de adquisición sobre precio de residuo de cada bien de capital sean iguales. Sólo en este caso las tasas marginales internas de retorno coinciden.

ANEXO 2

El indicador "IVAN" para el caso de dos períodos es:

$$\text{"IVAN"} = \frac{\dfrac{B_1}{1 + r} - Io}{Io}$$

$$\text{"IVAN"} = \frac{B_1}{Io\,(1 + r)} - 1$$

multiplicando por (1 + r)

$$\text{IVAN}\,(1 + r) = \frac{B_1}{Io} - (1 + r)$$

Sumando r a ambos lados queda:

$$\text{IVAN}\,(1 + r) + r = \frac{B_1}{Io} - 1$$

pero, para el caso de dos períodos

$$\frac{B_1}{Io} - 1 \text{ es la tasa interna de retorno}$$

Ahora bien, el ordenamiento de un set de proyectos independientes de mayor a menor "IVAN" coincide con el ordenamiento de mayor a menor "IVAN" x (1 + r), pues se están multiplicando todos los valores "IVAN" por un mismo factor.

Además, el ordenamiento de mayor a menor "IVAN" x (1 + r) coincide con el ordenamiento de mayor a menor "IVAN" x (1 + r) + r, pues se está agregando a todos los valores un mismo número r; pero este último ordenador es la tasa interna de retorno para el caso de dos períodos. En consecuencia, un ordenamiento de proyectos según el indicador "IVAN" coincide con un ordenamiento de proyectos según la tasa interna de retorno en el caso de dos períodos.

BIBLIOGRAFIA

Bierman H. y S. Smidt, "The capital budgeting decision", Mac Millan Publising Co., Inc. U.S.A., 1980.

Fama y Miller, "The theory of finance", Dryden Press 1972.

Fontaine, E., "Evaluación social de proyectos", Ediciones Universidad Católica de Chile, 1981.

Horngreen, Charles T., "La contabilidad de costos en la dirección de empresas", ediciones Hispano América 1969, México.

Lorie J. y L. Savage, Three problems in rationing capital en *Journal of Business*, vol. XXVIII.

Van Horne, James C., "Administración financiera" Centro Regional de Ayuda Técnica, Buenos Aires, 1978.

Taylor, G.A., "Ingeniería Económica", Editorial Limusa, México, 1976.

Vidaurre, A., "Criterios generales de evaluación de proyectos de inversión", Organización de los Estados Americanos, CIES, 1979.