UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

PROPIEDADES VARIACIONALES DE FUNCIONES CONVEXAS DESDE EL ANÁLISIS EPI-PUNTADO

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

PEDRO ANTONIO PÉREZ AROS

PROFESORA GUÍA:
RAFAEL CORREA FONTECILLA

PROFESORA CO-GUÍA:
ABDERRAHIM HANTOUTE

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
ROBERTO COMINETTI COTTI-COMETTI
JUAN PEYPOUQUET

SANTIAGO DE CHILE
2014

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Ingeniero Civil Matemático.
POR: PEDRO ANTONIO PÉREZ AROS
FECHA: 01 de septiembre de 2014
PROFESOR GUÍA: RAFAEL CORREA FONTECILLA

PROPIEDADES VARIACIONALES DE FUNCIONES CONVEXAS DESDE EL ANÁLISIS EPI-PUNTADO

Este trabajo está dedicado a extender resultados clásicos de análisis variacional en espacios de Banach a espacios vectoriales topológicos localmente convexos, usando la familia de funciones *asintóticamente epi-puntadas*. La primera parte se basa en descubrir principios variacionales, donde se prueba que importantes herramientas desarrolladas sobre espacios de Banach se mantienen en contextos más generales para esta clase de funciones, más precisamente esta memoria de título inicia generalizando los siguientes resultados clásicos del análisis variacional y convexo.

- *Ekeland's variational principle* [14]
- *Brøndsted, A. and Rockafellar, R. T.* [6]
- *Maximal monotonicity of subdifferential* [23]

Junto a lo anterior se prueba la extensión de dos formulas para el calculo del *Subdiferencial de Fenchel* . Primero para la composición $f \circ A$ donde A es una función lineal continua entre espacios localmente convexos X, Y y f es una función convexa y *epi-puntada*. Corolario de esto se obtiene una formula para el subdiferencial de $g = f_1 + f_2$ donde f_1 y f_2 son funciones convexas y *epi-puntada*.

Posteriormente se investiga una extensión del *Subdiferencial Abstracto* para esta clase de funciones y con esto se extienden teoremas tales como:

- *Mean Value Theorem by Dariusz Zagrodny* [28]
- *Subdifferential Monotonicity as a characterization of convex function By Correa, Rafael and Jofré, Alejandro and Thibault, Lionel* [10]
- *Integration of subdifferential of lower semicontinuous functions by L. Thibault and D. Zagrodny* [27]

La parte final de este trabajo esta referida a generalizar un resultado acerca de la caracterización de funciones convexas descubierto por *J. Saint Raymond* [25]. Para probar esto se aplican herramientas desarrolladas por Rafael Correa and Abderahim Hantoute en *New Formulas for the Fenchel Subdifferential of the conjugate function* [22].

Esta memoria esta dedicada a mis padres Margot y Pedro y a mi novia Carla.

Tabla de Contenido

Introducción

El *Analisis Variacional* se basa en las técnicas referidas a demostrar principios matemáticos mediante el método de establecer una función auxiliar aproximada que alcanza su mínimo. Esto puede ser visto como una forma matemática del principio de mínima acción en física. Del hecho que muchos resultados importantes en matemática, en particular, en análisis tienen sus orígenes en principios físicos, resulta natural pensar que ellos pueden ser relacionados de una u otra manera a técnicas variacionales. El uso de argumentos variacionales en demostraciones matemáticas posee una larga historia. Se puede remontar al problema del Brachistochrone de Johann Bernoulli, cuya solución devela el desarrollo del calculo de variaciones. Desde entonces estos métodos han encontrado numerosas aplicaciones en variadas ramas de las matemáticas. Una simple ilustración de los argumentos variacionales es el siguiente ejemplo.

Ejemplo 0.0.1 (Sobreyectividad de la Derivada) *Suponga que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en todas partes y suponga que*

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{|x|} = +\infty$$

Entonces $\{f'(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.

Demostración. Sea r un número real arbitrario. Defina $g(x) := f(x) - rx$. Es fácil chequear que g es coerciva, es decir, $g(x) \to +\infty$ cuando $|x| \to +\infty$, esto fuerza que g posee un mínimo global, es decir, existe $\bar{x}$ tal que $0 = g'(\bar{x}) = f'(x) - r$. $\square$

Dos condiciones son esenciales en los argumentos variacionales. La primera es *compacidad* (para garantizar la existencia de mínimos) y la segunda es la *diferenciabidad* de la función auxiliar (por lo cual la caracterización diferencial del resultado es posible). Dos importantes descubrimientos en los años setenta guían útiles relajaciones de ambas condiciones. Primero, el descubrimiento de principios variacionales generales clave para la relajación de las hipótesis de compacidad. Tales principios variacionales tipicamente afirman que cualquier función semicontinua inferior acotada inferiormente, puede ser ligeramente perturbada para asegurar la existencia de mínimos. Segundo, el desarrollo del analisis no-suave da la posibilidad de usar funciones auxiliares no suaves.

Además del uso de principios variacionales y los conceptos de derivadas generalizadas para funciones no suaves, a menudo es necesario combinar con otras herramientas, por ejemplo métodos de minización y aproximación para funciones convexas y no-convexas, en este contexto la dualidad de Fenchel y el teorema de Hahn-Banach es esencial para derivar reglas del calculo subdiferencial; los teorema de minmax juegan un importante rol a lo largo del desarrollo de principios variacionales en muchos campos del análisis no-lineal; y el análisis espectral de funciones es una combinación de principios variacionales con las propiedades simétricas de ciertos grupos. Una importante característica de las técnicas variacionales es que estas pueden ser aplicadas a funciones no diferenciables, conjuntos y multiaplicaciones de manera similar. Por ejemplo *Mordukhovich* en su libro *Variational Analysis and Generalized Differentiation* [20] comienza con principios variacionales geométricos sobre conjuntos cerrados para luego estudiar los principios variacionales de funciones y multifunciones examinando su epigrafo y su grafo respectivamente.[1]

El propósito principal de esta memoria es desarrollar propiedades variacionales de la familia de funciones asintoticamente epi-puntadas sobre espacios localmente convexos, esta clase de aplicaciones son frecuentemente usadas en análisis variacional, por ejemplo, las clasicas familias de funciones convexas o coercitivas, las cuales pueden ser puestas bajo la categoría de funciones epi-puntadas, por lo tanto muchos de los resultados del análisis convexo pueden ser extendidos y adaptados a contextos más generales, por el momento, resultados como, dualidad de Fenchel para funciones convexas y no convexas, teoremas del tipo Brondsted-Rockafellar, principios variacionales, convergencia variacional de funciones y conjuntos, entre muchos otros resultados clásicos para la convexidad.

Esta clase de funciones fue introducida por Hiriart-Urruty y Benoist [1] en los noventa, pero la definición original radica en el premio nobel en economía Gérard Debreu en los años cincuenta [11].

Para introducir esta clase es necesario recordar la definición de función asintótica de una función f, la cual es:

$$f^{\infty}(x) := \liminf_{t\to 0^+\; y\to x} t f(t^{-1}y)$$

(e.g. [1, 12, 13, 19, 29]).

Comenzaremos dando la definición original de función epi-puntada en $\mathbb{R}^n$, de esta forma explicar el nombre que estas llevan.

Definición 0.0.2 *Una función $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ se dice asintóticamente epi-puntada si el epigrafo de su función asintótica (= $\{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f^{\infty}(x) \leq \lambda\}$) es puntada, es decir, no contiene rectas.*

Esta definición fue adaptada en [1] (ver, también, [2, 3]). Sin embargo la definición original fue dada solo para conjuntos, más precisamente, si S es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$, se define el cono asintótico de S como:

$$S^{\infty} := \{d \in \mathbb{R}^n : \exists t_k \to 0^+, \exists (d_k) \subseteq S \text{ tal que } t_k d_k \to d\}$$

Luego, S es llamado puntado si el cono asintótico S^{∞} no contiene rectas. Equivalentemente, usando la conjungada de Fenchel de f; dada por:

$$f^*(u) := \sup\{\langle u, x\rangle - f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$$

Esta relación nos indica que esta definición se caracteriza porque f^* sea acotada superiormente; y por lo tanto esto es su continuidad en algún $\bar{u}$ (en los casos en que esta sea propia). Esta propiedad de continuidad revela la principal definición de una función epi-puntada. Para simplificar se considera X un espacio de Banach reflexivo.

[1]Techniques of Variational Analysis, Jonathan M. Borwein [4]

Definición 0.0.3 *Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Se dice que f es epi-puntada si existe $x_0^* \in X^*$ tal que su conjugada f^* es finita y continua en x_0^*.*

Observe que, cuando X es de dimensión infinita, se debería especificar en la definición previa la topológia sobre el espacio dual X^* bajo la cual f^* es continua. Esta pregunta será crucial a través de este trabajo, pues nos concentraremos en un par dual $(X; X^*)$ con topológias compatibles.

Para continuar, se darán una serie de ejemplos de funciones epi-puntadas.

Ejemplo 0.0.4 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(0) = 0$ y la envoltura convexa f es positiva; esto es, $\overline{\text{co}}\, f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces, se puede mostrar que f^* es continua en 0 y, por lo tanto, f es una función epi-puntada.*

Ejemplo 0.0.5 *Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función 1-coerciva; esto es, $\frac{f(x)}{\|x\|} \to +\infty$ cuando $\|x\| \to \infty$: Entonces, es fácil chequear que f^* is (norma-) continua en 0 y, por lo cual, f es una función epi-puntada relativa a la topológia de la norma.*

Ejemplo 0.0.6 *Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa, propia y semicontinua inferior. Entonces para cualquier $\alpha > 0$ la función $x \to f(x) + \alpha\|x\|^2$ es epi-puntada relativa a la topológía de la norma.*

Ejemplo 0.0.7 *Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ un función propia y* prox-bounded*; esto es $f \geq -\mu\|x\|^2$ para algún $\mu \geq 0$. Entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ la función*

$$f(\cdot) + \alpha(\mu + \varepsilon)\|\cdot\|^2$$

es epi-puntada relativa a la topológia de la norma.

Ejemplo 0.0.8 *Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ un función propia. Considere $C \subseteq X$ un conjunto acotado tal que $C \cap \{x \in X : f(x) < +\infty\} \neq \emptyset$, entonces la función.*

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & si \quad x \in C \\ +\infty & si \quad x \notin C \end{cases}$$

es epi-puntada relativa a la topológia de la norma.

Se espera que las funciones Epi-puntadas compartan muchas propiedades útiles de las funciones convexas (ver, por ejemplo, [8, 9, 15, 22] para algunas de estas propiedades). En este aspecto, se recordarán algunos resultados que muestran la relación entre el subdiferencial de Fenchel de f y f^*. Este resultado extiende el conocido teorema de Fenchel. Recordemos que el subdiferencial de Fenchel de una función h (no necesariamente convexa) en un punto x en X es el conjunto definido por (ver [21, 24, 30])

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, y - x\rangle \leq f(y) - f(x) + \varepsilon,\ \forall y \in X\} \text{ si } x \in \text{dom}(f)$$

aquí $\langle\cdot,\cdot\rangle$ se refiere al par en dualidad (X, X^*). El siguiente resultado fue establecido en una serie de papers ([8, 15, 22])

Teorema 0.0.9 *(Dualidad de Fenchel) Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ débil semicontinua inferior y epi-puntada. Entonces para cualquier $x^* \in X^*$*

$$\partial f^*(x^*) = \overline{\text{co}}\left[(\partial f)^{-1}(x^*)\right] + \mathbb{N}_{\text{dom}(f^*)}(x^*)$$

($\overline{\text{co}}$ es la envoltura convexa cerrada y $\mathbb{N}_{\text{dom}(f^*)}(x^*)$ es el cono normal a el dominio efectivo de f^*)

Para comparar recordemos que el clásico teorema de Fenchel establece que para cualquier función semicontinua inferior y propia se tiene (ver [21, 24, 30])

$$\partial f^*(x^*) = \overline{\text{co}}\left[(\partial f)^{-1}(x^*)\right]$$

También se presenta el teorema siguiente el cual es un caso particular de un resultado más general(ver [15])

Teorema 0.0.10 *Sea f como en el teorema anterior y g cualquier otra función tal que:*

$$\partial f(x) = \partial g(x) \ \ \forall x \in X$$

entonces las envolturas convexas cerradas de f y g son iguales salvo una constante.

En conclusión, las lineas principales de esta investigación son (en el contexto de par en dualidad (X, X^*)):

- Extender los resultados fundamentales del análisis convexo para funciones asintóticamente epi-puntadas.
- Mostrar que las técnicas del análisis convexo son también útiles para la familia de funciones epi-puntadas.

Capítulo 1

Notación y resultados preliminares

1.1 Notaciones y Definiciones

En la presente sección se establecerán definiciones y notaciones clásicas del análisis variacional y convexo. Sea un (X, τ) un espacio vectorial topológico localmente convexo real (evtlc), se define su dual topológico X^* como el conjunto de todas las funciones $x^* : X \to \mathbb{R}$ lineales continuas. Una noción fundamental es la definición de convexidad, un subconjunto $C \subseteq X$ es llamado convexo si:

$$(\forall x, y \in C)(\forall \lambda \in [0,1])(\lambda x + (1-\lambda)y \in C)$$

Para un conjunto $A \subseteq X$ se escribirá $\tau - \mathrm{Int}(A)$ y $\overline{A}^{\tau}$ para el interior y la clausura de A con respecto a la topológia τ (se omite τ cuando no hay ambigüedad en la topológia que se este usando), $\mathcal{N}_x(\tau)$ será el conjunto de vecindades de x para la topológia τ, si no existe ambigüedad, simplemente se escribirá $\mathcal{N}_x$, es importante recalcar que para cualquier $x \in X$ $\mathcal{N}_x = x + \mathcal{N}_0$. Por

$$\mathrm{co}(A) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0, x_i \in A \text{ y } n \in \mathbb{N}\},$$

$\overline{\mathrm{co}}^{\tau}(A) = \overline{\mathrm{co}(A)}^{\tau}$ (si no existe confusión, se escribirá simplemente $\overline{\mathrm{co}}(A)$),

$$\mathrm{aff}(C) = \bigcap \{F : F \text{ es un subspacio afin y } F \supseteq A\}$$

y $A^o = \{x^* \in X^* \mid x^*(x) \leq 1, \forall x \in A\}$ denotaran la *envoltura convexa* , la *envoltura convexa cerrada* , *envoltura afin* y el *polar* del conjunto A, respectivamente.

Se dirá que dos espacios vectoriales topológicos localmente convexos Hausdorff (X, τ), (Y, σ) son espacios en dualidad si existe un *producto de dualidad* entre X e Y, esto es, una función bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle . X \times Y \to \mathbb{R}$ tal que:

- $\forall x \in X \backslash \{0\}\ \exists y \in Y$ tal que $\langle x, y \rangle \neq 0$.
- $\forall y \in Y \backslash \{0\}\ \exists x \in X$ tal que $\langle x, y \rangle \neq 0$.
- $\forall x \in X\ \langle x, \cdot \rangle \in (Y, \sigma)^*$ y $\forall \ell \in (Y, \sigma)^*\ \exists! x \in X$ tal que $\ell = \langle x, \cdot \rangle$
- $\forall y \in Y\ \langle \cdot, y \rangle \in (X, \tau)^*$ y $\forall \ell \in (X, \tau)^*\ \exists! y \in Y$ tal que $\ell = \langle \cdot, y \rangle$

En este trabajo (X, X^*) siempre será un par en dualidad con topológias τ_X y τ_{X^*} respectivamente bajo la forma bilineal $\langle x^*, x\rangle = x^*(x)$, es importante recalcar que bajo esta definición siempre (a menos que se diga lo contrario) se tendrá que $(X, \tau_X)^* = X^*$ y $(X^*, \tau_{X^*})^* = X$. En X se considerará otra topologia muy útil en el área, la topológia débil, denotada por $\sigma(X, X^*)$, la cual es la topológia menos fina compatible con el par en dualidad, similarmente en X^* se considerará la topológia debil-*, denotada $\sigma(X^*, X)$ (o simplemente w^*). Cuando X sea un espacio vectorial normado, será importante para algunas aplicaciones considerar el espacio $X^{**} = (X^*, \|\cdot\|_*)^*$, es decir el llamado *bidual* del espacio X, de esta forma jugar con la dualidad de los espacios $(X^*, \|\cdot\|_*, X^{**}, w^{**})$. El lector puede apreciar que cuando (X, X^*) es un par en dualidad $X = X^{**}$.

Dada una seminorma $\rho : X \to \mathbb{R}$ ($\rho(0) = 0$, $\rho(\lambda x) = |\lambda|\rho(x)$, $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ $\forall x, y \in X \forall \lambda \in \mathbb{R}$) se denotará $B_\rho(x_0, r) := \{x \in X : \rho(x - x_0) \leq r\}$ la bola de centro x_0 y radio r con respecto a la seminorma ρ. Un resultado muy conocido del estudio de espacios vectoriales topológicos es que toda topológia τ localmente convexa Hausdorff es inducida por una familia de seminormas (para más detalles ver [5]), por lo cual siempre que se hable de algún tipo de convergencia, se utilizará la familia de seminormas que define la topológia para facilitar el trabajo.

En el análisis variacional es conveniente considerar funciones que toman valores en la recta real extendida $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, en lugar de solo $\mathbb{R}$. Por ejemplo, en un espacio topológico X, consideremos un problema de minimización del tipo

$$\text{ínf}\{f_0(x) : x \in C\}$$

donde $f_0 : X \to \mathbb{R}$ es la función objetivo a minimizar y $C \subseteq X$ es un conjunto de restricciones. Entonces se puede considerar la siguiente función auxiliar $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in C \\ +\infty & \text{si} \quad x \in X \backslash C \end{cases}$$

Luego se tiene que el problema de minimización anterior puede formularse de manera equivalente como $\text{ínf}\{f(x) : x \in C\}$. Para utilizar este tipo de herramientas se extiende la operatoria de $\mathbb{R}$ a $\overline{\mathbb{R}}$ con la siguiente convención.

- $(+\infty) + \alpha = \alpha + (+\infty) = +\infty\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
- $(-\infty) + \alpha = \alpha + (-\infty) = -\infty\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
- $\alpha \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot \alpha = +\infty\ \forall \alpha > 0$.
- $\alpha \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \alpha = +\infty\ \forall \alpha < 0$.
- $0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot 0 = 0$
- $(+\infty) + (-\infty) = (-\infty) + (+\infty) = +\infty$

Para una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\text{dom} f = \{x \in X \mid f(x) < +\infty\}$ que llamaremos *dominio* (efectivo) de f, más aún se dirá que f es *propia* si $\text{dom} f \neq \emptyset$ y $f > -\infty$ (f no toma el valor $-\infty$), por epigrafo de una función se llamará al conjunto denotado por $\text{epi}(f) = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq t\}$.

Ahora se recordarán las definiciones y operaciones básicas sobre ciertas clases de funciones que serán útiles a lo largo de esta memoria. La primera clase de estas familias a introducir es la clase de funciones convexas, una aplicación $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es una *función convexa* si $\text{epi}(f)$

es un conjunto convexo. Otra importante gama de funciones a estudiar son los semicontinuas inferior, una función τ_X*-semicontinua inferior* (sci) es cualquier $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que su epigrafo es un conjunto cerrado de $X \times \mathbb{R}$ (con la topologia producto) o equivalentemente si $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ los conjuntos de nivel α $S_\alpha = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ son cerrados, por otro lado, una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es τ_X*-infcompacta* si los conjuntos de nivel S_α son relativamente compactos, entonces cuando se hable de funciones τ_X-sci τ_X-infcompacta se entenderá que son funciones cuyos conjuntos de nivel son compactos para la topológia τ_X. Por $\Gamma(X, \tau_X)$ ($\Gamma(X)$ si no existe confusiones) se entenderá el conjunto de todas las funciones $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ que son supremo de funciones afines τ_X-continuas y $\Gamma_0(X, \tau_X) := \Gamma(X, \tau_X) \backslash \{+\infty, -\infty\}$

La *conjugada* de f es la función $f^* : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por:

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in X} \{\langle x^*, x\rangle - f(x)\},$$

La *biconjugada* de f será $f^{**} = (f^*)^*$. La función *indicatriz* y *soporte* de un conjunto A ($\subseteq X, X^*$) son, respectivamente,

$$I_A(x) := \begin{cases} 0 & x \in A \\ +\infty & x \notin A \end{cases}, \qquad \sigma_A := \sup\{\langle x^*, \cdot\rangle \mid x^* \in A^*\} = I_A^*.$$

La *inf-convolución* de dos funciones $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es

$$f \Box g := \inf_{x \in X} \{f(x) + g(\cdot - x)\}$$

Dados X, Y evtlc $\mathcal{L}(X, \tau_X, Y, \tau_Y)$ (si no hay confusión simplemente $\mathcal{L}(X, Y)$) denotará el conjunto de todas las funciones lineales τ_X-τ_Y- continuas, más aún dada $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $A^* : Y^* \to X^*$ será el operador *adjunto de A* definido como $\langle A^*(x^*), y\rangle = \langle x^*, A(y)\rangle$.

En el área de análisis y en particular análisis convexo resulta muy útil la noción de funciones que toman valores en conjuntos y no en puntos, por lo cual es importante introducir la definición de multifunción, multiaplicación u operador multivoco. Dados dos conjuntos Y, Z una multifunción M es una función $M : Y \to 2^Z$, esto se denotará por $M : Y \rightrightarrows Z$. Para comenzar a familiarizar con esta clase de objetos se introducen algunas operaciones elementales con multiaplicaciones. Se denotará $M^{-1}(z) := \{y \in Y \mid z \in My\}$, $\operatorname{Im} M := \bigcup\{M(y) \mid y \in Y\}$ y $\operatorname{dom} M := \{y \in Y \mid M(y) \neq \emptyset\}$. Finalmente se escribirá $\operatorname{gph} M : \{(y, z) \in Y \times X : z \in M(y)\}$ como el grafo de M.

En análisis no-suave uno de los principales ejemplos de multifunción es la noción de subdiferencial (Fenchel) o más generalmente la de ε-subdiferencial. Dado $\varepsilon \geq 0$, para una función propia f el *ε-subdiferencial* de f es la multiaplicación $\partial_\varepsilon f : X \rightrightarrows X^*$ definida como:

$$\partial_\varepsilon f(x) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, y - x\rangle \leq f(y) - f(x) + \varepsilon,\ \forall y \in X\} \text{ si } x \in \operatorname{dom}(f)$$

Cuando $x \notin \operatorname{dom}(f)$, $\partial_\varepsilon f(x) = \emptyset$. El caso $\varepsilon = 0$ corresponde al clasico subiferencial de Fenchel. En diversas aplicaciones es interesante estudiar los operadores $T : E \rightrightarrows E^*$ en la literatura se pueden encontrar numerosas clasificación y definiciones sobre esta familia de operadores T, en particular para este estudio se utiliza la definición de operador monótono maximal. $T : E \rightrightarrows E^*$ es *monótono* si $\forall x, y \in X \forall x^* \in T(x) \forall y^* \in T(y)$ $\langle x - y, x^* - y^*\rangle \geq 0$, más aún, T es *monótono maximal*, si no existe un operador T' monótono maximal tal que $\operatorname{gph} T \subsetneq \operatorname{gph} T'$.

La siguiente definición extiende la noción introducida anteriormente de función epi-pointed y es el centro del estudio realizado en esta memoria de título.

Definición 1.1.1 (epi-puntada) *Sea* $(X, \tau_X, X^*, \tau_{X^*})$ *un par en dualidad. una función* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *es* τ_{X^*}*-epi-puntada (si no existe confusión, simplemente epi-puntada) si el conjunto de puntos de* τ_{X^*}*-continuidad de su conjugada es no vacío.*

1.2 Resultados Preliminares

Para comprender de mejor manera el estudio realizado en esta memoria citaremos previos e importantes resultados de la teoría de análisis variacional y convexo, que dan un precedente de los resultados que se generalizarán para el caso de espacios locamente convexos. En análisis matemático el *principio variacional de Ekeland*, descubierto por *Ivar Ekeland* es un teorema que afirma la existencia de soluciones aproximadas a cierta clase de problemas de optimización cuando no existe compacidad de por medio, mas precisamente el teorema dice.

Teorema 1.2.1 (Ekeland, I. [1979] [14]) *Sea* (X, d) *un espacio métrico completo, sea* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *sci y propia, considere* $\varepsilon > 0$ *y* $u \in X$ *tal que:*

$$f(u) \leq \inf f + \varepsilon$$

Entonces existe $u_\varepsilon \in X$ *tal que:*

1. $d(u, u_\varepsilon) \leq 1$
2. $f(u_\varepsilon) + \varepsilon d(u, u_\varepsilon) \leq f(u)$
3. $\forall y \in X \backslash \{u_\varepsilon\}\ f(u_\varepsilon) < f(y) + \varepsilon d(y, u_\varepsilon)$

El teorema anterior ha sido usado para probar o dar una demostración alternativa a importantes teoremas en matemáticas, particularmente en análisis variacional y convexo, algunos de estos resultados son:

Teorema 1.2.2 (Brøndsted, A. and Rockafellar, R. T. [1965] [6]) *Sea* X *un espacio de Banach y* $f \in \Gamma(X)$*. Considere* $\varepsilon \geq 0$ *y* $(x_0, x_0^*) \in \operatorname{gph} \partial_\varepsilon f$*. Entonces existe* $(x_\varepsilon, x_\varepsilon^*) \in \operatorname{gph} \partial f$ *tal que* $\|x_\varepsilon - x_0\| \leq \sqrt{\varepsilon}$ *y* $\|x_\varepsilon^* - x_0^*\| \leq \sqrt{\varepsilon}$*. En particular* $\operatorname{dom} f \subset \overline{\operatorname{dom} \partial f}$ *y* $\operatorname{dom} f^* \subset \overline{\operatorname{Im} \partial f}$*.*

Teorema 1.2.3 (Rockafellar, R. T. [1970] [23]) *Sea* X *un espacio Banach y* $f \in \Gamma_0(X)$*. Entonces* ∂f *es un operador maximal monótono.*

Ante los teoremas anteriores resulta interesante preguntar, si las técnicas utilizadas para probar estos resultados en espacios de Banach, pueden ser aplicadas en el contexto de pares en dualidad (X, X^*) para funciones f epi-puntadas. Favorablemente estas aplicaciones presentan tal riqueza, que muchas técnicas pueden ser adaptadas al contexto de esta memoria, incluso presentando simplificaciones en las demostraciones y herramientas utilizadas, pese a que estas topológias de espacios localmente convexos Hausdorff, a menudo, son menos amigables que los espacios de Banach. Frente a esto la primera parte del segundo capitulo, se basa principalmente en desarrollar un estudio de las propiedades variacionales de estas funciones, de esta forma, que otorga una base para poder descubrir más detalles sobre el comportamiento de estas aplicaciones.

En espacios de Banach hay una variada gama de subdifferenciales para diferentes clases de funciones, por ejemplo podemos encontrar: El subdifencial de Fenchel, subdifencial de Clarke, subdifencial de Frechet y subdifencial proximal. Una definición que intenta extender y abstraer estas nociones es la idea de subdiferencial abstracto.

Definición 1.2.4 *Sea $\mathfrak{C} = \{g : X \to \mathbb{R} : g$ is convex and Lipschitz$\}$ y $\mathcal{F} \subseteq \overline{\mathbb{R}}^X$. Una multifución $\overline{\partial} : X \times \mathcal{F} \rightrightarrows X^*$ es un subdiferencial abstracto si:*

$f(x_0) \in \mathbb{R}$, $g \in \mathfrak{C}$ y x_0 es un mínimo local de $f + g$ entonces existe $(x_i, x_i^*)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{gph} \overline{\partial} f$ tal que:

- $x_i \xrightarrow{f} x_0$
- $x_i^* \xrightarrow{w^*} x_0^*$
- $0 \in x_0^* + \partial g(x_0)$

Con esta simple definición se rescatan importantes propiedades del clásico subdifferencial de Fenchel [30]. Un resultado clave es:

Teorema 1.2.5 (Dariusz Zagrodny [1988] [28]) *Sea X un espacio de Banach. Considere $\overline{\partial}$ un subdiferencial abstracto sobre $\mathcal{F} \subseteq \overline{\mathbb{R}}^X$. Sea $f \in \mathcal{F}$ lsc, $a, b \in X$ con $a \in \operatorname{dom} f$ y $a \neq b$, y $r \in \mathbb{R}$ con $r \leq f(b)$. Entonces existe $(x_n) \xrightarrow{f} c \in [a, b[$ y $x_n^* \in \overline{\partial} f(x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ tal que:*

1. $r - f(a) \leq \liminf\langle c - a, x_n^*\rangle$
2. $0 \leq \liminf\langle b - a, x_n^*\rangle$
3. $\dfrac{\|(b - c)\|}{\|b - a\|}(r - f(a)) \leq \liminf\langle c - x_n, x_n^*\rangle$
4. $\|b - a\|(f(c) - f(a)) \leq \|c - a\|(r - f(a))$

Este teorema puede ser utilizado para probar una serie de resultados tales como:

Teorema 1.2.6 (Correa, Rafael and Jofré, Alejandro and Thibault, Lionel [1994] [10]) *Sea X un spacio de Banach. Considere $\overline{\partial}$ un subdiferencial abstracto sobre $\mathcal{F} \subseteq \overline{\mathbb{R}}^X$. Sea $f \in \mathcal{F}$ lsc. Si $\overline{\partial} f$ es una multifunción monótona entonces f es convexa.*

Teorema 1.2.7 (L. Thibault and D. Zagrodny [1995] [27]) *Sea X un espacio de Banach. Considere $\overline{\partial}$ un subdiferencial abstracto sobre $\mathcal{F} \subseteq \overline{\mathbb{R}}^X$. Sea $f \in \mathcal{F}$ lsc, $g \in \Gamma(X)$. Supongamos que:*

$$\overline{\partial} f(x) \subseteq \partial g(x) \;\; \forall x \in X$$

Entonces existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f = g + k$

Dados los resultados anteriores, surge la pregunta, si es que nuestra clase de funciones cumplirá propiedades similares, por lo cual la segunda parte del capitulo 2 es referida a extender el concepto de subdiferencial abstracto y de este modo obtener teoremas de caracteización de la convexidad e integración como los anteriores.

La parte final de este trabajo esta dedicada a extender un resultado probado por *J. Saint Raymond* que garantiza la convexidad de una función bajo ciertas hipótesis, más precisamente.

Teorema 1.2.8 (Saint Raymond, Jean [2013) *[25]] Sea X un espacio de Banach y $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia y débil sci. Si $f - \phi$ alcanza su mínimo, cualquiera sea $\phi \in X^*$ y el conjunto $M_\phi = \{x \in X : f$ alcanza su mínimo en $x\}$ es convexo para todo ϕ en un conjunto convexo denso Y de X^*. Entonces f es convexa.*

Para comprender mejor las hipótesis del resultado anterior y llevarlas al contexto de esta memoria, es necesario citar otro teorema del mismo autor.

Teorema 1.2.9 (Saint Raymond, Jean [2013) *[26]] Sea X un espacio de Banach y $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia y debil sci. Si $f - \ell$ alcanza su mínimo para todo $\ell \in X^*$, entonces las curvas de nivel $S_f(\alpha) := \{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ son débil compactas.*

Este resultado esclarece que las hipótesis de *Saint Raymond* son trabajar con una función f tal que $\forall x^* \in X$ $f - x^*$ es débil inf-compacta, con su conjugada f^* continua (para la topologia de la norma) en todo el espacio X^*. Entonces la primera parte del capitulo 3, esta enfocada en obtener resultados del comportamiento convexo de la función f en el contexto par en dualidad (X, X^*) con las siguientes hipótesis:

i) f^* es continua sobre $A := \mathrm{Int}(\mathrm{dom}(f^*)) \neq \emptyset$.

ii) Existe $D \subseteq A$ convexo tal que $A \subset \overline{D}$ y $\forall x^* \in D : \mathrm{argmin}\{f - x^*\}$ es convexo.

Finalmente los resultados obtenidos serán aplicados para obtener como corolario el teorema de *Saint Raymond*.

Capítulo 2

Propiedades Variacionales de las Funciones Epi-puntadas

2.1 Propiedades Variacionales

Definición 2.1.1 *Sea X un espacio topológico. Se dirá que la función $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ es semigauge tipo I sobre X si:*

- $\forall x \in X \quad \rho(x, x) = 0$
- $\forall x \in X \quad \rho(\cdot, x)$ *es sci.*

Definición 2.1.2 *Sea X un espacio topológico. Se dirá que la función $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ es semigauge tipo II sobre X si:*

- $\forall x \in X \quad \rho(x, x) = 0$
- $\forall x, y, z \in X \quad \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$
- $\forall x \in X \quad \rho(\cdot, x)$ *es sci*

Teorema 2.1.3 *Sea X un espacio toplógico y $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sci, inf-compacta y propia. Dado $\varepsilon > 0$, ρ una función semigauge tipo I sobre X y $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) < \inf f + \varepsilon$ (resp. $\leq$). Entonces $\forall \lambda > 0\ \exists x_\varepsilon \in X$ tal que:*

1. $\rho(x_\varepsilon, x_0) < \lambda$ *(resp. $\leq$)*
2. $f(x_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\rho(x_\varepsilon, x_0) \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\rho(x, x_0) \ \ \forall x \in X$

Demostración. Sea $F(x_0) := \{x \in X : f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\rho(x, x_0) \leq f(x_0)\}$. Es claro que $x_0 \in F(x_0)$, luego $F(x_0)$ es no vació, maás aún como $f(\cdot) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\rho(\cdot, x_0)$ es una función sci e infcompacta $F(x_0)$ resulta ser compacto. Tome $x_\varepsilon \in F(x_0)$ tal que:

$$f(x_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\rho(z, x_0) = \min_{z \in F(x_0)} f(z) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\rho(z, x_0)$$

Luego es claro que x_ε satisface 1. y 2. $\square$

Teorema 2.1.4 *Sea X un espacio topológico y $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sci, infcompacta y propia. Dado*

$\varepsilon > 0$, ρ *una función semigauge tipo II sobre* X *y* $x_0 \in X$ *tal que* $f(x_0) < \inf f + \varepsilon$ *(resp.* $\leq$*). Entonces* $\forall \lambda > 0\ \exists x_\varepsilon \in X$ *tal que:*

1. $\rho(x_0, x_\varepsilon) < \lambda$ *(resp.* $\leq$*)*
2. $f(x_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\rho(x_\varepsilon, x_0) \leq f(x_0)$
3. $f(x_\varepsilon) \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\rho(x, x_\varepsilon)\ \ \forall x \in X$

Demostración. Considere $F(x_0) := \{x \in X : f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\rho(x, x_0) \leq f(x_0)\}$. Se tiene que $x_0 \in F(x_0)$, $F(x_0)$, luego podemos inferir que $F(x_0)$ es compacto y no vacío, pues $f(\cdot) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\rho(\cdot, x_0)$ es sci e infcompacta. Tome $x_\varepsilon \in F(x_0)$ tal que:

$$f(x_\varepsilon) = \min_{z \in F(x_0)} f(z)$$

Entonces x_ε satisface $f(x_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\rho(x_\varepsilon, x_0) \leq f(x_0) < \inf f + \varepsilon \leq f(x_\varepsilon) + \varepsilon$ por lo tanto x_ε verifica 1. y 2. Finalmente es fácil observar que

$$\forall x \in F(x_0)\ f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\rho(x, x_\varepsilon)$$

$$\forall x \notin F(x_0)\ f(x_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\rho(x_\varepsilon, x_0) \leq f(x_0) < f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\rho(x, x_0)$$

Con lo cual x_ε verifica 3.

□

Lema 2.1.5 (Teorema I-12 [7]) *Sea* X *un evtlc y* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ $\sigma(X, X^*)$*-sci y epi-puntada. Entonces* $\forall x^* \in \mathrm{Int}(\mathrm{dom}\, f^*)$ $f - x^*$ *es* $\sigma(X, X^*)$*-infcompacta.*

Demostración. Sin perdida de generalidad se puede asumir que $x^* = 0$. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $V \in \mathcal{N}_0$ convexa cerrada y balanceada, tal que, $f^* \leq \lambda + I_V \Rightarrow f^{**} \geq -\lambda + \sigma_V$. Luego $\{f \leq \alpha\} \subseteq (\alpha + \lambda)V^\circ$. Para más detalles revisar Teorema I-12 [7] página 12. □

Lema 2.1.6 *Sea* X *un evtlc y* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *una función epi-puntada y* $x \in \mathrm{dom}(f)$ *tal que* $f(x) = f^{**}(x)$*. Entonces*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\partial_\varepsilon f(x) \cap \mathrm{Int}(\mathrm{dom}(f^*)) \neq \emptyset \text{ y } \overline{\partial_\varepsilon f(x) \cap \mathrm{Int}(\mathrm{dom}(f^*))} = \partial_\varepsilon f(x)$$

En particular si $f \in \Gamma(X)$ *se tiene que:*

$$(\forall x \in \mathrm{dom}(f))(\forall \varepsilon > 0)(\partial_\varepsilon f(x) \cap \mathrm{Int}(\mathrm{dom}(f^*)) \neq \emptyset \text{ y } \overline{\partial_\varepsilon f(x) \cap \mathrm{Int}(\mathrm{dom}(f^*))} = \partial_\varepsilon f(x)$$

Demostración. Sea $x \in \mathrm{dom}(f)$ tal que $f^{**}(x) = f(x)$, entones se tiene que:

$$f(x) = \sup_{x^* \in \mathrm{Int}(\mathrm{dom}(f^*))} \{\langle x^*, x\rangle - f(x^*)\}$$

Luego $\forall \varepsilon > 0\ \partial_\varepsilon f(x) \cap \mathrm{Int}(\mathrm{dom}(f^*) \neq \emptyset$ □

Teorema 2.1.7 *Sea* X *un evtlc y* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *convexa, sci y epi-puntada. Considere* $\varepsilon > 0$, $\beta \in [0, \infty)$, p *una seminorma continua,* $\lambda > 0$ *defina* $U := \{x \in X : p(x) \leq 1\}$*. Si* $x_0^* \in \partial_\varepsilon f(x_0) \cap \mathrm{Int}(\mathrm{dom}\, f^*)$*. Entonce* $\exists x_\varepsilon \in X\ \exists y_\varepsilon^* \in U^\circ\ \exists \lambda_\varepsilon \in [-1, 1]$ *Tal que:*

(a) $p(x_0 - x_\varepsilon) + \beta|\langle x_0^*, x_0 - x_\varepsilon\rangle| \leq \lambda$

(b) $x_\varepsilon^* := x_0^* + \frac{\varepsilon}{\lambda}\left(y_\varepsilon^* + \beta\lambda_\varepsilon x_0^*\right) \in \partial f(x_\varepsilon)$

(c) $|\langle x_\varepsilon^*, x_0 - x_\varepsilon\rangle| \leq \varepsilon + \frac{\lambda}{\beta}$

(d) $|f(x_0) - f(x_\varepsilon)| \leq \varepsilon + \frac{\lambda}{\beta}$

(e) $x_\varepsilon^* \in \partial_{2\varepsilon} f(x_0)$

Con la Convención $\frac{1}{0} = +\infty$

Demostración. Defina $g := f - x_0^*$ y $\tilde{p}(x) = p(x) + \beta|\langle x_0^*, x\rangle|$, es obvio que $\tilde{p}$ es una semigauge del tipo II y por 2.1.5 g es $\sigma(X, X^*)$-sci e infcompacta, entonces

$$g(x_0) \leq \operatorname{ínf} g + \varepsilon$$

Luego aplicamos 2.1.4 a g, $\tilde{p}$ y λ. Entonces existe $x_\varepsilon \in X$ tal que:

i) $p(x_0 - x_\varepsilon) + \beta|\langle x_0^*, x_0 - x_\varepsilon\rangle| \leq \lambda$

ii) $g(x_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\left(p(x_0 - x_\varepsilon) + \beta|\langle x_0^*, x_0 - x_\varepsilon\rangle|\right) \leq g(x_0)$

iii) $g(x_\varepsilon) \leq g(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\left(p(x - x_\varepsilon) + \beta|\langle x_0^*, x - x_\varepsilon\rangle|\right) \quad \forall x \in X$

Luego x_ε verifica (a).
Consideremos la función $h : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
$h(x) = f(x) - \langle x_0^*, x\rangle + \frac{\varepsilon}{\lambda}\left(p(x_0 - x_\varepsilon) + \beta|\langle x_0^*, x_0 - x_\varepsilon\rangle|\right)$. Del hecho que h es la suma de cuatro funciones convexas, tres de ellas continuas, se sigue aplicando la regla de la suma, es decir:

$$0 \in \partial f(x_\varepsilon) - x_0^* + \frac{\varepsilon}{\lambda} U^\circ + \frac{\varepsilon}{\lambda}\beta \cdot [-1, 1] \cdot x_0^*$$

Por lo cual existe $y_\varepsilon^* \in U^\circ$ y $\lambda_\varepsilon \in [-1, 1]$ tal que:

$$x_\varepsilon^* := x_0^* + \frac{\varepsilon}{\lambda}\left(y_\varepsilon^* + \beta\lambda_\varepsilon x_0^*\right) \in \partial f(x_\varepsilon)$$

Ahora

$$\begin{aligned} |\langle x_\varepsilon^* - x_0^*, x_0 - x_\varepsilon\rangle| &\leq \tfrac{\varepsilon}{\lambda}\left(|\langle y_\varepsilon^* + \beta\lambda_\varepsilon x_0^*, x_0 - x_\varepsilon\rangle|\right) \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{\lambda}\left(|\langle y_\varepsilon^*, x_0 - x_\varepsilon\rangle| + \beta|\langle x_0^*, x_0 - x_\varepsilon\rangle|\right) \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{\lambda}\left(p(x_0 - x_\varepsilon) + \beta|\langle x_0^*, x_0 - x_\varepsilon\rangle|\right) \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Luego estimando

$$\begin{aligned} |\langle x_\varepsilon^*, x_0 - x_\varepsilon\rangle| &\leq |\langle x_\varepsilon^* - x_0^*, x_0 - x_\varepsilon\rangle| + |\langle x_0^*, x_0 - x_\varepsilon\rangle| \\ &\leq \varepsilon + \tfrac{\lambda}{\beta} \end{aligned}$$

esto prueba (c).
Como $x_0^* \in \partial_\varepsilon f(x_0)$ y $x_\varepsilon^* \in \partial f(x_\varepsilon)$, se tiene

$$\begin{aligned} -\varepsilon + \langle x_0^*, x_0 - x_\varepsilon\rangle &\leq \langle x_\varepsilon^* - x_0^*, x_0 - x_\varepsilon\rangle + \langle x_0^*, x_0 - x_\varepsilon\rangle \\ &= \langle x_\varepsilon^*, x_0 - x_\varepsilon\rangle \\ &\leq f(x_0) - f(x_\varepsilon) \\ &\leq \langle x_0^*, x_0 - x_\varepsilon\rangle + \varepsilon \end{aligned}$$

Con lo cual se obtiene $|f(x_0) - f(x_\varepsilon)| \leq |\langle x_0^*, x_0 - x_\varepsilon\rangle| + \varepsilon \leq \frac{\lambda}{\beta} + \varepsilon$ i.e. (d) se cumple.

Finalmente

$$\begin{aligned}\langle x_\varepsilon^*, x - x_0\rangle &= \langle x_\varepsilon^*, x - x_\varepsilon\rangle + \langle x_\varepsilon^* - x_0^*, x_\varepsilon - x_0\rangle + \langle x_0^*, x_\varepsilon - x_0\rangle \\ &\leq f(x) - f(x_\varepsilon) + \varepsilon + f(x_\varepsilon) - f(x_0) + \varepsilon \\ &= f(x) - f(x_0) + 2\varepsilon\end{aligned}$$

para cualquier $x \in X$, i.e. $x_\varepsilon^* \in \partial_{2\varepsilon} f(x_0)$

□

Teorema 2.1.8 *Sea X un evtlc y $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convex, sci y epi-puntada. Entonces $\forall x \in \operatorname{dom}(f)$ $\exists (x_\alpha, x_\alpha^*) \subseteq \operatorname{gph} \partial f$ una red tal que $x_\alpha \to x$ y $f(x_\alpha) \to f(x)$*

Demostración. Por 2.1.6 $\forall \varepsilon > 0$ $\partial_\varepsilon f(x) \cap \operatorname{Int}(\operatorname{dom}(f^*) \neq \emptyset$. Por lo tanto dados $\varepsilon > 0$ y p una seminorma continua se puede aplicar 2.1.7 a f con $\beta = 1$ y $\lambda = \sqrt{\varepsilon}$. Se obtiene que existe $(x_\varepsilon, x_\varepsilon^*) \in \operatorname{gph} \partial f$ tal que:

- $p(x - x_\varepsilon) \leq \sqrt{\varepsilon}$
- $|f(x) - f(x_\varepsilon)| \leq \varepsilon + \sqrt{\varepsilon}$

□

Corolario 2.1.9 *Sea X un evtlc y $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y $\sigma(X, X^*)$-sci y epi-puntada tal que $\forall x \in X$ $\partial f(x) = \partial f^{**}(x)$, entonces $f = f^{**}$*

Demostración. Primero si $\partial f^{**}(x) \neq \emptyset \Rightarrow f(x) = f^{**}(x)$, pues $\partial f(x) = \partial f^{**}(x)$
Segundo si $x \in \operatorname{dom}(f^{**})$ por 2.1.8 tenemos que $\exists (x_\alpha, x_\alpha^*) \subseteq \operatorname{gph} \partial f$ una red tal que $x_\alpha \to x$ y $f(x_\alpha) \to f(x)$. Luego $f(x) \leq \lim_\alpha f(x_\alpha) = \lim_\alpha f^{**}(x_\alpha) = f(x^{**})$ □

Teorema 2.1.10 *Sea X un evtlc y $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ función convexa, sci y epi-puntada. Dados $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$, p_X una seminorma continua sobre X y p_{X^*} una seminorma sobre X^* (no necesariamente continua).*

1. *Si $x_0 \in \partial_\varepsilon f(x_0) \cap \operatorname{Int}(\operatorname{dom}(f^*))$. Entonces $\exists x_\varepsilon \in X$ $\exists x_\varepsilon^* \in X$ tal que:*

$$x_\varepsilon^* \in \partial f(x_\varepsilon)\,,\, p_X(x_0 - x_\varepsilon) \leq \lambda \text{ and } p_{X^*}(x_0^* - x_\varepsilon^*) \leq \frac{\varepsilon}{\lambda} \sup_{y^* \in U^\circ} p_{X^*}(y^*)$$

2. *Si $x_0^* \in \partial_\varepsilon f(x_0)$ y $\operatorname{dom}(p_{X^*}) \cap \left(\operatorname{Int}(\operatorname{dom}(f^*)) - x_0^*\right) \neq \emptyset$. Entonces $\forall \delta > 0$ $\exists x_{\varepsilon,\delta} \in X$ $\exists x_{\varepsilon,\delta}^* \in X^*$ tal que:*

$$x_{\varepsilon,\delta}^* \in \partial f(x_{\varepsilon,\delta})\,,\, p_X(x_0 - x_{\varepsilon,\delta}) \leq \lambda \text{ and } p_{X^*}(x_0^* - x_{\varepsilon,\delta}^*) \leq \frac{\varepsilon}{\lambda} \sup_{y^* \in U^\circ} p_{X^*}(y^*) + \delta$$

Demostración. 1. Es directa de 2.1.7 usando $\beta = 0$.

2. Si $x_0^* \in \partial_\varepsilon f(x_0)$, Tomemos $\tilde{\delta} \leq \frac{\lambda\delta}{2 \sup\limits_{y^* \in U^\circ} p_{X^*}(y^*)}$ y $z_0^* \in \mathrm{Int}(\mathrm{dom}(f^*))$ tal que $z_0^* - x_0^* \in \mathrm{dom}(p_X^*)$ defina $z_r^* := x_0^* + r(z_0^* - x_0^*)$ entonces existe $r \in (0,1)$ tal que $z_r^* \in \partial_{\varepsilon+\tilde{\delta}} f(x_0) \cap \mathrm{Int}(\mathrm{dom}(f^*))$ y $r p_{X^*}(x_0^* - z_0^*) \leq \frac{\delta}{2}$, ahora aplicamos 1. a $z_r^* \in \partial_{\varepsilon+\tilde{\delta}} f(x_0) \cap \mathrm{Int}(\mathrm{dom}(f^*))$. Por lo tanto $\exists x_\varepsilon \in X\ \exists x_\varepsilon^* \in X$ tal que:

$$x_\varepsilon^* \in \partial f(x_\varepsilon)\ ,\ p_X(x_0 - x_\varepsilon) \leq \lambda \text{ and } p_{X^*}(z_r^* - x_\varepsilon^*) \leq \frac{\varepsilon + \tilde{\delta}}{\lambda} \sup_{y^* \in U^\circ} p_{X^*}(y^*)$$

Finalmente estimamos $p_{X^*}(x_0^* - x_\varepsilon^*) \leq p_{X^*}(z_r^* - x_\varepsilon^*) + p_{X^*}(z_r^* - x_0^*) \leq \frac{\varepsilon+\delta}{\lambda} \sup\limits_{y^* \in U^\circ} p_{X^*}(y^*) + \frac{\delta}{2} \leq \frac{\varepsilon}{\lambda} \sup\limits_{y^* \in U^\circ} p_{X^*}(y^*) + \delta$

□

Lema 2.1.11 *Sea X un evtlc y $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa, sci y epi-puntada tal que $0 \in \mathrm{Int}(\mathrm{dom}(f^*))$. Considere p_X una seminorma continua sobre X, p_{X^*} una seminorma sobre X^* (no necesariamente continua) $\alpha, \beta > 0$, $x_0 \in X$ y $f(x_0) < \inf\limits_E f + \alpha\beta$. Entonces existe $x \in X$ y $x^* \in \partial f(x)$ tal que $p_X(x - x_0) < \alpha$ y $p(x^*) < \beta \max\limits_{y^* \in U^\circ} p_{X^*}(y^*)$*

Demostración. Consideremos $\varepsilon > 0$ tal que $f(x_0) < \inf\limits_E f + \varepsilon < \inf\limits_E f + \alpha\beta$ y escojamos λ tal que $\frac{\varepsilon}{\beta} < \lambda < \alpha$. Se sigue que $0 \in \partial_\varepsilon f(x_0)$, luego por 2.1.10 $\exists x_\varepsilon \in X\ \exists x_\varepsilon^* \in X$ tal que:

$$p_X(x_0 - x_\varepsilon) \leq \lambda \text{ and } p_{X^*}(x_\varepsilon^*) \leq \frac{\varepsilon}{\lambda} \max_{y^* \in U^\circ} p_{X^*}(y^*)$$

De donde se concluye que $p_X(x_\varepsilon - x_0) < \alpha$ y $p(x_\varepsilon^*) < \beta \max\limits_{y^* \in U^\circ} p_{X^*}(y^*)$ □

Lema 2.1.12 *Sea X un evtlc y $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa, sci y epi-puntada. Supongamos que $x \in X$ (no necesariamente en $\mathrm{dom}(f)$) y que $\inf\limits_E f < f(x)$. Entonces existe $z \in X$ y $z^* \in \partial f(z)$ tal que:*

$$f(z) < f(x) \text{ y } \langle z^*, x - z\rangle > 0$$

Demostración. Fije $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\inf\limits_E f < \lambda < f(x)$. Sea $F := \{x \in X : f(y) \leq \lambda\}$, por lo tanto F es convexo cerrado y no vacío, más aún $x \notin F$, escoja una seminorma continua p_1 tal que $d(x, F) = \inf\limits_F p_1(x - y) > 0$ (esto es posible, porque se puede separar estrictamente x y F). Ahora tome $u^* \in \mathrm{Int}(\mathrm{dom}(f^*))$ tenemos que $f \geq u^* + r$, donde $r := -f^*(u^*)$ y considere la nueva seminorma continua $p(x) := p_1(x) + |\langle u^*, x\rangle|$. Define

$$K = \sup_{y \in X, p(x-y) \neq 0} \frac{\lambda - f(y)}{p(x - y)}$$

Primero se probará que $K \in (0, +\infty)$.

Supongamos que $y \in X$ $p(x - y) \neq 0$.

- Si $y \in F$, entonces

$$\lambda - f(y) \leq \lambda - \langle u^*, y\rangle - r \leq |\lambda - \langle u^*, x\rangle| - r| + \langle u^*, x - y\rangle$$

$$\frac{\lambda - f(y)}{p(x-y)} \leq \frac{|\lambda - \langle u^*, x\rangle| - r|}{d(x,F)} + 1(\text{ recordar la definición de } p)$$

- Si $y \notin F$, entonces

$$\frac{\lambda - f(y)}{p(x-y)} \leq 0$$

En ambos casos $\frac{\lambda - f(y)}{p(x-y)}$ existen cotas superiores, por lo cual se concluye que $K < +\infty$. Para observar que $K > 0$, basta tomar cualquier $y \in F$ ($y \in F \Rightarrow p(x-y) \neq 0$) tal que $f(y) < \lambda$. Ahora define $\tilde{K} = \max\{1, K\}$. Sea $0 < \varepsilon < 1$, tal que $(1-\varepsilon)\tilde{K} < K$ luego, por la definición de K, existe $x_0 \in X$ tal que $p(x - x_0) \neq 0$ y

$$\frac{\lambda - f(x_0)}{p(x-x_0)} > (1-\varepsilon)\tilde{K}$$

Defina la función $N(z) := \tilde{K}p(z-x)$; se ha probado que $(1-\varepsilon)N(x_0) + f(x_0) < \lambda$, es decir, $(N+f)(x_0) < \lambda + \varepsilon N(x_0)$. Afirmamos que $\lambda \leq \inf_E (N+f)$. En efecto si $p(z-x) = 0$, esto implica que $z \notin F$, luego se tiene $\lambda < f(z) = (N+f)(z)$, por otro lado si $p(x-z) \neq 0$ se tiene que $\dfrac{\lambda - f(z)}{p(z-x)} \leq \tilde{K}$, se sigue que $\lambda \leq (N+f)(z)$. Con lo cual se ha probado que existe $x_0 \in X$ con $p(x-x_0) \neq 0$, tal que

$$(N+f)(x_0) < \inf_X (N+f) + \varepsilon\tilde{K}p(x-x_0)$$

Se obtiene que $f - u^* \leq f + \tilde{K}|u^*| \leq f + N$, ya que $\tilde{K} \geq 1$, más aun la desigualdad anterior quiere decir que $0 \in \operatorname{Int}(\operatorname{dom}(N+f)^*)$. Luego se puede aplicar 2.1.11 a $N+f$, con $\alpha = p(x-x_0)$ y $\beta = \varepsilon\tilde{K}$, $p_X = p$ y $p_{X^*} = \sigma_U$, donde $U = \{x \in X : p(x) \leq 1\}$, luego existe $z \in \operatorname{dom}(N+f) = \operatorname{dom}(f)$ y $w^* \in \partial(N+f)(z)$ tal que $p(z-x_0) < p(x-x_0)$ y $p_{X^*}(w^*) \leq \varepsilon\tilde{K} \max\limits_{y^* \in U^\circ} \sigma_U(y^*) \leq \varepsilon\tilde{K}$. Se sigue que $p(x-z) > 0$. Utilizando la regla de suma de los subdiferenciales

$$\partial(N+f)(z) = \partial f(z) + \partial N(z)$$

De donde se concluye la existencia de $y^* \in \partial N(z)$ y $z^* \in \partial f(z)$ tal que $w^* = y^* + z^*$. Esto prueba que $\langle y^*, z-x\rangle \geq N(z) - N(x) = N(z) = \tilde{K}p(z-x)$. Entonces

$$\langle z^*, x-z\rangle = \langle y^*, z-x\rangle + \langle w^*, x-z\rangle \geq \tilde{K}p(z-x) - p_{X^*}(w^*)p(x-z) > (1-\varepsilon)\tilde{K}p(z-x) > 0$$

Finalmente $z^* \in \partial f(z)$, se obtiene que $f(x) \geq f(z) + \langle z^*, x-z\rangle > f(z)$, lo cual completa la demostración. □

Teorema 2.1.13 *Sea X un evtlc y $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa, sci y epi-puntada. Entonces ∂f es un operador monotono maximal.*

Demostración. Dado $z \in X$ y $z^* \in X^*$ tal que $y^* \notin \partial f(z)$, esto quiere decir que $0 \notin \partial(f - y^*)(y)$, lo cual implica que $\inf_X(f-y^*) < f(y)-\langle y^*, x\rangle$. Por lema 2.1.12 existe $z \in \mathrm{dom}(f-y^*) = \mathrm{dom}(f)$ y $z^* \in \partial(f - y^*)(z)$ tal que $\langle z^*, z - x\rangle < 0$. Luego existe $w^* \in \partial f(z)$ tal que $z^* = w^* - y^*$, con lo cual $\langle w^* - y^*, z - x\rangle < 0$ □

Corolario 2.1.14 *Considere* $(X, \tau_X, X^*, \tau_{X^*})$ *un par en dualidad,* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *convex, sci y propia. Si* f *o* f^* *es epi-puntada se tiene que* ∂f *y* ∂f^* *son operadores monotono maximales.*

Lema 2.1.15 (Corollario 2.6.5 [30]) *Sean* X, Y *evtlcs,* $f \in \Gamma(Y)$ *y* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. *Entonces*

$$\partial_\varepsilon (f \circ A)(x) = \bigcap_{\eta>0} \overline{A^*\left(\partial_{\varepsilon+\eta} f(Ax)\right)}^{w^*}$$

Para cualquier $x \in \mathrm{dom}(f \circ A)$ *y* $\varepsilon \geq 0$

Lema 2.1.16 *Sean* X, Y *evtlcs,* $f \in \Gamma(Y)$ *epi-puntada y* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. *Entonces*

$$\partial_\varepsilon (f \circ A)(x) = \bigcap_{\eta>0} \overline{A^*\left[\partial_{\varepsilon+\eta} f(Ax) \cap \mathrm{Int}(\mathrm{dom}(f^*))\right]}^{w^*}$$

Para cualquier $x \in \mathrm{dom}(f \circ A)$ *y* $\varepsilon \geq 0$

Demostración. Basta probar que para cualquier $\eta > 0$

$$A^*\left(\partial_{\varepsilon+\eta} f(Ax)\right) \subseteq \overline{\left[A^*\left(\partial_{\varepsilon+\eta} f(Ax) \cap \mathrm{Int}(\mathrm{dom}(f^*))\right)\right]}^{w^*}$$

. En efecto por lema 2.1.6 y como A^* is w^* to w^* continua se concluye. □

Teorema 2.1.17 *Sean* X, Y *evtlcs,* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $g \in \Gamma(Y)$ *epi-puntada,* $f := g \circ A$ *y* $x \in \mathrm{dom}(f)$. *Entonces* $x^* \in \partial f(x)$ *si y solo si existe una red* $(y_i, y_i^*)_{i\in I} \subseteq \mathrm{gph}\,\partial g$ *tal que* $(y_i) \to y = Ax$, $(g(y_i)) \to g(y)$, $\langle y_i - y, y_i^*\rangle \to 0$ *y* $A^*(y_i^*) \xrightarrow{w^*} x^*$.

Demostración. Sea $x_0^* \in \partial f(x)$. Considere p_Y una seminorma continua sobre Y, p_{X^*} una seminorma $\sigma(X^*, X)$-continua sobre X^*, $\varepsilon \in (0, 1)$ y $U := \{y \in Y : p_Y(y) \leq 1\}$. Escoja $\eta > 0$ tal que:

1. $\sqrt{\eta} + \eta \leq \frac{\varepsilon}{2}$
2. $\sqrt{\eta} \leq \dfrac{\varepsilon}{2\left(\max\limits_{U^\circ} p_{X^*}(A^*(y^*)) + p_{X^*}(x_0^*) + 1\right)}$

Luego por 2.1.16 se puede tomar $z_0^* \in \partial_\eta g(y) \cap \mathrm{Int}(\mathrm{dom}(g^*))$ tal que $p_{X^*}(A^* z_0^* - x_0^*) \leq \eta$. Entonces por 2.1.7 $\exists(y_\eta, y_\eta^*) \in \mathrm{gph}\,\partial g$ (usando $\beta = 1$, $\lambda = \sqrt{\eta}$) tal que:

- $p_Y(y_\eta - y) \leq \sqrt{\eta}$
- $y_\eta^* = z_0^* + \sqrt{\eta}\left(u_\eta^* + \lambda_\eta z_0^*\right) \in \partial g(y_\eta)$ and $u_\eta^* \in U^\circ$
- $|\langle y_\eta^*, y - y_\eta\rangle| \leq \eta + \sqrt{\eta}$

- $|g(y) - g(y_\eta)| \leq \eta + \sqrt{\eta}$

Por lo tanto

- $p_Y(y_\eta - y) \leq \varepsilon$
- $|\langle y^*_\eta, y - y_\eta\rangle| \leq \varepsilon$
- $|g(y) - g(y_\eta)| \leq \varepsilon$

Finalmente

$$\begin{aligned}
p_{X^*}(A^* y^*_\eta - x^*_0) &\leq p_{X^*}(A^* z^*_0 - x^*_0) + p_{X^*}(A^* y^*_\eta - A^* z^*_0) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\eta}\left(p_{X^*}(A^* u^*_\eta) + p_{X^*}(A^* z^*_0 - x^*_0) + p_{X^*}(x^*_0)\right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\eta}\left(p_{X^*}(A^* u^*_\eta) + \eta + p_{X^*}(x^*_0)\right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\eta}\left(\max_{U^\circ} p_{X^*}(A^*(y^*)) + p_{X^*}(x^*_0) + 1\right) \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Esto ha probado la primera implicancia. Para al segunda considere $(y_i, y^*_i)_{i\in I} \subseteq \operatorname{gph} \partial g$ tal que $(y_i) \to y = Ax$, $(g(y_i)) \to g(y)$, $\langle y_i - y, y^*_i\rangle \to 0$ y $A^*(y^*_i) \stackrel{w^*}{\to} x^*$. Entonces $\langle y - y_i, y^*_i\rangle \leq g(y) - g(y_i)$ para todo $i \in I$ e $y \in Y$. Se sigue que

$$\langle z - x, A^* y^*_i\rangle + \langle y - y_i, y^*_i\rangle = \langle Az - y_i, y^*_i\rangle \leq f(z) - g(y_i) \ \forall i \in I \ \forall z \in X$$

Tomando limites se obtiene que $\langle z - x, x^*\rangle \leq f(z) - f(x)$ $\forall z \in X$, por lo cual $x^* \in \partial f(x)$ □

Teorema 2.1.18 *Sea X un evtlc, $f_1, f_2 \in \Gamma(X)$ epi-puntadas y $x \in \operatorname{dom}(f_1 + f_2)$. Entonces $x^* \in \partial(f_1 + f_2)(x)$ si y solo si existen dos redes $(x_{k,i}, x^*_{k,i})_{i\in I} \subseteq \operatorname{gph} f_k$ $k = 1,2$, tales que $(x_{k,i})_{i\in I} \to x$, $f_k(x_{k,i}) \to f_k(x)$, $\langle x_{k,i} - x, x^*_{k,i}\rangle \to 0$ para $k = 1,2$ y $(x^*_{1,i} + x^*_{2,i}) \stackrel{w^*}{\to} x^*$*

Demostración. Aplicando 2.1.17 para $Y = X \times X$, $A : X \to Y$ definida por $Ax = (x,x)$ y $g(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$. se tiene que $f := f_1 + f_2 = g \circ A$. La suficiencia es inmediata tomando $y = (x,x) = Ax$, $y_i = (x_{1,i}, x_{2,i})$ e $y^*_i = (x^*_{1,i}, x^*_{2,i})$ para cada $i \in I$. Para la condición necesaria tome $x* \in \partial f(x)$, por 2.1.17 existe $(y_i, y^*_i)_{i\in I} \subseteq \operatorname{gph} \partial g$ tal que $(y_i) \to y = Ax$, $(g(y_i)) \to g(y)$, $\langle y_i - y, y^*_i\rangle \to 0$ y $A^*(y^*_i) \stackrel{w^*}{\to} x^*$. Tomando $y_i = (x_{1,i}, x_{2,k})$ e $y^*_i = (x^*_{1,i}, x^*_{2,i})$, por la formula $\partial g(x_1, x_2) = \partial f_1(x_1) \times \partial f_2(x_2)$, se obtiene que $(x_{k,i}, x^*_{k,i}) \in gr\partial f_k$ y $x_{k,i} \to x$ para $k = 1,2$. Supongamos que $\limsup f_1(x_{1,i}) - f_1(x) > \delta > 0$, entonces $J := \{i \in I : f_1(x_{1,i}) - f_1(x) > \delta\}$ es co-final en I. Se sigue que $g(y_i) - g(y) \geq \delta + f_2(x_{2,i}) - f_2(x)$ para todo $i \in J$. Entonces tomando limite inferiorse obtiene que $0 \geq \delta$. Por lo cual necesariamente $f_k(x_{k,i}) \to f_k(x)$ para $k = 1,2$. Finalmente usando las desigualdades

$$f_1(x_{1,i}) - f_1(x) \leq \langle x_{1,i} - x, x^*_{1,i}\rangle \leq \langle x_{1,i} - x, x^*_{1,i}\rangle + \langle x_{2,i} - x, x^*_{2,i}\rangle + f_2(x) - f_2(x_{2,i}) \ \forall i \in I$$

y tomando limite tenemos que $\langle x_{1,i} - x, x^*_{1,i}\rangle \to 0$ □

2.2 Subdiferencial Abstracto

Definición 2.2.1 *Sea X un evtlc, se denota $\mathcal{B} := \{f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} : f$ es $\sigma(X, X^*) - sci$ y epi-puntada$\}$ y $\mathfrak{C} = \{g : X \to \mathbb{R} : g$ es convexa y Lipschitz$\}$*

Ahora se extenderá la definición tradicional de *Subdiferencial Abstracto* a espacios localmente convexos.

Definición 2.2.2 (Subdiferencial Abstracto) *Sea $\mathcal{F} \subseteq \overline{\mathbb{R}}^X$. Una multifunción $\overline{\partial} : X \times \mathcal{F} \rightrightarrows X^*$ es un subdiferencial sobre $\mathcal{F}$ si satisface que:*

Si $f(x_0) \in \mathbb{R}$, $g \in \mathfrak{C}$ y x_0 es un mínimo local de $f + g$, entonces existe $(x_i, x_i^*) \subseteq \operatorname{gph} \overline{\partial} f$ una red tal que:

- $x_i \xrightarrow{f} x_0$
- $x_i^* \xrightarrow{w^*} x_0^*$
- $\langle x_i, x_i^* \rangle \to \langle x_0, x_0^* \rangle$
- $0 \in x_0^* + \partial g(x_0)$

Lema 2.2.3 (Theorem on iterated limits, General Topology, Kelley, J.L. [17]) *Sea D Un conjunto dirigido, E_n conjuntos dirigidos para cada n en D, Defina $F = D \times \Pi_{n\in D} E_n$, y para cada (m, f) en F sea $R(m, f) = (m, f(m))$. Si $S_{(m,n)}$ es un elemento en un espacio topológico para cada $m \in D$ y cada $n \in E_m$, Entonces $S \circ R$ converge a $\lim_m \lim_n S(m, n)$ cada vez que estos limites iterados existan.*

Demostración. General Topology, Kelley, J.L. [17] Teorema 4 página 69. □

Lema 2.2.4 *Considere $C \subseteq X$ convexo cerrado y $p : X \to \mathbb{R}$ una seminorma continua, defina*

$$d_C^p : X \to [0, +\infty) \quad d_C^p(x) := \inf_{z\in C} p(x - z)$$

Entonces se tiene que d_C es Lipschitz y convexa, más aún si existe $\bar{z} \in C$ tal que $d_C^p(x) = p(x - \bar{z})$ entonces $\partial d_C^p(x) \subseteq \partial p(x - \bar{z}) \cap N(C, \bar{z}) \subseteq B_p(0, 1)^\circ \cap N(C, \bar{z})$.

Demostración. Primero es fácil ver que d_C es Lipschitz y convexa, Ahora dado $x^* \in \partial d_C(x)$

i)

$$\begin{aligned} \forall y \in X \ \langle x^*, y - x\rangle &\leq d_C(y) - d_C(x) \\ &\leq p(y - \bar{z}) - p(x - \bar{z}) \end{aligned}$$

Enotnces $\forall w \in X \ \langle x^*, w - (x - \bar{z})\rangle \leq p(w) - p(x - \bar{z})$, i.e, $x^* \in \partial p(x - \bar{z}) \subseteq B_p(0, 1)^\circ$

ii) Sea $y \in C$, se tiene:

$$\begin{aligned} \langle x^*, y - \bar{z}\rangle &= \langle x^*, y - x\rangle + \langle x^*, x - \bar{z}\rangle \\ &\leq d_C(y) - d_C(x) + \langle x^*, x - \bar{z}\rangle \\ &= 0 - p(x - \bar{z}) + \langle x^*, x - \bar{z}\rangle \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

$\square$

Lema 2.2.5 *Sea (X,τ) un evtlc. Considere $f \in \mathcal{B}$ $a,b \in X$, $x_0^* \in X^*$. Entonces existe a seminorma continua ρ_0 tal que para cualquier seminorma continua $\rho \geq \rho_0$ y $M \geq 1$ la función $H(x) := f(x) - \langle x_0^*, x\rangle + Md^{\rho}_{[a,b]}(x)$ es $\sigma(X,X^*)$-infcompacta.*

Demostración. Tome $y_0^* \in \operatorname{Int}(\operatorname{dom} f^*)$, considere $\rho_0(x) := |\langle y_0^* - x_0^*, x\rangle|$, luego para cada $c \in X$

$$\begin{aligned} f(x) - \langle x_0^*, x\rangle + M\rho_0(x-c) &\geq f(x) - \langle x_0^*, x\rangle + \langle x_0^* - y_0^*, x - c\rangle \\ &= f(x) - \langle y_0^*, x\rangle - \langle x_0^* - y_0^*, c\rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto $f(x) - \langle x_0^*, x\rangle + M\rho_0(x-c)$ es $\sigma(X,X^*)$-infcompact, luego es evidente que para cualquier seminorma continua $\rho \geq \rho_0$, $f(x) - \langle x_0^*, x\rangle + M\rho(x-c)$ es $\sigma(X,X^*)$-infcompacta. Ahora se probará que $H(x) := f(x) - \langle x_0^*, x\rangle + Md^{\rho}_{[a,b]}(x)$ es infcompacta. Considere una red $(x_n)_{n\in D} \subset \{x \in X : H(x) \leq \alpha\}$, del hecho que $[a,b]$ es compacto para cada $n \in D$, podemos asegurar la existencia de $u_n \in [a,b]$ tal que $d^{\rho}_{[a,b]}(x_n) = \rho(x_n - u_n)$, más aún existe una subred $(v_i)_{i\in T}$ de (u_n) tal que $v_i \to v \in [a,b]$, esto induce una subred $(y_i)_{i\in T}$ de (x_n). Ahora sea $i_0 \in T$ tal que $\forall i \geq i_0$ $\rho(v_i - v) \leq 1$, entonces $\forall i \geq i_0$ $y_i \in \Gamma := \{x \in X : f(x) - \langle x_0^*, x\rangle + M\rho(x-v) \leq \beta + M\}$. Finalmente como Γ es compacto existe una subred $(z_j) \to z$ de (y_i) convergente (por lo tanto una subred de (x_n)). $\square$

Teorema 2.2.6 *Sea (X,τ) un evtlc. Considere $\overline{\partial}$ un subdiferencial abstracto sobre $\mathcal{F} \subseteq \overline{\mathbb{R}}^X$. Sea $f \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}$ $a,b \in X$ con $a \in \operatorname{dom} f$ y $a \neq b$, y $r \in \mathbb{R}$ con $r \leq f(b)$ y una seminorma continua p tal que $p(a-b) \neq 0$. Entonces existe una red $(x_\alpha) \xrightarrow{f} c \in [a,b[$ y $x_\alpha^* \in \overline{\partial} f(x_\alpha)$ $\forall\alpha$ tal que:*

1. $r - f(a) \leq \liminf\langle b - a, x_\alpha^*\rangle$
2. $0 \leq \liminf\langle c - x_\alpha, x_\alpha^*\rangle$
3. $\frac{p(b-c)}{p(b-a)}(r - f(a)) \leq \liminf\langle b - x_\alpha, x_\alpha^*\rangle$
4. $p(b-a)(f(c) - f(a)) \leq p(c-a)(r - f(a))$

Demostración. Tome $x^* \in X^*$ tal que $\langle b - a, x^*\rangle = r - f(a)$. Considere $h = f - x^*$; entonces $h(a) \leq h(b)$. Como h es sci, existe $c \in [a,b[$ tal que $h(c) \leq h(x)\quad \forall x \in [a,b]$. Sea $\mu \in [0,1[$ tal $c = (1-\mu)a + \mu b$. Se sigue que $c - a = \mu(b-a)$ y $p(c-a) = \mu p(b-a)$, entonces $f(c) - f(a) = h(c) - h(a) + \langle c - a, x^*\rangle \leq \mu(r - f(a))$, luego se concluye 4.

Sea $\gamma < h(c)$, entonces existe $U_\gamma \in \mathcal{N}_0$ (convexa cerrada y balanceada) tal que $\forall x \in [a,b] + U_\gamma$ $\gamma < h(x)$. En efecto $\forall x \in [a,b]$ $\gamma < h(x)$, del hecho h es sci en x existe $U_x \in \mathcal{N}_0$ (convexa cerrada y balanceada) tal que $\forall z \in x + U_x$ $\gamma < h(z)$, ahora tome $V_x \in \mathcal{N}_0$ (convexa cerrada y balanceada) tal que $V_x + V_x \subseteq U_x$. Luego se tiene que $[a,b] \subseteq \bigcup_{x\in[a,b]} x + V_x$, como $[a,b]$ es compacto existen $\{x_i\}_{i=1,..,n} \subseteq [a,b]$ tales que $[a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} x_i + V_{x_i}$, defina $U_\gamma := \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$, luego se tiene que $\forall w \in [a,b] + U_\gamma$ $\gamma < h(w)$. En efecto sea $w \in [a,b] + U_\gamma$, luego $w = t + u$ con $t \in [a,b]$ y $u \in U_\gamma$, entonces existe i tal que $t \in x_i + V_{x_i}$, esto implica $w \in x_i + V_{x_i} + V_{x_i} \subseteq x_i + U_{x_i}$ por lo tanto $\gamma < h(w)$.

Ahora escoja ρ_0 como en 2.2.5 (asociada a f, a,b y x^*), luego para cualquier $n \in \mathbb{N}$, existe

$U_n \in \mathcal{N}_0$ (convexa cerrada y balanceada) tal que $\forall x \in [a,b] + U_n$ $h(c) - \frac{1}{n^2} < h(x)$, más aún se puede suponer que $U_{n+1} \subseteq U_n \subset B_{p+\rho_0}(0,1) := \{x \in X : p(x) + \rho_0(x) \leq 1\}$

Ahora define $\rho_n(x) := \sigma_{U_n^\circ}(x)$ (claramente $\rho_n \geq \rho_0$), i.e. es decir de seminorma asociada a U_n, y tome $d^n_{[a,b]}(x) := \inf\limits_{z\in[a,b]} \rho_n(x)$. Tome $t_n \geq 1$ tal que $h(c) - 1 + t_n \geq h(c) - \frac{1}{n^2}$. Entonces

$$\forall x \in U := [a,b] + U_1 \;\; h(c) \leq h(x) + t_n d^n_{[a,b]}(x) + \frac{1}{n^2}$$

En efecto $\forall x \in [a,b] + U_n$ $h(c) \leq h(x) + \frac{1}{n^2}$, si $x \in U \setminus ([a,b] + U_n)$, entonces $d^n_{[a,b]}(x) \geq 1$, luego

$$h(x) + t_n d_{[a,b]}(x) \geq h(c) - 1 + t_n \geq h(c) - \frac{1}{n^2}$$

Ahora defina $H_n(x) := h(x) + t_n d^n_{[a,b]}(x) + I_U$, $H_n(c) \leq \inf H_n + \frac{1}{n^2}$ y por 2.2.5 H_n es $\sigma(X, X^*)$-infcompacta, tome una familia filtrante de seminormas continuas $(p_i)_{i\in I}$ tal que $V_i := \{\omega \in X : p_i(\omega) \leq 1\}$ es una base para el sistema de vecindades del cero, entonces $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall i \in I$ se aplica 2.1.4 a H_n y c (con $\lambda = \sqrt{\varepsilon} = \frac{1}{n}$), por lo tanto existe $u_{i,n}$

1. $p_i(u_{i,n} - c) \leq \frac{1}{n}$
2. $H_n(u_{i,n}) \leq H_n(c)$
3. $u_{i,n}$ es un mínimo de $H_n + \frac{1}{n} p_i(\cdot - u_{i,n})$

Luego $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{i,n} \to c$ de lo cual puede suponer que $u_{i,n} \in \operatorname{Int} U$. Ahora note que $u_{i,n}$ es un mínimo local de $f - x^* + t_n d^n_{[a,b]} + \frac{1}{n} p_i(\cdot - u_{i,n})$. Entonces para todo i, n existe: $(x_\alpha, x^*_\alpha)_{\alpha\in\Lambda(i,n)} \subseteq \operatorname{gph} \overline{\partial} f$ una red $v^*_{i,n} \in \partial\, d^n_{[a,b]}(u_{i,n})$, $b^*_{i,n} \in B_{p_i}(0,1)^\circ$ tal que :

1. $x_\alpha \xrightarrow{f} u_{i,n}$
2. $x^*_\alpha \xrightarrow{w^*} u^*_{i,n}$
3. $\langle x_\alpha, x^*_\alpha \rangle \to \langle u_{i,n}, u^*_{i,n} \rangle$
4. $u^*_{i,n} = x^* - (t_n v^*_{i,n} + \frac{1}{n} b^*_{i,n})$

Sea $y_{i,n} \in [a,b]$ tal que $d^n_{[a,b]}(u_{i,n}) = \rho_n(u_{i,n} - y_{i,n})$, se puede suponer que $y_{i,n} \neq b$ para todo i, n. En efecto $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{i,n} \to c$ y como $d^n_{[a,b]}$ es continua tenemos que $\lim\limits_i d^n_{[a,b]}(u_{i,n}) = 0$, pero como $\rho_n(c - b) > 0$ se tiene que el conjunto $I_1 := \{(i,n) \in I \times \mathbb{N} : y_{i,n} \neq b\}$ es cofinal, por lo cual podemos restringir la red a I_1. Escriba $y_{i,n} = (1 - \lambda_{i,n})a + \lambda_{i,n} b$ para algún $\lambda_{i,n} \in [0,1[$. Por 2.2.4 se tiene

$$\partial\, d^n[a,b](u_{i,n}) \subseteq \partial\, \rho_n(u_{i,n} - y_{i,n}) \cap N([a,b], y_{i,n}) \subseteq B_{\rho_n}(0,1)^\circ \cap N([a,b], y_{i,n})$$

Entonces para todo $x \in [a,b[$ $\langle x - y_{i,n}, v^*_{i,n} \rangle \leq 0$, por lo cual para todo $\lambda \in [0,1[$ $\langle (1-\lambda)a + \lambda b - y_{i,n}, v^*_{i,n} \rangle = (\lambda - \lambda_{i,n}) \langle b - a, v^*_{i,n} \rangle \leq 0$. Luego $\forall i, n$ $\langle b - a, v^*_{i,n} \rangle \leq 0$. Más aún

$$\begin{aligned} \langle c - u_{i,n}, v^*_{i,n} \rangle &= \langle c - y_{i,n}, v^*_{i,n} \rangle - \langle u_{i,n} - y_{i,n}, v^*_{i,n} \rangle \\ &\leq 0 - \langle u_{i,n} - y_{i,n}, v^*_{i,n} \rangle \\ &\leq 0 + \rho_n(0) - \rho_n(u_{i,n} - y_{i,n}) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}\langle b-a, u^*_{i,n}\rangle &= \langle b-a, x^*\rangle - t_n\langle b-a, v^*_{n,i}\rangle - \frac{1}{n}\langle b-a, b^*_{n,i}\rangle\\ &\geq \langle b-a, x^*\rangle - \frac{1}{n}p_i(b-a)\\ &= r - f(a) - \frac{1}{n}p_i(b-a)\end{aligned}$$

Se puede suponer que $\lim\limits_{I\times\mathbb{N}} \frac{1}{n}p_i(b-a) = 0$, esto pues se puede restringir la red al conjunto $I_2 := \{(i,n) \in I \times \mathbb{N} : \frac{1}{\sqrt{n}}p_i(a-b) \leq 1\}$, este conjunto es cofinal en $I \times \mathbb{N}$, i.e. $\forall (i,n) \in I \times \mathbb{N}$ existe $(i_0, n_0) \in I_2$ tal que $i \leq i_0$ y $n \leq n_0$, luego $(u_{i,n})_{(i,n)\in I_2}$ es una subred de $(u_{i,n})_{(i,n)\in I\times\mathbb{N}}$. So $\liminf\langle b-a, u^*_{i,n}\rangle \geq r - f(a)$.

Similarmente,

$$\begin{aligned}\langle c-u_{n,i}, u^*_{i,n}\rangle &= \langle c-u_{i,n}, x^*\rangle - t_n\langle c-u_{i,n}, v^*_{i,n}\rangle - \frac{1}{n}\langle c-u_{i,n}, b^*_{i,n}\rangle\\ &\geq \langle c-u_{i,n}, x^*\rangle - \frac{1}{n}p_i(c-u_{i,n})\\ &\geq \langle c-u_{i,n}, x^*\rangle - \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

So $\liminf\langle c-u_{n,i}, u^*_{i,n}\rangle \geq 0$

Ahora del hecho que $H_n(u_{i,n}) \leq H_n(c)$

$$f(u_{i,n}) \leq f(c) - \langle c-u_{i,n}, x^*\rangle$$

Por lo tanto $f(c) \leq \liminf f(u_{i,n}) \leq \limsup f(u_{i,n}) \leq f(c)$, con lo cual se concluye que $u_{i,n} \xrightarrow{f} c$

Finalmente tome $J = I \times \mathbb{N}$ y $\mathbb{B} = J \times \Pi_{j\in J}\Lambda(j)$, defina una nueva red:

$$\begin{aligned}x_{j,T} &:= x_{T(j)}\\ x^*_{j,T} &:= x^*_{T(j)}\end{aligned}$$

por 2.2.3 se tiene que $x_{j,T} \xrightarrow{f} c$, y $x^*_{j,T} \in \overline{\partial} f(x_{j,T})$. Más aún

1. $\liminf\langle b-a, x^*_{j,T}\rangle \geq r - f(a)$
2. $\liminf\langle c-x_{j,T}, x^*_{j,T}\rangle \geq 0$

Finalmente note que $b - c = (1-\mu)(b-a)$ y $p(b-c) = (1-\mu)p(b-a)$. Por lo cual

$$\begin{aligned}\liminf\langle b - x_{j,T}, x^*_{j,T}\rangle &= \liminf(1-\mu)\langle b-a, x^*_{j,T}\rangle + \langle c - x_{j,T}, x^*_{j,T}\rangle \\ &\geq (1-\mu)\liminf\langle b-a, x^*_{j,T}\rangle + \liminf\langle c - x_{j,T}, x^*_{j,T}\rangle \\ &\geq (1-\mu)(r - f(a)) = \frac{p(b-c)}{p(b-a)}(r - f(a))\end{aligned}$$

□

Corolario 2.2.7 *Sea $(X,\mathcal{T})$ un evtlc. Considere $\overline{\partial}$ un subdiferencial abstracto sobre $\mathcal{F} \subseteq \overline{\mathbb{R}}^X$. Sea $f \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}$, entonces para cualquier $x \in \operatorname{dom} f$ existe $(x_\alpha, x^*_\alpha) \subseteq \operatorname{gph}\overline{\partial} f$ tal que $x_\alpha \xrightarrow{f} x$ y $\liminf\langle x - x_\alpha, x^*_\alpha\rangle \geq 0$. En particular $\operatorname{dom} f \subseteq \overline{\operatorname{dom}\overline{\partial} f}^{\mathcal{T}}$*

Demostración. Sea $x \in \operatorname{dom} f$. Si x es un mínimo local de f la demostración se sigue de la definición de $\overline{\partial} f$. Supongamos entonces que x no es un mínimo local de f, por lo cual existe $(x_\alpha)_{\alpha\in D} \to x$ tal que $f(x_\alpha) < f(x)$, luego $x_\alpha \xrightarrow{f} x$. Entonces se puede aplicar 2.2.6 a x_α, x, p_α (cualquier seminorma continua tal que $p_\alpha(x_\alpha - x) \neq 0$) y $r = f(x)$, entonces para cada α existe $(x_{\alpha,\lambda}, x^*_{\alpha,\lambda})_{\lambda\in\Lambda(\alpha)} \subset \operatorname{gph}\overline{\partial} f$ tal que:

a) $x_{\alpha,\lambda} \xrightarrow{f} y_\alpha \in [x_\alpha, x[$

b) $0 < \frac{p_\alpha(x-y_\alpha)}{p_\alpha(x-x_\alpha)}(f(x) - f(x_\alpha)) \leq \liminf\langle x - x_{\alpha,\lambda}, x^*_{\alpha,\lambda}\rangle$

c) $f(y_\alpha) \leq f(x_\alpha) + \frac{p_\alpha(y_\alpha - x_\alpha)}{p_\alpha(x-x_\alpha)}(f(x) - f(x_\alpha)) \leq f(x)$ (porque $\frac{p_\alpha(y_\alpha-x_\alpha)}{p_\alpha(x-x_\alpha)} \leq 1$)

Más aún $y_\alpha \to x$, porque para cualquier seminorma p se tiene que $p(x - y_\alpha) \leq p(x - x_\alpha)$, entonces esto junto conc) y al sci de f, conduce a que $y_\alpha \xrightarrow{f} x$. Ahora tome $\mathbb{B} = D \times \Pi_{j\in D}\Lambda(j)$, defina:

$$\begin{aligned} x_{j,T} &:= x_{j,T(j)} \\ x^*_{j,T} &:= x^*_{j,T(j)} \end{aligned}$$

Es claro que $x_{j,T} \xrightarrow{f} x$ y por b) $\liminf\langle x - x_{j,T}, x^*_{j,T}\rangle \geq 0$ □

Teorema 2.2.8 *Sea $(X,\mathcal{T})$ un evtlc. Considere $\overline{\partial}$ un subdiferencial abstracto sobre $\mathcal{F} \subseteq \overline{\mathbb{R}}^X$. Sea $f \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}$. Si $\overline{\partial} f$ es monótono, entonces f es convexa.*

Demostración. El teorema será probado en 3 pasos:

1. $\underline{a \in \operatorname{dom} f,\ b \in \operatorname{dom}\overline{\partial} f \Rightarrow [a,b] \subseteq \operatorname{dom} f}$. Supongamos que existe $b' \in [a,b]\setminus \operatorname{dom} f$ (i.e. $f(b') = +\infty$), se tiene que $\exists\lambda \in]0,1[$ tal que $b' = \lambda a + (1-\lambda)b$. Fije $y^* \in \overline{\partial} f(b)$ y tome $r \in \mathbb{R}$, tal que:
$$r > f(a) + \lambda^{-1}(1-\lambda)|\langle b-a, y^*\rangle|$$

Luego por 2.2.6 existe $(x_\alpha) \to c \in [a, b'[$ y $x_\alpha^* \in \overline{\partial} f(x_\alpha)$ tal que:

- $\liminf \langle b' - x_\alpha, x_\alpha^* \rangle \geq \frac{p(b'-c)}{p(b'-a)}(r - f(a)) \geq 0$
- $\liminf \langle b' - a, x_\alpha^* \rangle \geq r - f(a)$

Del hecho que $\overline{\partial} f$ es monótono se obtiene $\langle b - x_\alpha, y^* - x_\alpha^* \rangle \geq 0$ y tomando en cuenta que $b - b' = \lambda(1-\lambda)^{-1}(b' - a)$ se obtiene la siguiente contradicción:

$$
\begin{aligned}
|\langle b - a, y^* \rangle| \geq |\langle b - c, y^* \rangle| &\geq \langle b - c, y^* \rangle \\
&= \lim \langle b - x_\alpha, y^* \rangle \\
&= \lim \{\langle b - x_\alpha, x_\alpha^* \rangle + \langle b - x_\alpha, y^* - x_\alpha^* \rangle\} \\
&\geq \liminf \langle b - x_\alpha, x_\alpha^* \rangle \\
&= \liminf \{\langle b - b', x_\alpha^* \rangle + \langle b' - x_\alpha, x_\alpha^* \rangle\} \\
&\geq \liminf \lambda(1-\lambda)^{-1} \langle b' - a, x_\alpha^* \rangle + \liminf \langle b' - x_\alpha, x_\alpha^* \rangle \\
&\geq \lambda(1-\lambda)^{-1}(r - f(a))
\end{aligned}
$$

2. <u>$\operatorname{gph} \overline{\partial} f \subseteq \operatorname{gph} \partial f$</u>. Sea $x^* \in \overline{\partial} f(b)$, considere $a \in \operatorname{dom} f$, aplicando 2.2.6 con una seminorma continua p tal que $p(b-a) \neq 0$, $r = f(b)$, existe $x_\alpha \to c \in [a, b[$ y $x_\alpha^* \in \overline{\partial} f(x_\alpha)$ tal que:

$$\liminf \langle b - x_\alpha, x_\alpha^* \rangle \geq \frac{p(b-c)}{p(b-a)}(f(b) - f(a))$$

Como $\overline{\partial} f$ Es monótono y $c = \lambda a + (1-\lambda) b$ para algún $\lambda \in (0, 1]$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
\lambda \langle b - a, x^* \rangle = \langle b - c, x^* \rangle &= \lim \langle b - x_\alpha, x^* \rangle \\
&= \lim \{\langle b - x_\alpha, x_\alpha^* \rangle + \langle b - x_\alpha, x^* - x_\alpha^* \rangle\} \\
&\geq \frac{p(b-c)}{p(b-a)}(f(b) - f(a)) = \lambda(f(b) - f(a))
\end{aligned}
$$

Luego $\langle b - a, x^* \rangle \leq f(b) - f(a)$, porque $a \in \operatorname{dom} f$ es arbitrario $x^* \in \partial f(b)$

3. <u>f es convexa</u>. Sea $a, b \in \operatorname{dom} f$ y $z = \lambda a + (1-\lambda) b$ con $\lambda \in (0, 1)$, primero supongamos que $b \in \operatorname{dom} \overline{\partial} f$, entonces por 1) $z \in \operatorname{dom} f$. Ahora por 2.2.7 existe $x_\alpha \xrightarrow{f} z$ y $x_\alpha \in \overline{\partial} f(x_\alpha)$, tal que $\liminf \langle z - x_\alpha, x_\alpha \rangle \geq 0$ ahora por 2) $x_\alpha^* \in \partial f(x_\alpha)$, luego:

$$\langle a - x_\alpha, x_\alpha^* \rangle + f(x_\alpha) \leq f(a), \quad \langle b - x_\alpha, x_\alpha^* \rangle + f(x_\alpha) \leq f(b)$$

Multiplicando la primera desigualdad por $(1-\lambda)$ y la segunda por λ, se computa:

$$\langle z - x_\alpha, x_\alpha^* \rangle + f(x_\alpha) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

Tomando limite inferior se concluye $f(z) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$

Ahora suponga que $a, b \in \operatorname{dom} f$ son arbitrarios, entonces usando otra vez 2.2.7 existe $x_\alpha \xrightarrow{f} b$ $x_\alpha \in \overline{\partial} f(x_\alpha)$, tal que $\liminf \langle b - x_\alpha, x_\alpha \rangle \geq 0$, define $z_\alpha := \lambda a + (1-\lambda) x_\alpha$, por el caso anterior $f(z_\alpha) \leq \lambda f(a) + (1 - l\lambda) f(x_\alpha)$, nuevamente tomando limite inferior y por la semicontinuidad inferior de f y el hecho que $x_\alpha \xrightarrow{f} b$ se obtiene:

$$f(z) \leq \liminf f(z_\alpha) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) \lim f(x_\alpha) = \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

Por lo cual f es convexa.

$\square$

Lema 2.2.9 (Teorema 2.1.5 [30]) *Sea $f \in \Gamma(X)$ tal que* $\operatorname{Int}(\operatorname{dom}(f)) \neq \emptyset$

i) Sea $t_0 \in \operatorname{dom}(f)$. El siguiente limite existe:

$$f'_+(t_0) = \lim_{t \downarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \inf_{t > t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \in \overline{\mathbb{R}}$$
$$f'_-(t_0) = \lim_{t \uparrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \sup_{t < t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \in \overline{\mathbb{R}}$$

y $f'_-(t_0) \leq f'_+(t_0)$; Más aún $f'_-(t_0), f'_+(t_0) \in \mathbb{R}$ donde $t_0 \in \operatorname{Int}(\operatorname{dom}(f))$

ii) La función f es Lipschitz sobre cada intervalo compacto incluido en $\operatorname{Int}(\operatorname{dom}(f))$*, más aún, para cualquier $t_0 \in \operatorname{Int}(\operatorname{dom}(f))$ se tiene que:*

$$f'_+(t_0) = \lim_{t \downarrow t_0} f'_+(t) = \lim_{t \downarrow t_0} f'_-(t)$$
$$f'_-(t_0) = \lim_{t \uparrow t_0} f'_+(t) = \lim_{t \uparrow t_0} f'_-(t)$$

iii) Sea $t_1, t_2 \in \operatorname{dom}(f)$, $t_1 < t_2$, entonces $f'_+(t_1) \leq f'_-(t_2)$. Por lo tanto las funciones f'_+, f'_- son no-decrecientes sobre $\operatorname{dom}(f)$.

Demostración. Teorema 2.1.5 [30] página 46. $\square$

Lema 2.2.10 (Teorema 2.1.13 [30]) *Sea $g \in \Gamma(X)$ y $x \in \operatorname{dom}(g)$. Entonces para cualquier $u \in X$ existe*

$$g'(x, u) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{g(x + tu) - g(x)}{t} = \inf_{t > 0} \frac{g(x + tu) - g(x)}{t} \in \overline{\mathbb{R}}$$

y $\forall u \in X$ $g'(x, u) \leq g(x + u) - g(x)$

Demostración. Teorema 2.1.13 [30] página 55. $\square$

Teorema 2.2.11 *Sea $(X, \mathcal{T})$ a evtlc. Considere $\overline{\partial}$ un subdiferencial abstracto sobre $\mathcal{F} \subseteq \overline{\mathbb{R}}^X$. Sea $f \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}$, $g \in \Gamma(X)$ y p una seminorma continua. Supongamos que existe $\varepsilon \geq 0$ y un conjunto abierto convexo $C \subseteq X$ tal que:*

$$\overline{\partial} f(x) \subseteq \partial g(x) + \varepsilon B_p(0, 1)^\circ \quad \forall x \in C$$

Entonces

$$C \cap \operatorname{dom} g \setminus \bigcap_{y \in C \cap \operatorname{dom} f} p(\cdot - y)^{-1}(\{0\}) \subseteq C \cap \operatorname{dom} f$$

$$C \cap \operatorname{dom} f \setminus \bigcap_{y \in C \cap \operatorname{dom} g} p(\cdot - y)^{-1}(\{0\}) \subseteq C \cap \operatorname{dom} g$$

y $\forall x \in C \cap \operatorname{dom} g$ $\forall y \in C \cap \operatorname{dom} f$ *tal que* $p(x-y) \neq 0$

$$g(x) - g(y) - \varepsilon p(x-y) \leq f(x) - f(y) \leq g(x) - g(y) + \varepsilon p(x-y)$$

Demostración. Considere $\gamma > \varepsilon$. Por 2.2.7 $\operatorname{dom} f \subseteq \overline{\operatorname{dom} \overline{\partial} f}$, más aún si $C \cap \operatorname{dom} f \neq \emptyset$ entonces $C \cap \operatorname{dom} \overline{\partial} f \neq \emptyset$. Sea $y \in C \cap \operatorname{dom} \overline{\partial} f$ y $x \in C$ tal que $p(x-y) \neq 0$. De las hipótesis se tiene que $y \in \operatorname{dom} \partial g$, y entonces $y \in \operatorname{dom} g$. Ahora se probara que

$$f(x) - f(y) \leq g(x) - g(y) + \varepsilon p(x-y)$$

La desigualdad es obvia si $x \notin \operatorname{dom} g$, por lo cual se puede asumir que $x \in \operatorname{dom} g$. Se probará la desigualdad en tres lemas.

1. <u>*lema 1*</u> Considere $y \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$ y $x \in C$ tal que $p(x-y) \neq 0$. Considere $u = \frac{x-y}{p(x-y)} \in X$ y $\phi : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, definida por $\phi(t) := g(y + tu)$. Suponga que $g'(y,u) \in \mathbb{R}$. Entonces $\phi \in \Gamma(\mathbb{R})$, ϕ es continua sobre $\operatorname{dom} \phi \supseteq [0, p(x-y)]$, $\phi'_+(t) = g'(y+tu, u)$ $\forall t \in \operatorname{Int}(\operatorname{dom} \phi)$ y existe $x_0 = y + t_0 u$ con $t_0 \in (0, p(x-y))$ tal que

   $$f(x_0) - f(y) \leq g(x_0) - g(y) + \gamma p(x_0 - y)$$

   Demostración. Claramente $\phi \in \Gamma(\mathbb{R})$, y es fácil ver que ϕ es continua sobre $\operatorname{dom} \phi \supseteq [0, p(x-y)]$, más aún por 2.2.9 $\phi'_+(t) = g'(y+tu, u)$ $\forall t \in \operatorname{Int}(\operatorname{dom} \phi)$ y

   $$\lim_{t \downarrow 0} g'(y+tu, u) = \lim_{t \downarrow 0} \phi'_+(t) = \phi'_+(0) = g'(y,u)$$

   y este valor es finito. Por lo tanto existe $t_0 \in (0, p(x-y))$ tal que $g'(y + t_0 u, u) \leq g'(y,u) + \frac{1}{2}(\gamma - \varepsilon)$. Defina $x_0 := y + t_0 u \in]y, x[$, luego

   $$g'(x_0, u) \leq \frac{g(y + t_0 u) - g(y)}{t_0} + \frac{1}{2}(\gamma - \varepsilon) = \frac{g(x_0) - g(y)}{p(x_0 - y)} + \frac{1}{2}(\gamma - \varepsilon)$$

   Se desea probar que:

   $$f(x_0) - f(y) \leq g(x_0) - g(y) + \gamma p(x_0 - y) \quad (\star)$$

   Supongamos que no se tiene, i.e.

   $$f(x_0) - f(y) > g(x_0) - g(y) + \gamma p(x_0 - y)$$

   Escoja $r \in \mathbb{R}$ tal que $r \leq f(x_0)$ y

   $$r - f(y) > g(x_0) - g(y) + \gamma p(x_0 - y)$$

   Por 2.2.6 existe $x_\alpha \to z \in [y, x_0[$ y $x_n^* \in \overline{\partial} f(x_n)$ tal que:

   $$\frac{p(x_0 - z)}{p(x_0 - y)}(r - f(y)) \leq \liminf \langle x_0 - x_\alpha, x_\alpha^* \rangle$$

Más aún $p(x_0-x_\alpha) \to p(x_0-z)$, y entonces (note que se puede suponer que $p(x_0-x_\alpha) \neq 0$ para todo α)

$$\frac{r-f(y)}{p(x_0-y)} \leq \liminf \left\langle \frac{x_0-x_\alpha}{p(x_0-x_\alpha)}, x_\alpha^* \right\rangle$$

Entonces existe α_0 tal que:

$$\left\langle \frac{x_0-x_\alpha}{p(x_0-x_\alpha)}, x_\alpha^* \right\rangle > \frac{g(x_0)-g(y)}{p(x_0-y)} + \gamma \ \ \forall \alpha \geq \alpha_0$$

Del hecho que $x_\alpha \to z \in [y, x_0[\subseteq C$, puede asumir que $x_\alpha \in C \ \forall \alpha \geq \alpha_0$. Luego por el supuesto $\overline{\partial} f(x) \subseteq \partial g(x) + \varepsilon B_p(0,1) \ \ \forall x \in C \ \forall \alpha \geq \alpha_0 \ x_\alpha^* = z_\alpha^* + \varepsilon u_\alpha^*$ con $z_\alpha^* \in \partial g(x_\alpha)$ y $u_\alpha^* \in B_p(0,1)^\circ$. Luego

$$\frac{g(x_0)-g(x_\alpha)}{p(x_0-x_\alpha)} \geq \left\langle \frac{x_0-x_\alpha}{p(x_0-x_\alpha)}, z_\alpha^* \right\rangle > \frac{g(x_0)-g(y)}{p(x_0-y)} + \gamma - \varepsilon \ \ \forall \alpha \geq \alpha_0$$

tomando en cuenta que g es sci se obtiene.

$$\frac{g(x_0)-g(z)}{p(x_0-z)} \geq \frac{g(x_0)-g(y)}{p(x_0-y)} + \gamma - \varepsilon \geq g'(x_0,u) + \frac{1}{2}(\gamma-\varepsilon) > g'(x_0,u)$$

Del hecho que $z \in [y, x_0[$, $z = y + su$ para algun $s \in [0, t_0[$ y usando la convexidad de ϕ se obtiene la siguiente contradicción:

$$\frac{g(x_0)-g(z)}{p(x_0-z)} = \frac{\phi(t_0)-\phi(s)}{t_0-s} \leq \phi'_-(t_0) \leq \phi'_+(t_0) = g'(x_0,u)$$

Es decir se obtiene $f(x_0)-f(y) \leq g(x_0)-g(y) + \gamma p(x_0-y)$. □

2. <u>*lema 2*</u> Considere $y \in C \cap \operatorname{dom} \overline{\partial} f$, $x \in C$ tal que $p(x-y) \neq 0$ defina $u := \frac{x-y}{p(x-y)}$. entonces existe $x_0 = y + t_0 u$ con $t_0 \in (0, p(x-y))$ tal que

$$f(x_0)-f(y) \leq g(x_0)-g(y) + \gamma p(x_0-y)$$

Demostración. Desde las hipotesis se tiene que $y \in \operatorname{dom} \partial g$, y entonces $y \in \operatorname{dom} g$. Como $\partial g(y) \neq \emptyset$, tenemos que $\frac{g(x)-g(y)}{p(x-y)} \geq g'(y,u) = \lim_{t \to 0^+} \frac{g(y+tu)-g(y)}{t} > -\infty$, es decir, $g'(y,u) \in \mathbb{R}$. Entonces por <u>*Lema 1*</u> se concluye que existe $x_0 = y + t_0 u$ con $t_0 \in (0, p(x-y))$ tal que

$$f(x_0)-f(y) \leq g(x_0)-g(y) + \gamma p(x_0-y)$$

□

3. <u>*lema 3*</u> Considere $y \in C \cap \operatorname{dom} \overline{\partial} f$, $x \in C$ tal que $p(x-y) \neq 0$ y $u := \frac{x-y}{p(x-y)}$. Defina $T := \{t \in]0, p(x-y)] : f(y+tu)-f(y) \leq g(y+tu)-g(y)+t\gamma\}$. Entonces $p(x-y) \in T$

Demostración. Por <u>*lema 2*</u> existe $t_0 \in T$, entonces considere $\bar{t} := \sup T$, por el hecho que f es sci y ϕ (the same definition that in *lemma 1*) es continua sobre $[0, p(x-y)]$ (*lema 1*), se obtiene $\bar{t} \in T$. Más aún suponga que $\bar{t} < p(x-y)$, defina $\bar{y} = y + \bar{t}u$. Por supuesto se cumple que, $u = \frac{x-\bar{y}}{p(x-\bar{y})}$ y

$$\frac{\phi(p(x-y)) - \phi(\bar{t})}{p(x-y)-\bar{t}} = \frac{g(x)-g(\bar{y})}{p(x-\bar{y})} \geq g'(\bar{y},u) = \phi'_+(\bar{t}) \geq \phi'_+(0) = g'(y,u) > -\infty$$

$g'(\bar{y},u) \in \mathbb{R}$, por *lema 1* existe $x_0 = \bar{y} + s_0 u$ con $s_0 \in (0, p(x-\bar{y}))$ tal que

$$f(\bar{y} + s_0 u) - f(y) \leq g(\bar{y} + s_0 u) - g(\bar{y}) + \gamma p(x_0 - \bar{y}) = g(\bar{y} + s_0 u) - g(\bar{y}) + \gamma s_0$$

Como $f(y + \bar{t}u) - f(y) \leq g(y + \bar{t}u) - g(y) + \bar{t}\gamma$, entonces se obtiene que:

$$f(y + (\bar{t} + s_0)u) - f(y) \leq g(y + (\bar{t} + s_0)u) - g(y) + (\bar{t} + s_0)\gamma$$

Contradiciendo nuestra elección de $\bar{t}$. Luego $\bar{t} = p(x-y)$ $\square$

Ahora como $\gamma > \varepsilon$ es arbitrario, se concluye que:

$$f(x) - f(y) \leq g(x) - g(y) + \varepsilon p(x-y) \quad (\star\star)$$

Ahora tomando $x \in C \cap \operatorname{dom} g$ y fijando (si es que este existe) $y \in C \operatorname{dom} \cap \overline{\partial} f$ tal que $p(x-y) \neq 0$, de la ecuación $(\star\star)$ se obtiene que $C \cap \operatorname{dom} g \setminus \bigcap_{y \in C \cap \operatorname{dom} f} p(\cdot - y)^{-1}(\{0\}) \subseteq C \cap \operatorname{dom} f$. Ahora sea $y \in C \cap \operatorname{dom} f$ y tomemos $x \in C \cap \operatorname{dom} g$ fijo tal que $p(x-y) \neq 0$, por 2.2.7 existe $(x_\alpha, x_\alpha^*) \subseteq \operatorname{gph} \overline{\partial} f$ tal que $x_\alpha \xrightarrow{f} y$, como $y \in C$ y C es abierto se puede suponer que $x_\alpha \in C$ y $p(x - x_\alpha) \neq 0$ para todo α, de la ecuación $(\star)$ se obtiene

$$f(x) - f(x_\alpha) \leq g(x) - g(x_\alpha) + \varepsilon p(x - x_\alpha) \quad \forall \alpha$$

Tomando limite se obtiene

$$f(x) - f(y) \leq g(x) - g(y) + \varepsilon p(x-y)$$

Entonces $y \in \operatorname{dom} g \cap C$ y la ecuación $(\star\star)$ se mantiene. Hasta ahora se ha probado que

a) $C \cap \operatorname{dom} g \setminus \bigcap_{y \in C \cap \operatorname{dom} f} p(\cdot - y)^{-1}(\{0\}) \subseteq C \cap \operatorname{dom} f$

b) $C \cap \operatorname{dom} f \setminus \bigcap_{y \in C \cap \operatorname{dom} g} p(\cdot - y)^{-1}(\{0\}) \subseteq C \cap \operatorname{dom} g$

c) $\forall x \in C \cap \operatorname{dom} g$ $\forall y \in C \cap \operatorname{dom} f$ tal que $p(x-y) \neq 0$ $f(x) - f(y) \leq g(x) - g(y) + \varepsilon p(x-y)$

Más aún si $x \in C \cap \operatorname{dom} g$ y $y \in C \cap \operatorname{dom} f$ tal que $p(x-y) \neq 0$ por a) y b) respectivamente $x \in C \cap \operatorname{dom} f$ y $y \in C \cap \operatorname{dom} g$, luego po c) $f(y) - f(x) \leq g(y) - g(x) + \varepsilon p(x-y)$, i.e $f(x) - f(y) \geq g(x) - g(y) - \varepsilon p(x-y)$

Esto completa la demostración.

$\square$

Corolario 2.2.12 *Sea $(X,\mathcal{T})$ un evtlc. Considere $\overline{\partial}$ un subdiferencial abstracto sobre $\mathcal{F} \subseteq \overline{\mathbb{R}}^X$. Sea $f \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}$, $g \in \Gamma(X)$. Supongamos que:*

$$\overline{\partial} f(x) \subseteq \partial g(x) \ \ \forall x \in X$$

Entonces existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f = g + k$

Demostración. Primero tome $x \in \operatorname{dom} g$ y $y \in \operatorname{dom} f$ con $x \neq y$, y escojamos una seminorma continua p tal que $p(x-y) \neq 0$, entonces por 2.2.11 $y \in \operatorname{dom} g$, $x \in \operatorname{dom} f$. Luego $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g$. Más aún sea $x_0 \in \operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g$ fijo y para cualquier $y \in \operatorname{dom} g \backslash \{x_0\}$ y una seminorma continua p tal que $p(x_0 - y) \neq 0$, entonces por 2.2.11, se tiene que $f(y) = g(y) + f(x_0) - g(x_0)$ □

Capítulo 3

Caracterización Variacional de la Convexidad

3.1 Espacios Localmente Convexos

Teorema 3.1.1 *Sea* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *un función* $\sigma(X, X^*)$*-sci tal que* f^* *es continua sobre* $A := \text{Int}(\text{dom}(f^*)) \neq \emptyset$ *y* $Y := \{x^* \in X^* : \text{argmin}\{f - x^*\}$ *es convexo* $\}$ *entonces*

$$(\forall x \in X)(A \cap Y \cap \partial f^{**}(x) \subseteq \partial f(x))$$

Demostración. Dado $x \in X$.
Suponga que $x^* \in A \cap Y \cap \partial f^{**}(x)$, entonces

$$\begin{aligned} \text{argmin}\{f - x^*\} &= \{x \in X : \forall y \in X \;\; f(y) - \langle x^*, y\rangle \geq f(x) - \langle x^*, x\rangle\} \\ &= \{x \in X : \forall y \in X \;\; f(y) - f(x) \geq \langle x^*, y - x\rangle\} \\ &= (\partial f)^{-1}(x^*) \end{aligned}$$

Luego $(\partial f)^{-1}(x^*)$ es un convexo cerrado.
Más aún por [22]

$$\begin{aligned} \partial f^*(x^*) &= \overline{\text{co}}\left((\partial f)^{-1}(x^*)\right) + N_{\text{dom} f^*}(x^*) \\ &= (\partial f)^{-1}(x^*) \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} x^* \in \partial f^{**}(x) &\Leftrightarrow x \in \partial f^*(x^*) \\ &\Rightarrow x \in (\partial f)^{-1}(x^*) \\ &\Rightarrow x^* \in \partial f(x) \end{aligned}$$

$\square$

Lema 3.1.2 (Corolario 2.4.7 [30]) *Sean* $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $i = 1, 2$ *propias, suponga que existe* $x_i \in \text{dom}(f_i)$ *tal que*

$$(f_1 \square f_2)(x_1 + x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$$

Entonces

$$\partial(f_1 \square f_2)(x_1 + x_2) = \partial f_1(x_1) \cap \partial f_2(x_2)$$

Demostración. Corolario 2.4.7 [30] página 89. $\square$

Lema 3.1.3 *Sea $C \subseteq X^*$ no vacío, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ entonces*

$$\partial\sigma_C(x_1) \cap \partial f(x_2) \subseteq \partial(\sigma_C \square f)(x_1 + x_2) \ \ \forall x_1, x_2 \in X$$

Demostración. Sea $x = x_1 + x_2$, $x^* \in \sigma_C(x_1) \cap \partial f(x_2)$, luego

$$\langle x^*, z - x_1\rangle + \sigma_C(x_1) \leq \sigma_C(z) \ \ \forall z \in X$$

$$\langle x^*, w - x_2\rangle + f(x_2) \leq f(w) \ \ \forall w \in X$$

Luego sumando ambas ecuaciones

$$\langle x^*, z + w - x_1 - x_2\rangle + \sigma_C(x_1) + f(x_2) \leq \sigma_C(z) + f(w) \ \ \forall z, w \in X$$

más aún si $y = z + w$

$$\langle x^*, y - x\rangle + \sigma_C \square f(x) \leq \sigma_C \square f(y) \forall y \in X$$

. $\square$

Lema 3.1.4 (Teorema 2.8.3 [30]) *Sean $g, h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ convexas y propias, supongamos que existe $x_0 \in \operatorname{dom}(g) \cap \operatorname{dom}(h)$ tal que h es continua en x_0. Defina $\varphi(x) := g(x) + h(x)$. Entonces $\forall x^* \in X^*$*

$$\varphi^*(x^*) = \min\{g^*(x^* - y^*) + h^*(y^*) : y^* \in X^*\}$$

Demostración. Teorema 2.8.3 [30] página 123. $\square$

Lema 3.1.5 *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que f^* es continua sobre $A := \operatorname{Int}(\operatorname{dom}(f^*)) \neq \emptyset$, dado $C \subseteq A$ convexo cerrado y no vacó se tiene que:*

$$\forall x \in X \exists x_1, x_2 \in X \text{ tal que } x_1 + x_2 = x \text{ y } \partial\sigma_C(x_1) \cap \partial f^{**}(x_2) = \partial(\sigma_C \square f^{**})(x_1 + x_2)$$

Demostración. Aplicando 3.1.4 con $h = f^*$ y $g = I_C$ se obtiene que $\forall x \in X \ \exists x_1, x_2$ tal que $\sigma_C \square f^{**}(x) = \sigma_C(x_1) + f^{**}(x_2)$, luego por 3.1.2

$$\partial\sigma_C(x_1) \cap \partial f^{**}(x_2) = \partial(\sigma_C \square f^{**})(x_1 + x_2)$$

. $\square$

Lema 3.1.6 (Proposición 6.5.5 [18]) *Sea $g_1, g_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ propia tal que g_1 es infcompacta y g_2 sci y acotada inferiormente. Entonces $g_1 \square g_2$ es sci y exacta.*

Demostración. [18] $\square$

Lema 3.1.7 *Sea (X, τ) un espacio topológico, $(f_\alpha)_{\alpha\in D} \subseteq \overline{\mathbb{R}}^X$ una red de funciones sci crecientes,es decir,*

$$(\forall \alpha, \beta \in D)(\ \alpha \leq \beta \Rightarrow f_\alpha \leq f_\beta)$$

Considere $x_\alpha \in \varepsilon_\alpha - \operatorname{argmin} f_\alpha$ con $\varepsilon_\alpha \to 0$ tal que $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ es relativamente compacto. Define $f(x) = \sup\limits_{\alpha\in D} f_\alpha(x)$. Entonces:

a) $\inf_{x\in X} f(x) = \sup_{\alpha\in D} \inf_{x\in X} f_\alpha(x)$

b) Cualquier punto de acumulación de $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ *esta en* $\operatorname{argmin} f$

Demostración. Sin perdida de generalidad (tomando subred) se puede suponer que $x_\alpha \to \bar{x} \in X$. En efecto sea $y_i)_{i\in E}$ una subred de (x_α), es decir , exist $N : E \to D$ tal que:

- $y_i = x_{N(i)}\ \forall i \in E$
- $(\forall m \in D)(\exists n \in E)$ tal que$k \geq n \Rightarrow N(k) \geq m$

Entonces considere una nueva red $z_{(i,N(i))} := y_i$ con $(i, N(i)) \in \tilde{E} := \{(i,p) : i \in E \text{ y } N(i) = p\}$ y ordenada por

$$(i, N(i)) \leq (j, N(j)) \Leftrightarrow\ i \leq j \text{ and } N(i) \leq N(j)$$

Luego considere $z_{(i,N(i))}$ y $\tilde{f}_{(i,N(i))} = f_{N(i)}$ se tiene que $(i, N(i)) \leq (j, N(j)) \Rightarrow \tilde{f}_{(i,N(i))} \leq \tilde{f}_{(j,N(j))}$
Ahora sea $V_{\bar{x}}$ una base de vecindades para $\bar{x}$.
Primero si $\sup_{\alpha\in D} \inf_{x\in X} f_\alpha(x) > -\infty$, se puede suponer que $\inf_{x\in X} f_\alpha(x) > -\infty\ \forall\alpha \in D$. Se afirma que

$$\sup_{V\in V_{\bar{x}}} \sup_{\alpha\in D} \inf_{v\in V} f_\alpha(v) \leq \sup_{\alpha\in D} \inf_{x\in X} f_\alpha(x)$$

En efecto sea $V \in V_{\bar{x}}$ y $\delta > 0$, entonces existe $\alpha_0 \in D$ tal que $\forall\alpha \geq \alpha_0\ x_\alpha \in V$ y $\varepsilon_\alpha < \delta$.

$$\begin{aligned}
\sup_{\alpha\in D} \inf_{v\in V} f_\alpha(v) &= \sup_{\alpha\geq\alpha_0} \inf_{v\in V} f_\alpha(v) \\
&\leq \sup_{\alpha\geq\alpha_0} f_\alpha(x_\alpha) \\
&\leq \sup_{\alpha\geq\alpha_0} \left\{ \inf_{y\in X} f_\alpha(x) + \varepsilon_\alpha \right\} \\
&\leq \sup_{\alpha\in D} \inf_{y\in X} f_\alpha(x) + \delta
\end{aligned}$$

Hence:

$$\begin{aligned}
\inf_{y\in X} f(y) &\leq f(\bar{x}) \\
&= \sup_{\alpha\in D} f_\alpha(\bar{x}) \\
&= \sup_{\alpha\in D} \sup_{V\in V_{\bar{x}}} \inf_{v\in V} f_\alpha(v) \\
&= \sup_{V\in V_{\bar{x}}} \sup_{\alpha\in D} \inf_{v\in V} f_\alpha(v) \\
&\leq \sup_{\alpha\in D} \inf_{x\in X} f_\alpha(x)
\end{aligned}$$

Segundo si $\sup_{\alpha\in D} \inf_{x\in X} f_\alpha(x) = -\infty$ se afirma que

$$\sup_{V\in V_{\bar{x}}} \sup_{\alpha\in D} \inf_{v\in V} f_\alpha(v) = -\infty$$

En efecto $V \in V_{\bar{x}}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces existe $\alpha_0 \in D$ tal que $\forall\alpha \geq \alpha_0\ x_\alpha \in V$ y $\frac{-1}{\varepsilon_\alpha} < -n$.

$$
\begin{aligned}
\sup_{\alpha\in D}\inf_{v\in V} f_\alpha(v) &= \sup_{\alpha\geq\alpha_0}\inf_{v\in V} f_\alpha(v)\\
&\leq \sup_{\alpha\geq\alpha_0} f_\alpha(x_\alpha)\\
&\leq \sup_{\alpha\geq\alpha_0}\left\{\tfrac{-1}{\varepsilon_\alpha}\right\}\\
&\leq -n
\end{aligned}
$$

Luego.

$$
\begin{aligned}
\inf_{y\in X} f(y) &\leq f(\bar{x})\\
&= \sup_{\alpha\in D} f_\alpha(\bar{x})\\
&= \sup_{\alpha\in D}\sup_{V\in V_{\bar{x}}}\inf_{v\in V} f_\alpha(v)\\
&= \sup_{V\in V_{\bar{x}}}\sup_{\alpha\in D}\inf_{v\in V} f_\alpha(v)\\
&\leq -\infty
\end{aligned}
$$

b) es directa de a).

$\square$

Teorema 3.1.8 *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\sigma(X, X^*)$-sci, f^* continua sobre $A := \mathrm{Int}(\mathrm{dom}(f^*)) \neq \emptyset$, $C \subseteq A$ no vacio, convex y compacto. Suponga que*

$$\forall x^* \in C : \mathrm{argmin}\{f - x^*\} \text{ es convexo}$$

Then:

$$\sigma_C \Box f^{**}(x) = \sigma_C \Box f(x) \ \ \forall x \in X$$

Demostración. Sea $x \in X$ por 3.1.5 existe x_1, x_2 tal que $x = x_1 + x_2$ y

$$\partial\sigma_C(x_1) \cap \partial f^{**}(x_2) = \partial(\sigma_C \Box f^{**})(x_1 + x_2)$$

Entonces por 3.1.1 se tiene que

$$\partial\sigma_C(x_1) \cap \partial f^{**}(x_2) \subseteq \partial\sigma_C(x_1) \cap \partial f(x_2)$$

luego por 3.1.3 se sigue la inclusión

$$\partial(\sigma_C \Box f^{**})(x_1 + x_2) \subseteq \partial(\sigma_C \Box f)(x_1 + x_2)$$

De donde se concluye que:

$$\forall x \in X \ \ \partial(\sigma_C \Box f^{**})(x) \subseteq \partial(\sigma_C \Box f)(x)$$

Del hecho que $\mathrm{Int}(\mathrm{dom}\, f^*) \cap C \neq \emptyset$ se tiene:

$$\sigma_C \Box f^{**} = (\sigma_C \Box f)^{**}$$

De lo cual se tiene que:

$$\forall x \in X \ \partial(\sigma_C \Box f^{**})(x) = \partial(\sigma_C \Box f)(x)$$

Finalmente como C compacto y f^* es continua sobre C

$$\forall x \in X \quad \sigma_C \Box f^{**} = \max_{x^* \in C} \{\langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)\}$$

Luego $\forall x \in X$ $\partial(\sigma_C \Box f^{**})(x) \neq \emptyset$, y se concluye que $\forall x \in X$ $\partial(\sigma_C \Box f)(x) \neq \emptyset \Rightarrow \sigma_C \Box f = (\sigma_C \Box f)^{**} = \sigma_C \Box f^{**}$ $\Box$

Definición 3.1.9 *Considere $C \subseteq X$. Se dirá que $\mathfrak{U} \subseteq \mathcal{P}(C)$ es una familia aproximante de C si :*

- $(\mathfrak{U}, \subseteq)$ *es un conjunto preordenado.*
- $C \subseteq \overline{\bigcup_{A \in \mathfrak{U}} A}$.

Más aún se entenderá que $\mathfrak{U}$ es convexa (convexa cerrada, acotada, compacta, etc) si $\forall A \in \mathfrak{U}$ A es convexa (convexa cerrada ,acotada, compacta, etc).

Teorema 3.1.10 *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\sigma(X, X^*)$-sci tal que f^* es continua sobre $A := \mathrm{Int}(\mathrm{dom}(f^*)) \neq \emptyset$. Sea $\mathfrak{U}$ una familia aproximante de A. Entonces:*

$$\sup_{C \in \mathfrak{U}} \{\sigma_C \Box f(x)\} = \sigma_{dom(f^*)} \Box f(x) \ \forall x \in X$$

Demostración. Sea $x \in X$
Primeo para cada $C \in \mathfrak{U}$ se define:

$$g_C(y) := f(y) + \sigma_C(x - y) = f(y) - \langle x_0^*, y\rangle + \langle x_0^*, x\rangle + \sigma_{C - x_0^*}(x - y)$$

y $g(y) := f(y) + \sigma_A(x - y) = f(y) + \sigma_{\bigcup_{C \in \mathfrak{U}} C}(x - y)$, por lo cual g_C y g son $\sigma(X, X^*)$-sci más aún $g_C \nearrow g$ puntualmente, en efecto, sea t $y \in X$ y $\varepsilon > 0$ por lo tanto:

- Si $\sigma_A(x - y) < +\infty$, existe $x^* \in \bigcup_{C \in \mathfrak{U}}$ tal que $g(y) \leq f(y) + x^*(x - y) + \varepsilon \leq \sup_{C \in \mathfrak{U}} g_C(y) + \varepsilon$
- Si $\sigma_A(x - y) = +\infty$, entonces existe $x^* \in \bigcup_{C \in \mathfrak{U}}$ tal que $f(y) + x^*(x - y) > \frac{1}{\varepsilon}$

En ambos casos se concluye.
Ahora se estudiarán los siguientes casos:

- Si existe $C \in \mathfrak{U}$ tal que $g_C = +\infty$. Entonces se concluye la demostración.
- Si para todo $C \in \mathfrak{U}$ $g_C \neq +\infty$, entonces todas las g_C son infcompact, esto por 2.1.5. Para cada $C \in \mathfrak{U}$ y cualquier $\varepsilon \in (0, 1)$ se escoge $x_{(C,\varepsilon)} \in \varepsilon - \mathrm{argmin}\{g_C\}$ (note que podemos usar $\varepsilon = 0$), ahora defina $\tilde{g}_{(C,\varepsilon)} := g_C$ $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, $I := \{(C, d) : C \in \mathfrak{U} \text{ y } d \in (0, 1)\}$ and we order by $(C_1, d_1) \leq (C_2, d_2) \Rightarrow C_1 \subseteq C_2$ y $d_1 \geq d_2$. Finalmente considere $i_0 \in I$ y restringiendo la red a $S_{i_0} := \{j \in I : j \geq i_0\}$, entonces

$$\forall i \in S_{i_0} \quad x_i \in \Gamma := \{y \in X : g_{i_0}(y) \leq \max\{1, \sup_{C \in \mathfrak{U}} \{\sigma_C \Box f(x)\} + 1\}\}$$

  Luego existen dos caso:

  1.) Si $\sup_{C \in \mathfrak{U}} \{\sigma_C \Box f(x)\} = +\infty$. Entonces la demostración es trivial.

2.) Si $\sup\limits_{C\in\mathfrak{U}}\{\sigma_C \square f(x)\} < +\infty$. Entonces Γ es relativamente compacto, en este caso se puede aplicar 3.1.7 a $\tilde{g}_i$ y x_i con $i \in S_{i_0}$ de donde se concluye.

$\square$

Teorema 3.1.11 *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\sigma(X, X^*)$-sci. Supongamos que:*

i) f^* es continua sobre $A := \mathrm{Int}(\mathrm{dom}(f^*)) \neq \emptyset$.

ii) Existe $D \subseteq A$ convexo tal que $A \subset \overline{D}$ y $\forall x^* \in D : \mathrm{argmin}\{f - x^*\}$ es convexo.

Entonces

$$f^{**}(x) = \sigma_{\mathrm{dom}(f^*)} \square f^{**}(x) = \sigma_{\mathrm{dom}(f^*)} \square f(x) \quad \forall x \in X$$

Demostración. Sea $\mathfrak{U} := \{\mathrm{conv}(C) : C \in P_f(D)\}$, donde $P_f(D)$ es el conjunto de todas las partes finitas de D. Claramente $\mathfrak{U}$ es una familia convexa compacta aproximante de D, esto fuerza que $\mathfrak{U}$ es familia convexa compacta aproximante de A.
Ahora dado $x \in X$, se tiene que $C \in \mathfrak{U}$

a) $\sigma_{\mathrm{dom}(f^*)} \square f^{**}(x) \leq \sigma_{\mathrm{dom}(f^*)} \square f(x)$.

b) $\sigma_C \square f^{**}(x) \leq \sigma_{\mathrm{dom}(f^*)} \square f^{**}(x)$.

c) $\sigma_C \square f(x) \leq \sigma_{\mathrm{dom}(f^*)} \square f(x)$

d) $\sigma_C \square f^{**}(x) = \sigma_C \square f(x) \quad \forall x \in X$ by 3.1.8

Finalmente por 3.1.10

$$\sup_{C\in\mathcal{CI}(A)} \{\sigma_C \square f(x)\} = \sigma_{\mathrm{dom}(f^*)} \square f(x) \; \forall x \in X$$

Esto completa la demostración $\square$

3.1.1 Aplicación del operador Af a espacios localmente convexos

En esta sección X, Y serán evtlcs en dualidad con X^*, Y^* respectivamente.

Definición 3.1.12 *Considere $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ y $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ se define $Af : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ por*

$$Af(y) := \mathrm{ínf}\{f(x) : Ax = y\}$$

y se dirá que Af es exacta cuando $Af(y) := \mathrm{mín}\{f(x) : Ax = y\}$ para todo $y \in Y$.

Ahora se aplicará 3.1.11 a la funcíon Af.

Teorema 3.1.13 *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ y $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que:*

- $(Af)^*$ *es continua sobre* $\mathrm{Int}(\mathrm{dom}(Af)^*) \neq \emptyset$.
- Af *es* $\sigma(Y, Y^*)$*-sci*
- *Existe* $D \subseteq \mathrm{Int}(\mathrm{dom}(Af)^*)$ *convexo tal que* $\mathrm{Int}(\mathrm{dom}((Af)^*)) \subset \overline{D}$ *y que para cada* $y^* \in D$ *el conjunto* $\mathrm{argmin}\{Af - y^*\}$ *es convexo.*

Then

$$\sigma_{\mathrm{dom}(Af)^*} \square Af(\cdot) = \sup_{x^* \in Y} \{\langle \cdot, x^* \rangle - f^* \circ A^*(x^*)\}$$

Ahora se establecerán una serie de resultados que muestran cuando las hipotesis de 3.1.13 se mantienen.

Lema 3.1.14 (Theorem 2.3.1 [30]) *Considere* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *y* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. *Entonces* $(Af)^* = f^* \circ A^*$ *y* $\mathrm{dom}((Af)^*) = A^{*-1}(\mathrm{dom}(f^*))$, *donde* A^* *es el operador adjunto de* A.

Demostración. Teorema 2.3.1 [30] página 75. □

Lema 3.1.15 *Sea* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. *Entonces*

$$\forall y^* \in Y^* \;\; A(\mathrm{argmin}\{f - A^*(y^*)\}) \subseteq \mathrm{argmin}\{Af - y^*\}$$

Con igualdad si Af *es exacta.*

Demostración. Sea $y \in A(\mathrm{argmin}\{f - A^*(y^*)\})$, entonces existe $x \in \mathrm{argmin}\{f - A^*(y^*)\}$ tal que $y = Ax$, luego:

$$\forall z \in X \; f(x) - \langle A^*(y^*), x\rangle \leq f(z) - \langle A^*(y^*), z\rangle$$
$$\Rightarrow \forall z \in X \; Af(y) - \langle y^*, Ax\rangle \leq f(z) - \langle y^*, Az\rangle$$

Entonces para $w \in Y$ existen dos casos.

1. $A^{-1}(\{w\}) = \emptyset$, entonces $Af(w) = +\infty$
2. $A^{-1}(\{w\}) \neq \emptyset$, entonces

$$Af(y) - \langle y^*, y\rangle \leq Af(w) - \langle y^*, w\rangle$$

Para la otra inclusión $y \in \mathrm{argmin}\{Af - y^*\}$, tome x tal que $Ax = y$ y $Af(y) = f(x)$, luego

$$\forall w \in Y \; f(x) - \langle A^*(y^*), x\rangle \leq Af(w) - \langle y^*, w\rangle$$
$$\Rightarrow \forall z \in X \; f(x) - \langle A^*(y^*), x\rangle \leq Af(Az) - \langle y^*, Az\rangle$$
$$\Rightarrow \forall z \in X \; f(x) - \langle A^*(y^*), x\rangle \leq f(z) - \langle A^*(y^*), z\rangle$$
$$\therefore \; Ax = y \in A(\mathrm{argmin}\{f - A^*(y^*)\})$$

□

Lema 3.1.16 *Sea* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *sci e infcompact,* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ *sobreyectiva, entonces* Af *es exacta.*

Demostración. Dado $y \in Y$, escojemos $x_0 \in X$ tal que $Ax_0 = y$. Luego

$$Af(y) = \mathrm{ínf}\{f(x) : Ax = y\} = \mathrm{ínf}\{f(x_0 + z) : z \in Ker(A)\} = f \square I_{Ker(A)}(x_0)$$

Por 3.1.4 se tiene que $f \square I_{Ker(A)}$ es exacta, con lo cual se conluye el resultado. □

Lema 3.1.17 *Considere $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $y^* \in Y^*$. Entonces*

$$A\left(f - A^*(y^*)\right) = Af - y^*$$

Demostración. Escoja $y \in Y$. Entonces:

$$\begin{array}{rcl} A(f - A^*(y^*))(y) & = & \text{ínf}\{(f - A^*(y^*))(w) : Aw = y\} \\ & = & \text{ínf}\{(f - A^*(y^*))(w) : Aw = y\} \\ & = & \text{ínf}\{f(w) - \langle y^*, Aw\rangle : Aw = y\} \\ & = & \text{ínf}\{f(w) - \langle y^*, y\rangle : Aw = y\} \\ & = & \text{ínf}\{f(w) : Aw = y\} - \langle y^*, y\rangle \\ & = & Af(y) - \langle y^*, y\rangle \end{array}$$

□

Lema 3.1.18 *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\sigma(X,X^*)$-sci tal que f^* es continua sobre* $\text{Int}(\text{dom}\, f^*)$ *y $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ sobreyectiva tal que* $\text{Int}(\text{dom}\, f^*) \cap A^*(Y^*) \neq \emptyset$*. Enotnces Af es exacta.*

Demostración. Tome $x^* \in \text{Int}(\text{dom}\, f^*) \cap A^*(Y^*)$, por 2.1.5 se tiene que $f - x^*$ es $\sigma(X,X^*)$-infcompacta, por 3.1.16 tenemos que $A(f - x^*)$ es exacta. Más aún si $A^*(y^*) = x^*$ para algún $y^* \in Y^*$ tenemos la por la formula 3.1.17 que $A(f - x^*) = Af - y^*$, entones dado $y \in Y$ tome x tal que $Ax = y$ y $A(f - x^*)(y) = f(x) - \langle x^*, x\rangle$, entonces

$$f(x) - \langle x^*, x\rangle = A(f - x^*)(y) = Af(y) - \langle y^*, y\rangle$$

Se concluye que $Af(y) = f(x)$ con $Ax = y$ □

Lema 3.1.19 *Considere $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Entonces A es $\sigma(X,X^*) - \sigma(Y,Y^*)$ continua.*

Lema 3.1.20 *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sci e infcompacta y $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ sobreyectiva. Entonces Af es sci e infcompacta.*

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ e $y \in Y$ tal que $Af(y) > \lambda$. Supongamos que existe $(y_\alpha)_{\alpha\in I}$ tal que $y_\alpha \to y$ y $Af(y_\alpha) \leq \lambda$, por 3.1.16 Af es exacta, por lo cual $\forall \alpha \in I$ existe $x_\alpha \in X$ tal que $Ax_\alpha = y_\alpha$ y $f(x_\alpha) = Af(y_\alpha)$, luego se tiene que $(x_\alpha) \subseteq \{f \leq \lambda\}$ y como f es infcompacta existe una subred $(z_\beta)_{\beta\in J}$ de (x_α) tal que $z_\beta \to z \in \{f \leq \lambda\}$, por lo tanto $Af(Az) \leq \lambda$, pero como A es continua, se concluye que $Az = y$, lo cual es una contradicción.
Otra forma de probar esto es que como Af es exacta (ver 3.1.16), se tiene que

$$\{y \in Y : Af(y) \leq \lambda\} = A\left(\{x \in X : f(x) \leq \lambda\}\right)$$

□

3.1.2 Aplicación a Subespacios

Definición 3.1.21 *Sea $F \subseteq X$ cualquiera. Para $C \subseteq F$ se denotará* $\text{Int}_F(C)$ *como el interior relativo de C respecto a F (con la topológia traza)*

Lema 3.1.22 *Sea X un evtlc e $Y \subset X$ un subespacio lineal. Entonces $\varphi : X^*/Y^\perp \to Y^*$ definido por*

$$\varphi([x^*])(\cdot) = \langle x^*, \cdot \rangle$$

es un isomorfismo lineal (en el sentido algebraico).

Demostración. Considere $\phi : X^* \to Y^*$, $\phi(x^*) := x^*{}_{|Y}$, es lineal y sobreyectiva. luego se por el primer teorema de isomorfismos se concluye. □

Definición 3.1.23 *Dado $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ y $Y \subset X^*$ un subespacio lineal. Se define $\tilde{f}_Y : X/Y^\perp \to \overline{\mathbb{R}}$*

$$\tilde{f}_Y([x]) := \inf\{f(y) : y \in [x]_Y\}$$

Note que $\tilde{f}_Y = Af$, con $A(\cdot) := [\,\cdot\,]_Y$. Finalmente se define $f_Y : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $f_Y(\cdot) = \tilde{f}_Y \circ [\,\cdot\,]_Y$.

Lema 3.1.24 *Sea X un evtlc lc e $Y \subset X$ un subespacio lineal. Considere $A : (X, \tau_X) \to (X/Y^\perp, \sigma(X^*/Y^\perp, Y))$, definida por $A(x) = [x]$. Entonces $A^* : Y \to X^*$ is $A^* : y^* \to y^*$, es decir, la inclusión desde Y a X^**

Demostración. Dado $y^* \in F$ se tiene que $\langle A^*(y^*), x\rangle = \langle y^*, [x]\rangle = \langle y^*, x\rangle$ □

Lema 3.1.25 *Sea (X, X^*) un par en dualidad, considere $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ y $Y \subset X^*$ un subespacio lineal, entonces ${f^*}_{|Y} = \tilde{f}^*$ y $\operatorname{dom}(\tilde{f}) = \operatorname{dom}(f_{|Y})$*

Demostración. Se tiene que $\tilde{f} = Af$, con $A(\cdot) := [\,\cdot\,]$, por 3.1.24 y 3.1.14 se concluye. □

Teorema 3.1.26 *Considere X un evtlc, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ e $Y \subset X$ un subespacio lineal. Supongamos que:*

- ${f^*}_{|Y}$ *es continua sobre* $\operatorname{Int}_Y(\operatorname{dom} f^* \cap Y) \neq \emptyset$.
- $\tilde{f}_Y$ *es $\sigma(Y, Y^*)$-sci ($\sigma(Y, X/Y^\perp)$-sci)*
- *Existe $D \subseteq \operatorname{Int}_Y(\operatorname{dom} f^* \cap Y)$ convexo tal que* $\operatorname{Int}_Y(\operatorname{dom} f^* \cap Y) \subset \overline{D}^Y$ *y* $\forall y^* \in D$ $\operatorname{argmin}\{f - y^*\}$ *es convexo.*

Entonces

$$\sigma_{\operatorname{dom}(f^*)\cap Y} \square \tilde{f}_Y = \sup_{x^* \in Y} \{\langle \cdot, x^*\rangle - f^*(x^*)\}$$

Demostración. Es una aplicación directa de 3.1.13 usando $A = [\,\cdot\,]_Y$ y del hecho que

$$A \in \mathcal{L}(X, \sigma(X, X^*), X/Y^\perp, \sigma(X/Y^\perp, Y))$$

□

Definición 3.1.27 *Sea X un evtlc $C \subseteq X$ defina $ri(C) := \operatorname{Int}_{\overline{\operatorname{aff}(C)}}(C)$, es decir, como el interior de C respecto $\overline{\operatorname{aff}(C)}$.*

Teorema 3.1.28 *Considere X un evtlc, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ y $F = \overline{\operatorname{aff}(\operatorname{dom}(f^*))}$. Suponga que:*

- ${f^*}_{|F}$ *es continua sobre* $\operatorname{ri}(\operatorname{dom} f^*)$.

- $\exists x_0^* \in \mathrm{ri}(\mathit{dom} f^*)$ *tal que* $f - x_0^*$ *is* $\sigma(X, X^*)$*-sci y* $\sigma(X, X^*)$*-infcompacta.*
- *Existe* $D \subseteq ri(\mathrm{dom}\, f^*)$ *convexo tal que* $\mathrm{ri}(\mathrm{dom}\, f^*) \subset \overline{D}$ *y* $\forall x^* \in D$ $\mathrm{argmin}\{f - x^*\}$ *is convexo.*

Entonces

$$\sigma_{\mathrm{dom}(f^*)} \square f = f^{**}$$

Más aún si $\mathrm{dom}(f^*) = F$ *se tiene que:*

$$\sigma_{\mathrm{dom}(f^*)} \square f = f_{F - x_0^*} = f^{**}$$

Demostración. Primero supongamos que $x_0^* = 0$. Entonces define $A := [\,\cdot\,]$ como la proyección canonica sobre $X/F^{\perp}$. Luego es claro que $A \in \mathcal{L}(X, \sigma(X, X^*), X/F^{\perp}, \sigma(X/F^{\perp}, F))$ y F es un subespacio lineal.
Ahora se verificaran las hipotesis de 3.1.26

- f_F^* es continua sobre $\mathrm{Int}_F(\mathrm{dom}\, f^* \cap F) \neq \emptyset$ por las hipótesis se tiene que f_F^* es continua en $0 \in \mathrm{ri}(\mathrm{dom}\, f^*) = \mathrm{Int}_F(\mathrm{dom}\, f^* \cap F)$
- f es $\sigma(X, X^*)$-sci y $\sigma(X, X^*)$-infcompacta y A es sobreyectiva, esnotnces por 3.1.20 tenemos que $Af = \tilde{f}_F$ es $\sigma(X/F^{\perp}, F)$-sci e infcompacta.
- Por 3.1.15 y 3.1.24 se tiene que

$$\forall y^* \in Y \quad \mathrm{argmin}\{\tilde{f}_F - x^*\} = A\,(\mathrm{argmin}\{f - x^*\})$$

  Lo que fuerza $\forall x^* \in D$ $\mathrm{argmin}\{\tilde{f}_F - x^*\}$ es convexo.

Entonces por by 3.1.26 se tiene que:

$$\sigma_{\mathrm{dom}(f^*)} \square \tilde{f}_F = \sup_{x^* \in F} \{\langle \cdot, x^* \rangle - f^*(x^*)\}$$

Más aún es fácil ver que: $\forall x \in X$

$$\sigma_{\mathrm{dom}(f^*) \cap F} \square \tilde{f}_F([x]) = \inf_{y \in X} \{f_F(y) + \sigma_{\mathrm{dom}\, f^*}(x - y)\} = \inf_{y \in X} \{\inf_{z \in F^{\perp}} \{f(y + z) + \sigma_{\mathrm{dom}\, f^*}(x - y - z)\} = \sigma_{\mathrm{dom}(f^*)} \square f$$

En efecto si $x^* \in \mathrm{dom}\, f^*$ $\langle x^*, [x] - [y] \rangle = \langle x^*, x - y \rangle \Rightarrow \sigma_{\mathrm{dom}\, f^*}(x - y - z) = \sigma_{\mathrm{dom}\, f^*}(x - y)$ $\forall y \in F^{\perp}$. De donde se concluye que:

$$\sigma_{\mathrm{dom}(f^*)} \square f = f^{**}$$

Finalmente si $F = \mathrm{dom}\, f^*$ se tiene que $x - y \notin F^{\perp}$, por lo cual $\sigma_{\mathrm{dom}(f^*)}(x - y) = \sigma_F(x - y) = +\infty$

Ahora si $x_0^* \in X^*$, se aplica lo anterior a $h = f - x_0^*$, es claro que h satisface las hipótesis y

$$\sigma_{\mathrm{dom}(f^*) - x_0^*} \square \left(f - x_0^*\right) = f^{**} - x_0^*$$

Entonces se concluye que

$$\sigma_{\mathrm{dom}(f^*)} \square f = f^{**}$$

$\square$

Nota 1 *Lamentablemente con las hipotesis de 3.1.28 no es posible cambiar la igualdad* $f_{F-x_0^*} = f^{**}$ *por* $f = f^{**}$, *en efecto considere* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \ln(|y|+1)$. *Entonces*

$$f^*(\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{\alpha^2}{2} & si \quad \beta = 0 \\ +\infty & si \quad \beta \neq 0 \end{cases}$$

Luego $\mathrm{dom}(f^*) = \mathbb{R} \times \{0\}$ *y* $\forall(\alpha,0) \quad \mathrm{argmin}\{f - (\alpha,0)\} = \{\alpha\}$ *es convexo, pero es claro que* $f \neq f^{**}$

3.2 Espacios Vectoriales Normados

En esta sección X será un espacio vectorial normado.

Definición 3.2.1 *Considere* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. *Se define* $\widehat{f} : X^{**} \to \overline{\mathbb{R}}$

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in X \\ +\infty & si \quad x \in X^{**} \setminus X \end{cases}$$

Definición 3.2.2 *Dado* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *y* τ *una topológia sobre* X^{**}. *Se define* $\overline{f}^{\tau} :\to \overline{\mathbb{R}}$ *como*

$$\overline{f}^{\tau}(x^{**}) = \sup_{N \in \mathcal{N}_{x^{**}}(\tau)} \inf_{y \in N} \widehat{f}(y)$$

En particular si $\tau = \sigma(X^{**}, X^*)$ *se escribe* $\overline{f}^{w^{**}} := \overline{f}^{\tau}$

Lema 3.2.3 *Sea* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\sigma(X, X^*)$*-sci. Entonces*

a) $\overline{f}^{w^{**}}$ *is* $\sigma(X^{**}, X^*)$*-sci*

b) $\overline{f}^{w^{**}}(x) = f(x) \; \forall x \in X$

c) $\partial_\varepsilon \overline{f}^{w^{**}}(x) = \partial_\varepsilon f(x) \; \forall x \in X \; \forall \varepsilon \geq 0$

d) $\partial_\varepsilon \overline{f}^{w^{**}}(x^{**}) = \bigcap_{\varepsilon > 0;\, U \in \mathcal{N}} \bigcup_{y \in x^{**} + U} \partial_\varepsilon f(y)$

e) $f^* = (\overline{f}^{w^{**}})^*$

f) $\forall x^* \in X^* \left(\partial \overline{f}^{w^{**}}\right)^{-1}(x^*) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{(\partial_\varepsilon f)^{-1}(x^*)}^{w^{**}}$

g) $\forall h \in C((X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*)), \mathbb{R}) \quad \inf_{x^{**} \in X^{**}} \overline{f}^{w^{**}}(x^{**}) + h(z - x^{**}) = \inf_{x \in X} \overline{f}^{w^{**}}(x) + h(z - x)$ $\forall z \in X$

h) *Si* f *es infcompacta, entonces* $\overline{f}^{w^{**}} = \widehat{f}$

i) $\overline{f - x^*}^{w^{**}} = \overline{f}^{w^{**}} - x^* \; \forall x^* \in X^*$

Demostración. Para las demostraciones de a),...,f) ver [15]. Solo se probará g). Dado $z \in X$ es claro que $\inf_{x^{**}\in X^{**}} \overline{f}^{w^{**}}(x^{**}) + h(z - x^{**}) \leq \inf_{x\in X} f(x) + h(z - x)$,so if $v < \inf_{x\in X} f(x) + h(z - x)$, se tiene que $\forall x \in X \quad v - h(z - x) < f(x)$ por lo tanto $\forall x^{**} \in X^{**} \quad v - h(z - x^{*}*) < \overline{f}^{w^{**}}(x^{**})$ $\square$

Teorema 3.2.4 *Considere* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *y* $F = \overline{\text{aff}(\text{dom}(f^*))}$. *Suponga que:*

- $\exists x_0^* \in \text{ri}(dom f^*)$ *tal que* $\overline{f}^{w^{**}} - x_0^*$ *is* $\sigma(X, X^*)$*-sci y* $\sigma(X, X^*)$*-infcompacta.*
- *Existe* $D \subseteq \text{ri}(\text{dom} f^*)$ *convexo tal que* $\text{ri}(\text{dom} f^*) \subset \overline{D}$ *y* $\forall x^* \in D$ $\text{argmin}\{\overline{f}^{w^{**}} - x^*\}$ *es convexo.*

Entonces

$$\sigma_{\text{dom}(f^*)} \square_{X^{**}} \overline{f}^{w^{**}} = f^{**}$$

Más aún si $\text{dom}(f^*) = F$ *se tiene que:*

$$\sigma_{\text{dom}(f^*)} \square_{X^{**}} \overline{f}^{w^{**}} = \overline{f}^{w^{**}}_{F - x_0^*} = f^{**}$$

Demostración. Considere el par dual $(X^*, \|\cdot\|_*, X^{**}, \sigma(X^{**}, X))$ y $\overline{f}^{w^{**}}$, entonces se tiene que:

1) $\overline{f}^{w^{**}}$ es $\sigma(X^{**}, X)$)-sci por 3.2.3.
2) $(\overline{f}^{w^{**}})^*$ es continua sobre $\text{ri}(\text{dom}((\overline{f}^{w^{**}})^*) \neq \emptyset$. En efecto por 3.2.3 $(\overline{f}^{w^{**}})^* = f^*$ luego es continua sobre $\text{ri}(\text{dom}((\overline{f}^{w^{**}})^*)$.
3) Directa de las Hipótesis.

Ahora se puede aplicar 3.1.28 y concluir el resultado. $\square$

Teorema 3.2.5 *Sea* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\sigma(X, X^*)$*-sci. tal que* $A := \text{Int}(\text{dom}(f^*)) \neq \emptyset$ *y supongamos que* $D \subseteq A$ *es convexo tal que* $A \subseteq \overline{D}$ *y*

$$\forall x^* \in D \, \text{argmin}\{\overline{f}^{w^{**}} - x^*\} \textit{ es convexo}$$

. Entonces

$$f^{**}(x^{**}) = \sigma_{\text{dom}(f^*)} \square_{X^{**}} \overline{f}^{w^{**}}(x^{**}) \quad \forall x^{**} \in X^{**}$$

En particular si $\overline{\text{dom} f^*}^{\|\cdot\|} = X^*$ *tenemos que* f *es convexa.*

Demostración. Por 2.1.5 se tiene que $\forall x^* \in A$ $\overline{f}^{w^{**}} - x^*$ es infcompacta. Luego aplicando 3.2.4 se concluye el resultado. $\square$

Corolario 3.2.6 *Sea* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\sigma(X, X^*)$*-sci tal que* $A := \text{Int}(\text{dom}(f^*)) \neq \emptyset$, *supongamos que existe* $D \subseteq A$ *convexa tal que* $A \subseteq \overline{D}$ *y*

$$\forall x^* \in D \exists \varepsilon_n \to 0 \textit{ tales que } \forall n \in \mathbb{N} \; \varepsilon_n - \text{argmin}\{f - x^*\} \textit{ is convex}$$

. Entonces

$$f^{**}(x^{**}) = \sigma_{\text{dom}(f^*)} \square_{X^{**}} \overline{f}^{w^{**}}(x^{**}) \quad \forall x^{**} \in X^{**}$$

Demostración. Usando la formula 3.2.3 tenemos que

$$\forall x^* \in D \quad \operatorname{argmin}\{\overline{f}^{w^{**}} - x^*\}$$

es convexo. Luego por 3.2.5 se concluye el resultado. □

Corolario 3.2.7 *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\sigma(X, X^*)$-sci tal que $A := \operatorname{Int}(\operatorname{dom}(f^*)) \neq \emptyset$, suponga que existe $D \subseteq A$ convexo tal que $A \subseteq \overline{D}$ y*

$$\forall x^* \in D \operatorname{argmin}\{f - x^*\} \text{ es convexo y } f - x^* \text{ es } \sigma(X, X^*) - \text{infcompacta}$$

Entonces

$$f^{**}(x^{**}) = \sigma_{\operatorname{dom}(f^*)} \square_{X^{**}} \overline{f}^{w^{**}}(x^{**}) = \sigma_{\operatorname{dom}(f^*)} \square_X \overline{f}^{w^{**}}(x^{**}) \;\; \forall x^{**} \in X^{**}$$

Demostración. Sea $x^* \in D$. Se afirma que $\operatorname{argmin}\{\overline{f}^{w^{**}} - x^*\}$ es convexo , en efecto usando 3.2.3 se tiene que

$$\left(\partial \overline{f}^{w^{**}}\right)^{-1}(x^*) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{(\partial_\varepsilon f)^{-1}(x^*)}^{w^{**}}$$

Más aún $f - x^*$ es $\sigma(X, X^*)$-infcompacta, entonces

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{(\partial_\varepsilon f)^{-1}(x^*)}^{w^{**}} = \bigcap_{\varepsilon > 0} (\partial_\varepsilon f)^{-1}(x^*)$$

Se obtiene que

$$\left(\partial \overline{f}^{w^{**}}\right)^{-1}(x^*) = (\partial f)^{-1}(x^*)$$

De esto se obtiene que estamos bajo las hipótesis de 3.2.5, de donde se conluye la primera igualdad. La segunda igualdad es directa de 3.2.3 □

Nota 2 *El corolario anterior entrega el mismo resultado que el Teorema 10 de [25].*

Corolario 3.2.8 *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\sigma(X, X^*)$-sci tal que $A := \operatorname{Int}(\operatorname{dom}(f^*)) \neq \emptyset$, supongamos que X es reflexivo y existe $D \subseteq A$ convexo tal que $A \subseteq \overline{D}$ y*

$$\forall x^* \in D \;\; \operatorname{argmin}\{f - x^*\} \text{ es convexo}$$

Entonces

$$f^{**}(x) = \sigma_{\operatorname{dom}(f^*)} \square f(x) \;\; \forall x \in X$$

Demostración. Directa de 3.2.5 □

Conclusión

La primera parte de este trabajo introdujo la teoría variacional para las funciones asintóticamente epi-puntadas en espacios vectoriales topológicos localmente convexos. Numerosos resultados son extensiones de resultados obtenidos recientemente en espacios de Banach. Esta introducción muestra que importantes resultados en el área de análisis convexo se mantienen para las funciones epi-puntadas, más aún se observa que técnicas clásicas utilizadas en análisis convexo sobre espacios de Banach pueden ocuparse en este contexto más general. Los más importantes resultados en esta categoría son las extensiones de:

- *Brøndsted, A. and Rockafellar, R. T.* [6]
- *Maximal monotonicity of subdifferential* [23]
- *Subdifferential Monotonicity as a characterization of convex function By Correa, Rafael and Jofré, Alejandro and Thibault, Lionel* [10]
- *Integration of subdifferential of lower semicontinuous function by L. Thibault and D. Zagrodny* [27]

Es importante decir que estos resultados, probados en el contexto de $(x, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach no son extendibles para funciones semicontinua inferiores (existen contraejmplos en espacios normados no completos, ver por [23]). La clave para extender estos resultados a los espacios vectoriales localmente convexos ha sido el uso de funciones más amigables llamadas asintóticamente epi-puntadas.

La segunda parte de esta memoria se enfocó en demostrar criterios que garantizan la convexidad de una función epi-puntadas. La caracterización variacional de funciones convexas ha tenido diversas aplicaciones en el área de análisis convexo, siendo una de la mayor interrogante dentro de estos estudios responder al conocido problema abierto acerca de la *conjetura de Klee*. Básicamente la siguiente conjetura sigue abierta desde los años cincuenta.

Conjetura 1 *Considere un conjunto C cerrado de un espacio de Hilbert H.Si cada x en H posee una única proyección sobre C. Entonces C es convexo.*

la condición sobre la proyección única se puede formular de manera equivalente diciendo que la función $f(y) := \|y\|^2 + I_C(y)$ es tal que para todo x en H el conjunto $\operatorname{argmin}\{f - x\}$ es un singleton. En nuestros terminos estos puede formularse de manera más general como que f es una función epi-puntada y que el conjunto $\operatorname{argmin}\{f - x\}$ es convexo para cada x en H. Frente a lo anterior resulta natural pensar que el estudio de las funciones epi-puntadas podrá llevar a dar respuestas a esta clase de problemas. En la literatura existen numerosos trabajos referentes a esta conjetura, dentro de estos es destacable el articulo de *Saint Raymond* titulado *Characterizing convex functions by variational properties* (ver [25]) y que consistio en el punto de partida del problema estudiado en el capitulo 3. En esta sección se desarrollo un estudio sobre la convexidad de funciones frente a hipótesis más debiles que las utilizadas en el trabajo antes citado. Para este objetivo hemos utilizado herramientas desarrollado en los articulos [15, 22]. EL resultado final de este capitulo (véase teorema 1.2.8 Y) es a la vez una generalización a espacios localmene convexos y una simplificación considerable de la demostración del resultado de [25] (ver 3.2.7).

PREGUNTAS ABIERTAS

1. La primera interrogante que nos queda de este trabajo es desarrollar técnicas para aplicar las ideas probadas en esta memoria al contexto de espacios de Banach $(X, \|\cdot\|)$ no reflexivos. Un ejemplo de esto fue mostrado en el capitulo 3, donde dada una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ se uso su extensión natural a X^{**} dada por $\overline{f}^{w^{**}} : X^{**} \to \overline{\mathbb{R}}$. Con esta alternativa se puede llevar la teoría de las funciones epi-pointed al contexto de espacios no reflexivos y trabajar con el par en dualidad $(X^*, \|\cdot\|_*, X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$. Otra alternativa discutida durante la memoria fue la siguiente: Dada una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, aproximarla (en algún sentido) por funciones $f_\lambda : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\lambda \in \Lambda$, tales que f_λ o f_λ^* sean epi-puntadas en el par dual $(X, \|\cdot\|, X^*, \sigma(X^*, X))$, más concretamente utilizar la conjugada de *Moreau-Yosida* dada por
$$f_\lambda(x_o) := \inf_{x \in X} \{f(x) + \lambda \|x_0 - x\|^2\}$$
2. Otra pregunta que surge es cambiar la hipótesis de continuidad de f^* en un topológia τ_{X^*} compatible con el par dual $(X, \tau_X, X^*, \tau_X^*)$, por la continuidad de f^* en un topológia τ (más fina que τ_{X^*}) no compatible con el par dual (X, X^*). El ejemplo más claro donde aplicar esto es en espacio de Banach no reflexivos y considerar $\tau = \|\cdot\|_*$.
3. Durante el capitulo 3 se investigó la convexidad del operador Af, luego esto se aplicó para establecer formulas del tipo
$$f^{**} = \sigma_{\mathrm{dom}(f^*)} \square f$$
Una de las hipótesis utilizadas para este proceso es la semicontinuidad inferior débil del operador Af (la cual se tiene si f^* es epi-puntada). Frente a esto surge la interrogante de establecer las propiedades mínimas que debe poseer f para que Af sea débil semicontinua inferior y posteriormente utilizarlas para generalizar los resultados.
4. Durante la última sección se demostró la igualdad
$$f^{**}(x^{**}) = \sigma_{\mathrm{dom}\, f^*} \square_{X^{**}} \overline{f}^{w^{**}}(x^{**}) \ \ \forall x^{**} \in X^{**}$$
donde el ínfimo en la inf-convolución se toma sobre X^{**}, luego una pregunta es dar hipótesis para tener
$$f^{**}(x) = \sigma_{\mathrm{dom}\, f^*} \square_X f(x) \ \ \forall x \in X$$
Notemos que la ultima igualdad está garantizada si se cumple que para cada x
$$\overline{\sup_{x^* \in \mathrm{dom}(f^*)} g_{x^*,x}}^{w^{**}} = \overline{g_x}^{w^{**}}$$
donde $g_{x^*,x} = f(\cdot) + \langle x^*, x - \cdot \rangle$ y $g_x = \sup_{x^* \in \mathrm{dom}(f^*)} g_{x^*,x} = f(\cdot) + \sigma_{\mathrm{dom}(f^*)}(x - \cdot)$ hipótesis de este estilo son utilizadas en recientes artículos (ver por ejemplo [16]).

Bibliografía

[1] J.-B. Benoist, J.; Hiriart-Urruty. What is the subdifferential of the closed convex hull of a function? *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 27, 1996.

[2] Joël Benoist and Aris Daniilidis. Integration of fenchel subdifferentials of epi-pointed functions. *SIAM Journal on Optimization*, 12(3):575–582, 2002.

[3] Joël Benoist, Aris Daniilidis, et al. Subdifferential representation of convex functions: refinements and applications. *Journal of Convex Analysis*, 12(2):255, 2005.

[4] J.M. Borwein and Q.J. Zhu. *Techniques of Variational Analysis*. CMS Books in Mathematics. Springer, 2005.

[5] N. Bourbaki and H.G. Eggleston. *Topological Vector Spaces: Chapters 1-5*. 20. Jh.-. Springer, 2002.

[6] A. Brøndsted and R. T. Rockafellar. On the subdifferentiability of convex functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 16:605–611, 1965.

[7] Michel Valadier Charles Castaing. *Convex Analysis and Measurable Multifunctions (Lecture Notes in Mathematics)*. Springer Berlin Heidelberg, 1977.

[8] Rafael Correa and Abderrahim Hantoute. Subdifferential of the conjugate function in general banach spaces. *Top*, 20(2):328–346, 2012.

[9] Rafael Correa and Abderrahim Hantoute. Lower semicontinuous convex relaxation in optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 23(1):54–73, 2013.

[10] Rafael Correa, Alejandro Jofré, and Lionel Thibault. Subdifferential monotonicity as characterization of convex functions. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 15(5-6):531–535, 1994.

[11] G. Debreu. *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*. Cowles Foundation monograph. Yale University Press, 1987.

[12] Jean-Pierre Dedieu. Cônes asymptotes dénsembles non convexes. *Mémoires de la Société Mathématique de France*, 60:31–44, 1979.

[13] JP Dedieu. Criteres de fermeture pour l'image d'un fermé non convexe par une multiapplication. *CR Acad. Sci. Paris*, 287:501–503, 1978.

[14] Ivar Ekeland. Nonconvex minimization problems. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 1(3):443–474, 05 1979.

[15] R. Correa, Y. Garcia and A. Hantoute. Integration formulas via the Fenchel subdifferential of nonconvex functions. *Nonlinear Analysis*, 75(3):1188–1201, 2012.

[16] Abderrahim Hantoute, Marco A López, and Constantin Zalinescu. Subdifferential calculus

rules in convex analysis: a unifying approach via pointwise supremum functions. *SIAM Journal on Optimization*, 19(2):863–882, 2008.

[17] J.L. Kelley. *General Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1975.

[18] P.J. Laurent. *Approximation et optimisation*. Number v. 2. Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1971.

[19] D.T. Luc. Recession maps and applications †. *Optimization*, 27(1-2):1–15, 1993.

[20] Boris S Mordukhovich. *Variational Analysis and Generalized Differentiation I: Basic Theory*, volume 330. Springer, 2006.

[21] Jean-Jacques Moreau. Fonctionnelles convexes. *Séminaire Jean Leray*, (2):1–108, 1967.

[22] Abderrahim Hantoute Rafael Correa. New formulas for the fenchel subdifferential of the conjugate function. *Set-Valued and Variational Analysis*.

[23] R. T. Rockafellar. On the maximal monotonicity of subdifferential mappings. *Pacific J. Math.*, 33:209–216, 1970.

[24] R Tyrrell Rockafellar. *Convex analysis*. Number 28. Princeton university press, 1997.

[25] Jean Saint Raymond. Characterizing convex functions by variational properties. *JOURNAL OF NONLINEAR AND CONVEX ANALYSIS*, 14(2):253–262, 2013.

[26] Jean Saint Raymond. Weak compactness and variational characterization of the convexity. *Mediterranean journal of mathematics*, 10(2):927–940, 2013.

[27] L. Thibault and D. Zagrodny. Integration of subdifferentials of lower semicontinuous functions on banach spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 189(1):33 – 58, 1995.

[28] Dariusz Zagrodny. Approximate mean value theorem for upper subderivatives. *Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications*, 12(12):1413 – 1428, 1988.

[29] C Zălinescu. Recession cones and asymptotically compact sets. *Journal of optimization theory and applications*, 77(1):209–220, 1993.

[30] C. Zalinescu. *Convex Analysis in General Vector Spaces*. World Scientific, 2002.