



UNIVERSIDAD DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

IDENTIFICACIÓN Y ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS ÓPTIMAS DE LÍNEAS DE
TRANSPORTE PÚBLICO EN REDES REPRESENTATIVAS CON DEMANDA
PARAMÉTRICA

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN CIENCIAS DE LA
INGENIERIA, MENCIÓN TRANSPORTE
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

ANDRÉS SALOMÓN FIELBAUM SCHNITZLER

PROFESORES GUÍA:

SERGIO JARA DÍAZ

ANTONIO GSCHWENDER KRAUSE

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:

MARCOS KIWI KRAUSKOPF

HANI MAHMASSANI

Esta tesis fue financiada con Beca CONICYT para Estudios de Magíster en
Chile, Año Académico 2011

SANTIAGO DE CHILE

AGOSTO, 2014

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE: Ingeniero Civil
Matemático y grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería, mención
Transportes

POR: Andrés Salomón Fielbaum Schnitzler

FECHA: 08/08/2014

PROFESORES GUÍA: Sergio Jara Díaz y Antonio Gschwender Krause

IDENTIFICACIÓN Y ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS ÓPTIMAS DE LÍNEAS DE TRANSPORTE PÚBLICO EN REDES REPRESENTATIVAS CON DEMANDA PARAMÉTRICA

El siguiente trabajo avanza en la resolución del problema de determinar estructuras de líneas óptimas de transporte público. Para ello, se parte del diagnóstico de que hoy no existe una manera sistémica de enfrentar tal problema. Los estudios existentes muestran heurísticas que funcionan en cualquier ciudad, o redes muy pequeñas resueltas en forma exhaustiva. En medio de estos enfoques hay muy poco estudiado y lo que hay son esfuerzos aislados sin justificaciones claras. No existen además puentes de diálogo entre estos enfoques.

Para abordar la deficiencia señalada, se considera una ciudad de complejidad intermedia, la que es construida buscando cumplir con las principales características transversales de las ciudades modernas de acuerdo a la literatura. Se identifica que una de las discusiones no resueltas más relevantes para este problema es aquella sobre si el mejor modelo para una ciudad es uno monocéntrico, uno policéntrico o uno disperso, por lo que la ciudad que se utiliza tiene parámetros cuyos valores permiten representar cada uno de estos modelos.

Se presentan cuatro estructuras de líneas que cubran tal ciudad: líneas directas, líneas exclusivas, hub & spoke y troncales-alimentadores. Se optimizan numéricamente en función de los parámetros con una función de costos que incorpora a operadores y usuarios y que incluye la determinación de frecuencias óptimas. Se concluye que si no se penalizan los trasbordos, las estructuras óptimas son hub & Spoke y troncal-alimentador. En caso contrario, son las otras dos. Se muestra además como otros fenómenos potencian distintas estructuras.

Por último, se aplican las dos heurísticas más intuitivas a la misma ciudad. Se obtienen estructuras muy similares a la de líneas directas, pero con menores grados de libertad. Se propone a partir de esto investigaciones futuras que permitan desarrollar heurísticas que incorporen lo estudiado en este trabajo.

Agradecimientos

*"Que el canto tiene sentido cuando palpita en las venas
del que morirá cantando las verdades verdaderas,
no las lisonjas fugaces ni las famas extranjeras
sino el canto de una lonja hasta el fondo de la tierra."*

Víctor Jara, Manifiesto

Parto agradeciendo a mi familia, mis padres, mi hermano, mi abuela y los demás, porque ha sido su cariño, su formación y su apoyo la razón fundamental que me ha permitido terminar este importante paso en mi formación después de una agitada y diversa experiencia universitaria. También al profesor Sergio Jara-Díaz, porque frente a las complejidades para poder compatibilizar la dirigencia estudiantil y el trabajo en la tesis, sin su apoyo, seguridad e ideas hubiera sido un desafío imposible.

Agradezco al profesor Gschwender por los importantes aportes y discusiones junto al profesor Jara-Díaz durante las fases principales de desarrollo de esta tesis, y al profesor Kiwi por los valiosos comentarios para mejorarla. Pasar por la Universidad significó rigor académico y espacios para discutir y crecer, por lo que agradezco a la Universidad de Chile como institución, sabiendo que la mejor de agradecer es trabajar y luchar por reconstruir su carácter verdaderamente público.

El paso por la Universidad fue una experiencia muy agradable, y les agradezco a mis amigos por aquello, en especial a los de la oficina en el DIM y a aquellos con los que compartimos tantos Talagantes. También a mis amigos fuera de la Universidad, y en especial a quienes han sido mis compañeras en el amor, por el respeto, las vivencias, y porque el aprendizaje en las experiencias más íntimas y cotidianas es prefigurativo para todo lo que uno quisiera construir y transformar. Fue bello compartir así la experiencia universitaria.

El último agradecimiento, especialmente importante, es para quienes han sido mis compañeros de lucha y de movilización en estos años. Por la educación pública y gratuita hoy, por una sociedad justa y plena mañana. Mis compañeros del CEI 2011, de las FECh 2012 y 2013, y al conjunto de la militancia de Izquierda Autónoma. Construir un Chile diferente requiere mucha creatividad: lo que Víctor Jara enuncia para el canto, es exactamente igual de cierto para toda actividad humana, incluyendo por supuesto la ingeniería y la ciencia.

Tabla de Contenido

Resumen	<i>i</i>
Agradecimientos	<i>ii</i>
Tabla de Contenido	<i>iii</i>
Índice de Tablas	<i>vi</i>
Índice de Figuras	<i>viii</i>
Capítulo 1: Introducción	<i>1</i>
1.1 Heurísticas en redes generales	<i>5</i>
1.2 Modelos en redes simples	<i>8</i>
1.3 Estudios intermedios	<i>11</i>
1.4 Enfoque y estructura de este trabajo	<i>14</i>
Capítulo 2: Estudio y Definición de la Ciudad, Red y Patrón de Demanda	<i>18</i>
2.1 Definiciones topológicas	<i>19</i>
2.2 Características topológicas de redes estudiadas en la literatura	<i>24</i>
2.3 Análisis económico y demográfico: la pregunta por los centros y su influencia en la red y en el patrón de demanda	<i>28</i>
2.4 Definición de la red y patrón de demanda	<i>33</i>
Capítulo 3: Definición y Estudio de las Estructuras de Línea Relevantes	<i>45</i>
3.1 Notación y líneas a considerar	<i>45</i>
3.2 La función de costos	<i>51</i>
3.3 Estructura de líneas directas	<i>53</i>
3.4 Estructura de líneas exclusivas	<i>64</i>

3.5 Estructura tipo hub & spoke	67
3.6 Estructura de líneas troncales y alimentadoras	73
3.7 Síntesis	76
Capítulo 4: Resultados Numéricos	78
4.1 El método numérico	78
4.2 Los parámetros	80
4.3 Los resultados	82
4.4 El rol de los trasbordos	93
4.5 El rol de la afluencia	96
4.6 Comparación entre las estructuras	100
4.7 Análisis de sensibilidad	102
4.8 Síntesis	107
Capítulo 5: Aproximación al Estudio de Algoritmos Heurísticos en Redes Arbitrarias	108
5.1 La estructura que incluye todas las posibles rutas	109
5.2 La estructura que escoge una ruta por cada par O-D	111
5.3 Análisis de las heurísticas usadas y sus resultados	118
Capítulo 6: Conclusiones	119
6.1 Sobre el modelo de ciudad a utilizar	119
6.2 Sobre las estructuras óptimas	121
6.3 Sobre las heurísticas y su relación con este modelo de ciudad	123
6.4 Pequeños apuntes sobre la congestión	124

6.5 Investigaciones futuras	125
Bibliografía	127
Anexo A: Los gráficos	133
Anexo B: Los códigos para la programación	143

Índice de Tablas

2.1 Síntesis de los principales indicadores topológicos de una ciudad, comparados con los de una grilla de tamaño $a \times b$	26
2.2 Matriz O-D de la ciudad con la que se trabajará	38
2.3 Resumen de los parámetros que determinan el modelo de ciudad a utilizar, con su respectiva red y matriz O-D	40
2.4 Resumen de las relaciones matemáticas entre los parámetros que determinan el modelo de ciudad a utilizar	41
2.5 Síntesis de los principales indicadores topológicos de una ciudad real, comparados con los de la ciudad definida para este trabajo	43
3.1 Explicación de los parámetros que se utilizan en la función de costo total del sistema	51
3.2 Cantidad de líneas por cada tipo en la estructura Dir	55
3.3 Asignación de pasajeros en la estructura Dir	55
3.4 Cantidad de pasajeros que se suben y bajan por bus en cada paradero para las distintas líneas de la estructura Dir	57
3.5 Tiempos de ciclo de las líneas de la estructura Dir	62
3.6 Carga máxima de las líneas de la estructura Dir	63
3.7 Cantidad de líneas por cada tipo en la estructura Exc	65
3.8 Cantidad de pasajeros que se suben y bajan por bus en cada paradero para las distintas líneas de la estructura Exc	66
3.9 Tiempos de ciclo de las líneas de la estructura Exc	67
3.10 Cantidad de líneas por cada tipo en la estructura H&S	68
3.11 Asignación de pasajeros en la estructura H&S	69
3.12 Cantidad de pasajeros que se suben y bajan por bus en cada paradero para las distintas líneas de la estructura H&S	70
3.13 Tiempos de ciclo de las líneas de la estructura H&S	72
3.14 Carga máxima de las líneas de la estructura H&S	72
3.15 Cantidad de líneas por cada tipo en la estructura T-A	73

3.16 Asignación de pasajeros en la estructura T-A	73
3.17 Cantidad de pasajeros que se suben y bajan por bus en cada paradero para las distintas líneas de la estructura T-A	74
3.18 Tiempos de ciclo de las líneas de la estructura T-A	75
3.19 Carga máxima de las líneas de la estructura T-A	75
3.20 Síntesis de cómo calcular los elementos de la función de costos desde las expresiones conocidas	77
4.1 Valores de los parámetros utilizados	81
4.2 Fenómenos posibles de ocurrir en una ciudad y la estructura que mejor responde a tal fenómeno	101
5.1 Resumen de las rutas que serán parte del conjunto de candidatos según la heurística desarrollada por Dubois et al (1979), y su comparación con las rutas óptimas	116

Índice de Figuras

1.1 Ciudad representada por un grafo	2
2.1 Tres representaciones posibles primal/dual para la misma ciudad	21
2.2 Un grafo grilla de 4×3 y su dual	23
2.3 Muestra de la concentración de empleos en el CBD y los principales subcentros de México DF, ciudad altamente concentrada	30
2.4 Principales avenidas y subcentros de Dallas – Fort Worth, ciudad muy dispersa	31
2.5 La forma urbana que será utilizada con su respectiva red para $n = 5$ zonas	35
2.6 Resumen gráfico de los viajes existentes en la ciudad, con sus orígenes y destinos respectivos	38
2.7 Representación gráfica de una ciudad monocéntrica, una ciudad policéntrica y una ciudad dispersa en este modelo, respectivamente	39
3.1 Estructuras de líneas directas y exclusivas para $n = 5, H = H = 2$	46
3.2 Estructuras de líneas de tipo hub & spoke y de troncales-alimentadores para $n = 5, H = H = 2$	46
3.3 Líneas LP_iSC_i, LP_iCBD Y LSC_iCBD	48
3.4 Líneas LP_iSC_jH, LP_iSC_jF y LP_iCBDE	49
3.5 Líneas SC_iH y SC_iHE	50
3.6 Línea circular, que recorre el anillo de subcentros	50
4.1 Estructuras óptimas según α, β para niveles de afluencia total de 8000, 24000 y 72000 pasajeros por hora, respectivamente	83
4.2 Costo total de cada estructura al variar el valor de α	85
4.3 Costo de Operadores de cada estructura al variar el valor de α	86
4.4 Costo de Usuarios de cada estructura al variar el valor de α	87
4.5 Flota Total de cada estructura al variar el valor de α	88
4.6 Cantidad de plazas de cada estructura al variar el valor de α	89
4.7 Tiempo de espera de cada estructura al variar el valor de α	89

4.8 Tiempo de viaje de cada estructura al variar el valor de α	90
4.9 Frecuencia de los distintos valores tomados por H y H , respectivamente, para las distintas estructuras	91
4.10 Traspaldos de cada estructura al variar el valor de α	92
4.11 Capacidad promedio de los buses de cada estructura al variar el valor de α	93
4.12 Estructura óptima según (α, β) , para $Y = 8000, Y = 24000, Y = 72000$ respectivamente, cuando el costo de un traspaldo equivale a 24 minutos viajando en el bus	94
4.13 Estructuras óptimas para cada valor de (Y, α) , con $\gamma = n - 1 \beta$, $\gamma = \beta$ y $\gamma = \frac{\beta}{9}$, respectivamente	97
4.14 Estructuras óptimas para cada valor de (Y, α) con $\gamma = 0$	98
4.15 Estructuras óptimas para cada valor de (Y, α) en el caso intermedio de dispersión ($\beta = \gamma$), con un costo de traspaldo equivalente a 24 minutos viajando en bus	98
4.16 Flota y capacidad promedio de las distintas estructuras en función de la afluencia total para el caso en que $\beta = \gamma$	99
4.17 Linealización del gráfico que muestra la flota de cada estructura para cada valor de Y	100
4.18 Costo Total de cada estructura al variar la proporción de usuarios que parten desde la periferia	103
4.19 Costo Total de cada estructura al variar el tiempo que le toma a un bus ir desde el centro hasta el CBD	104
4.20 Costo Total de cada estructura al variar la razón entre las distancias Periferia-Subcentro y Subcentro-CBD	105
4.21 Costo Total de cada Estructura al variar el número de zonas	105
4.22 Costo total de cada estructura al variar el tiempo de subida y bajada al bus	106
5.1 Estructura generada por el algoritmo propuesto por Debois et al (1979) al ser aplicada en la ciudad en estudio	117
A.1 Costo de cada estructura al variar el valor de α para $Y = 8000$	133
A.2 Costo de cada estructura al variar el valor de α para $Y = 72000$	133

A.3 Costo de operadores en cada estructura al variar el valor de α para $Y = 8000$	134
A.4 Costo de operadores en cada estructura al variar el valor de α para $Y = 72000$	134
A.5 Costo de usuarios en cada estructura al variar el valor de α para $Y = 8000$	135
A.6 Costo de usuarios en cada estructura al variar el valor de α para $Y = 72000$	135
A.7 Capacidad promedio de los buses de cada estructura al variar el valor de α para $Y = 8000$	136
A.8 Capacidad promedio de los buses de cada estructura al variar el valor de α para $Y = 72000$	136
A.9 Flota de cada estructura al variar el valor de α para $Y = 8000$	137
A.10 Flota de cada estructura al variar el valor de α para $Y = 72000$	137
A.11 Plazas de cada estructura al variar el valor de α para $Y = 8000$	138
A.12 Plazas de cada estructura al variar el valor de α para $Y = 72000$	138
A.13 Tiempo de espera promedio de cada estructura al variar el valor de α para $Y = 8000$	139
A.14 Tiempo de espera promedio de cada estructura al variar el valor de α para $Y = 72000$	139
A.15 Tiempo de viaje promedio de cada estructura al variar el valor de α para $Y = 8000$	140
A.16 Tiempo de viaje promedio de cada estructura al variar el valor de α para $Y = 72000$	140
A.17 Frecuencia de los distintos valores tomados por H y H para las distintas estructuras, con $Y = 8000$	141
A.18 Frecuencia de los distintos valores tomados por H y H para las distintas estructuras, con $Y = 8000$	142

Capítulo 1: Introducción

En prácticamente todas las ciudades grandes y medianas del mundo, el transporte público juega un rol esencial. Las personas deben transportarse de un lugar a otro para trabajar, para ir a su lugar de estudios, para ir de compras, entre muchos otros propósitos. Un buen sistema de transporte público no solamente favorece a quienes no poseen los recursos económicos para movilizarse en un medio privado y a quienes no desean hacerlo, sino que logra que sean más las personas que utilicen medios públicos de transporte, disminuyendo así la congestión y la contaminación para todos los habitantes de la ciudad.

Sin embargo, el diseño de un sistema de transporte público que busque ser óptimo es un problema extremadamente complejo, por la gran cantidad de variables involucradas. Un problema particularmente relevante y difícil es el decidir la estructura de líneas de buses del sistema.

Para poder definir en forma precisa el problema y así poder estudiar maneras de atacarlo, es conveniente definir algunos conceptos claves que se utilizarán. Una red se modela como un grafo, en el que los nodos representan lugares de la ciudad que podrán funcionar como esquinas (ver Figura 1.1), como paraderos, es decir, puntos en los que los vehículos pueden recoger y/o dejar pasajeros (por lo mismo, usualmente serán también los orígenes y destinos), o como zonas urbanas; mientras que los arcos representan las vías por las cuales transitan los buses. Una línea de transporte público es un conjunto de buses que operan repitiendo ciertas características: recorren la misma ruta, y dependiendo del modelo, tienen una frecuencia característica, una capacidad característica, se detienen en los mismos paraderos¹, incluso otros aspectos como la tecnología de apertura y cierre de puertas pueden ser incluidos.

Una estructura de líneas es un conjunto de líneas que sirven para satisfacer determinada demanda distribuida en el espacio. Usualmente las líneas guardan cierta coherencia entre ellas, y las rutas que ofrecen se convierten así en parte de la estrategia de viaje de los usuarios. El objetivo es pensar formas que permitan realizar diseños de tales estructuras en forma eficiente. La demanda vendrá dada por la matriz O-D (Origen-Destino), cuyas filas y columnas representan distintas zonas de la ciudad, siendo los elementos de la matriz la demanda por unidad de tiempo desde la zona origen (la fila) hasta la zona destino (la columna).

¹ Cabe señalar que hay modelos que admiten buses con capacidades distintas dentro de una misma línea, así como otros estudian distintas formas de recorrer la ruta, como son los buses expresos que se detienen en menos paraderos o buses tipo “short-turning” que hacen un recorrido más corto, entre otras.

Para poder comparar dos estructuras de líneas, y posteriormente poder buscar la estructura óptima, se utilizará una función de costos que incorpore tanto los costos monetarios directos del sistema, los que son percibidos por los operadores, como los costos asociados a las diversas molestias y recursos dilapidados (usualmente tiempo) del proceso de viaje, asociados a los pasajeros o usuarios del sistema. Para ambos tipos no es obvio la forma de incorporarlos.

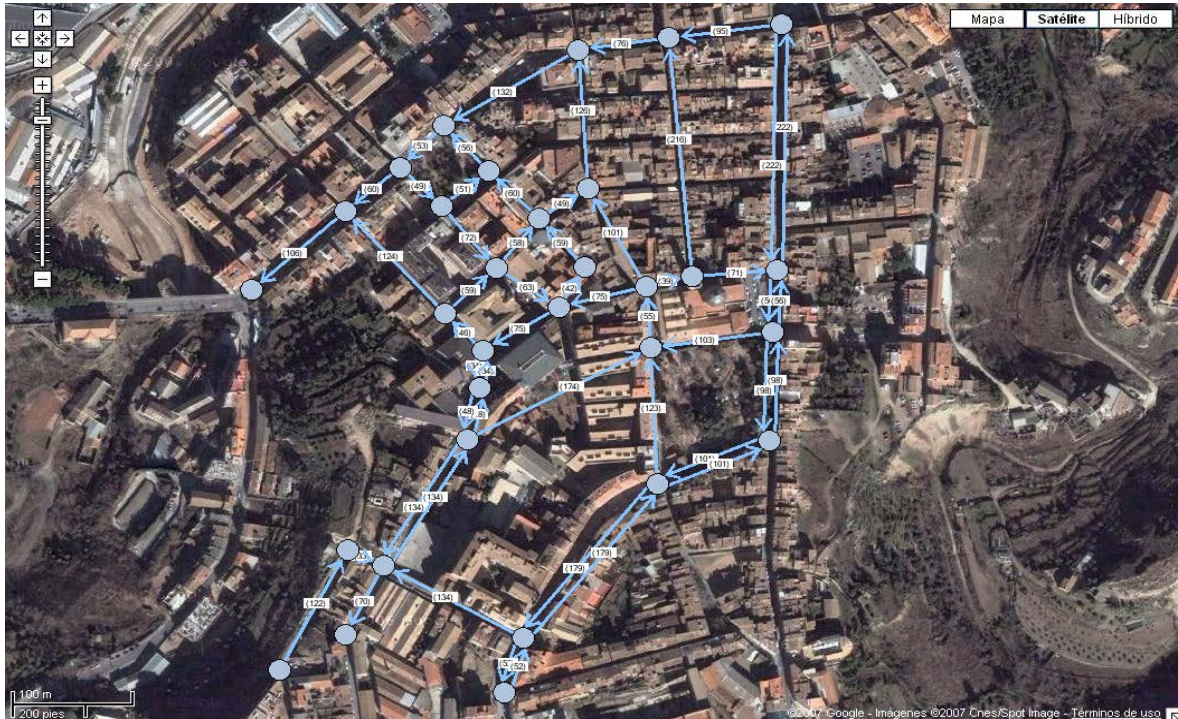


Figura 1.1: Ciudad representada por un grafo.

Matemáticamente, el problema puede ser descrito como

$$\min_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ l_j \in L \quad \forall j=1, \dots, k}} c(k, l_1, \dots, l_k, f_1, \dots, f_k, K_1, \dots, K_k) \\ \text{s. a. } P_{ij} \geq D_{ij} \quad \forall i, j$$

Donde c denota la función de costos, k el total de líneas con que contará el sistema, l_j será la ruta de la j -ésima línea, f_j su frecuencia y K_j la capacidad de sus vehículos. Se denotará por L al conjunto de todas las posibles rutas, mientras que D representa a la matriz O-D y P a la cantidad de pasajeros que el sistema es capaz de transportar; así, la última restricción exige que el sistema pueda satisfacer la demanda existente por transporte público. Notar que implícitamente se está asumiendo que en este caso, la definición de una línea estará dada por su ruta, su frecuencia y su capacidad.

Evidentemente hay varias ambigüedades en la definición de este problema. Por ejemplo, la función de costo a considerar ¿qué tipo de gastos incorpora? ¿Cómo se calcula? Respecto a las líneas a ser escogidas, ¿cuáles son las rutas factibles? Y sobre la restricción de satisfacer la demanda, ¿es esta

demanda fija? ¿Cómo se define la oferta para un par O-D? Estas preguntas dan una muestra de la complejidad del problema a tratar.

Hay varios otros factores que podrían incorporarse, como son las ya mencionadas diferencias dentro de una línea, o ciertas restricciones presupuestarias. Por último, habiendo definido todo lo anterior, no es claro que el problema sea directo de resolver; varios factores pueden influir, pero principalmente la inmensa cantidad de rutas posibles, hacen que la dimensión del problema sea inmanejable para cualquier red mediana o grande.

Existen diversas formas de abordar el problema anterior. La siguiente revisión bibliográfica da cuenta de variados estudios en ese sentido. Cabe señalar que los estudios aquí citados se basan en gran parte en las revisiones realizadas por Guihaire y Hao (2008) y por Kepaptsoglou y Karlaftis (2009).

En el actual estado del arte de la investigación sobre diseño de estructuras de líneas para buses en transporte público, a grandes rasgos es posible distinguir dos tipos de acercamientos. Por un lado, quienes se preocupan de resolver el "problema genérico", es decir, que toman redes genéricas (en general un grafo no dirigido² cualquiera, al que se le piden condiciones mínimas de conexidad). Este problema es altamente complejo, en el sentido de que su solución exacta requeriría tiempos computacionales extremadamente altos. De hecho, Quak (2003) y Schoebel y Scholl (2008) muestran que es un problema NP-duro en algunas de sus formulaciones. Por ello, la mayoría de los trabajos en el área buscan desarrollar distintas heurísticas para encontrar algún tipo de solución, ya sea con algoritmos que operan directamente sobre el grafo o con la resolución aproximada de un problema de programación lineal (PPL). En ambos casos, las funciones de costo utilizadas varían, aunque la mayoría considera tanto a los usuarios como a los operadores. Cabe destacar que en esta mirada casi todos los estudios omiten el cálculo de las frecuencias de las líneas, considerándolo como un problema posterior a la determinación de las estructuras de líneas. De esta manera, presumen que para el cálculo de las frecuencias las rutas de las líneas de buses son un dato conocido. Separando la determinación de rutas óptimas con el cálculo de sus frecuencias el análisis se hace más simple, pero es importante tener en cuenta que también es menos preciso, pues que una estructura sea mejor o peor que otra depende fuertemente de cuáles sean las frecuencias asignadas.

En el otro extremo están las investigaciones en redes específicas y simplificadas, que en muchos casos admiten soluciones exactas. Con ellas es

² Podría parecer más natural trabajar con grafos dirigidos, es decir, donde cada arco tiene una dirección. Sin embargo, el utilizar grafos no dirigidos da mayores libertades, pues permite identificar si ajustar las direcciones de las calles tiene impacto relevante en el sistema de transporte público. El ajuste a la estructura vial, de ser necesario, puede realizarse mediante pequeños cambios en las rutas.

posible apreciar ciertos fenómenos, como la relación entre afluencia total de pasajeros y preponderancia de líneas directas o de estructuras que priorizan los trasbordos. Sin embargo, no son aplicables al problema real y su simpleza hace imposible incorporar ciertos fenómenos interesantes al fusionar demasiados nodos y pasajeros, como la existencia de varias rutas posibles para un mismo par O-D, la combinatoria entre distintas líneas para cubrir de formas diferentes la demanda, entre otros.

Lo anterior sugiere la existencia de un espacio "intermedio". Es decir, la definición de una forma urbana basada en la literatura sobre ciudades y que permita incorporar suficientes fenómenos interesantes y relevantes para la estructura de transporte público. Sin embargo, como se verá a continuación, los trabajos que existen se basan en redes que se limitan a algunas familias específicas, sin explicar por qué con ellas sería posible aproximarse de una u otra forma a ciudades reales. En este caso algunas resoluciones se basan en heurísticas y otras en cálculos exactos, aunque usualmente restringiendo a priori el conjunto de líneas posibles.

Se estudian primero aquellos modelos en redes genéricas, haciendo un pequeño resumen de los diferentes enfoques y heurísticas que se han construido para intentar resolverlo, haciendo especial énfasis en la formulación del problema. Seguidamente, se revisan las redes más simples y la evolución de los trabajos en ese mundo, lo que puede servir como guía de cómo avanzar y complejizar otros enfoques. Luego, se estudian las redes intermedias, donde se encuentran básicamente dos tipos de modelos: ciudades concéntricas y ciudades en forma de grilla, con mayor o menor grado de homogeneidad en los pares O-D. En estos casos se trabaja con redes que responden a algún tipo de estructura, y se optimizan ciertos parámetros. En todos los casos se estudian también los tipos de costos incorporados y de qué forma los consideran. Por último se propondrá, en base a la revisión bibliográfica, una forma para hacer avanzar la capacidad de enfrentarse al problema del diseño de estructuras óptimas de estructuras de línea para el transporte público.

La forma de clasificar cada estudio fue la siguiente: un estudio se considerará en redes generales cuando su metodología funciona en grafos cualquiera, quizá con algún mínimo grado de conexidad o regularidad. Una red se considera simple cuando, por la naturaleza propia de la red (y de los supuestos sobre la estructura de la demanda), el diseño de transporte colapsa a unos pocos parámetros, reduciendo así notoriamente la complejidad del sistema. Una red intermedia es una red que sigue siendo suficientemente compleja como para poder diseñar una cantidad inmanejable de estructuras distintas, pero a la que se le exigen ciertas restricciones importantes. Cabe señalar que en estos casos, muchas veces el modelador decide a priori optimizar en alguna sub-familia ad hoc de estructuras de líneas, y por lo mismo se pueden realizar análisis similares a los que se

hacen en las redes simples, sin embargo, la diferencia es que en este caso es decisión del modelador y no una consecuencia natural de la red.

1.1 Heurísticas en redes generales

Este enfoque considera un grafo $G = (N, A)$. Es usual que tantos los orígenes como los destinos estén restringidos a subconjuntos de N , y que la demanda sea fija para cada par O-D, aunque en algunos casos la demanda puede ser además dependiente de la calidad del servicio. La diferencia entre los distintos artículos tiene que ver con la forma concreta en que se plantea y se resuelve el problema, incluyendo por ejemplo distintas funciones objetivo, distintas formas de incorporar el análisis sobre las frecuencias y distintas heurísticas. Aquellas diferencias serán resumidas a continuación.

Para la función objetivo en general son dos los agentes involucrados: los operadores y los usuarios. El costo para los operadores es siempre el costo monetario directo; para los usuarios se encuentran el tiempo total, la suma de tiempos ponderados, el número de trasbordos, y combinaciones lineales de los mismos. Hay unos pocos artículos (y referidos a trenes, donde el análisis es similar) que consideran solamente el costo de los operadores, sujeto a satisfacer la demanda, como lo hacen Goossens et al (2001). La mayoría de los artículos considera el costo total, es decir la suma de operadores y usuarios, pero varía la forma de considerar a cada uno. Pattnaik et al (1998), al igual que Ceder y Wilson (1986), suman el costo de los operadores (proporcional a la flota) con un costo proporcional al tiempo total de viaje, calculado sumando el tiempo en el vehículo, el tiempo de espera y el tiempo en trasbordos para cada pasajero; Ceder y Wilson (1986) exploran también qué sucede si se omite a los operadores y a los tiempos de espera. Quak (2003) desglosa ambos aspectos; para el costo de los operadores considera el total de buses-hora del sistema y la cantidad de ciclos de cada línea, mientras que para los usuarios considera el número total de líneas³ sumado a los tiempos de viaje, los que son calculados mediante simulaciones (donde considera no solamente el promedio de los tiempos de viaje simulados, sino que también el promedio de los cuadrados de esas cifras y también el tiempo máximo de viaje). Finalmente, Borndörfer et al (2005) consideran para los usuarios su tiempo total de viaje, y para los operadores incorpora un costo fijo por cada línea y una componente proporcional a la frecuencia de la línea; sus restricciones son solamente de capacidad de buses y arcos.

Existen formas alternativas de combinar costos de usuarios y operadores. Así, Schoebel y Scholl (2008) minimizan una combinación lineal del tiempo

³ Considerar el número total de líneas se hace relevante porque en su manera de resolver el problema podrían aparecer demasiadas líneas muy similares entre sí, lo que sería muy incómodo para ser memorizado por los pasajeros.

total de viajes y del número de trasbordos de cada usuario, sujeto a una restricción presupuestaria (es decir, imponiendo una cota máxima para el costo de los operadores), pero en este caso asume que para cada línea se conoce a priori cuánto costaría incorporarla. Notar que al incluir esta restricción, el costo de los operadores se incorpora pero de forma indirecta. Dubois et al (1979) dividen la solución en dos pasos, la elección de calles y luego la elección de líneas. Para lo primero se supone un presupuesto para infraestructura (que es la forma en la que se incorporan los costos de los operadores), y con esa restricción se minimiza el tiempo total de viajes suponiendo que serán directos; para la elección de líneas, si bien no se explicita la función de costos, el algoritmo que utilizan busca un equilibrio entre pocas líneas y pocos trasbordos. Van Nes et al (1988) maximizan la cantidad de pasajeros que se incorporan al sistema de transporte público - utilizando un modelo tipo gravitacional que incorpora la partición modal⁴- y sus viajes directos, argumentando que más pasajeros significa mayor calidad de servicio.

Entre quienes estudian el problema genérico, una mayoría define las líneas solamente mediante sus rutas, omitiendo determinar sus frecuencias. Siguen la lógica de diseño de transporte público en pasos: diseño de la estructura de líneas, definición de frecuencia por línea, y luego las agendas por bus y conductor. Para ello, es necesario omitir la frecuencia (y en consecuencia, los tiempos de espera y las flotas) de las funciones de costo.

Sin embargo, existen algunas excepciones donde la determinación de las frecuencias se hace en forma simultánea con la estructura de líneas. Es claro que teóricamente es más completo, pues permite incorporar el tiempo de espera⁵ en la comparación entre estructuras de líneas diferentes, no obstante, hace el problema más complejo⁶.

Dentro de los que incorporan frecuencias al problema, Borndörfer et al (2005) lo hacen incorporándola como una variable dentro del PPL que plantean, siendo parte de la función objetivo y de las restricciones, pues existen capacidades que respetar. El enfoque para ingresar las frecuencias de Pattnaik et al (1998) es similar, aunque además incorporan restricciones de frecuencia mínima. Ceder y Wilson (1986) comparten la misma orientación.

La última diferencia está en cómo afrontar el problema. Dado que en sus diversas variantes es de alta complejidad, todo lo que existe son heurísticas,

⁴ Partición modal se refiere a la porción de pasajeros de cada par O-D que utiliza cada modo de transporte.

⁵ En general se considera que el tiempo que el usuario pasa en el paradero es mucho más molesto que el tiempo en el vehículo. Luego, no incorporar el tiempo de espera significa despreciar un elemento relevante en la estructura de costos.

⁶ Más adelante se verá que dado un conjunto de líneas, un problema relevante es saber predecir qué línea usará cada pasajero. Cuando la frecuencia no se incorpora, aquello no es relevante, pues solamente importa el tiempo de viaje y es coincidente entre todas las líneas candidatas, pues son candidatas precisamente por minimizarlo.

algunas directamente en el grafo, y otras buscando resolver un PPL entero; por lo mismo, se enumerarán a grandes rasgos los métodos, teniendo en consideración que el objetivo de esta revisión no es desarrollar heurísticas nuevas. Ceder y Wilson (1986) utilizan un algoritmo tipo glotón⁷: van agregando líneas directas entre los pares O-D con mayor demanda, finalizando cuando todos los pares estén conectados por alguna ruta cuya distancia no sea demasiado más larga que la de la ruta óptima. Otros algoritmos glotones son los que desarrollan Dubois et al (1979), quienes proponen 3 heurísticas para determinar el conjunto de calles, dos de ellas basados en ir retirando nodos si el hacerlo no aumenta demasiado los tiempos, y el tercero que va agregando aquellos que sí los disminuyan en forma significativa. Posteriormente trabajan un algoritmo para encontrar la estructura de líneas, tomando como principio el tener líneas que sean bastante directas y que sirvan a muchos pasajeros, para luego trabajar de la siguiente forma: primero seleccionar líneas directas (con algún criterio, como menor tiempo o mayor afluencia) hasta que toda la red esté conectada, luego buscar los pares O-D que tengan mayor tiempo perdido por conexiones, y conectar directamente esos pares hasta que tales conexiones sean suficientemente bajas. Finalmente, suprimir las líneas que hayan quedado inutilizadas. Por otro lado, Pattnaik et al (1998) usan algoritmos "genéticos", que construyen diversas rutas entre los nodos que definen como terminales; seguidamente se rankean según el tiempo que tardan, se generan nuevas rutas al azar con probabilidades que dependen del ranking, y se itera hasta converger.

Resolver directamente un PPL entero es lo que hacen Borndörfer et al (2005), mediante generación de columnas. Para hacer el problema manejable, ellos optimizan sobre un conjunto prefijado de posibles rutas simples entre los nodos terminales. No es claro cómo escoger tal conjunto. Van Nes et al (1988) también trabajan directamente con la formulación como problema de programación, aunque en su caso la función objetivo no es lineal. Para solucionarlo, utilizan una heurística basada en ir aumentando la frecuencia de aquella línea, del conjunto total de posibles líneas, cuyo aporte marginal a la búsqueda de nuevos pasajeros es la mayor, hasta que se viole alguna restricción. También se presenta el problema de que el conjunto de líneas posibles no tiene una construcción clara.

En síntesis, se observa que no existe una forma única de considerar los costos, pero que sí hay ciertos elementos que se repiten bastante. Así, lo usual es involucrar tanto a los operadores como a los usuarios. El tamaño de la flota es el factor más relevante para los primeros, mientras que para los usuarios es el tiempo total de viaje, que en ocasiones incorpora tiempos de espera y trasbordos.

⁷ Es decir, un algoritmo que en cada paso toma la decisión que escoge la opción que más permite acercarse a algún objetivo en ese mismo instante, pero sin una visión global respecto a cómo van interactuando los distintos pasos entre sí.

Para la resolución, es interesante observar que el uso de algoritmos glotones fuerza un análisis local, pero impide construir estrategias globales; por otro lado, la resolución vía PPL tiene asociadas otras dificultades como la definición de las rutas posibles. La característica común que comparten todas las heurísticas es que el análisis desarrollado para estudiar su rendimiento se basa exclusivamente en evidencias empíricas (probar el método en uno o dos casos específicos y comparar), mas sin ningún estudio ni resultado teórico que garantice ni un buen resultado (por ejemplo, alguna cercanía garantizada al óptima o alguna cota máxima) ni tiempos admisibles.

1.2 Modelos en redes simples

El contexto general de los artículos que consideran redes pequeñas responde a un análisis exacto y exhaustivo de todas las distintas estructuras de líneas que pueden ser utilizadas en una red. Sin embargo, dada la complejidad de hacerlo en redes cualquiera, se utilizan redes simples; de este modo, es posible analizar cómo ciertas variables específicas inducen uno u otro resultado para poder concluir ciertos fenómenos, pero se tiene la limitante de estar sujetas a una red particular, y luego se hace necesaria una segunda lectura para determinar si son conclusiones extrapolables o no. Es interesante señalar que a diferencia del contexto anterior, donde había varios modelos que diferían en las heurísticas y en las funciones de costo, en este contexto es claro que existe un desarrollo cronológico tendiente a ir incorporando más complejidades en el análisis, ya sea incorporando nuevas variables (como distancia entre paraderos, o elasticidad en las demandas) como en el ir avanzando a redes menos sencillas.

Los modelos más simples estudian fenómenos en una línea. El primero es el de Mohring (1972) que estudia frecuencias óptimas para una línea única. En este caso no tiene sentido la pregunta sobre estructuras de líneas (pues además no hay paraderos ni tiempo por paradas en el modelo), pero su metodología sirve de base para todos los trabajos siguientes. Posteriormente Jansson (1980) incluye el tiempo que es tomado por cada pasajero por subir y bajar del bus, lo que influye en los costos de los usuarios (mayores tiempos de viaje) y de los operadores (mayores tiempos de ciclo que significan mayor flota), con lo que obtiene nuevas fórmulas para las frecuencias, pero aun sin considerar el problema de la determinación de la estructura de línea óptima, por existir una única posibilidad. En ambos casos se rescata la clásica regla de la raíz cuadrada entre frecuencias y afluencia, aunque cuando los tiempos de subida y bajada son muy altos, entonces se acerca a una regla lineal.

Mohring (1976), si bien no estudia diferentes estructuras de líneas, da un primer paso en complejizar el diseño al optimizar también sobre el número de paraderos (equidistantes) óptimo en una línea, notando que estos

disminuyen el tiempo de acceso pero aumentan el tiempo de viaje y el tiempo de ciclo. No encuentra solución óptima en forma analítica en este caso.

El primer artículo que considera redes más complejas es el de Kocur y Hendrickson (1982), donde se considera una ciudad engrillada en la que todos los usuarios deben llegar a una vía principal horizontal, por lo que lo relevante, en términos de estructura, es determinar la distancia entre las líneas verticales. Sin embargo, también optimiza según frecuencias y según tarifas, esto último porque es de los pocos artículos que considera que la demanda es elástica⁸. Estudia además 3 tipos de funciones objetivo, a saber, la ganancia del operador, una combinación entre la ganancia del operador y el beneficio del consumidor (que puede calcularlo directamente por conocer la función de demanda) y el puro beneficio del consumidor sujeto a alguna restricción presupuestaria. Finalmente, el costo de los operadores lo supone proporcional a los minutos-bus que pasa la flota en la calle, con lo que es posible expresarlo en función de la frecuencia y de la separación entre las líneas verticales. Es interesante que en este caso se obtiene una regla cúbica en lugar de cuadrada, salvo cuando se maximiza solamente el beneficio del consumidor, donde se recupera la raíz cuadrada. Chang y Schonfeld (1991) desarrollan un trabajo similar, dividiendo el rectángulo con el que modelan la ciudad en zonas divididas verticalmente, con troncales (a velocidad alta) y alimentadores, con velocidad más baja y que se mueven en una sola zona, y estudiando tanto demanda elástica como demanda paramétrica, e incluyendo un análisis multiperíodo.

En otra línea de investigación, Oldfield (1988) busca determinar el tamaño óptimo de buses, con una sola ruta. Lo interesante de este trabajo es que también considera la demanda como endógena y luego puede considerar el beneficio del consumidor, y además incorpora la tasa de ocupación (qué tan lleno va el vehículo) como un factor que incide en el tiempo de espera, por la probabilidad de que un bus pase lleno. Una línea similar desarrollan Delle Site y Filippi (1998), quienes consideran cómo combinar líneas cortas con líneas largas, donde el tamaño de los buses pasa a ser también un factor (se asume que el tamaño de los buses es uniforme dentro de una misma línea). Consideran además que la demanda es elástica por lo que la tarifa también es una variable.

Hurdle (1973) realiza un estudio en un contexto bastante similar al de Kocur y Hendrickson (1982), pero incorpora además la variable temporal. Más concretamente, estudia las líneas que llevarán a la línea principal (aunque en este caso no asume que la distancia entre líneas tenga que ser uniforme), pero también los horarios para cada uno de estas líneas. En términos de costos, considera costos totales, donde para el pasajero lo único relevante es

⁸ Utiliza una de las típicas funciones de demanda, en este caso lineal trunca, dependiente de las variables ya mencionadas.

cuánto debe caminar hasta su paradero más próximo. En términos matemáticos también es interesante que agrega una visión continua de la demanda, tanto en términos espaciales como temporales, por lo que luego todos los tratamientos y los costos se trabajan también de esa forma.

El siguiente trabajo que considera redes aún simples, pero más complejas, y que genera estructuras de líneas específicas (intuitivas) y compara sus rendimientos es el de Jara-Díaz y Gschwender (2003). Describen cómo extender el análisis de Jansson (1980) para encontrar frecuencias y flotas óptimas en redes genéricas, y luego aplican este método a una red particular en forma de cruz, con 3 matrices O-D, para comparar una estructura de líneas directas con otra de corredores, y evaluar en qué caso cada alternativa es mejor. A grandes rasgos, el resultado más interesante es que para los operadores siempre es más conveniente las líneas directas, al igual que al considerar costo total si las demandas son suficientemente grandes. Jara-Díaz y Gschwender (2003b) también profundizan en mayor complejidad, en este caso no variando la red (pues no estudian ninguna en particular), sino que en la estructura de costos: incorporan en el tiempo de viaje un factor que depende de la tasa de ocupación del bus, entendiendo que un viaje en un bus más lleno es más desagradable. Además plantean un modelo más general, que incluye externalidades (no explícitas, que incluyen por ejemplo el riesgo de accidentarse) y también la decisión sobre paraderos como Mohring (1976), aunque no lo resuelven.

Los esfuerzos siguientes, llevados a cabo por Jara-Díaz y Gschwender (2009) y por Jara-Díaz et al (2012), utilizan el mismo método del párrafo anterior, pero se preocupan fundamentalmente de la comparación entre incluir o no a los usuarios para la determinación de la estructura óptima y de las consiguientes frecuencias. En ambos casos se incorpora al costo de los operadores su dependencia del tamaño del vehículo, lo que permite determinar frecuencias óptimas desde el punto de vista exclusivo del operador. Jara-Díaz et al (2012) estudian también un grafo que se reduce a un camino de 3 nodos, donde el primer nodo es el único origen y la demanda es balanceada; definen 4 posibles estructuras de líneas y estudian para distintos niveles de demanda y de desbalance cuál es la óptima según costo total y según solamente costo de los operadores. Se dan cuenta que el no considerar a los usuarios significa menores frecuencias, pero también puede significar distintas estructuras de líneas. Gschwender et al (2013) estudian una nueva red en forma de "Y", con 3 nodos orígenes, de modo de poder incluir dispersión en la generación de viajes además de un desbalance entre los viajes que salen de la periferia (los extremos de la "Y") y aquéllos que parten desde el nodo central.

Cabe mencionar por último el trabajado desarrollado por Jara-Díaz et al (2008). La red es una sola línea con múltiples paraderos, pero el aporte interesante es que discuten cómo modelar cuando no existen los datos para cada par O-D, sino que solamente en forma agregada.

Como síntesis, se observa que es posible encontrar frecuencias óptimas dada una estructura de líneas, aunque teniendo en cuenta que el problema de la asignación⁹ en estos casos es inusualmente sencillo por la simpleza de las redes. Dado que la cantidad de estructuras es siempre pequeña, es posible hacer la comparación una a una. Se observan ciertas conclusiones genéricas, como son que niveles altos de demanda favorecen líneas directas y que si existen desbalances importantes en los niveles de demanda para distintos pares O-D, tiene sentido el potenciar líneas específicas para aquellos pares más demandados.

La conclusión más interesante tiene que ver con la metodología para determinar la estructura óptima. Si bien ésta no es aplicable a redes generales, pues se hace imposible la comparación una a una y la asignación de pasajeros puede también exigir tiempos demasiado altos, sí se logra mostrar que teniendo una cantidad pequeña de estructuras candidatas a ser óptimas, y una forma de asignar a los pasajeros, entonces se puede determinar la estructura óptima sin importar la forma y complejidad de la red.

Cabe rescatar también que para determinar los costos, se incorporan los mismos elementos señalados en la sección anterior, pero se agregan además factores que dependen de las frecuencias como son el tiempo de espera y las capacidades.

1.3 Estudios intermedios

Enfocar el problema de acuerdo a una de las dos visiones anteriores es lo más usual, pero existen ciertos esfuerzos que se ubican en medio. No se resuelven todas las redes como lo hacen quienes desarrollan heurísticas, pero la red en la que se trabaja tiene una complejidad suficiente para admitir una cantidad enorme de estructuras de líneas posibles. La propia red en ocasiones estará caracterizada topológicamente por una cantidad pequeña de parámetros, de modo que el grafo no es uno específico pero sí tiene importantes restricciones. La idea es que sea una red que aproxime en algún sentido a la ciudad, pero asumiendo ciertas uniformidades.

Los dos modelos de redes más usados son una ciudad tipo grilla y una ciudad concéntrica, ambos casos pudiendo tener bastantes matices. Al igual que en los casos anteriores, existen diversas formas de enfrentar la modelación, en términos de la función objetivo, en los costos utilizados, entre otros.

⁹ El problema de la asignación se refiere a saber qué línea tomará cada pasajero si suponemos conocida la estructura de líneas, con sus respectivas rutas, frecuencias y demás características. Suele ser un problema necesario de resolver para poder calcular los costos de los usuarios, y en modelos más sofisticados, afectan también los costos de los operadores, por su incidencia en las capacidades de los buses, tiempos de ciclo de las líneas, entre otros efectos.

Una ciudad en forma de grilla es lo que considera Daganzo (2010). Supone además que la distribución de viajes es uniforme, tanto en su origen como en su destino, construyendo a su vez una ciudad totalmente uniforme¹⁰. En su búsqueda de la estructura óptima, distingue en primer lugar dos opciones extremas: que en cada punto de la grilla solamente pasen buses en una dirección (con lo que se puede construir una estructura de tipo *hub & spoke*¹¹ si se orientan correctamente las líneas de modo tal que todas lleguen al centro del grafo), o en ambas, con lo que existe la posibilidad de hacer la ruta más corta para cada par O-D. A nivel intuitivo, la primera opción parece más favorable para los operadores y la segunda para los usuarios. Por lo mismo, plantea luego un sistema al que llama "híbrido", que define un cuadrado interno de la grilla donde se tendrá la cobertura completa, y afuera de tal cuadrado una dirección por punto. Así, la optimización se hace en tres parámetros: la distancia espacial entre líneas, la distancia temporal (equivalentemente, en la frecuencia) y en el tamaño del cuadrado interior.

Newell (1979) también estudia grillas. Propone dos estructuras, la primera en la que cada línea recorre la grilla sólo horizontal o verticalmente. Para esta estructura explica que no es claro que la estrategia óptima imponga frecuencias iguales frente a una demanda homogénea, pues priorizar uno de los sentidos (horizontal o vertical) puede ser más eficiente. En la segunda estructura todo el mundo traspasa exactamente una vez, con una gran avenida horizontal en la mitad de la ciudad, y líneas que atraviesan la ciudad verticalmente, pero desviándose en tal avenida. De este modo, en esa avenida la gran mayoría requiere traspaso. Compara ambas estructuras, encontrando que cuál es mejor depende tanto de la relación entre los parámetros asociados a los costos como de la geometría del rectángulo.

Es interesante notar que en los dos artículos recién mencionados, las estructuras que consideran menos líneas implican viajes más largos, por lo que el tiempo de viaje en el vehículo promedio pasa a depender fuertemente de la estructura escogida, fenómeno que en general no se observa en los estudios en redes simples caracterizados en la Sección 1.2.

Tirachini et al (2010) analizan una ciudad de tipo concéntrica. Consideran solamente líneas radiales, suponiendo que toda la demanda va hacia el centro de la ciudad. Para agregar mayor flexibilidad presumen además que existe un círculo interior, en el cual la demanda es distinta que en el anillo que queda fuera, siendo uniformes al interior de cada una de estas dos zonas. Así, optimizan según ángulo entra las líneas y según frecuencias. Un trabajo similar es el desarrollado por Byrne (1975), sin embargo en este

¹⁰ Desechando por ejemplo la presencia de un CBD o *Central Business District*. CBD es como se conoce en la literatura al centro de la ciudad, que juega un rol en la mayoría de los modelos. Esta discusión será profundizada en el Capítulo 2.

¹¹ Una estructura tipo *hub & spoke* concentra a todos los pasajeros desde sus orígenes en un punto *hub* que juega el rol de estación de traspaso. En ese punto los pasajeros toman buses a sus lugares de destino.

caso la ciudad es una porción de un círculo y no el círculo completo. Además, en un primer análisis no se hacen supuestos sobre uniformidad en las demandas; esto trae como consecuencia que cada línea (las que también supone radiales) tendrá su propia frecuencia. La asignación de pasajeros en este caso es más compleja, para solucionarla se zonifica la ciudad de acuerdo a las curvas de indiferencia para los pasajeros, suponiendo conocidos los ángulos entre líneas y sus frecuencias.

Respecto a la estructura de costos, Daganzo (2010) considera a usuarios y a operadores. Para los operadores, además del tamaño de flota y del total de kilómetros-bus recorridos, se preocupa de la infraestructura a construir. Para los usuarios, incorpora el tiempo de viaje (que incluye espera por ascenso de los pasajeros al autobús y pérdida de velocidad por las paradas), de acceso, de espera, y también el número de trasbordos. Debe asumir varios supuestos para poder asignar: todo usuario irá siempre al paradero más cercano al origen y se bajará en el más cercano al destino, usará la ruta más corta y con menor cantidad de trasbordos, si es necesario trasbordar lo hará a la primera oportunidad y, cuando aplique, elegirá la dirección del primer bus al azar. La resolución sólo la hace en términos numéricos. Newell (1979) utiliza una estructura de costos estándar (para los usuarios tiempo de viaje, acceso y espera, para los operadores proporcional a los buses-kilómetro) y agrega una penalización por trasbordo por pasajero.

Tirachini et al (2010) también consideran costos de operadores y usuarios, pero existen varios elementos propios que son interesantes: para los usuarios, incorpora tiempo de acceso, y para la espera, considera dos opciones, a saber, frecuencias altas y un análisis usual, o frecuencias bajas (frecuencias bajo un umbral predefinido) pero con horarios de pasada prefijados y conocidos, que presentan dos expresiones distintas, explícitas, del costo. Para el tiempo de viaje, incluye el tiempo por la subida y bajada de pasajeros, además de ponderarlo por un factor de desagrado según cuan lleno esté el vehículo. Para los usuarios, hace un análisis de los distintos factores que producen costos, dependiendo así de la flota máxima, de la cantidad de líneas (por infraestructura), de los vehículos-hora y de los vehículos kilómetro. Además impone restricciones de capacidad máxima de los vehículos y de frecuencia máxima para las líneas.

En el caso de Byrne (1974) también se suman costos de operadores y usuarios. Para los usuarios, cuya densidad está definida puntualmente, se calcula mediante una integral que incorpora tiempo de acceso, tiempo de viaje y tiempo de espera. Para los operadores, supone que el costo (por unidad de tiempo) es proporcional a la flota para cada línea. Al resolver le quedan ecuaciones integrales, imponiendo por ejemplo que el total del costo de los usuarios asociado al tiempo de espera de una línea, debe ser igual al total del costo para el operador de la misma línea. Además trabaja el caso en el que la densidad es radial, donde encuentra soluciones explícitas en función

del primer y segundo momento de la densidad. Por último, analiza el caso general incorporando además una restricción de flota.

Finalmente, existen algunos estudios que analizan una sola vía, pero donde ésta tiene varios paraderos y diseñan estrategias tipo líneas expresas, líneas cortas y otras que deciden en cuáles detenerse y en cuáles no. Si se asume a la ruta como un elemento caracterizador de la línea, significa que estas estrategias son en rigor varias líneas, por lo que se está diseñando también una estructura de líneas, complejizando lo que antes definimos como redes simples. Tirachini et al (2011) proponen dos líneas, una completa y una corta. Modelan para encontrar las frecuencias óptimas para ambas líneas y los extremos óptimos para la línea corta, minimizando costo de usuarios y operadores (incluyendo así tiempo de espera y tiempo de viaje). Tsao y Schonfeld (1981) analizan el zonificar un corredor para así tener servicios locales y servicios expresos, optimizando también al mismo tiempo la frecuencia.

En resumen, se puede observar que en este contexto hay mayor consenso en el considerar tanto a operadores como a usuarios en el diseño de los costos, y en el incorporar las frecuencias desde un comienzo. Sin embargo, la mayor complejidad de la red ya impone que la búsqueda de una estructura óptima se haga en sub-familias dadas, y no se plantee el encontrar estructuras óptimas en general.

Con esta complejidad ya empiezan a asomarse algunos problemas en la asignación de pasajeros, así como la posibilidad de que diversas rutas signifiquen diversas posibilidades respecto al tiempo en el vehículo para un mismo par O-D. Este último fenómeno no se apreció en las redes simples, pese a ser un hecho frecuente en las ciudades reales.

Es interesante observar que los dos modelos de redes mencionados, la grilla y la ciudad concéntrica, presentan virtudes y carencias antónimas. Así, mientras la ciudad concéntrica permite la existencia de un CBD, hace imposible la presencia de otros puntos que también atraigan viajes. Por el contrario, la grilla permite combinaciones mucho más complejas, pero en las cuales no hay nodos o arcos que jueguen roles más preponderantes, a menos que la matriz O-D así lo imponga. Esta mayor complejidad también impone que las soluciones presentadas necesiten mayores supuestos y familias más restringidas en las cuales optimizar.

1.4 Enfoque y estructura de este trabajo

El análisis hecho en las secciones anteriores da cuenta de que existen dos formas principales de afrontar el problema de construcción de estructuras de línea óptimas para el transporte público. Estos dos enfoques no tienen ninguna relación ni diálogo entre sí, sino que se han desarrollado en forma

paralela y obteniendo resultados que responden a objetivos diferentes y por lo tanto no se pueden comparar.

Los resultados para redes simples entregan intuiciones y descubren fenómenos, pero éstos no son incorporados en absoluto cuando se trabaja con heurísticas en redes cualesquiera. Más aún, para estas heurísticas la estructura de la red y la matriz O-D son solamente elementos que se consideran para algunos de los pasos del algoritmo, pero no en la definición del algoritmo en sí, con lo que se pierde toda posibilidad de integración de fenómenos urbanos en general, y de aquéllos estudiados a nivel de redes simples en particular.

La totalidad de modelos estudiados son rígidos, pues no son capaces de incorporar en sus resoluciones las diversas formas urbanas posibles. Pareciera posible entonces construir en forma sistémica una forma de afrontar el problema en alguna red intermedia, que permita justificadamente aproximar ciudades reales de forma paramétrica y también ligar los dos enfoques ya descritos.

El principal aporte de las redes simples para este estudio será entregar una metodología, además de ciertas intuiciones que permitan describir mejor a priori qué estructuras de líneas darse para la comparación, en el supuesto que sea imposible analizar todas las estructuras de líneas factibles. Esto, sin perjuicio de también buscar la conexión en el otro sentido, es decir, estudiar cómo responderían los algoritmos ya existentes para imaginar cómo diseñar heurísticas nuevas que incorporen los resultados de los estudios en redes simples e intermedias.

Para avanzar en esta dirección, la literatura entrega elementos que muestran claramente cuales variables son las más importantes al diseñar, identificando cuáles son más relevantes para usuarios y cuáles para operadores. Por supuesto las rutas de las líneas son una variable clave, pudiendo ser descrita en términos de sus secuencias de nodos y arcos, o mediante alguna simplificación que permita caracterizarlas por uno o dos parámetros (como los ejemplos explicados respecto a distancia angular u horizontal entre líneas). Esta variable es relevante para el costo de usuarios y para el de operadores, como se explicará más adelante. Las otras variables que son consideradas en la mayoría de los artículos y cambian cualitativamente la capacidad del modelo son las frecuencias, y en menor medida la capacidad de los buses y la distancia entre paraderos. En estos últimos 3 se observa que existe una especie de *trade off* entre operadores y usuarios.

Las variables antes descritas definen los costos de usuarios y también los de operadores en la mayoría de los estudios previos. Así, para los usuarios los principales componentes del costo son el tiempo de viaje (que depende del tiempo arriba del vehículo, consecuencia de las rutas de cada línea, y del tiempo gastado como consecuencia de las paradas), el tiempo de espera, el

tiempo de acceso (que depende de la ubicación de paraderos y del diseño de las rutas) y el número de trasbordos (relacionado con las rutas). Por el lado de los operadores son relevantes la flota (que depende de las frecuencias, de las capacidades y de las rutas), la capacidad y, en algunos modelos, la infraestructura.

Con todo esto en mente, el objetivo de este estudio será el proponer una forma de encontrar estructuras de líneas óptimas para redes y patrones de demandas simplificados pero que incorporen características suficientes para reflejar los fenómenos usuales en una ciudad moderna. De esta forma, se busca avanzar en la comprensión de cuáles estructuras de líneas son mejores para qué ciudades, junto con construir puentes entre los enfoques ya descritos.

Para poder llevar a cabo tal objetivo, se partirá definiendo en el Capítulo 2 la estructura urbana, con su red y matriz O-D sobre la cual se realizará el trabajo. Para ello se estudiarán ciertos aspectos de las discusiones urbanas actuales, con centralidad en los que más afectan las decisiones sobre transporte público, como son los niveles de concentración de la ciudad y la estructura topológica de sus calles. Se compararán con las estructuras tipo grilla o tipo ciudades concéntricas, y se identificarán los parámetros libres que definan al grafo y a la matriz O-D con algunos fenómenos urbanos interesantes que se relacionen con la elección de estructura de líneas de transporte público. La estructura urbana a ser definida debe combinar riqueza en los fenómenos que represente y factibilidad en solucionar el problema en ella.

Posteriormente, en el Capítulo 3, se precisará el modelo a ser utilizado, para luego definir las estructuras que se estudiarán en forma exhaustiva. Para cada una de ellas se describirán sus principales características, y se calcularán las expresiones que representen los costos asociados. En el Capítulo 4 serán resueltas en forma numérica, analizando también cómo cambian estas soluciones cuando los parámetros relevantes para la red y la matriz O-D también varían. De esta forma, se podrá analizar cuál estructura es la que mejor responde a los fenómenos urbanos que se logre identificar. Se verá también cuán robusto es el modelo. Todo esto apunta a complejizar los análisis exhaustivos realizados en redes simples, acercándoles a redes reales.

En el Capítulo 5 se analizarán cuáles estructuras emergerían si se aplican algunas de las heurísticas a la misma estructura urbana. De esta forma, se podrá comparar con las estructuras estudiadas previamente y aproximarse a un análisis cualitativo respecto a los sesgos que tengan las heurísticas, identificando qué fenómenos pueden incorporar y cuáles no. Con todo ello, se propondrán temas de investigación futura que permitan también mejorar la lógica con la cual se construyen los algoritmos que buscan solucionar este problema. Por último, en el Capítulo 6 se sintetizarán las principales

conclusiones de este trabajo y con ello sus aportes más relevantes para la resolución del problema de estructuras de líneas óptimas de transporte público.

Capítulo 2: Estudio y Definición de la Ciudad, Red y Patrón de Demanda

"...Aunque las metrópolis ya no sean un fenómeno extraño, en ninguna parte del mundo existe aún un área metropolitana con cualquier carácter visual claro, cualquier estructura evidente. Todas las famosas ciudades sufren la misma expansión sin rostro hacia la periferia."

Image of The City, Lynch (1960).

En la pregunta del diseño de un sistema de transporte público óptimo, la ciudad sobre la cual se vaya a trabajar determina en gran medida las características deseables del mismo. El tamaño de la ciudad, la cantidad y distribución de sus habitantes, la forma de sus redes viales, entre muchos otros factores, definirán qué tan bien se adapte cada posible diseño.

La pregunta particular sobre la estructura de líneas no escapa a esta realidad. Las rutas, frecuencias y capacidades deben ser suficientes para hacerse cargo de toda la demanda, pero además una estructura óptima debe propiciar un desarrollo armónico de la ciudad misma, ser capaz de distinguir economías de escala o de densidad cuando ellas existan, identificar pares O-D prioritarios y utilizar eficientemente la flota, entre otros diversos desafíos.

En esa línea, el objetivo de esta sección será definir la estructura urbana que será utilizada, para luego caracterizar su red y el patrón de demanda sobre esa red, posiblemente ambas definiciones con parámetros libres. Basándose en la literatura, se busca dar estas respuestas de modo tal de aproximarse razonablemente a las ciudades reales, pero manteniendo una simpleza suficiente para poder desarrollar posteriormente un análisis exhaustivo de las estructuras de línea que se vayan a proponer.

Más en concreto, "aproximarse razonablemente" significará identificar fenómenos usuales en la estructura urbana que sean relevantes para el transporte público, y en función de ellos definir el modelo de ciudad sobre el que se trabajará, representado por su red y matriz de demanda, explicitando aquellos fenómenos que no sean incorporados.

Estos dos elementos (red y demanda) son suficientes para poder realizar el diseño de estructura de líneas propuesto como objetivo de este trabajo. La red dará el espacio físico por el cual transitarán los buses, y por lo tanto define tiempos, rutas factibles, posibles paraderos, entre otras eventuales características. El patrón de demanda señala los viajes que el sistema deberá ser capaz de hacerse cargo.

La demanda depende fundamentalmente de las actividades, y las actividades dependen de los usos de suelo que a su vez dependen de los sistemas de transporte. Más aún, la decisión de viajar o no puede estar mediada por el sistema de transporte disponible. En este trabajo se considerará que son elementos independientes y por lo tanto el patrón de demanda será estático. Este supuesto simplifica el problema, pero además es una suposición razonable, pues los cambios relevantes en el patrón de demanda toman plazos largos, y las decisiones respecto a estructuras de línea pueden ser tomadas en plazos suficientemente cortos para adaptarse a los cambios en la demanda. Hacerlo de esta forma, además, permite concentrar el análisis posterior en aquellas variables que son controlables por los diseñadores.

Cabe recordar que al revisar la literatura se encontraron trabajos en redes de complejidad intermedia, como son la grilla en el caso de Daganzo (2010) o ciudades concéntricas para Tirachini et al (2010), por lo que estas estructuras asoman como posibles candidatas.

Una ciudad puede estudiarse desde muy diversos enfoques. Estudios topológicos, geométricos, demográficos, históricos o económicos, son solamente algunos ejemplos. Para el objetivo de este capítulo, el énfasis estará puesto en aquellos elementos que sean relevantes para definir la red y el patrón de demanda. Evidentemente los distintos análisis se entremezclan, sin embargo es posible rescatar diversas conclusiones, especialmente a partir de los análisis topológicos y algunos elementos del análisis económico.

Como advierte la cita del clásico libro de Lynch que abre este capítulo, el intentar definir una forma única de ciudad es un desafío quizá irreal. Sin embargo, el identificar los fenómenos principales y en función de aquello modelar sí es plausible.

2.1 Definiciones topológicas

Una forma usual e intuitiva para representar matemáticamente una red son los grafos. Antes de profundizar en la literatura y los análisis que se han hecho en ciudades reales y sus representaciones gráficas, es importante definir claramente los objetos a ser utilizados. Se hará un breve repaso de la noción general de grafos, para luego definir aquellos aspectos más relevantes para este estudio en particular.

Informalmente, un grafo G es un conjunto de nodos y de arcos que los conectan. Formalmente, G está definido por un conjunto V de nodos o vértices, y un conjunto E de arcos, donde cada elemento e está definido por

un par de elementos de V .¹² En esta sección se notará n a la cantidad de vértices y m a la cantidad de arcos. Sin pérdida de generalidad, se trabajará con grafos conexos, es decir, donde todo par de nodos puede ser conectado mediante una secuencia de arcos del grafo.

Al grafo G se le asocia su matriz de incidencia A_G de dimensión $n \times n$. El elemento (i, j) de la matriz será 1 si el arco ij existe en el grafo y será nulo en caso contrario. Notar que A_G es una matriz simétrica de diagonal nula. La matriz de incidencia, por lo tanto, determina totalmente al grafo G y es una forma alternativa de representación, útil para algunas definiciones matemáticas aunque menos intuitiva que la definición directa de nodos y arcos.

A la hora de transformar una ciudad en un grafo, hay dos representaciones que se utilizan en la literatura y que entregan información relevante:

- Grafo Primal: Es aquél donde los arcos son los segmentos de calle y los nodos son sus intersecciones o extremos. Es la representación directa de una ciudad como grafo, y es la utilizada en la bibliografía estudiada en los diversos artículos del Capítulo 1.
- Grafo Dual: En estos grafos, cada calle es un nodo y dos nodos están conectados si las dos calles se intersectan. Si bien es menos intuitivo, aporta información topológica relevante respecto a la estructura vial, pues respeta la estructura de calles, crucial en cualquier ciudad.

El grafo primal (que por definición es planar¹³) entrega información tanto geométrica como topológica, y es más útil para identificar vértices particularmente relevantes (y por tanto, posibles orígenes o destinos con afluencia mayor). El grafo dual es útil cuando el análisis se centra en las calles; si bien este enfoque pareciera ser más limitado por no considerar los puntos desde donde y hacia donde necesitan transportarse los viajeros, es un grafo que permite entender mejor el espacio en el cual se pueden mover los buses, y complementa la información entregada por el primal, pues el crecimiento de las ciudades y el de su red vial está íntimamente ligado. Cabe destacar que en la literatura la representación dual está sumamente

¹² Si $e = \{i, j\}$ para algún par de vértices i, j , se denotará $e = ij$. En algunas ocasiones el orden importará, luego se tendrá $e = (i, j)$. En este caso se dice que el grafo es dirigido pues los arcos tienen dirección, para este arco sería desde i hacia j . Salvo que se señale explícitamente lo contrario, se supondrá que los grafos son no dirigidos.

¹³ Un grafo se dice planar cuando puede ser dibujado en el plano sin que los arcos se crucen entre sí. Para estos grafos tiene sentido la noción de cara como aquellas zonas que quedan encerradas por los arcos. Formalmente, las caras de un grafo planar G son las componentes conexas acotadas de $\mathbb{R}^2 \setminus G$. Una fórmula clásica de Euler muestra que si se denota por f a la cantidad de caras, entonces $f = m - n + 1$. Se sabe además que en un grafo planar siempre se cumple que $m \leq 3n - 6$ y por lo tanto $f \leq 2n - 5$. Las demostraciones de lo anterior se encuentran en Diestel (2000). La planaridad del grafo primal exige representar la estructura vial en dos dimensiones, obviando por ejemplo posibles pasos bajo o sobre nivel.

estudiada, pues los grafos primales tienen la limitación de considerar como varios arcos diferentes los distintos tramos de una misma calle.

El grafo dual tiene un problema de definición, como lo es el poder distinguir rigurosamente que se entenderá por "una calle". En la literatura hay discusión al respecto, y si bien es posible utilizar el nombre de la calle como indicador, en general se acepta que un ángulo cercano a los 0° es una forma más robusta de construir el grafo (Porta et al, 2006b, Lin y Ban, 2013). En cualquier caso, el grafo dual puede cambiar muy profundamente según esta consideración, incluso puede variar la cantidad de vértices. La Figura 2.1, extraída de Lin y Ban (2013), grafica el fenómeno. La columna de la izquierda muestra la ciudad en cuestión, la columna central sus posibles representaciones primales y la columna derecha sus respectivas representaciones duales. Notar que la única diferencia en el primal es el etiquetado de las calles, y sus importantes consecuencias en el dual.

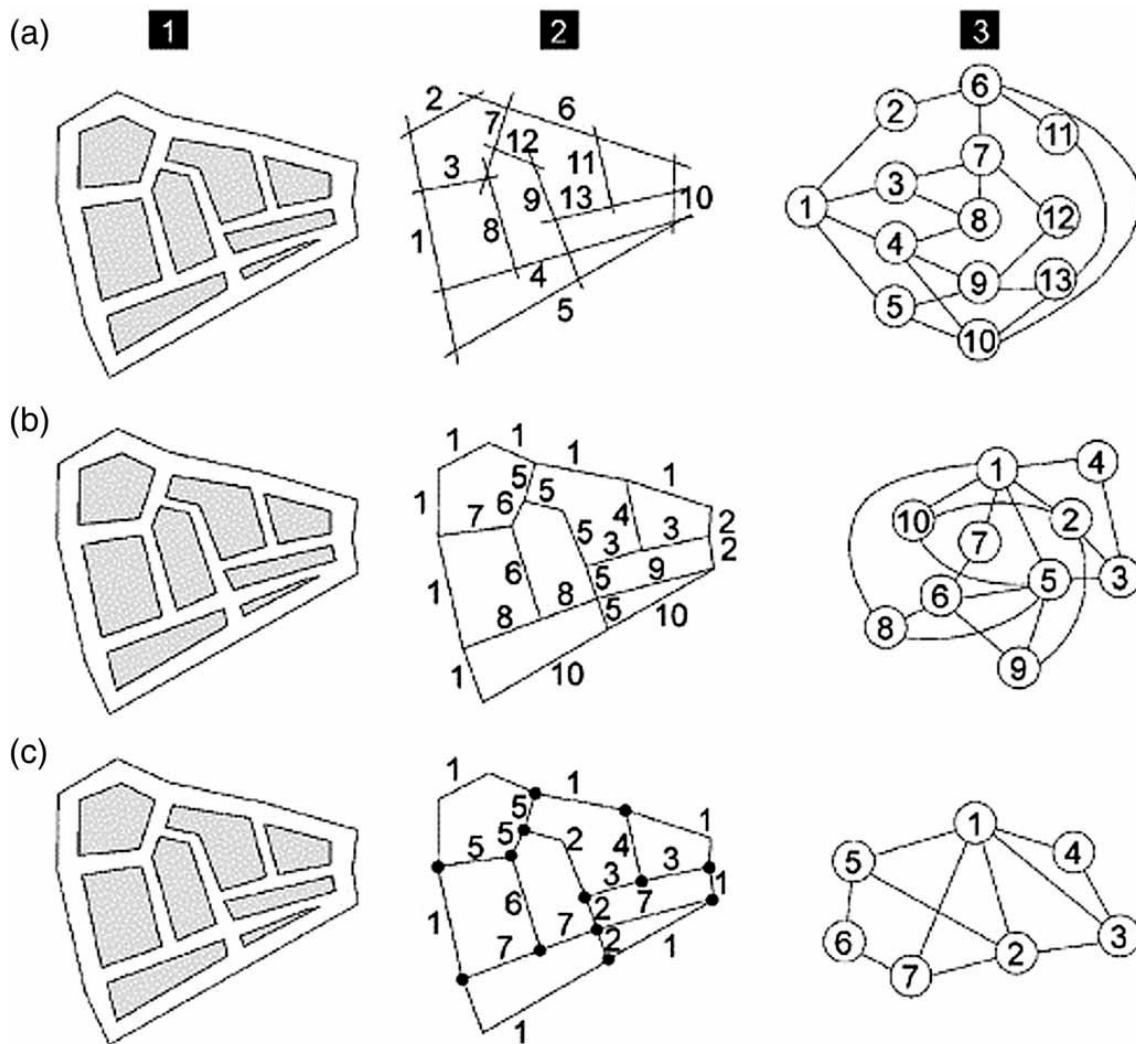


Figura 2.1: Tres representaciones posibles primal/dual para la misma ciudad. Fuente: Lin y Ban (2013).

La mayor parte del análisis topológico se realiza estudiando un conjunto de indicadores en ambas representaciones. Los principales indicadores que serán usados son los siguientes:

- Grado de un nodo i , denotado $d(i)$: la cantidad vecinos del nodo i . Formalmente se define como $d(i) = \sum_{j=0}^n A_G(i, j)$.
- Grado promedio d : es el promedio de los grados de cada nodo, y su valor está dado por $\frac{2m}{n}$.
- Grado de *assortativity* Γ : mide si los nodos de mayor grado se conectan prioritariamente con nodos de grados también altos, si no hay correlación, o si la relación es inversa. La definición formal se encuentra en Buhl et al (2006).
- Distancia: si cada arco tiene asociado un largo, la distancia entre dos nodos i, j es el largo del camino más corto que comienza en i y termina en j . En el grafo dual, se utilizará la "distancia topológica", es decir, cada arco tiene largo 1.
- Centro de un grafo: es aquel nodo que minimiza su distancia respecto al nodo que tiene más lejos. La distancia entre estos dos nodos será el radio del grafo.
- Coeficiente cluster: para un nodo i , es la razón entre el total de conexiones que existen entre sus vecinos y el máximo posible. Formalmente: $\frac{\sum_{j,k=1, j>k}^n A_G(i, j)A_G(i, k)A_G(k, j)}{(d(i)-1)d(i)/2}$. El coeficiente cluster del grafo es el promedio entre todos sus vértices.
- Coeficiente caras: Definido en Buhl et al (2006) para grafos planares, $M = \frac{f}{2n-5}$ es la porción existente de caras sobre la cota teórica. Así, valdrá 0 si el grafo es acíclico. Un valor igual a 1 significará que no es posible agregar caras sin perder la planaridad.

Existe un coeficiente más, el coeficiente grilla. Se estudiará más en profundidad este tipo de red antes de definirlo. Asimismo se analizará el valor que tomarían en una grilla los coeficientes ya definidos y algunas de sus características principales, recordando que este grafo es uno de los principales candidatos a ser considerado como una buena aproximación de las ciudades reales.

Intuitivamente, una grilla de $a \times b$ es un retículo cuadrículado, donde las intersecciones son los nodos y las uniones los arcos. Formalmente, es un grafo $G = (V, E)$, donde $V = \{(i, j) : i = 1, \dots, a, j = 1, \dots, b\}$, $E = \{(i, j)(k, l) : |i - k| + |j -$

$l| = 1\}$. Notar que entonces una grilla es el grafo primal de una ciudad perfectamente cuadriculada tipo damero.

En tal ciudad cuadriculada, las calles pueden dividirse en dos tipos: las horizontales y las verticales. Se denotará a estos conjuntos CH, CV , cuya unión representa los nodos del grafo dual. Las calles horizontales son todas paralelas entre sí, y lo mismo ocurre con las verticales, por lo tanto no hay intersecciones al interior de esos conjuntos; en el grafo dual, ello significa que toda arista conecta a un nodo del conjunto CH con uno del conjunto CV . Un grafo cuyo conjunto de vértices puede ser particionado en 2 subconjuntos tales que toda arista va de uno al otro, se dice que es un grafo bipartito¹⁴. La Figura 2.2 muestra una grilla de tamaño 4×3 y su dual.

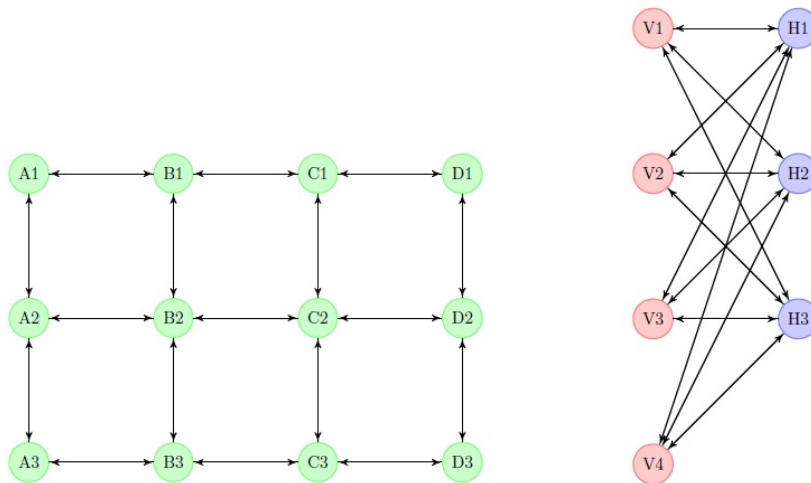


Figura 2.2: Un grafo grilla de 4×3 y su dual.

Con esto claro, es posible definir el coeficiente grilla. Definido en el grafo dual, el coeficiente grilla de un vértice (es decir, de una calle) es la razón entre la cantidad de ciclos de largo 4 en los que está presente el nodo y el total de ciclos largo 4 en los que participaría si todos sus vecinos estuvieran conectados con todos aquellos nodos a distancia 2 del nodo en cuestión. El coeficiente grilla del grafo dual es el promedio entre sus nodos. De este modo, si el primal es una grilla tal coeficiente vale 1.

Notar que en el primal todos los nodos "internos" (aquellos que no están en el borde) tienen grado 4. Existen $(a - 2)(b - 2)$ nodos de este tipo. Los 4 nodos esquina tienen grado 2 y los $2(a + b) - 8$ vértices restantes tienen

¹⁴ En este caso cada calle horizontal interseca a todas las verticales y viceversa, por lo tanto en el grafo dual todo elemento de CH estará conectado con todo elemento de CV . A ello se le llama un grafo bipartito completo, y se dice que es un grafo de tipo $K_{a,b}$.

grado 3. Ello da un grado promedio de $\frac{(4ab-2(a+b))}{ab}$, número que será muy cercano a 4 si a y b son grandes como ocurre en una ciudad.

En el grafo dual el análisis es más simple, pues todos los a nodos de CH tienen grado b y todos los b nodos de CV tienen grado a , y así el grado promedio es $\frac{2ab}{a+b}$. Notar además que, por las características homogéneas de una grilla, ningún nodo en el dual tiene un grado particularmente alto. De hecho, si suponemos $a < b$, habrá b nodos de grado menor que el promedio y a nodos de grado mayor.

El coeficiente caras sólo tiene sentido en el grafo primal, pues el dual no tiene por qué ser planar. Usando la fórmula de Euler, y haciendo notar que el número de arcos es $b(a-1) + a(b-1)$, un cálculo directo muestra que $M = \frac{ab-a-b+1}{2ab-5}$, y luego será cercano a 0,5 cuando la grilla sea grande.

El coeficiente cluster será nulo tanto en el primal como en el dual, pues ambos grafos son libres de triángulos.

Respecto a las distancias, en la grilla primal es fácil ver que los nodos más lejanos son las esquinas opuestas, a una distancia de $a + b$. El centro del grafo será de hecho el nodo $(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2})$ (en el caso que ambos valores sean impares, si no habrá más de un centro, los que se encuentran al redondear los valores ya mencionados), y su radio $\lceil \frac{a-1}{2} \rceil + \lceil \frac{b-1}{2} \rceil$. En el grafo dual, el hecho de que sea bipartito completo arroja como conclusión que todo par de nodos están a distancia 1 ó 2 (las calles paralelas están a distancia 2, las ortogonales a distancia 1) y por lo tanto todos los nodos son centro y el radio es 2.

2.2 Características topológicas de redes estudiadas en la literatura

Con estas definiciones, las principales conclusiones que entrega la literatura respecto a estos coeficientes y a otras características topológicas son las siguientes:

- Para los grafos primales, el grado promedio suele estar entre 2 y 3,5, nunca superando esta última cota. Lo muestran Buhl et al (2006) estudiando 41 ciudades de todas partes del mundo, Chan et al (2011) quien estudia ciudades alemanas y Hu et al (2008) para China. Al afinar el análisis, se observa que en general las ciudades con grado promedio más cercanos a la cota superior son las estudiadas por Chan et al (2011), lo que tiene su raíz tanto en razones históricas sobre la forma de las ciudades alemanas, como en razones metodológicas, pues utilizan grafos primales corregidos en los que quitan los nodos de grado 1.

- Respecto al grado de *assortativity*, solamente Hu et al (2008) encuentran que es positivo, es decir, que los nodos de mayor grado tienden a conectarse entre sí. Para las ciudades occidentales estudiadas por Buhl et al (2006) y por Chan et al (2011) este valor suele ser negativo, aunque en muchos casos con valores que no distan significativamente de ser nulos.
- Buhl et al (2006) estudian también el coeficiente caras. En las ciudades investigadas, el rango encontrado va desde 0,01 hasta 0,25 aproximadamente.
- El grafo dual muestra en general un carácter sumamente jerárquico, es decir, existen pocos nodos de grado muy alto y la mayoría tiene grados muy pequeños (lo que significa, en la práctica, que existen unas pocas avenidas que atraviesan sectores importantes de la ciudad, y una gran mayoría de calles más bien pequeñas). Jiang (2007) estudia 40 ciudades en Estados Unidos y 6 en otras partes del mundo, y encuentra que en todas ellas, alrededor del 80% de las calles tienen un grado menor que el promedio, mientras que el 1% de las calles forman lo que en adelante será denominada la red vial primaria. Sun (2012) ofrece conclusiones similares -aunque la cantidad de nodos con grado superior al promedio puede acercarse al 40%- al estudiar 50 ciudades suecas, al igual que Masucci et al (2009) al estudiar Londres.
- Jiang (2007) calcula además el grado promedio en el grafo dual, encontrando que es siempre menor a 10. Cabe agregarse que la cantidad de nodos (calles) presentes es del orden de los miles, acercándose incluso a los cien mil en los casos más extremos.
- Los grafos duales tienen radios y distancias promedio pequeñas, es decir, cada par de nodos está conectado por caminos cortos (relativos al tamaño del grafo). Esto quiere decir, en la práctica, que para ir de cualquier calle a cualquier otra, son pocas las veces que hay que "doblar". Jiang (2007) encuentra que la distancia promedio de todos los grafos que estudia es menor a 10. Figueredo y Amorim (2007) estudian 101 ciudades de 22 países, y la distancia promedio de cada grafo dual se encuentra entre 4,5 y 15. En la misma línea, Courtat et al (2010) muestran, para 10 ciudades francesas, que el radio oscila entre 9 y 20.
- Figueredo y Amorim (2007) estudian además el coeficiente grilla, y encuentran que para las ciudades más cuadrículadas esa cifra no supera el 0,3.
- Porta et al (2006, 2006b) analizan 6 ciudades haciendo un zoom a un cuadrado de una milla cuadrada. Al analizar el coeficiente cluster, muestran que en el primal va desde 0,06 hasta 0,25, cálculo que no

hacen en el dual. Incorporan además que el grafo dual, en este caso, tiene una *assortativity* negativa, es decir, las avenidas no se intersectan prioritariamente entre sí. No existen estudios similares para el grafo dual a nivel global. Como es de esperar, las ciudades más planificadas (Barcelona y San Francisco, en este caso) poseen los indicadores más similares a una grilla.

Los indicadores recién expuestos y sus valores en las ciudades reales y en las grillas se resumen en la Tabla 2.1.

Indicador	Ciudades Reales		Grillas	
	Valor en Primal	Valor en Dual	Valor en Primal	Valor en Dual
Grado Promedio	2 – 3.5	< 10	~4	$\frac{2ab}{a+b}$
Porción nodos con grado mayor al promedio	Sin información	0.2 – 0.4	~1 (todos los nodos internos)	$\frac{\min(a,b)}{a+b}$
Radio	Sin información	9 – 20	$\sim \frac{a+b}{2}$	2
Coefficiente Cluster	0.06 – 0.25	Sin información	0	0
Coefficiente Caras	0.01 – 0.25	No aplica	~0.5	No aplica
Coefficiente Grilla	No aplica	< 0.3	No aplica	1

Tabla 2.1: Síntesis de los principales indicadores topológicos de una ciudad real, comparados con los de una grilla de tamaño $a \times b$.

La Tabla 2.1 da muestras de que las grillas no representan fielmente varias de las características topológicas típicas y relevantes de las ciudades. Otras de tales características que se extraen de la literatura son las siguientes:

- Figuereido y Amorim (2007) proponen que la red vial primaria define la estructura vial en general, uniendo distintos clústeres o barrios. Sin embargo, la forma en la cual se relacionan estos clústeres con la red vial primaria depende de la ciudad. En algunos casos las avenidas son las fronteras, y por tanto los clústeres no poseen casi conexión entre sí. En otros casos, los clústeres están definidos por estas avenidas,

confundiéndose lo local y lo global. Un último caso son las "ciudades axiales", donde el cluster es la extensión de una avenida.

- Chan et al (2011) profundizan su comprensión de los grafos primales: estudian los ángulos entre calles, y comprueban que existe predominancia de ángulos de 90° y de 180° , y muestran que los nodos de mayor grado se encuentran principalmente cerca del centro geométrico de la ciudad.
- Major (1998) explica que las ciudades europeas son más similares a una cuadrícula que las norteamericanas, aunque mientras más grande la ciudad, menos cuadrículada será.

De esta manera, el análisis topológico permite extraer algunas conclusiones generales respecto a los "fenómenos" anunciados que habrá que distinguir para posteriormente construir la red que será utilizada. La primera conclusión es la existencia transversal de una red vial primaria, compuesta por pocas avenidas, que definen en gran medida la estructura vial de la ciudad. Estas pocas calles (o nodos en el grafo dual) representan la mayor parte de las intersecciones y permiten unir diversos clústeres. Sin embargo, la interacción con tales clústeres no es igual en todas las ciudades, dependiendo de su nivel de planificación, de su historia previa, y así es posible encontrar desde clústeres que tienen como límites a estas grandes avenidas a otros que se entremezclan con ellas.

La estructura vial de una ciudad es sumamente jerárquica, pues existen calles que son mucho más importantes tanto para definir su forma como por la conectividad que ofrecen. El pequeño radio de todos los grafos duales (propiedad conocida como "small world property") se explica fundamentalmente por la gran cantidad de intersecciones que poseen estas avenidas.

Existen varias conclusiones relevantes respecto a los modelos tipo grilla. La grilla es un grafo en el que sus nodos y arcos juegan roles prácticamente iguales, todo lo contrario a lo enunciado respecto a la red vial primaria. Por lo tanto un modelo que se basase en una grilla pierde la posibilidad de estar definido fundamentalmente en función de aquellas avenidas principales, obligando a buscar un modelo alternativo o formas de incorporar aquello perdido. Formas alternativas podría significar características especiales de ciertas aristas en el grafo para representar su importancia. Sin embargo, la idea de una ciudad construida en torno a esta red vial primaria que conectan diversos barrios -como mostraba Figueredo y Amorim (2007)- pareciera no ser reproducible en un formato grilla.

Como se explicó, lo anterior se refuerza al observar la Tabla 2.1, y notar que los indicadores en general no son similares a aquellos que tendría una grilla teórica. El comportamiento de los grados de los nodos en el dual refuerza lo explicado en el párrafo anterior, pero además el coeficiente cluster muestra

que en las ciudades reales existen triangulaciones, mientras el coeficiente grilla muestra que existen diversas calles que no participan en ciclos de largo 4. Cabe destacar, eso sí, que en las ciudades planificadas las situaciones descritas se atenúan.

2.3 Análisis económico y demográfico: la pregunta por los centros y su influencia en la red y en el patrón de demanda.

El análisis anterior entrega luces respecto a la manera en que se ordenan las ciudades desde el punto de vista de sus redes viales y su conectividad. Sin embargo, la información respecto a la concentración de las actividades también es necesaria; el patrón de demanda se define de acuerdo a los niveles de atracción y de generación de viajes de las diversas zonas de la ciudad, y ello depende fundamentalmente de las actividades que allí se desarrollen. Pero además la misma red vial también se va adaptando (y a su vez, en una suerte de retroalimentación, va definiendo) a las necesidades de transporte que definen las actividades y algunas fuerzas económicas. Por ejemplo, la presencia de economías de escala al concentrar la producción (fuerza centrípeta) y los costos de transporte (fuerza centrífuga) (Garrocho y Campos, 2007).

En este análisis, aparece un concepto clave, como es el concepto del Centro o CBD de la ciudad. Aquella zona que, en su concepción teórica, concentra la mayor parte de la actividad económica, que suele ubicarse cerca del centro geográfico¹⁵ y alrededor del cual la ciudad va creciendo.

Un modelo teórico tradicional de la ciudad fue el modelo monocéntrico. Desarrollado originalmente por Alonso (1964), perfeccionado por Mills (1967) y Muth (1969), entre otros. Este modelo supone que existe una sola zona con las características antes mencionadas, y que por lo tanto la cercanía al centro es una variable deseable que aumenta el costo de residir o instalar firmas, resultando por lo tanto una ciudad radial, es decir, donde la distancia al CBD es el único factor diferenciador. En ese sentido, diversos estudios proponen que la distribución de la población sigue una ley exponencial respecto a la distancia al centro (al menos cuando tal distancia es mayor que un cierto radio mínimo donde se concentra actividad económica y no residencial). Clark (2005), de hecho, determina los valores de las constantes de tal ley de acuerdo a un simple análisis gráfico para diversas ciudades australianas, europeas y norteamericanas en diversos momentos de su historia. Makse et al (1998) refinan este modelo y proponen que esta ley exponencial debe entenderse como una variable aleatoria, pero donde los asentamientos están correlacionados entre sí. Anas et al (1998) muestran que la ley exponencial puede deducirse bajo criterios microeconómicos.

¹⁵ En algunas ciudades puede encontrarse en otros lugares. Por ejemplo, las ciudades puerto suelen concentrar su actividad económica en el puerto, que por definición está al lado del mar y por lo tanto en un extremo de la ciudad.

Sin embargo, tal modelo monocéntrico se considera obsoleto para las ciudades modernas. Hamilton (1982) da un potente ejemplo: en EEUU, si las ciudades fueran monocéntricas, el tiempo agregado de viaje por motivos laborales sería 8 veces menor que el observado, mientras que en Japón, si bien los datos son menos confiables, la tendencia es similar. Él mismo matiza estos números al considerar la posibilidad de empleos dobles, cambios de residencia o de lugar de trabajo, entre otras, pero la conclusión la establece en forma bastante tajante: "algo anda mal con un modelo cuando sus predicciones están equivocadas por un factor de 8 y un comportamiento aleatorio tiene un mejor poder predictivo".

Asumiendo entonces que la ciudad monocéntrica está obsoleta, la pregunta es cuál será el modelo que la reemplaza. La literatura no tiene una única propuesta, pero sí varios datos y conclusiones que es importante considerar. Antes de entrar en detalle, es bueno mencionar que la pérdida de monocentrismo en ningún caso implica que los CBD hayan desaparecido, de hecho se acepta que todas las ciudades siguen teniendo un centro principal (Bertraud, 2004).

Una primera noción es la de subcentro. Una definición bastante útil es la entregada por McMillen (2001): un subcentro es un sector que presenta algunos niveles de aglomeración similares a los del centro principal, pero con costos menores de desplazamiento para los trabajadores (y de instalación para las firmas). Formalmente, define que un subcentro es aquél que cumple con las siguientes dos características:

- 1) Densidad de empleo significativamente mayor que en los lugares vecinos.
- 2) Que posee un efecto significativo sobre la función general de densidad de empleo.

Con esto en mente, varios investigadores analizan la presencia de subcentros en diversas ciudades. El mismo McMillen (2001) estudia 6 ciudades norteamericanas, encontrando desde 2 subcentros en New Orleans hasta 33 en Chicago. Luego McMillen y Smith (2003) extienden el análisis a 62 ciudades, donde el mínimo son ciudades monocéntricas y el máximo 46 subcentros. Garrocho y Campos (2007) estudian el caso de Toluca, concluyendo que en 10 años se pasó de 5 a 8 subcentros. En Ciudad de México, según Suárez y Delgado (2009), existen 11 subcentros. En este último caso además se comparan los subcentros entre sí, y se encuentra gran diversidad tanto en su tamaño como en su ubicación, pero se muestra además que el CBD sigue siendo fundamental, al concentrar más del 40% de la actividad laboral. La Figura 2.3, extraída de Suárez y Delgado (2009), muestra esta ciudad, representando con colores oscuros la mayor concentración de empleos. Bertraud (2004) muestra además que los subcentros atraen viajes no solamente de su entorno más cercano (aunque

obviamente la cantidad es mayor si la distancia es menor), sino que de toda la ciudad.

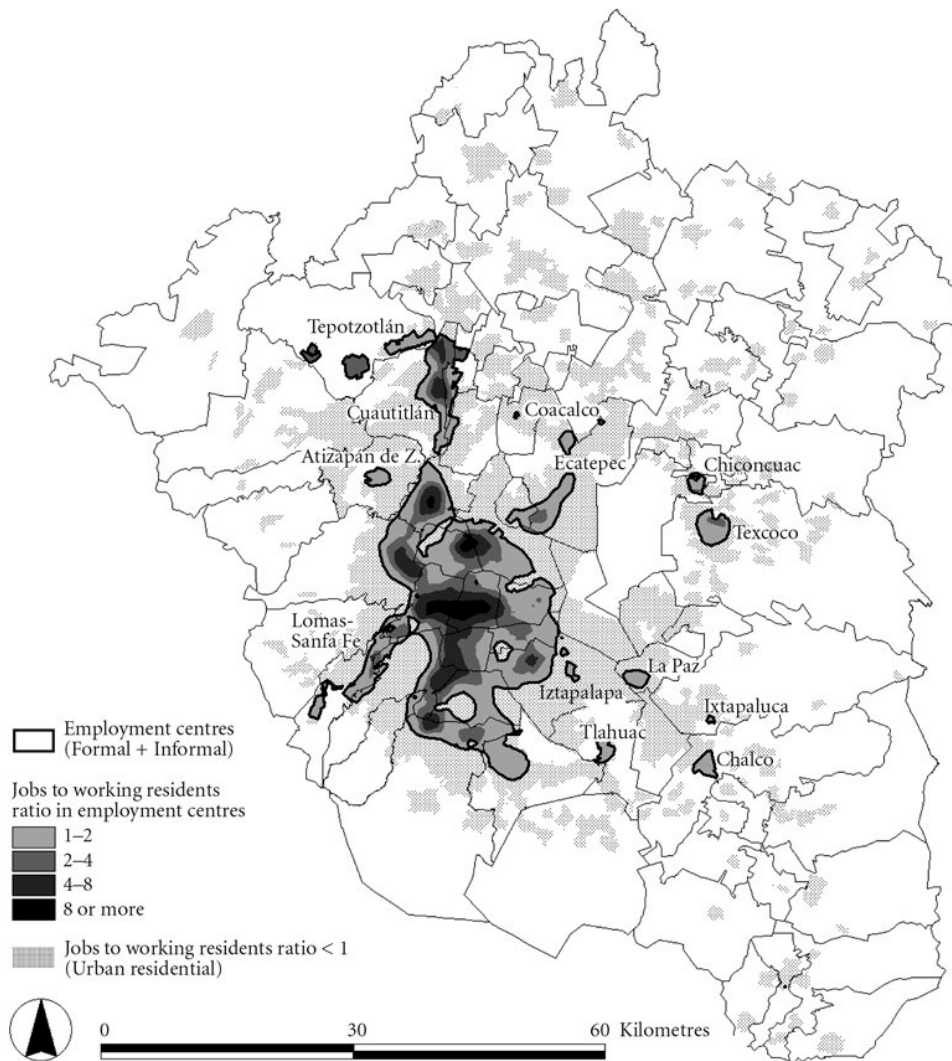


Figura 2.3: Muestra de la concentración de empleos en el CBD y los principales subcentros de México DF, ciudad altamente concentrada. Fuente: Suárez y Delgado (2009).

Sin embargo, también existen ciudades en las cuales los centros explican muy poco. Por ejemplo en Los Ángeles, California, menos del 10% de la fuerza laboral se concentra en el CBD (Clark, 2000), y en Dallas – Fort Worth hay un 40% de empleos que no se ubica en ningún centro ni subcentro (Wadell y Shukla, 1993). La dispersión general de la ciudad es otra variable a tener en cuenta. El asunto termina de complejizarse con la existencia de “ciudades axiales”, es decir de ciudades cuyos subcentros son básicamente sus grandes avenidas (Clark, 2000), o más en general, con la existencia de ciertos subcentros que sean corredores (Wadell y Shukla, 1993). La Figura

2.4, extraída de Wadell y Shukla (1993) muestra cómo una ciudad de poca concentración en los subcentros como es Dallas – Fort Worth tiene subcentros repartidos por toda la ciudad. Las zonas achuradas representan el 5% de la ciudad que más empleos concentra, totalizando aproximadamente un 60% del total.

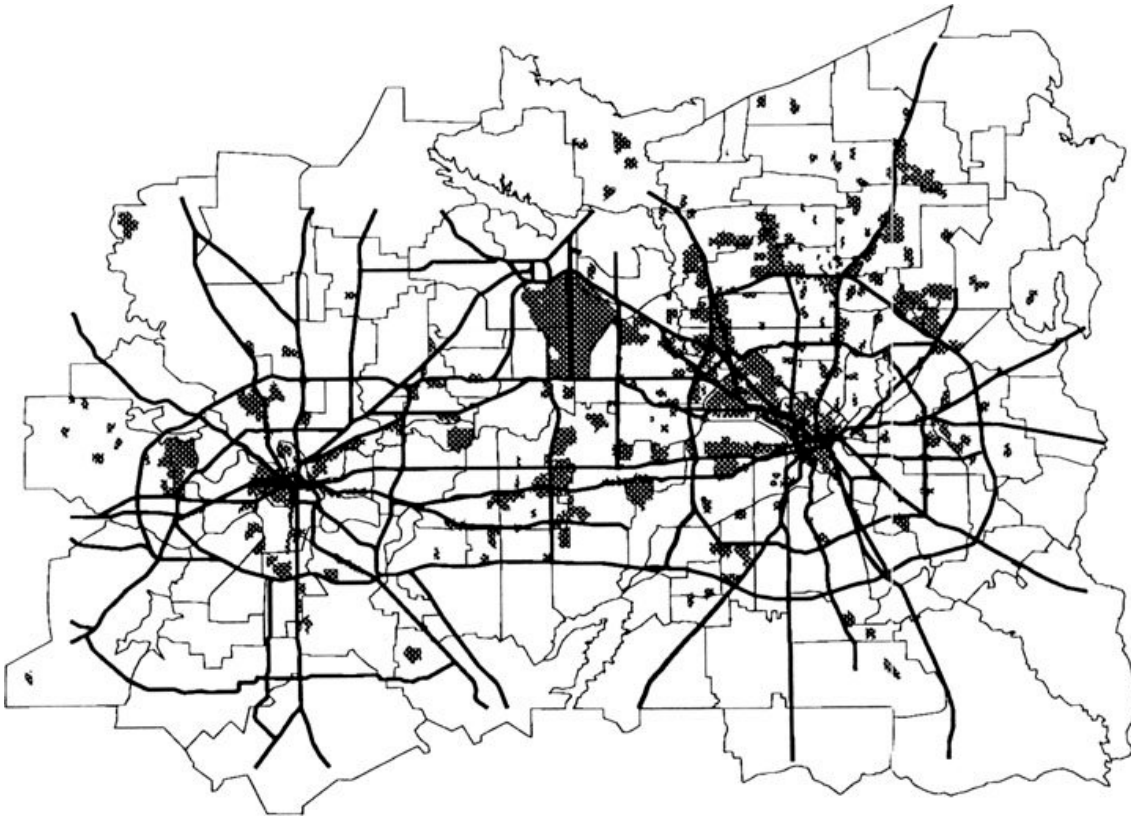


Figura 2.4: Principales avenidas y subcentros de Dallas – Fort Worth, ciudad muy dispersa.
Fuente: Wadell y Shukla (1993).

En resumen, existe un CBD pero es insuficiente para explicar todo el comportamiento económico. La existencia de subcentros –posiblemente avenidas- en algunos casos es un complemento suficiente, pero existen ciudades donde el grado de dispersión es aún mayor. Los subcentros además son generados para buscar menor distancia a las fuentes laborales, sin embargo existen viajes a subcentros más lejanos.

La discusión sobre monocentrismo (ciudad estructurada en torno a su CBD), policentrismo (ciudad estructurada localmente en torno a sus subcentros) y dispersión (ciudad donde es difícil distinguir zonas de mayor atracción de viajes) aparece entonces como una de las más relevantes, y por lo tanto como un fenómeno a incorporar en esta modelación. Esta cuestión es de gran relevancia para el objetivo final de esta tesis, pues la concentración o

dispersión afectan directamente la elección de estructura de línea. La preferencia por líneas directas, la pertinencia de un punto de enlace (tipo hub & spoke), y otras decisiones centrales están fuertemente influenciadas por la concentración o dispersión, tanto en la generación como en la atracción de viajes.

Hay algunas consideraciones a tener en cuenta, que no afectan directamente lo estudiado en este capítulo pero sí el problema de transporte en general. Existe consenso en que la dispersión ha aumentado con los años. Pero más aún, este aumento de las distancias ha sido acompañado con una baja en las densidades, al menos en las principales ciudades canadienses, según muestra Bourne (1989). El mismo artículo muestra que existe una mayor diferenciación entre lugares de trabajo y residencia, es decir, se ha vuelto más extraño que un mismo sector al mismo tiempo genere y atraiga viajes en cantidades importantes. Dieleman y Wegener (2004) estudian cómo afecta esto a la partición modal y al sistema de transporte público. Concluyen que la mayor dispersión ha contribuido a un fortalecimiento del transporte privado, y ello ha conllevado a que los viajes en transporte público disminuyan (levemente) sus frecuencias, mientras que las distancias han aumentado considerablemente.

Nuevamente cabe aquí hacer la comparación a un modelo tipo grilla, resaltando que la comparación con un modelo totalmente concéntrico es lo que está detrás de la crítica de Hamilton (1982) ya citada. Una grilla sería un excelente modelo para una ciudad totalmente dispersa, por la equivalencia entre sus distintos nodos. Sin embargo, al considerar que todas las ciudades siguen teniendo un CBD y que los subcentros juegan un rol relevante, entonces la uniformidad de la grilla vuelve a convertirse en un inconveniente. Esto también podría ser compensado con características ajenas a la red, por ejemplo mediante el patrón de demanda, sin embargo se pierde la noción de ciudades que se van construyendo –y por tanto estructurando- en función de sus componentes principales, ya sean éstas avenidas o subcentros.

En ese sentido, se descartará la grilla como posible red, pues si bien se pueden hacer los ajustes ya mencionados, claramente será preferible una red que desde su construcción se haga cargo de estas características en vez de una que tenga que ser corregida para ello. La principal característica de la grilla, su simplicidad dada por su homogeneidad, pasa a ser un obstáculo y por lo tanto la grilla en si misma pasa a ser un modelo deficiente.

Un último aspecto a analizar antes de definir la red a utilizar son las clasificaciones de ciudades encontradas en la literatura. Si bien las características consideradas no son directamente relevantes para el transporte público, sí dan cuenta de las distintas formas en que se correlacionan las diversas características y sus ubicaciones geográficas.

Las variables consideradas para clasificar son más de 30, e incluyen la densidad, la complejidad, la cercanía residencial al centro, el porcentaje urbanizado, la porosidad (es decir, la existencia de sectores no construidos), la compacidad tanto de la zona en su conjunto como del CBD, el uso residencial del área construida, entre otros. Las técnicas utilizadas son métodos de clusterización (Huang et al, 2007 y Kasanko et al, 2005) y análisis en componentes principales (Schwarz, 2010).

La parte interesante de las conclusiones de tales artículos tiene que ver con una clasificación respecto a estas características pero que responde a criterios geográficos. Así, Kasanko et al (2005) concluye una división de las ciudades en 3 grandes grupos, que responden básicamente a Europa del sur (ciudades densas y compactas), Europa septentrional (ciudades menos densas pero con mayor área construida por habitante) y Europa central siendo mucho menos homogénea. Schwarz (2010) refina este análisis, mostrando por ejemplo que Londres es un cluster en sí misma.

El análisis de Huang et al (2007) es global. También construyen diversos clústeres, pero la conclusión más interesante se extrae de la comparación entre ciudades en países desarrollados versus países en desarrollo. Estos últimos normalmente poseen ciudades menos complejas, más compactas, menos porosas y más densas. Vale la pena recordar que la dispersión (como oposición a la preponderancia del CBD y de los subcentros) es un resultado de la expansión de las ciudades y de la reducción en la densidad, por lo tanto es un fenómeno que se esperaría fuera más atenuado en las ciudades de países aún no desarrollados. Cabe precisar que en las ciudades latinoamericanas, si bien la tendencia es la misma que en el resto del mundo en vías de desarrollo, los indicadores son más moderados.

2.4 Definición de la red y patrón de demanda

Habiendo hecho la revisión previa, corresponde ahora definir el tipo de ciudad, la red y el patrón de demanda que serán considerados en lo que sigue. La red estará dada por un grafo no dirigido y por las respectivas distancias, donde además debe ser claro qué tipo de zona de la ciudad representa cada nodo. La demanda será caracterizada por la matriz O-D.

Cabe hacer una recopilación de los fenómenos que sería deseable representar:

- Estructura vial fuertemente definida por la red vial primaria.
- Indicadores topológicos lejanos a los de una grilla.
- Combinación entre localidades y red vial primaria dependiendo de cada tipo de ciudad.

- Presencia de un CBD, pero insuficiente para explicar la totalidad de la actividad económica (y por tanto, la atracción de viajes).
- Discusión abierta entre policentrismo y dispersión para complementar lo representado por el CBD.
- Subcentros diversos entre sí. Su principal atracción es de viajes de los sectores más cercanos, pero de todos modos atraen viajes de toda la ciudad.
- Existen subcentros que son ejes o avenidas.

Por supuesto, aquellas características que no son comunes a la mayoría de las ciudades no pueden ser incorporadas directamente, pero en algunos casos puede ser posible incorporarlas en forma paramétrica, es decir, que la variación de cierto parámetro permita estar más cerca de uno u otro caso. Es lo que se hará con la discusión respecto a monocentrismo, policentrismo y dispersión.

Habiendo visto ya estos fenómenos, vale la pena repasar los modelos simples existentes en la literatura para revisar hasta qué punto se hacen cargo. Así, Daganzo (2010) tiene la limitante de trabajar en una grilla en que tanto la generación como la atracción de viajes son homogéneas en el espacio, contradiciendo todo lo discutido respecto a la relevancia de los centros, subcentros y la red vial primaria. Tirachini et al (2010), al trabajar en una ciudad concéntrica, se mantienen en un modelo monocéntrico.

La red utilizada por Jara-Díaz y Gschwender (2003) es una cruz donde el norte y el oeste son generadores, el sur y el este son atractores y el nodo central cumple ambas funciones. La simplicidad de este modelo es muy útil para desarrollar el método y realizar los estudios; permite además analizar ciertos fenómenos como los efectos del crecimiento en la población. Sin embargo, la extrema simplicidad conlleva falta de flexibilidad para poder adecuarse al tamaño y cantidad de zonas generadoras y atractoras de viaje, y por lo mismo es imposible hacerse cargo de la dispersión, menos aún de fenómenos más específicos como los subcentros y las diferencias entre ellos, la combinación de viajes local/global (y su correspondiente efecto en la complejidad del problema), entre otros.

La red en forma de "Y" estudiada por Jara-Díaz et al (2012), compuesta por 3 nodos orígenes y un nodo destino, permite incorporar cierta dispersión en la generación, pero nuevamente el nodo atractor de viajes es uno solo y por lo tanto se pierde toda la discusión llevada a cabo en la Sección 2.3 respecto a la dispersión en la atracción.

Con estos fenómenos en mente, se procede a describir la ciudad a utilizar:

El grafo: Se trabajará con un grafo definido por un centro CBD, y n zonas circundantes. Cada zona estará compuesta por un subcentro, conectado al CBD y a los subcentros de las zonas vecinas, y por una periferia que solamente se conecta a su subcentro. Los subcentros se ubicarán a una misma distancia del CBD y con una misma separación entre ellos, configurando lo que en adelante será denominado como "el anillo de subcentros".

De este modo, la red vial primaria que definirá la ciudad son las avenidas que conectan cada subcentro con el CBD, seguidas en importancia por las calles que conectan a los subcentros entre sí. Más aún, con este modelo se incorporan tanto la existencia de un CBD como la de diversos subcentros. Si bien en términos topológicos cada zona queda determinada por su subcentro, lo cual pareciera afirmar un modelo de tipo policéntrico, las flexibilidades que permitirán hacerse cargo de la discusión antes descrita vendrán dadas por los parámetros de la demanda.

Los fenómenos que no se incorporan, y que quedarán pendientes para investigaciones futuras, son la presencia de subcentros con diversas características, tanto en su nivel de atracción como en su ubicación geográfica. Tampoco se representarán los subcentros axiales. Esta ciudad será simétrica desde el punto de vista radial, lo cual es una característica que permitirá desarrollar en mayor profundidad y con suficiente simplicidad los cálculos.

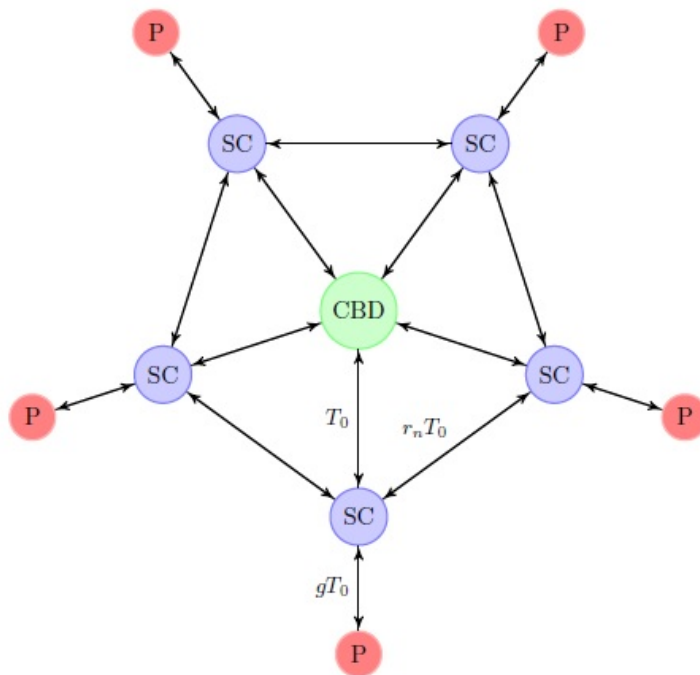


Figura 2.5: La forma urbana que será utilizada con su respectiva red para $n = 5$ zonas.

Respecto a las distancias, la cercanía relativa del subcentro correspondiente a cada periferia puede determinar la estructura de línea óptima, y por lo tanto será uno de los parámetros a considerar. Así, se supondrá que el tiempo que tardará un bus en ir desde un subcentro cualquiera al CBD será T_0 ¹⁶, mientras que el tiempo entre un subcentro y la periferia de su respectiva zona será gT_0 en llegar, siendo g un valor paramétrico.

La Figura 2.5 representa tal ciudad para $n = 5$. Los nodos rojos representan las periferias, mientras que los nodos lila representan los subcentros, a distancias iguales entre sí. Las flechas dobles indican las avenidas, que son todas consideradas en doble sentido. Se muestran además las distancias en tiempo entre cada par de nodos conectados.

Así, si bien no se permiten diferencias entre las zonas, será observable la eventual concentración cerca del CBD como una variable que puede ser modificada a través de los parámetros g y T_0 . Las distancias entre los respectivos subcentros estarán determinadas por las condiciones geométricas ya descritas.

El Patrón de Demanda: Para definir la matriz O-D, notar que los nodos del grafo se pueden dividir en 3 tipos: el CBD, los subcentros y las periferias.

El CBD es un atractor natural de viajes, pero la argumentación dada en la sección anterior muestra que es altamente insuficiente para explicar todos los viajes de la ciudad. Supondremos entonces que cada periferia tendrá una porción α de viajes hacia el CBD. De esta forma, el valor de α será una medición de cuan monocéntrica es la ciudad.

Los subcentros también atraerán viajes. Como se ha visto, un subcentro atrae principal pero no exclusivamente viajes desde sus zonas más cercanas. Cuando un viaje va desde una zona hasta otra diferente, además aporta a la dispersión. Se supondrá entonces que para cada periferia, una porción γ de los viajes allí generados irá a los subcentros de zonas ajenas, en partes iguales para cada subcentro. Este último detalle parece poco realista, pues podría esperarse que subcentros más cercanos atrajeran mayor cantidad de viajes. Lo anterior se descarta tanto porque significa introducir una complejidad adicional al modelo sin aportar características cualitativamente diferentes, y porque así el valor de γ representará mucho más directamente el nivel de dispersión de la ciudad.

A la porción de viajes que parten desde la periferia y van a su subcentro se le llamará β (y por lo tanto $\alpha + \beta + \gamma = 1.$). Este parámetro medirá entonces el nivel de policentrismo de la ciudad.

¹⁶ Se definen como tiempos y no como distancias porque es la variable que luego será relevante para los cálculos. Notar que en términos teóricos, es equivalente dar cualquiera de los dos parámetros mientras se suponga, como se hará en este modelo, que la velocidad de cada bus no varía.

Para los viajes generados en los subcentros, el parámetro β carece de sentido (pues el origen y el destino serían el mismo), lo que obliga a modificar los parámetros. Para poder preservar la idea de que α representa el nivel de monocentrismo y γ el nivel de dispersión, se supondrá que $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\gamma}}$, donde $\tilde{\alpha}$ es la porción de los viajes generados en el subcentro que van al CBD y $\tilde{\gamma}$ la porción que va a los demás subcentros, repartida en partes iguales, verificándose $\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma} = 1$. Luego se tendrá que $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{1-\beta}$, $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{1-\beta}$, por lo que sólo dos de los cinco parámetros serán independientes. De esta forma, se mantiene una ciudad que es simétrica en términos radiales, pero no todos los viajes serán radiales.

A nivel de origen, la periferia es el generador por excelencia de viajes. Sin embargo, si solamente las periferias generaran viajes, significaría que ningún nodo puede ser origen y destino al mismo tiempo, y además que en los arcos adyacentes a las periferias se podría ver mayor flujo que en aquellos adyacentes al CBD, cuestión contraria a lo que se observa cotidianamente en todas las ciudades. Por ello, se supondrá que los subcentros también generan viajes, y así se definirán nuevos parámetros. La porción de viajes cuyo origen está en las periferias será denotada por a , y $b = 1 - a$ será la porción que emerge desde los subcentros. En general se supondrá que $a > b$ salvo que se explicita lo contrario.

El total de pasajeros será denotado por Y , que se dividirá uniformemente entre las n zonas. La Tabla 2.2 resume la matriz O-D con la que se trabajará, la que se grafica en la Figura 2.6. Notar que para calcular los totales se debe considerar que son n los subcentros al sumar.

La Tabla 2.3 resume además los parámetros que serán utilizados en el modelamiento. Las relaciones matemáticas entre ellas se resumen en la Tabla 2.4. Cabe destacar la interpretación de los parámetros α, β y γ como aquéllos que se hacen cargo de la discusión comentada anteriormente entre modelos monocéntricos, policéntricos y dispersos. Estos parámetros le otorgan flexibilidad al modelo diseñado para representar las ciudades. Esta interpretación se hace gráfica en las Figura 2.7. Cabe señalarse que en la última figura se muestran los viajes que emergen solamente desde una zona, para hacer más claro el dibujo.

O/D	CBD	Subcentro i	Subcentro $j (\neq i)$	Periferia i	Periferia j	Total
Periferia i	$\frac{a\alpha}{n}Y$	$\frac{a\beta}{n}Y$	$\frac{a\gamma}{n(n-1)}Y$	0	0	$\frac{a}{n}Y$
Subcentro i	$\frac{b\tilde{\alpha}}{n}Y$	0	$\frac{b\tilde{\gamma}}{n(n-1)}Y$	0	0	$\frac{b}{n}Y$
Total	$(a\alpha + b\tilde{\alpha})Y$	$\frac{a(\beta + \gamma)Y + b\tilde{\gamma}Y}{n}$	$\frac{a(\beta + \gamma)Y + b\tilde{\gamma}Y}{n}$	0	0	Y

Tabla 2.2: Matriz O-D de la ciudad con la que se trabajará.

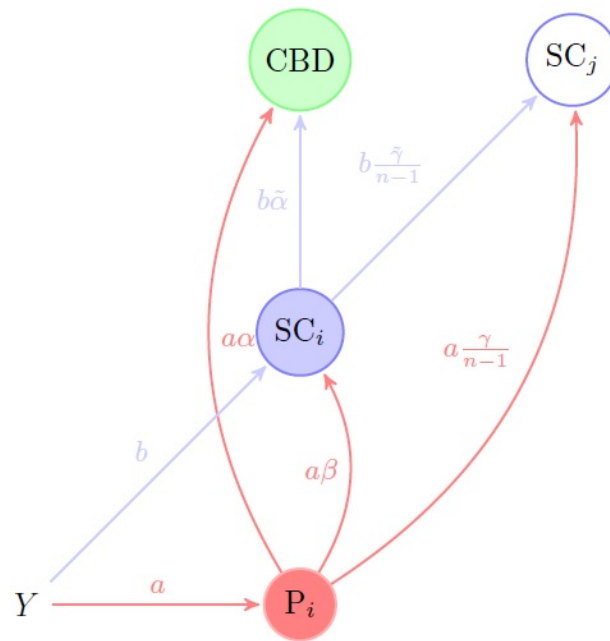


Figura 2.6: Resumen gráfico de los viajes existentes en la ciudad, con sus orígenes y destinos respectivos.

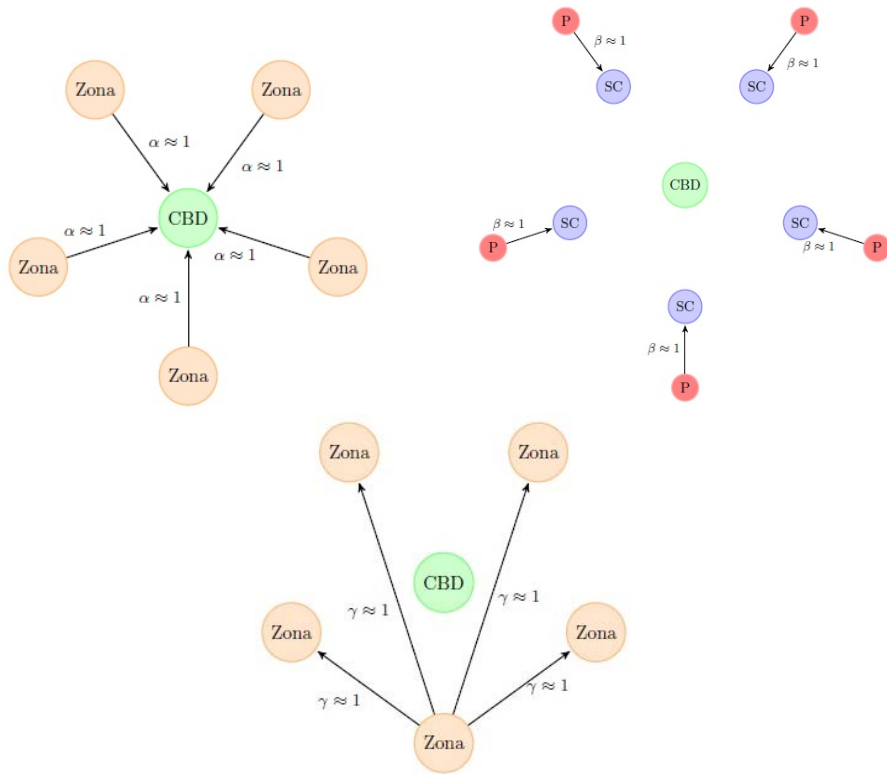


Figura 2.7: Representación gráfica de una ciudad monocéntrica, una ciudad policéntrica y una ciudad dispersa en este modelo, respectivamente.

Parámetro	Definición	Interpretación
n	Número de zonas	Al crecer cada subcentro es menos significativo
Y	Afluencia total de viajes	Mide la magnitud del sistema
T_0	Tiempo que tarde un bus en ir desde un subcentro hasta el CBD si no se detiene	Determina el tamaño de la ciudad
g	Razón entre distancia periferia subcentro y subcentro-CBD	Mide la concentración geográfica de la ciudad
α	Porción de los viajes de la periferia que van al CBD	Un valor alto significa una ciudad principalmente monocéntrica
β	Porción de los viajes de la periferia que van a la misma zona	Un valor alto significa una ciudad principalmente policéntrica
γ	Porción de los viajes de la periferia que van a los subcentros de zonas ajenas	Un valor alto significa una ciudad principalmente dispersa
$\tilde{\alpha}$	Porción de los viajes de los subcentros que van al CBD	Corrección de α para los subcentros.
$\tilde{\gamma}$	Porción de los viajes de los subcentros que van a otros subcentros	Corrección de γ para los subcentros
a	Porción de los viajes que parten desde la periferia	Mide la dispersión en la generación
b	Porción de los viajes que parten desde los subcentros	Mide la concentración en la generación

Tabla 2.3: Resumen de los parámetros que determinan el modelo de ciudad a utilizar, con su respectiva red y matriz O-D.

Variable asociada	Ecuación(es)
Generación de viajes	$a + b = 1$
Atracción de viajes desde las periferias	$\alpha + \beta + \gamma = 1$
Atracción de viajes desde los subcentros	$\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma} = 1$
Relación entre viajes atraídos desde las periferias y viajes atraídos desde los subcentros	$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{1 - \beta}, \tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{1 - \beta}$

Tabla 2.4: Resumen de las relaciones matemáticas entre los parámetros que determinan el modelo de ciudad a utilizar.

Los argumentos para definir esta red provienen del análisis de la relevancia relativa de las distintas componentes de la ciudad por sobre el análisis topológico. Sin embargo, cabe revisar los valores que tomarían los indicadores topológicos antes definidos en este caso para verificar cuán representativa resulta ser la red. Serán especialmente importantes aquellos indicadores que reflejan la posible presencia de una red vial primaria que sobredetermine la estructura de calles.

Para el grafo primal, los valores a calcular son el grado promedio, el coeficiente cluster y el coeficiente caras. Los demás indicadores serán excluidos pues no existe punto de referencia en las ciudades reales para sus grafos primales y por lo tanto la comparación no es posible.

Para el grado, cantidad de vecinos de un vértice, son tres los tipos de nodos a analizar. El CBD es un único nodo de grado n . Los subcentros son n nodos, cada uno de ellos tiene grado 4. Las periferias, por último, son también n nodos, pero con grado 1 cada uno. Con ello, el grado promedio será $\frac{6n}{2n+1} \approx 3$. En la Tabla 2.1 se vio que en la literatura se encuentra que ese valor está en el rango 2 – 3.5, por lo que tal indicador en este caso reafirma el modelo de ciudad escogido.

Respecto al coeficiente cluster, cabe recordar que para un nodo se define como la razón entre las conexiones existentes entre los vecinos de tal nodo, y el máximo posible. Para un nodo periferia, el coeficiente no tiene sentido pues tienen un único vecino, por lo que tales nodos serán excluidos del análisis. Los cuatro vecinos de un subcentro son sus subcentros vecinos, el CBD y la periferia de la misma zona; si se supone que $n > 3$, las únicas conexiones serán entre los subcentros vecinos y el CBD, por lo que el coeficiente cluster para un subcentro cualquiera valdrá $\frac{2}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{3}$. Por último, el CBD tiene n vecinos, y entre ellos hay n arcos (precisamente los arcos que conforman el anillo de subcentros). Luego, el coeficiente cluster del CBD vale $\frac{n}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n-1}$. El promedio indica que el coeficiente cluster del grafo será $\frac{\frac{n}{3} + \frac{2}{n-1}}{n+1} =$

$\frac{n^2-n+6}{3(n+1)(n-1)}$. Si se considera un valor de n entre 4 y 12 (que será el rango utilizado posteriormente para el análisis), el coeficiente cluster tomará valores entre 0,33 y 0,63, ambos números mayores al 0,25 encontrado en la literatura como máximo. Si bien esto es una mala noticia, es relevante hacer notar que en las simplificaciones que implica la red escogida para representar la forma urbana en estudio se fusionan varios nodos, lo cual aumenta artificialmente las conexiones y por lo tanto el coeficiente cluster.

Para el coeficiente caras, es fácil ver que la cantidad de caras es exactamente n , que son todos los triángulos que se forman entre pares consecutivos de subcentros y el CBD (ver Figura 2.5). La cantidad de vértices del grafo es $2n + 1$, por lo que el coeficiente caras es $\frac{n}{4n-3}$. Este número será levemente mayor a 0,25 que es la cota encontrada en la literatura. Este resultado es sustantivamente mejor que el de una grilla, que como se vio en la Tabla 2.1 es cercano a 0,5.

Para el dual, se omitirá el cálculo del coeficiente grilla pues solamente tiene sentido para comparar con grillas, que no están presentes en este caso. Luego los coeficientes a ser estudiados son el grado promedio, la porción de nodos con grado mayor al promedio (valor que indica la concentración de conexiones, y así la existencia de avenidas principales) y el radio. Para estudiar estos valores, hay que notar que el grafo primal tiene tres tipos de arcos (que representan tres tipos de nodos en el dual): n arcos que conectan periferias con subcentros, n que conectan subcentros vecinos y n que conectan al CBD con subcentros. Se tomará cada arco como una calle diferente. Si bien hay continuidad en la dirección entre los arcos que unen a una periferia con su subcentro y el que va desde ese subcentro al CBD, estos arcos representan movimientos muy diferentes y es razonable suponer que la avenida comienza desde el subcentro. Esto además permitirá hacer un análisis más claro respecto a cuáles calles son el esqueleto principal de la red vial.

Los n arcos que conectan periferias con su subcentro tienen 3 arcos vecinos: los que van desde el subcentro hacia sus dos subcentros vecinos, y el que va desde el subcentro al CBD. Los arcos que conectan subcentros vecinos entre sí tienen 6 arcos vecinos: los dos arcos que conectan cada subcentro con la periferia de su zona respectiva, los dos arcos que conectan cada subcentro con el otro vecino (nuevamente suponiendo $n > 3$) y los dos arcos que conectan cada subcentro con el CBD. Por último, los arcos que conectan a algún subcentro con el CBD, tienen como vecinos a los $n - 1$ arcos equivalentes, además de los 2 arcos que conectan al mismo subcentro con sus vecinos y al arco que conecta al subcentro con su periferia, totalizando $n + 2$ vecinos. Con ello, el grado promedio resulta ser $\frac{11+n}{3}$, lo cual cae dentro de los valores encontrados en la literatura que son siempre menores a la

decena. Reemplazando los valores propuestos para n , el rango resultante es $5 - 7,7$.

Si $n \leq 7$, la cantidad de nodos del dual cuyo grado es mayor o igual al promedio será $\frac{2}{3}$, lo cual es muy alto para los valores de la Tabla 2.1. En cambio, si $n > 7$ tal cantidad será $\frac{1}{3}$, lo que refuerza la idea de que la red vial primaria serán los arcos que conectan los subcentros con el CBD. En cualquiera de los dos casos, hay que notar que sería razonable hacer una especie de "zoom" en cada periferia y definir allí calles internas, con lo que la cantidad de nodos del dual cuyo grado es mayor al promedio disminuiría. Así, este análisis muestra que la ciudad efectivamente está constituida por avenidas principales en torno a las cuales se ordena el resto de las calles.

Por último, es fácil ver que el radio en el grafo dual valdrá 3, pues cualquier par de arcos del primal se pueden conectar vía CBD, siendo la mayor distancia aquella entre arcos que conectan periferias con subcentros que no son vecinos entre sí. La "small world property" antes mencionada se conserva entonces, pero exagerada por las simplezas propias del grafo que hacen que el total de arcos sea muy pequeño comparado con las ciudades reales.

Indicador	Ciudades Reales		Ciudad de este Trabajo	
	Valor en Primal	Valor en Dual	Valor en Primal	Valor en Dual
Grado Promedio	2 – 3.5	< 10	~3	5 – 7,7
Porción nodos con grado mayor al promedio	Sin información	0.2 – 0.4	No calculado	$\frac{1}{3}$ ó $\frac{2}{3}$
Radio	Sin información	9 – 20	No calculado	3
Coefficiente Cluster	0.06 – 0.25	Sin información	0.33 – 0.63	No calculado
Coefficiente Caras	0.01 – 0.25	No aplica	> 0.25	No aplica

Tabla 2.5: Síntesis de los principales indicadores topológicos de una ciudad real, comparados con los de la ciudad definida para este trabajo.

La Tabla 2.5 sintetiza los resultados recién expuestos. En ella se puede apreciar que la comparación entre los indicadores topológicos de una ciudad real y aquéllos de la ciudad definida para este trabajo resulta bastante favorable, salvo por aquellos indicadores donde el fusionar nodos afecta directamente. En cualquier caso, los resultados son muy superiores a los obtenidos cuando la comparación es con una grilla teórica.

Capítulo 3: Definición y Estudio de las Estructuras de Línea Relevantes

Teniendo clara ya la ciudad a utilizar, con su respectiva red y patrón de demanda, corresponde proceder a resolver y determinar qué estructura de línea es la óptima para ella. Para realizarlo, en un primer paso se seguirá la línea desarrollada por Jara-Díaz y Gschwender (2003) y por Gschwender et al (2013): proponer un conjunto de estructuras que sigan lógicas diferentes, para luego poder comparar en qué circunstancias es óptima cada una de ellas. Esta forma de abordar el problema tiene la deficiencia de buscar un óptimo en un conjunto acotado. Sin embargo, al considerar estructuras bastante diversas, se pueden extraer conclusiones importantes respecto a cómo responder frente a determinadas características de las ciudades. Este objetivo resulta más relevante, considerando que la ciudad en estudio no es una ciudad real, pero sí permite identificar determinados fenómenos. Con el análisis propuesto, tales fenómenos urbanos podrán ser asociados a la estructura de líneas que mejor se ajuste a cada uno de ellos.

En primer lugar se describirán a grandes rasgos las estructuras que se estudiarán y se introducirá la notación para las distintas líneas que las componen. Posteriormente se explicará la función de costos del modelo, la que será detallada en las secciones posteriores que ahondarán el análisis para cada una de las estructuras.

3.1 Notación y líneas a considerar

Las cuatro estructuras a analizar son:

- 1) Directas: Su característica principal es que ningún pasajero requiere trasbordar, sino que para cada par O-D se asegura que exista al menos una línea que los conecte. En adelante se denotará Dir.
- 2) Exclusivas: Tampoco requiere trasbordos, pero además cada línea sirve en forma exclusiva un par O-D específico, y cada par O-D tiene una línea que lo cubre sin detenerse en otros nodos y por tanto sin servir a otros pares. Será denotada Exc.
- 3) Hub & Spoke (en el CBD): El centro de la ciudad se convierte en un punto relevante de trasbordo. Gran parte de los viajes se dirigen hacia el CBD para luego tomar un segundo bus en dirección al destino final. Cabe señalar que en este caso no será un hub & spoke puro, porque para algunos viajes seguir esa ruta implica un aumento en la distancia que llega a ser absurdo en comparación con una ruta óptima, y significaría agregar costos muy altos y evitables, empeorando así la estrategia y haciéndola menos competitiva frente al resto. Se usará

entonces una estrategia hub & spoke modificada, a la que se agregará una línea que corrija lo señalado. Notar que esta estrategia nunca será peor que hub & spoke puro, pues en el caso contrario la optimización asignará frecuencia nula a la línea agregada. Esta estructura será denotada por H&S.

- 4) Troncal-Alimentador: Los pasajeros de la periferia toman buses "alimentadores" hasta el subcentro de la misma zona. Una vez allí, habrá líneas directas para todos los posibles destinos mediante los buses "troncales". Se denotará T-A.

Las cuatro estructuras pueden verse en las Figuras 3.1 y 3.2. Los parámetros H y \bar{H} a los que allí se hace referencia serán explicados más adelante.

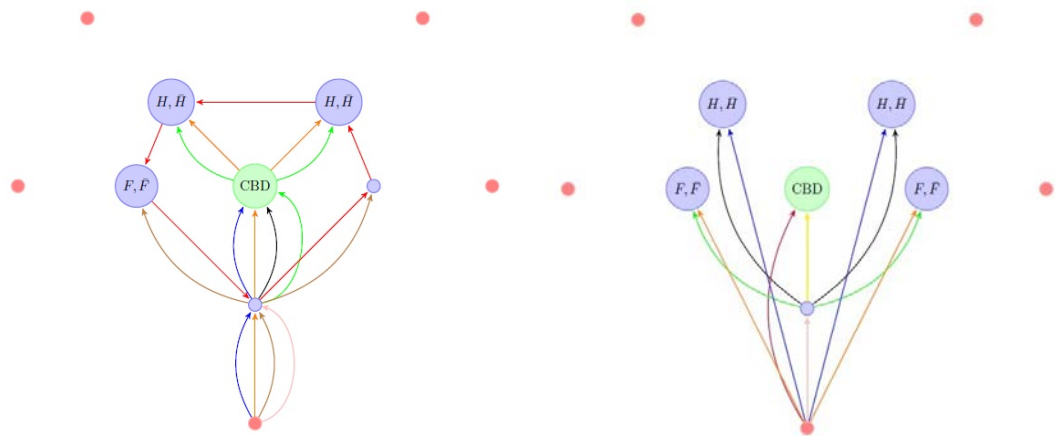


Figura 3.1: Estructuras de líneas directas y exclusivas para $n = 5, H = \bar{H} = 2$.

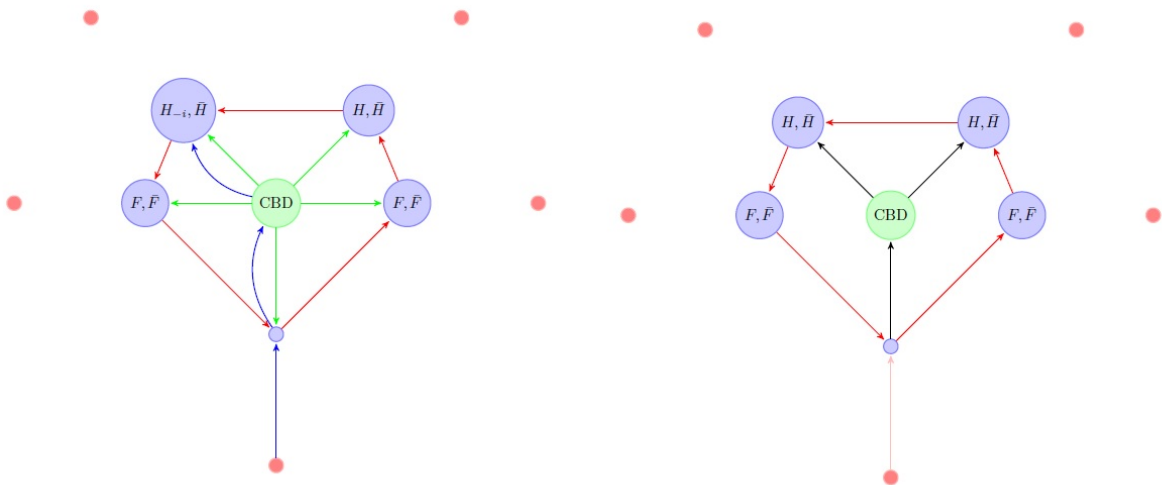


Figura 3.2: Estructuras de líneas de tipo hub & spoke y de troncales-alimentadores para $n = 5, H = \bar{H} = 2$.

Antes de describir el detalle de estas estructuras, será necesario aclarar la notación a utilizar y ejemplificarla mostrando las diversas rutas que seguirán las líneas que compondrán las 4 estructuras.

En general los análisis se harán fijando una zona específica como origen para estudiar cómo se distribuye a sus destinos, aprovechando que la simetría de la ciudad y de la demanda de viajes permite que en las demás zonas el análisis sea exactamente el mismo. A menos que se explicito lo contrario, se notará por i a la zona de origen, y cuando sea necesario por j a una zona distinta que será el destino.

Para denotar inequívocamente a las líneas, se señalarán mediante su origen y su destino. Así por ejemplo la línea LP_iCBD será la línea que parta desde la periferia de la zona en estudio y cuyo recorrido termina en el CBD. El camino siempre será el más simple posible, en este caso será pasando a través del subcentro respectivo SC_i . Cuando sea una línea exclusiva, que no pare en los puntos intermedios que recorra, se denotará mediante una E mayúscula al final.

La idea del camino "más simple posible" es clara cuando el destino final es el CBD o el subcentro de la misma zona. Sin embargo, cuando se va a un subcentro de una zona ajena hay dos posibilidades: se puede ir atravesando el CBD o recorriendo el anillo que conforman los subcentros. Cabe resaltar que no es obvio cuál camino es más conveniente, pues no solamente es relevante el largo del camino, sino que también los nodos atravesados en la ruta, pues ellos significan mayor tiempo transcurrido en paraderos, pero también más pasajeros a los cuales les será útil. Se define entonces, partiendo desde la zona i , dos tipos de zonas ajenas. Aquéllas que, desde la periferia se llegará atravesando el CBD, conjunto que se denotará H (y, abusando de la notación, será también de tamaño H), y su complemento, que estará dado por las F zonas adyacentes a la zona i . Se cumplirá entonces siempre que $H + 2F + 1 = n$. Un análisis equivalente se hace para los viajes que parten desde el subcentro i , definiéndose así los conjuntos \bar{H} y \bar{F} . Las relaciones entre H y \bar{H} no son obvias a priori y se estudiarán cuando sea el caso.

Volviendo a la denotación de las líneas que se usarán, para el caso que se llegue a subcentros ajenos, se señalará al final si el destino está en el conjunto H o F . Por ejemplo, la línea $LSC_iSC_j\bar{F}$ parte desde el subcentro i y recorre el anillo de subcentros hasta llegar al subcentro j . En este caso, a veces será necesario especificar a cual subcentro específico se está yendo, pues las distancias y la cantidad de paradas será distinta. El subcentro al que se llegue recorriendo h arcos será denotado SC_{i+h} .

Para graficar las líneas en las Figuras 3.3, 3.4 y 3.5, se mostrará siempre al CBD como punto de referencia, graficado en color verde. Los subcentros serán azules y las periferias rojas.

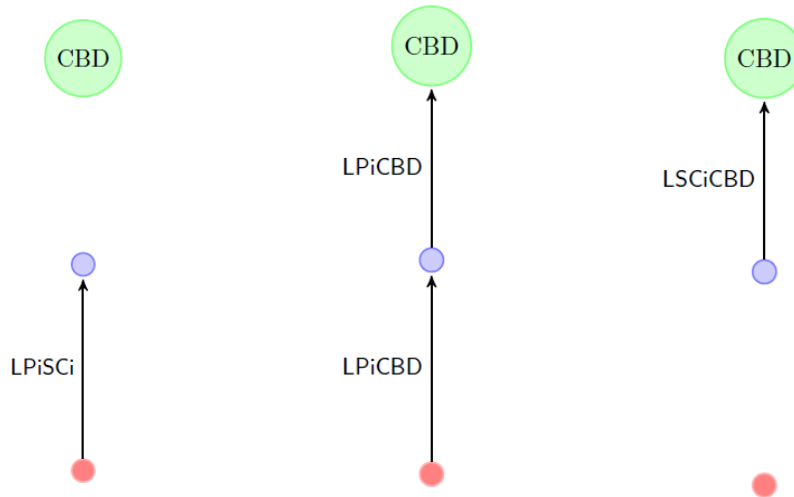


Figura 3.3: Líneas LP_iSC_i , LP_iCBD Y LSC_iCBD .

En la Figura 3.3 se grafican las líneas LP_iSC_i , que van desde una periferia hasta el subcentro de la misma zona, las LP_iCBD , que van desde la periferia hacia el CBD pasando por el subcentro de la misma zona, y las LSC_iCBD , que van desde un subcentro directo hacia el CBD. En estas líneas basta denotar el nodo de origen y el de destino, pues hay una sola ruta razonable para unirlos. Por simetría, cuando alguna de estas líneas exista, existirá para cada una de las n zonas.

La Figura 3.4 muestra a las líneas LP_iSC_jH , LP_iSC_jF y LP_iCBDE . Las primeras dos líneas llegan a subcentros ajenos desde la periferia, mostrando los conjuntos que fueron definidos como H y F respectivamente. La tercera línea es una línea exclusiva, que parte desde la periferia y llega al CBD pero no se detiene en el subcentro respectivo. Cabe señalar que el trayecto del bus pasa por ese subcentro, pero se grafica enfatizando el hecho de que la conexión entre la periferia y el CBD será directa. Por simetría, cuando una de estas líneas exista, habrá una equivalente partiendo de cada una de las zonas, llegando a cada uno de los nodos para el caso de destinos en H , y en ambas direcciones en el caso de F . La Figura 3.5 muestra líneas análogas pero que parten desde subcentros, introduciendo también al conjunto \bar{H} .

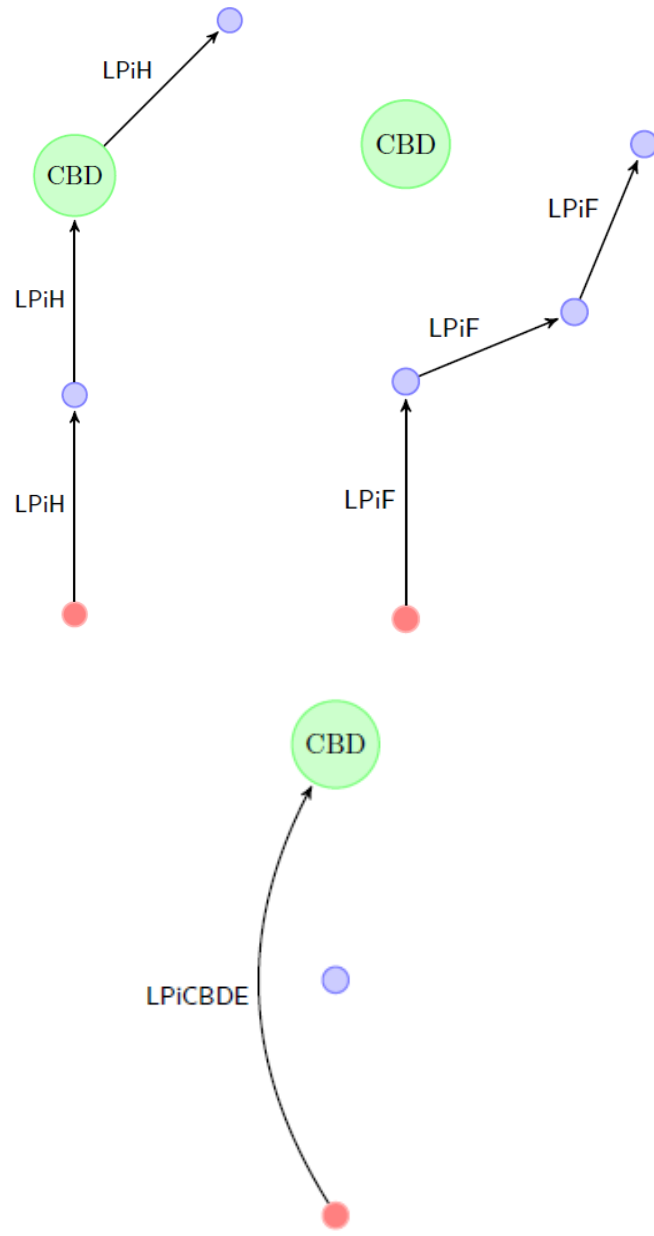


Figura 3.4: Líneas LP_iSC_jH , LP_iSC_jF y LP_iCBDE .

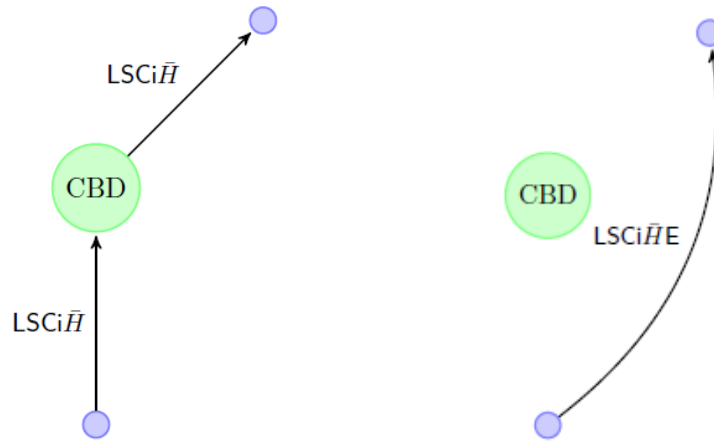


Figura 3.5: Líneas $SC_i\bar{H}$ y $SC_i\bar{H}E$.

La Figura 3.6 muestra una línea circular, que recorre sucesivamente los nodos del anillo de subcentros. Esta línea tiene una notación distinta a las demás: $LCirc$. Esto pues no tiene un nodo inicial ni final, y por lo tanto no tiene sentido denominarla bajo esas definiciones. Cabe resaltar que el suponer que hay una línea que no tenga ni comienzo ni final es un tanto abusivo, pues en la realidad cada bus tiene un terminal desde el cual partir y otro al cual llegar. Sin embargo, el análisis que se realiza con una demanda fija presupone que se está considerando un período específico de la jornada (por ejemplo hora punta mañana) y por lo tanto es razonable suponer que los buses de esa línea ya están en circulación y en equilibrio para el momento de análisis de este estudio. Por simetría, cuando esta línea exista, también lo hará su equivalente en sentido contrario.

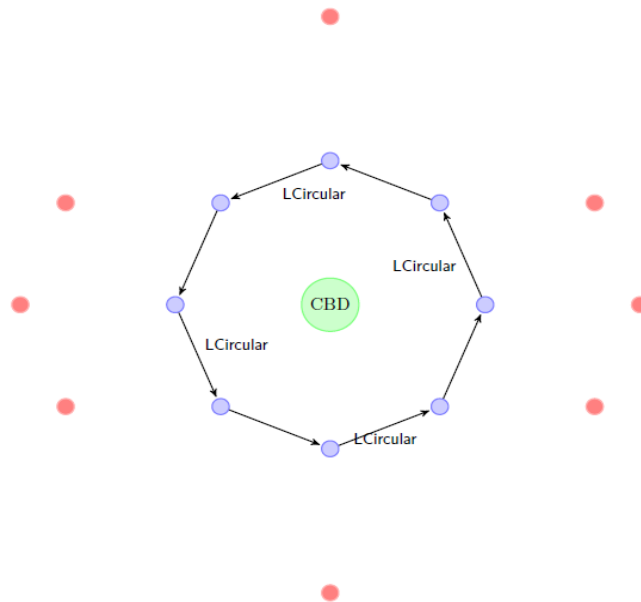


Figura 3.6: Línea circular, que recorre el anillo de subcentros.

3.2 La función de costos

Para poder comparar las estructuras recién explicadas, así como para caracterizar el problema, no basta con definir las estructuras y conocer la matriz O-D. También es necesaria la función de costos, que como se vio en el Capítulo 1, puede tener muchas expresiones distintas. En este caso se utilizará la función usada por Jara-Díaz y Gschwender (2003) incluyendo penalización por trasbordo, que tiene la principal ventaja de incorporar las frecuencias como variable por ser significativas para los tiempos de viaje, de ciclo y de espera. Si bien ello suma una dificultad extra por no poder resolver en pasos separados la ruta y la frecuencia de cada línea, esta manera de definir los costos es más completa pues la optimalidad de un conjunto de rutas depende de las frecuencias que se le asignen. La función de costos incorporará además los principales elementos discutidos en el Capítulo 1: costos de operadores mediante flotas y capacidades, costos de usuarios mediante tiempos de espera, tiempos de viaje en el vehículo y trasbordos.

En concreto, la función de costos que será usada es:

$$C = \sum_{l \in L} (c_0 + c_1 K(l)) B(l) + p_v t_v Y + p_e t_e Y + p_T T$$

El significado de los distintos parámetros se explica en la Tabla 3.1.

Parámetro	Significado
c_0	Costo fijo de cada bus
c_1	Costo por bus-tamaño
$K(l)$	Tamaño del bus de la línea l
$B(l)$	Tamaño de la flota de la línea l
p_v	Precio de un minuto viajando en bus percibido por el usuario
t_v	Tiempo promedio viajando en bus del total de los pasajeros del sistema
p_e	Precio de un minuto esperando en el paradero percibido por el usuario
t_e	Tiempo promedio esperando en el paradero del total de los pasajeros del sistema
p_T	Precio de un trasbordo entre buses percibido por el usuario
T	Total de trasbordos en el sistema

Tabla 3.1: Explicación de los parámetros que se utilizan en la función de costo total del sistema.

La variable de la cual dependerá el costo es el vector de frecuencias de las líneas. La capacidad, la flota, el tiempo de viaje promedio y el tiempo de espera promedio serán dependientes de ese vector. La cantidad de trasbordos dependerá de la estructura¹⁷. Los parámetros c_0, c_1, p_v, p_e y p_T serán considerados exógenos. Sus valores serán definidos cuando se realice el análisis numérico.

Para poder explicar cómo las frecuencias determinan los costos, se hace necesario primero explicitar ciertos supuestos que habrá que asumir:

- Todos los pasajeros escogerán la ruta de menor costo generalizado¹⁸.
- Las líneas tendrán controlado el intervalo de tiempo entre dos buses consecutivos para que éste sea constante. De este modo, el tiempo de espera promedio para los pasajeros que aguardan por la línea en cuestión será la mitad del inverso de la frecuencia.
- El tiempo de viaje en el vehículo tendrá dos componentes. El tiempo en movimiento, cuyos valores están definidos en el Capítulo 2 (que no depende de la cantidad de pasajeros)¹⁹, y el tiempo detenido en los paraderos. Para calcular este último, se supondrá que cada pasajero que suba o baje tardará un tiempo t en hacerlo.
- La tarifa es la misma para todos los viajes, por lo que no juega un rol en la modelación.

Con los supuestos claros, se procederá a explicar cómo se determinará el valor de los distintos componentes de C expresados en función de las frecuencias. Se ejemplificará además con la resolución de la primera estructura. Todo el análisis presupone que, dada la estructura, hay capacidad de predecir qué línea(s) utilizará(n) cada pasajero, y por lo tanto saber también cuantos pasajeros se subirán y se bajarán de cada bus en cada nodo.

Para determinar la capacidad de cada línea, la única restricción es que el bus sea capaz de transportar a todos los pasajeros que querrán tomarlo. En cada arco de su ruta tendrá una cantidad distinta de pasajeros, y por lo tanto la capacidad del bus será igual a la mayor carga que tenga al comparar entre todos los arcos. De esta forma se cumple con la restricción, y se hace de la forma menos costosa posible.

La flota de la línea se determina directamente mediante la relación $B(l) = f(l)t_c(l)$, donde $t_c(l)$ representa el tiempo de ciclo de la línea en cuestión.

¹⁷ En rigor, la cantidad de trasbordos también podría depender de las frecuencias. De haber dos rutas posibles para un mismo par O-D, incluyendo distintas cantidades de trasbordos, cada pasajero podría optar dependiendo de las frecuencias asociadas a cada alternativa. Sin embargo, como se explicará más adelante en este capítulo, para estas estructuras aquello no ocurrirá.

¹⁸ Costo generalizado se refiere al costo total percibido, incluyendo el disgusto por el tiempo de espera, de viaje y por los trasbordos involucrados, con sus respectivos precios ya definidos.

¹⁹ Por lo tanto, se asume implícitamente que no hay congestión.

Determinar el tiempo de ciclo es directo si se conoce la ruta que sigue, pues de allí se infiere el tiempo que se tarda en recorrerla, y los pasajeros que suben y bajan en cada parada, pues de allí se deduce el tiempo disipado esperando tales subidas y bajadas. Se supondrá que primero bajan todos los pasajeros y luego suben todos, por lo que el tiempo total es la suma de ambos efectos.

El tiempo de viaje promedio se determina conociendo el tiempo de viaje de los pasajeros de cada par O-D. La lógica es la misma comentada en el párrafo anterior para el tiempo de ciclo: basta conocer la ruta y el tiempo disipado por subidas y bajadas. Para esto último, cuando la parada es un nodo intermedio, se considera el total del tiempo. Cuando la parada es el nodo inicial del viaje, el tiempo después de subir ya está incorporado en el tiempo de espera (Jara-Díaz y Gschwender, 2003) y por lo tanto no se considera en el tiempo de viaje. Para el nodo final del viaje, el tiempo de subida de pasajeros no se considera, pues es posterior a la bajada del usuario en cuestión, mientras que para la bajada se considera a la mitad de los pasajeros, pues lo que interesa es el promedio.

El tiempo de espera, como ya se explicó, será un medio del inverso de la frecuencia asociada a la línea a ser tomada, o de las líneas en caso de existir líneas comunes.²⁰

Se procede ahora entonces a determinar los valores que toman las diversas componentes de la función de costos para cada una de las estructuras. En la resolución de la estructura de líneas directas se hará más explícito el análisis recién anunciado respecto a cómo expresar tales componentes en función de las frecuencias.

3.3 Estructura de líneas directas

Para poder resolver esta línea, hay ciertos supuestos y ciertos comentarios que esclarecerán el análisis:

- Como se puede notar en la Figura 3.1, están presentes todas las posibles líneas directas. Si bien podría sospecharse que una estructura óptima dejará afuera a alguna de éstas, esos casos están contenidos en el que será estudiado, pues entonces el proceso de optimización otorgará valor nulo a las frecuencias de tales líneas.

²⁰ Cuando hay varias líneas que para el usuario son equivalentes, se conoce como un fenómeno de líneas comunes. En este caso, la frecuencia observada es la suma de las frecuencias de cada una de las líneas comunes. La asignación de pasajeros supone que se dividen en forma proporcional a la frecuencia. Así, si la línea LX es común para cierta demanda D con LY , la cantidad de pasajeros que utiliza la línea LX será $\frac{f(LX)D}{f(LX)+f(LY)}$. Esto tiene efectos en la subida y bajada de pasajeros en cada nodo, y por lo tanto también en el cálculo de capacidades, tiempos de ciclo y tiempos de viaje en el vehículo.

- Se supondrá que nadie hará un trasbordo, pues para todos los viajes existen alternativas directas. Esto es particularmente relevante para los viajes que van desde la periferia a un subcentro ajeno, pues asegura que todos tomarán la línea directa en lugar de viajar al subcentro propio y allí trasbordar. Es una condición que si bien parece razonable (dado que no hay ventajas en las distancias), será necesario verificar a posteriori, pues los tiempos de espera y los disipados en los paraderos podrían provocar el efecto contrario.
- La línea P_iSC_jH distinguida con una "b" indica que va a un subcentro que no es parte de \bar{H} (que, como se explicará más adelante, será siempre menor o igual a H). Se hace necesario distinguir porque si bien las rutas son equivalentes, aquellas líneas que llegan a \bar{H} serán útiles para más pasajeros, y por lo tanto sus frecuencias y capacidades deben ser estudiadas por separado. En la Figura 3.1 no hay líneas de este tipo porque $H = \bar{H}$.
- El tamaño de H podría determinarse priorizando viajes cortos. Sin embargo, el criterio óptimo no es obvio, por lo que se resolverá para los distintos H posibles y se comparará.
- Dado H , el tamaño de \bar{H} es un problema de equilibrio. Esto pues cada usuario que viaja desde SC_i hacia un subcentro en \bar{H} puede optar entre viajar por la línea que atraviesa el CBD o por la línea circular. Como se explicó previamente, calcular la función de costos exige saber cómo asignar los usuarios. Para poder resolver, se partirá con $\bar{H} = H$, tanto para la definición de líneas como para la asignación de pasajeros, y se calcularán las frecuencias óptimas. Con estos datos se comparará el costo total para el pasajero que va desde SC_i hasta los nodos del borde de \bar{H} . Si viajar por la línea circular resultase más conveniente, se disminuye en 2 el valor de \bar{H} y se vuelve a iterar hasta que la verificación a posteriori muestre que el viaje atravesando el CBD es más conveniente. De esta forma se tendrá siempre $\bar{H} \leq H$.

La Figura 3.1 muestra las líneas que provienen de una zona específica, y el análisis para determinar las cifras relevantes para el costo se hará en forma análoga para las demás zonas. Para poder determinar el costo total, se hace necesario entonces saber cuántas líneas de cada tipo hay en el sistema, lo que para esta estructura se resume en la Tabla 3.2.

Para encontrar los valores de las diversas componentes de la función de costos expresados como función de las frecuencias, el primer paso es determinar cuántos pasajeros suben y cuántos bajan en un bus cualquiera en cada parada de cada línea. Ello requiere primeramente determinar, para cada par O-D, las líneas y rutas a seguir, información resumida en la Tabla 3.3.

Línea	Cantidad
LP_iSC_i	n
LP_iCBD	n
LP_iSC_jH	$n\bar{H}$
LP_iSC_jHb	$n(H - \bar{H})$
LP_iSC_jF	$2n$
LSC_iCBD	n
$LSC_iSC_j\bar{H}$	$n\bar{H}$
$LCirc$	2

Tabla 3.2: Cantidad de líneas por cada tipo en la estructura Dir.

Viaje	Líneas posibles de utilizar
$P_i - SC_i$	$LP_iSC_i, LP_iCBD, LP_iSC_jH, LP_iSC_jHb, LP_iSC_jF$
$P_i - CBD$	$LP_iCBD, LP_iSC_jH, LP_iSC_jHb$
$P_i - SC_j$ en \bar{H}	LP_iSC_jH
$P_i - SC_j$ en $H - \bar{H}$	LP_iSC_jHb
$P_i - SC_j$ en F	LP_iSC_jF
$SC_i - CBD$	$LP_iCBD, LP_iSC_jH, LP_iSC_jHb, LSC_iCBD, LSC_iSC_j\bar{H}$
$SC_i - SC_j$ en \bar{H}	$LP_iSC_jH, LSC_iSC_j\bar{H}$
$SC_i - SC_j$ en F	$LP_iSC_jF, LCirc$
$SC_i - SC_j$ en $\bar{F} - F$	$LCirc$

Tabla 3.3: Asignación de pasajeros en la estructura Dir.

Ahora se estudiará cuantos pasajeros suben y bajan en cada nodo, en cada bus de cada línea de esta estructura. Para ello primero serán definidas ciertas cantidades auxiliares:

$$CP_iSC_i = \frac{a\beta Y}{n(f(LP_iSC_i) + f(LP_iCBD) + \bar{H}f(LP_iSC_jH) + (H - \bar{H})f(LP_iSC_jHb) + 2f(LP_iSC_jF))}$$

Esta cantidad representa la cantidad de pasajeros por unidad de tiempo y por bus, cuyo origen es una periferia y el destino es el subcentro de la misma zona. El numerador es el total de viajes de ese tipo, dividir por n deja los pasajeros de una zona específica, y se divide por la frecuencia por ser la cantidad de buses que pasarán en la unidad de tiempo.

$$CP_iCBD = \frac{a\alpha Y}{n(f(LP_iCBD) + \bar{H}f(LP_iSC_jH) + (H - \bar{H})f(LP_iSC_jHb))}$$

Expresión equivalente a la anterior para los viajes que van desde una periferia al CBD. La siguiente cantidad es análoga para quienes van desde un subcentro al CBD.

$$CSC_iCBD = \frac{b\tilde{\alpha}Y}{n(f(LP_iCBD) + \bar{H}f(LP_iSC_jH) + (H - \bar{H})f(LP_iSC_jHb) + f(LSC_iCBD) + \bar{H}f(LSC_iSC_j\bar{H}))}$$

$$CP_iSC_j\bar{H} = \frac{a\gamma Y}{n(n-1)f(LP_iSC_jH)}$$

Esta última expresión es equivalente a las anteriores para viajes que van desde la periferia i a un subcentro j específico en \bar{H} , mientras que la que viene a continuación es análoga para quienes su origen es un subcentro.

$$CSC_iSC_j\bar{H} = \frac{b\tilde{\gamma}Y}{n(n-1)(f(LP_iSC_jH) + f(LSC_iSC_j\bar{H}))}$$

$$CP_iSC_jH = \frac{a\gamma Y}{n(n-1)f(LSC_iSC_jHb)}$$

Esta expresión es equivalente a las demás para viajes que ven desde la periferia i a un subcentro específico que se ubique en $H - \bar{H}$.

$$CP_iSC_jF = \frac{a\gamma Y}{n(n-1)f(LP_iSC_jF)}$$

$$CSC_iSC_j\bar{F} = \frac{(\bar{F} - F)b\tilde{\gamma}Y}{n(n-1)f(LCirc)}$$

Estas últimas expresiones son equivalentes a las anteriores cuando se parte desde una periferia para ir a un subcentro específico en F , y su versión análoga cuando el origen está en un subcentro, respectivamente.

En la Tabla 3.4 se caracterizan la subida y bajada de pasajeros por línea, por nodo.

Línea	Nodo	Suben	Bajan
LP_iSC_i	P_i	CP_iSC_i	0
	SC_i	0	CP_iSC_i
LP_iCBD	P_i	$CP_iSC_i + CP_iCBD$	0
	SC_i	CSC_iCBD	CP_iSC_i
	CBD	0	$CP_iCBD + CSC_iCBD$
LP_iSC_jH	P_i	$CP_iSC_i + CP_iCBD$ $+ CP_iSC_j\bar{H}$	0
	SC_i	$CSC_iCBD + CSC_iSC_j\bar{H}$	CP_iSC_i
	CBD	0	$CP_iCBD + CSC_iCBD$
	SC_j	0	$CP_iSC_j\bar{H} + CSC_iSC_j\bar{H}$
LP_iSC_jHb	P_i	$CP_iSC_i + CP_iCBD$ $+ CP_iSC_jH$	0
	SC_i	CSC_iCBD	CP_iSC_i
	CBD	0	$CP_iCBD + CSC_iCBD$

	SC_j	0	CP_iSC_jH
LSC_iCBD	SC_i	CSC_iCBD	0
	CBD	0	CSC_iCBD
LSC_iSC_jH	SC_i	$CSC_iCBD + CSC_iSC_j\bar{H}$	0
	CBD	0	CSC_iCBD
	SC_j	0	$CSC_iSC_j\bar{H}$
LP_iSC_jF	P_i	$CP_iSC_i + F \times CP_iSC_jF$	0
	SC_i	$\frac{b\tilde{\gamma}}{n(n-1)} \times$ $\sum_{k=1}^F \frac{1}{kf(LP_iSC_jF) + f(LCirc)}$	CP_iSC_i
	SC_{i+h}	$\frac{b\tilde{\gamma}}{n(n-1)} \times$ $\sum_{k=h+1}^F \frac{1}{kf(LP_iSC_jF) + f(LCirc)}$	$CP_iSC_jF + \frac{b\tilde{\gamma}}{n(n-1)} \times$ $\sum_{k=F-h+1}^F \frac{1}{kf(LP_iSC_jF) + f(LCirc)}$
LCirc	SC_i	$\frac{b\tilde{\gamma}}{n(n-1)} \times$ $\sum_{k=1}^F \frac{1}{kf(LP_iSC_jF) + f(LCirc)}$ $+ SC_iSC_j\bar{F}$	$\frac{b\tilde{\gamma}}{n(n-1)} \sum_{k=1}^F \frac{1}{kf(LP_iSC_jF) + f(LCirc)}$ $+ SC_iSC_j\bar{F}$

Tabla 3.4: Cantidad de pasajeros que se suben y bajan por bus en cada paradero para las distintas líneas de la estructura Dir.

Las expresiones de la Tabla 3.4 se explican por sí mismas, salvo para las últimas dos líneas. Para entenderlas, notar que para un viaje entre dos subcentros que se hace vía anillo, que hayan k líneas de tipo LP_iSC_jF que sirvan significa que el viaje es de largo $F - k + 1$. Así, en SC_{i+h} los valores que toma la sumatoria son los largos de los caminos que faltan por recorrer para el caso de la subida, y de los caminos ya recorridos para el caso de la bajada. Para la línea circular el análisis es análogo, sólo que en este caso todos los viajeros que van a \bar{F} pueden tomar la línea. La expresión se divide en dos porque para los viajes de largo menor que F también sirven líneas del

tipo LP_iSC_jF según el análisis ya hecho, mientras que para los nodos que van desde $F + 1, \dots, \bar{F}$ sólo la línea circular sirve.

Como notación, se usarán las matrices Z y V para referirnos a los pasajeros que suben y bajan, respectivamente. Por ejemplo, de acuerdo a la Tabla 3.4

$$V(LP_iCBD, SC_i) = CP_iSC_i.$$

Se procede a determinar los tiempos de espera y de viaje promedio, y los tiempos de ciclo y carga máxima de cada línea.

$$\begin{aligned} t_e &= \frac{1}{2} \left[\frac{a\beta}{f(LP_iSC_i) + f(LP_iCBD) + \bar{H}f(LP_iSC_jH) + (H - \bar{H})f(LP_iSC_jHb) + 2f(LP_iSC_jF)} \right. \\ &+ \frac{\alpha\alpha}{f(LP_iCBD) + \bar{H}f(LP_iSC_jH) + (H - \bar{H})f(LP_iSC_jHb)} + \frac{\alpha\gamma\bar{H}}{(n-1)f(LP_iSC_jH)} \\ &+ \frac{\alpha\gamma(H - \bar{H})}{(n-1)f(LP_iSC_jHb)} + \frac{2\alpha\gamma F}{(n-1)f(LP_iSC_jF)} \\ &+ \frac{b\tilde{\alpha}}{f(LP_iCBD) + \bar{H}f(LP_iSC_jH) + (H - \bar{H})f(LP_iSC_jHb) + f(LSC_iCBD) + \bar{H}f(LSC_iSC_j\bar{H})} \\ &+ \frac{b\tilde{\gamma}\bar{H}}{(n-1)(f(LSC_iSC_jH) + f(LP_iSC_jH))} \\ &\left. + \frac{2b\tilde{\gamma}}{n-1} \sum_{k=1}^F \frac{1}{kf(LP_iSC_jF) + f(LCirc)} + \frac{2b\tilde{\gamma}(\bar{F} - F)}{(n-1)f(LCirc)} \right] \end{aligned}$$

Esta fórmula presupone que los buses de una misma línea pasan a intervalos fijos; el factor $\frac{1}{2}$ aparece por ser el promedio del tiempo que percibirán los usuarios (que llegan en forma aleatoria al paradero). Después cada sumando es el producto entre la porción de viajeros que sigue un viaje determinado y el tiempo de espera percibido considerando el fenómeno de líneas comunes ya explicado.

Para el tiempo de viaje, nuevamente la forma de calcularlo será haciendo la suma ponderada de los tiempos para cada uno de los pares O-D. Notar que en este caso se hará necesario diferenciar entre las líneas comunes, pues los tiempos de subida y bajada de pasajeros diferirán de acuerdo a la línea tomada.

$$\begin{aligned}
& t_v \\
& = a\beta \left[gT_0 \right. \\
& + \frac{t}{2[f(LP_iSC_i) + f(LP_iCBD) + \bar{H}f(LP_iSC_jH) + (H - \bar{H})f(LP_iSC_jHb) + 2f(LP_iSC_jF)]} \left(f(LP_iSC_i)V(LP_iS \right. \\
& + f(LP_iCBD)V(LP_iSC_i, SC_i) + \bar{H}f(LP_iSC_jH)V(LP_iSC_jH, SC_i) \\
& \left. \left. + (H - \bar{H})f(LP_iSC_jHb)V(LP_iSC_jHb, SC_i) + 2f(LP_iSC_jF)V(LP_iSC_jF, SC_i) \right) \right] \\
& + a\alpha \left[(g + 1)T_0 \right. \\
& + \frac{t}{f(LP_iCBD) + \bar{H}f(LP_iSC_jH) + (H - \bar{H})f(LP_iSC_jHb)} \left(f(LP_iCBD) \left(V(LP_iCBD, SC_i) \right. \right. \\
& + Z(LP_iCBD, SC_i) + \frac{V(LP_iCBD, CBD)}{2} \left. \left. + \bar{H}f(LP_iSC_jH) \left(V(LP_iSC_jH, SC_i) + Z(LP_iSC_jH, SC_i) + \frac{V(LP_iSC_jH, CBD)}{2} \right) + (H \right. \right. \\
& \left. \left. - \bar{H})f(LP_iSC_jHb) \left(V(LP_iSC_jHb, SC_i) + Z(LP_iSC_jHb, SC_i) + \frac{V(LP_iSC_jHb, CBD)}{2} \right) \right) \right] + \\
& \frac{a\gamma\bar{H}}{n-1} \left[(g + 2)T_0 \right. \\
& + t \left(V(LP_iP_iSC_jH, SC_i) + Z(LP_iSC_jH, SC_i) + V(LP_iSC_jH, CBD) \right. \\
& \left. \left. + \frac{V(LP_iSC_jH, SC_j)}{2} \right) \right] \\
& + \frac{a\gamma(H - \bar{H})}{n-1} \left[(g + 2)T_0 \right. \\
& + t \left(V(LP_iSC_jHb, SC_i) + Z(LP_iSC_jHb, SC_i) + V(LP_iSC_jHb, CBD) \right. \\
& \left. \left. + \frac{V(LP_iSC_jHb, SC_j)}{2} \right) \right] \\
& + \frac{2a\gamma}{n-1} \sum_{k=1}^F \left[T_0(g + kr_n) \right. \\
& \left. + t \left(\sum_{h=0}^{k-1} \left(Z(LP_iSC_jF, SC_{i+h}) + V(LP_iSC_jF, SC_{i+h}) \right) + \frac{V(LP_iSC_jF, SC_{i+k})}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + b\tilde{\alpha} \left[T_0 \right. \\
& + \frac{t}{2 \left(f(LP_i CBD) + f(LSC_i CBD) + \bar{H}f(LP_i SC_j H) + (H - \bar{H})f(LP_i SC_j Hb) + \bar{H}f(LSC_i SC_j \bar{H}) \right)} \\
& \times \left(f(LP_i CBD)V(LP_i CBD, CBD) + f(LSC_i CBD)V(LSC_i CBD, CBD) \right. \\
& + \bar{H}f(LP_i SC_j H)V(LP_i SC_j H, CBD) + (H - \bar{H})f(LP_i SC_j Hb)V(LP_i SC_j Hb, CBD) \\
& \left. \left. + \bar{H}f(LSC_i SC_j H)V(LSC_i SC_j H, CBD) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{b\tilde{\gamma}\bar{H}}{n-1} \left[2T_0 + \frac{t}{f(LP_i SC_j H) + f(LSC_i SC_j \bar{H})} \left(f(LP_i SC_j H) \left(V(LP_i SC_j H, CBD) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{V(LP_i SC_j H, SC_j)}{2} \right) \right. \\
& \left. \left. + f(LSC_i SC_j \bar{H}) \left(V(LSC_i SC_j \bar{H}, CBD) + \frac{V(LSC_i SC_j \bar{H}, SC_j)}{2} \right) \right) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2b\tilde{\gamma}}{n-1} \sum_{k=1}^F \left[kr_n T_0 \right. \\
& + \frac{t}{(F-k+1)f(LP_i SC_j F) + f(LCirc)} \left(f(LP_i SC_j F) \sum_{p=0}^{F-k} \left\{ \sum_{h=l+1}^{l+k-1} \left(Z(LP_i SC_j F, SC_{i+h}) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + V(LP_i SC_j F, SC_{i+h}) \right) + \frac{V(LP_i SC_j F, SC_{i+k+p})}{2} \right\} \\
& \left. + f(LCirc) \left\{ (k-1)(Z(LCirc, SC_i) + V(LCirc, SC_i)) + \frac{V(LCirc)}{2} \right\} \right) \right] \\
& + \frac{2b\tilde{\gamma}}{n-1} \sum_{k=F+1}^{\bar{F}} \left[kr_n T_0 + t((k-1)(Z(LCirc, SC_i) + V(LCirc, SC_i)) + \frac{V(LCirc, SC_i)}{2}) \right]
\end{aligned}$$

Recordar que el término $r_n T_0$ es la distancia entre dos subcentros adyacentes. Ambos subcentros son parte de una circunferencia centrada en el CBD y de radio T_0 , y están conectados en línea recta, por lo que el teorema del coseno entrega directamente que $r_n = \sqrt{2 - 2 \cos \frac{2\pi}{n}}$.

Cabe resaltar que la fórmula de tiempo de viaje incluye varias complejidades, pues varios sumandos contienen productos cruzados entre

distintas frecuencias en el denominador. Esta observación, que ya era válida para cálculos anteriores pero que se extrema en este caso, será relevante pues hará muy difícil una resolución analítica del problema, como se verá en el próximo capítulo.

Para describir los tiempos de ciclo, será útil la noción de carga total de una línea, es decir, el total de pasajeros que utilizan un bus cualquiera de esa línea, pues así se obtiene fácilmente el tiempo que le toma a ese bus el esperar por subida y bajada de pasajeros en total. Se usará entonces la notación $A(L) = \sum_i Z(L, i)$. Con esa notación, los tiempos de ciclo se resumen en la Tabla 3.5.

Línea	Tiempo de Ciclo
LP_iSC_i	$2gT_0 + 2tA(LP_iSC_i)$
LP_iCBD	$2(g + 1)T_0 + 2tA(LP_iCBD)$
LP_iSC_jH	$2(g + 1)T_0 + 2tA(LP_iSC_jH)$
LP_iSC_jHb	$2(g + 1)T_0 + 2tA(LP_iSC_jHb)$
LP_iSC_jF	$(2g + Fr_n)T_0 + 2tA(LP_iSC_jF)$
LSC_iCBD	$2T_0 + 2tA(LSC_iCBD)$
$LSC_iSC_j\bar{H}$	$2T_0 + 2tA(LSC_iSC_j\bar{H})$
$LCirc$	$nr_nT_0 + 2tA(LCirc)$

Tabla 3.5: Tiempos de ciclo de las líneas de la estructura Dir.

Es relevante notar que para cumplir el ciclo entero, el bus debe llegar a un punto desde donde comienza nuevamente el recorrido. En este caso, se aprovecha la simetría de la forma urbana para que no vuelvan exactamente al mismo punto desde el cual partieron, sino que partan desde el punto equivalente (ya sea periferia o subcentro) más cercano al punto donde se bajaron sus últimos pasajeros. Así por ejemplo, los buses de la línea LP_iSC_jH comenzarán su nuevo recorrido desde la periferia correspondiente a la zona del subcentro de H en el cual el bus se vació. Notar además que para la línea circular, su afluencia total es n veces los pasajeros que se suben en un subcentro cualquiera.

Por último queda expresar la capacidad de cada línea en función de las frecuencias. Recordar que el costo depende crecientemente de la capacidad, y por lo tanto cada bus tendrá la mínima capacidad que respete la restricción de que todos los pasajeros quepan. Como en cada arco recorrido por el bus la cantidad de pasajeros varía, el procedimiento consiste simplemente en determinar para cada arco de la ruta de la línea en cuestión cual será la

carga y luego seleccionar el máximo dentro de todos los arcos. En general es un procedimiento muy simple, pues la carga en cada arco es simplemente la suma de todos los que han subido en los nodos anteriores menos la resta de todos los que han bajado; la única excepción es la línea circular, que se mantiene en equilibrio -en todos los nodos la cantidad de pasajeros que suban y bajan es la misma- y por tanto se hace necesario un análisis específico. Para el resto de las líneas, en algunos casos será claro cuál tramo es el de mayor carga, en otros dependerá del valor de ciertos parámetros y así quedará expresado. El resumen de estos valores se encuentra en la Tabla 3.6.

Línea	Carga
LP_iSC_i	$Z(LP_iSC_iP_i)$
LP_iCBD	$\max[Z(LP_iCBD, P_i), Z(LP_iCBD, P_i) + Z(LP_iCBD, SC_i) - V(LP_iCBD, SC_i)]$
LP_iSC_jH	$\max[Z(LP_iSC_jH, P_i), Z(LP_iSC_jH, P_i) + Z(LP_iSC_jH, SC_i) - V(LP_iSC_jH, SC_i)]$
LP_iSC_jHb	$\max[Z(LP_iSC_jHb, P_i), Z(LP_iSC_jHb, P_i) + Z(LP_iSC_jHb, SC_i) - V(LP_iSC_jHb, SC_i)]$
LP_iSC_jF	$\max \left\{ Z(LP_iSC_jF, P_i), \max_{k=0, \dots, F-1} \left[Z(LP_iSC_jF, P_i) + \sum_{h=0}^k Z(LP_iSC_jF, SC_{i+h}) - V(LP_iSC_jF, SC_{i+h}) \right] \right\}$
LSC_iCBD	$Z(LSC_iCBD, SC_i)$
$LSC_iSC_j\bar{H}$	$Z(LSC_iSC_j\bar{H}, SC_i)$
$LCirc$	$\frac{b\tilde{\gamma}Y}{n(n-1)} \left[\sum_{h=1}^F \frac{F-h+1}{f(LCirc) + hf(LP_iSC_jF)} + \sum_{h=F+1}^{\bar{F}} \frac{\bar{F}-h+1}{f(LCirc)} \right]$

Tabla 3.6: Carga máxima de las líneas de la estructura Dir.

Para comprender la carga de la línea circular, basta fijar un arco cualquiera y recordar que si hay h líneas de tipo LP_iSC_jF que son comunes a la circular, significa que se está considerando un viaje de largo $F - h + 1$. La cantidad de pares O-D que están a esa distancia y que pasan por el arco en análisis -y por tanto, que ocuparán un bus de esa línea en ese arco- son precisamente

$F - h + 1$. De ahí se explica el primer sumando, el segundo es equivalente para aquellos viajes que por su largo (si se da que $\bar{F} > F$) sólo pueden usar la línea circular.

3.4 Estructura de líneas exclusivas

Esta estructura, graficada en la Figura 3.1, resulta más simple de analizar, pues cada línea tiene solamente un nodo de subida y un nodo de bajada, y asimismo cada pasajero tiene solamente una línea que le sirve para llegar a su destino. En ese sentido, el valor de F (y también el de \bar{F}) se determina por criterios estrictamente geométricos, pues el único factor diferenciador entre las dos posibles rutas para llegar a un subcentro cualquiera desde una zona distinta es el largo de tal ruta. Luego, partiendo desde la zona i se tendrá que

$$SC_{i+k} \in F \Leftrightarrow kr_n \leq 2 \Leftrightarrow k \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \cos \frac{2\pi}{n}}}$$

Y por lo tanto $F = \bar{F} = \left\lfloor \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \cos \frac{2\pi}{n}}} \right\rfloor$.

Para las líneas de tipo LP_iSC_jFE o LSC_iSC_jFE , cabe destacar que como su destino será un nodo específico al cual llegarán recorriendo el anillo, habrá rutas de largo diferente. En la Tabla 3.7 se consideran estas líneas como equivalentes; cuando esta distinción de largo de ruta sea relevante se explicitará, denotando a la línea que recorre h arcos en el anillo por $LP_iSC_{i+h}E$ o $LSC_iSC_{i+h}E$, respectivamente. Las líneas que van a subcentros ajenos atravesando el CBD tienen el mismo largo y por lo tanto allí la equivalencia es completa.

En este caso la asignación de los pasajeros es directa, pues a cada par O-D le corresponde la línea que une específicamente ese par. Con ello, caracterizar las matrices Z y V es sumamente simple, como muestra la Tabla 3.8.

Línea	Cantidad
LP_iSC_i	n
LP_iCBDE	n
LP_iSC_jHE	nH
LP_iSC_jFE	$2nF$
LSC_iCBD	n
LSC_iSC_jHE	nH
LSC_iSC_jFE	nF

Tabla 3.7: Cantidad de líneas por cada tipo en la estructura Exc.

El tiempo de espera en este caso es directo de calcular:

$$\begin{aligned}
t_e = \frac{1}{2} & \left[\frac{a\beta}{f(LP_iSC_i)} + \frac{a\alpha}{f(LP_iCBDE)} + \frac{a\gamma H}{(n-1)f(LP_iSC_jHE)} \right. \\
& + \frac{2a\gamma}{n-1} \sum_{k=1}^F \frac{1}{f(LP_iSC_{i+k}E)} + \frac{b\tilde{\alpha}}{f(LSC_iCBD)} + \frac{b\tilde{\gamma}H}{(n-1)f(LSC_iSC_jHE)} \\
& \left. + \frac{2b\tilde{\gamma}}{n-1} \sum_{k=1}^F \frac{1}{f(LSC_iSC_{i+k}E)} \right].
\end{aligned}$$

El tiempo de viaje:

$$\begin{aligned}
t_v = a\beta & \left(gT_0 + t \frac{V(LP_iSC_i, SC_i)}{2} \right) + a\alpha \left((g+1)T_0 + t \frac{V(LP_iCBDE, CBD)}{2} \right) \\
& + a\gamma \frac{H}{n-1} \left((g+2)T_0 + t \frac{V(LP_iSC_jHE, SC_j)}{2} \right) \\
& + a\gamma \frac{2}{n-1} \sum_{k=1}^F \left[(g+kr_n)T_0 + t \frac{V(LP_iSC_{i+k}, SC_{i+k})}{2} \right] \\
& + b\tilde{\alpha} \left(T_0 + t \frac{V(LSC_iCBD, CBD)}{2} \right) + b\tilde{\gamma} \frac{H}{n-1} \left(2T_0 + t \frac{V(LSC_iSC_jHE, SC_j)}{2} \right) \\
& + a\gamma \frac{2}{n-1} \sum_{k=1}^F \left[kr_n T_0 + t \frac{V(LSC_iSC_{i+k}, SC_{i+k})}{2} \right].
\end{aligned}$$

Línea	Nodo	Suben	Bajan
LP_iSC_i	P_i	$\frac{a\beta Y}{nf(LP_iSC_i)}$	0
	SC_i	0	$\frac{a\beta Y}{nf(LP_iSC_i)}$
LP_iCBDE	P_i	$\frac{a\alpha Y}{nf(LP_iCBDE)}$	0
	CBD	0	$\frac{a\alpha Y}{nf(LP_iCBDE)}$
LP_iSC_jHE	P_i	$\frac{a\gamma Y}{n(n-1)f(LP_iSC_jHE)}$	0
	SC_j	0	$\frac{a\gamma Y}{n(n-1)f(LP_iSC_jHE)}$
LP_iSC_jFE	P_i	$\frac{a\gamma Y}{n(n-1)f(LP_iSC_jFE)}$	0
	SC_j	0	$\frac{a\gamma Y}{n(n-1)f(LP_iSC_jFE)}$
LSC_iCBD	SC_i	$\frac{b\tilde{\beta}Y}{nf(LSC_iCBD)}$	0
	CBD	0	$\frac{b\tilde{\beta}Y}{nf(LSC_iCBD)}$
LSC_iSC_jHE	SC_i	$\frac{b\tilde{\gamma}Y}{n(n-1)f(LSC_iSC_jHE)}$	0
	SC_j	0	$\frac{b\tilde{\gamma}Y}{n(n-1)f(LSC_iSC_jHE)}$
LSC_iSC_jFE	SC_i	$\frac{b\tilde{\gamma}Y}{n(n-1)f(LSC_iSC_jFE)}$	0
	SC_j	0	$\frac{b\tilde{\gamma}Y}{n(n-1)f(LSC_iSC_jFE)}$

Tabla 3.8: Cantidad de pasajeros que se suben y bajan por bus en cada paradero para las distintas líneas de la estructura Exc.

Los tiempos de ciclo, replicando la notación usada para las estructuras directas, se presentan en la Tabla 3.9.

Línea	Tiempo de Ciclo
LP_iSC_i	$2gT_0 + 2tA(LP_iSC_i)$
LP_iCBDE	$(2g + 2)T_0 + 2tA(LP_iCBDE)$
LP_iSC_jHE	$(2g + 2)T_0 + 2tA(LP_iSC_jHE)$
$LP_iSC_{i+k}E$	$(g + kr_n)T_0 + 2tA(LP_iSC_{i+k}E)$
LSC_iCBD	$2T_0 + 2tA(LSC_iCBD)$
LSC_iSC_jHE	$2T_0 + 2tA(LSC_iSC_jHE)$
$LSC_iSC_{i+k}E$	$kr_nT_0 + 2tA(LSC_iSC_{i+k}E)$

Tabla 3.9: Tiempos de ciclo de las líneas de la estructura Exc.

Las cargas máximas por bus se extraen directamente de la Tabla 3.8, pues la carga es constante en todos los arcos y su valor es precisamente la cantidad de pasajeros que se suben en su nodo de origen.

3.5 Estructura tipo hub & spoke

Para esta estructura, graficada en la Figura 3.2, es necesaria definir una nueva notación: el subcentro SC_{-i} , que representa el subcentro "opuesto" a i . Si la cantidad de nodos es par es efectivamente el que se encuentra exactamente al frente en el círculo de subcentros (y es por tanto el subcentro más lejano), mientras que si n es impar se escogerá arbitrariamente cualquiera de los 2 nodos que son los más lejanos. Tal es el caso de la Figura 3.2, en la que se escoge el nodo al que es más rápido llegar por la izquierda. Este nodo es relevante de distinguir porque las líneas que emergen desde las periferias terminarán allí. Se hace de esta manera porque son esos nodos los que más ventaja tienen de ser conectados vía CBD, pues la distancia vía anillo de subcentros se maximiza. La Tabla 3.10 resume la cantidad de líneas de cada tipo para esta estructura.

Línea	Cantidad
LP_iSC_{-i}	n
$LCBDSC_j$	n
$LCirc$	2

Tabla 3.10: Cantidad de líneas por cada tipo en la estructura H&S.

En este caso el supuesto de que nadie hará trasbordos sería mucho más fuerte, pues en algunos casos trasbordar puede significar distancias mucho menores. La esencia de una estructura H&S es que los pasajeros trasborden en el nodo dispuesto para ello. Esto significa que tanto quienes parten desde la periferia como desde el subcentro i a zonas ajenas tienen dos rutas posibles; luego el problema tanto en H como en \bar{H} es de equilibrio y se hace necesario iterar en ambos. Cabe resaltar que se tendrá siempre $H \geq \bar{H}$. Para comprobarlo, basta notar que un pasajero que parte desde la periferia siempre partirá tomando una línea LP_iSC_j ; luego, al momento de decidir si bajar en SC_i o seguir hasta el CBD, las variables para su decisión son exactamente las mismas que las de quien parte en el subcentro, salvo porque este último debe considerar además el tiempo de espera de la línea LP_iSC_j . Así, irse por el anillo tiene el mismo costo para ambos, pero irse vía CBD es más barato para quien viene de la periferia.

La Tabla 3.11 muestra las líneas posibles a ser utilizadas para cada par O-D. El símbolo "+" representa un trasbordo. La Tabla 3.12 resume la asignación de pasajeros.

En este caso el tiempo de espera estará dado por:

$$t_e = \frac{1}{2} \left[\frac{a\beta}{f(LP_iSC_{-i})} + \frac{a\alpha}{f(LP_iSC_{-i})} + \frac{a\gamma}{(n-1)f(LP_iSC_{-i})} + \frac{a\gamma(H-1)}{n-1} \left(\frac{1}{f(LP_iSC_{-i})} + \frac{1}{f(LP_iSC_{-i}) + f(LCBDSC_j)} \right) + \frac{2a\gamma F}{n-1} \left(\frac{1}{f(LP_iSC_{-i})} + \frac{1}{f(LCirc)} \right) + \frac{b\tilde{\alpha}}{f(LP_iSC_{-i})} + \frac{b\tilde{\gamma}}{(n-1)f(LP_iSC_{-i})} + \frac{b\tilde{\gamma}(\bar{H}-1)}{n-1} \left(\frac{1}{f(LP_iSC_{-i})} + \frac{1}{f(LP_iSC_{-i}) + f(LCBDSC_j)} \right) + \frac{2b\tilde{\gamma}F}{(n-1)f(LCirc)} \right].$$

Viaje	Combinaciones de Líneas posibles de utilizar
$P_i - SC_i$	LP_iSC_{-i}
$P_i - CBD$	LP_iSC_{-i}
$P_i - SC_{-i}$	LP_iSC_{-i}
$P_i - SC_j$ en H	$LP_iSC_{-i} + (LP_jSC_{-j}, LCB DSC_j)$
$P_i - SC_j$ en F	$LP_iSC_{-i} + LCirc$
$SC_i - CBD$	LP_iSC_{-i}
$SC_i - SC_{-i}$	LP_iSC_{-i}
$SC_i - SC_j$ en \bar{H}	$LP_iSC_{-i} + (LP_jSC_{-j}, LCB DSC_j)$
$SC_i - SC_j$ en \bar{F}	$LCirc$

Tabla 3.11: Asignación de pasajeros en la estructura H&S.

Línea	Nodo	Suben	Bajan
LP_iSC_{-i}	P_i	$\frac{a\gamma}{nf(LP_iSC_{-i})}$	0
	SC_i	$\frac{b\tilde{\alpha}Y}{nf(LP_iSC_{-i})} + \frac{b\tilde{\gamma}Y}{n(n-1)f(LP_iSC_{-i})}$	$\frac{a\beta Y}{nf(LP_iSC_{-i})} + \frac{2a\gamma Y F}{n(n-1)f(LP_iSC_{-i})}$
	CBD	$\frac{a\gamma Y(H-1)}{n(n-1)[f(LP_iSC_{-i}) + f(LCBDSC_j)]} + \frac{b\tilde{\gamma}Y(\bar{H}-1)}{n(n-1)[f(LP_iSC_{-i}) + f(LCBDSC_j)]}$	$\frac{a\alpha Y}{nf(LP_iSC_{-i})} + \frac{b\tilde{\alpha}Y}{nf(LP_iSC_{-i})} + \frac{a\gamma Y(H-1)}{n(n-1)f(LP_iSC_{-i})} + \frac{b\tilde{\gamma}Y(\bar{H}-1)}{n(n-1)f(LP_iSC_{-i})}$
	SC_{-i}	0	$\frac{a\gamma Y}{n(n-1)f(LP_iSC_{-i})} + \frac{b\tilde{\gamma}Y}{n(n-1)f(LP_iSC_{-i})} + Z(LP_iSC_{-i}, CBD)$
$LCBDSC_j$	CBD	$Z(LP_iSC_{-i}, CBD)$	0
	SC_j	0	$Z(LP_iSC_{-i}, CBD)$
$LCirc$	SC_i	$\frac{a\gamma FY}{n(n-1)f(LCirc)} + \frac{b\tilde{\gamma}\bar{F}Y}{n(n-1)f(LCirc)}$	$\frac{a\gamma FY}{n(n-1)f(LCirc)} + \frac{b\tilde{\gamma}\bar{F}Y}{n(n-1)f(LCirc)}$

Tabla 3.12: Cantidad de pasajeros que suben y bajan por bus en cada paradero para las distintas líneas estructura H&S.

Y el tiempo de viaje:

$$t_v = a\beta \left[gT_0 + \frac{t}{2} V(LP_iSC_{-i}, SC_i) \right] + a\alpha \left[(g+1)T_0 + t \left(Z(LP_iSC_{-i}, SC_i) + V(LP_iSC_{-i}, SC_i) + \frac{V(LP_iSC_{-i}, CBD)}{2} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& +a\alpha \left[(g+1)T_0 + t \left(Z(LP_iSC_{-i}, SC_i) + V(LP_iSC_{-i}, SC_i) + \frac{V(LP_iSC_{-i}, CBD)}{2} \right) \right] \\
& \quad + \frac{\alpha\gamma}{n-1} \left[(g+2)T_0 \right. \\
& \quad + t \left(Z(LP_iSC_{-i}, SC_i) + V(LP_iSC_{-i}, SC_i) + Z(LP_iSC_{-i}, CBD) + V(LP_iSC_{-i}, CBD) \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{V(LP_iSC_{-i}, SC_{-i})}{2} \right) \right] + \\
& \quad \frac{\alpha\gamma(H-1)f(LP_iSC_{-i})}{(n-1)(f(LP_iSC_{-i}) + f(LCBDSC_j))} \left[(g+2)T_0 \right. \\
& \quad \left. + t \left(Z(LP_iSC_{-i}, SC_i) + V(LP_iSC_{-i}, SC_i) + \frac{V(LP_iSC_{-i}, CBD)}{2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{V(LP_iSC_{-i}, SC_{-i})}{2} \right) \right] + \\
& \quad \frac{\alpha\gamma(H-1)f(LCBDSC_j)}{(n-1)(f(LP_iSC_{-i}) + f(LCBDSC_j))} \left[(g+2)T_0 \right. \\
& \quad \left. + t \left(Z(LP_iSC_{-i}, SC_i) + V(LP_iSC_{-i}, SC_i) + \frac{V(LP_iSC_{-i}, CBD)}{2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{V(LCBDSC_j, SC_j)}{2} \right) \right] + \\
& \quad \frac{2\alpha\gamma}{n-1} \sum_{k=1}^F \left[(g+kr_n)T_0 \right. \\
& \quad \left. + t \left(\frac{V(LP_iSC_{-i}, SC_i)}{2} + (k-1)(V(LCirc, SC_i) + Z(LCirc, SC_i)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{V(LCirc, SC_i)}{2} \right) \right] + b\tilde{\alpha} \left[T_0 + \frac{tV(LP_iSC_{-i}, CBD)}{2} \right] + \\
& \quad \frac{b\tilde{\gamma}}{n-1} \left[2T_0 + t \left(Z(LP_iSC_{-i}, CBD) + V(LP_iSC_{-i}, CBD) + \frac{V(LP_iSC_{-i}, SC_{-i})}{2} \right) \right] + \\
& \quad \frac{b\tilde{\gamma}(H-1)f(LP_iSC_{-i})}{(n-1)(f(LP_iSC_{-i}) + f(LCBDSC_j))} \left[2T_0 + t \left(\frac{V(LP_iSC_{-i}, CBD)}{2} + \frac{V(LP_iSC_{-i}, SC_{-i})}{2} \right) \right] + \\
& \quad \frac{b\tilde{\gamma}(H-1)f(LCBDSC_j)}{(n-1)(f(LP_iSC_{-i}) + f(LCBDSC_j))} \left[2T_0 + t \left(\frac{V(LP_iSC_{-i}, CBD)}{2} + \frac{V(LCBDSC_j, SC_j)}{2} \right) \right] + \\
& \quad \frac{2b\tilde{\gamma}}{n-1} \sum_{k=1}^F \left[kr_nT_0 + t \left((k-1)(V(LCirc, SC_i) + Z(LCirc, SC_i)) + \frac{V(LCirc, SC_i)}{2} \right) \right].
\end{aligned}$$

Los tiempos de ciclo se resumen en la Tabla 3.13.

Línea	Tiempo de Ciclo
LP_iSC_{-i}	$2(g + 1)T_0 + 2tA(LP_iSC_{-i})$
$LCBDSC_j$	$2T_0 + 2tA(LCBDSC_j)$
$LCirc$	$nr_nT_0 + 2ntA(LCirc)$

Tabla 3.13: Tiempos de ciclo de las líneas de la estructura H&S.

A su vez, las capacidades de cada línea se describen en la Tabla 3.14.

Línea	Carga Máxima
LP_iSC_{-i}	$\max\{Z(LP_iSC_{-i}, P_i), Z(LP_iSC_{-i}, P_i) + Z(LP_iSC_{-i}, SC_i) - V(LP_iSC_{-i}, SC_i), Z(LP_iSC_{-i}, P_i) + Z(LP_iSC_{-i}, SC_i) - V(LP_iSC_{-i}, SC_i) + Z(LP_iSC_{-i}, CBD) - V(LP_iSC_{-i}, CBD)\}$
$LCBDSC_j$	$Z(LCBDSC_j, CBD)$
$LCirc$	$\frac{a\gamma Y}{n(n-1)} \sum_{k=1}^F \frac{F-k+1}{f(LCirc)} + \frac{b\tilde{\gamma} Y}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{\bar{F}} \frac{\bar{F}-k+1}{f(LCirc)}$

Tabla 3.14: Carga máxima de las líneas de la estructura H&S.

El razonamiento para determinar la carga de la línea circular es análogo al explicado para el caso de la estructura Dir. Cabe señalar que en este caso las sumas son fáciles de resolver, y se obtiene que tal valor es

$$\frac{Y}{2n(n-1)f(LCirc)} [(F^2 + F)a\gamma + (\bar{F}^2 + \bar{F})b\tilde{\gamma}].$$

Como se explicó previamente, en esta estructura hay trasbordos, los que deben ser calculados también para el caso en que $p_T > 0$, pues serán relevantes para la posterior comparación entre estructuras. La cantidad de trasbordos está dada por:

$$T = \frac{a\gamma(H-1)Y}{n-1} + \frac{2a\gamma FY}{n-1} + \frac{b\tilde{\gamma}(\bar{H}-1)Y}{n-1}.$$

3.6 Estructura de líneas troncales y alimentadoras

Esta estructura, graficada en la Figura 3.2, tiene una característica bien particular. Recoge a todos los pasajeros de la periferia, los lleva hasta el subcentro de su misma zona y desde allí se reparten en una lógica de líneas directas. Es necesario resaltar que una vez en el subcentro, los pasajeros de la periferia estarán exactamente en las mismas condiciones que los pasajeros que comienzan su viaje en el subcentro, y por tanto la repartición de viajes será la misma. Ello implica, entre otras cosas, que para esta estructura $H = \bar{H}$.

Las Tablas 3.15, 3.16 y 3.17 muestran la cantidad de líneas por tipo, la asignación de pasajeros y la subida y bajada de pasajeros por nodo y línea, respectivamente.

Línea	Cantidad
LP_iSC_i	n
LSC_iSC_jH	nH
$LCirc$	2

Tabla 3.15: Cantidad de líneas por cada tipo en la estructura T-A.

Viaje	Combinaciones de Líneas Posibles a Utilizar
$P_i - SC_i$	LP_iSC_i
$P_i - CBD$	$LP_iSC_i + LSC_iSC_jH$
$P_i - SC_j$ en H	$LP_iSC_i + LSC_iSC_jH$
$P_i - SC_j$ en H	$LP_iSC_i + LCirc$
$SC_i - CBD$	LSC_iSC_jH
$SC_i - SC_j$ en H	LSC_iSC_jH
$SC_i - SC_j$ en F	$LCirc$

Tabla 3.16: Asignación de pasajeros en la estructura T-A.

Línea	Nodo	Suben	Bajan
LP_iSC_i	P_i	$\frac{aY}{nf(LP_iSC_i)}$	0
	SC_i	0	$\frac{aY}{nf(LP_iSC_i)}$
LSC_iSC_jH	SC_i	$\frac{a\alpha Y}{nHf(LSC_iSC_jH)}$ $+$ $\frac{b\tilde{\alpha}Y}{nHf(LSC_iSC_jH)}$ $+$ $\frac{a\gamma Y}{n(n-1)f(LSC_iSC_jH)}$ $+$ $\frac{b\tilde{\gamma}Y}{n(n-1)f(LSC_iSC_jH)}$	0
	CBD	0	$\frac{a\alpha Y}{nHf(LSC_iSC_jH)}$ $+$ $\frac{b\tilde{\alpha}Y}{nHf(LSC_iSC_jH)}$
	SC_j	0	$\frac{a\gamma Y}{n(n-1)f(LSC_iSC_jH)}$ $+$ $\frac{b\tilde{\gamma}Y}{n(n-1)f(LSC_iSC_jH)}$
$LCirc$	SC_i	$\frac{a\gamma FY}{n(n-1)f(LCirc)}$ $+$ $\frac{b\tilde{\gamma}FY}{n(n-1)f(LCirc)}$	

Tabla 3.17: Cantidad de pasajeros que se suben y bajan por bus en cada paradero para las distintas líneas de la estructura T-A.

Se muestran a continuación los tiempos de espera y de viaje.

$$\begin{aligned}
t_e = \frac{1}{2} & \left[\frac{a\beta}{f(LP_iSC_i)} + a\alpha \left(\frac{1}{f(LP_iSC_i)} + \frac{1}{Hf(LSC_iSC_jH)} \right) + \frac{a\gamma H}{n-1} \left(\frac{1}{f(LP_iSC_i)} + \frac{1}{f(LSC_iSC_jH)} \right) \right. \\
& + \frac{2a\gamma F}{n-1} \left(\frac{1}{f(LP_iSC_i)} + \frac{1}{f(LCirc)} \right) + \frac{b\tilde{\alpha}}{Hf(LSC_iSC_jH)} + \frac{b\tilde{\gamma}H}{(n-1)f(LSC_iSC_jH)} \\
& \left. + \frac{2b\tilde{\gamma}F}{(n-1)f(LCirc)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_v = & a\beta \left[gT_0 + \frac{t}{2} V(LP_i SC_i, SC_i) \right] + a\alpha \left[(g+1)T_0 + \frac{t}{2} (V(LP_i SC_i, SC_i) + V(LSC_i SC_j H, CBD)) \right] \\
& + \frac{\alpha\gamma H}{n-1} \left[(g+2)T_0 + t \left(\frac{V(LP_i SC_i, SC_i)}{2} + V(LSC_i SC_j H, CBD) + \frac{V(LSC_i SC_j H, SC_j)}{2} \right) \right] + \\
& \frac{2\alpha\gamma}{n-1} \sum_{k=1}^F \left[(g+kr_n)T_0 \right. \\
& \quad \left. + t \left(\frac{V(LP_i SC_i, SC_i)}{2} + (k-1)(Z(LCirc, SC_i) + V(LCirc, SC_i)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{V(LCirc, SC_i)}{2} \right) \right] + b\tilde{\alpha} \left[T_0 + \frac{tV(LSC_i SC_j H, CBD)}{2} \right] + \\
& \frac{b\tilde{\gamma}H}{n-1} \left[2T_0 + t \left(V(C, CBD) + \frac{V(LSC_i SC_j H, SC_j)}{2} \right) \right] \\
& \quad + \frac{2b\tilde{\gamma}}{n-1} \sum_{k=1}^F \left[kr_n T_0 \right. \\
& \quad \left. + t \left((k-1)(Z(LCirc, SC_i) + V(LCirc, SC_i)) + \frac{V(LCirc, SC)}{2} \right) \right].
\end{aligned}$$

Por último, las Tablas 3.18 y 3.19 resumen los tiempos de ciclo y las capacidades de cada línea, respectivamente.

Línea	Tiempo de Ciclo
$LP_i SC_i$	$2gT_0 + 2tA(LP_i SC_i)$
$LSC_i SC_j H$	$2T_0 + 2tA(LSC_i SC_j H)$
$LCirc$	$nr_n T_0 + 2tA(LCirc)$

Tabla 3.18: Tiempos de Ciclo de las líneas de la estructura T-A.

Línea	Carga
$LP_i SC_i$	$Z(LP_i SC_i, P_i)$
$LSC_i SC_j H$	$Z(LSC_i SC_j H, SC_i)$
$LCirc$	$\frac{(F^2 + F)Y}{2n(n-1)} (\alpha\gamma + b\tilde{\gamma})$

Tabla 3.19: Carga máxima de las líneas de la estructura T-A.

Nuevamente la carga de la línea circular se determina en forma análoga a las estructuras anteriores, se presenta en este caso la suma resuelta. Esta estructura presenta trasbordos, para todos los pasajeros que provienen de la periferia, con la excepción de aquéllos cuyo destino final era el punto donde el resto de los pasajeros trasbordará: el subcentro propio. Por ello

$$T = a(\alpha + \gamma)Y.$$

3.7 Síntesis

En este capítulo se han definido las estructuras con las que se trabajará: Directas, Exclusivas, Hub & Spoke y Troncales-Alimentadores, con sus características principales y sus definiciones formales. Se presentó además la función de costos, la que incorpora los costos de los operadores -que dependen de la flota y de las capacidades de los buses- y los costos de los usuarios -los que incluyen tiempo de espera, tiempo de viaje en el vehículo y los trasbordos-.

Con el análisis anterior, se conoce para cada una de las estructuras la función de costos expresada totalmente en función de parámetros exógenos, de las frecuencias y de los valores de H y \bar{H} . Para estos últimos, además, fue descrita la manera en que se calculan. Las expresiones resultan ser complejas, por lo que una comparación analítica resulta muy difícil, optándose en los capítulos siguientes por un cálculo numérico para el proceso de optimización del sistema generado.

Cabe repasar y resumir la forma en la que se determina la función de costos con las fórmulas expresadas en las diversas secciones de este capítulo para cada una de las estructuras estudiadas. En la Sección 3.2 se mostró que la función de costos con la que se trabajaría tendría como variables a la capacidad de cada línea $K(l)$, a la flota de cada línea $B(l)$, el tiempo de viaje promedio t_v , el tiempo de espera promedio t_e y la cantidad total de trasbordos T . El resto de los parámetros no dependen de la estructura ni de las frecuencias en este modelo.

Por otro lado, a lo largo de este capítulo se expresan diversos valores para cada estructura. Aquéllos que son necesarios para determinar las variables presentes en la función de costos, y que por lo tanto exigen definir nueva notación, son la cantidad de líneas existentes en el sistema por tipo de línea, número que será denotado $m(l)$; la carga máxima que deben ser capaces de trasladar los buses de cada línea, denotada por $\varphi(l)$; el tiempo que tarda el ciclo completo de un bus, denotado por $t_c(l)$; los tiempos de viaje t_v y de espera t_e para cada estructura; y la cantidad total de trasbordos T . Las frecuencias de cada línea $f(l)$ también son necesarias para la función de costos, pero como se explicó previamente, será en función de ellas que se realice posteriormente el proceso de optimización.

La Tabla 3.20 sintetiza las fórmulas para calcular cada uno de los elementos de la función de costos desde las expresiones calculadas en este capítulo.

Variable en la Función de Costos	Fórmula
Flota $B(l)$	$m(l)t_c(l)f(l)$
Capacidad $K(l)$	$\varphi(l)$
Tiempo de viaje promedio t_v	t_v
Tiempo de espera promedio t_e	t_e
Cantidad de trasbordos T	T

Tabla 3.20: Síntesis de cómo calcular los elementos de la función de costos desde las expresiones conocidas.

Con lo anterior la función de costos se calcula directamente con las fórmulas expresadas en las Secciones 3.3, 3.4, 3.5 y 3.6. A continuación se realizará el proceso de optimización numérica para así encontrar las frecuencias ideales en diversos casos, para luego comparar las estructuras. La comparación será realizada en distintos escenarios, representados por distintos valores de algunos parámetros exógenos, para así poder identificar qué estructuras son idóneas para distintos tipos de ciudad, además de reconocer qué parámetros juegan roles más relevantes.

De esta forma, se completará el proceso que permitirá cumplir uno de los objetivos principales de esta tesis: diseñar una forma sistémica para poder enfrentar la búsqueda de estructuras de línea óptimas de transporte público. En efecto, se tendrá ya un modelo de ciudad debidamente justificado, y con el trabajo de este capítulo y el próximo se tendrá una visión respecto de cuál estructura es mejor, dentro de las cuatro aquí desarrolladas, para ese modelo dependiendo de los parámetros más relevantes.

Capítulo 4: Resultados Numéricos

Con la descripción analítica del capítulo anterior para las estructuras Directa (Dir), Exclusivas (Exc), Hub & Spoke (H&S) y Troncal-Alimentador (T-A), se procede a determinar las frecuencias óptimas, lo que permite calcular los costos totales para cada estructura y poder compararlas.

El análisis se hará en forma numérica, pues la presencia de líneas compartidas introduce factores que hacen muy complejo la resolución de las ecuaciones que implicarían una optimización analítica. Si bien no en todas las estructuras aparece este fenómeno, los resultados interesan para poder comparar las estructuras entre sí, y por lo tanto el procedimiento para cada estructura será el mismo.

En este capítulo se explicará brevemente el método numérico utilizado, se determinarán frecuencias y estructuras óptimas moviendo algunos parámetros, y luego se estudiará cómo se comportan algunas características específicas del sistema. Con ello se construirá una visión general sobre cada estructura y se reconocerá cuál de ellas es mejor respuesta para diversos fenómenos urbanos representados en los parámetros que definen el problema. Por último, se analizará la robustez del modelo utilizado.

4.1 El método numérico

La programación y el cálculo se llevaron a cabo usando el software Matlab. Dentro de las herramientas ya programadas para optimizar, se utilizó el método de punto interior, como se puede ver en los manuales en línea de Mathworks.com (2014, 2014b). El método consiste en una optimización sin restricciones pero con barrera logarítmica, es decir, se minimiza la función

$$c_r(f, s) = c(f) + r \sum_l \ln s_l$$

$$\text{sujeto a: } G(f) + s = 0$$

Donde G representa las restricciones de tipo desigualdad. Al partir desde un punto factible, la presencia del logaritmo asegura que al iterar con cualquier método de optimización numérica, nunca se saldrá de la zona factible. La idea es hacer converger r a 0 para llegar a un mínimo del problema original. Cabe destacar que en este caso hay una restricción evidente como es la positividad de las frecuencias, a la cual se le incorpora el exigir que las capacidades de los buses sean acotadas. En este caso, se definió como tamaño máximo el de 291 pasajeros que es la capacidad de un bus biarticulado.

La pregunta es entonces si existe mínimos de la función de costos y si este método permite llegar a él. El resultado que será presentado a continuación responde parcialmente tal pregunta. Para demostrarlo, se utilizará que de acuerdo con Wright y Nocedal (1999), si las funciones son continuamente diferenciables y el punto límite cumple con la condición de que los gradientes de las restricciones activas forman un conjunto linealmente independiente (condición LICQ), entonces tal punto límite cumple con las condiciones de primer orden.

Proposición 4.1: La función de costos descrita en la Sección 3.2 tiene un mínimo si las frecuencias están restringidas a ser positivas²¹. Además, si al aplicar el método descrito y programado en Matlab converge, su límite cumplirá con las condiciones de primer orden a menos que la función de costos no sea diferenciable en ese punto.

Demostración: Para la primera aseveración, notar que la función a minimizar es una función continua. Si la norma del vector de frecuencias se acerca a 0, los tiempos de espera se hacen infinitos y por lo tanto el costo total se hace infinito. Si la norma del vector de frecuencias se va hacia infinito, es decir si alguna línea lo hace, su flota también tenderá a infinito y asimismo lo hará el costo. Por lo tanto es equivalente a minimizar una función continua en un compacto. Cabe señalar que en el caso a ser resuelto, es decir considerando la cota máxima de 291 pasajeros para las capacidades de los buses, la existencia del mínimo está garantizada por el mismo argumento recién expuesto.

Para demostrar que el eventual límite cumple con las condiciones expresadas en el enunciado de la Propiedad 4.1, el primer paso es explicar que la condición LICQ no será un problema, pues en las soluciones encontradas nunca será más de una línea la que alcance la capacidad máxima, y por lo tanto la independencia lineal está garantizada.

Lo anterior no es suficiente para concluir, pues las funciones no son continuamente diferenciables. Las capacidades de las líneas (presentes tanto en las restricciones como en la función de costos) en muchos casos están definidos por máximos entre varias cifras, y por lo tanto dependiendo del rango de valores en los que se encuentren las frecuencias la cifra en la que tal máximo es alcanzado puede variar. Es decir, es una función continuamente diferenciable por trozos. Sin embargo, es posible extender el resultado de Wright y Nocedal (1999). En efecto, si el punto límite del algoritmo es uno en el que las funciones en cuestión son diferenciables, significa que lo son también en un abierto alrededor de tal punto, pues para la diferenciableidad basta con no ser un punto en los que los máximos que definen las capacidades cambien. Por ello, para concluir la demostración, basta con restringir la función de costos a tal abierto, en ella aplicar el

²¹ Notar que la cota superior para las capacidades no es necesaria para la existencia del mínimo.

algoritmo de punto interior y utilizar el resultado original de Wright y Nocedal (1999).

Lo anterior concluye la demostración, pero quedan al menos tres cuestionamientos que son necesarios analizar:

1. La Proposición 4.1 no garantiza que el método efectivamente converja. No se realizará un análisis teórico, pues la propia resolución de Matlab indica cuando ello ocurre. En los casos que serán resueltos en las secciones siguientes, el algoritmo siempre converge, por lo que este cuestionamiento no es problemático.
2. El punto límite podría ubicarse en la frontera entre dos zonas de diferenciabilidad de la función de costos.
3. La función a optimizar no es convexa, por la presencia de factores del tipo $\frac{f}{f+e}$. Ello significa que el cumplir las condiciones de primer orden no es garantía de estar en presencia de un mínimo sino que podría caerse en un punto silla. Al igual que el punto anterior, no hay forma de zafarse de esta dificultad, por lo tanto urge tenerlas presentes y comprender que si en algunos casos aparecen resultados pocos consistentes con el resto de la tendencia, éstas serán las razones más probables. De todos modos, los resultados serán consistentes desde el punto de vista cualitativo, de lo que se concluye que en general sí se obtienen mínimos y por lo tanto el análisis y las conclusiones son válidas.

4.2 Los Parámetros

Como se explicó en el Capítulo 2, los parámetros α, β y γ juegan un rol clave en la definición de la estructura urbana en la que se resolverá el problema, pues valores altos representan una ciudad monocéntrica, policéntrica o dispersa, respectivamente. Por lo mismo, el proceso de optimización se hará considerando distintos valores para estas variables. Recordar que para ello basta variar los valores de α y β . Los trabajos de Jara-Díaz et al (2012) y de Gschwender et al (2013) muestran que también la afluencia total Y afecta en forma relevante. Cómo lidiar con esos tres parámetros será explicado más adelante. El resto de los parámetros, para el primer análisis, se mantendrán fijos.

Así, los valores de t, c_0, c_1, p_e y p_v se obtienen de Gschwender et al (2013). El costo del trasbordo p_T para el caso base se considerará nulo, pues no existen métodos claros para estimar su valor. Sin embargo, luego se estudiará qué sucede para valores mayores, entendiendo que es clave para la comparación,

pues la desventaja evidente de las estructuras H&S y T-A es la cantidad de trasbordos involucrados, fenómeno que se diluye si el trasbordo no se penaliza. Los valores de T_0 , de g y de n se determinan pensando en una ciudad mediana, mientras que el valor de a responde a una ciudad en la cual la mayor parte de los viajes se originan en la periferia. El resumen de estos parámetros se encuentra en la Tabla 4.1.

Parámetro	Valor
c_0	0,1775 US\$/minuto
c_1	0,0034 US\$/minuto
T_0	30 minutos
g	$\frac{1}{3}$
t	2,5 segundos
p_e	4,44 US\$/hora
p_v	1,48 US\$/hora
p_T	0
a	0,8
n	8

Tabla 4.1: Valores de los parámetros utilizados.

Con estos parámetros fijos, quedan 3 parámetros para variar, como son α, β e Y . Intentar variar simultáneamente los 3 presenta dos complicaciones: en primer lugar, graficar se hace demasiado engorroso. En segundo lugar, el tiempo de resolución también explota. Dado ello, la estrategia para resolver consistirá en una partición fina, en 50 partes iguales, del intervalo $[\frac{1}{52}, \frac{50}{52}]$ para α, β (se evita llegar a los valores nulos pues varias componentes de la función de costos allí se indeterminarían), y resolver para 3 valores específicos de Y : 8000, 24000 y 72000 pasajeros por hora (de modo que de cada zona emerjan 1000, 3000 y 9000 pasajeros, respectivamente). De esta forma es posible obtener las frecuencias óptimas y los costos respectivos para cada uno de estos valores. Cabe señalar que una partición más fina, si bien podría ser deseable, comienza a incidir fuertemente en la factibilidad de resolver el problema, pues ya con estos rangos calcular para las cuatro estructuras significa un tiempo aproximado de 10 horas. Se estudiarán todas las combinaciones posibles del par (α, β) , pero es necesario tener en consideración lo discutido en el Capítulo 2: en todas las ciudades el CBD sigue jugando un rol relevante, y por lo tanto valores muy pequeños de α carecen de sentido real.

Los valores de Y se escogen buscando mantener valores suficientemente grandes para que el problema del transporte público y de la forma de crecimiento de la ciudad tengan sentido, pero acotados de modo tal que los supuestos realizados en este modelo mantengan validez. Valores grandes de

Y significan que la congestión ya no puede ser ignorada, especialmente para aquellas estructuras que concentran los traslados como H&S. Asimismo, si Y es muy grande significa que las periferias, los subcentros y el CBD ya no pueden entenderse como un único paradero, y por lo tanto los tiempos de acceso son importantes, lo cual es particularmente crítico para la estructura de líneas exclusivas.

4.3 Los Resultados

Se presentará en primer lugar un panorama general respecto a cuáles estructuras son óptimas para los distintos valores de α, β , e Y , analizando además el rol de p_T . Se mostrarán luego algunos gráficos particulares que entregan información específica respecto a cómo se comportan las distintas estructuras, sus debilidades y fortalezas. El total de gráficos generados se encuentra en el anexo. Como simbología se utilizará siempre el azul para la estructura Dir, el verde oscuro para Exc, el rojo para H&S y el calipso para T-A. La Figura 4.1 muestra la estructura óptima para cada par (α, β) , para tres niveles de afluencia y suponiendo que no hay costo por traspasar. Se muestran además las curvas de nivel para algunos valores de γ .

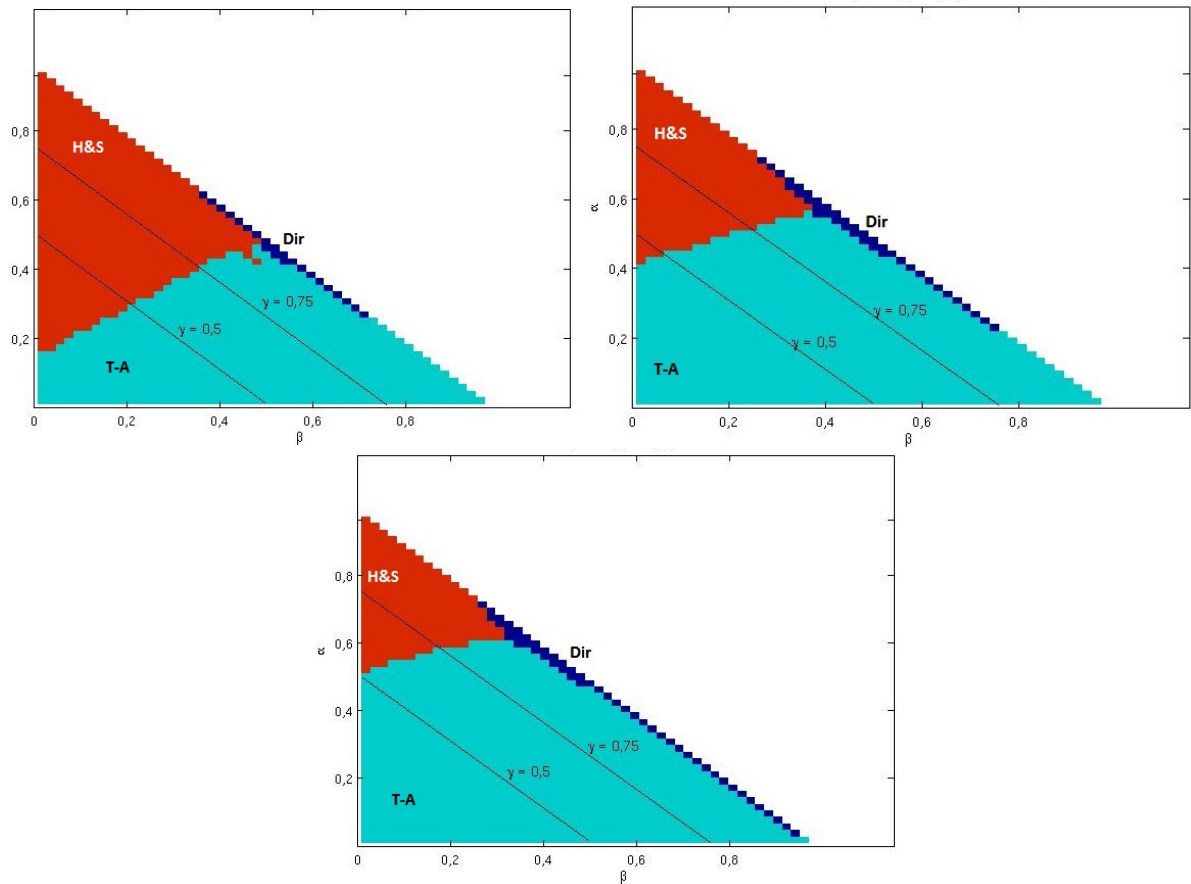


Figura 4.1: Estructuras óptimas según α, β para niveles de afluencia total de 8000, 24000 y 72000 pasajeros por hora, respectivamente.

Se pueden extraer varias conclusiones de estos gráficos:

- Las dos estructuras que mejor funcionan son H&S y T-A, precisamente las estructuras que se ven beneficiadas por considerar nulo el costo de trasbordar. Esto reafirma la relevancia de estudiar posteriormente que sucede si se consideran valores mayores para p_T .
- La única excepción al punto anterior se obtiene en aquellos puntos donde la estructura Dir es la óptima. Notar que esto ocurre muy cerca de la diagonal, es decir, cuando el valor de γ es prácticamente nulo.
- En el capítulo anterior se asumió el supuesto que en la estructura Dir nadie trasbordaría. Al verificarlo, es decir, al revisar si con las frecuencias dadas por la optimización el viaje directo tiene un menor costo para el usuario, se encuentra que el supuesto solamente falla en casos donde $\gamma \geq 0,76$, es decir en aquellos casos donde la estructura Dir no es la óptima, pero además en ciudades donde los subcentros atraen la mayor parte de los viajes, pero no lo hacen desde su propia zona. Claramente estas ciudades son más bien una posibilidad teórica que real, y por lo tanto el supuesto utilizado no representa problema.

- A mayores niveles de α se impone la estructura H&S. Este resultado es esperable, pues precisamente esa estructura se basa en llevar muchos pasajeros al centro de la ciudad y por lo tanto la mayoría de los pasajeros se ven beneficiados por las altas frecuencias que tendrán tales líneas. Precisando más, es interesante ver que existen valores de α para los cuales, sea cual sea el valor de β , la estructura H&S será la mejor. Tales valores se mueven entre 0,45 y 0,65 -valores que implican una ciudad fuertemente monocéntrica- dependiendo del valor de Y . Asimismo, si α es suficientemente pequeño esta estructura nunca será la óptima. En este caso, el valor crítico se mueve entre 0,2 y 0,5.
- Valores altos para β favorecen la estructura T-A. También es una conclusión esperable, pues esta estructura lleva a todos los pasajeros de la periferia a su subcentro propio, y por lo tanto las capacidades de los buses podrán ajustarse muy bien a la cantidad de viajes. En otras palabras, habrá poca capacidad ociosa, lo que es beneficioso para los operadores.
- Al comparar los 3 gráficos, se observa que Y también juega un rol relevante. A medida que Y crece la estructura H&S se hace menos competitiva, mientras que las estructuras Dir y T-A se imponen en más pares (α, β) .
- Se observa además que el parámetro α pareciera ser más relevante que el parámetro β . En efecto, la línea que divide los sectores del gráfico donde predominan las estructuras H&S y T-A respectivamente, es una línea con una pendiente cercana a una línea horizontal. Notar que si la pendiente fuese efectivamente horizontal significaría que β es irrelevante, en cambio si fuera vertical la conclusión sería análoga para α . Si bien al ser oblicua se concluye que ambos parámetros influyen, α se realza como la variable más importante.

Para comprender mejor las razones detrás de estos fenómenos, y cuanto de lo aquí expuesto se explica por los usuarios y cuanto por los operadores, se presentan a continuación gráficos sobre características específicas.

En este caso se utilizará a α como variable principal, para poder mostrar en simultáneo como cambian tales características para cada una de las estructuras. Dado que fijar el valor de α no es suficiente para calcular frecuencias y costos, se tomará el promedio entre todos los posibles valores de β para los que se calcularon las frecuencias óptimas. Hacerlo de esta manera permite analizar específicamente como afecta el valor de α . Formas alternativas que impliquen fijar el valor β confundirían el estudio, pues sería imposible distinguir si las conclusiones se deben a los cambios de valor de α o al valor específico de β .

Notar que entonces los gráficos que vienen a continuación no representan los valores para alguna ciudad específica, sino que muestran cómo se mueven tales valores con α . El uso de este parámetro tiene que ver con que el grado de monocentrismo define más fuertemente el carácter de la ciudad, y con lo ya comentado respecto a que el valor de α es más relevante para definir la estructura óptima. Se mostrarán los gráficos para $Y = 24000$.

Cabe resaltar que la forma interesante de analizar estos gráficos es comparando las estructuras. Mirar solamente una estructura y analizar si "mejora" o "empeora" cuando cambia α esconde que las características en general cambiarán porque la estructura general (y el largo promedio en particular) de los viajes cambiará.

La Figura 4.2 proporciona nueva información. Se reafirma que la estructura H&S es la que más mejora cuando α crece, sin embargo para valores muy altos aumenta sus costos pese a que las estructuras Dir y Exc los disminuyen. Es posible obtener más información además sobre las estructuras que no son óptimas. Así, se concluye que Dir es una estructura competitiva si α es grande; Exc, en cambio, está siempre muy lejos de la estructura óptima. Es interesante ver también que una estructura del tipo T-A es claramente errónea si la ciudad tiene un CBD muy relevante.

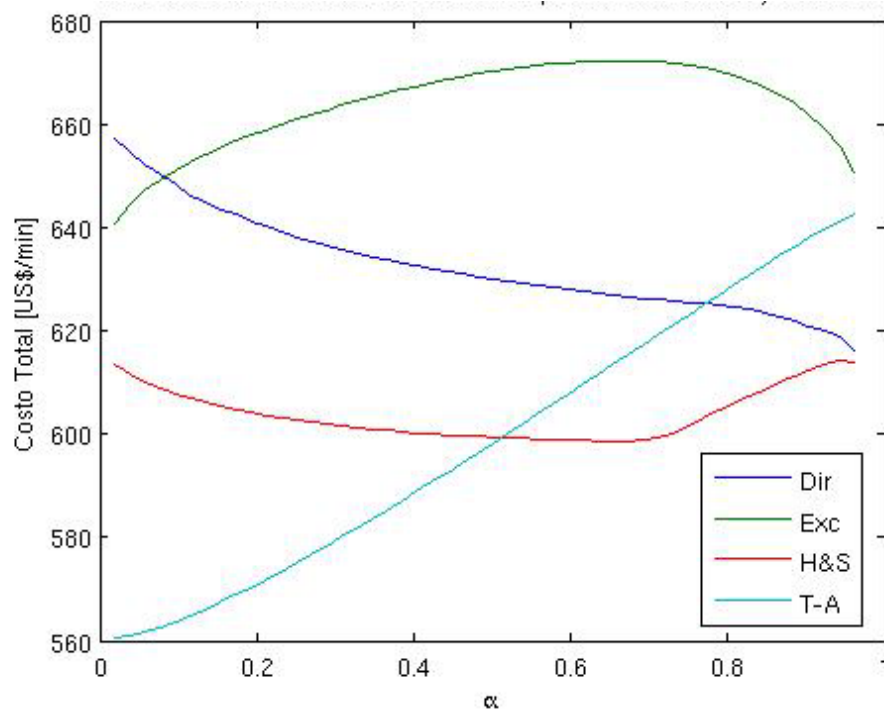


Figura 4.2: Costo total de cada estructura al variar el valor de α .

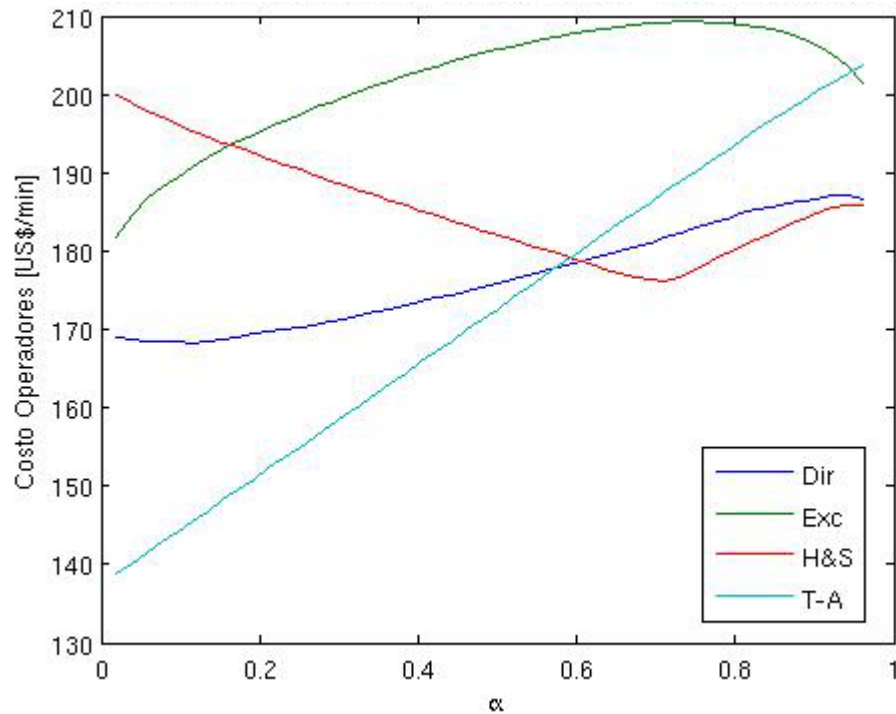


Figura 4.3: Costo de operadores de cada estructura al variar el valor de α .

La Figura 4.3 permite comparar cual estructura es mejor si el único punto de vista que importa es el de los operadores. Notar que las frecuencias siguen estando definidas de acuerdo a la función de costos que involucra tanto a operadores como a usuarios. En este caso, la estructura Exc se hace más competitiva, lo cual se explica por su baja capacidad ociosa. Sus altos tiempos de espera no son relevantes para los operadores. Similarmente la estructura Dir también aparece como mucho más beneficiosa para los operadores, mientras que la estructura H&S tiene una posición relativa mucho peor.

La Figura 4.4 muestra que, si de los usuarios dependiese, siempre se escogería la estructura H&S. Es muy notable además que desde el punto de vista de los usuarios, el valor de α es casi irrelevante, salvo si la estructura es Dir, en cuyo caso una ciudad más concentrada resulta ser mucho mejor. De aquí también se infiere que T-A es globalmente mejor que H&S para α pequeño por su mejor desempeño para los operadores.

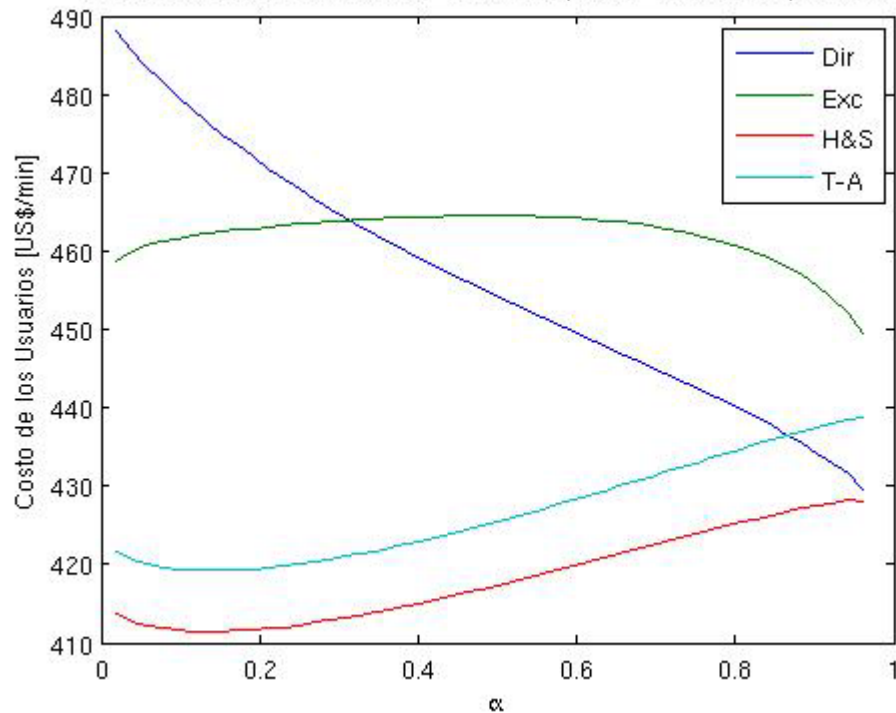


Figura 4.4: Costo de usuarios de cada estructura al variar el valor de α .

A continuación se estudiarán las características específicas que explican los costos. Para los operadores, los dos valores relevantes son la flota total (que en la función de costos va multiplicada por c_0) y el total disponible de plazas (es decir, la suma sobre todas las líneas de la flota de cada línea multiplicada por su capacidad; este valor va multiplicado por c_1 en la función de costos). Para los usuarios, los valores a mostrar son el tiempo de espera y el tiempo de viaje promedio, además de los trasbordos totales para las líneas en las que haya.

La flota total significa un costo directo a los operadores, y además permite tener ciertas nociones sobre cómo se comparan las frecuencias. La Figura 4.5 muestra que la inmensa flota necesaria para la estructura Exc es una de sus principales desventajas, mientras que las estructuras Dir y H&S –salvo para valores muy bajos de α – requieren muchos menos buses. Además, un mayor nivel de concentración en general requiere menos buses, salvo para una estructura de tipo T-A.

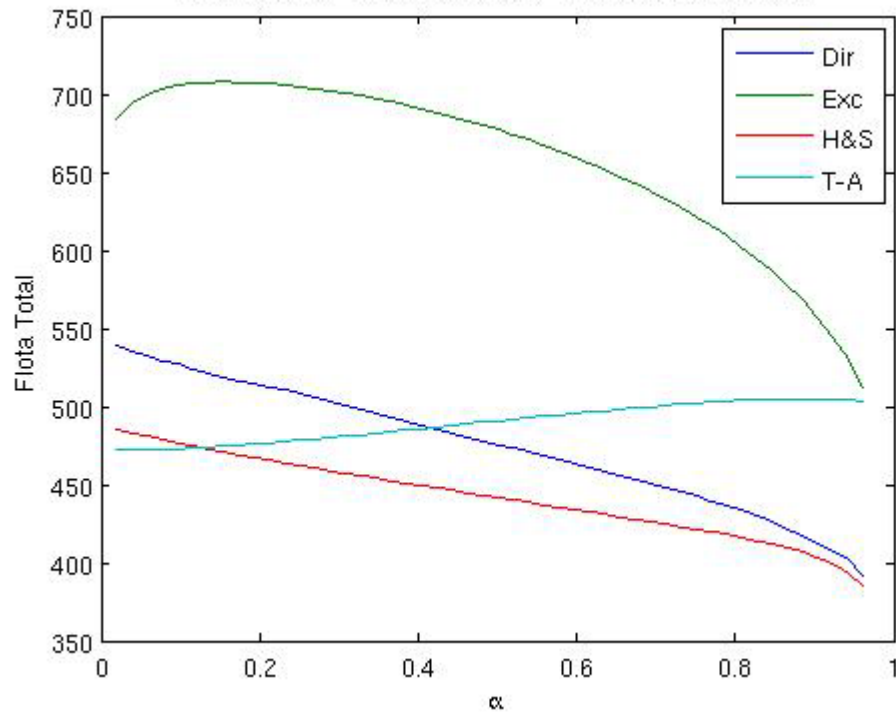


Figura 4.5: Flota total de cada estructura al variar el valor de α .

La Figura 4.6 señala que la cantidad de plazas de las distintas estructuras es similar, salvo para la estructura H&S cuando α es pequeño. Como es de esperar, la estructura Exc presenta ventajas en esta dimensión, pues no presenta capacidad ociosa salvo cuando los buses van de vuelta a recomenzar sus recorridos. Es destacable que la estructura T-A sea la siguiente estructura más competitiva, consecuencia de juntar toda la demanda en los subcentros para luego repartirla. Cabe recordar que la cantidad de plazas tiene una expresión directa en los costos de los operadores, multiplicada por c_1 .

Interpretar la Figura 4.7 exige tener bien presente que lo relevante es la diferencia absoluta más que las diferencias relativas. Si bien eso es cierto para todos los gráficos (pues la función de costos es una suma de los diversos factores que inciden en ella), en este caso el énfasis es necesario porque los valores absolutos son menores y las diferencias relativas se acrecientan. Este gráfico explica en buena medida por qué la estructura Exc resulta negativa para los usuarios: su alto tiempo de espera, predecible considerando que cada línea sirve a un par O-D específico, y luego a un universo pequeño de pasajeros. Es interesante notar además que la estructura H&S, pese a sus trasbordos, es siempre la que presenta menores tiempos de espera, aunque la estructura Dir se hace competitiva si la ciudad es más concentrada.

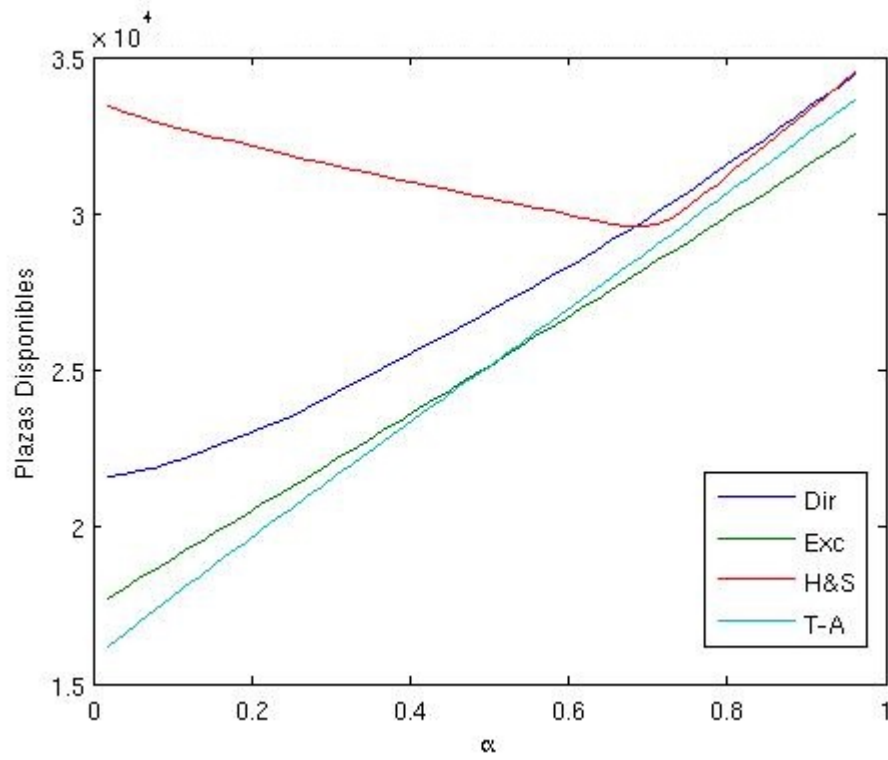


Figura 4.6: Cantidad de plazas de cada estructura al variar el valor de α .

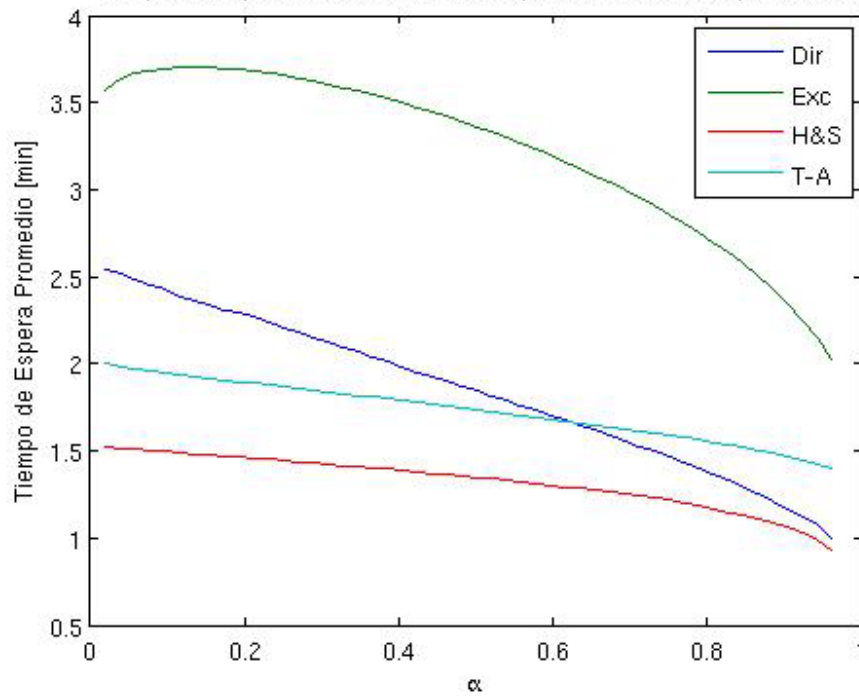


Figura 4.7: Tiempo de espera de cada estructura al variar el valor de α .

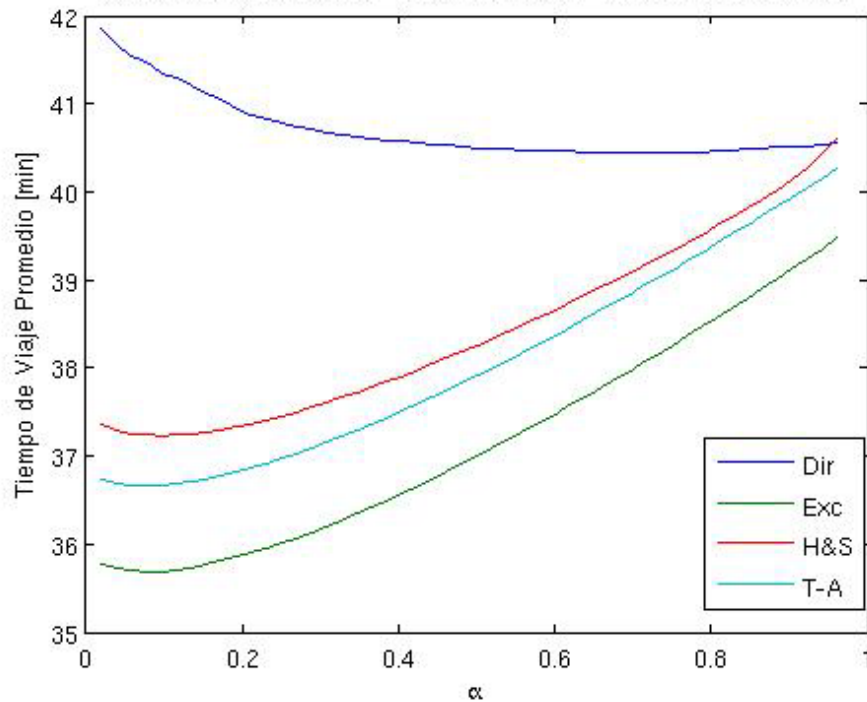


Figura 4.8: Tiempo de viaje de cada estructura al variar el valor de α .

Como es de esperar, el estudio de la Figura 4.8 nos muestra que las diferencias en los tiempos de viaje no son demasiado significativas. Las que hay se explican por dos razones: menos tiempo en los paraderos (el gran factor que favorece a la estructura Exc), y el valor de H y \bar{H} . Dado que $n=8$, el valor de H que minimiza los tiempos con el bus en movimiento es 3. Sin embargo, para otras estructuras en ocasiones será más conveniente valores más altos, y luego el tiempo de viaje promedio aumenta.

Con los gráficos de la Figura 4.9 se corrobora lo discutido anteriormente sobre los tiempos de viaje. Las estructuras Exc y T-A, cualesquiera sean los valores de α y β , serán siempre eficientes en este sentido, es decir, cada usuario tomará el recorrido de menor distancia. La estructura H&S está muy cercana a cumplir la misma propiedad, pero existen casos donde H y \bar{H} son más grandes, donde algunos optan por viajar a través del centro en lugar de por el anillo de subcentros pese a que esta última opción es más corta. Notar que lo anterior es razonable siendo una estructura que se basa en que los pasajeros viajarán al centro para trasbordar, y por lo tanto donde las frecuencias serán mayores para esa alternativa.

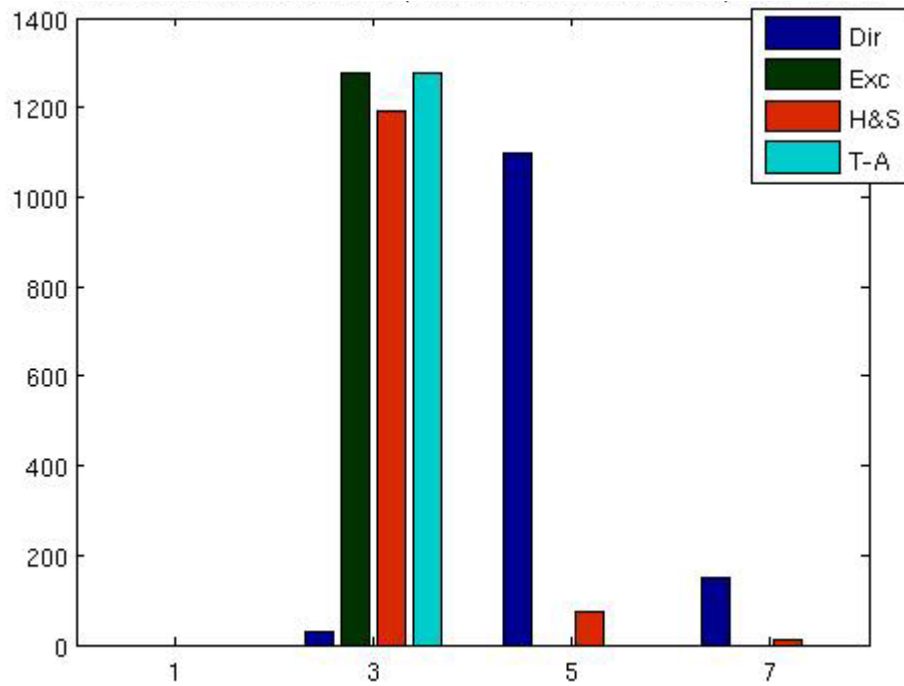
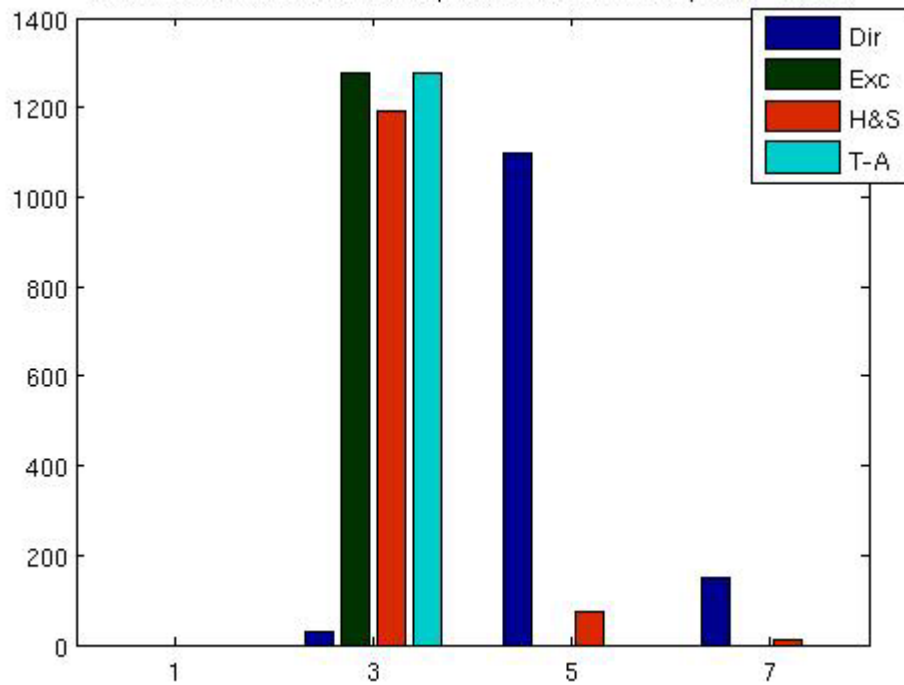


Figura 4.9: Frecuencia de los distintos valores tomados por H y \bar{H} , respectivamente, para las distintas estructuras.

La estructura Dir, en cambio, presenta en muchas ocasiones valores de H y \bar{H} iguales a 5 o incluso a 7. Recordemos que ésta es la única estructura que puede decidir el valor de H , y por ello es posible aumentar los tiempos de

viaje promedio (como se vio en la Figura 4.8) si eso permite aumentar las líneas comunes y disminuir así los tiempos de espera, el tamaño de la flota o el número de plazas. Las Figuras 4.8 y 4.9, que muestran que en una ciudad dispersa la estructura Dir presenta valores altos para H y \bar{H} , explican en gran medida por qué esta estructura es más competitiva cuando la ciudad tiene un CBD más atractivo.

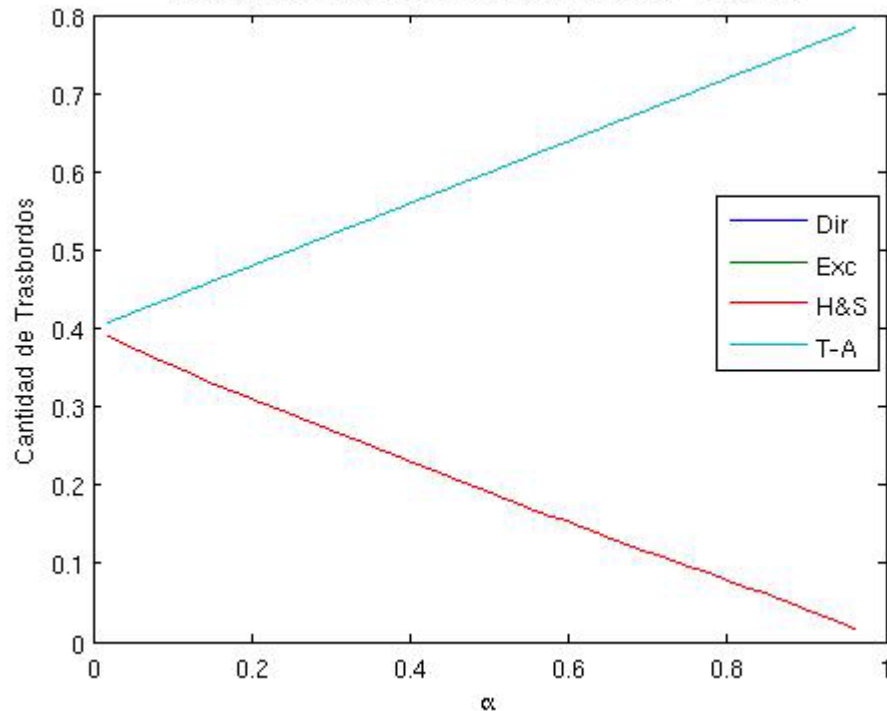


Figura 4.10: Traslados de cada estructura al variar el valor de α .

Respecto a la Figura 4.10, son solamente dos las estructuras que presentan trasbordos, y esta cantidad puede calcularse fácilmente en forma teórica, como se mostró en el Capítulo 3. Se presenta en porcentajes en lugar de totales porque la cantidad no depende de Y . Este gráfico no permite explicar la comparación entre las estructuras, pues no se está considerando una penalización para los trasbordos, pero sí permite visualizar y reafirmar que para una ciudad monocéntrica, un sistema H&S se hace eficiente mientras que la estructura T-A pierde eficiencia. Es interesante notar además como incluso para el mejor caso para el sistema T-A, desde el punto de vista de los trasbordos el sistema H&S es ligeramente mejor.

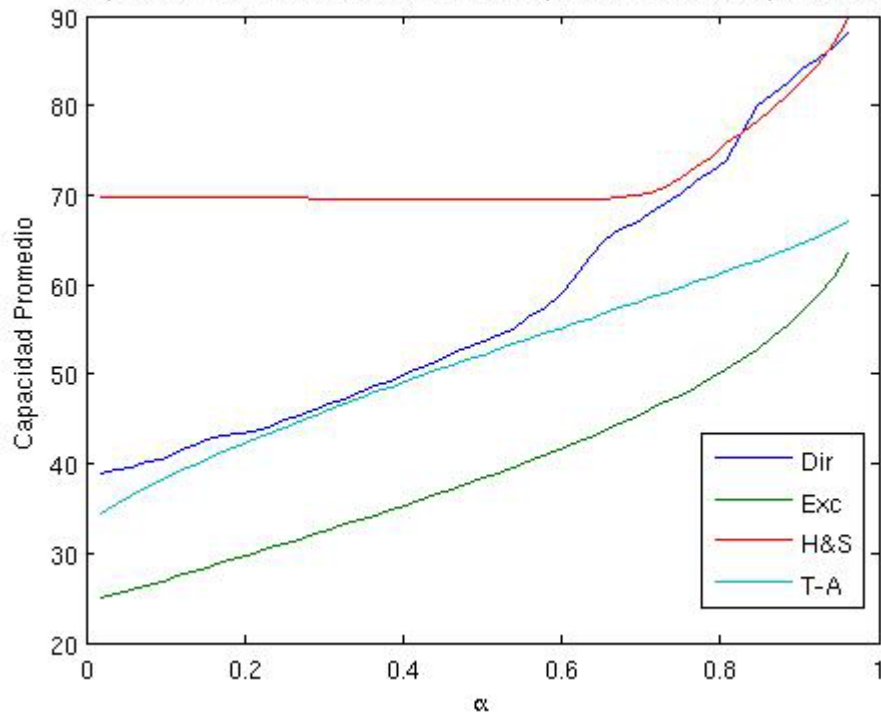


Figura 4.11: Capacidad promedio de los buses de cada estructura al variar el valor de α .

La Figura 4.11 muestra el tamaño de un bus promedio para cada estructura, donde el promedio se toma sobre el total de buses (y no sobre el total de líneas, pues hay líneas que tienen más buses que otras). Como es de esperar, las líneas de la estructura Exc -que no tienen capacidad ociosa- son las de menor capacidad, mientras que las otras tres estructuras tienen capacidades similares, salvo por la alta capacidad de H&S si la ciudad es dispersa.

Notar además que en algunos casos sería necesario pensar en otras tecnologías como minibuses, pues las capacidades son demasiado chicas para un bus.

4.4 El rol de los trasbordos

Como ya se explicó, los resultados anteriores suponen que trasbordar no tiene costos. Cambiar el valor de p_T exige recalcular las frecuencias para las estructuras H&S y T-A, pues la función de costos varía. Gschwender et al (2013) estudian diversos valores para este parámetro, en este caso se utilizará su valor más alto para poder apreciar con claridad los efectos: $p_T = 24p_v$. Los resultados se grafican en la Figura 4.12 para los mismos valores de Y que la sección anterior.

Los efectos son notorios. Las estructuras predominantes pasan a ser en este caso las que antes eran peores: Dir y Exc. Para el caso estudiado con mayor

detención ($Y = 24000$) la estructura Dir es claramente hegemónica salvo en ciudades muy dispersas. La estructura H&S solamente sigue siendo conveniente cuando los pasajeros totales son pocos, y por tanto cuando los tiempos de espera para las estructuras que no agrupan viajes son demasiado altos.

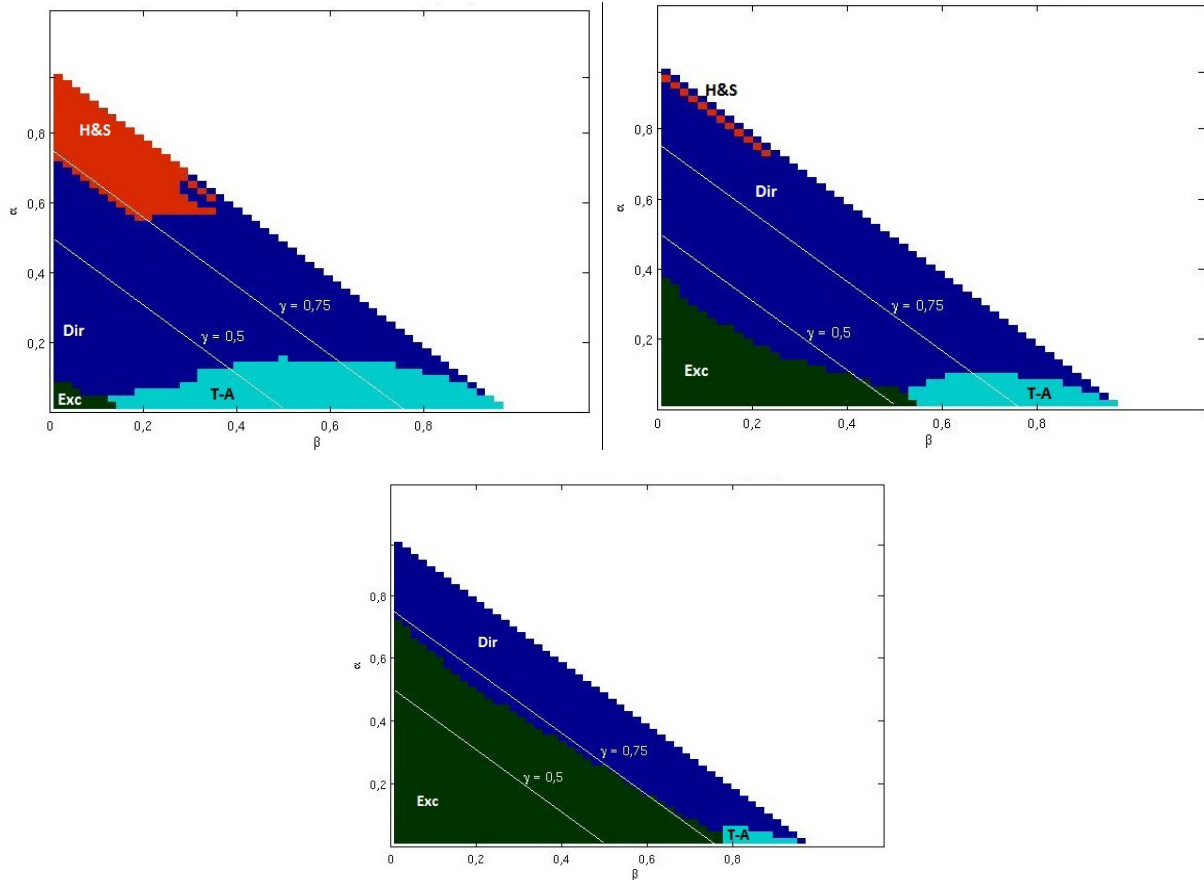


Figura 4.12: Estructura óptima según (α, β) , para $Y = 8000, Y = 24000, Y = 72000$ respectivamente, cuando el costo de un trasbordo equivale a 24 minutos viajando en el bus.

Incluso el rol de las variables se modifica. Cuando se analizó el caso $p_T = 0$, se mencionó que el valor de α era el que determinaba en mayor medida la elección de estructura. En este caso, cuando $Y = 24000$ o $Y = 72000$, la línea que divide a las dos estructuras principales (Exc y Dir) es prácticamente paralela a las curvas de nivel de γ .

Esta diferencia en los resultados reafirma lo imperioso que resulta un valor claro para modelar la molestia de trasbordar. Distintos valores presentes en la literatura pueden entregar ordenamientos muy distintos en cuanto a la valoración de cada estructura y por tanto la decisión respecto a qué estructura impulsar depende muy fuertemente de este valor.

4.5 El rol de la afluencia

Las Figuras 4.1 y 4.12, que muestran las estructuras óptimas para distintos valores de Y , dan cuenta de que este parámetro afecta en forma relevante la estructura óptima. En ese sentido resulta interesante realizar un análisis más exhaustivo para esta variable.

Para poder graficar la estructura óptima se requiere máximo dos variables, luego se seguirá variando α , entendido como el parámetro más relevante para ordenar la matriz O-D. Nuevamente se estudiarán 3 casos, pero aquí no serán valores fijos de β o γ , sino que relaciones entre ellos:

- Caso 1, γ máximo: se supondrá que nunca el subcentro propio recibirá menos viajes desde la periferia de su zona que los subcentros ajenos. Dado que un subcentro ajeno recibe desde una periferia específica $\frac{\alpha\gamma Y}{n(n-1)}$ pasajeros, mientras que el propio recibe $\frac{\alpha\beta Y}{n}$, para este caso se impondrá $(n-1)\beta = \gamma$. Esto significa la ciudad más dispersa posible cuando α además es pequeño.
- Caso 2, γ mediano: se supondrá que los pasajeros que parten desde una periferia específica y que no van al CBD se reparten en dos partes iguales: los que van al subcentro propio (que es más atractivo por su menor distancia) y los que van a subcentros ajenos. Es decir $\beta = \gamma$.
- Caso 3, γ pequeño: se supondrá que prácticamente todos los pasajeros van al CBD o al subcentro propio. Dependiendo del valor de α ello significará una ciudad muy monocéntrica o una ciudad muy definida por sus subcentros y sus zonas respectivas. Cabe resaltar que esto representa una ciudad prácticamente radial en cuanto a sus viajes. Este caso es particularmente interesante al notar en la Figura 4.1 que las líneas directas empiezan a ser óptimas justamente en esta zona. Específicamente, se considera que el 90% de los viajes que salen desde la periferia hacia algún subcentro lo hacen al propio, es decir, $\beta = 9\gamma$.

Para analizar la Figura 4.13, es necesario notar que la escala en Y es logarítmica, con lo que se alcanza a distinguir bien sus efectos en distintas escalas. La primera conclusión clara es que la afluencia juega efectivamente un rol muy importante no solamente en el cálculo de costos y frecuencias, sino que en la estructura óptima misma. Así, se observa que para Y suficientemente grande, la estructura Exc usualmente será la ideal. Aquello es esperable, pues como se vio en las Figuras 4.2 y 4.7, las únicas variables que hacen a esta estructura peor son el tamaño de la flota y el tiempo de espera. Cuando Y crece, las frecuencias se disparan y por lo tanto al menos los tiempos de espera pasan a ser poco relevantes para todas las estructuras. Los cambios que se observan al variar el valor de α son análogos a los ya analizados en la Figura 4.1, con el agregado de que si la

ciudad es muy concentrada ($\alpha \geq 0,7$ aproximadamente) se tendrá que, salvo casos muy excepcionales, la estructura óptima es H&S.

Al analizar la Figura 4.1 se comentó que el valor de α resultaba más relevante que el valor de β . Ello se reafirma al comparar las primeras dos imágenes de esta figura, pues las diferencias entre ellas son menores. Sin embargo, cuando β se acerca a $1 - \alpha$ (es decir, cuando γ se hace pequeño) esta idea es menos válida. Así, la estructura Dir comienza a adquirir predominancia en este contexto, más aún cuando se observa que la zona del gráfico donde esta estructura se impone es donde el valor de Y está en el rango analizado en la sección anterior, y los valores de α son razonables - aunque descartan una ciudad muy monocéntrica-. Si se extrema el análisis y se hace $\gamma = 0$, se obtiene una figura donde la estructura Dir es claramente predominante, como muestra la Figura 4.14. La presencia de puntos discontinuos donde la estructura H&S aparece como óptima puede interpretarse por un fenómeno ya apreciable en la Figura 4.1: si γ es nula y α es cercano a la unidad, las estructuras H&S y Dir son muy parejas, por lo que pequeños cambios numéricos pueden inducir resultados diferentes.

Para este análisis también vale la pena revisar el rol de los trasbordos. Se hará solamente en el segundo caso de los descritos anteriormente ($\beta = \gamma$) que es el que se utilizará en adelante como caso intermedio. La Figura 4.15 muestra que nuevamente el cambio es importante, pues las estructuras Dir y Exc adquieren mayor predominancia cuando cada trasbordo se penaliza con un costo equivalente al de viajar por 24 minutos en bus. Al igual que en la Figura 4.12, las estructuras H&S y T-A preservan sectores donde son óptimas cuando la afluencia es poca.

En este análisis se vuelve a observar que cambia la preponderancia de los distintos parámetros. Sin penalizar el trasbordo, α e Y jugaban roles de similar relevancia. Pero en la Figura 4.15 se observa que el valor de Y es mucho más determinante, pues son pocas las excepciones donde fijar su valor no prediga de inmediato cual estructura será la óptima, o al menos reduzca a dos las posibles candidatas.

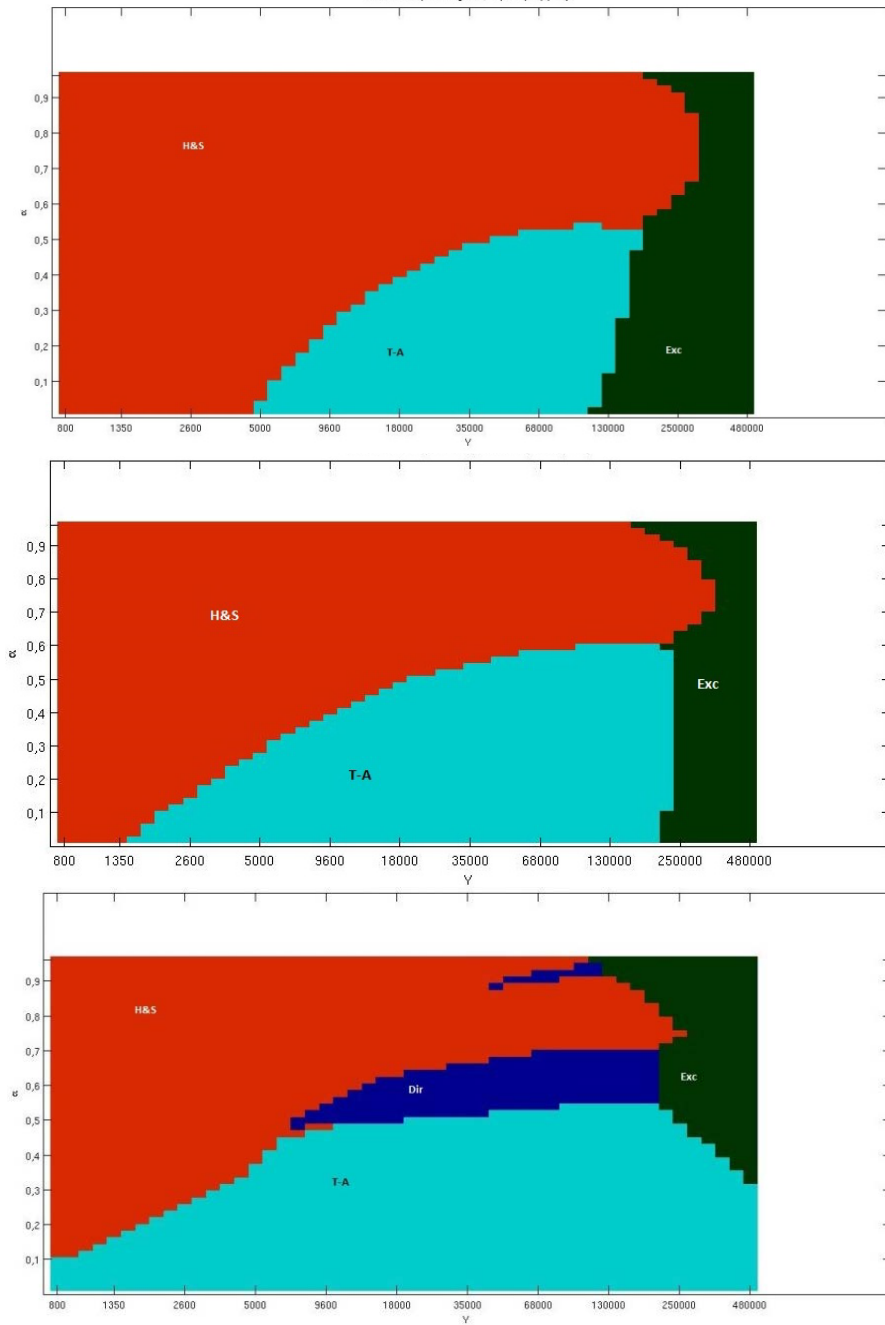


Figura 4.13: Estructuras óptimas para cada valor de (Y, α) , con $\gamma = (n - 1)\beta$, $\gamma = \beta$ y $\gamma = \frac{\beta}{9}$, respectivamente.

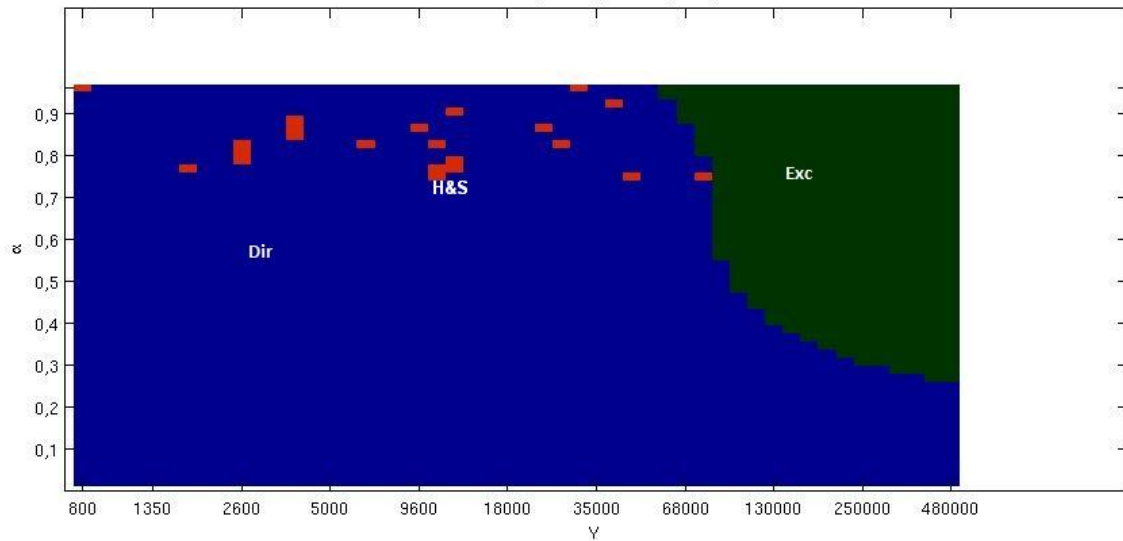


Figura 4.14: Estructuras óptimas para cada valor de (Y, α) con $\gamma = 0$.

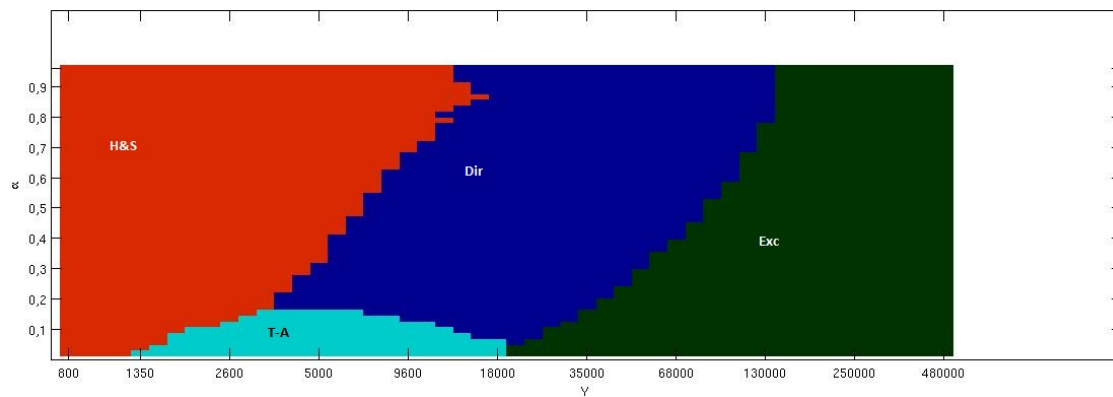


Figura 4.15: Estructuras óptimas para cada valor de (Y, α) en el caso intermedio de dispersión ($\beta = \gamma$), con un costo de trasbordo equivalente a 24 minutos viajando en bus.

La Figura 4.16 analiza cómo cambian las capacidades y las flotas en función de la afluencia. La idea de realizar este análisis es observar de qué manera se ajusta el sistema cuando la demanda es mayor. Notar que para cubrir la demanda hay, a rasgos gruesos, dos opciones: aumentar la frecuencia o aumentar las capacidades. Aumentar la frecuencia es beneficioso para los usuarios, pues disminuye sus tiempos de espera (y, en menor medida, sus tiempos de viaje por el efecto de menos pasajeros subiendo y bajando de los buses que tomen); sin embargo, es costoso para los operadores pues exige una mayor flota. Aumentar la capacidad es menos costoso para los operadores, pero para los usuarios no hay beneficio en el tiempo de espera y sí hay empeoramiento en el tiempo de viaje. Con ciertos matices, a nivel intuitivo se podría afirmar que aumentar la flota es la decisión que tomarían los usuarios, mientras que aumentar las capacidades es la decisión que tomarían los operadores.

Para poder realizar el gráfico, se utiliza una técnica análoga a la descrita en forma previa a la Figura 4.2, es decir, para cada Y se calcula el promedio en α . La escala vuelve a ser logarítmica.

El gráfico sobre capacidades muestra que éstas en un comienzo crecen, pero luego van convergiendo, máxime cuando el gráfico es logarítmico. Es interesante resaltar que tal convergencia no se acerca, en este rango, al límite impuesto de 291 pasajeros por bus, luego el que se prioricen las flotas no es por limitaciones técnicas respecto al tamaño máximo, sino que porque aumentar las frecuencias pasa a ser más conveniente desde el punto de vista del sistema. Por el otro lado, afluencias pequeñas implican que las capacidades son demasiado bajas, lo que obliga a pensar en tecnologías diferentes a la de un bus.

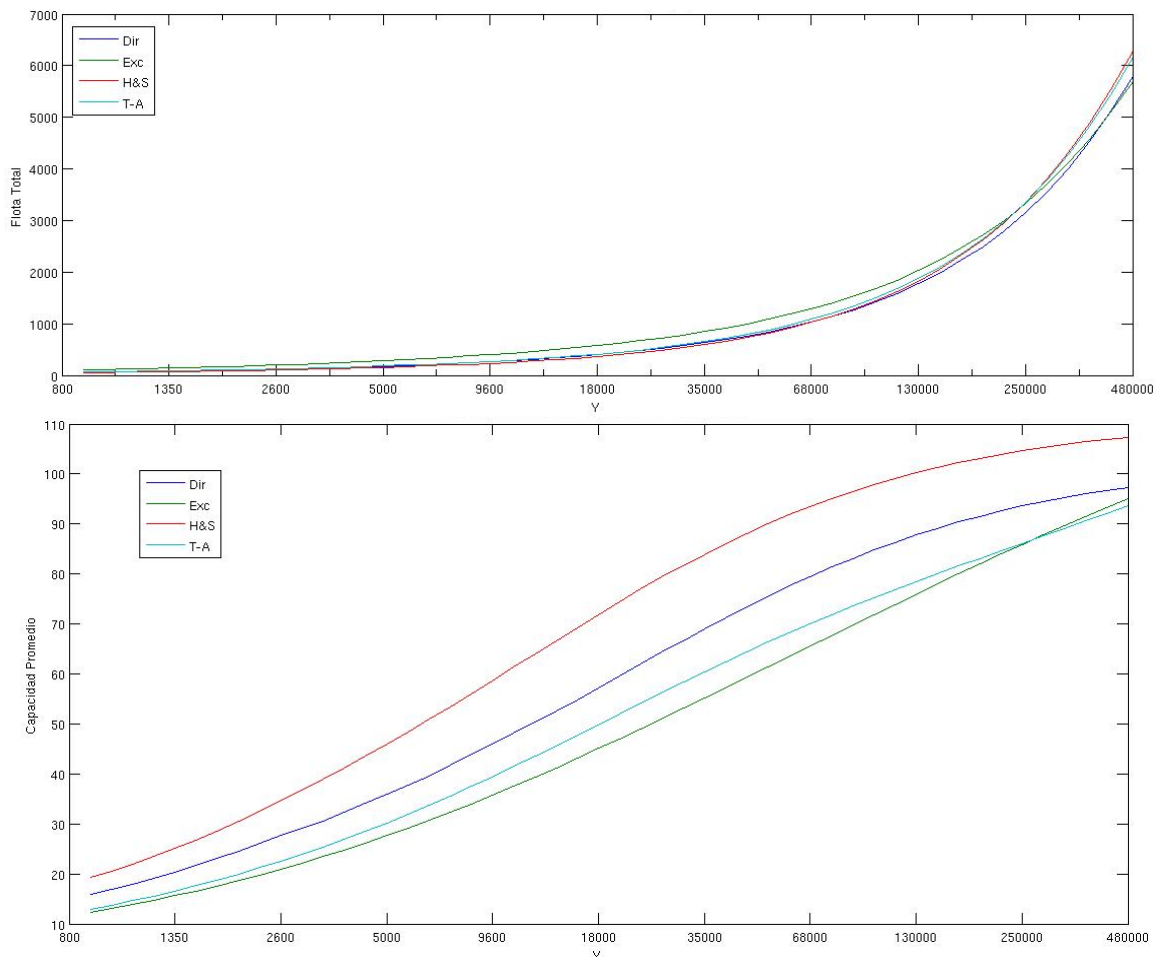


Figura 4.16: Flota y capacidad promedio de las distintas estructuras en función de la afluencia total para el caso en que $\beta = \gamma$.

Al analizar las flotas, se hace necesario observar la Figura 4.17, que linealiza el gráfico al mostrar el logaritmo de las flotas totales. Allí se observa que el crecimiento de las frecuencias es prácticamente lineal, con una pequeña

convexidad que debe compensar lo descrito respecto a las capacidades. Así, se preserva la conclusión de Jara-Díaz y Gschwender (2003), Jara-Díaz, et al (2012) y Gschwender et al (2013) respecto al comportamiento aproximadamente lineal de las flotas.

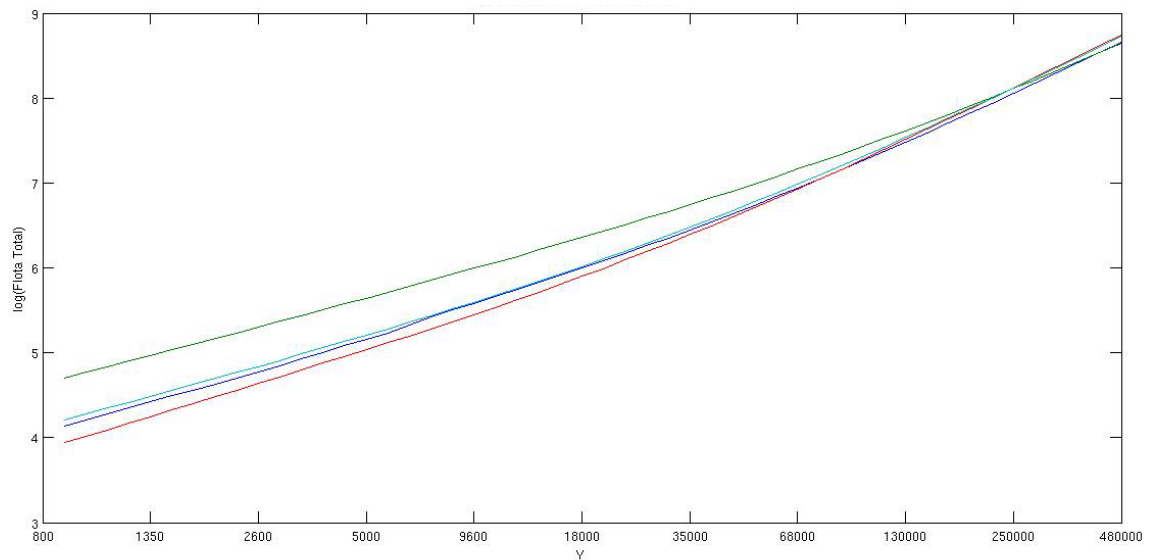


Figura 4.17: Linealización del gráfico que muestra la flota de cada estructura para cada valor de Y.

4.6 Comparación entre las estructuras

Con lo estudiado en este capítulo, es posible extraer ya algunas conclusiones centrales respecto a estas estructuras y la comparación entre ellas. La primera es que bajo los supuestos utilizados, esto es, una ciudad pequeña (24000 pasajeros por hora) y donde trasbordar no significa una molestia extra, la mejor estructura posible es una de tipo Hub & Spoke modificado, que tenga como punto de trasbordos el CBD, o una de alimentadores hacia los subcentros que se complemente con troncales. La elección entre ambas dependerá del nivel de atracción del CBD.

Si hay cambios en estos supuestos, son otras estructuras las que se convierten en óptimas. Estos fenómenos se resumen en la Tabla 4.2.

Fenómeno	Estructura que se potencia
Ciudad con un CBD que concentra en gran medida la atracción de viajes	H&S
Ciudad con muchos pasajeros	Exc
Trasbordos más desagradables	Exc, Dir
Ciudad estructurada en torno a los subcentros en sus respectivas zonas	T-A
Pasajeros que no viajan a zonas ajenas	Dir

Tabla 4.2: Fenómenos urbanos y la estructura que mejor responde a cada uno de ellos.

Con las descripciones hechas en las secciones anteriores, se puede además hacer un resumen de las características distintivas principales de cada estructura:

- **Directas:** Estructura que responde mal a ciudades dispersas por no coleccionar viajes. Por lo mismo, su eficiencia aumenta cuando la mayor parte de los viajes son radiales. Su única característica en la que se distingue con claridad de las demás estructuras es el mayor tiempo de viaje que presenta, debido principalmente a la existencia de rutas sub-óptimas en términos de distancia para llegar a subcentros en zonas ajenas.
- **Exclusivas:** Estructura que requiere muchos buses pequeños para funcionar, y que tiene tiempos de espera muy altos, siendo por tanto costosa para operadores y usuarios. Sus tiempos de viaje son los menores por no perder tiempo en los paraderos, pero no alcanza a ser una compensación suficientemente fuerte de las deficiencias antes mencionadas.
- **H&S:** La mejor estructura para los usuarios si no se penaliza el trasbordo. Colectar viajes permite altas frecuencias y tiempos de viaje razonables. Si la ciudad es concentrada, presenta además flotas pequeñas, pero exige buses grandes, por lo que para los operadores no siempre es óptima.
- **T-A:** Cuando la ciudad es más bien dispersa, es una estructura muy conveniente para los operadores pues tiene pocos buses y pocas plazas; en este mismo caso, para los usuarios es un buen sistema, pese a que los tiempos de espera no son los más bajos. Si la ciudad es

más bien concentrada, es un pésimo sistema para operadores y usuarios.

Una última conclusión muy importante de este capítulo es el rol clave que juega el precio de trasbordo. Las Figuras 4.1 y 4.12 muestran como la decisión de que estructura escoger cambia radicalmente dependiendo de cuál sea el valor asignado al disgusto mismo de trasbordar. Más aún, cambia también el rol de los distintos parámetros, en cuanto a su preponderancia para determinar cuál estructura será la óptima. Ello exige desarrollar mejores técnicas para poder tener valores coherentes y creíbles para esta variable.

4.7 Análisis de sensibilidad

Habiendo visto ya los principales resultados para las estructuras estudiadas, se hace relevante analizar el rol que juegan aquellos parámetros a los que se les dio un valor fijo en el análisis recién hecho, como se mostraba en la Tabla 4.1. Analizar tanto su relevancia para los resultados obtenidos como su variabilidad, pues si alguno de esos parámetros tiene una variabilidad muy alta y una sensibilidad también alta, el modelo se pone en riesgo, como ya se mostró que ocurre con el costo de trasbordar.

Para las modelaciones se utilizarán los mismos valores de la Tabla 4.1, salvo el parámetro que se esté moviendo. La afluencia Y será usado en su versión intermedio, es decir 24000 pasajeros por hora. Se usará un valor mediano para la concentración en el CBD: $\alpha = 0,4$, mientras que también se usará el caso intermedio para la dispersión, es decir $\beta = \gamma = 0,3$. De la Figura 4.1 se puede deducir que en este caso, con los parámetros tomando los valores dados por la Tabla 4.1, la estructura dominante es T-A.

Dado que en este caso es solamente un parámetro el que se irá moviendo por vez, el análisis mostrará como varían los costos totales para cada estructura. El análisis se hará en forma gráfica y por tanto cualitativa. Lo relevante es ver cómo cambian comparativamente las estructuras y en particular si esto hace variar la estructura óptima, para lo cual un análisis gráfico es suficiente. En un análisis cuantitativo se haría muy difícil distinguir cuando los cambios son porque una estructura mejora o empeora comparativamente y cuando porque el cambio mismo en la variable hace aumentar o disminuir los costos.

El parámetro a representa la porción de pasajeros cuyo viaje comienza en alguna periferia, y por lo tanto $1 - a$ es cuantos parten desde los subcentros. Luego un valor cercano a 0,5 significa la mayor dispersión en el origen. Cabe señalar además que es esperable que los costos aumenten con este parámetro, porque las distancias promedio aumentan. Al analizar la Figura 4.18, se observa que aquello ocurre para Dir y para T-A. Para Exc, en

cambio, el efecto de dispersar es más relevante por lo que sus óptimos se encuentran en los extremos. La estructura H&S sólo para valores grandes de a presenta el efecto esperado; esto puede interpretarse porque sus líneas siempre parten desde la periferia, por lo que llevar pocos pasajeros en esa primera parte implica una fuerte capacidad ociosa, fenómeno relevante para una estructura cuya cantidad de plazas es especialmente alta (ver Figura 4.6). El efecto de esta variable es relevante. Si bien se mantienen H&S y T-A como las estructuras óptimas, sus diferencias se acrecientan dependiendo del valor de a .

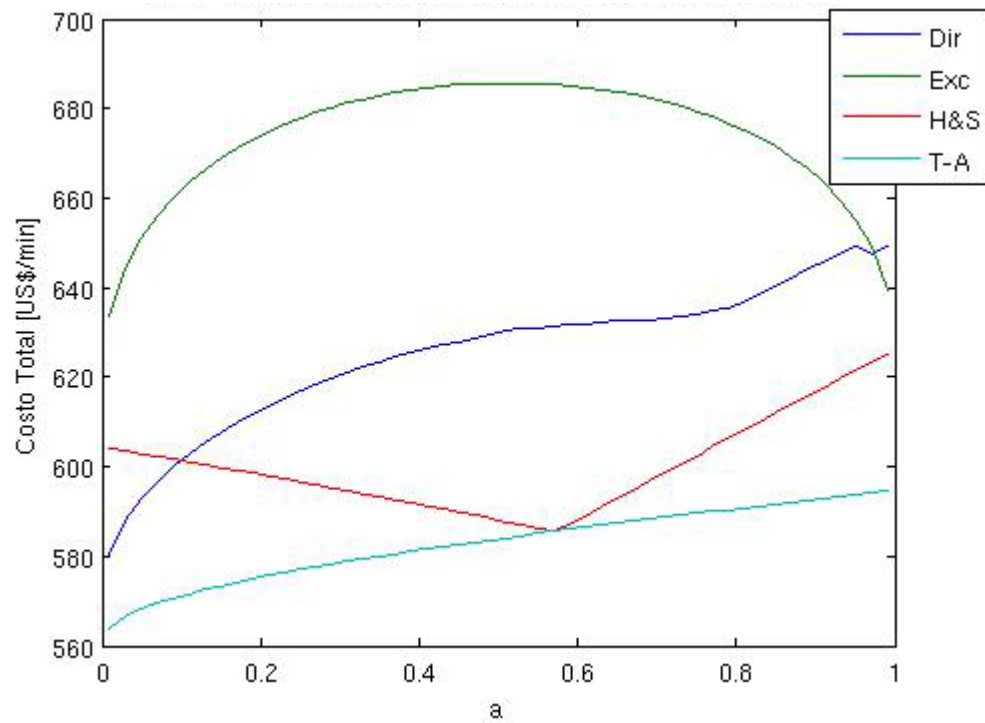


Figura 4.18: Costo total de cada estructura al variar la proporción de usuarios que parten desde la periferia.

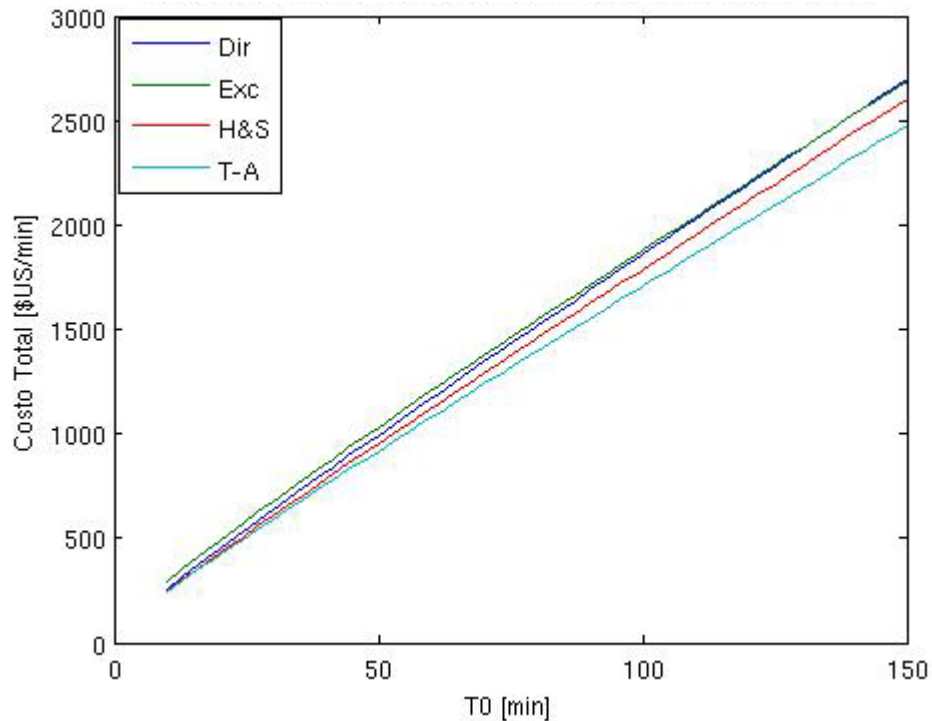


Figura 4.19: Costo total de cada estructura al variar el tiempo que le toma a un bus ir desde el centro hasta el CBD.

La Figura 4.19 muestra que la sensibilidad respecto a la distancia Subcentro-CBD es poca. Si bien los costos aumentan bastante, porque las distancias lo hacen, para todas las estructuras el efecto es prácticamente el mismo. Cabe hacer notar que un cambio en esta variable podría afectar el valor de Y o de α , pues un CBD más lejano es menos atractivo, pero esas relaciones quedan fuera del objeto de estudio de este trabajo.

La Figura 4.20 entrega conclusiones análogas para el parámetro g . Solamente cambios muy grandes en g perjudican a T-A y benefician a H&S, resultado esperable porque la estructura T-A se basa en viajes que serían mucho más largos, perdiendo su ventaja los alimentadores. Cabe recordar que si este parámetro es pequeño significa que los subcentros están muy cerca de sus periferias y por lo tanto son muy atractivos. Esto podría significar relaciones con Y o con β , las que nuevamente no serán profundizadas.

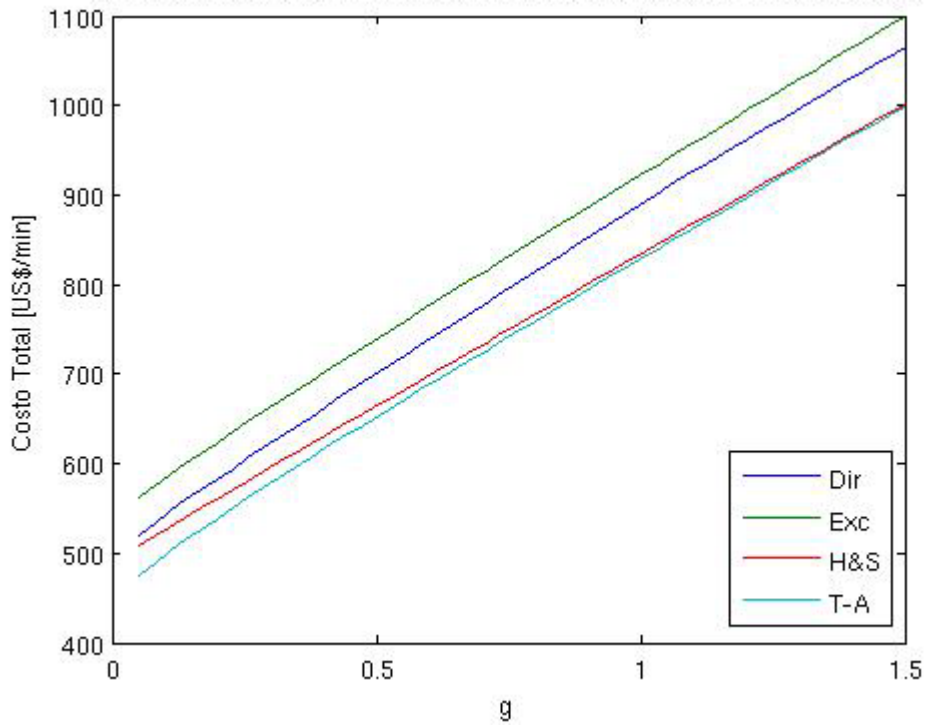


Figura 4.20: Costo total de cada estructura al variar la razón entre las distancias periferia-subcentro y subcentro-CBD.

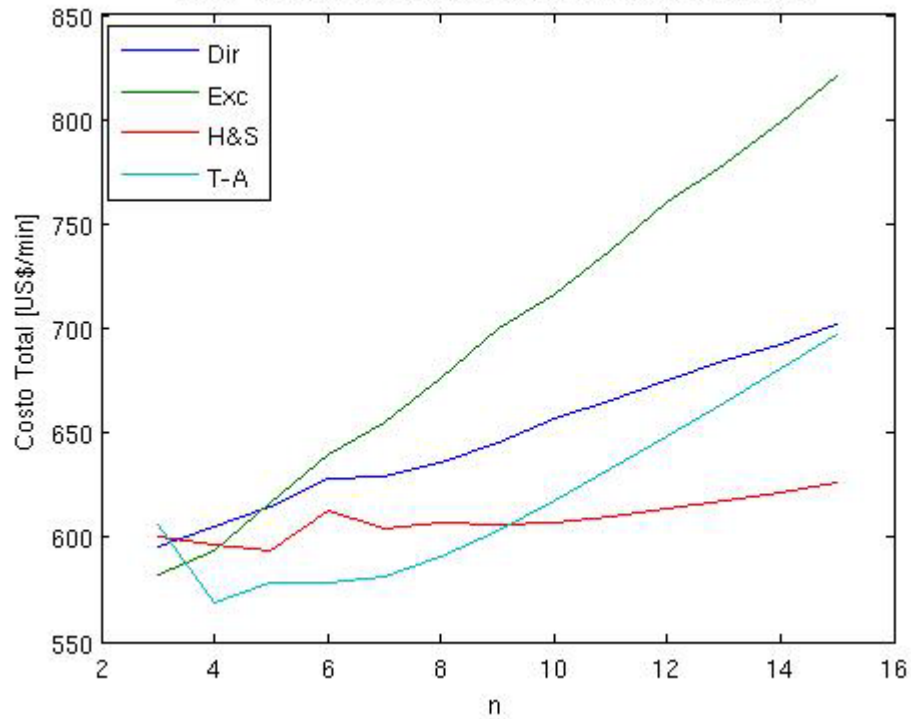


Figura 4.21: Costo total de cada estructura al variar el número de zonas.

La Figura 4.21 muestra que la sensibilidad respecto al parámetro n tiene alguna relevancia cuando el número de zonas es menor a 9, a partir del cual se estabiliza. Recordar que en los cálculos previos se utilizó $n = 8$. Es

interesante apreciar además que si bien el aumento de n también se puede interpretar como dispersión, su efecto no es el mismo que cuando crece γ , pues en este caso la estructura favorecida es H&S. Para H&S el valor de n es poco relevante, a diferencia de todas las demás estructuras donde el costo aumenta con este parámetro. Para T-A (que es la estructura que se ve más desfavorecida), este aumento en la dispersión es perjudicial porque significa tener mucha mayor cantidad de puntos de trasbordo, y por lo tanto la ventaja que significa coleccionar los pasajeros de una zona se diluye.

La Figura 4.22 muestra que la sensibilidad respecto al valor de t , el tiempo que le toma a cada pasajero subir y bajar, es relevante para Exc, que se potencia si el tiempo es mayor. Fenómeno esperable, pues su principal ventaja es que son pocas las paradas de cada bus.

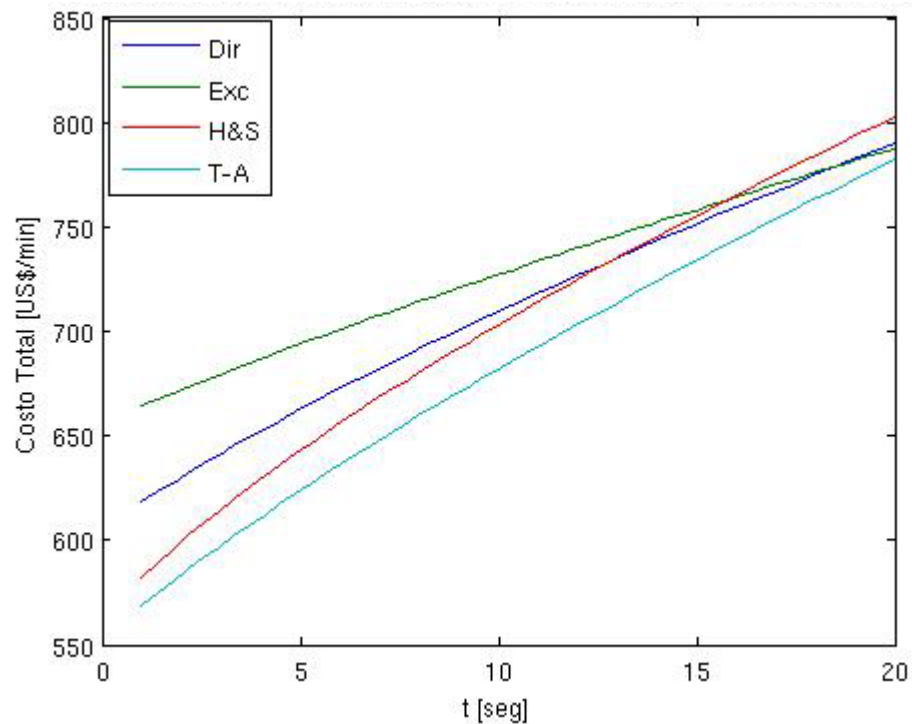


Figura 4.22: Costo total de cada estructura al variar el tiempo de subida y bajada al bus.

En resumen, se puede establecer que el modelo es en general robusto, pues si bien determinados parámetros tienen sensibilidad considerable, el comportamiento a grandes rasgos se mantiene y por lo tanto las conclusiones de la sección anterior no varían demasiado. La principal excepción sería a , la dispersión en el origen; sin embargo, ésta es una variable que determina la matriz O-D, por lo que es deseable que exista sensibilidad con respecto a él. Más aún, es un parámetro que por su relevancia debe ser conocido para la definición de estructuras de líneas óptimas. Similar efecto tiene n , variable que depende exclusivamente de la geometría de la ciudad y que por lo tanto es fácil de conocer.

4.8 Síntesis

En este capítulo se analiza numéricamente cómo se comportan las diversas estructuras en distintos escenarios, y cómo se comparan entre sí. Se estudia también el valor de algunas características que describen en forma más precisa y detallada las razones de por qué una estructura es mejor o peor que otra.

Con tales conclusiones, se ha logrado identificar las estructuras de línea que responden de mejor manera a distintos fenómenos, uno de los objetivos principales de este trabajo. Se encuentra que en el caso base, es decir con los parámetros dados por la Tabla 4.1, las mejores estructuras son H&S y T-A; sin embargo, diversos cambios en los parámetros, identificables con fenómenos urbanos relacionados, fortalecen a estructuras específicas, lo que se resume en la Tabla 4.2.

Lo anterior se complementa con una comprensión exhaustiva de las cuatro estructuras de línea estudiadas, las cuales se corresponden con estructuras clásicas y con las desarrolladas en redes simples en trabajos anteriores de Jara-Díaz y Gschwender (2003), Jara-Díaz et al (2012) y Gschwender et al (2013), adaptadas y profundizadas para esta estructura urbana.

Se muestra además que el modelo es robusto, pues la relación entre las distintas estructuras solamente cambia con aquellos parámetros que se espera que sean relevantes para su comparación. El único parámetro que aparece como muy relevante y al mismo tiempo poco conocido es el costo asociado a cada trasbordo, investigación que aparece entonces como urgente de resolver.

Para poder ligar lo anterior con la investigación desarrollada a nivel heurística, y poder obtener ciertas luces de como se podría trabajar investigaciones futuras que permitan incorporar a las heurísticas los resultados aquí obtenidos, se hace necesario poder comparar las estructuras aquí estudiadas con las que emergen al aplicar heurísticas a esta misma red. Es lo que se hará en el próximo capítulo.

Capítulo 5: Aproximación al Estudio de Algoritmos Heurísticos en Redes Arbitrarias

Lo estudiado hasta ahora permite construir una forma exhaustiva para estudiar la ciudad en la que se está trabajando, al comparar estructuras intuitivas y que cubren varias de las posibles familias de estructuras de líneas. Con ello, como muestra la Tabla 4.2, fue posible determinar cómo influyen varios de los posibles fenómenos urbanos en la definición de estructura óptima.

Ahora bien, como se mostró en el Capítulo 1, existen también métodos heurísticos que pueden adaptarse a grafos genéricos. En ese sentido, es de interés saber cómo se comportarán tales algoritmos en la ciudad en estudio, para revisar hasta qué punto el hacer optimizado en el Capítulo 4 exclusivamente con estructuras definidas a priori limita el abanico de posibilidades, y verificar si las heurísticas entregan soluciones cercanas a las óptimas.

Cabe recordar que los algoritmos estudiados previamente consideran otras funciones de costo y que la mayoría de ellos considera la definición de estructura óptima como un paso previo a la definición de frecuencias. Por ello, para poder hacer la comparación es necesario estandarizar previamente aquellas diferencias, por ejemplo incorporando las estructuras propuestas por los algoritmos a la metodología trabajada en el Capítulo 3 y luego comparar con los resultados del Capítulo 4.

En este caso, solamente se aspirará a una primera aproximación. El objetivo será principalmente construir un diálogo entre estas dos formas de enfrentar el problema de construir estructuras de líneas, analizando parecidos y diferencias en sus propuestas, viendo también cómo responden a los distintos fenómenos. La comparación exhaustiva quedará propuesta para investigación futura.

En ese espíritu, se trabajará con dos de los artículos presentados en la revisión bibliográfica: Ceder y Wilson (1986) y Dubois et al (1979). Su elección se basa en que presentan algoritmos intuitivos y directos sobre el grafo. Estudiar aquellas heurísticas que se basan en resolver un PPL pierde parte del sentido al transformar la función de costos y por lo tanto el mismo PPL. Asimismo, tampoco se estudiarán algoritmos que pese a ser más nuevos, basan su aplicación en pasos aleatorios, como es el caso de Pattnaik et al (1998). Esto porque para poder construir tales puentes entre las

distintas formas de afrontar la construcción de estructuras de líneas, son más valiosos los procedimientos que se basan en razonamientos intuitivos y con resultados predecibles (y por lo tanto, deterministas). Por supuesto que un análisis exhaustivo exigiría revisar un conjunto más amplio y completo de las heurísticas existentes, pero para los objetivos de este trabajo, lo fundamental es estudiar aquéllas que más sirven para hacer las comparaciones pertinentes. Cabe ser señalado que la antigüedad de estos algoritmos implica que cuando fueron creados había una capacidad computacional mucho menor a la actual, por lo que su diseño estaba probablemente enfocado a una resolución manual, que es en todo caso la que se realizará a continuación.

Las dos heurísticas, que serán explicadas en detalle a continuación, difieren en que mientras Ceder y Wilson (1986) consideran todas las rutas que sean suficientemente cercanas (en un sentido que será detallado en la Sección 5.1) a la ruta mínima que conecte el mismo par O-D, Dubois et al (1979) solamente considera aquéllas que además no puedan ser alargadas. La primera heurística incluye tanto las rutas óptimas como pequeñas desviaciones de éstas, mientras que la segunda obliga a optar a priori entre ambas posibilidades.

5.1 La estructura que incluye todas las posibles rutas

En el caso de Ceder y Wilson (1986), el primer objetivo del algoritmo es encontrar un conjunto de rutas factibles. Para luego escoger entre ellas se resuelve el problema de optimización asociado, problema que no siempre será posible de resolver en forma exacta porque dependiendo de la formulación se puede exigir una cantidad máxima de líneas con frecuencias positivas lo que supone un problema combinatorial. De todos modos, para el enfoque de este trabajo, en el que se preserva la modelación explicada en el Capítulo 3, lo relevante es la definición de las rutas factibles, pues luego el proceso de optimización diría cuáles de esas rutas efectivamente tendrán flota.

Una ruta será considerada factible si el tiempo que demora en conectar su nodo inicial con el final es menor al tiempo mínimo posible más un porcentaje predeterminado, que puede depender del par O-D. Se denota por $e(i,j)$ tal porcentaje. Cabe adelantar que luego el artículo propone utilizar $e(i,j) = 0,4$ para todos los pares. En este caso, se supondrá que para pares simétricos (es decir, donde ambos orígenes son periferia o ambos orígenes son subcentro, y el razonamiento análogo para los destinos) la función valdrá lo mismo. Notar que en este caso no se aplica un algoritmo propiamente tal, sino que una revisión de todas las posibles rutas y un cálculo de sus distancias.

En la red analizada, los posibles nodos de los que puede partir una ruta son las periferias y los subcentros. Recordemos que se notó $r_n = \sqrt{2 - 2 \cos \frac{2\pi}{n}}$ la distancia entre dos subcentros consecutivos.

Luego, una ruta que parta desde la periferia i llegará al subcentro de la zona $i + h$ recorriendo el anillo de subcentros si y sólo si $\frac{g+hr_n}{g+2} \leq 1 + e(P_i, SC_{i+h})$. Análogamente, llegará al mismo subcentro atravesando el CBD si y sólo si $\frac{g+2}{g+hr_n} \leq 1 + e(P_i, SC_{i+h})$. De este modo, la ruta óptima siempre estará considerada dentro de las rutas factibles, pero si esta ruta es muy pareja con su alternativa, ambas rutas serán consideradas como factibles.

Podría darse el caso de que se considere factible una ruta que atraviese el CBD y luego recorra parte del anillo de subcentros. Análogamente, otra ruta podría primero recorrer parte del anillo y luego ir hacia el CBD, para terminar allí o atravesarlo. Sin embargo, es claro que en la asignación de pasajeros nadie tomará esa ruta en su totalidad, lo que de inmediato augura que la optimización las dejará con frecuencias nulas²².

De esta forma, retomando la notación definida en el Capítulo 3, la estructura que se obtiene según el trabajo de Ceder y Wilson (que desde ahora denotaremos estructura CW) contiene las líneas P_iSC_i , P_iCBD , P_iSC_jH , P_iSC_jF , SC_iSC_jH y SC_iSC_jF , donde falta analizar los valores de H y \bar{H} . Para las líneas que unen subcentros recorriendo el anillo, si se asume que al llegar a su nodo final toman a este mismo como su nuevo nodo inicial (que es la alternativa óptima para operar), se obtiene un equivalente a la línea circular descrita en estructuras anteriores, pues por simetría todas tendrán igual frecuencia y capacidad.

Los conjuntos H y \bar{H} tendrán la limitante de la función $e(i, j)$. Si tal función de tolerancia es suficientemente alta como para permitir la existencia de dos rutas posibles para viajes que vayan a subcentros ajenos, H y \bar{H} serán entonces encontrados de acuerdo a criterios de equilibrio. Sin embargo, para H el equilibrio estará garantizado para cualquier asignación posible, pues eso de inmediato implicará frecuencia nula para la ruta alternativa por ser ésta más costosa para el usuario. La única alternativa razonable para encontrar H es optimizar. Dado H , \bar{H} sí es un problema de equilibrio como se estudió en el Capítulo 3.

La conclusión es entonces notable: la estructura CW se reduce a la estructura Dir, con la limitante de que el valor de H y \bar{H} están limitados a un subconjunto determinado por el valor de la función $e(i, j)$. Esto tiene varias implicancias:

²² Si bien algunos pasajeros podrían tomarla para ciertas porciones de esa ruta, cada bus asignado a esa línea es ineficiente pues podría servir la porción específica donde sea utilizada.

- La estructura CW siempre estará dominada por la estructura Dir, luego nunca será óptima.
- Al menos en este primer intento, aparecen similitudes claras entre lo que entrega un algoritmo heurístico y lo que se propuso desde la observación y la intuición. Eso sí, la ventaja que presenta inherentemente un procedimiento por ser algorítmico (el poder utilizarlo en forma automática en cualquier red) se ve contrapesada por detalles específicos que pueden mejorarse cuando se trabaja desde un punto de vista analítico.
- Incorporar límites a priori para la diferencia entre el largo de una ruta y el largo de la ruta óptima entre ambos puntos tiene sentido para disminuir la cantidad de rutas factibles. En este caso, sin embargo, aquello empeora la estructura sin aportar en factibilidad para su resolución.
- La estructura obtenida en ningún momento considera los valores de Y, α y β , salvo eventualmente para determinar los valores de H y \bar{H} . Es decir, el resultado es prácticamente ciego a la matriz O-D. Esto demuestra una gran rigidez del modelo para poder adecuarse a distintos patrones de demanda en la misma estructura urbana.

5.2 La estructura que escoge una ruta por cada par O-D

Como se explicó en el Capítulo 1, Dubois et al (1979) tienen un primer algoritmo para definir cuáles serán las calles que utilizará el sistema de transporte público, pues tal variable se incorpora como costo de infraestructura para los operadores en su modelo. En el modelo de este trabajo las calles son fijas y no son parte de la función de costos, por lo que esa parte del análisis será omitida. El algoritmo para definir la estructura de líneas primero define ciertas rutas candidatas, y luego tiene un segundo paso en el que define las líneas definitivas, que estarán solamente caracterizadas por sus rutas.

Se expresará este algoritmo primero en un formato tipo pseudo-código, para poder leerlo globalmente, y luego se explicará en detalle al aplicarlo sobre la ciudad en cuestión. Cabe anticipar que hay varios elementos del algoritmo que el artículo no explicita; cuando sea necesario en la aplicación, se les irá dando forma concreta. El pseudo-código es:

- (1) Definir el conjunto M como aquél que contiene a todas las rutas de largo mínimo que sean maximales en el sentido de la inclusión.
- (2) Construir M^* : para cada ruta $L \in M$, denotando x a su inicio e y a su final, y para cada z que no sea parte de L , se construye el camino L_z que va de x a z y luego de z a y mediante caminos de largo mínimo. Si

el largo de L_z supera en menos de una porción σ al largo de L , incluir L_z en M^* . Si para una ruta L existe más de un z que cumple lo anterior, solamente se agregará el camino L_z de menor largo.

- (3) Definir \bar{M} como la unión entre M^* y aquellas rutas de M que unan puntos que no estén conectados con las rutas de M^* . Éste será el conjunto de rutas candidatas.
- (4) Ordenar \bar{M} de acuerdo al largo de las rutas, de menor a mayor.
- (5) Agregar las rutas de \bar{M} en orden hasta que el grafo que representa a la ciudad quede conexo (es decir, que todo par de nodos esté conectado). Este nuevo conjunto de rutas será denotado M' .
- (6) Calcular porción de viajes que necesitan trasbordos. Si es "pequeña", pasar a (8). Si no, pasar a (7).
- (7) Agregar a M' la ruta de \bar{M} que disminuya en mayor cantidad la cantidad de trasbordos. Pasar a (6).
- (8) Calcular el tiempo de viaje promedio en el sistema y compararlo con el tiempo de viaje promedio que tendría un sistema donde todos los pares están conectados por rutas de largo mínimo. Si la diferencia es "pequeña", terminar. Si no, pasar a (9).
- (9) Agregar a M' la ruta de \bar{M} que disminuya en mayor cantidad el tiempo de viaje promedio. Pasar a (8).

Tal como se adelantó, aparecen varios elementos ambiguos. Cómo asignar los pasajeros, qué significa que una diferencia sea "pequeña", entre otros. A continuación se desarrollará el algoritmo para la ciudad en estudio y se irán resolviendo las ambigüedades cuando sea necesario.

Para el paso (1), M es el conjunto que tiene todas las rutas de largo mínimo que sean maximales en el sentido de la inclusión. Dicho de otra manera, el conjunto M contiene todas aquellas rutas que unen dos nodos en forma óptima, y que no pueden ser alargadas manteniendo esa condición.

En este caso, es fácil ver que una ruta maximal siempre deberá unir dos periferias. Dado que se requieren rutas de costo mínimo, el conjunto M estará dado entonces por los caminos entre cada par de periferias, donde la ruta entre ambas periferias será atravesando el CBD o vía el anillo de subcentros dependiendo de cuál alternativa resulte más corta, siguiendo la misma lógica ya explicada para la estructura Exc en el Capítulo 3.

Para el paso (2), el conjunto M^* se construye a partir de las rutas que están en M pero con desviaciones suficientemente pequeñas. Formalmente y como se explicó en el pseudo-código, dada una ruta L que una los nodos x e y , se busca un nodo z que no esté presente en esa ruta y que cumpla que el camino alternativo que va desde x a z y luego desde z a y siguiendo rutas mínimas aumente el tiempo total en un porcentaje menor a un valor σ dado. El artículo no sugiere un valor para σ , por lo que para las comparaciones numéricas se usará un valor medianamente exigente: $\sigma = 0,2$. En este caso, hay dos tipos de rutas a analizar, las que atraviesan el CBD y las que

recorren el anillo de subcentros. Se volverá a notar P_i a la periferia donde comienza la ruta en análisis y P_j a su final. Para este algoritmo será necesario comparar numéricamente, para lo que se usarán los parámetros de la Tabla 4.1.

Para las rutas que atraviesan el CBD, los nodos que no son parte de la ruta son las periferias y los subcentros de las zonas que no son ni la inicial ni la final. Dado que desviarse llegando a una periferia será siempre peor que llegar solamente al subcentro de la misma zona, solamente se analizarán los casos en los que el nodo z es un subcentro al que llamaremos SC_k . Tres son los casos posibles.

- Caso 1: La ruta óptima desde i hacia k y desde k hacia j es en ambos casos vía CBD. Entonces el tiempo total aumenta desde $(2 + 2g)T_0$ a $(4 + 2g)T_0$. Luego, este camino será parte de M^* ssi $\frac{(4+2g)T_0}{(2+2g)T_0} \leq 1 + \sigma$, o equivalentemente $2 \leq (2 + g)\sigma$. La validez de tal desigualdad dependerá de los valores de g y de σ . Para poder comparar, al usar el valor $g = 1/3$ considerado para la modelación (ver Tabla 4.1), se requiere $\sigma \geq \frac{3}{4}$ y por lo tanto este caso se descarta.
- Caso 2: La ruta óptima desde i hacia k es vía CBD, pero desde k hacia j es vía el anillo de subcentros²³. En este caso, la nueva distancia será $(2 + 2g)T_0 + lr_nT_0$, donde l es la cantidad de arcos a recorrer en el anillo de subcentros. En este caso esta ruta será parte de M^* ssi $\frac{(2+g)T_0+lr_nT_0}{(2+2g)T_0} \leq 1 + \sigma$, o equivalentemente si $\frac{l\sqrt{2-2\cos\frac{2\pi}{n}}}{2+g} \leq \sigma$. Nuevamente esta desigualdad puede ser cierta, en este caso dependiendo de los valores de g , σ y n . Reemplazando con los valores de la Tabla 4.1, la desigualdad se convierte en $0.328 \times l \leq \sigma$, lo que también descarta a estas rutas (pues l es un número natural siempre mayor o igual a 1).
- Caso 3: La ruta óptima desde i hacia k y desde k hacia j es en ambos casos vía el anillo de subcentros. En este caso la nueva distancia es $2gT_0 + lr_nT_0$, donde l es la cantidad de subcentros en total que se recorrerán (notar que dado que el camino óptimo de P_i a P_j es vía CBD, l será siempre mayor a la distancia en arcos entre la zona inicial y el extremo del conjunto F respectivo, por lo que al reemplazar numéricamente se tendrá $l \geq 3$) y por lo tanto la condición a ser cumplida es $\frac{lr_n-2}{2g+2} \leq \sigma$. La comparación numérica se hará en primer lugar con el menor l posible, es decir $l = 3$, lo que transforma la desigualdad en $\sigma \geq 0,111$; por lo tanto, la ruta que va desde P_i a la zona que está a 3 subcentros de distancia vía anillo de subcentros será parte de M^* .

²³ Notar que este caso es análogo a aquél en que la ruta óptima desde i hacia k es vía anillo de subcentros y desde k hacia j es vía CBD.

Para el caso $l = 4$ la desigualdad se convierte en $\sigma \geq 0,398$ y por lo tanto tal ruta queda descartada.

Falta aún analizar el caso en que la ruta óptima desde la zona i hacia k es vía el anillo de subcentros. Acá nuevamente hay varios subcasos que estudiar:

- Caso 1: El nodo que se incorpora es el CBD. Luego la distancia pasa de ser $2gT_0 + lr_nT_0$ a ser $2gT_0 + 2T_0$, y por lo tanto la desigualdad a estudiar es $\frac{2-lr_n}{2g+lr_n} \leq \sigma$. Para la comparación numérica, si $l=2$ la desigualdad se transforma en $\sigma \geq 0,214$, y para el caso $l=1$ la desigualdad se convierte en $\sigma \geq 0,862$ y por lo tanto ambas rutas quedan descartadas.
- Caso 2: El nodo que se incorpora es un subcentro SC_k (que, por definición de M^* , no es parte de la ruta desde i hacia j). La ruta óptima desde i hacia k y desde k hacia j es en ambos casos vía el anillo de subcentros, generando la ruta candidata el recorrer el camino desde i hacia j vía el anillo de subcentros pero utilizando el camino más largo²⁴. En este caso, el largo de la nueva ruta es $2gT_0 + (n-l)r_nT_0$, con lo que la desigualdad a estudiar es $\sigma \geq (n-2l)r_n$. Dado que $n=8$, este caso no es plausible en el escenario estudiado.
- Caso 3: El nodo que se incorpora es un subcentro SC_k . La ruta óptima desde i hacia k y desde k hacia j es en ambos casos vía el anillo de subcentros, pero el camino generado consiste en la misma ruta original desde i hacia j , para luego seguir en la misma dirección m arcos hasta k y luego devolverse hasta j . La nueva ruta tiene largo $2gT_0 + (l+2m)r_nT_0$, por lo que la desigualdad a ser analizada resulta ser $\sigma \geq \frac{2mr_n}{2g+lr_n}$. En la comparación con el escenario estudiado en el Capítulo 4, el caso extremo $m=1, l=2$ exigiría $\sigma \geq 0,697$ por lo que este caso se descarta.²⁵
- Caso 4: El nodo que se incorpora es un subcentro SC_k . La ruta óptima desde i hacia k es vía CBD, y desde k hacia j es vía el anillo de subcentros recorriendo m nodos. El nuevo costo será entonces $2(g+1)T_0 + mr_nT_0$, por lo que la desigualdad a ser evaluada es $\sigma \geq$

²⁴ Esta situación sólo será posible si $n \leq 6$. En efecto, se requiere poder cubrir todo el anillo de subcentros con 3 caminos, donde cada uno de ellos es óptimo. Recordemos que, según vimos en el capítulo 3, tal optimalidad

implica que la distancia entre cada par de subcentros debe ser menor o igual a $\left\lfloor \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{n}}} \right\rfloor$. La condición

$3 \left\lfloor \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{n}}} \right\rfloor \geq n$ sólo es posible de ser verificada si $n \leq 6$.

²⁵ Este caso es equivalente al que el nodo incorporado es un subcentro, y la nueva ruta consiste en ir desde i en la dirección contraria al camino original por el anillo de subcentros, llegar a k y luego devolverse, pasando por i nuevamente hasta llegar a j .

$\frac{2+(m-l)r_n}{2g+lr_n}$. El caso extremo, con $m = 1, l = 2$ exige $\sigma \geq 0,562$ por lo que este caso se descarta.

- Caso 5: El nodo que se incorpora es un subcentro SC_k . La ruta óptima desde i hacia k y desde k hacia j es en ambos casos vía CBD. El nuevo costo será entonces $2(g+2)T_0$, y la desigualdad a ser estudiada $\sigma \geq \frac{4-lr_n}{2g+lr_n}$. Notar que este caso será siempre peor que el caso 4 (pues el hecho de que la ubicación de k implique que el camino desde k hacia j sea óptimo vía el anillo de subcentros, significa precisamente que esa alternativa es más corta que hacerlo vía CBD), y por lo tanto se puede predecir que este caso se descarta, lo que se corrobora en el análisis numérico pues se necesitaría $\sigma \geq 1,12$.

Con lo anterior se ha completado la revisión de todos los casos posibles y se definieron los conjuntos M y M^* . En general, se observa que la mayoría de las posibles desviaciones dependen del valor de n y g (que tienen que ver con la geometría de la ciudad) para ver si serán o no parte de M^* . Mientras mayor sea g , menor será el cambio porcentual que provoquen los desvíos y por lo tanto más fácilmente tales rutas modificadas caerán en M^* , pues la mayor parte del viaje será fija: ir desde la periferia inicial a su subcentro y del subcentro final a su periferia. Asimismo, mayores valores de n harán menores las distancias entre subcentros consecutivos, y por lo tanto desvíos en el anillo de subcentros que signifiquen recorrer pocos subcentros serán más probablemente parte de M^* .

Para el paso (3), el conjunto definitivo \bar{M} de líneas candidatas se obtiene con las que están en M^* y con aquellas de M cuyas modificaciones fueron descartadas en el paso (2), pues ninguna otra ruta unirá las mismas periferias. En cambio, aquellas rutas que sí fueron modificadas no serán parte, pues todo par de puntos en el grafo estará conectado con las rutas ya mencionadas²⁶. Toda ruta sigue uniendo dos periferias. Considerando las desviaciones que fueron aceptadas, todas las rutas serán conexiones usuales entre zonas, en algunos casos vía CBD y en otros vía el anillo de subcentros, donde cuál sea la opción dependerá solamente de cuántas zonas haya de distancia entre la periferia inicial y la final. Se puede encontrar tal conjunto en forma precisa para el ejemplo estudiado en los capítulos anteriores, con los parámetros espaciales dados por la Tabla 4.1. El resumen se encuentra en la Tabla 5.1.

Habiendo construido \bar{M} , los pasos (4) y (5) consisten respectivamente en ordenar las líneas según la distancia que recorren, y agregarlas hasta que todo el grafo esté conectado. Para ello, las líneas que van de una zona a la

²⁶ En efecto, si ninguno de los puntos es el CBD, entonces sus zonas estarán conectadas por la línea que vaya entre las respectivas periferias, y que pasa también por los respectivos subcentros. Si uno de los nodos es el CBD, varias de las líneas que conectan periferias lo hacen vía CBD y por lo tanto la conexión también estará hecha.

que está a un subcentro de distancia son las más cortas y conectan todas las zonas, vía trasbordos. Para conectar también al CBD se deben agregar las rutas que van a las zonas que están a 4 subcentros de distancia, pues como indica la Tabla 5.1 tales viajes son los únicos vía CBD.

Zonas de Distancia	Ruta óptima	Distancia	Ruta presente en el conjunto candidato	Distancia
1	Vía anillo de subcentros	42,96 [min]	Vía anillo de subcentros	42,96 [min]
2	Vía anillo de subcentros	65,92 [min]	Vía anillo de subcentros	65,92 [min]
3	Vía CBD	80 [min]	Vía anillo de subcentros	88,88 [min]
4	Vía CBD	80 [min]	Vía CBD	80 [min]

Tabla 5.1: Resumen de las rutas que serán parte del conjunto de candidatos según la heurística desarrollada por Dubois et al (1979), y su comparación con las rutas óptimas.

Posteriormente se pasa a los pasos (6) y (7), en los que se agregan líneas hasta que la cantidad de trasbordos sea suficientemente pequeña. Notar que con estas líneas quienes van a un subcentro ajeno que está a dos zonas de distancia deben trasbordar, y quienes van a uno que esté a tres zonas de distancia deben trasbordar dos veces. La noción de "pequeña" no está definida, pero claramente exigir tantos trasbordos no cabe en esa idea. Para disminuir los trasbordos, el algoritmo exige ir agregando aquellas rutas que realicen tal disminución en mayor cantidad. En este caso, si bien la cantidad de pasajeros que requiere trasbordo es la misma para los que recorren dos zonas como para los que recorren tres, el hecho de que estos últimos deban hacer dos trasbordos por viaje significa que sea esa conexión la que se agrega. Agregando esa línea, desaparecen por completo los trasbordos, y no es posible disminuir el tiempo perdido debido a la suboptimalidad de algunas rutas, por lo que los pasos (8) y (9) en este caso se omiten y el conjunto recién completado será el definitivo.

En resumen, la estructura que será denotada por DBL (en referencia a Dubois, Bel y Llibre, los tres autores del artículo en estudio) contiene 3 tipos de líneas (ver Figura 5.1): aquéllas que conectan cada periferia con sus periferias vecinas vía el anillo de subcentros, aquéllas que parten de una periferia, recorren 3 arcos en el anillo de subcentros y van a la periferia respectiva, y aquéllas que atraviesan el CBD para llegar a la zona diametralmente opuesta. Notar que el terminar en una periferia en vez de en un subcentro es equivalente a la forma en la cual las líneas trabajadas en el

Capítulo 3 realizan su ciclo, pues después de que sus pasajeros descienden del bus en el subcentro final de su ruta, se dirigen a la periferia de la misma zona para comenzar de nuevo. Por esta razón en la Figura 5.1 se muestran las líneas llegando a los subcentros en vez de a las periferias, pues además esto permite hacer la analogía más clara con las estructuras estudiadas en los capítulos anteriores.

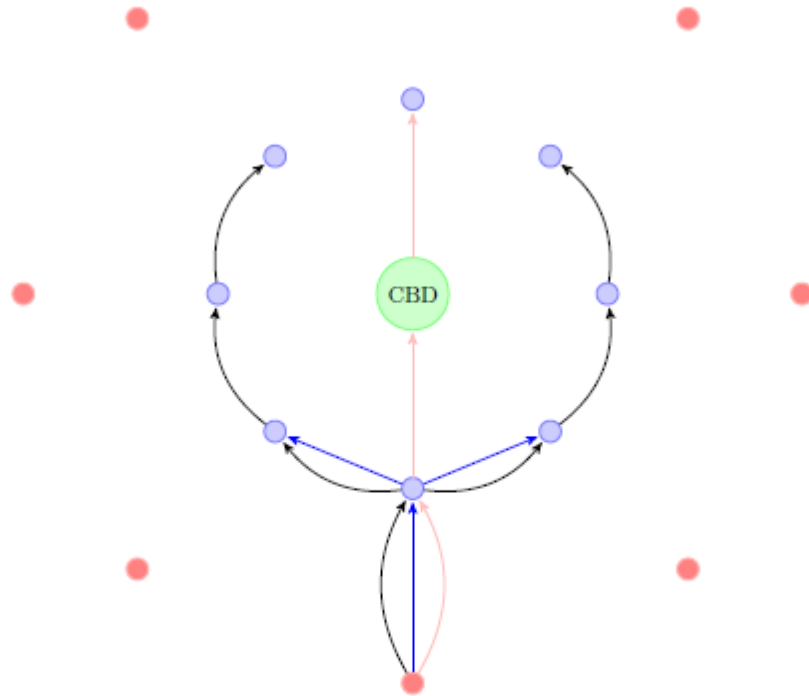


Figura 5.1: Estructura generada por el algoritmo propuesto por Debois et al (1979) al ser aplicado en la ciudad en estudio.

Nuevamente se extrae una estructura similar a Dir, que en este caso impone $H = \bar{H} = 1$, pero que además agrega líneas específicas para ir a los subcentros más cercanos. Por lo mismo, el análisis hecho para la estructura CW es bastante similar para este caso. En concreto:

- No se puede afirmar que haya una dominancia de Dir por sobre DBL, pues las líneas que van a los subcentros vecinos no son parte de Dir. Sin embargo, tales líneas son poco intuitivas por lo que no se aprecia un mejoramiento cualitativo relevante.
- La Figura 4.9 mostraba que para la estructura Dir suele ser más conveniente que más viajes se realicen vía CBD, pues así hay más buses que llegan al principal destino, como es el CBD. Tal fenómeno se pierde en este caso.
- Vuelve a ser positivo el hecho de que la estructura DBL, construida heurísticamente, sea una estructura similar a las construidas a priori.

Al menos para este grafo, las dos heurísticas consiguen elaborar estructuras razonables.

- Se repite el problema de que la matriz O-D pasa casi desapercibida en la definición de la estructura.

5.3 Análisis de las heurísticas usadas y sus resultados

En síntesis, se puede observar que las estructuras realizadas en base a la observación del grafo y de su matriz O-D resultan ser mejores en este caso, pues logran incorporar ciertos factores para los cuales la heurística es ciega. Sin embargo, no deja de ser notable el que las heurísticas construidas por algoritmos que no dependen del grafo resulten ser razonables y similares a algunas de las construidas a priori. Cabe agregarse que la desventaja de las estructuras CW y DBL no es solamente que en la comparación con Dir (la estructura más parecida) resulten peores por tener menor flexibilidad, sino que además no permiten una construcción más acorde a las lógicas que definieron las otras estructuras: Exc, H&S y T-A. De hecho, la rigidez es tal que la matriz O-D afecta sólo en pequeños detalles a las estructuras propuestas por las heurísticas.

En ese sentido, una propuesta para seguir ligando los distintos enfoques existentes para abordar el problema de definición de estructuras de líneas es la siguiente: diseñar distintos algoritmos que respondan a distintas lógicas, como son las 4 expuestas en este trabajo. Considerando la Tabla 4.2 y otros análisis del estilo es posible tener un criterio para saber qué lógica (y por lo tanto qué algoritmo) utilizar para cada ciudad. Es claro además que una revisión posterior de los resultados de las heurísticas permite incorporar detalles y fenómenos que las heurísticas no contemplan.

Otra forma de enfrentar lo anterior sería buscar maneras de modificar las heurísticas existentes de modo de terminar con el aparente sesgo que tienen hacia las estructuras basadas en líneas directas, incorporando posibles líneas exclusivas, posibles nodos de trasbordo o posibles líneas alimentadoras, para dar algunos ejemplos coherentes con lo aquí desarrollado. Cuál de estos enfoques resulte más conveniente sólo podrá ser resuelto con la investigación propuesta aquí como futura.

En cualquier caso, resalta el hecho de que las heurísticas, por ir construyendo sus estructuras de líneas en base a decisiones locales, son incapaces de desarrollar una estrategia global que se haga cargo de las características principales de la ciudad. Típicamente terminan construyendo estructuras de líneas principalmente directas, donde algunos pocos pares tendrán que trasbordar.

Capítulo 6: Síntesis y Conclusiones

Este trabajo genera aportes para resolver el problema de la definición de estructura óptima de líneas de transporte público. Se comienza observando que la investigación previa se basa en esfuerzos específicos, ya sea mediante algoritmos genéricos pero rígidos a la hora de enfrentar distintos tipos de ciudad y sin resultados teóricos que garanticen un buen rendimiento, o mediante análisis en redes particulares en las que no se justifica por qué son buenas aproximaciones para ciudades reales. Con ello, los resultados existentes son también específicos, sin un diálogo entre estos enfoques para afrontar el problema ni tampoco una forma sistémica de abordarlo.

Desde ese punto de vista, los principales resultados de esta tesis tienen que ver con la problemática anterior y cómo resolverla. En primer lugar se construye esa forma sistémica de abordar el problema, para lo que se define un modelo de ciudad basado en la literatura y con parámetros libres que le otorgan la flexibilidad suficiente para representar características relevantes y que cambian entre distintas ciudades. Para este modelo de ciudad se resuelve en forma exhaustiva las principales estructuras de líneas, y con ello es posible extraer conclusiones respecto a qué tipos de estructuras globales son mejores dependiendo de las características de la ciudad.

En segundo lugar, se da un paso para construir un diálogo con las heurísticas que atacan el mismo desafío. Para ello, se compara las estructuras que generan dos de ellas con las previamente estudiadas, para así descubrir falencias y posibles formas de mejorar la manera en la que se construyen las heurísticas.

Se presentará a continuación mayor detalle respecto a la síntesis recién hecha.

6.1 Sobre el modelo de ciudad a utilizar

En primer lugar, si bien se aclara que es muy difícil encontrar un único modelo simplificado que permita representar cualquier ciudad, se dan varios pasos en esa dirección. La revisión bibliográfica permite fijar determinados indicadores topológicos y características económicas -respecto a la localización de empleos y por tanto a los niveles de atracción de las diversas zonas de una ciudad- que son deseables de reproducir en un modelo que busque aproximar a una ciudad.

Se muestra que aplicar estudios urbanistas a una red muy usada por los transportistas, como es la grilla, entrega resultados inaceptables, por lo que se descarta esta red. El modelo alternativo concéntrico, en su clásica versión

monocéntrica, demuestra estar obsoleto. Ello refuerza la necesidad de definir un nuevo modelo de ciudad, para lo que se hace necesaria identificar cuáles características serán las principales que será importante incorporar.

Con los indicadores topológicos, la principal característica descrita es que las redes viales urbanas están definidas por su estructura vial primaria -las grandes avenidas-. Se identifica también una discusión que se convierte en un nudo central: ¿qué modelo de ciudad representa de mejor manera a las ciudades modernas? ¿La ciudad monocéntrica, la ciudad policéntrica o la ciudad dispersa?. No es el objetivo de este trabajo hacer aportes para resolver esta discusión, pero se construye un modelo de ciudad, con su red y matriz O-D, que permite incorporar flexibilidad suficiente a través de los valores que tomen algunos de los parámetros para poder modelar los distintos casos.

La ciudad construida es una concéntrica, que contiene un CBD y n zonas compuestas por un subcentro y una periferia cada una. Las periferias sólo generan viajes, el CBD sólo atrae viajes y los subcentros atraen y generan. Diferentes parámetros permiten definir el nivel de atracción de estas componentes sobre distintas zonas, y así representar las 3 posibilidades antes descritas y los escenarios intermedios. La ciudad presenta simetría radial, tanto en su geografía como en su matriz de viajes.

Al calcular los indicadores topológicos para esta ciudad, se encuentra que sus valores son bastante cercanos a los que la literatura muestra para las ciudades reales, salvo algunas excepciones que se explican por las simplificaciones propias de la red.

La ciudad planteada es suficientemente compleja como para no poder encontrar la estructura óptima de líneas en forma exacta. Sin embargo, sus simplificaciones hacen posible diseñar estructuras clásicas en forma clara. Más aún, estas estructuras sí pueden ser resueltas en forma exacta. Su función de costos se expresa en forma analítica en función de las frecuencias, aunque para encontrar su mínimo se hace necesario resolver en forma numérica.

Con todo lo anterior, el modelo de ciudad planteado demuestra ser una aproximación razonable a las ciudades reales, que combina una riqueza suficiente para describir varios de los fenómenos más relevantes para la discusión sobre transporte público, con una simplicidad que permite estudiar diversas estructuras de línea en forma exacta.

Sin perjuicio de lo anterior, hay simplificaciones del modelo que significan también ciertas pérdidas de flexibilidad que le impiden ajustarse a otras características, quizá menos relevantes pero aún deseables. La más evidente es la simetría, tanto de la geografía misma como de los viajes.

Algunos de los fenómenos más relevantes que se quisiera poder incorporar son la posibilidad de un CBD que no esté en el centro de la ciudad, estudiar subcentros que cumplan roles distintos entre sí, incorporar relaciones entre distancia y nivel de atracción y permitir que la demanda por transporte público dependa del nivel de servicio del mismo. En la misma línea, complejizar la red desagregando las periferias en varios nodos forzaría un análisis respecto a cómo se relaciona el servicio en las avenidas principales con las calles menores, e incorporaría el tiempo de acceso como posible factor a ser considerado.

6.2 Sobre las estructuras óptimas

Cuatro fueron las estructuras analizadas: líneas directas, en las que existen líneas que conectan cada par O-D, por lo que nadie requiere trasbordar; líneas exclusivas, en las que cada línea sirve exactamente un par O-D, eliminándose toda parada intermedia; hub & spoke, donde la mayoría debe viajar hacia el CBD para allí, de ser necesario, tomar otro bus hacia su destino final (cabe comentarse que no es un hub & spoke puro, pues se modifica incorporando algunas líneas para mejorar la estructura); y troncales-alimentadores, donde líneas alimentadoras llevan a los pasajeros desde cada periferia hasta el subcentro de la misma zona, para conectar directamente los subcentros entre sí y con el CBD mediante líneas troncales.

El modelo de ciudad utilizado permite identificar varios parámetros con ciertas características de la ciudad, y desde ese punto de vista una de las principales conclusiones de este trabajo es el análisis sobre qué línea responde mejor a distintos fenómenos urbanos. De esta manera, se encuentra que si el trasbordo no es penalizado, las mejores estructuras suelen ser las de tipo hub & spoke y troncales-alimentadores. Si la ciudad es más cercana a un modelo monocéntrico clásico, con un CBD muy atractivo, es el modelo hub & spoke el que mejor responde; en cambio si es policéntrica, donde la mayor cantidad de viajes son al propio subcentro, la mejor respuesta le entregan los troncales-alimentadores. Si la ciudad tiene muchos pasajeros, es la estructura de líneas exclusivas la que se potencia. Si hay razones que hacen a los trasbordos especialmente desagradables, las estructuras de líneas directas o exclusivas se ven beneficiadas pues justamente no requieren que ningún pasajero trasborde. Por último, cuando la dispersión es muy baja, por lo que los viajes se realizan casi en su totalidad al CBD o al subcentro propio, las estructuras directas logran coleccionar más pasajeros en sus líneas y responden mejor. Un desafío futuro sería poder combinar estas estructuras para responder a combinaciones distintas de estos fenómenos.

El análisis también permite resaltar que hay algunos parámetros que juegan roles principales. Mayor afluencia, por ejemplo, determina mayores niveles

de frecuencia, disminuye la relevancia de los tiempos de espera y con ello se ven favorecidas las estructuras directas y exclusivas. Asimismo, los factores α (porción de los viajes de la periferia que son atraídos por el CBD) y β (porción de los viajes de la periferia que son atraídos por el subcentro propio) favorecen estructuras de tipo hub & spoke y troncales-alimentadores, respectivamente. Es relevante señalar que en general α juega un rol más relevante que β para determinar la estructura óptima, pero que lo anterior puede verse matizado dependiendo de la afluencia y principalmente del costo de trasbordar. En todos los casos, la estructura de línea depende con mayor fuerza de la matriz O-D que de la geografía de la ciudad.

Sobre el costo p_T asignado al disgusto por un trasbordo se extrae otra de las principales conclusiones. Distintos valores para este parámetro significan resultados totalmente diferentes en la determinación de la línea óptima. El valor de p_T puede razonablemente variar de ciudad en ciudad, por factores culturales, climáticos, de la tecnología de los buses, entre otros. Sin embargo, en el estado actual del arte no existe conocimiento suficiente para poder asignarle un valor. En este trabajo se estudian dos posibilidades extremas, pero precisamente las enormes diferencias en los resultados entre ambos casos refuerzan lo necesario que es desarrollar tal conocimiento.

El modelo mismo demuestra también ser consistente. Así, se pudo observar que la estructura óptima depende fuertemente tanto de los usuarios como de los operadores, coincidiendo en ocasiones con la que sería la elección de los primeros y en otras con la que escogerían estos últimos. En la misma línea, se preserva un crecimiento similar a uno lineal afín de la flota para responder al aumento en la cantidad de pasajeros, mientras que los tamaños de vehículo parten subiendo rápidamente pero luego tienden a estancarse. El modelo es además robusto, puesto que sólo es sensible con respecto a aquellas variables que se esperaría que efectivamente determinen qué estructura de línea es la óptima, en especial aquellas que fijan la matriz O-D.

Fue posible realizar un análisis más preciso sobre cada estructura en el Capítulo 4. Un buen resumen muestra que las estructuras directas tienen su mejor desempeño en ciudades concentradas que les permitan coleccionar viajes. Lo anterior también es válido para la estructura hub & spoke si la concentración es precisamente en su "hub", es decir, en el CBD. Para las estructuras exclusivas, el factor más relevante es el tiempo de espera, el que sólo puede ser obviado si la cantidad de pasajeros es muy alta. Por último, la estructura de troncales y alimentadores muestra la mejor respuesta para ciudades dispersas por su flexibilidad y alta capacidad de coleccionar viajes.

6.3 Sobre las heurísticas y su relación con este modelo de ciudad

Una de las motivaciones generales de este estudio tiene que ver con hacer dialogar los distintos enfoques que se han desarrollado para afrontar el problema de la estructura de línea óptima. En ese sentido, se aplicaron a este modelo de ciudad las heurísticas desarrolladas en la literatura y que fuesen más intuitivas, para buscar qué estructuras hubiesen propuesto. Esto permitió compararlas analíticamente con las aquí desarrolladas y así poder extraer conclusiones respecto a cómo operan las heurísticas y cómo poder mejorarlas desde el conocimiento aquí generado. Las heurísticas aplicadas fueron extraídas de dos artículos: Ceder y Wilson (1986) y Dubois et al (1979). Cabe señalar que al ser solamente dos heurísticas, y al no resolver numéricamente, lo que se obtiene es una primera aproximación a esta investigación.

En el primer caso, el análisis puede hacerse en forma analítica. Se obtiene una estructura igual a la de líneas directas, pero con limitaciones a la hora de definir algunas de las rutas. En concreto, la única salvedad es que el tamaño de los conjuntos H y \bar{H} (que contienen a aquellos subcentros que serán conectados atravesando el CBD) puede tener límites a priori, lo que no ocurre en la estructura de líneas directas definida en los capítulos anteriores. Que ello ocurra dependerá del valor de la función e que define la diferencia máxima a tolerar entre las rutas que serán parte de esta estructura y las rutas óptimas. Si la tolerancia es muy chica, los valores de H y \bar{H} se determinarán por criterios exclusivamente geométricos. Cabe señalar que el análisis realizado sobre la estructura de líneas directas mostró que aquello suele no ser óptimo.

En el caso de Dubois et al (1979), primero se definen las rutas candidatas y luego se pule ese conjunto para obtener la estructura definitiva. Para encontrar las candidatas se estudia el mismo caso ($n = 8$) que se estudió en el análisis numérico trabajado. Tras resolver, se obtiene nuevamente una estructura análoga a la de líneas directas estudiada en este trabajo, aunque en este caso con $H = \bar{H} = 1$ e incluyendo una línea poco intuitiva que solamente conecta zonas vecinas. $H = \bar{H} = 1$ no es óptimo en ningún caso.

De lo anterior, se puede concluir que estos algoritmos, al construirse sus estructuras mediante pasos locales, no son capaces de diseñar previamente una estrategia global que luego se adapte a cada zona. Por ello se observa un sesgo hacia estructuras de tipo directas, con ciertas excepciones que incorporan trasbordos para algunos pares específicos.

Otra conclusión interesante es observar que, pese a las críticas, los resultados de algoritmos que son genéricos en su funcionamiento son razonablemente similares a aquéllos que tienen la ventaja de haber sido contruidos ad hoc para esta ciudad. Sin embargo, estas estructuras estarán siempre dominadas por la estructura de líneas directas, por lo que se

concluye que los algoritmos construyen resultados peores que los que se obtienen al definir estrategias acordes a la forma urbana, la red y el patrón de demanda. Más aún, la estructura de líneas directas en pocos contextos resultaba ser óptima, con lo que la conclusión recién enunciada se refuerza.

Se observa también que la matriz O-D juega un rol secundario. Esta conclusión es de gran importancia, pues significa que la estructura construida depende casi exclusivamente de la forma urbana. Esto constituye una gran limitante, pues significa una rigidez tremenda que implica responder de forma igual a requerimientos muy diferentes. Además de ello, no se incluye el cálculo de las frecuencias en la determinación de la estructura óptima, con lo que variables tan relevantes como el tiempo de espera y la flota son omitidas.

6.4 Pequeños apuntes sobre la congestión

Dentro de los fenómenos omitidos en este trabajo, vale la pena extender el análisis sobre la congestión, pues es un fenómeno muy importante en el transporte urbano real, desde la definición y gestión del transporte público hasta las decisiones de los pasajeros. Se hace necesario observar de qué maneras afecta a este estudio y cuáles son las dificultades que implicaría considerarla.

Existen diversas maneras de modelar la congestión. Sin embargo, en cualquiera de ellas la flota total pasa a jugar un rol más relevante, pues a mayor cantidad de buses mayor congestión. Esto significa que para este trabajo, las conclusiones obtenidas para flotas grandes (es decir, para afluencias grandes) carecen de un elemento que influye bastante y hay que leerlas con esa precaución.

Sin embargo, resolver de una manera que integre los diversos factores obligaría a considerar también el resto de los vehículos que utilizan las mismas calles, y en especial cómo el nivel de servicio de transporte público afecta la partición modal, como muestran Basso y Jara-Díaz (2012) y Basso y Silva (2013). Lo anterior significa que la demanda de pasajeros deja de ser considerada exógena, sino que es una función -por definir- del sistema de transporte público, lo cual implica dificultades tanto analíticas como matemáticas. Las dificultades para analizar tienen que ver con que ya no sería posible simplemente fijar ciertos parámetros, como la afluencia, y luego comparar las distintas estructuras, mientras que las matemáticas aparecen porque las ecuaciones se complejizan: los tiempos de viaje ya no son fijos, sino que dependen de la flota, la que a su vez depende del nivel de servicio de transporte público lo que en parte depende de los tiempos de viaje. Es decir, se incluyen relaciones recursivas, y por lo tanto ecuaciones de tipo equilibrio que deben ser resueltas en simultáneo con la optimización.

Todo lo anterior implica otras complejidades y decisiones respecto a cómo se incorporaría la congestión. Desde el modelo preciso a utilizar, si se considera o no factores de infraestructura que la disminuyan (como podrían ser las vías segregadas para buses y automóviles), entre otras. Sin embargo, en lo descrito previamente reside el núcleo que explica por qué incorporar la congestión, si bien significaría un avance relevante en términos de lo complejo y predictivo del modelo, es también agregar grados de complejidad que no solamente hacen el problema más difícil de resolver, sino que también de analizar y por lo tanto de extraer conclusiones.

6.5 Investigaciones futuras

Respecto a las formas urbanas, sería deseable poder realizar una investigación análoga a la aquí hecha en ciudades que resuelvan las falencias descritas en la Sección 6.1, por ejemplo desagregando las periferias en varios nodos o permitiendo que los subcentros jueguen roles distintos entre sí. Incluso mejor sería el poder definir una forma urbana, con su red y patrón de demanda que extendiera este trabajo y además incorporara tales carencias, pero no es claro si aquello es posible.

Respecto a las estructuras de línea estudiadas, son dos los principales desafíos. Por un lado, se hace tremendamente necesario trabajar una forma rigurosa para definir el valor del costo por trasbordar, pues el valor que se le otorga determina en gran manera la estructura de líneas óptima, y hoy no existe un método para definirlo ni existe suficiente claridad respecto a de qué variables depende su valor. El otro desafío tiene que ver con cómo combinar las distintas estructuras aquí estudiadas para desarrollar nuevas estructuras que puedan responder de la mejor forma cuando los fenómenos descritos se entremezclen, o cuando distintas zonas muestren distintas características.

Por último están las investigaciones futuras propuestas respecto a las heurísticas, las que son particularmente interesantes. Lo primero sería profundizar el trabajo aquí realizado, incorporando un mayor número de heurísticas y realizando también la comparación numérica.

Lo anterior no impide obtener conclusiones relevantes con el trabajo ya hecho. En ese sentido, asoma como una necesidad el poder desarrollar algoritmos que primero definan globalmente una estrategia -sobre la base de la estructura de la ciudad a la que se servirá- y luego la vayan implementando localmente. Las conclusiones de este trabajo respecto a cuáles estructuras responden mejor a diversos fenómenos son ejemplos de cómo se puede tomar una decisión global. Esto podría significar construir distintos algoritmos para cada una de las estrategias posibles (incluyendo las cuatro aquí trabajadas), o un solo algoritmo capaz de combinar todas ellas. Con ello, se lograría que las heurísticas estén basadas en los fenómenos de los que tendrán que hacerse cargo, incorporando así de mejor manera la

matriz O-D y permitiendo generar estructuras que no se basen necesariamente en las líneas directas.

En síntesis, en este trabajo se ha definido un modelo de ciudad intuitivo pero que permite incorporar nuevas complejidades y también discusiones contemporáneas asociadas a determinados parámetros. Con tal ciudad, se estudian las principales estructuras de líneas y se resuelven con exactitud, concluyendo así qué estructura es mejor para distintas características de cada ciudad. Con ello, se hace la comparación con las estructuras que emergen al aplicar dos heurísticas clásicas a la misma ciudad, y es posible detectar varias falencias en el enfoque algorítmico que pueden ser subsanadas con lo aquí estudiado y con otros trabajos, además de determinadas investigaciones futuras aquí propuestas.

Con lo anterior se construye un primer puente entre las investigaciones exhaustivas que inspiran la metodología para resolver las cuatro estructuras aquí estudiadas, con el enfoque algorítmico. Se logra aproximar una ciudad real y encontrar estructuras óptimas de acuerdo a determinados parámetros que son identificables con fenómenos relevantes y en boga en la discusión sobre ciudades modernas. Con todo esto, este trabajo logra proponer formas de seguir avanzando en el futuro para poder construir algoritmos que sigan siendo capaces de operar en cualquier red -la gran ventaja que tienen, y que por supuesto es deseable preservar-, pero que sean flexibles para poder incorporar las características de tal red y de su patrón de demanda en su resolución en una forma mucho más precisa.

Las investigaciones futuras aquí propuestas no terminan de resolver el problema de encontrar estructuras de líneas óptimas para el transporte público, pero sí constituyen un avance. El poder superar importantes deficiencias, que solamente pueden ser detectadas en la comparación con el enfoque que prioriza el análisis exhaustivo y sistémico, permite generar líneas para desarrollar futuras formas de enfrentar el problema, y diseñar algoritmos con mejores herramientas para que éstos sean sustantivamente superiores.

Bibliografía

- [1] Alonso, W. (1964). Location and land use. Toward a general theory of land rent. *Cambridge: Harvard University Press*.
- [2] Anas, A., Arnott, R. & Small, K. (1998). Urban Spatial Structure, *Journal of Economic Literature* 36, 1426-1464.
- [3] Basso, L. J., & Jara-Díaz, S. R. (2012). Integrating congestion pricing, transit subsidies and mode choice. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 46(6), 890-900.
- [4] Silva, H. E., & Basso, L. (2013). Efficiency and Substitutability of Transit Subsidies and Other Urban Transport Policies. *American Economic Journal: Economic Policy*.
- [5] Bertaud A, (2004). The Spatial Organization of Cities: Deliberate Outcome or Unforeseen Consequence?, *IURD Working Paper Series WP-2004-01, Institute of Urban & Regional Development, Berkeley, CA*
- [6] Borndörfer, R., Grötschel, M., & Pfetsch, M. E. (2005). *A path-based model for line planning in public transport*. Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin.
- [7] Bourne, L. S. (1989). Are new urban forms emerging? Empirical tests for Canadian urban areas. *The Canadian Geographer/Le géographe Canadien*, 33(4), 312-328.
- [8] Buhl, J., Gautrais J., Reeves, N., Solé, R.V., Valverde, S., Kuntz, P. & Theraulaz, G. (2006). Topological patterns in street networks of self-organized urban settlements, *The European Physical Journal B* 49(4), 513-522.
- [9] Byrne, B. F. (1975). Public transportation line positions and headways for minimum user and system cost in a radial case. *Transportation Research*, 9(2), 97-102.
- [10] Ceder, A., & Wilson, N. H. (1986). Bus network design. *Transportation Research Part B: Methodological*, 20(4), 331-344.
- [11] Chan S., Donner R. V. & Lämmer S. (2011). Urban road networks - spatial networks with universal geometric features?, *European Physical Journal B* 84(4), 563-577.

- [12] Chang, S. K., & Schonfeld, P. M. (1991). Multiple period optimization of bus transit systems. *Transportation Research Part B: Methodological*, 25(6), 453-478.
- [13] Clark, W. A. (2000). Monocentric to polycentric. new urban forms and old paradigms. En: Bridge, C., & Watson, S. (Eds). *A Companion to the City*, John Wiley & Sons, pp. 141-154.
- [14] Clark, C. (2005). Urban population densities. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, 114(4), 490-496.
- [15] Courtat, T., Gloaguen, C., & Douady, S. (2011). Mathematics and morphogenesis of cities: A geometrical approach. *Physical Review E*, 83(3), 036106.
- [16] Daganzo, C. F. (2010). Structure of competitive transit networks. *Transportation Research Part B: Methodological*, 44(4), 434-446.
- [17] Delle Site, P., & Filippi, F. (1998). Service optimization for bus corridors with short-turn strategies and variable vehicle size. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 32(1), 19-38.
- [18] Dieleman, F., & Wegener, M. (2004). Compact city and urban sprawl. *Built Environment*, 30(4), 308-323.
- [19] Diestel, R. (2000). *Graph Theory, Graduate Texts in Mathematics; 173*. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Company KG, 410 p.
- [20] Dubois, D., Bel, G., & Llibre, M. (1979). A set of methods in transportation network synthesis and analysis. *Journal of the Operational Research Society*, 30(9), 797-808.
- [21] Figueiredo, L. & Amorim, L. (2007). Decoding the urban grid: or why cities are neither trees nor perfect grids. In *Sixth Int. Space Syntax Symposium*, 12-15 Jun 2007, Istanbul, Turkey.
- [22] Garrocho, C., & Campos, J. (2007). Dinámica de la estructura policéntrica del empleo terciario en el área metropolitana de Toluca, 1994-2004. *Papeles de Población*, 13(52), 109-135.
- [23] Guihaire, V., & Hao, J. K. (2008). Transit network design and scheduling: A global review. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 42(10), 1251-1273.
- [24] Goossens, J. W., van Hoesel, S., & Kroon, L. (2001). A branch-and-cut approach for solving line planning problems. *Maastricht Accounting and Auditing Research and Education Center (MARC)*.

- [25] Gordon, P., & Richardson, H. W. (1996). Beyond polycentricity: the dispersed metropolis, Los Angeles, 1970-1990. *Journal of the American Planning Association*, 62(3), 289-295.
- [26] Gschwender, A., Jara-Díaz S.R., & Bravo, C. (2013). Feeder-trunk or direct lines? The determinants of the optimal structure of transit services. *Sometido a Transportation Science*.
- [27] Hamilton, B. W., & Röell, A. (1982). Wasteful commuting. *The Journal of Political Economy*, 90(5), 1035-1053.
- [28] Hillier, B. (1999). The hidden geometry of deformed grids: or, why space syntax works, when it looks as though it shouldn't. *Environment and Planning B: Planning and Design*, 26, 169-191.
- [29] Hu, Y., Wu, Q., Zhu, D. Topological Patterns of Spatial Urban Street Networks, *Wireless Communications, Networking and Mobile Computing, WiCOM 4th International Conference, 2008*.
- [30] Huang, J., Lu, X. X., & Sellers, J. M. (2007). A global comparative analysis of urban form: Applying spatial metrics and remote sensing. *Landscape and Urban Planning*, 82(4), 184-197.
- [31] Hurdle, V. F. (1973). Minimum cost locations for parallel public transit lines. *Transportation Science*, 7(4), 340-350.
- [32] Jansson, J. O. (1980). A simple bus line model for optimisation of service frequency and bus size. *Journal of Transport Economics and Policy*, 53-80.
- [33] Jara-Díaz, S. R., & Gschwender, A. (2003). From the single line model to the spatial structure of transit services: corridors or direct?. *Journal of Transport Economics and Policy (JTEP)*, 37(2), 261-277.
- [34] Jara-Díaz, S., & Gschwender, A. (2003). Towards a general microeconomic model for the operation of public transport. *Transport Reviews*, 23(4), 453-469.
- [35] Jara-Díaz, S. R., & Gschwender, A. (2009). The effect of financial constraints on the optimal design of public transport services. *Transportation*, 36(1), 65-75.
- [36] Jara-Díaz, S. R., Gschwender, A., & Ortega, M. (2012). Is public transport based on transfers optimal? A theoretical investigation. *Transportation Research Part B: Methodological*, 46(7), 808-816.

- [37] Jara-Díaz, S., Tirachini, A., & Cortés, C. E. (2008). Modeling public transport corridors with aggregate and disaggregate demand. *Journal of Transport Geography*, 16(6), 430-435.
- [38] Jiang, B. (2007). A Topological Pattern of urban street networks: Universality and peculiarity, *Physica A* 384(2), 647-655.
- [39] Kasanko, M., Barredo, J. I., Lavallo, C., McCormick, N., Demicheli, L., Sagris, V., & Brezger, A. (2006). Are European cities becoming dispersed?: A comparative analysis of 15 European urban areas. *Landscape and urban planning*, 77(1), 111-130.
- [40] Kepaptsoglou, K., & Karlaftis, M. (2009). Transit route network design problem: Review. *Journal of transportation engineering*, 135(8), 491-505.
- [41] Kocur, G., & Hendrickson, C. (1982). Design of local bus service with demand equilibration. *Transportation Science*, 16(2), 149-170.
- [42] Lin, J., & Ban, Y. (2013). Complex Network Topology of Transportation Systems. *Transport Reviews*, 33(6), 658-685.
- [43] Lynch, K. (1960). *The image of the city* (Vol. 11). MIT press, 187 p.
- [44] Major, M. (1997). Are American cities different? if so, how do they differ, *Proceedings of the 1st International Space Syntax Symposium*, University College London, London, vol. III, pp. 09.1-09.14.
- [45] Makse, H. A., Andrade, J. S., Batty, M., Havlin, S., & Stanley, H. E. (1998). Modeling urban growth patterns with correlated percolation. *Physical Review E*, 58(6), 7054.
- [46] Maoh H.F., Kanaroglou P.S. (2004). Economic clustering and urban form: The case of Hamilton, Ontario. *Centre for Spatial Analysis Working Paper Series, CSpA WP 003, Centre for Spatial Analysis, McMaster Univ., Hamilton, ON, Canada.*
- [47] Masucci, A. P., Smith, D., Crooks, A., & Batty, M. (2009). Random planar graphs and the London street network. *The European Physical Journal B*, 71(2), 259-271.
- [48] Mathworks.com (2014). *Constrained Nonlinear Optimization Algorithms - MATLAB & Simulink*. [en línea] Disponible en: <http://www.mathworks.com/help/optim/ug/constrained-nonlinear-optimization-algorithms.html> [fecha de consulta: 30 Julio 2014].

- [49] Mathworks.com, (2014). *Find minimum of constrained nonlinear multivariable function - MATLAB fmincon*. [en línea] Disponible en: <http://www.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html> [fecha de consulta: 30 Julio 2014].
- [50] McMillen, D.P. (2001). Nonparametric employment subcenter identification. *Journal of Urban Economics*, 50(3), 448-473.
- [51] McMillen, D. P., & Smith, S. C. (2003). The number of subcenters in large urban areas. *Journal of Urban Economics*, 53(3), 321-338.
- [52] Mills, E. S. (1967). An aggregative model of resource allocation in a metropolitan area. *The American Economic Review*, 57(2), 197-210.
- [53] Mohring, H. (1972). Optimization and scale economies in urban bus transportation. *The American Economic Review*, 62(4), 591-604.
- [54] Mohring, H. (1976). *Transportation Economics*, Cambridge Mass.: Ballinger.
- [55] Muth, R. F. (1900). *Cities and housing*. University of Chicago Press Economics Books.
- [56] Newell, G. F. (1979). Some issues relating to the optimal design of bus routes. *Transportation Science*, 13(1), 20-35.
- [57] Oldfield, R. H., & Bly, P. H. (1988). An analytic investigation of optimal bus size. *Transportation Research Part B: Methodological*, 22(5), 319-337.
- [58] Pattnaik, S. B., Mohan, S., & Tom, V. M. (1998). Urban bus transit route network design using genetic algorithm. *Journal of Transportation Engineering*, 124(4), 368-375.
- [59] Porta, S., Cucitti, P. & Latora, V. (2006). The network analysis of urban streets: A primal approach. *Environment and Planning B*, 33(5), 705-725.
- [60] Porta, S., Crucitti, P., & Latora, V. (2006). The network analysis of urban streets: A dual approach. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 369(2), 853-866.
- [61] Quak, C.B. (2003). A passenger-oriented approach of the construction of a global line network and an efficient timetable. *Delft University, Holanda*.

- [62] Schöbel, A., & Scholl, S. (2005). Line planning with minimal transfers. In *5th Workshop on Algorithmic methods and Models for Optimization of Railways* (No. 06901).
- [63] Schwarz, N. (2010). Urban form revisited—Selecting indicators for characterising European cities. *Landscape and Urban Planning*, 96(1), 29-47.
- [64] Suárez, M., & Delgado, J. (2009). Is Mexico City polycentric? A trip attraction capacity approach. *Urban Studies*, 46(10), 2187-2211.
- [65] Sun, X. (2012). An urban morphological study on swedish cities from a topological perspective, *Doctoral dissertation, University of Gävle*.
- [66] Tirachini, A., Cortés, C. E., & Jara-Díaz, S. R. (2011). Optimal design and benefits of a short turning strategy for a bus corridor. *Transportation*, 38(1), 169-189.
- [67] Tirachini, A., Hensher, D. A., & Jara-Díaz, S. R. (2010). Comparing operator and users costs of light rail, heavy rail and bus rapid transit over a radial public transport network. *Research in Transportation Economics*, 29(1), 231-242.
- [68] Tsao, S. M., & Schonfeld, P. (1983). Optimization of zonal transit service. *Journal of Transportation Engineering*, 109(2), 257-272.
- [69] Van Nes R., Hamerslag R. & Immers B. H. (1988) Design of public transport networks. *Transportation Research Record 1202*, 74-83.
- [70] Waddell, P., & Shukla, V. (1993). Employment dynamics, spatial restructuring, and the business cycle. *Geographical analysis*, 25(1), 35-52.
- [71] Wright, S. J., & Nocedal, J. (1999). *Numerical optimization* (Vol. 2). New York: Springer.

Anexo A: Los gráficos

Se muestran los gráficos que no fueron parte del cuerpo de este trabajo.

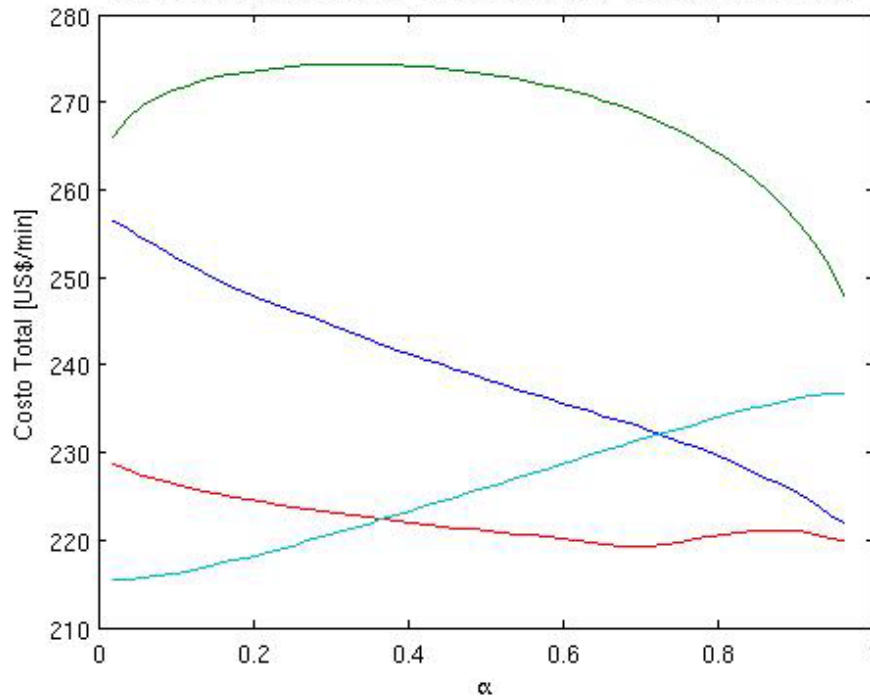


Figura A.1: Costo de cada estructura al variar el valor de α para $Y = 8000$.

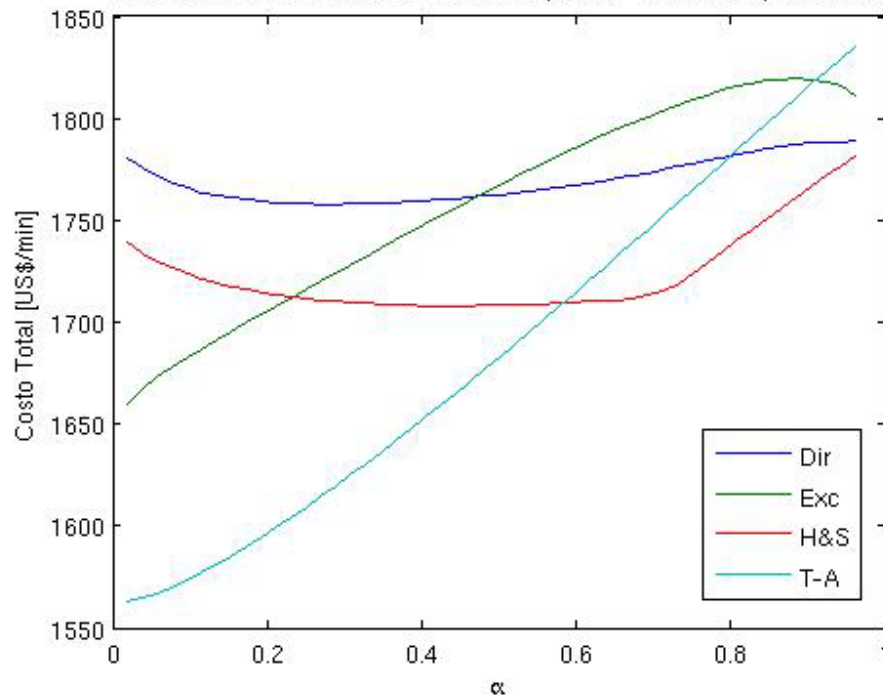


Figura A.2: Costo de cada estructura al variar el valor de α para $Y = 72000$.

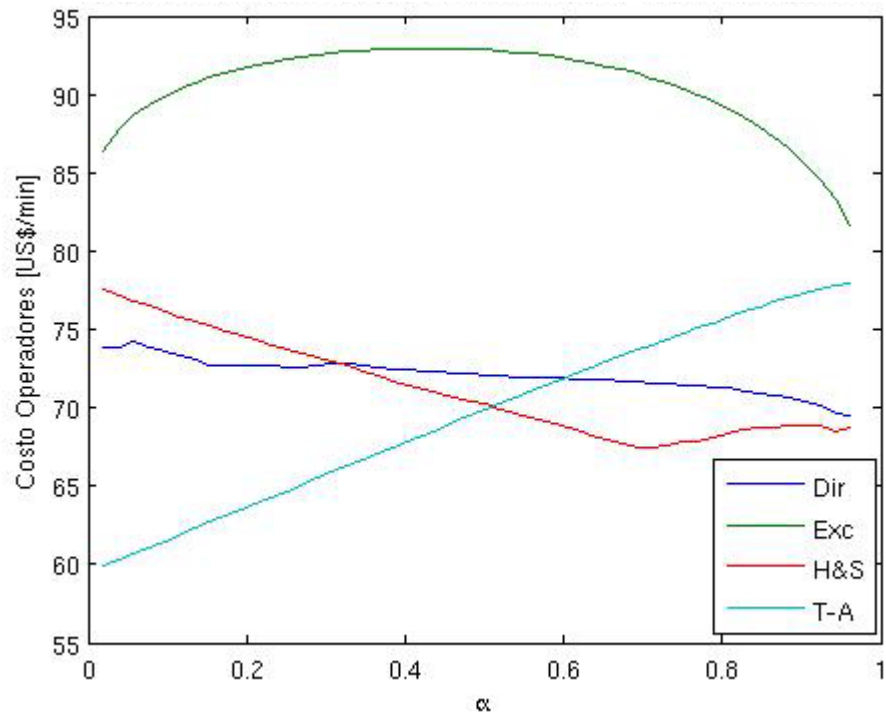


Figura A.3: Costo de operadores en cada estructura al variar el valor de α para $Y = 8000$.

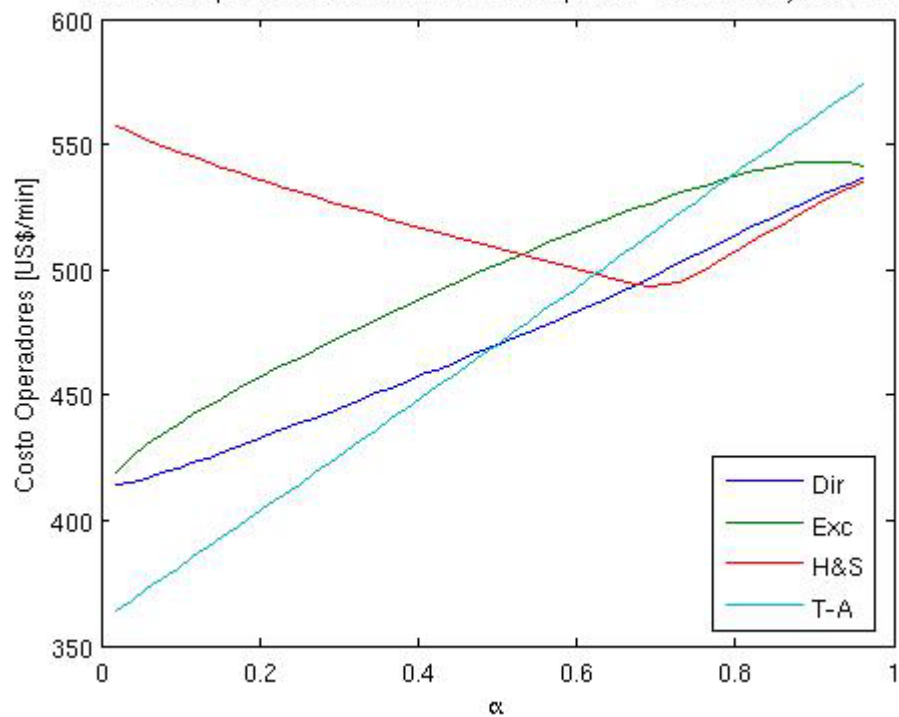


Figura A.4: Costo de operadores en cada estructura al variar el valor de α para $Y = 72000$.

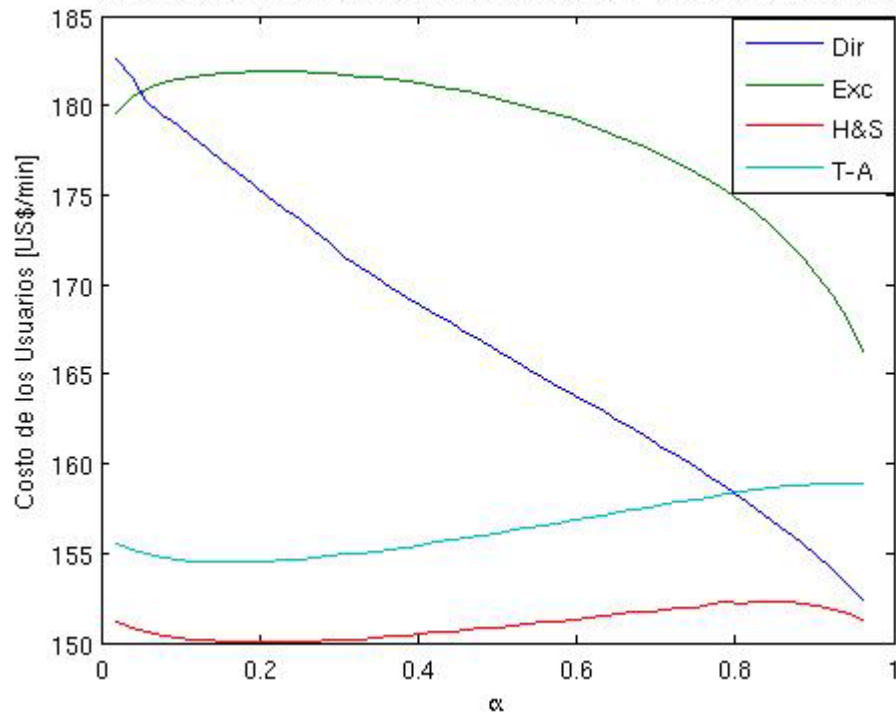


Figura A.5: Costo de usuarios en cada estructura al variar el valor de α para $Y = 8000$.

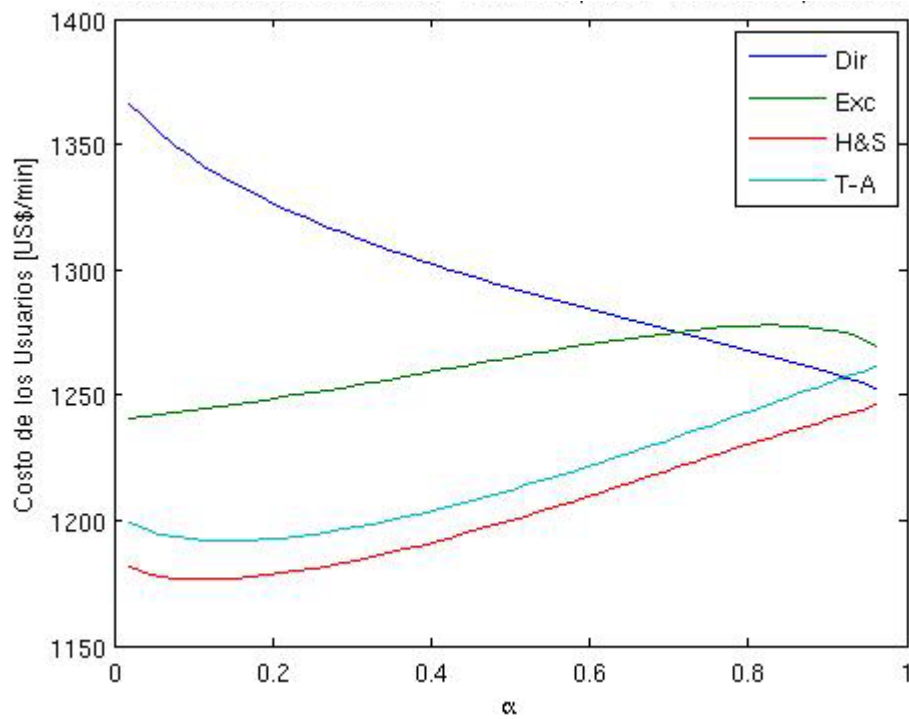


Figura A.6: Costo de usuarios en cada estructura al variar el valor de α para $Y = 72000$.

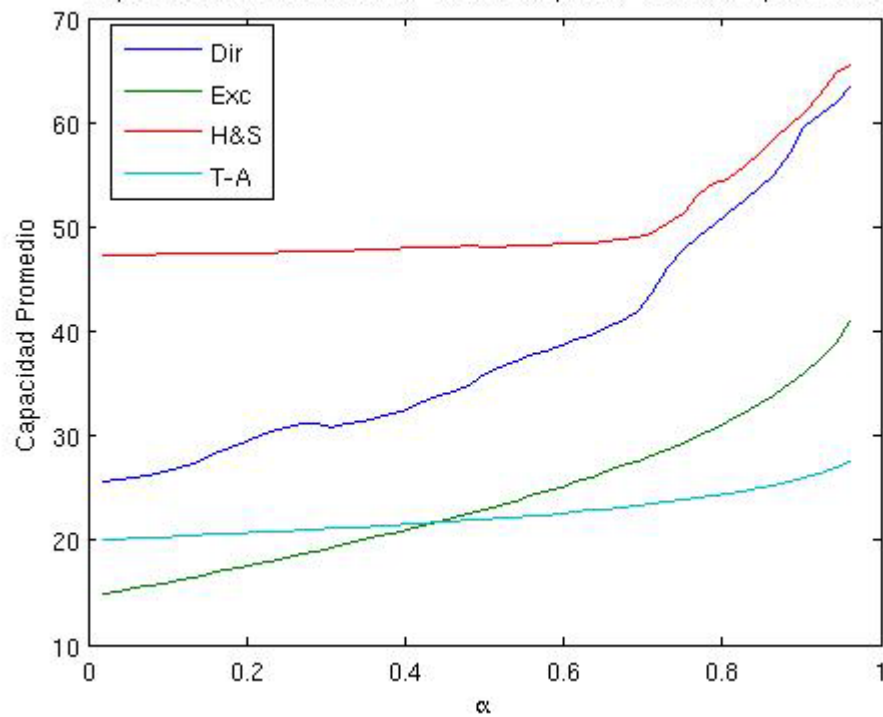


Figura A.7: Capacidad promedio de los buses de cada estructura al variar el valor de α para $Y = 8000$.

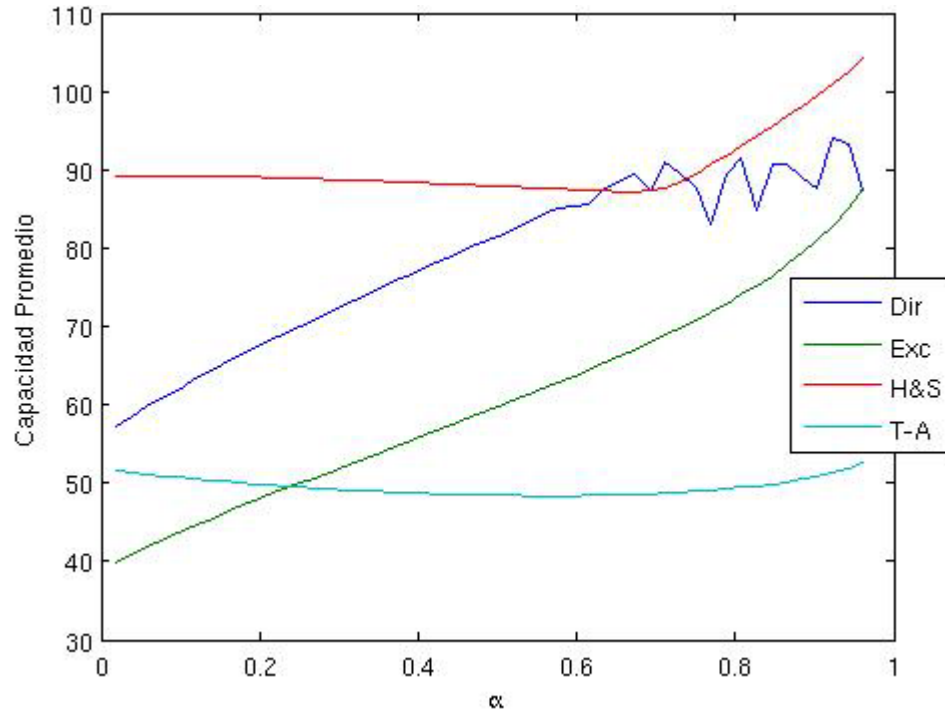


Figura A.8: Capacidad promedio de los buses de cada estructura al variar el valor de α para $Y = 72000$.

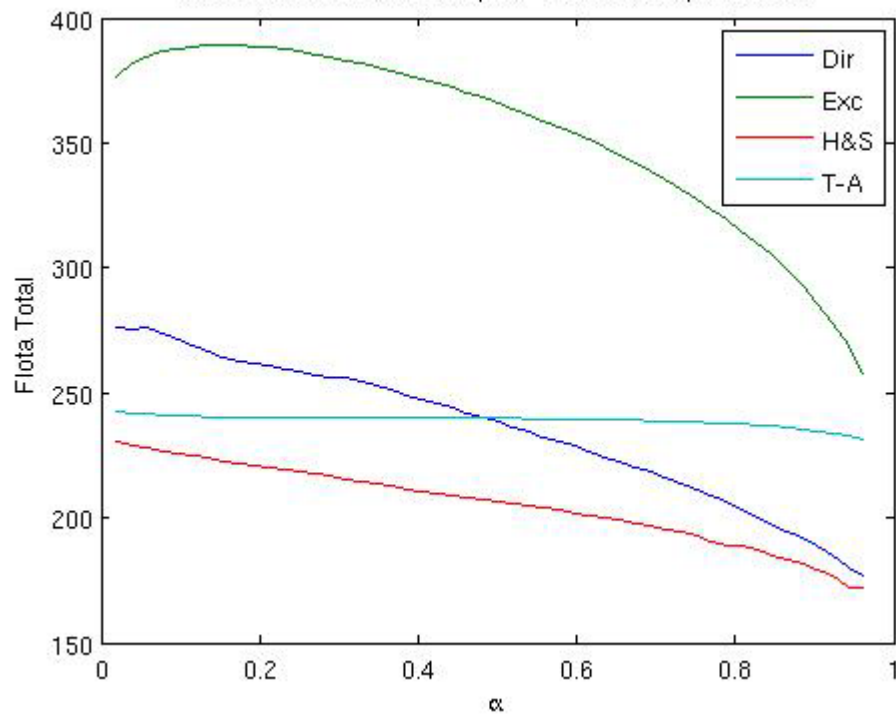


Figura A.9: Flota de cada estructura al variar el valor de α para $Y = 8000$.

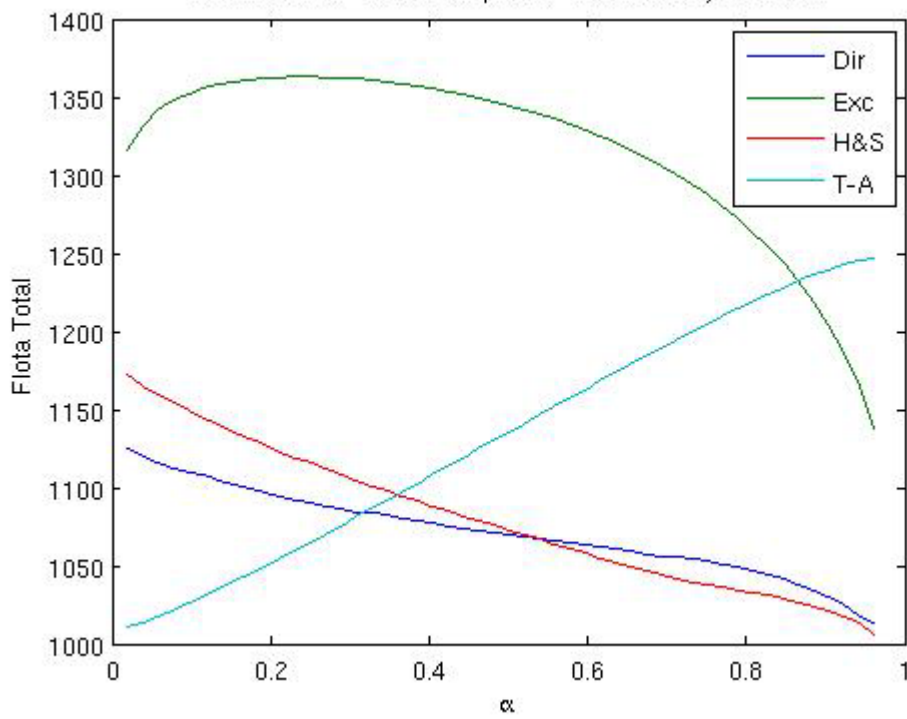


Figura A.10: Flota de cada estructura al variar el valor de α para $Y = 72000$.

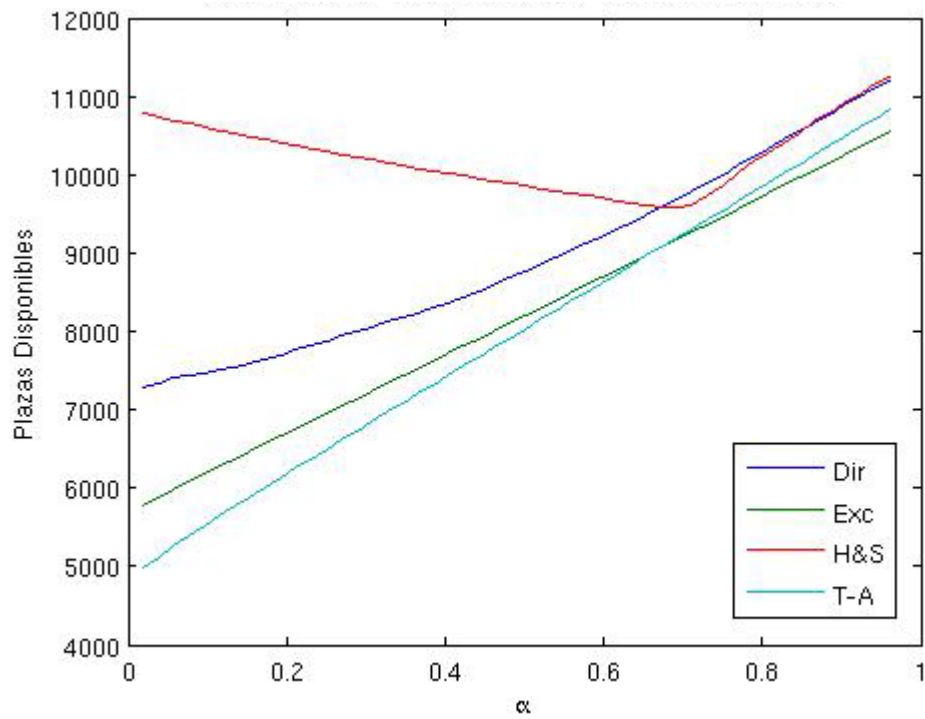


Figura A.11: Plazas de cada estructura al variar el valor de α para $Y = 8000$.

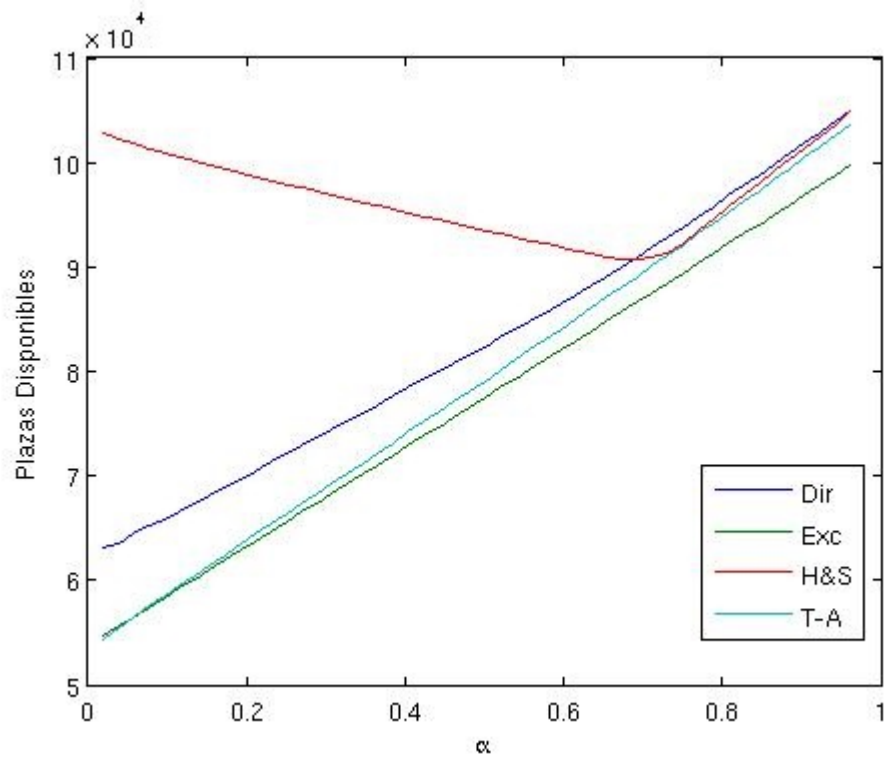


Figura A.12: Plazas de cada estructura al variar el valor de α para $Y = 72000$.

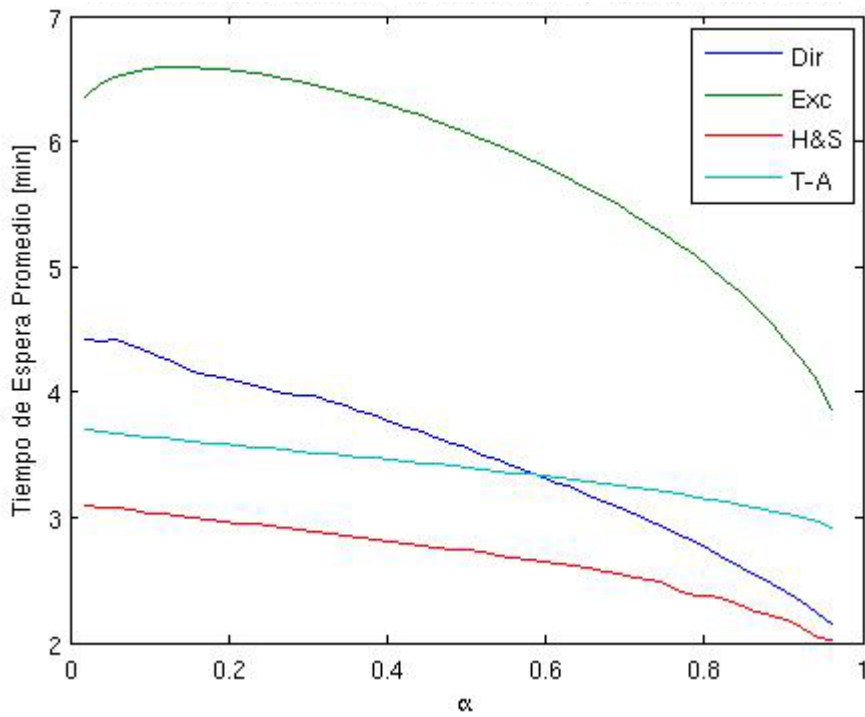


Figura A.13: Tiempo de espera promedio de cada estructura al variar el valor de α para $Y = 8000$.

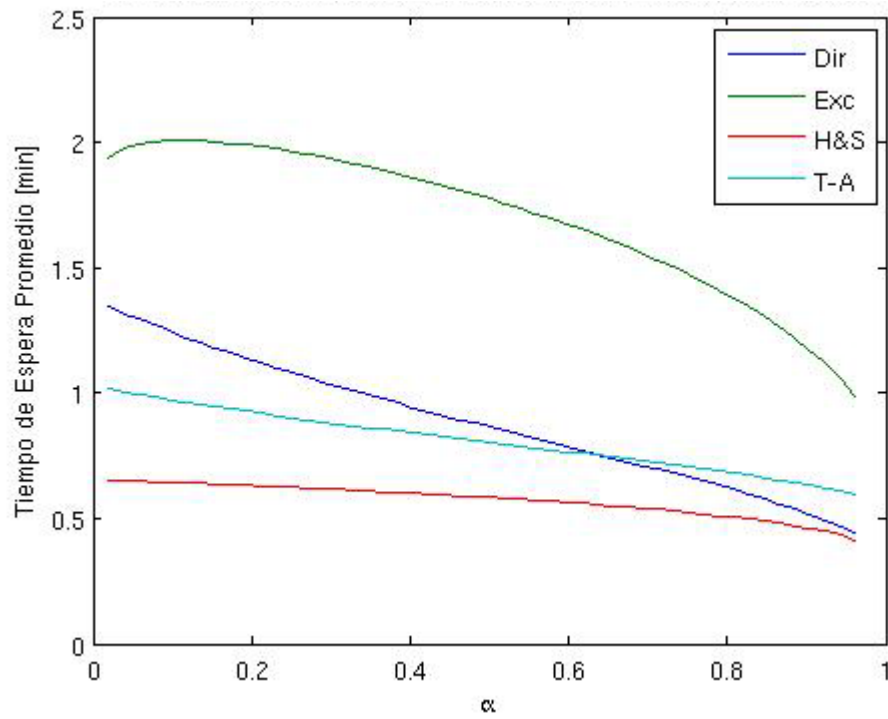


Figura A.14: Tiempo de espera promedio de cada estructura al variar el valor de α para $Y = 72000$.

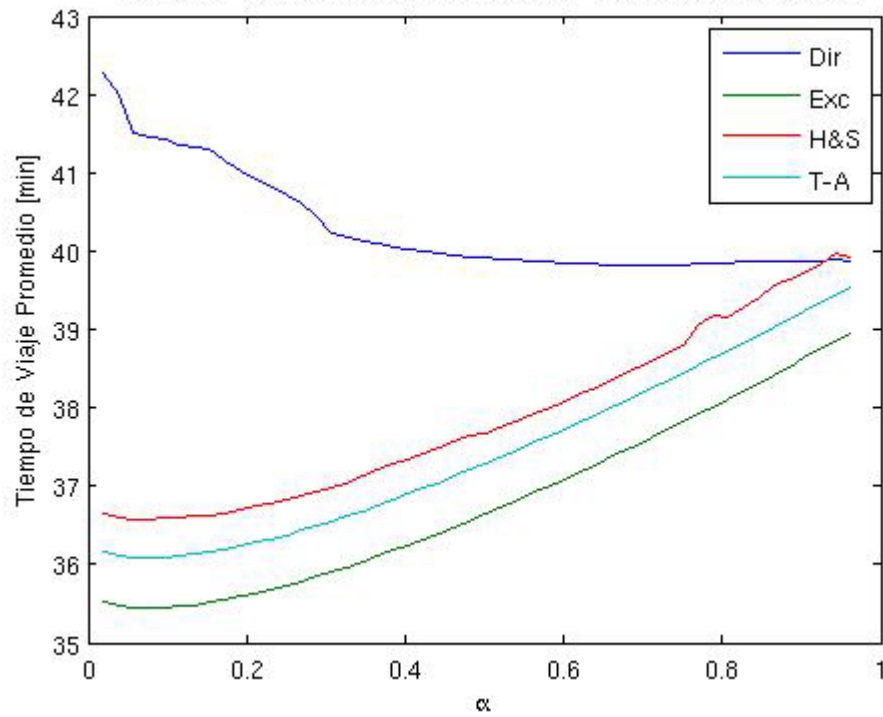


Figura A.15: Tiempo de viaje promedio de cada estructura al variar el valor de α para $Y = 8000$.

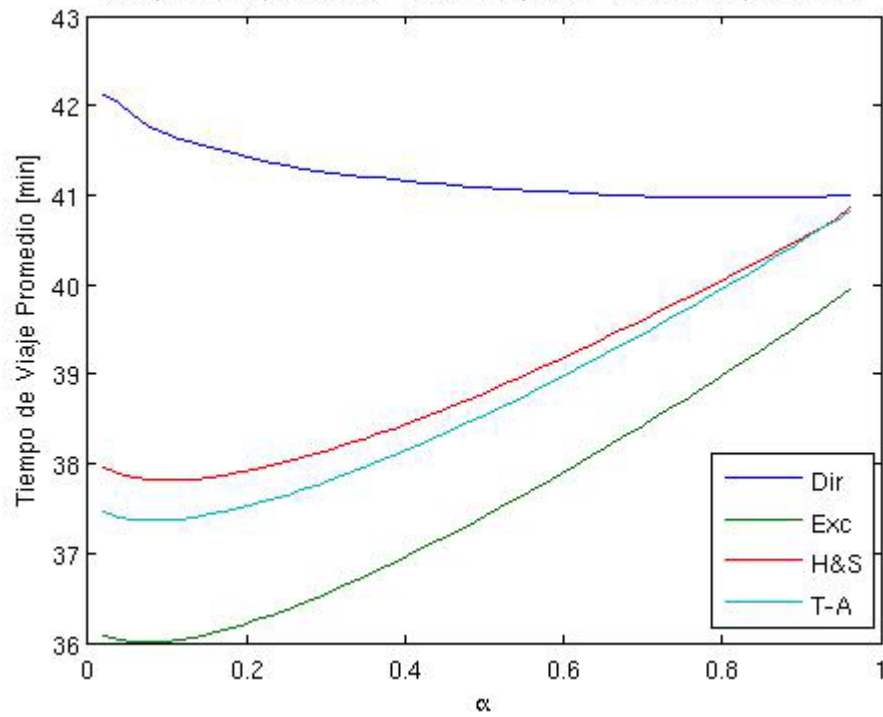


Figura A.16: Tiempo de viaje promedio de cada estructura al variar el valor de α para $Y = 72000$.

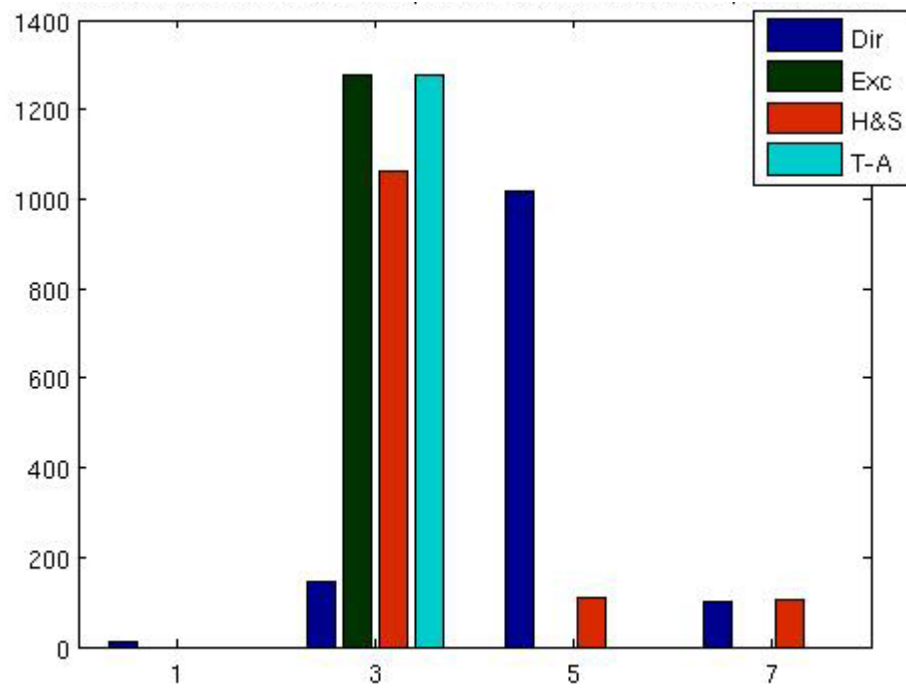
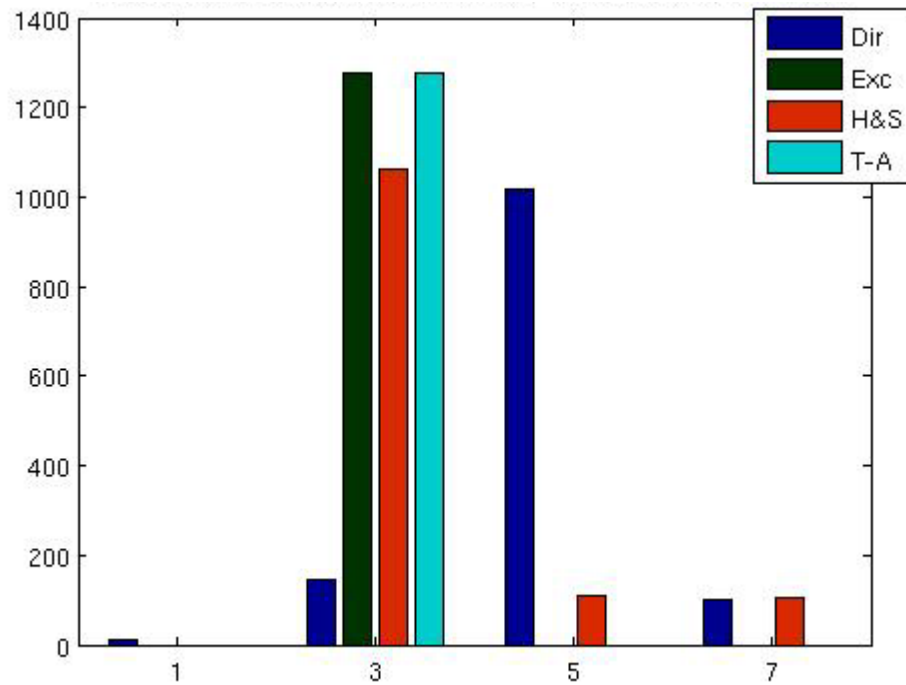


Figura A.17: Frecuencia de los distintos valores tomados por H y \bar{H} , respectivamente, para las distintas estructuras, con $Y = 8000$.

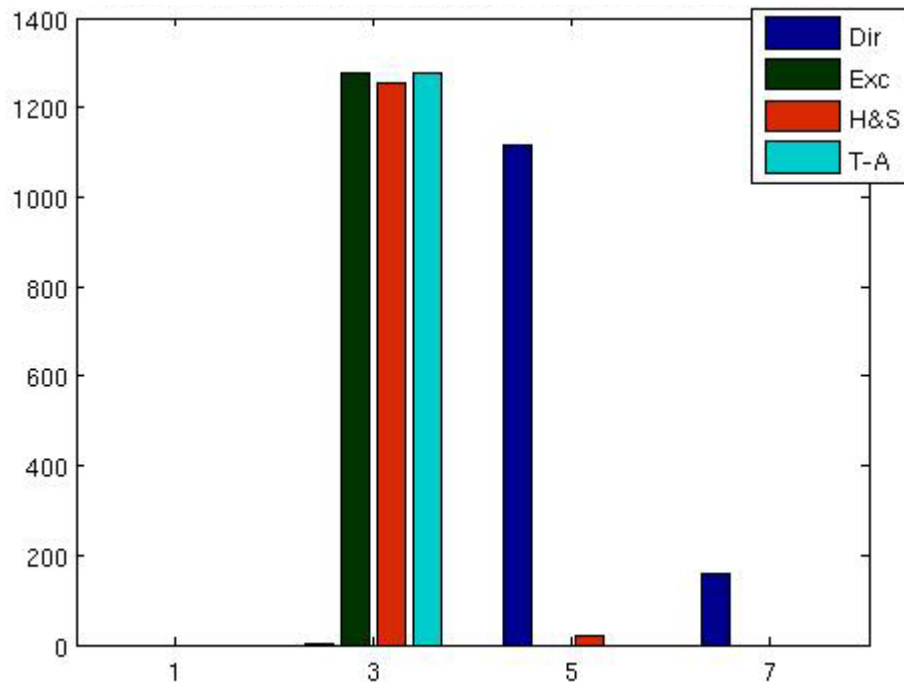
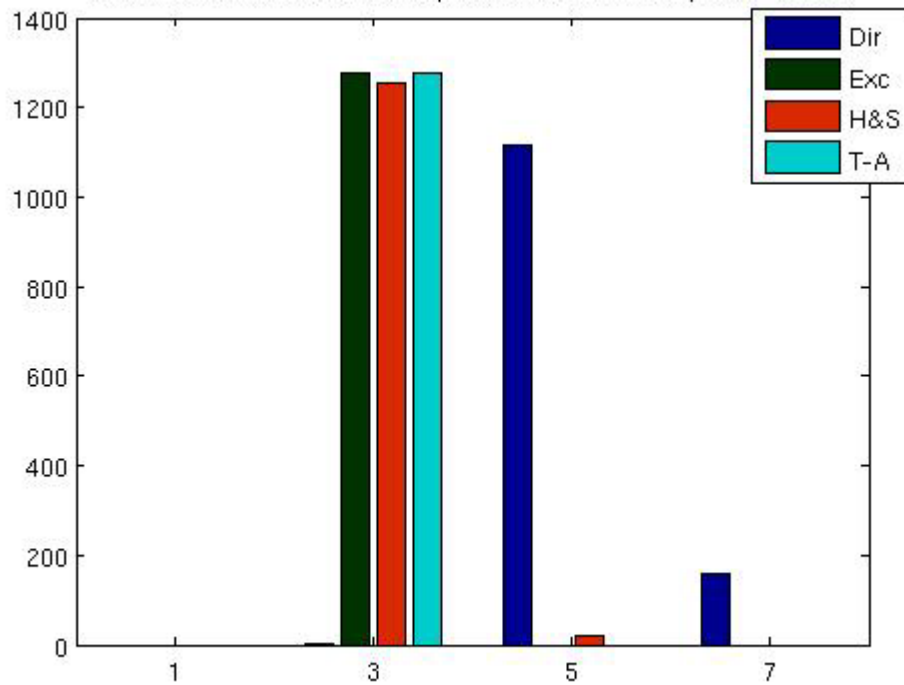


Figura A.18: Frecuencia de los distintos valores tomados por H y \bar{H} , respectivamente, para las distintas estructuras, con $Y = 72000$.

Anexo B: Los Códigos para la Programación

En este anexo se presentan los códigos escritos para la programación en Matlab. Es importante señalar que muchos resultados exigieron ir modificándolos, además de trabajar con ellos en ocasiones desde la ventana de comandos, por lo que su aplicación no siempre es mecánica.

El primer código programa la subida y bajada de pasajeros en cada estructura, para cada línea y en cada nodo, generando las matrices denominadas Z y V .

```
function [Z,V] =
subebaja(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1) %T1 indica si
los pasajeros en El prefieren tomar un trasbordo mediante el
valor 1, 0 si no. Primera coordenada es PiSCjHgorro, segunda es
PiCBD, tercera es PiSCjF
alfagorro=alfa/(1-beta);
gamma=1-alfa-beta;
b=1-a;
gammagorro=gamma/(1-beta);
F=(n-1-H)/2;
Fgorro=(n-1-Hgorro)/2;
numnodos=2*n+1; %primeros n nodos son los perifericos, siguientes
n los subcentros, el ultimo es el CBD
CBD=2*n+1;
Pi=1; %para las lineas que no andan por "vespucio", i se referira
a la zona de partida y j a la de llegada
Pj=2;
SCi=n+1; %no para todas las lineas cada nodo representara lo
mismo. Se distingue entre las circulares -donde la representacion
es textual- y las otras, donde es simbolica
SCj=n+2;
if estructura==1 %estructura directa
    numlineas=8; %basta poner una representativa por tipo
    Z=zeros(numlineas,numnodos);
    V=zeros(numlineas,numnodos);
    LPiSCi=1; %LPiSCi es la linea 0, que se indexara 1 en las
matrices Z y V
    LPiCBD=2;
    LPiSCjH=3;
    LPiSCjHb=4; %son las lineas tipo 3 que no llegan a Hgorro, y
por lo tanto llevan menos pasajeros
    LPiSCjF=5;
    LSCiCBD=6;
    LSCiSCjHgorro=7;
```

```

Lcircular=8;
%describimos cuanto lleva un bus para cada par OD

PiSCi=(a*beta*Y)/(n*(f(LPiSCi)+f(LPicBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LPiS
CjHb)*(H-Hgorro)+2*f(LPiSCjF)));
    PiSCib1=a*gamma*Y*Hgorro*(T1(1)==1)/(n*(n-
1)*(f(LPiSCi)+f(LPicBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LPiSCjHb)*(H-
Hgorro)+2*f(LPiSCjF)));

PiSCib2=a*alfa*Y*(T1(2)==1)/(n*(f(LPiSCi)+f(LPicBD)+f(LPiSCjH)*Hg
orro+f(LPiSCjHb)*(H-Hgorro)+2*f(LPiSCjF)));
    PiSCib3=(T1(3)==1)*2*a*gamma*Y/(n*(n-
1)*(f(LPiSCi)+f(LPicBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LPiSCjHb)*(H-
Hgorro)+2*f(LPiSCjF)));

PicBD=(T1(2)==0)*a*alfa*Y/(n*(f(LPicBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LPiSC
jHb)*(H-Hgorro)));

SCiCBD=b*alfagorro*Y/(n*(f(LPicBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LPiSCjHb)*
(H-Hgorro)+f(LSCiCBD)+f(LSCiSCjHgorro)*Hgorro));
    SCiCBDb1=(1/(f(LSCiSCjHgorro)))*(T1(1)==1)*a*gamma*(Y/(n*(n-
1)))*(f(LPiSCi)+f(LPicBD)+f(LPiSCjH)*(Hgorro-1)+f(LPiSCjHb)*(H-
Hgorro)+2*f(LPiSCjF))/(f(LPiSCi)+f(LPicBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LP
iSCjHb)*(H-Hgorro)+2*f(LPiSCjF));

SCiCBDb2=(1/(f(LSCiSCjHgorro)+f(LSCiCBD)))*(T1(2)==1)*a*alfa*(Y/n
)*(f(LPiSCi)+2*f(LPiSCjF))/(f(LPiSCi)+f(LPicBD)+f(LPiSCjH)*Hgorr
o+f(LPiSCjHb)*(H-Hgorro)+2*f(LPiSCjF)));
    PiSCjHgorro=a*gamma*Y*(T1(1)==0)/(n*(n-1)*f(LPiSCjH));
    SCiSCjHgorro=b*gammagorro*Y/(n*(n-
1)*(f(LPiSCjH)+f(LSCiSCjHgorro)))+a*gamma*Y*Hgorro*(T1(1)==1)/(n*
(n-1)*f(LSCiSCjHgorro));
    PiSCjH=a*gamma*Y/(n*(n-1)*f(LPiSCjHb));
    PiSCjF=(T1(3)==0)*a*gamma*Y/(n*(n-1)*f(LPiSCjF));
    SCiSCjFgorro=(Fgorro-F)*b*gammagorro*Y/(n*(n-
1)*f(Lcircular))+(T1(3)==1)*((f(LPiSCi)+f(LPicBD)+f(LPiSCjH)*Hgor
ro+f(LPiSCjHb)*(H-
Hgorro)+f(LPiSCjF))/(f(LPiSCi)+f(LPicBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LPiS
CjHb)*(H-Hgorro)+2*f(LPiSCjF)))*F*a*gamma*Y/(n*(n-
1)*f(Lcircular));
    %asignamos a los buses
    Z(LPiSCi,Pi)=PiSCi+PiSCib1+PiSCib2+PiSCib3*F;
    V(LPiSCi,SCi)=PiSCi+PiSCib1+PiSCib2+PiSCib3*F;
    Z(LPicBD,Pi)=PiSCi+PicBD+PiSCib1+PiSCib2+PiSCib3*F;
    Z(LPicBD,SCi)=SCiCBD;
    V(LPicBD,SCi)=PiSCi+PiSCib1+PiSCib3*F;
    V(LPicBD,CBD)=PicBD+SCiCBD+PiSCib2;

Z(LPiSCjH,Pi)=PiSCi+PiSCib1+PiSCib2+PiSCib3*F+PicBD+PiSCjHgorro;

```

```

Z(LPiSCjH,SCi)=SCiCBD+SCiSCjHgorro; %dado q trasbordar
siempre es desagradable, supondremos que si alguien decide
trasbordar es porque no podrÃ¡ tomar luego un bus que de haberse
tomado inicialmente, hubiera sido directo
V(LPiSCjH,SCi)=PiSCi+PiSCib3*F;
V(LPiSCjH,CBD)=PiCBD+SCiCBD+PiSCib2;
V(LPiSCjH,SCj)=PiSCjHgorro+SCiSCjHgorro+PiSCib1;
Z(LPiSCjHb,Pi)=PiSCi+PiSCib1+PiSCib2+PiSCib3*F+PiCBD+PiSCjH;
Z(LPiSCjHb,SCi)=SCiCBD;
V(LPiSCjHb,SCi)=PiSCi+PiSCib1+PiSCib3*F;
V(LPiSCjHb,CBD)=PiCBD+SCiCBD+PiSCib2;
V(LPiSCjHb,SCj)=PiSCjH;
Z(LSCiCBD,SCi)=SCiCBD+SCiCBDb2;
V(LSCiCBD,CBD)=SCiCBD+SCiCBDb2;
Z(LSCiSCjHgorro,SCi)=SCiCBD+SCiSCjHgorro+SCiCBDb1+SCiCBDb2;
V(LSCiSCjHgorro,CBD)=SCiCBD+SCiCBDb2;
V(LSCiSCjHgorro,SCj)=SCiSCjHgorro+SCiCBDb1;
%en el cuadro que viene a continuacion se definen variables
que seran
%utiles para Z y V en las lineas circulares, por ser
sumatorias
sumatoria=1:F;
auxiliar=1:F;
for k=1:F
    auxiliar(k)=1/(k*f(LPiSCjF)+f(Lcircular));
end
for l=1:F
    sumatoria(l)=sum(auxiliar(l+1:F));
end
%ahora volvemos a lo nuestro, definir Z y V
Z(LPiSCjF,Pi)=PiSCi+F*PiSCjF+PiSCib1+PiSCib2+PiSCib3*F;
Z(LPiSCjF,SCi)=sum(auxiliar)*b*gammagorro*Y/(n*(n-1));
V(LPiSCjF,SCi)=PiSCi+PiSCib1+PiSCib2;
for l=1:F-1
    Z(LPiSCjF,SCi+l)=b*gammagorro*Y*sumatoria(l)/(n*(n-1));
V(LPiSCjF,SCi+l)=PiSCjF+PiSCib3/2+b*Y*gammagorro*sumatoria(F-
l)/(n*(n-1));
end
V(LPiSCjF,SCi+F)=PiSCjF+PiSCib3/2+b*Y*gammagorro*sum(auxiliar)/(n
*(n-1));
Z(Lcircular,SCi)=sum(auxiliar)*b*gammagorro*Y/(n*(n-
1))+SCiSCjFgorro;
V(Lcircular,SCi)=sum(auxiliar)*b*gammagorro*Y/(n*(n-
1))+SCiSCjFgorro;
end

```

```

if estructura==2 %todo exclusivas. %aquí Hgorro=H y esta dado por
F= cajon inferior (raiz(2/(1-cos(2pi/n)))
    numlineas=5+2*F; %basta poner una representativa por tipo.
las distintas líneas circulares no son equivalentes pq sus
distintos tiempos de ciclo significaran frecuencias diferentes.
    Z=zeros(numlineas,numnodos);
    V=zeros(numlineas,numnodos);
    LPiSCi=1;
    LPiCBDE=2;
    LPiSCjHE=3;
    LPiSCjFE=4:4+F-1;
    LSCiCBD=4+F;
    LSCiSCjHgorroE=5+F;
    LSCiSCjFgorroE=6+F:5+2*F;
    PiSCi=a*beta*Y/(n*f(LPiSCi));
    PiCBD=a*alfa*Y/(n*f(LPiCBDE));
    PiSCjH=a*gamma*Y/(n*(n-1)*f(LPiSCjHE));
    SCiCBD=b*alfagorro*Y/(n*f(LSCiCBD));
    SCiSCjHgorro=b*gammagorro*Y/(n*(n-1)*f(LSCiSCjHgorroE));
%aquí Hgorro=H y esta dado por F= cajon inferior (raiz(2/(1-
cos(2pi/n)))
    Z(LPiSCi,Pi)=PiSCi;
    V(LPiSCi,SCi)=PiSCi;
    Z(LPiCBDE,Pi)=PiCBD;
    V(LPiCBDE,CBD)=PiCBD;
    Z(LPiSCjHE,Pi)=PiSCjH;
    V(LPiSCjHE,SCj)=PiSCjH;
    Z(LSCiCBD,SCi)=SCiCBD;
    V(LSCiCBD,CBD)=SCiCBD;
    Z(LSCiSCjHgorroE,SCi)= SCiSCjHgorro;
    V(LSCiSCjHgorroE,SCj)=SCiSCjHgorro;
    for k=1:F
        Z(LPiSCjFE(k),Pi)=a*gamma*Y/(n*(n-1)*f(LPiSCjFE(k)));
        V(LPiSCjFE(k),SCj)=a*gamma*Y/(n*(n-1)*f(LPiSCjFE(k)));
        Z(LSCiSCjFgorroE(k),SCi)=b*gammagorro*Y/(n*(n-
1)*f(LSCiSCjFgorroE(k)));
        V(LSCiSCjFgorroE(k),SCj)=b*gammagorro*Y/(n*(n-
1)*f(LSCiSCjFgorroE(k)));
    end
end
if estructura==3 %hub and spoke en el CBD
    numlineas=3;
    Z=zeros(numlineas,numnodos);
    V=zeros(numlineas,numnodos);
    LPiSCmenosi=1;
    Lcircular=2;
    LCBDSj=3;
    PiSCi=a*beta*Y/(n*f(LPiSCmenosi));

```

```

    PiCBD=a*alfa*Y/(n*f(LPiSCmenosi));
    PiSCmenosi=a*gamma*Y/(n*(n-1)*f(LPiSCmenosi));
    PiSCjH=a*gamma*Y*(H-1)/(n*(n-1)*f(LPiSCmenosi));
    PiSCjF=a*gamma*Y*F/(n*(n-1)*f(LPiSCmenosi));
    SCiCBD=b*alfagorro*Y/(n*f(LPiSCmenosi));
    SCiSCmenosi=b*gammagorro*Y/(n*(n-1)*f(LPiSCmenosi));
    SCiSCjHgorro=b*gammagorro*Y*(Hgorro-1)/(n*(n-
1)*f(LPiSCmenosi));
    CBDSCj=a*gamma*Y*(H-1)/(n*(n-
1)*(f(LPiSCmenosi)+f(LCBDSCj)))+b*gammagorro*Y*(Hgorro-1)/(n*(n-
1)*(f(LPiSCmenosi)+f(LCBDSCj)));
    Z(LPiSCmenosi,Pi)=a*Y/(n*f(LPiSCmenosi));
    Z(LPiSCmenosi,SCi)=SCiCBD+SCiSCjHgorro+SCiSCmenosi;
    V(LPiSCmenosi,SCi)=PiSCi+2*PiSCjF;
    Z(LPiSCmenosi,CBD)=CBDSCj;
    V(LPiSCmenosi,CBD)=PiCBD+SCiCBD+PiSCjH+SCiSCjHgorro;
    V(LPiSCmenosi,SCj)=CBDSCj+PiSCmenosi+SCiSCmenosi;
    Z(Lcircular,SCi)=a*gamma*F*Y/(n*(n-
1)*f(Lcircular))+b*gammagorro*Fgorro*Y/(n*(n-1)*f(Lcircular));
    V(Lcircular,SCi)=a*gamma*F*Y/(n*(n-
1)*f(Lcircular))+b*gammagorro*Fgorro*Y/(n*(n-1)*f(Lcircular));
    Z(LCBDSCj,CBD)=CBDSCj;
    V(LCBDSCj,SCj)=CBDSCj;
end
if estructura==4 %hub and spoke en el SC
    numlineas=3;
    Z=zeros(numlineas,numnodos);
    V=zeros(numlineas,numnodos);
    LPiSCi=1;
    LSCiSCjHgorro=2;
    Lcircular=3;
    PiCBD=a*alfa*Y/(n*f(LSCiSCjHgorro)*H);
    SCiCBD=b*alfagorro*Y/(n*f(LSCiSCjHgorro)*H);
    PiSCjH=a*gamma*Y/(n*(n-1)*f(LSCiSCjHgorro));
    SCiSCjH=b*gammagorro*Y/(n*(n-1)*f(LSCiSCjHgorro));
    PiSCjF=a*gamma*F*Y/(n*(n-1)*f(Lcircular));
    SCiSCjF=b*gammagorro*F*Y/(n*(n-1)*f(Lcircular));
    Z(LPiSCi,Pi)=a*Y/(n*f(LPiSCi));
    V(LPiSCi,SCi)=a*Y/(n*f(LPiSCi));
    Z(LSCiSCjHgorro,SCi)=PiCBD+SCiCBD+PiSCjH+SCiSCjH;
    V(LSCiSCjHgorro,CBD)=PiCBD+SCiCBD;
    V(LSCiSCjHgorro,SCj)=PiSCjH+SCiSCjH;
    Z(Lcircular,SCi)=PiSCjF+SCiSCjF;
    V(Lcircular,SCi)=PiSCjF+SCiSCjF;
end
end

```

Los siguientes códigos determinan los elementos que componen la función de costos. El tiempo de ciclo de cada línea:

```
function [tc] =
tiempociclo(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1,T0,g,t)
[Z,V]=subebaja(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1);
numlineas=size(Z,1);
afluencia=1:numlineas;
for L=1:numlineas
    afluencia(L)=sum(Z(L,:))+sum(V(L,:));
end
alfagorro=alfa/(1-beta);
gamma=1-alfa-beta;
b=1-a;
gammagorro=gamma/(1-beta);
F=(n-1-H)/2;
Fgorro=(n-1-Hgorro)/2;
rn=sqrt(2*(1-cos(2*pi/n)));
numnodos=2*n+1; %primeros n nodos son los perifericos, siguientes
n los subcentros, el ultimo es el CBD
CBD=2*n+1;
Pi=1; %para las lineas que no andan por "vespucio", i se referira
a la zona de partida y j a la de llegada
Pj=2;
SCi=n+1; %no para todas las lineas cada nodo representara lo
mismo. Se distingue entre las circulares -donde la representacion
es textual- y las otras, donde es simbolica
SCj=n+2;
if estructura==1
    LPiSCi=1;
    LPiCBD=2;
    LPiSCj=3;
    LPiSCjb=4;
    LPiSCjF=5;
    LSCiCBD=6;
    LSCiSCjHgorro=7;
    Lcircular=8;
    tc(LPiSCi)=2*g*T0+t*afluencia(LPiSCi);
    tc(LPiCBD)=2*(g+1)*T0+t*afluencia(LPiCBD);
    tc(LPiSCj)=2*(g+1)*T0+t*afluencia(LPiSCj);
    tc(LPiSCjb)=2*(g+1)*T0+t*afluencia(LPiSCjb);
    tc(LPiSCjF)=T0*(2*g+F*rn)+t*afluencia(LPiSCjF);
    tc(LSCiCBD)=2*T0+t*afluencia(LSCiCBD);
    tc(LSCiSCjHgorro)=2*T0+t*afluencia(LSCiSCjHgorro);
    tc(Lcircular)=n*rn*T0+n*t*afluencia(Lcircular);
end
if estructura==2
    LPiSCi=1;
```

```

LPiCBDE=2;
LPiSCjHE=3;
LPiSCjFE=4:4+F-1;
LSCiCBD=4+F;
LSCiSCjHgorroE=5+F;
LSCiSCjFgorroE=6+F:5+2*F;
tc(LPiSCi)=2*g*T0+t*afluencia(LPiSCi);
tc(LPiCBDE)=2*(g+1)*T0+t*afluencia(LPiCBDE);
tc(LPiSCjHE)=2*(g+1)*T0+t*afluencia(LPiSCjHE);
tc(LSCiCBD)=2*T0+t*afluencia(LSCiCBD);
tc(LSCiSCjHgorroE)=2*T0+t*afluencia(LSCiSCjHgorroE);
for k=1:F %ojo, no queda totalmente referenciado, hay que
cambiar a mano en caso de que haya que arreglar algo
    tc(LPiSCjFE(k))=g*T0+rn*k*T0+t*afluencia(LPiSCjFE(k));
tc(LSCiSCjFgorroE(k))=rn*k*T0+t*afluencia(LSCiSCjFgorroE(k));
end
end
if estructura==3
    LPiSCmenosi=1;
    Lcircular=2;
    LCBDSj=3;
    tc(LPiSCmenosi)=2*(1+g)*T0+t*afluencia(LPiSCmenosi);
    tc(Lcircular)=n*rn*T0+n*t*afluencia(Lcircular);
    tc(LCBDSj)=2*T0+t*afluencia(LCBDSj);
end
if estructura==4
    LPiSCi=1;
    LSCiSCjHgorro=2;
    Lcircular=3;
    tc(LPiSCi)=2*g*T0+t*afluencia(LPiSCi);
    tc(LSCiSCjHgorro)=2*T0+t*afluencia(LSCiSCjHgorro);
    tc(Lcircular)=n*rn*T0+n*t*afluencia(Lcircular);
end
end

```

La carga de cada línea:

```

function [lambda] =
carga(estructura, alfa, beta, a, Y, f, n, H, Hgorro, T1)
[Z, V]=subebaja(estructura, alfa, beta, a, Y, f, n, H, Hgorro, T1);
numlineas=size(Z,1);
alfagorro=alfa/(1-beta);
gamma=1-alfa-beta;
b=1-a;
gammagorro=gamma/(1-beta);
F=(n-1-H)/2;

```



```

Fgorro=(n-1-Hgorro)/2;
CBD=2*n+1;
Pi=1;
Pj=2;
SCi=n+1;
SCj=n+2;
if estructura==1
    LPiSCi=1;
    LPiCBD=2;
    LPiSCj=3;
    LPiSCjH=LPiSCj;
    LPiSCjb=4;
    LPiSCjHb=LPiSCjb;
    LPiSCjF=5;
    LSCiCBD=6;
    LSCiSCjHgorro=7;
    Lcircular=8;
    lambda(LPiSCi)=Z(LPiSCi,Pi);
    lambda(LPiCBD)=max(Z(LPiCBD,Pi),Z(LPiCBD,Pi)+Z(LPiCBD,SCi)-
V(LPiCBD,SCi));
    lambda(LPiSCj)=max(Z(LPiSCj,Pi),Z(LPiSCj,Pi)+Z(LPiSCj,SCi)-
V(LPiSCj,SCi));

lambda(LPiSCjb)=max(Z(LPiSCjb,Pi),Z(LPiSCjb,Pi)+Z(LPiSCjb,SCi)-
V(LPiSCjb,SCi));
    aux=1:F-1;
    for k=1:F-1
        aux(k)=Z(LPiSCjF,Pi)+sum(Z(LPiSCjF,SCi:SCi+k))-
sum(V(LPiSCjF,SCi:SCi+k));
    end
    M=max(aux);
    lambda(LPiSCjF)=max([M Z(LPiSCjF,Pi)
Z(LPiSCjF,Pi)+Z(LPiSCjF,SCi)-V(LPiSCjF,SCi)]);
    lambda(LSCiCBD)=Z(LSCiCBD,SCi);
    lambda(LSCiSCjHgorro)=Z(LSCiSCjHgorro,SCi);
    aux2=1:F;
    for l=1:F
        aux2(l)=(F-l+1)/(f(Lcircular)+l*f(LPiSCjF));
    end
    s2=sum(aux2);
    aux3=F+1:Fgorro;
    for l=F+1:Fgorro
        aux3(l-F)=(Fgorro-l+1)/f(Lcircular);
    end
    s3=sum(aux3);
    lambda(Lcircular)=b*gammapgorro*(Y/(n*(n-
1)))*(s2+s3)+((f(LPiSCi)+f(LPiCBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LPiSCjHb)*
(H-Hgorro)+f(LPiSCjF))/(f(LPiSCi)+f(LPiCBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+

```

```

f(LPiSCjHb)*(H-
Hgorro)+2*f(LPiSCjF)))*(T1(3)==1)*a*gamma*Y*F*(F+1)/(f(Lcircular)
*2*n*(n-1));

end
if estructura==2
    LPiSCi=1;
    LPiCBDE=2;
    LPiSCjHE=3;
    LPiSCjFE=4:4+F-1;
    LSCiCBD=4+F;
    LSCiSCjHgorroE=5+F;
    LSCiSCjFgorroE=6+F:5+2*F;
    lambda(LPiSCi)=Z(LPiSCi,Pi);
    lambda(LPiCBDE)=Z(LPiCBDE,Pi);
    lambda(LPiSCjHE)=Z(LPiSCjHE,Pi);
    lambda(LPiSCjFE)=Z(LPiSCjFE,Pi);
    lambda(LSCiCBD)=Z(LSCiCBD,SCi);
    lambda(LSCiSCjHgorroE)=Z(LSCiSCjHgorroE,SCi);
    lambda(LSCiSCjFgorroE)=Z(LSCiSCjFgorroE,SCi);

end
if estructura==3
    LPiSCmenosi=1;
    Lcircular=2;
    LCBDSj=3;

aux1=max(Z(LPiSCmenosi,Pi),Z(LPiSCmenosi,Pi)+Z(LPiSCmenosi,SCi)-
V(LPiSCmenosi,SCi));

lambda(LPiSCmenosi)=max(aux1,Z(LPiSCmenosi,Pi)+Z(LPiSCmenosi,SCi)
-V(LPiSCmenosi,SCi)+Z(LPiSCmenosi,CBD)-V(LPiSCmenosi,CBD));
    lambda(Lcircular)=(Y/(f(Lcircular)*2*n*(n-
1)))*((F^2+F)*a*gamma+(Fgorro^2+Fgorro)*b*gammaGORRO);
    lambda(LCBDSj)=Z(LCBDSj,CBD);
end
if estructura==4
    LPiCBD=1;
    LSCiSCjHgorro=2;
    Lcircular=3;
    lambda(LPiCBD)=Z(LPiCBD,Pi);
    lambda(LSCiSCjHgorro)=Z(LSCiSCjHgorro,SCi);
    lambda(Lcircular)=(F^2+F)*Y*[a*gamma+b*gammaGORRO]/(2*n*(n-
1));
end
end
end

```

El tiempo de espera promedio de cada estructura:

```

function [te] =
tiempoespera(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1)
alfagorro=alfa/(1-beta);
gamma=1-alfa-beta;
b=1-a;
gammagorro=gamma/(1-beta);
F=(n-1-H)/2;
Fgorro=(n-1-Hgorro)/2;
if estructura==1
    LPiSCi=1;
    LPiCBD=2;
    LPiSCjH=3;
    LPiSCjHb=4;
    LPiSCjF=5;
    LSCiCBD=6;
    LSCiSCjH=7;
    LSCiSCjHgorro=LSCiSCjH;
    Lcircular=8;
    auxiliar=1:F;
    for k=1:F
        auxiliar(k)=1/(k*f(LPiSCjF)+f(Lcircular));
    end
    sumatoria=sum(auxiliar);

te=a*beta/(f(LPiSCi)+f(LPiCBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LPiSCjHb)*(H-
Hgorro)+2*f(LPiSCjF))+a*alfa*(T1(2)==0)/(f(LPiCBD)+Hgorro*f(LPiSC
jH)+(H-
Hgorro)*f(LPiSCjHb))+a*gamma*Hgorro*(T1(1)==0)/(f(LPiSCjH)*(n-
1))+a*gamma*(H-Hgorro)/(f(LPiSCjHb)*(n-
1))+2*a*gamma*F*(T1(3)==0)/(f(LPiSCjF)*(n-
1))+b*alfagorro/(f(LPiCBD)+Hgorro*f(LPiSCjH)+(H-
Hgorro)*f(LPiSCjHb)+f(LSCiCBD)+Hgorro*f(LSCiSCjH))+b*gammagorro*H
gorro/((n-1)*(f(LSCiSCjH)+f(LPiSCjH)))+2*b*gammagorro*(Fgorro-
F)/((n-1)*f(Lcircular))+2*b*gammagorro*sumatoria/(n-
1)+(T1(1)==1)*a*alfa*(Hgorro/(n-
1))*[1/(f(LPiSCi)+f(LPiCBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LPiSCjHb)*(H-
Hgorro)+2*f(LPiSCjF)))+(f(LPiSCi)+f(LPiCBD)+f(LPiSCjH)*(Hgorro-
1)+f(LPiSCjHb)*(H-
Hgorro)+2*f(LPiSCjF)))/(f(LPiSCi)+f(LPiCBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(
LPiSCjHb)*(H-
Hgorro)+2*f(LPiSCjF)))]+(1/(f(LSCiSCjHgorro)))]+(T1(2)==1)*a*alfa
*[1/(f(LPiSCi)+f(LPiCBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LPiSCjHb)*(H-
Hgorro)+2*f(LPiSCjF)))+(f(LPiSCi)+2*f(LPiSCjF))/(f(LPiSCi)+f(LPi
CBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LPiSCjHb)*(H-
Hgorro)+2*f(LPiSCjF)))]*(1/(f(LSCiCBD)+Hgorro*f(LSCiSCjHgorro)))]
+(T1(3)==1)*[1/(f(LPiSCi)+f(LPiCBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LPiSCjHb
)*(H-
Hgorro)+2*f(LPiSCjF)))+(f(LPiSCi)+f(LPiCBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+

```

```

f(LPiSCjHb)*(H-Hgorro) +
f(LPiSCjF))/(f(LPiSCi)+f(LPiCBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LPiSCjHb)*(H
-Hgorro)+2*f(LPiSCjF))*(1/f(Lcircular))];
end
if estructura==2
    LPiSCi=1;
    LPiCBDE=2;
    LPiSCjHE=3;
    LPiSCjFE=4:4+F-1;
    LSCiCBD=4+F;
    LSCiSCjHgorroE=5+F;
    LSCiSCjFgorroE=6+F:5+2*F;
    aux1=1:F;
    aux2=1:F;
    for k=1:F
        aux1(k)=1/f(LPiSCjFE(k));
        aux2(k)=1/f(LSCiSCjFgorroE(k));
    end
    te=a*beta/f(LPiSCi)+a*alfa/f(LPiCBDE)+a*gamma*(H/(n-
1))/f(LPiSCjHE)+2*a*gamma*(1/(n-
1))*sum(aux1)+b*alfagorro/f(LSCiCBD)+b*gammagorro*(Hgorro/(n-
1))/f(LSCiSCjHgorroE)+2*b*gammagorro*sum(aux2)/(n-1);
end
if estructura==3
    LPiSCmenosi=1;
    Lcircular=2;
    LCBDSj=3;

te=a*beta/f(LPiSCmenosi)+a*alfa/f(LPiSCmenosi)+a*gamma/(f(LPiSCme
nosi)*(n-1))+a*gamma*(H-1)*(1/(n-
1))*[1/f(LPiSCmenosi)+1/(f(LPiSCmenosi)+f(LCBDSj))]+2*a*gamma*(F
/(n-
1))*[1/f(LPiSCmenosi)+1/f(Lcircular)]+b*alfagorro/f(LPiSCmenosi)+
b*gammagorro/(f(LPiSCmenosi)*(n-1))+(Hgorro-
1)*b*gammagorro*(1/(n-
1))*[1/f(LPiSCmenosi)+1/(f(LPiSCmenosi)+f(Lcircular))]+2*Fgorro*b
*gammagorro/((n-1)*f(Lcircular));
end
if estructura==4
    LPiSCi=1;
    LSCiSCjH=2;
    Lcircular=3;

te=a*beta/f(LPiSCi)+a*alfa*(1/f(LPiSCi)+1/(H*f(LSCiSCjH)))+a*gamma
a*H*(1/(n-1))*(1/f(LPiSCi)+1/f(LSCiSCjH))+2*a*gamma*F*(1/(n-
1))*(1/f(LPiSCi)+1/f(Lcircular))+b*alfagorro/(H*f(LSCiSCjH))+b*ga
mmagorro*H/((n-1)*f(LSCiSCjH))+2*b*gammagorro*F/((n-
1)*f(Lcircular));
end

```

```
te=te/2;
end
```

El tiempo de viaje promedio de cada estructura:

```
function [tv] =
tiempoviaje(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,Tl,T0,g,t)
[Z,V]=subebaja(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,Tl);
numlineas=size(Z,1);
alfagorro=alfa/(1-beta);
gamma=1-alfa-beta;
b=1-a;
gammagorro=gamma/(1-beta);
F=(n-1-H)/2;
Fgorro=(n-1-Hgorro)/2;
rn=sqrt(2*(1-cos(2*pi/n)));
numnodos=2*n+1; %primeros n nodos son los perifericos, siguientes
n los subcentros, el ultimo es el CBD
CBD=2*n+1;
Pi=1; %para las lineas que no andan por "vespucio", i se referira
a la zona de partida y j a la de llegada
Pj=2;
SCi=n+1; %no para todas las lineas cada nodo representara lo
mismo. Se distingue entre las circulares -donde la representacion
es textual- y las otras, donde es simbolica
SCj=n+2;
if estructura==1
    LPiSCi=1;
    LPiCBD=2;
    LPiSCjH=3;
    LPiSCjHb=4;
    LPiSCjF=5;
    LSCiCBD=6;
    LSCiSCjH=7;
    LSCiSCjHgorro=LSCiSCjH;
    Lcircular=8;

    PiSCi=a*beta*(g*T0+(t/2)*((f(LPiSCi)*V(LPiSCi,SCi)+f(LPiCBD)*V(LP
iCBD,SCi)+Hgorro*f(LPiSCjH)*V(LPiSCjH,SCi)+(H-
Hgorro)*f(LPiSCjHb)*V(LPiSCjHb,SCi)+2*f(LPiSCjF)*V(LPiSCjF,SCi)))/
(f(LPiSCi)+f(LPiCBD)+Hgorro*f(LPiSCjH)+(H-
Hgorro)*f(LPiSCjHb)+2*f(LPiSCjF))));
    PiCBDA=a*alfa*[(g+1)*T0+(t/(f(LPiCBD)+Hgorro*f(LPiSCjH)+(H-
Hgorro)*f(LPiSCjHb)))*(f(LPiCBD)*(Z(LPiCBD,SCi)+V(LPiCBD,SCi)+V(L
PiCBD,CBD)/2)+Hgorro*f(LPiSCjH)*(Z(LPiSCjH,SCi)+V(LPiSCjH,SCi)+V(
LPiSCjH,CBD)/2)+(H-
Hgorro)*f(LPiSCjHb)*(Z(LPiSCjHb,SCi)+V(LPiSCjHb,SCi)+V(LPiSCjHb,C
BD)/2))];
```

```

    PiCBDb=PiCBDa*(f(LPiCBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LPiSCjHb)*(H-
Hgorro))/(f(LPiSCi)+f(LPiCBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LPiSCjHb)*(H-
Hgorro)+2*f(LPiSCjF))+((f(LPiSCi)+2*f(LPiSCjF))/(f(LPiSCi)+f(LPiC
BD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LPiSCjHb)*(H-
Hgorro)+2*f(LPiSCjF)))*(1+g)*T0+(t/2)*((f(LPiSCi)*V(LPiSCi,SCi)+
2*f(LPiSCjF)*V(LPiSCjF,SCi))/(f(LPiSCi)+2*f(LPiSCjF)))+(t/2)*((f(
LSCiCBD)*V(LSCiCBD,CBD)+Hgorro*f(LSCiSCjHgorro)*V(LSCiSCjHgorro,C
BD))/(f(LSCiCBD)+Hgorro*f(LSCiSCjHgorro))));
    PiCBD=PiCBDa*(T1(2)==0)+PiCBDb*(T1(2)==1);
    PiSCjHgorro=(1/(n-
1))*a*gamma*Hgorro*[(g+2)*T0+t*(Z(LPiSCjH,SCi)+V(LPiSCjH,SCi)+V(L
PiSCjH,CBD)+V(LPiSCjH,SCj)/2)];
    PiSCjHa=(1/(n-1))*a*gamma*(H-
Hgorro)*[(g+2)*T0+t*(Z(LPiSCjHb,SCi)+V(LPiSCjHb,SCi)+V(LPiSCjHb,C
BD)+V(LPiSCjHb,SCj)/2)];

PiSCjHb=PiSCjHa*(f(LPiSCjH)/(f(LPiSCi)+f(LPiCBD)+f(LPiSCjH)*Hgorr
o+f(LPiSCjHb)*(H-
Hgorro)+2*f(LPiSCjF)))+(f(LPiSCi)+f(LPiCBD)+f(LPiSCjH)*(Hgorro-
1)+f(LPiSCjHb)*(H-
Hgorro)+2*f(LPiSCjF))/(f(LPiSCi)+f(LPiCBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LP
iSCjHb)*(H-
Hgorro)+2*f(LPiSCjF))*[(2+g)*T0+(t/2)*((f(LPiSCi)*V(LPiSCi,SCi)+
f(LPiCBD)*V(LPiCBD,SCi)+2*f(LPiSCjF)*V(LPiSCjF,SCi)+(H-
Hgorro)*f(LPiSCjHb)*V(LPiSCjHb,SCi)+(Hgorro-
1)*V(LPiSCjH,SCi)*f(LPiSCjH))/(f(LPiSCi)+f(LPiCBD)+(H-
Hgorro)*f(LPiSCjHb)+(Hgorro-
1)*f(LPiSCjH)+2*f(LPiSCjF)))+t*(V(LSCiSCjH,CBD)+V(LSCiSCjH,SCj)/2
)];
    PiSCjH=(T1(1)==0)*PiSCjHa+(T1(1)==1)*PiSCjHb;
    %variables auxiliares
    sumatoria=1:F;
    for k=1:F
        aux2=1:k;
        for l=1:k
            aux2(l)=Z(LPiSCjF,SCi+l-1)+V(LPiSCjF,SCi+l-1);
        end
        s=sum(aux2);
        sumatoria(k)=T0*(g+k*rn)+t*(s+V(LPiSCjF,SCi+k)/2);
    end
    %terminamos con las auxiliares
    PiSCjFa=(1/(n-1))*2*a*gamma*sum(sumatoria);
    aux1b=1:k;
    for k=1:F
        aux1b(k)=g*T0+k*rn*T0+t*(k-
1)*(V(Lcircular,SCi)+Z(Lcircular,SCi))+t*V(Lcircular,SCi)/2+(t/2)
*((f(LPiSCi)*V(LPiSCi,SCi)+f(LPiCBD)*V(LPiCBD,SCi)+f(LPiSCjH)*Hgo
rro)*V(LPiSCjH,SCi)+f(LPiSCjHb)*

```

```

(H-
Hgorro)*V(LPiSCjHb,SCi)+f(LPiSCjF)*V(LPiSCjF,SCi))/(f(LPiSCi)+f(L
PicBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LPiSCjHb)*(H-Hgorro)+f(LPiSCjF));
    end

PiSCjFb=PiSCjFa*(f(LPiSCjF)/(f(LPiSCi)+f(LPicBD)+f(LPiSCjH)*Hgorr
o+f(LPiSCjHb)*(H-Hgorro)+2*f(LPiSCjF)))+(2/(n-
1))*a*gamma*(f(LPiSCi)+f(LPicBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LPiSCjHb)*(
H-
Hgorro)+f(LPiSCjF))/(f(LPiSCi)+f(LPicBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LPiS
CjHb)*(H-Hgorro)+2*f(LPiSCjF))*sum(aux1b);
    PiSCjF=PiSCjFa+PiSCjFb;
    PiSCj=PiSCjHgorro+PiSCjH+PiSCjF;

SCiCBD=b*alfagorro*[T0+(t/2)*(f(LPicBD)*V(LPicBD,CBD)+Hgorro*f(LP
iSCjH)*V(LPiSCjH,CBD)+(H-
Hgorro)*f(LPiSCjHb)*V(LPiSCjHb,CBD)+f(LSCiCBD)*V(LSCiCBD,CBD)+Hgo
rro*f(LSCiSCjH)*V(LSCiSCjH,CBD))/(f(LPicBD)+Hgorro*f(LPiSCjH)+(H-
Hgorro)*f(LPiSCjHb)+f(LSCiCBD)+Hgorro*f(LSCiSCjH))];
    SCiSCjHgorro=(1/(n-
1))*b*gamma*Hgorro*[2*T0+t*[1/(f(LPiSCjH)+f(LSCiSCjH))]*(f(L
PiSCjH)*V(LPiSCjH,CBD)+f(LPiSCjH)*V(LPiSCjH,SCj)/2+f(LSCiSCjH)*V(
LSCiSCjH,CBD)+f(LSCiSCjH)*V(LSCiSCjH,SCj)/2)];
    aux=F+1:Fgorro;
    for k=F+1:Fgorro
        aux(k)=k*rn*T0+t*(k-
1)*(Z(Lcircular,SCi)+V(Lcircular,SCi))+t*V(Lcircular,SCi)/2;
    end
    SCiSCjFgorro=(Fgorro>F)*2*b*gamma*sum(aux)/(n-1);
    aux1=1:F;
    for k=1:F
        aux2=1:F-k+1;
        for l=0:F-k
            aux3=l+1:l+k-1;
            for h=l+1:l+k-1
                aux3(h-l)=Z(LPiSCjF,SCi+h)+V(LPiSCjF,SCi+h);
            end
            aux2(l+1)=sum(aux3)+V(LPiSCjF,SCi+k+1)/2;
        end
        aux1(k)=k*rn*T0+(t/(f(Lcircular)+(F-
k+1)*f(LPiSCjF)))*(f(LPiSCjF)*sum(aux2)+f(Lcircular)*[(k-
1)*(Z(Lcircular,SCi)+V(Lcircular,SCi))+V(Lcircular,SCi)/2]);
    end
    SCiSCjF=2*b*gamma*sum(aux1)/(n-1);
    SCiSCj=SCiSCjHgorro+SCiSCjFgorro+SCiSCjF;
end
if estructura==2
    LPiSCi=1;
    LPiCBDE=2;

```

```

LPiSCjHE=3;
LPiSCjFE=4:4+F-1;
LSCiCBD=4+F;
LSCiSCjHgorroE=5+F;
LSCiSCjFgorroE=5+F:6+2*F;
PiSCi=a*beta*(g*T0+t*V(LPiSCi,SCi)/2);
PiCBD=a*alfa*((g+1)*T0+(t/2)*V(LPiCBDE,CBD));
PiSCjH=(1/(n-1))*a*gamma*H*((g+2)*T0+t*V(LPiSCjHE,SCj)/2);
aux1=1:F;
for k=1:F
    aux1(k)=g*T0+k*rn*T0+(t/2)*V(LPiSCjFE(k),SCj);
end
PiSCjF=(1/(n-1))*2*a*gamma*sum(aux1);
aux1b=1:F;
PiSCj=PiSCjH+PiSCjF;
SCiCBD=b*alfagorro*(T0+t*V(LSCiCBD,CBD)/2);
SCiSCjHgorro=(1/(n-
1))*b*gammagorro*Hgorro*(2*T0+t*V(LSCiSCjHgorroE,SCj)/2);
aux2=1:F;
for k=1:F
    aux2(k)=k*rn*T0+(t/2)*V(LSCiSCjFgorroE(k),SCj);
end
SCiSCjF=2*b*gammagorro*sum(aux2)/(n-1);
SCiSCj=SCiSCjHgorro+SCiSCjF;
end
if estructura==3
    LPiSCmenosi=1;
    Lcircular=2;
    LCBDSj=3;
    PiSCi=a*beta*[g*T0+t*V(LPiSCmenosi,SCi)/2];
PiCBD=a*alfa*[(g+1)*T0+t*(V(LPiSCmenosi,SCi)+Z(LPiSCmenosi,SCi)+V
(LPiSCmenosi,CBD)/2)];
    PiSCmenosi=a*gamma*(1/(n-
1))*[T0*(g+2)+t*(V(LPiSCmenosi,SCi)+Z(LPiSCmenosi,SCi)+V(LPiSCmen
osi,CBD)+Z(LPiSCmenosi,CBD)+V(LPiSCmenosi,SCj)/2)];
PiSCjH1=(f(LPiSCmenosi)/(f(LPiSCmenosi)+f(LCBDSj)))*a*gamma*((H-
1)/(n-
1))*[(g+2)*T0+t*[V(LPiSCmenosi,SCi)+Z(LPiSCmenosi,SCi)+V(LPiSCmen
osi,CBD)/2+V(LPiSCmenosi,SCj)/2]];
    PiSCjH2=(f(LCBDSj)/(f(LPiSCmenosi)+f(LCBDSj)))*a*gamma*((H-
1)/(n-
1))*[(g+2)*T0+t*[V(LPiSCmenosi,SCi)+Z(LPiSCmenosi,SCi)+V(LPiSCmen
osi,CBD)/2+V(LCBDSj,SCj)/2]];
    PiSCjH=PiSCmenosi+PiSCjH1+PiSCjH2;
    aux=1:F;
    for k=1:F

```



```

aux(k)=T0*(g+k*rn)+t*[V(LPiSCmenosi,SCi)/2+V(Lcircular,SCi)/2+(k-
1)*[V(Lcircular,SCi)+Z(Lcircular,SCi)]];
end
PiSCjF=2*a*(gamma/(n-1))*sum(aux);
PiSCj=PiSCjH+PiSCjF;
SCiCBD=b*alfagorro*[T0+t*V(LPiSCmenosi,CBD)/2];
SCiSCmenosi=b*gammagorro*(1/(n-
1))*[2*T0+t*(V(LPiSCmenosi,CBD)+Z(LPiSCmenosi,CBD)+V(LPiSCmenosi,
SCj)/2)];

SCiSCjHgorro1=(f(LPiSCmenosi)/(f(LPiSCmenosi)+f(LCBDSCj)))*b*gamm
agorro*((Hgorro-1)/(n-
1))*[2*T0+t*[V(LPiSCmenosi,CBD)/2+V(LPiSCmenosi,SCj)/2]];

SCiSCjHgorro2=(f(LCBDSCj)/(f(LPiSCmenosi)+f(LCBDSCj)))*b*gammagor
ro*((Hgorro-1)/(n-
1))*[2*T0+t*[V(LPiSCmenosi,CBD)/2+V(LCBDSCj,SCj)/2]];
SCiSCjHgorro=SCiSCmenosi+SCiSCjHgorro1+SCiSCjHgorro2;
aux=1:Fgorro;
for k=1:Fgorro
    aux(k)=T0*k*rn+t*[V(Lcircular,SCi)/2+(k-
1)*[V(Lcircular,SCi)+Z(Lcircular,SCi)]];
end
SCiSCjFgorro=2*b*sum(aux)*gammagorro/(n-1);
SCiSCj=SCiSCjHgorro+SCiSCjFgorro;
end
if estructura==4
    LPiSCi=1;
    LSCiSCjH=2;
    Lcircular=3;
    PiSCi=a*beta*(g*T0+t*V(LPiSCi,SCi)/2);
    PiCBD=a*alfa*((g+1)*T0+t*(V(LPiSCi,SCi)+V(LSCiSCjH,CBD))/2);
    PiSCjH=a*gamma*(H/(n-
1))*((g+2)*T0+t*(V(LPiSCi,SCi)/2+V(LSCiSCjH,CBD)+V(LSCiSCjH,SCj)/
2));
    aux=1:F;
    for k=1:F

aux(k)=T0*(g+k*rn)+t*(V(LPiSCi,SCi)/2+V(Lcircular,SCi)/2+(k-
1)*(V(Lcircular,SCi)+Z(Lcircular,SCi)));
end
PiSCjF=2*a*(gamma/(n-1))*sum(aux);
PiSCj=PiSCjH+PiSCjF;
SCiCBD=b*alfagorro*(T0+t*V(LSCiSCjH,CBD)/2);
SCiSCjH=b*gammagorro*(H/(n-
1))*[2*T0+t*V(LSCiSCjH,CBD)+t*V(LSCiSCjH,SCj)/2];
for k=1:F

```

```

        aux(k)=T0*k*rn+t*[V(Lcircular,SCi)/2+(k-
1)*[V(Lcircular,SCi)+Z(Lcircular,SCi)]];
        end
        SCiSCjF=2*b*sum(aux)*gammagorro/(n-1);
        SCiSCj=SCiSCjH+SCiSCjF;
end
tv=PiSCi+PicBD+PiSCj+SCiCBD+SCiSCj;
end

```

Los trasbordos por estructura:

```

function [T] =
trasbordos(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1)
gamma=1-alfa-beta;
gammagorro=gamma/(1-beta);
b=1-a;
F=(n-H-1)/2;
%definimos las lineas para la estructura 1, es la unica q las
necesita
%definidas
LPiSCi=1;
LPiCBD=2;
LPiSCjH=3;
LPiSCjHb=4;
LPiSCjF=5;
LSCiCBD=6;
LSCiSCjHgorro=7;
Lcircular=8;
trasbordosE1=0;
if estructura==1
trasbordos1=(T1(1)==1)*a*gamma*(Hgorro/(n-
1))*(((f(LPiSCi)+f(LPiCBD)+f(LPiSCjH))*(Hgorro-1)+f(LPiSCjHb)*(H-
Hgorro)+2*f(LPiSCjF)))/((f(LPiSCi)+f(LPiCBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(
LPiSCjHb)*(H-Hgorro)+2*f(LPiSCjF))));
trasbordos2=(T1(2)==1)*a*alfa*(((f(LPiSCi)+2*f(LPiSCjF)))/((f(LPi
SCi)+f(LPiCBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LPiSCjHb)*(H-
Hgorro)+2*f(LPiSCjF))));
trasbordos3=(T1(3)==1)*a*gamma*2*(F/(n-
1))*((f(LPiSCi)+f(LPiCBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LPiSCjHb)*(H-
Hgorro)+f(LPiSCjF))/((f(LPiSCi)+f(LPiCBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LPiS
CjHb)*(H-Hgorro)+2*f(LPiSCjF))));
trasbordosE1=trasbordos1+trasbordos2+trasbordos3;
end
T= trasbordosE1*(estructura==1)+(estructura==3)*(a*gamma*Y*((n-
2)/(n-1))+b*gammagorro*Y*(Hgorro-1)/(n-
1))+(estructura==4)*(a*alfa+a*gamma)*Y;
end

```

La flota:

```
function
[B]=flota(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1,T0,g,t)
F=(n-1-H)/2;
Fgorro=(n-1-Hgorro)/2;
lambda = carga(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1);
tc =
tiempociclo(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1,T0,g,t);
te = tiempospera(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1);
tv =
tiempoviaje(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1,T0,g,t);
T = trasbordos(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1);
if estructura==1
    cantlinea=1:8;
    LPiSCi=1; cantlinea(LPiSCi)=n;
    LPiCBD=2; cantlinea(LPiCBD)=n;
    LPiSCjH=3; cantlinea(LPiSCjH)=Hgorro*n;
    LPiSCjHb=4; cantlinea(LPiSCjHb)=(H-Hgorro)*n;
    LPiSCjF=5; cantlinea(LPiSCjF)=2*n;
    LSCiCBD=6; cantlinea(LSCiCBD)=n;
    LSCiSCjHgorro=7; cantlinea(LSCiSCjHgorro)=n*Hgorro;
    Lcircular=8; cantlinea(Lcircular)=2;
end
if estructura==2
    cantlinea=1:5+2*F;
    LPiSCi=1; cantlinea(LPiSCi)=n;
    LPiCBDE=2; cantlinea(LPiCBDE)=n;
    LPiSCjHE=3; cantlinea(LPiSCjHE)=n*H;
    LPiSCjFE=4:4+F-1; cantlinea(LPiSCjFE)=2*n;
    LSCiCBD=4+F; cantlinea(LSCiCBD)=n;
    LSCiSCjHgorroE=5+F; cantlinea(LSCiSCjHgorroE)=n*Hgorro;
    LSCiSCjFgorroE=6+F:5+2*F; cantlinea(LSCiSCjFgorroE)=2*n;
end
if estructura==3
    cantlinea=1:3;
    LPiSCmenosi=1; cantlinea(LPiSCmenosi)=n;
    Lcircular=2; cantlinea(Lcircular)=2;
    LCBDSj=3; cantlinea(LCBDSj)=n;
end
if estructura==4
    cantlinea=3;
    LPiSCi=1; cantlinea(LPiSCi)=n;
    LSCiSCjHgorro=2; cantlinea(LSCiSCjHgorro)=n*Hgorro;
    Lcircular=3; cantlinea(Lcircular)=2;
end
B=sum(f.*cantlinea.*tc);
end
```

Y la cantidad de plazas:

```
function
S=sillas(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1,T0,g,t)
F=(n-1-H)/2;
Fgorro=(n-1-Hgorro)/2;
lambda = carga(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1);
tc =
tiempociclo(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1,T0,g,t);
if estructura==1
    cantlinea=1:8;
    LPiSCi=1; cantlinea(LPiSCi)=n;
    LPiCBD=2; cantlinea(LPiCBD)=n;
    LPiSCjH=3; cantlinea(LPiSCjH)=Hgorro*n;
    LPiSCjHb=4; cantlinea(LPiSCjHb)=(H-Hgorro)*n;
    LPiSCjF=5; cantlinea(LPiSCjF)=2*n;
    LSCiCBD=6; cantlinea(LSCiCBD)=n;
    LSCiSCjHgorro=7; cantlinea(LSCiSCjHgorro)=n*Hgorro;
    Lcircular=8; cantlinea(Lcircular)=2;
end
if estructura==2
    cantlinea=1:5+2*F;
    LPiSCi=1; cantlinea(LPiSCi)=n;
    LPiCBDE=2; cantlinea(LPiCBDE)=n;
    LPiSCjHE=3; cantlinea(LPiSCjHE)=n*H;
    LPiSCjFE=4:4+F-1; cantlinea(LPiSCjFE)=2*n;
    LSCiCBD=4+F; cantlinea(LSCiCBD)=n;
    LSCiSCjHgorroE=5+F; cantlinea(LSCiSCjHgorroE)=n*Hgorro;
    LSCiSCjFgorroE=6+F:5+2*F; cantlinea(LSCiSCjFgorroE)=2*n;
end
if estructura==3
    cantlinea=1:3;
    LPiSCmenosi=1; cantlinea(LPiSCmenosi)=n;
    Lcircular=2; cantlinea(Lcircular)=2;
    LCBDSj=3; cantlinea(LCBDSj)=n;
end
if estructura==4
    cantlinea=3;
    LPiSCi=1; cantlinea(LPiSCi)=n;
    LSCiSCjHgorro=2; cantlinea(LSCiSCjHgorro)=n*Hgorro;
    Lcircular=3; cantlinea(Lcircular)=2;
end
S=sum(f.*cantlinea.*lambda.*tc);
```

Con ello, se programan los costos en función de las frecuencias para cada estructura:

```

function [c] =
costos(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1,T0,g,t,pv,pe,pT,c
0,c1)
F=(n-1-H)/2;
Fgorro=(n-1-Hgorro)/2;
lambda = carga(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1);
tc =
tiempociclo(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1,T0,g,t);
te = tiempospera(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1);
tv =
tiempoviaje(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1,T0,g,t);
T = trasbordos(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1);
if estructura==1
    cantlinea=1:8;
    LPiSCi=1; cantlinea(LPiSCi)=n;
    LPiCBD=2; cantlinea(LPiCBD)=n;
    LPiSCjH=3; cantlinea(LPiSCjH)=Hgorro*n;
    LPiSCjHb=4; cantlinea(LPiSCjHb)=(H-Hgorro)*n;
    LPiSCjF=5; cantlinea(LPiSCjF)=2*n;
    LSCiCBD=6; cantlinea(LSCiCBD)=n;
    LSCiSCjHgorro=7; cantlinea(LSCiSCjHgorro)=n*Hgorro;
    Lcircular=8; cantlinea(Lcircular)=2;
end
if estructura==2
    cantlinea=1:5+2*F;
    LPiSCi=1; cantlinea(LPiSCi)=n;
    LPiCBDE=2; cantlinea(LPiCBDE)=n;
    LPiSCjHE=3; cantlinea(LPiSCjHE)=n*H;
    LPiSCjFE=4:4+F-1; cantlinea(LPiSCjFE)=2*n;
    LSCiCBD=4+F; cantlinea(LSCiCBD)=n;
    LSCiSCjHgorroE=5+F; cantlinea(LSCiSCjHgorroE)=n*Hgorro;
    LSCiSCjFgorroE=6+F:5+2*F; cantlinea(LSCiSCjFgorroE)=2*n;
end
if estructura==3
    cantlinea=1:3;
    LPiSCmenosi=1; cantlinea(LPiSCmenosi)=n;
    Lcircular=2; cantlinea(Lcircular)=2;
    LCBDSj=3; cantlinea(LCBDSj)=n;
end
if estructura==4
    cantlinea=3;
    LPiSCi=1; cantlinea(LPiSCi)=n;
    LSCiSCjHgorro=2; cantlinea(LSCiSCjHgorro)=n*Hgorro;
    Lcircular=3; cantlinea(Lcircular)=2;
end
costooperador=(c0+c1*lambda).*f.*tc.*cantlinea;
costooperador=sum(costooperador);
c=costooperador+pv*tv*Y+pe*te*Y+pT*T;
end

```

Se reescriba incorporando los parámetros que no serán considerados variables:

```
function x = opt(f)
global estructura
global alfa
global beta
global a
global Y
global n
global H
global Hgorro
global T1
global T0
global g
global t
global pv
global pe
global pT
global c0
global c1
x=costos(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1,T0,g,t,pv,pe,pT
,c0,c1);
end
```

Se programa la restricción, paso necesario para usar las herramientas de optimización de Matlab:

```
function [cineq, ceq]=restriccion(f)
global estructura
global alfa
global beta
global a
global Y
global n
global H
global Hgorro
global T1
capacidadmaxima=291; %buses BIarticulados transantiago
lambda=carga(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1);
cineq=lambda-capacidadmaxima;
ceq=[];
end
```

Con ello, se procede a resolver para los distintos valores de α y β , haciéndose cargo del cálculo de H y \bar{H} para cada estructura:

```
%valores de los parametros. En dolares/minuto. Todo de acuerdo a
%JaraDiaz,Gschwender,Bravo

c0=0.1775;
c1=0.0034;
t=2.5/60;
pv=1.48/60;
pe=4.44/60;
%pT=12*pv; %de acuerdo al mismo paper, el caso más bajo en
estudio cuyo valor es no nulo
pT=24*pv;

%e1
estructura=1;
LPiSCi=1; LPiCBD=2; LPiSCjH=3; LPiSCjHb=4; LPiSCjF=5; LSCiCBD=6;
LSCiSCjHgorro=7; Lcircular=8;
E1=zeros(50,50,9,3);
rn=sqrt(2*(1-cos(2*pi/n)));
b=1-a;
resultadosH1=zeros(50,50,2,3);
resultadosT1=zeros(50,50,3,3);
CBD=2*n+1; Pi=1; Pj=2; SCi=n+1; SCj=n+2;
auxH=0; auxHgorro=0;
pasajeros=[8000 24000 72000]/60;
T1=[0 0 0];
for i=1:3
    Y=pasajeros(i);
for k=1:50
    for j=1:51-k
        1
        i
        k
        alfa=k/52;
        beta=j/52;
        gamma=1-alfa-beta;
        alfagorro=alfa/(1-beta);
        gammagorro=gamma/(1-beta);
        H=1;
        Hgorro=1;
        x=zeros(9,1);
        for h=1:4
            T1=[0 0 0];
            Hgorro=1;
            Fgorro=(n-1-Hgorro)/2;
            H=1+2*(h-1);
            auxiliartrasbordo=0;
```

```

        while auxiliartrasbordo==0
            Hgorro=1;
            [f,c] = fmincon(@opt,[1 1 1 1 1 1 1
1],[],[],[],[0 0 0 0 0 0 0],[@restriccion,options);
            %buscar el Hgorro de equilibrio

[Z,V]=subebaja(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1);

costoviaH=pe/(2*f(4))+pv*[2*T0+t*(V(4,CBD)+V(4,SCj)/2)];
%lo que le costaria a un tipo que parte en el SC decidir irse via
la linea b en vez de lo proyectado q es la ciruclar

costoviaF=pe/(2*f(8))+pv*[Fgorro*rn*T0+t*(2*(Fgorro-
1)+1/2)*Z(8,SCi)];
            while costoviaF>costoviaH && Hgorro<H
                Hgorro=Hgorro+2;
                Fgorro=(n-1-Hgorro)/2;
                [f,c] = fmincon(@opt,[1 1 1 1 1 1 1
1],[],[],[],[0 0 0 0 0 0 0],[@restriccion,options);

[Z,V]=subebaja(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1);

costoviaH=pe/(2*f(4))+pv*[(g+2)*T0+t*(V(4,CBD)+V(4,SCj)/2)];

costoviaF=pe/(2*f(8))+pv*[Fgorro*rn*T0+t*(2*(Fgorro-
1)+1/2)*Z(8,SCi)];
            end
            auxiliartrasbordo=1;

CostoSinTrasbordo1=pe/(2*f(LPiSCjH))+pv*t*[Z(LPiSCjH,SCi)+V(LPiSC
jH,SCi)+V(LPiSCjH,CBD)+V(LPiSCjH,SCj)/2];

CostoConTrasbordo1=CostoSinTrasbordo1*(f(LPiSCjH)/(f(LPiSCi)+f(LP
iCBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LPiSCjHb)*(H-
Hgorro)+2*f(LPiSCjF)))+(pT+pe/(2*f(LSCiSCjHgorro))+pv*t*max(max(V
(LPiSCi,SCi),V(LPiCBD,SCi)),max(V(LPiSCjHb,SCi),V(LPiSCjF,SCi)))*
(1/2)+pv*t*(V(LSCiSCjHgorro,CBD)+V(LSCiSCjHgorro,SCj)/2))*((f(LPi
SCi)+f(LPiCBD)+f(LPiSCjH)*(Hgorro-1)+f(LPiSCjHb)*(H-
Hgorro)+2*f(LPiSCjF))/(f(LPiSCi)+f(LPiCBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LP
iSCjHb)*(H-Hgorro)+2*f(LPiSCjF)));
            if CostoConTrasbordo1<CostoSinTrasbordo1 &&
T1(1)==0
                T1(1)=1;
                auxiliartrasbordo=0;
            end

CostoSinTrasbordo2=pe/(2*(f(LPiSCjH)+f(LPiSCjHb)+f(LPiCBD)))+pv*t
*(1/((f(LPiSCjH)+f(LPiSCjHb)+f(LPiCBD))))*[f(LPiSCjH)*(Z(LPiSCjH,
SCi)+V(LPiSCjH,SCi)+V(LPiSCjH,CBD)/2)+f(LPiSCjHb)*

```



```

(Z(LPiSCjHb,SCi)+V(LPiSCjHb,SCi)+V(LPiSCjHb,CBD)/2)+f(LPiCBD)*(Z(
LPiCBD,SCi)+V(LPiCBD,SCi)+V(LPiCBD,CBD)/2)];

CostoConTrasbordo2=CostoSinTrasbordo2*((f(LPiCBD)+f(LPiSCjH)*Hgor
ro+f(LPiSCjHb)*(H-
Hgorro))/(f(LPiSCi)+f(LPiCBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LPiSCjHb)*(H-
Hgorro)+2*f(LPiSCjF)))+(pT+pe/(2*(f(LSCiSCjHgorro)+f(LSCiCBD)))+p
v*t*(1/2)*max(V(LPiSCi,SCi),V(LPiSCjF,SCi))+pv*t*(1/2)*(1/(f(LSCi
CBD)+f(LSCiSCjHgorro)))*[f(LSCiCBD)*V(LSCiCBD,CBD)/2+f(LSCiSCjHgo
rro)*V(LSCiSCjHgorro,CBD)/2])*((f(LPiSCi)+2*f(LPiSCjF))/(f(LPiSCi
)+f(LPiCBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LPiSCjHb)*(H-
Hgorro)+2*f(LPiSCjF)));
        if CostoConTrasbordo2<CostoSinTrasbordo2 &&
T1(2)==0
                T1(2)=1;
                auxiliartrasbordo=0;
        end

CostoSinTrasbordo3=pe/(2*f(LPiSCjF))+pv*t*(Z(LPiSCjF,SCi)+V(LPiSC
jF,SCi)+sum(Z(LPiSCjF,SCi+1:SCi+h-1))+sum(V(LPiSCjF,SCi+1:SCi+h-
1))+V(LPiSCjF,SCi+h)/2);

CostoConTrasbordo3=CostoSinTrasbordo3*[(f(LPiSCjF))/(f(LPiSCi)+f(L
PiCBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LPiSCjHb)*(H-
Hgorro)+2*f(LPiSCjF)))+(2/(n-
1))]+[pT+pe/(2*f(Lcircular))+pv*t*(1/2)*max(max(V(LPiSCi,SCi),V(L
PiCBD,
SCi)),max(V(LPiSCjHb,SCi),V(LPiSCjH,SCi)))+pv*t*(2*(h-
1)+1/2)*Z(Lcircular,SCi)]*((f(LPiSCi)+f(LPiCBD)+f(LPiSCjH)*Hgorr
o+f(LPiSCjHb)*(H-
Hgorro)+f(LPiSCjF))/(f(LPiSCi)+f(LPiCBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LPiS
CjHb)*(H-Hgorro)+2*f(LPiSCjF))));
        if CostoConTrasbordo3<CostoSinTrasbordo3 &&
T1(3)==0
                T1(3)=1;
                auxiliartrasbordo=0;
        end

        end
        if h==1 %aqui veremos cual es el H optimo
                x=[f,c];
                auxH=1;
                auxHgorro=Hgorro;
                auxT1=T1;
        else
                if c<x(9)
                        x=[f,c];
                        auxH=H;
                        auxHgorro=Hgorro;

```

```

        auxT1=T1;
    end
end

    end
    E1(k,j,:,i)=x;
    resultadosH1(k,j,1,i)=auxH;
    resultadosH1(k,j,2,i)=auxHgorro;
    resultadosT1(k,j,i,:)=auxT1;

end
end
end

%comienza todo de nuevo con la estructura 2
estructura=2;
F=floor(sqrt(2)/sqrt(1-cos(2*pi/n)));
numlineas=5+2*F;
E2=zeros(50,50,numlineas+1,3);
H=n-1-2*F;
Hgorro=H;
finicial=ones(1,numlineas);
cota=zeros(1,numlineas);
for i=1:3
    Y=pasajeros(i);
for k=1:50
for j=1:51-k
    2
    i
    alfa=k/52;
    beta=j/52;
    [f,c] =
    fmincon(@opt,finicial,[],[],[],[],cota,[],@restriccion,options);
for L=1:9
E2(k,j,L,i)=f(L);
end
E2(k,j,numlineas+1,i)=c;
end
end
end

% estructura 3
estructura=3;
E3=zeros(50,50,4,3);
CBD=2*n+1; Pi=1; Pj=2; SCi=n+1; SCj=n+2;
resultadosH3=zeros(50,50,2,3);
rn=sqrt(2*(1-cos(2*pi/n)));
for i=1:3

```

```

    Y=pasajeros(i);
for k=1:50
    for j=1:51-k
        3
        i
        H=1;
        Hgorro=1;
        F=(n-1-H)/2;
        Fgorro=(n-1-Hgorro)/2;
        alfa=k/52;
        beta=j/52;
        [f,c] = fmincon(@opt,[1 1 1],[[],[],[],[],[],[0 0
0],[[],@restriccion,options);
        [Z,V]=subebaja(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1);

costoviaH=pe/(2*(f(1)+f(3)))+pv*2*T0+pv*t*V(1,CBD)/2+pv*t*(V(1,SC
j)/2)*f(1)/(f(1)+f(3))+pv*t*(V(3,SCj)/2)*f(3)/(f(1)+f(3))+pv*t*Z(
1,SCi)+pv*t*V(1,SCi);
        costoviaF=pe/(2*f(2))+pv*(F*rn*T0+t*((F-
1)*2+1/2)*V(2,SCi)+t*V(1,SCi)/2);

costoviaHgorro=pe/(2*(f(1)+f(3)))+pe/(2*f(1))+pv*2*T0+pv*t*V(1,CB
D)/2+pv*t*(V(1,SCj)/2)*f(1)/(f(1)+f(3))+pv*t*(V(3,SCj)/2)*f(3)/(f
(1)+f(3))+pT;
        costoviaFgorro=pe/(2*f(2))+pv*(Fgorro*rn*T0+t*((Fgorro-
1)*2+1/2)*V(2,SCi));
        while costoviaH<costoviaF && H<n-1
            Hgorro=H;
            H=H+2;
            F=(n-1-H)/2;
            [f,c] = fmincon(@opt,[1 1 1],[[],[],[],[],[],[0 0
0],[[],@restriccion,options);

[Z,V]=subebaja(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1);

costoviaHgorro=pe/(2*(f(1)+f(3)))+pe/(2*f(1))+pv*2*T0+pv*t*V(1,CB
D)/2+p
v*t*(V(1,SCj)/2)*f(1)/(f(1)+f(3))+pv*t*(V(3,SCj)/2)*f(3)/(f(1)+f(
3))+pT;

costoviaFgorro=pe/(2*f(2))+pv*(Fgorro*rn*T0+t*((Fgorro-
1)*2+1/2)*V(2,SCi));
        while costoviaHgorro<costoviaFgorro && Hgorro<H
            Hgorro=Hgorro+2;
            Fgorro=(n-1-Hgorro)/2;
            [f,c] = fmincon(@opt,[1 1 1],[[],[],[],[],[],[0 0
0],[[],@restriccion,options);

[Z,V]=subebaja(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1);

```

```

costoviaHgorro=pe/(2*(f(1)+f(3)))+pe/(2*f(1))+pv*2*T0+pv*t*V(1,CB
D)/2+pv*t*(V(1,SCj)/2)*f(1)/(f(1)+f(3))+pv*t*(V(3,SCj)/2)*f(3)/(f
(1)+f(3))+pT;

costoviaFgorro=pe/(2*f(2))+pv*(Fgorro*rn*T0+t*((Fgorro-
1)*2+1/2)*V(2,SCi));

costoviaH=pe/(2*(f(1)+f(3)))+pv*2*T0+pv*t*V(1,CBD)/2+pv*t*(V(1,SC
j)/2)*f(1)/(f(1)+f(3))+pv*t*(V(3,SCj)/2)*f(3)/(f(1)+f(3));
        costoviaF=pe/(2*f(2))+pv*(F*rn*T0+t*((F-
1)*2+1/2)*V(2,SCi));
        end
        end
        resultadosH3(k,j,1,i)=H;
        resultadosH3(k,j,2,i)=Hgorro;
        E3(k,j,:,i)=[f c];
    end
end
end

% %estructura=4
estructura=4;
E4=zeros(50,50,4,3);
rn=sqrt(2*(1-cos(2*pi/n)));
b=1-a;
resultadosH4=zeros(50,50,3);
for i=1:3
    Y=pasajeros(i);
for k=1:50
    for j=1:51-k
        4
        i
        alfa=k/52;
        beta=j/52;
        gamma=1-alfa-beta;
        alfagorro=alfa/(1-beta);
        gammagorro=gamma/(1-beta);
        H=1;
        Hgorro=H;
        F=(n-1-H)/2;
        [f,c]=fmincon(@opt,[1 1 1],[[],[],[],[],[0 0
0],[[],@restriccion,options)];

costoviaH=pe/(2*f(2))+pv*[2*T0+t*(a*alfa*Y/(H*n*f(2))+b*alfagorro
*Y/(H*n*f(2))+a*gamma*Y/(2*n*(n-1)*f(2))+b*gammagorro*Y/(2*n*(n-
1)*f(2))];

```

```

        costoviaF=pe/(2*f(2))+pv*[F*rn*T0+(2*(F-
1)+1/2)*t*(a*gamma*F*Y/(n*(n-1)*f(3))+b*gammagorro*F*Y/(n*(n-
1)*f(3)))]];
        while costoviaH<costoviaF && H<n-1
            H=H+2;
            Hgorro=H;
            [f,c]=fmincon(@opt,[1 1 1],[[],[],[],[],[],[0 0
0],[[],@restriccion,options)];

costoviaH=pe/(2*f(2))+pv*[2*T0+t*(a*alfa*Y/(H*n*f(2))+b*alfagorro
*Y/(H*n*f(2))+a*gamma*Y/(2*n*(n-1)*f(2))+b*gammagorro*Y/(2*n*(n-
1)*f(2)))]];
            F=(n-1-H)/2;
            costoviaF=pe/(2*f(2))+pv*[F*rn*T0+(2*(F-
1)+1/2)*t*(a*gamma*F*Y/(n*(n-1)*f(3))+b*gammagorro*F*Y/(n*(n-
1)*f(3)))]];
            end
            for L=1:3
                E4(k,j,L,i)=f(L);
            end
            E4(k,j,4,i)=c;
            resultadosH4(k,j,i)=H;
        end
    end
end
end

```

Equivalentemente, se resuelve en para α, Y :

```

c0=0.1775;
c1=0.0034;
t=2.5/60;
pv=1.48/60;
pe=4.44/60;

N=50;

Pasajeros=logspace(log10(800/60),log10(480000/60),N);

estructura=1;
LPiSCi=1; LPiCBD=2; LPiSCjH=3; LPiSCjHb=4; LPiSCjF=5; LSCiCBD=6;
LSCiSCjHgorro=7; Lcircular=8;
E1Y=zeros(N,N,9,3);
rn=sqrt(2*(1-cos(2*pi/n)));
b=1-a;
CBD=2*n+1; Pi=1; Pj=2; SCi=n+1; SCj=n+2;
auxH=0; auxHgorro=0;
T1=[0 0 0];
pT=24*pv

```

```

%i=1 significa gama maximo, i=2 gama mediano, i=3 gama nulo
resultadosH1Y=zeros(N,N,2,3);
for i=1:3
    for k=1:N
        for yy=1:N;
            1
            i
            k
            Y=Pasajeros(yy);
            alfa=k/(N+2);
            beta=(i==1)*(1-alfa)/n + (i==2)*(1-alfa)/2 +
(i==3)*(1-alfa);
            gamma=1-alfa-beta;
            alfagorro=alfa/(1-beta);
            gammagorro=gamma/(1-beta);
            H=1;
            Hgorro=1;
            x=zeros(9,1);
            for h=1:4
                Hgorro=1;
                Fgorro=(n-1-Hgorro)/2;
                H=1+2*(h-1);
                Hgorro=1;
                [f,c] = fmincon(@opt,[1 1 1 1 1 1 1
1],[[],[],[],[],[],[0 0 0 0 0 0 0 0 0],[[],@restriccion,options);
                %buscar el Hgorro de equilibrio

[Z,V]=subebaja(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1);

costoviaH=pe/(2*f(4))+pv*[2*T0+t*(V(4,CBD)+V(4,SCj)/2)]; %lo que
le costaria a un tipo que parte en el SC decidir irse via la
linea b en vez de lo proyectado q es la ciruclar

costoviaF=pe/(2*f(8))+pv*[Fgorro*rn*T0+t*(2*(Fgorro-
1)+1/2)*Z(8,SCi)];
                while costoviaF>costoviaH && Hgorro<H
                    Hgorro=Hgorro+2;
                    Fgorro=(n-1-Hgorro)/2;
                    [f,c] = fmincon(@opt,[1 1 1 1 1 1 1
1],[[],[],[],[],[],[0 0 0 0 0 0 0 0 0],[[],@restriccion,options);

[Z,V]=subebaja(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1);

costoviaH=pe/(2*f(4))+pv*[(g+2)*T0+t*(V(4,CBD)+V(4,SCj)/2)];

costoviaF=pe/(2*f(8))+pv*[Fgorro*rn*T0+t*(2*(Fgorro-
1)+1/2)*Z(8,SCi)];
                end
                if h==1 %aqui veremos cual es el H optimo

```

```

        x=[f,c];
        auxH=1;
        auxHgorro=Hgorro;

        else
            if c<x(9)
                x=[f,c];
                auxH=H;
                auxHgorro=Hgorro;
            end
        end
    end
    E1Y(k,yy,:,i)=x;
    resultadosH1Y(k,yy,1,i)=auxH;
    resultadosH1Y(k,yy,2,i)=auxHgorro;
end
end
end

%e2
estructura=2;
F=floor(sqrt(2)/sqrt(1-cos(2*pi/n)));
numlineas=5+2*F;
E2Y=zeros(N,N,numlineas+1,3);
H=n-1-2*F;
Hgorro=H;
finicial=ones(1,numlineas);
cota=zeros(1,numlineas);
for i=1:3
    Y=pasajeros(i);
    for k=1:N
        for yy=1:N
            2
            i
            k
            alfa=k/(N+2);
            Y=Pasajeros(yy);
            beta=(i==1)*(1-alfa)/n + (i==2)*(1-alfa)/2 +
(i==3)*(1-alfa);
            [f,c] =
fmincon(@opt,finicial,[],[],[],[],cota,[],@restriccion,options);
            for L=1:numlineas
                E2Y(k,yy,L,i)=f(L);
            end
            E2Y(k,yy,numlineas+1,i)=c;
        end
    end
end
end
end

```

```

% estructura 3
estructura=3;
E3Y=zeros(N,N,4,3);
CBD=2*n+1; Pi=1; Pj=2; SCi=n+1; SCj=n+2;
resultadosH3Y=zeros(N,N,2,3);
rn=sqrt(2*(1-cos(2*pi/n)));
for i=1:3
    for k=1:N
        for yy=1:N
            3
            i
            k
            alfa=k/(N+2);
            Y=Pasajeros(yy);
            H=1;
            Hgorro=1;
            F=(n-1-H)/2;
            Fgorro=(n-1-Hgorro)/2;
            beta=(i==1)*(1-alfa)/n + (i==2)*(1-alfa)/2 +
(i==3)*(1-alfa);
            [f,c] = fmincon(@opt,[1 1 1],[],[],[],[],[0 0
0],[,],@restriccion,options);

[Z,V]=subebaja(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1);

costoviaH=pe/(2*(f(1)+f(3)))+pv*2*T0+pv*t*V(1,CBD)/2+pv*t*(V(1,SC
j)/2)*f(1)/(f(1)+f(3))+pv*t*(V(3,SCj)/2)*f(3)/(f(1)+f(3))+pv*t*Z(
1,SCi)+pv*t*V(1,SCi);
            costoviaF=pe/(2*f(2))+pv*(F*rn*T0+t*((F-
1)*2+1/2)*V(2,SCi)+t*V(1,SCi)/2);

costoviaHgorro=pe/(2*(f(1)+f(3)))+pe/(2*f(1))+pv*2*T0+pv*t*V(1,CB
D)/2+pv*t*(V(1,SCj)/2)*f(1)/(f(1)+f(3))+pv*t*(V(3,SCj)/2)*f(3)/(f
(1)+f(3))+pT;

costoviaFgorro=pe/(2*f(2))+pv*(Fgorro*rn*T0+t*((Fgorro-
1)*2+1/2)*V(2,SCi));
            while costoviaH<costoviaF && H<n-1
                Hgorro=H;
                H=H+2;
                F=(n-1-H)/2;
                [f,c] = fmincon(@opt,[1 1 1],[],[],[],[],[0 0
0],[,],@restriccion,options);

[Z,V]=subebaja(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1);

costoviaHgorro=pe/(2*(f(1)+f(3)))+pe/(2*f(1))+pv*2*T0+pv*t*

```



```

V(1,CBD)/2+pv*t*(V(1,SCj)/2)*f(1)/(f(1)+f(3))+pv*t*(V(3,SCj)/2)*f
(3)/(f(1)+f(3))+pT;

costoviaFgorro=pe/(2*f(2))+pv*(Fgorro*rn*T0+t*((Fgorro-
1)*2+1/2)*V(2,SCi));
        while costoviaHgorro<costoviaFgorro && Hgorro<H
            Hgorro=Hgorro+2;
            Fgorro=(n-1-Hgorro)/2;
            [f,c] = fmincon(@opt,[1 1 1],[],[],[],[],[0 0
0],[,],@restriccion,options);

[Z,V]=subebaja(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1);

costoviaHgorro=pe/(2*(f(1)+f(3)))+pe/(2*f(1))+pv*2*T0+pv*t*V(1,CB
D)/2+pv*t*(V(1,SCj)/2)*f(1)/(f(1)+f(3))+pv*t*(V(3,SCj)/2)*f(3)/(f
(1)+f(3))+pT;

costoviaFgorro=pe/(2*f(2))+pv*(Fgorro*rn*T0+t*((Fgorro-
1)*2+1/2)*V(2,SCi));

costoviaH=pe/(2*(f(1)+f(3)))+pv*2*T0+pv*t*V(1,CBD)/2+pv*t*(V(1,SC
j)/2)*f(1)/(f(1)+f(3))+pv*t*(V(3,SCj)/2)*f(3)/(f(1)+f(3));
        costoviaF=pe/(2*f(2))+pv*(F*rn*T0+t*((F-
1)*2+1/2)*V(2,SCi));
            end
        end
        resultadosH3Y(k,yy,1,i)=H;
        resultadosH3Y(k,j,2,i)=Hgorro;
        E3Y(k,yy,:,i)=[f c];
    end
end
end

%estructura=4
estructura=4;
E4Y=zeros(N,N,4,3);
rn=sqrt(2*(1-cos(2*pi/n)));
b=1-a;
resultadosH4Y=zeros(N,N,3);
%for i=1:3
for i=1:3
    Y=pasajeros(i);
    for k=1:N
        for yy=1:N
            4
            i
            k
            alfa=k/(N+2);

```

```

        beta=(i==1)*(1-alfa)/n + (i==2)*(1-alfa)/2 +
(i==3)*(1-alfa);
        Y=Pasajeros(yy);
        gamma=1-alfa-beta;
        alfagorro=alfa/(1-beta);
        gammagorro=gamma/(1-beta);
        H=1;
        Hgorro=H;
        F=(n-1-H)/2;
        [f,c]=fmincon(@opt,[1 1 1],[[],[],[],[],[0 0
0],[[],@restriccion,options);

costoviaH=pe/(2*f(2))+pv*[2*T0+t*(a*alfa*Y/(H*n*f(2))+b*alfagorro
*Y/(H*n*f(2))+a*gamma*Y/(2*n*(n-1)*f(2))+b*gammagorro*Y/(2*n*(n-
1)*f(2))];
        costoviaF=pe/(2*f(2))+pv*[F*rn*T0+(2*(F-
1)+1/2)*t*(a*gamma*F*Y/(n*(n-1)*f(3))+b*gammagorro*F*Y/(n*(n-
1)*f(3))];
        while costoviaH<costoviaF && H<n-1
            H=H+2;
            Hgorro=H;
            [f,c]=fmincon(@opt,[1 1 1],[[],[],[],[],[0 0
0],[[],@restriccion,options);

costoviaH=pe/(2*f(2))+pv*[2*T0+t*(a*alfa*Y/(H*n*f(2))+b*alfagorro
*Y/(H*n*f(2))+a*gamma*Y/(2*n*(n-1)*f(2))+b*gammagorro*Y/(2*n*(n-
1)*f(2))];
            F=(n-1-H)/2;
            costoviaF=pe/(2*f(2))+pv*[F*rn*T0+(2*(F-
1)+1/2)*t*(a*gamma*F*Y/(n*(n-1)*f(3))+b*gammagorro*F*Y/(n*(n-
1)*f(3))];
        end
        for L=1:3
            E4Y(k,yy,L,i)=f(L);
        end
        E4Y(k,yy,4,i)=c;
        resultadosH4Y(k,yy,i)=H;
    end
end
end

c0=0.1775;
c1=0.0034;
t=2.5/60;
pv=1.48/60;
pe=4.44/60;

```

```

Pasajeros=logspace(log10(800/60),log10(480000/60),N);

estructura=1;
LPiSCi=1; LPiCBD=2; LPiSCjH=3; LPiSCjHb=4; LPiSCjF=5; LSCiCBD=6;
LSCiSCjHgorro=7; Lcircular=8;

rn=sqrt(2*(1-cos(2*pi/n)));
b=1-a;
CBD=2*n+1; Pi=1; Pj=2; SCi=n+1; SCj=n+2;
auxH=0; auxHgorro=0;
T1=[0 0 0];

%i=1 significa gama maximo, i=2 gama mediano, i=3 gama nulo

    for k=1:N
        for yy=1:N;
            1
            k
            Y=Pasajeros(yy);
            alfa=k/(N+2);
            beta=(1-alfa)*(9/10);
            gamma=1-alfa-beta;
            alfagorro=alfa/(1-beta);
            gammagorro=gamma/(1-beta);
            H=1;
            Hgorro=1;
            x=zeros(9,1);
            for h=1:4
                Hgorro=1;
                Fgorro=(n-1-Hgorro)/2;
                H=1+2*(h-1);
                Hgorro=1;
                [f,c] = fmincon(@opt,[1 1 1 1 1 1 1
1],[],[],[],[0 0 0 0 0 0 0],[,],@restriccion,options);
                %buscar el Hgorro de equilibrio

[Z,V]=subebaja(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1);

costoviaH=pe/(2*f(4))+pv*[2*T0+t*(V(4,CBD)+V(4,SCj)/2)]; %lo que
le costaria a un tipo que parte en el SC decidir irse via la
linea b en vez de lo proyectado q es la ciruclar

costoviaF=pe/(2*f(8))+pv*[Fgorro*rn*T0+t*(2*(Fgorro-
1)+1/2)*Z(8,SCi)];
                while costoviaF>costoviaH && Hgorro<H
                    Hgorro=Hgorro+2;
                    Fgorro=(n-1-Hgorro)/2;

```

```

                                [f,c] = fmincon(@opt,[1 1 1 1 1 1 1
1],[[],[],[],[],[],[0 0 0 0 0 0 0],[[],@restriccion,options]);

[Z,V]=subebaja(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1);

costoviaH=pe/(2*f(4))+pv*[(g+2)*T0+t*(V(4,CBD)+V(4,SCj)/2)];

costoviaF=pe/(2*f(8))+pv*[Fgorro*rn*T0+t*(2*(Fgorro-
1)+1/2)*Z(8,SCi)];
                                end
                                if h==1 %aqui veremos cual es el H optimo
                                    x=[f,c];
                                    auxH=1;
                                    auxHgorro=Hgorro;

                                else
                                    if c<x(9)
                                        x=[f,c];
                                        auxH=H;
                                        auxHgorro=Hgorro;

                                    end

                                end
                                end
                                end
                                E1Y(k,yy,:,4)=x;
                                resultadosH1Y(k,yy,1,4)=auxH;
                                resultadosH1Y(k,yy,2,4)=auxHgorro;
                                end
                                end

%e2
estructura=2;
F=floor(sqrt(2)/sqrt(1-cos(2*pi/n)));
numlineas=5+2*F;
H=n-1-2*F;
Hgorro=H;
finicial=ones(1,numlineas);
cota=zeros(1,numlineas);
    for k=1:N
        for yy=1:N
            2
            k
            alfa=k/(N+2);
            Y=Pasajeros(yy);
            beta=(1-alfa)*(9/10);
            [f,c] =
fmincon(@opt,finicial,[],[],[],[],cota,[],@restriccion,options);
            for L=1:numlineas

```

```

                E2Y(k,yy,L,4)=f(L);
            end
            E2Y(k,yy,numlineas+1,4)=c;
        end
    end

% estructura 3
estructura=3;

CBD=2*n+1; Pi=1; Pj=2; SCi=n+1; SCj=n+2;

rn=sqrt(2*(1-cos(2*pi/n)));

    for k=1:N
        for yy=1:N
            3
            k
            alfa=k/(N+2);
            Y=Pasajeros(yy);
            H=1;
            Hgorro=1;
            F=(n-1-H)/2;
            Fgorro=(n-1-Hgorro)/2;
            beta=(1-alfa)*(9/10);
            [f,c] = fmincon(@opt,[1 1 1],[],[],[],[],[0 0
0],[,],@restriccion,options);

[Z,V]=subebaja(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1);

costoviaH=pe/(2*(f(1)+f(3)))+pv*2*T0+pv*t*V(1,CBD)/2+pv*t*(V(1,SC
j)/2)*f(1)/(f(1)+f(3))+pv*t*(V(3,SCj)/2)*f(3)/(f(1)+f(3))+pv*t*Z(
1,SCi)+pv*t*V(1,SCi);
            costoviaF=pe/(2*f(2))+pv*(F*rn*T0+t*((F-
1)*2+1/2)*V(2,SCi)+t*V(1,SCi)/2);

costoviaHgorro=pe/(2*(f(1)+f(3)))+pe/(2*f(1))+pv*2*T0+pv*t*V(1,CB
D)/2+pv*t*(V(1,SCj)/2)*f(1)/(f(1)+f(3))+pv*t*(V(3,SCj)/2)*f(3)/(f
(1)+f(3))+pT;

costoviaFgorro=pe/(2*f(2))+pv*(Fgorro*rn*T0+t*((Fgorro-
1)*2+1/2)*V(2,SCi));
            while costoviaH<costoviaF && H<n-1
                Hgorro=H;
                H=H+2;
                F=(n-1-H)/2;
                [f,c] = fmincon(@opt,[1 1 1],[],[],[],[],[0 0
0],[,],@restriccion,options);

```

```

[Z,V]=subebaja(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1);

costoviaHgorro=pe/(2*(f(1)+f(3)))+pe/(2*f(1))+pv*2*T0+pv*t*V(1,CB
D)/2+pv*t*(V(1,SCj)/2)*f(1)/(f(1)+f(3))+pv*t*(V(3,SCj)/2)*f(3)/(f
(1)+f(3))+pT;

costoviaFgorro=pe/(2*f(2))+pv*(Fgorro*rn*T0+t*((Fgorro-
1)*2+1/2)*V(2,SCi));
        while costoviaHgorro<costoviaFgorro && Hgorro<H
                Hgorro=Hgorro+2;
                Fgorro=(n-1-Hgorro)/2;
                [f,c] = fmincon(@opt,[1 1 1],[],[],[],[0 0
0],[,],@restriccion,options);

[Z,V]=subebaja(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1);

costoviaHgorro=pe/(2*(f(1)+f(3)))+pe/(2*f(1))+pv*2*T0+pv*t*V(1,CB
D)/2+pv*t*(V(1,SCj)/2)*f(1)/(f(1)+f(3))+pv*t*(V(3,SCj)/2)*f(3)/(f
(1)+f(3))+pT;

costoviaFgorro=pe/(2*f(2))+pv*(Fgorro*rn*T0+t*((Fgorro-
1)*2+1/2)*V(2,SCi));

costoviaH=pe/(2*(f(1)+f(3)))+pv*2*T0+pv*t*V(1,CBD)/2+pv*t*(V(1,SC
j)/2)*f(1)/(f(1)+f(3))+pv*t*(V(3,SCj)/2)*f(3)/(f(1)+f(3));
        costoviaF=pe/(2*f(2))+pv*(F*rn*T0+t*((F-
1)*2+1/2)*V(2,SCi));
                end
                end
                resultadosH3Y(k,yy,1,4)=H;
                resultadosH3Y(k,yy,2,4)=Hgorro;
                E3Y(k,yy,:,4)=[f c];
        end
end

%estructura=4
estructura=4;

rn=sqrt(2*(1-cos(2*pi/n)));
b=1-a;

%for i=1:3

        for k=1:N
                for yy=1:N
                        4

```

```

        k
        alfa=k/(N+2);
        beta=(1-alfa)*(9/10);
        Y=Pasajeros(yy);
        gamma=1-alfa-beta;
        alfagorro=alfa/(1-beta);
        gammagorro=gamma/(1-beta);
        H=1;
        Hgorro=H;
        F=(n-1-H)/2;
        [f,c]=fmincon(@opt,[1 1 1],[[],[],[],[],[],[0 0
0],[[],@restriccion,options)];

costoviaH=pe/(2*f(2))+pv*[2*T0+t*(a*alfa*Y/(H*n*f(2))+b*alfagorro
*Y/(H*n*f(2))+a*gamma*Y/(2*n*(n-1)*f(2))+b*gammagorro*Y/(2*n*(n-
1)*f(2))];
        costoviaF=pe/(2*f(2))+pv*[F*rn*T0+(2*(F-
1)+1/2)*t*(a*gamma*F*Y/(n*(n-1)*f(3))+b*gammagorro*F*Y/(n*(n-
1)*f(3))];
        while costoviaH<costoviaF && H<n-1
            H=H+2;
            Hgorro=H;
            [f,c]=fmincon(@opt,[1 1 1],[[],[],[],[],[],[0 0
0],[[],@restriccion,options)];

costoviaH=pe/(2*f(2))+pv*[2*T0+t*(a*alfa*Y/(H*n*f(2))+b*alfagorro
*Y/(H*n*f(2))+a*gamma*Y/(2*n*(n-1)*f(2))+b*gammagorro*Y/(2*n*(n-
1)*f(2))];
            F=(n-1-H)/2;
            costoviaF=pe/(2*f(2))+pv*[F*rn*T0+(2*(F-
1)+1/2)*t*(a*gamma*F*Y/(n*(n-1)*f(3))+b*gammagorro*F*Y/(n*(n-
1)*f(3))];
        end
        for L=1:3
            E4Y(k,yy,L,4)=f(L);
        end
        E4Y(k,yy,4,4)=c;
        resultadosH4Y(k,yy,4)=H;
    end
end

```

Se programa la comparación entre distintas estructuras. Este código se modifica manualmente dependiendo de si el segundo parámetro es β o Y :

```

MejorLinea=zeros(N,N,4);
MejorCostos=zeros(N,N,4);
Costos=zeros(N,N,3,4);

```

```

for i=1:3
    for k=1:N
        for yy=1:N+1-k
            C1Y=E1(k,yy,9,i);
            C2Y=E2(k,yy,numlineas+1,i);
            C3Y=E3(k,yy,4,i);
            C4Y=E4(k,yy,4,i);
            cc=[C1Y C2Y C3Y C4Y];
            Costos(k,yy,i,:)=cc;
            [aa bb]=min(cc);
            MejorLinea(k,yy,i)=bb;
            MejorCostos(k,yy,i)=aa;
        end
    end
end
end

```

Con ello, se pueden determinar las características específicas de cada línea en cada estructura para α, β :

```

load Respaldo8

K1=zeros(50,50,8,3); K2=zeros(50,50,numlineas,3);
K3=zeros(50,50,3,3); K4=zeros(50,50,3,3); %las capacidades de
cada línea
B1=zeros(50,50,3); B2=zeros(50,50,3); B3=zeros(50,50,3);
B4=zeros(50,50,3); %flota total x estructura
S1=zeros(50,50,4); S2=zeros(50,50,4); S3=zeros(50,50,4);
S4=zeros(50,50,4); %el "número de sillas" de cada estructura
te1=zeros(50,50,3); te2=zeros(50,50,3); te3=zeros(50,50,3);
te4=zeros(50,50,3); %el tiempo de espera de cada estructura
tv1=zeros(50,50,3); tv2=zeros(50,50,3); tv3=zeros(50,50,3);
tv4=zeros(50,50,3); %tiempo de viaje de cada estructura
trasbordos1=zeros(50,50,3); trasbordos2=zeros(50,50,3);
trasbordos3=zeros(50,50,3); trasbordos4=zeros(50,50,3);
%trasbordos totales de cada estructura

for i=1:3
    for k=1:50
        for j=1:51-k
            alfa=k/52;
            beta=j/52;
            Y=pasajeros(i);
            f1=1:8;
            for u=1:8
                f1(u)=E1(k,j,u,i);
            end
            f2=1:numlineas;

```



```

        for u=1:numlineas
            f2(u)=E2(k,j,u,i);
        end
        f3=1:3;
        for u=1:3
            f3(u)=E3(k,j,u,i);
        end
        f4=1:3;
        for u=1:3
            f4(u)=E4(k,j,u,i);
        end
        H2=3; Hgorro2=3;
        H1=resultadosH1(k,j,1,i);
Hgorro1=resultadosH1(k,j,2,i);
        H3=resultadosH3(k,j,1,i);
Hgorro3=resultadosH3(k,j,2,i);
        H4=resultadosH4(k,j,i); Hgorro4=H4;
        TT1=resultadosT1(k,j,i,:);

K1(k,j,:,i)=carga(1,alfa,beta,a,Y,f1,n,H1,Hgorro1,TT1);
K2(k,j,:,i)=carga(2,alfa,beta,a,Y,f2,n,H2,Hgorro2,TT1);

K3(k,j,:,i)=carga(3,alfa,beta,a,Y,f3,n,H3,Hgorro3,TT1);
K4(k,j,:,i)=carga(4,alfa,beta,a,Y,f4,n,H4,Hgorro4,TT1);

B1(k,j,i)=flota(1,alfa,beta,a,Y,f1,n,H1,Hgorro1,TT1,T0,g,t);
B2(k,j,i)=flota(2,alfa,beta,a,Y,f2,n,H2,Hgorro2,TT1,T0,g,t);
B3(k,j,i)=flota(3,alfa,beta,a,Y,f3,n,H3,Hgorro3,TT1,T0,g,t);
B4(k,j,i)=flota(4,alfa,beta,a,Y,f4,n,H4,Hgorro4,TT1,T0,g,t);

S1(k,j,i)=sillas(1,alfa,beta,a,Y,f1,n,H1,Hgorro1,TT1,T0,g,t);
S2(k,j,i)=sillas(2,alfa,beta,a,Y,f2,n,H2,Hgorro2,TT1,T0,g,t);

S3(k,j,i)=sillas(3,alfa,beta,a,Y,f3,n,H3,Hgorro3,TT1,T0,g,t);
S4(k,j,i)=sillas(4,alfa,beta,a,Y,f4,n,H4,Hgorro4,TT1,T0,g,t);

te1(k,j,i)=tiempoespera(1,alfa,beta,a,Y,f1,n,H1,Hgorro1,TT1);
te2(k,j,i)=tiempoespera(2,alfa,beta,a,Y,f2,n,H2,Hgorro2,TT1);

te3(k,j,i)=tiempoespera(3,alfa,beta,a,Y,f3,n,H3,Hgorro3,TT1);
te4(k,j,i)=tiempoespera(4,alfa,beta,a,Y,f4,n,H4,Hgorro4,TT1);

tv1(k,j,i)=tiempoviaje(1,alfa,beta,a,Y,f1,n,H1,Hgorro1,TT1,T0,g,t);
);
tv2(k,j,i)=tiempoviaje(2,alfa,beta,a,Y,f2,n,H2,Hgorro2,TT1,T0,g,t);
);

```

```

tv3(k,j,i)=tiempoviaje(3,alfa,beta,a,Y,f3,n,H3,Hgorro3,TT1,T0,g,t
);
tv4(k,j,i)=tiempoviaje(4,alfa,beta,a,Y,f4,n,H4,Hgorro4,TT1,T0,g,t
);

trasbordos1(k,j,i)=trasbordos(1,alfa,beta,a,Y,f1,n,H1,Hgorro1,TT1
);
trasbordos2(k,j,i)=trasbordos(2,alfa,beta,a,Y,f2,n,H2,Hgorro2,TT1
);

trasbordos3(k,j,i)=trasbordos(3,alfa,beta,a,Y,f3,n,H3,Hgorro3,TT1
);
trasbordos4(k,j,i)=trasbordos(4,alfa,beta,a,Y,f4,n,H4,Hgorro4,TT1
);

        end
    end
end
save Respaldo9

```

Y cálculo equivalente para α, Y :

```

load Respaldo17

K1=zeros(50,50,8,3); K2=zeros(50,50,numlineas,3);
K3=zeros(50,50,3,3); K4=zeros(50,50,3,3); %las capacidades de
cada línea
B1=zeros(50,50,3); B2=zeros(50,50,3); B3=zeros(50,50,3);
B4=zeros(50,50,3); %flota total x estructura
S1=zeros(50,50,4); S2=zeros(50,50,4); S3=zeros(50,50,4);
S4=zeros(50,50,4); %el "número de sillas" de cada estructura
te1=zeros(50,50,3); te2=zeros(50,50,3); te3=zeros(50,50,3);
te4=zeros(50,50,3); %el tiempo de espera de cada estructura
tv1=zeros(50,50,3); tv2=zeros(50,50,3); tv3=zeros(50,50,3);
tv4=zeros(50,50,3); %tiempo de viaje de cada estructura
trasbordos1=zeros(50,50,3); trasbordos2=zeros(50,50,3);
trasbordos3=zeros(50,50,3); trasbordos4=zeros(50,50,3);
%trasbordos totales de cada estructura

for i=1:3
    for k=1:N
        for yy=1:N
            alfa=k/(N+2);
            beta=(i==1)*(1-alfa)/n + (i==2)*(1-alfa)/2 +
(i==3)*(1-alfa);
            Y=Pasajeros(yy);
            f1=1:8;

```

```

        for u=1:8
            f1(u)=E1Y(k,yy,u,i);
        end
        f2=1:numlineas;
        for u=1:numlineas
            f2(u)=E2Y(k,yy,u,i);
        end
        f3=1:3;
        for u=1:3
            f3(u)=E3Y(k,yy,u,i);
        end
        f4=1:3;
        for u=1:3
            f4(u)=E4Y(k,yy,u,i);
        end
        H2=3; Hgorro2=3;
        H1=resultadosH1Y(k,yy,1,i);
Hgorro1=resultadosH1Y(k,yy,2,i);
        H3=resultadosH3Y(k,yy,1,i);
Hgorro3=resultadosH3Y(k,yy,2,i);
        H4=resultadosH4Y(k,yy,i); Hgorro4=H4;
        TT1=[0 0 0];

K1(k,yy,:,i)=carga(1,alfa,beta,a,Y,f1,n,H1,Hgorro1,TT1);
K2(k,yy,:,i)=carga(2,alfa,beta,a,Y,f2,n,H2,Hgorro2,TT1);

K3(k,yy,:,i)=carga(3,alfa,beta,a,Y,f3,n,H3,Hgorro3,TT1);
K4(k,yy,:,i)=carga(4,alfa,beta,a,Y,f4,n,H4,Hgorro4,TT1);

B1(k,yy,i)=flota(1,alfa,beta,a,Y,f1,n,H1,Hgorro1,TT1,T0,g,t);
B2(k,yy,i)=flota(2,alfa,beta,a,Y,f2,n,H2,Hgorro2,TT1,T0,g,t);
B3(k,yy,i)=flota(3,alfa,beta,a,Y,f3,n,H3,Hgorro3,TT1,T0,g,t);
B4(k,yy,i)=flota(4,alfa,beta,a,Y,f4,n,H4,Hgorro4,TT1,T0,g,t);

S1(k,yy,i)=sillas(1,alfa,beta,a,Y,f1,n,H1,Hgorro1,TT1,T0,g,t);
S2(k,yy,i)=sillas(2,alfa,beta,a,Y,f2,n,H2,Hgorro2,TT1,T0,g,t);

S3(k,yy,i)=sillas(3,alfa,beta,a,Y,f3,n,H3,Hgorro3,TT1,T0,g,t);
S4(k,yy,i)=sillas(4,alfa,beta,a,Y,f4,n,H4,Hgorro4,TT1,T0,g,t);

te1(k,yy,i)=tiempoespera(1,alfa,beta,a,Y,f1,n,H1,Hgorro1,TT1);
te2(k,yy,i)=tiempoespera(2,alfa,beta,a,Y,f2,n,H2,Hgorro2,TT1);

te3(k,yy,i)=tiempoespera(3,alfa,beta,a,Y,f3,n,H3,Hgorro3,TT1);
te4(k,yy,i)=tiempoespera(4,alfa,beta,a,Y,f4,n,H4,Hgorro4,TT1);

tv1(k,yy,i)=tiempoviaje(1,alfa,beta,a,Y,f1,n,H1,Hgorro1,TT1,T0,

```

```

g,t);
tv2(k,yy,i)=tiempoviaje(2,alfa,beta,a,Y,f2,n,H2,Hgorro2,TT1,T0,g,
t);

tv3(k,yy,i)=tiempoviaje(3,alfa,beta,a,Y,f3,n,H3,Hgorro3,TT1,T0,g,
t);
tv4(k,yy,i)=tiempoviaje(4,alfa,beta,a,Y,f4,n,H4,Hgorro4,TT1,T0,g,
t);

trasbordos1(k,yy,i)=trasbordos(1,alfa,beta,a,Y,f1,n,H1,Hgorro1,TT
1);
trasbordos2(k,yy,i)=trasbordos(2,alfa,beta,a,Y,f2,n,H2,Hgorro2,TT
1);

trasbordos3(k,yy,i)=trasbordos(3,alfa,beta,a,Y,f3,n,H3,Hgorro3,TT
1);
trasbordos4(k,yy,i)=trasbordos(4,alfa,beta,a,Y,f4,n,H4,Hgorro4,TT
1);

        end
    end
end
save Respaldo18

```

Con lo anterior, hacer los gráficos presentados en el trabajo es directo. Se presenta el ejemplo del gráfico de capacidades porque incorpora además el cálculo de sus promedios:

```

load Respaldo9
ejex=1:50; ejex=ejex/52;
i=3;
y1=1:50; y2=1:50; y3=1:50; y4=1:50;
Y=pasajeros(i);

    for k=1:50
        KK1=K1(k,1:51-k,:,i); KK2=K2(k,1:51-k,:,i);
KK3=K3(k,1:51-k,:,i); KK4=K4(k,1:51-k,:,i);
        CAPAC1=1:51-k; CAPAC2=1:51-k; CAPAC3=1:51-k; CAPAC4=1:51-
k;
        for j=1:51-k
            H1=resultadosH1Y(k,j,1,i);
Hgorro1=resultadosH1Y(k,j,2,i); H2=3; Hgorro2=3;
H3=resultadosH3Y(k,j,1,i); Hgorro3=resultadosH3Y(k,j,2,i);
H4=resultadosH4Y(k,j,i); Hgorro4=H4;
            cantlineal=1:8;
            LPiSCi=1; cantlineal(LPiSCi)=n;
            LPiCBD=2; cantlineal(LPiCBD)=n;
            LPiSCjH=3; cantlineal(LPiSCjH)=Hgorro1*n;
            LPiSCjHb=4; cantlineal(LPiSCjHb)=(H1-Hgorro1)*n;

```

```

LPiSCjF=5; cantlinea1(LPiSCjF)=2*n;
LSCiCBD=6; cantlinea1(LSCiCBD)=n;
LSCiSCjHgorro=7; cantlinea1(LSCiSCjHgorro)=n*Hgorro1;
Lcircular=8; cantlinea1(Lcircular)=2;

cantlinea2=1:numlineas;
LPiSCi=1; cantlinea2(LPiSCi)=n;
LPiCBDE=2; cantlinea2(LPiCBDE)=n;
LPiSCjHE=3; cantlinea2(LPiSCjHE)=n*H2;
LPiSCjFE=4:4+F-1; cantlinea2(LPiSCjFE)=2*n;
LSCiCBD=4+F; cantlinea2(LSCiCBD)=n;
LSCiSCjHgorroE=5+F;
cantlinea2(LSCiSCjHgorroE)=n*Hgorro2;
LSCiSCjFgorroE=6+F:5+2*F;
cantlinea2(LSCiSCjFgorroE)=2*n;

cantlinea3=1:3;
LPiSCmenosi=1; cantlinea3(LPiSCmenosi)=n;
Lcircular=2; cantlinea3(Lcircular)=2;
LCBDSCj=3; cantlinea3(LCBDSCj)=n;

cantlinea4=3;
LPiSCi=1; cantlinea4(LPiSCi)=n;
LSCiSCjHgorro=2; cantlinea4(LSCiSCjHgorro)=n*Hgorro2;
Lcircular=3; cantlinea4(Lcircular)=2;

f1=E1(k,j,1:8,i); f2=E2(k,j,1:numlineas,i);
f3=E3(k,j,1:3,i); f4=E4(k,j,1:3,i);
f1=f1(1,:); f2=f2(1,:); f3=f3(1,:); f4=f4(1,:);
tc1 =
tiempociclo(1,alfa,beta,a,Y,f1,n,H1,Hgorro1,TT1,T0,g,t); tc2 =
tiempociclo(2,alfa,beta,a,Y,f2,n,H2,Hgorro2,TT1,T0,g,t); tc3 =
tiempociclo(3,alfa,beta,a,Y,f3,n,H3,Hgorro1,TT1,T0,g,t); tc4 =
tiempociclo(4,alfa,beta,a,Y,f4,n,H4,Hgorro4,TT1,T0,g,t);
for L=1:3
    if tc4(L)==Inf
        tc4(L)=0;
    end
end

aux1=1:8; aux2=1:numlineas; aux3=1:3; aux4=1:3;
for l=1:8
    aux1(l)=KK1(1,j,l);
end
for l=1:numlineas
    aux2(l)=KK2(1,j,l);
end
for l=1:3
    aux3(l)=KK3(1,j,l);

```

```

        aux4(1)=KK4(1,j,1);
    end

CAPAC1(j)=sum(aux1.*cantlinea1.*f1.*tc1)/sum(cantlinea1.*f1.*tc1)
;

CAPAC2(j)=sum(aux2.*cantlinea2.*f2.*tc2)/sum(cantlinea2.*f2.*tc2)
;

CAPAC3(j)=sum(aux3.*cantlinea3.*f3.*tc3)/sum(cantlinea3.*f3.*tc3)
;

CAPAC4(j)=sum(aux4.*cantlinea4.*f4.*tc4)/sum(cantlinea4.*f4.*tc4)
;

    end
    y1(k)=mean(CAPAC1); y2(k)=mean(CAPAC2);
y3(k)=mean(CAPAC3); y4(k)=mean(CAPAC4);
    end
    p=plot(ejex,y1,ejex,y2,ejex,y3,ejex,y4)
    xlabel('\alpha')
    ylabel('Capacidad Promedio')
    Title('Capacidad Promedio de cada Estructura para Y=72000
Pasajeros/Hora')
    set (p(1),'Displayname','Dir')
    set (p(2),'Displayname','Exc')
    set (p(3),'Displayname','H&S')
    set (p(4),'Displayname','T-A')

```

Se programó además un código específico para verificar la condición de que en la estructura Dir se cumpliera el supuesto de que nadie traspasaría:

```

%RESULTADO IMPORTANTE: CON LOS ARREGLOS EN LA MODELACION,
SOLAMENTE HAY
%"ERROR" EN LOS VIAJES PiSCjF, SON MUY POCOS Y PARA GAMMA>0.76.
PARA LOS
%OTROS DOS VIAJES, NUNCA NUNCA HAY TRASBORDOS PARA ESTE VOLUMEN
DE
%PASAJAROS

CBD=2*n+1; Pi=1; Pj=2; SCi=n+1; SCj=n+2;
LPiSCi=1; LPiCBD=2; LPiSCjH=3; LPiSCjHb=4; LPiSCjF=5; LSCiCBD=6;
LSCiSCjHgorro=7; Lcircular=8;
F=(n-H-1)/2;
revisor=zeros(3,3); %primera coordenada para viajes PiSCjH
(PiSCjHb no se estudia porque no existe una alternativa con
traspordo), segunda para PiCBD, tercera para PiSCjF

```

```

aux=51; %servira para mostrar que siempre ocurre cuando gamma es
muy muy chico
estructura=1;
Diferencia=0; DiferenciaR=0; Detalles=zeros(50,50,3,3);
for i=1:3

for k=1:50
    for j=1:51-k
        T1=resultadosT1(k,j,i,:);
        alfa=k/52;
        beta=j/52;
        f=E1(k,j,1:8,i);
        H=resultadosH1(k,j,1,i);
        Hgorro=resultadosH1(k,j,2,i);
        F=(n-H-1)/2;
        [Z,V]=subebaja(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1);

CostoSinTrasbordo=pe/(2*f(LPISCjH))+pv*t*[Z(LPISCjH,SCi)+V(LPISCj
H,SCi)+V(LPISCjH,CBD)+V(LPISCjH,SCj)/2];

CostoConTrasbordo=CostoSinTrasbordo*(f(LPISCjH)/(f(LPiSCi)+f(LPiC
BD)+f(LPISCjH)*Hgorro+f(LPISCjHb)*(H-
Hgorro)+2*f(LPISCjF)))+(pT+pe/(2*f(LSCiSCjHgorro))+pv*t*max(max(V
(LPiSCi,SCi),V(LPiCBD,SCi)),max(V(LPISCjHb,SCi),V(LPISCjF,SCi)))*
(1/2)+pv*t*(V(LSCiSCjHgorro,CBD)+V(LSCiSCjHgorro,SCj)/2))*((f(LPi
SCi)+f(LPiCBD)+f(LPISCjH)*(Hgorro-1)+f(LPISCjHb)*(H-
Hgorro)+2*f(LPISCjF))/(f(LPiSCi)+f(LPiCBD)+f(LPISCjH)*Hgorro+f(LP
iSCjHb)*(H-Hgorro)+2*f(LPISCjF)));
        variableauxiliar=0;
        if CostoConTrasbordo<CostoSinTrasbordo
            variableauxiliar=1;
        end
        if abs(variableauxiliar-T1(1))>0
            dif=abs(CostoSinTrasbordo-CostoConTrasbordo);
            if dif>Diferencia
                Diferencia=dif;
            end
        end
        DiferenciaR=100*Diferencia/(pv*(g+2)*T0+(max(CostoSinTrasbordo,Co
stoConTrasbordo)));
        end
        revisor(1,i)=revisor(1,i)+1;
        if aux>k+j
            aux=k+j;
        end
        Detalles(k,j,1,i)=1;
    end
    %comenzamos con PiCBD
end
CostoSinTrasbordo=pe/(2*(f(LPISCjH)+f(LPISCjHb)+f(LPiCBD)))+

```

```

pv*t*(1/((f(LPiSCjH)+f(LPiSCjHb)+f(LPicBD))))*[f(LPiSCjH)*(Z(LPiS
CjH,SCi)+V(LPiSCjH,SCi)+V(LPiSCjH,CBD)/2)+f(LPiSCjHb)*(Z(LPiSCjHb
,SCi)+V(LPiSCjHb,SCi)+V(LPiSCjHb,CBD)/2)+f(LPicBD)*(Z(LPicBD,SCi)
+V(LPicBD,SCi)+V(LPicBD,CBD)/2)];

CostoConTrasbordo=CostoSinTrasbordo*((f(LPicBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro
+f(LPiSCjHb)*(H-
Hgorro))/(f(LPiSCi)+f(LPicBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LPiSCjHb)*(H-
Hgorro)+2*f(LPiSCjF)))+(pT+pe/(2*(f(LSCiSCjHgorro)+f(LSCiCBD)))+p
v*t*(1/2)*max(V(LPiSCi,SCi),V(LPiSCjF,SCi))+pv*t*(1/2)*(1/(f(LSCi
CBD)+f(LSCiSCjHgorro)))*[f(LSCiCBD)*V(LSCiCBD,CBD)/2+f(LSCiSCjHgo
rro)*V(LSCiSCjHgorro,CBD)/2])*((f(LPiSCi)+2*f(LPiSCjF))/(f(LPiSCi
)+f(LPicBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LPiSCjHb)*(H-
Hgorro)+2*f(LPiSCjF)));
    variableauxiliar=0;
    if CostoConTrasbordo<CostoSinTrasbordo
        variableauxiliar=1;
    end
    if abs(variableauxiliar-T1(1))>0
        dif=CostoSinTrasbordo-CostoConTrasbordo;
        if dif>Diferencia
            Diferencia=dif;
        end
DiferenciaR=100*Diferencia/((pv*(g+1)*T0+max(CostoSinTrasbordo,Co
stoConTrasbordo)));
    end
    revisor(2,i)=revisor(2,i)+1;
    Detalles(k,j,2,i)=1;
    if aux>k+j
        aux=k+j;
    end
end
for h=1:F
CostoSinTrasbordo=pe/(2*f(LPiSCjF))+pv*t*(Z(LPiSCjF,SCi)+V(LPiSCj
F,SCi)+sum(Z(LPiSCjF,SCi+1:SCi+h-1))+sum(V(LPiSCjF,SCi+1:SCi+h-
1))+V(LPiSCjF,SCi+h)/2);

CostoConTrasbordo=CostoSinTrasbordo2*[f(LPiSCjF)/(f(LPiSCi)+f(LP
iCBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LPiSCjHb)*(H-
Hgorro)+2*f(LPiSCjF)))+(2/(n-
1))+[pT+pe/(2*f(Lcircular))+pv*t*(1/2)*max(max(V(LPiSCi,SCi),V(L
PicBD,SCi)),max(V(LPiSCjHb,SCi),V(LPiSCjH,SCi)))+pv*t*(2*(h-
1)+1/2)*Z(Lcircular,SCi)]*((f(LPiSCi)+f(LPicBD)+f(LPiSCjH)*Hgorr
o+f(LPiSCjHb)*(H-
Hgorro)+f(LPiSCjF))/(f(LPiSCi)+f(LPicBD)+f(LPiSCjH)*Hgorro+f(LPiS
CjHb)*(H-Hgorro)+2*f(LPiSCjF))));
    variableauxiliar=0;
    if CostoConTrasbordo<CostoSinTrasbordo

```



```

        variableauxiliar=1;
    end
    if abs(variableauxiliar-T1(1))>0
        dif=CostoSinTrasbordo-CostoConTrasbordo;
        if dif>Diferencia
            Diferencia=dif;
DiferenciaR=100*Diferencia/((pv*(g+h*rn)*T0+max(CostoSinTrasbordo
,CostoConTrasbordo)));
        end
        revisor(3,i)=revisor(3,i)+1;
        Detalles(k,j,3,i)=1;
        if aux>k+j
            aux=k+j
        end
    end
end
end
end
end
end
%
% revisor10000=[0 0 0]; %primera coordenada para viajes PiSCjH
(PiSCjHb no se estudia porque no existe una alternativa con
trasbordo), segunda para PiCBD, tercera para PiSCjF
% for k=1:50
%     for j=1:51-k
%         alfa=k/52;
%         beta=j/52;
%         T1=resultadosT1(k,j,2,:);
%         H=resultadosH1(k,j,1,2);
%         Hgorro=resultadosH1(k,j,2,2);
%         F=(n-H-1)/2;
%         f=E1(k,j,1:8,2);
%
[Z,V]=subebaja(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1);
%
CostoSinTrasbordo=pe/(2*f(LPiSCjH))+pv*t*[Z(LPiSCjH,SCi)+V(LPiSCj
H,SCi)+V(LPiSCjH,CBD)+V(LPiSCjH,SCj)/2];
%
CostoConTrasbordo=pT+pe/(2*(f(LPiSCi)+f(LPiCBD)+f(LPiSCjHb)+f(LPi
SCjF)))+pe/(2*f(LSCiSCjHgorro))+pv*t*max(max(V(LPiSCi,SCi),V(LPiC
BD,SCi)),max(V(LPiSCjHb,SCi),V(LPiSCjF,SCi)))*(1/2)+pv*t*(V(LSCiS
CjHgorro,CBD)+V(LSCiSCjHgorro,SCj)/2);%la lıgıca es que el tipo
decidiı subirse al primer bus que vio pasar para tomar la otra
lınea
%         if CostoConTrasbordo<CostoSinTrasbordo
%             revisor10000(1)=revisor10000(1)+1;
%             dif=CostoSinTrasbordo-CostoConTrasbordo;
%             if dif>Diferencia

```

```

%           Diferencia=dif;
%
%           end
%           if aux>k+j
%               aux=k+j;
%           end
%       end
%       %comenzamos con PiCBD
%
CostoSinTrasbordo=pe/(2*(f(LPiSCjH)+f(LPiSCjHb)+f(LPiCBD)))+pv*t*
(1/((f(LPiSCjH)+f(LPiSCjHb)+f(LPiCBD))))*[f(LPiSCjH)*(Z(LPiSCjH,S
Ci)+V(LPiSCjH,SCi)+V(LPiSCjH,CBD)/2)+f(LPiSCjHb)*(Z(LPiSCjHb,SCi)
+V(LPiSCjHb,SCi)+V(LPiSCjHb,CBD)/2)+f(LPiCBD)*(Z(LPiCBD,SCi)+V(LP
iCBD,SCi)+V(LPiCBD,CBD)/2)];
%
CostoConTrasbordo=pT+pe/(2*(f(LPiSCi)+f(LPiSCjF)))+pe/(2*(f(LSCiS
CjHgorro)+f(LSCiCBD)))+pv*t*(1/2)*max(V(LPiSCi,SCi),V(LPiSCjF,SCi
))+pv*t*(1/2)*(1/(f(LSCiCBD)+f(LSCiSCjHgorro)))*[f(LSCiCBD)*V(LSC
iCBD,CBD)/2+f(LSCiSCjHgorro)*V(LSCiSCjHgorro,CBD)/2];
%           if CostoConTrasbordo<CostoSinTrasbordo
%               revisor10000(2)=revisor10000(2)+1;
%               dif=CostoSinTrasbordo-CostoConTrasbordo;
%               if dif>Diferencia
%                   Diferencia=dif;
%               end
%               if aux>k+j
%                   aux=k+j;
%               end
%           end
%       end
%       for h=1:F
%
CostoSinTrasbordo=pe/(2*f(LPiSCjF))+pv*t*(Z(LPiSCjF,SCi)+V(LPiSCj
F,SCi)+sum(Z(LPiSCjF,SCi+1:SCi+h-1))+sum(V(LPiSCjF,SCi+1:SCi+h-
1))+V(LPiSCjF,SCi+h)/2);
%
CostoConTrasbordo=pT+pe/(2*(f(LPiSCi)+f(LPiCBD)+f(LPiSCjHb)+f(LPi
SCjH)))+pe/(2*f(Lcircular))+pv*t*(1/2)*max(max(V(LPiSCi,SCi),V(LP
iCBD,SCi)),max(V(LPiSCjHb,SCi),V(LPiSCjH,SCi)))+pv*t*(2*(h-
1)+1/2)*Z(Lcircular,SCi);
%           if CostoConTrasbordo<CostoSinTrasbordo
%               dif=CostoSinTrasbordo-CostoConTrasbordo;
%               if dif>Diferencia
%                   Diferencia=dif;
%               end
%               revisor10000(3)=revisor10000(3)+1;
%               if aux>k+j
%                   aux=k+j;
%               end
%           end

```

```

%           end
%       end
%   end
% end
%
% revisor70000=[0 0 0]; %primera coordenada para viajes PiSCjH
(PiSCjHb no se estudia porque no existe una alternativa con
trasbordo), segunda para PiCBD, tercera para PiSCjF
% for k=1:50
%     for j=1:51-k
%         alfa=k/52;
%         beta=j/52;
%         T1=resultadosT1(k,j,3,:);
%         H=resultadosH1(k,j,1,3);
%         Hgorro=resultadosH1(k,j,2,3);
%         F=(n-H-1)/2;
%         f=E1(k,j,1:8,3);
%
[Z,V]=subebaja(estructura,alfa,beta,a,Y,f,n,H,Hgorro,T1);
%
CostoSinTrasbordo=pe/(2*f(LPISCjH))+pv*t*[Z(LPISCjH,SCi)+V(LPISCj
H,SCi)+V(LPISCjH,CBD)+V(LPISCjH,SCj)/2];
%
CostoConTrasbordo=pT+pe/(2*(f(LPiSCi)+f(LPiCBD)+f(LPiSCjHb)+f(LPi
SCjF)))+pe/(2*f(LSCiSCjHgorro))+pv*t*max(max(V(LPiSCi,SCi),V(LPiC
BD,SCi)),max(V(LPiSCjHb,SCi),V(LPiSCjF,SCi)))*(1/2)+pv*t*(V(LSCiS
CjHgorro,CBD)+V(LSCiSCjHgorro,SCj)/2);%la lógica es que el tipo
decidi  subirse al primer bus que vio pasar para tomar la otra
línea
%         if CostoConTrasbordo<CostoSinTrasbordo
%             dif=CostoSinTrasbordo-CostoConTrasbordo;
%             if dif>Diferencia
%                 Diferencia=dif;
%             end
%             revisor70000(1)=revisor70000(1)+1;
%             if aux>k+j
%                 aux=k+j;
%             end
%         end
%     end
%     %comenzamos con PiCBD
%
CostoSinTrasbordo=pe/(2*(f(LPISCjH)+f(LPISCjHb)+f(LPiCBD)))+pv*t*
(1/((f(LPISCjH)+f(LPISCjHb)+f(LPiCBD))))*[f(LPISCjH)*(Z(LPISCjH,S
Ci)+V(LPISCjH,SCi)+V(LPISCjH,CBD)/2)+f(LPISCjHb)*(Z(LPISCjHb,SCi)
+V(LPISCjHb,SCi)+V(LPISCjHb,CBD)/2)+f(LPiCBD)*(Z(LPiCBD,SCi)+V(LP
iCBD,SCi)+V(LPiCBD,CBD)/2)];
%
CostoConTrasbordo=pT+pe/(2*(f(LPiSCi)+f(LPiSCjF)))+pe/(2*(f(LSCiS
CjHgorro)+f(LSCiCBD)))+pv*t*(1/2)*

```

```

max(V(LPiSCi,SCi),V(LPiSCjF,SCi))+pv*t*(1/2)*(1/(f(LSCiCBD)+f(LSC
iSCjHgorro)))*[f(LSCiCBD)*V(LSCiCBD,CBD)/2+f(LSCiSCjHgorro)*V(LSC
iSCjHgorro,CBD)/2];
%         if CostoConTrasbordo<CostoSinTrasbordo
%             dif=CostoSinTrasbordo-CostoConTrasbordo;
%             if dif>Diferencia
%                 Diferencia=dif;
%             end
%             revisor70000(2)=revisor70000(2)+1;
%             if aux>k+j
%                 aux=k+j;
%             end
%         end
%     for h=1:F
%
CostoSinTrasbordo=pe/(2*f(LPiSCjF))+pv*t*(Z(LPiSCjF,SCi)+V(LPiSCj
F,SCi)+sum(Z(LPiSCjF,SCi+1:SCi+h-1))+sum(V(LPiSCjF,SCi+1:SCi+h-
1))+V(LPiSCjF,SCi+h)/2);
%
CostoConTrasbordo=pT+pe/(2*(f(LPiSCi)+f(LPiCBD)+f(LPiSCjHb)+f(LPi
SCjH)))+pe/(2*f(Lcircular))+pv*t*(1/2)*max(max(V(LPiSCi,SCi),V(LP
iCBD,SCi)),max(V(LPiSCjHb,SCi),V(LPiSCjH,SCi)))+pv*t*(2*(h-
1)+1/2)*Z(Lcircular,SCi);
%         if CostoConTrasbordo<CostoSinTrasbordo
%             dif=CostoSinTrasbordo-CostoConTrasbordo;
%             if dif>Diferencia
%                 Diferencia=dif;
%             end
%             revisor70000(3)=revisor70000(3)+1;
%             if aux>k+j
%                 aux=k+j;
%             end
%         end
%     end
% end
% end
% end

```

Por último, se muestra el código que calcula los distintos valores que toman H y \bar{H} para cada estructura:

```

medidorH1=zeros(4,2,3);
medidorH2=medidorH1;
medidorH3=medidorH1;
medidorH4=medidorH1;
load Respaldo9;
resultadosH2=zeros(50,50,2,3);
for k=1:50
    for j=1:51-k

```

```

        resultadosH2(k,j, :, :)=3;
    end
end
for p=1:2
for k=1:50
    for j=1:51-k
        for i=1:3

medidorH1((resultadosH1(k,j,1,i)+1)/2,p,i)=medidorH1((resultadosH
1(k,j,1,i)+1)/2,p,i)+1;

medidorH2((resultadosH2(k,j,1,i)+1)/2,p,i)=medidorH2((resultadosH
2(k,j,1,i)+1)/2,p,i)+1;

medidorH3((resultadosH3(k,j,1,i)+1)/2,p,i)=medidorH3((resultadosH
3(k,j,1,i)+1)/2,p,i)+1;
medidorH4((resultadosH4(k,j,1,1)+1)/2,p,i)=medidorH4((resultadosH
4(k,j,1,1)+1)/2,p,i)+1; %acÃ; no va p pq la estructura 4 tiene
Hgorro=H
        end
    end
end
end
i=3;
p=1;
RH=zeros(4,4);
RH(1,:)=medidorH1(:,p,i);
RH(2,:)=medidorH2(:,p,i);
RH(3,:)=medidorH3(:,p,i);
RH(4,:)=medidorH4(:,p,i);
graficarBarra(RH',p,i);

```