



UNIVERSIDAD DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

# ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DE SISTEMAS ADAPTABLES FRACCIONARIOS REPRESENTADOS POR MODELOS DE ERROR

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTORA EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

NORELYS AGUILA CAMACHO

PROFESOR GUÍA:

Dr. MANUEL A. DUARTE MERMOUD

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:

Dr. MARCOS ORCHARD CONCHA

Dr. DANIEL SBÁRBARO HOFER

Dr. RICARDO PÉREZ CORREA

SANTIAGO DE CHILE

OCTUBRE DE 2014

**RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE:** Doctora en Ingeniería Eléctrica  
**POR:** Norelys Aguila Camacho  
**FECHA:** 15/10/2014  
**PROFESOR GUÍA:** Manuel A. Duarte Mermoud

## **ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DE SISTEMAS ADAPTABLES FRACCIONARIOS REPRESENTADOS POR MODELOS DE ERROR**

El presente trabajo aborda el problema del análisis de estabilidad, convergencia y desempeño de los sistemas adaptables fraccionarios, utilizando el enfoque de los modelos de error, problema que no ha sido abordado ni reportado en la literatura técnica hasta la fecha. Los modelos de error fraccionarios surgen al introducir las derivadas de orden fraccionario en los esquemas adaptables clásicos, ya sea describiendo la planta a controlar o identificar, o bien en las leyes de ajuste de los parámetros.

Como parte del desarrollo del trabajo, se estudiaron los cuatro modelos de error conocidos hasta el momento, pero desde el punto de vista fraccionario. En todos los casos, el primer paso fue realizar exhaustivos estudios por simulación, que permitieron tener un nivel de comprensión inicial del desempeño de estos modelos de error, en cuanto a estabilidad y convergencia de los errores.

Para analizar la estabilidad de estos modelos de error, fue preciso generar resultados matemáticos generales, los que también constituyen un importante aporte de esta Tesis Doctoral. Estos resultados permitieron completar el análisis de los Modelos de Error Fraccionarios 1 y 4 en su totalidad, y para ciertos casos particulares de los Modelos de Error Fraccionarios 2 y 3.

En relación a la demostración de convergencia del error de salida a cero, se obtuvieron resultados analíticos para casos particulares en el Modelo de Error Fraccionario 1, y se expusieron de manera concreta las principales dificultades que han impedido, hasta el momento, generalizar estos resultados a los demás casos. También se obtuvieron otros resultados analíticos válidos para los cuatro modelos de error, que permiten afirmar que el promedio del cuadrado de la norma del error de salida, tiene una tendencia decreciente. Esto puede resultar de utilidad en algunas aplicaciones desde el punto de vista práctico.

Respecto de la convergencia del error paramétrico, se logró determinar que ella está relacionada con alguna forma de excitación persistente, particular para los sistemas adaptables fraccionarios, pero no se logró dar cabal respuesta a esta interrogante. Sin embargo, se obtuvieron resultados analíticos parciales para el caso del Modelo de Error Fraccionario 1 escalar, quedando los restantes casos como parte del trabajo futuro a desarrollar en esta línea de investigación. No obstante, se expusieron las conclusiones intuitivas al respecto, obtenidas de los estudios por simulación.

Finalmente, este trabajo se complementó con el diseño, implementación y análisis de dos aplicaciones de controladores fraccionarios. El primero corresponde al control por referencia a modelo de orden fraccionario para un regulador automático de voltaje, mientras que el segundo es un compendio de tres estrategias de control fraccionario para el control de posición en un sistema de levitación magnética, conocido como Anillo de Thomson.

# DEDICATORIA

*A Sofi y Davi, que hacen felices mis amaneceres y me aman incondicionalmente.*

# AGRADECIMIENTOS

A Él, que veló por mí cada uno de los días en estos cuatro años, que escuchó mi oraciones y respondió a mis plegarias.

A Sofi y Davi, que aún sin saber lo que es el cálculo fraccionario, se las ingenieron para darme muestras de apoyo, besos y abrazos, que me ayudaron a llegar hasta aquí sin perder la cordura.

A mis papás, que aún en la distancia enorme que nos separa supieron brindarme esas escogidas palabras, que solamente los padres saben decir.

A Carolina, que ha sido amiga, confidente y madre. Quizás la única persona que realmente comprendió mi tormentoso transitar por este doctorado, tratando de equilibrar cual malabarista mi pasión por el trabajo, mi rol de madre y de esposa.

A Francisco Unda, quien pacientemente me enseñó a detectar errores insospechados y que revisó desinteresadamente mis desarrollos.

A todos mis compañeros del grupo de investigación, todos los que estaban cuando llegué y ya no están, y a aquellos que han llegado luego. Gracias a todos por escucharme en cada una de las reuniones, por su constante apoyo a la causa, por sus sugerencias, y también por esos pocos ratos del tan necesario ocio, en que lograban alejar mi mente de la estabilidad de los sistemas fraccionarios.

A la Señora Eliana Monardes, quien me apoyó aún antes de que yo llegara a Chile, y que luego me recibió y me apoyó siempre.

A mi profesor Manuel Duarte, que fue mi guía durante los cuatro años, que perfeccionó mi sistema de trabajo, que me ofreció todos sus conocimientos, que siempre estuvo dispuesto a escucharme, que me alentó en los tantos momentos en que parecía no haber salida y me enseñó que así es la investigación. Gracias por contribuir a formarme no solo como investigadora, sino también como profesional.

A CONICYT Chile, por su financiamiento parcial a través del proyecto CONICYT-PCHA Programa de Doctorado Nacional, 2013-21130004.

A todos, muchas gracias.

# Tabla de Contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Antecedentes del problema . . . . .	2
1.3. Objetivos, metodología y resumen de resultados . . . . .	4
<b>2. Estado del arte del diseño y análisis de esquemas adaptables fraccionarios</b>	<b>8</b>
2.1. Estrategias de control por modo deslizante de orden fraccionario . . . . .	8
2.2. Estrategias de control por realimentación de alta ganancia . . . . .	13
2.3. Estrategias de control adaptable por referencia a modelo de orden fraccionario . . . . .	17
2.4. Estrategias misceláneas de control adaptable de orden fraccionario . . . . .	20
2.5. Conclusiones del análisis del estado del arte . . . . .	24
<b>3. Marco teórico fundamental</b>	<b>26</b>
3.1. Definiciones y propiedades del cálculo fraccionario . . . . .	26
3.2. Definiciones y teoremas para el trabajo con matrices . . . . .	28
3.3. Herramientas para el análisis de estabilidad de sistemas de orden fraccionario . . . . .	30
<b>4. Nuevos lemas y herramientas para el cálculo fraccionario</b>	<b>34</b>
4.1. Nuevos lemas para la derivada según Caputo . . . . .	34
4.1.1. Derivada fraccionaria según Caputo de una función cuadrática . . . . .	35
4.2. Aplicación de los lemas generados para la derivada según Caputo . . . . .	39
4.2.1. Uso de funciones de Lyapunov cuadráticas en la aplicación de la extensión fraccionaria del método directo de Lyapunov . . . . .	39
4.2.2. Estabilidad de sistemas no lineales de orden fraccionario con $\alpha \in (0, 1]$ . . . . .	41
4.3. Condiciones sobre la integral fraccionaria de una función para garantizar su convergencia . . . . .	44
4.3.1. Nuevos lemas sobre convergencia . . . . .	45

<b>5. Análisis de la estabilidad y desempeño de los modelos de error fraccionarios</b>	<b>51</b>
5.1. Modelos de error fraccionarios en el control adaptable . . . . .	51
5.2. Modelo de Error Fraccionario 1 . . . . .	52
5.2.1. Estudios por simulación del Modelo de Error Fraccionario 1, caso escalar . . .	53
5.2.2. Estudios por simulación del Modelo de Error Fraccionario 1, caso vectorial . .	61
5.2.3. Análisis de estabilidad del Modelo de Error Fraccionario 1 . . . . .	68
5.2.4. Resultados preliminares sobre la convergencia del error paramétrico en el Modelo de Error Fraccionario 1 . . . . .	71
5.2.5. Resultados preliminares sobre la convergencia del error de salida en el Mo- delo de Error Fraccionario 1 . . . . .	73
5.3. Modelo de Error Fraccionario 2 . . . . .	75
5.3.1. Estudios por simulación del Modelo de Error Fraccionario 2 . . . . .	76
5.3.2. Análisis de estabilidad del Modelo de Error Fraccionario 2 . . . . .	84
5.3.3. Acerca de la convergencia del error de salida en el Modelo de Error Fraccio- nario 2 . . . . .	87
5.4. Modelo de Error Fraccionario 3 . . . . .	87
5.4.1. Estudios por simulación para el Modelo de Error Fraccionario 3 . . . . .	89
5.4.2. Análisis de estabilidad del Modelo de Error Fraccionario 3 . . . . .	97
5.4.3. Acerca de la convergencia del error de salida del Modelo de Error Fraccio- nario 3 . . . . .	99
5.5. Modelo de Error Fraccionario 4 . . . . .	100
5.5.1. Estudios por simulación para el Modelo de Error Fraccionario 4 . . . . .	101
5.5.2. Análisis de estabilidad del Modelo de Error Fraccionario 4 . . . . .	109
5.5.3. Acerca de la convergencia del error de salida del Modelo de Error Fraccio- nario 4 . . . . .	111
<b>6. Aplicaciones del control de orden fraccionario</b>	<b>113</b>
6.1. Control por referencia a modelo fraccionario de un AVR . . . . .	113
6.1.1. Conceptos generales de algoritmos genéticos . . . . .	114
6.1.2. Diseño del controlador para el AVR usando FOMRAC y algoritmos genéticos	115

6.1.3.	Optimización de los parámetros de diseño del FOMRAC . . . . .	117
6.1.4.	Comportamiento del FOMRAC diseñado . . . . .	119
6.1.5.	Robustez del FOMRAC . . . . .	124
6.1.6.	Evaluación del desempeño del sistema controlado . . . . .	128
6.2.	Aplicación de estrategias de control fraccionario a un sistema de levitación magnética	129
6.2.1.	Introducción . . . . .	130
6.2.2.	Modelo del anillo de Thomson . . . . .	130
6.2.3.	Implementación de un observador de estado fraccionario para estimar la velocidad del anillo . . . . .	133
6.2.4.	Cancelación de la no linealidad y localización de polos . . . . .	134
6.2.5.	Control PID de orden fraccionario . . . . .	138
6.2.6.	Control por modo deslizante . . . . .	142
6.2.7.	Desempeño del sistema controlado con perturbación senoidal a la salida . .	146
6.2.8.	Conclusiones sobre las estrategias de control para la aplicación de levitación magnética . . . . .	148
	<b>Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>149</b>
	<b>Resumen de publicaciones generadas durante el desarrollo de la Tesis</b>	<b>151</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>152</b>

# Índice de tablas

5.1. Señales auxiliares utilizadas en los estudios por simulaciones para el caso escalar de los modelos de error fraccionarios. . . . .	54
5.2. Señales de entrada utilizadas en los estudios por simulaciones para el caso vectorial de los modelos de error fraccionarios. . . . .	62
6.1. Detalles de la implementación del FOMRAC para el AVR . . . . .	116
6.2. Detalles de implementación de los FOMRAC para el AVR considerando controladores de orden reducido . . . . .	122
6.3. Valores óptimos de los parámetros de diseño de los FOMRAC considerando controladores de orden reducido para el AVR . . . . .	122
6.4. Valores óptimos de los parámetros de diseño de los IOMRAC considerando controladores de orden reducido para el AVR . . . . .	123
6.5. Índices de desempeño para los cuatro FOMRAC, los cuatro IOMRAC, el PID y el FOPID para el AVR . . . . .	129
6.6. Detalles del Modelo no lineal del anillo de Thomson dado en la ecuación (6.4) . . .	132
6.7. Valores de los parámetros del modelo del anillo de Thomson disponible en CINVESTAV . . . . .	132



# Índice de figuras

2.1. Esquema de control por referencia a modelo con realimentación fraccionaria de la salida. . . . .	18
3.1. Diagrama del lugar de las raíces para la ecuación (3.22). . . . .	31
5.1. Esquema del Modelo de Error Fraccionario 1. . . . .	52
5.2. Evolución del error de salida $e(t)$ del Modelo de Error Fraccionario 1, cuando la señal de información $\omega(t)$ corresponde al Caso 1 de la Tabla 5.1. . . . .	55
5.3. Evolución del error paramétrico $\phi(t)$ del Modelo de Error Fraccionario 1, cuando la señal de información $\omega(t)$ corresponde al Caso 1 de la Tabla 5.1. . . . .	55
5.4. Evolución del error de salida $e(t)$ del Modelo de Error Fraccionario 1, cuando la señal de información $\omega(t)$ corresponde al Caso 2 de la Tabla 5.1. . . . .	56
5.5. Evolución del error paramétrico $\phi(t)$ del Modelo de Error Fraccionario 1, cuando la señal de información $\omega(t)$ corresponde al Caso 2 de la Tabla 5.1 . . . . .	57
5.6. Evolución del error de salida $e(t)$ del Modelo de Error Fraccionario 1, cuando la señal de información $\omega(t)$ corresponde al Caso 3 de la Tabla 5.1. . . . .	57
5.7. Evolución del error paramétrico $\phi(t)$ del Modelo de Error Fraccionario 1, cuando la señal de información $\omega(t)$ corresponde al Caso 3 de la Tabla 5.1. . . . .	58
5.8. Evolución del error de salida $e(t)$ en el Modelo de Error Fraccionario 1, cuando la señal de información $\omega(t)$ corresponde al Caso 4 de la Tabla 5.1. . . . .	59
5.9. Evolución del error paramétrico $\phi(t)$ del Modelo de Error Fraccionario 1, cuando la señal de información $\omega(t)$ corresponde al Caso 4 de la Tabla 5.1. . . . .	60
5.10. Evolución del error de salida $e(t)$ del Modelo de Error Fraccionario 1, cuando $\omega(t)$ corresponde a un vector de señales constantes. . . . .	62
5.11. Evolución de la norma del error paramétrico $\ \phi(t)\ $ del Modelo de Error Fraccionario 1, cuando $\omega(t)$ corresponde a un vector de señales constantes. . . . .	63
5.12. Evolución del error de salida $e(t)$ del Modelo de Error Fraccionario 1, cuando $\omega(t)$ corresponde al Caso 2 de la Tabla 5.2. . . . .	64
5.13. Evolución de la norma del error paramétrico $\ \phi(t)\ $ del Modelo de Error Fraccionario 1, cuando $\omega(t)$ corresponde al Caso 2 de la Tabla 5.2. . . . .	64

5.14. Evolución del error de salida $e(t)$ del Modelo de Error Fraccionario 1, cuando $\omega(t)$ corresponde al Caso 3 de la Tabla 5.2. . . . .	65
5.15. Evolución de la norma del error paramétrico $\ \phi(t)\ $ del Modelo de Error Fraccionario 1, cuando $\omega(t)$ corresponde al Caso 3 de la Tabla 5.2. . . . .	66
5.16. Evolución del error de salida $e(t)$ del Modelo de Error Fraccionario 1, cuando $\omega(t)$ corresponde al Caso 4 de la Tabla 5.2. . . . .	67
5.17. Evolución de la norma del error paramétrico $\ \omega(t)\ $ del Modelo de Error Fraccionario 1, cuando $\omega(t)$ corresponde al Caso 4 de la Tabla 5.2. . . . .	68
5.18. Esquema del Modelo de Error Fraccionario 2. . . . .	75
5.19. Evolución de la norma del error de salida $\ e(t)\ $ del Modelo de Error Fraccionario 2, cuando el vector $\omega(t)$ corresponde a un vector de señales constantes. . . . .	77
5.20. Evolución de la norma del error paramétrico $\ \phi(t)\ $ y de $\ x(t)\ $ del Modelo de Error Fraccionario 2, cuando el vector $\omega(t)$ corresponde a un vector de señales constantes. . . . .	79
5.21. Evolución de la norma del error de salida $\ e(t)\ $ del Modelo de Error Fraccionario 2, cuando $\omega(t)$ corresponde al Caso 2 de la Tabla 5.2. . . . .	80
5.22. Evolución de la norma del error paramétrico $\ \phi(t)$ y de $\ x(t)\ $ del Modelo de Error Fraccionario 2, cuando $\omega(t)$ corresponde al Caso 2 de la Tabla 5.2. . . . .	80
5.23. Evolución de la norma del error de salida $\ e(t)\ $ del Modelo de Error Fraccionario 2, cuando $\omega(t)$ corresponde al Caso 3 de la Tabla 5.2. . . . .	81
5.24. Evolución de la norma del error paramétrico $\ \phi(t)\ $ y de $\ x(t)\ $ del Modelo de Error Fraccionario 2, cuando $\omega(t)$ corresponde al Caso 3 de la Tabla 5.2. . . . .	82
5.25. Evolución de la norma del error de salida $\ e(t)\ $ del Modelo de Error Fraccionario 2, cuando $\omega(t)$ corresponde al Caso 4 de la Tabla 5.2. . . . .	83
5.26. Evolución de la norma del error paramétrico $\ \phi(t)\ $ y de $\ x(t)\ $ del Modelo de Error Fraccionario 2, cuando $\omega(t)$ corresponde al Caso 4 de la Tabla 5.2. . . . .	84
5.27. Esquema del Modelo de Error Fraccionario 3. . . . .	88
5.28. Evolución de $e_1(t)$ y de la norma del error de estado $\ e(t)\ $ del Modelo de Error Fraccionario 3, cuando $\omega(t)$ corresponde a un vector de señales constantes. . . . .	90
5.29. Evolución de la norma del error paramétrico $\ \phi(t)\ $ y de $\ x(t)\ $ del Modelo de Error Fraccionario 3, cuando $\omega(t)$ corresponde a un vector de señales constantes. . . . .	91
5.30. Evolución de $e_1(t)$ y de la norma del error de estado $\ e(t)\ $ del Modelo de Error Fraccionario 3, cuando $\omega(t)$ corresponde al Caso 2 de la Tabla 5.2. . . . .	92
5.31. Evolución de la norma del error paramétrico $\ \phi(t)\ $ y de $\ x(t)\ $ del Modelo de Error Fraccionario 3, cuando $\omega(t)$ corresponde al Caso 2 de la Tabla 5.2. . . . .	93

5.32. Evolución de $e_1(t)$ y de la norma del error de estado $\ e(t)\ $ del Modelo de Error Fraccionario 3, cuando $\omega(t)$ corresponde al Caso 3 de la Tabla 5.2. . . . .	93
5.33. Evolución de la norma del error paramétrico $\ \phi(t)\ $ y de $\ x(t)\ $ del Modelo de Error Fraccionario 3, cuando $\omega(t)$ corresponde al Caso 3 de la Tabla 5.2. . . . .	94
5.34. Evolución de $e_1(t)$ y de la norma del error de estado $\ e(t)\ $ del Modelo de Error Fraccionario 3, cuando $\omega(t)$ corresponde al Caso 4 de la Tabla 5.2. . . . .	95
5.35. Evolución de la norma del error paramétrico $\ \phi(t)\ $ y de $\ x(t)\ $ del Modelo de Error Fraccionario 3, cuando $\omega(t)$ corresponde al Caso 4 de la Tabla 5.2. . . . .	96
5.36. Esquema del Modelo de Error Fraccionario 4. . . . .	100
5.37. Evolución de $e_1(t)$ , $e_2(t)$ y $\varepsilon(t)$ para el Modelo de Error Fraccionario 4, cuando $\omega(t)$ corresponde al Caso 1 de la Tabla 5.2. . . . .	102
5.38. Evolución de la norma del error paramétrico $\ \phi(t)\ $ del Modelo de Error Fraccionario 4, cuando $\omega(t)$ corresponde al Caso 1 de la Tabla 5.2. . . . .	103
5.39. Evolución de $e_1(t)$ , $e_2(t)$ y $\varepsilon(t)$ para el Modelo de Error Fraccionario 4, cuando $\omega(t)$ corresponde al Caso 2 de la Tabla 5.2. . . . .	104
5.40. Evolución de la norma del error paramétrico $\ \phi(t)\ $ del Modelo de Error Fraccionario 4, cuando $\omega(t)$ corresponde al Caso 2 de la Tabla 5.2. . . . .	105
5.41. Evolución de $e_1(t)$ , $e_2(t)$ y $\varepsilon(t)$ para el Modelo de Error Fraccionario 4, cuando $\omega(t)$ corresponde al Caso 3 de la Tabla 5.2. . . . .	106
5.42. Evolución de la norma del error paramétrico $\ \phi(t)\ $ del Modelo de Error Fraccionario 4, cuando $\omega(t)$ corresponde al Caso 3 de la Tabla 5.2. . . . .	107
5.43. Evolución de $e_1(t)$ , $e_2(t)$ y $\varepsilon(t)$ para el Modelo de Error Fraccionario 4, cuando $\omega(t)$ corresponde al Caso 4 de la Tabla 5.2. . . . .	108
5.44. Evolución de la norma del error paramétrico $\ \phi(t)\ $ del Modelo de Error Fraccionario 4, cuando $\omega(t)$ corresponde al Caso 4 de la Tabla 5.2. . . . .	109
6.1. Diagramas de bloques para el AVR y el generador (Zamani et al., 2009). . . . .	115
6.2. Diagrama de bloques para la implementación del FOMRAC para el AVR (Narendra & Annaswamy, 2005). . . . .	117
6.3. Diagrama de bloques utilizado para la implementación de las leyes de ajuste fraccionarias. . . . .	119
6.4. Respuesta al escalón (a) y señal de control (b) para el AVR, controlado por FOMRAC, IOMRAC, FOPID y PID. . . . .	120
6.5. Respuesta al escalón de la planta comparada con las funciones de transferencia de orden reducido . . . . .	121

6.6. Respuesta al escalón del AVR controlado por los cuatro FOMRAC, el PID y el FOPID.	123
6.7. Señales de control en el AVR controlador por los cuatro FOMRAC, el PID y el FOPID.	124
6.8. Respuesta al escalón del AVR controlado por los cuatro IOMRAC, el PID y el FOPID.	125
6.9. Señales de control en el AVR controlado por los cuatro IOMRAC, el PID y el FOPID.	125
6.10. Respuesta al escalón del AVR controlado por el FOMRAC <sub>3</sub> , el IOMRAC <sub>3</sub> , el PID y el FOPID, frente a una variación en el parámetro $k_1$ del generador.	126
6.11. Señales de control del AVR controlado por el FOMRAC <sub>3</sub> , el IOMRAC <sub>3</sub> , el PID y el FOPID, frente a una variación en el parámetro $k_1$ del generador.	127
6.12. Respuesta al escalón del AVR controlado por el FOMRAC <sub>3</sub> , el IOMRAC <sub>3</sub> , el PID y el FOPID, frente a variaciones en el parámetro $k_1$ del generador y en la función de transferencia del excitador, en $t = 100$ s.	127
6.13. Señales de control del AVR controlado por el FOMRAC <sub>3</sub> , el IOMRAC <sub>3</sub> , el PID y el FOPID, frente a variaciones en el parámetro $k_1$ del generador y en la función de transferencia del excitador, en $t = 100$ s.	128
6.14. Esquema del sistema anillo de Thomson.	131
6.15. Imagen del sistema anillo de Thomson disponible en el CINVESTAV.	133
6.16. Comportamiento del sistema controlado utilizando la ley de control (6.13).	135
6.17. Comportamiento del sistema controlado utilizando la ley de control (6.13) frente al seguimiento de escalones de referencia de diferentes magnitudes.	136
6.18. Comportamiento del error de posición utilizando la ley de control (6.13) para un problema de seguimiento de referencia senoidal.	137
6.19. Comportamiento del error de posición utilizando la ley de control (6.13) para un problema de seguimiento de referencia senoidal y parámetros de diseño modificados.	137
6.20. Comportamiento del sistema controlado utilizando FOPID.	139
6.21. Comportamiento del sistema controlado utilizando FOPID para un problema de seguimiento de referencia tipo escalón de diferentes magnitudes.	140
6.22. Comportamiento del error de posición utilizando FOPID para un problema de seguimiento de referencia senoidal.	141
6.23. Comportamiento del error de posición utilizando FOPID para un problema de seguimiento de referencia senoidal y parámetros de diseño modificados.	142
6.24. Comportamiento del sistema controlado utilizando el control por modo deslizante (6.33).	145
6.25. Comportamiento del sistema controlado utilizando el control por modo deslizante (6.33) para un problema de seguimiento de escalones de diferentes magnitudes.	145

6.26. Comportamiento del error de posición utilizando el control por modo deslizante (6.33) para un problema de seguimiento de referencia senoidal. . . . .	146
6.27. Integral entera del cuadrado del error, para cada una de las tres estrategias de control implementadas (Cancelación de no linealidad (arriba), Control por modo deslizante (centro) y FOPID (debajo)), cuando una perturbación senoidal afecta la salida del sistema. . . . .	147

# 1 Introducción

La presente Tesis Doctoral estudia los sistemas adaptables de orden fraccionario, desde el punto de vista de los modelos de error. Este problema se considera de gran trascendencia en la actualidad, debido al auge que han tenido los esquemas de control adaptable fraccionario durante los últimos años, así como la aparición de modelos para sistemas basados en ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. Sin embargo, el estudio de los sistemas adaptables fraccionarios desde el punto de vista de los modelos de error, no ha sido reportado en la literatura técnica, lo cual hace de éste un problema abierto cuya investigación está ampliamente justificada.

## 1.1. Motivación

En el contexto de los sistemas adaptables puede encontrarse dos tipos de esquemas; los esquemas de identificación y los esquemas de control. Los problemas de identificación se refieren a la estimación en tiempo real de los parámetros desconocidos de un modelo del sistema, a partir de las señales de entrada-salida. Los problemas de control, en cambio, se refieren al diseño de controladores para sistemas con parámetros desconocidos, también basados en la información de entrada-salida en tiempo real.

De manera general, en el caso del control adaptable pueden encontrarse esquemas de control indirecto, esquemas de control directo y combinaciones de ellos. En los esquemas de control indirecto los parámetros del controlador se calculan a partir de información entregada por un esquema de identificación de los parámetros del sistema. En el caso del control adaptable directo, en cambio, los parámetros del controlador son ajustados directamente, sin necesidad de un esquema de identificación de parámetros. En el caso de los esquemas combinados, se dispone tanto de un proceso de identificación de parámetros del sistema como uno de ajuste de los parámetros del controlador, los cuales interactúan mutuamente.

Las leyes de ajuste han evolucionado con el transcurso de los años, con la aparición de teorías como las redes neuronales, los algoritmos genéticos, la optimización por enjambre de partículas (en adelante PSO, por sus siglas en inglés (Particle Swarm Optimization)), ajustes Bayesianos, entre otros. Pero sin lugar a dudas, una de las leyes de ajuste más utilizadas es la que emplea la técnica del gradiente (Narendra & Annaswamy, 2005), en la cual el parámetro a estimar es el resultado de la solución de una ecuación diferencial de orden entero, moviéndose en la dirección negativa del gradiente de la función criterio que se desea minimizar.

Independientemente de que se aborde un esquema de identificación o un esquema de control, la gran mayoría de los esquemas adaptables pueden describirse, desde el punto de vista de estabilidad, convergencia y desempeño, a través de dos ecuaciones; la primera corresponde a la ecuación del error de salida y la segunda corresponde a la ecuación del error paramétrico o ley de ajuste. Es precisamente al conjunto de estas dos ecuaciones a lo que se le denomina modelo de error (Narendra & Annaswamy, 2005; Ioannou & Fidan, 2006; Tao, 2003).

Resulta natural que la formulación de diferentes problemas de identificación y/o control y la correspondiente elección de las leyes de ajuste de los parámetros, conduzcan a diferentes modelos de error. No obstante, la mayoría de los sistemas adaptables de orden entero se pueden estudiar haciéndolos coincidir con alguno de los cuatro modelos de error conocidos. Así, analizando estos modelos en forma separada, los cuales son independientes del sistema adaptable específico analizado, es posible estudiar el desempeño de una gran variedad de sistemas, razón por la cual el estudio de los modelos de error resulta particularmente atractivo (Narendra & Annaswamy, 2005).

Con el auge del uso de los operadores fraccionarios en el área de identificación y modelación, se ha demostrado que muchos sistemas, por su naturaleza propia, resultan mejor modelados mediante ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. Puede mencionarse por ejemplo los procesos de difusión como los que se encuentran en las baterías (Sabatier et al., 2006), algunos procesos de transferencia de calor (Gabano & Poinot, 2011), el efecto de la frecuencia en las máquinas de inducción (Lin et al., 2000), entre otros. Por lo tanto, la presencia de estos sistemas dentro de un esquema de control adaptable, sin importar la técnica en particular que se utilice, ya implica que el esquema adaptable resultante es de orden fraccionario. Esto se ve reflejado directamente en el hecho de que la ecuación de salida del modelo de error correspondiente estará descrita mediante una ecuación diferencial de orden fraccionario.

Del mismo modo, aunque el sistema a controlar no sea de orden fraccionario sino que está descrito por ecuaciones diferenciales de orden entero, se han incluido intencionalmente operadores fraccionarios en el diseño de las técnicas de control que se aplican, pues su uso ha demostrado ser de utilidad frente a situaciones tan frecuentes como la presencia de ruido, perturbaciones y variaciones paramétricas. En el caso de los esquemas adaptables, la libertad de diseño de las leyes de ajuste, implica que la ecuación del error paramétrico en los modelos de error pueda también estar descrita mediante una ecuación diferencial de orden fraccionario, siempre que se garantice la estabilidad del correspondiente esquema.

Por lo tanto, al existir la posibilidad de tener tanto ecuaciones del error de salida como ecuaciones del error paramétrico descritas mediante ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, han surgido los modelos de error fraccionarios, cuyo estudio se aborda en esta Tesis. Estos modelos de error fraccionarios, además, pueden ser vistos como una generalización de los modelos de error enteros, ya conocidos y completamente estudiados (Narendra & Annaswamy, 2005; Ioannou & Fidan, 2006; Tao, 2003).

## **1.2. Antecedentes del problema**

La necesidad de tener un respaldo analítico de la estabilidad de los esquemas de orden fraccionario, ha dado lugar a la aparición de algunas herramientas para este análisis. Sin embargo, no todas son aplicables a los esquemas adaptables, pues en general estos sistemas son no lineales y variantes en el tiempo. Dentro de las técnicas reportadas en la literatura técnica que sí son aplicables a estos sistemas, puede mencionarse el principio de comparación fraccionario escalar, que se encuentra detallado en el Capítulo 3 de esta Tesis. Esta es una metodología que permite conocer el comportamiento de la solución de una ecuación diferencial, comparándola con otra de resultado conocido. Este resultado es especialmente útil, pues de este modo no es necesario resolver la ecuación diferencial en estudio, lo cual resulta muy complejo en la mayor parte de las ocasiones. Este principio fue planteado en (Li et al., 2010), pero en (Choi & Koo, 2011) fue relajada

una de las condiciones del mismo. Sin embargo, la dificultad de esta metodología radica en que es preciso encontrar una ecuación diferencial fraccionaria de solución conocida, para compararla con aquella que se quiere analizar. Esto puede resultar sumamente difícil en el caso de los sistemas adaptables, donde existe desconocimiento de los parámetros. Además, la generalización de esta técnica al caso vectorial, impone restricciones adicionales al sistema de comparación utilizado, haciendo imposible su uso para el caso del análisis de los modelos de error en su forma vectorial.

Otra de las técnicas que han sido reportadas en la literatura para el análisis de sistemas fraccionarios no lineales y variantes en el tiempo, es la extensión fraccionaria del método directo de Lyapunov (Li et al., 2010), cuyos detalles pueden encontrarse en el Capítulo 3. Esta metodología es aplicable a sistemas fraccionarios generales, pero tal como sucede en el método directo de Lyapunov clásico, este método es solamente una condición suficiente para demostrar la estabilidad de los sistemas fraccionarios, lo cual significa que un sistema aún puede ser estable aunque no se encuentre una función de Lyapunov candidata para concluir sobre su estabilidad. Además, la gran dificultad de este método radica precisamente en encontrar una función de Lyapunov para el sistema que se analiza, debido a la carencia de resultados que permitan generalizar el uso de las funciones que se utilizan en el caso entero al caso fraccionario.

Algunos autores han propuesto funciones de Lyapunov para demostrar la estabilidad de sistemas de orden fraccionario. Puede citarse por ejemplo los dos prominentes trabajos de Lakshmikantham et al. (2008, 2009). Sin embargo, en éstos la relación entre la función de Lyapunov y la ecuación diferencial fraccionaria que rige al sistema no es trivial, lo cual limita mucho su utilización. En Burton (2011) se proponen algunas funciones de Lyapunov alternativas, donde la relación entre ésta y la ecuación diferencial fraccionaria que rige el sistema es más evidente, pero estas funciones tampoco son simples y además son válidas para sistemas fraccionarios con características particulares, no aplicables a los modelos de error y en general tampoco a la inmensa mayoría de los esquemas adaptables fraccionarios que se puedan generar. Finalmente, se han realizado grandes esfuerzos por utilizar la función cuadrática como función de Lyapunov para el análisis de sistemas fraccionarios, pero debido a la aparición de una sumatoria infinita de términos al momento de derivarla, se reportan solamente desarrollos donde imponen restricciones adicionales al sistema, permitiendo que esta sumatoria sea acotada y usando la cota correspondiente en el diseño de las leyes de control (Onder, 2008; Aghababa, 2011a; Dadras & Momeni, 2011; Senejohnny & Delavari, 2012; Yin et al., 2013; Luo & Liu, 2014). Esto evidentemente es una restricción muy fuerte, pues el desconocimiento de los parámetros en la gran mayoría de los esquemas adaptables fraccionarios hace imposible conocer dichas cotas.

Respecto de los esquemas adaptables fraccionarios reportados en la literatura, el Capítulo 2 ofrece un análisis detallado de éstos, pero las observaciones fundamentales de este análisis pueden resumirse como sigue.

Dentro de los esquemas adaptables de orden fraccionario que se han reportado en la literatura técnica, puede identificarse cuatro grupos de acuerdo a las estrategias utilizadas. El primero corresponde a esquemas de control por modo deslizante fraccionario, donde los operadores fraccionarios pueden aparecer describiendo el sistema a controlar, en la definición de la superficie deslizante utilizada o en la señal de control empleada. Un segundo grupo corresponde a estrategias de control por realimentación de alta ganancia de la salida o de los estados, donde esta ganancia se ajusta a través de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. El tercer grupo corresponde a estrategias de control adaptable por referencia a modelo de orden fraccionario (en adelante FOMRAC, por sus siglas en inglés (Fractional Order Model Reference Adaptive Control)); donde los operadores fraccionarios pueden encontrarse ya sea en el sistema a controlar, en el modelo de referencia utilizado, en las leyes de ajuste o en combinaciones de estos casos.



Finalmente, el cuarto grupo corresponde a otras estrategias de control adaptable fraccionario misceláneas, donde se reportan uno o dos trabajos solamente en cada estrategia, entre las cuales puede mencionarse el método de estabilización adaptiva universal (en adelante UAS, por sus siglas en inglés (Universal Adaptive Stabilization)), control por modelo interno (en adelante IMC, por sus siglas en inglés (Internal Model Control)) y la identificación de sistemas fraccionarios usando diferentes técnicas, entre otras.

En todos los trabajos en que se realizaron comparaciones entre los esquemas fraccionarios v/s los esquemas clásicos enteros, los esquemas adaptables fraccionarios presentaron ventajas con respecto a los esquemas enteros equivalentes, siendo el rechazo a las perturbaciones de los esquemas fraccionarios y la robustez ante el ruido, algunas de las ventajas más importantes.

En cuanto al análisis de estabilidad de los esquemas adaptables presentados, sólo se reportaron en muy pocos de los trabajos mencionados. En el caso de las estrategias de control por modo deslizante, los análisis de estabilidad se realizaron en su mayoría utilizando el método directo de Lyapunov entero, y para ello fue preciso incluir operadores fraccionarios convenientemente en la definición de la superficie deslizante. También se reportan algunos trabajos donde se utilizó la extensión fraccionaria del método directo de Lyapunov. En estos trabajos se utiliza la función de Lyapunov cuadrática, pero imponiendo la restricción adicional de que la sumatoria infinita de términos que aparece en su derivada fraccionaria, sea acotada y con cota conocida. En ninguno de los casos, estos análisis son generalizables a los modelos de error fraccionarios y por consiguiente tampoco a aquellos sistemas adaptables fraccionarios que los modelos de error representan. En el caso de los esquemas por realimentación de alta ganancia y en el caso de los trabajos pertenecientes al cuarto grupo mencionado, se reporta análisis teórico de estabilidad en algunos pocos trabajos. En algunos casos, los análisis fueron realizados directamente del análisis detallado de las ecuaciones del sistema correspondiente y en otros, utilizando la extensión fraccionaria del método directo de Lyapunov, con las mismas restricciones ya planteadas, siendo imposible generalizar estos análisis al caso de los modelos de error. Finalmente, en el caso de las estrategias FOMRAC, se reporta solamente el análisis teórico de estabilidad en un caso, aunque haciendo uso de la representación difusiva, metodología que aún tiene algunos puntos débiles y que es preciso aclarar.

Resulta sumamente importante mencionar que no se ha reportado ningún trabajo que aborde el análisis de los esquemas adaptables desde el enfoque de los modelos de error. Sólo pueden encontrarse algunos análisis preliminares y parciales que son resultado de este trabajo de tesis (Aguila-Camacho & Duarte-Mermoud, 2012; Duarte-Mermoud & Aguila-Camacho, 2013; Aguila-Camacho & Duarte-Mermoud, 2014), lo cual hace que este sea un problema abierto cuya investigación está ampliamente justificada.

### **1.3. Objetivos, metodología y resumen de resultados**

Dada la importancia del problema y la carencia de resultados reportados a la fecha, se abordó este trabajo investigativo, cuyos resultados se presentan en esta Tesis Doctoral. A continuación se introducen los objetivos que dieron inicio a este estudio, y que están directamente relacionados con la organización de los contenidos del presente documento.

**Objetivo general** Diseñar esquemas de control e identificación de sistemas de parámetros desconocidos, combinando teoría de cálculo fraccionario con los esquemas adaptables tradicionales (orden entero), considerando los operadores fraccionarios, tanto en los sistemas como en las

leyes de ajuste de los parámetros. Analizar la estabilidad, convergencia y desempeño de los esquemas fraccionarios resultantes, desde el punto de vista de los modelos de error, combinando las herramientas de análisis disponibles en la literatura y otras desarrolladas en la Tesis.

### **Objetivos específicos**

En función del objetivo general de este trabajo, se establecieron los siguientes objetivos específicos:

1. Analizar mediante simulaciones la estabilidad, convergencia y desempeño de los Modelos de Error Fraccionarios 1 a 4, obtenidos de los modelos de error clásicos sustituyendo las derivadas enteras por derivadas de orden fraccionario, tanto en la ecuación del error como en las leyes de ajuste, considerando los órdenes de derivación en el intervalo  $(0, 1]$ .
2. Generar resultados matemáticos que permitan el uso de funciones de Lyapunov en el análisis de estabilidad de los Modelos de Error Fraccionarios 1 a 4, ya sea mediante el método directo de Lyapunov clásico o utilizando su extensión fraccionaria.
3. Utilizar los resultados del punto 2 u otras técnicas de análisis alternativas, para demostrar analíticamente la estabilidad de los Modelos de Error Fraccionarios 1 a 4.
4. Generar resultados matemáticos que permitan analizar la convergencia de funciones, basado en información disponible sobre su integral fraccionaria.
5. Aplicar los resultados del punto 4 para analizar la convergencia de los errores en los Modelos de Error Fraccionarios 1 a 4.
6. Diseñar controladores adaptables que incluyan operadores fraccionarios y aplicarlos a sistemas reales a nivel de simulaciones, para poner de manifiesto las ventajas de incluir estos operadores en los esquemas.

En base a los objetivos propuestos, se comenzó analizando mediante simulaciones los cuatro modelos de error fraccionarios. Estos estudios por simulaciones permitieron observar el comportamiento de estos modelos de error en dependencia del orden de derivación utilizado, y además adquirir algún nivel de comprensión sobre los resultados analíticos referentes a su estabilidad y convergencia que debían demostrarse a continuación.

Enseguida se investigó acerca del análisis de estabilidad del Modelo de Error Fraccionario 1, que es el más simple de todos, utilizando técnicas conocidas. Para el caso escalar existía un resultado en la literatura (Diethelm, 2004) que aseguraba la estabilidad. Sin embargo, resultó imposible extender el análisis al caso vectorial, usando el mismo método, razón por la cual se comenzó a investigar sobre la existencia de funciones de Lyapunov aplicables para este análisis. Como resultado de este arduo trabajo teórico, se generaron los Lemas 3, 4, y 5 contenidos en esta Tesis, que permitieron demostrar analíticamente la estabilidad, no solo del Modelo de Error Fraccionario 1, sino además de casos particulares de los Modelos de Error Fraccionarios 2 y 3 y en todos los casos en el Modelo de Error Fraccionario 4. Es preciso señalar que estos lemas, además de permitir la demostración analítica de estabilidad de los modelos de error fraccionarios, tienen una aplicación mucho más amplia, pues permiten la utilización de funciones de Lyapunov cuadráticas en el análisis de estabilidad y convergencia de una gran variedad de sistemas fraccionarios, incluyendo sistemas fraccionarios no lineales, tal como puede apreciarse en el Lema 6 contenido en esta Tesis.

En paralelo a estos desarrollos de estabilidad, se trabajó en el análisis teórico sobre la convergencia de los errores en los modelos de error fraccionarios. En este punto, fue evidente que no era posible utilizar el Lema de Barbalat clásico para demostrar la convergencia del error de salida, como se hace en el caso entero, debido a particularidades de los operadores fraccionarios y de los modelos de error. Por lo tanto, se dirigieron los esfuerzos hacia la generación de un resultado equivalente al Lema de Barbalat para el caso fraccionario. Este resultó un trabajo extremadamente complejo, que aún continúa sin ser resuelto en su totalidad, pero en el cual se lograron avances que resultan fundamentales para la obtención del resultado en una etapa posterior. Así, se generó el Lema 8 contenido en esta Tesis, que puede ser considerado un primer paso hacia la obtención de un equivalente fraccionario del Lema de Barbalat. Aunque el Lema 8 no permitió demostrar la convergencia del error de salida en los modelos de error fraccionarios en general, sí se lograron resultados al respecto considerando casos particulares de las señales de entrada.

Como complemento a este trabajo de Tesis, se realizaron dos aplicaciones de controladores fraccionarios a sistemas reales, a nivel de simulaciones. La primera aplicación corresponde al control de voltaje de salida en un regulador automático de voltaje (en adelante AVR, por sus siglas en inglés (Automatic Voltage Regulator)), utilizando FOMRAC. Esta aplicación probó que efectivamente las leyes de ajuste fraccionarias pueden resultar en un mejor desempeño del sistema controlado frente a variaciones paramétricas del sistema, y con ellas se puede obtener un menor esfuerzo de control que con sus contrapartes enteras. Este trabajo, además, sentó un precedente importante en el diseño de estos controladores, pues los órdenes de derivación fraccionarios utilizados fueron optimizados en base a una función objetivo definida adecuadamente para el problema. Esta metodología fue exitosamente aplicada, y generó una respuesta certera a la pregunta que surgió al inicio de la investigación sobre ¿Cómo escoger el orden de derivación óptimo para las leyes de ajuste, ya que al ser fraccionario se tiene un rango de posibilidades para hacerlo?

Además de la aplicación al AVR, se realizó una segunda aplicación para el control de posición en un sistema de levitación magnética. En este caso se implementaron diferentes estrategias de control que incluyeron los operadores fraccionarios, y donde también se incluyeron procesos de optimización en el diseño para algunas de ellas. El objetivo fundamental de esta aplicación fue brindar una guía metodológica sobre cómo incluir los operadores fraccionarios en estrategias de control conocidas, ampliando así la gama de posibilidades de que se dispone actualmente para controlar los sistemas.

Todos los detalles del trabajo realizado y los resultados obtenidos que han sido mencionados, pueden encontrarse dentro del presente documento, de acuerdo a la siguiente organización. El Capítulo 2 contiene el análisis del estado del arte de los sistemas adaptables fraccionarios, así como de las herramientas de análisis de estabilidad existentes para sistemas de orden fraccionario, con las correspondientes conclusiones al respecto. Seguidamente, el Capítulo 3 presenta el marco teórico relacionado con el cálculo fraccionario, y el detalle de las herramientas para el análisis de estabilidad de los sistemas de orden fraccionario que se utilizan en este trabajo. Del mismo modo, presenta algunas propiedades y lemas que son utilizados con posterioridad en las demostraciones matemáticas contenidas en esta Tesis. El Capítulo 4 presenta una recopilación de los resultados matemáticos generales que fueron generados durante este trabajo investigativo, que se utilizan con posterioridad en el análisis de estabilidad de los modelos de error fraccionarios, pero que en sí mismos constituyen resultados relevantes de esta investigación, por su aplicabilidad a otros problemas en el ámbito del análisis de ecuaciones diferenciales fraccionarias. El Capítulo 5 presenta el análisis de los Modelos de Error Fraccionarios 1, 2, 3 y 4. Este análisis incluye los estudios por simulación y la presentación de los análisis teóricos de estabilidad y convergencia generados como parte del trabajo. El Capítulo 6 presenta la aplicación del FOMRAC al control de voltaje de salida de un AVR, así como la aplicación del control de posición para un sistema de

levitación magnética. Finalmente se presentan las conclusiones generales que se derivan de la investigación y el trabajo futuro que se advierte.

## 2 Estado del arte del diseño y análisis de esquemas adaptables fraccionarios

En la literatura técnica ya puede encontrarse una amplia gama de trabajos en los cuales se reportan esquemas adaptables de orden fraccionario, y éstos pueden agruparse en varios enfoques: control por modos deslizantes, realimentación de alta ganancia, FOMRAC y otras técnicas misceláneas de las cuales se encuentran uno o máximo dos trabajos en cada una. Este capítulo realiza un análisis detallado de estos trabajos, exponiendo tanto la estrategia de control en sí misma como la metodología que se utilizó para probar analíticamente la estabilidad del esquema, en los casos en que se reporta. Del mismo modo, al final del capítulo se establecen las conclusiones fundamentales que pueden extraerse del análisis de este conjunto de trabajos.

### 2.1. Estrategias de control por modo deslizante de orden fraccionario

El primer enfoque que puede encontrarse en la literatura técnica agrupa trabajos relacionados con control por modos deslizantes, en los cuales los operadores fraccionarios pueden aparecer tanto describiendo el sistema a controlar, como en la definición de la superficie deslizante o la señal de control que se propone.

Pueden citarse trabajos donde se trata con sistemas de orden fraccionario y la superficie deslizante se escoge incluyendo también operadores de orden fraccionario, como por ejemplo Yin et al. (2012a); Dadras & Momeni (2010); Jiang & Ma (2013); Li et al. (2013); Yang & Liu (2013). En estos casos, la selección de la superficie deslizante incluyendo operadores fraccionarios es lo que posibilita que se pueda probar la estabilidad mediante el método directo de Lyapunov. Para comprender mejor este hecho, mencionado reiteradamente en la literatura, se resumen a continuación los principales detalles del trabajo presentado en Yin et al. (2012a).

En Yin et al. (2012a) el sistema estudiado tiene la forma

$$\begin{aligned} {}^C D^{q_1} x &= y \cdot f(x, y, z) + z \cdot \phi(x, y, z) - \alpha x \\ {}^C D^{q_2} y &= g(x, y, z) - \beta y + u(t) \\ {}^C D^{q_3} z &= y \cdot h(x, y, z) - x \cdot \phi(x, y, z) - \gamma z, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde  $x, y, z \in \mathbb{R}$ ;  $f, g, h, \phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .  $u(t) \in \mathbb{R}$  es la señal de control que se añade para controlar el sistema fraccionario y  ${}^C D^q$  corresponde a la derivada de orden  $q$  según Caputo (Kilbas et al., 2006), cuya definición puede encontrarse en la Ecuación (3.2) del Capítulo 3. El objetivo de este esquema es estabilizar los estados del sistema (2.1).

De acuerdo a lo expuesto por los autores, este tipo de sistema describe una cantidad de sistemas caóticos de orden fraccionario como el de Chen, el de Lorenz y el de Liu, entre otros.

La superficie deslizante  $s(t)$  se define como

$$s(t) = {}^C D^{q_2-1} y(t) + \int_0^t \psi(\tau) d\tau, \quad (2.2)$$

donde la función  $\psi(t)$  está descrita por la siguiente ecuación

$$\psi(t) = x \cdot f(x, y, z) + z \cdot h(x, y, z) + \beta y. \quad (2.3)$$

Para encontrar la señal de control que garantiza convergencia hacia la superficie deslizante, utilizan el método directo de Lyapunov. Para ello proponen la función de Lyapunov candidata, positiva definida

$$V_{SMC} = s^2(t). \quad (2.4)$$

Al calcular la derivada  $\dot{V}_{SMC}$  resulta que:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{SMC} &= 2s(t) \dot{s}(t) \\ &= 2s(t) [D^{q_2} y(t) + x \cdot f(x, y, z) + z \cdot h(x, y, z) + \beta y] \\ &= 2s(t) [g(x, y, z) + u(t) + x \cdot f(x, y, z) + z \cdot h(x, y, z)]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

De este modo, seleccionando la señal de control  $u(t)$  de la forma

$$u(t) = -g(x, y, z) - x \cdot f(x, y, z) - z \cdot h(x, y, z) - K \operatorname{sgn}(s), \quad (2.6)$$

donde  $\operatorname{sgn}(s) = \begin{cases} 1 & s > 0 \\ 0 & s = 0 \\ -1 & s < 0 \end{cases}$  y  $K$  es la ganancia del controlador, resulta que la derivada de la función de Lyapunov queda de la forma

$$\dot{V}_{SMC} = -2K |s|. \quad (2.7)$$

Dado que  $\dot{V}_{SMC}$  es negativa definida, se garantiza la convergencia hacia la superficie deslizante cuando la trayectoria comienza fuera de ella. Como se aprecia, la forma en que se ha definido la superficie deslizante en (2.2) resulta en que aparece la derivada fraccionaria de la segunda variable de estado  $y(t)$  en la expresión (2.5), que puede por tanto sustituirse por la ecuación de estado correspondiente, no representando así un obstáculo al momento de realizar la demostración de estabilidad.

Otra forma de abordar el problema, diferente a la planteada anteriormente, es considerar la superficie deslizante sin operadores fraccionarios incluidos, pero en cambio éstos aparecerán en la definición de la señal de control resultante como única forma de garantizar la convergencia hacia la superficie, usando el método directo de Lyapunov clásico. Puede citarse en este caso el trabajo reportado en Xiaomei et al. (2013).

Se reportan otros trabajos similares donde la complejidad del problema aumenta, al considerarse que existe incertidumbre en el sistema a controlar. Para tratar con esta incertidumbre, se considera que ésta es acotada y con cota conocida, pues así puede incluirse esta cota en el

diseño de la estrategia de control y garantizar la convergencia hacia la superficie deslizante. En este caso, pueden encontrarse trabajos donde los operadores fraccionarios aparecen en el diseño de la superficie deslizante (Dadras & Momeni, 2012; Aghababa, 2011b; Yin et al., 2013), y otros donde no se incluyen en ésta, pero en cambio ellos aparecen en la señal de control resultante (Hosseinnia et al., 2010). Para el diseño de la señal de control que garantiza la convergencia hacia la superficie deslizante, estos trabajos utilizan el método directo de Lyapunov clásico. Para facilitar la comprensión de la introducción de la cota para la incertidumbre en el análisis de estabilidad, se presenta a continuación una breve explicación de los resultados presentados en Aghababa (2011b).

En el trabajo Aghababa (2011b) el autor propone un esquema de control por modo deslizante fraccionario, para la estabilización y sincronización de una clase de sistemas caóticos de orden fraccionario. Considera un sistema esclavo de la forma

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha x_i &= x_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ {}^C D^\alpha x_n &= f(x, t) + \Delta f(x, t) + u(t), \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $x(t) = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $f(x, t) \in \mathbb{R}$  es una función no lineal dada y conocida,  $\Delta f(x, t) \in \mathbb{R}$  representa la incertidumbre propia del sistema y la incertidumbre debido a una perturbación externa al sistema, que se supone desconocida, y  $u(t) \in \mathbb{R}$  es la señal de control.

El sistema maestro tiene la forma

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha y_i &= y_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ {}^C D^\alpha y_n &= g(y, t) + \Delta g(y, t), \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde  $y(t) = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $g(y, t) \in \mathbb{R}$  es una función no lineal dada y conocida.  $\Delta g(y, t) \in \mathbb{R}$  representa la incertidumbre propia del sistema y la incertidumbre debido a una perturbación externa al sistema, que se supone desconocida.

No obstante, los términos de incertidumbre se suponen acotados satisfaciendo

$$|\Delta f(x, t)| \leq \gamma_1 \quad |\Delta g(y, t)| \leq \gamma_2,$$

donde  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son dos constantes positivas y conocidas. Definiendo el error de sincronización como  $e(t) = y(t) - x(t)$ , entonces la dinámica del error queda definida como

$$\begin{cases} D^\alpha e_i = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1 \\ D^\alpha e_n = g(y, t) + \Delta g(y, t) - f(x, t) - \Delta f(x, t) - u(t). \end{cases} \quad (2.10)$$

Nuevamente en este artículo se propone una superficie deslizante que incluye un operador fraccionario. La superficie deslizante está dada por la expresión

$$s(t) = {}^C D^{\alpha-1} e_n + \int_0^t \left( \sum_{i=1}^n c_i e_i \right) d\tau, \quad (2.11)$$

donde  $e_i, i = 1, 2, \dots, n$  son los errores de estado y  $c_i, i = 1, 2, \dots, n$  son parámetros de la superficie deslizante, que se escogen para garantizar que  $\dot{s}(t) = 0$ . Para garantizar la convergencia

hacia la superficie deslizante, el autor utiliza el método directo de Lyapunov clásico, proponiendo una función de Lyapunov candidata definida positiva de la forma

$$V = |s(t)|. \quad (2.12)$$

Al calcular su primera derivada resulta

$$\dot{V} = \text{sgn}(s) \dot{s} = \text{sgn}(s) \left[ g(y, t) + \Delta g(y, t) - f(x, t) - \Delta f(x, t) - u(t) + \sum_{i=1}^n c_i e_i \right], \quad (2.13)$$

e introduciendo las cotas conocidas para los términos de incertidumbre se puede escribir

$$\dot{V} \leq \text{sgn}(s) \dot{s} = \text{sgn}(s) \left[ g(y, t) + \gamma_2 \text{sgn}(s) - f(x, t) - \gamma_1 \text{sgn}(s) - u(t) + \sum_{i=1}^n c_i e_i \right]. \quad (2.14)$$

Luego escogiendo la señal de control de la forma

$$u(t) = -f(x, t) + g(y, t) + \sum_{i=1}^n c_i e_i + K_1 s + (K_1 + \gamma_1 + \gamma_2) \text{sgn}(s), \quad (2.15)$$

donde  $K_1$  es una constante positiva, resulta que

$$\dot{V} \leq -K_1 |s|. \quad (2.16)$$

O sea, la derivada de la función de Lyapunov  $\dot{V}$  es definida negativa, garantizando así la convergencia hacia la superficie deslizante. A través de estudios por simulación muestran la efectividad del método, demostrando buen desempeño en presencia de incertidumbre en el modelo y frente a perturbaciones externas. Como se aprecia, el conocimiento de las cotas de la incertidumbre es esencial para probar analíticamente la estabilidad y convergencia hacia la superficie deslizante, y la introducción del operador fraccionario en la superficie deslizante es lo que hace posible aplicar el método directo de Lyapunov clásico.

Es preciso hacer notar que se reporta un trabajo donde también el sistema es de orden fraccionario, con incertidumbre de cotas conocidas, pero en el cual se aplica la extensión fraccionaria del método directo de Lyapunov para analizar la estabilidad y convergencia hacia la superficie deslizante (Yin et al., 2013). Por las peculiaridades que tiene este desarrollo, se exponen a continuación las características principales del trabajo.

En Yin et al. (2013), los autores abordan el problema de estabilizar un sistema de orden fraccionario de la forma

$${}^R D^\beta x(t) = A(t)x(t) + f(x, t) + Bu(t), \quad (2.17)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entradas,  $f(x, t) \in \mathbb{R}^n$  contiene las no linealidades del sistema,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  es conocida,  ${}^R D^\beta$  corresponde a la derivada fraccionaria de orden  $\beta$  según Riemann-Liouville (Kilbas et al., 2006), y  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  contiene la incertidumbre del sistema, de forma tal que se cumple

$$\begin{aligned} A(t) &= A + \delta A_-(t), & A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ conocida}, & A_- \in \mathbb{R}^{n \times n}, \delta \in \mathbb{R} \\ \delta A_-(t) &= DF(t)N, & D, N \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ conocidas}, & F(t) \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ \|F(t)\| &\leq 1, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$



Así, los autores definen la superficie deslizante como

$$s = C_1 x(t) + C_2 z(t), \quad (2.19)$$

donde la función  $z(t) \in \mathbb{R}^n$  se actualiza en el tiempo a través de la ecuación

$${}^R D^\beta z(t) = Kx(t) - z(t),$$

y  $C_1, C_2, K \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices constantes que se seleccionan como parte del diseño.

Para encontrar una señal de control que garantice convergencia hacia la superficie deslizante, los autores utilizan la extensión fraccionaria del método directo de Lyapunov, proponiendo la función de Lyapunov candidata

$$V = s^T(t) s(t). \quad (2.20)$$

Al calcular la derivada fraccionaria, utilizan la regla de Leibniz generalizada, cuya definición se encuentra en la Ecuación (3.10) del Capítulo 3, de modo que resulta

$${}^R D^\beta V = \left( {}^R D^\beta s \right)^T s + s^T \left( {}^R D^\beta s \right) + 2\Upsilon, \quad (2.21)$$

$$\text{donde } \Upsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\beta) (D^k x)^T ({}^R D^{\beta-k} x)}{\Gamma(1-k+\beta) \Gamma(1+\beta)}.$$

Como puede apreciarse, aparece una dificultad en el desarrollo al surgir una sumatoria infinita de términos que contienen derivadas enteras y fraccionarias de orden superior. Para tratar con esta dificultad, los autores demuestran que existe un  $b_1 > 0, b_1 \in \mathbb{R}$  tal que se cumple que

$$|\Upsilon| \leq b_1 \|x\|, \quad \text{con } b_1 = \frac{\Gamma(1+\beta) m k_{max} h}{l_{min}}, \quad (2.22)$$

donde  $m, k_{max}, h, l_{min} \in \mathbb{R}$ ,  $\Gamma(\cdot)$  corresponde a la función Gamma (Kilbas et al., 2006), y se cumplen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} 0 \leq l_{min} &\leq |\Gamma(1-\beta+k)|, \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(1+k)} &< h \\ \|I^{k-\beta} x\| &\leq k_{max}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ \|D^k x\| &\leq m, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.23)$$

Así, suponiendo conocidas todas las cotas en (2.23), lo cual implica que se conoce  $b_1$ , la derivada fraccionaria de la función de Lyapunov resulta

$$\begin{aligned} {}^R D^\beta V &= [C_1(A + \delta A_-)x + C_1 f(x, t) + C_1 B u + C_2 K x - C_2 z]^T s + \\ &+ s^T [C_1(A + \delta A_-)x + C_1 f(x, t) + C_1 B u + C_2 K x - C_2 z] + 2\Upsilon. \end{aligned} \quad (2.24)$$

De esta manera, al seleccionar una señal de control de la forma

$$\begin{aligned} u(t) &= -C_1 B^{-1} [(C_1 A + C_2 K + C_1)x + C_1 f(x, t) + \omega_1 - s] \\ \text{donde } \omega_1 &= \text{sgn}(s) [\|C_1 D\| \|Nx\| + B_1 + 1], \end{aligned} \quad (2.25)$$

entonces puede escribirse

$${}^R D^\beta V \leq -2s^T(t) \text{sgn}(s(t)). \quad (2.26)$$

Luego al ser la derivada fraccionaria de la función de Lyapunov negativa definida, se garantiza la convergencia hacia la superficie deslizante.

Como ha podido apreciarse, para poder aplicar la extensión fraccionaria del método directo de Lyapunov ha sido preciso conocer la cota  $b_1$  sobre la sumatoria infinita, la cual ha sido utilizada en la definición de la señal de control (2.25). Esta metodología, si bien es matemáticamente válida, es muy restrictiva, pues necesita conocer una cota para todos los valores de las derivadas enteras y fraccionarias de orden superior de la función. Esta metodología no es extensible al análisis de los modelos de error, donde se trata con señales desconocidas y por lo tanto no es posible conocer estas cotas.

Además de los trabajos ya mencionados, puede encontrarse en la literatura técnica otros trabajos donde también se reporta control por modo deslizante fraccionario para sistemas de orden fraccionario, pero en estos casos hay desconocimiento de las cotas de la incertidumbre y/o de los parámetros del sistema a controlar. En estos casos, los parámetros desconocidos se estiman dentro del esquema de control.

Puede mencionarse el trabajo reportado en Ling et al. (2011), donde se desconoce la cota superior de la incertidumbre del sistema y ésta se estima a través de un esquema basado en lógica difusa. En este caso, los autores exponen estudios por simulación que muestran la efectividad de la metodología frente a perturbaciones. Además muestran que cuando se reduce el orden de derivación fraccionario se observa una reducción del caos, así como también del efecto chattering en el esfuerzo de control. En el trabajo reportado en Wang et al. (2012), también se desconoce la cota superior de la incertidumbre del sistema, y en este caso se estima mediante una ley de ajuste entera. Tanto en Ling et al. (2011) como en Wang et al. (2012), para la implementación de la estrategia de control se usa una superficie deslizante que incluye operadores fraccionarios, y se demuestra la convergencia hacia la superficie utilizando el método directo de Lyapunov clásico.

También puede mencionarse el trabajo reportado en Luo & Liu (2014), donde en este caso se desconocen los parámetros del sistema a controlar y para estimarlos se utiliza un esquema basado en lógica difusa. En este caso, la estrategia de control por modo deslizante utiliza operadores fraccionarios en la definición de la superficie deslizante, y para demostrar la convergencia hacia la superficie utilizan la extensión fraccionaria del método directo de Lyapunov, suponiendo también cotas conocidas sobre la sumatoria infinita que aparece al derivar la función cuadrática, tal como se realizó en Yin et al. (2013).

En el trabajo reportado en Yin et al. (2012b), por su parte, se desconocen tanto los parámetros del sistema, como las cotas de la incertidumbre y las cotas de las perturbaciones que afectan al sistema. Para enfrentar este desconocimiento, se utilizan leyes de ajuste enteras para estimar los parámetros desconocidos. En este caso, la superficie deslizante contiene operadores fraccionarios, lo cual hace que el análisis de estabilidad y convergencia hacia la superficie deslizante pueda realizarse sin dificultad a través del método directo de Lyapunov clásico. En este caso, también se incluyen en el análisis de estabilidad las leyes de ajuste de los parámetros desconocidos, que tampoco dificultan el análisis al ser de orden entero.

## **2.2. Estrategias de control por realimentación de alta ganancia**

Un segundo grupo de trabajos reportados en la literatura sobre esquemas adaptables fraccionarios, son los que tratan el control adaptable por realimentación de alta ganancia, ya sea de la

salida o realimentación de los estados del sistema. En estos casos, los operadores fraccionarios aparecen como parte de las leyes de ajuste y/o describiendo el sistema a controlar.

Puede mencionarse por ejemplo los trabajos reportados en Ladaci et al. (2008); Figuigui & Elalami (2009) y Assabaa et al. (2013), donde se realiza estabilización de un sistema entero lineal, de una entrada y una salida (en adelante SISO, por sus siglas en inglés (Single Input Single Output)), invariante en el tiempo, de fase mínima y de grado relativo 1; y el trabajo reportado en Charef et al. (2013a), donde para el mismo tipo de sistema se desea hacer seguimiento de una referencia  $r(t)$ . Para lograr la estabilización se utiliza una realimentación de alta ganancia de la salida y para el problema de seguimiento se realimenta el error de control. En ambos casos la ganancia se ajusta a través de una ley de ajuste de orden fraccionario.

Básicamente, consideran un sistema SISO descrito por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= c^T x(t),\end{aligned}\tag{2.27}$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el estado con  $n$  desconocido,  $u(t) \in \mathbb{R}$  es la señal de control e  $y(t) \in \mathbb{R}$  es la salida medida;  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  son desconocidos. Se supone lo siguiente:

- El par  $(A, b)$  es controlable y el par  $(c^T, A)$  es observable.
- El sistema es de fase mínima, grado relativo 1 y ganancia de alta frecuencia positiva.

En Ladaci et al. (2008), los autores proponen una ley de control de la forma

$$\begin{aligned}u(t) &= -\hat{k}(t)y(t) \\ {}^C D^\alpha \hat{k}(t) &= \gamma y^2(t),\end{aligned}\tag{2.28}$$

donde  $\hat{k}(t) \in \mathbb{R}$  es el parámetro adaptable,  $\alpha \in \mathbb{R}$  con  $\alpha \in (0, 2)$  y  $\gamma \in \mathbb{R}$  es una constante positiva que juega el rol de una ganancia adaptiva. Así el sistema controlado resultante tiene la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \tilde{A}(\hat{k})x(t) \\ {}^C D^\alpha \hat{k}(t) &= \gamma (c^T x(t))^2,\end{aligned}\tag{2.29}$$

con  $\tilde{A}(\hat{k}) \triangleq A - \hat{k}(t)bc^T$ .

Los autores entonces presentan y demuestran un teorema, el cual plantea que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  y  $\hat{k}(\cdot)$  es acotado. La demostración de estabilidad se realiza a través del análisis matemático detallado de las ecuaciones del sistema y algunas propiedades de los operadores fraccionarios, apoyado por las condiciones que se impusieron sobre la planta. A través de simulaciones muestran que este esquema incrementa la robustez del sistema ante ruidos y perturbaciones, con respecto al esquema tradicional donde el ajuste de la ganancia se realiza a través de una ecuación diferencial entera. También muestran como en el caso fraccionario la respuesta transitoria es mucho más suave que en el caso entero, y que el parámetro  $\gamma$  en el caso fraccionario puede ser mucho menor que en el caso entero. Plantean además que el orden de derivación  $\alpha$  puede ser considerado como un parámetro de ajuste adicional, que puede ser utilizado para mejorar el comportamiento del sistema.

En Figuigui & Elalami (2009), los autores aplican el método propuesto en Ladaci et al. (2008) para estabilizar la altitud de un satélite LEO (Low Earth Orbit, sus siglas en inglés). En Assabaa

et al. (2013), por su parte, tratan el mismo problema que en Ladaci et al. (2008), con la diferencia que en este caso utilizan una ley de ajuste diferente para la ganancia de alta frecuencia, dada por

$${}^C D^\alpha \hat{k}(t) = -\sigma \hat{k}(t) + y^2(t), \quad (2.30)$$

donde  $\sigma > 0$ . En este caso, sin embargo, los autores no plantean una demostración para la estabilidad del esquema en lazo cerrado.

En el caso del trabajo reportado en Charef et al. (2013a), donde se realiza seguimiento de una referencia, se define el error de control como la diferencia entre la salida de la planta y la referencia, de la forma  $e(t) = y(t) - r(t)$ , para luego utilizar una señal de control de la forma

$$\begin{aligned} u(t) &= -k(t) e(t) \\ \dot{k}(t) &= \gamma_1 e^2(t) + \gamma_2 {}^C D^\alpha e^2(t). \end{aligned} \quad (2.31)$$

En este caso, la ley de ajuste es de orden entero, pero incluye el operador fraccionario a través de la derivada de orden  $\alpha$  del error cuadrático, y el análisis de estabilidad se realiza a través de un análisis detallado de las ecuaciones del sistema, lo cual hace imposible generalizarlo al caso de otros esquemas adaptables o a los modelos de error fraccionarios.

También se reporta un grupo de trabajos en los cuales se realiza estabilización de un sistema no lineal de orden fraccionario (Chun-Lai et al., 2012; Ruo-Xun & Shi-Ping, 2012), o bien se desea resolver un problema de seguimiento también para un sistema no lineal de orden fraccionario (Liu et al., 2013; Xi et al., 2014; Yang & Jiang, 2014). En todos los casos, se utiliza una señal de control que realimenta parcial o totalmente el estado y cuya ganancia se ajusta utilizando operadores fraccionarios.

Así, en el caso del trabajo en Chun-Lai et al. (2012), el sistema a estabilizar está descrito por

$${}^C D^\alpha x(t) = f(x) + u(t), \quad \alpha \in (0, 1], \quad (2.32)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados, el vector de funciones  $f(x) \in \mathbb{R}^n$  es Lipschitz (Podlubny, 1999) y  $u(t) \in \mathbb{R}^n$ . De este modo, utilizan una señal de control que realiza una realimentación de todo el estado, o sea en la forma

$$\begin{aligned} u_i(t) &= -\rho_i(t) x_i(t) \\ {}^C D^\alpha \rho_i(t) &= \eta x_i^2(t), \quad \eta_i > 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Es preciso mencionar que en este trabajo realizan un análisis de estabilidad del sistema, pero en opinión de esta investigadora, dicho análisis no sería válido. Básicamente los autores escriben el vector  $f(x)$  como  $f(x) = A(x)x$ , y luego aplican el criterio de estabilidad de sistemas fraccionarios lineales e invariantes en el tiempo (en adelante LTI, por sus siglas en inglés (Linear Time Invariant)) presentado en Matignon (1994) a la matriz  $A(x)$ . Este procedimiento es incorrecto, porque el criterio propuesto en Matignon (1994) es válido solamente para aquellos casos en que la matriz  $A$  es constante.

El trabajo reportado en Ruo-Xun & Shi-Ping (2012), por su parte, realiza la estabilización utilizando una señal de control que realimenta solamente uno de los estados del sistema. No obstante, en este caso el sistema a controlar es menos general, pues tiene tres variables de estado y está dado por

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha x(t) &= f_1(x, z) \\ {}^C D^\alpha z(t) &= f_2(x, z) + u, \end{aligned} \quad (2.34)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^2$ ,  $z(t) \in \mathbb{R}$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}$  y el origen  $x = 0$  del subsistema  ${}^C D^\alpha x(t) = f_1(x, 0)$  es asintóticamente estable. Bajo estas condiciones, la señal de control propuesta en el trabajo está dada por

$$\begin{aligned} u(t) &= -k(t) s(t) \\ {}^C D^{1-\alpha} s(t) &= z(t) \\ \dot{k}(t) &= \theta s^2(t), \theta > 0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

En este caso, debido a la definición de la señal de control en conjunto con las leyes de ajuste, donde aparece convenientemente la derivada fraccionaria  ${}^C D^{1-\alpha} s$ , entonces puede aplicarse el método directo de Lyapunov clásico para probar la estabilidad y convergencia.

En el caso del trabajo reportado en Liu et al. (2013), se desea que los estados converjan a un vector de referencia dado. Para ello, se realiza el seguimiento a través de una realimentación parcial del error, donde las ganancias se ajustan a través de ecuaciones diferenciales fraccionarias. En este trabajo se utiliza la misma metodología propuesta en Chun-Lai et al. (2012) para probar la estabilidad del esquema, la cual, como ya se mencionó, se considera incorrecta. En el trabajo reportado en Yang & Jiang (2014), por su parte, lo que se desea es sincronizar dos sistemas fraccionarios, y en este caso utilizan una realimentación de todo el vector de error de estado, pero la señal de control contiene además términos no lineales presentes en el sistema y que se consideran conocidos. En este caso, se realiza el análisis de estabilidad también de forma errónea, similar al caso ya comentado en Chun-Lai et al. (2012) y Liu et al. (2013).

En el caso del trabajo presentado en Xi et al. (2014) se tiene una aplicación peculiar, pues se desea que un sistema entero se sincronice con uno de orden fraccionario. El sistema maestro es de orden fraccionario y está dado por

$${}^C D^\alpha x(t) = Ax(t) + \phi(x(t)), \quad (2.36)$$

donde  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un vector de funciones no lineales, que se consideran Lipschitz (Podlubny, 1999) pero que su constante de Lipschitz  $L$  es desconocida.

Por su parte, el sistema esclavo está descrito por

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + \phi(y(t)) + u, \quad (2.37)$$

donde  $y \in \mathbb{R}^n$  y la señal  $u = u_-(t, x, y) + N(x) \in \mathbb{R}^n$ . En este caso los autores, para abordar el problema, definen  $N(x) = \dot{x}(t) - {}^C D^\alpha x(t) \in \mathbb{R}^n$ , de modo que al definir el error como  $e(t) = y(t) - x(t) \in \mathbb{R}^n$ , se obtiene una dinámica para el error de orden entero, como se muestra a continuación.

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + \phi(e(t)) + u_-. \quad (2.38)$$

De este modo, han transformado su problema a uno conocido donde deben manejar dinámica entera, y por lo tanto proponen una señal de control  $u_-(x, y, t) \in \mathbb{R}^n$  de la forma

$$\begin{aligned} u_-(x, y, t) &= -(\beta + \bar{L}(t)) e(t), \quad \beta > 0, \bar{L} \in \mathbb{R} \\ \text{con } \dot{\bar{L}}(t) &= \gamma \|e(t)\|^2, \quad \gamma > 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Como puede apreciarse, la señal de control  $u_-(x, y, t)$  incluye un parámetro  $\bar{L}(t)$  que se ajusta en el tiempo, correspondiente en este caso a la estimación de la constante de Lipschitz del vector de funciones  $\phi$ . Como la dinámica del error resulta entera, los autores aplican el método

directo de Lyapunov clásico y así demuestran la estabilidad del esquema y la convergencia del error a cero.

Finalmente mencionar el trabajo reportado en Lan et al. (2014), donde se implementa un control por realimentación de estados para un sistema con incertidumbre. Si bien en este caso la ganancia utilizada no se ajusta en el tiempo, lo que se quiere resaltar de este trabajo es que utilizan un observador de estado fraccionario del tipo Luenberger, para estimar los estados que usan en el control. Los autores, para demostrar la convergencia del esquema observador, utilizan la representación difusiva, teoría que permite transformar las ecuaciones diferenciales fraccionarias a sistemas enteros en derivadas parciales, de dimensión infinita. De este modo, aplican el método directo de Lyapunov clásico para concluir sobre la estabilidad y convergencia. No obstante, aunque la teoría de la representación difusiva está ampliamente desarrollada, en la opinión de esta investigadora, hay algunos puntos que no están lo suficientemente claros cuando ésta se utiliza para representar ecuaciones diferenciales de orden fraccionario; como por ejemplo el manejo de las condiciones iniciales dentro de la transformación de una ecuación diferencial fraccionaria a su representación difusiva equivalente. Esto hace que la metodología posterior donde se usa el método directo de Lyapunov clásico, tampoco esté lo suficientemente clara en cuanto a su aplicabilidad en este caso.

### **2.3. Estrategias de control adaptable por referencia a modelo de orden fraccionario**

Un tercer grupo de trabajos que puede identificarse dentro de la literatura técnica corresponde a aquellos en los cuales se utiliza FOMRAC. Entre ellos pueden encontrarse esquemas donde los operadores fraccionarios aparecen en el sistema a controlar, en el modelo de referencia, en las leyes de ajuste, o en una combinación de ellos.

Podemos referirnos a un conjunto de trabajos donde el sistema a controlar es entero, el modelo de referencia también es de orden entero y las leyes de ajuste que se utilizan son de orden fraccionario. Dentro de este grupo puede citarse Suárez et al. (2008); Vinagre et al. (2002); YaLi & RuiKun (2010); Petrás (2013); Sawai et al. (2012) y Aguila-Camacho & Duarte-Mermoud (2013). En ninguno de estos casos se reporta análisis de estabilidad del esquema controlado. Sin embargo sí se reportan ventajas de los esquemas propuestos, obtenidas mediante simulaciones, algunas de las cuales se detallan a continuación.

En el trabajo de Suárez et al. (2008), los autores proponen un esquema adaptable fraccionario para el control lateral de un vehículo autónomo guiado. El objetivo del esquema propuesto es ajustar la ganancia feedforward  $\theta$  al valor de  $\theta^0$  del modelo de referencia, y para ello utilizan una ley de ajuste fraccionaria. De manera general el sistema está representado en el diagrama de la Figura 2.1.

El esquema fue analizado mediante simulaciones y demostró un buen desempeño frente a incertidumbre del modelo y ante perturbaciones, mejor que el esquema clásico existente, en el cual el ajuste de la ganancia feedforward se realiza mediante una ley de ajuste entera. Los autores destacan que al utilizar una ley de ajuste fraccionaria se puede variar la velocidad de cambio del mecanismo de adaptación, sin cambiar la ganancia adaptativa.

En el caso del trabajo reportado en Vinagre et al. (2002), los autores plantean que obtienen mayor rapidez de convergencia de los parámetros utilizando un orden de derivación mayor que

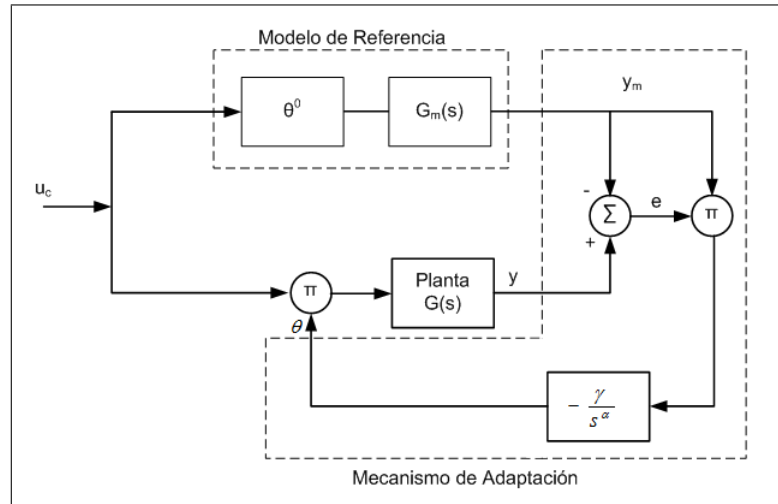


Figura 2.1: Esquema de control por referencia a modelo con realimentación fraccionaria de la salida.

1 en la ley de ajuste. También plantean que la posibilidad de seleccionar órdenes de derivación menores que 1, puede permitir la utilización de ganancias adaptativas mayores que las que se utilizan con leyes de ajuste enteras, de modo que se obtenga una velocidad de convergencia mayor y la respuesta transitoria no se deteriore.

En el caso del esquema FOMRAC que se presenta en YaLi & RuiKun (2010), éste corresponde al control de temperatura del sistema de calentamiento de una caldera, y se reportan simulaciones a través de Matlab/Simulink. Para esta aplicación, los resultados de las simulaciones muestran que el esquema es más efectivo que el tradicional controlador Proporcional Integral Derivativo (en adelante PID), que se había utilizado hasta ese momento.

En Aguila-Camacho & Duarte-Mermoud (2013), donde se reportan resultados generados durante el desarrollo de este trabajo de Tesis Doctoral, se presenta el control de voltaje en un AVR. En este caso, se utilizan leyes de ajuste de orden fraccionario, cuyos órdenes de derivación y ganancias adaptativas se escogen mediante un proceso de optimización usando algoritmos genéticos, que minimiza una función criterio. En este trabajo se reporta un mejor desempeño del sistema controlado ante variaciones paramétricas y un menor esfuerzo de control al utilizar el FOMRAC, comparado con el caso en que se usa el control adaptable por referencia a modelo clásico (en adelante MRAC, por sus siglas en inglés (Model Reference Adaptive Control)).

También pueden encontrarse trabajos que abordan el problema de FOMRAC para un sistema de orden entero, donde se utiliza un modelo de referencia fraccionario y las leyes de ajuste son de orden entero. En este caso podemos mencionar los trabajos de Ladaci & Charef (2006) y Ma et al. (2009). En ellos tampoco se reporta el análisis de estabilidad para ninguno de los dos casos, aunque sí se reportan beneficios observados al aplicar el esquema de control. Por ejemplo en el caso del trabajo de Ladaci & Charef (2006), los autores presentan un esquema de control adaptable por modelo de referencia para una planta entera, en el cual introducen un modelo de referencia fraccionario y definen el error de salida como  $e(t) = {}^C D^\alpha y_p(t) - y_m(t)$ , donde  $y_p$  e  $y_m$  son la salida de la planta entera y la salida del modelo de referencia fraccionario respectivamente, y  $\alpha \in (0, 1)$ . La ley de ajuste que utilizan está dada por una ecuación diferencial de orden entero. La planta analizada es un sistema SISO desconocido, pero para el cual se conoce su grado relativo

$n$ . El modelo de referencia fraccionario que se ocupa es de segundo orden y tiene la forma

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\xi\frac{s}{\omega_n} + 1\right)^m}, \quad (2.40)$$

donde  $m \neq 1$ ,  $m < 1$ , lo que implica que el modelo es de orden fraccionario. Los autores demuestran, utilizando aproximaciones del modelo de referencia y de la planta cuando los valores de ganancia son altas, que para poder compararlos debe cumplirse que el orden para la derivada fraccionaria de la salida debe ser

$$\alpha = n - 2m. \quad (2.41)$$

donde  $n$  es el grado relativo de la planta a controlar.

A través de simulaciones, los autores muestran que la estabilidad del sistema en lazo cerrado se mantiene. Además comprobaron que cuando la planta es de primer orden, para valores pequeños de  $m$ , ( $m \ll 0.5$ ) resulta que  $\alpha$  se acerca a 1 y el rechazo a las perturbaciones es muy malo. Sin embargo, cuando  $m$  se acerca a 0.5, lo cual implica que  $\alpha$  se aleja de 1, pero permanece en el rango  $\alpha \in (0, 1)$ , se alcanza un efectivo nivel de rechazo a las perturbaciones, debido a que la derivada fraccionaria depende de la historia pasada de la señal, lo cual modera los efectos de las variaciones pasadas, demostrándose con este esquema una mejor estabilidad dinámica y robustez ante perturbaciones que en el caso del esquema clásico.

Del mismo modo en Ma et al. (2009) los autores proponen un esquema FOMRAC para el control de un servosistema hidráulico en un simulador de movimiento de vuelo. A través de estudios por simulación muestran que con el esquema fraccionario, el sobrepaso en la respuesta transitoria del error es menor y con menos oscilaciones que en el caso que se usa MRAC clásico, lo cual es fundamental para esta aplicación.

De igual manera, pueden mencionarse los trabajos reportados en Ladaci et al. (2006) y Vinagre et al. (2002), donde el sistema a controlar es de orden entero, y en este caso tanto el modelo de referencia como las leyes de ajuste utilizadas son de orden fraccionario. En estos casos tampoco se presenta un análisis de estabilidad del sistema controlado, aunque sí se reportan los beneficios obtenidos. Por ejemplo en Vinagre et al. (2002), la utilización de la ley de ajuste fraccionaria permite que el seguimiento de la salida del modelo de referencia por parte de la salida de la planta, sea mucho más exacto. En el caso de Ladaci et al. (2006), donde la planta estudiada está afecta a perturbaciones acotadas, se obtiene una mayor robustez ante las perturbaciones que en el caso clásico, donde tanto el modelo de referencia como la ley de ajuste son enteros.

Finalmente, mencionar el trabajo reportado en Shi et al. (2014), donde la planta, el modelo de referencia y las leyes de ajuste son de orden fraccionario. En este caso, es destacable el hecho de que las leyes de ajuste son de órdenes diferentes a los de la planta y el modelo de referencia, lo cual dificulta en gran medida el análisis de estabilidad. No obstante, en este caso los autores utilizan la representación difusiva en conjunto con el método directo de Lyapunov clásico para demostrar estabilidad, aunque como ya se mencionó en la sección anterior, hay algunos aspectos de esta metodología que se considera que no están lo suficientemente claros aún.



## 2.4. Estrategias misceláneas de control adaptable de orden fraccionario

En la literatura técnica aparecen reportados otros esquemas adaptables fraccionarios que no corresponden a esquemas de control por modo deslizante, realimentación de alta ganancia o FOMRAC.

Entre ellos puede mencionarse por ejemplo el trabajo reportado en Li et al. (2008), en el cual los autores estudian la estabilidad asintótica de dos sistemas escalares fraccionarios, utilizando el método de estabilización adaptable universal. Un sistema tiene dinámica fraccionaria con estrategia de control de orden entero y el segundo sistema tiene dinámica fraccionaria con estrategia de control fraccionaria.

La estabilización adaptable universal es un caso especial de control adaptable, propuesta y estudiada para sistemas con representación en el espacio de estado. En el primer caso, que corresponde a un sistema de dinámica fraccionaria y estrategia de control entera, se tiene el sistema de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \\ y(t) = {}^C D^\alpha x(t), \quad x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.42)$$

y usan una estrategia de control de la forma

$$\begin{cases} u(t) = -N(k(t))x(t) \\ \dot{k}(t) = x^2(t), \quad k(0) \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.43)$$

donde  $a, b, x_0 \in \mathbb{R}$  son desconocidos,  $\alpha \in (0, 1)$  y  $N(\cdot)$  es una función de Nussbaun (Narendra & Annaswamy, 2005) arbitraria. De este modo, el sistema en lazo cerrado resulta:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [a - bN(k(t))]x(t), \quad x(0) = x_0 \\ \dot{k}(t) = x^2(t), \quad k(0) \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.44)$$

En el trabajo los autores demuestran que  $k(t)$  es acotada y que  $x(t), \dot{x}(t) \in \mathcal{L}^2(0, \infty)$ .

Esta demostración no la realizan basado en ninguna metodología específica sino analizando directamente las ecuaciones. No obstante que el sistema tiene la salida definida como una realimentación de la derivada fraccionaria del estado (2.42), lo cual lo hace un sistema fraccionario, en el análisis de estabilidad se estudia el sistema en lazo cerrado (2.44), que resulta tener solamente derivadas enteras.

En el segundo caso, cuando usan un sistema con dinámica fraccionaria y estrategia de control fraccionaria, el sistema tiene la forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_1 x(t) + a_2 {}^C D^\alpha x(t) + bu(t) \\ y(t) = cx(t), \quad x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.45)$$

con la estrategia de control fraccionaria

$$\begin{cases} u(t) = -N(k(t))y(t) + a_3 {}^C D^\alpha y(t) \\ \dot{k}(t) = x^2(t), \quad k(0) \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.46)$$

donde  $a_1, a_2, b, c, x_0 \in \mathbb{R}$  son desconocidos, tales que  $(a_2 \operatorname{sgn}(c) + cba_3)y(0) \leq 0$ ,  $N(k)$  es una función de Nussbaun arbitraria,  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  denota la función signo y  $\alpha \in (0, 1)$ . De este modo, el

sistema en lazo cerrado resulta:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [a_1 - cbN(k(t))]y(t) + (a_2 \operatorname{sgn}(c) + cba_3)^C D^\alpha y(t) \\ \dot{k}(t) = y^2(t), \quad k(0) \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.47)$$

Los autores demuestran que para este esquema  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$ .

En este caso tampoco la demostración se realiza a través de ningún método específico sino del análisis matemático de las ecuaciones del sistema. En este caso, la derivada fraccionaria sí aparece en el sistema dinámico al cual se le analiza su estabilidad, pero en la demostración matemática la sustituyen convenientemente por la ecuación resultante de despejar la derivada en la ecuación (2.47). En este punto es preciso destacar que, aunque las demostraciones de estabilidad están correctas, este análisis no puede extenderse al caso de los modelos de error fraccionarios que son objeto de estudio en este trabajo. Esto se debe a que la sustitución conveniente del operador fraccionario que se realiza en este problema no puede hacerse en el caso de los modelos de error fraccionarios.

Otro esquema adaptable es el que se encuentra en el trabajo de Ladaci et al. (2010), donde los autores introducen en un esquema de control IMC adaptable, un sistema de orden fraccionario como modelo, para obtener así un esquema IMC adaptable fraccionario. Los autores muestran que este esquema de control adaptable siempre permite realizar una demostración analítica de estabilidad, cuando se usa una función de transferencia de orden fraccionario estable como un parámetro del IMC, y demuestran que esto puede mejorar el comportamiento del sistema y su robustez ante ruidos.

Los autores realizan la demostración analítica de estabilidad fácilmente a través del método directo de Lyapunov para sistemas enteros, pues la introducción del modelo fraccionario en el esquema no hace al esquema adaptable fraccionario en sí mismo, ya que la derivada fraccionaria aparece como parte de una de las entradas conocidas del esquema adaptable. Los estudios por simulación muestran una mayor robustez ante el ruido que en el caso entero.

Otro esquema adaptable fraccionario presente en la literatura es el informado en Land & Zhou (2011), donde los autores presentan un control basado en un observador y realimentación estática de la salida para sistemas de orden fraccionario desconocidos, via Desigualdades Matriciales Lineales (en adelante LMI, por sus siglas en inglés (Linear Matrix Inequalities)). Presentan las condiciones para estabilidad asintótica robusta del sistema controlado en lazo cerrado y luego, utilizando la descomposición de valores singulares de matrices (en adelante SVD, por sus siglas en inglés (Singular Value Decomposition)) y las técnicas LMI, diseñan un controlador estabilizador robusto para este sistema. El sistema que analizan no es un sistema completamente desconocido, sino un sistema con incertidumbre en los parámetros, aunque la incertidumbre tiene una forma dada. Debido a esto, al realizar una realimentación estática de la salida, el sistema en lazo cerrado resulta de forma tal que pueden derivarse las condiciones para la existencia de ganancias estabilizadoras de realimentación, basado en la condición de estabilidad de sistemas fraccionarios lineales e invariantes en el tiempo. En este caso, el sistema que se analiza tiene una forma muy específica, cuya incertidumbre además debe cumplir una restricción importante, lo cual hace que no sea posible la generalización del método de análisis de estabilidad a otros casos. Sin embargo, un punto importante a destacar en este trabajo es que trata analíticamente la estabilidad de sistemas cuando el orden de derivación es mayor que 1.

Un esquema adaptable correspondiente a un problema de identificación fraccionario presente en la literatura, es el que se encuentra en el trabajo de Djouambi et al. (2011). En este trabajo los

autores proponen una técnica de identificación de sistemas fraccionarios de coeficientes constantes, específicamente una estimación recursiva de parámetros fraccionaria. El modelo de identificación se define por medio de una estructura autoregresiva con entrada externa (en adelante ARX, por sus siglas en inglés (Autoregressive with external input)) generalizada, obtenida de la discretización de una ecuación diferencial fraccionaria continua. Los parámetros son entonces estimados utilizando los algoritmos de mínimos cuadrados recursivo y variable instrumental extendidos a los casos fraccionarios. El desempeño de la técnica es comprobado a través de algunos ejemplos, pero no hay mención al análisis de estabilidad del sistema resultante.

En el trabajo reportado en Charef et al. (2013b) también se presenta la identificación de un sistema de orden fraccionario. En este caso, se trata de un sistema de orden conmesurado, donde tanto los parámetros como el orden se desconocen, aunque sí se conoce una cota superior para este último. Esta cota es utilizada dentro del algoritmo de identificación, y básicamente lo que se hace es explorar todo el rango hasta encontrar el orden que mejor se ajusta, o sea aquel con el que se obtiene menor error. El sistema a identificar está dado por la expresión

$$y(t) + \sum_{i=1}^n a_i^C D^{i\alpha} y(t) = \sum_{i=0}^m b_i^C D^{i\alpha} u(t), \quad (2.48)$$

la cual se discretiza y se expresa de la forma

$$y(k) = \phi^T(k) \theta, \quad (2.49)$$

donde los parámetros  $\theta \in \mathbb{R}^{n+m+1}$  y el vector de regresión  $\phi \in \mathbb{R}^{n+m+1}$  están dados por

$$\begin{aligned} \theta &= [a'_1, a'_2, \dots, a'_n, b'_0, b'_1, \dots, b'_m]^T \\ \phi(k) &= [-Y_1(k), -Y_2(k), \dots, -Y_n(k), U_0(k), U_1(k), \dots, U_m(k)]^T. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Aquí, los elementos  $a'_i, b'_i$  contienen los  $a_i, b_i$  del modelo. Luego usan un estimador de la forma

$$\hat{y}(k) = \phi^T(k) \hat{\theta}, \quad (2.51)$$

y aplican la técnica de mínimos cuadrados recursivo. Es preciso notar que en este trabajo tampoco se presenta análisis de estabilidad.

En el trabajo reportado en Rapaić & Pisano (2014) se propone también un esquema de identificación para un sistema fraccionario de orden conmesurado, donde tanto los parámetros como el orden son desconocidos. El sistema tiene la misma forma que el presentado en Charef et al. (2013b), y también lo parametrizan del mismo modo. La diferencia en este caso, es que utilizan la técnica del gradiente para estimar el orden y mínimos cuadrados para estimar los parámetros. Con respecto a la estabilidad y convergencia, mencionan el tema de la excitación persistente para garantizar la convergencia de los parámetros y también respecto de la convergencia del orden, aunque no ofrecen mayores detalles al respecto.

Puede mencionarse también el trabajo reportado en Ndoye et al. (2012), donde tratan el diseño de un observador de estado para un sistema fraccionario que caracteriza la concentración de glucosa en la sangre de un paciente diabético. La componente adaptativa de este esquema está dada por el hecho de que el sistema tiene una perturbación desconocida a la entrada, pero el resto del sistema se considera conocido. El sistema a observar está descrito por las siguientes

ecuaciones

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha x(t) &= Ax(t) + f(x(t)) + Bu(t) + Dd(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (2.52)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es la señal de control,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  es la salida del sistema, las matrices  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  y  $D \in \mathbb{R}^{n \times q}$  son conocidas,  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $f(x) \in \mathbb{R}^n$  y  $d(t) \in \mathbb{R}^q$  es la perturbación desconocida. El observador que proponen está dado por las expresiones

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha z(t) &= Nz(t) + Py(t) + Mf(\hat{x}(t)) \\ \hat{x}(t) &= z(t) - Ty(t), \end{aligned} \quad (2.53)$$

donde  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  es un estimador del estado desconocido  $x(t)$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $z(t) \in \mathbb{R}^n$  es una señal auxiliar, las matrices  $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $T \in \mathbb{R}^{n \times p}$  que se utilizan en el esquema son diseñadas como

$$\begin{aligned} K &\in \mathbb{R}^{n \times p} : \text{matriz de ganancia,} \\ Y &\in \mathbb{R}^{n \times p} \text{ escogida arbitrariamente,} \\ \Sigma^+ &= (CD)^+ \in \mathbb{R}^{q \times p} \text{ pseudoinversa generalizada de } (CD), \\ F &= -D\Sigma^+ \in \mathbb{R}^{n \times p}, \\ G &= (I_p - \Sigma\Sigma^+) \in \mathbb{R}^{p \times p}, \\ T &= F + YG, \\ M &= I + TC, \\ N &= MA - KC, \\ P &= K(I - CT) - MAT, \\ 0 &= NM + PC - MA. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Con esta elección y definiendo el error como  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t) = z(t) - Ty(t) - x(t)$ , los autores demuestran la estabilidad de este esquema, utilizando la extensión fraccionaria del método directo de Lyapunov (Li et al., 2010), proponiendo como candidata la función cuadrática  $V = 2e^T(t)e(t)$ . En este caso, al igual que los mencionados en secciones anteriores, los autores suponen acotada la sumatoria infinita que aparece al calcular la derivada fraccionaria de la función cuadrática, la cual utilizan para definir las matrices  $K$  e  $Y$  que utilizan en el esquema. Esto claramente le agrega restricciones al problema.

Finalmente, mencionaremos brevemente el trabajo reportado en Valério & da Costa (2012), donde presentan la implementación de controladores fraccionarios de orden variable, para controlar plantas con ganancias de alta frecuencia que varían en el tiempo. Expresados en el dominio de la frecuencia, estos controladores tienen la forma

$$s^{z(t)}, \quad \text{donde } z(t) \in \mathbb{R}. \quad (2.55)$$

Esta estructura es conocida como controladores de Chrono de primera generación. La idea de utilizar un orden variable es lograr mantener un margen de fase constante en el sistema controlado (con lo cual se logra sobrepaso constante independientemente de la ganancia de la planta), aprovechando el hecho que en los operadores fraccionarios el margen de fase depende del orden utilizado. Los autores presentan ejemplos por simulaciones donde efectivamente el sobrepaso se mantiene constante, independiente de las variaciones de la ganancia de la planta. Es importante mencionar que en este trabajo no se aborda el problema de la estabilidad.

## 2.5. Conclusiones del análisis del estado del arte

A manera de resumen del análisis de los trabajos encontrados en la literatura, correspondientes a esquemas adaptables fraccionarios, puede concluirse que:

1. Los trabajos analizados se pueden dividir en cuatro grandes grupos:
  - Esquemas adaptables correspondientes a control por modo deslizante fraccionario.
  - Esquemas adaptables correspondientes a realimentación de alta ganancia de la salida o del estado, ya sea parcial o total.
  - Esquemas adaptables correspondientes a FOMRAC.
  - Esquemas adaptables misceláneos generalizados a casos fraccionarios, como el método de estabilización adaptativa universal, control por modelo interno, estrategias de identificación de sistemas de orden fraccionario y observadores para sistemas fraccionarios, entre otros.
2. En todos los casos en que se realizaron comparaciones entre esquemas de control, los esquemas adaptables fraccionarios presentaron ventajas con respecto a los esquemas enteros equivalentes, siendo el rechazo a las perturbaciones y la robustez ante variaciones paramétricas, las ventajas más mencionadas en los trabajos.
3. En cuanto al análisis de estabilidad de los esquemas adaptables presentados, solo se encontraron análisis de estabilidad rigurosos en los trabajos del primer, segundo y cuarto grupo.
  - En el caso del primer grupo, donde se mencionaron estrategias de control por modo deslizante, los análisis de estabilidad se realizaron en su mayoría utilizando el método directo de Lyapunov clásico, o sea tratando con la derivada entera de la función de Lyapunov. La aparición de la derivada fraccionaria en los esquemas se trató seleccionando la superficie deslizante o la señal de control convenientemente. Es importante destacar que estos análisis fueron posibles debido al tipo de problema que se trata, no siendo generalizables al caso del análisis de los modelos de error fraccionarios que se analizan en esta Tesis. También se reportan algunos trabajos donde el análisis de estabilidad se realiza utilizando la extensión fraccionaria del método directo de Lyapunov (Li et al., 2010) con la función cuadrática como candidata, pero en estos casos fue necesario establecer una cota conocida sobre la sumatoria infinita que aparece al calcular la derivada fraccionaria de la función cuadrática. Este análisis tampoco es generalizable al caso de los modelos de error fraccionarios que se estudian en esta Tesis, pues no es posible conocer dicha cota, e imponer esta condición sería restringir en gran medida la aplicabilidad del análisis.
  - En el caso de los trabajos de realimentación de alta ganancia, se realizaron análisis teóricos de estabilidad solamente en unos pocos trabajos. En algunos casos, los resultados se obtuvieron directamente del análisis de las ecuaciones del sistema correspondiente, siendo imposible generalizarlos al análisis de los modelos de error fraccionarios que se estudian en esta Tesis. Se reportaron algunos casos donde se utilizó la extensión fraccionaria del método directo de Lyapunov, pero al igual que en los trabajos del primer grupo, estos análisis requirieron del conocimiento de la cota para la sumatoria infinita de términos que aparece al calcular la derivada fraccionaria de la función cuadrática.

- En el caso de las estrategias FOMRAC, no se reporta en la literatura ningún caso de análisis teórico de estabilidad que resulte válido. Solamente en uno de los casos se reportó análisis de estabilidad, pero fue utilizando la representación difusiva, metodología que a mi juicio aún tiene algunos puntos que no están lo suficientemente claros.
  - Finalmente, en el caso del cuarto grupo de trabajos, se realizó el análisis de estabilidad para algunos de los esquemas presentados. Al igual que en el caso de los trabajos del segundo grupo, éstos fueron posibles analizando directamente las ecuaciones del sistema ó utilizando la extensión fraccionaria del método directo de Lyapunov, donde requirieron también conocer la cota para la sumatoria infinita de términos que aparece al calcular la derivada fraccionaria de la función cuadrática.
4. Como última y sumamente importante observación, es necesario mencionar que no se ha reportado ningún trabajo que aborde el análisis de los esquemas adaptables fraccionarios desde el enfoque de los modelos de error. Sólo pueden encontrarse algunos análisis preliminares y parciales que son resultado de este trabajo de Tesis (Aguila-Camacho & Duarte-Mermoud, 2012; Duarte-Mermoud & Aguila-Camacho, 2013; Aguila-Camacho & Duarte-Mermoud, 2014), lo cual indica que se trata de un problema abierto cuya investigación está ampliamente justificada.

## 3 Marco teórico fundamental

El presente capítulo contiene las bases teóricas que facilitarán la comprensión de los temas abordados en esta Tesis. Se presentan conceptos y propiedades del cálculo fraccionario, lemas y propiedades para el trabajo con matrices y algunas herramientas existentes para el análisis de estabilidad de sistemas de orden fraccionario.

### 3.1. Definiciones y propiedades del cálculo fraccionario

El cálculo fraccionario es la rama del cálculo que estudia las derivadas e integrales de órdenes que pueden ser reales o complejos (Kilbas et al., 2006).

Como muchas otras disciplinas e ideas matemáticas, tiene su origen en la idea de generalización o extensión del significado de ciertos conceptos básicos hacia otros más avanzados. Son ejemplos bien conocidos la extensión de los números enteros a los reales, de los reales a los complejos o de los factoriales de enteros a la función Gamma. En el cálculo diferencial e integral la extensión se plantea como sigue: suponiendo que conocemos el significado de  $\frac{d^n y}{dx^n}$  cuando  $n$  es entero y positivo (o la correspondiente integración  $n$  veces), ¿Se puede extender este significado para  $n$  fraccionario, irracional o complejo? (Vinagre, 2001).

Hasta el siglo XIX este fue un asunto que sólo trataron algunos científicos eminentes, pero con el transcurso del tiempo el cálculo fraccionario se fue desarrollando, y a la par del desarrollo de la teoría, también se desarrollaron algunas áreas de aplicación como son por ejemplo las redes eléctricas, las probabilidades y estadísticas, teoría de control de sistemas dinámicos, electroquímica y corrosión, teoría del caos y los fractales y la electrónica de dispositivos, entre otros (Kilbas et al., 2006).

En el dominio del tiempo, los operadores derivada e integral fraccionaria están definidos por la operación de convolución, por lo que están especialmente indicados para describir fenómenos con memoria. En el dominio de Laplace, dichas operaciones corresponden al operador  $s^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  (Kilbas et al., 2006).

El cálculo fraccionario ha ganado en los últimos años una considerable popularidad, debido a sus demostradas aplicaciones en muchos campos de la ciencia y la ingeniería. La razón de esto es que ha permitido generalizar muchos conceptos del cálculo tradicional, en el cual se utilizan derivadas e integrales solo de orden entero, con lo cual se han podido obtener soluciones de control más generales y con mejores prestaciones. Puede mencionarse por ejemplo el caso del controlador PID fraccionario (en adelante FOPID, por sus siglas en inglés (Fractional Order Proportional Integral Derivative)), en el cual además de poder ajustar la ganancia proporcional, integral y derivativa como en el PID tradicional, se puede ajustar el orden de derivación de la componente derivativa y el orden de integración de la componente integral. De esta forma, en el caso del PID clásico sólo es posible seleccionar la posición, suavidad y valor mínimo en la curva

de magnitud de la respuesta de frecuencia del controlador, mientras que en el caso del FOPID es posible seleccionar además los valores de las pendientes en la curva de magnitud y de las aportaciones de fase (Vinagre, 2001).

A continuación se presentarán definiciones y propiedades del cálculo fraccionario que son utilizadas en este trabajo.

**Definición 1** (Integral fraccionaria según Riemann-Liouville (Kilbas et al., 2006)). *La integral fraccionaria según Riemann-Liouville de orden  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  de la función  $f(\cdot)$ , definida en un intervalo finito  $[a, t]$  en  $\mathbb{R}^+$  tiene la forma siguiente:*

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad t > a, \quad (3.1)$$

donde  $\Gamma(\alpha)$  corresponde a la función Gamma, definida como

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

Con respecto a la derivada de orden fraccionario, existen varias definiciones en la literatura. En este trabajo, sin embargo, se utiliza solamente la definición de la derivada fraccionaria según Caputo, ya que ésta incorpora condiciones iniciales para  $f(\cdot)$  y sus derivadas de orden entero, las cuales son físicamente interpretables de la manera tradicional.

**Definición 2** (Derivada fraccionaria según Caputo (Kilbas et al., 2006)). *La derivada fraccionaria según Caputo de orden  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  de la función  $f(\cdot)$  definida en un intervalo de tiempo finito  $[a, t]$  en  $\mathbb{R}^+$ , se define como*

$${}^C D_a^\alpha f(t) = I_a^{n-\alpha} [D^n f(t)] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad t > a, \quad (3.2)$$

donde  $n = \min \{k \in \mathbb{N} / k > \alpha\}$ .

**Propiedad 1** (Linealidad de los operadores fraccionarios (Podlubny, 1999)). *Los operadores fraccionarios son lineales, (cumplen con las propiedades de homogeneidad y aditividad) o sea*

$$I_a^\alpha [k_1 f(t) + k_2 g(t)] = k_1 I_a^\alpha f(t) + k_2 I_a^\alpha g(t), \quad \forall f, g \in \mathbb{R}, \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \quad (3.3)$$

$${}^C D_a^\alpha [k_1 f(t) + k_2 g(t)] = k_1 {}^C D_a^\alpha f(t) + k_2 {}^C D_a^\alpha g(t), \quad \forall f, g \in \mathbb{R}, \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

**Propiedad 2** (Propiedad de semigrupo para la integral fraccionaria (Kilbas et al., 2006)).

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(t) = I_a^{\alpha+\beta} f(t) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+, \quad \forall f \in \mathcal{L}^p (1 \leq p \leq \infty). \quad (3.5)$$

La propiedad siguiente muestra que la derivada fraccionaria es la operación inversa de la integral fraccionaria por la izquierda.



**Propiedad 3** (La derivada como operación inversa por la izquierda de la integral (Podlubny, 1999)).

$${}^C D_a^\alpha I_a^\alpha f(t) = f(t) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad \forall f \in \mathcal{L}^p (1 \leq p \leq \infty). \quad (3.6)$$

Esta propiedad, sin embargo, no se cumple por la derecha, tal como se muestra a continuación

**Propiedad 4** (Integral de la derivada de una función (Podlubny, 1999)).

$$I_a^\alpha {}^C D_a^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad \forall f \in \mathcal{L}^p (1 \leq p \leq \infty). \quad (3.7)$$

Para el caso particular en que  $\alpha \in (0, 1)$ , resulta

$$I_a^\alpha {}^C D_a^\alpha f(t) = f(t) - f(a). \quad (3.8)$$

La relación entre la primera derivada de orden entero y la derivada de orden fraccionario según Caputo de una función, está dada por la Propiedad 5.

**Propiedad 5** (Relación entre la primera derivada entera y la derivada fraccionaria según Caputo (Kilbas et al., 2006)).

$$\dot{f}(t) = {}^C D_{t_0}^{1-\alpha} {}^C D_{t_0}^\alpha f(t), \quad \forall \alpha \in (0, 1), \quad \forall f \in \mathcal{L}^p (1 \leq p \leq \infty). \quad (3.9)$$

Una propiedad particular para las derivadas de orden fraccionario es la generalización de la regla de Leibniz. En el caso entero resulta en la conocida regla del producto, pero en el caso fraccionario es diferente, como se muestra en la siguiente propiedad.

**Propiedad 6** (Regla de Leibniz para la derivada fraccionaria (Podlubny, 1999)). *Si  $f(t)$  y  $g(t)$ , junto con todas sus derivadas son continuas en  $[a, t]$ , entonces la regla de Leibniz para la derivada fraccionaria tiene la forma siguiente*

$${}^C D_a^\alpha (f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t) {}^C D_a^{\alpha-k} g(t) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad \forall f, g \in \mathcal{L}^p (1 \leq p \leq \infty). \quad (3.10)$$

Dadas las diferencias que existen entre las derivadas e integrales fraccionarias con respecto a las derivadas e integrales enteras, respectivamente, es intuitivo entonces pensar que el comportamiento, tanto de los sistemas descritos por ecuaciones diferenciales fraccionarias como los controladores fraccionarios, tengan características diferentes a aquellas de los casos enteros.

## 3.2. Definiciones y teoremas para el trabajo con matrices

La aplicación del método directo de Lyapunov utiliza los conceptos de matriz positiva definida, matriz positiva semidefinida, matriz negativa definida y matriz negativa semidefinida. Del mismo

modo este método trata con funciones positivas definidas, negativas definidas y decrecientes. Debido a que algunos de estos conceptos serán utilizados a lo largo de este trabajo, se presentan en esta sección, también facilitando las posibles consultas del lector.

**Definición 3** (Matriz positiva definida y positiva semidefinida (Horn, 1990)). *Una matriz  $P$  de orden  $n \times n$  es positiva definida si cumple que la forma cuadrática asociada*

$$x^T P x > 0, \quad \forall x \neq 0, x \in \mathbb{C}^n. \quad (3.11)$$

*Si la desigualdad (3.11) se relaja a*

$$x^T P x \geq 0, \quad \forall x \neq 0, x \in \mathbb{C}^n, \quad (3.12)$$

*entonces la matriz es positiva semidefinida.*

**Definición 4** (Matriz negativa definida y negativa semidefinida (Bellman, 1997)). *Una matriz  $P$  de orden  $n \times n$  es negativa definida si se cumple que la forma cuadrática asociada*

$$x^T P x < 0, \quad \forall x \neq 0, x \in \mathbb{C}^n. \quad (3.13)$$

*Si la desigualdad (3.13) se relaja a*

$$x^T P x \leq 0, \quad \forall x \neq 0, x \in \mathbb{C}^n, \quad (3.14)$$

*entonces la matriz es negativa semidefinida.*

**Definición 5** (Función positiva definida invariante en el tiempo (Slotine, 1991)). *Una función escalar invariante en el tiempo  $V(x) \in \mathbb{R}$  con  $x \in \mathbb{R}^n$  es positiva definida, si  $V(x) > 0, \forall x \neq 0$  y  $V(0) = 0$ .*

**Definición 6** (Función positiva definida variante en el tiempo (Slotine, 1991)). *Una función escalar variante en el tiempo  $V(x, t) \in \mathbb{R}$  con  $x \in \mathbb{R}^n$  es positiva definida, si  $V(0, t) = 0 \forall t \geq t_0$  y existe una función invariante en el tiempo y positiva definida  $V_0(x)$  tal que se cumple*

$$\forall t \geq t_0, \quad V(x, t) \geq V_0(x). \quad (3.15)$$

*O sea, una función variante en el tiempo es positiva definida si "domina a una función invariante en el tiempo" que sea positiva definida.*

**Definición 7** (Función negativa definida variante en el tiempo (Slotine, 1991)). *Una función escalar variante en el tiempo  $V(x, t) \in \mathbb{R}$  con  $x \in \mathbb{R}^n$  es negativa definida, si  $V(0, t) = 0 \forall t \geq t_0$  y existe una función invariante en el tiempo y positiva definida  $V_0(x)$  tal que se cumple*

$$\forall t \geq t_0, \quad V(x, t) \leq -V_0(x). \quad (3.16)$$

**Definición 8** (Función decreciente (Slotine, 1991)). *Una función escalar variante en el tiempo  $V(x, t) \in \mathbb{R}$  con  $x \in \mathbb{R}^n$  es decreciente si  $V(0, t) = 0 \forall t \geq t_0$  y existe una función invariante en el tiempo y positiva definida  $V_I(x)$  tal que se cumple*

$$\forall t \geq t_0, \quad V(x, t) \leq V_I(x). \quad (3.17)$$

*En otras palabras, una función escalar variante en el tiempo es decreciente si es "dominada por una función positiva definida invariante en el tiempo".*

La relación existente entre las funciones de clase  $K$  (ver Definición 9) y las funciones positivas definidas, negativas definidas y decrecientes, permitirá reescribir la extensión fraccionaria del método directo de Lyapunov que se presenta en el Teorema 2, y por esa razón se muestra a continuación el Lemma 1.

**Definición 9** (Funciones de clase  $K$  (Haddad & Chellaboina, 2008)). *Una función continua  $\gamma : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ , donde  $a \in (0, \infty]$ , es de clase  $K$  si es estrictamente creciente y  $\gamma(0) = 0$ .*

**Lema 1** ((Slotine, 1991)). *Una función escalar variante en el tiempo  $V(x, t) \in \mathbb{R}$  con  $x \in \mathbb{R}^n$  es positiva definida si y solo si existe una función  $\alpha$  de clase  $K$  tal que  $V(0, t) = 0 \forall t \geq t_0$  y*

$$V(x, t) \geq \alpha(\|x\|), \quad \forall t \geq t_0. \quad (3.18)$$

Para la demostración del Lema 5 en el Capítulo 4, será preciso utilizar la diagonalización de una matriz simétrica. Por tanto, se presenta a continuación el Teorema 1, el cual será luego utilizado en la demostración de dicho lema.

**Definición 10** (Matriz ortogonal (Bellman, 1997)). *Una matriz  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es ortogonal si se cumple que*

$$B^T B = I, \quad (3.19)$$

*donde  $I$  corresponde a la matriz identidad.*

**Teorema 1** (Diagonalización de una matriz real y simétrica (Bellman, 1997)). *Sea  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz real y simétrica. Entonces, ésta puede ser transformada a una forma diagonal mediante una transformación ortogonal, o sea, existe una matriz ortogonal  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y una matriz diagonal  $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que se cumple*

$$P = B \Lambda B^T. \quad (3.20)$$

### 3.3. Herramientas para el análisis de estabilidad de sistemas de orden fraccionario

Del mismo modo en que los resultados de las derivadas e integrales de orden entero difieren de los casos fraccionarios, también los métodos de análisis de estabilidad conocidos para el caso entero difieren de los que se han propuesto hasta el momento para los sistemas de orden fraccionario. Para ejemplificarlo es suficiente mencionar que en el caso entero, es bien conocido el resultado que plantea que, para sistemas lineales e invariantes en el tiempo representados por una ecuación diferencial de la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad \text{con } x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (3.21)$$

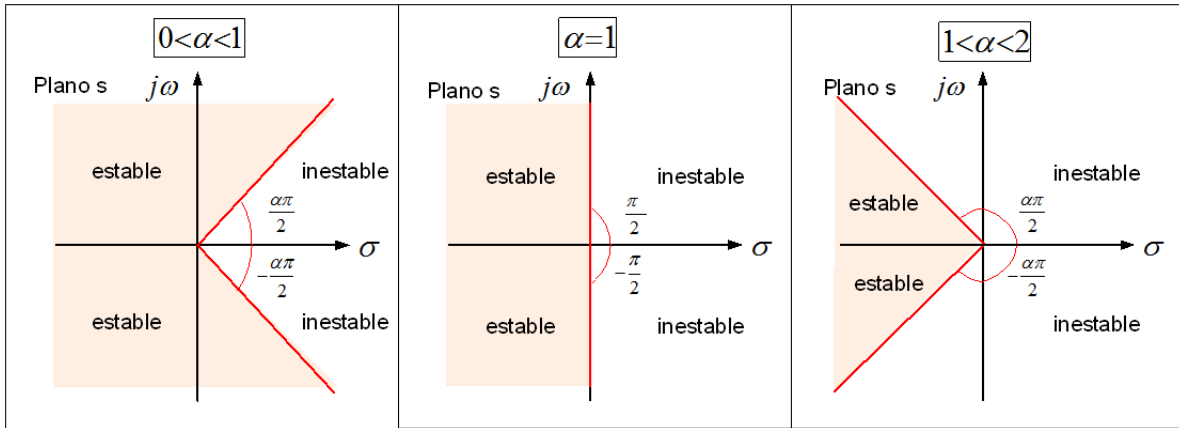


Figura 3.1: Diagrama del lugar de las raíces para la ecuación (3.22).

su estabilidad asintótica queda asegurada si se cumple que todos los valores propios de la matriz  $A$  tienen parte real negativa, (Ogata, 2009).

Sin embargo, en el caso de los sistemas de orden fraccionario, esta propiedad es generalizada. Es decir, tal como sucede con la formulación de la derivada e integral fraccionarias, que contienen al caso entero, del mismo modo la condición de estabilidad de sistemas fraccionarios contiene a la del caso entero. En el caso fraccionario, el matemático francés Denis Matignon propuso el teorema que plantea que un sistema lineal e invariante en el tiempo descrito por una ecuación diferencial fraccionaria de la forma

$${}^C D_a^\alpha x(t) = Ax(t) \quad \text{con } x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (3.22)$$

es asintóticamente estable si se cumple la condición

$$[\arg(\text{spec}(A))] > \frac{\alpha\pi}{2}, \quad (3.23)$$

donde  $\text{spec}(A)$  denota el espectro de la matriz  $A$ , que corresponde al conjunto de todos los valores propios de la matriz  $A$  (Matignon, 1994).

De la expresión (3.23), es evidente que puede darse el caso de que un sistema cuya matriz tenga valores propios con parte real positiva, condición que hace inestable a un sistema de orden entero, sí sea estable en el caso fraccionario, dependiendo del valor del orden de la derivada fraccionaria  $\alpha$ , tal como se aprecia en la Figura 3.1.

En la Figura 3.1 se muestra la región de estabilidad (zona del plano complejo donde los polos del sistema deben estar contenidos) para diferentes valores del orden de derivación. Este criterio ha sido utilizado en disímiles trabajos para analizar la estabilidad de determinados sistemas o para proponer controladores que garanticen estabilidad. Pueden mencionarse por ejemplo algunos trabajos como Chen et al. (2011); Reza & Delavari (2012); He & Liu (2011) y N'doye et al. (2009).

Sin embargo, tal y como sucede con el caso entero, este análisis de estabilidad implica el conocimiento de la matriz  $A$ . Más aún, esta metodología no es aplicable al caso de sistemas no lineales o variantes en el tiempo. Por tanto, en los problemas de control adaptable, en los cuales los sistemas son parcialmente conocidos, esta técnica de análisis de estabilidad no es aplicable.

En los sistemas no lineales de orden entero, el método directo de Lyapunov es una metodología que permite analizar la estabilidad del sistema sin resolver explícitamente las ecuaciones

diferenciales (Khalil, 2002). Para el caso de los sistemas de orden fraccionario, se plantea una extensión de este método en Li et al. (2010), la cual se expone en el Teorema 2.

**Teorema 2** (Extensión fraccionaria del método directo de Lyapunov (Li et al., 2010)). *Consideremos un sistema de orden fraccionario (FOS por sus siglas en inglés) definido como*

$${}^C D_{t_0}^\alpha x(t) = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, f \in \mathbb{R}^n, \quad (3.24)$$

donde  $\alpha \in (0, 1)$  y  $t$  representa el tiempo.

Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio para el sistema (3.24). Supongamos que existe una función de Lyapunov  $V(x, t) \in \mathbb{R}$  y funciones de clase  $K$   $\gamma_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) que satisfacen

$$\gamma_1(\|x\|) \leq V(x, t) \leq \gamma_2(\|x\|), \quad (3.25)$$

$${}^C D_{t_0}^\beta V(x, t) \leq -\gamma_3(\|x\|), \quad (3.26)$$

donde  $\beta \in (0, 1)$ . Entonces el origen del sistema (3.24) es asintóticamente estable.

Tal como sucede en el caso entero, en el caso fraccionario esta condición es una condición suficiente para demostrar la estabilidad de los sistemas fraccionarios, lo cual significa que un sistema aún puede ser estable aunque no se encuentre una función de Lyapunov candidata para concluir sobre su estabilidad. En otras palabras, la dificultad de este método radica en encontrar una función de Lyapunov para (3.24).

Ahora bien, si usamos el Lema 1, el Teorema 2 puede ser reescrito de la siguiente forma

**Teorema 3** (Extensión fraccionaria del método directo de Lyapunov usando conceptos de funciones positiva definida, negativa definida y decreciente). *Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio para el sistema (3.24). Supongamos que existe una función de Lyapunov  $V(x, t) \in \mathbb{R}$  tal que*

- $V(x, t)$  es positiva definida.
- $V(x, t)$  es decreciente.
- ${}^C D_{t_0}^\beta V(x, t)$  es negativa definida, donde  $\beta \in (0, 1)$ .

Entonces el origen del sistema (3.24) es asintóticamente estable.

Otra metodología que puede utilizarse para la demostración de estabilidad en sistemas no lineales es el principio de comparación fraccionario. Esta es una metodología que permite conocer el comportamiento de la solución de una ecuación diferencial comparándola con otra de resultado conocido. El resultado es especialmente útil pues de este modo no es necesario resolver la ecuación diferencial, lo cual resulta en general muy complejo en la mayor parte de las ocasiones. Este principio fue planteado en Li et al. (2010), pero en Choi & Koo (2011) fue relajada una de las condiciones del mismo, quedando como sigue.

**Lema 2** (Principio de comparación fraccionario (Choi & Koo, 2011)). *Supongamos que se tienen dos funciones del tiempo  $x(t), y(t) \in \mathbb{R}^+$  y que además se cumple que para  $\alpha \in (0, 1)$*

$${}^C D_{t_0}^\alpha x(t) \geq {}^C D_{t_0}^\alpha y(t), \quad \forall t \geq t_0. \quad (3.27)$$

*Si se tiene que*

$$x(t_0) \geq y(t_0), \tag{3.28}$$

*entonces puede afirmarse que  $x(t) \geq y(t)$ ,  $\forall t \geq t_0$ .*

La dificultad de este método radica en encontrar el sistema de comparación, pues este debe tener solución conocida y aún no se reportan muchas ecuaciones diferenciales fraccionarias con solución analítica. Del mismo modo, este principio es válido sólo para el caso escalar, pues su generalización al caso vectorial impone restricciones adicionales al sistema de comparación, lo cual hace muy difícil su utilización en muchos análisis.

# 4 Nuevos lemas y herramientas para el cálculo fraccionario

Con el auge del uso de los operadores fraccionarios en el ámbito de la ingeniería de control, han aparecido disímiles estrategias de control fraccionario, ya sea que se utilicen para controlar plantas descritas por ecuaciones diferenciales enteras o fraccionarias.

En todos los casos, el sistema controlado resulta de orden fraccionario, y es preciso probar tanto la estabilidad como la convergencia de las señales del esquema de control. Esta necesidad ha motivado un particular interés por el estudio de la estabilidad y convergencia de los sistemas fraccionarios, tema de investigación que está siendo desarrollado por varios grupos de investigadores alrededor del mundo.

Como se expuso en el Capítulo 3, existen algunas herramientas que permiten la demostración de la estabilidad y la convergencia de sistemas de orden fraccionario, ya sean lineales e invariantes en el tiempo o sistemas más generales. El método directo de Lyapunov, que es tan ampliamente utilizado en los análisis de estabilidad y convergencia de los sistemas no lineales enteros, ha sido efectivamente extendido al caso fraccionario (Li et al., 2010), resultando una herramienta poderosa para el análisis de estabilidad de sistemas fraccionarios no lineales.

Sin embargo, estos análisis se han encontrado con la dificultad de definir funciones de Lyapunov adecuadas, pues aquellas que se utilizan en el caso entero, como la función cuadrática, no han resultado aplicables al caso fraccionario de manera directa. Del mismo modo, las herramientas que se utilizan para probar la convergencia de las señales en los casos de sistemas de orden entero, tampoco son directamente aplicables al caso de los sistemas fraccionarios, debido a las particularidades de estos operadores.

Estas dificultades han aparecido también en el análisis de estabilidad y convergencia de los modelos de error fraccionarios, que son el objeto de estudio en este trabajo. Por esta razón ha sido preciso generar resultados analíticos adicionales como parte de esta investigación, como etapa previa a su aplicación en modelos de error fraccionarios.

El presente capítulo recopila estos resultados generados como parte de la investigación realizada, que pueden tener utilidad en distintos análisis por ser herramientas matemáticas generales, y que en el caso de este trabajo resultarán de utilidad en el posterior análisis de estabilidad de los modelos de error fraccionarios, contenidos en el Capítulo 5.

## 4.1. Nuevos lemas para la derivada según Caputo

Los lemas presentados en esta sección establecen, en términos generales, una desigualdad entre la derivada fraccionaria según Caputo de una función cuadrática y el producto de la función por la derivada fraccionaria de ésta. Esta relación resultará de particular utilidad en la utilización de

funciones de Lyapunov del tipo cuadráticas generales para el análisis de estabilidad de sistemas fraccionarios, aplicada en conjunto con la extensión fraccionaria del método directo de Lyapunov (Li et al., 2010).

#### 4.1.1. Derivada fraccionaria según Caputo de una función cuadrática

Para calcular la derivada fraccionaria según Caputo de una función cuadrática se utiliza la regla de Leibniz, presentada en la Propiedad 6 del Capítulo 3. Sin embargo, este cálculo requiere el conocimiento de infinitas derivadas enteras y fraccionarias de orden superior de la función (ver (3.10)), lo cual no es conocido en muchos casos. Esta es la razón por la cual, como parte de este trabajo, se han generado los Lemas 3, 4 y 5, los cuales serán introducidos a continuación.

**Lema 3.** *Sea  $x : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Entonces, para cada instante de tiempo  $t \geq t_0$  se cumple que*

$$\frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha x^2(t) \leq x(t) {}^C D_{t_0}^\alpha x(t), \quad \forall \alpha \in (0, 1]. \quad (4.1)$$

**Demostración.** Probar que la expresión (4.1) es verdadera, es equivalente a probar que

$$x(t) {}^C D_{t_0}^\alpha x(t) - \frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha x^2(t) \geq 0, \quad \forall \alpha \in (0, 1]. \quad (4.2)$$

Usando la Definición 2 (ver (3.2)), puede escribirse

$${}^C D_{t_0}^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{\dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad (4.3)$$

y de la misma forma

$$\frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha x^2(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{x(\tau) \dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \quad (4.4)$$

Por tanto, la expresión (4.2) puede escribirse como

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{[x(t) - x(\tau)] \dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \geq 0. \quad (4.5)$$

Definamos la variable auxiliar  $y(\tau) = x(t) - x(\tau)$ , lo cual implica que  $y'(\tau) = \frac{dy(\tau)}{d\tau} = -\frac{dx(\tau)}{d\tau}$ . De este modo, la expresión (4.5) puede ser escrita como

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{y(\tau) y'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \leq 0. \quad (4.6)$$



Para integrar por partes la integral en (4.6), definamos

$$du = y(\tau) y'(\tau) d\tau \quad u = \frac{1}{2} y^2$$

$$v = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (t-\tau)^{-\alpha} \quad dv = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} (t-\tau)^{-\alpha-1} d\tau.$$

De este modo, aplicando integración por partes, la expresión (4.6) puede escribirse como

$$- \left[ \frac{y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha} \right] \Big|_{\tau=t} + \left[ \frac{y_0^2}{2\Gamma(1-\alpha)(t-t_0)^\alpha} \right] + \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{y^2(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} d\tau \geq 0. \quad (4.7)$$

Analicemos el primer término de la expresión (4.7), el cual presenta una indeterminación en  $\tau = t$ . Por tanto analicemos el límite correspondiente.

$$\lim_{\tau \rightarrow t} \frac{y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha} = \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{[x(t) - x(\tau)]^2}{(t-\tau)^\alpha} = \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{[x^2(t) - 2x(t)x(\tau) + x^2(\tau)]}{(t-\tau)^\alpha}. \quad (4.8)$$

Dado que la función es diferenciable, puede aplicarse la regla de L'Hopital para evaluar el límite, ya que resulta  $\frac{0}{0}$ . Luego

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{[x^2(t) - 2x(t)x(\tau) + x^2(\tau)]}{(t-\tau)^\alpha} &= \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{[-2x(t)\dot{x}(\tau) + 2x(\tau)\dot{x}(\tau)]}{-\alpha(t-\tau)^{\alpha-1}} = \\ &= \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{[2x(t)\dot{x}(\tau) - 2x(\tau)\dot{x}(\tau)](t-\tau)^{1-\alpha}}{\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Por lo tanto, la expresión (4.7) se reduce a

$$\frac{y_0^2}{2\Gamma(1-\alpha)(t-t_0)^\alpha} + \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{y^2(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} d\tau \geq 0. \quad (4.10)$$

La expresión (4.10) es claramente verdadera  $\forall \alpha \in (0, 1]$ , con lo cual se concluye la demostración.  $\square$

Un detalle importante respecto de este lema, es que puede esperarse una igualdad en (4.1) cuando  $\alpha = 1$  ó cuando la función es  $f(t) = 0 \quad \forall t \geq t_0$ .

Como puede apreciarse de la expresión (4.1), este lema establece una relación entre la derivada según Caputo del cuadrado de una función diferenciable y el producto de la función y su derivada fraccionaria. Ahora bien, ¿Qué sucede en el caso en que se trabaja con vectores de funciones continuas? Utilizando el resultado ya presentado en el Lema 3 es muy simple obtener la generalización al caso vectorial, el cual se expone en el Lema 4.

**Lema 4.** Sea  $x : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  un vector de funciones diferenciables. Entonces, para cada instante de tiempo  $t \geq t_0$  se cumple que

$$\frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha [x^T(t) x(t)] \leq x^T(t) {}^C D_{t_0}^\alpha x(t), \quad \forall \alpha \in (0, 1]. \quad (4.11)$$

**Demostración.** Para probar el resultado en (4.11), descompongamos el producto interno  $x^T(t) x(t)$  en la suma del producto de las componentes del vector. De este modo podemos escribir

$$\frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha [x^T(t) x(t)] = \frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha [x_1^2(t) + x_2^2(t) + \dots + x_n^2(t)], \quad (4.12)$$

donde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  corresponden a las componentes del vector  $x$ , i.e.  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ .

Utilizando la propiedad de linealidad de los operadores fraccionarios presentada en la Propiedad 1 (ver (3.4)), la expresión en (4.12) puede escribirse como

$$\frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha [x^T(t) x(t)] = \frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha x_1^2(t) + \frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha x_2^2(t) + \dots + \frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha x_n^2(t). \quad (4.13)$$

Luego puede aplicarse el Lema 3 a cada término del miembro derecho de la expresión (4.13), con lo cual se obtiene

$$\frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha [x^T(t) x(t)] \leq x_1(t) {}^C D_{t_0}^\alpha x_1(t) + x_2(t) {}^C D_{t_0}^\alpha x_2(t) + \dots + x_n(t) {}^C D_{t_0}^\alpha x_n(t), \quad (4.14)$$

lo cual puede ser escrito como

$$\frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha [x^T(t) x(t)] \leq x^T(t) {}^C D_{t_0}^\alpha x(t), \quad (4.15)$$

y esto concluye la demostración. □

Como ha podido apreciarse, el Lema 3 resulta un caso particular del Lema 4. Sin embargo, una vez más nos preguntamos, ¿Qué pasa si en lugar de la forma cuadrática  $x^T(t) x(t)$  nos referimos a una forma cuadrática más general, de la forma  $x^T(t) P x(t)$ , donde  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz simétrica y definida positiva? La respuesta a esta interrogante se encuentra en el Lema 5.

**Lema 5.** Sea  $x : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  un vector de funciones diferenciables. Entonces, para cada instante de tiempo  $t \geq t_0$  se cumple que

$$\frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha (x^T(t) P x(t)) \leq x^T(t) P {}^C D_{t_0}^\alpha x(t), \quad \forall \alpha \in (0, 1], \quad (4.16)$$

donde  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz simétrica y positiva definida.

**Demostración.** Dado que la matriz  $P$  es simétrica, usando el Teorema 1 (ver (3.20)), puede afirmarse que existe una matriz ortogonal  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y una matriz diagonal  $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que puede escribirse

$$\frac{1}{2} x^T(t) P x(t) = \frac{1}{2} x^T(t) B \Lambda B^T x(t) = \frac{1}{2} (B^T x(t))^T \Lambda (B^T x(t)). \quad (4.17)$$

Definiendo una variable auxiliar  $y(t) \in \mathbb{R}^n$  definida como

$$y(t) = B^T x(t), \quad (4.18)$$

entonces, (4.17) puede escribirse como

$$\frac{1}{2} x^T(t) P x(t) = \frac{1}{2} y^T(t) \Lambda y(t). \quad (4.19)$$

Dado que la matriz  $\Lambda$  es diagonal, puede escribirse

$$\frac{1}{2} y^T(t) \Lambda y(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_{ii} y_i^2(t). \quad (4.20)$$

Entonces, usando la propiedad de linealidad de la derivada fraccionaria (ver (3.4)) se tiene

$$\frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha (y^T(t) \Lambda y(t)) = \frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha \sum_{i=1}^n \lambda_{ii} y_i^2(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_{ii} \frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha y_i^2(t). \quad (4.21)$$

Aplicando el Lema 3 a la ecuación (4.21) resulta

$$\frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha (y^T(t) \Lambda y(t)) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_{ii} y_i(t) {}^C D_{t_0}^\alpha y_i(t). \quad (4.22)$$

Por lo tanto, dado que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{ii} y_i(t) {}^C D_{t_0}^\alpha y_i(t) = y^T(t) \Lambda {}^C D_{t_0}^\alpha y(t), \quad (4.23)$$

entonces puede afirmarse de (4.22) que

$$\frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha (y^T(t) \Lambda y(t)) \leq y^T(t) \Lambda {}^C D_{t_0}^\alpha y(t). \quad (4.24)$$

Luego, usando la expresión (4.18) en (4.24) resulta

$$\frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha (B^T x(t))^T \Lambda (B^T x(t)) \leq (B^T x(t))^T \Lambda {}^C D_{t_0}^\alpha (B^T x(t)). \quad (4.25)$$

Usando  $B \Lambda B^T = P$  en (4.25) y reordenando convenientemente resulta

$$\frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha (x^T(t) P x(t)) \leq x^T(t) P {}^C D_{t_0}^\alpha x(t). \quad (4.26)$$

lo que completa la demostración. □

## 4.2. Aplicación de los lemas generados para la derivada según Caputo

En esta sección se muestran algunas posibles aplicaciones de los Lemas 3, 4 y 5, presentados en la Sección 4.1.

### 4.2.1. Uso de funciones de Lyapunov cuadráticas en la aplicación de la extensión fraccionaria del método directo de Lyapunov

Como ya se mencionó anteriormente, una de las técnicas que pueden utilizarse para probar la estabilidad de los sistemas no lineales y variantes en el tiempo de orden fraccionario, es la extensión fraccionaria del método directo de Lyapunov (Li et al., 2010). Sin embargo, el uso de esta técnica usualmente es difícil, ya que encontrar una función de Lyapunov en el caso fraccionario es más complejo que en el caso entero, debido a la complejidad del cálculo de la derivada fraccionaria del producto de funciones.

Con el desarrollo de los lemas generados en la Sección 4.1, sin embargo, es posible utilizar funciones cuadráticas en conjunto con la extensión fraccionaria del método directo de Lyapunov, y probar de manera simple la estabilidad de muchos sistemas fraccionarios.

A continuación introduciremos un ejemplo de un sistema de orden fraccionario lineal y variante en el tiempo, que pondrá de manifiesto esta afirmación.

**Ejemplo 1.** Consideremos el sistema de orden fraccionario variante en el tiempo, donde  $x_1(t), x_2(t) \in \mathbb{R}$  son funciones diferenciables.

$$\begin{aligned} {}^C D_{t_0}^\alpha x_1(t) &= -x_1^3(t) + \sin(\omega t) x_2(t) \\ {}^C D_{t_0}^\alpha x_2(t) &= -\sin(\omega t) x_1(t) - x_2^3(t). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Para probar la estabilidad del sistema (4.27), intentemos usar primero el método directo de Lyapunov clásico (Narendra & Annaswamy, 2005), proponiendo la función cuadrática (4.28) como función de Lyapunov candidata.

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2(t) + \frac{1}{2}x_2^2(t). \quad (4.28)$$

Esta función es positiva definida. Usando la Propiedad 5 (ver (3.9)),  $\dot{x}_1$  y  $\dot{x}_2$  pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= {}^C D_{t_0}^{1-\alpha} [-x_1^3(t) + \sin(\omega t) x_2(t)] \\ \dot{x}_2(t) &= {}^C D_{t_0}^{1-\alpha} [-\sin(\omega t) x_1(t) - x_2^3(t)], \end{aligned} \quad (4.29)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= x_1(t) \dot{x}_1(t) + x_2(t) \dot{x}_2(t) = \\ &= x_1(t) {}^C D_{t_0}^{1-\alpha} [-x_1^3(t) + \sin(\omega t) x_2(t)] + \\ &+ x_2(t) {}^C D_{t_0}^{1-\alpha} [-\sin(\omega t) x_1(t) - x_2^3(t)]. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Como puede apreciarse de la ecuación (4.30), es difícil establecer un signo definido para la primera derivada temporal de la función de Lyapunov, a menos que se tenga conocimiento de cómo evolucionan las correspondientes derivadas  ${}^C D_{t_0}^{1-\alpha}$ , lo cual es desconocido en la mayor parte de los problemas.

Ahora bien, en lugar de utilizar el método directo de Lyapunov clásico puede utilizarse la extensión fraccionaria de este método. Para ello, propongamos nuevamente la función de Lyapunov candidata y positiva definida dada en (4.28). Usando la Propiedad 6 (ver (3.10)) puede escribirse

$${}^C D_{t_0}^\alpha V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x_1^{(k)}(t) {}^C D_{t_0}^{\alpha-k} x_1(t) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x_2^{(k)}(t) {}^C D_{t_0}^{\alpha-k} x_2(t). \quad (4.31)$$

En este caso, como puede apreciarse de la ecuación (4.31), para evaluar la derivada fraccionaria de la función de Lyapunov se necesitan las infinitas derivadas de orden superior de  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ , tanto enteras como fraccionarias, lo cual evidentemente no es una tarea fácil y en muchos casos son desconocidas.

Sin embargo, si se utiliza el Lema 3, proponiendo la misma función de Lyapunov candidata en (4.28), puede concluirse directamente que

$$\begin{aligned} {}^C D_{t_0}^\alpha V(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha x_1^2(t) + \frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha x_2^2(t) \\ &\leq x_1(t) {}^C D_{t_0}^\alpha x_1(t) + x_2(t) {}^C D_{t_0}^\alpha x_2(t) \\ &\leq -x_1^4(t) - x_2^4(t). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Como  $-x_1^4(t) - x_2^4(t)$  es una función negativa definida, la expresión en (4.32) permite afirmar que  ${}^C D_{t_0}^\alpha V(x_1, x_2)$  es negativa definida. Por lo tanto, usando el Teorema 3, puede concluirse que el origen del sistema (4.27) es asintóticamente estable.

Como se aprecia de este ejemplo, el análisis de estabilidad de los sistemas fraccionarios puede resultar complejo, pero el uso de la función cuadrática en conjunto con el Lema 3 puede facilitar mucho el análisis. En el Capítulo 5 se mostrará cómo los Lemas 4 y 5 serán también de gran utilidad en el análisis de estabilidad de los modelos de error fraccionarios.

Otra de las ventajas que tiene el Lema 3, es que permite su aplicación a funciones no solo de la forma  $x^2$ , sino también a funciones en general de la forma  $x^n$ , si  $n$  es un número par. Esto resulta ventajoso para el análisis de muchos sistemas, para los cuales la función cuadrática  $x^2$  no resulta útil como función de Lyapunov candidata. Introduzcamos un ejemplo ilustrativo de este hecho.

**Ejemplo 2.** Consideremos el siguiente sistema fraccionario no lineal e invariante en el tiempo, con  $\alpha \in (0, 1)$ , definido por

$$\begin{aligned} {}^C D_{t_0}^\alpha x_1(t) &= -x_1(t) + x_2^3(t) \\ {}^C D_{t_0}^\alpha x_2(t) &= -x_1(t) - x_2(t), \end{aligned} \quad (4.33)$$

donde  $x_1(t), x_2(t) \in \mathbb{R}$  son funciones diferenciables.

En este caso, el uso de una función de Lyapunov de la forma  $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2(t) + \frac{1}{2}x_2^2(t)$  no permite establecer conclusiones sobre la estabilidad de este sistema. Sin embargo, se puede

proponer la función de Lyapunov candidata definida por

$$V(x_1(t), x_2(t)) = \frac{1}{2}x_1^2(t) + \frac{1}{4}x_2^4(t), \quad (4.34)$$

que es claramente positiva definida.

Aplicando el Lema 3 puede escribirse entonces

$$\begin{aligned} {}^C D_{t_0}^\alpha V(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha x_1^2(t) + \frac{1}{4} {}^C D_{t_0}^\alpha x_2^4(t) \\ &\leq x_1(t) {}^C D_{t_0}^\alpha x_1(t) + \frac{1}{2} x_2^2(t) {}^C D_{t_0}^\alpha x_2^2(t) \\ &\leq x_1(t) {}^C D_{t_0}^\alpha x_1(t) + x_2^3(t) {}^C D_{t_0}^\alpha x_2(t) \\ &\leq -x_1^2(t) - x_2^4(t). \end{aligned} \quad (4.35)$$

De la Ecuación (4.35) se observa que la derivada fraccionaria de la función de Lyapunov es negativa definida. Por lo tanto, usando el Teorema 3 puede concluirse que el origen del sistema (4.33) es asintóticamente estable.

#### 4.2.2. Estabilidad de sistemas no lineales de orden fraccionario con $\alpha \in (0, 1]$

Además de la aplicación directa de los lemas generados al análisis de estabilidad de sistemas fraccionarios, mediante la extensión fraccionaria del método directo de Lyapunov, éstos han permitido generar un resultado general que es de gran utilidad para el análisis de estabilidad de los sistemas fraccionarios no lineales invariantes en el tiempo, y que puede ser aplicado por ejemplo en el diseño de controladores. Este resultado se presenta a continuación en el Lema 6.

**Lema 6.** *Sea el sistema de orden fraccionario no lineal e invariante en el tiempo dado por*

$${}^C D_{t_0}^\alpha x(t) = f(x(t)), \quad x, f \in \mathbb{R}^n, \quad (4.36)$$

donde  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $x = 0$  es un punto de equilibrio,  $x(t)$  es diferenciable, y  $f$  es localmente Lipschitz en  $x$ . Si se satisface la siguiente condición

$$x^T(t) f(x(t)) \leq 0, \quad \forall x, \quad (4.37)$$

entonces el origen del sistema (4.36) es Lyapunov estable. Y si se satisface que

$$x^T(t) f(x(t)) < 0, \quad \forall x \neq 0, \quad (4.38)$$

entonces el origen del sistema (4.36) es asintóticamente estable.

**Demostración.** Propongamos la función de Lyapunov candidata dada en (4.39), la cual es positiva definida

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T(t) x(t). \quad (4.39)$$

Si aplicamos el Lema 4 puede escribirse

$${}^C D_{t_0}^\alpha V(x) \leq x(t) {}^C D_{t_0}^\alpha x(t). \quad (4.40)$$

Si  $x^T(t) f(x(t)) \leq 0$ , entonces  $x^T(t) {}^C D_{t_0}^\alpha x(t) \leq 0$ , y esto implica que

$${}^C D_{t_0}^\alpha \left[ \frac{1}{2} x^T(t) x(t) \right] \leq 0. \quad (4.41)$$

Aplicando la integral fraccionaria de orden  $\alpha$  a la desigualdad (4.41) se obtiene

$$\frac{1}{2} x^T(t) x(t) - \frac{1}{2} x^T(t_0) x(t_0) \leq 0, \quad \forall t \geq t_0. \quad (4.42)$$

Esto implica que

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\|, \quad \forall t \geq t_0. \quad (4.43)$$

Luego, la expresión (4.43) permite concluir que el origen del sistema (4.36) es estable en el sentido de Lyapunov (Haddad & Chellaboina, 2008).

Si  $x^T(t) f(x(t)) < 0, \forall x \neq 0$ , entonces  $x^T(t) {}^C D_{t_0}^\alpha x(t) < 0, \forall x \neq 0$ , o sea es negativa definida. Por tanto, existirá una función de clase  $K$  de la forma  $\gamma(\|x(t)\|)$  tal que

$$x^T(t) {}^C D_{t_0}^\alpha x(t) \leq \gamma(\|x(t)\|). \quad (4.44)$$

Luego utilizando el Lema 4 y la expresión (4.44) resulta

$${}^C D_{t_0}^\alpha V(x) \leq x^T(t) {}^C D_{t_0}^\alpha x(t) \leq \gamma(\|x(t)\|). \quad (4.45)$$

Basado en el resultado en (4.45) y aplicando el Teorema 2 se concluye que el origen del sistema (4.36) es asintóticamente estable, y esto concluye la demostración.  $\square$

Como puede advertirse, el Lema 6 abarca una gran cantidad de sistemas no lineales, lo cual es un aporte a la teoría de análisis de estabilidad de éstos. Veamos un ejemplo ilustrativo.

**Ejemplo 3.** Consideremos el siguiente sistema fraccionario no lineal e invariante en el tiempo, con  $\alpha \in (0, 1]$ , definido por

$$\begin{aligned} {}^C D_{t_0}^\alpha x_1(t) &= -x_1^3(t) + x_2(t) \\ {}^C D_{t_0}^\alpha x_2(t) &= -x_1(t) - x_2(t), \end{aligned} \quad (4.46)$$

donde  $x_1(t), x_2(t) \in \mathbb{R}$  son funciones diferenciables.

Si denotamos

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad f(x) = \begin{bmatrix} -x_1^3(t) + x_2(t) \\ -x_1(t) - x_2(t) \end{bmatrix}, \quad (4.47)$$

puede comprobarse fácilmente que se cumple que  $x^T(t) f(x(t)) < 0, \forall x \neq 0$ . Luego aplicando el Lema 6 se concluye directamente que el origen del sistema (4.46) es asintóticamente estable.

El Lema 6 puede aplicarse también al diseño de controladores por realimentación de estado para sistemas no lineales, resultado que está contenido en el Corolario 1.

**Corolario 1.** Sea el sistema de orden fraccionario no lineal e invariante en el tiempo dado por

$${}^C D_{t_0}^\alpha x(t) = f(x) + g(x)u \quad \text{con } x, f, g \in \mathbb{R}^n \quad u \in \mathbb{R}, \quad (4.48)$$

donde  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $x = 0$  es un punto de equilibrio cuando  $u = 0$  y  $x(t)$  es diferenciable. Si se utiliza un control por realimentación de estado  $u(x)$  tal que

$$g(x) u(x) |_{x=0} = 0, \quad (4.49)$$

y además

$$x^T [f(x) + g(x) u(x)] < 0, \quad \forall x \neq 0, \quad (4.50)$$

entonces el sistema se estabiliza en el origen asintóticamente.

**Demostración.** Si se utiliza un control por realimentación de estado, la ecuación para el sistema controlado será

$${}^C D_{t_0}^\alpha x(t) = f(x) + g(x) u(x). \quad (4.51)$$

Si llamamos  $h(x) = f(x) + g(x) u(x) \in \mathbb{R}^n$ , la ecuación de lazo cerrado del sistema controlado puede escribirse como

$${}^C D_{t_0}^\alpha x(t) = h(x). \quad (4.52)$$

Como se cumple lo expresado en (4.49), entonces, dado que  $f(x) |_{x=0} = 0$ , esto implica que el sistema controlado (4.52) tendrá como punto de equilibrio el origen.

Además, dada la condición (4.50), en el sistema (4.52) se cumple que  $x^T(t) h(x(t)) < 0$ ,  $\forall x \neq 0$ . Luego, usando el Lema 6 se concluye que el origen del sistema (4.52) es asintóticamente estable, o sea se ha logrado estabilizar asintóticamente el sistema (4.48) en el origen, y esto concluye la demostración.  $\square$

Como puede apreciarse, el Corolario 1 puede aplicarse al control por realimentación de estados de una gran cantidad de sistemas no lineales fraccionarios, resultando de gran utilidad en estos casos.

Ahora bien, ante la pregunta de si es posible establecer algún resultado acerca de la estabilidad de sistemas no lineales variantes en el tiempo, se introduce el Lema 7, el cual permite concluir sobre la estabilidad según Lyapunov de este tipo de sistemas bajo determinadas condiciones.

**Lema 7.** Sea el sistema de orden fraccionario no lineal y variante en el tiempo dado por

$${}^C D_{t_0}^\alpha x(t) = f(t, x(t)) \quad \text{con } x, f \in \mathbb{R}^n, \quad (4.53)$$

donde  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $x = 0$  es un punto de equilibrio,  $x(t)$  es diferenciable,  $f$  es continua por tramos en  $t$  y localmente Lipschitz en  $x$  y además  $f(t, 0) = 0$ . Si se satisface la siguiente condición

$$x^T(t) f(t, x(t)) \leq 0, \quad \forall x, t \geq t_0, \quad (4.54)$$

entonces el origen del sistema (4.53) es Lyapunov estable.

**Demostración.** El Lema 4 plantea que

$$\frac{1}{2} x^T(t) x(t) \leq x(t) {}^C D_{t_0}^\alpha x(t). \quad (4.55)$$

Como en el caso del sistema (4.53) se cumple lo planteado en (4.54), entonces partiendo de (4.55) puede escribirse que

$${}^C D_{t_0}^\alpha \left[ \frac{1}{2} x^T(t) x(t) \right] \leq 0 \quad \forall t \geq t_0. \quad (4.56)$$



Aplicando la integral fraccionaria de orden  $\alpha$  a la desigualdad (4.56) se obtiene

$$\frac{1}{2}x^T(t)x(t) - \frac{1}{2}x^T(t_0)x(t_0) \leq 0, \quad \forall t \geq t_0. \quad (4.57)$$

Esto implica que

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\|, \quad \forall t \geq t_0. \quad (4.58)$$

Luego, la expresión (4.58) permite concluir que el origen del sistema (4.53) es estable en el sentido de Lyapunov, de acuerdo a la definición en Haddad & Chellaboina (2008), y esto concluye la demostración.  $\square$

El Lema 7 resultará de utilidad en el Capítulo 5 para la demostración de la estabilidad de los modelos de error.

### 4.3. Condiciones sobre la integral fraccionaria de una función para garantizar su convergencia

En muchos casos, la aplicación del método de Lyapunov, ya sea entero o fraccionario, no permite concluir directamente acerca de la convergencia de ciertas señales de un sistema, sino solamente respecto de la estabilidad, y por ende que las señales son acotadas. Es en estos casos cuando se requieren herramientas adicionales para establecer conclusiones acerca de la convergencia de ciertas señales del sistema.

En el caso de los sistemas enteros, se utiliza para tales fines el Lema de Barbalat (Popov, 1973) y algunos de sus corolarios (Narendra & Annaswamy, 2005; Ioannou & Fidan, 2006), los cuales se basan en condiciones sobre la función y sobre su integral de orden entero para concluir sobre la convergencia de la función. Sin embargo, en el caso de los sistemas fraccionarios, usualmente es muy difícil establecer condiciones sobre la integral entera de las funciones, y por tanto resulta muy complicado aplicar estas herramientas.

No obstante, es bastante más sencillo establecer condiciones sobre la integral fraccionaria de las funciones, y esa es la razón por la cual resulta de utilidad contar con herramientas que puedan establecer conclusiones sobre la convergencia de una función, pero basadas en características de ésta y de su integral o derivada de orden fraccionario.

Debido a que este no es un resultado que estuviera disponible en la literatura, y dado que resulta necesario para establecer la convergencia de los errores en los modelos de error, que son objeto de estudio de este trabajo, se comenzó a investigar en esta línea. Esta sección muestra las herramientas que se generaron como resultado de esta investigación, las cuales, si bien no contribuyeron a probar la convergencia de los errores en los modelos de error en su totalidad, sí permitieron encaminar los esfuerzos en esa dirección.

Además estos resultados, por ser resultados matemáticos generales, pueden resultar de utilidad para la comunidad científica, razón por la cual, por ejemplo, el Lema 8 fue publicado en Duarte-Mermoud et al. (2013).

En esta sección se realiza una recopilación de los resultados obtenidos referentes a la convergencia de funciones, basado en condiciones que involucran operadores fraccionarios de la función.

### 4.3.1. Nuevos lemas sobre convergencia

El primer resultado que se presentará, contenido en el Lema 8, establece condiciones suficientes sobre la integral fraccionaria del módulo de una función uniformemente continua, para asegurar que la función converge a cero.

**Lema 8.** Sea  $x(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  una función uniformemente continua y acotada. Si existe un  $\alpha \in (0, 1)$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_{t_0}^\alpha |x(t)| = 0, \quad (4.59)$$

entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

**Demostración.** Realizaremos la demostración por contradicción. Supongamos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \neq 0$ . Entonces, existirá una secuencia infinita y no acotada de instantes de tiempo  $\{t_i : i \in \mathbb{N}\}$  y un  $\varepsilon > 0$  tal que

$$|x(t_i)| \geq \varepsilon > 0, \quad \forall t_i \in \mathbb{R}^+. \quad (4.60)$$

Dado que  $x(t)$  es uniformemente continua, entonces para todo  $t_i$  existe un intervalo asociado de la forma  $[t_i - \delta, t_i + \delta]$ , con  $\delta > 0$  tal que

$$|x(t_i) - x(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall t \in [t_i - \delta, t_i + \delta]. \quad (4.61)$$

Usando propiedades del valor absoluto resulta

$$|x(t)| = |x(t_i) - (x(t_i) - x(t))| \geq |x(t_i)| - |(x(t_i) - x(t))|, \quad \forall t \in [t_i - \delta, t_i + \delta]. \quad (4.62)$$

Si usamos ahora (4.60) y (4.61) en (4.62) se obtiene

$$|x(t)| \geq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall t \in [t_i - \delta, t_i + \delta]. \quad (4.63)$$

La integral fraccionaria del valor absoluto de  $x(t)$  en un intervalo  $[t_0, t_i]$  puede descomponerse de la siguiente manera

$$I_{t_0}^\alpha |x|(t_i) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t_i-1} \frac{|x(\tau)|}{(t_i - \tau)^{1-\alpha}} d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_i-1}^{t_i-\delta} \frac{|x(\tau)|}{(t_i - \tau)^{1-\alpha}} d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_i-\delta}^{t_i} \frac{|x(\tau)|}{(t_i - \tau)^{1-\alpha}} d\tau. \quad (4.64)$$

Dado que  $\frac{|x(\tau)|}{(t_i - \tau)^{1-\alpha}} d\tau \geq |x(\tau)| \quad \forall \tau \in [t_i - 1, t_i]$ , entonces resulta

$$\begin{aligned} I_{t_0}^\alpha |x|(t_i) &\geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t_i-1} \frac{|x(\tau)|}{(t_i - \tau)^{1-\alpha}} d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_i-1}^{t_i-\delta} |x(\tau)| d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_i-\delta}^{t_i} |x(\tau)| d\tau \\ &\geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_i-\delta}^{t_i} |x(\tau)| d\tau. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Luego, usando (4.63) en (4.65) resulta

$$I_{t_0}^\alpha |x|(t_i) \geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_i-\delta}^{t_i} \frac{\varepsilon}{2} d\tau = \frac{\varepsilon}{2\Gamma(\alpha)} (t_i - (t_i - \delta)) = \frac{\varepsilon\delta}{2\Gamma(\alpha)}. \quad (4.66)$$

Como la secuencia  $\{t_i\}$  es infinita, la expresión en (4.66) contradice el supuesto de que  $\lim_{t \rightarrow \infty} I_{t_0}^\alpha |x|(t) = 0$ , y esto concluye la demostración.  $\square$

El Lema 8 es una condición suficiente para demostrar la convergencia a cero de una función, pero no es necesaria. Esto puede ejemplificarse fácilmente para el caso de la función  $x(t) = t^{-\alpha}$ , cuya integral fraccionaria de orden  $\alpha$  resulta  $I_{t_0}^\alpha |x|(t) = I_{t_0}^\alpha t^{-\alpha} = \Gamma(1 - \alpha)$ .

No obstante, hay muchas funciones para las cuales el Lema 8 sí es válido, como lo corroboran los ejemplos a continuación.

**Ejemplo 4.** Sea  $x(t) = t^{-\gamma}$ ,  $\gamma \in (0, 1)$ . En este caso,  $|x(t)| = x(t)$ , y de acuerdo a Kilbas et al. (2006), la integral fraccionaria  $I_{t_0}^\alpha t^{-\gamma}$  resulta

$$I_{t_0}^\alpha t^{-\gamma} = \frac{\Gamma(1 - \gamma)}{\Gamma(1 - \gamma + \alpha)} t^{\alpha - \gamma}. \quad (4.67)$$

Puede apreciarse de (4.67) que usando un  $\alpha < \gamma$ , resulta en que  $\lim_{t \rightarrow \infty} I_{t_0}^\alpha t^{-\gamma} = 0$ , lo cual es consistente con el resultado en el Lema 8.

**Ejemplo 5.** Sea  $x(t) = e^{-t}$ . En este caso,  $|x(t)| = x(t)$ . No existe una expresión establecida para la integral fraccionaria de la función  $x(t) = e^{-t}$ , pero en cambio puede afirmarse que

$$e^{-t} < t^{-\gamma}, \quad \forall \gamma \in (0, 1). \quad (4.68)$$

Basado en (4.68) y de acuerdo a Chen (2012), puede concluirse que

$$I_{t_0}^\alpha e^{-t} < I_{t_0}^\alpha t^{-\gamma}, \quad \forall \gamma \in (0, 1), \quad \forall t \geq t_0, \quad \text{con } \alpha \in (0, 1]. \quad (4.69)$$

Del Ejemplo 4 se sabe que para un  $\alpha < \gamma$ , resulta que  $\lim_{t \rightarrow \infty} I_{t_0}^\alpha t^{-\gamma} = 0$ . Luego, de (4.69) puede concluirse que  $\lim_{t \rightarrow \infty} I_{t_0}^\alpha e^{-t} = 0$ , lo cual es consistente con el resultado en el Lema 8.

Ahora bien, muchas veces no es posible establecer directamente que la integral fraccionaria de una función converge a cero, por ejemplo porque no se conoce su forma exacta. Sin embargo sí es posible acotar esta integral a través de una función conocida, y en esos casos el Corolario 2 puede resultar útil.

**Corolario 2.** Sea  $x(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  una función uniformemente continua. Si existe un  $\alpha \in (0, 1]$  tal que

$$I_{t_0}^\alpha |x(t)| = o(g(t)), \quad (4.70)$$

donde  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$  y  $o(\cdot)$  denota el operador menor orden (Narendra & Annaswamy, 1985), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

**Demostración.** Dado que  $I_{t_0}^\alpha |x(t)| = o(g(t))$ , el hecho de que  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ , implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_{t_0}^\alpha |x(t)| = 0.$$

Luego usando el Lema 2 se concluye que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ . □

Como puede apreciarse, el Lema 8 requiere la convergencia de la integral fraccionaria de la función a cero, para probar que la función converge a cero. Este lema no puede considerarse el equivalente fraccionario del Lema de Barbalat (Narendra & Annaswamy, 2005), pues no es suficiente con que la integral converja a un valor finito cualquiera, sino que ese límite debe ser cero. La pregunta que inmediatamente se formula es: ¿Es posible probar que la función converge a cero sabiendo que su integral fraccionaria converge a un límite diferente de cero? Este caso también se consideró dentro de la investigación, pero no se pudieron establecer resultados concluyentes al respecto.

No obstante, aún teniendo el equivalente fraccionario del Lemma de Barbalat, este resultado no resulta útil en la demostración de convergencia del error de salida de los modelos de error, pues en esos casos no es posible probar que la integral fraccionaria del error cuadrático converge a un límite. En el caso de los modelos de error enteros sucede algo similar, pues no es posible probar que la integral entera del error cuadrático converge a un límite, solo se puede probar que es acotada. En ese caso, se utiliza uno de los corolarios del Lema de Barbalat entero para probar la convergencia del error de salida, presentado a continuación en el Corolario 3.

**Corolario 3** ((Narendra & Annaswamy, 2005)). *Sea  $g(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  una función uniformemente continua. Si  $g(t), \dot{g}(t) \in \mathcal{L}^\infty$  y además  $g(t) \in \mathcal{L}^p$ , con  $p \in [1, \infty)$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ .*

La pregunta que inmediatamente surge en el caso fraccionario es ¿Existe un equivalente fraccionario del Corolario 3? Lamentablemente, la respuesta a esta interrogante es negativa cuando  $\alpha \in (0, 1)$ . Es decir, no es suficiente con que una función sea uniformemente continua y acotada, y su integral de orden  $\alpha \in (0, 1)$  sea acotada, para concluir que la función converge a cero.

La razón de que el Corolario 3 sea cierto está dada porque la integral entera de una función positiva es siempre no decreciente. Luego, al ser esta integral acotada, necesariamente converge a un límite y utilizando el Lema de Barbalat entero, se concluye que la función converge a cero.

Sin embargo, la integral fraccionaria de una función positiva sí puede decrecer cuando  $\alpha \in (0, 1)$ . Esto se debe simplemente a que la integral fraccionaria no pondera de igual forma la función en todos los instantes de tiempo. Este solo hecho, hace que no sea posible establecer que la integral convergerá a un límite solo por ser acotada, pues podría crecer y decrecer indefinidamente sin converger, y por lo tanto no puede concluirse sobre la convergencia a cero de la función.

Ahora bien, ya que no es posible concluir que la función converge a cero, ¿Será posible establecer alguna conclusión útil sobre ella sabiendo solamente que su integral fraccionaria es acotada? La respuesta a esta interrogante está contenida en el Lema 9.

**Lema 9.** *Sea  $x(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  una función uniformemente continua y acotada. Si existe un  $\alpha \in (0, 1]$  tal que*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{x^2(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau < M, \quad \forall t \geq t_0, \quad \text{con } 0 < M < \infty, \quad (4.71)$$

entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ t^{\alpha - \varepsilon} \frac{\int_{t_0}^t x^2(\tau) d\tau}{t} \right] = 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (4.72)$$

**Demostración.** Comencemos desarrollando la expresión

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{t^{(1-\alpha)+\varepsilon}} \int_{t_0}^t x^2(\tau) d\tau \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{t^\varepsilon} \int_{t_0}^t \frac{x^2(\tau)}{t^{1-\alpha}} d\tau \right].$$

Como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \int_{t_0}^t \frac{x^2(\tau)}{t^{1-\alpha}} d\tau \right] \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \int_{t_0}^t \frac{x^2(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \right],$$

entonces podemos decir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{t^\varepsilon} \int_{t_0}^t \frac{x^2(\tau)}{t^{1-\alpha}} d\tau \right] \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{t^\varepsilon} \int_{t_0}^t \frac{x^2(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \right]. \quad (4.73)$$

Por hipótesis se sabe que

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{x^2(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau < M, \quad \forall t \geq t_0, \quad \text{con } 0 < \alpha < 1, \quad 0 < M < \infty,$$

por lo tanto

$$\int_{t_0}^t \frac{x^2(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau < M\Gamma(\alpha), \quad \forall t \geq t_0, \quad \text{con } 0 < \alpha < 1, \quad 0 < M < \infty. \quad (4.74)$$

Luego, usando (4.74) en (4.73) puede escribirse

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{t^\varepsilon} \int_{t_0}^t \frac{x^2(\tau)}{t^{1-\alpha}} d\tau \right] \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{M\Gamma(\alpha)}{t^\varepsilon} \right]. \quad (4.75)$$

Como se sabe que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{M\Gamma(\alpha)}{t^\varepsilon} \right] = 0$  entonces necesariamente se cumple que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{t^\varepsilon} \int_{t_0}^t \frac{x^2(\tau)}{t^{1-\alpha}} d\tau \right] = 0. \quad (4.76)$$

La expresión (4.76) puede reescribirse sencillamente de la forma

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ t^{\alpha-\varepsilon} \frac{\int_{t_0}^t x^2(\tau) d\tau}{t} \right] = 0, \quad (4.77)$$

y esto completa la demostración.  $\square$

El Lema 9 nos dice que, si bien no podemos establecer condiciones de convergencia sobre la función de manera puntual, partiendo de que su integral fraccionaria es acotada, sí podemos interpretar que su promedio en el tiempo tendrá una "tendencia" decreciente para tiempos lo suficientemente grandes, lo cual podría resultar de utilidad en alguna aplicación.

Finalmente, se expone en esta sección un resultado que aborda la convergencia a cero de funciones acotadas y uniformemente continuas, para el caso  $\alpha \in [1, 2)$ . Si bien en este trabajo no se tratan los modelos de error fraccionarios en ese intervalo, el resultado expuesto a continuación en el Lema 10 puede resultar de utilidad para el análisis de la convergencia de sistemas fraccionarios en dicho intervalo, y además su demostración hace uso del Lema 8.

**Lema 10.** *Sea  $x(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  una función uniformemente continua y acotada. Si existe un  $\alpha \in [1, 2)$  tal que la integral de orden  $\alpha$  del módulo de la función es acotada, o sea*

$$I_{t_0}^\alpha |x(t)| \leq M, \quad \alpha \in [1, 2), \quad (4.78)$$

entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

**Demostración.** Para realizar la demostración, descompongamos la ecuación (4.78) utilizando la Propiedad 2 de la integral fraccionaria (ver (3.5)). De este modo puede escribirse

$$I_{t_0}^\alpha |x(t)| = I_{t_0}^{1+\beta} |x(t)| = I_{t_0}^1 I_{t_0}^\beta |x(t)|, \quad \text{con } \beta = \alpha - 1 \text{ y } 0 \leq \beta < 1. \quad (4.79)$$

De acuerdo a Samko et al. (1993), si una función es acotada, entonces su integral de orden  $\beta \in (0, 1)$  satisface la condición de Hölder, lo cual implica que será uniformemente continua. Por lo tanto, en este caso, dado que  $x(t)$  es acotada, podemos afirmar que  $I_{t_0}^\beta |x(t)|$  es uniformemente continua.

Además, como  $I_{t_0}^\alpha |x(t)| \leq M$  y  $I_{t_0}^\alpha |x(t)| = I_{t_0}^1 I_{t_0}^\beta |x(t)|$ , entonces necesariamente  $I_{t_0}^\beta |x(t)|$  será acotada, o de lo contrario se produciría una contradicción. Luego, como sabemos que  $I_{t_0}^\beta |x(t)|$  es uniformemente continua y además es acotada, y sabemos que su integral entera también es acotada, podemos aplicar el Corolario 3, con lo cual se concluye que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_{t_0}^\beta |x(t)| = 0, \quad 0 \leq \beta < 1. \quad (4.80)$$

Dado el resultado en la expresión (4.80), y dado que la función  $x(t)$  es una función acotada y uniformemente continua, entonces utilizando el Lema 8 puede afirmarse que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0,$$

y esto concluye la demostración. □

Una anotación importante sobre el Lema 10 está relacionada con el caso  $\alpha = 2$ , el cual no está incluido en dicho lema, debido a que éste sería válido solamente para el caso trivial en que  $x(t)$  es la función nula. Para comprobarlo, basta con descomponer la integral de orden 2 como  $I_{t_0}^2 |x(t)| = I_{t_0}^1 I_{t_0}^1 |x(t)|$ , y claramente puede apreciarse que esta integral solamente podría ser acotada cuando  $x(t) = 0 \forall t$ .

# 5 Análisis de la estabilidad y desempeño de los modelos de error fraccionarios

Este capítulo presenta el análisis de los cuatro modelos de error fraccionarios, que han surgido como resultado de la introducción de los operadores fraccionarios en los esquemas adaptables. La metodología de análisis para los cuatro modelos de error comienza con estudios por simulaciones, a partir de los cuales se establecen las primeras observaciones acerca del comportamiento de éstos, para luego pasar al estudio analítico de la estabilidad y la convergencia de los errores.

En el caso de los estudios por simulaciones, para los cuatro modelos de error se comenzó con el análisis del caso escalar, para luego pasar al caso vectorial. No obstante, solamente se presentan en este documento las simulaciones del caso escalar para el Modelo de Error Fraccionario 1, debido a que se abordan analíticamente algunos detalles particulares de este caso. En el caso vectorial, se presentan los resultados para los casos en  $\mathbb{R}^2$ , por ser los más simples desde el punto de vista gráfico y al mismo tiempo ser representativo del resto de los casos en  $\mathbb{R}^n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ . Estos estudios por simulaciones básicamente consistieron en aplicar diferentes señales auxiliares (de información)  $\omega(t)$  acotadas y observar el comportamiento del error de salida  $e(t)$  y del error paramétrico  $\phi(t)$ . Aunque se aplicaron numerosos tipos de señales de entrada, durante el análisis fue evidente que habían determinadas características de estas señales que implicaban diferente comportamiento en cuanto a la convergencia de los errores. Por lo tanto, en este trabajo se reportan resultados por simulaciones para un grupo representativo de señales de entrada, con las cuales se logra mostrar todas aquellas características importantes del desempeño de los modelos de error. Los detalles de estas señales son introducidos durante el análisis del Modelo de Error Fraccionario 1.

## 5.1. Modelos de error fraccionarios en el control adaptable

Desde el punto de vista de estabilidad y desempeño, los sistemas adaptables pueden ser analizados estudiando el comportamiento del error de salida y del error de los parámetros como funciones del tiempo. Los modelos matemáticos que describen la evolución de estos errores se conocen como modelos de error (Narendra & Annaswamy, 2005).

En términos generales, la ecuación del error de salida  $e(t) \in \mathbb{R}^n$  en un modelo de error fraccionario puede plantearse de la siguiente forma

$${}^C D_{t_0}^\beta e(t) = f(e, \phi, \omega, t) \quad \text{con } f, e \in \mathbb{R}^n, \phi, \omega \in \mathbb{R}^m, \quad (5.1)$$

donde  $\phi$  es el error paramétrico a lo largo del tiempo  $t$ . La ecuación (5.1) generalmente puede ser obtenida en determinado sistema adaptable directamente desde las ecuaciones que describen la planta y el controlador.



El objetivo de la adaptación en los problemas de control es determinar una función  $g \in \mathbb{R}^m$ , de modo que la ecuación diferencial (5.2) en conjunto con la (5.1) aseguren que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$ , y en los problemas de identificación se desea además que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t)\| = 0$ .

$${}^C D_{t_0}^\alpha \phi(t) = g(e, \omega, t) \quad (5.2)$$

La ecuación (5.2) es conocida como la ley de ajuste de los parámetros, y en conjunto con la ecuación (5.1) constituyen el modelo de error correspondiente.

Es importante destacar que la aparición de los operadores fraccionarios amplía de manera significativa las posibilidades de implementación en los esquemas adaptables, pues permite seleccionar órdenes de derivación diferentes de los enteros ya conocidos para las leyes de ajuste. Esto, unido a la posibilidad de tener ecuaciones para el error de salida descritas por derivadas de orden fraccionario, implica que también se amplían las combinaciones posibles que se pueden dar en un modelo de error.

En el caso entero existen cuatro modelos de error que han sido completamente estudiados (Narendra & Annaswamy, 2005). La generalización de éstos da lugar a cuatro modelos de error fraccionarios, los cuales se presentan y son estudiados a continuación.

## 5.2. Modelo de Error Fraccionario 1

El Modelo de Error Fraccionario 1 (en adelante MEF1) es el más simple de todos. En éste, el error de salida es una combinación algebraica del vector de información (entrada) y los parámetros. La Figura 5.1 muestra el esquema asociado a este modelo de error.

Como puede apreciarse de la Figura 5.1, la ecuación del error correspondiente a este modelo de error está dada por

$$e(t) = \phi^T(t) \omega(t), \quad (5.3)$$

donde  $e(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  es el error de salida,  $\theta^* \in \mathbb{R}^n$  es el parámetro ideal que se supone desconocido,  $\theta(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  es el parámetro ajustable que estima  $\theta^*$ ,  $\phi(t) = \theta(t) - \theta^* : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  es el error paramétrico y  $\omega(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  es la señal de entrada, denominado también como el vector de información o la señal auxiliar.

El objetivo es determinar una regla fraccionaria para ajustar  $\phi(t)$  a partir del conocimiento de  $\omega(t)$  y del error  $e(t)$ , de forma tal que el error de salida  $e(t)$  tienda a cero asintóticamente. Para

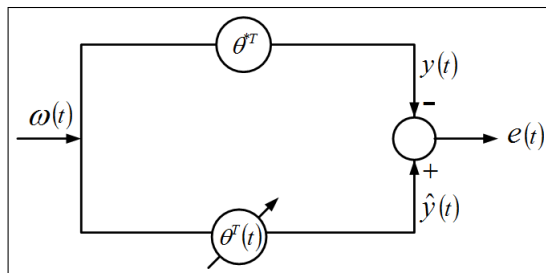


Figura 5.1: Esquema del Modelo de Error Fraccionario 1.

este caso, se escoge la ley de ajuste dada por.

$${}^C D_{t_0}^\alpha \phi(t) = -\gamma e(t) \omega(t), \quad \text{para } \alpha \in (0, 2), \quad (5.4)$$

donde  $\gamma \in \mathbb{R}^+$  representa la ganancia adaptable, que en este estudio se supone constante, aunque también puede ser variante en el tiempo. Incluso, en el caso vectorial,  $\gamma$  puede ser una matriz de dimensión  $n \times n$ , lo que permite ponderar de manera diferente el ajuste de cada parámetro (ver (Narendra & Annaswamy, 2005)).

Con respecto al orden de derivación  $\alpha$ , es preciso señalar que el caso  $\alpha = 1$  es un caso particular de este modelo de error, y corresponde al Modelo de Error 1 clásico, el cual ya está completamente estudiado (Narendra & Annaswamy, 2005).

Luego las ecuaciones que describen el MEF1 son

$$\begin{aligned} e(t) &= \phi^T(t) \omega(t) \\ {}^C D_{t_0}^\alpha \phi(t) &= -\gamma e(t) \omega(t), \quad \text{con } \alpha \in (0, 2). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Si bien la definición de este modelo de error considera el orden de derivación en el intervalo  $\alpha \in (0, 2)$ , en esta Tesis se ha abarcado el estudio solo del caso  $\alpha \in (0, 1]$ . Por lo tanto se presentan tanto los estudios por simulaciones como los desarrollos analíticos correspondientes a este intervalo. Del mismo modo, nos referiremos al análisis de la convergencia del error de salida y del error paramétrico también de forma analítica, para casos particulares de funciones  $\omega(t)$ .

### 5.2.1. Estudios por simulación del Modelo de Error Fraccionario 1, caso escalar

Como fue adelantado al inicio de este capítulo, durante el desarrollo de este trabajo se identificaron características en las señales  $\omega(t)$  que resultan determinantes en el comportamiento de los errores. Por lo tanto, se presentarán los resultados obtenidos de aplicar un grupo de señales  $\omega(t)$ , las cuales son representativas de todas aquellas características que se desean mostrar.

Básicamente hay dos aspectos fundamentales en las señales  $\omega(t)$  que determinan un comportamiento diferente de los errores de salida y errores paramétricos en los modelos de error. Para el caso escalar, la primera característica está relacionada con el acotamiento de la integral fraccionaria del cuadrado de la señal  $\omega(t)$ ,  $I_{t_0}^\alpha \omega^2(t)$ , siendo  $\alpha$  el orden de derivación utilizado en la ley de ajuste. El hecho de que esta integral sea acotada o no, implica comportamientos diferentes en el error paramétrico. Por lo tanto se utilizan señales  $\omega(t)$  tales que la integral fraccionaria correspondiente,  $I_{t_0}^\alpha \omega^2(t)$ , es acotada y otras señales para las cuales dicha integral no es acotada.

Del mismo modo, ya sea que las señales  $\omega(t)$  tengan integral fraccionaria  $I_{t_0}^\alpha \omega^2(t)$  acotada o no acotada, otra característica importante en la señal de información está relacionada con el hecho de si esta señal converge a un límite o no. Por lo tanto, se utilizan señales  $\omega(t)$  acotadas que convergen a un límite y otras cuyo límite no existe.

La Tabla 5.1 muestra el conjunto de señales auxiliares  $\omega(t)$  que se aplican para el análisis del caso escalar. Las señales auxiliares  $\omega(t) = 1$  y  $\omega(t) = \sin(t)$  corresponden a señales cuya integral fraccionaria  $I_{t_0}^\alpha \omega^2(t)$  no es acotada. Para el caso  $\omega(t) = 1$  esta señal converge a un límite y para el caso  $\omega(t) = \sin(t)$  el límite no existe. Se utiliza una tercera señal  $\omega(t) = e^{-t}$ , en cuyo caso la

Tabla 5.1: Señales auxiliares utilizadas en los estudios por simulaciones para el caso escalar de los modelos de error fraccionarios.

Caso 1	$\omega(t) = 1$
Caso 2	$\omega(t) = \sin(t)$
Caso 3	$\omega(t) = e^{-t}$
Caso 4	$\omega(t) = \sum_{n \geq 1} (t - n^\beta + 1) \mathbb{1}_{[n^\beta - 1, n^\beta]} + (n^\beta + 1 - t) \mathbb{1}_{[n^\beta, n^\beta + 1]}$

integral fraccionaria  $I_{t_0}^\alpha \omega^2(t)$  es acotada y la función converge a un límite (cero). Finalmente, se utiliza una cuarta señal de entrada definida como

$$\omega(t) = \sum_{n \geq 1} (t - n^\beta + 1) \mathbb{1}_{[n^\beta - 1, n^\beta]} + (n^\beta + 1 - t) \mathbb{1}_{[n^\beta, n^\beta + 1]}, \quad (5.6)$$

con  $\beta = 3$  y  $\mathbb{1}[a, b]$  denota  $\begin{cases} 1 & \text{si } t \in [a, b] \\ 0 & \text{si } t \notin [a, b] \end{cases}$ .

Esta función corresponde a pulsos triangulares de amplitud máxima 1 que se van espaciando en el tiempo. Lo interesante de esta función es que su integral fraccionaria  $I_{t_0}^\alpha \omega^2(t)$  no es acotada cuando  $\alpha > 0,5$ , pero sí resulta acotada cuando  $\alpha \leq 0,5$ . Además, la función no converge a un límite, por lo tanto podrán apreciarse diferencias en el comportamiento de los errores cuando se utilizan leyes de ajuste con diferentes órdenes  $\alpha$ .

En función de las señales auxiliares ya definidas en la Tabla 5.1, se procede a reportar los resultados obtenidos y las conclusiones correspondientes. Se presentan superpuestos en un mismo gráfico, los resultados obtenidos utilizando diferentes órdenes de derivación  $\alpha$  para la ley de ajuste, con el objetivo de mostrar las principales diferencias que aparecen en función de  $\alpha$  y poder establecer comparaciones.

Para estos estudios por simulaciones se ha utilizado  $\theta^* = -5$ , donde  $\theta^*$  es el valor real del parámetro desconocido del esquema, y está relacionado con el error paramétrico a través de la expresión  $\phi(t) = \theta(t) - \theta^*$ , siendo  $\theta(t)$  el parámetro estimado, el cual se ajusta mediante una ley de ajuste fraccionaria de orden  $\alpha$ . Para las simulaciones se utilizó como condición inicial  $\theta(0) = 1$ .

Comenzando con el análisis, la Figura 5.2 muestra la evolución del error de salida  $e(t)$  para el MEF1 escalar, utilizando la señal  $\omega(t)$  constante definida en el Caso 1 de la Tabla 5.1. Del mismo modo, la Figura 5.3 muestra la evolución del correspondiente error paramétrico  $\phi(t)$ .

Como puede apreciarse de ambas figuras, para todos los órdenes  $\alpha$  utilizados, tanto el error de salida como el error paramétrico permanecen acotados y además convergen a cero. Un detalle importante es que para este tipo de entrada tanto  $e(t)$  como  $\phi(t)$  no cambian su signo, sino que mantienen el signo de su condición inicial. Además, puede apreciarse que para esta entrada la evolución de  $\phi(t)$  es monótona, en este caso estrictamente decreciente. Con respecto a los órdenes de derivación utilizados, puede apreciarse que la velocidad con que decrecen los errores es mayor en la medida que el orden se acerca a 1, siendo por tanto el caso clásico ( $\alpha = 1$ ) el de más rápida convergencia.

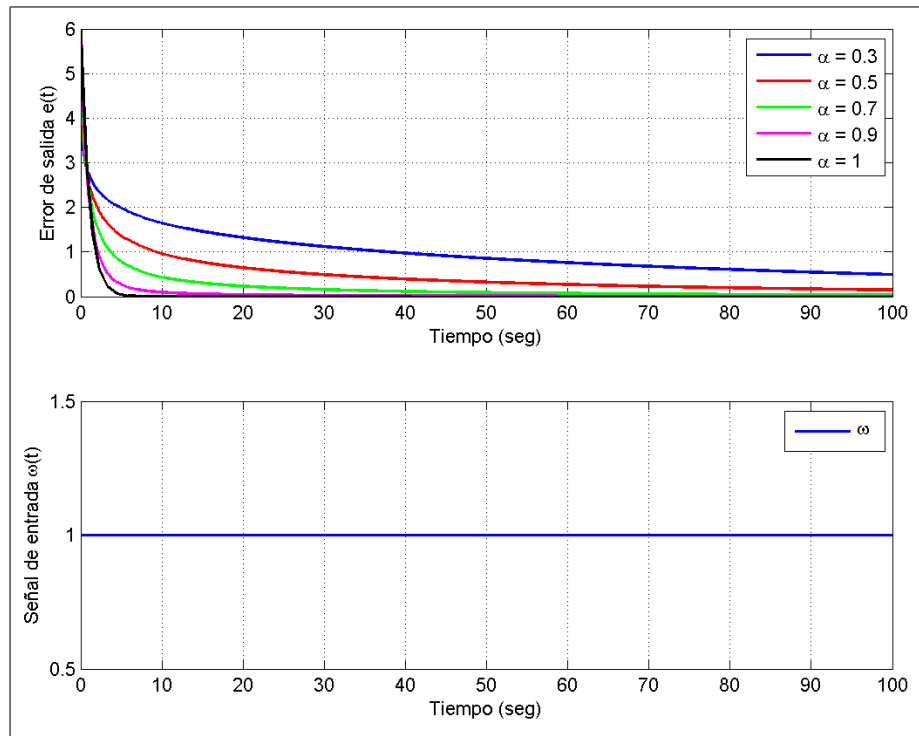


Figura 5.2: Evolución del error de salida  $e(t)$  del Modelo de Error Fraccionario 1, cuando la señal de información  $\omega(t)$  corresponde al Caso 1 de la Tabla 5.1.

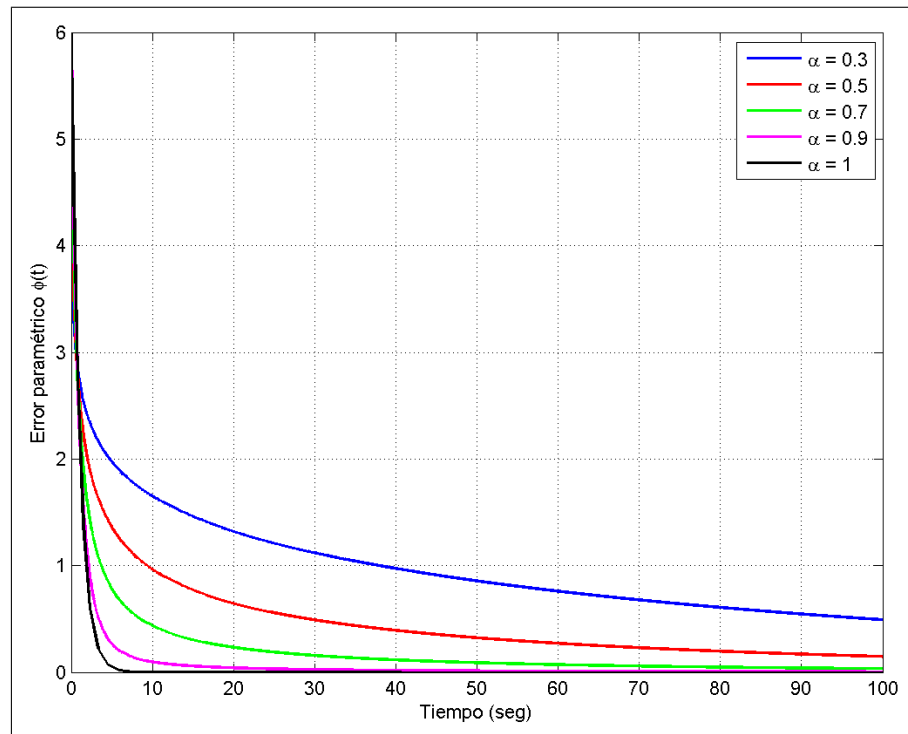


Figura 5.3: Evolución del error paramétrico  $\phi(t)$  del Modelo de Error Fraccionario 1, cuando la señal de información  $\omega(t)$  corresponde al Caso 1 de la Tabla 5.1.

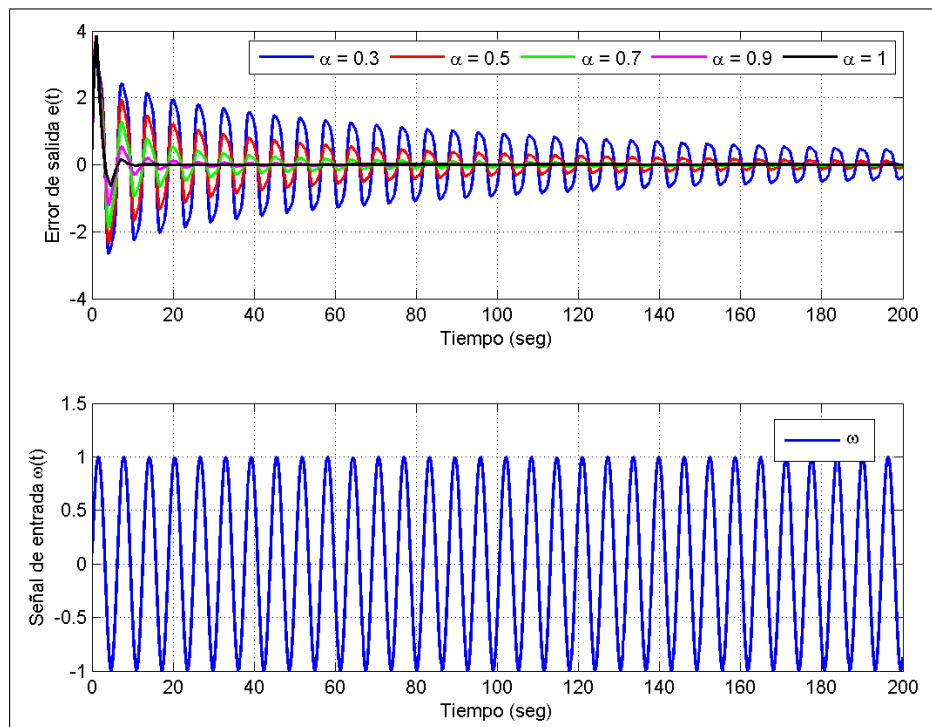


Figura 5.4: Evolución del error de salida  $e(t)$  del Modelo de Error Fraccionario 1, cuando la señal de información  $\omega(t)$  corresponde al Caso 2 de la Tabla 5.1.

Las Figuras 5.4 y 5.5 muestran la evolución del error de salida  $e(t)$  y el error paramétrico  $\phi(t)$  respectivamente, cuando la señal  $\omega(t)$  es senoidal, definida en el Caso 2 de la Tabla 5.1. Como puede apreciarse, al igual que en el Caso 1, ambos errores permanecen acotados y convergen a cero.

Sin embargo, en este caso la evolución del error paramétrico no es monótona como sucedía en el Caso 1, sino que tiene intervalos de crecimiento y de decrecimiento. No obstante, debemos exceptuar el caso  $\alpha = 1$ , en que el error paramétrico tiene un comportamiento no creciente, es decir solamente decrece o permanece constante. Ello está relacionado con el hecho de que en este caso la evolución de  $\phi(t)$  en el tiempo está determinada por la integral entera de una función no negativa, que siempre crece o permanece constante, lo cual no es así para el caso de la integral fraccionaria cuando  $0 < \alpha < 1$ . Los detalles analíticos de este comportamiento serán analizados más adelante, en la Subsección 5.2.4. Debe mencionarse además que, a pesar de no ser monótono,  $\phi(t)$  no llega a alcanzar nuevamente el valor de su condición inicial una vez que ha decrecido.

Respecto del signo de los errores, en este caso el error paramétrico también mantiene el signo de su condición inicial, resultado que será corroborado analíticamente en la Subsección 5.2.4. El error de salida, por su parte, sí presenta cambios de signo, a diferencia de lo que se observó en el Caso 1, lo cual parece estar justificado por el hecho de que la función  $\omega(t)$  cambia de signo, a pesar de que  $\phi(t)$  mantiene su signo. Luego, dada la expresión del error de salida,  $e(t) = \phi(t)\omega(t)$ , resulta natural que  $e(t)$  cambie de signo. Respecto de la rapidez de convergencia, al igual que sucedió en el Caso 1, en este caso la convergencia de los errores es más rápida cuando los órdenes de derivación  $\alpha$  se acercan a 1.

Las Figuras 5.6 y 5.7, por su parte, muestran la evolución del error de control y el error

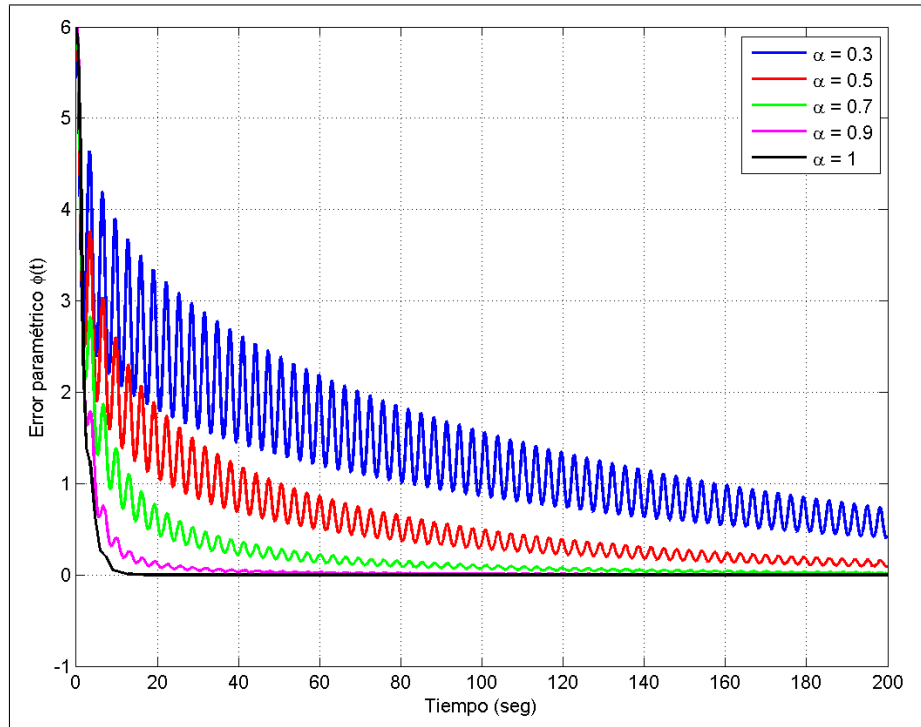


Figura 5.5: Evolución del error paramétrico  $\phi(t)$  del Modelo de Error Fraccionario 1, cuando la señal de información  $\omega(t)$  corresponde al Caso 2 de la Tabla 5.1

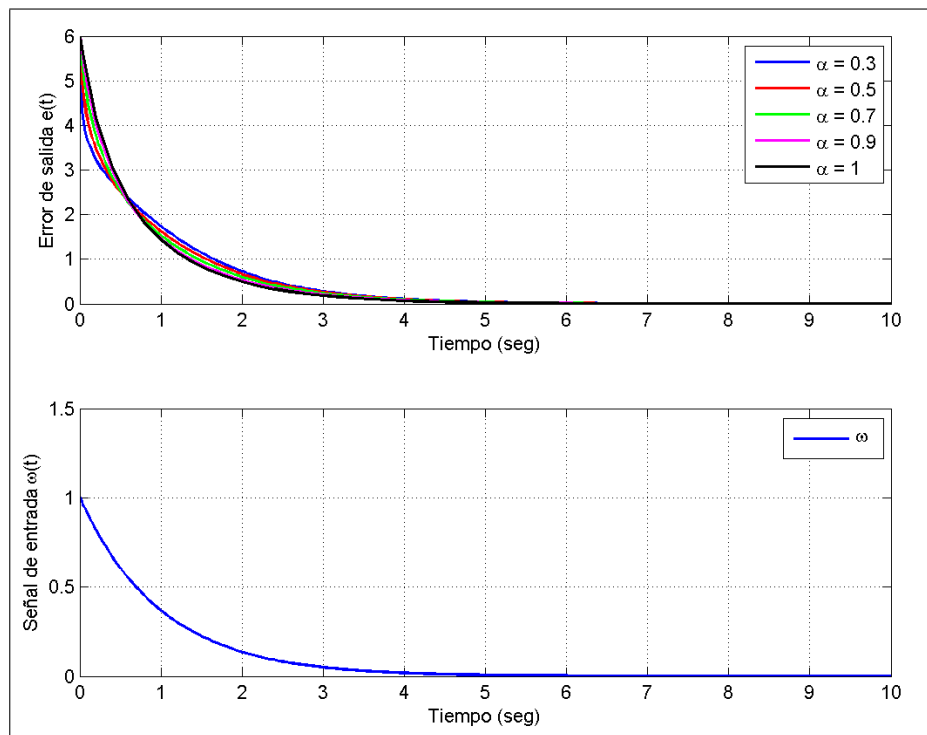


Figura 5.6: Evolución del error de salida  $e(t)$  del Modelo de Error Fraccionario 1, cuando la señal de información  $\omega(t)$  corresponde al Caso 3 de la Tabla 5.1.

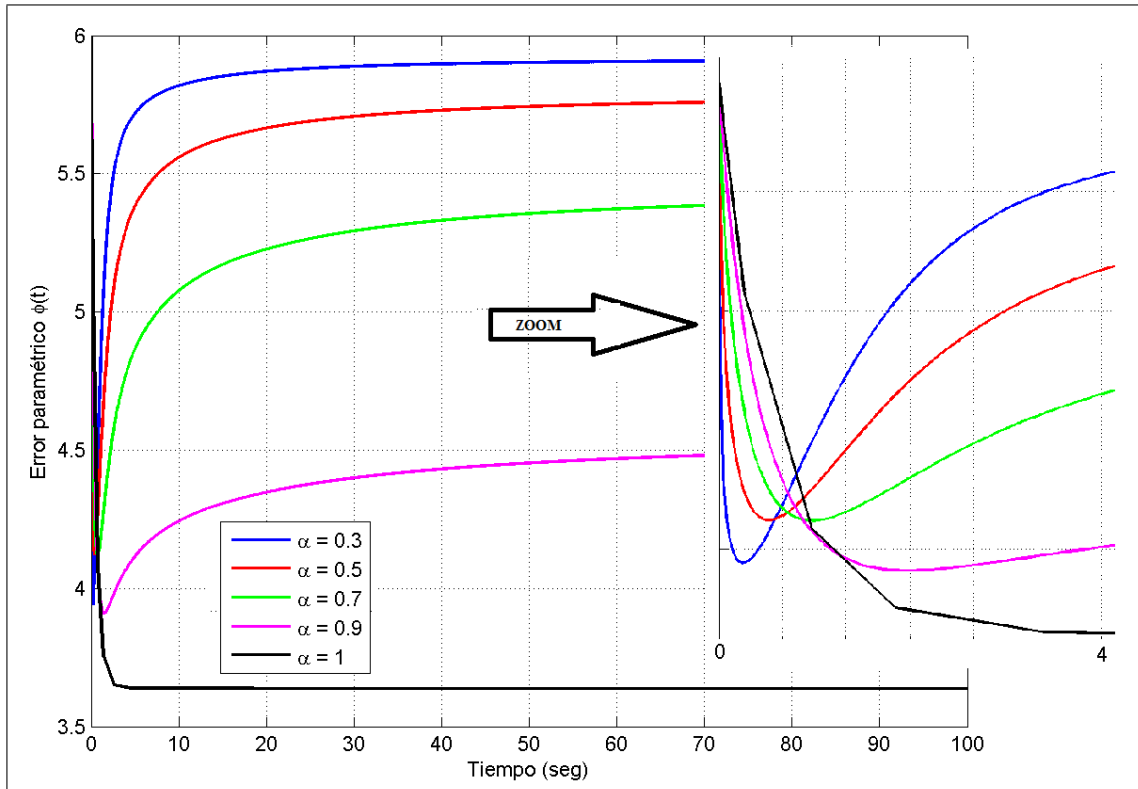


Figura 5.7: Evolución del error paramétrico  $\phi(t)$  del Modelo de Error Fraccionario 1, cuando la señal de información  $\omega(t)$  corresponde al Caso 3 de la Tabla 5.1.

paramétrico respectivamente, cuando la señal  $\omega(t)$  corresponde al Caso 3 de la Tabla 5.1. Como puede apreciarse, al igual que lo que se observó en los Casos 1 y 2, en este caso ambos errores permanecen acotados. Sin embargo, aquí aparece una diferencia importante, y es que el error de salida sí converge a cero como en los Casos 1 y 2, pero el error paramétrico no converge a cero, sino a un valor diferente de cero. Este comportamiento parece estar relacionado con el hecho de que, en este caso, la integral  $I_{t_0}^{\alpha} \omega^2(t)$  es acotada, a diferencia de lo que sucedía en los Casos 1 y 2, en los cuales dicha integral no era acotada.

Respecto del signo de los errores, al igual que en los dos casos anteriores, el error paramétrico conserva el signo de su condición inicial. El error de salida en este caso no cambia de signo, debido a que la señal  $\omega(t)$  no cambia de signo, tal como se explicó en el Caso 2.

Respecto a la monotonía del error paramétrico, en este caso tiene un comportamiento peculiar cuando  $\alpha < 1$ . Hay un intervalo de tiempo inicial en el cual decrece, para luego comenzar a crecer sin volver a experimentar cambios en su monotonía, tal como puede apreciarse en el acercamiento de la Figura 5.7. Esto, en conjunto con otras pruebas adicionales que se realizaron, nos hacen intuir que para que  $\phi(t)$  sea monótono en el caso  $\alpha < 1$ , no basta con que la señal de entrada lo sea, sino que además ésta debe ser no decreciente y no cambiar de signo, es decir no cruzar por cero. Esta afirmación, sin embargo, es solamente una intuición partiendo de los resultados observados en las diferentes simulaciones, pero no tiene fundamento analítico en este momento. El caso  $\alpha = 1$  es diferente, pues en este caso la evolución de  $\phi(t)$  sí es monótona, debido a lo que ya se explicó en el Caso 2.

Las velocidades de convergencia de los errores en este caso coinciden con lo observado en

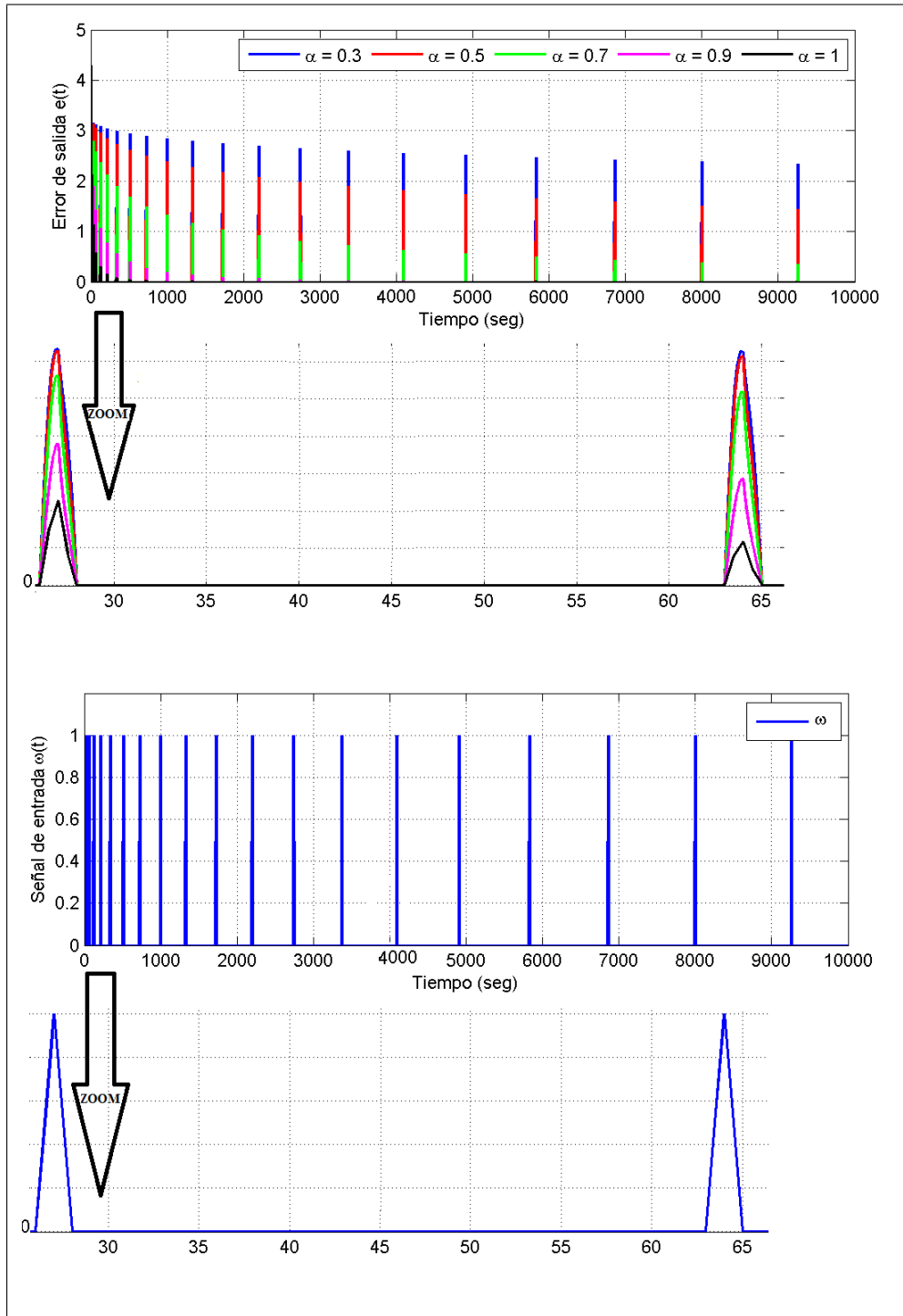


Figura 5.8: Evolución del error de salida  $e(t)$  en el Modelo de Error Fraccionario 1, cuando la señal de información  $\omega(t)$  corresponde al Caso 4 de la Tabla 5.1.

los casos anteriores, donde la velocidad aumenta a medida que  $\alpha$  se acerca a 1.

Los resultados obtenidos al aplicar la señal  $\omega(t)$  definida en el Caso 4 de la Tabla 5.1, se muestran en las Figuras 5.8 y 5.9, que corresponden a la evolución de  $e(t)$  y  $\phi(t)$  respectivamente.

Como puede apreciarse, al igual que en el resto de los casos presentados anteriormente,



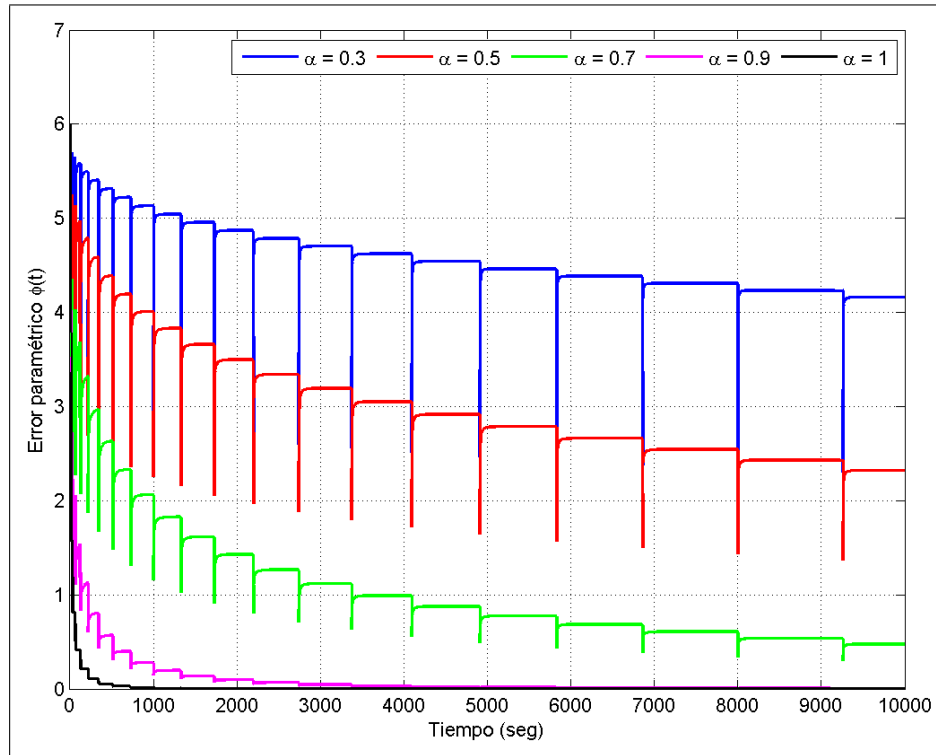


Figura 5.9: Evolución del error paramétrico  $\phi(t)$  del Modelo de Error Fraccionario 1, cuando la señal de información  $\omega(t)$  corresponde al Caso 4 de la Tabla 5.1.

tanto el error de salida como el error paramétrico permanecen acotados. Respecto de la convergencia, sin embargo, es difícil establecer conclusiones de las figuras mostradas, aunque se pueden observar algunos detalles. El primero tiene que ver con el error de salida, y puede apreciarse de la Figura 5.8. En este caso, la simulación se extendió hasta 10 000 s para poder tener una idea de la tendencia de este error, y puede apreciarse que los casos  $\alpha = 0,7$ ,  $\alpha = 0,9$  y  $\alpha = 1$ , muestran una tendencia claramente decreciente del error de salida en esta ventana de tiempo, lo cual hace intuir que efectivamente  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ . Sin embargo en los casos  $\alpha = 0,5$  y  $\alpha = 0,3$ , si bien también se observa una tendencia decreciente en esta ventana de tiempo, no es tan intuitivo pensar que el error convergerá a cero. Ello porque este decrecimiento es pequeño y se produce en aquellos intervalos de tiempo donde  $\omega \neq 0$ , y estos intervalos se van espaciando cada cada vez más en el tiempo. Es importante señalar que si bien no se puede afirmar que el error efectivamente no converge para estos casos, de ser así esta sería una diferencia sustancial con lo que sucede en el Modelo de Error 1 clásico, donde  $e(t)$  siempre converge a cero.

Para analizar la convergencia del error paramétrico estamos ante una situación similar a la que hemos analizado para el error de salida, pues como puede apreciarse de la Figura 5.9, los casos  $\alpha = 0,7$ ,  $\alpha = 0,9$  y  $\alpha = 1$  tienen una tendencia decreciente más marcada que los casos  $\alpha = 0,5$  y  $\alpha = 0,3$ . No obstante, es imposible afirmar de las simulaciones si  $\phi(t)$  converge a cero o no, pues para ello sería preciso simular una ventana de tiempo infinita. Sin embargo, es preciso notar que los estudios por simulaciones realizados para otros casos de señales  $\omega(t)$ , mostraron que la convergencia a cero de  $\phi(t)$  parece estar relacionada con el hecho de que la integral  $I_{t_0}^{\alpha} \omega^2(t)$  sea no acotada, y en este caso esto no se cumple para los casos  $\alpha = 0,5$  y  $\alpha = 0,3$ .

Respecto del signo de  $\phi(t)$  en este caso, y tal como en los anteriores, puede apreciarse que

mantiene el signo de su condición inicial. En el caso de  $e(t)$ , éste mantiene su signo debido a que la señal de entrada tampoco cambia de signo, tal como se indicó en los casos anteriores. La tendencia decreciente de los errores, además, depende del orden  $\alpha$  utilizado, de la misma manera que en los casos anteriores, donde el caso  $\alpha = 1$  es el más rápido.

Resumiendo, a manera de conclusiones generales de los estudios por simulaciones realizados para el MEF1, en el caso escalar, podemos establecer lo siguiente.

1. Tanto el error de salida como el error paramétrico permanecen acotados para todo tipo de señales  $\omega(t)$  acotadas y condiciones iniciales acotadas, evidencia de la estabilidad del MEF1.
2. El error de salida converge a cero para todo tipo de señales  $\omega(t)$  acotadas, exceptuando el Caso 4, en el cual no se pudieron establecer resultados concluyentes al respecto, para determinados valores del orden de derivación  $\alpha$ .
3. La condición para que el error paramétrico  $\phi(t)$  converja a cero parece estar relacionada con que la integral  $I_{t_0}^\alpha \omega^2(t)$  sea no acotada.
4. El error paramétrico  $\phi(t)$  no cambia de signo, es decir, mantiene el signo de su condición inicial  $\forall t \geq t_0$ .
5. El error de salida  $e(t)$  cambia de signo al mismo tiempo que la señal de entrada  $\omega(t)$ .
6. El error paramétrico  $\phi(t)$  resultó ser no creciente para todos los casos en que se utilizaron señales  $\omega(t)$  no decrecientes y que no cambiaban de signo,  $\forall \alpha \in (0, 1]$ .
7. El error paramétrico  $\phi(t)$  resultó ser no creciente para todas las señales  $\omega(t)$  aplicadas cuando el orden de derivación es  $\alpha = 1$ .

### 5.2.2. Estudios por simulación del Modelo de Error Fraccionario 1, caso vectorial

Tal como se observó en el caso escalar, en el caso vectorial también hay un grupo de características del vector de información  $\omega(t)$  que determinan el comportamiento de los errores. Estas características están relacionadas con el hecho de que haya al menos una componente del vector  $\omega(t)$  que converge a cero y con la densidad espectral del vector  $\omega(t)$ . En función de esto, se han seleccionado las señales  $\omega(t)$  que se muestran en la Tabla 5.2, para los estudios por simulaciones del caso vectorial.

Como puede apreciarse de la Tabla 5.2, en el Caso 1 se utiliza un vector  $\omega(t)$  cuya densidad espectral es menor que la del que se utiliza en el Caso 2. En el Caso 3 nos encontramos con que una de las componentes del vector converge a cero, y finalmente en el Caso 4 aparece la señal que definimos en el Caso 4 escalar como una de las componentes del vector  $\omega(t)$ , siendo la segunda componente una constante.

En los estudios por simulaciones correspondientes a este caso vectorial, se muestran los gráficos correspondientes a la norma euclidiana del error paramétrico  $\phi(t)$ , o sea  $\|\phi(t)\|$ , en lugar de mostrar la evolución de cada una de las componentes por separado.

Para estos estudios por simulaciones se han utilizado los valores  $\theta_1^* = -5$  y  $\theta_2^* = 8$ , donde  $\theta_1^*, \theta_2^*$  son los valores reales de los parámetros desconocidos del esquema, y están relacionados

Tabla 5.2: Señales de entrada utilizadas en los estudios por simulaciones para el caso vectorial de los modelos de error fraccionarios.

Caso 1	$\omega(t) = [1 \quad 2]^T$
Caso 2	$\omega(t) = [1 \quad \sin(t)]^T$
Caso 3	$\omega(t) = [\sin(t) \quad e^{-t}]^T$
Caso 4	$\omega(t) = \left[ 1 \quad \sum_{n \geq 1} (t - n^\beta + 1) \mathbb{1}_{[n^\beta - 1, n^\beta]} + (n^\beta + 1 - t) \mathbb{1}_{[n^\beta, n^\beta + 1]} \right]^T$

con el error paramétrico por las expresiones  $\phi_1(t) = \theta_1(t) - \theta_1^*$  y  $\phi_2(t) = \theta_2(t) - \theta_2^*$ , donde  $\theta_1(t), \theta_2(t)$  son los parámetros que se ajustan mediante leyes de ajuste fraccionarias de orden  $\alpha$ . Las condiciones iniciales para los parámetros estimados corresponden a  $\theta_1(0) = 1$  y  $\theta_2(0) = 0,5$ .

La Figura 5.10 muestra la evolución del error de salida para el MEF1 vectorial, cuando el vector  $\omega(t)$  está compuesto por dos señales constantes, o sea correspondiente al Caso 1 de la Tabla 5.2. La Figura 5.11, por su parte, muestra la evolución de la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$ .

Como puede apreciarse de ambas figuras, tanto el error de salida como la norma del error paramétrico se mantienen acotados, lo cual evidencia la estabilidad del esquema. Observando la

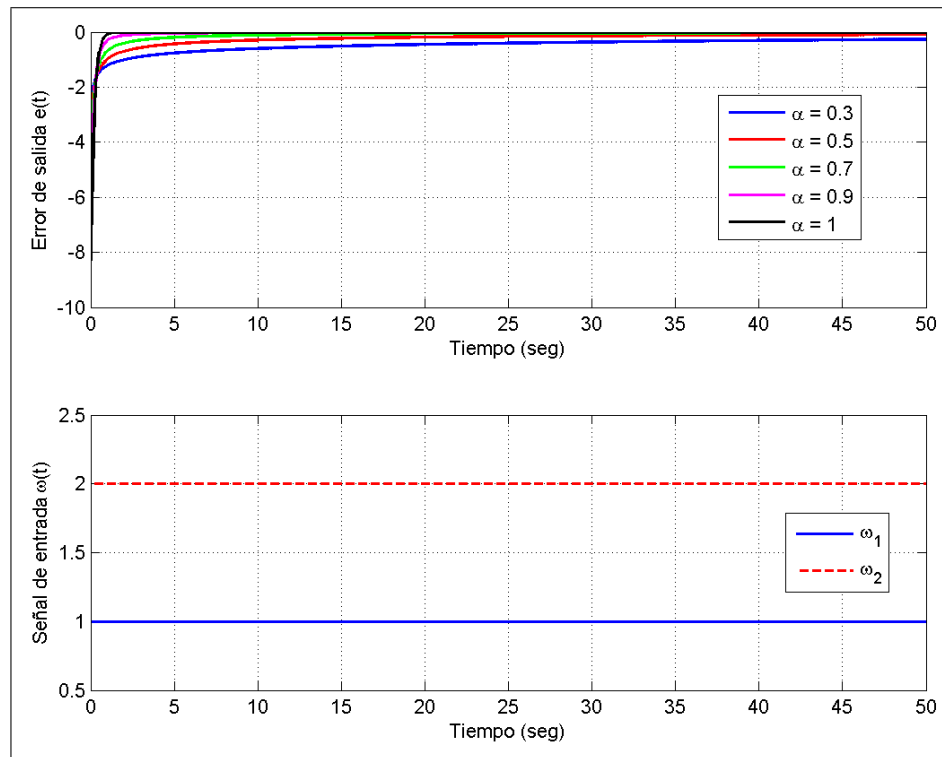


Figura 5.10: Evolución del error de salida  $e(t)$  del Modelo de Error Fraccionario 1, cuando  $\omega(t)$  corresponde a un vector de señales constantes.

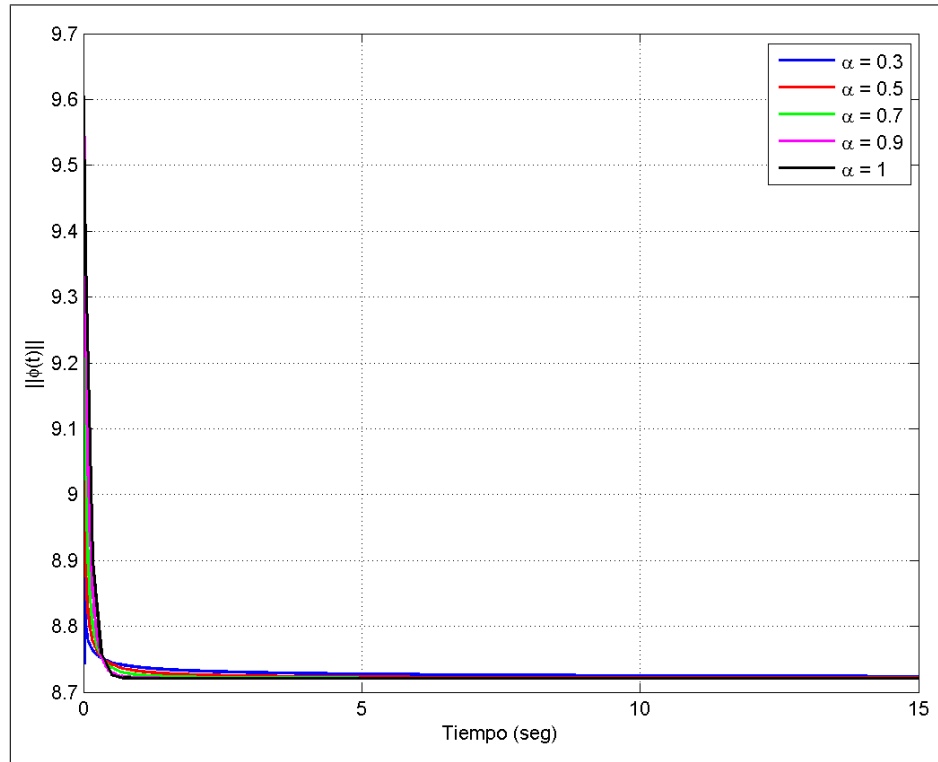


Figura 5.11: Evolución de la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$  del Modelo de Error Fraccionario 1, cuando  $\omega(t)$  corresponde a un vector de señales constantes.

Figura 5.10 puede corroborarse que el error de salida converge a cero para todos los valores del orden de derivación  $\alpha$ . Sin embargo, en el caso de la norma del error paramétrico ésta converge a un valor diferente de cero, como se aprecia en la Figura 5.11. Este comportamiento es diferente al observado en el caso escalar, donde una señal de entrada constante es suficiente para que  $\phi(t)$  converja a cero, problema asociado al concepto de excitación persistente.

En el caso vectorial, la convergencia de  $\|\phi(t)\|$  parece estar relacionada con la densidad espectral del vector  $\omega(t)$ , lo cual es conocido bajo el concepto de excitación persistente en el caso entero. Si bien las simulaciones que se muestran en este caso corresponden al MEF1 vectorial en  $\mathbb{R}^2$ , en general lo que se observó al realizar simulaciones para dimensiones mayores es que para que exista convergencia de  $\|\phi(t)\|$ , es preciso que el vector  $\omega(t)$  tenga una densidad espectral que está relacionada con el orden del vector  $\phi(t)$ . Es decir, en la medida que aumenta la dimensión del vector  $\phi(t)$ , la densidad espectral del vector  $\omega(t)$  también debe aumentar, para lograr que  $\|\phi(t)\|$  converja a cero.

Respecto de la evolución de  $\|\phi(t)\|$ , puede apreciarse de la Figura 5.11 que se cumple que  $\|\phi(t)\| \leq \|\phi(t_0)\|$ ,  $\forall t \geq t_0$ . Este comportamiento es similar al que se había observado en el caso escalar, en el cual también se cumplía que  $|\phi(t)| \leq |\phi(t_0)|$ ,  $\forall t \geq t_0$ . La justificación analítica de este hecho será expuesta más adelante en la Subsección 5.2.3, durante el análisis de estabilidad de este modelo de error. Tanto en el gráfico del error de salida como en el de la norma del error paramétrico, la convergencia más rápida corresponde al caso en que  $\alpha = 1$ , coincidiendo con lo que se había observado también en el caso escalar.

Las Figuras 5.12 y 5.13 muestran la evolución del error de salida y de la norma del error paramétrico respectivamente, usando  $\omega(t)$  correspondiente al Caso 2 de la Tabla 5.2.

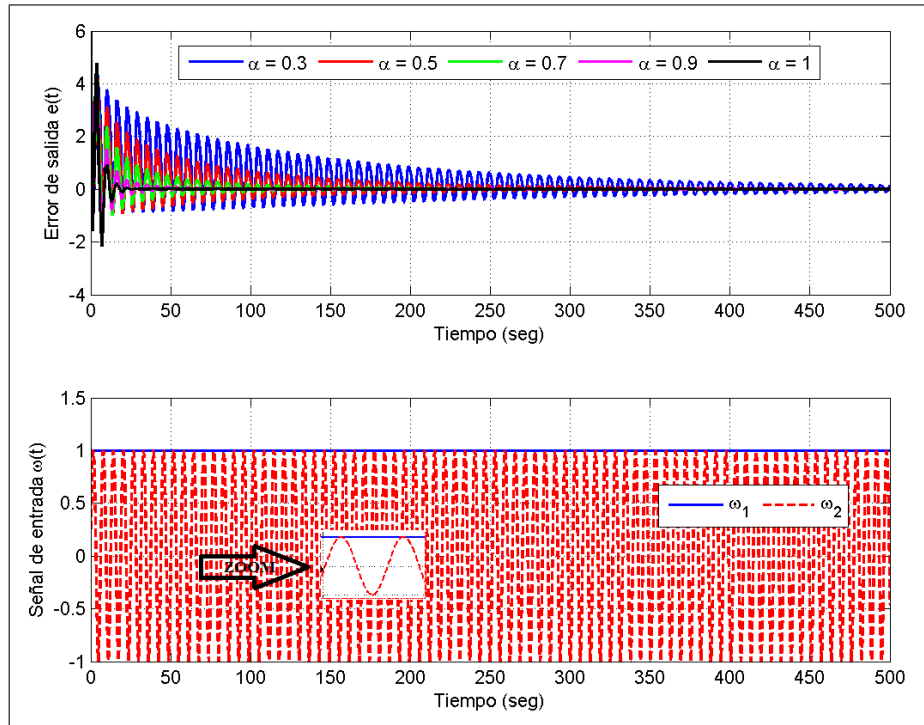


Figura 5.12: Evolución del error de salida  $e(t)$  del Modelo de Error Fraccionario 1, cuando  $\omega(t)$  corresponde al Caso 2 de la Tabla 5.2.

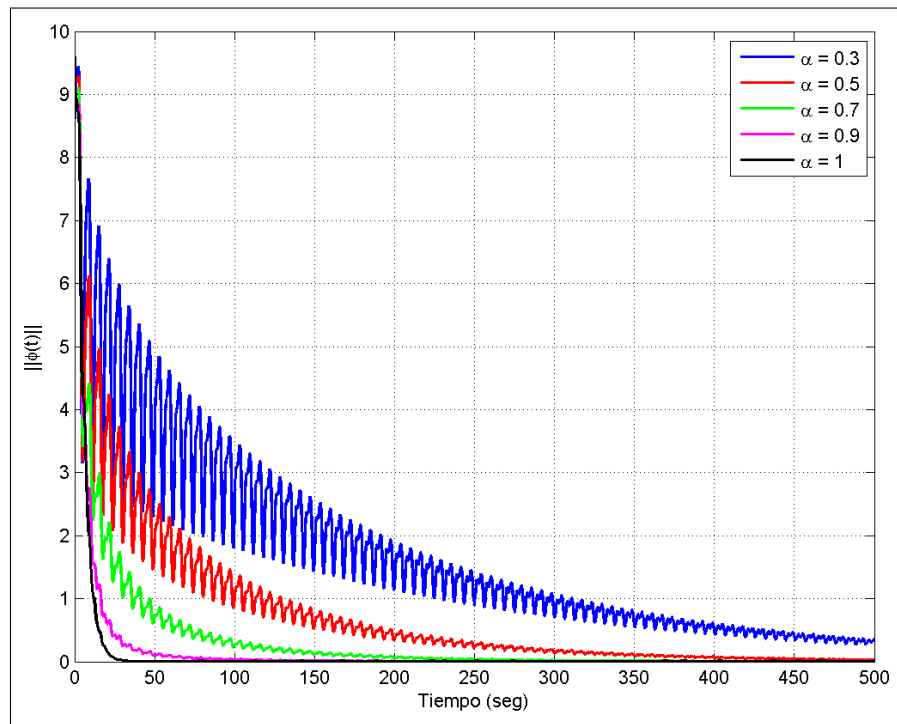


Figura 5.13: Evolución de la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$  del Modelo de Error Fraccionario 1, cuando  $\omega(t)$  corresponde al Caso 2 de la Tabla 5.2.

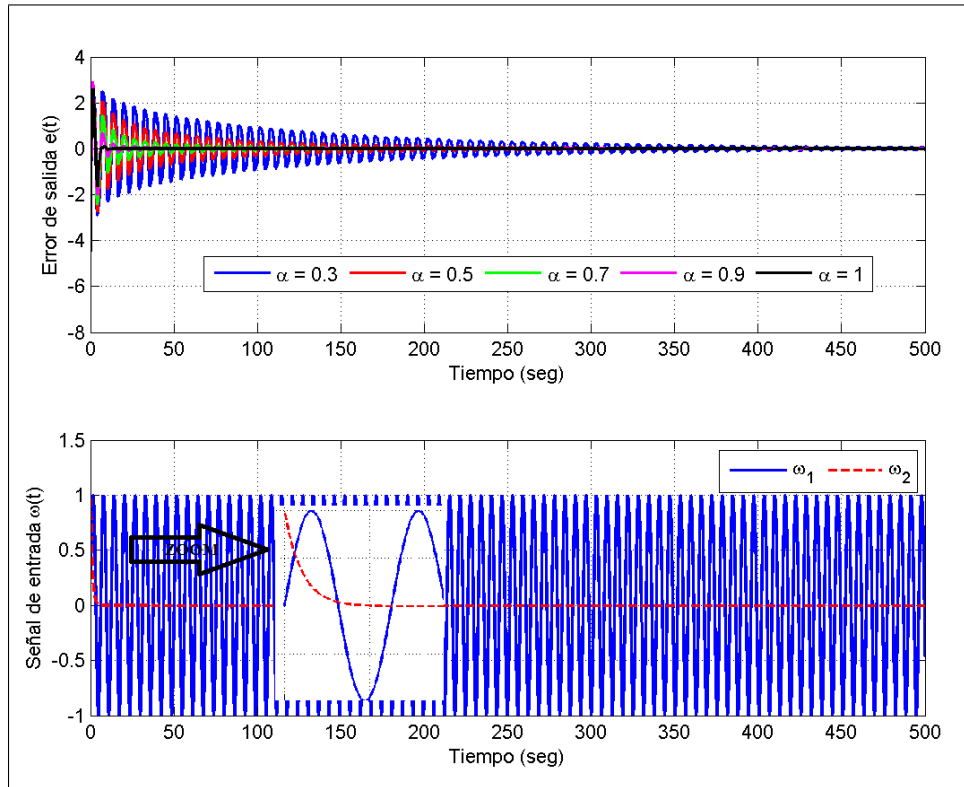


Figura 5.14: Evolución del error de salida  $e(t)$  del Modelo de Error Fraccionario 1, cuando  $\omega(t)$  corresponde al Caso 3 de la Tabla 5.2.

Como puede apreciarse, también en este caso tanto  $e(t)$  como  $\|\phi(t)\|$  permanecen acotados, evidenciando la estabilidad del esquema. El error de salida puede apreciarse que converge a cero para este vector de entradas, independientemente del orden de derivación  $\alpha$  utilizado. En este caso la norma del error paramétrico también converge a cero, como puede apreciarse de la Figura 5.13, a diferencia de lo que ocurrió en el Caso 1. Ciertamente en este caso  $\omega(t)$  tiene mayor densidad espectral que el del Caso 1, por lo tanto esto corrobora la intuición acerca de la excitación persistente que se expuso en el análisis del Caso 1. En este caso también la norma del error paramétrico permanece acotada por su condición inicial y la convergencia más rápida se da para el caso clásico, o sea  $\alpha = 1$ .

Las Figuras 5.14 y 5.15 muestran la evolución del error de salida y de la norma del error paramétrico respectivamente, para un vector  $\omega(t)$  correspondiente al Caso 3 de la Tabla 5.2.

Como puede apreciarse, al igual que en el Caso 1 y el Caso 2, para este vector  $\omega(t)$  tanto  $e(t)$  como  $\|\phi(t)\|$  permanecen acotados, evidenciando así la estabilidad del esquema. El error de salida puede apreciarse que converge a cero para todos los valores de  $\alpha$  utilizados y la norma del error paramétrico cumple que  $\|\phi(t)\| \leq \|\phi(t_0)\|$ ,  $\forall t \geq t_0$ .

En cuanto a la convergencia de  $\|\phi(t)\|$ , puede apreciarse que en este caso no converge a cero. Esta simulación, en conjunto con una serie de otras simulaciones que se realizaron durante el desarrollo del trabajo, mostraron que si al menos una de las componentes del vector  $\omega(t)$  converge a cero, entonces  $\|\phi(t)\|$  no convergerá a cero, lo cual corresponde a lo mostrado en este caso.

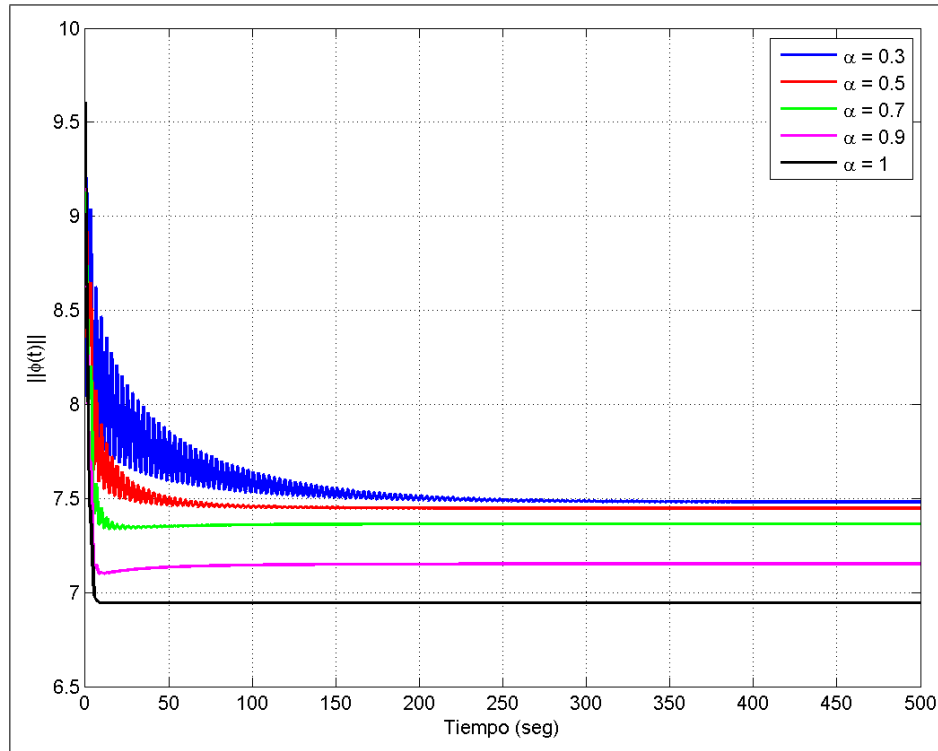


Figura 5.15: Evolución de la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$  del Modelo de Error Fraccionario 1, cuando  $\omega(t)$  corresponde al Caso 3 de la Tabla 5.2.

Finalmente se muestran las simulaciones en que se emplea un vector  $\omega(t)$  correspondiente al Caso 4 de la Tabla 5.2. La Figura 5.16 muestra la evolución del error de salida y la Figura 5.17 muestra la evolución de la norma del error paramétrico.

En ese caso, tal como en los tres casos anteriores, tanto el error de salida como la norma del error paramétrico permanecen acotados, lo cual evidencia la estabilidad del esquema. En este caso también la norma del error paramétrico permanece acotada por su condición inicial y la rapidez de convergencia mayor se obtiene cuando  $\alpha = 1$ . Sin embargo, la convergencia a cero de ambos errores no queda lo suficientemente clara para todos los órdenes de derivación  $\alpha$ . Puede apreciarse que el error de salida tiene una clara tendencia a converger a cero cuando  $\alpha > 0,5$ . Sin embargo, cuando  $\alpha \leq 0,5$ , si bien el error parece ir decreciendo muy lentamente, no es posible establecer conclusiones sobre su convergencia a cero observando esta ventana de tiempo. Observando el acercamiento realizado en la Figura 5.16 para el error de salida, puede apreciarse como cada vez que aparecen los pulsos triangulares de la señal  $\omega(t)$ , el error  $e(t)$  se aleja más de cero en la medida que el orden de derivación  $\alpha$  utilizado es menor, y luego que el pulso desaparece también el acercamiento a cero de  $e(t)$  es más lento. Esto explica de manera cualitativa la evolución general del error observada en la Figura 5.16.

Un comportamiento similar puede observarse en el caso de la norma del error paramétrico, donde los casos  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = 0,9$  y  $\alpha = 0,7$  tienen una clara tendencia a converger a cero, aunque los dos casos restantes, si bien tienen también esta tendencia, es mucho más lenta y no es posible establecer conclusiones claras al respecto.

De acuerdo a las simulaciones realizadas para el caso vectorial en  $\mathbb{R}^2$ , podemos establecer algunas conclusiones generales de los estudios realizados.

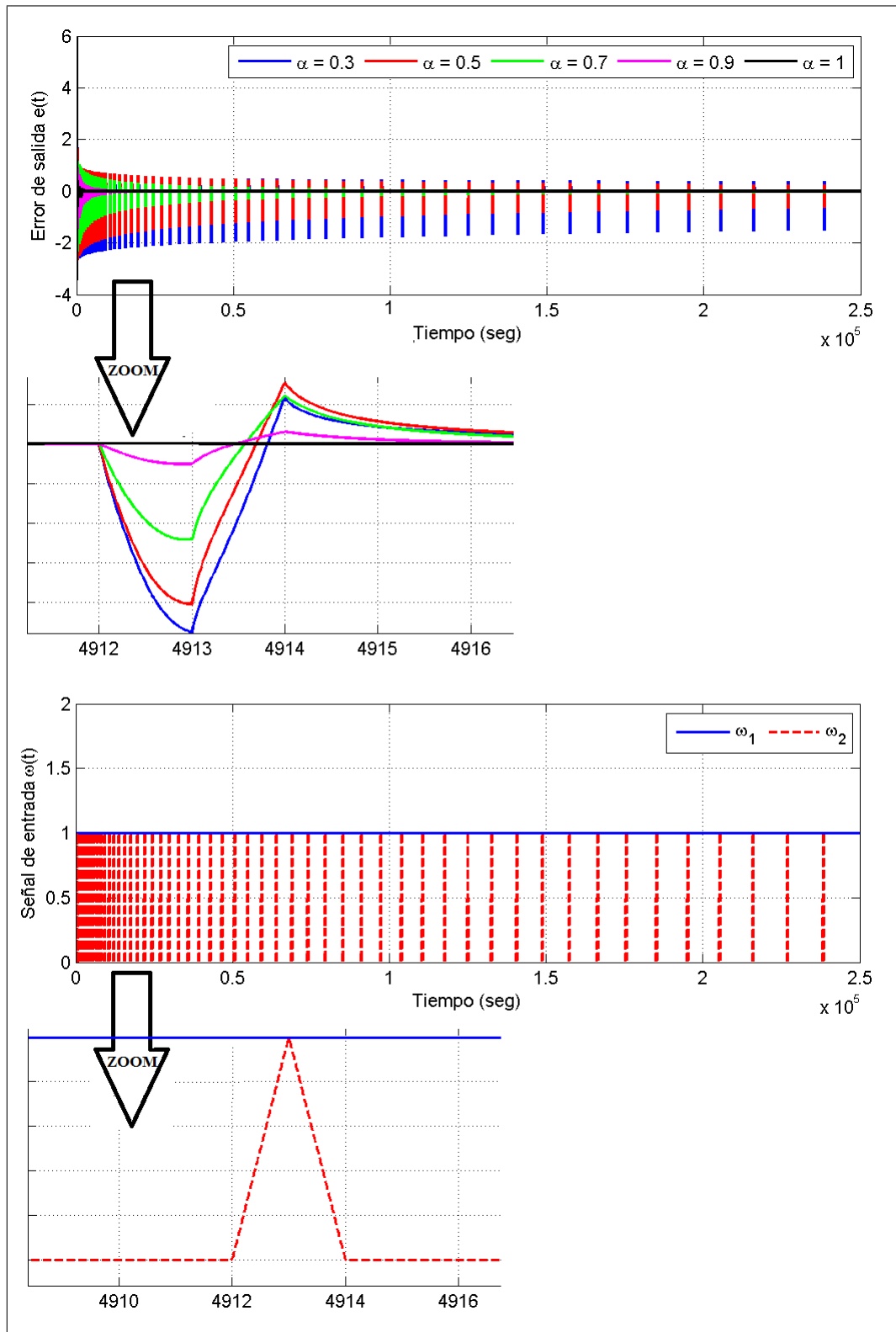


Figura 5.16: Evolución del error de salida  $e(t)$  del Modelo de Error Fraccionario 1, cuando  $\omega(t)$  corresponde al Caso 4 de la Tabla 5.2.



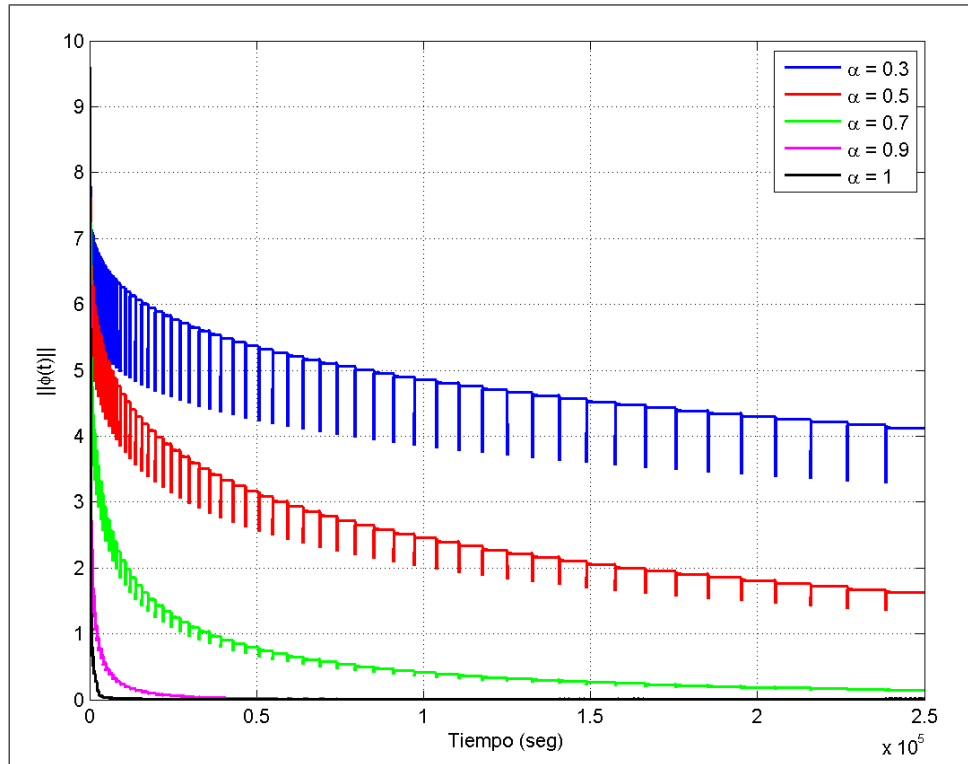


Figura 5.17: Evolución de la norma del error paramétrico  $\|\omega(t)\|$  del Modelo de Error Fraccionario 1, cuando  $\omega(t)$  corresponde al Caso 4 de la Tabla 5.2.

1. Tanto el error de salida como la norma del error paramétrico permanecen acotados para todo tipo de señales  $\omega(t)$  acotadas y condiciones iniciales de los parámetros también acotadas, lo cual evidencia la estabilidad del esquema. La justificación analítica de este hecho se encuentra más adelante, en la Subsección 5.2.3, correspondiente al análisis de estabilidad del modelo de error.
2. El error de salida converge a cero para todo tipo de señales  $\omega(t)$  acotadas, exceptuando el Caso 4, en el cual no se pudieron establecer resultados concluyentes al respecto para determinados valores del orden de derivación  $\alpha$ .
3. La condición para que la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$  converja a cero parece estar relacionada con dos elementos de manera cualitativa, el primero es que ninguna de las componentes del vector  $\omega(t)$  tienda a cero, y el segundo es la relación entre la densidad espectral del vector  $\omega(t)$  y la dimensión del vector  $\phi(t)$ .
4. La norma del error paramétrico permanece acotada siempre por su condición inicial, es decir  $\|\phi(t)\| \leq \|\phi(t_0)\|$ ,  $\forall t \geq t_0$ . La justificación analítica de este hecho se encuentra en la Proposición 1 de la Subsección 5.2.3 sobre el análisis de estabilidad de este modelo de error.

### 5.2.3. Análisis de estabilidad del Modelo de Error Fraccionario 1

Al observar las ecuaciones del MEF1 dadas en (5.5), puede corroborarse que por ser el error de salida una combinación algebraica del error paramétrico y la señal auxiliar, el comportamiento

del MEF1 queda descrito por la ecuación diferencial

$${}^C D_{t_0}^\alpha \phi(t) = -\gamma \omega(t) \omega^T(t) \phi(t), \quad \text{con } \alpha \in (0, 1] \text{ y } \gamma > 0, \quad (5.7)$$

que se obtiene al sustituir la ecuación del error de salida en la ecuación de la ley de ajuste.

Si llamamos  $f(t, \phi(t)) = -\gamma \omega(t) \omega^T(t) \phi(t)$ , podemos afirmar que para el sistema (5.7) se cumple que

$$\phi^T(t) f(t, \phi(t)) = \phi^T(t) {}^C D_{t_0}^\alpha \phi(t) = -\gamma \phi^T(t) \omega(t) \omega^T(t) \phi(t) = -\gamma e^2(t) \leq 0. \quad (5.8)$$

Luego si suponemos que  $\phi(t)$  es diferenciable, puede aplicarse el Lema 7 presentado en el Capítulo 4, con lo cual se concluye directamente que el origen del sistema (5.7) es Lyapunov estable.

Como el sistema es Lyapunov estable,  $\phi(t)$  permanecerá acotado  $\forall t \geq t_0$ . Luego, suponiendo que el vector  $\omega(t)$  es acotado, se concluye que el error de salida  $e(t)$  también permanece acotado. Este resultado viene a justificar analíticamente lo que se observó durante los estudios por simulaciones, donde, tanto para el caso escalar como para el caso vectorial, todas las señales del esquema permanecían acotadas para todo tipo de entradas acotadas.

Ahora bien, además de la estabilidad del esquema, pueden demostrarse analíticamente otras de las observaciones que se hicieron durante los estudios por simulaciones, bajo la premisa de que  $\phi(t)$  es diferenciable. La primera está relacionada con la cota de la norma del error paramétrico, y se presenta en la Proposición 1.

**Proposición 1.** *La evolución del error paramétrico del MEF1 (5.5) tiene las siguientes características:*

- *En el caso escalar se cumple que*

$$\frac{1}{2} \phi^2(t) \leq \frac{1}{2} \phi^2(t_0), \quad \forall t \geq t_0. \quad (5.9)$$

- *En el caso vectorial se cumple que*

$$\|\phi(t)\| \leq \|\phi(t_0)\|, \quad \forall t \geq t_0. \quad (5.10)$$

**Demostración.** Partiendo de la expresión

$$\phi^T(t) {}^C D_{t_0}^\alpha \phi(t) = -\gamma \phi^T(t) \omega(t) \omega^T(t) \phi(t) = -\gamma e^2(t), \quad (5.11)$$

y aplicando el Lema 4, se puede escribir

$$\frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha \phi^T(t) \phi(t) \leq \phi^T(t) {}^C D_{t_0}^\alpha \phi(t) = -\gamma e^2(t). \quad (5.12)$$

Si se aplica la integral de orden  $\alpha$  a la expresión (5.12) se obtiene

$$\frac{1}{2} \phi^T(t) \phi(t) - \frac{1}{2} \phi^T(t_0) \phi(t_0) \leq -\gamma I_{t_0}^\alpha e^2(t). \quad (5.13)$$

Como  $I_{t_0}^\alpha e^2(t) \geq 0, \forall t \geq t_0$ , entonces necesariamente

$$\frac{1}{2}\phi^T(t)\phi(t) \leq \frac{1}{2}\phi^T(t_0)\phi(t_0), \forall t \geq t_0. \quad (5.14)$$

La expresión (5.14) permite afirmar que

$$\|\phi(t)\| \leq \|\phi(t_0)\|, \forall t \geq t_0. \quad (5.15)$$

En el caso escalar, la expresión (5.14) se reduce a

$$\frac{1}{2}\phi^2(t) \leq \frac{1}{2}\phi^2(t_0), \forall t \geq t_0. \quad (5.16)$$

y esto concluye la demostración.  $\square$

Otra de las observaciones que se hicieron durante los estudios por simulación, fue que el error paramétrico no cambiaba de signo en el caso escalar. A continuación se demostrará analíticamente esta observación en la Proposición 2.

**Proposición 2.** *Si consideramos el MEF1 escalar, entonces siempre se cumple que*

$$\text{sgn}(\phi(t)) = \text{sgn}(\phi_0). \quad (5.17)$$

**Demostración.** Para demostrar lo planteado en (5.17), usaremos la ecuación diferencial que caracteriza la evolución del error paramétrico en su forma integral:

$$\phi(t) = \phi_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{\omega^2(\tau)\phi(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad \phi_0 = \phi(t_0). \quad (5.18)$$

Realizaremos la demostración por contradicción. Supongamos primero el caso que  $\phi(t_0) > 0$  y que existe un instante de tiempo  $t$  tal que  $\phi(t) < 0$ . Entonces por continuidad, necesariamente existirá un instante de tiempo  $t_c < t$  tal que  $\phi(t_c) = 0$ , y además  $\phi(t) > 0, \forall t \in [t_0, t_c)$  y  $\phi(t) < 0, \forall t > t_c$ .

La expresión de  $\phi(t)$  para un  $t > t_c$  puede descomponerse como

$$\phi(t) = \phi_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t_c} \frac{\omega^2(\tau)\phi(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_c}^t \frac{\omega^2(\tau)\phi(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau. \quad (5.19)$$

Como  $\phi(t_c) = 0$ , esto implica, utilizando la ecuación (5.18), que

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t_c} \frac{\omega^2(\tau)\phi(\tau)}{(t_c-\tau)^{1-\alpha}} d\tau = \phi_0. \quad (5.20)$$

Por lo tanto, como  $\phi(t) > 0, \forall t \in [t_0, t_c]$  y además  $t_c < t$  entonces puede escribirse

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t_c} \frac{\omega^2(\tau) \phi(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau < \phi_0, \forall t > t_c. \quad (5.21)$$

Como además  $\phi(t) < 0, \forall t > t_c$ , entonces puede escribirse que

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_c}^t \frac{\omega^2(\tau) \phi(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau < 0. \quad (5.22)$$

Luego usando (5.22) y (5.21), la expresión (5.19) puede convertirse en una desigualdad de la forma

$$\phi(t) > 0, \quad (5.23)$$

lo cual contradice el supuesto de que  $\phi(t) < 0$ , y eso concluye la demostración. La demostración para el caso en que  $\phi(t_0) < 0$  sigue un razonamiento análogo.  $\square$

De este modo, en esta subsección hemos demostrado analíticamente que:

- El Modelo de Error Fraccionario 1 es estable.
- En el caso escalar se cumple que  $\phi^2(t) \leq \phi^2(t_0), \forall t \geq t_0$  y además  $\phi(t)$  no cambia de signo.
- En el caso vectorial se cumple que  $\|\phi(t)\| \leq \|\phi(t_0)\|, \forall t \geq t_0$ .

#### 5.2.4. Resultados preliminares sobre la convergencia del error paramétrico en el Modelo de Error Fraccionario 1

Durante el análisis de los estudios por simulación, se observó que en el MEF1 escalar, la convergencia paramétrica parece estar determinada por el hecho de que la integral fraccionaria  $I_{t_0}^\alpha \omega^2(t)$  sea no acotada. A continuación realizaremos un estudio analítico, que si bien no ofrece una demostración completa sobre este resultado, sí nos aproximará a él.

**Proposición 3.** *Consideremos el MEF1 escalar. Si se cumple que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_{t_0}^\alpha \omega^2(t) = \infty, \quad (5.24)$$

entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0 \quad (5.25)$$

si el límite existe.

**Demostración.** Para realizar la demostración consideremos primero el caso  $\phi(t_0) = \phi_0 > 0$ . De acuerdo a los resultados obtenidos en la Proposición 2, esto implica que se cumplirá que  $0 < \phi(t) \leq \phi_0$ . Realizaremos la demostración por contradicción.

Supongamos que  $\phi(t)$  converge a un límite diferente de cero. Esto implica que podemos afirmar que existirá un  $\varepsilon > 0$  y un  $T > t_0$  tal que

$$\phi(t) \geq \varepsilon, \quad \forall t \geq T. \quad (5.26)$$

Como ya se ha planteado con anterioridad, para este modelo de error se cumple que

$$\frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha \phi^2(t) \leq e^2(t). \quad (5.27)$$

Luego, aplicando el operador integral fraccionaria a la expresión (5.27) se concluye que

$$I_{t_0}^\alpha e^2(t) \leq \frac{1}{2} \phi_0^2 - \frac{1}{2} \phi^2(t) \leq \frac{1}{2} \phi_0^2 \quad \forall t \geq t_0. \quad (5.28)$$

Ahora bien, la integral del error cuadrático puede escribirse, de acuerdo a las ecuaciones que caracterizan el MEF1 escalar, en la forma

$$I_{t_0}^\alpha e^2(t) = I_{t_0}^\alpha [\omega^2(t) \phi^2(t)]. \quad (5.29)$$

Si utilizamos la expresión (5.26) en (5.29) resulta

$$I_{t_0}^\alpha e^2(t) \geq \varepsilon^2 I_{t_0}^\alpha [\omega^2(t)], \quad \forall t \geq T. \quad (5.30)$$

Dado que se cumple que  $\lim_{t \rightarrow \infty} I_{t_0}^\alpha \omega^2(t) = \infty$ , esto implica en la expresión (5.29) que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_{t_0}^\alpha e^2(t) = \infty, \quad (5.31)$$

lo cual contradice el hecho de que esta integral permanece acotada, como se muestra en (5.28), y esto concluye la demostración. La demostración para el caso  $\phi_0 < 0$  sigue un razonamiento análogo.  $\square$

Esta demostración ha probado que si  $\lim_{t \rightarrow \infty} I_{t_0}^\alpha \omega^2(t) = \infty$ , entonces si  $\phi(t)$  converge el límite será cero. Sin embargo, la parte débil de esta demostración y que hace que el resultado no esté completo, está dada por la posibilidad de que  $\phi(t)$  no converja a un límite, lo cual no está incluido en la demostración.

Si bien este último problema no ha sido resuelto aún, sí se puede establecer analíticamente la convergencia a cero de  $\phi(t)$  para señales de entrada particulares, como se plantea a continuación en la Proposición 4.

**Proposición 4.** Consideremos la evolución del error paramétrico del MEF1 escalar dado por

$${}^C D_{t_0}^\alpha \phi(t) = -\omega^2(t) \phi(t), \quad \alpha \in (0, 1), \quad \phi(t_0) = \phi_0. \quad (5.32)$$

Si la señal  $\omega(t)$  es tal que se cumple que

$$\omega^2(t) \geq \varepsilon > 0, \quad \forall t \geq t_0, \quad (5.33)$$

entonces se cumple que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0.$$

**Demostración.** Consideremos primero el caso  $\phi(t_0) = \phi_0 > 0$ . De acuerdo a los resultados obtenidos en la Proposición 2, esto implica que se cumplirá que  $0 < \phi(t) \leq \phi_0$ . Dado que se cumple lo planteado en (5.33), entonces la solución de la ecuación (5.32) será siempre menor que la solución del sistema de comparación dado por

$${}^C D_{t_0}^\alpha x(t) = -\varepsilon x(t), \quad \alpha \in (0, 1], x_0 = \phi_0. \quad (5.34)$$

El sistema (5.34) tiene solución conocida, y se cumple que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ . Luego utilizando el principio de comparación fraccionario escalar (ver Lema 2) puede establecerse que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$ , y esto concluye la demostración. La demostración para el caso  $\phi(t_0) = \phi_0 < 0$  es análoga a la anterior.  $\square$

Como puede apreciarse, la Proposición 4 permite concluir sobre la convergencia a cero del error paramétrico en el caso escalar, aunque restringido a señales de entrada particulares. Esto deja fuera algunas señales cuya integral fraccionaria  $I_{t_0}^\alpha \omega^2(t)$  es no acotada y que no cumplen la condición (5.33), como por ejemplo la función senoidal. La ampliación de estos resultados para obtener condiciones generales sobre la convergencia del error paramétrico en el Modelo de Error 1 Fraccionario escalar, así como los análisis para el caso vectorial, forman parte del trabajo futuro a desarrollar dentro de este tema investigativo.

### 5.2.5. Resultados preliminares sobre la convergencia del error de salida en el Modelo de Error Fraccionario 1

La convergencia del error de salida en el MEF1 ha sido un tema ampliamente debatido y analizado a lo largo de este trabajo investigativo. Los estudios por simulación presentados en este documento, mostraron que el error de salida converge a cero para todo tipo de señales  $\omega(t)$  acotadas, aunque el Caso 4 analizado no pudo arrojar resultados intuitivos al respecto.

La demostración analítica sobre la convergencia a cero del error de salida, sin embargo, ha sido un punto de tope en este trabajo. La dificultad para demostrar su convergencia radica básicamente en la falta de herramientas matemáticas que permitan hacerlo, así como las peculiaridades de los operadores fraccionarios.

En el caso del Modelo de Error 1 clásico, se parte de que la integral entera del error cuadrático resulta acotada, y esto, en conjunto con que el error es acotado y uniformemente continuo, permite utilizar el Corolario del Lema de Barbalat clásico (Narendra & Annaswamy, 2005), y así concluir directamente que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ . Esto es posible porque la integral entera de una función positiva siempre crece, de modo que si esta integral es acotada, necesariamente convergerá a un límite.

Sin embargo, en el caso fraccionario aparecen varios problemas al tratar de hacer un análisis equivalente. El primer problema es que no es posible probar en el MEF1 que la integral entera del

error cuadrático es acotada. Por lo tanto, es imposible utilizar el corolario del Lema de Barbalat entero. No obstante, sí es posible probar que la integral fraccionaria del error cuadrático permanece acotada, como se mostró en la Subsección 5.2.4, donde se concluyó que

$$I_{t_0}^\alpha e^2(t) \leq \frac{1}{2}\phi_0^2 - \frac{1}{2}\phi^2(t) \leq \frac{1}{2}\phi_0^2 \quad \forall t \geq t_0. \quad (5.35)$$

Sin embargo, no es suficiente con que la integral fraccionaria de una función positiva sea acotada para concluir que esta integral converge a un límite, pues las integrales fraccionarias de funciones positivas pueden decrecer, lo cual hace el análisis extremadamente difícil. Más aún, ni siquiera existe un resultado equivalente al Lema de Barbalat entero para el caso fraccionario, que permita concluir sobre la convergencia de una función a cero, basado en que su integral fraccionaria converge a un límite. Solamente se ha reportado el resultado presentado en el Lema 8 de esta tesis, donde se asegura que una función positiva convergerá a cero si su integral fraccionaria converge a cero. Sin embargo, no ha sido posible en el MEF1 demostrar que  $\lim_{t \rightarrow \infty} I_{t_0}^\alpha e^2(t) = 0$ , y por lo tanto, no se han podido establecer conclusiones respecto de la convergencia a cero del error de salida por esta vía.

Ahora bien, a pesar de que no ha sido posible encontrar una herramienta de análisis que permita concluir analíticamente que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ , sí se ha podido establecer algunas conclusiones analíticas sobre su evolución. La primera está relacionada con el hecho de que  $I_{t_0}^\alpha e^2(t)$  es acotada y con que se ha demostrado en Von-Borries (2012) que el error de salida es uniformemente continuo. Estos resultados nos permiten aplicar el Lema 9 presentado en esta Tesis, y concluir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ t^{\alpha-\varepsilon} \frac{\int_{t_0}^t e^2(\tau) d\tau}{t} \right] = 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (5.36)$$

El resultado en (5.36) no permite establecer que el error de salida converge a cero, pero sí permite afirmar que su promedio en el tiempo decrece a una razón mínima de  $t^{-\alpha}$  para tiempos lo suficientemente grandes. Es decir, el acotamiento de la integral fraccionaria del error cuadrático no permite afirmar que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^2(t) = 0$ , pero sí de alguna manera nos dice que si  $e^2(t)$  crece y decrece en el tiempo sin converger, lo hará de forma tal que su promedio en el tiempo tenga una tendencia decreciente, resultado que podría tener utilidad práctica.

Además del resultado ya mostrado, que es válido para todo tipo de señales  $\omega(t)$  acotadas y tanto para el MEF1 escalar como para el caso vectorial, también es posible establecer analíticamente la convergencia a cero del error de salida para funciones de entrada particulares en el caso escalar, como se expone a continuación.

**Proposición 5.** *Consideremos la evolución del error de salida en el MEF1 escalar dada por*

$$e(t) = \phi(t) \omega(t). \quad (5.37)$$

*Si la señal  $\omega(t)$  es tal que*

- $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = 0$      0
- $\omega^2(t) \geq \varepsilon > 0, \quad \forall t \geq t_0,$

entonces se cumple que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

**Demostración.** La demostración en estos casos es directa. Si  $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = 0$  entonces de la ecuación (5.37) y dado que  $\phi(t)$  es acotado, se obtiene por álgebra de límites que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ .

En el caso que  $\omega^2(t) \geq \varepsilon > 0, \forall t \geq t_0$ , ya se mostró en la Subsección 5.2.4 que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$ . Luego, de la ecuación (5.37) se obtiene por álgebra de límites que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ , y esto concluye la demostración.  $\square$

La ampliación de estos resultados para obtener condiciones generales sobre la convergencia del error de salida en el Modelo de Error 1 Fraccionario, forman parte del trabajo futuro que se continuará desarrollando en esta línea de investigación.

### 5.3. Modelo de Error Fraccionario 2

En el caso del Modelo de Error Fraccionario 2 (en adelante MEF2), el error corresponde a la salida de un sistema dinámico, en el cual todo el estado se encuentra accesible. La Figura 5.18 muestra el esquema asociado a este modelo de error.

La ecuación del error correspondiente queda determinada por

$${}^C D_{t_0}^\beta e(t) = Ae(t) + b\phi^T(t)\omega(t), \quad \text{con } \beta \in (0, 2), \quad (5.38)$$

donde  $A$  es una matriz de dimensión  $n \times n$  asintóticamente estable,  $b \in \mathbb{R}^n$  y el par  $(A, b)$  es controlable. Además,  $\theta^* \in \mathbb{R}^m$  es el parámetro ideal que se supone desconocido,  $\theta(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  es el parámetro ajustable que estima a  $\theta^*$  y  $\phi(t) = \theta(t) - \theta^* : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  es el error paramétrico.  $e(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  es el error de salida y  $\omega(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  es la señal de entrada al modelo de error, denominada también señal auxiliar o señal de información.

La ley de ajuste fraccionaria de los parámetros para este modelo de error está dada por

$${}^C D_{t_0}^\alpha \phi(t) = -\gamma e^T(t) P b \omega(t), \quad \alpha \in (0, 2), \quad (5.39)$$

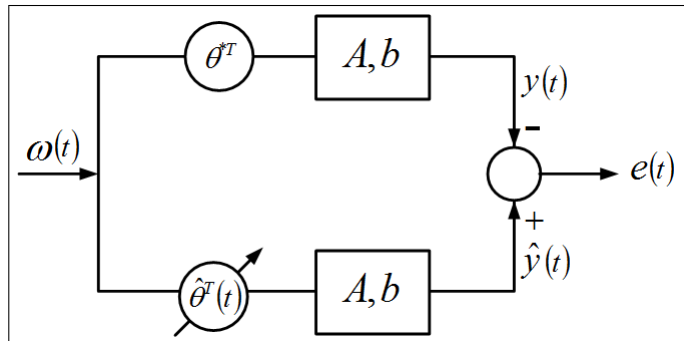


Figura 5.18: Esquema del Modelo de Error Fraccionario 2.



donde  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz simétrica positiva definida, que satisface la ecuación  $A^T P + P A = -Q < 0$  (con  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  positiva definida arbitraria) y  $\gamma \in \mathbb{R}^+$  es la ganancia adaptable supuesta constante en este estudio. También es posible utilizar ganancias adaptables escalares variantes en el tiempo y matriciales invariantes o variantes en el tiempo (ver (Narendra & Annaswamy, 2005)).

En este modelo de error, los órdenes de derivación están en los intervalos  $\alpha, \beta \in (0, 2)$ . Esto implica que podrían darse los casos en que se tiene dinámica del error entera ( $\beta = 1$ ) y ley de ajuste fraccionaria ( $\alpha \in (0, 2), \alpha \neq 1$ ) o viceversa. El caso  $\alpha, \beta = 1$ , que es un caso particular de este modelo de error, corresponde al Modelo de Error 2 clásico, el cual ya está completamente estudiado (Narendra & Annaswamy, 2005).

Por lo tanto, las ecuaciones que describen el MEF2 son

$$\begin{aligned} {}^C D_{t_0}^\beta e(t) &= A e(t) + b \phi^T(t) \omega(t) & \beta \in (0, 2) \\ {}^C D_{t_0}^\alpha \phi(t) &= -\gamma e^T(t) P b \omega(t) & \alpha \in (0, 2). \end{aligned} \quad (5.40)$$

Durante esta sección nos referiremos a los estudios por simulaciones desarrollados para este modelo de error cuando  $\alpha, \beta \in (0, 1]$ , así como a la demostración analítica de estabilidad de éste, además de algunos resultados preliminares sobre la convergencia del error de salida.

### 5.3.1. Estudios por simulación del Modelo de Error Fraccionario 2

Durante los estudios por simulación del MEF1 se presentaron los casos escalar y vectorial por separado, debido a que había observaciones particulares del caso escalar que luego serían justificadas analíticamente. Sin embargo para el caso del MEF2, no hay observaciones particulares para el caso escalar que se demuestren analíticamente después, sino que todos los análisis que se realizan son generales. Por lo tanto, se presentarán los estudios por simulación correspondientes al caso vectorial, lo cual es completamente válido ya que el caso escalar será un caso particular de éste. Las simulaciones que se muestran en esta subsección corresponden al caso  $e(t), \phi(t) \in \mathbb{R}^2$ , el cual es representativo del resto de los casos cuando  $e(t) \in \mathbb{R}^n, \phi(t) \in \mathbb{R}^m$ .

Debido a que el MEF2 tiene dinámica fraccionaria tanto en la ecuación del error de salida como en la ley de ajuste, pueden darse muchas combinaciones diferentes de los órdenes  $\beta$  y  $\alpha$ . Sin embargo, en los sistemas adaptables la ecuación del error de salida está usualmente determinada por las características de la planta a controlar o identificar, por lo tanto no existe la posibilidad de modificar este orden. Por ello en estos estudios por simulación se utiliza un orden fijo para la dinámica de ambas componentes del error de salida, específicamente  $\beta = 0,7$ .

En cambio el orden de la ley de ajuste sí es un parámetro de diseño, por lo tanto manteniendo  $\beta = 0,7$ , se realizan varias pruebas utilizando órdenes de la ley de ajuste  $\alpha$  que son menores, iguales y mayores que  $\beta$ . Los resultados se presentan superpuestos en un mismo gráfico, con el objetivo de mostrar la influencia de este parámetro y observar las principales diferencias que aparecen para poder establecer comparaciones.

En los gráficos que se presentan en esta subsección no se muestran las componentes de los errores por separado, sino su norma euclidiana, o sea  $\|e(t)\|$  y  $\|\phi(t)\|$ . Del mismo modo, se ha incluido un gráfico adicional que corresponde a la evolución de la norma del vector definido como

$$x(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4. \quad (5.41)$$

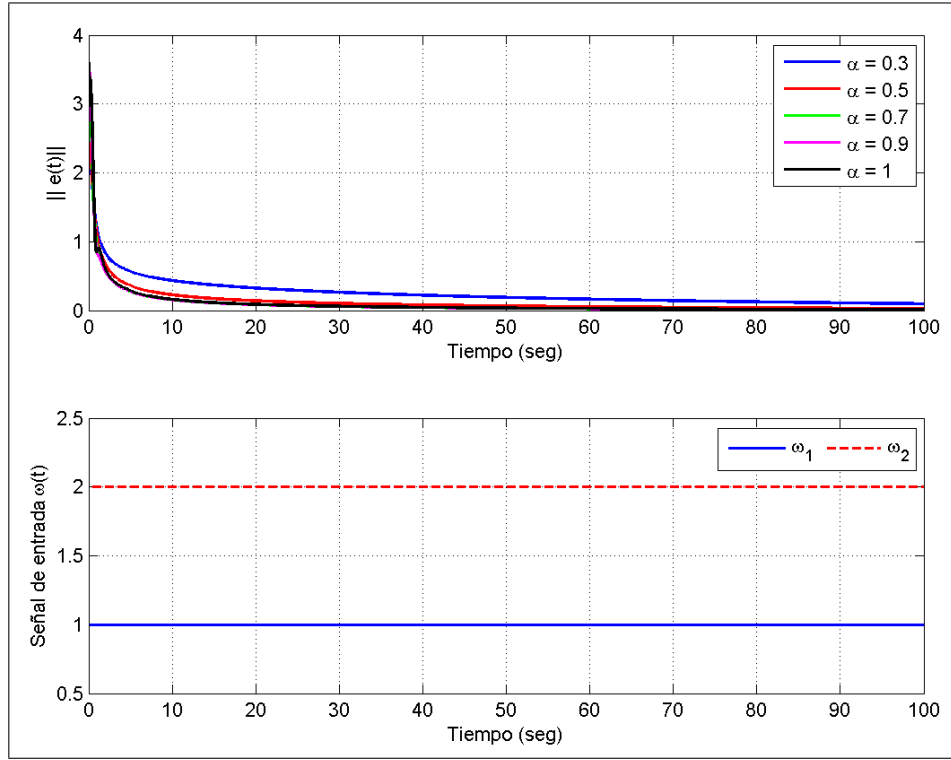


Figura 5.19: Evolución de la norma del error de salida  $\|e(t)\|$  del Modelo de Error Fraccionario 2, cuando el vector  $\omega(t)$  corresponde a un vector de señales constantes.

El objetivo de incluir este gráfico adicional, radica en que se podrán realizar observaciones durante las simulaciones respecto del comportamiento del vector  $x(t)$ , las cuales serán luego justificadas analíticamente.

Los valores de los parámetros de las ecuaciones en (5.40) que se utilizan en estas simulaciones están dados por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \gamma = 1, \quad \theta_1^* = -5, \quad \theta_2^* = 8, \quad (5.42)$$

donde  $\theta_1^*, \theta_2^*$  son los valores ideales de los parámetros desconocidos del esquema, y están relacionados con el error paramétrico por las expresiones  $\phi_1(t) = \theta_1(t) - \theta_1^*$  y  $\phi_2(t) = \theta_2(t) - \theta_2^*$ , donde  $\theta_1(t), \theta_2(t)$  son los parámetros ajustables dentro del esquema. Las condiciones iniciales que se utilizan para los parámetros estimados y el error son  $\theta_1(0) = 1, \theta_2(0) = 0,5, e(0) = [2 \ -3]^T$ . Aunque en esta Tesis se reportan los resultados obtenidos para un determinado set de condiciones iniciales, durante los estudios por simulación se realizaron pruebas utilizando varios sets de condiciones iniciales diferentes, siempre acotadas, y el comportamiento observado fue similar en todos los casos.

Tal como se planteó en la Sección 5.2.2 correspondiente al MEF1, para los estudios por simulación se utilizan señales de entrada  $\omega(t)$  con características representativas, las cuales están definidas en la Tabla 5.2. En función de estas señales de entrada se procede a reportar los resultados obtenidos y las conclusiones correspondientes.

La Figura 5.19 muestra la evolución de la norma del error de salida para el MEF2 vectorial, cuando el vector  $\omega(t)$  está compuesto de dos señales constantes, o sea correspondiente al Caso 1

de la Tabla 5.2. La Figura 5.20, por su parte, muestra la evolución de la norma del error paramétrico y de la norma del vector  $x(t)$ , definido en (5.41).

Como puede apreciarse de ambas figuras, tanto la norma del error de salida como la norma del error paramétrico y del vector  $x(t)$ , se mantienen acotadas, lo cual evidencia la estabilidad del esquema.

Observando la Figura 5.19 puede corroborarse que la norma del error de salida converge a cero para todos los valores del orden de derivación  $\alpha$ . Sin embargo, en el caso de la norma del error paramétrico y del vector  $x(t)$  éstas convergen a un valor diferente de cero, tal como se aprecia en la Figura 5.20. Este comportamiento es diferente al que puede observarse al realizar simulaciones para el caso escalar, donde una señal de entrada constante es suficiente para que  $\phi(t)$  converja a cero junto con  $e(t)$ . Sin embargo, en el caso vectorial esta convergencia parece estar relacionada con la densidad espectral del vector  $\omega(t)$ , tal como se observó en el MEF1 vectorial, lo cual es conocido bajo el concepto de excitación persistente (Narendra & Annaswamy, 2005). También en este caso, al realizar simulaciones en otras dimensiones diferentes de  $\mathbb{R}^2$ , se observó que en la medida que aumenta la dimensión de  $\phi$ , para que exista convergencia de  $\|\phi(t)\|$  y de  $\|x(t)\|$  es preciso que la densidad espectral del vector  $\omega(t)$  también aumente.

Respecto de la evolución de  $\|x(t)\|$ , puede apreciarse de la Figura 5.20 que se cumple que  $\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\|$ ,  $\forall t \geq t_0$ . La justificación analítica de este hecho será expuesta en la Subsección 5.3.2, durante el análisis de estabilidad de este modelo de error.

Respecto de la rapidez de convergencia, tanto para el caso del error de salida como para el error paramétrico, la convergencia más rápida corresponde al caso en que  $\alpha = 1$ , aunque las diferencias observadas en este modelo de error resultan menos marcadas que las observadas en el Modelo de Error 1 Fraccionario. El hecho de que la convergencia sea mayor en la medida que  $\alpha$  se acerca a 1 es un detalle peculiar, pues implica que el orden de la ley de ajuste que garantiza mayor rapidez de convergencia de los errores no es aquel que coincide con el orden de la ecuación del error de salida, sino el que más cercano a 1 sea posible usar. Sin embargo, hay un detalle que es preciso mencionar, y es que la respuesta transitoria difiere cuando se usan órdenes para la ley de ajuste que son menores o iguales que el de la ecuación del error, respecto de cuando se usan órdenes mayores. Este hecho puede observarse, aunque de manera muy sutil, en la Figura 5.20, donde se ha realizado una ampliación del gráfico superior en los primeros instantes de tiempo. Como puede apreciarse, cuando  $\alpha \leq 0,7$ , la respuesta transitoria de la norma de  $\phi(t)$  es no creciente, mientras que cuando  $\alpha > 0,7$  se produce un cambio de la monotonía en los primeros instantes de tiempo. Si bien este cambio es muy sutil, es preciso anotar que para estas simulaciones se han tomado valores específicos para los parámetros  $A, b, P, \gamma$  del modelo de error, por lo tanto este comportamiento podría ser más marcado en otros casos, lo cual en una aplicación real podría determinar por ejemplo la existencia o no de sobrepasos, característica importante en muchas aplicaciones.

La Figura 5.21 muestra la evolución de la norma del error de salida  $\|e(t)\|$  y la Figura 5.22 muestra la evolución de la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$  y de  $\|x(t)\|$ , cuando el vector  $\omega(t)$  corresponde al Caso 2 de la Tabla 5.2.

Como puede apreciarse, también en este caso tanto  $\|e(t)\|$  como  $\|\phi(t)\|$  y  $\|x(t)\|$  permanecen acotados, evidenciando la estabilidad del esquema. La norma del error de salida converge a cero para este vector de entradas, independientemente del orden de derivación utilizado. En este caso la norma del vector paramétrico y la del vector  $x(t)$  también convergen a cero, como puede apreciarse de la Figura 5.22, a diferencia de lo que ocurrió en el Caso 1. Ciertamente en este caso

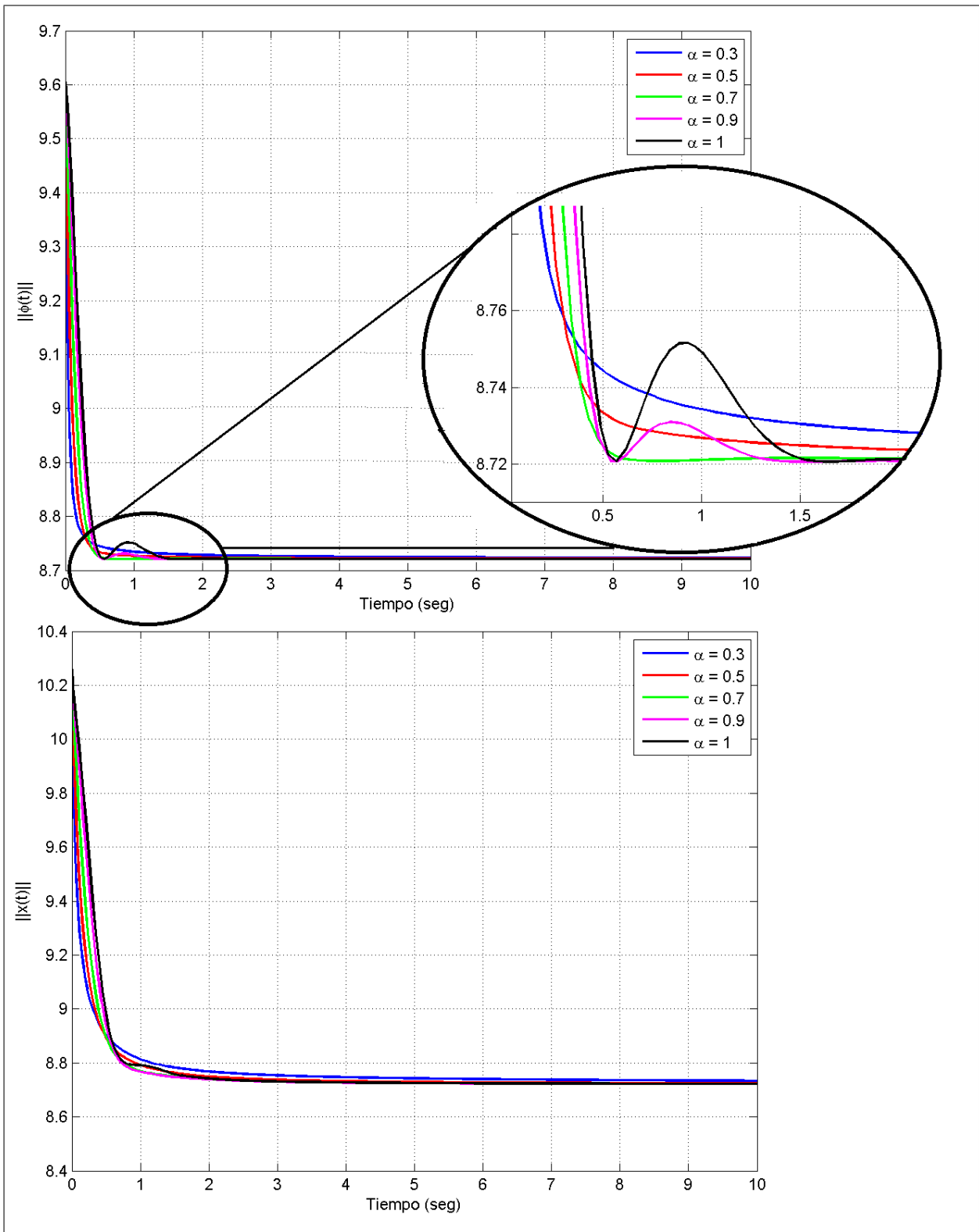


Figura 5.20: Evolución de la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$  y de  $\|x(t)\|$  del Modelo de Error Fraccionario 2, cuando el vector  $\omega(t)$  corresponde a un vector de señales constantes.

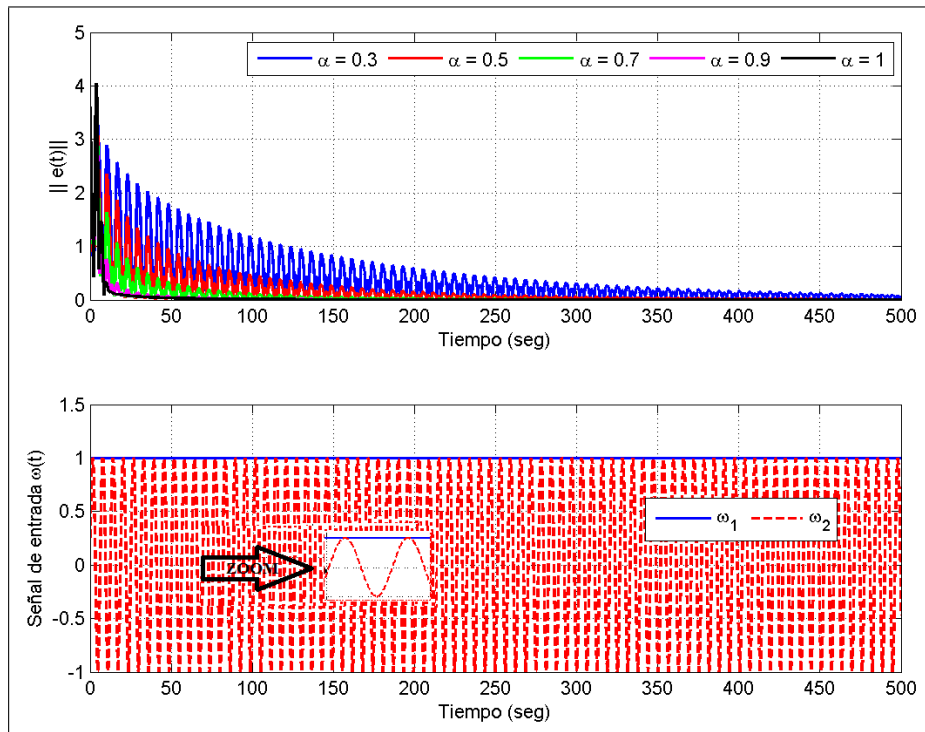


Figura 5.21: Evolución de la norma del error de salida  $\|e(t)\|$  del Modelo de Error Fraccionario 2, cuando  $\omega(t)$  corresponde al Caso 2 de la Tabla 5.2.

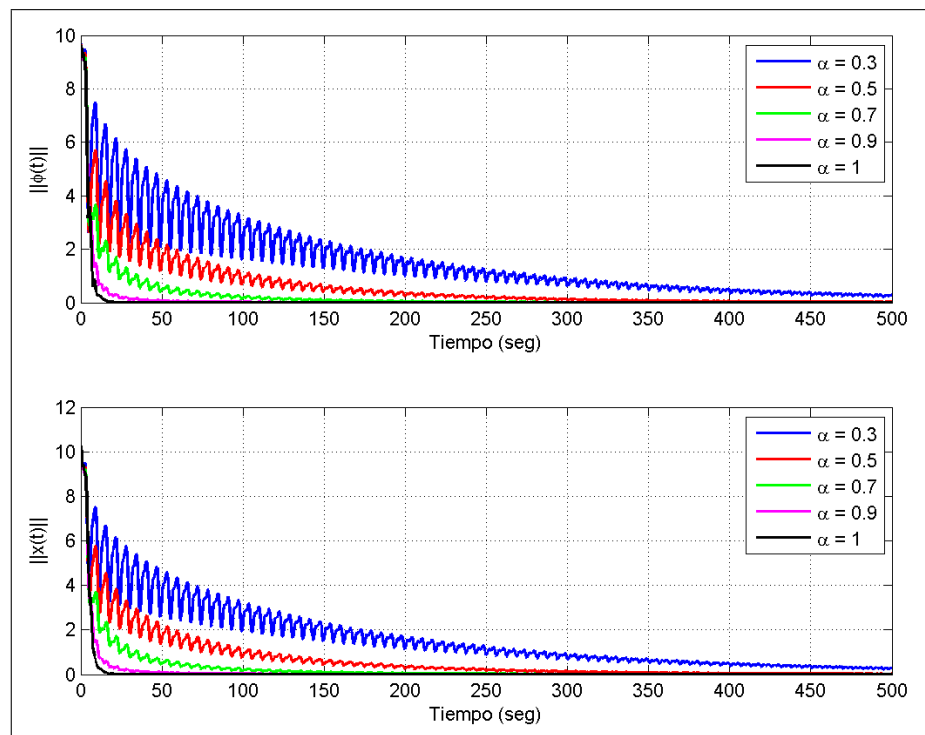


Figura 5.22: Evolución de la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$  y de  $\|x(t)\|$  del Modelo de Error Fraccionario 2, cuando  $\omega(t)$  corresponde al Caso 2 de la Tabla 5.2.

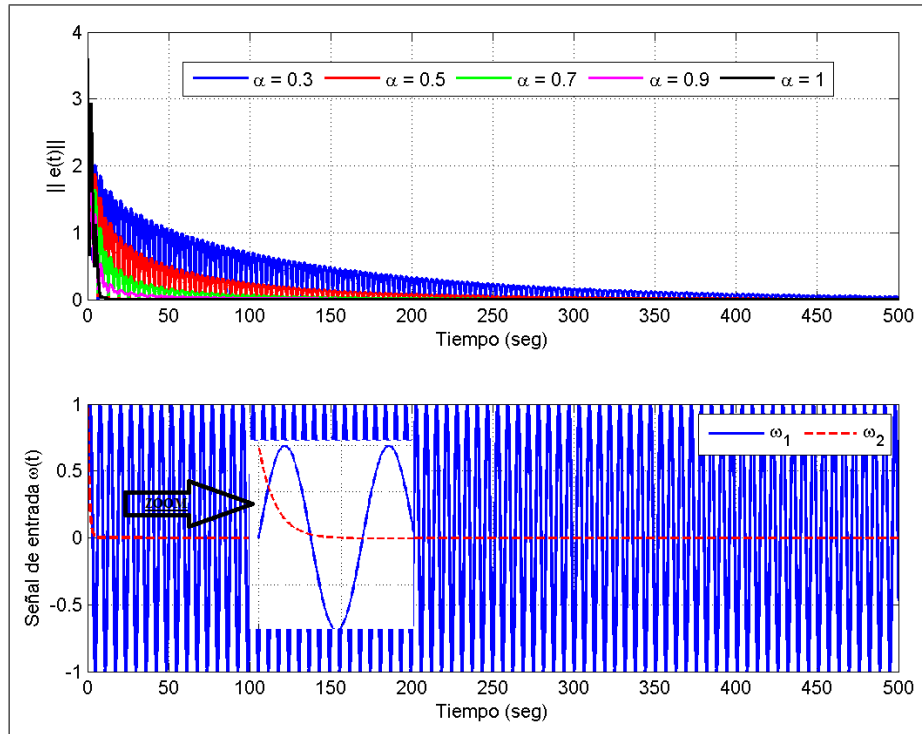


Figura 5.23: Evolución de la norma del error de salida  $\|e(t)\|$  del Modelo de Error Fraccionario 2, cuando  $\omega(t)$  corresponde al Caso 3 de la Tabla 5.2.

el vector  $\omega(t)$  tiene mayor densidad espectral que en el Caso 1, al estar compuesto por una señal constante y una señal senoidal, por lo tanto esto corrobora la intuición acerca de la excitación persistente que se expuso en el análisis del Caso 1.

Puede apreciarse como también en este caso se cumple que  $\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\|$ ,  $\forall t \geq t_0$  y la convergencia más rápida se da para el caso clásico, o sea  $\alpha = 1$ , siendo válida la misma observación que se hizo al respecto en el análisis del caso anterior.

La Figura 5.23 muestra la evolución de la norma del error de salida  $\|e(t)\|$  y la Figura 5.24 muestra la evolución de la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$  y de  $\|x(t)\|$ , cuando el vector  $\omega(t)$  corresponde al Caso 3 de la Tabla 5.2.

Como puede apreciarse, al igual que en el Caso 1 y el Caso 2, para este vector de entradas tanto  $\|e(t)\|$  como  $\|\phi(t)\|$  y  $\|x(t)\|$  permanecen acotados, evidenciando así la estabilidad del esquema.

De la Figura 5.23 puede apreciarse que la norma del error de salida converge a cero para todos los valores de  $\alpha$  utilizados, y de la Figura 5.24 puede apreciarse como también en este caso se cumple que  $\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\|$ ,  $\forall t \geq t_0$  (ver Proposición 6).

En cuanto a la convergencia de  $\|\phi(t)\|$  y de  $\|x(t)\|$ , puede apreciarse en la Figura 5.24 que en este caso no convergen a cero. Tal como se hizo en el MEF1, se realizaron una serie de simulaciones adicionales, las cuales mostraron que si al menos una de las componentes del vector  $\omega(t)$  converge a cero, entonces  $\|\phi(t)\|$  y  $\|x(t)\|$  no convergerán a cero, lo cual corresponde a lo mostrado en este caso.

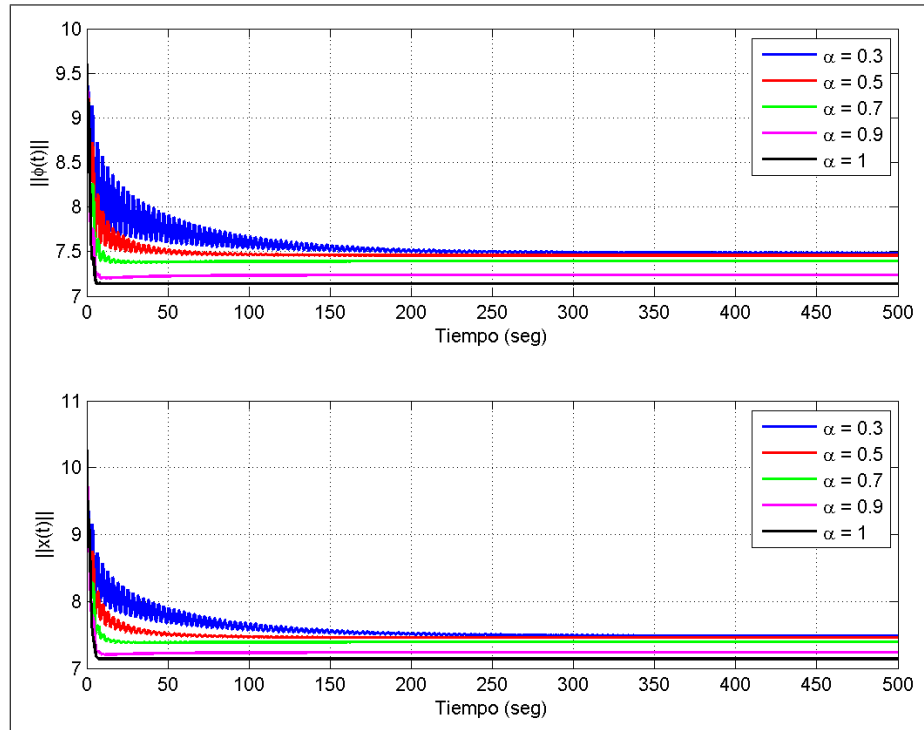


Figura 5.24: Evolución de la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$  y de  $\|x(t)\|$  del Modelo de Error Fraccionario 2, cuando  $\omega(t)$  corresponde al Caso 3 de la Tabla 5.2.

Respecto de la rapidez de convergencia de las normas de los errores, en este caso también puede corroborarse que ésta aumenta en la medida que el orden de derivación  $\alpha$  se acerca a 1, sin importar el valor que tenga el orden de derivación de la ecuación del error de salida.

Finalmente, se presentan las simulaciones correspondientes al Caso 4 de la Tabla 5.2. La Figura 5.25 muestra la evolución de la norma del error de salida  $\|e(t)\|$  y la Figura 5.26 muestra la evolución de la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$  y de  $\|x(t)\|$ .

En este caso, tal como en los tres casos anteriores, tanto la norma del error de salida  $\|e(t)\|$  como la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$  y  $\|x(t)\|$  permanecen acotadas, lo cual evidencia la estabilidad del esquema. Al igual que sucedió en los casos anteriores, también aquí puede corroborarse que se cumple que la norma del vector  $x(t)$  permanece acotada por su condición inicial (ver Proposición 6) y el decrecimiento de la norma de ambos errores es más rápido en la medida que el orden de derivación se acerca a  $\alpha = 1$ .

Sin embargo, al igual que sucedió en el Caso 4 del MEF1, la convergencia a cero de las normas de ambos errores no queda lo suficientemente clara para todos los órdenes de derivación, al menos en la ventana de tiempo que se ha simulado. Puede apreciarse que la norma del error de salida  $\|e(t)\|$  tiene una clara tendencia a converger a cero cuando  $\alpha > 0,5$ . Sin embargo, cuando  $\alpha \leq 0,5$ , si bien el error parece ir decreciendo muy lentamente, no es posible establecer conclusiones sobre su convergencia a cero observando esta ventana de tiempo.

Un comportamiento similar puede observarse en el caso de la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$ , donde los casos  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = 0,9$  y  $\alpha = 0,7$  tienen una clara tendencia a converger a cero, aunque en los dos casos restantes, si bien tienen también esta tendencia, es mucho más lenta y no es posible establecer conclusiones claras al respecto. La razón de que esta tendencia sea

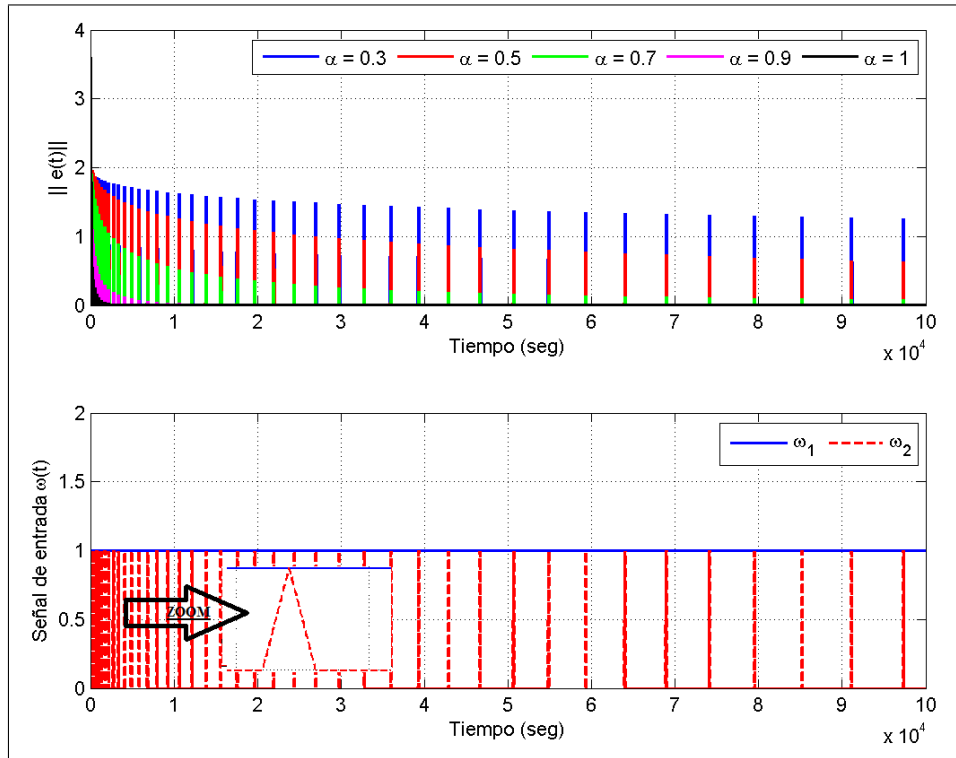


Figura 5.25: Evolución de la norma del error de salida  $\|e(t)\|$  del Modelo de Error Fraccionario 2, cuando  $\omega(t)$  corresponde al Caso 4 de la Tabla 5.2.

mucho más lenta en la medida que  $\alpha$  se acerca a cero, puede observarse empíricamente de la ampliación que se hizo en la Figura 5.26. Al observar esta sección del gráfico, puede verse que en el caso  $\alpha = 1$  la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$  es no creciente, mientras que en los casos en que  $\alpha < 1$ ,  $\|\phi(t)\|$  comienza a decrecer cada vez que aparecen los pulsos triangulares de la señal de entrada. Pero una vez éstos desaparecen, la norma vuelve a crecer, y ese crecimiento es mayor en la medida que  $\alpha$  se acerca más a cero, lo cual hace que el decrecimiento de  $\|\phi(t)\|$  en el tiempo sea mucho más lento.

En resumen, tal como se hizo para el MEF1, podemos establecer para el MEF2 algunas conclusiones generales de los estudios por simulación realizados.

1. Tanto la norma del error de salida  $\|e(t)\|$  como la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$  y  $\|x(t)\|$ , permanecen acotadas para todo tipo de señales de entrada acotadas y cualquier set de condiciones iniciales acotadas, lo cual evidencia la estabilidad del esquema. La justificación analítica de este hecho se encuentra más adelante, en la Subsección 5.3.2, correspondiente al análisis de estabilidad del modelo de error.
2. La norma del error de salida  $\|e(t)\|$  converge a cero para todo tipo de señales de entrada acotadas, exceptuando el Caso 4, en el cual no se pudieron establecer resultados concluyentes al respecto para determinados valores del orden de derivación  $\alpha$ .
3. La condición para que la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$  converja a cero, parece estar relacionada con dos elementos de manera cualitativa, el primero es que ninguna de las componentes del vector  $\omega(t)$  tienda a cero, y el segundo es la relación entre la densidad espectral del vector  $\omega(t)$  y la dimensión del vector  $\phi(t)$ .



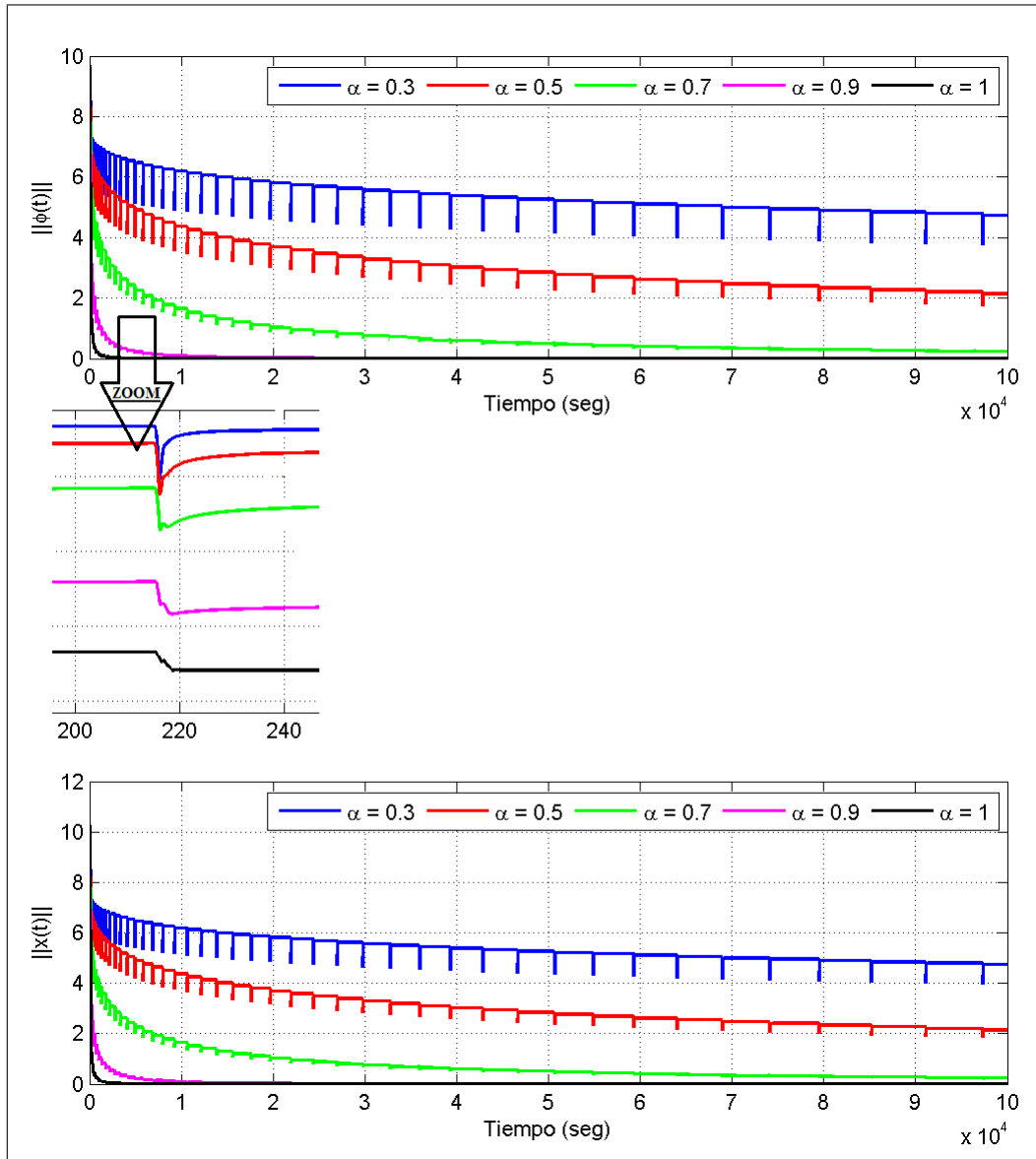


Figura 5.26: Evolución de la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$  y de  $\|x(t)\|$  del Modelo de Error Fraccionario 2, cuando  $\omega(t)$  corresponde al Caso 4 de la Tabla 5.2.

4. La norma del vector  $x(t)$  permanece acotada siempre por su condición inicial, es decir  $\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\|$ ,  $\forall t \geq t_0$ . La justificación analítica de este hecho se encuentra en la Proposición 6 de la Subsección 5.3.2, que aborda el análisis de estabilidad de este modelo de error.

### 5.3.2. Análisis de estabilidad del Modelo de Error Fraccionario 2

Para realizar el análisis de estabilidad de este modelo de error, comencemos con las ecuaciones dadas en (5.40), las cuales presentamos nuevamente en esta subsección para facilitar la comprensión de la demostración. Se hace notar que la demostración de estabilidad que se presenta en esta subsección es válida para el caso en que  $\alpha = \beta$ , quedando el caso  $\alpha \neq \beta$  como

parte del trabajo futuro a desarrollar en esta línea de investigación. De este modo, se analizará el MEF2 dado por

$${}^C D_{t_0}^\alpha e(t) = Ae(t) + b\phi^T(t)\omega(t) \quad \alpha \in (0, 1] \quad (5.43)$$

$${}^C D_{t_0}^\alpha \phi(t) = -e^T(t)Pb\omega(t), \quad (5.44)$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz con raíces con parte real negativa,  $b \in \mathbb{R}^n$ , el par  $(A, b)$  es controlable,  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz positiva definida y simétrica tal que se cumple  $A^T P + PA = -Q < 0$ , donde  $Q$  es una matriz positiva definida arbitraria.

Si se supone que  $\phi(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $e(t) \in \mathbb{R}^n$  son diferenciables, basado en los resultados presentados en los Lemas 4 y 5 puede escribirse

$${}^C D_{t_0}^\alpha [e^T(t)Pe(t)] + {}^C D_{t_0}^\alpha [\phi^T(t)\phi(t)] \leq 2e^T(t)P {}^C D_{t_0}^\alpha e(t) + 2\phi^T(t) {}^C D_{t_0}^\alpha \phi(t). \quad (5.45)$$

Si se reemplazan las expresiones (5.43) y (5.44) en el miembro derecho de la desigualdad (5.45) y se hacen los desarrollos correspondientes, se obtiene (para facilitar la comprensión del desarrollo, se omiten en la notación de las variables su dependencia del tiempo)

$$\begin{aligned} {}^C D_{t_0}^\alpha [e^T Pe] + {}^C D_{t_0}^\alpha [\phi^T \phi] &\leq 2e^T P {}^C D_{t_0}^\alpha e + 2\phi^T {}^C D_{t_0}^\alpha \phi \\ &= ({}^C D_{t_0}^\alpha e)^T P e + e^T P {}^C D_{t_0}^\alpha e + 2\phi^T {}^C D_{t_0}^\alpha \phi \\ &= (Ae + b\phi^T \omega)^T P e + e^T P (Ae + b\phi^T \omega) - 2\phi^T e^T P b \omega \\ &= (Ae)^T P e + (b\phi^T \omega)^T P e + e^T P A e + e^T P b \phi^T \omega - 2\phi^T e^T P b \omega \\ &= e^T (A^T P + PA) e. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Dado que  $A^T P + PA = -Q < 0$ , entonces de la expresión (5.46) puede concluirse que

$${}^C D_{t_0}^\alpha [e^T Pe] + {}^C D_{t_0}^\alpha [\phi^T \phi] \leq -e^T Q e. \quad (5.47)$$

Ahora bien, si aplicamos la integral de orden  $\alpha$  a la expresión (5.47) se obtiene

$$e^T(t)Pe(t) - e^T(t_0)Pe(t_0) + \phi^T(t)\phi(t) - \phi^T(t_0)\phi(t_0) \leq -I_{t_0}^\alpha [e^T Q e]. \quad (5.48)$$

Como  $P$  es positiva definida, existirá una matriz real y no singular  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $P = B^T B$ . Luego llamando

$$y(t) = \left[ (Be(t))^T \quad \phi(t)^T \right]^T \in \mathbb{R}^{n+m}, \quad (5.49)$$

la desigualdad (5.48) puede escribirse como

$$y^T(t)y(t) - y^T(t_0)y(t_0) \leq 0, \quad (5.50)$$

lo cual implica que  $\|y(t)\| \leq \|y(t_0)\|$ . Luego, dada la definición del vector  $y(t)$  en (5.49) en conjunto con la expresión (5.50), puede afirmarse que el MEF2, dado por las ecuaciones (5.43) y (5.44), es Lyapunov estable, y esto concluye la demostración.  $\square$

Es preciso notar que en este caso, al igual que en el análisis de estabilidad del MEF1 presentado en la Subsección 5.2.3, no ha sido posible utilizar la extensión fraccionaria del método directo de Lyapunov planteado en (Li et al., 2010) para probar la estabilidad del esquema, debido a que

este método aún no incluye el caso en que la derivada de la función de Lyapunov resulta negativa semidefinida. Precisamente esto es lo que se obtendría en este análisis al considerar la función de Lyapunov  $V = e^T P e + \phi^T \phi$  y calcular su derivada de orden  $\alpha$ , obteniendo (5.47), que resulta negativa semidefinida. Sin embargo, los Lemas 4 y 5 desarrollados como parte de este trabajo investigativo sí han permitido realizar el análisis presentado y concluir acerca de la estabilidad del modelo de error.

Una de las observaciones que se realizaron durante los estudios por simulación para este modelo de error, es que la norma del vector  $x(t)$  permanece acotada por la norma de su condición inicial. La demostración analítica de este hecho se presenta en la Proposición 6.

**Proposición 6.** Consideremos el MEF2 (5.43), (5.44). Si se usa la matriz  $P = I$  en la ley de ajuste (5.44), entonces se cumple que

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\|, \quad \forall t \geq t_0, \quad (5.51)$$

donde  $x(t) = [e^T(t) \quad \phi^T(t)]^T \in \mathbb{R}^{n+m}$ .

Si en cambio se usa  $P \neq I$  en la ley de ajuste (5.44), entonces se cumple que

$$\|y(t)\| \leq \|y(t_0)\| \quad \forall t \geq t_0, \quad (5.52)$$

donde  $y(t) = [(Be(t))^T \quad \phi(t)^T]^T \in \mathbb{R}^{n+m}$ , con  $P = B^T B$ .

**Demostración.** Consideremos primero el caso en que  $P = I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  en la expresión (5.48), con lo cual se obtiene

$$e^T(t)e(t) - e^T(t_0)e(t_0) + \phi^T(t)\phi(t) - \phi^T(t_0)\phi(t_0) \leq -I_{t_0}^\alpha [e^T Q e] \leq 0 \quad \forall t \geq t_0. \quad (5.53)$$

Como  $x(t) = [e^T(t) \quad \phi^T(t)]^T$ , esto implica que  $\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\|$ ,  $\forall t \geq t_0$ .

Por otro lado, en el caso en que se utilice una matriz  $P \neq I$  para la ley de ajuste, como  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es positiva definida, existirá una matriz real y no singular  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $P = B^T B$ . Luego, dado que  $y(t) = [(Be(t))^T \quad \phi(t)^T]^T$ , entonces la desigualdad (5.48) puede escribirse como

$$y^T(t)y(t) - y^T(t_0)y(t_0) \leq 0 \quad \forall t \geq t_0, \quad (5.54)$$

lo cual implica que  $\|y(t)\| \leq \|y(t_0)\|$ ,  $\forall t \geq t_0$ , y esto completa la demostración.  $\square$

Así, en esta subsección hemos demostrado analíticamente las siguientes propiedades del MEF2.

- El MEF2 es Lyapunov estable para el caso en que  $\alpha = \beta$ . La demostración analítica para el caso  $\alpha \neq \beta$  aún no está desarrollada, aunque para estos casos también se ha observado que el modelo de error es Lyapunov estable.
- Para este modelo de error se cumple que  $\|y(t)\| \leq \|y(t_0)\|$ ,  $\forall t \geq t_0$ , donde  $y(t) = [(Be(t))^T \quad \phi(t)^T]^T$ , con  $P = B^T B$ .
- En el caso en que se usa  $P = I$ , se cumple que  $\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\|$ ,  $\forall t \geq t_0$ , donde  $x(t) = [e^T(t) \quad \phi(t)^T]^T$ .

### 5.3.3. Acerca de la convergencia del error de salida en el Modelo de Error Fraccionario 2

La convergencia del error de salida  $e(t)$  en el MEF2, también ha sido un tema analizado en profundidad a lo largo de este trabajo investigativo. Los estudios por simulaciones presentados en este documento muestran que el error de salida converge a cero para todo tipo de señales  $\omega(t)$  acotadas, aunque el Caso 4 analizado no pudo arrojar resultados intuitivos al respecto.

La demostración analítica sobre la convergencia a cero de  $e(t)$ , sin embargo, no ha podido completarse, por razones similares a las expuestas en el análisis del MEF1 (ver Subsección 5.2.5).

Sin embargo, a pesar de que no ha sido posible encontrar una herramienta de análisis que permita concluir analíticamente que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$ , sí se ha podido establecer una conclusión analítica sobre su evolución. Ésta se relaciona con el hecho de que  $I_{t_0}^\alpha \|e(t)\|^2$  es acotada, como puede apreciarse de la ecuación (5.48); y con que el error de salida es uniformemente continuo. Estos resultados nos permiten aplicar el Lema 9 presentado en esta Tesis, y concluir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ t^{\alpha-\varepsilon} \frac{\int_{t_0}^t \|e(\tau)\|^2 d\tau}{t} \right] = 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (5.55)$$

El resultado en (5.55) no permite establecer que la norma del error de salida converja a cero, pero sí permite afirmar que su promedio en el tiempo, decrece a una razón mínima de  $t^{-\alpha}$  para tiempos lo suficientemente grandes. Es decir, el acotamiento de la integral fraccionaria del cuadrado de la norma del error no permite afirmar que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$ , pero sí de alguna manera nos dice que si  $\|e(t)\|$  crece y decrece en el tiempo sin converger, lo hará de forma tal que su promedio en el tiempo tenga una tendencia decreciente, resultado que podría tener utilidad práctica.

## 5.4. Modelo de Error Fraccionario 3

El Modelo de Error Fraccionario 3 (en adelante MEF3) tiene la misma estructura que el MEF2, con la diferencia de que no se tiene acceso a todo el vector de errores  $e(t) \in \mathbb{R}^n$  (acceso al estado en el caso de plantas reales), sino a una combinación algebraica de sus componentes  $e_1(t) \in \mathbb{R}$ . En general, este modelo de error aparece cuando se tiene acceso solamente a la salida de la planta a controlar o identificar, y por lo tanto esto hace que el MEF3 sea aplicable a una gama más amplia de problemas que el MEF2. La Figura 5.27 muestra el esquema asociado a este modelo de error.

En este modelo de error, el error de salida está determinado por

$$\begin{aligned} {}^C D_{t_0}^\beta e(t) &= A e(t) + b \phi^T(t) \omega(t), \quad \beta \in (0, 2) \\ e_1(t) &= h^T e(t), \end{aligned} \quad (5.56)$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz asintóticamente estable,  $b \in \mathbb{R}^n$ , el par  $(A, b)$  es controlable y el par  $(h^T, A)$  es observable.  $\theta^* \in \mathbb{R}^m$  es el parámetro ideal que se supone desconocido,  $\theta(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$

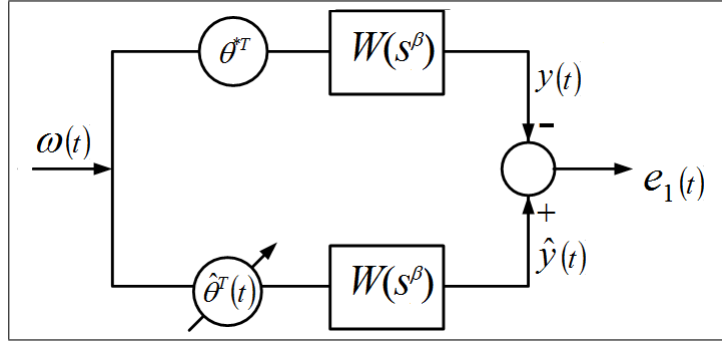


Figura 5.27: Esquema del Modelo de Error Fraccionario 3.

es el parámetro ajustable que estima a  $\theta^*$  y  $\phi(t) = \theta(t) - \theta^* : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  es el error paramétrico.  $e(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  es el error de estado,  $\omega(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  es la señal de entrada, también conocida como señal de información y  $e_1(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  es el error de salida, al cual se tiene acceso.

Como ya se ha planteado, el hecho de que solamente se tiene acceso a  $e_1(t)$  en lugar del vector completo de estado, hace este modelo de error más utilizado que el MEF2. Sin embargo, como era de esperarse, se imponen condiciones más restrictivas sobre la función de transferencia  $W(s^\beta)$  entre  $\phi^T(t)\omega(t)$  y  $e_1(t)$ , para que puedan sintetizarse las leyes de ajuste. Específicamente, la tripleta  $(h^T, A, b)$  debe ser tal que la función de transferencia  $h^T(sI - A)^{-1}b$  sea estrictamente real positiva (en adelante SPR, por sus siglas en inglés (Strictly Positive Real)) (Narendra & Annaswamy, 2005).

La ley de ajuste para este modelo de error resulta ser

$${}^C D_{t_0}^\alpha \phi(t) = -\gamma e_1(t) \omega(t), \quad \alpha \in (0, 2), \quad (5.57)$$

donde  $\gamma > 0$  corresponde a la ganancia adaptable. Dicha ganancia adaptable puede ser escalar  $\gamma \in \mathbb{R}$  constante o variante en el tiempo; o bien matricial  $\Gamma \in \mathbb{R}^{m \times m}$  constante o variante en el tiempo (Narendra & Annaswamy, 2005).

Tal como sucede en el caso del MEF2, en este modelo de error los órdenes de derivación pueden estar en los intervalos  $\alpha, \beta \in (0, 2)$ . Esto implica que podrían darse los casos en que se tiene dinámica del error entera ( $\beta = 1$ ) y ley de ajuste fraccionaria ( $\alpha \in (0, 2), \alpha \neq 1$ ) o viceversa. El caso  $\alpha, \beta = 1$ , que es un caso particular de este modelo de error, corresponde al Modelo de Error 3 clásico, el cual ya está completamente estudiado (Narendra & Annaswamy, 2005).

Luego las ecuaciones que describen el MEF3 son

$$\begin{aligned} {}^C D_{t_0}^\beta e(t) &= A e(t) + b \phi^T(t) \omega(t), & \text{con } \beta \in (0, 2), \\ e_1(t) &= h^T e(t) \\ {}^C D_{t_0}^\alpha \phi(t) &= -\gamma e_1(t) \omega(t), & \text{con } \alpha \in (0, 2). \end{aligned} \quad (5.58)$$

En esta sección nos referiremos a los estudios por simulación desarrollados para este modelo de error cuando  $\alpha, \beta \in (0, 1]$ , así como a la demostración analítica de estabilidad de éste y algunos comentarios sobre la convergencia del error de salida.

### 5.4.1. Estudios por simulación para el Modelo de Error Fraccionario 3

Al igual que en los estudios por simulación del MEF2, para el caso de este modelo de error no se realizan observaciones particulares para el caso escalar, sino que todos los análisis que se realizan son generales. Por lo tanto, se presentan los estudios por simulación correspondientes al caso vectorial, lo cual es aceptable ya que el caso escalar es un caso particular de éste. Las simulaciones que se muestran en esta subsección corresponden al caso  $e(t), \phi(t) \in \mathbb{R}^2$ , el cual es representativo del resto de los casos en que  $e \in \mathbb{R}^n$  y  $\phi \in \mathbb{R}^m$ .

Debido a que el MEF3 tiene dinámica fraccionaria, tanto en la ecuación del error de salida como en la ley de ajuste, pueden darse muchas combinaciones diferentes de los órdenes  $\beta$  y  $\alpha$ . Sin embargo, tal como se introdujo durante el análisis del MEF2, en los sistemas adaptables la ecuación del error de salida está usualmente determinada por las características de la planta a controlar o identificar y por consiguiente no existe la posibilidad de modificar este orden. Por lo tanto, en estos estudios por simulación se utiliza un orden fijo para la dinámica de ambas componentes del error de estado, específicamente  $\beta = 0,7$ .

En cambio, el orden de la ley de ajuste sí es un parámetro de diseño, por lo tanto manteniendo  $\beta = 0,7$ , se realizan entonces varias pruebas utilizando órdenes de la ley de ajuste  $\alpha$  que sean menores, iguales y mayores que  $\beta$ . Los resultados se presentan superpuestos en un mismo gráfico, con el objetivo de mostrar las principales diferencias que aparecen y poder establecer comparaciones.

En los gráficos que se presentan en esta subsección se muestra el error  $e_1(t)$ , y para el caso del error de estado  $e(t)$  y el error paramétrico  $\phi(t)$  no se muestran sus componentes por separado, sino su norma euclidiana, o sea  $\|e(t)\|$  y  $\|\phi(t)\|$ . Del mismo modo, tal como se realizó en el caso del MEF2, se ha incluido un gráfico adicional que corresponde a la evolución de la norma del vector definido como

$$x(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4. \quad (5.59)$$

El objetivo de incluir este gráfico adicional radica en que se podrán realizar observaciones durante las simulaciones respecto del comportamiento del vector  $x(t)$ , las cuales serán luego justificadas analíticamente.

Los valores de los parámetros de las ecuaciones en (5.58) que se utilizan en estas simulaciones están dados por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \gamma = 1, \quad \theta_1^* = -5, \quad \theta_2^* = 8, \quad (5.60)$$

donde  $\theta_1^*, \theta_2^*$  son los valores reales de los parámetros desconocidos del esquema, y están relacionados con el error paramétrico por las expresiones  $\phi_1(t) = \theta_1(t) - \theta_1^*$  y  $\phi_2(t) = \theta_2(t) - \theta_2^*$ , donde  $\theta_1(t), \theta_2(t)$  son los parámetros ajustables dentro del esquema. Las condiciones iniciales que se utilizan para los parámetros estimados y el error son  $\theta_1(0) = 1, \theta_2(0) = 0,5, e(0) = [2 \ -3]^T$ . Aunque en esta Tesis se reportan los resultados obtenidos para un determinado set de condiciones iniciales, durante los estudios por simulación se realizaron pruebas utilizando varios sets de condiciones iniciales diferentes, siempre acotadas, y el comportamiento observado fue similar en todos los casos.

Tal como se planteó en la sección correspondiente al MEF1, para los estudios por simulación se utilizan señales de entrada  $\omega(t)$  con características representativas, las cuales están definidas

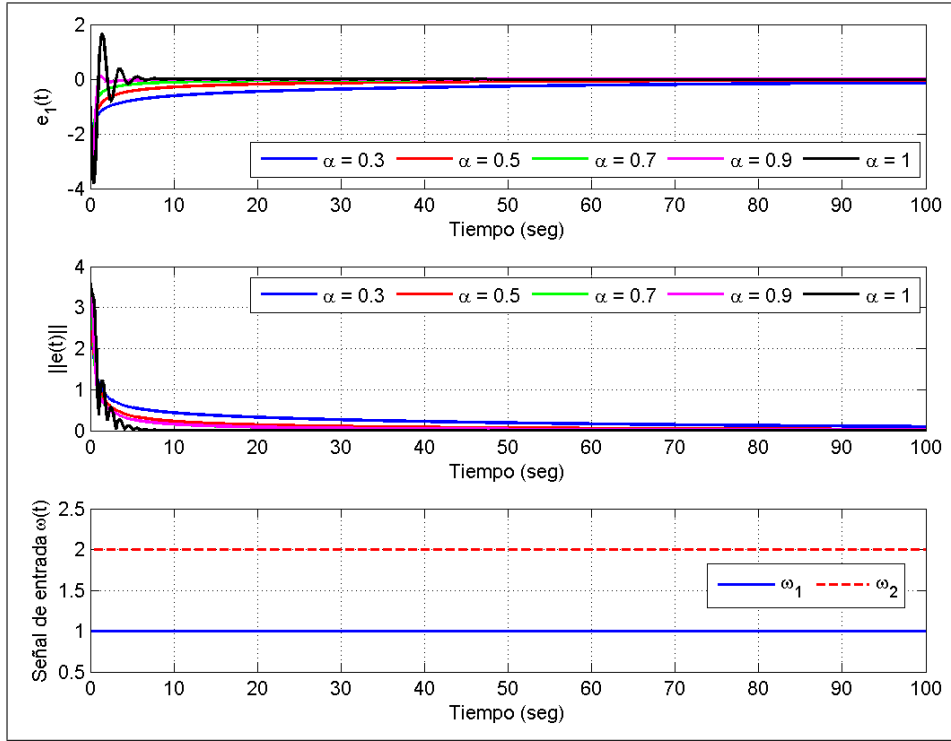


Figura 5.28: Evolución de  $e_1(t)$  y de la norma del error de estado  $\|e(t)\|$  del Modelo de Error Fraccionario 3, cuando  $\omega(t)$  corresponde a un vector de señales constantes.

en la Tabla 5.2. En función de estas señales de entrada se procede a reportar los resultados obtenidos y las conclusiones correspondientes.

La Figura 5.28 muestra la evolución del error de salida  $e_1(t)$  y de la norma del error de estado  $\|e(t)\|$  para el MEF3 vectorial, cuando el vector  $\omega(t)$  está compuesto de dos señales constantes, o sea correspondiente al Caso 1 de la Tabla 5.2. La Figura 5.29, por su parte, muestra la evolución de la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$  y de  $\|x(t)\|$ .

Como puede apreciarse de ambas figuras, tanto  $e_1(t)$  como la norma del error de estado  $\|e(t)\|$ , la del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$  y  $\|x(t)\|$  se mantienen acotadas, lo cual evidencia la estabilidad del esquema.

Observando la Figura 5.28 puede corroborarse que la norma del error de estado converge a cero para todos los valores del orden de derivación, lo mismo que el error de salida  $e_1(t)$ . Sin embargo, en el caso de la norma del error paramétrico y del vector  $x(t)$  éstas convergen a un valor diferente de cero, como se aprecia en la Figura 5.29. Este comportamiento es diferente al que puede observarse al realizar simulaciones para el caso escalar, donde una señal de entrada constante es suficiente para que  $\phi(t)$  converja a cero. Sin embargo, en el caso vectorial esta convergencia parece estar relacionada con la densidad espectral del vector  $\omega(t)$ , tal como se observó en los respectivos casos vectoriales del MEF1 y del MEF2. También en este caso, al realizar simulaciones en otras dimensiones diferentes de  $\mathbb{R}^2$ , se observó que para que exista convergencia de  $\|\phi(t)\|$  y de  $\|x(t)\|$ , es preciso que la densidad espectral del vector  $\omega(t)$  sea mayor en la medida que la dimensión de  $\phi(t)$  aumenta.

Respecto de la evolución de  $\|x(t)\|$ , puede apreciarse de la Figura 5.29 que se cumple que

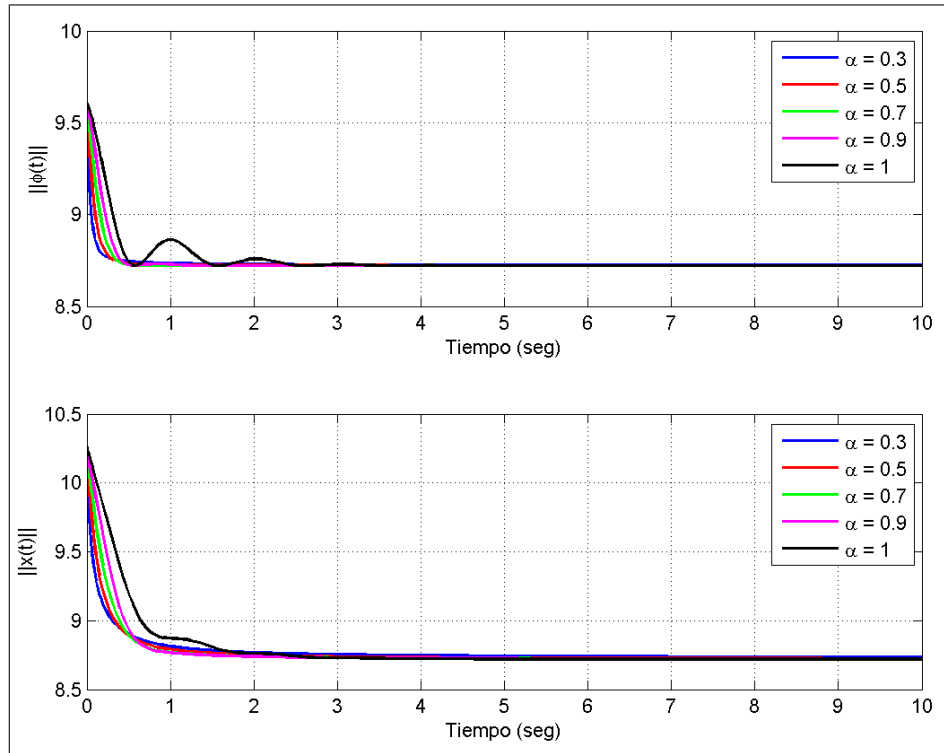


Figura 5.29: Evolución de la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$  y de  $\|x(t)\|$  del Modelo de Error 3 Fraccionario, cuando  $\omega(t)$  corresponde a un vector de señales constantes.

$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\|$ ,  $\forall t \geq t_0$ . La justificación analítica de este hecho será expuesta en la Subsección 5.4.2, durante el análisis de estabilidad de este modelo de error.

Respecto de la rapidez de convergencia, tanto en el gráfico del error de salida como en el del error paramétrico, la convergencia más rápida corresponde al caso en que  $\alpha = 1$ , aunque las diferencias observadas en este modelo de error resultan menos marcadas que las observadas en el MEF1, tal como sucedió en el MEF2. El hecho de que la convergencia sea mayor en la medida que  $\alpha$  se acerca a 1 también es un detalle peculiar, pues implica que el orden de la ley de ajuste que garantiza mayor rapidez de convergencia de los errores no es aquel que coincide con el orden de la ecuación del error, sino el que más cercano a 1 sea posible usar. Sin embargo, hay un detalle que es preciso mencionar, y es que la respuesta transitoria difiere cuando se usan órdenes para la ley de ajuste que son menores o iguales que el de la ecuación del error, respecto de cuando se usan órdenes mayores. Este hecho puede observarse en la Figura 5.28, y es más marcado en el gráfico de  $e_1(t)$ , donde los casos en que  $\alpha > 0,7$  tienen sobrepaso, mientras los casos en que  $\alpha \leq 0,7$  no lo presentan. Este sobrepaso es mayor en la medida que  $\alpha$  se acerca a 1, siendo el caso clásico el que mayor sobrepaso presenta.

La Figura 5.30 muestra la evolución de  $e_1(t)$  y de la norma del error de estado  $\|e(t)\|$  cuando el vector  $\omega(t)$  corresponde al Caso 2 de la Tabla 5.2. La Figura 5.31, por su parte, muestra la evolución de la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$  y de  $\|x(t)\|$ .

Como puede apreciarse, también en este caso, tanto  $e_1(t)$ ,  $\|e(t)\|$  como  $\|\phi(t)\|$  y  $\|x(t)\|$  permanecen acotados, evidenciando la estabilidad del esquema. Este comportamiento fue observador para todos los sets de condiciones iniciales acotadas para los cuales se realizaron pruebas. La norma del error de estado y  $e_1(t)$  convergen a cero para este vector  $\omega(t)$ , independientemente



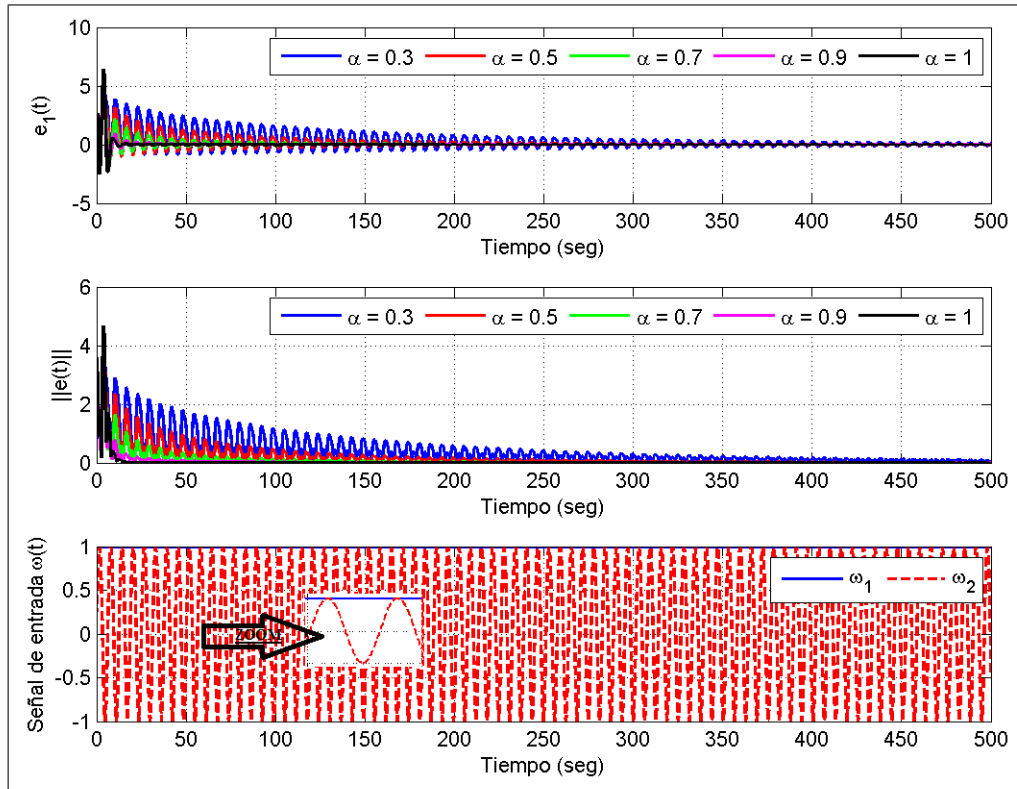


Figura 5.30: Evolución de  $e_1(t)$  y de la norma del error de estado  $\|e(t)\|$  del Modelo de Error Fraccionario 3, cuando  $\omega(t)$  corresponde al Caso 2 de la Tabla 5.2.

del orden de derivación utilizado en las leyes de ajuste. En este caso, la norma del error paramétrico y la del vector  $x(t)$  también convergen a cero, como puede apreciarse de la Figura 5.31, a diferencia de lo que ocurrió en el Caso 1. Ciertamente en este caso el vector  $\omega(t)$  tiene mayor densidad espectral que en el Caso 1, al estar compuesto por una señal constante y una señal senoidal, por lo tanto esto corrobora la intuición acerca de la excitación persistente que se expuso en el análisis del Caso 1.

Puede apreciarse como también en este caso, se cumple que  $\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\|$ ,  $\forall t \geq t_0$  y la convergencia más rápida se obtiene para el caso clásico, o sea  $\alpha = 1$ , siendo válida la misma observación que se hizo al respecto en el análisis del caso anterior. Es interesante observar además como, tanto en el gráfico de  $e_1(t)$  como en el de  $\|e(t)\|$ , el mayor sobrepaso corresponde al caso  $\alpha = 1$ .

La Figura 5.32 muestra la evolución de  $e_1(t)$  y de la norma del error de estado cuando el vector  $\omega(t)$  corresponde al Caso 3 de la Tabla 5.2. La Figura 5.33, por su parte, muestra la evolución de la norma del error paramétrico y de la norma del vector  $x(t)$ .

Como puede apreciarse, al igual que en el Caso 1 y el Caso 2, para este vector de entrada tanto  $e_1(t)$  como  $\|e(t)\|$ ,  $\|\phi(t)\|$  y  $\|x(t)\|$  permanecen acotados, evidenciando así la estabilidad del esquema. Esta observación es válida para todos los sets de condiciones iniciales acotadas que se utilizaron.

De la Figura 5.32 puede apreciarse que el error de salida  $e_1(t)$  y la norma del error de estado convergen a cero para todos los valores de  $\alpha$  utilizados. De la Figura 5.33 puede apreciarse como, también en este caso, se cumple que  $\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\|$ ,  $\forall t \geq t_0$ .

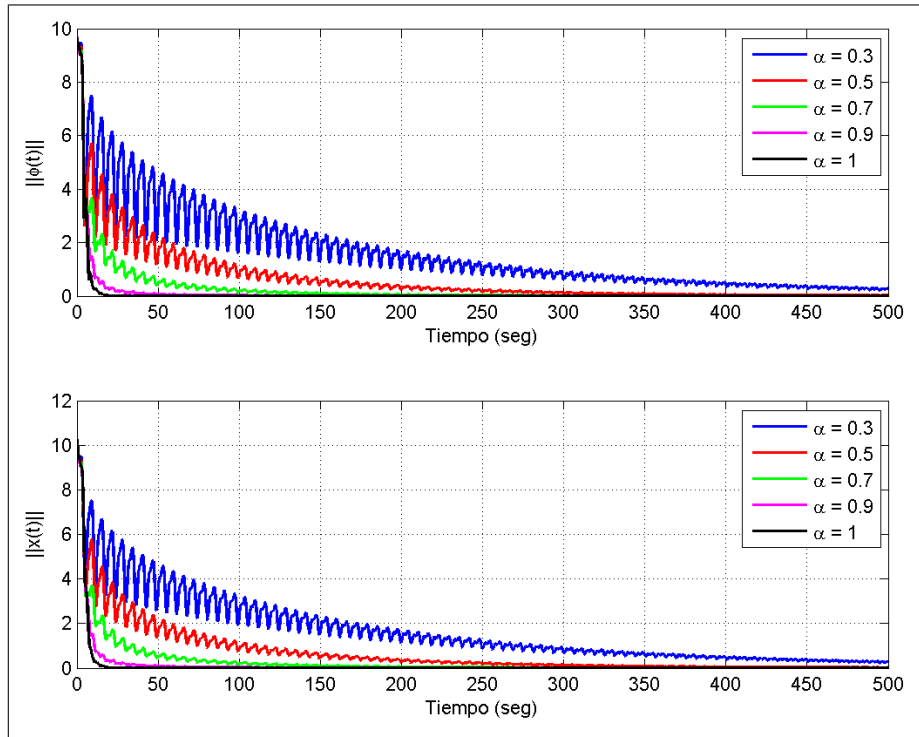


Figura 5.31: Evolución de la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$  y de  $\|x(t)\|$  del Modelo de Error Fraccionario 3, cuando  $\omega(t)$  corresponde al Caso 2 de la Tabla 5.2.

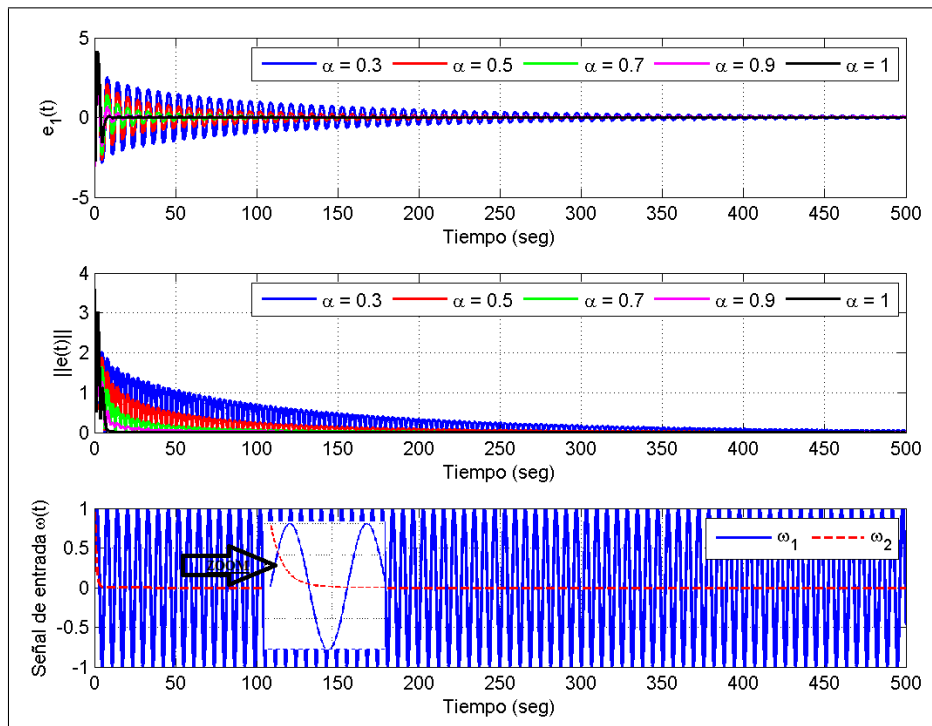


Figura 5.32: Evolución de  $e_1(t)$  y de la norma del error de estado  $\|e(t)\|$  del Modelo de Error Fraccionario 3, cuando  $\omega(t)$  corresponde al Caso 3 de la Tabla 5.2.

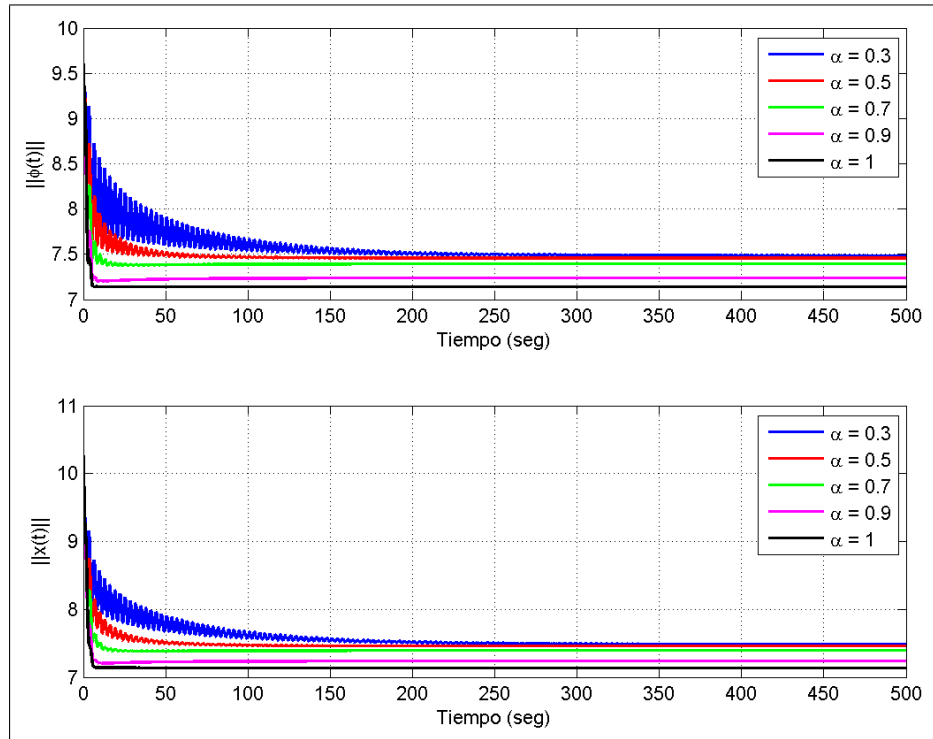


Figura 5.33: Evolución de la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$  y de  $\|x(t)\|$  del Modelo de Error Fraccionario 3, cuando  $\omega(t)$  corresponde al Caso 3 de la Tabla 5.2.

En cuanto a la convergencia de  $\|\phi(t)\|$  y de  $\|x(t)\|$ , puede apreciarse en la Figura 5.33 que en este caso no convergen a cero. Tal como se hizo en el MEF1 y en el MEF2, se realizaron una serie de simulaciones adicionales, las cuales mostraron que, si al menos una de las componentes del vector  $\omega(t)$  converge a cero, entonces  $\|\phi(t)\|$  y  $\|x(t)\|$  no convergerán a cero, lo cual corresponde a lo mostrado en este caso.

Respecto de la rapidez de convergencia de las normas de los errores, en este caso también puede corroborarse que ésta aumenta en la medida que el orden de derivación  $\alpha$  se acerca a 1, sin importar el valor que tenga el orden de derivación de la ecuación del error de estado. No obstante, es importante señalar que al igual que se observó en los casos anteriores, tanto en el gráfico de  $e_1(t)$  como en el de  $\|e(t)\|$ , el mayor sobrepaso corresponde al caso en que  $\alpha = 1$ .

Finalmente se presentan las simulaciones correspondientes al Caso 4 de la Tabla 5.2. La Figura 5.34 muestra la evolución del error de salida  $e_1(t)$  y de la norma del error de estado  $\|e(t)\|$ , mientras que en la Figura 5.35 se muestra la evolución de la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$  y de  $\|x(t)\|$ .

En ese caso, tal como en los tres casos anteriores, tanto  $e_1(t)$  como la norma del error de estado, la norma del error paramétrico y la norma del vector  $x(t)$  permanecen acotadas, lo cual evidencia la estabilidad del esquema. Esta observación es válida para todos los sets de condiciones iniciales acotadas que se probaron. Al igual que ocurrió en los casos anteriores, también aquí puede corroborarse que se cumple que la norma del vector  $x(t)$  permanece acotada por su condición inicial, y el decrecimiento de la norma de ambos errores es más rápido en la medida que el orden de derivación se acerca a  $\alpha = 1$ .

Sin embargo, al igual que sucede en el Caso 4 del MEF1 y del MEF2, la convergencia a cero

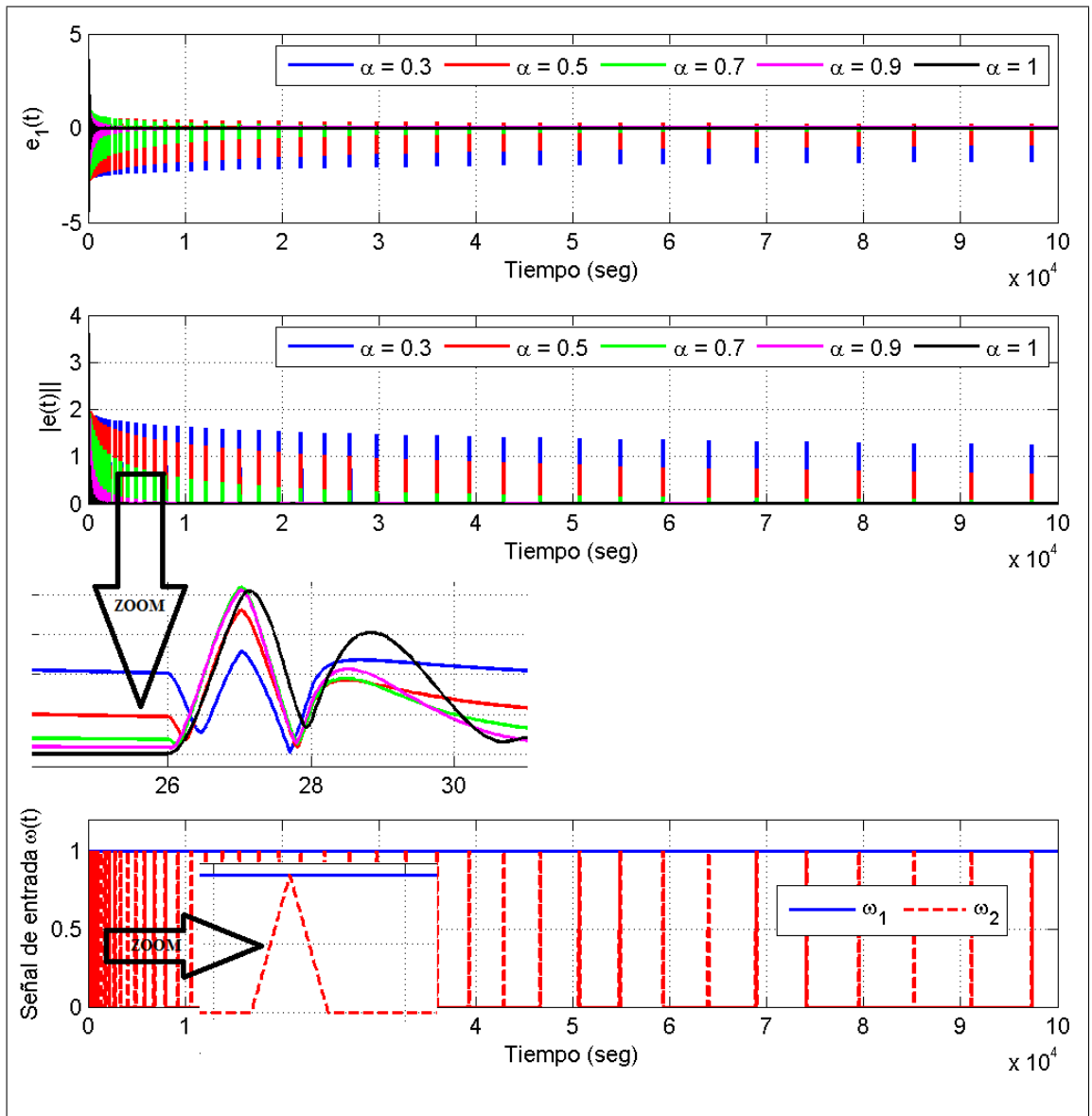


Figura 5.34: Evolución de  $e_1(t)$  y de la norma del error de estado  $\|e(t)\|$  del Modelo de Error Fraccionario 3, cuando  $\omega(t)$  corresponde al Caso 4 de la Tabla 5.2.

de las normas de ambos errores no queda lo suficientemente clara para todos los órdenes de derivación, al menos en la ventana de tiempo que se ha simulado. Puede apreciarse que la norma del error de estado tiene una clara tendencia a converger a cero cuando  $\alpha > 0,5$ . Sin embargo, cuando  $\alpha \leq 0,5$ , si bien el la norma del error parece ir decreciendo muy lentamente, no es posible establecer conclusiones categóricas sobre su convergencia a cero observando esta ventana de tiempo.

Un comportamiento similar puede observarse en el caso de la norma del error paramétrico, donde los casos  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = 0,9$  y  $\alpha = 0,7$  tienen una clara tendencia a converger a cero, aunque los dos casos restantes, si bien tienen también esta tendencia, es mucho más lenta y no es posible establecer conclusiones claras al respecto.

Resumiendo, tal como se hizo para el MEF1 y el MEF2, podemos establecer para el MEF3

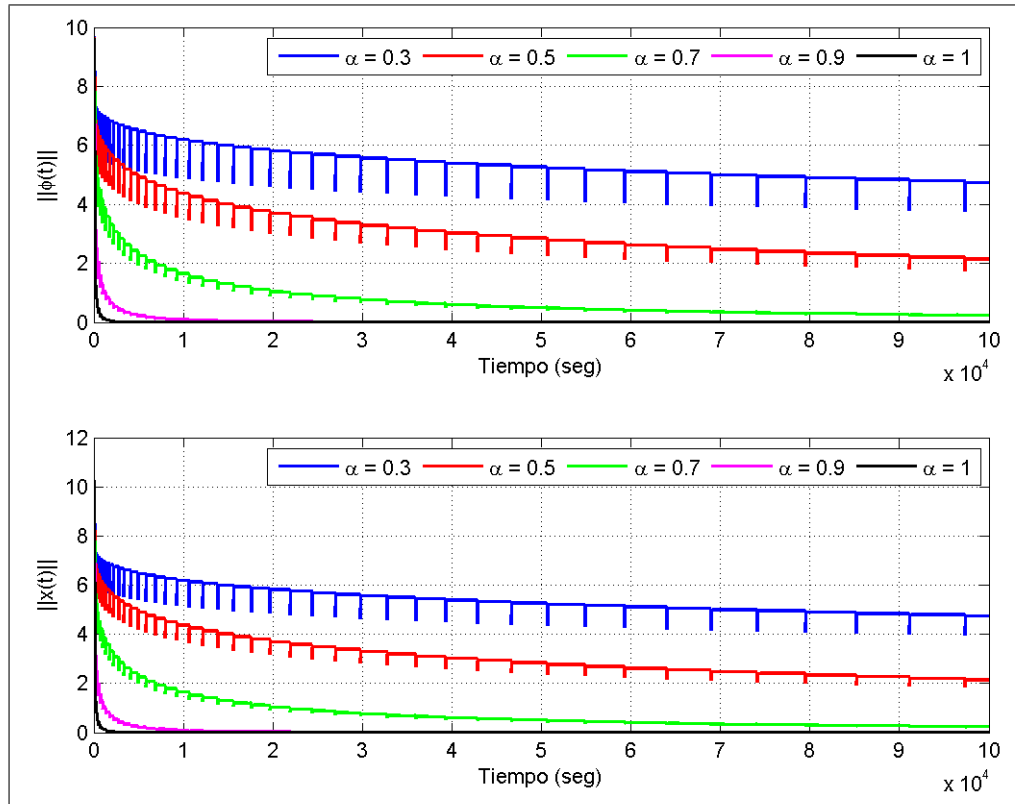


Figura 5.35: Evolución de la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$  y de  $\|x(t)\|$  del Modelo de Error Fraccionario 3, cuando  $\omega(t)$  corresponde al Caso 4 de la Tabla 5.2.

algunas conclusiones de los estudios por simulaciones realizados.

1. Tanto el error de salida  $e_1(t)$ , como la norma del error de estado  $\|e(t)\|$ , la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$  y  $\|x(t)\|$ , permanecen acotadas para todo tipo de señales de entrada acotadas y todas los sets de condiciones iniciales acotadas, lo cual evidencia la estabilidad del esquema. La justificación analítica de este hecho se encuentra en la Subsección 5.4.2, correspondiente al análisis de estabilidad del modelo de error.
2. La norma del error de estado  $\|e(t)\|$  y el error de salida  $e_1(t)$  convergen a cero para todo tipo de señales de entrada acotadas, exceptuando el Caso 4, en el cual no se pudieron establecer resultados concluyentes al respecto para determinados valores del orden de derivación, al menos en la ventana de tiempo simulada.
3. La condición para que la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$  converja a cero parece estar relacionada con dos elementos de manera cualitativa; el primero es que ninguna de las componentes del vector  $\omega(t)$  tienda a cero, y el segundo es la relación entre la densidad espectral del vector  $\omega(t)$  y la dimensión del vector  $\phi(t)$ .
4. La norma del vector  $x(t)$  permanece acotada siempre por su condición inicial, es decir  $\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\|$ ,  $\forall t \geq t_0$ . La justificación analítica de este hecho se encuentra en la Proposición 7 de la Subsección 5.4.2, correspondiente al análisis de estabilidad de este modelo de error.

### 5.4.2. Análisis de estabilidad del Modelo de Error Fraccionario 3

Para realizar el análisis de estabilidad de este modelo de error, consideremos las ecuaciones dadas en (5.58), las cuales colocamos nuevamente en esta subsección para facilitar la comprensión de la demostración. Se hace notar que la demostración de estabilidad que se presenta en esta subsección es válida para el caso en que  $\alpha = \beta$ , quedando el caso  $\alpha \neq \beta$  como parte del trabajo futuro a desarrollar. De este modo, se analiza el MEF3, definido a través de las ecuaciones

$${}^C D_{t_0}^\alpha e(t) = Ae(t) + b\phi^T(t)\omega(t), \quad e_1(t) = h^T e(t) \quad \text{con } \alpha \in (0, 1], \quad (5.61)$$

$${}^C D_{t_0}^\alpha \phi(t) = -\gamma e_1(t)\omega(t), \quad (5.62)$$

donde se recuerda que  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz con raíces con parte real negativa,  $h, b \in \mathbb{R}^n$ , el par  $(A, b)$  es controlable, el par  $(h^T, A)$  es observable,  $\phi(t), \omega(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $e(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $e_1(t) \in \mathbb{R}$ , y la función de transferencia determinada por  $h^T (sI - A)^{-1} b$  es SPR.

Suponiendo que  $\phi(t), e(t)$  son diferenciables, entonces basado en los resultados presentados en los Lemas 4 y 5, puede escribirse

$${}^C D_{t_0}^\alpha [e^T(t)Pe(t)] + {}^C D_{t_0}^\alpha [\phi^T(t)\phi(t)] \leq 2e^T(t)P {}^C D_{t_0}^\alpha e(t) + 2\phi^T(t) {}^C D_{t_0}^\alpha \phi(t). \quad (5.63)$$

Si se reemplazan las expresiones (5.61) y (5.62) en el miembro derecho de la desigualdad (5.63) y se hacen los desarrollos correspondientes, se obtiene (para facilitar la comprensión del desarrollo, se omiten en la notación de las variables su dependencia del tiempo)

$$\begin{aligned} {}^C D_{t_0}^\alpha [e^T P e] + {}^C D_{t_0}^\alpha [\phi^T \phi] &\leq 2e^T P {}^C D_{t_0}^\alpha e + 2\phi^T {}^C D_{t_0}^\alpha \phi \\ &= ({}^C D_{t_0}^\alpha e)^T P e + e^T P {}^C D_{t_0}^\alpha e + 2\phi^T {}^C D_{t_0}^\alpha \phi \\ &= (Ae + b\phi^T \omega)^T P e + e^T P (Ae + b\phi^T \omega) - 2\phi^T e_1 \omega \\ &= (Ae)^T P e + (b\phi^T \omega)^T P e + e^T P A e + e^T P b \phi^T \omega - 2\phi^T e_1 \omega \\ &= e^T (A^T P + P A) e + 2e^T P b \phi^T \omega - 2\phi^T e_1 \omega. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Ahora bien, como  $h^T (sI - A)^{-1} b$  es SPR, de acuerdo a Narendra & Annaswamy (2005) existirán matrices positivas definidas  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tales que

$$\begin{aligned} A^T P + P A &= -Q \\ P b &= h. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Por lo tanto, usando (5.65) en (5.64) se puede escribir

$$\begin{aligned} {}^C D_{t_0}^\alpha [e^T P e] + {}^C D_{t_0}^\alpha [\phi^T \phi] &\leq e^T (A^T P + P A) e + 2e^T P b \phi^T \omega - 2\phi^T e_1 \omega \\ &\leq -e^T Q e + 2e^T h \phi^T \omega - 2\phi^T e_1 \omega. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Luego, como  $e_1 = h^T e$  y además  $e_1 \in \mathbb{R}$  puede escribirse

$$\begin{aligned} {}^C D_{t_0}^\alpha [e^T P e] + {}^C D_{t_0}^\alpha [\phi^T \phi] &\leq -e^T Q e + 2e_1 \phi^T \omega - 2\phi^T e_1 \omega \\ &= -e^T Q e + 2e_1 \phi^T \omega - 2e_1 \phi^T \omega \\ &= -e^T Q e. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Si aplicamos la integral de orden  $\alpha$  a la expresión (5.67) se obtiene la desigualdad

$$e^T(t)Pe(t) - e^T(t_0)Pe(t_0) + \phi^T(t)\phi(t) - \phi^T(t_0)\phi(t_0) \leq -I_{t_0}^\alpha [e^T Q e]. \quad (5.68)$$

Como  $P$  es positiva definida, existirá una matriz real y no singular  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $P = B^T B$ . Luego denotando

$$y(t) = \left[ (Be(t))^T \quad \phi(t)^T \right]^T \in \mathbb{R}^{n+m}, \quad (5.69)$$

la desigualdad (5.68) puede escribirse como

$$y^T(t)y(t) - y^T(t_0)y(t_0) \leq 0, \quad (5.70)$$

lo cual implica que  $\|y(t)\| \leq \|y(t_0)\|$ . Luego, dada la definición del vector  $y(t)$  en (5.69), en conjunto con la expresión (5.70), puede afirmarse que el MEF3 dado por las ecuaciones (5.61) y (5.62) es Lyapunov estable, y esto concluye la demostración.  $\square$

Es preciso notar que en este caso, al igual que sucedió en el análisis del MEF1 y del MEF2, no ha sido posible utilizar la extensión fraccionaria del método directo de Lyapunov planteado en (Li et al., 2010) para probar la estabilidad del esquema, debido a que este método aún no incluye el caso en que la derivada de la función de Lyapunov resulta negativa semidefinida. Una derivada fraccionaria negativa semidefinida es precisamente lo que se obtendría en este análisis al considerar como función de Lyapunov  $V = e^T P e + \phi^T \phi$  y calcular su derivada temporal de orden  $\alpha$ , obteniendo la expresión (5.67), que resulta ser negativa semidefinida. Sin embargo, los Lemas 4 y 5 desarrollados como parte de este trabajo investigativo sí han permitido realizar el análisis presentado y concluir acerca de la estabilidad del modelo de error.

Además de la estabilidad del esquema, otra de las observaciones que se realizaron durante los estudios por simulación para este modelo de error, es que la norma del vector  $x(t)$  permanece acotada por su condición inicial, siendo  $x(t) = [e^T(t) \quad \phi^T(t)]^T$ . La demostración analítica de este hecho se presenta a continuación, en la Proposición 7.

**Proposición 7.** *Consideremos el MEF3 dado por (5.61),(5.62). Si se usa la matriz  $P = I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  en la ley de ajuste (5.62), entonces se cumple que*

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| \quad \forall t \geq t_0, \quad (5.71)$$

donde  $x(t) = [e^T(t) \quad \phi^T(t)]^T \in \mathbb{R}^{n+m}$ .

*Si en cambio se usa  $P \neq I$  entonces se cumple que*

$$\|y(t)\| \leq \|y(t_0)\| \quad \forall t \geq t_0, \quad (5.72)$$

donde  $y(t) = \left[ (Be(t))^T \quad \phi(t)^T \right]^T \in \mathbb{R}^{n+m}$ , con  $P = B^T B$ .

**Demostración.** Consideremos primero el caso en que se usa  $P = I$ . De la expresión (5.68) se obtiene

$$e^T(t)e(t) - e^T(t_0)e(t_0) + \phi^T(t)\phi(t) - \phi^T(t_0)\phi(t_0) \leq -I_{t_0}^\alpha [e^T Q e] \leq 0 \quad \forall t \geq t_0, \quad (5.73)$$

lo cual implica, de acuerdo a la definición de  $x(t)$ , que  $\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\|$ ,  $\forall t \geq t_0$ .

Por otro lado, en el caso en que se utilice una matriz  $P \neq I$  para la ley de ajuste (5.62), como  $P$  es positiva definida, existirá una matriz real y no singular  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $P = B^T B$ . Luego, dado que  $y(t) = \left[ (Be(t))^T \quad \phi(t)^T \right]^T$ , entonces la desigualdad (5.68) puede escribirse como

$$y^T(t) y(t) - y^T(t_0) y(t_0) \leq 0 \quad \forall t \geq t_0, \quad (5.74)$$

lo cual implica que  $\|y(t)\| \leq \|y(t_0)\|$ ,  $\forall t \geq t_0$ , y esto completa la demostración.  $\square$

Así, en esta subsección hemos demostrado analíticamente que:

- El MEF3 es Lyapunov estable en el caso en que  $\alpha = \beta$ . La demostración analítica para el caso  $\alpha \neq \beta$  aún no está desarrollada, aunque para estos casos también se ha observado que el modelo de error es Lyapunov estable.
- Para este modelo de error se cumple que  $\|y(t)\| \leq \|y(t_0)\|$ ,  $\forall t \geq t_0$ , donde  $y(t) = \left[ (Be(t))^T \quad \phi(t)^T \right]^T$ , con  $P = B^T B$ .
- En el caso en que se usa  $P = I$ , se cumple que  $\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\|$ ,  $\forall t \geq t_0$ , donde  $x(t) = \left[ e^T(t) \quad \phi(t)^T \right]^T$ .

### 5.4.3. Acerca de la convergencia del error de salida del Modelo de Error Fraccionario 3

Al igual que en el caso del MEF1 y el MEF2, la convergencia del error de salida en el MEF3 también ha sido un tema analizado en profundidad a lo largo de este trabajo investigativo. Los estudios por simulaciones presentados en este documento muestran que el error de salida converge a cero para todo tipo de señales de entrada acotadas, aunque el Caso 4 analizado no pudo arrojar resultados intuitivos al respecto.

La demostración analítica sobre la convergencia a cero del error de salida, sin embargo, no ha podido completarse, por razones similares a las expuestas en el análisis de los Modelos de Error Fraccionarios 1 y 2.

No obstante, a pesar de que no ha sido posible encontrar una herramienta de análisis que permita concluir analíticamente que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$  y por consiguiente que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = 0$ , sí se ha podido establecer una conclusión analítica sobre la evolución de  $\|e(t)\|$ , la cual está relacionada con el hecho de que  $I_{t_0}^\alpha \|e(t)\|^2$  es acotada, como puede apreciarse de la ecuación (5.68) y con que el error es uniformemente continuo. Estos resultados nos permiten aplicar el Lema 9 presentado en esta Tesis, y concluir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ t^{\alpha-\varepsilon} \frac{\int_{t_0}^t \|e(\tau)\|^2 d\tau}{t} \right] = 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (5.75)$$

El resultado en (5.75) no permite establecer que la norma del error de estado converja a cero, pero sí permite afirmar que su promedio en el tiempo decrece a una razón mínima de  $t^{-\alpha}$  para



tiempos lo suficientemente grandes. O sea, si  $\|e(t)\|$  crece y decrece en el tiempo sin converger, lo hará de forma tal que su promedio en el tiempo tenga una tendencia decreciente, resultado que podría tener utilidad práctica.

## 5.5. Modelo de Error Fraccionario 4

En muchos de los problemas de identificación y control adaptable, la parametrización del modelo de identificación o del controlador no resultan en la forma de ninguno de los tres modelos de error estudiados en las secciones anteriores. En algunos casos ha aparecido el denominado Modelo de Error Fraccionario 4 (en adelante MEF4). Es decir, en el MEF4, tampoco se tiene acceso a todo el vector  $e(t)$  (al igual que en el MEF3) y además la función de transferencia  $W(s)$  ahora no es SPR.

Este modelo de error aparece en aquellos casos en que, para lograr hacer control o identificación, es necesario introducir señales adicionales en el esquema. La Figura 5.36 muestra el esquema asociado a este modelo de error.

De la Figura 5.36 puede apreciarse que las ecuaciones que describen los errores dentro del esquema están dadas por

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(t) &= e_1(t) + e_2(t) \\ e_1(t) &= W(s) \phi^T(t) \omega(t) \\ e_2(t) &= \theta^T(t) W(s) I \omega(t) - W(s) \theta^T(t) \omega(t), \end{aligned} \quad (5.76)$$

donde  $e_1(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  corresponde al error de salida,  $e_2(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  es el error auxiliar,  $\varepsilon_1(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  es el error aumentado, la función de transferencia  $W(s)$  en este caso no es SPR, aunque sí es asintóticamente estable,  $\theta^* \in \mathbb{R}^m$  es el parámetro ideal que se supone desconocido,  $\theta(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  es el parámetro ajustable que estima a  $\theta^*$ ,  $\phi(t) = \theta(t) - \theta^* : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  es el error paramétrico y  $\omega(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  es la señal de entrada o señal de información.

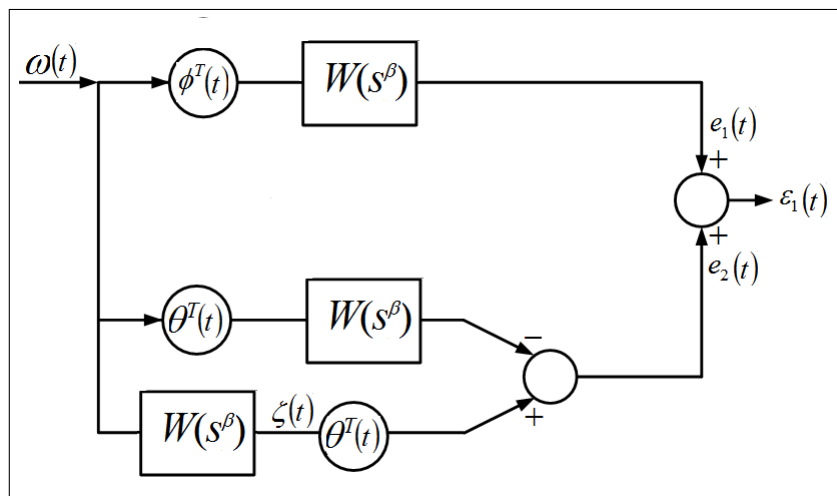


Figura 5.36: Esquema del Modelo de Error Fraccionario 4.

La ley de ajuste para este modelo de error corresponde a

$$\begin{aligned} {}^C D_{t_0}^\alpha \phi(t) &= -\gamma \varepsilon_1(t) \zeta(t), \quad \text{con } \alpha \in (0, 2), \\ \zeta(t) &= W(s) I_m \omega(t), \end{aligned} \quad (5.77)$$

donde  $\zeta(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  se supone acotada y  $\gamma \in \mathbb{R}$  corresponde a la ganancia adaptable. Dicha ganancia adaptable puede ser escalar constante o variante en el tiempo; o bien matricial  $\Gamma \in \mathbb{R}^{m \times m}$  constante o variante en el tiempo (Narendra & Annaswamy, 2005). En este trabajo se considera  $\gamma = 1$ .

Resulta importante destacar que el caso  $\alpha = 1$  es un caso particular de este modelo de error, y corresponde al Modelo de Error 4 clásico, el cual ya ha sido completamente estudiado (Narendra & Annaswamy, 2005).

Luego las ecuaciones que describen el MEF4 son

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(t) &= e_1(t) + e_2(t) \\ e_1(t) &= W(s) \phi^T(t) \omega(t) \\ e_2(t) &= \theta^T(t) W(s) I_m \omega(t) - W(s) \theta^T(t) \omega(t) \\ {}^C D_{t_0}^\alpha \phi(t) &= -\gamma \varepsilon_1(t) \zeta(t), \quad \text{con } \alpha \in (0, 2) \\ \zeta(t) &= W(s) I_m \omega(t) \end{aligned} \quad (5.78)$$

En esta sección se presentan los estudios por simulación desarrollados para este modelo de error cuando  $\alpha \in (0, 1]$ , así como a la demostración analítica de estabilidad de éste y algunas consideraciones sobre la convergencia del error de salida.

### 5.5.1. Estudios por simulación para el Modelo de Error Fraccionario 4

Al igual que en el caso del MEF1, en el MEF4 solamente aparece dinámica explícitamente en la ley de ajuste que se utiliza. Por lo tanto, los estudios por simulación consisten en aplicar las señales de entrada  $\omega(t)$  definidas en la Tabla 5.2 y observar cómo se comportan las señales del esquema para diferentes valores del orden de derivación  $\alpha$  en la ley de ajuste.

Debido a que no se realizan observaciones particulares para el caso escalar, sino que todos los análisis que se realizan son generales, se presentan los estudios por simulación correspondientes al caso vectorial, lo cual incluye al caso escalar como un caso particular. Las simulaciones que se muestran en esta subsección corresponden al caso  $\phi(t) \in \mathbb{R}^2$ .

Es preciso notar, sin embargo, que el MEF4 aparece cuando se trata con problemas de identificación o control de plantas con grado relativo mayor o igual que 2. Esto implica que si todos los parámetros de la planta son desconocidos, el número mínimo de parámetros a estimar por ejemplo en un esquema FOMRAC sería 5, lo cual haría que  $\phi(t) \in \mathbb{R}^5$ . Por lo tanto, el caso que se analiza en estos estudios por simulación sería un caso particular en el cual algunos de los parámetros de la planta son conocidos y otros no, para de este modo obtener  $\phi(t) \in \mathbb{R}^2$ . De cualquier modo, las observaciones presentadas en esta subsección son generales, es decir válidas para  $\phi(t) \in \mathbb{R}^n$ , de modo que usar un caso particular para mostrar las simulaciones no afecta las conclusiones generales a las cuales se arriba.

En los gráficos que se presentan en esta subsección se muestra el error de salida  $e_1(t)$ , los errores auxiliares  $\varepsilon(t)$  y  $e_2(t)$ , así como la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$ .

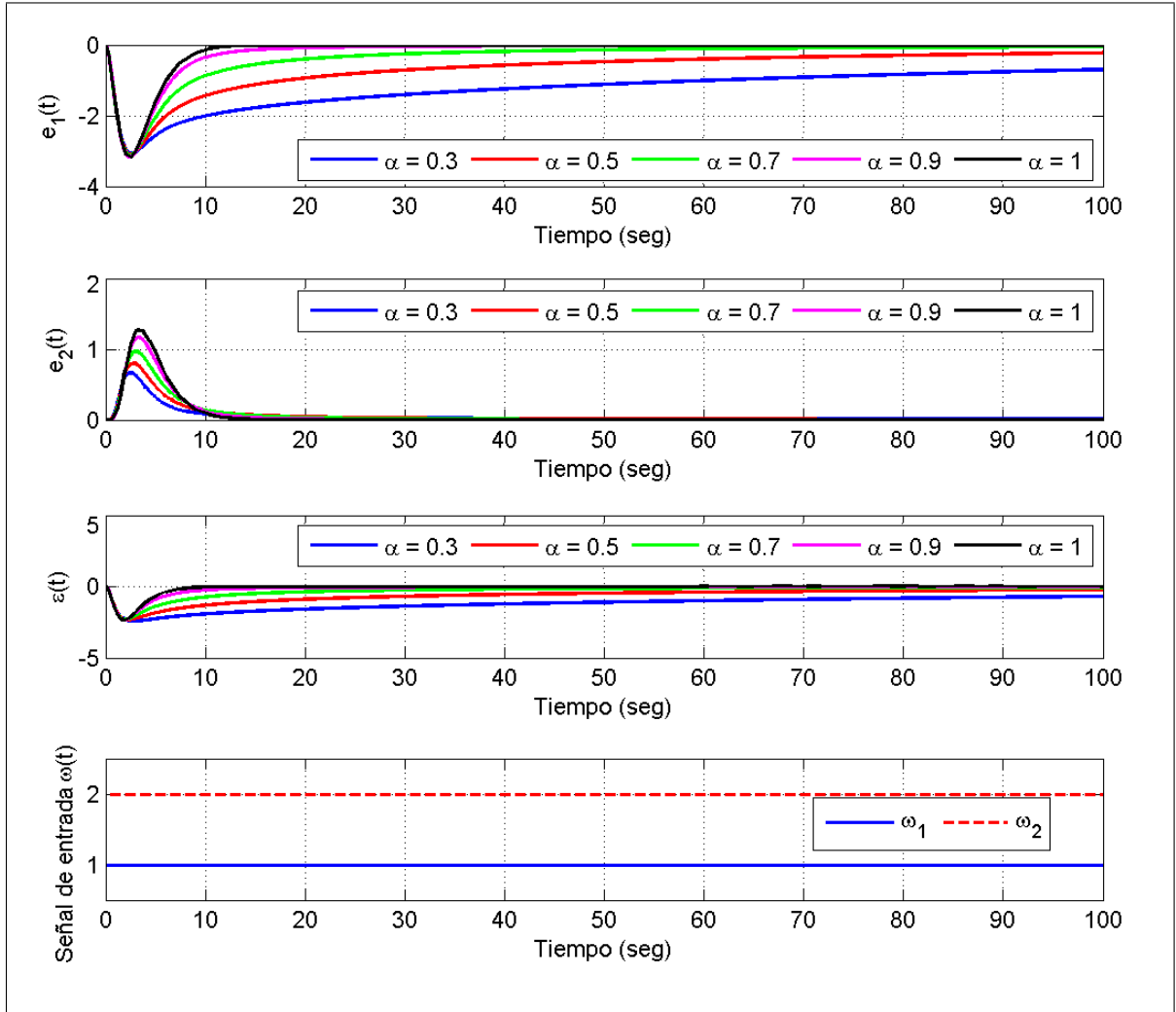


Figura 5.37: Evolución de  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$  y  $\varepsilon(t)$  para el Modelo de Error Fraccionario 4, cuando  $\omega(t)$  corresponde al Caso 1 de la Tabla 5.2.

Los valores de los parámetros de las ecuaciones en (5.78) que se utilizan en estas simulaciones están dados por

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}, \quad \theta_1^* = -5, \quad \theta_2^* = 8, \quad (5.79)$$

donde  $\theta_1^*, \theta_2^*$  son los valores reales de los parámetros desconocidos del esquema, el error paramétrico queda definido por las expresiones  $\phi_1(t) = \theta_1(t) - \theta_1^*$  y  $\phi_2(t) = \theta_2(t) - \theta_2^*$ , donde  $\theta_1(t), \theta_2(t)$  son los parámetros ajustables dentro del esquema. Las condiciones iniciales que se utilizan en las simulaciones son  $\theta_1(0) = 1$  y  $\theta_2(0) = 0,5$ . No obstante, durante el desarrollo de los estudios se realizaron numerosas pruebas utilizando diferentes sets de condiciones iniciales acotadas, y las conclusiones que aquí se exponen son válidas para todos los casos.

Tal como se planteó en la sección correspondiente al MEF1, para los estudios por simulación se utilizan señales  $\omega(t) \in \mathbb{R}^2$  con características representativas, las cuales están definidas en la Tabla 5.2. En función de estas señales de entrada se procede a reportar los resultados obtenidos y las conclusiones correspondientes.

La Figura 5.37 muestra la evolución del error de salida  $e_1(t)$ , así como el error auxiliar  $e_2(t)$

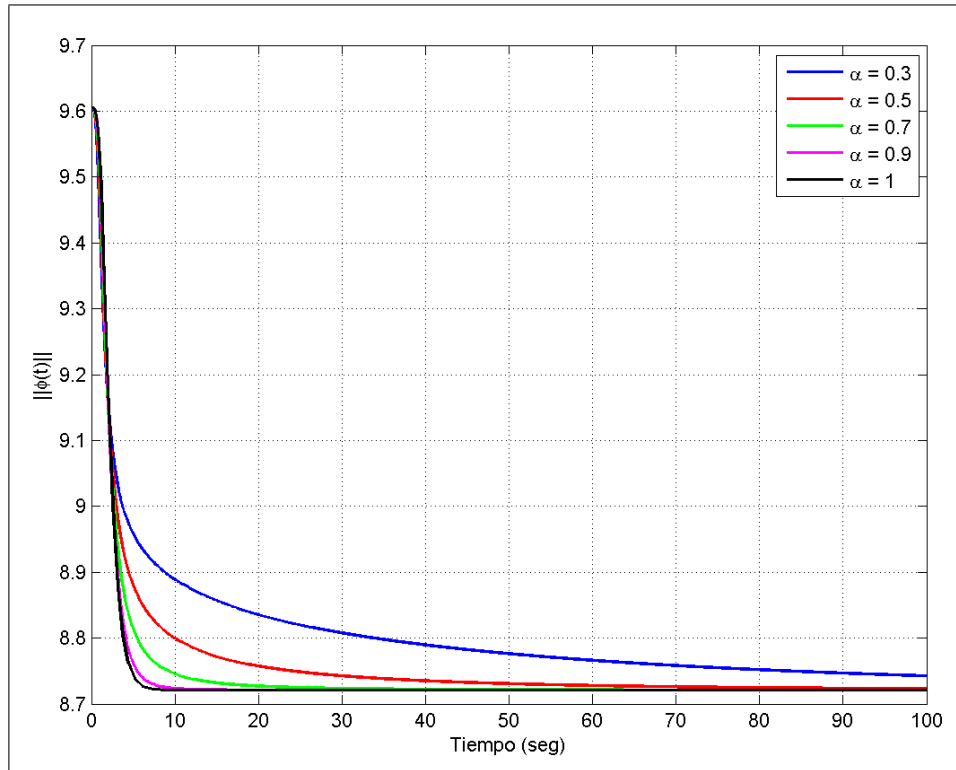


Figura 5.38: Evolución de la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$  del Modelo de Error Fraccionario 4, cuando  $\omega(t)$  corresponde al Caso 1 de la Tabla 5.2.

y el error aumentado  $\varepsilon(t)$ , para el MEF4 vectorial, cuando el vector  $\omega(t)$  está compuesto de dos señales constantes, o sea correspondiente al Caso 1 de la Tabla 5.2. La Figura 5.38, por su parte, muestra la evolución de la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$ .

Como puede apreciarse de ambas figuras, todos los errores del esquema, así como  $\|\phi(t)\|$  permanecen acotados, lo cual evidencia la estabilidad del esquema. Esta observación es válida para todos los sets de condiciones iniciales acotadas que se utilizaron.

Si observamos la Figura 5.37, puede corroborarse que el error de salida, el error auxiliar y el error aumentado convergen a cero para todos los valores del orden de derivación. Sin embargo, en el caso de la norma del error paramétrico ésta converge a un valor diferente de cero, como se aprecia en la Figura 5.38. De acuerdo a las observaciones realizadas, la convergencia de la norma del error paramétrico parece estar relacionada con la densidad espectral de la señal  $\omega(t)$ , tal como se observó en los respectivos casos vectoriales del MEF1, MEF2 y MEF3. También en este caso, al realizar simulaciones en otras dimensiones diferentes de  $\mathbb{R}^2$ , se observó que para que exista convergencia de  $\|\phi(t)\|$ , es preciso que la densidad espectral del vector  $\omega(t)$  aumente en la medida que aumenta la dimensión de  $\phi(t)$ .

Respecto de la rapidez de convergencia, en todos los casos la convergencia más rápida corresponde al caso en que  $\alpha = 1$ . Sin embargo, es preciso notar que en este modelo de error la convergencia resulta mucho más lenta que en el resto de los modelos de error estudiados bajo condiciones similares, lo cual parece estar relacionado con la presencia del error auxiliar y el error aumentado dentro del esquema.

Otra observación que es preciso realizar es que la norma del error paramétrico permanece

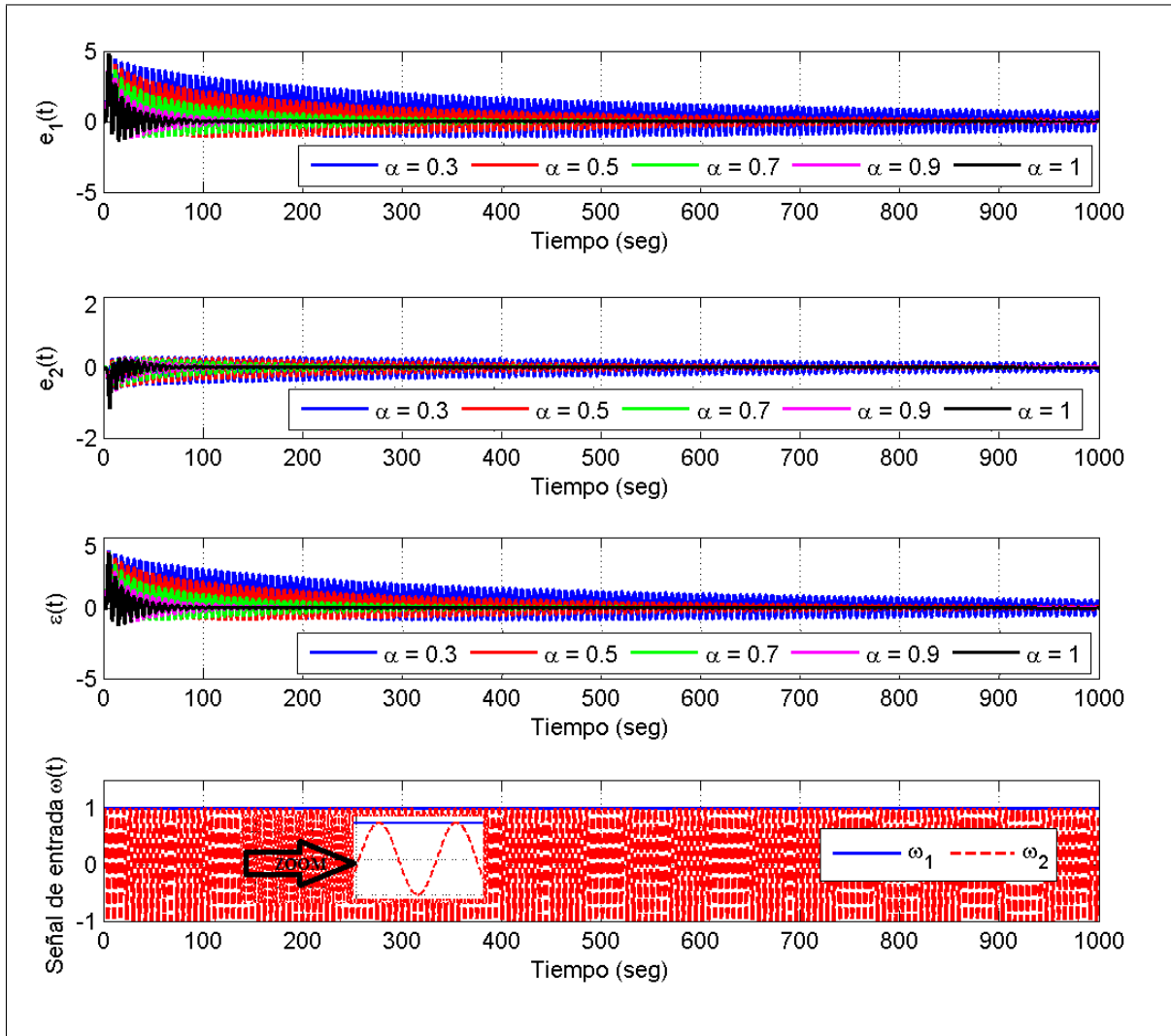


Figura 5.39: Evolución de  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$  y  $\varepsilon(t)$  para el Modelo de Error Fraccionario 4, cuando  $\omega(t)$  corresponde al Caso 2 de la Tabla 5.2.

acotada por su condición inicial, tal como sucedía en el MEF1 y como puede observarse en la Figura 5.38. Esta coincidencia no es casual, pues como se podrá constatar durante el análisis de estabilidad del MEF4 (ver Subsección 5.5.2), éste tiene una estructura similar a la del MEF1, cuando se analiza la relación entre el error paramétrico y el error aumentado.

La Figura 5.39 muestra la evolución del error de salida  $e_1(t)$ , así como el error auxiliar  $e_2(t)$  y el error aumentado  $\varepsilon(t)$  para el MEF4 vectorial, cuando el vector  $\omega(t)$  corresponde al Caso 2 de la Tabla 5.2. La Figura 5.40, por su parte, muestra la evolución de la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$ .

Como puede apreciarse de las Figuras 5.39 y 5.40, también en este caso tanto  $e_1(t)$ , como el error auxiliar  $e_2(t)$  y el error aumentado  $\varepsilon(t)$  permanecen acotados. Lo mismo sucede con la norma del error paramétrico, lo cual evidencia la estabilidad del esquema. Este comportamiento se observó para todos los sets de condiciones iniciales que se probaron.

Si bien los errores  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$  y  $\varepsilon(t)$  tienen un comportamiento oscilatorio debido a la señal de entrada senoidal, de la Figura 5.39 puede observarse que éstos tienen una tendencia a converger

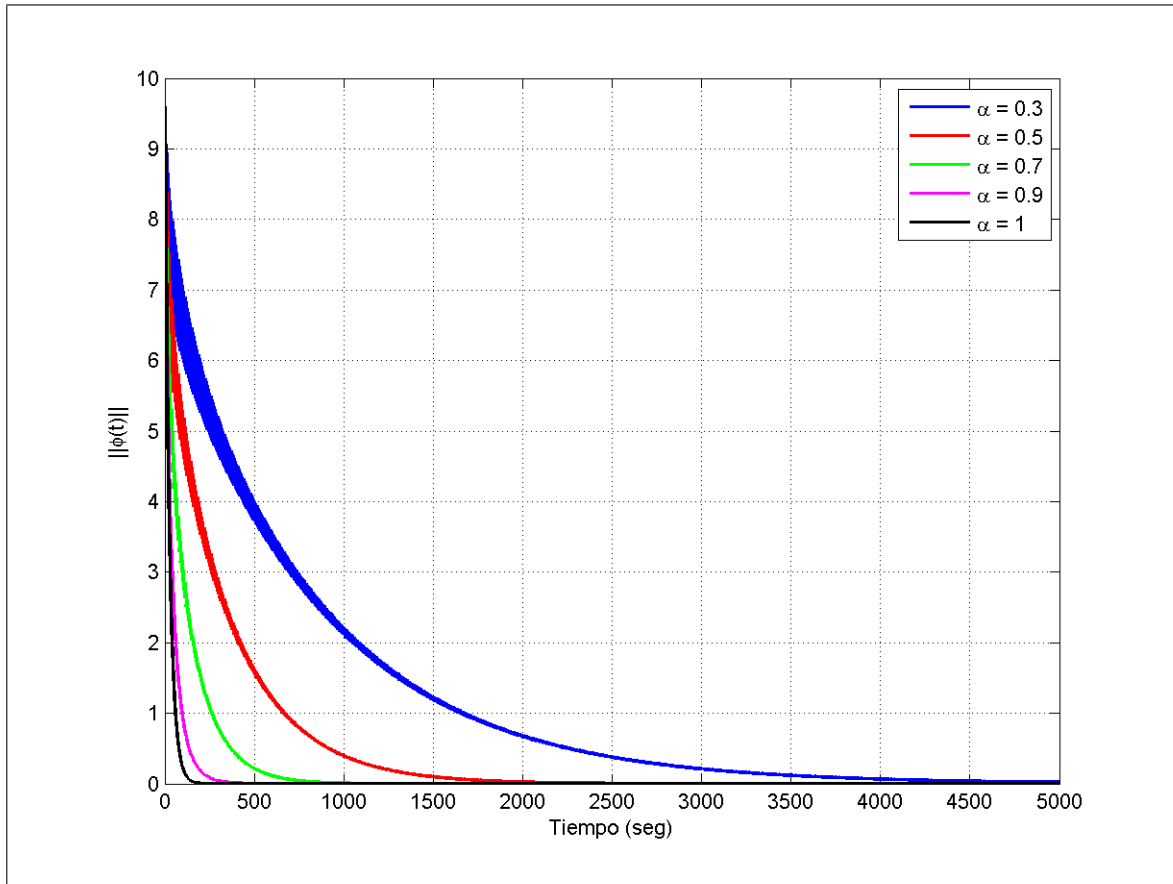


Figura 5.40: Evolución de la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$  del Modelo de Error Fraccionario 4, cuando  $\omega(t)$  corresponde al Caso 2 de la Tabla 5.2.

a cero para todos los valores del orden de derivación  $\alpha$  utilizado. En este caso, al igual que en el Caso 1 analizado anteriormente, ésta convergencia resulta mucho más lenta que en los otros modelos de error analizados.

En el caso de la norma del error paramétrico, ésta también converge a cero para este vector  $\omega(t)$ , como puede apreciarse de la Figura 5.40, a diferencia de lo que ocurrió en el Caso 1, donde el vector  $\omega(t)$  estaba compuesto por dos señales constantes. Ciertamente en este caso el vector  $\omega(t)$  tiene mayor densidad espectral que en el Caso 1, al estar compuesto por una señal constante y una señal senoidal. Por lo tanto, esto corrobora la intuición acerca de la excitación persistente que se expuso en el análisis del Caso 1.

De la Figura 5.40 puede apreciarse como también en este caso se cumple que  $\|\phi(t)\| \leq \|\phi(t_0)\|$ ,  $\forall t \geq t_0$  y la convergencia más rápida se da para el caso clásico, o sea  $\alpha = 1$ , siendo válida la misma observación que se hizo al respecto en el análisis del caso anterior, cuando se compara la rapidez de convergencia en este modelo de error con la del MEF1, la del MEF2 y la del MEF3.

La Figura 5.41 muestra la evolución del error de salida  $e_1(t)$ , así como el error auxiliar  $e_2(t)$  y el error aumentado  $\varepsilon(t)$  para el MEF4 vectorial, cuando el vector  $\omega(t)$  corresponde al Caso 3 de la Tabla 5.2. La Figura 5.42, por su parte, muestra la evolución de la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$ .

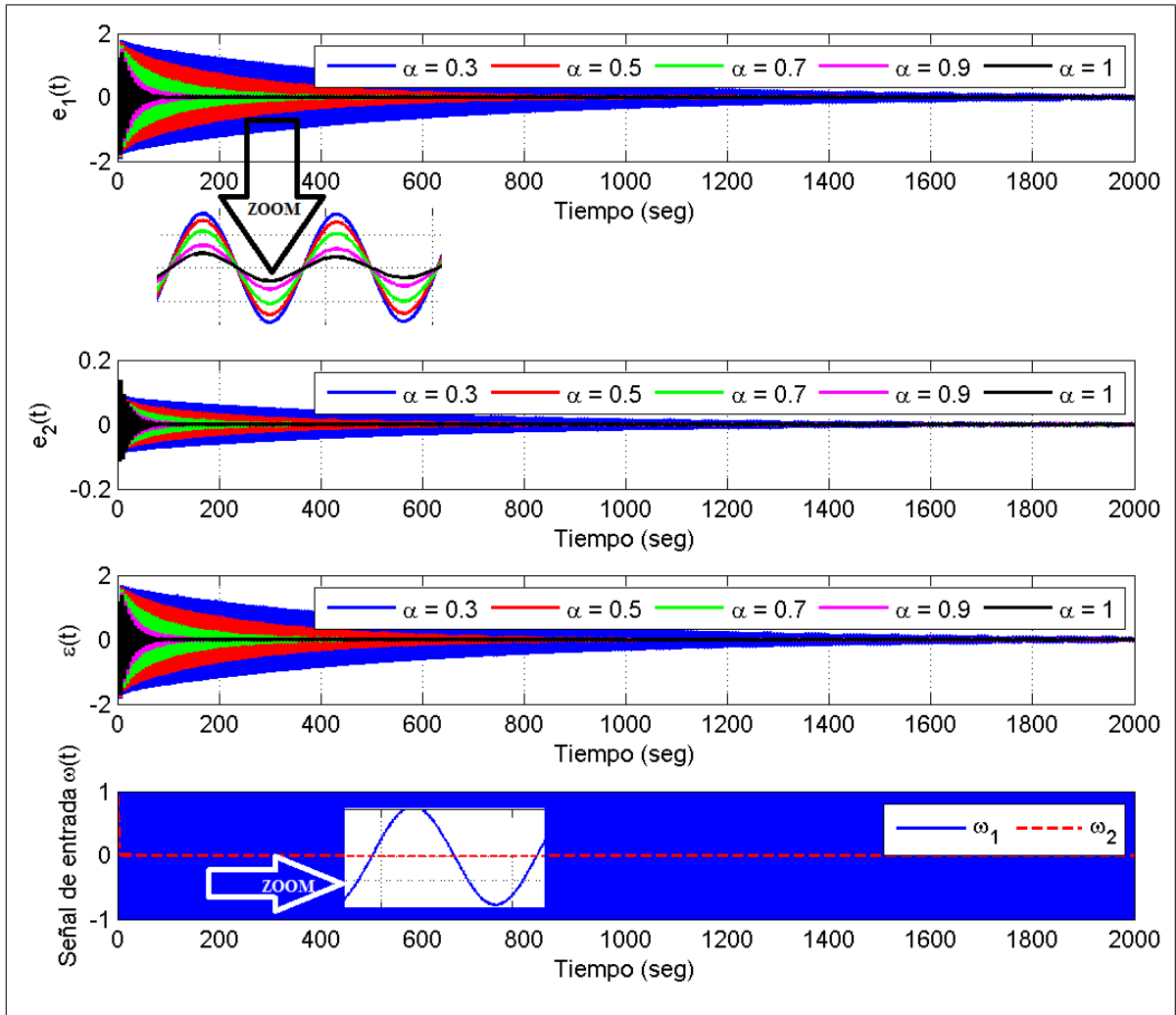


Figura 5.41: Evolución de  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$  y  $\varepsilon(t)$  para el Modelo de Error Fraccionario 4, cuando  $\omega(t)$  corresponde al Caso 3 de la Tabla 5.2.

Como puede apreciarse de las Figuras 5.41 y 5.42, al igual que en el Caso 1 y el Caso 2, para este vector de entradas tanto  $e_1(t)$  como  $e_2(t)$ ,  $\varepsilon(t)$  y  $\|\phi(t)\|$  permanecen acotados, evidenciando así la estabilidad del esquema. Esta observación es válida para todos los sets de condiciones iniciales acotadas que se utilizaron.

De la Figura 5.41 puede apreciarse que  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$  y el error aumentado  $\varepsilon(t)$  convergen a cero para todos los valores de  $\alpha$  utilizados, y de la Figura 5.42 puede apreciarse como también en este caso se cumple que  $\|\phi(t)\| \leq \|\phi(t_0)\|$ ,  $\forall t \geq t_0$ .

Sin embargo, respecto de la convergencia de  $\|\phi(t)\|$ , puede apreciarse de la Figura 5.42 que en este caso no converge a cero. Tal como se hizo en el MEF1, en el MEF2 y en el MEF3, se realizaron una serie de simulaciones adicionales, las cuales mostraron que si al menos una de las componentes del vector  $\omega(t)$  converge a cero, entonces  $\|\phi(t)\|$  no converge a cero, lo cual corresponde a lo mostrado en este caso.

Respecto de la rapidez de convergencia, en este caso también puede corroborarse que ésta aumenta en la medida que el orden de derivación  $\alpha$  se acerca a 1.

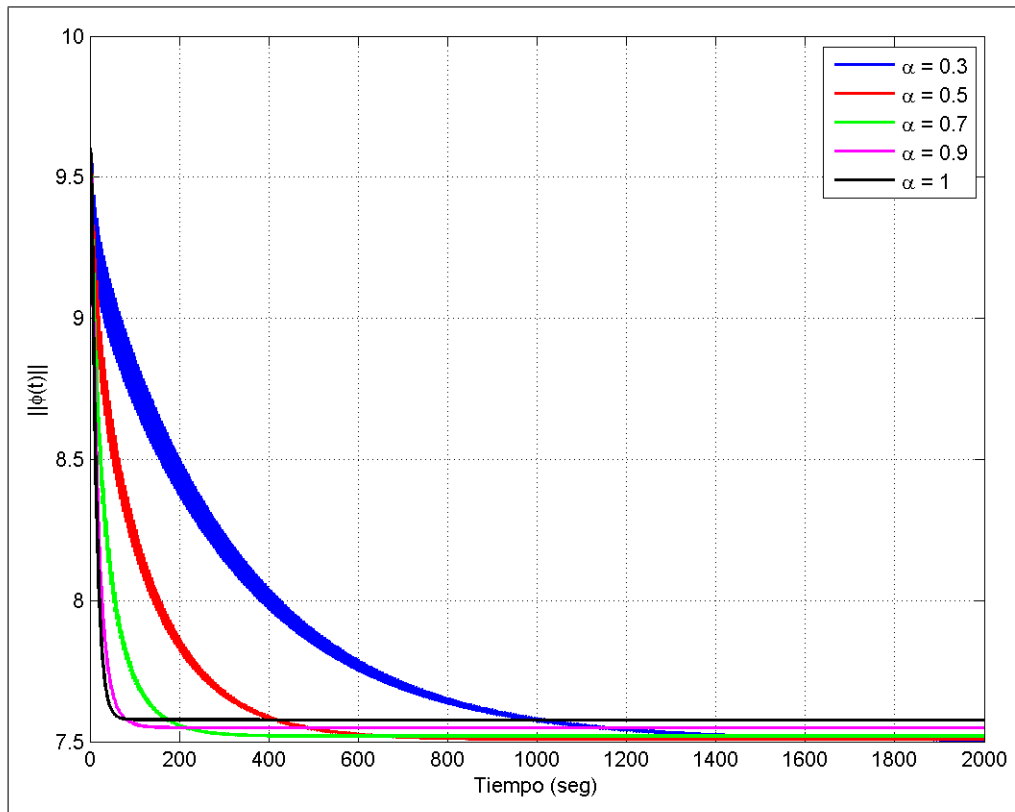


Figura 5.42: Evolución de la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$  del Modelo de Error Fraccionario 4, cuando  $\omega(t)$  corresponde al Caso 3 de la Tabla 5.2.

Finalmente, se presentan las simulaciones correspondientes al Caso 4 de la Tabla 5.2. En la Figura 5.43 se muestra la evolución de  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$  y  $\varepsilon(t)$ , mientras que la Figura 5.44 muestra la evolución de la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$ .

En ese caso, tal como en los tres casos anteriores, tanto  $e_1(t)$  como  $e_2(t)$ ,  $\varepsilon(t)$  y la norma del error paramétrico permanecen acotados para todos los sets de condiciones iniciales acotadas que se utilizaron, lo cual evidencia la estabilidad del esquema. Al igual que sucedió en los casos anteriores, también aquí puede corroborarse que se cumple que la norma del vector  $\phi(t)$  permanece acotada por su condición inicial y el decrecimiento de la norma de ambos errores es más rápido en la medida que el orden de derivación se acerca a  $\alpha = 1$ .

Del mismo modo que ocurrió en el Caso 4 del MEF1, del MEF2 y del MEF3, la convergencia a cero de los errores no queda lo suficientemente clara para todos los órdenes de derivación  $\alpha$ , al menos en la ventana de tiempo que se ha simulado. De hecho en este caso el decrecimiento es mucho más lento que lo que se observó en los otros modelos de error. Puede apreciarse que los errores  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$  y  $\varepsilon(t)$  tienen una tendencia a converger a cero, aunque cuando  $\alpha \leq 0,5$ , si bien el error parece ir decreciendo muy lentamente, no es posible establecer conclusiones categóricas sobre su convergencia a cero observando esta ventana de tiempo.

Un comportamiento similar puede observarse en el caso de la norma del error paramétrico, donde los casos  $\alpha = 1$  y  $\alpha = 0,9$ , incluso  $\alpha = 0,7$  tienen una tendencia a converger a cero (aunque ninguno se acerca tanto en esta ventana de tiempo como en los demás modelos de error), pero los dos casos restantes, si bien tienen también una ligera tendencia decreciente, ésta es mucho más lenta y no es posible establecer conclusiones claras al respecto.



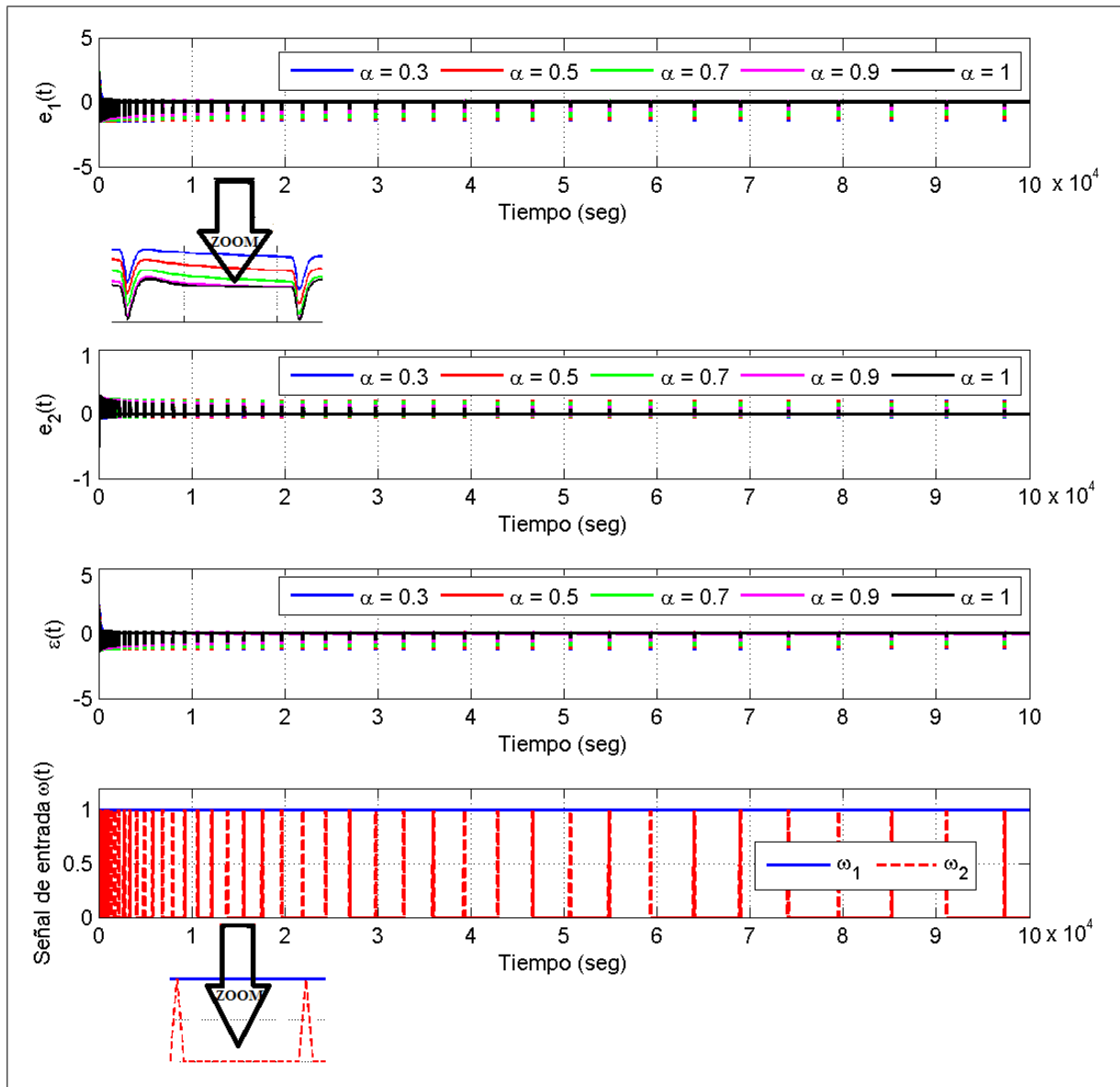


Figura 5.43: Evolución de  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$  y  $\varepsilon(t)$  para el Modelo de Error Fraccionario 4, cuando  $\omega(t)$  corresponde al Caso 4 de la Tabla 5.2.

Por lo tanto, tal como se hizo para el MEF1, el MEF2 y el MEF3, podemos establecer para el MEF4 algunas conclusiones generales de los estudios por simulación realizados.

1. Tanto  $e_1(t)$ , como  $e_2(t)$ ,  $\varepsilon(t)$  y la norma del error paramétrico permanecen acotados para todo tipo de señales de entrada acotadas y para todo set de condiciones iniciales acotadas, lo cual evidencia la estabilidad del esquema. La justificación analítica de este hecho se encuentra en la Subsección 5.5.2, donde se aborda el análisis de estabilidad del modelo de error.
2. Tanto el error de salida  $e_1(t)$  como el error auxiliar  $e_2(t)$  y el error aumentado  $\varepsilon(t)$  convergen a cero para todo tipo de señales de entrada acotadas, exceptuando el Caso 4, en el cual no se pudieron establecer resultados concluyentes al respecto para todos los órdenes de derivación en la ventana de tiempo simulada.

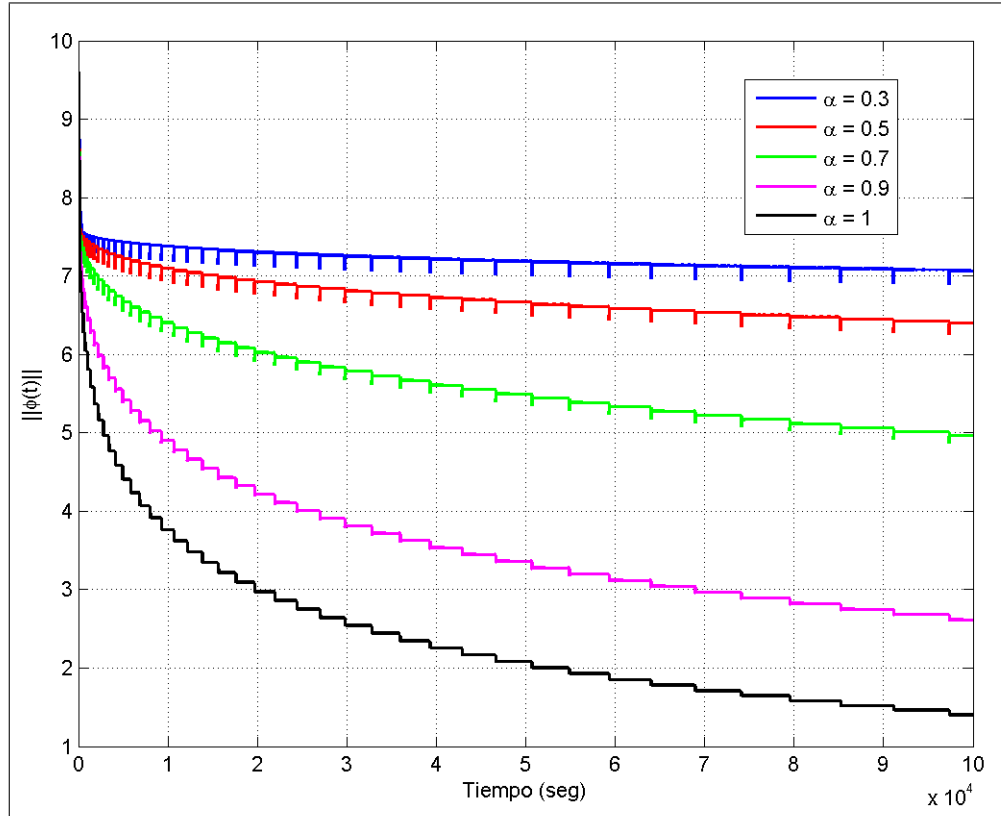


Figura 5.44: Evolución de la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$  del Modelo de Error Fraccionario 4, cuando  $\omega(t)$  corresponde al Caso 4 de la Tabla 5.2.

3. La condición para que la norma del error paramétrico  $\|\phi(t)\|$  converja a cero parece estar relacionada con dos elementos de manera cualitativa, el primero es que ninguna de las componentes del vector  $\omega(t)$  tienda a cero, y el segundo es la relación entre la densidad espectral del vector  $\omega(t)$  y la dimensión del vector  $\phi(t)$ . Este comportamiento es similar al observado en los Modelos de Error Fraccionarios 1, 2 y 3.
4. La norma del error paramétrico  $\phi(t)$  permanece acotada siempre por su condición inicial, es decir  $\|\phi(t)\| \leq \|\phi(t_0)\|$ ,  $\forall t \geq t_0$ . Este comportamiento también es similar al observado en el MEF1.

### 5.5.2. Análisis de estabilidad del Modelo de Error Fraccionario 4

Para realizar el análisis de estabilidad de este modelo de error, consideremos las ecuaciones dadas en (5.78), las cuales colocamos nuevamente en esta subsección para facilitar la comprensión de la demostración.

$$e_1(t) = W(s) \phi^T(t) \omega(t) \quad (5.80)$$

$$e_2(t) = \theta^T(t) W(s) I_m \omega(t) - W(s) \theta^T(t) \omega(t) \quad (5.81)$$

$$\varepsilon_1(t) = e_1(t) + e_2(t) \quad (5.82)$$

$${}^C D_{t_0}^\alpha \phi(t) = -\varepsilon_1(t) \zeta(t), \quad \text{con } \alpha \in (0, 1] \quad (5.83)$$

$$\zeta(t) = W(s) I_m \omega(t), \quad (5.84)$$

donde  $e_1(t) \in \mathbb{R}$  corresponde al error de salida,  $e_2(t) \in \mathbb{R}$  es el error auxiliar,  $\varepsilon_1(t) \in \mathbb{R}$  es el error aumentado,  $\omega(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entrada,  $\phi(t) = \theta(t) - \theta^* \in \mathbb{R}^m$  es el error paramétrico,  $\theta(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de parámetros ajustable,  $\theta^* \in \mathbb{R}^m$  es el vector de parámetros ideales,  $W(s)$  es una función de transferencia conocida, asintóticamente estable y que no es SPR y  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^m$  es una señal auxiliar.

Analizando la expresión (5.81), dado que  $W(s)$  es una función de transferencia asintóticamente estable, si el parámetro variante en el tiempo  $\theta(t)$  toma el valor constante  $\theta^*$ , entonces como  $\phi(t) = \theta(t) - \theta^*$ , el error auxiliar  $e_2(t)$  convergerá a cero exponencialmente. Por lo tanto, la ecuación (5.81) puede expresarse en función del error paramétrico  $\phi(t)$  como sigue

$$e_2(t) = \phi^T(t) W(s) I_m \omega(t) - W(s) \phi^T(t) \omega(t) + \delta(t), \quad (5.85)$$

donde  $\delta(t) \in \mathbb{R}$  es una señal que decae exponencialmente en el tiempo, y por lo tanto puede despreciarse desde el punto de vista del análisis de estabilidad.

Reemplazando (5.85) en (5.82), el error aumentado puede expresarse como

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(t) &= e_1(t) + e_2(t) \\ &= e_1(t) + \phi^T(t) W(s) I_m \omega(t) - W(s) \phi^T(t) \omega(t) \\ &= \phi^T(t) W(s) I_m \omega(t). \end{aligned} \quad (5.86)$$

Luego, si usamos (5.84) en (5.86) se obtiene

$$\varepsilon_1(t) = \phi^T(t) \zeta(t). \quad (5.87)$$

Como puede apreciarse, el comportamiento de este MEF4 queda definido por las ecuaciones (5.87) y (5.83), es decir, una ecuación algebraica que relaciona el error aumentado con el error paramétrico  $\phi(t)$  y la entrada auxiliar  $\zeta(t)$ , y la ley de ajuste fraccionaria correspondiente, que relaciona el error paramétrico con el error aumentado y la entrada auxiliar. Estas dos ecuaciones tienen una estructura muy similar a la estudiada en el MEF1. Por lo tanto, para analizar la estabilidad del esquema, basado en el Lema 4, suponiendo que  $\phi(t)$  es diferenciable, podemos escribir

$$\frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha \phi^T(t) \phi(t) \leq \phi^T(t) D_{t_0}^\alpha \phi^T(t). \quad (5.88)$$

Reemplazando la ecuación (5.83) en (5.88) se obtiene

$$\frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha \phi^T(t) \phi(t) \leq -(\phi^T(t) \zeta(t))^2 = -\varepsilon^2(t) \leq 0. \quad (5.89)$$

Por lo tanto, si aplicamos la integral de orden  $\alpha$  a la desigualdad (5.89) se obtiene

$$\frac{1}{2} \phi^T(t) \phi(t) - \frac{1}{2} \phi^T(t_0) \phi(t_0) \leq 0, \quad (5.90)$$

lo cual implica que  $\|\phi(t)\| \leq \|\phi(t_0)\|$ . Luego, esto permite afirmar que el MEF4 es Lyapunov estable, lo cual en este caso implica que  $\phi(t)$  es acotado  $\forall t \geq t_0$ .

Respecto de las otras señales dentro del esquema podemos decir lo siguiente. Partiendo de la expresión (5.84) y suponiendo que la señal de entrada  $\omega(t)$  es acotada, entonces se concluye que  $\zeta(t)$  es acotada.

Como  $\zeta(t)$  es acotada y  $\phi(t)$  resultó acotado del análisis anterior, entonces de la expresión (5.87) puede concluirse que el error aumentado  $\varepsilon_1(t)$  permanece acotado.

Como el error auxiliar  $e_2(t)$  queda definido por la ecuación

$$e_2(t) = \phi^T(t) \zeta(t) - W(s) \phi^T(t) \omega(t), \quad (5.91)$$

entonces, dado que  $\omega(t), \zeta(t), \phi(t)$  son acotados y que la función de transferencia  $W(s)$  es asintóticamente estable, puede concluirse que  $e_2(t)$  también permanece acotado.

Finalmente, de la ecuación (5.82) puede concluirse que el error de salida  $e_1(t)$  permanece acotado.

De este modo, se ha demostrado que todas las señales dentro del esquema del MEF4 permanecen acotadas  $\forall t \geq t_0$ , y esto concluye el análisis de estabilidad.  $\square$

Es preciso señalar que en este caso, al igual que ocurrió en el análisis del MEF1, el MEF2 y el MEF3, no ha sido posible utilizar la extensión fraccionaria del método directo de Lyapunov planteado en Li et al. (2010) para demostrar la estabilidad del esquema, debido a que este método aún no incluye el caso en que la derivada de la función de Lyapunov resulta negativa semidefinida. Una derivada fraccionaria negativa semidefinida es precisamente lo que se obtendría en este análisis al considerar como función de Lyapunov  $V = \frac{1}{2} \phi^T \phi$  y calcular su derivada de orden  $\alpha$ , obteniendo la expresión (5.89), que resulta seminegativa definida. Sin embargo, el Lema 4 desarrollado como parte de este trabajo investigativo, sí ha permitido realizar el análisis presentado y concluir acerca de la estabilidad del modelo de error.

Además de la estabilidad del esquema, otra de las observaciones que se realizaron durante los estudios por simulación para este modelo de error, está relacionada con que la norma del error paramétrico permanece acotada por su condición inicial. La demostración analítica de este hecho se presenta a continuación en la Proposición 8.

**Proposición 8.** *Para el Modelo de Error Fraccionario 4 dado por (5.80)-(5.84) se cumple que*

$$\|\phi(t)\| \leq \|\phi(t_0)\|, \quad \forall t \geq t_0. \quad (5.92)$$

**Demostración.** La demostración es directa al observar la expresión (5.90) en el desarrollo anterior, la cual implica que  $\|\phi(t)\| \leq \|\phi(t_0)\|$ ,  $\forall t \geq t_0$ , y esto concluye la demostración.  $\square$

En resumen, en esta subsección hemos demostrado analíticamente que:

- El Modelo de Error 4 Fraccionario es Lyapunov estable.
- Para este modelo de error se cumple que  $\|\phi(t)\| \leq \|\phi(t_0)\|$ ,  $\forall t \geq t_0$ .

### 5.5.3. Acerca de la convergencia del error de salida del Modelo de Error Fraccionario 4

Otra conclusión que puede obtenerse analíticamente para el MEF4, es que la integral de orden  $\alpha$  del cuadrado del error aumentado permanece acotada. En efecto, la expresión (5.89)

puede escribirse como

$$\frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^\alpha \phi^T(t) \phi(t) \leq -\varepsilon_1^2(t), \quad (5.93)$$

y si se aplica la integral de orden  $\alpha$  a la desigualdad (5.93) resulta

$$\frac{1}{2} \phi^T(t) \phi(t) - \frac{1}{2} \phi^T(t_0) \phi(t_0) \leq -I_{t_0}^\alpha [\varepsilon_1^2(t)]. \quad (5.94)$$

Luego

$$I_{t_0}^\alpha [\varepsilon_1^2(t)] \leq \frac{1}{2} \phi^T(t_0) \phi(t_0). \quad (5.95)$$

Al igual que en el caso del MEF1, del MEF2 y del MEF3, el hecho de que esta integral sea acotada, no permite establecer que el error aumentado converja a cero, pero si suponemos que es uniformemente continuo puede aplicarse el Lema 9 presentado en esta Tesis, y concluir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ t^{\alpha-\epsilon} \frac{\int_{t_0}^t \varepsilon_1^2(\tau) d\tau}{t} \right] = 0, \quad \forall \epsilon > 0. \quad (5.96)$$

El resultado (5.96) no permite establecer que el error aumentado converge a cero, pero sí permite afirmar que su promedio en el tiempo decrece a una razón mínima de  $t^{-\alpha}$  para tiempos lo suficientemente grandes. O sea, si  $\varepsilon_1^2(t)$  crece y decrece en el tiempo sin converger, lo hará de forma tal que su promedio en el tiempo tenga una tendencia decreciente, resultado que podría tener utilidad práctica.

Ahora bien, el interés en utilizar el MEF4 es derivar relaciones entre la señal de entrada  $\omega(t)$  y el error de salida  $e_1(t)$ , y la conclusión anterior es válida para el error aumentado  $\varepsilon_1(t)$ , no así para el error de salida. Por lo tanto, analicemos la relación entre estos errores.

El error aumentado y el error de salida están relacionados a través de la expresión

$$\varepsilon_1(t) = e_1(t) + e_2(t), \quad (5.97)$$

donde el error auxiliar  $e_2(t)$  está dado por la expresión

$$e_2(t) = \phi^T(t) \zeta(t) - W(s) \phi^T(t) \omega(t). \quad (5.98)$$

Al observar la expresión (5.97), es evidente que además de las conclusiones sobre la convergencia del error aumentado  $\varepsilon(t)$ , es preciso derivar conclusiones sobre la convergencia del error auxiliar  $e_2(t)$ , para poder así establecer conclusiones sobre la convergencia del error de salida  $e_1(t)$ . En el caso entero, o sea  $\alpha = 1$ , el análisis de estabilidad permite concluir que  $\dot{\phi}(t) \in \mathcal{L}^2$ , y luego basado en el Lema 2.11 presentado en Narendra & Annaswamy (2005), se concluye que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_2(t) = 0$ . Este resultado implica que las conclusiones sobre convergencia del error aumentado son también válidas para el error de salida. Sin embargo, en el caso fraccionario no es posible afirmar que  $\dot{\phi}(t) \in \mathcal{L}^2$ , mediante los desarrollos analíticos realizados, siendo la continuación del análisis otro de los puntos pendientes por resolver en esta línea de investigación.

# 6 Aplicaciones del control de orden fraccionario

En el presente capítulo se presenta la aplicación del control adaptable fraccionario a un AVR. Cabe mencionar que los resultados de esta aplicación fueron publicados en Aguila-Camacho & Duarte-Mermoud (2013).

Así mismo, se presenta la aplicación del control fraccionario a una aplicación de levitación magnética. En este caso se presentan tres estrategias de control que incluyen operadores fraccionarios, para efectos de comparación.

## 6.1. Control por referencia a modelo fraccionario de un AVR

Uno de los esquemas de control adaptable más populares es el MRAC. En este esquema, el objetivo es encontrar una señal de control adecuada, tal que aplicada a la planta, la salida del sistema controlado siga asintóticamente a la salida de un modelo de referencia convenientemente elegido, a la vez que se preserva la estabilidad de lazo cerrado del sistema (Narendra & Annaswamy, 2005), es decir todas las señales del sistema adaptable permanecen acotadas.

Por otra parte, el estilo de vida de la sociedad moderna está estrechamente vinculado al uso de la electricidad. La mayoría del equipamiento usado actualmente opera en base a energía eléctrica, y es sensible tanto a la continuidad del suministro energético, como a su calidad (niveles de voltaje y frecuencia).

La demanda de energía rara vez es constante en los sistemas de generación, y esto afecta los niveles de voltaje y frecuencia de los generadores. Por esta razón, todo sistema de generación de energía debe tener un esquema de control que permita mantener los niveles de voltaje y frecuencia en los valores deseados, independiente de la demanda.

El AVR es el controlador cuyo propósito principal es mantener el nivel de voltaje de un generador eléctrico dentro de valores aceptables, ajustando el voltaje de excitación de la máquina.

Muchos esquemas de control han sido propuestos para los AVR. Los esquemas más reportados en la literatura son los controladores PID, y la diferencia entre los esquemas radica básicamente en la técnica utilizada para ajustar los parámetros del PID. Puede citarse por ejemplo controladores PID cuyos parámetros son ajustados utilizando PSO (Gaing, 2004; Rahimian & Raahemifar, 2011), usando PSO de tercer orden (Kang et al., 2010), usando Quantum-behaved PSO (Coelho & de Meirelles Herrera, 2008), usando un método de optimización basado en Continuous Action Reinforcement Learning Automata (CARLA) (Kashki et al., 2008), usando el algoritmo Adaptive Tabu Search (Oonsivilai & Pao-La-Or, 2008), y usando también una combinación de algoritmos genéticos y lógica difusa (Devaraj & Selvabala, 2009).

Además de los PID, se han propuesto otros esquemas de control para los AVR, entre los cuales pueden mencionarse los Fuzzy Gain Scheduled PI Controllers (FGSPIC) (Shyama et al., 2012), Brain Emotional Learning Intelligent Controllers (BELBIC) (Valizadeh et al., 2008), controladores adaptables no lineales (Fusco & Russo, 2011) y controladores PID fraccionarios (Zamani et al., 2009). Este último controlador es un controlador PID fraccionario, cuyos parámetros son ajustados utilizando PSO. Al ser un PID fraccionario, además de ajustar las constantes proporcional, integral y derivativa, también se ajustan los órdenes de integración y derivación.

Sin embargo, dada la importancia de este problema de control, este tópico aún permanece abierto a soluciones de control que puedan mejorar el desempeño del sistema controlado, por ejemplo, minimizando el sobrepaso y el tiempo de convergencia a cero del error de control.

En este trabajo se ha desarrollado un FOMRAC para un AVR, donde los parámetros del controlador se ajustan utilizando leyes de ajuste definidas mediante ecuaciones diferenciales fraccionarias. Los valores numéricos de los parámetros de diseño del controlador (ganancias adaptables y órdenes de derivación) se determinan de manera óptima empleando como método de optimización los algoritmos genéticos. Este FOMRAC presenta una mejoría en algunas características del esquema controlado, así como en su robustez ante algunas incertidumbres del sistema, cuando se compara con las técnicas clásicas equivalentes.

### **6.1.1. Conceptos generales de algoritmos genéticos**

Dado que en el Capítulo 3 se expusieron conceptos preliminares acerca del cálculo fraccionario y el control adaptable fraccionario, en esta subsección se hará referencia a algunos conceptos preliminares de algoritmos genéticos, técnica de optimización de que se hace uso en este trabajo.

Los algoritmos genéticos (en adelante GA, por sus siglas en inglés (Genetic Algorithms)) pertenecen a una clase más amplia de algoritmos evolutivos, que generan soluciones a problemas de optimización utilizando técnicas inspiradas en conceptos de la evolución natural, tales como herencia, mutación, selección natural y cruzamiento. Aplicados a los esquemas de control, los algoritmos genéticos han demostrado resultar útiles, por ejemplo, seleccionando los parámetros óptimos de un controlador, que minimizan una función objetivo para un sistema controlado.

En el mundo real, las características de un organismo vivo se encuentran codificadas en su ADN. Los algoritmos genéticos almacenan las características de organismos artificiales en un genotipo electrónico, el cual simula el ADN de la vida natural (Chambers, 1995). Por tanto, los algoritmos genéticos trabajan con una población de soluciones potenciales a un problema específico, en el cual cada individuo de la población representa una solución particular al problema. La población entonces evoluciona a través de varias generaciones para producir mejores soluciones al problema, hasta lograr una solución óptima respecto de una cifra de mérito.

Una cifra de mérito se asigna a cada individuo de la población, con el objetivo de medir la calidad de la solución que éste representa. Luego, se produce la evolución usando un conjunto de operadores genéticos estocásticos, los cuales manipulan el código genético, por ejemplo a través de la mutación y el cruzamiento. Esta evolución generalmente resulta en mejores individuos, o sea, soluciones al problema con mejores cifras de mérito.

Usualmente, el proceso de evolución se detiene cuando se ha alcanzado un número de generaciones determinado o cuando el valor de la función de fitness se encuentra por debajo de un valor prefijado.

En el desarrollo de este trabajo se ha utilizado la toolbox de Algoritmos Genéticos de Matlab, para encontrar los valores óptimos de los órdenes de derivación y las ganancias adaptables en el esquema FOMRAC propuesto para el AVR. Los detalles de la implementación se muestran en la Subsección 6.1.2.

### 6.1.2. Diseño del controlador para el AVR usando FOMRAC y algoritmos genéticos

El objetivo de un AVR es mantener la magnitud del voltaje terminal de un generador igual a un valor determinado. Como se muestra en la Figura 6.1 a), un sistema AVR simple está formado por cuatro componentes principales: amplificador, excitador, generador y sensor. Como resultado de un proceso de linealización se han obtenido funciones de transferencia razonables para estos componentes (Gaing, 2004). En la Figura 6.1 a) se muestra el diagrama en bloques del AVR, con las correspondientes funciones de transferencia para cada bloque, y en la Figura 6.1 b) se muestra el modelo del generador (Kundur, 1994) usado en este trabajo. Los parámetros del sistema utilizados para las simulaciones corresponden a  $k_A = 10$ ,  $\tau_A = 0,1$  s,  $k_E = 1$ ,  $\tau_E = 0,5$  s,  $k_1 = 1,591$ ,  $k_2 = 1,5$ ,  $k_3 = 0,333$ ,  $\tau_3 = 1,91$  s,  $k_4 = 1,8$ ,  $k_5 = -0,12$ ,  $k_6 = 0,3$ ,  $H_s = 3$ ,  $K_D = 0$ ,  $\omega_0 = 377$  rad/s,  $k_R = 1$  y  $\tau_R = 0,06$  s. Estos valores fueron elegidos en función de lo publicado por Zamani et al. (2009).

Por lo tanto, desde el punto de vista de diseño del controlador adaptable, la planta a ser controlada (desde la señal de control  $u$  hasta la salida del sensor  $V_{ts}$ ) tiene una función de transferencia de sexto orden. Sin embargo, debido a que la dinámica del sensor es muy rápida, la influencia de este elemento en la función de transferencia puede despreciarse, y entonces la función de transferencia de la planta  $G_p(s)$  puede considerarse como una de quinto orden de la forma

$$G_p(s) = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{a_5s^5 + a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}, \quad (6.1)$$

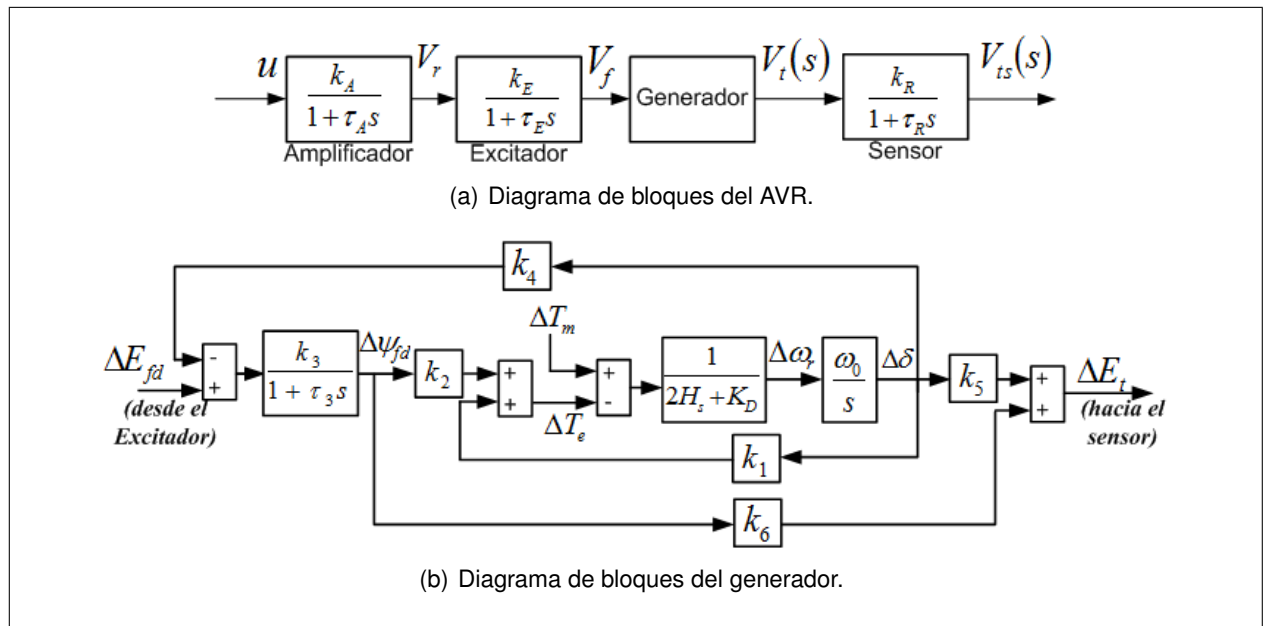


Figura 6.1: Diagramas de bloques para el AVR y el generador (Zamani et al., 2009).



Tabla 6.1: Detalles de la implementación del FOMRAC para el AVR

Modelo de referencia	$G_m(s) = \frac{1,2}{s^3 + 5,2s^2 + 7s + 1,2}$
Ley de Control	$u(t) = \theta(t)^T \omega(t)$ $\theta^T(t) = [k(t) \quad \theta_1^T(t) \quad \theta_0(t) \quad \theta_2^T(t)] \in \mathbb{R}^{10}$ $\omega(t) = [r(t) \quad \omega_1^T(t) \quad y_p(t) \quad \omega_2^T(t)]^T \in \mathbb{R}^{10}$
Señales Auxiliares	$\dot{\omega}_1(t) = \Lambda \omega_1(t) + l u(t)$ $\dot{\omega}_2(t) = \Lambda \omega_2(t) + l y_p(t)$ $\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ $l = [-1 \ 1 \ 3 \ 4]^T$
Errores	$e_1(t) = y_p(t) - y_m(t)$ $e_2(t) = \theta^T(t) \bar{\omega}(t) - \bar{u}(t)$ $\varepsilon(t) = e_1(t) + k_1(t) e_2(t)$ $\bar{u}(t) = G_m(s) u(t)$
Leyes de Ajuste	$D^\alpha k_1(t) = -\gamma \frac{\varepsilon(t) e_2(t)}{1 + \bar{\omega}(t) \bar{\omega}^T(t)}$ $D^\alpha \theta(t) = -\gamma \frac{\varepsilon(t) \bar{\omega}(t)}{1 + \bar{\omega}(t) \bar{\omega}^T(t)}$ $\bar{\omega}(t) = G_m(s) \omega(t)$

donde  $b_2 = 5,994$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_0 = 825,2$ ,  $a_5 = 0,573$ ,  $a_4 = 7,176$ ,  $a_3 = 72,36$ ,  $a_2 = 706,6$ ,  $a_1 = 1302$  y  $a_0 = 260,8$ . Aún cuando la función de transferencia del sensor se desprecia desde el punto de vista de diseño del controlador, sí será considerada en las simulaciones como parte de la planta.

Según Narendra & Annaswamy (2005), el modelo de referencia debe ser seleccionado de forma tal que su grado relativo sea igual o mayor que el grado relativo de la planta, que en este caso es  $n^* = 3$  (ver (6.1)). Más allá de este requerimiento, la selección del modelo de referencia es responsabilidad del diseñador del esquema de control, y debe hacerse de acuerdo a los requerimientos que deba cumplir el esquema controlado. En este caso, dadas las características del proceso de generación de energía, se desea una respuesta al escalón suave, con poco o ningún sobrepaso, un tiempo de establecimiento pequeño y un error de estado estacionario nulo (o mínimo). Por lo tanto, con el objetivo de satisfacer estos requerimientos, el modelo de referencia fue seleccionado de acuerdo a la función de transferencia  $G_m(s)$  que se muestra en la Tabla 6.1.

Dado que el grado relativo de la planta es  $n^* = 3$ , según Narendra & Annaswamy (2005), la implementación del MRAC sería como se muestra en la Figura 6.2. Para más detalles sobre los parámetros y señales del esquema de la Figura 6.2 referirse a Narendra & Annaswamy (2005).

En este caso, los parámetros ajustables del controlador están dados por el vector

$$\theta = [k \quad \theta_1^T \quad \theta_0 \quad \theta_2^T]^T \in \mathbb{R}^{10},$$

además del escalar  $k_1 \in \mathbb{R}$ . Sin embargo, estos parámetros no son ajustados usando ecuaciones diferenciales de orden entero como en Narendra & Annaswamy (2005), sino utilizando ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, cuyo orden se encuentra en el rango  $0 < \alpha < 1$ . La Tabla 6.1 resume el diseño del FOMRAC, así como los correspondientes valores utilizados en la implemen-

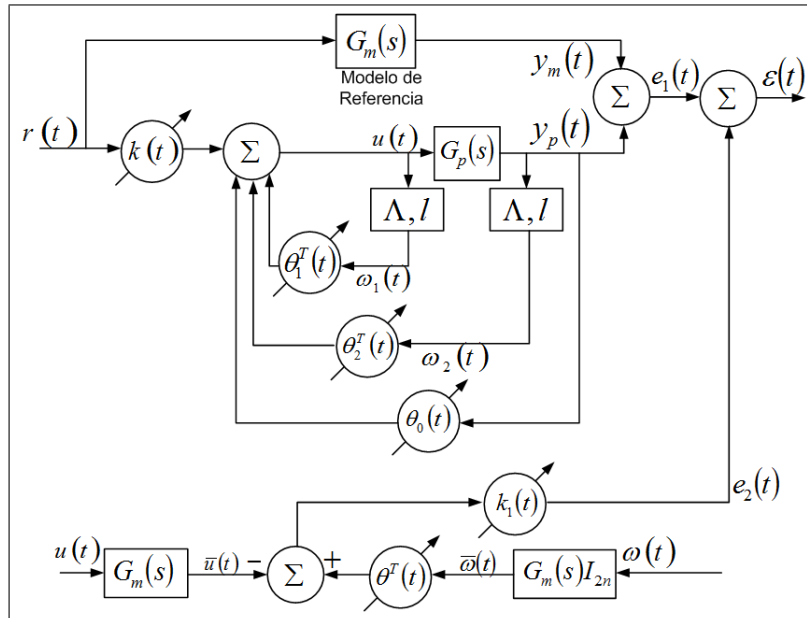


Figura 6.2: Diagrama de bloques para la implementación del FOMRAC para el AVR (Narendra & Annaswamy, 2005).

tación. La señal de control generada por el FOMRAC corresponde al voltaje de campo ( $u$  en el diagrama de la Figura 6.1 a)).

De acuerdo a Narendra & Annaswamy (2005), el número de parámetros a ser ajustado en una planta de orden  $n$  es  $2n + 1$ , donde  $n$  es también el orden de la función de transferencia de la planta. Por lo tanto, dado que en este caso  $n = 5$ , el número total de parámetros a ser ajustado es 11.

Dado que el orden de derivación  $\alpha$  de la ley de ajuste es fraccionario, pueden usarse diferentes órdenes para ajustar cada uno de los 11 parámetros. Del mismo modo, se pueden utilizar diferentes ganancias adaptables  $\gamma$  para cada una de las 11 ecuaciones diferenciales. En este esquema de control, se consideraron diferentes órdenes de derivación y ganancias adaptables para cada uno de los once parámetros a ser ajustados, siendo estos los 22 parámetros a ser optimizados.

### 6.1.3. Optimización de los parámetros de diseño del FOMRAC

Para seleccionar los valores óptimos del orden de derivación y las ganancias adaptables para cada una de las leyes de ajuste, se utilizó optimización mediante algoritmos genéticos. Esta optimización se realizó de forma tal que el sistema controlado presentara un comportamiento determinado, el cual fue medido a través de la función objetivo definida en (6.2).

El vector de parámetros optimizado por GA corresponde a  $x = [\alpha^T \ \gamma^T] \in \mathbb{R}^{22}$ , donde  $\alpha$  y  $\gamma$  son vectores de dimensión 11.

Los estudios por simulación sugieren que cuando se usan órdenes de derivación en el intervalo  $\alpha \in (0, 2)$ , el FOMRAC permanece estable, pero el comportamiento transitorio de las señales

del sistema puede resultar un tanto oscilatorio cuando  $\alpha \in (1, 2)$ . Por esta razón, se utilizó una cota inferior de 0 y una cota superior de 1 para  $\alpha$ , y el espacio de búsqueda del GA se restringió a este intervalo. En el caso de las ganancias adaptables, se utilizaron cotas inferiores y superiores de 0 y 100 respectivamente. Las condiciones iniciales se escogieron nulas para cada uno de los parámetros.

Con el objetivo de obtener un comportamiento del sistema de acuerdo a las especificaciones de control y basados en Zamani et al. (2009), la función objetivo utilizada en el proceso de optimización se seleccionó como

$$J(x) = w_1 M_p + w_2 t_s + w_3 E_{ss} + w_4 \int_0^{t_f} |e_c(t)| dt + w_5 \int_0^{t_f} u^2(t) dt, \quad (6.2)$$

donde  $M_p$  es el sobrepaso,  $t_s$  es el tiempo de establecimiento,  $e_c(t) = r(t) - y_p(t)$  es el error de control (diferencia entre el voltaje de referencia y el voltaje de salida ( $V_{ts}$  en el diagrama de la Figura 6.1 a)),  $E_{ss}$  es el valor de estado estacionario del error de control  $e_c(t)$  y  $u(t)$  corresponde a la señal de control generada por el FOMRAC. La importancia de cada uno de estos elementos en la función objetivo está dada por los factores de peso  $w_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$  y es responsabilidad del diseñador seleccionar estos valores.

La selección de los factores de peso no es una tarea fácil, y hay muchas formas de hacerlo. En el caso de este trabajo, se utilizaron como punto de partida los valores dados en Zamani et al. (2009). Luego se realizaron varias pruebas para el proceso de optimización, utilizando valores para los factores de peso alrededor de estos valores de partida. Los menores valores para la función objetivo  $J$  se obtuvieron con  $w_1 = w_2 = w_4 = 1$ ,  $w_3 = 1000$  y  $w_5 = 7$ . El límite de integración  $t_f$  utilizado en (6.2) fue de 100 segundos.

El proceso de optimización fue realizado utilizando la toolbox Matlab GA. Los parámetros de GA más representativos que fueron utilizados en las simulaciones son

- Tipo de población: vector doble.
- Tamaño de la población = 25.
- Número de generaciones = 130.

El resto de los parámetros fueron utilizados con sus valores por defecto.

Las leyes de ajuste fueron implementadas utilizando la toolbox Ninteger para Matlab (Valério & Costa, 2004), específicamente el bloque NID. Con el objetivo de incluir las condiciones iniciales, las cuales no vienen incluidas en el bloque NID, se utilizó la definición de la derivada fraccionaria según Caputo y una de las propiedades de las integrales fraccionarias, de forma tal que la implementación resultó como en la Figura 6.3. Este diseño corresponde al caso en que  $\alpha \in (0, 1)$ , que es el utilizado en este trabajo.

El bloque NID utilizado en el esquema está basado en el método de aproximación de Oustaloup, mencionado en el Capítulo 3. En este caso se utilizaron 5 polos, 5 ceros y el intervalo de frecuencia  $[0,001, 1000]$  rad/seg.

En términos generales, el proceso de optimización se realizó de la siguiente forma.

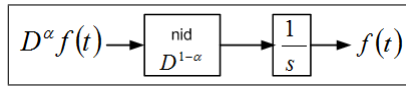


Figura 6.3: Diagrama de bloques utilizado para la implementación de las leyes de ajuste fraccionarias.

1. En la primera generación, la población se inicializa de forma aleatoria. Cada individuo contiene los valores de la ganancia adaptable y el orden de derivación para cada una de las 11 leyes de ajuste.
2. Se calcula el valor de la función objetivo (6.2) para cada individuo de la población. Esto significa que en cada iteración se realiza la simulación del sistema controlado (planta + FOMRAC).
3. Se deja el sistema evolucionar en una generación resultando nuevos individuos.
4. Si el número de iteraciones alcanza el valor máximo, entonces se va al paso 5, de lo contrario se retorna al paso 2.
5. Los parámetros óptimos del controlador resultan aquellos para los cuales se ha obtenido el menor valor de la función objetivo.

#### 6.1.4. Comportamiento del FOMRAC diseñado

Con el objetivo de encontrar el mejor juego de parámetros, se realizaron numerosos intentos de optimización. El mejor caso resultó con  $J=130.93$  y los siguientes valores óptimos para los órdenes de derivación y las ganancias adaptables:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= 0,1508 & \alpha_2 &= 0,4152 & \alpha_3 &= 0,6 & \alpha_4 &= 0,1844 \\
 \alpha_5 &= 0,7627 & \alpha_6 &= 0,2944 & \alpha_7 &= 0,8110 & \alpha_8 &= 0,9998 \\
 \alpha_9 &= 0,7024 & \alpha_{10} &= 0,1446 & \alpha_{11} &= 0,9885. \\
 \\
 \gamma_1 &= 3,4345 & \gamma_2 &= 1,8095 & \gamma_3 &= 0,4423 & \gamma_4 &= 1,9116 \\
 \gamma_5 &= 1,8242 & \gamma_6 &= 0,7816 & \gamma_7 &= 0,0582 & \gamma_8 &= 2,3671 \\
 \gamma_9 &= 0,1756 & \gamma_{10} &= 0,7980 & \gamma_{11} &= 2,9059.
 \end{aligned}$$

La Figura 6.4 muestra la respuesta al escalón del sistema controlado utilizando FOMRAC, así como el comportamiento del sistema utilizando un FOPID, un PID y un esquema MRAC clásico (nos referiremos a este controlador como IOMRAC).

Los resultados correspondientes al FOPID y al PID fueron reportados en Zamani et al. (2009), y los parámetros para estos controladores también fueron optimizados utilizando PSO. En el caso del IOMRAC, éste fue diseñado y analizado como parte de este trabajo, con el propósito de establecer una comparación, y para ello se siguió el mismo procedimiento que para el FOMRAC. En este caso, dado que los órdenes de derivación son enteros, o sea iguales a 1, solamente se optimizaron los valores de las ganancias adaptables ( $\gamma_{ie}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 11$ ). Los valores óptimos obtenidos para el caso del IOMRAC resultaron ser

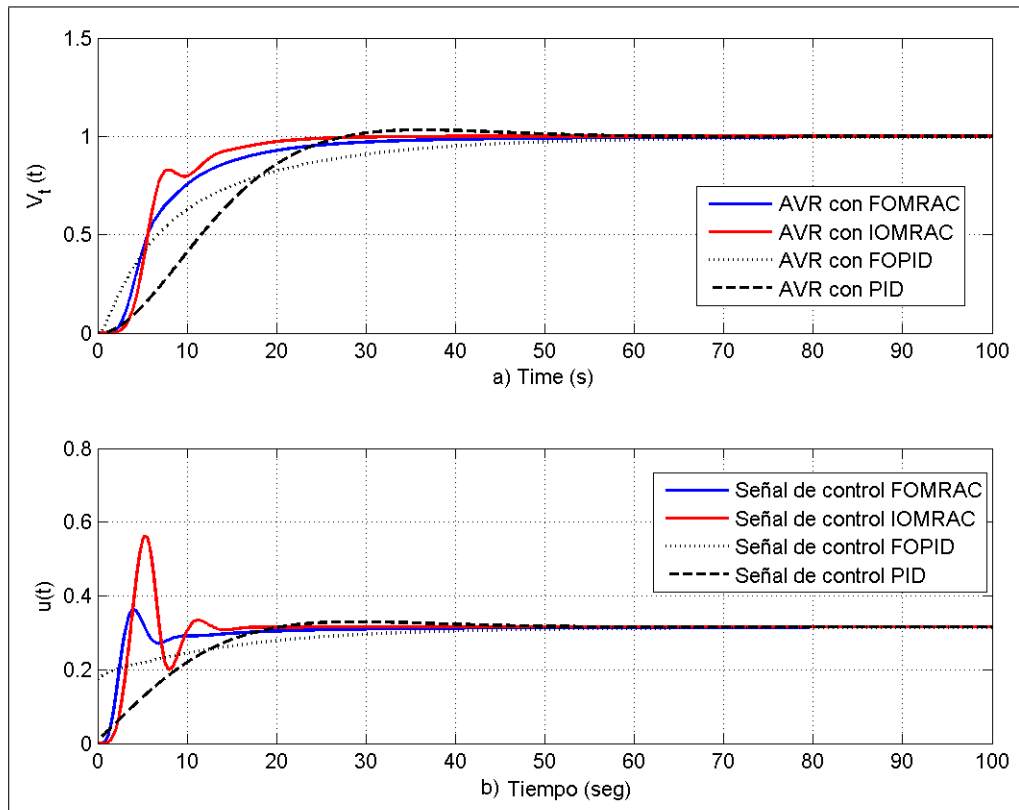


Figura 6.4: Respuesta al escalón (a) y señal de control (b) para el AVR, controlado por FOMRAC, IOMRAC, FOPID y PID.

$$\begin{aligned} \gamma_{1e} &= 1,8138 & \gamma_{2e} &= 10,179 & \gamma_{3e} &= 11,4493 & \gamma_{4e} &= 9,9687 \\ \gamma_{5e} &= 4,5219 & \gamma_{6e} &= 3,8443 & \gamma_{7e} &= 1,2544 & \gamma_{8e} &= 5,1298 \\ \gamma_{9e} &= 0,3906 & \gamma_{10e} &= 1,8225 & \gamma_{11e} &= 20,3988. \end{aligned}$$

Como puede apreciarse de la Figura 6.4, el tiempo de establecimiento es menor para el caso del IOMRAC y el FOMRAC, pero en cambio éstos poseen mayor esfuerzo de control comparados con el FOPID y el PID. Es válido señalar que el esfuerzo de control del IOMRAC es aún mayor que el del FOMRAC, o sea, el FOMRAC entrega un buen balance entre la respuesta transitoria y el esfuerzo de control.

El hecho de que el FOMRAC posea un mejor comportamiento transitorio se debe a la posibilidad de este esquema de seleccionar diferentes órdenes de derivación para cada una de las leyes de ajuste. Estas leyes de ajuste fraccionarias, de acuerdo al valor de  $\alpha$ , permiten obtener respuestas transitorias más suaves que en el caso del IOMRAC, de modo que el proceso de optimización permitió encontrar la mejor combinación de éstos y de las ganancias adaptables.

Con respecto a la dimensión del controlador, y por tanto a la complejidad del FOMRAC, se pueden implementar otros controladores más simples bajo determinadas consideraciones. La función de transferencia de la planta corresponde a un modelo de quinto orden más un sensor con función de transferencia de primer orden, cuya dinámica es usualmente despreciada. Sin embargo, en este caso la función de transferencia de la planta puede ser aproximada de manera bastante adecuada por una función de transferencia de cuarto orden ( $G_{p4}(s)$ ), por una de tercer

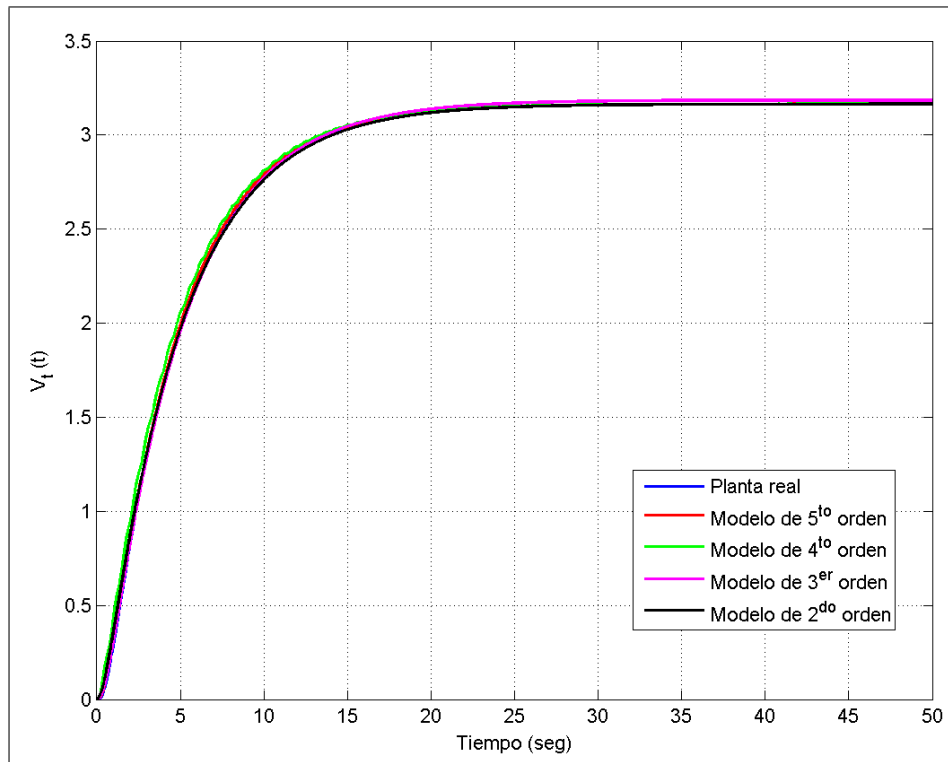


Figura 6.5: Respuesta al escalón de la planta comparada con las funciones de transferencia de orden reducido

orden ( $G_{p3}(s)$ ) e incluso por una de segundo orden ( $G_{p2}(s)$ ). Los detalles de estas funciones de transferencia equivalentes se muestran en (6.3).

La Figura 6.5 muestra la respuesta al escalón de la planta (función de transferencia de quinto orden más la dinámica del sensor), así como la respuesta al escalón de estas tres funciones de transferencia equivalentes. Las respuestas al escalón unitario de todas ellas coinciden prácticamente, lo cual valida lo comentado anteriormente. La respuesta al escalón de la función de transferencia de quinto orden (sin la dinámica del sensor) también se graficó, con el objetivo de mostrar que efectivamente la dinámica del sensor no juega un rol importante.

Las funciones de transferencia de orden reducido son las siguientes

$$G_{p4}(s) = \frac{82,52s + 825,2}{5,73s^4 + 714,46s^3 + 579s^2 + 1276s + 260,8}$$

$$G_{p3}(s) = \frac{13,8}{s^3 + 12,21s^2 + 22,6s + 4,34} \quad (6.3)$$

$$G_{p2}(s) = \frac{1,375}{s^2 + 2,21s + 0,4348}$$

Basado en esta equivalencia, se pueden diseñar controladores más simples ajustando menos parámetros que en el caso ya presentado en la Figura 6.4. Siguiendo el mismo procedimiento de diseño ya especificado, se diseñaron otros tres FOMRAC's. Éstos corresponden a un controlador

Tabla 6.2: Detalles de implementación de los FOMRAC para el AVR considerando controladores de orden reducido

	Controlador de 2 <sup>o</sup> orden	Controlador de 3 <sup>o</sup> orden	Controlador de 4 <sup>o</sup> orden
Ley de Control	$u(t) = \theta(t)^T \omega(t)$ ( $\theta, \omega \in \mathbb{R}^4$ )	$u(t) = \theta(t)^T \omega(t)$ ( $\theta, \omega \in \mathbb{R}^6$ )	$u(t) = \theta(t)^T \omega(t)$ ( $\theta, \omega \in \mathbb{R}^8$ )
Señales auxiliares	$\dot{\omega}_1(t) = \Lambda \omega_1(t) + l u(t)$ $\dot{\omega}_2(t) = \Lambda \omega_2(t) + l y_p(t)$ $\Lambda = -2$ $l = 1$	$\dot{\omega}_1(t) = \Lambda \omega_1(t) + l u(t)$ $\dot{\omega}_2(t) = \Lambda \omega_2(t) + l y_p(t)$ $\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ $l = [1 \ -1]^T$	$\dot{\omega}_1(t) = \Lambda \omega_1(t) + l u(t)$ $\dot{\omega}_2(t) = \Lambda \omega_2(t) + l y_p(t)$ $\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ $l = [1 \ -1 \ 3]^T$

correspondiente a una planta de cuarto orden (FOMRAC<sub>4</sub>), de tercer orden (FOMRAC<sub>3</sub>) y uno de segundo orden (FOMRAC<sub>2</sub>). En las simulaciones utilizando estos controladores, la planta a controlar evidentemente es la planta real, o sea, aquella con función de transferencia de quinto orden más el sensor, y solamente los controladores son de orden reducido.

Los detalles de la implementación para cada uno de los esquemas reducidos se presentan en la Tabla 6.2. El resto de los detalles de implementación son los mismos que los utilizados en la Subsección 6.1.2 y que se muestran en la Tabla 6.1. Los valores resultantes para la función objetivo  $J$  y los valores óptimos para los parámetros de los controladores de orden reducido, se muestran en la Tabla 6.3. El controlador diseñado en la Subsección 6.1.2 será referenciado a partir de ahora como FOMRAC<sub>5</sub>.

Del mismo modo, se diseñaron otros tres IOMRAC's con propósitos de comparación, siguiendo el mismo procedimiento de diseño que en el caso fraccionario y con las especificaciones dadas en la Tabla 6.2, pero utilizando órdenes de derivación enteros para las leyes de ajuste. Estos con-

Tabla 6.3: Valores óptimos de los parámetros de diseño de los FOMRAC considerando controladores de orden reducido para el AVR

	Controlador de 2 <sup>o</sup> orden	Controlador de 3 <sup>o</sup> orden	Controlador de 4 <sup>o</sup> orden
$J$	130.08	129.19	133.06
$\alpha$	$\alpha_1 = 0,1076$ $\alpha_2 = 0,7375$ $\alpha_3 = 0,1892$ $\alpha_4 = 0,9969$ $\alpha_5 = 0,6272$	$\alpha_1 = 0,1494$ $\alpha_2 = 0,4447$ $\alpha_3 = 0,5170$ $\alpha_4 = 0,3393$ $\alpha_5 = 0,9609$ $\alpha_6 = 0,8717$ $\alpha_7 = 0,9084$	$\alpha_1 = 0,1015$ $\alpha_2 = 0,2421$ $\alpha_3 = 0,4792$ $\alpha_4 = 0,4888$ $\alpha_5 = 0,6906$ $\alpha_6 = 0,9668$ $\alpha_7 = 0,8197$ $\alpha_8 = 0,1649$ $\alpha_9 = 0,9110$
$\gamma$	$\gamma_1 = 3,2318$ $\gamma_2 = 0,2691$ $\gamma_3 = 0,4442$ $\gamma_4 = 1,8235$ $\gamma_5 = 4,3721$	$\gamma_1 = 3,4581$ $\gamma_2 = 3,0186$ $\gamma_3 = 1,5211$ $\gamma_4 = 0,8351$ $\gamma_5 = 0,6364$ $\gamma_6 = 0,2690$ $\gamma_7 = 5,0180$	$\gamma_1 = 3,3963$ $\gamma_2 = 5,1532$ $\gamma_3 = 5,3037$ $\gamma_4 = 4,9035$ $\gamma_5 = 0,0582$ $\gamma_6 = 0,5305$ $\gamma_7 = 0,8161$ $\gamma_8 = 0,9677$ $\gamma_9 = 2,0426$

Tabla 6.4: Valores óptimos de los parámetros de diseño de los IOMRAC considerando controladores de orden reducido para el AVR

	Controlador de 2 <sup>o</sup> orden	Controlador de 3 <sup>o</sup> orden	Controlador de 4 <sup>o</sup> orden
$J$	173.03	118.99	118.85
$\gamma$	$\gamma_{1e} = 0,1074$ $\gamma_{2e} = 0,4772$ $\gamma_{3e} = 0,3272$ $\gamma_{4e} = 0,4377$ $\gamma_{5e} = 0,2062$	$\gamma_{1e} = 0,7501$ $\gamma_{2e} = 10,9832$ $\gamma_{3e} = 3,4511$ $\gamma_{4e} = 3,9595$ $\gamma_{5e} = 0,0606$ $\gamma_{6e} = 0,06$ $\gamma_{7e} = 11,9$	$\gamma_{1e} = 0,9633$ $\gamma_{2e} = 8,6064$ $\gamma_{3e} = 4,4762$ $\gamma_{4e} = 4,002$ $\gamma_{5e} = 3,4331$ $\gamma_{6e} = 0,06$ $\gamma_{7e} = 0,2612$ $\gamma_{8e} = 0,3744$ $\gamma_{9e} = 12,9981$

troladores son referenciados como IOMRAC<sub>4</sub>, IOMRAC<sub>3</sub> e IOMRAC<sub>2</sub>. Los valores resultantes para la función objetivo  $J$  y los valores óptimos de las ganancias adaptivas se muestran en la Tabla 6.4.

La Figura 6.6 muestra la respuesta al escalón del sistema controlado para cada uno de los cuatro FOMRAC diseñados, y comparados nuevamente con el sistema controlado utilizando el FOPID y el PID, reportados en Zamani et al. (2009). La Figura 6.7 muestra la señal de control para cada caso.

Puede observarse que el comportamiento del sistema controlado es similar para cada uno de los casos en que se usa FOMRAC, y en todos los casos el tiempo de establecimiento es menor

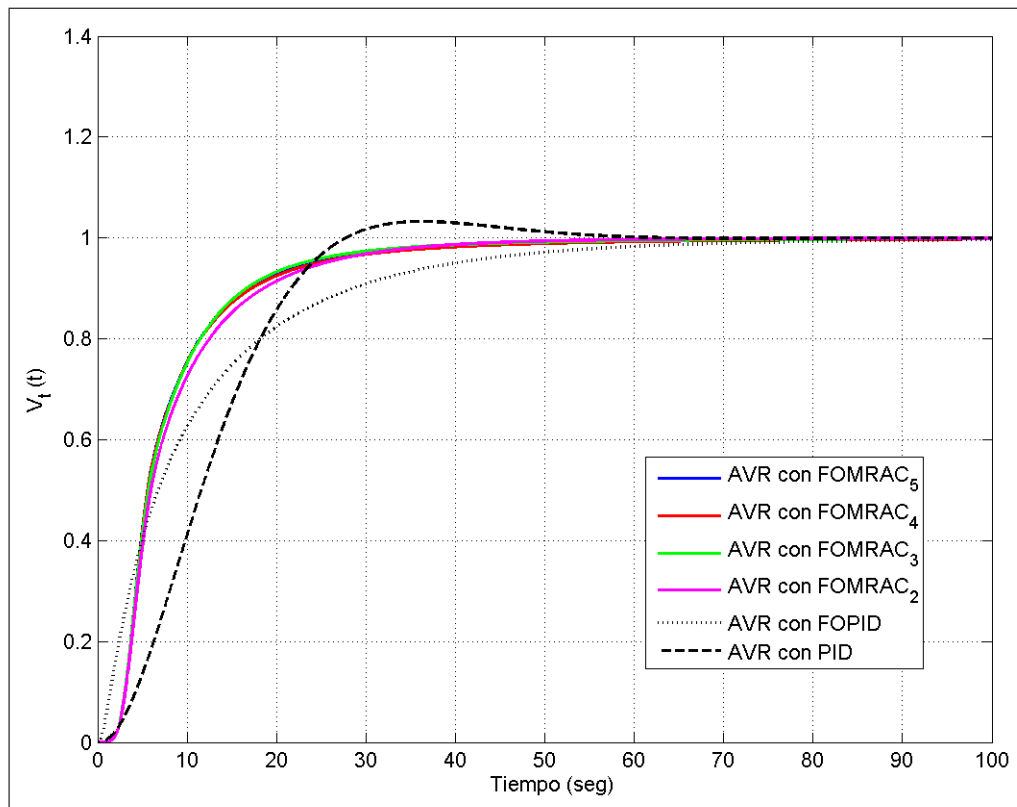


Figura 6.6: Respuesta al escalón del AVR controlado por los cuatro FOMRAC, el PID y el FOPID.



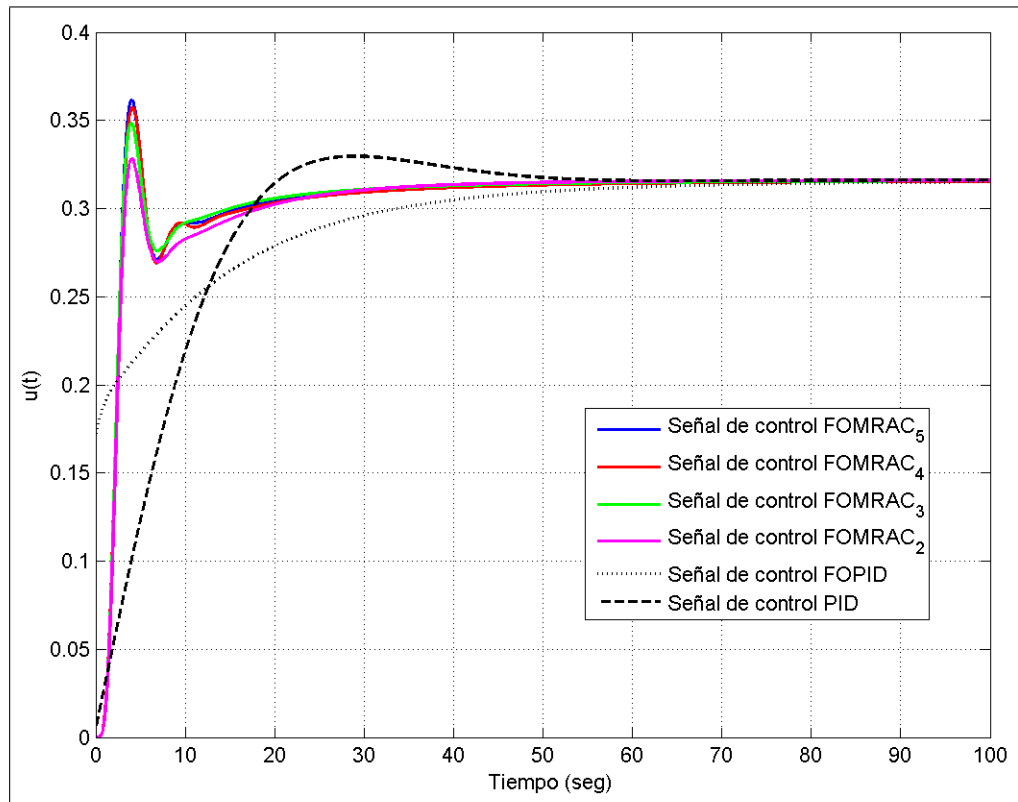


Figura 6.7: Señales de control en el AVR controlador por los cuatro FOMRAC, el PID y el FOPID.

que en el caso en que se usa FOPID y PID. Este resultado confirma que efectivamente es posible, en este caso, utilizar exitosamente controladores de orden reducido para controlar la planta. El esfuerzo de control, sin embargo, es mayor para el caso de los controladores FOMRAC que para el caso del PID y el FOPID.

La Figura 6.8, por su parte, muestra la respuesta al escalón del sistema controlado utilizando los IOMRAC diseñados, comparados con el sistema controlado usando FOPID y PID. En este caso, el comportamiento del sistema controlado es similar cuando se usa IOMRAC<sub>5</sub>, IOMRAC<sub>4</sub> e IOMRAC<sub>3</sub>, con tiempos de establecimiento más pequeños que cuando se usa el FOPID y el PID. Sin embargo, para el caso en que se usó el IOMRAC<sub>2</sub>, el sistema controlado presentaba un comportamiento transiente oscilatorio, resultando una gran diferencia con respecto a lo observado en el caso fraccionario FOMRAC<sub>2</sub>.

Como puede apreciarse de la Figura 6.9, el esfuerzo de control para el caso de los controladores de orden entero es, en todos los casos, mayor que para el caso del PID y el FOPID. Comparando la Figura 6.7 con la Figura 6.9, puede apreciarse el esfuerzo de control para el caso de los controladores enteros es, en todos los casos, mayor que para el caso de los controladores fraccionarios.

### 6.1.5. Robustez del FOMRAC

Debido a la naturaleza del proceso de generación de energía eléctrica, usualmente pueden ocurrir variaciones en los parámetros de la planta. Por ejemplo, pueden presentarse cambios

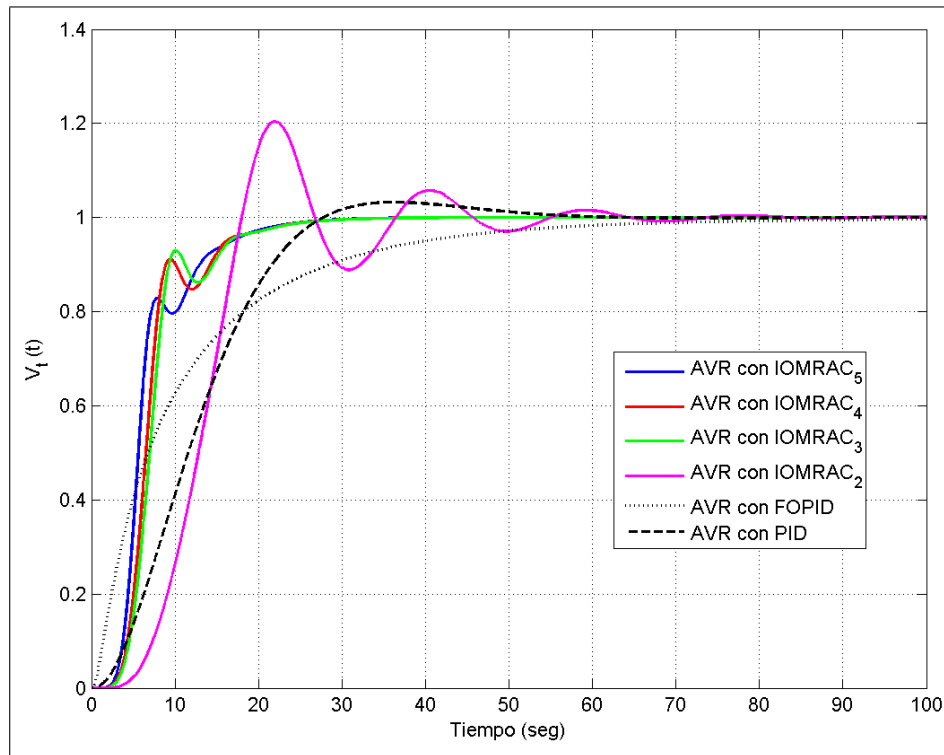


Figura 6.8: Respuesta al escalón del AVR controlado por los cuatro IOMRAC, el PID y el FOPID.

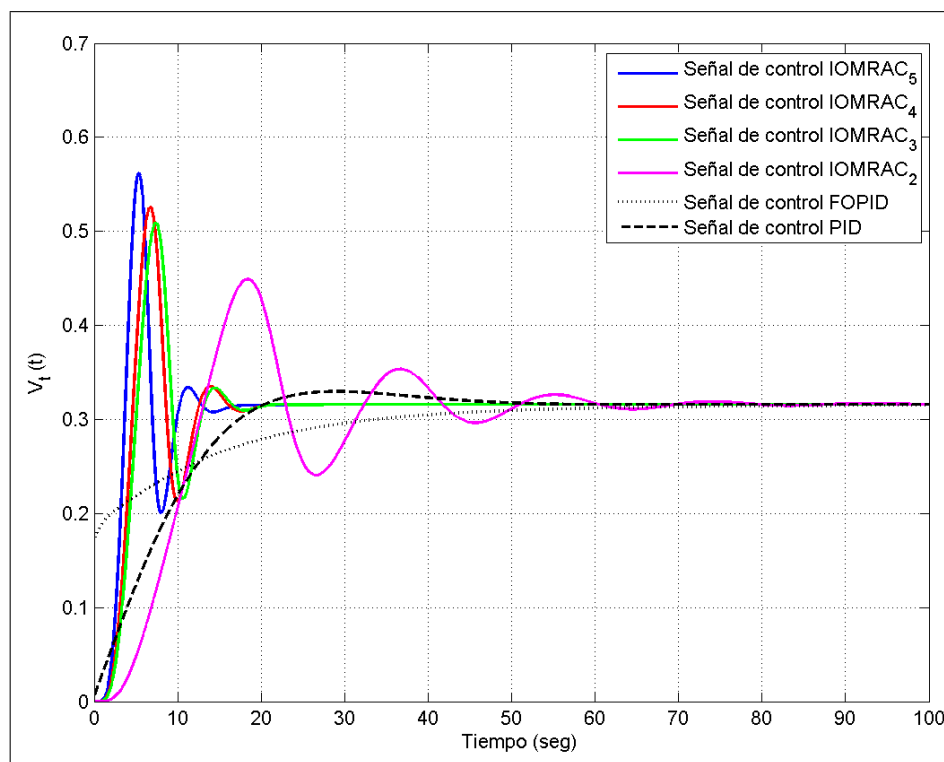


Figura 6.9: Señales de control en el AVR controlado por los cuatro IOMRAC, el PID y el FOPID.

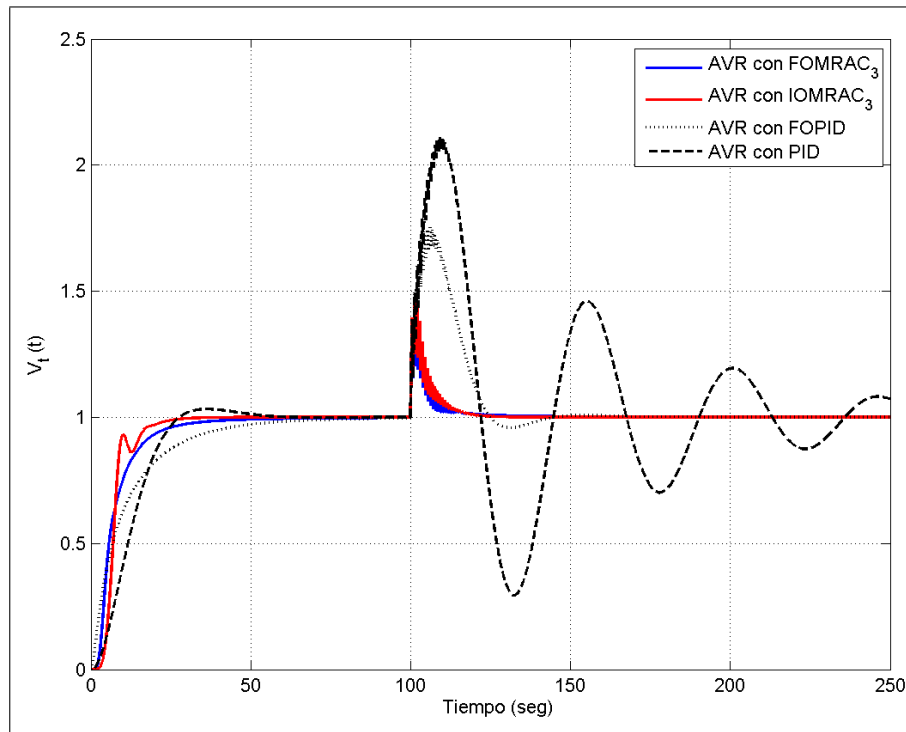


Figura 6.10: Respuesta al escalón del AVR controlado por el FOMRAC<sub>3</sub>, el IOMRAC<sub>3</sub>, el PID y el FOPID, frente a una variación en el parámetro  $k_1$  del generador.

en la condición de carga. Con el objetivo de chequear la robustez del FOMRAC con respecto a cambios en los parámetros, se realizaron algunas simulaciones utilizando los mismos cambios paramétricos reportados en Zamani et al. (2009), para efectos de comparación.

Primero se supone que en el instante  $t = 100$  seg, el parámetro del generador  $k_1 = 1,59$ , cambia bruscamente a  $k_1 = 1$ , debido a cambios en las condiciones de carga. La Figura 6.10 muestra la respuesta del AVR usando el FOMRAC<sub>3</sub> diseñado en este trabajo, (controlador de orden reducido 3) y se compara con el FOPID, el PID y el IOMRAC<sub>3</sub>. El FOMRAC<sub>4</sub> y el FOMRAC<sub>5</sub> presentan un comportamiento bastante similar al del FOMRAC<sub>3</sub>, por eso no fueron graficados. En el caso del FOMRAC<sub>2</sub>, este presentaba oscilaciones en la respuesta transitoria frente a cambios en el parámetro  $k_1$ , y por lo tanto no fue considerado como una buena opción.

Como puede apreciarse en la Figura 6.10, el FOMRAC<sub>3</sub> y el IOMRAC<sub>3</sub> son similares, en el sentido que ambos presentan menor sobrepaso y tiempo de establecimiento que el FOPID y el PID cuando el cambio paramétrico en  $k_1$  ocurre. Ambas características son altamente deseables en un esquema de control para un proceso de generación de energía eléctrica. Este mejor comportamiento, no obstante, se obtiene a expensas de un mayor esfuerzo de control, como puede apreciarse en la Figura 6.11. Cabe destacar, sin embargo, que el esfuerzo de control del IOMRAC<sub>3</sub> es mayor que el del FOMRAC<sub>3</sub>.

En la segunda prueba de robustez, se supone la ocurrencia de un segundo cambio en la función de transferencia del excitador. Se considera que la función de transferencia varía de  $\frac{V_f(s)}{V_r(s)} = \frac{1}{0,5s + 1}$  a  $\frac{V_f(s)}{V_r(s)} = \frac{1}{0,5s + 0,5}$ , en el instante de tiempo  $t = 100$  seg.

La Figura 6.12 muestra el voltaje de salida del AVR controlado con el FOMRAC<sub>3</sub> diseñado

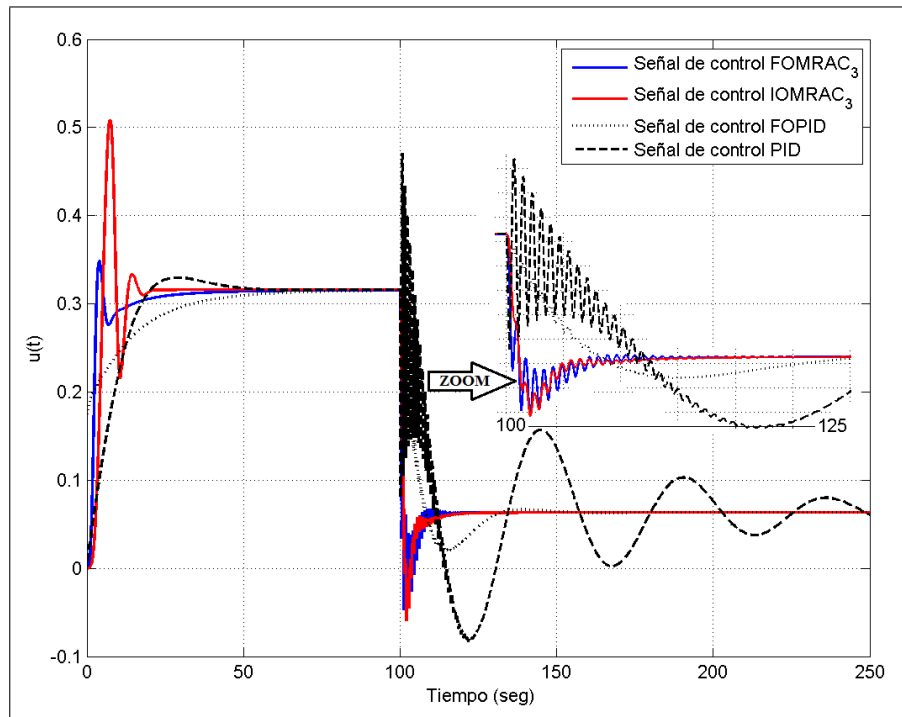


Figura 6.11: Señales de control del AVR controlado por el FOMRAC<sub>3</sub>, el IOMRAC<sub>3</sub>, el PID y el FOPID, frente a una variación en el parámetro  $k_1$  del generador.

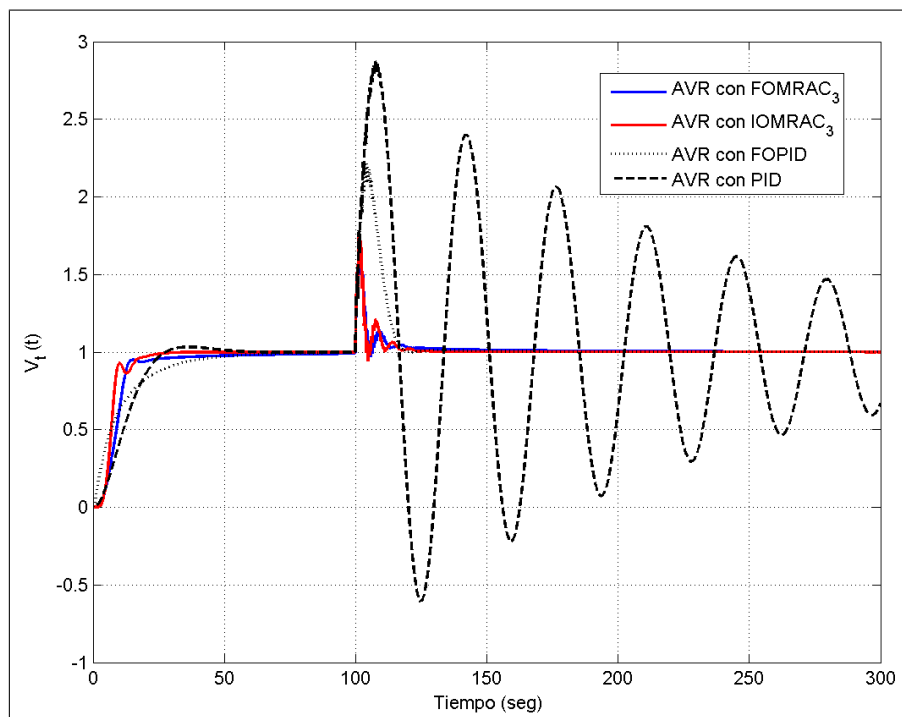


Figura 6.12: Respuesta al escalón del AVR controlado por el FOMRAC<sub>3</sub>, el IOMRAC<sub>3</sub>, el PID y el FOPID, frente a variaciones en el parámetro  $k_1$  del generador y en la función de transferencia del excitador, en  $t = 100$  s.

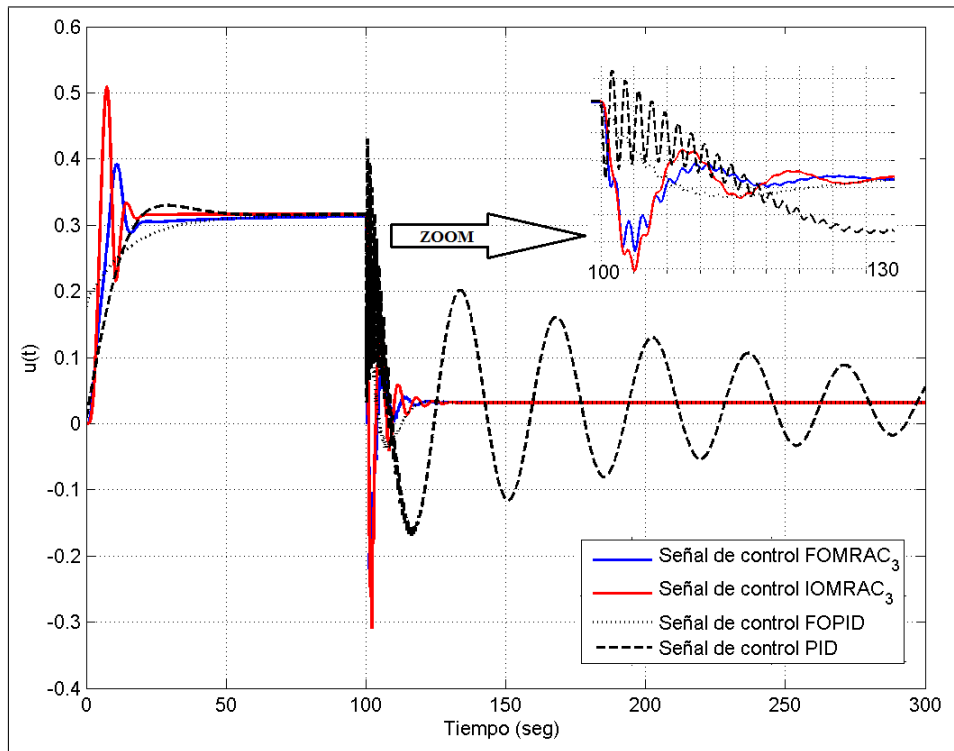


Figura 6.13: Señales de control del AVR controlado por el FOMRAC<sub>3</sub>, el IOMRAC<sub>3</sub>, el PID y el FOPID, frente a variaciones en el parámetro  $k_1$  del generador y en la función de transferencia del excitador, en  $t = 100$  s.

en este trabajo, y comparado con el FOPID, el PID y el IOMRAC<sub>3</sub>, bajo ambas variaciones paramétricas (la del generador y la del excitador). Nuevamente en este caso, el controlador adaptable fraccionario y el adaptable entero tienen menor sobrepaso y tiempo de establecimiento que el FOPID y el PID, y el esfuerzo de control es mayor en el caso del IOMRAC<sub>3</sub>, tal como puede apreciarse en la Figura 6.13.

### 6.1.6. Evaluación del desempeño del sistema controlado

Medir la calidad de la respuesta en un sistema de control es una ardua tarea. Una de las principales dificultades para hacerlo radica en decidir cuáles características de la respuesta del sistema son lo suficientemente importantes para tenerlas en cuenta y en qué medida hacerlo respecto de las demás (Duarte-Mermoud & Prieto, 2004).

Con el objetivo de medir la calidad del FOMRAC propuesto en este trabajo, se utilizaron algunos índices de desempeño propuestos por Duarte-Mermoud & Prieto (2004). Estos índices de desempeño son el sobrepaso ( $M_p$ ), tiempo de subida ( $t_r$ ), tiempo de establecimiento ( $t_s$ ), error de estado estacionario ( $E_{ss}$ ), la integral del módulo del error ( $IAE$ ), la integral del cuadrado del error ( $ISE$ ), la integral del producto del tiempo y el cuadrado del error ( $ITSE$ ), la integral del cuadrado de la señal de control ( $ISI$ ), y también la suma de todos estos índices.

La Tabla 6.5 muestra los valores correspondientes a estos índices para los cuatro FOMRAC diseñados en este trabajo, así como para los cuatro IOMRAC diseñados también en este trabajo,

Tabla 6.5: Índices de desempeño para los cuatro FOMRAC, los cuatro IOMRAC, el PID y el FOPID para el AVR

	$M_p$	$t_r$	$t_s$	$E_{ss}$	$IAE$	$ITAE$	$ISE$	$ITSE$	$ISI$	$\Sigma$
FOMRAC <sub>5</sub>	0	13,83	34,55	0,02	8,69	80,89	5,03	17,32	9,44	169,8
FOMRAC <sub>4</sub>	0	14,06	36,13	0,02	8,87	88,09	5,05	17,69	9,4	179,36
FOMRAC <sub>3</sub>	0	13,53	32,86	0,02	8,62	77,28	5,06	17,34	9,45	164,18
FOMRAC <sub>2</sub>	0	15,47	34,85	0,02	9,05	78,67	5,28	19,5	9,37	172,25
FOPID	0	26,69	53,57	0,02	11,87	172,57	5,37	31,52	8,75	310,36
PID	3,23	17,35	45,42	0,02	12,89	120,97	8,65	49,07	9,09	266,69
IOMRAC <sub>5</sub>	0	9,15	21,63	0,02	7,08	35,87	5,03	14,46	9,93	103,17
IOMRAC <sub>4</sub>	0	4,61	22,15	0,02	7,58	38,66	5,67	17,78	9,87	106,34
IOMRAC <sub>3</sub>	0	4,74	22,31	0,02	7,88	40,71	6,00	19,73	9,83	111,22
IOMRAC <sub>2</sub>	20,30	9,60	52,40	0,02	14,92	164,28	10,66	66,05	6,42	344,65

además para el FOPID y el PID reportados en Zamani et al. (2009). En la Tabla 6.5 puede apreciarse que los controladores adaptables fraccionarios poseen menores valores para los índices que el FOPID y el PID, en la mayor parte de los índices de desempeño, sin embargo el ISI es menor para el FOPID.

Los cuatro IOMRAC diseñados poseen menores valores que los FOMRAC, en casi todos los índices, aunque esta diferencia es muy pequeña. No obstante, el ISI tiene valores menores para el caso de los FOMRAC que para el caso de los controladores enteros correspondientes, lo cual está acorde con el comportamiento observado en las simulaciones.

Resulta interesante notar que el FOPID no es mejor que el PID en todos los índices de desempeño, tal como puede apreciarse en la Tabla 6.5. Esto se debe al hecho de que éstos fueron ajustados utilizando una función criterio específica (Zamani et al., 2009), la cual incluye solamente algunos de los índices de desempeño que se muestran en la Tabla 6.5. Sin embargo, eventualmente podría obtenerse un mejor resultado para el FOPID con respecto al PID, de acuerdo a nuestros índices de desempeño, si el proceso de optimización para éstos utilizara otro funcional  $J$  ó diferentes valores de peso.

Estos índices de desempeño ofrecen una herramienta valiosa para la evaluación del comportamiento del sistema controlado, pero también ofrece a los ingenieros de control una herramienta válida para seleccionar cuál esquema de control aplicar al AVR, basándose en cuáles son los aspectos más relevantes que desean que posea el esquema controlado.

## 6.2. Aplicación de estrategias de control fraccionario a un sistema de levitación magnética

El objetivo fundamental de esta sección es brindar una guía metodológica sobre cómo incluir los operadores fraccionarios en estrategias de control conocidas, ampliando así la gama de posibilidades de que se dispone actualmente para controlar los sistemas. Para ello, la implementación de cada una de las estrategias de control presentadas en esta sección será expuesta en detalle, de modo que al lector le resulte simple reproducirlas en un ambiente de simulaciones y eventualmente implementarlas a nivel experimental.

Así, se presenta la aplicación de tres estrategias de control a un sistema de levitación magnética, conocido como Anillo de Thomson, el cual es altamente no lineal. La primera estrategia corresponde a cancelación de no linealidad más localización de polos, la segunda corresponde a un controlador FOPID y la tercera corresponde a un controlador por modo deslizante. En todos los casos, los operadores fraccionarios aparecen incorporados en un observador de estado fraccionario, que estima la velocidad del anillo, y dicha estimación es utilizada dentro de las estrategias de control. En el caso del FOPID, los operadores fraccionarios aparecen además describiendo la componente derivativa del controlador.

### 6.2.1. Introducción

La levitación magnética es un método por el cual un objeto es mantenido en suspensión por la acción únicamente de un campo magnético.

Las aplicaciones más comunes de la levitación magnética son los trenes Maglev, el rodamiento magnético, y la levitación de productos para su exposición. En un futuro, y si se llega a controlar la fusión nuclear, otra utilidad de la levitación magnética podría ser la levitación del plasma. Esta sería la única manera posible ya que los millones de grados a los que ocurre este fenómeno derretirían cualquier contenedor (García, 2011).

En general, existen dos formas de realizar proyectos de levitación estacionaria. El primero es a través de un sistema que utiliza corriente directa, en el cual los polos magnéticos son inducidos en una bola ferromagnética, mediante una bobina. La bola entonces es atraída hacia la bobina y puede quedar suspendida debajo de la bobina, si se ajusta el voltaje DC aplicado a ésta (Barry & Casey, 1999). Este tipo de sistema puede clasificarse, de acuerdo a las fuerzas que usa, como un sistema de atracción.

La segunda forma de realizar proyectos de levitación estacionaria es a través de un sistema que utiliza corriente alterna, en el cual se induce una corriente en un circuito secundario por medio de una bobina primaria. El circuito secundario es repelido por la bobina, y puede levitar por encima de ésta, si se ajusta la amplitud o la frecuencia del voltaje AC aplicado (Barry & Casey, 1999). Este tipo de sistema puede clasificarse, de acuerdo a las fuerzas que usa, como un sistema de repulsión.

El sistema anillo de Thomson corresponde a un sistema de repulsión y su diagrama se muestra en la Figura 6.14.

### 6.2.2. Modelo del anillo de Thomson

El sistema anillo de Thomson es un sistema no lineal, compuesto por ecuaciones mecánicas y ecuaciones eléctricas (García, 2011). Sin embargo, puede obtenerse el modelo simplificado (6.4), también no lineal, con el cual es mucho más simple trabajar desde el punto de vista de simulaciones, debido a que la entrada corresponde a la amplitud del voltaje aplicado a la bobina (García, 2011). La Tabla 6.6 muestra los detalles de los parámetros de este modelo simplificado, que es con el cual se trabajará en esta aplicación.

$$\ddot{z} = -g + K \frac{V_c^2}{m |Z_c|^2 z}. \quad (6.4)$$

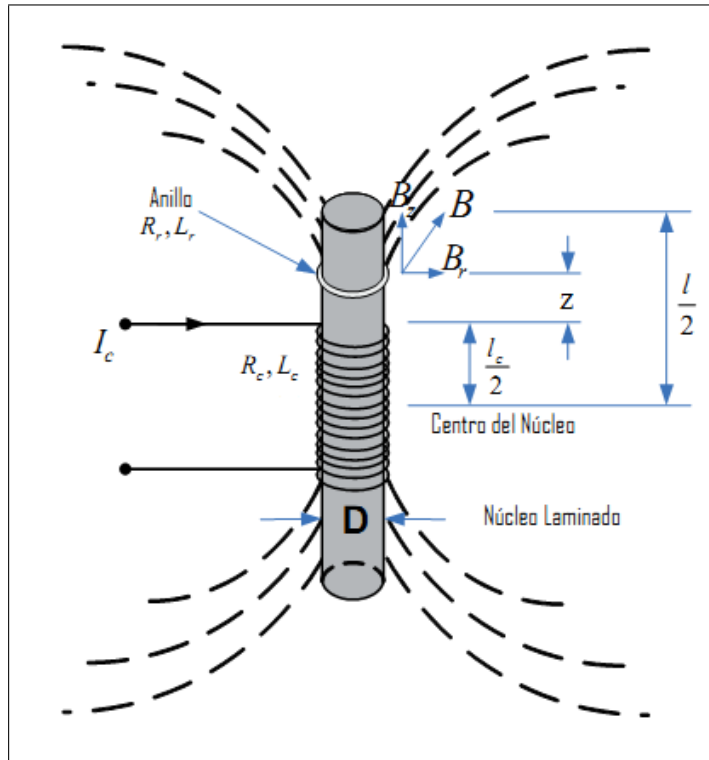


Figura 6.14: Esquema del sistema anillo de Thomson.

El sistema anillo de Thomson es un sistema inestable, razón por la cual se requiere la implementación de una estrategia de control para, en primer lugar, estabilizar el anillo en una posición deseada. Como parte de este trabajo, se proponen cuatro estrategias de control para estabilizar el anillo. Una vez implementadas estas técnicas y comprobado su correcto desempeño, entonces se ponen a prueba ante el seguimiento de una referencia senoidal. Los resultados de estos experimentos a nivel de simulaciones son comparados entre sí, y se establecen conclusiones al respecto.

En este trabajo se utilizan los valores de parámetros de un sistema anillo de Thomson disponible en el CINVESTAV de México. Esto con el objetivo de que los resultados obtenidos de este trabajo puedan reproducirse luego en el sistema real y realizar las comparaciones correspondientes. Las especificaciones de los parámetros de este sistema se encuentran en la Tabla 6.7 y una imagen de este sistema real puede apreciarse en la Figura 6.15.

Una vez introducido el modelo no lineal del anillo, descrito en (6.4), hagamos la siguiente asignación de estados

$$x_1 = z \quad x_2 = \dot{z}. \quad (6.5)$$

La salida del sistema corresponde a la posición del anillo, o sea  $y = x_1$  y la entrada corresponde al cuadrado de la amplitud del voltaje aplicado a la bobina, o sea  $u = V_c^2$ .

De este modo, se obtiene la siguiente representación en el espacio de estado



Tabla 6.6: Detalles del Modelo no lineal del anillo de Thomson dado en la ecuación (6.4)

Parámetro	Descripción
$z$	posición del anillo sobre la bobina ( $m$ ), de acuerdo a la Figura (6.14)
$g$	aceleración de la gravedad ( $m/s^2$ )
$K$	dada por la expresión $K = \frac{M_z^2 \omega}{2 Z_R } \sin(\phi_R)$
$\omega$	frecuencia de la señal senoidal aplicada a la bobina ( $rad/s$ )
$Z_R$	impedancia del anillo ( $\Omega$ ), calculada a través de la expresión $Z_R = \sqrt{R_R^2 + (\omega L_R)^2}$
$R_R$	resistencia del anillo ( $\Omega$ )
$L_R$	inductancia del anillo ( $H$ )
$M_Z$	coeficiente de inducción mutua ( $H$ ) del sistema bobina-anillo para cierta distancia $z$
$\phi_R$	desfase provocado por la impedancia del anillo y calculado como $\phi_R = \arctan\left(\frac{\omega L_R}{R_R}\right)$
$V_c$	amplitud del voltaje aplicado a la bobina ( $V$ )
$m$	masa del anillo ( $kg$ )
$Z_c$	dada por la expresión $Z_c = \sqrt{(R_c^s)^2 + (\omega L_c^s)^2}$ ( $\Omega$ )
$R_c^s$	dada por la expresión $R_c^s = R_c - \frac{M_z^2 \omega^2}{ Z_R } \cos(\phi_R)$ ( $\Omega$ )
$L_c^s$	dada por la expresión $L_c^s = L_c + \frac{M_z^2 \omega}{ Z_R } \sin(\phi_R)$ ( $H$ )
$R_c$	resistencia de la bobina ( $\Omega$ )
$L_c$	inductancia de la bobina ( $H$ )

Tabla 6.7: Valores de los parámetros del modelo del anillo de Thomson disponible en CINVESTAV

Parámetro	Valor
$R_R$	$0,20816 \times 10^{-3} \Omega$
$L_R$	$2,07023 \times 10^{-6} H$
$M_Z$	$36,2 \times 10^{-6} H$
$V_c$	$53,768 V$
$m$	$1,4482 \times 10^{-3} kg$
$R_c$	$14,5 \Omega$
$L_c$	$128 \times 10^{-3} H$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= -g + \frac{K}{m|Z_c|^2} x_1 u \\
 y &= x_1.
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Si consideramos una entrada constante  $\bar{u}$ , el punto de equilibrio resulta de resolver

$$\begin{aligned}
 0 &= \bar{x}_2 \\
 0 &= -g + \frac{K\bar{u}}{m|Z_c|^2} \bar{x}_1,
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

el cual corresponde a

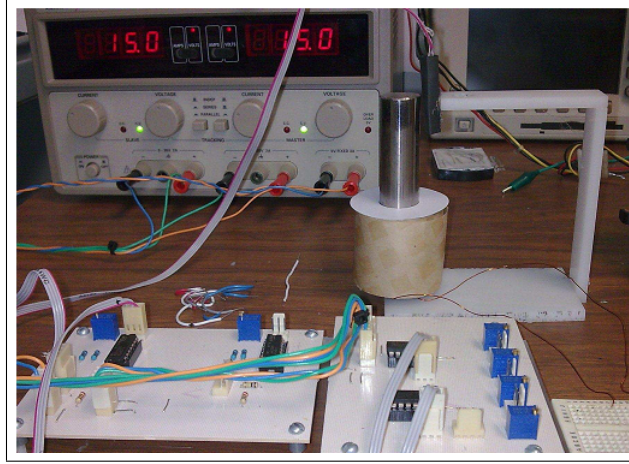


Figura 6.15: Imagen del sistema anillo de Thomson disponible en el CINVESTAV.

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K\bar{u}}{mg|Z_c|^2} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

### 6.2.3. Implementación de un observador de estado fraccionario para estimar la velocidad del anillo

El primer problema que se presenta al momento de proponer una estrategia de control para este sistema, y que limita en gran medida la cantidad de esquemas de control disponibles para implementar, es el hecho de que la única variable de estado medible es la posición, o sea  $x_1$ . Por lo tanto, lo primero que se ha diseñado es un observador de estado, con el objetivo de tener una estimación de la variable  $x_2$ , que corresponde a la velocidad del anillo, y poder utilizarla luego en esquemas de control que lo requieran.

Debido a que los parámetros del sistema y la estructura del modelo se consideran conocidos, la construcción del observador es relativamente simple. Partiendo del modelo no lineal del sistema dado por (6.6), se propone el siguiente observador, de orden fraccionario

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha \hat{x}_1 &= \hat{x}_2 + l_1 (\hat{x}_1 - x_1) \\ {}^C D^\alpha \hat{x}_2 &= -g + \frac{K}{m|Z_c|^2} u + l_2 (\hat{x}_1 - x_1) \\ \hat{y} &= \hat{x}_1, \end{aligned} \quad (6.9)$$

donde  $\alpha \in (0, 2)$  y  $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$  son parámetros de diseño.

Si se definen los errores de estimación de estado como

$$\begin{aligned} e_1 &= \hat{x}_1 - x_1 \\ e_2 &= \hat{x}_2 - x_2, \end{aligned} \quad (6.10)$$

entonces se obtiene

$$\begin{bmatrix} {}^C D^\alpha \hat{x}_1 - \dot{\hat{x}}_1 \\ {}^C D^\alpha \hat{x}_2 - \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & 1 \\ l_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

La ecuación (6.11) no tiene una estructura conocida, debido a que se ha propuesto un observador de orden fraccionario para un sistema de orden entero. Además no se ha demostrado analíticamente que este observador resulta asintóticamente estable y tampoco bajo qué condiciones sucede. No obstante, se ha observado mediante simulaciones que si se selecciona  $l_1, l_2$  de forma tal que la matriz  $\begin{bmatrix} l_1 & 1 \\ l_2 & 0 \end{bmatrix}$  tenga raíces reales y negativas, se garantiza que los errores de estimación de estado convergen a cero. Por lo tanto, esa es la condición que se impone para el diseño del observador. Las raíces del polinomio característico de esta matriz resultan ser

$$r_{1,2} = \frac{l_1 \pm \sqrt{l_1^2 + 4l_2}}{2}. \quad (6.12)$$

Si se desean raíces reales y negativas se debe garantizar que  $l_1^2 + 4l_2 \geq 0$ ,  $l_1 < 0$  y  $\sqrt{l_1^2 + 4l_2} < |l_1|$ . Basado en estos requisitos, para este trabajo se escogieron los valores  $l_1 = -40$ ,  $l_2 = -400$ , con los cuales se logra ubicar los valores propios de la matriz  $\begin{bmatrix} l_1 & 1 \\ l_2 & 0 \end{bmatrix}$  en  $-20$ .

#### 6.2.4. Cancelación de la no linealidad y localización de polos

La primera solución de control que se presenta para este problema, es la posibilidad de cancelar la no linealidad del sistema y al mismo tiempo realizar una localización de polos del sistema controlado. La posibilidad de cancelar la no linealidad se considera debido a que los parámetros son conocidos y se supone, al menos desde el punto de vista de diseño, que éstos no varían en el tiempo. Para implementar esta estrategia, supondremos que tenemos acceso a  $x_2$ , pues utilizaremos el observador de estado propuesto en la sección anterior.

De este modo, partiendo del sistema no lineal, se propone una ley de control de la forma

$$u = \frac{x_1}{K} [g - c_1 x_1 - c_2 x_2 + c_3 v], \quad (6.13)$$

donde  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  son parámetros de diseño, y  $v$  corresponde a una nueva entrada, que en el caso de este problema es el valor deseado de la posición. La representación del sistema en lazo cerrado al aplicarle esta señal de control resulta ser

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_1 & -c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c_3 \end{bmatrix} v \quad (6.14)$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

cuya función de transferencia es

$$G(s) = \frac{c_3}{s^2 + c_2 s + c_1}. \quad (6.15)$$

Como puede apreciarse al analizar la expresión (6.15), la selección de  $c_1, c_2$  debe garantizar que el polinomio  $s^2 + c_2 s + c_1$  tenga raíces con parte real negativa, para asegurar la estabilidad del sistema en lazo cerrado, y escogiendo  $c_3 = c_1$  se logra estabilizar el sistema en el valor deseado de la posición, pues la ganancia de alta frecuencia resultante será unitaria.

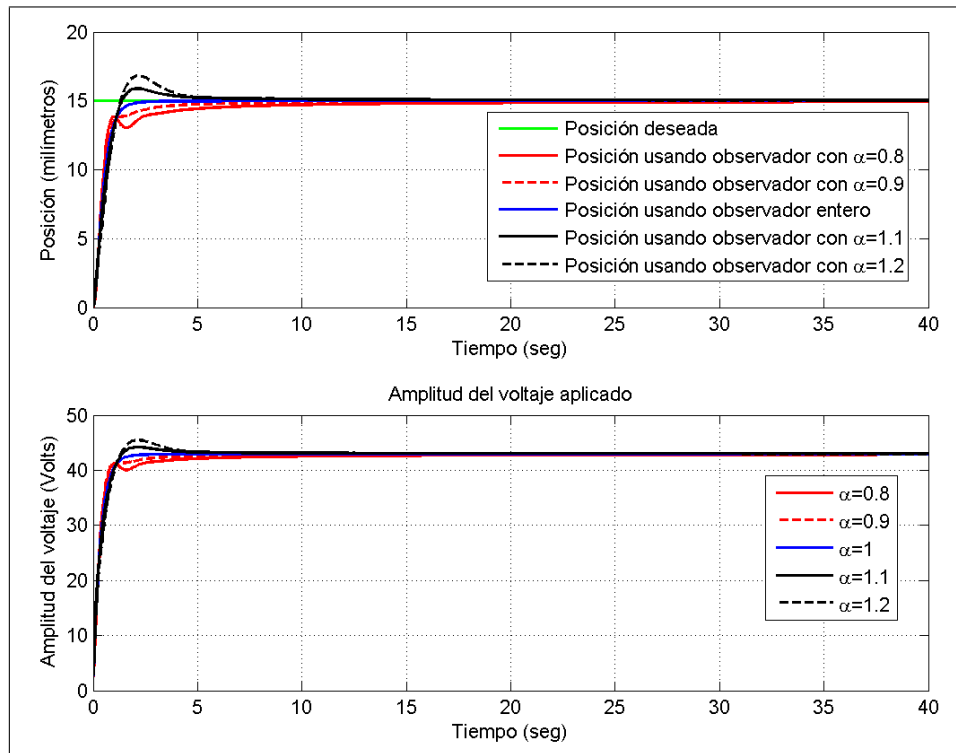


Figura 6.16: Comportamiento del sistema controlado utilizando la ley de control (6.13).

Con el propósito de comprobar la efectividad del esquema de control propuesto, se somete el sistema a un experimento donde se desea estabilizar el anillo en una posición deseada, en este caso  $15 \text{ mm}$  desde el origen de medición de la posición.

La Figura 6.16 muestra el desempeño de este controlador frente a una entrada escalón de  $15 \text{ mm}$  para el valor deseado de la posición ( $v$ ). En este caso se ha seleccionado  $c_1 = c_3 = 15$ ,  $c_2 = 8$  y la variable  $x_2$  utilizada corresponde a  $\hat{x}_2$ , proveniente del observador de estado (6.9). Se ha graficado el resultado de varios experimentos, en cada uno de los cuales se ha utilizado un observador de estado de orden diferente. La implementación de los observadores de orden fraccionario se ha realizado en Simulink, utilizando el bloque NID de la Toolbox Ninteger (Valério & Costa, 2004).

Como puede apreciarse en la Figura 6.16, el objetivo de control se cumple en todos los casos, aunque se aprecia claramente que el orden del observador utilizado influye en la respuesta transitoria y en el tiempo de establecimiento. Puede apreciarse que los casos en que  $\alpha < 1$  tienen mayor tiempo de establecimiento que el caso entero, y en los casos en que el orden de derivación es mayor que 1, además existe sobrepaso en la respuesta. Así, el caso  $\alpha = 1$ , o sea el observador de Luenberger clásico, resulta el que presenta mejor desempeño en cuanto a tiempo de establecimiento y sobrepaso en la respuesta transitoria.

Más allá de las pruebas de posicionamiento del anillo en un valor de referencia dado, se han realizado experimentos para comprobar el desempeño del sistema controlado frente al seguimiento de referencia. Para ello se ha sometido el sistema a dos experimentos: el primero corresponde a un seguimiento de varias referencias de tipo escalón, y el segundo al seguimiento de una señal senoidal.

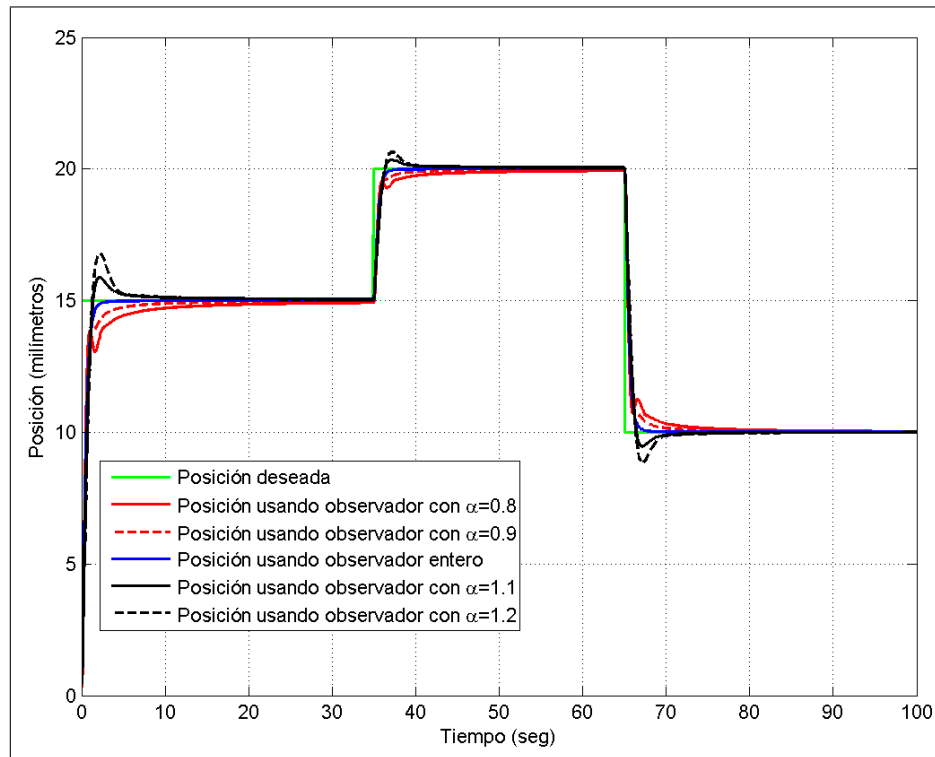


Figura 6.17: Comportamiento del sistema controlado utilizando la ley de control (6.13) frente al seguimiento de escalones de referencia de diferentes magnitudes.

La Figura 6.17 muestra el caso en que la referencia consiste en una serie de escalones de diferente magnitud a lo largo de la ventana de tiempo, comenzando en  $15\text{ mm}$ , subiendo luego a  $20\text{ mm}$  y finalmente bajando a  $10\text{ mm}$ . Como puede apreciarse, el sistema logra seguir satisfactoriamente la referencia, aunque se mantiene el comportamiento observado en el experimento anterior, respecto del sobrepaso y el tiempo de establecimiento en función del orden del observador utilizado.

La Figura 6.18 muestra el comportamiento del sistema frente a una referencia de tipo senoidal, centrada en  $15\text{ mm}$ , de amplitud  $5\text{ mm}$  y con frecuencia  $\pi/6$ . En este caso se ha graficado el error de control  $e(t) = v(t) - x_1(t)$  para tener una apreciación más clara del desempeño.

Como puede apreciarse de la Figura 6.18, aún cuando el error de control permanece acotado, éste tiene magnitudes no despreciables. Este comportamiento era predecible, debido a que el diseño consistió en localización de polos, y la selección de éstos dio lugar a un sistema que no es lo suficientemente rápido para seguir a una referencia senoidal de esta frecuencia. Las simulaciones realizadas para frecuencias más bajas mostraron que, en la medida que la frecuencia de la señal senoidal disminuye, también la magnitud del error disminuye. No obstante, es preciso notar que para este problema de seguimiento de referencia senoidal, la amplitud del error es similar para todos los valores de  $\alpha$  utilizados.

Para obtener un mejor desempeño del sistema controlado para un problema de seguimiento de referencia senoidal, se pueden modificar los valores de  $c_1, c_2, c_3$  en el diseño del controlador. Para comprobar este hecho, se seleccionó  $c_1 = c_3 = 1500$  y  $c_2 = 80$ , con lo cual se obtiene un sistema en lazo cerrado 10 veces más rápido que en el caso anterior. Con esta modificación, el error de estado estacionario se hace más pequeño, como puede apreciarse en la Figura 6.19.

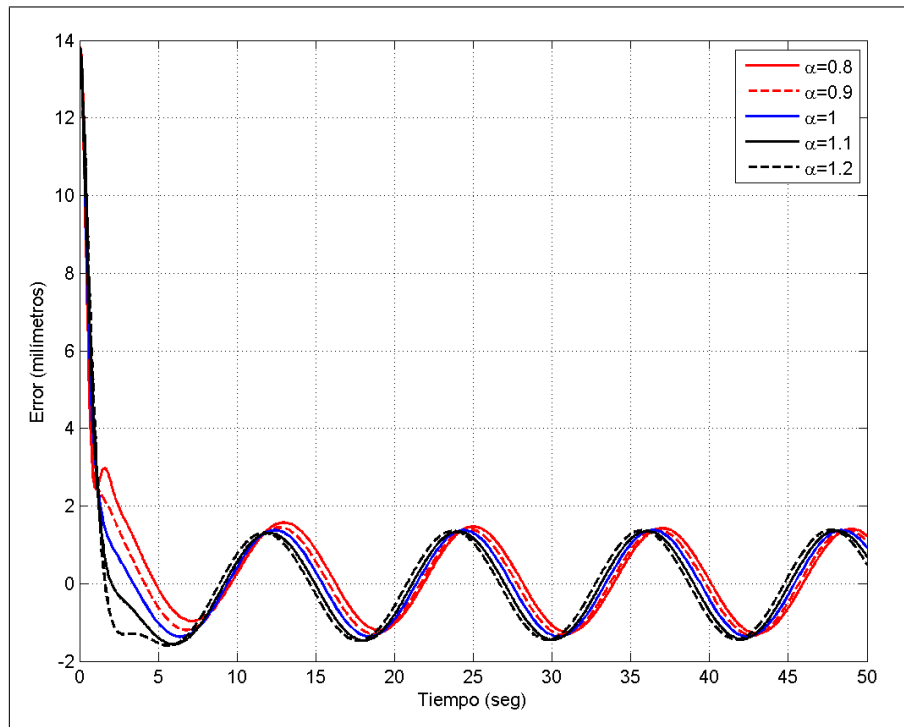


Figura 6.18: Comportamiento del error de posición utilizando la ley de control (6.13) para un problema de seguimiento de referencia senoidal.

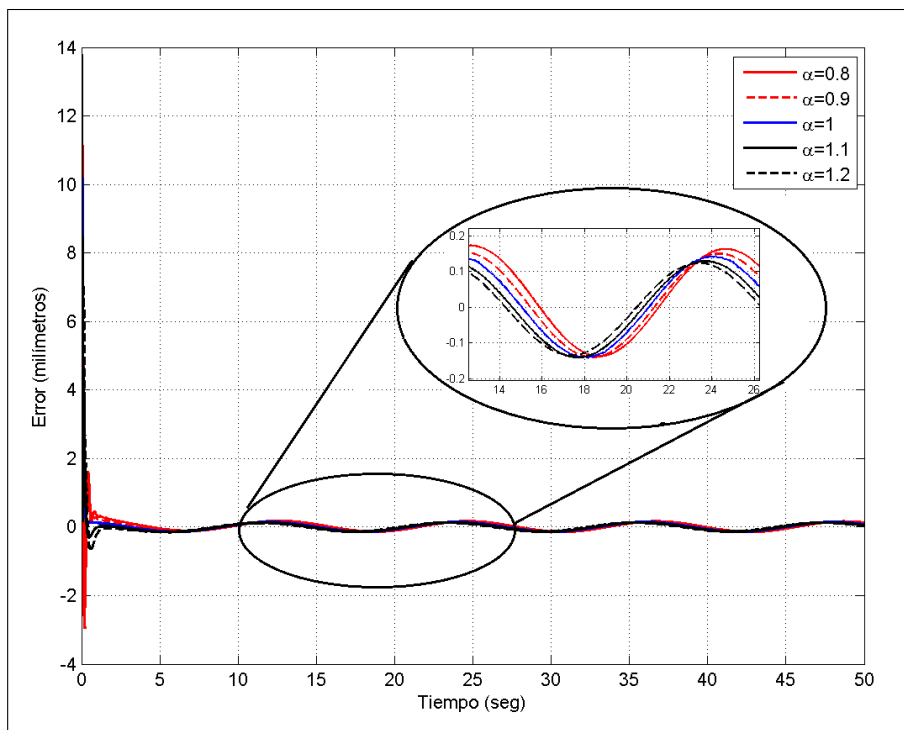


Figura 6.19: Comportamiento del error de posición utilizando la ley de control (6.13) para un problema de seguimiento de referencia senoidal y parámetros de diseño modificados.

Puede observarse como en este caso también la amplitud del error es similar para todos los valores de  $\alpha$  utilizados, aunque en el caso entero ( $\alpha = 1$ ) y en los casos ( $\alpha > 1$ ) el error tiene una amplitud un poco menor que en los casos en que  $\alpha < 1$ .

El hecho de seleccionar polos que hagan que el sistema resultante sea más rápido, tiene una contraparte negativa, y es que la señal de control resultante es más exigente en los instantes iniciales, siendo este un tema a tener en cuenta al momento de utilizar este esquema para seguimiento de una señal senoidal.

### 6.2.5. Control PID de orden fraccionario

El PID es uno de los métodos de control más utilizados en el ámbito del control de procesos, por ser un controlador simple y que ha probado ser aplicable a sistemas lineales y no lineales por igual. Con el surgimiento de los operadores fraccionarios, también surgieron los PID de orden fraccionario (FOPID), en los cuales no solo se ajustan las ganancias proporcional, integral y derivativa, sino también el orden de integración y el orden de derivación correspondientes.

Como segunda estrategia de control para el sistema anillo de Thomson, se propone precisamente el uso de un FOPID. El FOPID recibe como entrada el error de control, que en este problema corresponde a  $e(t) = r(t) - x_1(t)$ , donde  $r(t)$  es la señal de referencia, y genera una señal de control  $u(t)$  a partir de la ecuación (6.16).

$$u(t) = k_P e(t) + k_I I^\alpha e(t) + k_D {}^C D^\beta e(t). \quad (6.16)$$

Con el objetivo de encontrar las ganancias  $k_P, k_I, k_D$ , así como el orden de integración  $\alpha$  y el orden de derivación  $\beta$ , se realizó un proceso de optimización utilizando PSO. Para este problema el funcional a minimizar se escogió como el definido en (6.17). El cálculo de los parámetros que intervienen en el funcional se realizó aplicando una referencia de tipo escalón de 15 mm al esquema de control con el FOPID, en una ventana de tiempo de 100 segundos. Los órdenes de integración y derivación se consideraron en el intervalo (0, 2).

$$J = M_p + E_{ss} + t_r + t_s + \int_0^T |r(t) - x_1(t)| dt. \quad (6.17)$$

En el funcional (6.17),  $M_p$  es el sobrepaso,  $E_{ss}$  es el error de estado estacionario,  $t_r$  es el tiempo de subida y  $t_s$  es el tiempo de establecimiento. El término integral en (6.17) corresponde a la integral del módulo del error de control y para este procedimiento se utilizó  $T = 100$  segundos.

Los parámetros relevantes del PSO utilizados fueron los siguientes

- Tamaño de la población: 100
- Número de iteraciones: 300
- Factor de inercia inicial: 0.9
- Factor de inercia final: 0.4

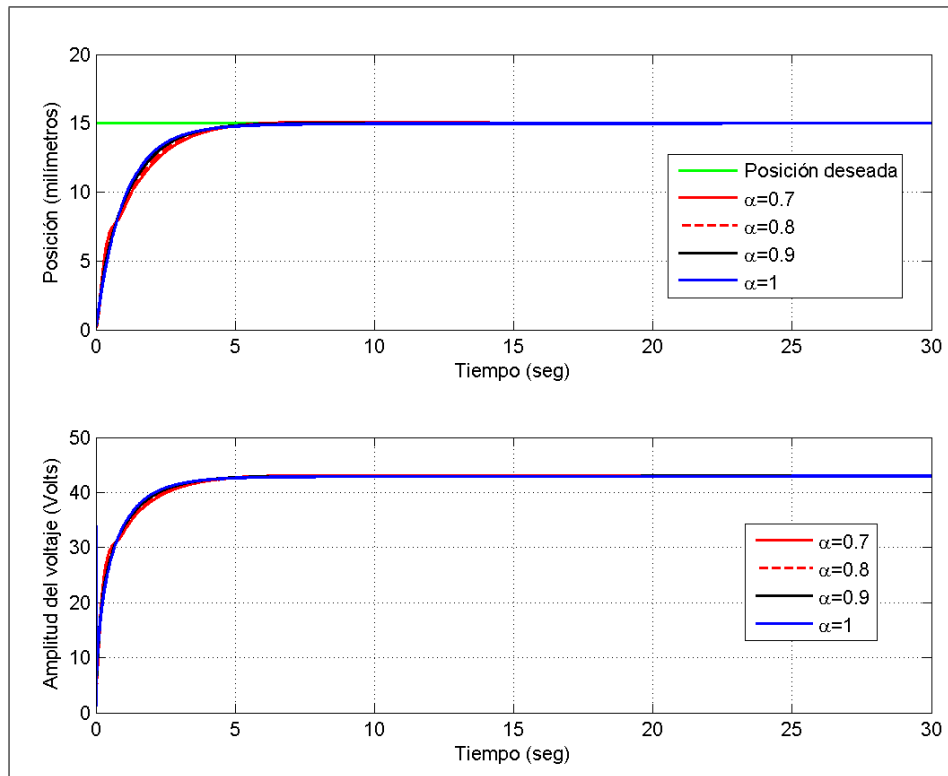


Figura 6.20: Comportamiento del sistema controlado utilizando FOPID.

Como resultado del proceso de optimización, se obtuvieron los siguientes valores para los parámetros optimizados:

$$k_P = 7,6690 * 10^4 \quad k_I = 12,013 * 10^4 \quad k_D = 7,801 * 10^4 \quad \alpha = 1 \quad \beta = 0,97. \quad (6.18)$$

Como puede apreciarse, el proceso de optimización dio como mejor resultado un controlador que es muy cercano a un controlador PID clásico. Además, el controlador resultante tiene componente derivativa del error, por lo tanto se necesita esta derivada. Una opción sería directamente derivar el error, pero debido a la influencia negativa que tienen los procesos derivativos en presencia de ruido en las mediciones, se ha optado por disponer de esta derivada a través del observador (6.9) construido para la velocidad del anillo. De acuerdo a la definición del error, se sabe que  $\dot{e}(t) = \dot{r}(t) - \dot{x}_1(t)$ . Del modelo en el espacio de estado se sabe que  $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$ , por tanto, la primera derivada del error se puede construir a partir de la primera derivada de la referencia y de la señal  $x_2$ , que se obtiene como resultado del observador de estado. La primera derivada de la referencia es conocida, pues para esta aplicación solo se trabajará con referencias de tipo escalón (derivada cero) y de tipo senoidal (derivada del tipo cosenoidal). Por lo tanto, no es necesario derivar directamente la referencia, sino que su primera derivada puede generarse directamente como parte de la aplicación, tal como se genera la referencia.

Para comprobar la efectividad del esquema de control propuesto, se ha sometido el sistema a un experimento donde se desea estabilizar el anillo en una posición deseada, en este caso 15 mm, tal como se realizó con la estrategia de cancelación de no linealidad y localización de polos.

La Figura 6.20 muestra el desempeño de este controlador frente a una entrada escalón de 15 mm para el valor deseado de la posición. Se ha graficado el resultado de varios experimentos,



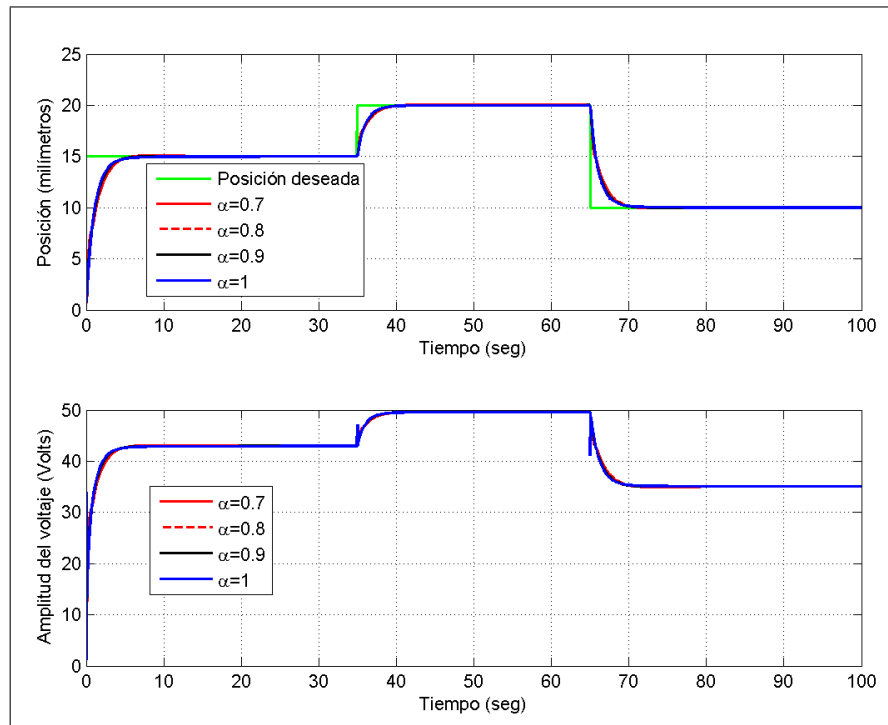


Figura 6.21: Comportamiento del sistema controlado utilizando FOPID para un problema de seguimiento de referencia tipo escalón de diferentes magnitudes.

en cada uno de los cuales se ha utilizado un observador de estado de orden diferente para estimar la velocidad del anillo  $x_2$  y con ella construir la derivada del error de control, que se utiliza en la componente derivativa del FOPID.

Como puede apreciarse de la Figura 6.20, el objetivo de control se cumple en todos los casos, y para este controlador el orden del observador utilizado no afecta la respuesta transitoria y el tiempo de establecimiento del mismo modo que en el caso de cancelación y localización de polos. Es importante hacer explícito que en este caso se consideraron solamente observadores de orden menor que 1, pues aquellos casos en que se utilizaban observadores de orden mayor que 1, estos tenían una influencia negativa en la señal de control, al aparecer oscilaciones de magnitud considerable en los primeros instantes de tiempo.

Tal como se realizó en el caso de la cancelación de no linealidad con localización de polos, también para el caso del FOPID se han realizado experimentos de seguimiento de referencia.

Las Figura 6.21 muestra el caso en que la referencia consiste en una serie de escalones de diferente magnitud a lo largo de la ventana de tiempo. Inicialmente el escalón es de magnitud  $15\text{ mm}$ , luego  $20\text{ mm}$  y finalmente  $10\text{ mm}$ . Como puede apreciarse, el sistema logra seguir satisfactoriamente la referencia, y tal como sucedió en el experimento anterior, la respuesta transitoria y los tiempos de establecimiento no se ven tan fuertemente afectados por el uso de los observadores fraccionarios con  $\alpha \in (0, 1)$ .

La Figura 6.22 muestra el comportamiento del sistema frente a una referencia de tipo senoidal, centrada en  $15\text{ mm}$ , de amplitud  $5\text{ mm}$  y con frecuencia  $\pi/6$ . En este caso se ha graficado el error de control  $e(t) = r(t) - x_1(t)$  para tener una apreciación más clara del desempeño.

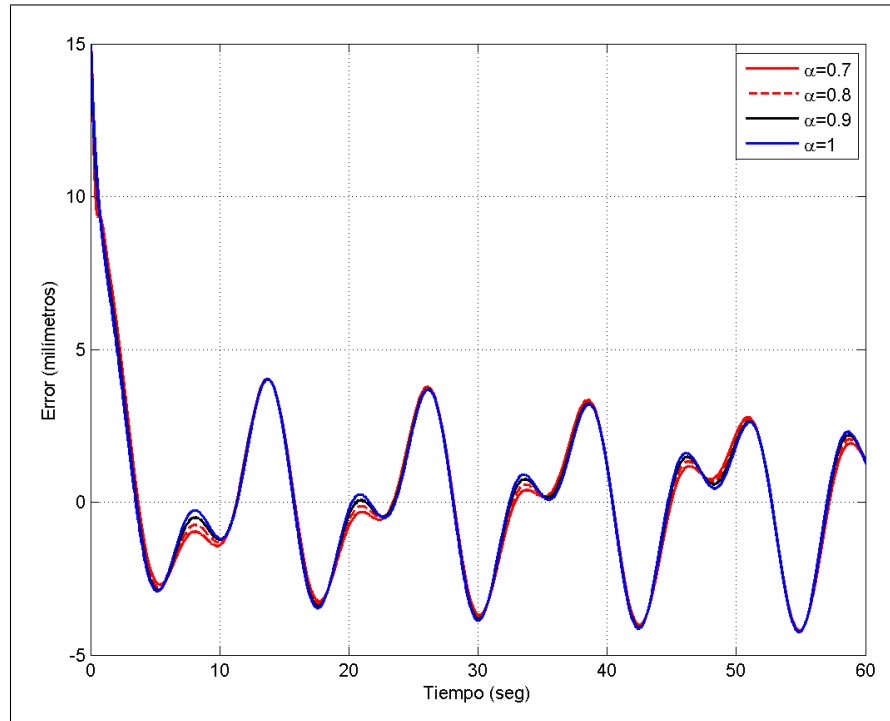


Figura 6.22: Comportamiento del error de posición utilizando FOPID para un problema de seguimiento de referencia senoidal.

Como puede apreciarse de la Figura 6.22, aún cuando el error permanece acotado, este tiene magnitudes considerables, y el comportamiento es similar para todos los valores de  $\alpha$  utilizados en el observador de estado. Este resultado puede deberse al hecho de que el proceso de ajuste del FOPID se optimizó para una entrada de tipo escalón, y por lo tanto su comportamiento frente a un seguimiento de referencia senoidal no es el más adecuado. Un nuevo proceso de ajuste en el cual el objetivo sea el seguimiento de una referencia senoidal puede dar mejores resultados. En efecto, este procedimiento se llevó a cabo para obtener un nuevo juego de valores para los parámetros del FOPID. Sin embargo, como en este caso se considera una entrada senoidal, no tiene sentido referirse a tiempo de subida, sobrepaso, tiempo de establecimiento, etc., que son los parámetros que se utilizan en la función objetivo (6.17). Por lo tanto, para el nuevo proceso de optimización se utilizó una función objetivo diferente, definida a continuación.

$$J = \int_0^T t |r(t) - x_1(t)| dt. \quad (6.19)$$

Con esta nueva función objetivo, se realizó un nuevo proceso de optimización y se obtuvo un nuevo juego de valores para los parámetros del FOPID, dados por

$$k_P = 1,5914 * 10^6 \quad k_I = 1,7608 * 10^6 \quad k_D = 0,1857 * 10^6 \quad \alpha = 1 \quad \beta = 0,97. \quad (6.20)$$

Con este nuevo juego de parámetros (6.20), se logra un mejoramiento en el seguimiento de la referencia senoidal, como se muestra en la Figura 6.23, aunque sigue existiendo error de régimen permanente, solo que de menor magnitud. Este segundo juego de parámetros (6.20) también ofrece buenos resultados frente a una entrada de tipo escalón, obteniéndose un tiempo de

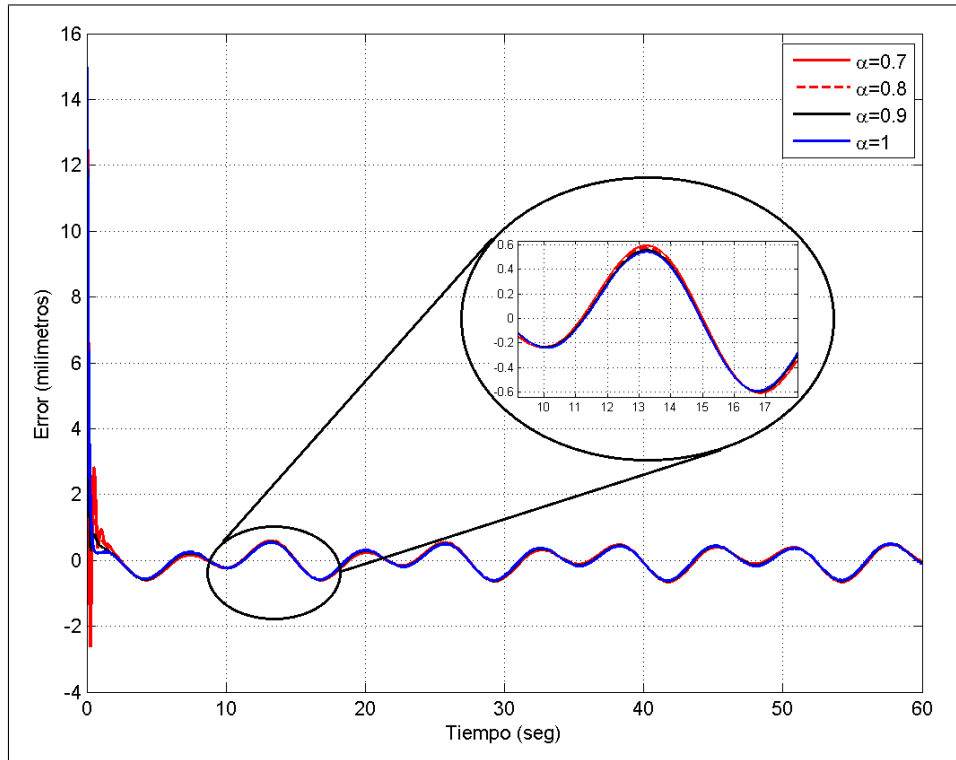


Figura 6.23: Comportamiento del error de posición utilizando FOPID para un problema de seguimiento de referencia senoidal y parámetros de diseño modificados.

establecimiento 5 veces menor que el que se obtiene para el caso del primer juego de parámetros (6.18). No obstante, es preciso mencionar que tanto en el seguimiento de referencia senoidal como en el seguimiento de escalones, con este nuevo juego de parámetros el esfuerzo de control es mayor, y también la respuesta transitoria es más oscilatoria en los instantes iniciales.

### 6.2.6. Control por modo deslizante

Una tercera técnica de control que se ha propuesto para este sistema, es el control por modo deslizante, estrategia utilizada para el control de sistemas no lineales. Para ello comenzamos con el modelo no lineal del sistema

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= -g + \frac{K}{m|Z_c|^2} x_1 u \\
 y &= x_1.
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

Consideremos el cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned}
 e_1 &= x_1 - x_{1d} \\
 e_2 &= x_2 - x_{2d},
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

donde  $x_{1d}, x_{2d}$  corresponden a los valores deseados de la posición y la velocidad, respectivamente. Bajo este cambio de coordenadas, el sistema (6.21) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= -g + \frac{K}{m|Z_c|^2} \frac{u}{e_1 + x_{1d}} - \dot{x}_{2d} . \\ y_e &= e_1 \end{aligned} \quad (6.23)$$

Para proponer un control por modo deslizante de modo que se logre estabilizar el sistema (6.23), escojamos primero una función  $f(e_1)$  de forma tal que, considerando un sistema en la forma

$$e_2 = f(e_1) \quad (6.24)$$

resulte que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_1 = 0$ . Para ello, propongamos la función de Lyapunov candidata, positiva definida

$$V = \frac{1}{2} e_1^2. \quad (6.25)$$

Al calcular su primera derivada, y sustituir el valor de  $\dot{e}_1$  de la expresión (6.23) resulta

$$\dot{V} = e_1 \dot{e}_1 = e_1 e_2. \quad (6.26)$$

Luego si escogemos  $e_2 = f(e_1) = -k_1 e_1$  con  $k > 0$  resulta que

$$\dot{V} = -k_1 e_1^2, \quad (6.27)$$

y esto implica que la derivada de la función de Lyapunov es negativa definida, y por lo tanto  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_1 = 0$ .

Pasemos ahora al diseño de la superficie deslizante, de forma tal que se garantice convergencia del sistema a la superficie en tiempo finito. Para ello, propongamos la siguiente superficie deslizante

$$s = e_2 + k_1 e_1. \quad (6.28)$$

Esto implica que

$$\dot{s} = \dot{e}_2 + k_1 \dot{e}_1. \quad (6.29)$$

Reemplazando (6.23) en (6.29) resulta

$$\dot{s} = -g + \frac{K}{m|Z_c|^2} \frac{u}{e_1 + x_{1d}} - \dot{x}_{2d} + k_1 e_2. \quad (6.30)$$

Para escoger la señal de control  $u$  que garantiza que  $\lim_{t \rightarrow \infty} s = 0$ , propongamos la función de Lyapunov candidata, definida positiva

$$V = \frac{1}{2}s^2. \quad (6.31)$$

Calculando su primera derivada y usando la expresión (6.30) resulta

$$\dot{V} = s\dot{s} = s \left[ -g + \frac{K}{m|Z_c|^2} \frac{u}{e_1 + x_{1d}} - \dot{x}_{2d} + k_1 e_2 \right]. \quad (6.32)$$

Luego si escogemos la señal de control como

$$u = \frac{(e_1 + x_{1d}) m |Z_c|^2}{K} [g - k_1 e_2 + \dot{x}_{2d} - \beta \operatorname{sgn}(s)], \quad \beta > 0, \quad (6.33)$$

resulta que

$$\dot{V} = -\beta|s|. \quad (6.34)$$

Luego  $\dot{V}$  es negativa definida y por tanto se garantiza que  $\lim_{t \rightarrow \infty} s = 0$ .

Con la señal de control definida en (6.33) se implementó este esquema de control y se comprobó su desempeño. Como puede observarse, esta ley de control requiere el uso de  $e_2$ , para lo cual se necesita  $x_2$ . Para disponer de esta señal se utiliza el observador diseñado en (6.9) y que también fue utilizado en los dos esquemas de control anteriores. Los parámetros de diseño  $k_1, \beta$  fueron seleccionados como  $k_1 = \beta = 25$ , para así acelerar la convergencia a la superficie deslizante y la convergencia de los errores. Se utilizó la función seno hiperbólico en lugar de la función signo, para evitar los problemas de chattering en la señal de control que son tan usuales en este método (Khalil, 2002).

Para comprobar la efectividad del esquema de control propuesto, se sometió el sistema a un experimento donde se desea estabilizar el anillo en 15 mm.

La Figura 6.24 muestra la evolución de la posición utilizando la señal de control definida en (6.33). Como puede apreciarse, se cumple el objetivo de control satisfactoriamente, aunque se notan algunos sobrepasos iniciales en aquellos casos en que se utilizaron observadores de orden fraccionario para disponer de  $x_2$ . Los sobrepasos resultaron más marcados para los casos en que  $\alpha < 1$ , pero el anillo logró volver rápidamente y estabilizarse en el valor deseado.

Tal como se realizó en el caso de la cancelación de no linealidad con localización de polos y en el caso del FOPID, se realizaron experimentos de seguimiento de referencia para esta estrategia de control.

La Figura 6.25 muestra el caso en que la referencia consiste en una serie de escalones de diferente magnitud a lo largo de la ventana de tiempo, comenzando con un escalón de 15 mm, luego variando a 20 mm y finalmente a 10 mm. Como puede apreciarse, el sistema logra seguir satisfactoriamente la referencia. El comportamiento de la respuesta transitoria es similar al caso del experimento anterior, resultando con sobrepasos en aquellos casos donde se usa el observador de orden fraccionario.

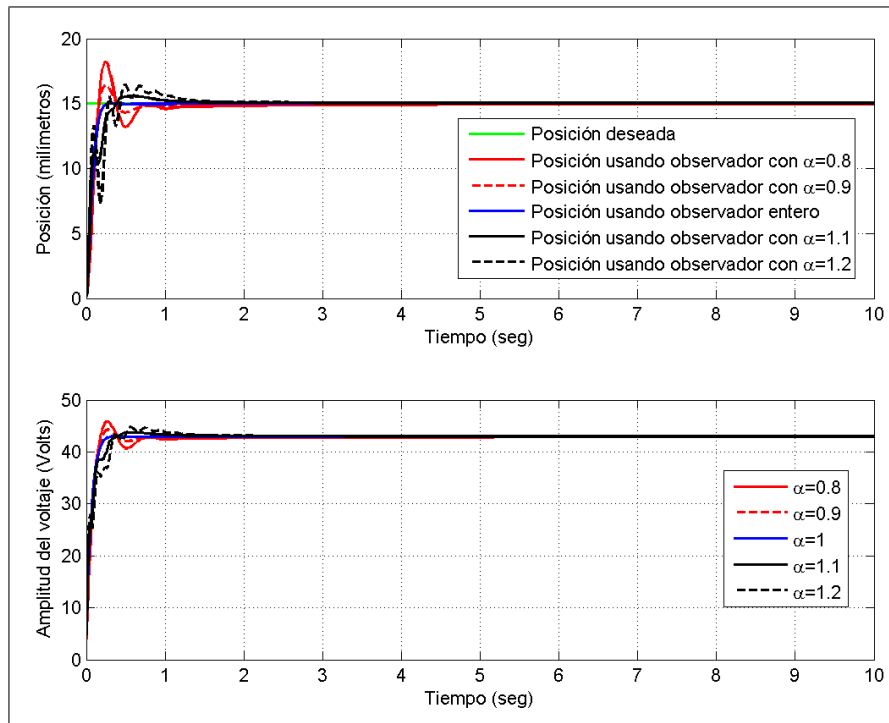


Figura 6.24: Comportamiento del sistema controlado utilizando el control por modo deslizante (6.33).

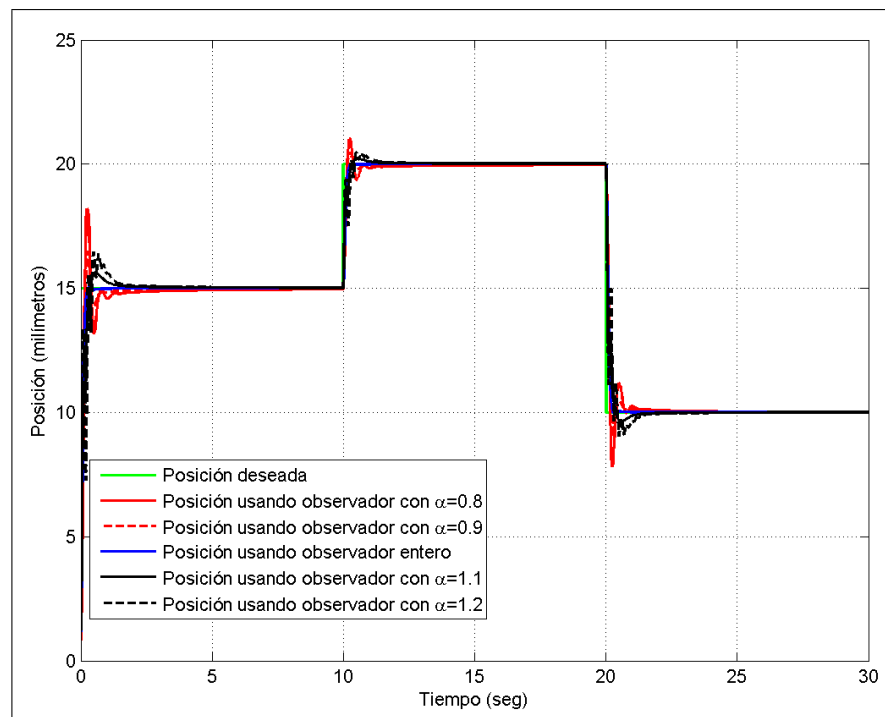


Figura 6.25: Comportamiento del sistema controlado utilizando el control por modo deslizante (6.33) para un problema de seguimiento de escalones de diferentes magnitudes.

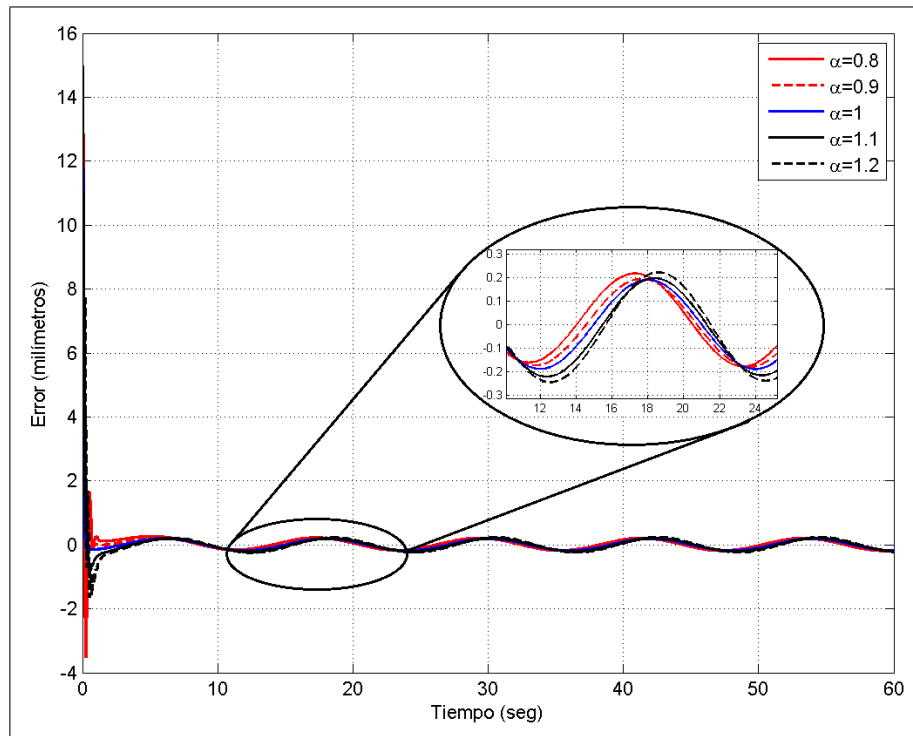


Figura 6.26: Comportamiento del error de posición utilizando el control por modo deslizante (6.33) para un problema de seguimiento de referencia senoidal.

La Figura 6.26, por otra parte, muestra el comportamiento del sistema frente a una referencia de tipo senoidal, centrada en  $15 \text{ mm}$ , de amplitud  $5 \text{ mm}$  y con frecuencia  $\pi/6$ . En este caso se ha graficado el error de control  $e(t) = r(t) - x_1(t)$ , para tener una apreciación más clara del desempeño.

Como puede apreciarse de la Figura 6.26, el error permanece acotado, aunque es preciso notar que éste no converge a cero sino que se observa un error permanente de amplitud máxima de aproximadamente  $0,2 \text{ mm}$ . Puede observarse además, que este error de régimen permanente tiene una amplitud similar para todos los órdenes  $\alpha$  utilizados para el observador. No obstante, esta estrategia de control presentó mejor desempeño que la cancelación de la no linealidad con localización de polos y que el FOPID, y variando el parámetro de diseño  $\beta$  podría lograrse una disminución aún mayor del error de régimen permanente.

### 6.2.7. Desempeño del sistema controlado con perturbación senoidal a la salida

Como se ha podido constatar, las tres estrategias de control utilizadas lograron buen desempeño en los problemas de estabilización y seguimiento de escalones, aunque en el caso de seguimiento de referencias senoidales existía error de régimen permanente, el cual se logró disminuir en algunos casos, modificando los parámetros de diseño. Este comportamiento fue similar para todos los órdenes  $\alpha$  utilizados para el observador de estado. Sin embargo, no se observaron grandes beneficios del uso de estos operadores para esta aplicación en particular.

No obstante, se realizaron algunas pruebas de robustez, para así observar el desempeño del sistema controlado en función del orden de derivación  $\alpha$  utilizado en el observador. Básicamente

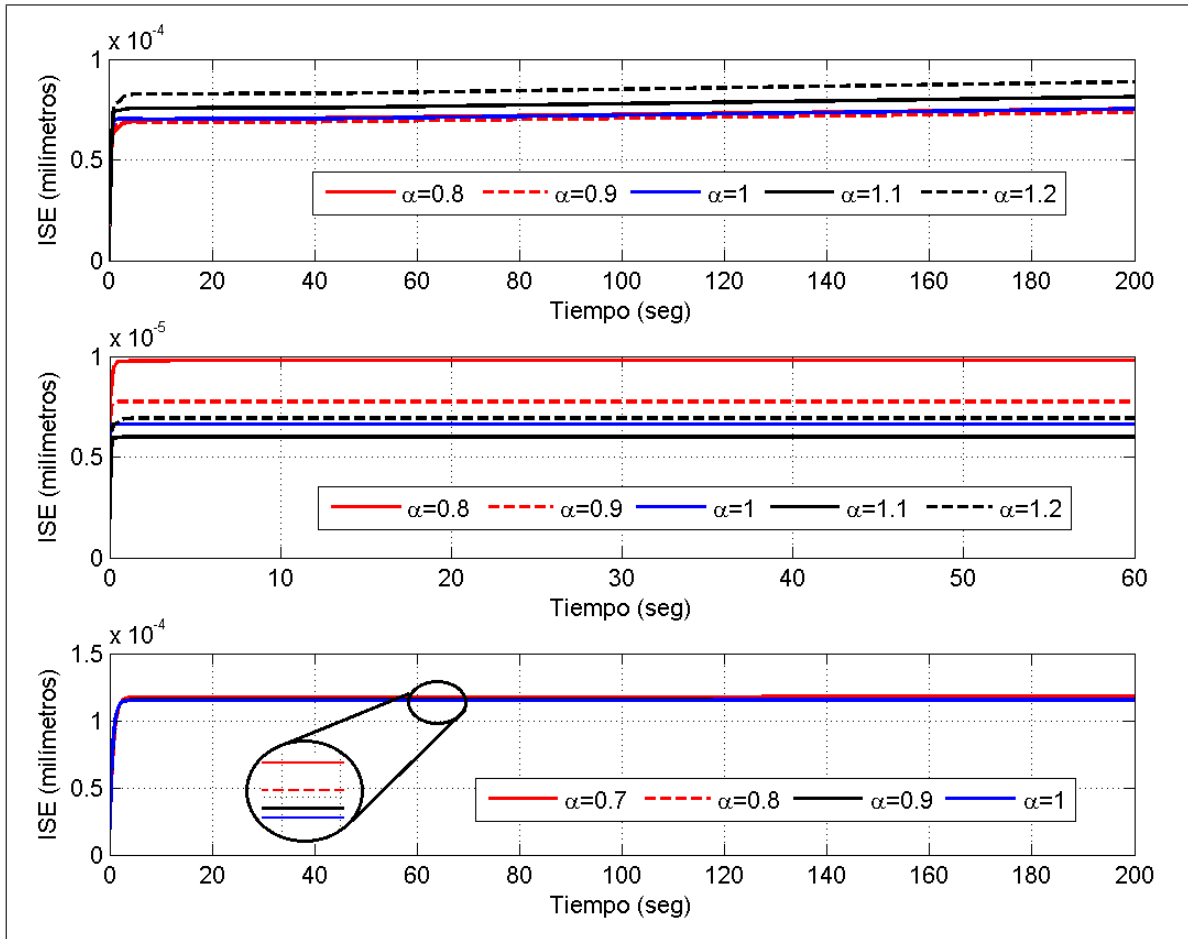


Figura 6.27: Integral entera del cuadrado del error, para cada una de las tres estrategias de control implementadas (Cancelación de no linealidad (arriba), Control por modo deslizante (centro) y FOPID (debajo)), cuando una perturbación senoidal afecta la salida del sistema.

se consideró el caso en que, una vez el sistema se estabiliza en  $15 \text{ mm}$ , se aplica una perturbación senoidal a la salida del sistema, de amplitud  $1 \text{ mm}$  y frecuencia  $\pi/2$ , específicamente en el instante de tiempo  $t = 60 \text{ s}$ . En el caso de cancelación de no linealidad se utilizaron los parámetros  $c_1 = c_3 = 15$ ,  $c_2 = 8$ , mientras que en el caso del FOPID se utilizaron los parámetros dados en (6.18). En el caso del controlador por modo deslizante se utilizó  $k_1 = \beta = 25$ .

Para evaluar el desempeño del sistema controlado frente a esta perturbación, se graficó la integral del error cuadrático (ISE), para cada una de las tres estrategias de control utilizadas y para todos los órdenes de derivación utilizados en el observador de estado, como se muestra en la Figura 6.27.

Como puede apreciarse, en el caso en que se utiliza cancelación de no linealidad más localización de polos (gráfico superior), el menor ISE se obtiene cuando el orden de derivación utilizado en el observador de estado es  $\alpha = 0,8$ , y este índice va aumentando en la medida que el orden de derivación aumenta.

En el caso del control por modo deslizante (gráfico central), el menor ISE se obtiene para el caso  $\alpha = 1,1$ . En este caso, es interesante notar que el aumento del ISE no coincide con el



aumento del  $\alpha$  como en el caso anterior, siendo muy difícil establecer una relación entre estos dos elementos.

Finalmente en el caso del FOPID, el menor ISE se obtiene para el caso en que se usa el observador clásico, es decir con  $\alpha = 1$ .

De este simple análisis puede deducirse, que la introducción de los operadores fraccionarios en las estrategias de control clásicas puede efectivamente ofrecer ventajas sobre los esquemas clásicos correspondientes, cuando los sistemas se encuentran afectados por perturbaciones externas. No obstante, es importante mencionar que el orden fraccionario más adecuado o aquel con el cual se obtienen más beneficios, puede depender no solamente del sistema específico que se desea controlar, sino también de la estrategia de control aplicada.

### **6.2.8. Conclusiones sobre las estrategias de control para la aplicación de levitación magnética**

En general, las tres estrategias resultaron con un buen desempeño para la regulación de la posición del anillo en un valor fijo cercano a su punto de equilibrio, y para el seguimiento de trayectorias formadas por una secuencia de referencias tipo escalón, aún cuando el sistema MagLev es altamente no lineal. En el seguimiento de trayectorias senoidales centradas en el punto de equilibrio del sistema, se obtuvo un error de régimen permanente en todos los casos, aunque se expusieron las formas de disminuir su magnitud. El desempeño del sistema controlado cuando una perturbación senoidal se aplica a la salida, mostró que efectivamente el uso de operadores fraccionarios puede resultar una herramienta útil en estas situaciones. Los resultados obtenidos motivan llevar a cabo la realización de estos esquemas en el sistema real.

# Conclusiones y trabajo futuro

En la presente Tesis Doctoral se analizó la estabilidad, convergencia y desempeño de los esquemas adaptables de orden fraccionario, utilizando el enfoque de los modelos de error. Con la incorporación de los operadores fraccionarios a los esquemas adaptables, han surgido cuatro modelos de error fraccionarios, todos los cuales fueron estudiados en este trabajo, para el caso en que el orden de derivación está en el intervalo  $(0, 1]$ .

La primera conclusión que se desprende de este trabajo, es que los cuatro modelos de error analizados resultaron ser estables. Este resultado fue observado mediante estudios por simulación primero y también demostrado analíticamente. La demostración analítica de estabilidad fue realizada utilizando desarrollos matemáticos propios, que fueron generados en forma de lemas, cuya aplicación permitió demostrar que todos los modelos de error son Lyapunov estables. En el caso de los Modelos de Error Fraccionarios 1 y 4, la demostración abarcó todos los casos en que el orden de derivación se encuentra en el intervalo  $(0, 1]$ , mientras que en el caso de los Modelos de Error Fraccionarios 2 y 3, la demostración se realizó para el caso en que la dinámica del error de salida y del error paramétrico (o ley de ajuste) son del mismo orden. El caso en que la dinámica del error de salida y del error paramétrico tienen diferentes órdenes, constituye parte del trabajo futuro a realizar en esta línea de investigación.

Respecto de la convergencia a cero del error de salida y del error paramétrico, en los modelos de error fraccionarios estudiados las conclusiones obtenidas de este trabajo fueron parciales, pues en general son resultado de observaciones realizadas en los estudios por simulación, pero para las cuales no se tiene aún respaldo analítico.

De estos estudios por simulación se observó que el error de salida converge a cero para casi todas las señales de entrada acotadas utilizadas, ya que se realizaron simulaciones utilizando determinado tipo de señales de entrada con características especiales (Caso 4 en los estudios por simulaciones), para los cuales fue imposible establecer conclusiones categóricas sobre la convergencia de este error. No obstante las dificultades analíticas, se logró establecer analíticamente la convergencia a cero del error de salida para algunos casos particulares en el Modelo de Error Fraccionario 1 escalar. Debido a que el análisis de la convergencia a cero del error de salida se considera de gran importancia en el estudio de los modelos de error fraccionarios, definitivamente este tema forma parte del trabajo futuro a desarrollar en esta línea.

En cuanto a la convergencia del error paramétrico, las características de la señal de entrada  $\omega(t)$  que garantizan su convergencia, conocidas como condiciones de excitación persistente, fueron también analizadas mediante los estudios por simulación. De este análisis se observó que estas condiciones parecen estar relacionadas con la densidad espectral de la señal  $\omega(t)$  en relación al número de parámetros que se desea hacer converger dentro del esquema, algo similar a lo que ocurre en el caso clásico. No obstante, estos resultados son solamente observaciones que no poseen aún respaldo analítico, siendo este tema también parte del trabajo futuro a desarrollar, donde debiera apuntarse a introducir el concepto de excitación persistente fraccionario.

Otra de las principales conclusiones de este trabajo investigativo está relacionada con la velocidad de convergencia de los errores y también con las características de la respuesta transitoria

de éstos, en función del orden de derivación utilizado. En general, para los cuatro modelos de error se observó en los estudios por simulación que el caso clásico, o sea  $\alpha = 1$ , es usualmente el de más rápida convergencia en el intervalo estudiado. Sin embargo, los casos fraccionarios presentan comportamientos transitorios más suaves. Esto implica, por ejemplo en los esquemas de control, que la señal de control aplicada también sea más suave, siendo esta una ventaja cuando se utilizan esquemas adaptables para aplicaciones donde se requiere controles "suaves". Del mismo modo, se ha podido concluir que estos comportamientos transitorios más suaves pueden lograr respuestas sobreamortiguadas (sin sobrepaso) en el caso fraccionario, y que sería imposible obtener en el caso entero, bajo las mismas condiciones de operación. Estas observaciones fueron corroboradas en las aplicaciones que se desarrollaron como parte de esta Tesis Doctoral, y que fueron reportadas en el Capítulo 6.

Respecto de las aplicaciones desarrolladas a nivel de simulaciones en este trabajo, en ellas se abordó el problema de seleccionar el orden de derivación y las ganancias adaptables óptimas para los problemas estudiados. Como conclusión sobre este tema, se pudo observar que los valores óptimos de estos parámetros dependen de la aplicación específica que se realiza, así como de los requerimientos que se tienen en cuenta al momento de diseñar el esquema adaptable. En estas aplicaciones en particular, se realizaron procesos de optimización fuera de línea, donde se obtuvieron los valores óptimos para estos parámetros de diseño, usando funciones objetivo que tomaban en cuenta y ponderaban adecuadamente las características que se consideraban importantes en el sistema controlado. Esta metodología resultó exitosa, y se recomienda su utilización siempre que sea posible al momento del diseño de esquemas adaptables fraccionarios.

Finalmente, es importante mencionar que los lemas generados como parte de esta Tesis Doctoral, no son solamente aplicables al análisis de estabilidad de los modelos de error fraccionarios estudiados en este trabajo, sino que además permiten utilizar funciones de Lyapunov cuadráticas para el análisis de estabilidad de sistemas fraccionarios generales, aplicando la extensión fraccionaria del método directo de Lyapunov. Este es un resultado extremadamente valioso, pues hasta el momento los intentos de aplicar la extensión fraccionaria del método directo de Lyapunov se habían restringido al uso de funciones de Lyapunov muy complejas y para nada generales, o bien al uso de la función cuadrática bajo condiciones altamente restrictivas para los sistemas. Por lo tanto, los lemas generados en esta Tesis Doctoral pueden ser considerados una poderosa herramienta para el análisis de estabilidad de sistemas fraccionarios, y por lo tanto uno de los principales logros de este trabajo investigativo.

# Resumen de publicaciones generadas durante el desarrollo de la Tesis

Esta página contiene el listado de todas las publicaciones generadas como resultado de este trabajo investigativo, tanto la participación en conferencias como las publicaciones en revistas, todas indexadas ISI.

## CONFERENCIAS

1. Duarte-Mermoud, M. A., & Aguila-Camacho, N. (2011). Fractional order adaptive control of simple systems. In Fifteenth Yale Workshop on Adaptive and Learning Systems (pp. 57–62). New Haven, United States.
2. Aguila-Camacho, N., & Duarte-Mermoud, M. A. (2012). Modelo de error 1 en control adaptable fraccionario: Resultados y retos. In XX Congreso de la Asociación Chilena de Control Automático. Santiago, Chile.
3. Duarte-Mermoud, M. A., & Aguila-Camacho, N. (2013). Some useful results in fractional adaptive control. In Sixteenth Yale Workshop on Adaptive and Learning Systems (pp. 51–56). New Haven, United States.
4. Aguila-Camacho, N., & Duarte-Mermoud, M. A. (2014b). Fractional error model 1 in adaptive systems. In International Conference on Fractional Differentiation and Applications. Catania, Italy.

## REVISTAS

1. Aguila-Camacho, N., & Duarte-Mermoud, M. A. (2013). Fractional adaptive control for an automatic voltage regulator. *ISA Transactions*, 52, 807 – 815.
2. Duarte-Mermoud, M. A., Aguila-Camacho, N., & Gallegos, J. (2013). Sufficient condition on the fractional integral for the convergence of a function. *The Scientific World Journal*, 2013, 1 – 4.
3. Aguila-Camacho, N., Duarte-Mermoud, M. A., & Gallegos, J. (2014). Lyapunov functions for fractional order systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19, 2951–2957.
4. Aguila-Camacho, N., & Duarte-Mermoud, M. A. (2014a). Error model 1 in fractional adaptive control: results and main challenges. *IEEE Latin America Transactions*, 12, 449 – 454.
5. Duarte-Mermoud, M. A., Aguila-Camacho, N., Gallegos, J., & Castro-Linares, R. (2014). Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* (Aceptado para publicación el 13 de octubre de 2014).

# Bibliografía

- Aghababa, M. (2011a). Comments on adaptive synchronization of fractional-order chaotic systems via a single driving variable. *Nonlinear Dynamics*, 66, 839 – 842.
- Aghababa, M. (2011b). Robust stabilization and synchronization of a class of fractional-order chaotic systems via a novel fractional sliding mode controller. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17, 2670 – 2681.
- Aguila-Camacho, N., & Duarte-Mermoud, M. A. (2012). Modelo de error 1 en control adaptable fraccionario: Resultados y retos. In *XX Congreso de la Asociación Chilena de Control Automático*. Santiago, Chile.
- Aguila-Camacho, N., & Duarte-Mermoud, M. A. (2013). Fractional adaptive control for an automatic voltage regulator. *ISA Transactions*, 52, 807 – 815.
- Aguila-Camacho, N., & Duarte-Mermoud, M. A. (2014). Error model 1 in fractional adaptive control: results and main challenges. *IEEE Latin America Transactions*, 12, 449 – 454.
- Assabaa, M., Charef, A., & Ladaci, S. (2013). Fractional adaptive high-gain control with sigma-modification. In *3rd International Conference on Systems and Control* (pp. 248 – 252). Algier, Algeria.
- Barry, N., & Casey, R. (1999). Elihu thomson's jumping ring in a levitated closed-loop control experiment. *IEEE Transactions on Education*, 42, 72–80.
- Bellman, R. (1997). *Introduction to matrix analysis*. (2nd ed.). Philadelphia, United States: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).
- Burton, T. A. (2011). Fractional differential equations and Lyapunov functionals. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 17, 5648 – 5662.
- Chambers, L. (1995). *Practical handbook of Genetic Algorithms applications*. CRC Press.
- Charef, A., Assabaa, M., Ladaci, S., & Loiseau, J. (2013a). Fractional order adaptive controller for stabilised systems via high-gain feedback. *IET Control Theory and Applications*, 7, 822 – 828.
- Charef, A., Idiou, D., Djouambi, A., & Voda, A. (2013b). Identification of linear fractional systems of commensurate order. In *3rd International Conference on Systems and Control* (pp. 259–264). Algier, Algeria.
- Chen, G. S. (2012). Mean value theorems for local fractional integrals on fractal space. *Advances in Mechanical Engineering and its Applications*, 1, 5 – 8.
- Chen, L., Chai, Y., & Wu, R. (2011). Lag projective synchronization in fractional-order chaotic (hyperchaotic) systems. *Physics Letters A*, 375, 2099 – 2110.
- Choi, S. K., & Koo, N. (2011). The monotonic property and stability of solutions of fractional differential equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 74, 6530 – 6536.

- Chun-Lai, L., Si-Min, Y., & Xiao-Shu, L. (2012). Fractional-order permanent magnet synchronous motor and its adaptive chaotic control. *Chinese Physics B*, 21, 1005061 – 1005066.
- Coelho, L. D. S., & de Meirelles Herrera, B. A. (2008). Quantum gaussian particle swarm optimization approach for pid controller design in avr system. In *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, 2008. SMC 2008*. (pp. 3708 –3713). Suntec, Singapore.
- Dadras, S., & Momeni, H. (2011). Fractional sliding mode observer design for a class of uncertain fractional order nonlinear systems. In *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)* (pp. 6925–6930). Orlando, United States.
- Dadras, S., & Momeni, H. (2012). Fractional terminal sliding mode control design for a class of dynamical systems with uncertainty. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17, 367 – 377.
- Dadras, S., & Momeni, H. R. (2010). Control of a fractional-order economical system via sliding mode. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 389, 2434 – 2442.
- Devaraj, D., & Selvabala, B. (2009). Real - coded genetic algorithm and fuzzy logic approach for real - time tuning of proportional - integral - derivative controller in automatic voltage regulator system. *IET Generation, Transmission and Distribution*, 3, 641–649.
- Diethelm, K. (2004). *The analysis of fractional differential equations*. Heidelberg, Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Djouambi, A., Voda, A., & Charef, A. (2011). Recursive prediction error identification of fractional order models. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17, 2517 – 2524.
- Duarte-Mermoud, M. A., & Aguila-Camacho, N. (2013). Some useful results in fractional adaptive control. In *Sixteenth Yale Workshop on Adaptive and Learning Systems* (pp. 51–56). New Haven, United States.
- Duarte-Mermoud, M. A., Aguila-Camacho, N., & Gallegos, J. (2013). Sufficient condition on the fractional integral for the convergence of a function. *The Scientific World Journal*, 2013, 1 – 4.
- Duarte-Mermoud, M. A., & Prieto, R. A. (2004). Performance index for quality response of dynamical systems. *ISA Transactions*, 43, 133 – 151.
- Figuigui, O. E., & Elalami, N. (2009). Application of fractional adaptive high-gain controller to a LEO (low earth orbit) satellite. In *International Conference on Computers Industrial Engineering, 2009*. (pp. 1850 –1856). Troyes, France.
- Fusco, G., & Russo, M. (2011). Nonlinear control design for excitation controller and power system stabilizer. *Control Engineering Practice*, 19, 243 – 251.
- Gabano, J. D., & Poinot, T. (2011). Fractional modelling and identification of thermal systems. *Signal Processing*, 91, 531 – 541.
- Gaing, Z. (2004). A particle swarm optimization approach for optimum design of PID controller in AVR system. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 19, 384 – 391.
- García, L. (2011). *Diseño, Construcción y Control de una Plataforma de Levitación Magnética Basado en Corriente Alterna*. Master's thesis , Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional de México. México DF, México.

- Haddad, W. M., & Chellaboina, V. (2008). *Nonlinear Dynamical Systems and Control*. New Jersey, United States: Princeton University Press.
- He, L. Y. W., & Liu, X. (2011). Synchronization between a fractional-order system and an integer order system. *Computers & Mathematics with Applications*, *62*, 4708 – 4716.
- Horn, R. A. (1990). *Matrix analysis*. New York, United States: Cambridge University Press.
- Hosseinnia, S. H., Ghaderi, R., Ranjbar, A., Mahmoudian, M., & Momani, S. (2010). Sliding mode synchronization of an uncertain fractional order chaotic system. *Computers & Mathematics with Applications*, *59*, 1637 – 1643.
- Ioannou, P., & Fidan, B. (2006). *Adaptive Control Tutorial*. Los Angeles, United States: SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Jiang, W., & Ma, T. (2013). Synchronization of a class of fractional-order chaotic systems via adaptive sliding mode control. In *2013 IEEE International Conference on Vehicular Electronics and Safety (ICVES)* (pp. 229–233). Dongguan, China.
- Kang, H. L., Kwon, M. W., & Bae, H. G. (2010). PID coefficient designs for the automatic voltage regulator using a new third order particle swarm optimization. In *2010 International Conference On Electronics and Information Engineering (ICEIE)* (pp. 179 –183). Kyoto, Japan.
- Kashki, M., Abdel-Magid, Y., & Abido, M. (2008). A reinforcement learning automata optimization approach for optimum tuning of PID controller in AVR system. In *Advanced Intelligent Computing Theories and Applications With Aspects of Artificial Intelligence* (pp. 684–692). Springer Berlin / Heidelberg.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*. (3rd ed.). New Jersey, United States: Prentice Hall.
- Kilbas, A., Srivastava, H., & Trujillo, J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations*. (1st ed.). Amsterdam, The Netherlands: Elsevier.
- Kundur, P. (1994). *Power system stability and control*. New York, United States: New York: McGraw-Hill.
- Ladaci, S., & Charef, A. (2006). On fractional adaptive control. *Nonlinear Dynamics*, *43*, 365 – 378.
- Ladaci, S., Loiseau, J., & Charef, A. (2006). Using fractional order filter in adaptive control of noisy plants. In *Third International Conference on Advances in Mechanical Engineering and Mechanics*. Hammamet, Tunisia,.
- Ladaci, S., Loiseau, J. J., & Charef, A. (2008). Fractional order adaptive high-gain controllers for a class of linear systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, *13*, 707 – 714.
- Ladaci, S., Loiseau, J. J., & Charef, A. (2010). Adaptive internal model control with fractional order parameter. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, *24*, 944 – 960.
- Lakshmikantham, V., Leela, S., & Devi, S. J. V. (2009). *Theory of Fractional Dynamic Systems*. (1st ed.). Cambridge, UK: Cambridge Scientific Publishers.
- Lakshmikantham, V., Leela, S., & Sambandham, M. (2008). Lyapunov theory for fractional differential equations. *Communications in Applied Analysis*, *12*, 365 – 376.

- Lan, Y., Gu, H., Chen, C. C., Zhou, Y., & Luo, Y. (2014). An indirect Lyapunov approach to the observer-based robust control for fractional-order complex dynamic networks. *Neurocomputing*, 136, 235 – 242.
- Land, Y. H., & Zhou, Y. (2011). LMI-based robust control of fractional-order uncertain linear systems. *Computers & Mathematics with Applications*, 62, 1460 – 1471.
- Li, C., Su, K., & Wu, L. (2013). Adaptive sliding mode control for synchronization of a fractional-order chaotic system. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 8, 310051 – 310057.
- Li, Y., Chen, Y. Q., & Cao, Y. (2008). Fractional order universal adaptive stabilization. In *3rd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications*. Ankara, Turkey.
- Li, Y., Chen, Y. Q., & Podlubny, I. (2010). Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag Leffler stability. *Computers & Mathematics with Applications*, 59, 1810 – 1821.
- Lin, J., Poinot, T., Trigeassou, J. C., Kabbaj, H., & Faucher, J. (2000). Modélisation et identification d ordre non entiere d une machine asynchrone. In *Conférence Internationale Francophone d Automatique*. Lille, France.
- Ling, T., Lee, T., & Balas, V. E. (2011). Adaptive fuzzy sliding mode control for synchronization of uncertain fractional order chaotic systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 44, 791 – 801.
- Liu, J., Huang, L., & Meng, Y. (2013). Adaptive synchronization of fractional-order complex networks via pinning control. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 27, 1086–1096.
- Luo, J., & Liu, H. (2014). Adaptive fractional fuzzy sliding mode control for multivariable nonlinear systems. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2014, 1 – 10.
- Ma, J., Yao, Y., & Liu, D. (2009). Fractional order model reference adaptive control for a hydraulic driven flight motion simulator. In *41st Southeastern Symposium on System Theory* (pp. 340 –343). Tullahoma, United States.
- Matignon, D. (1994). *Représentations en variables d état de modèles de guides d ondes avec dérivation fractionnaire*. Ph.D. thesis Université Paris.
- Narendra, K. S., & Annaswamy, A. M. (1985). A general approach to the stability analysis of adaptive systems. *International Journal of Control*, 41, 193 – 216.
- Narendra, K. S., & Annaswamy, A. M. (2005). *Stable Adaptive Systems*. New York, United States: Dover Publications Inc.
- Ndoye, I., Voos, H., Darouach, M., Schenider, J., & Knauf, N. (2012). An unknown input fractional-order observer design for fractional-order glucose-insulin system. In *2012 IEEE International Conference on Biomedical Engineering and Sciences EMBS* (pp. 595–600). Langkawi, Malasia.
- N'doye, I., Zasadzinski, M., Darouach, M., & Radhy, N. E. (2009). Observer-based control for fractional-order continuous-time systems. In *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference*. (pp. 1932 –1937). Shanghai, China.
- Ogata, K. (2009). *Modern Control Engineering*. (5th ed.). New Jersey, United States: Prentice Hall.



- Onder, M. (2008). Fractional fuzzy adaptive sliding-mode control of a 2-dof direct-drive robot arm. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics - Part B*, 38, 1561 – 1570.
- Oonsivilai, A., & Pao-La-Or, P. (2008). Optimum PID controller tuning for AVR system using adaptive tabu search. In *12th WSEAS International Conference on COMPUTERS* (pp. 987–992). Heraklion, Greece.
- Petrás, I. (2013). An adaptive fractional-order controller. In *14th International Carpathian Control Conference (ICCC)* (pp. 297–301). Rytro, Poland.
- Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations*. San Diego, United States: Academic Press.
- Popov, V. M. (1973). *Hyperstability of control systems*. Berlin, Germany: Springer-Verlag.
- Rahimian, M., & Raahemifar, K. (2011). Optimal PID controller design for AVR system using particle swarm optimization algorithm. In *24th Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering (CCECE), 2011* (pp. 337–340). Niagara Falls, Canada.
- Rapaić, M., & Pisano, A. (2014). Variable-order fractional operators for adaptive order and parameter estimation. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 59, 798 – 803.
- Reza, M., & Delavari, H. (2012). Chaos in fractional-order genesio-tesi system and its synchronization. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17, 731 – 741.
- Ruo-Xun, Z., & Shi-Ping, Y. (2012). A single adaptive controller with one variable for synchronization of fractional-order chaotic systems. *Chinese Physics B*, 21, 805051 – 805057.
- Sabatier, J., Aoun, M., Oustaloup, A., Grégoire, G., Ragot, F., & Roy, P. (2006). Fractional system identification for lead acid battery state of charge estimation. *Signal Processing*, 86, 2645 – 2657.
- Samko, S. G., Kilbas, A., & Marichev, O. I. (1993). *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. Amsterdam, The Netherlands: Gordon and Breach Science Publishers.
- Sawai, K., Takamatsu, T., & Ohmori, H. (2012). Adaptive control law using fractional calculus systems. In *SICE Annual Conference* (pp. 1502–1505). Akita, Japan.
- Senejohnny, D., & Delavari, H. (2012). Active sliding observer scheme based fractional chaos synchronization. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17, 4373 – 4383.
- Shi, B., Yuan, J., & Dong, C. (2014). On fractional model reference adaptive control. *The Scientific World Journal*, 2014, 1 – 10.
- Shyama, T. R., Kumar, R. S., & Shanmugasundaram, V. (2012). Design of FGSPi controller based combined LFC and AVR of two area interconnected power generating system. *International Journal of Engineering and Advanced Technology (IJEAT)*, 1, 135–139.
- Slotine, J.-J. E. (1991). *Applied Nonlinear Control*. New Jersey, United States: Prentice Hall.
- Suárez, J., Vinagre, B. M., & Chen, Y. Q. (2008). A fractional adaptation scheme for lateral control of an AGV. *Journal of Vibration and Control*, 14 (9-10), 1499–1511.
- Tao, G. (2003). *Adaptive Control Design and Analysis*. New Jersey, United States: John Wiley & Sons Inc.

- Valério, D., & da Costa, J. (2012). Variable order fractional controllers. *Asian Journal of Control*, 15, 648 – 657.
- Valério, D., & Costa, J. S. D. (2004). Ninteger: a non-integer control toolbox for matlab. In *Fractional Derivatives and Applications*. IFAC. Bordeaux, France.
- Valizadeh, S., Jamali, M.-R., & Lucas, C. (2008). A particle-swarm-based approach for optimum design of BELBIC controller in AVR system. In *International Conference on Control, Automation and Systems, 2008. ICCAS 2008*. (pp. 2679 –2684). Seoul, South Korea.
- Vinagre, B. M. (2001). *Modelado y Control de Sistemas Dinámicos caracterizados por Ecuaciones Integro-Diferenciales de Orden Fraccionario*. Ph.D. thesis , Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y de Control, Escuela Superior de Ingenieros Industriales, Universidad Nacional de Educación a Distancia, España.
- Vinagre, B. M., Petrás, I., Podlubny, I., & Chen, Y. Q. (2002). Using fractional order adjustment rules and fractional order reference models in model-reference adaptive control. *Nonlinear Dynamics*, 29, 269 – 279.
- Von-Borries, M. (2012). *Estudio y Simulación de Sistemas Adaptables Fraccionarios*. Master's thesis , Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Chile, Santiago, Chile.
- Wang, Z., Huang, X., & Shen, H. (2012). Control of an uncertain fractional order economic system via adaptive sliding mode. *Neurocomputing*, 83, 83–88.
- Xi, H., Yu, S., Zhang, R., & Xu, L. (2014). Adaptive impulsive synchronization for a class of fractional-order chaotic and hyperchaotic systems. *Optik*, 125, 2036–2040.
- Xiaomei, Y., Ting, S., & Xiaoguo, Z. (2013). Synchronization of fractional-order chaotic systems based on the fractional-order sliding mode controller. In *32nd Chinese Control Conference* (pp. 429–434). Xian, China.
- YaLi, H., & RuiKun, G. (2010). Application of fractional-order model reference adaptive control on industry boiler burning system. In *International Conference on Intelligent Computation Technology and Automation (ICICTA)* (pp. 750 –753). Changsha, China.
- Yang, L., & Jiang, J. (2014). Adaptive synchronization of drive-response fractional-order complex dynamical networks with uncertain parameters. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19, 1496 – 1506.
- Yang, N., & Liu, C. (2013). A novel fractional-order hyperchaotic system stabilization via fractional sliding-mode control. *Nonlinear Dynamics*, 74, 721 – 732.
- Yin, C., Chen, Y., & Zhong, S. (2013). LMI based design of a sliding mode controller for a class of uncertain fractional-order nonlinear systems. In *2013 American Control Conference (ACC)* (pp. 6511–6516). Washington, United States.
- Yin, C., Zhong, S., & Chen, W. (2012a). Design of sliding mode controller for a class of fractional-order chaotic systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17, 356 – 366.
- Yin, C., Zhong, S., & Chen, W. (2012b). Design of sliding mode controller for a class of fractional-order chaotic systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17, 356 – 366.

Zamani, M., Karimi-Ghartemani, M., Sadati, N., & Parniani, M. (2009). Design of a fractional order PID controller for an AVR using particle swarm optimization. *Control Engineering Practice*, 17, 1380 – 1387.