



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

**SOLUCIÓN DE ALGUNOS PROBLEMAS DE VALOR DE  
FRONTERA PARA UN NUEVO TIPO DE ECUACIÓN  
CONSTITUTIVA CONSIDERANDO PEQUEÑAS  
DEFORMACIONES Y COMPORTAMIENTO NO LINEAL  
DE SÓLIDO**

---

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA MENCIÓN MECÁNICA**

**MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL  
MECÁNICO**

PATRICIO ANDRÉS ARRUÉ CORNEJO

PROFESOR GUÍA:  
ROGER BUSTAMANTE PLAZA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
ALEJANDRO ORTIZ BERNARDÍN  
WILLIAMS CALDERÓN MUÑOZ

PROYECTO FINANCIADO POR FONDECYT #1120011

SANTIAGO DE CHILE  
2014

## Resumen

En mecánica de medios continuos se estudian distintas relaciones entre esfuerzos y deformaciones que son usualmente denominadas ecuaciones constitutivas. Las ecuaciones constitutivas clásicas para la elasticidad no lineal son las de los sólidos elásticos de Cauchy y de Green, que se muestran en las ecuaciones *i. 1*, en dónde  $\mathbf{S}$  es el tensor de esfuerzos nominal,  $\mathbf{F}$  es el gradiente de deformación,  $W$  es la energía de deformación y  $\mathbf{g}$  es un funcional.

$$\mathbf{S} = \mathbf{g}(\mathbf{F}), \quad \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} = \mathbf{S}. \quad i. 1$$

El tema de investigación de esta tesis se enfoca en estudiar un nuevo tipo de ecuación constitutiva que ha sido desarrollada recientemente. A diferencia de las ecuaciones *i. 1*, el nuevo tipo de ecuación constitutiva se basa en escribir la deformación en función de los esfuerzos. Este tipo de ecuación permite, entre otras cosas, el análisis de materiales en los cuales puede suceder que los esfuerzos se eleven en grandes magnitudes pero no así la deformación. La ecuación *i. 2* muestra la relación, en dónde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es el tensor de deformación caso lineal (infinitesimal),  $\mathbf{T}$  es el tensor de esfuerzos de Cauchy y  $\mathbf{f}$  es un funcional:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{f}(\mathbf{T}). \quad i. 2$$

La presente tesis se centra en el estudio de dicha ecuación en dos áreas de investigación.

Primero se estudia un caso simplificado de *i. 2* para el cual se tiene un comportamiento “bilineal”, en dónde la relación entre  $\boldsymbol{\varepsilon}$  y  $\mathbf{T}$  es lineal por tramos. Interesa en particular que el segundo tramo sea tal que el incremento en  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es muy pequeño, para grandes variaciones de  $\mathbf{T}$ . Considerando dicha forma simplificada para  $\mathbf{f}(\mathbf{T})$ , se resuelven varios problemas de valor de frontera de forma exacta y “semi-exacta”.

En segundo lugar se realiza un análisis de estabilidad (inestabilidad) para un medio semi-infinito considerando la ecuación constitutiva *i. 2*, y una expresión para  $\mathbf{f}$  que muestre un límite para la deformación.

Los resultados obtenidos para los problemas de valor de frontera y el análisis de estabilidad elástica se comparan con resultados conocidos de la teoría de la elasticidad lineal.

# Abstract

The classic constitutive equations used in nonlinear elasticity are the Cauchy and Green's elastic constitutive equations i.1, as shown below, where  $\mathbf{S}$  is the nominal stress tensor,  $\mathbf{F}$  is the strain gradient,  $W$  is the strain energy and  $\mathbf{g}$  is a functional respectively.

$$\mathbf{S} = \mathbf{g}(\mathbf{F}), \quad \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} = \mathbf{S}. \quad i.1$$

This thesis is on some new constitutive equations i.2, which have been developed on the recent years. Where the main characteristic is that the linearized strains tensor is assumed to be a nonlinear function of the stresses. This allows the analysis of materials in which the stresses can be very large, but strains remain bounded and small. The equation below shows such a relation where  $\boldsymbol{\varepsilon}$  is the linearized strain tensor,  $\mathbf{T}$  is the Cauchy's strain tensor and  $\mathbf{f}$  is a functional:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{f}(\mathbf{T}). \quad i.2$$

This research focuses on the study of equation i.2.

First is studied a particular case of i.2 where have exist a bilinear behavior, where the  $\boldsymbol{\varepsilon}$ - $\mathbf{T}$  relation is piecewise linear and the increase on  $\boldsymbol{\varepsilon}$  is very small, for large increases of  $\mathbf{T}$ . Considering that simplified form for  $\mathbf{f}(\mathbf{T})$ , some boundaries value problems are solved exactly and "semi-exactly".

The second study is an analysis of stability (instability) for a semi-infinite medium considering the constitutive equation i.2, and an expression for  $\mathbf{f}$  that shows a limit for the strain.

The results obtained for the boundary value problems and the elastic stability analysis are compared with well-known solutions from the linear elasticity theory.

## Dedicatoria

*“¿No lo oyes? ¡Si el ruido lo llena todo! Tañido  
creciente, como una campana. Oigo los nombres  
de todos los aventureros perdidos, mis iguales, de  
cómo uno era muy fuerte, el otro valiente  
y afortunado un tercero, pero, todos ellos, ¡perdidos!  
Tocaba a difuntos por la tristeza de años.*

*Allí estaban, en laderas apostados,  
reunidos para contemplar mi final, ¡un marco  
viviente para un último cuadro! En un lienzo de llamas  
los vi y los conocí a todos. Sin embargo,  
valeroso, me llevé el cuerno a los labios  
y soplé.”*

Childe Roland a la torre oscura llegó.  
Robert Browning



A mis difuntos, aquellos momentos que no volverán.  
A aquellos que cruzaron mi camino hacia la torre.

No he olvidado el rostro de mis padres.

## Agradecimientos

Por orden cronológico, agradezco la crianza increíble que me dieron: Mi madre, una mujer llena de coraje que me entregó su virtud de perseverancia y de mostrar garras y dientes por los míos; Mi padre, que es el ícono de dar todo por los suyos, y que aún hoy cruza una ciudad entera para entregarnos un buen pasar; Mi abuela, que me entregó su aliento de vida y presagió que llegaría más allá que la esquina del barrio; Mi madrina y su familia, que me asistió desde la básica con los cuadernos y hasta hoy con su afecto. A todos que llevan mi sangre y me enseñaron, que cambiaron el destino entre lograr dar este paso con uno que pudo ser muy sombrío. Y de muy seguido a mis hermanas (aunque difíciles, son una de mis motivaciones) y a mi tío científico loco que me inspiro para crear. A todos, su amor lo fue y es todo.

Doy gracias a los maestros mentores que me siguieron guiando, empezando por Sergio Riveros (mi segundo padre), Gabriel (un viento que hizo cuestionarme la vida misma), Miguel Ángel Huerta (un chamán que me presento el camino del conocimiento, y su mundo lleno de vida) y Patricio Arturo González Díaz (que me dio un gigante empujón para estudiar lo que quería, además de conocimiento muy apreciado). Y en general a todos mis maestros, pues estoy compuesto estructuralmente por todos ellos.

A mis amigos: Los del barrio que me hicieron adquirir una unión potentísima de hermandad en vez de malos hábitos, que hasta ahora son parte de mí, y sin ellos este tiempo de carrera hubiese sido una tortura (en especial a Daniel, Gabriel, Francisco, José y Diego); Los que he conocido azarosamente y se quedaron; Los que conocí en la U y se quedaron (en especial a mi *yunta* que dio este paso recientemente); A mis colegas de carrera que siempre los admiré por sus diversas virtudes increíbles; A los *SDM* (soldados del metal) que son amigos de verdad y tenemos caminos e ideales similares; A todos, porque estoy compuesto por todos ellos.

Agradezco al profesor Roger Bustamante Plaza, por motivarme al área de mecánica de sólidos y de mostrarme el mundo de la investigación a través de este proceso de tesis, tan frustrante como gratificante pueda llegar a ser. Un profesor guía excelente y de muy buena disposición.

También doy gracias a los autores de los libros que leí en este proceso. Los mundos que visité llenaron lo que le faltaba al mundo real. También a modo de apuesta a Turboman y el príncipe Charles que hicieron unos históricos golazos en el mundial frente a España. Fue una muy buena noche.

Un agradecimiento a CONICYT y el proyecto CONICYT-PCHA/Magíster Nacional/2013 – 221320577 por su aporte en el financiamiento otorgado en el período de realización de la presente tesis.

# Tabla de contenido

Resumen .....	i
Abstract.....	ii
Dedicatoria.....	iii
Agradecimientos .....	iv
1. Introducción .....	1
2. Antecedentes .....	2
2.1. Definiciones .....	2
2.2. Teoría constitutiva .....	5
3.1. Modelo constitutivo .....	7
3.2. Problemas unidimensionales.....	8
3.2.1. Tubo de sección circular bajo el efecto de presión interna y extensión .....	8
3.2.2. Esfera bajo el efecto de presión interna.....	23
3.2.3. Tubo de sección circular bajo el efecto de presión interna y corte longitudinal	33
3.2.4. Tubo de sección circular bajo el efecto de presión interna, torsión de manto interno y alargamiento .....	41
3.3. Problema bidimensional: Solución parcial del problema de la placa .....	50
4. Estudio de estabilidad e inestabilidad elástica para la ecuación constitutiva $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{T})$ para medio semi-infinito considerando esfuerzo plano .....	68
5. Conclusión.....	84
6. Bibliografía.....	90
7. Anexos.....	92
7.1. Método de Newton- Rhapsion .....	92
7.2. Método de Newton-Broyden de paso reducido .....	95
7.3. Método de Magnus para ecuaciones diferenciales ordinarias homogéneas.....	98
7.4. Método de Magnus para ecuaciones diferenciales ordinarias no-homogéneas .....	99
7.5. Resolución del problema clásico bidimensional de placa plana con agujero circular bajo el efecto de carga uniforme de tracción aplicada lejos del mismo .....	100
7.6. Códigos de programación utilizados.....	103
7.6.1. Problema 3.2.1 .....	103
7.6.2. Problema 3.2.2.....	104
7.6.3. Problema 3.2.3 y Método de Newton-Broyden.....	105

7.6.4.	Problema 3.3.....	111
7.6.5.	Problema del anexo 6.5 .....	129
7.6.6.	Problema 4.....	133

# 1. Introducción

Existen dos conceptos base en la mecánica de sólidos: el esfuerzo que es la cantidad efectiva de carga por unidad de área, y la deformación o porcentaje de desplazamiento de las partículas del cuerpo con respecto a la configuración de referencia.

La capacidad de presentar una nula (o despreciable) disipación cuando un cuerpo es deformado es conocida como la elasticidad. Desde el siglo XVII se ha investigado sobre este concepto [1], desarrollando teorías para determinar la “respuesta elástica” de los cuerpos. Se han generado muchos modelos matemáticos que intentan predecir la mencionada respuesta, entre estos destacan el de cuerpo elástico de Green o hiperelástico y el de cuerpo elástico de Cauchy mostrados en la ecuación 1.1, en dónde  $\mathbf{S}$  es el segundo tensor de Piola-Kirschhoff,  $\mathbf{F}$  es el gradiente de deformación,  $\mathbf{h}$  es un funcional y  $W$  es la energía de deformación:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{h}(\mathbf{F}). \quad 1.1$$

Los modelos anteriores han sido usados para estudiar problemas considerando tanto grandes deformaciones como infinitesimalmente pequeñas. Sin embargo, hay una serie de problemas en estas teorías en cuánto a los resultados en ciertas aplicaciones.

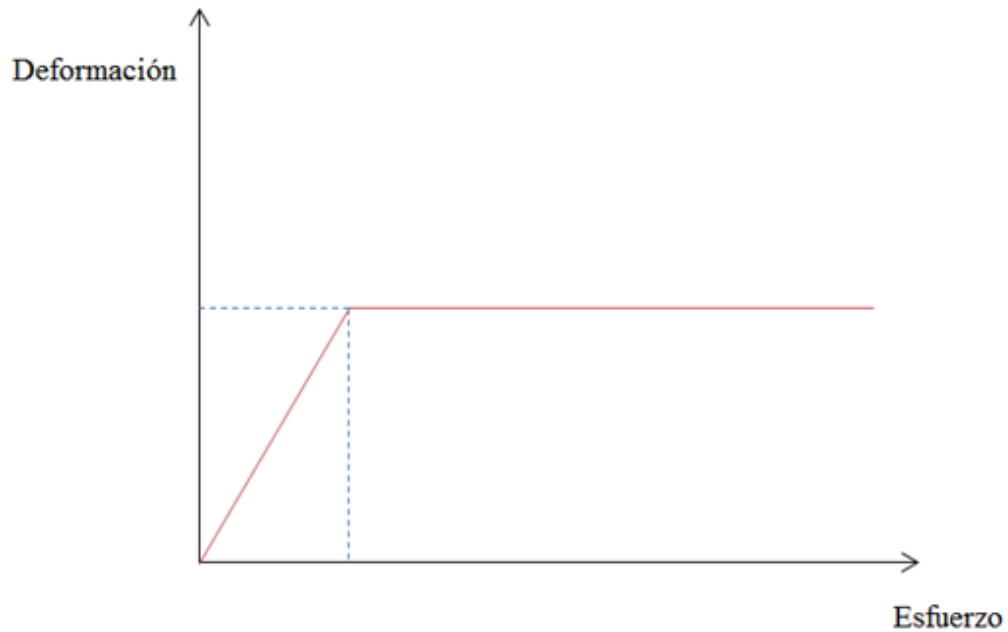
Rajagopal [2] ha desarrollado un nuevo tipo de relación en el contexto de modelos implícitos, que incluye modelos que son capaces de mostrar cargas muy elevadas a la vez que mantienen las deformaciones pequeñas y acotadas. Una subclase de dichas relaciones, desarrollada por Bustamante [3] (que se estudia en esta tesis), es la ecuación 1.2:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{T}}. \quad 1.2$$

La diferencia sustancial entre estos modelos y las ecuaciones 1.1, es que es la deformación está en función del esfuerzo, lo que permite que un material en el límite se comporta soportando esfuerzo infinito a una deformación finita y pequeña (Véase figura 1.1 [4]).

En base a esta ecuación se han hecho estudios de aplicación a problemas clásicos de mecánica de sólidos [5, 6, 7, 8], e incluso estudios mediante métodos numéricos como elementos finitos [9].





*Figura 1.1: Curva deformación- esfuerzo para un material que presenta límite para las deformaciones. En la teoría clásica en donde se asume  $\mathbf{T} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon})$  no es posible expresar de ninguna forma este comportamiento para  $\mathbf{f}$ .*

## 2. Antecedentes

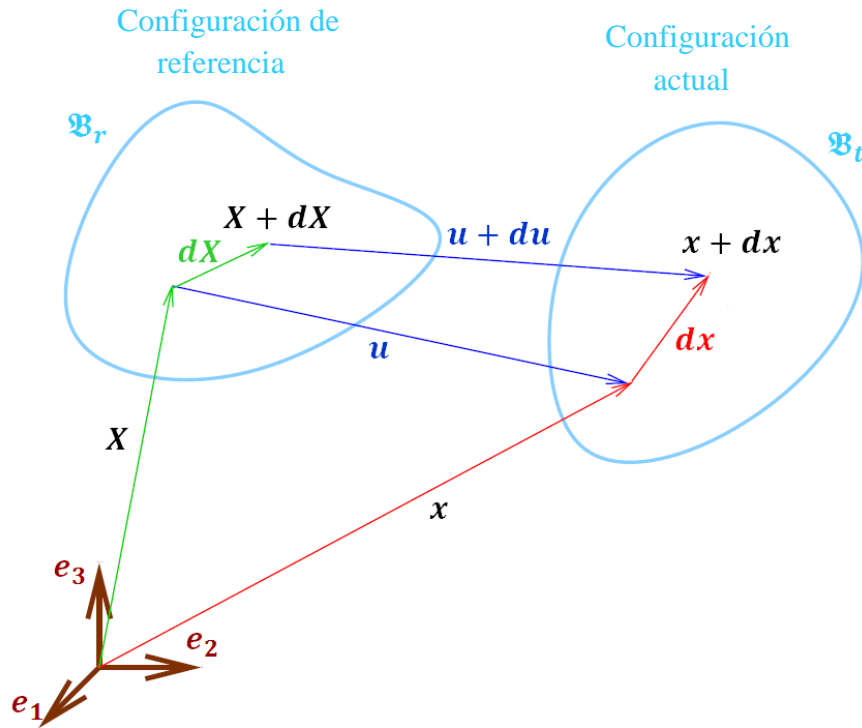
K.R. Rajagopal y sus colaboradores han propuesto modelos constitutivos para sólidos elásticos que no corresponden o no se pueden clasificar en modelos de Cauchy o de Green. Algunas subclases de dichos modelos de materiales permiten que existan esfuerzos enormes y deformaciones pequeñas, permitiendo además una relación no lineal entre éstos.

### 2.1. Definiciones

Sea  $\mathbf{X}$  el vector que muestra la posición de una partícula del cuerpo en el estado inicial o de referencia  $\mathfrak{B}_r$  y  $\mathbf{x}$  el de la posición de la misma partícula del cuerpo en un instante posterior  $t$  llamada configuración actual  $\mathfrak{B}_t$ . Sea además  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$  la relación que denota el movimiento de la partícula. Se define  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{F}$  como el campo de desplazamientos y el tensor gradiente de deformación como:

$$\mathbf{u} := \mathbf{x} - \mathbf{X}, \quad \mathbf{F} := \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{X}}. \quad 2.1$$

A partir del gradiente de deformación se definen los tensores de deformación de Cauchy-Green derecho e izquierdo en las ecuaciones 2.2:



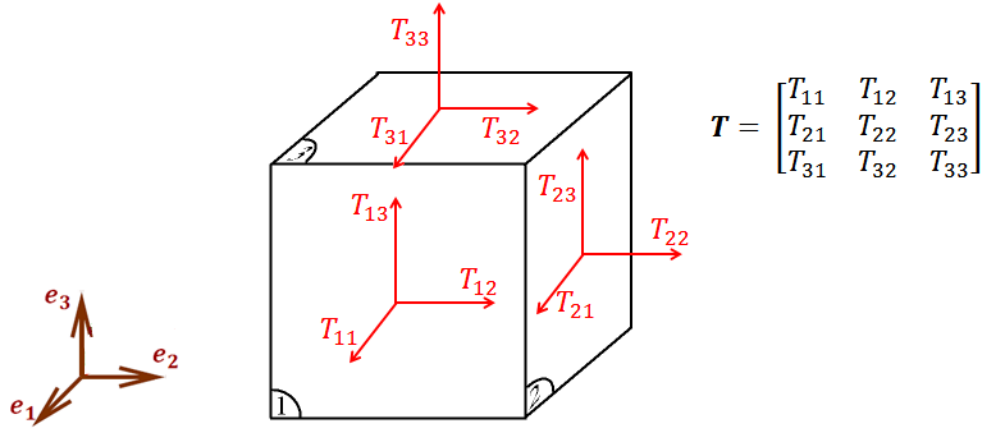
**Figura 2.1:** Esquema de las definiciones del movimiento en las configuraciones de referencia y actual.

$$\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad \mathbf{B} := \mathbf{F} \mathbf{F}^T. \quad 2.2$$

Se definen además el tensor de deformación de Green-Saint Venant y el de deformación infinitesimal, respectivamente, como:

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{1}), \quad \boldsymbol{\varepsilon} := \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]. \quad 2.3$$

En la figura 2.2 se tiene una representación esquemática del tensor de esfuerzos de Cauchy, en coordenadas Cartesianas.



**Figura 2.2:** Esquema del tensor de esfuerzos de Cauchy.

El tensor de esfuerzos de Cauchy debe satisfacer la ecuación de equilibrio en el caso de no considerar fuerzas de cuerpo ni el efecto del tiempo, mostrada en 2.4.

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = 0. \quad 2.4$$

Para el caso de coordenadas cilíndricas, en donde se tienen las coordenadas  $r$ ,  $\theta$  y  $z$ , la ecuación de equilibrio [10] queda como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (T_{rr} - T_{\theta\theta}) &= 0, \\ \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} T_{r\theta} &= 0, \\ \frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} T_{rz} &= 0. \end{aligned} \quad 2.5$$

También se utiliza en la presente tesis la notación para derivada  $\frac{\partial f}{\partial x} = f_{,x}$ . Para coordenadas esféricas, en donde se tienen las coordenadas  $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$ ; la ecuación 2.4 queda como [10]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial T_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{3}{r} T_{r\phi} + \frac{\cos \phi}{r \sin \phi} (T_{\phi\phi} - T_{\theta\theta}) &= 0, \\ \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\phi\theta}}{\partial \phi} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{3}{r} T_{r\theta} + \frac{2 \cos \phi}{r \sin \phi} T_{\phi\theta} &= 0, \\ \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\phi r}}{\partial \phi} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{r \sin \phi} T_{r\phi} + \frac{1}{r} (2T_{rr} - T_{\phi\phi} - T_{\theta\theta}) &= 0. \end{aligned} \quad 2.6$$

## 2.2. Teoría constitutiva

Rajagopal [4] propuso la relación

$$f(\mathbf{T}, \mathbf{B}) = 0, \quad 2.7$$

de la cual son casos especiales el cuerpo elástico de Cauchy y la nueva ecuación constitutiva:

$$\mathbf{T} = \mathbf{g}(\mathbf{B}), \quad \mathbf{B} = \mathbf{h}(\mathbf{T}). \quad 2.8$$

Para cuerpos isotrópicos se tiene que 2.7 queda como:

$$\alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{T} + \alpha_2 \mathbf{T}^2 + \alpha_3 \mathbf{B} + \alpha_4 \mathbf{B}^2 + \alpha_5 (\mathbf{T}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{T}) + \alpha_6 (\mathbf{T}^2 \mathbf{B} + \mathbf{B}^2 \mathbf{T}^2) + \alpha_7 (\mathbf{B}^2 \mathbf{T} + \mathbf{T}\mathbf{B}^2) + \alpha_8 (\mathbf{T}^2 \mathbf{B}^2 + \mathbf{B}^2 \mathbf{T}^2) = \mathbf{0}, \quad 2.9$$

en dónde el modulo material  $\alpha_i, i = 0,1,2..8$  depende de  $\rho$  (la densidad del material), y de los invariantes  $tr \mathbf{T}, tr \mathbf{B}, tr \mathbf{T}^2, tr \mathbf{B}^2, tr \mathbf{T}^3, tr \mathbf{B}^3, tr (\mathbf{T}\mathbf{B}), tr (\mathbf{T}^2 \mathbf{B}), tr (\mathbf{B}^2 \mathbf{T})$  y  $tr (\mathbf{T}^2 \mathbf{B}^2)$ .

En el caso que  $\max \|\nabla \mathbf{u}\| = O(\delta)$  con  $\delta \ll 1$ , después de algunas manipulaciones (ver [1]) que por brevedad no se muestran aquí, se tiene que:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{T} + \beta_2 \mathbf{T}^2, \quad 2.10$$

con  $\beta_i = \beta_i(I_1, I_2, I_3), i = 0,1,2$  con  $I_1, I_2$  e  $I_3$  invariantes de  $\mathbf{T}$ , dónde  $I_1 = tr \mathbf{T}, I_2 = \frac{1}{2} tr \mathbf{T}^2$  y  $I_3 = \frac{1}{3} tr \mathbf{T}^3$ .

Bustamante [3] planteó que para algunos materiales existe una función escalar  $W = W(\mathbf{T})$  que cumple que:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{T}}. \quad 2.11$$

Si se consideran los invariantes anteriormente mencionados, asumiendo un cuerpo isotrópico,  $W = W(I_1, I_2, I_3)$ , luego usando la regla de la cadena para la derivada en 2.11 se obtiene 2.12, por lo que se deduce que el modelo 2.11 en dónde la deformación es una función del esfuerzo, no lineal y pequeñas deformaciones es una subclase de la ecuación 2.10:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = W_1 \mathbf{I} + W_2 \mathbf{T} + W_3 \mathbf{T}^2, \quad 2.12$$

en dónde  $W_i$  es igual a  $\frac{\partial W}{\partial I_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Para efectos de coordenadas cilíndricas y esféricas, donde  $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$  para el caso de las primeras y  $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_\phi)$  las segundas, la relación entre la deformación infinitesimal y los desplazamientos [10] (ecuación 2.3) es, respectivamente:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), & \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \\ \varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad 2.13$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\phi}{r} \cot \phi, & \varepsilon_{\phi\phi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r}, \\ \varepsilon_{\phi\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \cot \phi + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right), \\ \varepsilon_{\phi r} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \right), \\ \varepsilon_{\theta r} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right). \end{aligned} \quad 2.14$$

### 3. Solución de algunos problemas de valor de frontera para una expresión simplificada para $\boldsymbol{\varepsilon} = f(\mathbf{T})$

En la presente sección se estudian analíticamente problemas clásicos de la elasticidad lineal con una relación que cumple 2.11. Los problemas son el inflado y extensión longitudinal de un tubo circular sin contemplar corte; inflado de una esfera hueca; inflado, extensión, corte longitudinal y corte torsional de un tubo circular; y la tracción de una placa delgada con un agujero circular. Se pretende comparar los resultados de esta sección con resultados numéricos de los problemas mencionados.

### 3.1. Modelo constitutivo

El modelo constitutivo que se emplea para la resolución de los problemas es de carácter bilineal, como se muestra en la figura 3.1 (caso unidimensional). En este la función  $f$  tiene la forma tal que la relación entre la deformación y el esfuerzo queda como:

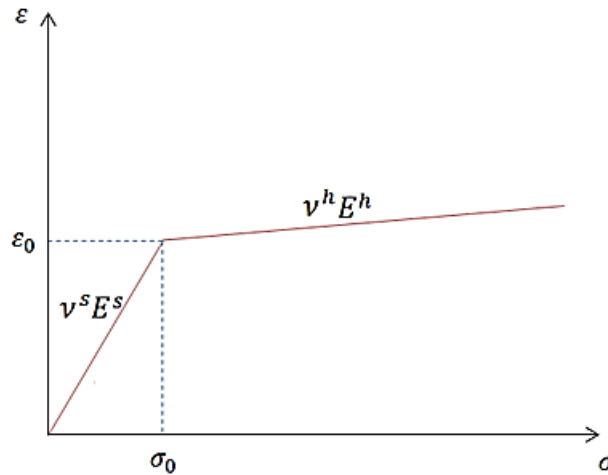
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{cases} \left( \frac{1 + \nu^s}{E^s} \right) \boldsymbol{\sigma} - \left( \frac{\nu^s}{E^s} \right) (tr \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}, & |\sigma_i| \leq \sigma_0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}^l + \left( \frac{1 + \nu^h}{E^h} \right) (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^l) - \left( \frac{\nu^h}{E^h} \right) (tr \boldsymbol{\sigma} - tr \boldsymbol{\sigma}^l), & |\sigma_i| > \sigma_0 \end{cases} \quad 3.1$$

con  $\sigma_i, i = 1,2,3$  son los esfuerzos principales de  $\mathbf{T}$ .

Esta ecuación se basa en describir un material con la capacidad de volverse “rígido” con la deformación, considerando solo comportamiento elástico. Es decir, un material con propiedades mecánicas  $E^s$  y  $\nu^s$  siguiendo un comportamiento lineal elástico tiene la capacidad de que, al superarse un límite de esfuerzo (como  $\sigma_0$ ), las cambie drásticamente a  $E^h$  y  $\nu^h$  (cambio de fase) varias veces mayor, o menor con respecto a las anteriores, respectivamente.

Los tensores  $\boldsymbol{\varepsilon}^l$  y  $\boldsymbol{\sigma}^l$  son los tensores de deformación y esfuerzo en el instante que se produce el cambio de fase.

Para efectos de la resolución de los problemas se utiliza el criterio de esfuerzo máximo, además de incluir el de corte máximo en el caso de que en el problema existan esfuerzos de corte. Siempre considerando que el cuerpo se deforma solamente en el rango elástico.



**Figura 3.1:** Gráfico que muestra el comportamiento de una barra bajo tracción (modelo unidimensional) usando la ecuación 3.1.

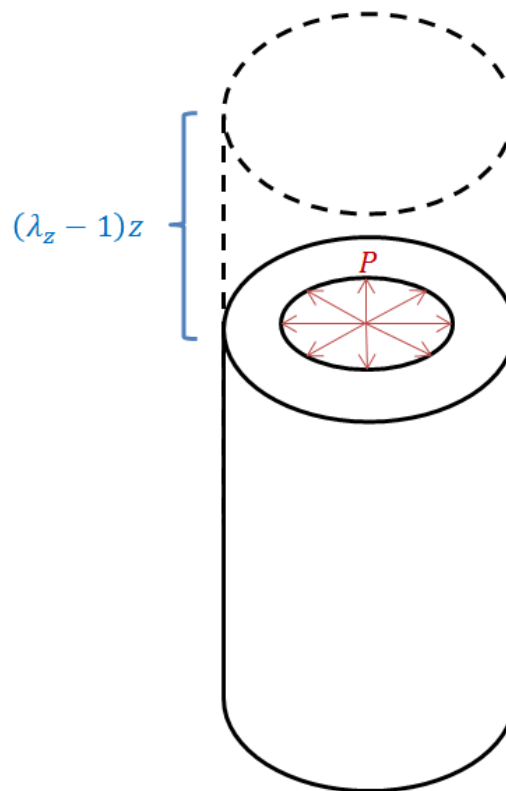
En cada problema además, se plantearán hipótesis sobre cuantas zonas rígidas-flexibles y en qué orden según cada coordenada aparecen, en base a la teoría lineal, para utilizar correctamente la ecuación 3.1.

A la interfaz rígida-flexible se le asigna un superíndice “\*”. A los campos de desplazamientos y esfuerzos de cada zona serán denotados con un superíndice.

## 3.2. Problemas unidimensionales

### 3.2.1. Tubo de sección circular bajo el efecto de presión interna y extensión

El problema a resolver es el de un tubo de sección cilíndrica de radio interior  $a$  y radio exterior  $b$ , que siente en el manto interno una presión  $P$  y es extendido hasta lograr un alargamiento  $\lambda_z$ .



*Figura 3.2: Tubo de sección cilíndrica bajo el efecto de presión interna y extensión.*

Se asume que para este problema los campos de esfuerzos y de desplazamientos tendrían las formas simplificadas siguientes:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_r(r) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \sigma_\theta(r) \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \sigma_z(r) \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z, \quad 3.2$$

$$\mathbf{u} = u_r(r) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + (\lambda_z - 1)_z \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z. \quad 3.3$$

En base a estas simplificaciones, el campo de deformaciones y de esfuerzos correspondientes al uso de las ecuaciones de equilibrio cuasi-estático 2.5 y de deformaciones en coordenadas cilíndricas 2.13 quedan reducidos a:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \lambda_z - 1, \quad 3.4$$

$$\sigma_\theta(r) = r \cdot \sigma_r'(r) + \sigma_r(r). \quad 3.5$$

Según la teoría lineal (cuando se trabaja con una sola fase), para este problema de valor de frontera en general, el esfuerzo predominante (de mayor magnitud) es el esfuerzo  $\sigma_\theta$ , y además los esfuerzos decrecen en magnitud a medida que se avanza en  $r$  (desde el interior hasta el exterior del tubo). Entonces se supone  $\sigma_\theta$  máximo, por lo que el cambio de fase se produce cuando esa componente del esfuerzo alcanza el valor de  $\sigma_0$  en  $r^*$ , en donde como ya se indicó sería el límite de cambio de fase, el cual es en general una incógnita a determinar de la solución del problema. Considerando la discusión anterior las zonas existentes del material según  $r$  son en orden rígida y flexible.

De 3.1 a 3.4 se obtienen las siguientes ecuaciones para la fase rígida (denotada con superíndice  $h$ ), y flexible (denotada con superíndice  $s$ ) respectivamente:

$$\frac{\partial u_r^h}{\partial r} = \varepsilon_r^l + \left( \frac{1 + \nu^h}{E^h} \right) (\sigma_r^h - \sigma_r^l) - \left( \frac{\nu^h}{E^h} \right) [\sigma_r^h + \sigma_\theta^h + \sigma_z^h - (\sigma_r^l + \sigma_\theta^l + \sigma_z^l)], \quad 3.6$$

$$\frac{u_r^h}{r} = \varepsilon_\theta^l + \left( \frac{1 + \nu^h}{E^h} \right) (\sigma_\theta^h - \sigma_\theta^l) - \left( \frac{\nu^h}{E^h} \right) [\sigma_r^h + \sigma_\theta^h + \sigma_z^h - (\sigma_r^l + \sigma_\theta^l + \sigma_z^l)], \quad 3.7$$

$$\lambda_z - 1 = \varepsilon_z^l + \left( \frac{1 + \nu^h}{E^h} \right) (\sigma_{z1} - \sigma_z^l) - \left( \frac{\nu^h}{E^h} \right) [\sigma_r^h + \sigma_\theta^h + \sigma_z^h - (\sigma_r^l + \sigma_\theta^l + \sigma_z^l)], \quad 3.8$$



$$\frac{\partial u_r^s}{\partial r} = \left( \frac{1 + \nu^s}{E^s} \right) \sigma_r^s - \left( \frac{\nu^s}{E^s} \right) [\sigma_r^s + \sigma_\theta^s + \sigma_z^s], \quad 3.9$$

$$\frac{u_r^s}{r} = \left( \frac{1 + \nu^s}{E^s} \right) \sigma_\theta^s - \left( \frac{\nu^s}{E^s} \right) [\sigma_r^s + \sigma_\theta^s + \sigma_z^s], \quad 3.10$$

$$\lambda_z - 1 = \left( \frac{1 + \nu^s}{E^s} \right) \sigma_z^s - \left( \frac{\nu_0}{E_0} \right) [\sigma_r^s + \sigma_\theta^s + \sigma_z^s]. \quad 3.11$$

Dado que en general se desconocen los esfuerzos y deformaciones en la interface  $r^*$ , se soluciona el problema partiendo siempre por la zona flexible. De la ecuación 3.11 y 3.5, despejando  $\sigma_z$ , se tiene:

$$\sigma_z^s(r) = E^s(\lambda_z - 1) + \nu^s(2\sigma_r^s + r\sigma_r^{s'}), \quad 3.12$$

y despejando  $u_r^s$  de 3.10, se obtiene:

$$u_r^s(r) = \frac{1}{E^s} r^2 \sigma_r^{s'} + \left( \frac{1 - \nu^s}{E^s} \right) r \sigma_r^s - \left( \frac{\nu^s}{E^s} \right) \sigma_z^s r. \quad 3.13$$

Derivando la ecuación anterior una vez con respecto a  $r$  se tiene:

$$\frac{\partial u_r^s}{\partial r}(r) = \frac{1}{E^s} r^2 \sigma_r^{s''} + \left( \frac{3 - \nu^s}{E^s} \right) r \sigma_r^{s'} + \left( \frac{1 - \nu^s}{E^s} \right) \sigma_r^s - \left( \frac{\nu^s}{E^s} \right) (\sigma_z^s + r\sigma_z^{s'}), \quad 3.14$$

e igualando con 3.9 y ordenando los términos se tiene una ecuación diferencial para  $\sigma_{r2}$  de la forma:

$$r^2 \sigma_r^{s''}(r) + 3r \sigma_r^{s'}(r) = 0. \quad 3.15$$

Se desconoce el valor del esfuerzo en  $r^*$ , pero se sabe que  $\sigma_{r2}(b) = 0$  (se asume que no hay cargas en el manto exterior del tubo). Con eso la solución es del tipo:

$$\sigma_r^s(r) = \frac{K^s}{2} (b^{-2} - r^{-2}), \quad 3.16$$

dónde  $K^s$  es una constante por determinar.

Utilizando 3.16 en 3.5 y 3.12, los esfuerzos restantes quedan como:

$$\sigma_{\theta}^s(r) = \frac{K^s}{2} (b^{-2} + r^{-2}), \quad 3.17$$

$$\sigma_z^s = E^s(\lambda_z - 1) + \frac{K^s \nu^s}{b^2}. \quad 3.18$$

Evaluando en la interface dichos esfuerzos en  $r^*$  se pueden obtener los esfuerzos  $\sigma_i^l$  y las deformaciones  $\varepsilon_i^l$ , que quedan respectivamente como:

$$\sigma_r^l = \frac{K^s}{2} (b^{-2} - r^{*-2}), \quad \sigma_{\theta}^l = \frac{K^s}{2} (b^{-2} + r^{*-2}), \quad \sigma_z^l = \sigma_z^s, \quad 3.19$$

$$\varepsilon_r^l = \left( \frac{1 + \nu^s}{E^s} \right) \sigma_r^l - \left( \frac{\nu^s}{E^s} \right) [E^s(\lambda_z - 1) + K^s b^{-2} (1 + \nu^s)], \quad 3.20$$

$$\varepsilon_{\theta}^l = \left( \frac{1 + \nu^s}{E^s} \right) \sigma_{\theta}^l - \left( \frac{\nu^s}{E^s} \right) [E^s(\lambda_z - 1) + K^s b^{-2} (1 + \nu^s)], \quad 3.21$$

$$\varepsilon_z^l = \lambda_z - 1, \quad 3.22$$

en donde se puede apreciar que  $\varepsilon_z^l$  no depende de  $r$  ni de  $r^*$  dada la manera como se definió el problema.

De la misma forma que se hizo con la zona flexible, en la rígida se despeja  $\sigma_z^h$  de 3.8 como:

$$\sigma_z^h(r) = \nu^h(\sigma_r^h + \sigma_{\theta}^h) - \nu^h(\sigma_r^l + \sigma_{\theta}^l + \sigma_z^l) + \left( \frac{1 + \nu^h}{E^h} \right) \sigma_z^l. \quad 3.23$$

Despejando  $u_r^h$  de 3.7 se tiene

$$\begin{aligned} u_r^h(r) = & r\varepsilon_{\theta}^l + \frac{1}{E^h} (\sigma_r^{h'} r^2 + \sigma_r^h r) - \frac{\nu^h}{E^h} \sigma_r^h r - \frac{\nu^h}{E^h} \sigma_z^h r \\ & + \frac{\nu^h}{E^h} (\sigma_r^l + \sigma_{\theta}^l + \sigma_z^l) r - \left( \frac{1 + \nu^h}{E^h} \right) \sigma_{\theta}^l r, \end{aligned} \quad 3.24$$

derivando, igualando con 3.6 y ordenando términos, la ecuación diferencial correspondiente para  $\sigma_{r1}$ , si se definen  $\xi_1 = \frac{1-\nu^h}{E^h}$  y  $\xi_2 = (\sigma_\theta^l - \sigma_r^l) \left( \frac{1+\nu^s}{E^s} - \frac{1+\nu^h}{E^h} \right)$ , es

$$\xi_1 r^2 \sigma_r^{h''} + 3\xi_1 r \sigma_r^{h'} + \xi_2 = 0, \quad 3.25$$

la solución está dada por la ecuación 3.26, en la cual si bien no se sabe cuánto es el valor en  $r^*$ , se sabe que  $\sigma_{r1}(a) = -P$ :

$$\sigma_r^h(r) = \frac{K^h}{2} (a^{-2} - r^{-2}) + \frac{\xi_2}{2\xi_1} \ln\left(\frac{a}{r}\right) - P, \quad 3.26$$

donde  $K^h$  es una constante a determinar, y con las ecuaciones 3.5 y 3.23 se obtienen las otras componentes del esfuerzo

$$\sigma_\theta^h(r) = \frac{K^h}{2} (a^{-2} + r^{-2}) + \frac{\xi_2}{2\xi_1} \left[ \ln\left(\frac{a}{r}\right) - 1 \right] - P, \quad 3.27$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^h(r) &= \nu^h \left( K^h a^{-2} + \frac{\xi_2}{2\xi_1} \left[ 2 \ln\left(\frac{a}{r}\right) - 1 \right] - 2P \right) \\ &\quad - \nu^h [K^s b^{-2} (1 + \nu^s) + E^s (\lambda_z - 1)]. \end{aligned} \quad 3.28$$

Obtenidos los esfuerzos y deformaciones de la ecuación constitutiva, se tiene que hay exactamente 3 incógnitas:  $K^s$ ,  $K^h$  y  $r^*$ . La primera condición es utilizar el hecho que  $\sigma_r$  es continuo en la interface, luego

$$\begin{aligned} \sigma_r^s(r^*) &= \sigma_r^h(r^*) \Rightarrow \frac{K^s}{2} (b^{-2} - r^{*-2}) \\ &= \frac{K^h}{2} (a^{-2} - r^{*-2}) + \frac{\xi_2}{2\xi_1} \ln\left(\frac{a}{r^*}\right) - P. \end{aligned} \quad 3.29$$

La segunda condición es que  $\sigma_\theta$  también es continuo debido a que esta componente del esfuerzo es la que alcanza el valor  $\sigma_0$  desde ambos lados de la interface en  $r^*$ , luego

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta}^s(r^*) &= \sigma_{\theta}^h(r^*) \Rightarrow \frac{K^s}{2}(b^{-2} + r^{*-2}) \\ &= \frac{K^h}{2}(a^{-2} + r^{*-2}) + \frac{\xi_2}{2\xi_1} \left[ \ln\left(\frac{a}{r^*}\right) - 1 \right] - P.\end{aligned}\quad 3.30$$

A partir de 3.29 y 3.30 se pueden obtener los valores de  $K^s$  y  $K^h$  como:

$$K^h = \frac{a^2 \left[ r^{*2} \xi_2 - b^2 (4P \xi_1 + \xi_2) + 2b^2 \xi_2 \ln\left(\frac{a}{r^*}\right) \right]}{2(a^2 - b^2) \xi_1}, \quad 3.31$$

$$K^s = \frac{b^2 \left[ r^{*2} \xi_2 - a^2 (4P \xi_1 + \xi_2) + 2a^2 \xi_2 \ln\left(\frac{a}{r^*}\right) \right]}{2(a^2 - b^2) \xi_1}. \quad 3.32$$

Remplazando estos valores en las expresiones de esfuerzos y deformaciones, se tiene solo como incógnita a  $r^*$ , la posición de la interface rígida-flexible. Para determinar su valor se utiliza la condición de continuidad del desplazamiento, es decir:

$$u_r^s(r^*) = u_r^h(r^*). \quad 3.33$$

que es idénticamente igual a resolver

$$u_r^s(r^*) - u_r^h(r^*) = 0, \quad 3.34$$

que se puede resolver de manera completamente analítica. A modo de mostrar el comportamiento de esta ecuación en función de  $r^*$ , en la figura 3.3 se muestran 4 casos con presiones internas de 147.2 [MPa] (caso en el que  $r^*$  tiene el valor  $a$ ), 220 [MPa], 280 [MPa] y 353.7 [MPa] (en este último caso en el que  $r^*$  tiene el valor  $b$ ). Los valores de material y de geometría mostradas para la figura 3.3 son mostrados en la tabla 3.1 (las propiedades del material son para el Carburo de Zirconio [11]). También son mostradas las propiedades mecánicas para la zona rígida, en donde se asume en primera instancia que son 10 veces y la décima parte de las propiedades originales del material (zona flexible), módulo de Young y coeficiente de Poisson, respectivamente. Esta elección es netamente arbitraria y en primera instancia consiste en resolver un ejercicio matemático, pero posteriormente se variarán para un análisis más profundo de esos parámetros.

**Tabla 3.1:** Propiedades de material y geométricas del problema.

Propiedad de material o geométrica	Valor
$a$	0,05 [m]
$b$	0,06 [m]
$E^s$	380 [GPa]
$E^h$	$10 \cdot E^s, 10^2 \cdot E^s, 10^6 \cdot E^s$
$\nu^s$	0,23
$\nu^h$	$\nu^s/10, \nu^s/10^2, \nu^s/10^6$

El material del tubo presenta en su totalidad la fase “flexible” con sus propiedades  $E^s$  y  $\nu^s$  si la presión interna es inferior a 147.2 [MPa]. Matemáticamente hablando, al ser igual  $r^*$  a  $a$ , la interface flexible-rígida corresponde a la superficie del manto interior del cilindro.

Al aumentar la presión más del límite mencionado, el material presenta sus 2 fases flexible y rígida, y el radio crítico de interface  $r^*$  aumenta, como se muestran en los casos con 220 y 280 [MPa] de la figura 3.3, hasta llegar al caso crítico en que la interface es el manto exterior del tubo para 353.7 [MPa]. Si se aplica una presión más alta que dicho valor, el material presenta una sola fase “rígida”. Ahora, el que solo exista una fase rígida no quiere decir que en los cálculos sea como si hubiese solo fase flexible: en la fase rígida se requiere del uso de  $\varepsilon^l$  y  $\sigma^l$ , por lo que es necesario hacer los cálculos previos de la fase flexible para determinar la fase rígida.

En la figura 3.4 se muestra específicamente como varía el valor crítico tal que  $u_r^s - u_r^h = 0$  de  $r^*$  para cada presión interna en el tubo, en los intervalos descritos anteriormente. Su comportamiento es casi lineal a medida que aumenta la presión. Se recuerda que para valores menores que 147.2 y mayores a 353.7 [MPa]  $r^*$  crítico carece de sentido al existir sólo una fase.

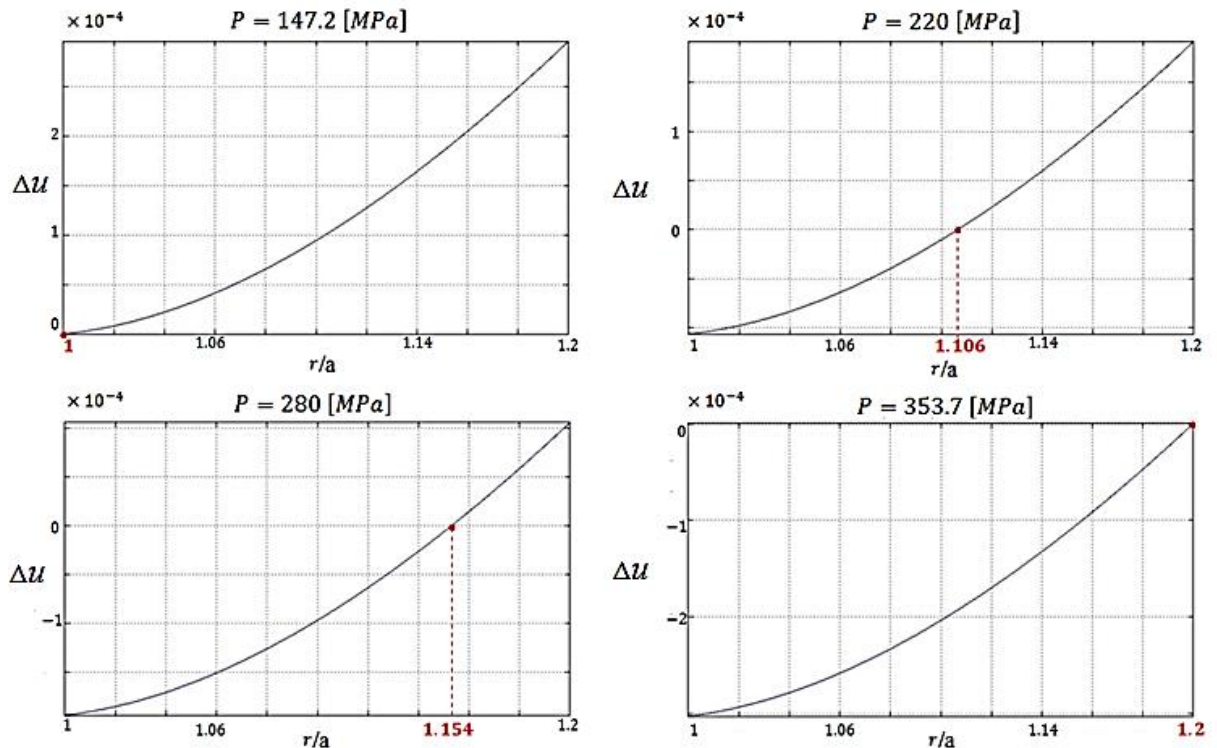
El campo de esfuerzos obtenido a partir de la ecuación constitutiva bilineal es mostrado en la figura 3.5. Se puede apreciar que para el caso en el que se asumen las propiedades de la tabla 3.1, a diferencia de la teoría lineal (una sola fase), en la interface se produce un cambio de pendiente brusco. Para los esfuerzos  $\sigma_r$  y  $\sigma_\theta$  se produce una caída en valor con respecto a la teoría lineal, que se ve compensada con el aumento considerable en  $\sigma_z$ . También se muestran las componentes del campo de esfuerzos para distintos grados de endurecimiento, mostrando que mientras sea mayor, más abrupto es el cambio de esfuerzo, bajo las mismas condiciones de carga.

El hecho de variar la presión, manteniendo constantes las relaciones de rigidez y alargamiento  $\lambda_z = 1.0$ , es mostrado en la figura 3.6 en el caso del esfuerzo  $\sigma_z$ , donde se aprecia que a mayor carga menor es la magnitud del esfuerzo axial con respecto a la última (gráfico de  $\sigma_z$  normalizado con  $P$  interna del caso). Para los casos de  $\sigma_r$  y  $\sigma_\theta$  tienen exactamente el mismo comportamiento y magnitud que muestran los gráficos

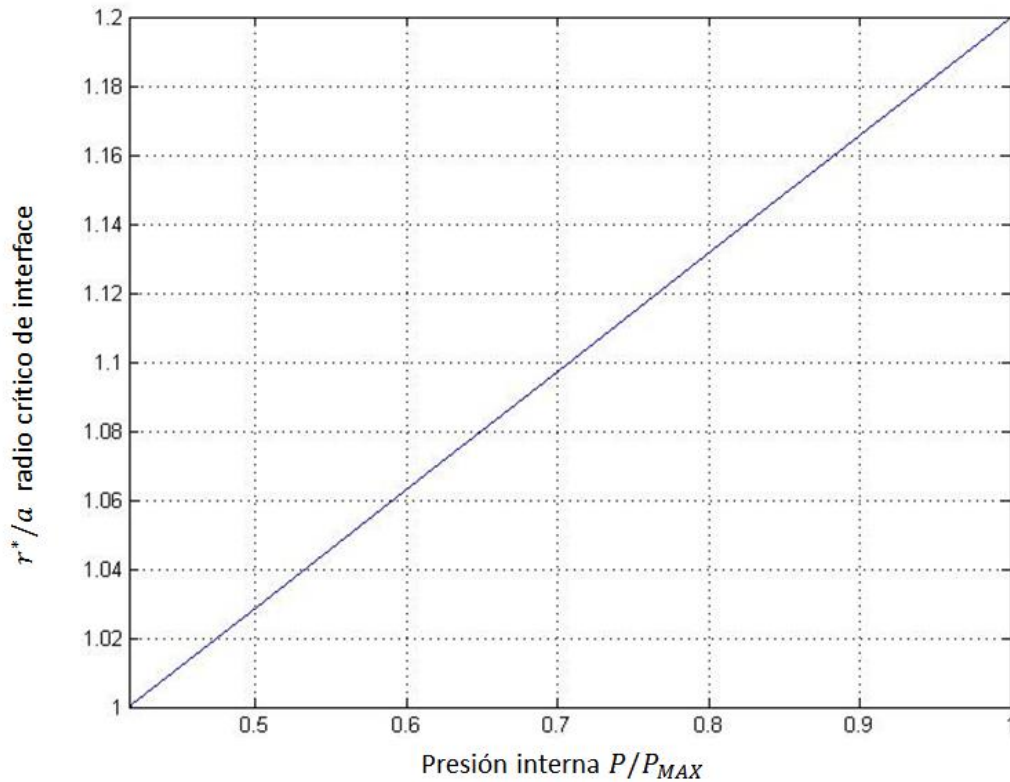
3.5.a y 3.5.b, es decir la carga interna no afecta al comportamiento y magnitud de los esfuerzos radial y azimutal.

En la figura 3.7 se muestra como varía  $\sigma_z$  con respecto a  $\lambda_z$ . Produce un cambio grande en esa componente del campo de esfuerzos, pero influye despreciablemente en los otros.

En la figura 3.8 se muestran los gráficos del esfuerzo  $\sigma_r$  variando el espesor del tubo cilíndrico. Se aprecia que si la pared es muy delgada, los esfuerzos crecen mucho, mientras que para un medio semi-infinito se atenúan.



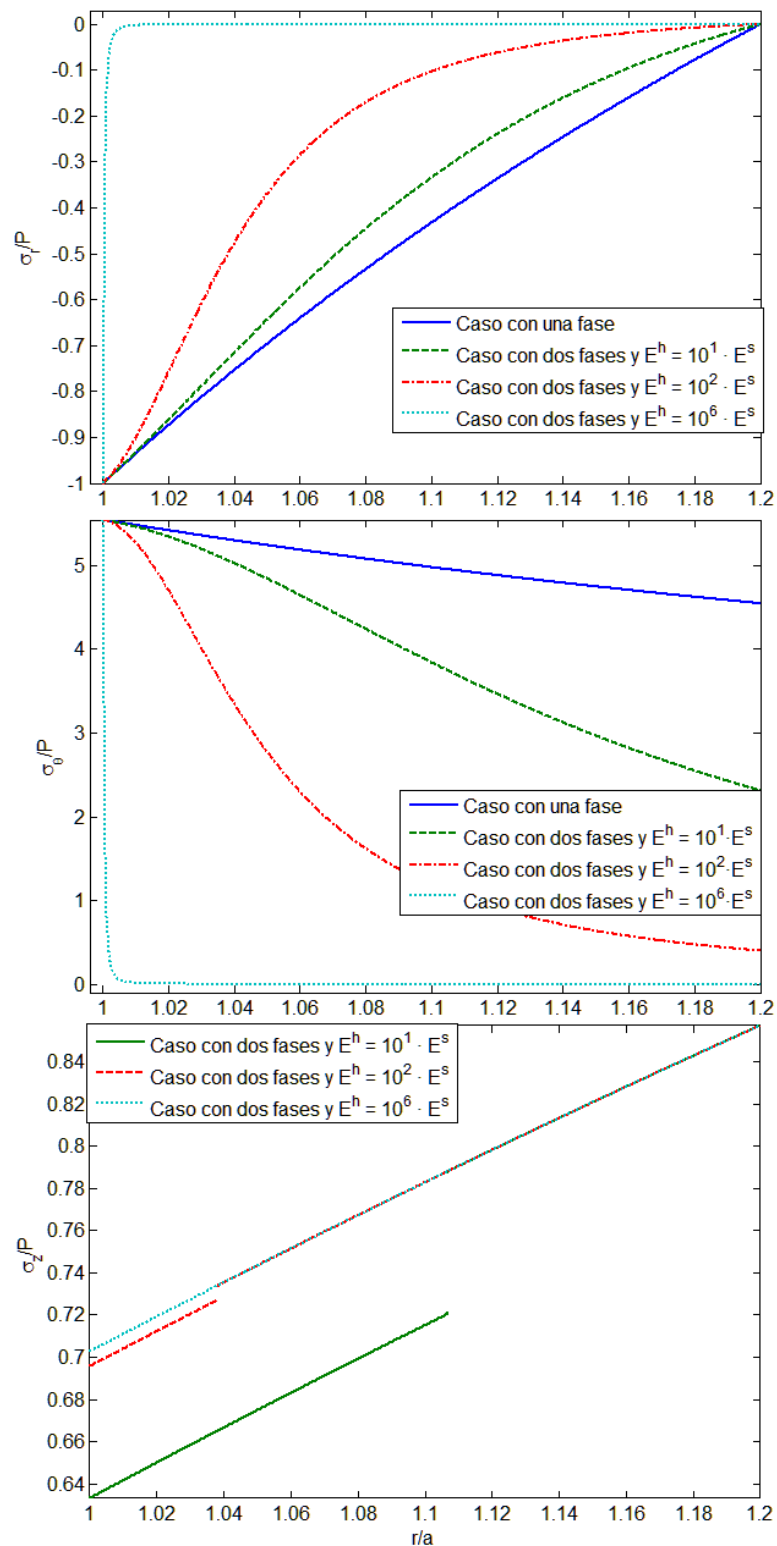
**Figura 3.3:** Comportamiento de  $u_r^s - u_r^h$  en función de  $r$  para distintas presiones internas aplicadas y  $\lambda_z = 1.0$ . En rojo se muestra el valor de  $r$  para el cuál la curva tiene un cero de función.



**Figura 3.4:** Relación entre  $r^*$  radio crítico de interface y la presión interna adimensionalizada con  $P_{MAX}$  igual a 353.7 [MPa].

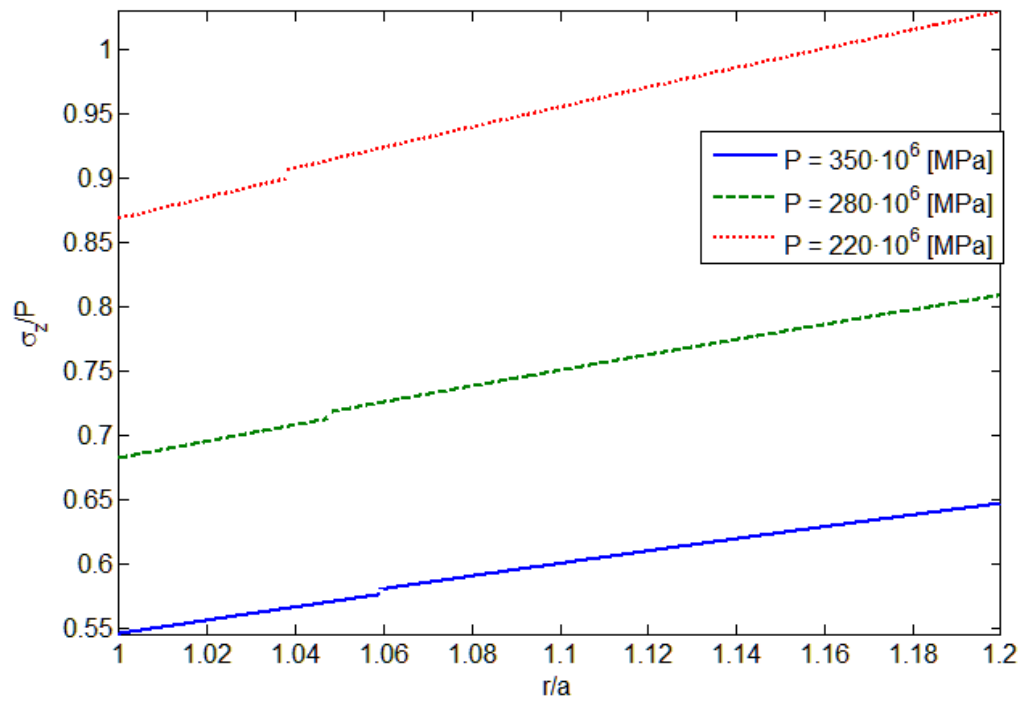
En cuanto al comportamiento de deformaciones, lo más importante que cabe recalcar es que se comprueba que una de las hipótesis que fundamentan el uso de la ecuación constitutiva bilineal se cumple, es decir que las deformaciones se mantienen siempre pequeñas. Se puede notar una amplia diferencia entre el campo para el caso bilineal y el lineal en la figura 3.8. Se puede apreciar el cambio de comportamiento en  $r^*$  para las componentes de la deformación, y en 3.9 variando el grado de endurecimiento, quedando claro que mientras se endurezca más, menos deformación existe. En la figuras 3.10 y 3.11 se muestran los componentes del campo de deformaciones y como son afectados al variar el grado de rigidez para las zonas rígida y blanda, y la presión interna  $P$ .

Las deformaciones que se muestran en la figura 3.8 para el caso bilineal son discontinuas. Se sabe que los desplazamientos deben ser continuos, pero el campo de deformaciones en esencia está definido mediante derivadas en el campo de desplazamiento, por lo que sus componentes no tienen por qué ser continuas en la interface  $r^*$ . Otra forma de ver esto es que las componentes del campo de esfuerzos cambian de comportamiento en la interface, que influye directamente en el comportamiento y valor de las componentes del campo de deformaciones.

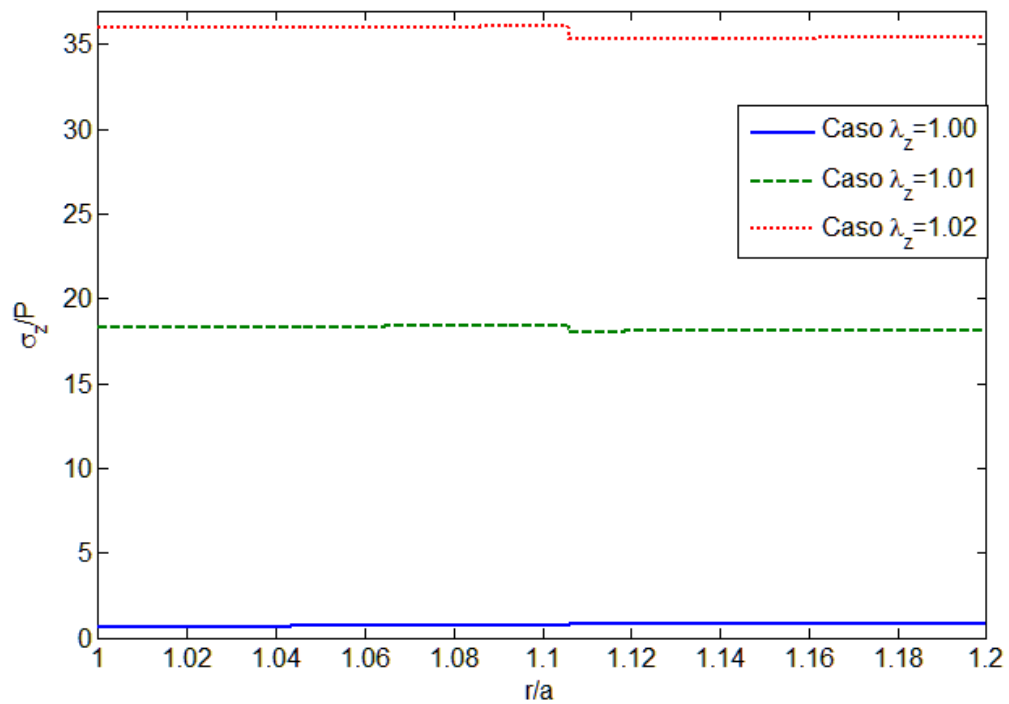


**Figura 3.5:** Curvas de esfuerzos normalizados obtenidas para el caso de un material con dos fases considerando distintos grados de endurecimiento de  $E^h$  con respecto a  $E^s$  (y  $\nu^h$  disminuyéndolo con respecto a  $\nu^s$  en la misma magnitud que los módulos de Young), y comparación con la teoría lineal considerando una sola fase, para una presión de 220 [MPa],  $\lambda_z = 1,0$  y con espesor de tubo de 1 [cm].

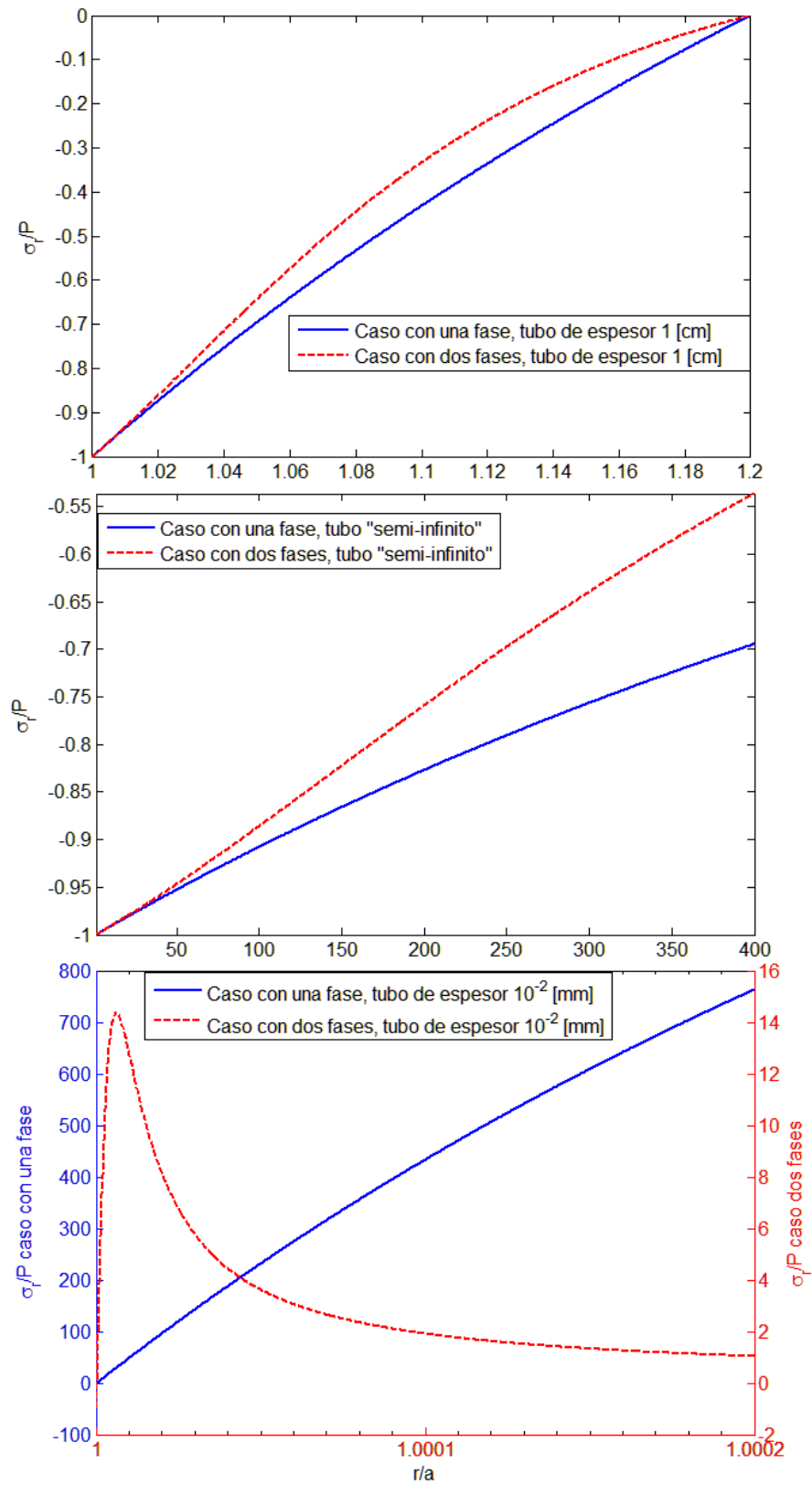




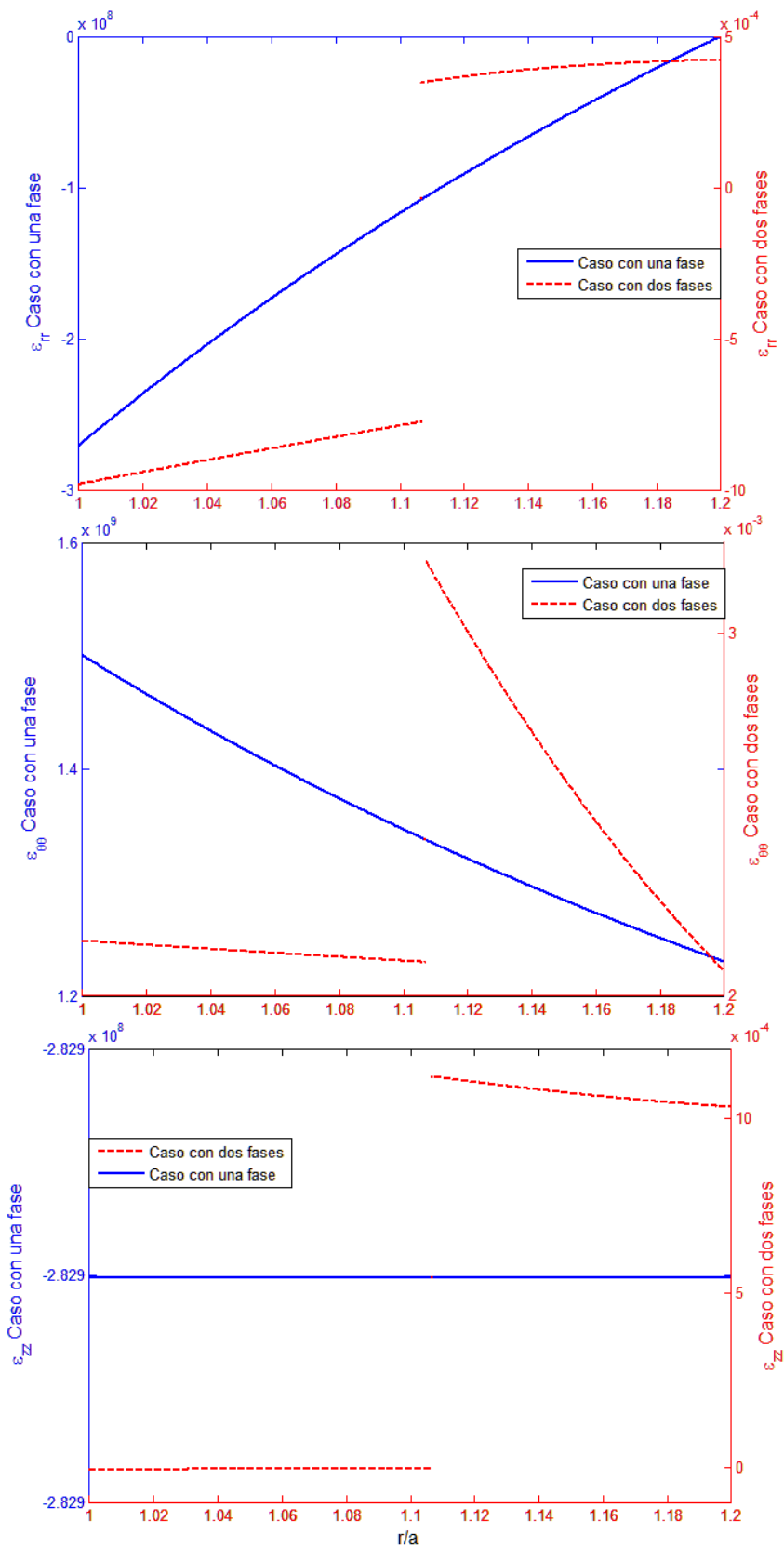
**Figura 3.6:** Curvas para esfuerzo axial normalizado  $\sigma_z/P$  obtenidas para el caso de un tubo cilíndrico de espesor de 1 [cm], para propiedades mecánicas mostradas en Tabla 3.1, para distintas presiones internas, en función del alargamiento axial.



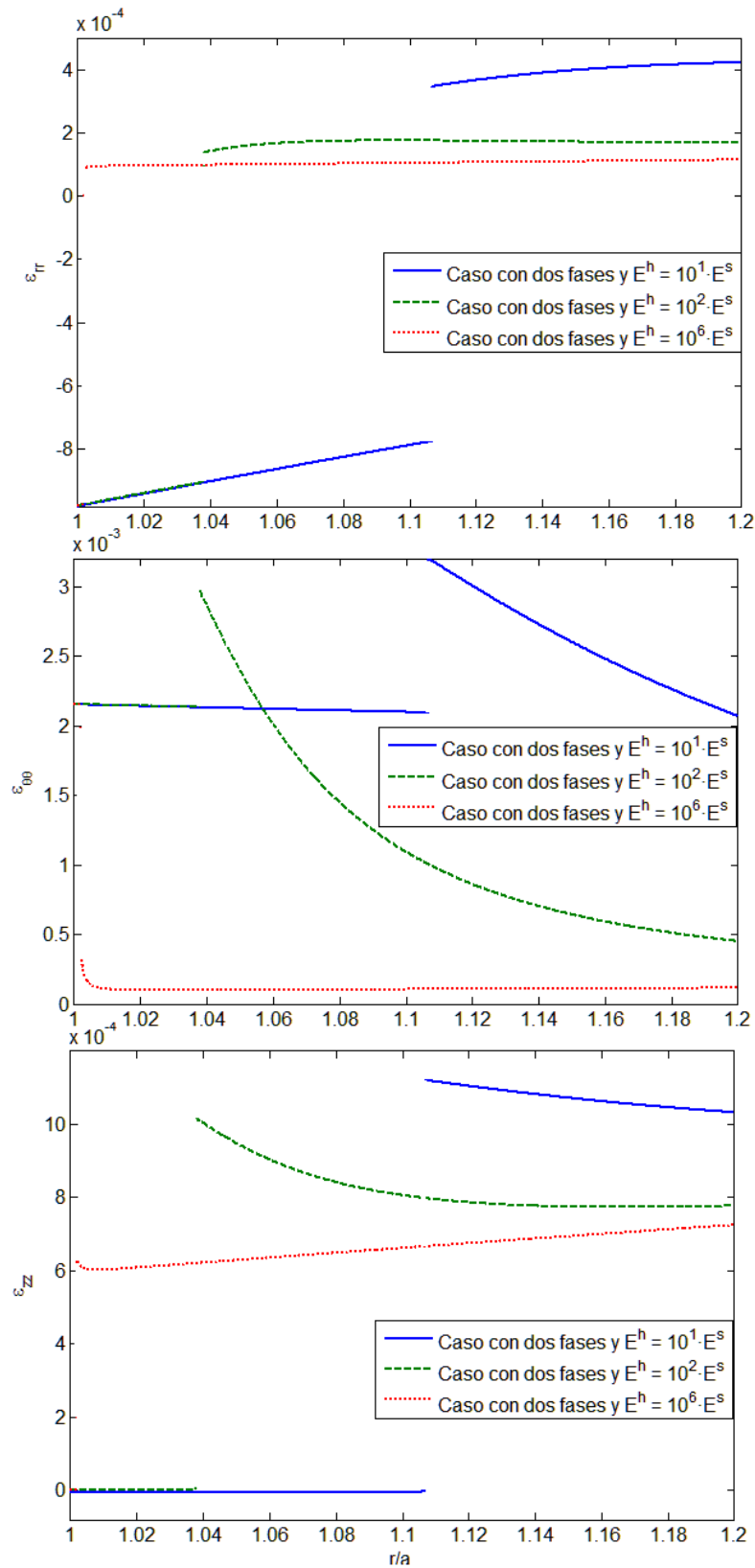
**Figura 3.7:** Curvas para esfuerzo axial  $\sigma_z$  obtenidas para el caso de un tubo cilíndrico de espesor de 1 [cm], para propiedades mecánicas mostradas en Tabla 3.1 y una presión de 220 [MPa] en función del alargamiento axial.



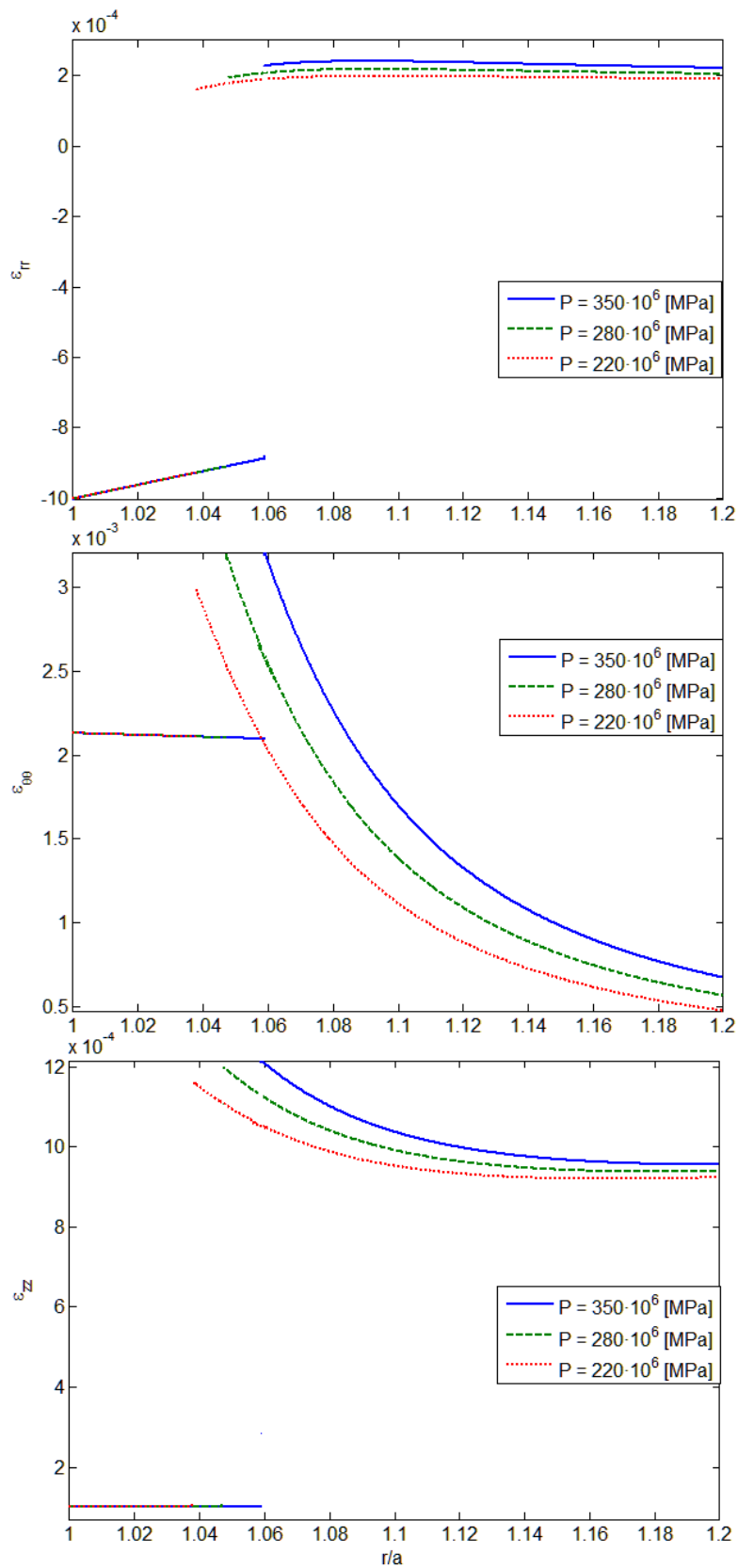
**Figura 3.8:** Curvas de esfuerzo radial normalizado  $\sigma_r/P$  obtenidas para el caso de tubos cilíndricos de distintos espesores, para propiedades mecánicas mostradas en Tabla 3.1 y una presión de 220 [MPa].



**Figura 3.9:** Campo de deformaciones obtenidas considerando propiedades de la tabla 3.1 y comparación con la teoría lineal considerando una fase para una presión de 220 [MPa] y  $\lambda_z = 1.0$ .



**Figura 3.10:** Campo de deformaciones obtenidas considerando espesor de tubo de 1 [cm], considerando distintos grados de endurecimiento de  $E^h$  con respecto a  $E^s$  (y  $\nu^h$  disminuyéndolo con respecto a  $\nu^s$  en la misma magnitud que los módulos de Young), para una presión de 220 [MPa] y  $\lambda_z = 1.0$ .

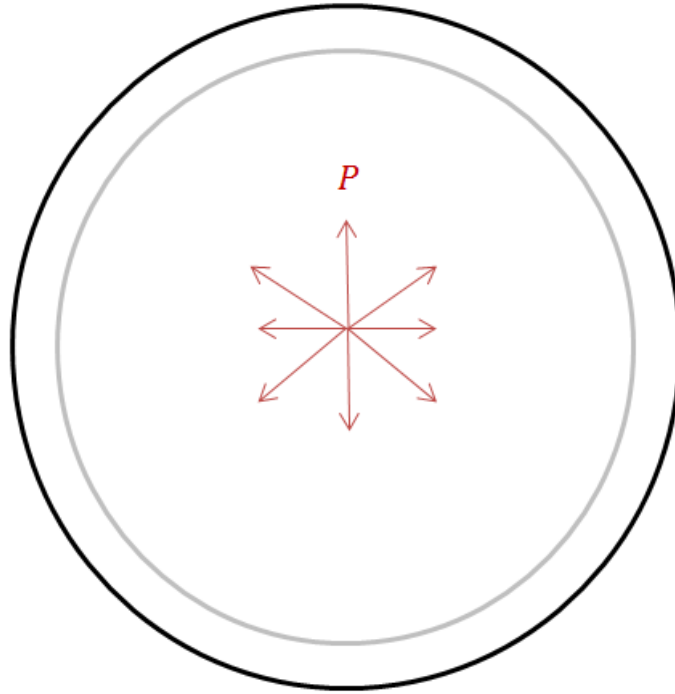


**Figura 3.11:** Campo de deformaciones obtenidos considerando espesor de tubo de 1 [cm], considerando  $E^h$  cien veces  $E^s$  (y  $\nu^h$  una centésima parte  $\nu^s$ ), para distintas presiones internas y  $\lambda_z = 1.0$ .

### 3.2.2. Esfera bajo el efecto de presión interna

La figura 3.12 representa el problema de una esfera hueca de radio interno  $a$  y radio externo  $b$  la cual es sometida a una presión interna  $P$ . Para este problema se asume que el campo de esfuerzos y de desplazamiento tienen la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_r(r) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \sigma_\theta(r) \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \sigma_\phi(r) \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi, \quad 3.35$$



*Figura 3.12: Esfera hueca sometida a presión interna P.*

$$\mathbf{u} = u_r(r) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r. \quad 3.36$$

Las ecuaciones de equilibrio 2.6 y de campo de deformaciones 2.14 quedan reducidas a:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} = \varepsilon_{\phi\phi}, \quad 3.37$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\phi, \quad \sigma_\theta = \frac{r}{2} \sigma_r' + \sigma_r. \quad 3.38$$

De la misma forma que en el caso del cilindro, según la teoría lineal (considerando una fase) el esfuerzo predominante es el esfuerzo  $\sigma_\theta$  o  $\sigma_\phi$ , y además los esfuerzos decrecen en magnitud a medida que se avanza en  $r$  desde  $a$  hasta el radio externo  $b$ . Entonces se supone  $\sigma_\theta$  máximo, por lo que se asume que en el cambio de fase alcanza el valor de  $\sigma_0$  en  $r^*$ , y que las zonas existentes del material según  $r$  son, en orden, rígida en  $[a, r^*)$  y flexible en  $(r^*, b]$ . Luego, las ecuaciones constitutivas para cada componente del tensor de deformación para la zona rígida (superíndice  $h$ ) son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r^h}{\partial r} = \varepsilon_r^l + \left( \frac{1 + \nu^h}{E^h} \right) (\sigma_r^h - \sigma_r^l) \\ - \left( \frac{\nu^h}{E^h} \right) [\sigma_r^h + \sigma_\theta^h + \sigma_\phi^h - (\sigma_r^l + \sigma_\theta^l + \sigma_\phi^l)], \end{aligned} \quad 3.39$$

$$\begin{aligned} \frac{u_r^h}{r} = \varepsilon_\theta^l + \left( \frac{1 + \nu^h}{E^h} \right) (\sigma_\theta^h - \sigma_\theta^l) \\ - \left( \frac{\nu^h}{E^h} \right) [\sigma_r^h + \sigma_\theta^h + \sigma_\phi^h - (\sigma_r^l + \sigma_\theta^l + \sigma_\phi^l)]. \end{aligned} \quad 3.40$$

Y para la zona flexible (superíndice  $s$ )

$$\frac{\partial u_r^s}{\partial r} = \left( \frac{1 + \nu^s}{E^s} \right) \sigma_r^s - \left( \frac{\nu^s}{E^s} \right) [\sigma_r^s + \sigma_\theta^s + \sigma_\phi^s], \quad 3.41$$

$$\frac{u_r^s}{r} = \left( \frac{1 + \nu^s}{E^s} \right) \sigma_{\theta 2} - \left( \frac{\nu^s}{E^s} \right) [\sigma_r^s + \sigma_\theta^s + \sigma_\phi^s]. \quad 3.42$$

Realizando un procedimiento parecido al mostrado en el caso del problema del tubo cilíndrico (sin considerar corte), se obtiene la ecuación diferencial para  $\sigma_r^s$ , cuya solución al aplicar la condición de borde  $\sigma_r^s(b) = 0$  es:

$$\sigma_r^s(r) = \frac{K^s}{3} (b^{-3} - r^{-3}), \quad 3.43$$

donde  $K^s$  es una constante por determinar, y el esfuerzo normal en  $\theta$  está dado por:

$$\sigma_\theta^s(r) = \frac{K^s}{3} (b^{-3} + 2r^{-3}). \quad 3.44$$

Además, evaluando dichos esfuerzos en  $r^*$  se pueden obtener los esfuerzos  $\sigma_i^l$  y las deformaciones  $\varepsilon_i^l$ , que quedan como:

$$\sigma_r^l = \frac{K^s}{3}(b^{-3} - r^{*-3}), \quad \sigma_\theta^l = \frac{K^s}{3}(b^{-3} + 2r^{*-3}), \quad 3.45$$

$$\varepsilon_r^l = \frac{K^s}{3E^s} [b^{-3}(1 - 2\nu^s) + r^{*-3}(2\nu^s - 1)], \quad 3.46$$

$$\varepsilon_\theta^l = \frac{K^s}{3E^s} [b^{-3}(1 - 2\nu^s) + r^{*-3}(2 - \nu^s)]. \quad 3.47$$

Realizando el procedimiento de despeje de  $u_r^h$  de la ecuación 3.40, derivándola e igualando, con lo que queda con la ecuación 4.38 se obtiene la ecuación diferencial para  $\sigma_r^h$  como se muestra a continuación, con  $\xi_1 = \frac{1-\nu^h}{E^h}$ ,  $\xi_2 = K^s r^{*-3} \beta_1$  y con  $\beta_1 = \left(\frac{1+\nu^s}{E^s} + \frac{1+\nu^h}{E^h}\right)$ :

$$\xi_1 \frac{r^2}{2} \sigma_r^{h''} + 2\xi_1 r \sigma_r^{h'} + \xi_2 = 0. \quad 3.48$$

La solución de esta ecuación es:

$$\sigma_r^h(r) = \frac{K^h}{3}(a^{-3} - r^{-3}) + \frac{2\xi_2}{3\xi_1} \ln\left(\frac{a}{r}\right) - P, \quad 3.49$$

donde  $K^h$  es una constante por determinar.

En base a la ecuación 3.38.b, el esfuerzo normal en  $\theta$  usando la expresión 3.52 es igual a

$$\sigma_\theta^h(r) = \frac{K^h}{3}(a^{-3} + 2r^{-3}) + \frac{2\xi_2}{3\xi_1} \left[ \ln\left(\frac{a}{r}\right) - 1 \right] - P. \quad 3.50$$

Realizando un procedimiento similar al del tubo de sección circular, aplicando las condiciones de continuidad para  $\sigma_r^h(r^*) = \sigma_r^s(r^*)$  y  $\sigma_\theta^h(r^*) = \sigma_\theta^s(r^*)$ , se obtienen las constantes  $K^h$  y  $K^s$  como:

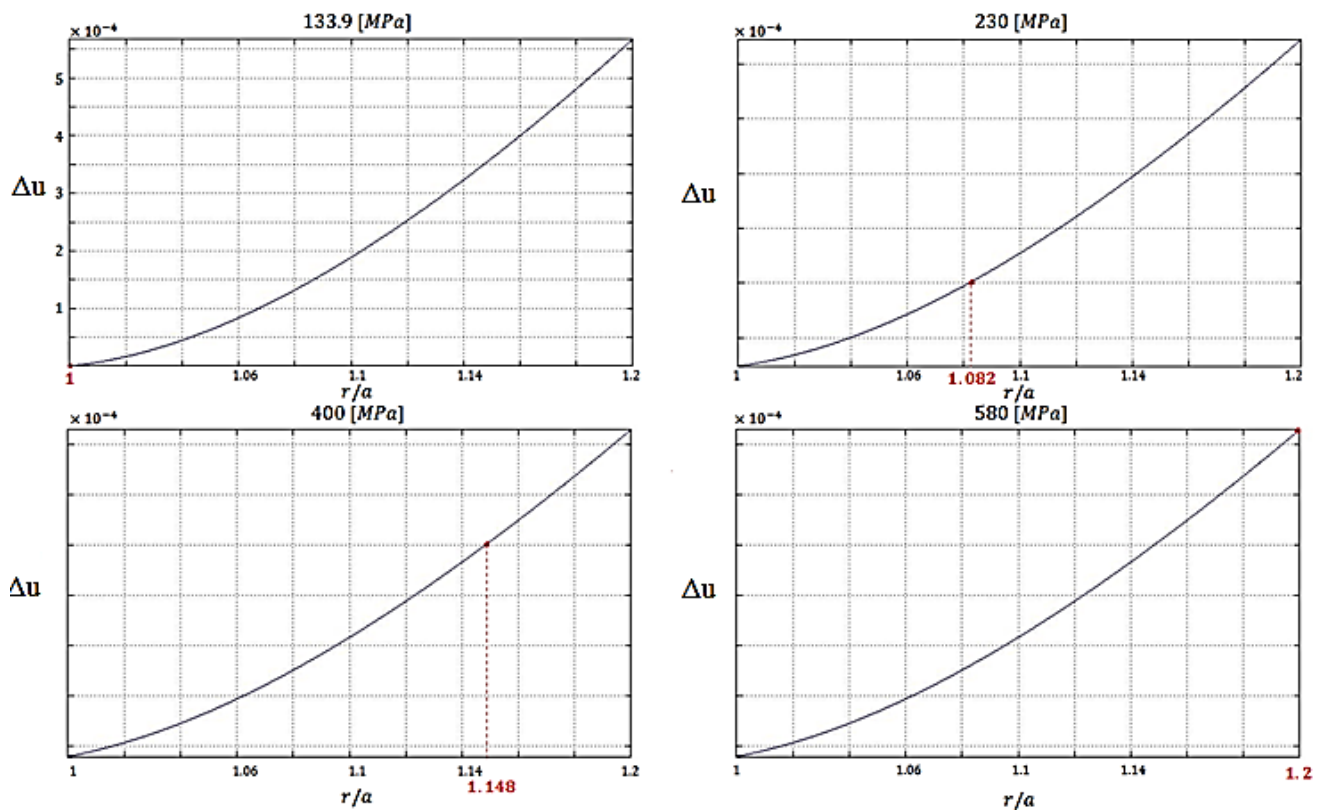


$$K^h = \frac{a^3 \left( 2r^{*3} \xi_2 - b^3 (9P \xi_1 + 2\xi_2) + 6b^3 \xi_2 \ln \left( \frac{a}{r^*} \right) \right)}{3(a^3 - b^3) \xi_1}, \quad 3.51$$

$$K^s = \frac{b^3 \left( 2r^{*3} \xi_2 - a^3 (9P \xi_1 + 2\xi_2) + 6a^3 \xi_2 \ln \left( \frac{a}{r^*} \right) \right)}{3(a^3 - b^3) \xi_1}. \quad 3.52$$

Para obtener el valor de  $r^*$  se aplica la condición de continuidad para  $u_r$  en  $r^*$ .

De la misma forma que en el problema del cilindro sin considerar corte, en la figura 3.13 se muestran 4 casos con presiones internas de 133.9 [MPa] (caso en el que  $r^*$  tiene el valor de  $a$ ), 230 [MPa], 400 [MPa] y 580 [MPa] (este último caso en el que  $r^*$  tiene el valor de  $b$ ). El material presentará solo fase flexible si la presión es menor que 133.9 y solo fase rígida si la presión  $P$  es mayor a 580 [MPa]. En presiones intermedias tendrá dos fases y existe un  $r^*$ .



**Figura 3.13:** Diferencia de los desplazamientos  $u_{r2}$  y  $u_{r1}$  para distintas presiones internas aplicadas. En rojo se muestra el valor de  $r$  para el cuál la curva tiene un cero de función.

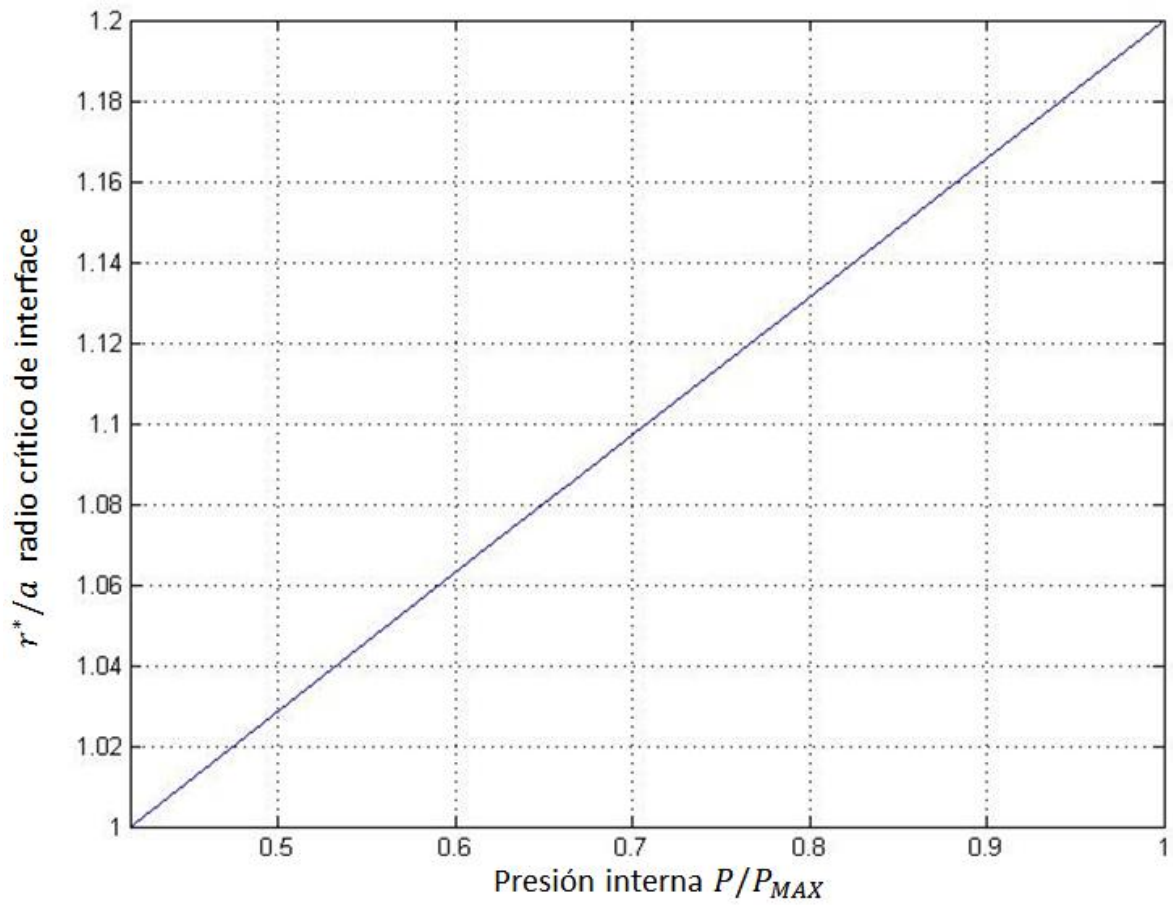
En la figura 3.14 se muestra la relación  $r^*$  con presión interna, en los intervalos descritos anteriormente. Su comportamiento también es aproximadamente lineal a medida que aumenta la presión.

En la figura 3.15 se muestra el campo de esfuerzos. Para el caso bilineal con propiedades de la tabla 3.1, al igual que el del problema del cilindro sin considerar corte, los esfuerzos  $\sigma_r$  y  $\sigma_\theta$  sufren una caída en magnitud con respecto al caso lineal, pero en cuanto al campo de esfuerzos en general, al ser  $\sigma_\phi$  equivalente a  $\sigma_\theta$ , el descenso en magnitud de los esfuerzos se atenúa. Esto último es muy importante para apreciar el campo de deformaciones. Para los distintos grados de endurecimiento se aprecia lo visto anteriormente: los cambios en las distintas componentes del esfuerzo cambian de manera más abrupta. De la misma forma que en el problema del capítulo anterior, la presión interna no afecta en el comportamiento ni en magnitud a los componentes del esfuerzo  $\sigma_r$  y  $\sigma_\theta$ , que se comportan igual que lo mostrado en 3.15, manteniendo constante el grado de rigidez.

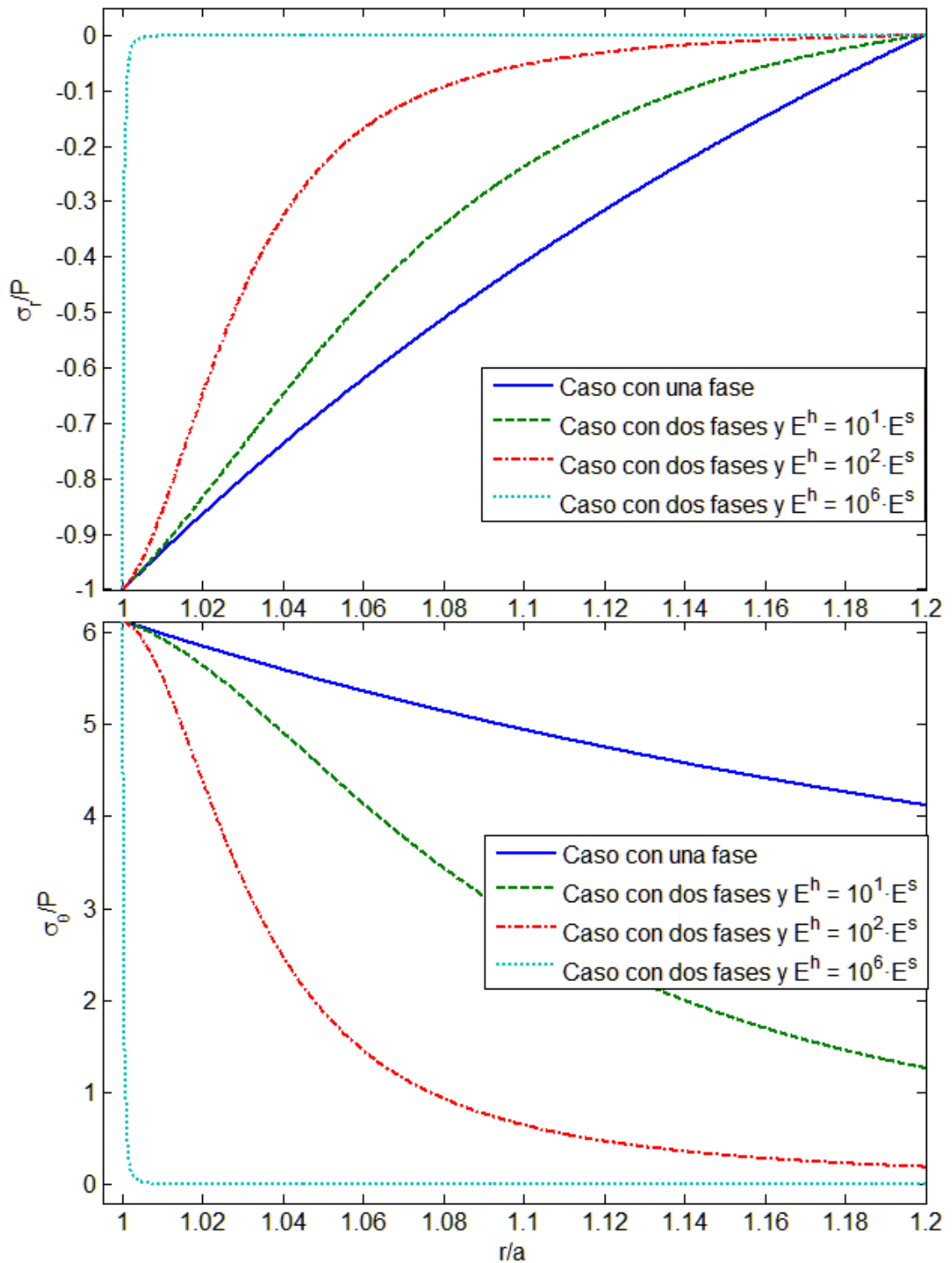
En la figura 3.16 se ve el comportamiento de  $\sigma_\theta$  variando el espesor de la pared de la esfera hueca. Para el caso de medio semi-infinito el esfuerzo es atenuado, mientras que para una pared delgada el esfuerzo es miles de veces mayor.

En la figura 3.17 se puede apreciar el comportamiento de las componentes del tensor de deformaciones en función de  $r$  en las coordenadas angulares  $\theta$  y  $\phi$ . Hay un descenso notoriamente más leve que el visto en el caso del problema del cilindro de sección circular del capítulo anterior. Esto puede suceder debido a lo explicado de que el campo de esfuerzos disminuye en su totalidad, no así lo visto en el problema del cilindro.

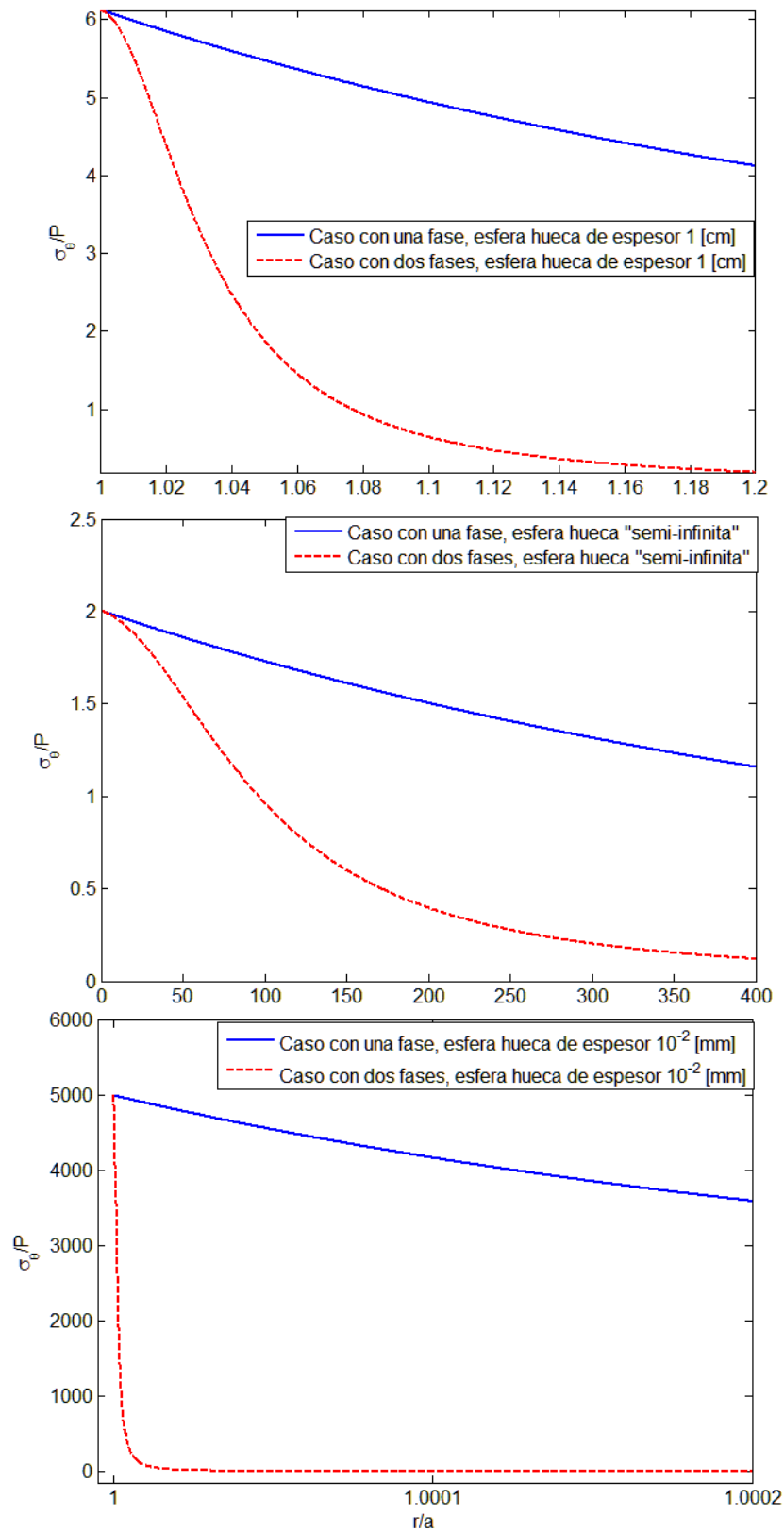
En la figura 3.18 finalmente se muestran los componentes del campo de deformación para distintas presiones internas.



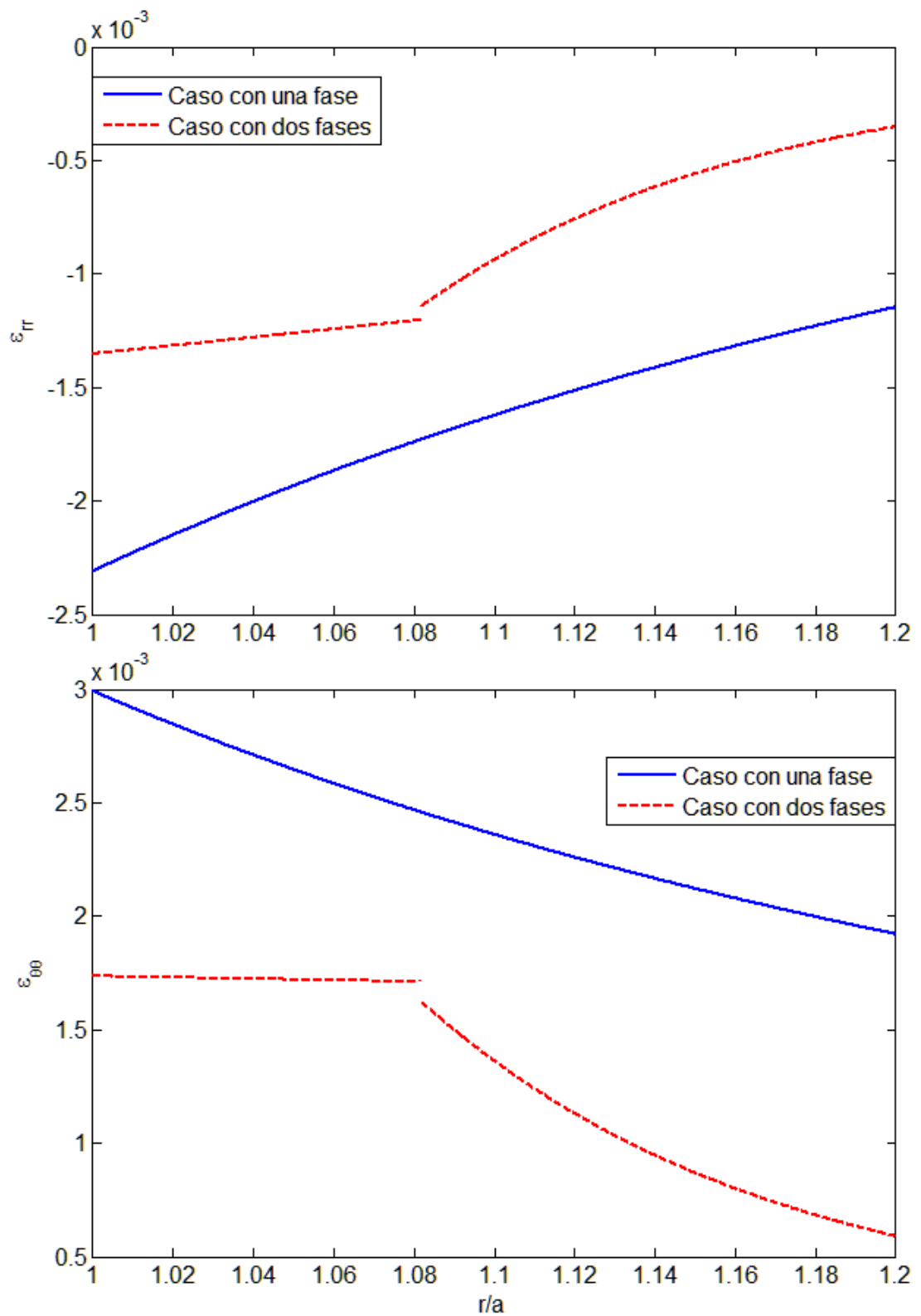
**Figura 3.14:** Relación entre  $r^*$  radio crítico de interface y la presión interna adimensionalizada con  $P_{MAX}$  igual a 580 [MPa].



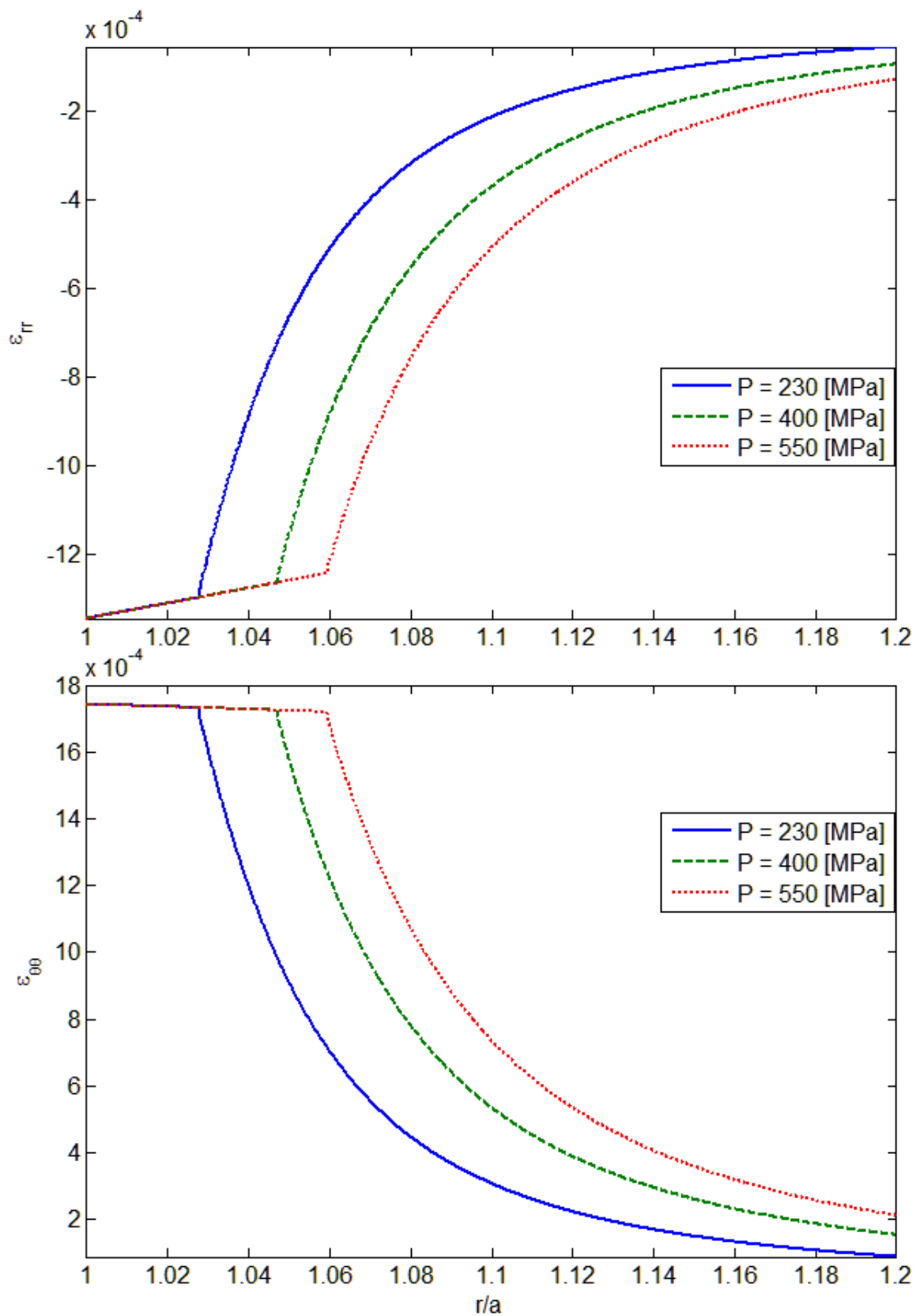
**Figura 3.15:** Curvas de esfuerzos normalizados obtenidas para el caso de un material con dos fases considerando distintos grados de endurecimiento de  $E^h$  con respecto a  $E^s$  (y  $\nu^h$  disminuyéndolo con respecto a  $\nu^s$  en la misma magnitud que  $E^h$  con  $E^s$ ), y comparación con la teoría lineal considerando una sola fase, para una presión de 230 [MPa] y con espesor de esfera de 1 [cm].



**Figura 3.16:** Curvas de esfuerzo normalizado  $\sigma_\theta$  obtenidas para el caso de esferas huecas de distintos espesores, para propiedades mecánicas mostradas en Tabla 3.1 y una presión de 230 [MPa].



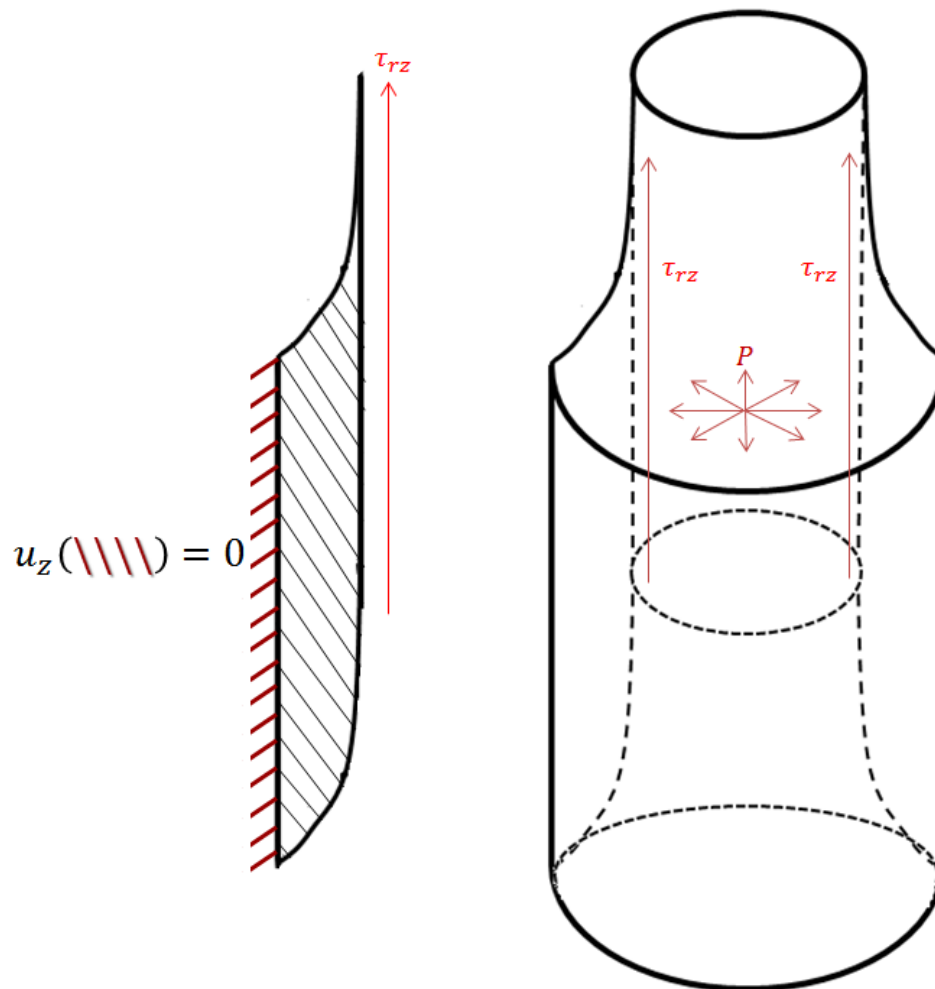
**Figura 3.17:** Componentes del tensor de deformaciones para el caso de dos fases, y comparación con la teoría lineal con una fase para una presión de 230 [MPa] y propiedades de la tabla 3.1.



**Figura 3.18:** Campo de deformaciones obtenidos considerando espesor de esfera de 1 [cm], considerando  $E^h$  cien veces  $E^s$  (y  $\nu^h$  una centésima parte  $\nu^s$ ), para distintas presiones internas.

### 3.2.3. Tubo de sección circular bajo el efecto de presión interna y corte longitudinal

Se considera el problema de un tubo circular de radio interior  $a$  y exterior  $b$ , sometido tanto a presión interna  $P$  como a corte longitudinal  $\tau_{rz} = \tau_0$  en el manto interior, y en el manto exterior con condición de no desplazamiento en la misma dirección que esta carga.



*Figura 3.19: Tubo de sección circular bajo el efecto de presión interna y corte longitudinal.*

Los campos de esfuerzos y de desplazamiento asumidos para el presente problema son:



$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_r(r) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \sigma_\theta(r) \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \sigma_z(r) \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + \tau_{rz}(r) \cdot (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r) \quad 3.53$$

$$\mathbf{u} = u_r(r) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + u_z(r) \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \quad 3.54$$

Se asume también que  $\varepsilon_{zz} = 0$ . Luego el campo de deformaciones y de esfuerzos resultantes de utilizar las ecuaciones 2.5 y 2.13 son:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = 0, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \frac{du_z}{dr} \quad 3.55$$

$$\sigma_\theta(r) = r \cdot \sigma_r'(r) + \sigma_r(r), \quad \tau_{rz}(r) = \frac{K_{rz}}{r}, \quad 3.56$$

con  $K_{rz}$  una constante, que se determina evaluando el esfuerzo  $\tau_{rz}$  en  $a$ , quedando

$$\tau_{rz}(a) = \frac{K_{rz}}{a} = -\tau_0 \Rightarrow K_{rz} = -a \cdot \tau_0. \quad 3.57$$

Se utiliza el criterio de esfuerzo principal máximo para determinar en qué posición  $r$  se encuentra el radio crítico  $r^*$ , es decir, en qué punto el esfuerzo principal máximo alcanza  $\sigma_0$ . Dicho esfuerzo además es continuo en ese punto (en el problema 3.2.1  $\sigma_\theta$  lo es, pues es el esfuerzo principal máximo de ese problema, en el presente problema no es el caso).

Las ecuaciones obtenidas de la ecuación constitutiva bilineal son exactamente las mismas que para el problema sin corte en el caso de las coordenadas  $r$  y  $\theta$  (ecuaciones 3.6, 3.7, 3.9 y 3.10), sin embargo para la componente  $z$  son, para la fase rígida y flexible respectivamente:

$$0 = \varepsilon_z^l + \left( \frac{1 + \nu^h}{E^h} \right) (\sigma_z^h - \sigma_z^l) - \left( \frac{\nu^h}{E^h} \right) [\sigma_r^h + \sigma_\theta^h + \sigma_z^h - (\sigma_r^l + \sigma_\theta^l + \sigma_z^l)], \quad 3.58$$

$$0 = \left( \frac{1 + \nu^s}{E^s} \right) \sigma_z^s - \left( \frac{\nu^s}{E^s} \right) [\sigma_r^s + \sigma_\theta^s + \sigma_z^s]. \quad 3.59$$

De 3.59 se obtiene que

$$\sigma_z^s = \nu^s(\sigma_r^s + \sigma_\theta^s). \quad 3.60$$

De la ecuación 3.14, utilizando la derivada de 3.60, igualando con 3.9 y ordenando términos se tiene la misma ecuación diferencial 3.15, por lo que las componentes del campo de esfuerzos para la fase flexible son:

$$\sigma_r^s(r) = \frac{K^s}{2}(b^{-2} - r^{-2}), \quad 3.61$$

$$\sigma_\theta^s(r) = \frac{K^s}{2}(b^{-2} + r^{-2}), \quad 3.62$$

$$\sigma_z^s = \frac{K^s \nu^s}{b^2}, \quad 3.63$$

con  $K^s$  una constante a determinar. Evaluando en la interface los esfuerzos en  $r^*$  se obtienen los esfuerzos  $\sigma_i^l$  y las deformaciones  $\varepsilon_i^l$  de interface:

$$\sigma_r^l = \frac{K^s}{2}(b^{-2} - r^{*-2}), \quad \sigma_\theta^l = \frac{K^s}{2}(b^{-2} + r^{*-2}), \quad \sigma_z^l = \sigma_z^s, \quad 3.64$$

$$\varepsilon_r^l = \left(\frac{1 + \nu^s}{E^s}\right) \sigma_r^l - \left(\frac{\nu^s}{E^s}\right) K^s b^{-2}(1 + \nu^s), \quad 3.65$$

$$\varepsilon_\theta^l = \left(\frac{1 + \nu^s}{E^s}\right) \sigma_\theta^l - \left(\frac{\nu^s}{E^s}\right) K^s b^{-2}(1 + \nu^s), \quad 3.66$$

$$\varepsilon_z^l = 0. \quad 3.67$$

Para el esfuerzo de corte en  $rz$ , fase flexible, se tiene que:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{du_z^s}{dr} = -\left(\frac{1 + \nu^s}{E^s}\right) \tau_0 a \cdot r^{-1} - \left(\frac{\nu^s}{E^s}\right) K^s b^{-2}(1 + \nu^s). \quad 3.68$$

Despejando  $u_z^s$  se tiene que:

$$u_z^s = -2 \left( \frac{1 + \nu^s}{E^s} \right) \tau_0 a \cdot \ln r - 2 \left( \frac{\nu^s}{E^s} \right) K^s b^{-2} (1 + \nu^s) r + C_2, \quad 3.69$$

con  $C_2$  una constante producto de la integración realizada, que se debe determinar.

Para el caso de la fase rígida se tiene que el esfuerzo en  $z$  es el mostrado en 3.23, y  $\sigma_r$  queda determinado bajo la misma ecuación diferencial que 3.25, definiendo de la misma forma  $\xi_1$  y  $\xi_2$ . Luego, las componentes del campo de esfuerzos quedan como:

$$\sigma_r^h(r) = \frac{K^h}{2} (a^{-2} - r^{-2}) + \frac{\xi_2}{2\xi_1} \ln \left( \frac{a}{r} \right) - P, \quad 3.70$$

$$\sigma_\theta^h(r) = \frac{K^h}{2} (a^{-2} + r^{-2}) + \frac{\xi_2}{2\xi_1} \left[ \ln \left( \frac{a}{r} \right) - 1 \right] - P, \quad 3.71$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^h(r) = \nu_1 \left( K^h a^{-2} + \frac{\xi_2}{2\xi_1} \left[ 2 \ln \left( \frac{a}{r} \right) - 1 \right] - 2P \right) + (1 + \nu^h) \sigma_z^l \\ - \nu^h (\sigma_r^l + \sigma_\theta^l + \sigma_z^l), \end{aligned} \quad 3.72$$

con  $K^h$  una constante a determinar. Para  $u_z^h$  se obtiene de la misma forma que  $u_z^s$ , obteniendo:

$$\begin{aligned} u_z^h(r) = \frac{2r}{E^h} \left( 4P - 2K^h a^{-2} - \frac{\xi_2}{2\xi_1} \left[ 2 \ln \left( \frac{a}{r} \right) + 1 \right] + \varepsilon_{rz}^l E^h - 2\tau_0 a \ln r \right. \\ \left. + 2\tau_{rz}^l \right) + C_1, \end{aligned} \quad 3.73$$

con  $C_1$  una constante por determinar producto de la integración, y donde  $\varepsilon_{rz}^l$ ,  $\tau_{rz}^l$  la deformación y el esfuerzo de corte en  $rz$  evaluado en el radio crítico  $r^*$ .

Obtenidos los esfuerzos y deformaciones de la ecuación constitutiva, se tiene que hay exactamente 3 incógnitas para el cálculo de los esfuerzos y de la interface:  $K^h$ ,  $K^s$  y  $r^*$ ; y 2 para obtener  $u_z^s$  que se deja propuesto de calcular, y no es de real interés para esta investigación, pues se enfoca en determinar los componentes de los campos de esfuerzos y de deformaciones.

La primera condición es utilizar el hecho que  $\sigma_r$  es continuo en la interface, luego se puede despejar  $K^s$  en función de  $K^h$  como:

$$K^s = (b^{-2} - r^{*2})^{-1} \left[ K^h (a^{-2} + r^{*-2}) + \frac{\xi_2}{2\xi_1} \ln \left( \frac{a}{r^*} \right) - P \right]. \quad 3.74$$

La segunda condición es que el esfuerzo principal máximo sea continuo. Para ello es necesario obtener los esfuerzos principales. Se tiene que los invariantes del campo de esfuerzos de la zona flexible y la zona rígida están definidos por:

$$I = \text{tr } \mathbf{T}, \quad II = \frac{1}{2} [(\text{tr } \mathbf{T})^2 - \text{tr } \mathbf{T}^2], \quad III = \det \mathbf{T}. \quad 3.75$$

Luego, los esfuerzos principales son los valores de  $\sigma$  que se obtienen de la ecuación:

$$\sigma^3 - I\sigma^2 + II\sigma - III = 0. \quad 3.76$$

De esta ecuación se obtienen 3 valores para cada fase, y el esfuerzo principal máximo para cada una es el mayor en magnitud de los 3. Se deben igualar para las 2 fases y se obtiene la segunda ecuación para resolver las 3 incógnitas.

La tercera ecuación se obtiene de igualar los desplazamientos  $u_r^h$  y  $u_r^s$ , fase rígida y flexible, en  $r^*$ .

La imposibilidad de despejar las últimas dos ecuaciones de manera exacta dada la complejidad algebraica, hace necesario el uso de métodos numéricos. El método se explica en la tabla 3.2.

**Tabla 3.2: Método de obtención de  $r^*$ .**

1. Se define la variable  $K^h$  que se variará **(ciclo 1)**.
2. Se buscan  $K^s$  y  $r^*$  correctos tal que se cumpla la ecuación 3.74 y las condiciones de continuidad de máximo esfuerzo principal y de desplazamiento **(ciclo 2)** (ver anexo 7.2 Método de Newton-Broyden de paso reducido).
3. Si no se obtiene solución con el método ocupado en el ciclo 2, se vuelve al punto 1.

En el gráfico de  $\sigma_z$  de la figura 3.20 se aprecia un aumento en su magnitud a medida que aumenta el corte, tanto para la zona rígida como la flexible. Además se puede apreciar como varía la interface en la posición donde ocurre el salto de la magnitud en cada caso.

Para efectos de este problema, ya mostrados los resultados de un tubo circular sometido a presión interna sin corte, solo se muestran los esfuerzos en  $r$ ,  $\theta$  y  $z$  para distintos

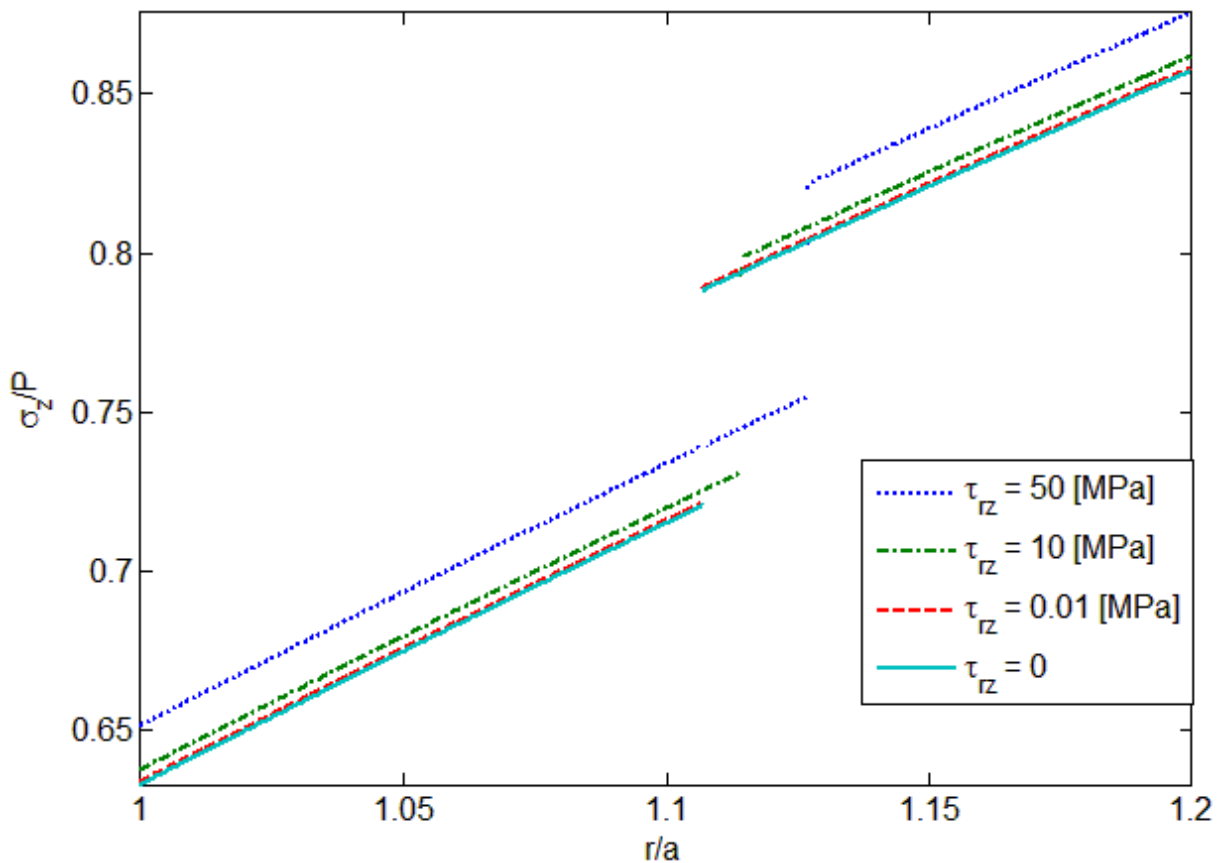
valores de  $\tau_0$  en la figura 3.20 y 3.21, considerando propiedades de la tabla 3.1 y carga de presión de 220 [MPa].

Cabe mencionar que la relación  $P$  versus  $r^*$  con  $\tau_0$  es similar al caso del tubo cilíndrico sin corte. También existe una relación entre  $\tau_0$  y  $r^*$  para  $P$  constante, que se puede observar en la figura 3.20 o en la 3.21.

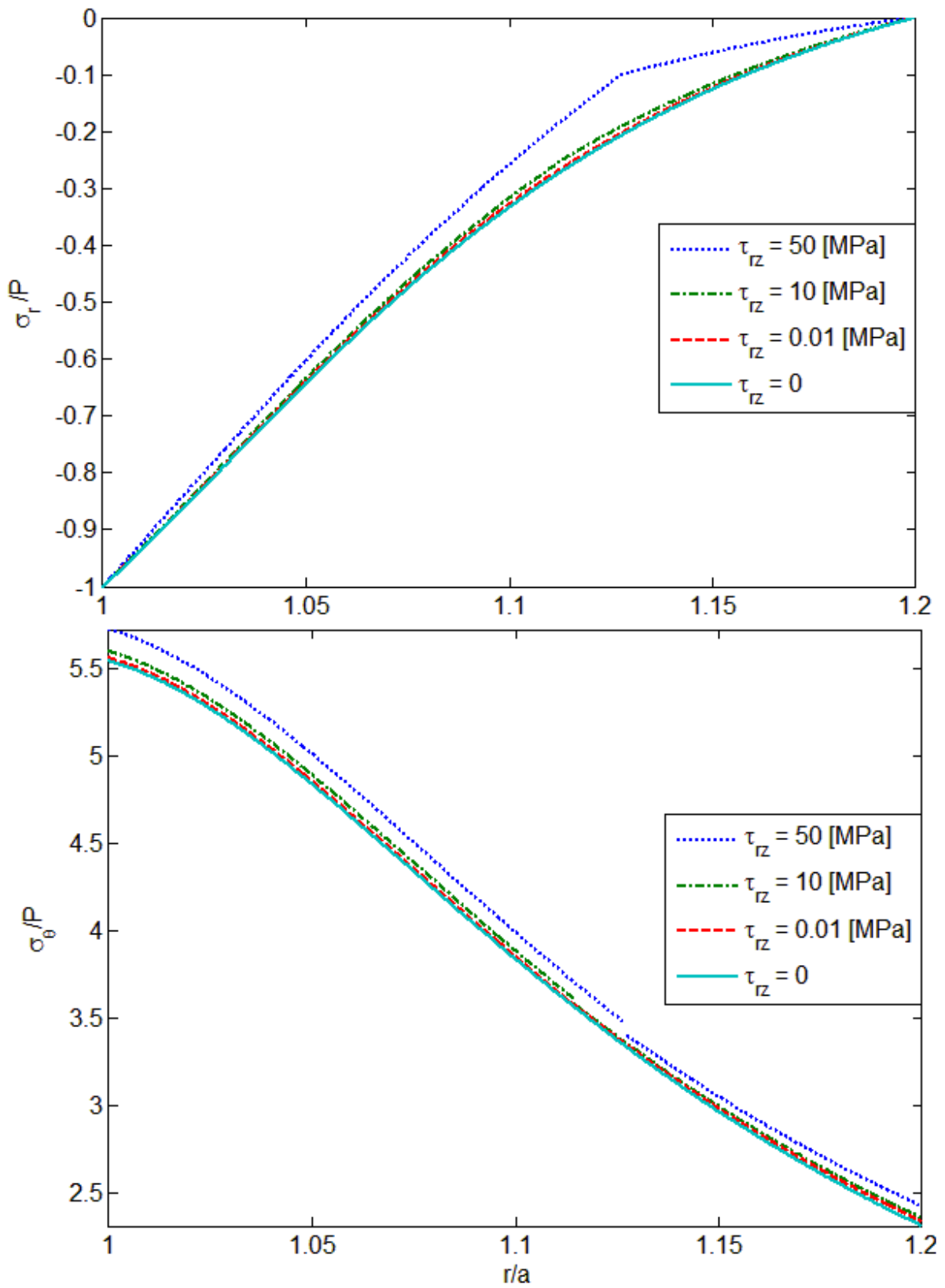
Se puede apreciar fácilmente el radio crítico  $r^*$  en el gráfico de en  $\sigma_\theta$ , que se acerca al caso sin corte a medida que el esfuerzo de corte es menor. En  $\sigma_r$  se aprecia que a medida que el esfuerzo de corte aumenta, se produce el cambio de fase más cerca de  $r = b$ . Se aprecia el cambio de comportamiento del esfuerzo después de  $r^*$ , y que mientras más alto es el valor del corte, el comportamiento en la fase flexible es menos variable, y en el caso de  $\tau_{rz}$  más pequeño el esfuerzo radial se asemeja más al que no considera corte. Las diferencias son producidas principalmente por la distinta definición que se le dio al campo de desplazamientos y deformación en  $z$ .

En  $\sigma_\theta$  se aprecia que mientras más alto es la magnitud del corte, el cambio de magnitud de  $\sigma_\theta$  es más drástico y existe un mayor esfuerzo.

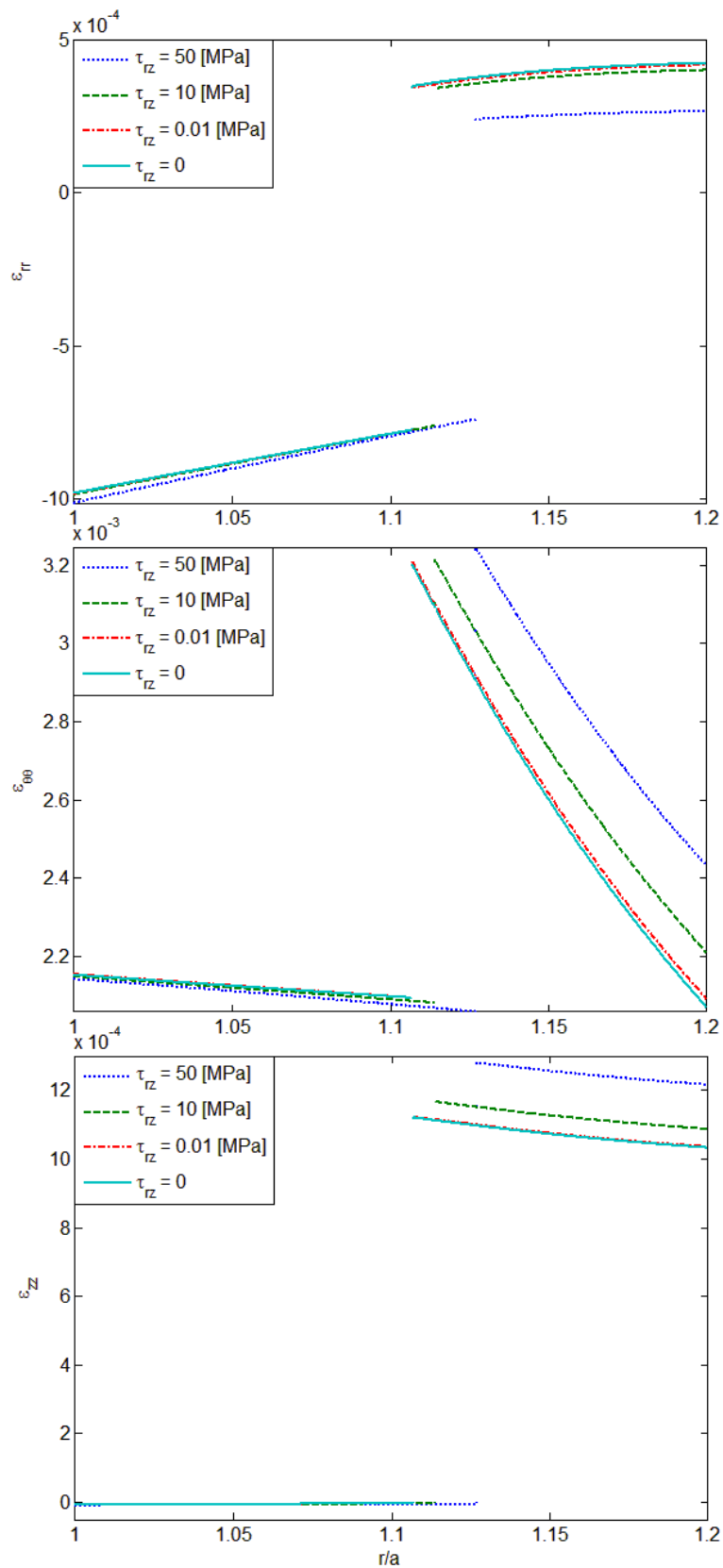
En la figura 3.22 se muestran los componentes del campo de deformaciones.



**Figura 3.20:** Gráfico del esfuerzo normalizado  $\sigma_z$  para el problema de un tubo circular sometido a una presión interna de 200 [MPa] y distintos esfuerzos de corte longitudinales, con propiedades de la tabla 3.1.



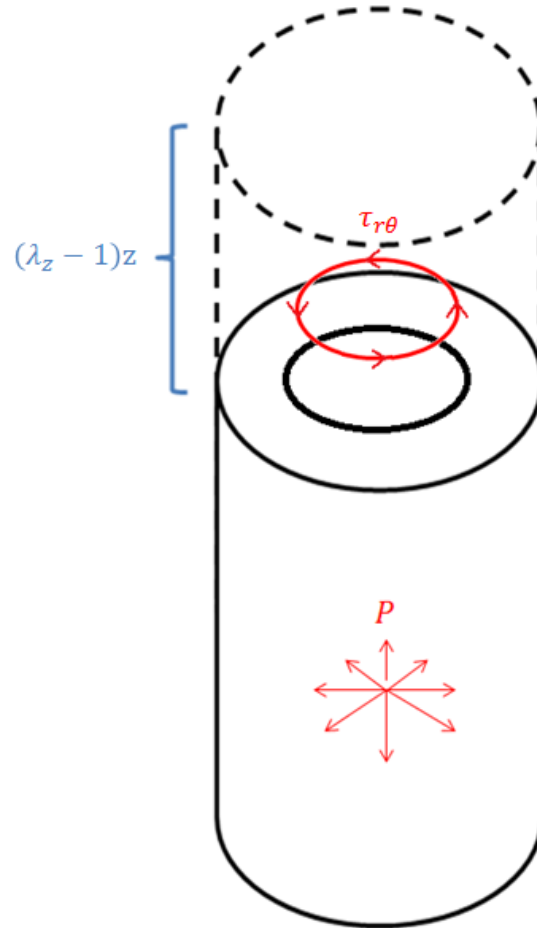
**Figura 3.21:** Gráfico de los esfuerzos normalizados  $\sigma_r$  y  $\sigma_\theta$  para el problema de un tubo circular sometido a una presión interna de 200 [MPa] y distintos esfuerzos de corte longitudinales, con propiedades de la tabla 3.1.



**Figura 3.22:** Gráfico de los componentes del campo de deformaciones para el problema de un tubo circular sometido a una presión interna de 200 [MPa] y distintos esfuerzos de corte longitudinales, con propiedades de la tabla 3.1.

### 3.2.4. Tubo de sección circular bajo el efecto de presión interna, torsión de manto interno y alargamiento

Se considera el problema de un tubo circular de radio interior  $a$  y exterior  $b$ , sometido tanto a presión interna  $P$  como a una torsión dada por el corte azimutal  $\tau_{r\theta} = \tau_0$  en el manto interior, y en el manto exterior con condición de no desplazamiento en la misma dirección que esta carga.



**Figura 3.23:** Tubo de sección cilíndrica bajo el efecto de presión interna, extensión y corte azimutal.

Los campos de esfuerzos y de desplazamiento asumidos para el presente problema son:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_r(r) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \sigma_\theta(r) \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \sigma_z(r) \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + \tau_{r\theta}(r) \cdot (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r), \quad 3.77$$

$$\mathbf{u} = u_r(r) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + u_\theta(r) \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + (\lambda_z - 1)z \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z. \quad 3.78$$



Luego el campo de deformaciones y de esfuerzos resultantes de utilizar las ecuaciones 2.5 y 2.13 son:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \lambda_z - 1, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r} \right), \quad 3.79$$

$$\sigma_\theta(r) = r \cdot \sigma_r'(r) + \sigma_r(r), \quad \tau_{r\theta}(r) = \frac{K_{r\theta}}{r}, \quad 3.80$$

con  $K_{r\theta}$  constante que se determina evaluando el esfuerzo  $\tau_{r\theta}$  en  $a$ , quedando

$$\tau_{r\theta}(a) = \frac{K_{r\theta}}{a} = -\tau_0 \Rightarrow K_{r\theta} = -a \cdot \tau_0. \quad 3.81$$

Se utiliza el criterio de esfuerzo principal máximo para determinar en qué posición  $r$  se encuentra el radio crítico  $r^*$ , es decir, en qué punto el esfuerzo principal máximo alcanza  $\sigma_0$ . Dicho esfuerzo además es continuo en ese punto

Las ecuaciones obtenidas de la ecuación constitutiva bilineal son exactamente las mismas que para el problema sin corte en el caso de las coordenadas  $r$  y  $\theta$  (ecuaciones 3.6, 3.7, 3.9 y 3.10), sin embargo para la componente  $z$  son, para la fase rígida y flexible respectivamente:

$$\begin{aligned} \lambda_z - 1 = \varepsilon_z^l + \left( \frac{1 + \nu^h}{E^h} \right) (\sigma_z^h - \sigma_z^l) \\ - \left( \frac{\nu^h}{E^h} \right) [\sigma_r^h + \sigma_\theta^h + \sigma_z^h - (\sigma_r^l + \sigma_\theta^l + \sigma_z^l)], \end{aligned} \quad 3.82$$

$$\lambda_z - 1 = \left( \frac{1 + \nu^s}{E^s} \right) \sigma_z^s - \left( \frac{\nu^s}{E^s} \right) [\sigma_r^s + \sigma_\theta^s + \sigma_z^s]. \quad 3.83$$

De 3.83 se obtiene que

$$\sigma_z^s = E^s(\lambda_z - 1) + \nu^s(\sigma_r^s + \sigma_\theta^s). \quad 3.84$$

De la ecuación 3.14, utilizando la derivada de 3.60, igualando con 3.9 y ordenando términos se tiene la misma ecuación diferencial 3.15, por lo que las componentes del campo de esfuerzos para la fase flexible son:

$$\sigma_r^s(r) = \frac{K^s}{2}(b^{-2} - r^{-2}), \quad 3.85$$

$$\sigma_\theta^s(r) = \frac{K^s}{2}(b^{-2} + r^{-2}), \quad 3.86$$

$$\sigma_z^s = E^s(\lambda_z - 1) + \frac{K^s \nu^s}{b^2}, \quad 3.87$$

con  $K^s$  una constante a determinar. Evaluando en la interface los esfuerzos en  $r^*$  se obtienen los esfuerzos  $\sigma_i^l$  y las deformaciones  $\varepsilon_i^l$  de interface:

$$\sigma_r^l = \frac{K^s}{2}(b^{-2} - r^{*-2}), \quad \sigma_\theta^l = \frac{K^s}{2}(b^{-2} + r^{*-2}), \quad \sigma_z^l = \sigma_z^s, \quad 3.88$$

$$\varepsilon_r^l = \left(\frac{1 + \nu^s}{E^s}\right) \sigma_r^l - \left(\frac{\nu^s}{E^s}\right) K^s b^{-2} (1 + \nu^s), \quad 3.89$$

$$\varepsilon_\theta^l = \left(\frac{1 + \nu^s}{E^s}\right) \sigma_\theta^l - \left(\frac{\nu^s}{E^s}\right) K^s b^{-2} (1 + \nu^s), \quad 3.90$$

$$\varepsilon_z^l = \lambda_z - 1. \quad 3.91$$

Para el esfuerzo de corte en  $r\theta$ , fase flexible, se tiene que:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{du_\theta^s}{dr} - \frac{u_\theta^s}{r} \right) = \left( \frac{1 + \nu^s}{E^s} \right) \tau_{r\theta}^s. \quad 3.92$$

Resolviendo la ecuación diferencial se obtiene:

$$u_\theta^s = -\frac{(1 + \nu^s)a^2 \tau_0}{E^s r} + K_\theta^s r, \quad 3.93$$

con  $K_{\theta}^s$  una constante producto de la integración realizada, que se determina asumiendo que:

$$u_{\theta}^s(b) = 0 \Rightarrow K_{\theta}^s = \frac{(1 + \nu^s)a^2\tau_0}{E^s b^2}, \quad 3.94$$

Por lo que 3.93 queda:

$$u_{\theta}^s(r) = \frac{(1 + \nu^s)a^2\tau_0}{E^s} \left( \frac{r}{b^2} - \frac{1}{r} \right). \quad 3.95$$

De la misma forma para la zona rígida se tiene que:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{du_{\theta}^h}{dr} - \frac{u_{\theta}^h}{r} \right) = \varepsilon_{r\theta}^l + \left( \frac{1 + \nu^h}{E^h} \right) (\tau_{r\theta}^h - \tau_{r\theta}^l), \quad 3.96$$

cuya solución es:

$$u_{\theta}^h(r) = r \left\{ K_{\theta}^h - \frac{a^2(1 + \nu^h)\tau_0}{E^h r^2} + \frac{2a^2[E^h(1 + \nu^s) - E^s(1 + \nu^h)]\tau_0}{E^h E^s r^{*2}} \ln r \right\}. \quad 3.97$$

Evaluando 3.97 en  $r^*$  se tiene que:

$$u_{\theta}^h(r^*) = r^* \left\{ K_{\theta}^h - \frac{a^2(1 + \nu^h)\tau_0}{E^h r^{*2}} + \frac{2a^2[E^h(1 + \nu^s) - E^s(1 + \nu^h)]\tau_0}{E^h E^s r^{*2}} \ln r^* \right\}, \quad 3.98$$

y de 3.95 se tiene:

$$u_{\theta}^s(r^*) = \frac{(1 + \nu^s)a^2\tau_0}{E^s} \left( \frac{r^*}{b^2} - \frac{1}{r^*} \right). \quad 3.99$$

Una de los criterios asumidos para la interface  $r = r^*$  es que el desplazamiento azimutal en dicha posición radial sea continuo. Entonces se pueden igualar 3.98 y 3.99, despejando  $K_\theta^h$ . Finalmente 3.97 queda:

$$u_\theta^h(r) = \frac{a^2 \tau_0}{E^s} \left\{ \frac{r(1 + \nu^s)}{b^2} - \left[ \frac{E^h r^2 (1 + \nu^s) - E^s (r^2 - r^{*2}) (1 + \nu^h)}{E^h r r^{*2}} \right] + \frac{2r [E^h (1 + \nu^s) - E^s (1 + \nu^h)] \tau_0}{E^h E^s r^{*2}} \ln(r/r^*) \right\}. \quad 3.100$$

Para el caso de la fase rígida se tiene que el esfuerzo en  $z$  es el mostrado en 3.23, y  $\sigma_r$  queda determinado bajo la misma ecuación diferencial que 3.25, definiendo de la misma forma  $\xi_1$  y  $\xi_2$ . Luego, las componentes del campo de esfuerzos quedan:

$$\sigma_r^h(r) = \frac{K^h}{2} (a^{-2} - r^{-2}) + \frac{\xi_2}{2\xi_1} \ln\left(\frac{a}{r}\right) - P, \quad 3.101$$

$$\sigma_\theta^h(r) = \frac{K^h}{2} (a^{-2} + r^{-2}) + \frac{\xi_2}{2\xi_1} \left[ \ln\left(\frac{a}{r}\right) - 1 \right] - P, \quad 3.102$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^h(r) = & \nu^h \left( K^h a^{-2} + \frac{\xi_2}{2\xi_1} \left[ 2 \ln\left(\frac{a}{r}\right) - 1 \right] - 2P \right) + (1 + \nu^h) \sigma_z^l \\ & - \nu^h (\sigma_r^l + \sigma_\theta^l + \sigma_z^l). \end{aligned} \quad 3.103$$

Obtenidos los esfuerzos y deformaciones de la ecuación constitutiva, se tiene que hay exactamente 3 incógnitas para el cálculo de los esfuerzos y de la interface:  $K^h$ ,  $K^s$  y  $r^*$ .

La primera condición es utilizar que  $\sigma_r$  es continuo en la interface, luego se puede despejar  $K^s$  en función de  $K^h$  como:

$$K^s = (b^{-2} - r^{*2})^{-1} \left[ K^h (a^{-2} + r^{*-2}) + \frac{\xi_2}{2\xi_1} \ln\left(\frac{a}{r^*}\right) - P \right]. \quad 3.104$$

La segunda condición es que el esfuerzo principal máximo sea continuo. Para ello es necesario obtener los esfuerzos principales. Se tiene que los invariantes del campo de esfuerzos de la zona flexible y la zona rígida están definidos por la ecuación 3.75.

Luego, los esfuerzos principales son los valores de  $\sigma$  que se obtienen de la ecuación 3.76. En el que se obtienen 3 valores para cada fase, y el esfuerzo principal máximo para

cada una es el mayor de los 3. Se deben igualar para las 2 fases y se obtiene la segunda ecuación para resolver las 3 incógnitas.

La tercera ecuación se obtiene de igualar los desplazamientos  $u_r^h$  y  $u_r^s$ , fase rígida y flexible, en  $r^*$ .

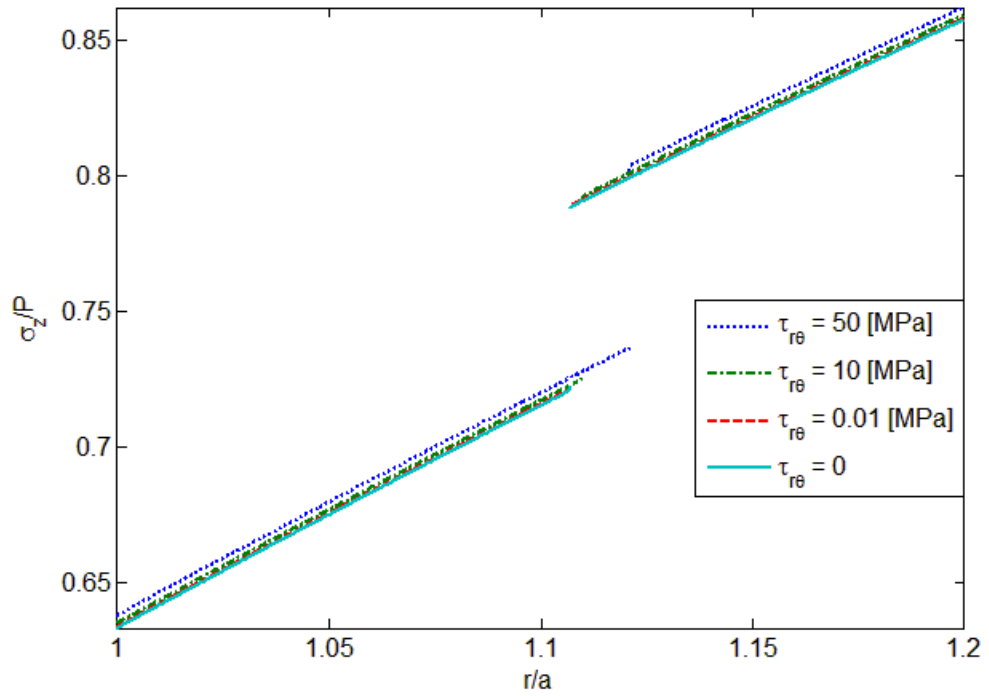
En este problema también la imposibilidad de despejar las últimas dos ecuaciones dada la complejidad algebraica hace necesario ocupar métodos numéricos como el método de Newton-Broyden de paso reducido.

Se puede ver que pasa algo muy parecido con el problema de corte longitudinal en cuanto uno aplica una carga cortante cada vez mayor. Ahora, hay diferencias con respecto a dicho problema, y son producidas principalmente por la distinta definición que se le dio al campo de desplazamientos y deformación en  $z$ . En  $\sigma_\theta$  se aprecia que mientras más alto es la magnitud del corte, el cambio de magnitud de  $\sigma_\theta$  es más drástico y existe un mayor esfuerzo.

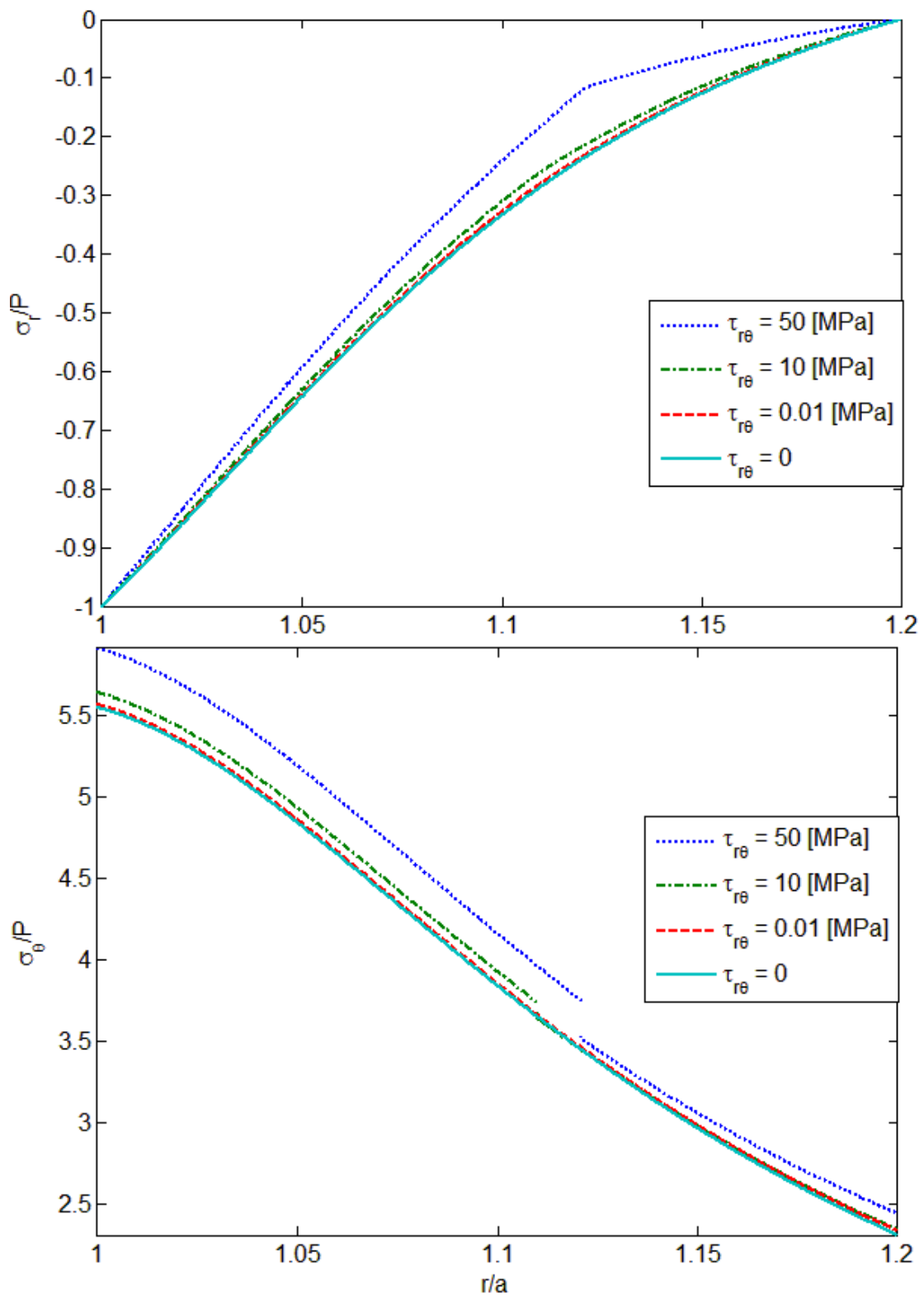
En adición se puede ver que, a diferencia de los gráficos de la figura 3.20 y 3.21 del problema de corte  $\tau_{rz}$ , en las figuras 3.24 y 3.25 existe una mayor influencia del esfuerzo cortante por torsión de este caso en los esfuerzos  $\sigma_r$  y  $\sigma_\theta$ , y principalmente en este último, donde la magnitud de todo el esfuerzo, y el salto de magnitud en la interface, son apreciablemente mayores que en el caso de corte longitudinal. Esto también se aprecia comparando las figuras 3.22 y 3.26

En el gráfico de  $\sigma_z$  de la figura 3.24 se aprecia un leve aumento de su magnitud a medida que aumenta el corte, pero mucho menor que en el caso de corte longitudinal.

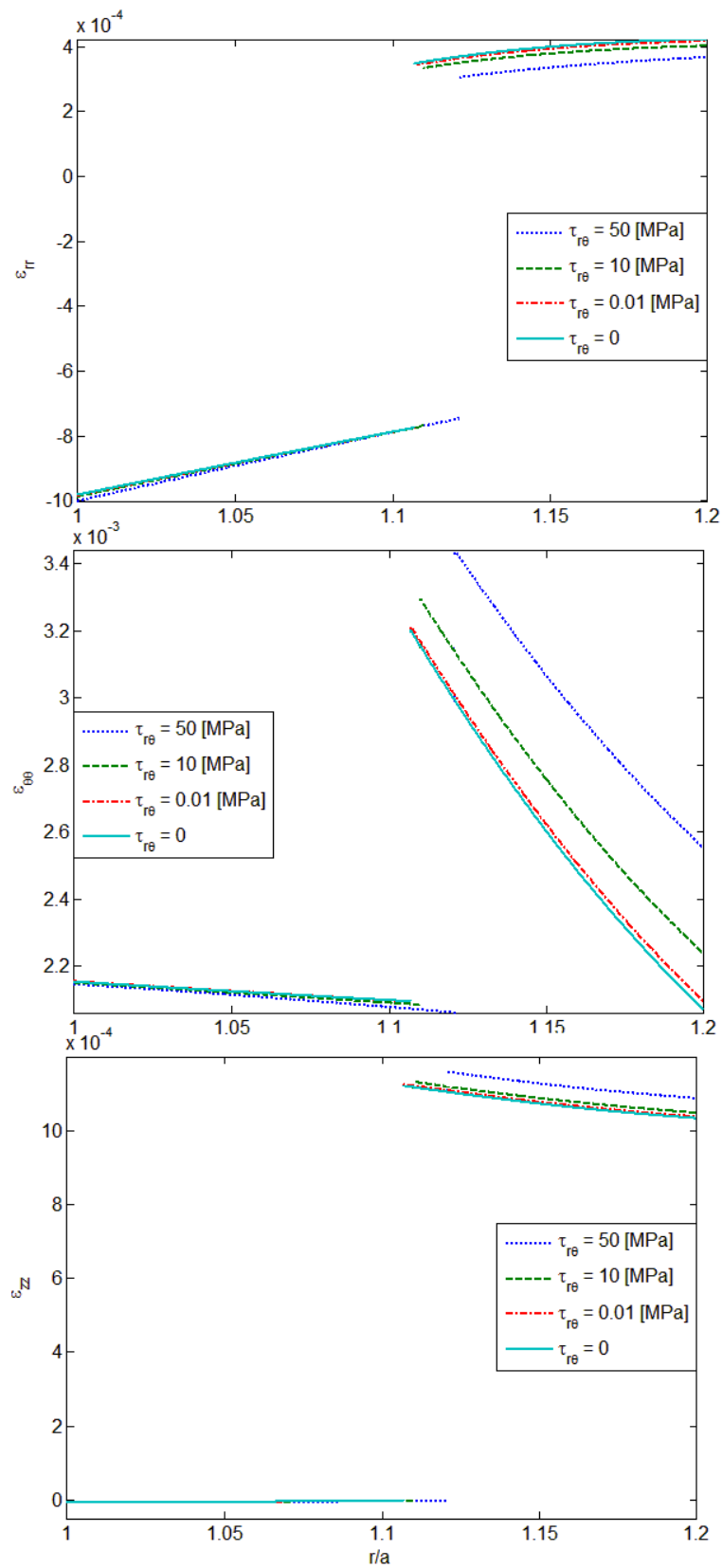
Para efectos de este problema, ya mostrados los resultados de un tubo circular sometido a presión interna sin corte, solo se muestran los esfuerzos en  $r$ ,  $\theta$  y  $z$  para distintos valores de  $\tau_0$  en las figuras 3.24 y 3.25, considerando propiedades de la tabla 3.1 y carga de presión de 220 [MPa].



**Figura 3.24:** Gráfico del esfuerzo normalizado  $\sigma_z$  para el problema de un tubo circular sometido a una presión interna de 200 [MPa] y distintos esfuerzos de corte torsionales, con propiedades de la tabla 3.1.



**Figura 3.25:** Gráfico de los esfuerzos normalizados  $\sigma_r$  y  $\sigma_\theta$  para el problema de un tubo circular sometido a una presión interna de 200 [MPa] y distintos esfuerzos de corte torsionales, con propiedades de la tabla 3.1.



**Figura 3.26:** Gráfico de los componentes del campo de deformaciones para el problema de un tubo circular sometido a una presión interna de 200 [MPa] y distintos esfuerzos de corte torsionales, con propiedades de la tabla 3.1.



### 3.3. Problema bidimensional: Solución parcial del problema de la placa plana con agujero circular bajo el efecto de carga uniforme de tracción aplicada lejos del mismo

Se considera el problema de una placa con agujero circular de radio interior  $a$ , sometida lejos del mismo por una carga vertical uniforme de tracción  $\sigma_0$ , tal como muestra la figura 3.27.

La motivación de estudio del presente problema es la intención de realizar una comparación con resultados obtenidos resolviendo el mismo mediante elementos finitos, en el cuál existe una singularidad con respecto al esfuerzo máximo. Según el método numérico señala que dicho esfuerzo se encuentra, utilizando el sistema coordenado mostrado en 3.22, en  $r = a + \delta$ , con  $\delta$  un valor mayor que 0, y  $\theta = 0^\circ$ . La idea es ver si se cumple eso, y el que no sea exactamente en  $r = a$  sea producto del modelo, o bien concluir que se trata de pequeños errores numéricos.

El presente problema no se pudo resolver de manera completa, por problemas numéricos que se mencionan en el anexo 7.5.

Los campos de esfuerzos y de desplazamiento asumidos para el presente problema son [12]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_r \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \sigma_\theta \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \tau_{r\theta} \cdot (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r), \quad 3.105$$

$$\mathbf{u} = u_r(r, \theta) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + u_\theta(r, \theta) \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta. \quad 3.106$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right). \quad 3.107$$

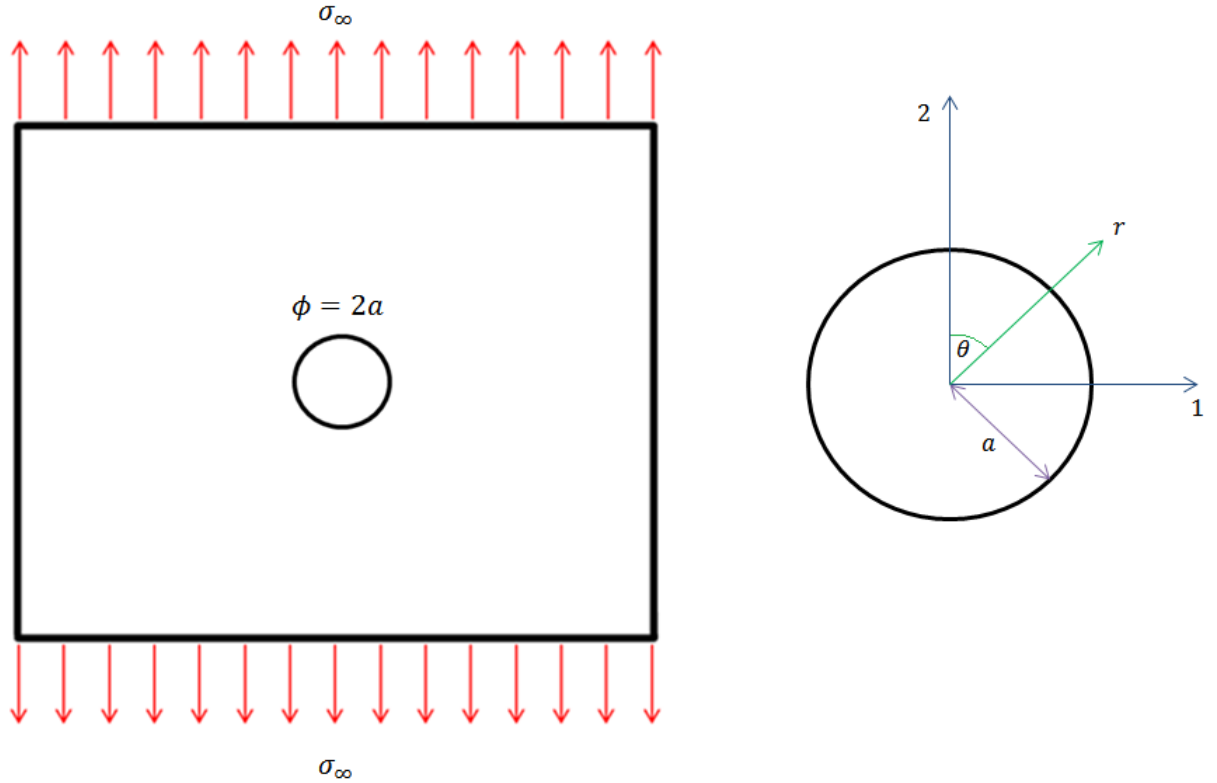
Se utiliza el criterio de esfuerzo principal máximo para determinar en qué posición  $r(\theta)$  se encuentra el radio crítico  $r^* = r^*(\theta)$ , es decir, en qué línea el esfuerzo principal máximo alcanza  $\sigma_0$ . Dicho esfuerzo además es continuo en esa línea.

A partir de la ecuación bilineal 3.1 para  $|\sigma_{i \text{ MAX}}| \leq \sigma_0$ , aplicándole traza y despejando  $\boldsymbol{\sigma}$  se tiene:

$$\text{tr} \boldsymbol{\sigma} = \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \left( \frac{E^s}{1 - 2\nu^s} \right). \quad 3.108$$

Luego, reemplazando esto en la ecuación 3.1 y definiendo  $\alpha^s = \frac{E^s}{1+\nu^s}$  y  $\beta^s = \alpha^s \left( \frac{\nu^s}{1-2\nu^s} \right)$  se tiene la expresión<sup>1</sup> para  $\sigma$ :

$$\sigma = \alpha^s \varepsilon + \beta^s \text{tr} \varepsilon \mathbf{I} \quad 3.109$$



**Figura 3.27:** Esquema del problema de placa plana con agujero circular, y definición del sistema coordenado.

Realizando la misma operación para la ecuación 3.1, ahora para el caso de zona rígida y definiendo  $\alpha^h = \frac{E^h}{1+\nu^h}$  y  $\beta^h = \alpha^h \left( \frac{\nu^h}{1-2\nu^h} \right)$ , se tiene que:

$$\sigma = \alpha^h (\varepsilon - \varepsilon^l) + \beta^h \text{tr} (\varepsilon - \varepsilon^l) \mathbf{I} + \sigma^l. \quad 3.110$$

Además, si se evalúa en  $r^* = r^*(\theta)$  en 3.109 se tiene:

<sup>1</sup> Para efectos de resolución del problema se decide trabajar con el esquema tradicional 3.109 y no el 3.1 debido a que al resolver con este último se tuvo problemas demasiados complejos, en particular un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales muy difícil de resolver incluso desde el punto de vista numérico.

$$\boldsymbol{\sigma}^l = \alpha^s \boldsymbol{\varepsilon}^l + \beta^s \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^l \mathbf{I}, \quad 3.111$$

y al remplazarlo en 3.111, se obtiene la expresión para  $\boldsymbol{\sigma}$  en la zona rígida:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\alpha^s - \alpha^h) \boldsymbol{\varepsilon}^l + (\beta^s - \beta^h) \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + \alpha^h \boldsymbol{\varepsilon}^l + \beta^h \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}. \quad 3.112$$

Luego, la ecuación constitutiva del esfuerzo en función de la deformación es:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{cases} \alpha^s \boldsymbol{\varepsilon} + \beta^s \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} & |\varepsilon_{i_{MAX}}| \leq \varepsilon_0, \\ (\alpha^s - \alpha^h) \boldsymbol{\varepsilon}^l + (\beta^s - \beta^h) \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + \alpha^h \boldsymbol{\varepsilon}^l + \beta^h \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} & |\varepsilon_{i_{MAX}}| > \varepsilon_0. \end{cases} \quad 3.113$$

Lo relativamente nuevo de esta función por partes es que, si bien tiene una similitud con funciones que se ven en plasticidad, no es lo mismo pues en este caso no existe disipación.

Un detalle importante es el cambio de criterio en el que en la ecuación 3.1 giraba en torno a  $\sigma_0$  y que en la 3.113 en torno a  $\varepsilon_0$ . El criterio de cambio de zona de rígida a flexible o viceversa es a través de las deformaciones principales, las cuales se determinan de la misma forma que para los esfuerzos principales, es decir resolviendo la ecuación 3.76 pero remplazando los términos  $\sigma$  por  $\varepsilon$ . Mientras, el valor crítico  $\varepsilon_0$  es exactamente igual a  $\sigma_0/E^s$ .

Las ecuaciones para cada término del tensor de esfuerzos y para cada zona (flexible con el superíndice  $s$  y rígida con  $h$ ) quedan:

$$\begin{aligned} \sigma_r^s &= \alpha^s \varepsilon_r^s + \beta^s (\varepsilon_r^s + \varepsilon_\theta^s), \\ \sigma_r^h &= \alpha^h \varepsilon_r^h + \beta^h (\varepsilon_r^h + \varepsilon_\theta^h) + (\alpha^s - \alpha^h) \varepsilon_r^l + (\beta^s - \beta^h) (\varepsilon_r^l + \varepsilon_\theta^l), \end{aligned} \quad 3.114$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^s &= \alpha^s \varepsilon_\theta^s + \beta^s (\varepsilon_r^s + \varepsilon_\theta^s), \\ \sigma_\theta^h &= \alpha^h \varepsilon_\theta^h + \beta^h (\varepsilon_r^h + \varepsilon_\theta^h) + (\alpha^s - \alpha^h) \varepsilon_\theta^l + (\beta^s - \beta^h) (\varepsilon_r^l + \varepsilon_\theta^l), \end{aligned} \quad 3.115$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}^s &= \alpha^s \varepsilon_{r\theta}^s, \\ \tau_{r\theta}^h &= \alpha^h \varepsilon_{r\theta}^h + (\alpha^s - \alpha^h) \varepsilon_{r\theta}^l. \end{aligned} \quad 3.116$$

De la ecuación 2.5 se tiene el sistema de ecuaciones de equilibrio:

$$\sigma_{r,r} + \frac{\tau_{r\theta,\theta}}{r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad 3.117$$

$$\tau_{r\theta,r} + \frac{\sigma_{\theta,\theta}}{r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0. \quad 3.118$$

Utilizando las ecuaciones 3.114a, 3.115a y 3.116a en 3.117 y en 3.118, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$(\alpha^s + \beta^s) \varepsilon_{r,r}^s + \beta^s \varepsilon_{\theta,r}^s + \frac{\alpha^s}{r} (\varepsilon_{r\theta,\theta}^s + \varepsilon_r^s - \varepsilon_\theta^s) = 0, \quad 3.119$$

$$r\alpha^s \varepsilon_{r\theta,r}^s + (\alpha^s + \beta^s) \varepsilon_{\theta,\theta}^s + \beta^s \varepsilon_{r,\theta}^s + 2\alpha^s \varepsilon_{r\theta}^s = 0. \quad 3.120$$

De la misma forma usando las ecuaciones 3.114b, 3.115b y 3.116b en 3.117 y 3.118, se obtienen:

$$\begin{aligned} (\alpha^h + \beta^h) \varepsilon_{r,r}^h + \beta^h \varepsilon_{\theta,r}^h + \frac{\alpha^h}{r} (\varepsilon_{r\theta,\theta}^h + \varepsilon_r^h - \varepsilon_\theta^h) \\ + \frac{1}{r} (\alpha^s - \alpha^h) (\varepsilon_r^l - \varepsilon_\theta^l) = 0, \end{aligned} \quad 3.121$$

$$r\alpha^h \varepsilon_{r\theta,r}^h + (\alpha^h + \beta^h) \varepsilon_{\theta,\theta}^h + \beta^h \varepsilon_{r,\theta}^h + 2\alpha^h \varepsilon_{r\theta}^h + 2(\alpha^s - \alpha^h) \varepsilon_{r\theta}^l = 0. \quad 3.122$$

Luego para obtener ecuaciones solo dependientes de funciones desplazamiento, se utilizan las ecuaciones 3.107a, 3.107b y 3.107c en las ecuaciones 3.119 a la 3.122, quedando las ecuaciones similares a las de Navier:

$$\begin{aligned} r^2(\alpha^s + \beta^s) u_{r,rr}^s + r \left( \beta^s + \frac{\alpha^s}{2} \right) u_{\theta,\theta r}^s + \frac{\alpha^s}{2} u_{r,\theta\theta}^s + (\beta^s + \alpha^s) r u_{r,r}^s \\ - \left( \frac{3\alpha^s}{2} + \beta^s \right) u_{\theta,\theta}^s - (\alpha^s + \beta^s) u_r^s = 0, \end{aligned} \quad 3.123$$

$$\begin{aligned}
& r^2 \frac{\alpha^s}{2} u_{\theta,rr}^s + (\beta^s + \alpha^s) u_{\theta,\theta\theta}^s + r \left( \frac{\alpha^s}{2} + \beta^s \right) u_{r,r\theta}^s + \left( \frac{3\alpha^s}{2} + \beta^s \right) u_{r,\theta}^s \\
& + r \frac{\alpha^s}{2} u_{\theta,r}^s - \frac{\alpha^s}{2} u_{\theta}^s = 0,
\end{aligned} \tag{3.124}$$

$$\begin{aligned}
& r^2 (\alpha^h + \beta^h) u_{r,rr}^h + r \left( \beta^h + \frac{\alpha^h}{2} \right) u_{\theta,\theta r}^h + \frac{\alpha^h}{2} u_{r,\theta\theta}^h + (\beta^h + \alpha^h) r u_{r,r}^h \\
& - \left( \frac{3\alpha^h}{2} + \beta^h \right) u_{\theta,\theta}^h - (\alpha^h + \beta^h) u_r^h + r (\alpha^s - \alpha^h) (\varepsilon_r^l - \varepsilon_{\theta}^l) = 0,
\end{aligned} \tag{3.125}$$

$$\begin{aligned}
& r^2 \frac{\alpha^h}{2} u_{\theta,rr}^h + (\beta^h + \alpha^h) u_{\theta,\theta\theta}^h + r \left( \frac{\alpha^h}{2} + \beta^h \right) u_{r,r\theta}^h + \left( \frac{3\alpha^h}{2} + \beta^h \right) u_{r,\theta}^h \\
& + r \frac{\alpha^h}{2} u_{\theta,r}^h - \frac{\alpha^h}{2} u_{\theta}^h + 2r (\alpha^s - \alpha^h) \varepsilon_{r\theta}^l = 0,
\end{aligned} \tag{3.126}$$

En donde las ecuaciones 3.123 a la 3.126 son las ecuaciones diferenciales parciales a resolver.

Se desea convertir las ecuaciones diferenciales parciales en ordinarias, para ello se realiza separación de variables: Se asume que las expresiones para  $u_r^s$ ,  $u_r^h$ ,  $u_{\theta}^s$  y  $u_{\theta}^h$  tienen la forma mostrada a continuación:

$$\begin{aligned}
u_r^k &= \sum_{i=0}^M U_{r_i}^k(r) \cos(2i\theta), \\
u_{\theta}^k &= \sum_{i=1}^M U_{\theta_i}^k(r) \sin(2i\theta).
\end{aligned} \tag{3.127}$$

Con  $k = s, h$  el superíndice que señala si se habla de la zona flexible o rígida, respectivamente. Estas formas de las expresiones podrían bastar, pues para el caso de una fase Timoshenko [12] utiliza una forma simplificada de 3.127. Remplazando las soluciones 3.127 en la primera ecuación 3.123 queda:

$$\begin{aligned}
& r^2(\alpha^s + \beta^s) \sum_{i=0}^M U_{r_i}^{s''} \cos(2i\theta) + r(2\beta^s + \alpha^s) \sum_{i=1}^M iU_{\theta_i}^{s'} \cos(2i\theta) \\
& - 2\alpha^s \sum_{i=1}^M i^2 U_{r_i}^s \cos(2i\theta) + (\beta^s + \alpha^s)r \sum_{i=0}^M U_{r_i}^s \cos(2i\theta) \\
& - (3\alpha^s + 2\beta^s) \sum_{i=1}^M iU_{\theta_i}^s \cos(2i\theta) - (\alpha^s + \beta^s) \sum_{i=0}^M U_{r_i}^s \cos(2i\theta) = 0.
\end{aligned} \tag{3.128}$$

Luego si la ecuación anterior debe ser satisfecha para todo  $\theta \in [0, \pi/2]$ , para cada término  $i$ -ésimo se debe cumplir que:

$$\begin{aligned}
& r^2(\alpha^s + \beta^s)U_{r_i}^{s''} + r(\beta^s + \alpha^s)U_{r_i}^{s'} + ri(2\beta^s + \alpha^s)U_{\theta_i}^{s'} \\
& - [2\alpha^s i^2 + (\alpha^s + \beta^s)]U_{r_i}^s - i(3\alpha^s + 2\beta^s)U_{\theta_i}^s = 0,
\end{aligned} \tag{3.129}$$

la cuál es la primera ecuación diferencial ordinaria de la zona flexible a resolver. De forma similar se usa las expresiones 3.127 en la segunda ecuación diferencial parcial 3.124 de donde se obtiene:

$$\begin{aligned}
& r^2 \frac{\alpha^s}{2} \sum_{i=1}^M U_{\theta_i}^{s''} \sin(2i\theta) - 4(\beta^s + \alpha^s) \sum_{i=1}^M i^2 U_{\theta_i}^s \sin(2i\theta) \\
& - r(\alpha^s + 2\beta^s) \sum_{i=1}^M iU_{r_i}^{s'} \sin(2i\theta) - (3\alpha^s + 2\beta^s) \sum_{i=1}^M iU_{r_i}^s \sin(2i\theta) \\
& + r \frac{\alpha^s}{2} \sum_{i=1}^M U_{\theta_i}^{s'} \sin(2i\theta) - \frac{\alpha^s}{2} \sum_{i=1}^M U_{\theta_i}^s \sin(2i\theta) = 0,
\end{aligned} \tag{3.130}$$

Por lo que si la ecuación anterior debe ser satisfecha para cada  $\theta$  y para cada valor de  $i$  se debe cumplir que:

$$\begin{aligned}
& r^2 \frac{\alpha^s}{2} U_{\theta_i}^{s''} - ir(2\beta^s + \alpha^s)U_{r_i}^{s'} + r \frac{\alpha^s}{2} U_{\theta_i}^{s'} - (3\alpha^s + 2\beta^s)U_{r_i}^s \\
& - \left[ 4i^2(\alpha^s + \beta^s) + \frac{\alpha^s}{2} \right] U_{\theta_i}^s = 0.
\end{aligned} \tag{3.131}$$

Las ecuaciones diferenciales ordinarias 3.129 y 3.131 conforman el sistema de ecuaciones para la zona flexible y son expresiones usuales en elasticidad lineal.

En el caso de la zona rígida no se puede reducir a ecuaciones por cada término de la suma solución, dado que existen términos “incompatibles” en las ecuaciones 3.125 y 3.126 (los términos que contienen la información de los componentes de la deformación en la interface). Para poder trabajar con ecuaciones por términos de cosenos es necesario algunos desarrollos algebraicos. Trabajando un poco las expresiones de las componentes de la deformación se tiene:

$$\varepsilon_r^l = \varepsilon_r^l(r = r^*(\theta), \theta) = \frac{\partial u_r^s}{\partial r}(r^*(\theta), \theta) = \sum_{i=0}^M U_{r_i}^{s'}(r^*(\theta)) \cos(2i\theta), \quad 3.132$$

Para el caso de la deformación azimutal:

$$\varepsilon_\theta^l = \varepsilon_\theta^l(r = r^*(\theta), \theta) = \frac{1}{r^*} \left[ \frac{\partial u_\theta^s}{\partial \theta}(r^*(\theta), \theta) + u_{r1} \right] = \frac{1}{r^*} \left[ \frac{\partial u_\theta^s}{\partial r} \frac{\partial r^*}{\partial \theta} + u_r^s \right], \quad 3.133$$

en donde se aplica la regla de la cadena considerando a  $r^*$  como una función de  $\theta$ . Se realiza una aproximación para la función que representa  $r^*$  mostrada a continuación<sup>2</sup>:

$$r^*(\theta) = \sum_{j=0}^P R_j \cos(2j\theta). \quad 3.134$$

Dada la expresión para  $r^*$ , la deformación azimutal en la interface queda como:

$$\varepsilon_\theta^l = \frac{1}{r^*} \left[ \left[ \sum_{i=1}^M U_{\theta_i}^{s'}(r) \sin(2i\theta) \right] \left[ \sum_{j=1}^P jR_j \sin(2j\theta) \right] + \sum_{i=0}^M U_{r_i}^s(r) \cos(2i\theta) \right]. \quad 3.135$$

Luego, la diferencia entre las deformaciones azimutal y radial en la interface queda:

---

<sup>2</sup> La aproximación de  $r^*(\theta)$  mostrada en 3.134 podría ser razonable, al menos, en las formas que muestran los sectores de acumulación de esfuerzo en el problema de una fase. Normalmente tienen una forma nefroidal, o de forma simplificada una circunferencia. Y dado que el criterio está indirectamente relacionado con alcanzar una carga crítica (que hipotéticamente se alcanzaría en estas formas de los sectores de esfuerzos altos), se podría asumir en primera estancia que podría tener dicha forma.

Hay casos que no podría servir dicha simplificación, como es el caso en que la zona de interface se separe de la superficie interna de la placa.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\theta}^l - \varepsilon_r^l &= \frac{-2}{r^*} \left[ \sum_{i=1}^M U_{\theta_i}^{s'}(r) \sin(2i\theta) \right] \left[ \sum_{j=1}^P jR_j \sin(2j\theta) \right] \\
&+ \frac{1}{r^*} \sum_{i=0}^M U_{r_i}^s(r) \cos(2i\theta) - \sum_{i=0}^M U_{r_i}^{s'}(r) \cos(2i\theta).
\end{aligned} \tag{3.136}$$

El primer término de la ecuación 3.136 se puede modificar utilizando relaciones trigonométricas como:

$$\begin{aligned}
\Psi &= \frac{1}{r^*} \left[ \sum_{i=1}^M U_{\theta_i}^{s'}(r) \sin(2i\theta) \right] \left[ \sum_{j=1}^P jR_j \sin(2j\theta) \right], \\
\Psi &= \frac{1}{r^*} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^P U_{\theta_i}^{s'} jR_j \sin(2i\theta) \sin(2j\theta), \\
&= \frac{1}{r^*} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^P U_{\theta_i}^{s'} jR_j \frac{1}{2} [\cos(2\theta(i-j)) - \cos(2\theta(i+j))].
\end{aligned} \tag{3.137}$$

Se supone de forma arbitraria que los valores de  $M$  y  $P$  son 4 y 3 respectivamente. Esta elección está sujeta a un posterior estudio de convergencia del problema que es muy importante de realizar. Luego:

$$r^* \approx$$

$$\begin{aligned}
&\left\{ U_{\theta_1}^{s'} \left[ \frac{R_1}{2} + R_2 \cos(2\theta) + \left( \frac{3R_3}{2} - \frac{R_1}{2} \right) \cos(4\theta) - R_2 \cos(6\theta) - \frac{3R_3}{2} \cos(8\theta) \right] \right. \\
&+ U_{\theta_2}^{s'} \left[ \left( \frac{R_1}{2} + \frac{3R_3}{2} \right) \cos(2\theta) + R_2 - \frac{R_1}{2} \cos(6\theta) - R_2 \cos(8\theta) \right] \\
&+ U_{\theta_3}^{s'} \left[ \frac{3R_3}{2} + R_2 \cos(2\theta) + \frac{R_1}{2} \cos(4\theta) - \frac{R_1}{2} \cos(8\theta) \right] \\
&\left. + U_{\theta_4}^{s'} \left[ \frac{3R_3}{2} \cos(2\theta) + R_2 \cos(4\theta) + \frac{R_1}{2} \cos(6\theta) \right] \right\} / \Psi.
\end{aligned} \tag{3.138}$$

En la última expresión hay un detalle: se suprimieron los términos que contienen  $\cos(2n\theta)$ , con  $n \geq 5$ . Esto es debido a que la elección de  $M$  y  $P$  conlleva a que, en la expresión que deriva de utilizar 3.25 en 3.125 finalmente se tiene:



$$\begin{aligned}
& r^2(\alpha^h + \beta^h) \sum_{i=0}^M U_{r_i}^{h''} \cos(2i\theta) + r(2\beta^h + \alpha^h) \sum_{i=1}^M iU_{\theta_i}^{h'} \cos(2i\theta) \\
& - 2\alpha^h \sum_{i=1}^M i^2 U_{r_i}^h \cos(2i\theta) + (\beta^h + \alpha^h)r \sum_{i=0}^M U_{r_i}^{h'} \cos(2i\theta) \\
& - (3\alpha^h + 2\beta^h) \sum_{i=1}^M iU_{\theta_i}^h \cos(2i\theta) - (\alpha^h + \beta^h) \sum_{i=0}^M U_{r_i}^h \cos(2i\theta) \\
& = r(\alpha^s - \alpha^h)(\varepsilon_{\theta}^l - \varepsilon_r^l),
\end{aligned} \tag{3.139}$$

luego la parte izquierda a lo más posee términos del tipo  $\cos(2n\theta)$  con  $n = 4$ , por lo que se suprimen. Factorizando la ecuación 3.138 se tiene que:

$$\begin{aligned}
r^*\Psi &= \left[ U_{\theta_1}^{s'} \frac{R_1}{2} + U_{\theta_2}^{s'} R_2 + U_{\theta_3}^{s'} \frac{3R_3}{2} \right] \\
&+ \left[ U_{\theta_1}^{s'} R_2 + U_{\theta_2}^{s'} \left( \frac{R_1}{2} + \frac{3R_3}{2} \right) + U_{\theta_3}^{s'} R_2 \right] \cos(2\theta) \\
&+ \left[ U_{\theta_1}^{s'} \left( \frac{3R_3}{2} - \frac{R_1}{2} \right) + U_{\theta_3}^{s'} \frac{R_1}{2} + U_{\theta_4}^{s'} R_2 \right] \cos(4\theta) \\
&+ \left[ -U_{\theta_1}^{s'} R_2 - U_{\theta_2}^{s'} \frac{R_1}{2} + U_{\theta_4}^{s'} \frac{R_1}{2} \right] \cos(6\theta) \\
&+ \left[ -U_{\theta_1}^{s'} \frac{3R_3}{2} - U_{\theta_2}^{s'} R_2 - U_{\theta_3}^{s'} \frac{R_1}{2} \right] \cos(8\theta). \\
&= \Psi_0 + \Psi_1 \cos(2\theta) + \Psi_2 \cos(4\theta) + \Psi_3 \cos(6\theta) + \Psi_4 \cos(8\theta).
\end{aligned} \tag{3.140}$$

Volviendo a la ecuación 3.136, y reemplazando la expresión para  $r^*$  que se asumió en 3.134 se tiene que:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\theta}^l - \varepsilon_r^l &= -2 \frac{\sum_{i=0}^M \Psi_i \cos(2i\theta)}{\sum_{j=0}^P R_j \cos(2j\theta)} + \frac{\sum_{i=0}^M U_{r_i}^s(r) \cos(2i\theta)}{\sum_{j=0}^P R_j \cos(2j\theta)} \\
&- \sum_{i=0}^M U_{r_1}^{s'}(r) \cos(2i\theta), \\
&= -2 F_1 + F_2 - \sum_{i=0}^M U_{r_1}^{s'}(r) \cos(2i\theta).
\end{aligned} \tag{3.141}$$

Es necesario convertir las expresiones de  $F_1$  y  $F_2$  en un formato del tipo series en  $\cos(2n\theta)$ , para esto se recurre a utilizar la serie de Fourier de cosenos, o sea se asume que:

$$F_i = a_{i0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{in} \cos\left(\frac{2n\pi}{T} \theta\right), \quad 3.142$$

con  $T$  el periodo de la función, que se asume  $2\pi$ , y se trunca hasta el octavo término según la discusión anterior, sin considerar los impares, es decir:

$$F_i = a_{i0} + a_{i2} \cos(2\theta) + a_{i4} \cos(4\theta) + a_{i6} \cos(6\theta) + a_{i8} \cos(8\theta), \quad 3.143$$

con:

$$a_{i0} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_i(\theta) d\theta, \quad a_{in} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_i(\theta) \cos(n\theta) d\theta. \quad 3.144$$

Dada la complejidad de  $F_1$  y  $F_2$  para la integración de 3.144, se decide realizar una aproximación de dichas integrales mediante el método trapezoidal. Se definen:

$$\theta_i = -\pi + i \cdot h, \quad h = 2\pi/N, \quad 3.145$$

con  $N$  el número de particiones. Luego 3.144 queda como:

$$\begin{aligned} a_{i0} &= \frac{h}{2\pi} \left[ F_{i0} + F_{iN} + 2 \sum_{j=1}^{N-1} F_{ij} \right], \\ a_{in} &= \frac{h}{2\pi} \left[ G_{i0} + G_{iN} + 2 \sum_{j=1}^{N-1} G_{ij} \right], \end{aligned} \quad 3.146$$

con  $G_{i0}$  la función  $G_i$  evaluada en  $\theta_i$  y  $G_i$  es  $F_i \cos(n\theta)$ . Cabe recordar que los valores de  $n$  son pares y menores o iguales que 8. Luego de 3.141 sigue que:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta}^l - \varepsilon_r^l = & - \left[ a_{10} + 2 \sum_{n=1}^8 a_{1n} \cos(n\theta) \right] + \frac{1}{2} \left[ a_{20} + 2 \sum_{n=1}^8 a_{2n} \cos(n\theta) \right] \\ & + \sum_{i=0}^M U'_{r1_i}(r) \cos(2i\theta), \end{aligned} \quad 3.147$$

entonces se puede pedir que la ecuación 3.139 sea satisfecha para cada  $\theta$ , de donde se obtiene:

$$\begin{aligned} & r^2(\alpha^h + \beta^h)U_{r_i}^{h''} + r(2\beta^h + \alpha^h)iU_{\theta_i}^{h'} - 2\alpha^h i^2 U_{r_i}^h \\ & + (\beta^h + \alpha^h)rU_{r_i}^{h'} - (3\alpha^h + 2\beta^h)iU_{\theta_i}^h - (\alpha^h + \beta^h)U_{r_i}^h \\ & = r(\alpha^s - \alpha^h)[-2a_{1(2i)} + a_{2(2i)} + U_{r_i}^s], \end{aligned} \quad 3.148$$

la cual es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden y no homogénea (la gran diferencia con respecto a las ecuaciones 3.129 y 3.131).

De la aplicación de 3.127 en la ecuación 3.126 se tiene que:

$$\begin{aligned} & r^2 \frac{\alpha^h}{2} \sum_{i=1}^M U_{\theta_i}^{h''} \sin(2i\theta) - 4(\beta^h + \alpha^h) \sum_{i=1}^M i^2 U_{\theta_i}^h \sin(2i\theta) \\ & - r(\alpha^h + 2\beta^h) \sum_{i=1}^M iU_{r_i}^{h'} \sin(2i\theta) \\ & - (3\alpha^h + 2\beta^h) \sum_{i=1}^M iU_{\theta_i}^h \sin(2i\theta) + r \frac{\alpha^h}{2} \sum_{i=1}^M U_{\theta_i}^{h'} \sin(2i\theta) \\ & - \frac{\alpha^h}{2} \sum_{i=1}^M U_{\theta_i}^h \sin(2i\theta) = 2r(\alpha^h - \alpha^s)\varepsilon_{r\theta}^l. \end{aligned} \quad 3.149$$

Se está en la misma situación que en 3.139 de que se requiere de desarrollo algebraico en la parte derecha de la ecuación para la compatibilidad de términos  $i$ . Al usar que  $r^* = r^*(\theta)$  y la regla de la cadena en 3.107.c se obtiene:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{r\theta}^l &= \varepsilon_{\theta}^l(r = r^*(\theta), \theta) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial u_r^s}{\partial \theta}(r^*(\theta), \theta) + \frac{\partial u_{\theta}^s}{\partial r} - \frac{u_{\theta}^s}{r^*} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial u_r^s}{\partial r} \frac{\partial r^*}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta}^s}{\partial r} - \frac{u_{\theta}^s}{r^*} \right],
\end{aligned} \tag{3.150}$$

y si son aplicados 3.134 y la aproximación de  $u_{\theta 1}$  se tiene:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{r\theta}^l &= \frac{1}{2} \left[ \frac{-2}{r^*} \left[ \sum_{i=0}^M U_{r_i}^{s'}(r) \cos(2i\theta) \right] \left[ \sum_{j=1}^P jR_j \sin(2j\theta) \right] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^M U_{\theta_i}^{s'}(r) \sin(2i\theta) - \frac{1}{r^*} \sum_{i=1}^M U_{\theta_i}^s(r) \sin(2i\theta) \right].
\end{aligned} \tag{3.151}$$

Al trabajar el primer término de 3.151 utilizando equivalencias trigonométricas se tiene:

$$\begin{aligned}
\Omega &= \frac{1}{r^*} \sum_{i=0}^M \sum_{j=1}^P U_{r_i}^{s'} jR_j \cos(2i\theta) \sin(2j\theta) \\
&= \frac{1}{r^*} \sum_{i=0}^M \sum_{j=1}^P U_{r_i}^{s'} jR_j \frac{1}{2} [\sin[2\theta(i+j)] - \sin[2\theta(i-j)]] .
\end{aligned} \tag{3.152}$$

Suponiendo que  $M$  y  $P$  son iguales a 4 y 3 respectivamente se tiene:

$$\begin{aligned}
r^* \Omega &= U_{r_0}^{s'} [R_1 \sin(2\theta) + 2R_2 \sin(4\theta) + 3R_3 \sin(6\theta)] \\
&\quad + U_{r_1}^{s'} \left[ \left( \frac{R_1}{2} + \frac{3R_3}{2} \right) \sin(4\theta) + R_2 \sin(6\theta) + \frac{3R_3}{2} \sin(8\theta) \right] \\
&\quad + U_{r_2}^{s'} \left[ \left( \frac{3R_3}{2} - \frac{R_1}{2} \right) \sin(2\theta) + \frac{R_1}{2} \sin(6\theta) + R_2 \sin(8\theta) \right] \\
&\quad + U_{r_3}^{s'} \left[ -R_2 \sin(2\theta) - \frac{R_1}{2} \sin(4\theta) + \frac{R_1}{2} \sin(8\theta) \right] \\
&\quad - U_{r_4}^{s'} \left[ \frac{3R_3}{2} \sin(2\theta) + R_2 \sin(4\theta) + \frac{R_1}{2} \sin(6\theta) \right],
\end{aligned} \tag{3.153}$$

y al factorizar por los términos senos se obtiene:

$$\begin{aligned}
r^* = & \left\{ \left[ U_{r_0}^{s'} R_1 + U_{r_2}^{s'} \left( \frac{3R_3}{2} - \frac{R_1}{2} \right) - U_{r_3}^{s'} R_2 - U_{r_4}^{s'} \frac{3R_2}{2} \right] \sin(2\theta) \right. \\
& + \left[ U_{r_0}^{s'} 2R_2 + U_{r_1}^{s'} \left( \frac{R_1}{2} + \frac{3R_3}{2} \right) - U_{r_3}^{s'} \frac{R_1}{2} - U_{r_4}^{s'} R_2 \right] \sin(4\theta) \\
& + \left[ U_{r_0}^{s'} 3R_3 + U_{r_1}^{s'} R_2 + U_{r_2}^{s'} \frac{R_1}{2} - U_{r_4}^{s'} \frac{R_1}{2} \right] \sin(6\theta) \\
& \left. + \left[ U_{r_1}^{s'} \frac{3R_3}{2} + U_{r_2}^{s'} R_2 + U_{r_3}^{s'} \frac{R_1}{2} \right] \sin(8\theta) \right\} / \Omega \\
= & [\Omega_1 \sin(2\theta) + \Omega_2 \sin(4\theta) + \Omega_3 \sin(6\theta) + \Omega_4 \sin(8\theta)] / \Omega.
\end{aligned} \tag{3.154}$$

Volviendo a la ecuación 3.151, se tiene:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{r\theta}^l = & - \frac{\sum_{i=1}^4 \Omega_i \sin(2i\theta)}{\sum_{j=0}^3 R_j \cos(2j\theta)} - \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^M U_{\theta 1_i}(r) \sin(2i\theta)}{\sum_{j=0}^P R_j \cos(2j\theta)} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M U_{\theta i}^{s'}(r) \sin(2i\theta), \\
= & -F_3 - \frac{1}{2} F_4 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M U_{\theta i}^{s'} \sin(2i\theta).
\end{aligned} \tag{3.155}$$

Se realiza el mismo procedimiento de expansión de Fourier y del método de trapecios para  $F_3$  y  $F_4$  obteniendo  $a_{3i}$  y  $a_{4i}$ , respectivamente. Luego, 3.149 es satisfecha para cada  $\theta$  si:

$$\begin{aligned}
r^2 \frac{\alpha^h}{2} U_{\theta i}^{h''} - 4(\beta^h + \alpha^h) i^2 U_{\theta i}^h - r(\alpha^h + 2\beta^h) i U_{r i}^{h'} \\
- (3\alpha^h + 2\beta^h) i U_{r i}^h + r \frac{\alpha^h}{2} U_{\theta i}^{h'} - \frac{\alpha^h}{2} U_{\theta i}^h \\
= r(\alpha^h - \alpha^s) [U_{\theta i}^{s'} - 2a_{32i} - a_{42i}]
\end{aligned} \tag{3.156}$$

la cual es de la misma forma que 3.148, una ecuación diferencial ordinaria de 2do grado no homogénea.

La resolución de los sistemas de ecuaciones para la parte flexible y rígida difieren un poco, pero en esencia se puede usar el mismo método. Considerando las ecuaciones 3.129 y 3.131, y definiendo:

$$\xi_{r1} = U_{r_i}^{s'}, \quad \xi_{\theta 1} = U_{\theta_i}^{s'}, \quad 3.157$$

en donde desde ahora  $U_{\alpha_i}^j$  se denotará simplemente como  $U_{\alpha}^j$ , se puede escribir el sistema como una ecuación matricial del tipo  $\mathbf{A} \mathbf{x}' = \mathbf{B} \mathbf{x}$ , en donde cada término queda como:

$$\mathbf{x} = (U_r^s, U_{\theta}^s, \xi_r^s, \xi_{\theta}^s)^T,$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} r(\alpha^s + \beta^s) & ri(\alpha^s + 2\beta^s) & r^2(\alpha^s + \beta^s) & 0 \\ -ir(\alpha^s + 2\beta^s) & \frac{r\alpha^s}{2} & 0 & \frac{r^2\alpha^s}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 3.158$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2\alpha^s i^2 + \alpha^s + \beta^s & 3\alpha^s + 2\beta^s & 0 & 0 \\ i(3\alpha^s + 2\beta^s) & 4i^2(\alpha^s + \beta^s) - \alpha^s/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El sistema puede entonces escribirse como:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{x}' &= \mathbf{B} \mathbf{x} \\ \Leftrightarrow \mathbf{x}' &= \mathbf{D}(r) \mathbf{x}, \end{aligned} \quad 3.159$$

con  $\mathbf{D}(r) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$  una matriz dependiente de  $r$ . Luego es posible encontrar solución a través del método de Magnus para ecuaciones homogéneas [18], mostrado en el anexo 7.3. Para determinarla completamente es requerido obtener expresiones para las condiciones de borde. Para el borde  $r = b$  se tiene que los esfuerzos [12] son:

$$\begin{aligned} \sigma_r^s(b, \theta) &= \frac{\sigma_{\infty}}{2} (1 + \cos(2\theta)), \\ \sigma_{\theta}^s(b, \theta) &= \frac{\sigma_{\infty}}{2} (1 - \cos(2\theta)), \\ \tau_{r\theta}^s(b, \theta) &= \frac{-\sigma_{\infty}}{2} \sin(2\theta). \end{aligned} \quad 3.160$$

Recurriendo a las relaciones de esfuerzo-deformación 3.114-3.116, de deformación-desplazamiento 3.107 y de aproximación para la solución expresada en series 3.127 se tiene que la ecuación 3.160.a queda como:

$$\frac{\sigma_{\infty}}{2} (1 + \cos(2\theta)) = \alpha^s \sum_{i=0}^M U_{r_i}^{s'}(b) \cos(2i\theta) + \beta^s \left[ \sum_{i=0}^M U_{r_i}^{s'}(b) \cos(2i\theta) + \frac{1}{b} \sum_{i=0}^M U_{r_i}^s(b) \cos(2i\theta) + \frac{2}{b} \sum_{i=1}^M i U_{\theta_i}^s(b) \cos(2i\theta) \right], \quad 3.161$$

de la cual se pueden obtener expresiones para algunos  $U_{r_{1i}}$  y  $U_{\theta_{1i}}$ . En particular:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\infty}}{2} &= (\alpha^s + \beta^s) U_{r_0}^{s'}(b) + \frac{1}{b} U_{r_0}^s(b), \\ \frac{\sigma_{\infty}}{2} &= (\alpha^s + \beta^s) U_{r_1}^{s'}(b) + \frac{1}{b} U_{r_1}^s(b) + \frac{2}{b} U_{\theta_1}^s(b), \\ U_{r_i}^s(b) &= U_{r_i}^{s'}(b) = U_{\theta_i}^s(b) = 0, \quad i = 2,3,4. \end{aligned} \quad 3.162$$

Haciendo lo mismo para la ecuación 3.160.c se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{-\sigma_{\infty}}{2} &= -\frac{\alpha_0}{b} U_{r_1}^s(b) + U_{\theta_1}^{s'}(b) - \frac{1}{b} U_{\theta_1}^s(b), \\ U_{\theta_2}^{s'}(b) &= U_{\theta_3}^{s'}(b) = U_{\theta_4}^{s'}(b) = 0. \end{aligned} \quad 3.163$$

Uniendo las ecuaciones 3.161 y 3.163, considerando que son 6 incógnitas y 3 ecuaciones, se pueden obtener las expresiones para  $u_r^s$  y  $u_{\theta}^s$ :  $U_{r_0}^{s'}(b)$ ,  $U_{r_1}^{s'}(b)$  y  $U_{\theta_1}^{s'}(b)$  en función de  $U_{r_0}^s(b)$ ,  $U_{r_1}^s(b)$  y  $U_{\theta_1}^s(b)$  como:

$$\begin{aligned} U_{r_0}^{s'}(b) &= \frac{b\sigma_{\infty} - 2U_{r_0}^s(b)}{2b(\alpha^s + \beta^s)}, \\ U_{r_1}^{s'}(b) &= \frac{b\sigma_{\infty} - 2U_{r_1}^s(b) - 4U_{\theta_1}^s(b)}{2b(\alpha^s + \beta^s)}, \\ U_{\theta_1}^{s'}(b) &= \frac{-b\sigma_{\infty} + 2\alpha^s U_{r_1}^s(b) + 2U_{\theta_1}^s(b)}{2b}. \end{aligned} \quad 3.164$$

Las condiciones de borde en  $r = r^*$  se analizan en conjunto con las de la zona rígida, dado que comparten ciertas condiciones.

El sistema en la zona rígida está constituido por las ecuaciones 3.148 y 3.156, definiendo:

$$\xi_r^h = U_r^{h'}, \quad \xi_\theta^h = U_\theta^{h'}, \quad 3.165$$

se puede escribir el sistema como una ecuación matricial del tipo  $\mathbf{A}\mathbf{x}' + \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , en donde cada término queda como:

$$\mathbf{x} = (U_r^h, U_\theta^h, \xi_r^h, \xi_\theta^h)^T,$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} r(\alpha^h + \beta^h) & ri(\alpha^h + 2\beta^h) & r^2(\alpha^h + \beta^h) & 0 \\ -ir(\alpha^h + 2\beta^h) & \frac{r\alpha^h}{2} & 0 & \frac{r^2\alpha^h}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2\alpha^h i^2 - \alpha^h - \beta^h & -3i(\alpha^h + 2\beta^h) & 0 & 0 \\ -i(3\alpha^h + 2\beta^h) & -4i^2(\alpha^h + \beta^h) - \alpha^h/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad 3.166$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} r(\alpha^s - \alpha^h)[-2a_{1(2i)} + a_{2(2i)} + U_{ri}^{s'}] \\ r(\alpha^h - \alpha^s)[U_{\theta i}^{s'} - 2a_{32i} - a_{42i}] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para convertir este sistema a uno solucionable por el método de Magnus, se realiza el procedimiento mostrado en el Anexo 7.4, quedando en un sistema del tipo  $\mathbf{y}' = \mathbf{C}\mathbf{y}$ , con:

$$\mathbf{y} = (U_r^h, U_\theta^h, \xi_r^h, \xi_\theta^h, 1)^T,$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} [-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}] & [\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}] \\ [\mathbf{0}] & 0 \end{bmatrix}. \quad 3.167$$

Luego, el sistema 3.167 es solucionable mediante el método de Magnus. Las condiciones de borde [12] en la periferia del agujero  $r = a$  son:



$$\sigma_r^h(a, \theta) = 0, \quad \tau_{r\theta}^h(a, \theta) = 0. \quad 3.168$$

Si son aplicadas las ecuaciones que relacionan los esfuerzos y las deformaciones 3.114-3.116, deformación-desplazamiento 3.107 y la aproximación de series para  $u_j^h$  3.127, se obtienen las ecuaciones para las condiciones de borde de  $U_{r_i}^h(a)$  y  $U_{\theta_i}^h(a)$ . Dado que el esfuerzo depende esta vez de términos evaluados en la interface, las mencionadas condiciones de borde dependerán de las condiciones del borde de interface. En particular:

$$\begin{aligned} & (\alpha^s - \alpha^h + \beta^s - \beta^h) U_{r_i}^{s'}(r^*) - 2(\beta^s - \beta^h)a_{12i}(r^*) + (\beta^s - \beta^h)a_{22i}(r^*) \\ & + (\alpha^h + \beta^h) U_{r_i}^{h'}(a) + \frac{\beta^h}{a} \left[ (2i) U_{\theta_i}^{h'}(a) + U_{r_i}^h(a) \right] = 0, \end{aligned} \quad 3.169$$

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha^h}{2} \left[ U_{\theta_i}^{h'}(a) - \frac{2i}{a} U_{r_i}^h(a) - \frac{1}{a} U_{\theta_i}^h(a) \right] \\ & + (\alpha^s - \alpha^h) \left[ U_{\theta_i}^{s'}(r^*) - a_{32i}(r^*) - \frac{a_{42i}(r^*)}{2} \right] = 0. \end{aligned} \quad 3.170$$

De estas ecuaciones es posible obtener los términos  $U_{r_i}^{s'}$  y  $U_{\theta_i}^{s'}$  que se pueden expresar en función de  $U_{r_i}^s$  y  $U_{\theta_i}^s$ .

Las condiciones de borde en la interface son compartidas en los dos sistemas: para las zonas flexible y rígida, y dichas condiciones son:

- 1) Continuidad de las funciones desplazamientos radiales en la interface:

$$\begin{aligned} u_r^s(r^*) &= u_r^h(r^*), \\ U_{r_i}^s(r^*) &= U_{r_i}^h(r^*). \end{aligned} \quad 3.171$$

- 2) Continuidad de las funciones desplazamientos azimutales en la interface:

$$\begin{aligned} u_{\theta}^s(r^*) &= u_{\theta}^h(r^*), \\ U_{\theta_i}^s(r^*) &= U_{\theta_i}^h(r^*). \end{aligned} \quad 3.172$$

- 3) Continuidad e igualdad a la deformación crítica de las deformaciones en la interface:

$$\varepsilon_1^k = \max \left\{ \frac{\varepsilon_r^k + \varepsilon_\theta^k}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\varepsilon_r^k - \varepsilon_\theta^k}{2} \right)^2 + \varepsilon_{r\theta}^k{}^2} \right\}, \quad 3.173$$

$$\varepsilon_1^s(r^*) = \varepsilon_1^h(r^*) = \sigma_0/E_0.$$

Luego en total se tienen 34 incógnitas que derivan de las condiciones en los bordes interno y externo  $r = a, b$ , la interface  $r = r^*$  y de la aproximación de la función interface  $r^* = r^*(\theta)$ :

$$\begin{aligned} CBa: & \quad \left\{ \{U_{ra_0}, U_{ra_1}, U_{ra_2}, U_{ra_3}, U_{ra_4}\}, \{U_{\theta a'_1}, U_{\theta a'_2}, U_{\theta a'_3}, U_{\theta a'_4}\} \right\}, \\ CBb: & \quad \left\{ \{U_{rb_0}, U_{rb_1}\}, \{U_{\theta b_1}\} \right\}, \\ CBr^*: & \quad \left\{ \{U_{rc_0}, U_{rc_1}, U_{rc_2}, U_{rc_3}, U_{rc_4}\}, \{U_{rc'_0}, U_{rc'_1}, U_{rc'_2}, U_{rc'_3}, U_{rc'_4}\} \right\}, \\ & \quad \left\{ U_{\theta c_1}, U_{\theta c_2}, U_{\theta c_3}, U_{\theta c_4} \right\}, \left\{ U_{\theta c'_1}, U_{\theta c'_2}, U_{\theta c'_3}, U_{\theta c'_4} \right\}, \\ R_i: & \quad \{R_0, R_1, R_2, R_3\}, \end{aligned} \quad 3.174$$

en donde  $U_{ja_i} = U_j^h(a)$  y  $U_{jb_i} = U_j^s(b)$  y se utiliza la notación  $CBa$  para las condiciones de borde en  $r = a$ ,  $CBb$  para las de  $r = b$  y  $CBr^*$  para las condiciones en la interface. Para los casos del borde  $r = b$  se puede deducir que las 3 constantes incógnitas son cero, dado que pertenecen a valores asociados al movimiento rígido, que en un principio se asume 0. Lo mismo para  $r = a$ , pero en este caso es necesario aplicar las condiciones de  $r^*$  para encontrar las constantes del movimiento rígido (previamente aplicadas desde la zona flexible con el movimiento rígido despreciado en el borde  $r = b$ ).

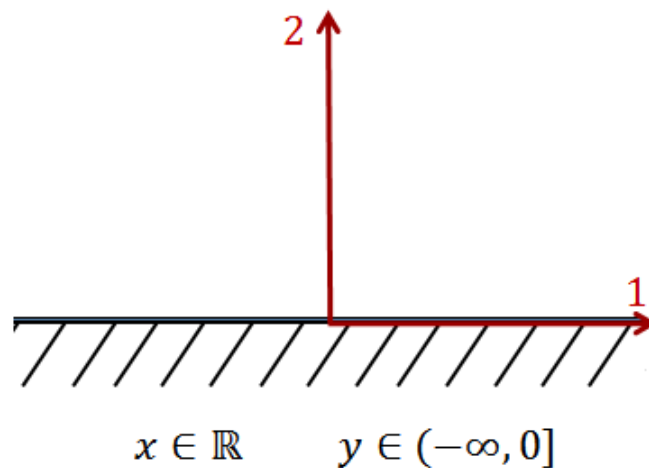
El problema está reducido a obtener una cantidad de incógnitas cercana a 30 en un sistema no lineal que se compone de las ecuaciones 3.171, 3.172 y 3.173. Para resolverlo se realiza una técnica numérica en la que se divide el dominio de la variable  $\theta \in [0, \pi/2]$  generando una cantidad de ecuaciones necesarias para encontrar las incógnitas, de las cuales son basadas por alguna de las 3 ecuaciones nombradas anteriormente, electas de forma arbitraria. Por ejemplo, para  $\theta = 0$  se elige construir la primera ecuación reemplazando en 3.171 la variable  $\theta$  por 0. Luego se posee un sistema de ecuaciones, varias de ellas no lineales, que se pueden resolver mediante el método de Newton-Broyden de paso reducido mostrado en el anexo 7.2. Sin embargo, en este problema no se ha podido obtener resultados numéricos, dado que las aproximaciones al truncar las series de matriz exponencial, de Magnus, de las funciones desplazamiento y de la función  $r^*(\theta)$  no convergen efectivamente a una solución. Para el análisis de la convergencia de los términos mencionados se puede revisar el anexo 6.5 en el caso de la solución del problema para una sola zona, en el que se verifica que no converge la solución, y por lo tanto es requerido una mejoría en el algoritmo de resolución o bien necesario más

recursos computacionales para encontrar dicho punto de convergencia. De todas formas se deja latente la metodología empleada, en la que, en teoría, resuelve el problema.

#### 4. Estudio de estabilidad e inestabilidad elástica para la ecuación constitutiva $\varepsilon = f(T)$ para medio semi-infinito considerando esfuerzo plano

Otro problema clásico en elasticidad es el análisis de estabilidad (inestabilidad) elástica en un material. Este estudio puede dar cabida a aplicaciones muy importantes en áreas como la minería como el análisis de inicio de fallas por inestabilidad elástica en material rocoso, granulado, etc.

La geometría a considerar es una placa delgada semi infinita en dónde se le aplica un campo de esfuerzos uniforme  $T_{11}$  y  $T_{22}$  (Véase figura 4.1). A este estado de esfuerzos uniforme, que por tanto es solución del problema de valor de frontera, se denota como  $T^0$



*Figura 4.1: Sólido semi infinito y dominio del problema.*

En este caso se utiliza como base la ecuación 2.11. Sea la carga  $T_{11}$  aumentada ligeramente en pequeños incrementos  $\Delta T_{11}$ , de la misma forma que lo es en la dirección 12 y 22, entonces descrito en forma tensorial se tiene la siguiente aproximación

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial W}{\partial T_{ij}}(T_{ij}^0 + \Delta T_{kl}) \approx \frac{\partial W}{\partial T_{ij}}(\mathbf{T}^0) + \frac{\partial^2 W}{\partial T_{ij} \partial T_{kl}}(\mathbf{T}^0) \cdot \Delta T_{kl}, \quad 4.1$$

donde  $\varepsilon$  se obtiene de evaluar  $\frac{\partial W}{\partial \mathbf{T}}$  con  $(\mathbf{T}^0 + \Delta \mathbf{T})$ , y  $\varepsilon^0$  es  $\frac{\partial W}{\partial \mathbf{T}}$  evaluado en  $\mathbf{T}^0$ , introduciendo la notación  $C_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial T_{ij} \partial T_{kl}}(\mathbf{T}^0)$  se tiene  $\Delta \varepsilon_{ij} = C_{ijkl} \cdot \Delta T_{kl}$ .

Se asume que las cargas  $T_{11}$ ,  $T_{12}$  y  $T_{22}$  son constantes, es decir:

$$\mathbf{T}^0 = \mathbf{cte.} \Rightarrow \varepsilon_{ij}^0 = \mathbf{cte} \Rightarrow C_{ijkl} = \mathbf{cte.} \quad 4.2$$

Luego, las ecuaciones de compatibilidad para  $\varepsilon_{ij}$  [3] (de forma tal de poder asociar un campo de desplazamientos continuos), son equivalentes a las de  $\Delta \varepsilon_{ij}$  [20], es decir

$$\Delta \varepsilon_{11,22} + \Delta \varepsilon_{22,11} = 2\Delta \varepsilon_{12,12}. \quad 4.3$$

Para el caso particular del problema en dónde existe un régimen de esfuerzo plano [5], se tiene que:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{11} &= C_{1111}\Delta T_{11} + C_{1122}\Delta T_{22} + 2C_{1112}\Delta T_{12}, \\ \Delta \varepsilon_{12} &= C_{1112}\Delta T_{11} + C_{1222}\Delta T_{22} + 2C_{1212}\Delta T_{12}, \\ \Delta \varepsilon_{22} &= C_{1122}\Delta T_{11} + C_{2222}\Delta T_{22} + 2C_{1222}\Delta T_{12}. \end{aligned} \quad 4.4$$

Remplazando esto en la ecuación 4.3, se obtiene

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial y^2} (C_{1111}\Delta T_{11} + C_{1122}\Delta T_{22} + 2C_{1112}\Delta T_{12}) \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (C_{1122}\Delta T_{11} + C_{2222}\Delta T_{22} + 2C_{1222}\Delta T_{12}) \\ &= 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (C_{1112}\Delta T_{11} + C_{1222}\Delta T_{22} + 2C_{1212}\Delta T_{12}). \end{aligned} \quad 4.5$$

Utilizando la función esfuerzo de Airy [12] para el caso de coordenadas Cartesianas

$$\Delta T_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \Delta T_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \Delta T_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, \quad 4.6$$

las ecuaciones de equilibrio, en el caso plano, sin fuerzas de cuerpo son satisfechas de forma automática. Con esto, la ecuación de compatibilidad en términos de la función de Airy, y considerando la simetría del tensor  $\mathbf{C}$  para el caso plano queda como:

$$\begin{aligned} & \underbrace{C_{1111}}_a \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + \underbrace{C_{2222}}_b \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \underbrace{(2C_{1122} + 4C_{1212})}_c \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & - \underbrace{4C_{1112}}_d \frac{\partial^4 \phi}{\partial x \partial y^3} - \underbrace{4C_{2212}}_e \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^3 \partial y} = 0, \end{aligned} \quad 4.7$$

en donde dado que  $\mathbf{T}^0$  es constante, se tiene que  $C_{ijkl}$  no depende de  $x$  ni de  $y$ . En particular se pueden obtener de la siguiente forma. Sea la energía de deformación [19]:

$$W = -\frac{\alpha}{\beta} \ln(\cosh(\beta I)) + \frac{\gamma}{\iota} \sqrt{1 + 2\iota II}, \quad 4.8$$

con las constantes definidas en la tabla 4.1.

**Tabla 4.1:** Constantes e invariantes utilizados en el modelo de energía de deformación 4.8.

<b>Dato</b>	<b>Valor</b>
$\alpha$	0.01
$\beta$	$9.27681 \cdot 10^{-8}$
$\gamma$	$4.01995 \cdot 10^{-9}$
$\iota$	$10^{-14}$
$I$	$tr \mathbf{T}$
$II$	$0.5 \cdot tr \mathbf{T}^2$

Se requieren de las derivadas de la función energía de deformación con respecto a  $I$  y  $II$ , las cuales son:

$$\frac{\partial W}{\partial I} = -\alpha \tanh(\beta I), \quad 4.9$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial I^2} = \alpha \beta [\tanh^2(\beta I) - 1], \quad 4.10$$

$$\frac{\partial W}{\partial II} = \gamma (1 + 2\iota II)^{-0.5}, \quad 4.11$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial II^2} = -\gamma \iota (1 + 2\iota II)^{-1.5}, \quad 4.12$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial I \partial II} = 0. \quad 4.13$$

La ecuación constitutiva propuesta [19] es

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial W}{\partial I} \mathbf{I} + \frac{\partial W}{\partial II} \mathbf{T}. \quad 4.14$$

Esto, además de que:

$$\varepsilon_{ij}^{t+\Delta t} \approx \varepsilon_{ij}^t + \left( \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial T_{kl}} \right)^t \Delta T_{kl}, \quad 4.15$$

y que:

$$C_{ijkl} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial T_{kl}}. \quad 4.16$$

Luego:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{T}} \Rightarrow C_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial T_{ij} \partial T_{kl}}. \quad 4.17$$

Para el cálculo de  $\mathcal{C}$  se requieren las derivadas parciales de  $I$  con respecto a  $\mathbf{T}$ :

$$\frac{\partial I}{\partial T_{11}} = 1, \quad \frac{\partial I}{\partial T_{22}} = 1, \quad \frac{\partial I}{\partial T_{12}} = 0, \quad 4.18$$

El tensor  $\mathbf{T}^2$  tiene la forma:

$$\mathbf{T}^2 = \begin{pmatrix} T_{11}^2 + T_{12}^2 & T_{12}[T_{11} + T_{22}] \\ T_{12}[T_{11} + T_{22}] & T_{12}^2 + T_{22}^2 \end{pmatrix}, \quad 4.19$$

y las derivadas parciales de  $II$  con respecto a  $\mathbf{T}$  son:

$$\frac{\partial II}{\partial T_{11}} = T_{11}, \quad \frac{\partial II}{\partial T_{22}} = T_{22}, \quad \frac{\partial II}{\partial T_{12}} = 2T_{12}. \quad 4.20$$

Ocupando entonces la ecuación 4.17 con la energía de deformación 4.8, se tiene que los componentes del tensor de rigidez quedan en función de  $W$  y el campo de esfuerzos como:

$$\begin{aligned} C_{1111} &= \frac{\partial^2 W}{\partial I^2} + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial I \partial II} T_{11} + \frac{\partial^2 W}{\partial II^2} T_{11}^2 + \frac{\partial^2 W}{\partial I^2} \\ &= \alpha\beta[\tanh^2(\beta I) - 1] - \gamma\iota(1 + 2\iota II)^{-1.5} T_{11}^2 + \gamma(1 + 2\iota II)^{-0.5}, \end{aligned} \quad 4.21$$

$$\begin{aligned} C_{1122} &= \frac{\partial^2 W}{\partial I^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial I \partial II} (T_{11} + T_{22}) + \frac{\partial^2 W}{\partial II^2} T_{11} T_{22} \\ &= \alpha\beta[\tanh^2(\beta I) - 1] - \gamma\iota(1 + 2\iota II)^{-1.5} T_{11} T_{22}, \end{aligned} \quad 4.22$$

$$\begin{aligned} C_{1112} &= 2 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial I \partial II} + \frac{\partial^2 W}{\partial II^2} T_{11} \right) T_{12} \\ &= -\gamma\iota(1 + 2\iota II)^{-1.5} T_{11} T_{22}, \end{aligned} \quad 4.23$$

$$\begin{aligned} C_{2222} &= \frac{\partial^2 W}{\partial I^2} + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial I \partial II} T_{22} + \frac{\partial^2 W}{\partial II^2} T_{22}^2 + \frac{\partial W}{\partial II} \\ &= \alpha\beta[\tanh^2(\beta I) - 1] - \gamma\iota(1 + 2\iota II)^{-1.5} T_{22}^2 + \gamma(1 + 2\iota II)^{-0.5}, \end{aligned} \quad 4.24$$

$$\begin{aligned} C_{1212} &= 2 \frac{\partial^2 W}{\partial II^2} T_{12}^2 + \frac{\partial W}{\partial II} \\ &= -\gamma\iota(1 + 2\iota II)^{-1.5} T_{12}^2 + \gamma(1 + 2\iota II)^{-0.5}, \end{aligned} \quad 4.25$$

$$\begin{aligned} C_{1222} &= T_{12} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial I \partial II} + \frac{\partial^2 W}{\partial II^2} T_{22} \right) T_{12} \\ &= -\gamma\iota(1 + 2\iota II)^{-1.5} T_{12} T_{22}. \end{aligned} \quad 4.26$$

Se tiene una ecuación diferencial parcial lineal de 4<sup>to</sup> orden en 4.7. En una primera aproximación se asumirán las condiciones de borde:

$$\Delta T_{22}(x, 0) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x, 0) = 0, \quad \Delta T_{12}(x, 0) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(x, 0) = 0, \quad 4.27$$

es decir, no hay carga externa incremental en la superficie del sólido semi-infinito.

Una solución particular para la EDP 4.7 es:

$$\phi(x, y) = \varphi_c(y) \cos kx + \varphi_s(y) \sin kx, \quad k \in \mathbb{R} \quad 4.28$$

Para esta solución las condiciones de borde 4.27 quedan como lo muestra 4.29 y 4.30, y la EDP 4.7 como se muestra en 4.31

$$-k^2(\varphi_c(0) \cos kx + \varphi_s(0) \sin kx) = 0 \Leftrightarrow \varphi_c(0) = 0, \quad \varphi_s(0) = 0, \quad 4.29$$

$$k(-\varphi_c'(0) \sin kx + \varphi_s'(0) \cos kx) = 0 \Leftrightarrow \varphi_c'(0) = 0, \quad \varphi_s'(0) = 0, \quad 4.30$$

$$a[\varphi_c^{(4)}(y) \cos kx + \varphi_s^{(4)}(y) \sin kx] + k^4 b[\varphi_c(y) \cos kx + \varphi_s(y) \sin kx] - k^2 c[\varphi_c''(y) \cos kx + \varphi_s''(y) \sin kx] + kd[-\varphi_c'''(y) \sin kx + \varphi_s'''(y) \cos kx] + k^3 e[\varphi_c'(y) \sin kx - \varphi_s'(y) \cos kx] = 0. \quad 4.31$$

Esto es para todo  $\cos(kx)$  y  $\sin(kx)$ , luego no necesariamente se cumple que:

$$\cos kx = 0 \quad \text{ò} \quad \sin kx = 0, \quad 4.32$$

por lo que la ecuación 4.31 para que sea satisfecha se transforma en el sistema de ecuaciones 4.33

$$\begin{aligned} a\varphi_c^{(4)} + bk^4\varphi_c - ck^2\varphi_c'' + dk\varphi_s^{(3)} - ek^3\varphi_s' &= 0, \\ a\varphi_s^{(4)} + bk^4\varphi_s - ck^2\varphi_s'' - dk\varphi_c^{(3)} + ek^3\varphi_c' &= 0. \end{aligned} \quad 4.33$$

Sean las funciones  $\Lambda$  y  $\Sigma$  definidas como:

$$\Lambda(\lambda) = \int_0^\infty \varphi_c(y) e^{-\lambda y} dy, \quad 4.34$$



$$\Sigma(\lambda) = \int_0^{\infty} \varphi_s(y) e^{-\lambda y} dy. \quad 4.35$$

Si se realiza una multiplicación por  $e^{-\lambda y}$  y se integra desde 0 hasta  $\infty$  en el sistema de ecuaciones 4.33 queda como:

$$\begin{aligned} aD_c + bk^4J_c - ck^2B_c + dkC_s - ek^3A_s &= 0, \\ aD_s + bk^4J_s - ck^2B_s - dkC_c + ek^3A_c &= 0. \end{aligned} \quad 4.36$$

Cada cálculo de  $A_i, B_i, C_i, D_i, J_i$  con  $i = s, c$  se muestra desde la ecuación 4.37 a la 4.41:

$$A_i = \int_0^{\infty} \varphi_i'(y) e^{-\lambda y} dy = \underbrace{\varphi_i(y) e^{-\lambda y} \Big|_0^{\infty}}_{0 - \varphi_i(0) = 0} + \lambda \int_0^{\infty} \varphi_c(y) e^{-\lambda y} dy = \lambda J_i, \quad 4.37$$

$$B_i = \int_0^{\infty} \varphi_i''(y) e^{-\lambda y} dy = \underbrace{\varphi_i'(y) e^{-\lambda y} \Big|_0^{\infty}}_{0 - \varphi_i'(0) = 0} + \lambda \int_0^{\infty} \varphi_c'(y) e^{-\lambda y} dy = \lambda A_i = \lambda^2 J_i, \quad 4.38$$

$$C_i = \int_0^{\infty} \varphi_i'''(y) e^{-\lambda y} dy = \underbrace{\varphi_i''(y) e^{-\lambda y} \Big|_0^{\infty}}_{0 - \varphi_i''(0) = -p_i} + \lambda \int_0^{\infty} \varphi_i''(y) e^{-\lambda y} dy = -p_i + \lambda^3 J_i, \quad 4.39$$

$$D_i = \int_0^{\infty} \varphi_i^{(4)}(y) e^{-\lambda y} dy = \underbrace{\varphi_i'''(y) e^{-\lambda y} \Big|_0^{\infty}}_{0 - \varphi_i'''(0) = -q_i} + \lambda C_i = -q_i - \lambda p_i + \lambda^4 J_i, \quad 4.40$$

$$J_c = \Lambda, \quad J_s = \Sigma. \quad 4.41$$

Con estos resultados al remplazar en el sistema 4.36 se tiene el sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned}
a(-q_c - \lambda p_c + \lambda^4 \Lambda) + bk^4 \Lambda - ck^2 \lambda^2 \Lambda + dk(-p_s + \lambda^3 \Sigma) - ek^3 \lambda \Sigma &= 0, \\
a(-q_s - \lambda p_s + \lambda^4 \Sigma) + bk^4 \Sigma - ck^2 \lambda^2 \Sigma - dk(-p_c + \lambda^3 \Lambda) + ek^3 \lambda \Lambda &= 0.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Si se factoriza esta expresión con respecto a  $\Lambda$  y  $\Sigma$  el sistema queda como:

$$\begin{aligned}
\Lambda(\lambda)\alpha + \Sigma(\lambda)\beta + \gamma_1 &= 0, \\
-\beta\Lambda(\lambda) + \Sigma(\lambda)\alpha + \gamma_2 &= 0,
\end{aligned} \tag{4.43}$$

con  $\alpha = [a\lambda^4 + bk^4 - ck^2\lambda^2]$ ,  $\beta = [dk\lambda^3 - ek^3\lambda]$ ,  $\gamma_1 = [-aq_c - \lambda p_c - dkp_s]$  y  $\gamma_2 = [-aq_s - \lambda p_s + dkp_c]$ . Entonces:

$$\begin{aligned}
\alpha\Lambda + \beta\Sigma &= -\gamma_1, \\
-\beta\Lambda + \alpha\Sigma &= -\gamma_2,
\end{aligned} \tag{4.44}$$

por lo que se obtiene que:

$$\Lambda = \frac{\gamma_2\beta - \gamma_1\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \Sigma = -\frac{\gamma_1\beta + \gamma_2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}. \tag{4.45}$$

Se debe recordar que todas las definiciones  $\alpha, \beta$  y  $\gamma_i$  dependen de  $\lambda$ , y en primera instancia  $k, q_i$  y  $p_i$  son desconocidos. En el caso que se asuma que tanto  $p_c$  como  $p_s$  son nulos<sup>3</sup>, conlleva que:

$$\Lambda = \frac{a \cdot \alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot q_c - \frac{a \cdot \beta}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot q_s, \quad \Sigma = \frac{a \cdot \beta}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot q_c + \frac{a \cdot \alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot q_s. \tag{4.46}$$

Utilizando la transformada inversa de Laplace en 4.34 y 4.35 se tiene:

$$\varphi_c(y) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{a \cdot \alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \right] (y) \cdot q_c + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{-a \cdot \beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right] (y) \cdot q_s, \tag{4.47}$$

$$\varphi_s(y) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{a \cdot \beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right] (y) \cdot q_c + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{a \cdot \alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \right] (y) \cdot q_s, \tag{4.48}$$

---

<sup>3</sup>El asumir que  $p_c$  y  $p_s$  sean nulos conlleva a que  $\Delta T_{11}(x, 0) = 0$ . Si no fuesen nulos, se estaría hablando de otra condición de borde para los incrementos.

el cuál es el último paso antes de obtener la solución reemplazando estas expresiones en la ecuación 4.28. Para encontrar las transformadas inversas de Laplace se muestra un ejemplo, sean  $E_1$  y  $E_2$  las expresiones:

$$\begin{aligned}
 E_1(\lambda) &= \frac{a(a\lambda^4 + bk^4 - ck^2\lambda^2)}{(a\lambda^4 + bk^4 - ck^2\lambda^2)^2 + (dk\lambda^3 - ek^3\lambda)^2} \\
 &= a^2 \cdot \frac{\lambda^4}{M(\lambda)} + abk^4 \cdot \frac{1}{M(\lambda)} - ack^2 \cdot \frac{\lambda^2}{M(\lambda)} \\
 &= a^2 \cdot l_1(\lambda) + abk^4 \cdot l_2(\lambda) - ack^2 \cdot l_3(\lambda),
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}
 E_2(\lambda) &= \frac{a(dk\lambda^3 - ek^3)}{M(\lambda)} \\
 &= adk \cdot \frac{\lambda^3}{M(\lambda)} - aek^3 \cdot \frac{1}{M(\lambda)} \\
 &= adk \cdot l_4(\lambda) - aek^3 \cdot l_5(\lambda),
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

con:

$$\begin{aligned}
 M(\lambda) &= a^2\lambda^8 + (d^2k^2 - 2ack^2)\lambda^6 + (2abk^4 + c^2k^4 - 2dek^4)\lambda^4 \\
 &\quad + (a^2k^6 - 2bck^6)\lambda^2 + b^2k^8.
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Para el caso de resolución de  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$ , se puede realizar el cambio de variable  $\xi = \lambda^2$  sin ningún problema, y teniendo finalmente un polinomio  $M(\xi)$  que es de 4<sup>to</sup> grado en vez de grado 8.

Para la obtención de las transformadas inversas de  $E_1$  y  $E_2$  se requiere obtener las de  $l_1, l_2, l_3, l_4$  y  $l_5$ . Un método para calcularlas es realizar la separación por fracciones simples, en el que se obtienen las raíces del polinomio  $M$ . Por ejemplo, si tiene sólo raíces reales  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  y  $\xi_4$ , la separación por fracciones simples para  $l_1$  sería de la forma:

$$l_1 = \frac{A_1}{\xi - \xi_1} + \frac{A_2}{(\xi - \xi_1)^2} + \frac{A_3}{\xi - \xi_3} + \frac{A_4}{\xi - \xi_4}, \tag{4.52}$$

o considerando otro ejemplo que, tenga raíces complejas del tipo  $\lambda_{np} = r_{np} + s_{np}i$ , y sean específicamente  $\lambda_{12}, \lambda_{12}, \lambda_{56}$  y  $\lambda_{78}$ , entonces para el caso de  $l_5$  se tendría:

$$l_5 = \frac{B_1\lambda + B_2}{(\lambda - r_{12})^2 + s_{12}^2} + \frac{B_3\lambda + B_4}{[(\lambda - r_{12})^2 + s_{12}^2]^2} + \frac{B_5\lambda + B_6}{(\lambda - r_{56})^2 + s_{56}^2} + \frac{B_7\lambda + B_8}{(\lambda - r_{78})^2 + s_{78}^2}. \quad 4.53$$

Sea el caso de 4.52. Es necesario encontrar las expresiones para  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  y  $A_4$ . Multiplicando por  $(\xi - \xi_1)^2(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_4)$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \xi^2 = & A_1(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_4) + A_2(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_4) \\ & + A_3(\xi - \xi_1)^2(\xi - \xi_4) + A_4(\xi - \xi_1)^2(\xi - \xi_3). \end{aligned} \quad 4.54$$

Ordenando los términos según  $\xi$  se obtiene:

$$\begin{aligned} & [A_1 + A_3 + A_4] \cdot \xi^3 \\ & + [A_2 - A_1(\xi_1 + \xi_3 + \xi_4) - A_3(2\xi_1 + \xi_4) - A_4(2\xi_1 + \xi_3)] \cdot \xi^2 \\ & + [A_1(\xi_3\xi_4 + \xi_1\xi_4 + \xi_1\xi_3) - A_2(\xi_3 + \xi_4) + A_3(2\xi_1\xi_4 + \xi_1^2) \\ & + A_4(2\xi_1\xi_3 + \xi_1^2)] \cdot \xi \\ & + [A_1\xi_1\xi_3\xi_4 + A_2\xi_3\xi_4 - A_3\xi_1\xi_4^2 - A_4\xi_1\xi_3^2] = \xi^2, \end{aligned} \quad 4.55$$

el cuál se puede plantear como el siguiente sistema, para las incógnitas  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  y  $A_4$  resolver:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -(\xi_1 + \xi_3 + \xi_4) & -(2\xi_1 + \xi_4) & -(2\xi_1 + \xi_3) \\ \xi_3\xi_4 + \xi_1\xi_4 + \xi_1\xi_3 & -(\xi_3 + \xi_4) & 2\xi_1\xi_4 + \xi_1^2 & 2\xi_1\xi_3 + \xi_1^2 \\ \xi_1\xi_3\xi_4 & \xi_3\xi_4 & -\xi_1\xi_4^2 & -\xi_1\xi_3^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 4.56$$

luego se resuelven obtienen las incógnitas del sistema si éste lo permite, por lo que si se aplica la transformada inversa a  $l_1$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[l_1] = & A_1\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\xi - \xi_1}\right] + A_2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(\xi - \xi_1)^2}\right] + A_3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\xi - \xi_3}\right] + A_4\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\xi - \xi_4}\right], \end{aligned} \quad 4.57$$

en donde cada transformada inversa se puede obtener de tablas, por lo que se puede obtener la transformada inversa de  $l_i$ , y por lo tanto de  $E_1$  y  $E_2$ . Tanto para el caso de

raíces reales como complejas, con distinta multiplicidad (en el caso de las complejas hasta multiplicidad 2), se pueden obtener las transformadas inversas según la tabla 4.2.

La programación de la resolución del problema se realiza para tríos de esfuerzos  $T_{11}$ ,  $T_{12}$  y  $T_{22}$ , y se construye con el software Wolfram Mathematica® [13] a través de ciclos *For*. La idea es buscar para cada trío ordenado el estado de la estabilidad elástica. La secuencia del programa es mostrada en la tabla 4.3.

La condición de estabilidad que se decide para cada trío de esfuerzos está dada por  $\lim_{y \rightarrow \infty} \varphi_c(y) > 10^{10}$  o  $\lim_{y \rightarrow \infty} \varphi_s(y) > 10^{10}$ . En el caso que se cumple la condición, se habla de que para el trío de esfuerzos dado, el sistema es inestable elásticamente. Notar que si bien la inestabilidad tiene un argumento matemático (que las funciones mostradas diverjan), esta puede tener significado físico a través de las suposiciones realizadas para la matemática del problema en torno a las funciones  $\varphi_c$  y  $\varphi_s$ , que finalmente se reflejan en los incrementos de cargas, y que podrían generar inestabilidades en las deformaciones.

En el subproceso entre el paso 5 al 11 se realiza el cálculo de las transformadas inversas de Laplace de las ecuaciones 4.47 y 4.48.

En cada iteración del ciclo mencionado se obtienen las funciones  $\varphi_c$  y  $\varphi_s$ , las que son necesarias para decidir si, dado un trío de esfuerzos, el sistema es estable o no. Posteriormente se almacenan todos los datos para realizar el post-procesado y construir gráficos.

El criterio de estabilidad establecido gira en torno al concepto de que las funciones  $\varphi$  dependen de una variable (sea por ejemplo  $y$ ). En el programa posteriormente a obtener dichas expresiones se le busca el límite cuando  $y \rightarrow \infty$  de tal forma que si los valores calculados de las funciones  $\varphi$  tienen un límite finito, se considera al problema en dónde se aplica el trío ordenado de esfuerzos establecido estable.

Un detalle de los resultados es que en ciertos puntos no se puede detectar ni estabilidad ni inestabilidad. Esto puede significar que en ciertos estados de esfuerzo el problema tenga una naturaleza neutra (ni estable ni inestable), pero no se asegura. Lo importante es que el programa gráfica y asegura los tríos de esfuerzo en donde se producen inestabilidades (los límites de las funciones  $\varphi(y)$  divergen), y se pueden también asegurar las regiones de estabilidad. Por ejemplo, para la figura 4.2 se muestran las zonas de inestabilidad (zonas de color rojo) para distintos valores de esfuerzo axial y una carga de corte inicial de  $T_{12} = 10^4$  [MPa]. Cabe mencionar que, obviamente, si no hay esfuerzos iniciales no existe inestabilidad. En él se puede apreciar que en un rango es posible asegurar la estabilidad (en celeste). También se aprecia que no hay mucha diferencia al aumentar el corte a casos mayores como  $T_{12} = 10^5$  [MPa] o menores como  $T_{12} = 10^2$  [MPa] o incluso de valor nulo. En naranja se muestran las regiones que no se aseguran ni la estabilidad, ni la inestabilidad.

**Tabla 4.2:** Tabla de transformadas inversas de Laplace para el problema de inestabilidad [21].

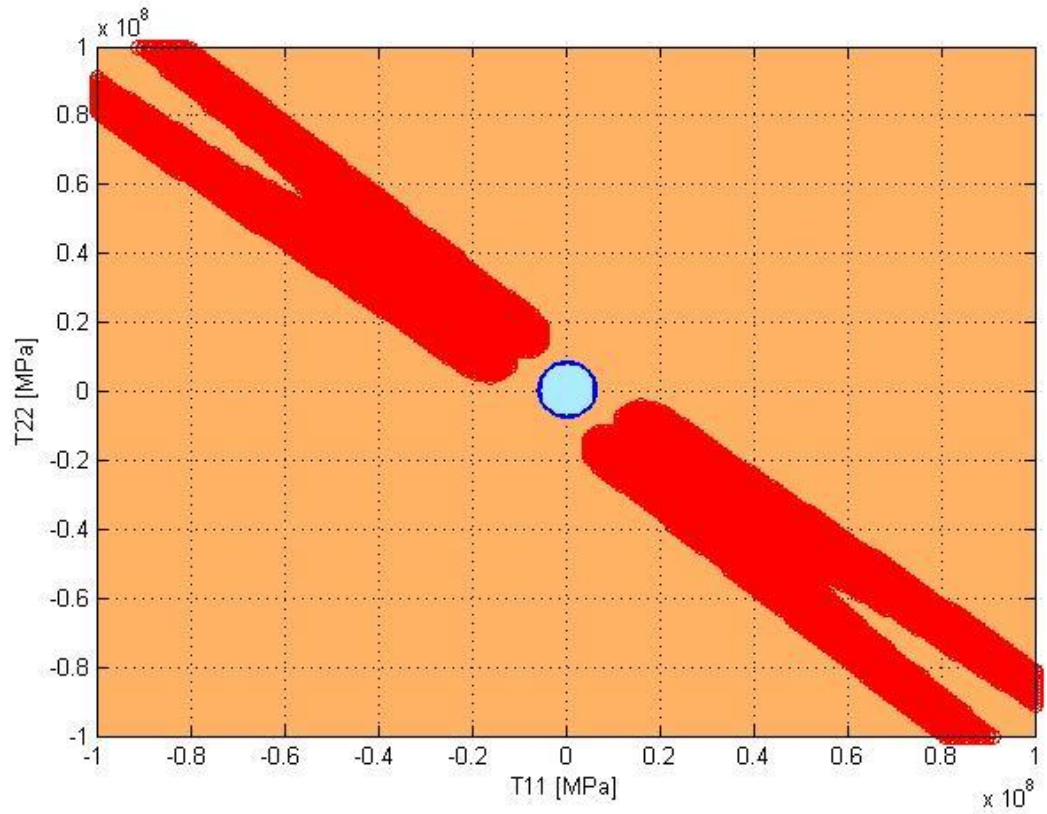
<b>Término</b>	<b>Transformada inversa de Laplace</b>
$f(\lambda)$	$\mathcal{L}^{-1}[f(\lambda)](y)$
$\frac{1}{\lambda - a}$	$e^{ay}$
$\frac{1}{(\lambda - a)^n}$	$\frac{y^{n-1} e^{ay}}{(n-1)!}$
$\frac{s}{(\lambda - r)^2 + s^2}$	$e^{ry} \sin(sy)$
$\frac{2s^3}{[(\lambda - r)^2 + s^2]^2}$	$e^{-ry} [\sin(sy) - sy \cos(sy)]$

**Tabla 4.3:** Obtención de información de estabilidad elástica para esfuerzos  $T_{11}^0$ ,  $T_{12}^0$  y  $T_{22}^0$  dados.

1. Se definen los ciclos  $For$  que variarán tanto  $T_{11}^0$  como  $T_{22}^0$ , por ejemplo, y que obtienen como producto los valores de las funciones  $\varphi$ .
2. Se calculan los valores de los invariantes  $I_1$  e  $I_2$ .
3. Se obtienen los elementos de la matriz  $C^{-1}$  a través del desarrollo que se detalla en el Anexo 7.7.
4. Se invierte la matriz para obtener los valores de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  y  $e$ .
5. Se obtienen las raíces del polinomio  $M(\xi) = n_1 \xi^4 + n_2 \xi^3 + n_3 \xi^2 + n_4 \xi + n_5$  mostrado en 4.51.
6. Se revisan si son reales o complejas.
7. Se le atribuye en un vector  $f$  en el caso de ser reales el valor de  $(\xi - \xi_i)$ , y en el de ser complejas  $[(\xi - Re(\xi_i))^2 + Im(\xi_i)^2]$ , y en paralelo se revisa la multiplicidad de cada raíz albergando dicha información en un vector  $m$ .

**Tabla 4.3:** Obtención de información de estabilidad elástica para esfuerzos  $T_{11}$ ,  $T_{12}$  y  $T_{22}$  dados (continuación).

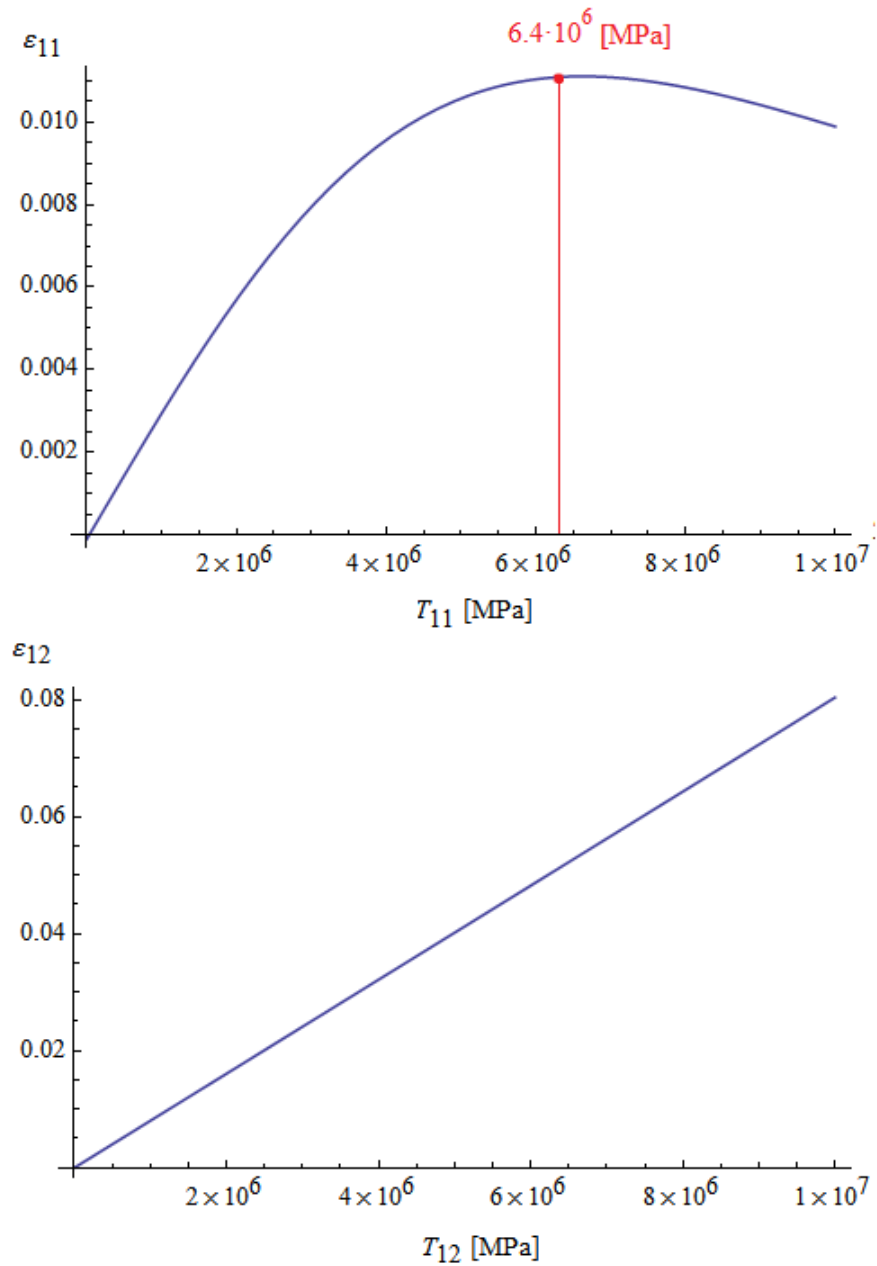
8. Se define el valor  $F = \prod_{i=1}^4 f_i^m$  para definir el polinomio típico producto de un proceso de descomposición por fracciones parciales, en el que cada término es del tipo  $X_i \cdot F/f_i$  en el caso de que la raíz  $\xi_i$  sea real y  $(X_i + Y_i \cdot \xi) \cdot F/f_i$  si es compleja, con  $X_i$  e  $Y_i$  variables por determinar, también producto de la descomposición.
9. Se factorizan las variables  $X_i$  e  $Y_i$  en el polinomio construido con respecto a  $\xi$ ,  $\xi^2$ , etc.
10. Se resuelve el sistema que es constituido por la factorización y las variables  $X_i$  e  $Y_i$ .
11. Se calculan las transformadas inversas de Laplace que se requieren, a partir de las soluciones del sistema anterior.
12. Se repite el proceso desde el punto 6, ahora para  $M(\lambda) = \sum_{i=1}^8 \eta_i \cdot \lambda^i$ .
13. Se calculan las funciones  $\varphi$ .
14. Se revisan los límites de las funciones  $\varphi(y)$  cuando  $y \rightarrow \infty$ , y se concluye respecto a la estabilidad para el estado de esfuerzos. Específicamente se guardan los datos en el que se observa divergencia en los límites.



**Figura 4.2:** Regiones de inestabilidad elástica (rojo), de desconocimiento de estabilidad (naranja) y de estabilidad asegurada (celeste) de una placa semi-infinita con una carga de corte inicial  $10^4$  [MPa].

Se aprecia que para esfuerzos del orden de  $\sigma(10^6)$  [MPa] se asegura completamente la estabilidad. Ahora, a partir del modelo utilizado, se puede observar el comportamiento del mismo asignando valores de cargas y dejando libre las variables del esfuerzo y deformación de una dirección de la ecuación 4.4. Es decir, en 4.4.a se puede estudiar el caso en que se fijan  $\Delta T_{22}$  y  $\Delta T_{12}$  para analizar cómo se comporta la curva esfuerzo-deformación en la dirección 1. En la figura 4.3 se muestra el comportamiento en la dirección 1 y el corte 12.





**Figura 4.3:** Comportamiento de la deformación en función del esfuerzo para la dirección 1 dados  $T_{22} = 10^5$  [MPa] y  $T_{12} = 10^2$  [MPa], y para el corte 12 dados  $\Delta T_{11} = 10^5$  [MPa] y  $\Delta T_{22} = 10^5$  [MPa].

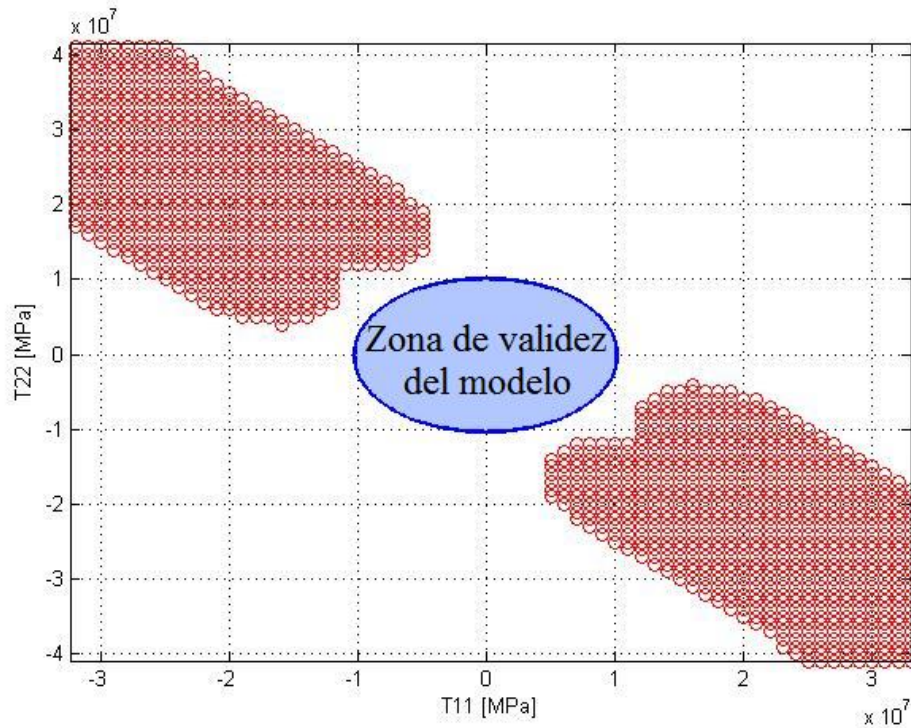
De la figura se puede deducir que para valores del esfuerzo  $\Delta T_{11}$  de  $6.4 \cdot 10^6$  [MPa] el comportamiento mecánico tiene un cambio apreciable, que en particular si los esfuerzos

son mayores, la curva no tendría un sentido físico válido para el objeto de estudio<sup>4</sup> (disminución de la rigidez al aumentar el esfuerzo). Luego, se puede decir que el modelo es válido para un rango de magnitud de los componentes del campo de esfuerzo. Al realizar varios test de la búsqueda del valor crítico de esfuerzos, se puede mostrar que el modelo es válido para valores en donde los esfuerzos axiales alcanzan los siguientes valores:

$$\begin{array}{l} T_{11} \text{ y } T_{22} \sigma(10^6) \text{ [MPa]} \\ T_{12} \text{ No restringido} \end{array} \quad 4.58$$

En la figura 4.4 se muestra un zoom de lo observado en la figura 4.2. Se muestran las regiones de inestabilidad, a la vez que los límites de la validez del modelo mencionada en el párrafo anterior.

Se puede apreciar de la figura que no existen regiones de inestabilidad elástica en los límites de validez del modelo, por lo que se puede asegurar la estabilidad para todo el rango elástico (la zona de validez del modelo equivale a la zona en que se asegura estabilidad).



**Figura 4.3:** Zoom de la figura 4.2 (a).

<sup>4</sup> Un material que pierde rigidez si  $\sigma > \sigma_{critico}$  si podría ser algo que ocurra en un caso real, en el cual cuando el material falla,  $\varepsilon$  disminuye si  $\sigma$  aumenta, pero este tipo de análisis requeriría incorporar efectos inelásticos que no se contemplan en esta tesis.

## 5. Conclusión

La nueva ecuación constitutiva, plasmada tanto en la ecuación constitutiva bilineal 3.1 como en la función densidad de energía de deformación  $W$  en 4.8 utilizada para el estudio de la estabilidad (inestabilidad) elástica, es utilizada para resolver problemas clásicos de elasticidad para materiales que no son de Cauchy ni de Green.

Estos resultados son de interés respecto a los que arroja la teoría clásica. En particular de lo obtenido para el campo de esfuerzos y deformaciones en los problemas 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 y 3.3; el comportamiento de la interface  $r^*$  y la forma en como varían las propiedades mecánicas en ella.

En los problemas del tubo cilíndrico sometido a una presión interna y extensión longitudinal sin considerar corte (capítulo 3.2.1) y considerándolo (capítulo 3.2.3), y en el de la esfera hueca sometida a presión interna, se puede apreciar que la relación entre la carga de presión y el radio crítico de interface entre zonas flexible y rígida es casi lineal (figuras 3.4 y 3.12) asumiendo las otras variables de entrada constantes (extensión, fuerza de corte). Esto es esperable dado que la ecuación constitutiva 3.1 sigue basándose en relaciones lineales, y dado que los problemas mencionados son unidimensionales, no debiese ser extraña dicha relación. Dado que el campo de esfuerzos en general es mayor al interior de la geometría, ya sea tubular o esférica, a una carga de entrada dada se observa que la interface aparece en la cara interior de la misma, y por lo mismo una porción del cuerpo pasa a pertenecer a la nueva zona rígida, más rígida que la que existía sin esa presión. Aumentando la carga, el radio crítico se observa creciente, hasta que en cierto punto el cuerpo es totalmente de material rígido (de la zona rígida), y la interface alcanza la posición de la cara exterior del cuerpo. Todo esto es observado en las figuras 3.3 y 3.11.

Con respecto al campo de esfuerzos considerando como variable sólo la carga de entrada de presión para los problemas unidimensionales, se observa que en magnitud es mayor a medida que el radio se acerca al radio interno. Esto se aprecia de lo mostrado en las figuras 3.5, 3.13, 3.17 y 3.18. Luego, se puede deducir que, tanto la ecuación 3.1 como la suposición de los problemas de que bajo ciertas cargas de entradas el esfuerzo es mayor cerca del interior del cuerpo, y por lo tanto que la división del cuerpo en zonas rígida y flexible, en ese orden desde el interior de la geometría, son totalmente válidos.

Se observa una predominancia de parte del esfuerzo azimutal  $\sigma_\theta$  con respecto al resto de los componentes del campo de esfuerzos en los problemas del tubo y de la esfera, también decreciente cuando el radio es mayor, pero que con respecto al caso lineal lo hace de forma más abrupta, y terminando con un esfuerzo menor en la cara exterior. Esto muestra claramente que al suponer zonas flexible y rígida, la carga ejercida produce que los componentes del campo de esfuerzos se comporten de una forma que para el caso de un cuerpo con propiedades mecánicas uniformes. En particular, deformar una cierta cantidad al cuerpo en la zona rígida conduce a que existan esfuerzos mayores que los que existen en la zona flexible.

A la larga, si existe zona rígida, el esfuerzo en la zona flexible en magnitud es menor que, en la misma posición, en el modelo lineal de una zona.

En el modelo bilineal se establecen arbitrariamente en un comienzo, las propiedades mecánicas (Módulo de Young y coeficiente de Poisson), que tan grandes son con respecto a la zona flexible, que posee las propiedades mecánicas del material sin cargas. En los gráficos de las figuras 3.5 y 3.15 se muestra la diferencia cuando se aumenta y reduce 10,  $10^2$  y  $10^6$  veces el módulo elástico  $E$  y el coeficiente de Poisson  $\nu$ , respectivamente. Se puede apreciar una dependencia clara de (bajo condiciones iguales de cargas y si se aumenta la diferencia entre zona flexible y zona rígida), la interface se ubica más cerca de la cara interna del cuerpo y la disminución de esfuerzo es mayor en la zona rígida, y en la flexible tiene a ser más constante, además de que en la cara exterior el esfuerzo final es menor. Es decir, al hacer más rígida la zona rígida, ésta es más pequeña (el criterio de esfuerzo máximo se cumple para un radio más pequeño) y la carga efectiva es absorbida en mayor proporción por esta misma zona, y por lo tanto el esfuerzo en la zona flexible es menor. En el caso de que la diferencia sea altísima (caso de  $10^6$  veces, o más), la zona rígida es pequeñísima, y el esfuerzo decae hasta un valor en el que a través de la zona flexible no cambia, se mantiene constante.

En el problema 3.2.1, producto de la elongación dada por el parámetro  $\lambda_z$ , el esfuerzo en  $z$  para el modelo bilineal varía según la rigidez de la zona rígida. Si la diferencia entre zonas es mayor, no se produce un salto de esfuerzo  $\sigma_z$  apreciable lo mismo si fuese menor (véase figura 3.5.c). Esto se debe a que en el caso de existir una zona menos rígida, el esfuerzo en la dirección  $z$  en la cara interna es menor que una más rígida, pero siempre tiene un comportamiento lineal, con la misma pendiente para todos los casos, y se registra un salto en el cambio de interface. A medida que sea más rígida la zona rígida, la interface se acerca a la cara interna del cuerpo y el salto es menor (más cerca del comportamiento en la zona flexible), y si es extremadamente rígida, dado que el esfuerzo de la cara interna es lo suficientemente alto y el comportamiento sigue siendo lineal, y siempre con la misma pendiente, no se registra salto y se comporta en todo el cuerpo de forma lineal sin saltos en la función esfuerzo. Si se aplica una presión distinta manteniendo constantes las propiedades mecánicas ( $E^h = 100 \cdot E^s$  por ejemplo), se tiene que el comportamiento de los componentes radial y azimutal del campo de esfuerzo es el mismo que el mostrado en 3.5 (el cual está normalizado con la presión interna ejercida). El único componente que no se comporta igual es el longitudinal  $\sigma_z$ , el que se muestra en la figura 3.6, en donde al aumentar la carga de presión la magnitud de  $\sigma_z$  disminuye en relación a dicha carga.

Si se varía el parámetro  $\lambda_z$ , como se muestra en la figura 3.7, se produce un aumento apreciable del esfuerzo en dicha dirección. Dadas las suposiciones del modelo 3.1, no tiene sentido hablar de valores superiores a  $\lambda_z = 1,02$ .

En las figuras 3.8 y 3.16 se muestran los esfuerzos  $\sigma_r$  y  $\sigma_\theta$ , respectivamente, en los casos que se admite una fase (caso clásico), y en el caso regido por la ecuación bilineal, el comportamiento si las dimensiones del cuerpo son modificadas. En el caso del problema 3.2.1 se aprecia que, si bien el esfuerzo radial tiene los mismos valores en las caras interna y externa del tubo, en general el esfuerzo para el caso de dos fases es mayor. Con respecto a si se trabaja con un espesor más

pequeño o muy grande (tendiendo a infinito), se desprende que al trabajar con un espesor más pequeño el esfuerzo se dispara y luego decrece, pero a un valor mayor que al de un espesor medio, mientras que al utilizar un medio semi infinito (aproximadamente), el valor en toda posición, a excepción de la cara interna, es menor. En el caso del estudio de  $\sigma_\theta$  para el problema 3.2.2 pasa lo mismo, pero a mayor escala en el valor de esfuerzo (diferencia de 1000 veces). Todo lo anterior se debe a que a menor espesor, considerando iguales condiciones de carga, la concentración de esfuerzo es mayor.

En el problema 3.2.3 la inclusión de la carga cortante longitudinal  $\tau_{rz}(a) = \tau_0$  a lo que sería el problema 3.2.1 (de la extensión) muestra cambios en el campo de esfuerzos. Para el esfuerzo radial se puede ver en la figura 3.21 que para valores dados de esfuerzo de corte, se produce un aumento en la magnitud de  $\sigma_r$  entre  $a$  y  $b$  con respecto al caso sin dicha carga externa. Además, a mayor esfuerzo de corte de entrada, la interface está más cercana a la cara externa del tubo (en particular se puede observar esto en la figura 3.20 en el salto en magnitud de  $\sigma_z$ ). También se observa que para cargas más altas del corte externo, en la zona flexible  $\sigma_r$  se comporta más constante (y cambio más brusco en la zona rígida). En  $\sigma_\theta$  se puede apreciar el mismo fenómeno de mayor magnitud a mayor corte externo, y para el caso de  $\tau_0 = 50[MPa]$  se observa un leve salto en magnitud en la interface. Para el esfuerzo en  $z$  en la figura 3.20 el caso es similar, y en magnitud en general es mucho más apreciable a medida que el esfuerzo de corte es mayor. Se puede ver que, tanto en la zona rígida como en la flexible, el esfuerzo  $\sigma_z$  aumenta considerablemente que en el caso sin corte externo.

A su vez, en el problema 3.2.4 se puede ver una influencia similar del esfuerzo de corte externo torsional  $\tau_{r\theta}(a) = \tau_0$  que el de  $\tau_{rz}$ . Ahora, para  $\sigma_r$  y  $\sigma_\theta$  en las figuras 3.21 y 3.25 se pueden ver pequeñas diferencias, pero la más importante es que en el caso de corte torsional la magnitud y el salto en la interface en  $\sigma_\theta$  es más pronunciado que para el corte longitudinal. Esto se puede deber a las distintas influencias de dichas cargas en la resolución de la ecuación 3.76. También se corrobora que al comparar el esfuerzo  $\sigma_z$  de las figuras 3.20 y 3.24 es ahora el caso de la carga longitudinal en la que se aprecia que hay una mayor influencia en la magnitud y el comportamiento de dicho esfuerzo que en el corte torsional. Finalmente en estas figuras se aprecia que varían un poco las posiciones de la interface para mismas magnitudes de cargas en los dos problemas.

Con respecto al campo de deformaciones utilizando el modelo bilineal para el problema 3.2.1 y 3.2.2, se puede apreciar en la figura 3.9, y en menor medida en la figura 3.17, que en general las deformaciones cumplen mucho mejor la condición de ser pequeñas. En particular se observa en las componentes del problema del tubo cilíndrico para el modelo mencionado, a una carga de presión de  $220[MPa]$ , está en el orden de  $10^{-4}$ , mientras que la teoría clásica muestra resultados absurdos del orden de  $10^8$ . En el caso de la esfera la diferencia es mucho menor (están en el mismo orden), por lo que queda por averiguar si el modelo es acorde a la realidad mediante experimentación futura.

Si se varía la rigidez de la zona rígida en el problema 3.2.1, las componentes del campo de deformaciones tienen un comportamiento diferente (al igual que las componentes del campo de

esfuerzos). En este caso si la zona rígida es muy rígida respecto a la flexible, recordando que la interface es más cercana a la cara interna del cilindro, las deformaciones sienten un cambio bruscos en la interface, mucho mayor que si la zona rígida no es tan rígida (10 veces la rigidez de la zona flexible). También, como es esperable, en el primer caso la deformación es menor que en el segundo.

Si se varía el grado de rigidez, los componentes del campo de deformaciones también muestran cambios. Es el caso del problema 3.2.1, en el que se muestra en la figura 3.10 lo mencionado. Para el caso de la deformación radial, se aprecia que el salto de la magnitud de ésta en la interface es menor a medida que la rigidez es mayor. En el caso de la deformación azimutal este fenómeno no es tan trivial, pues para  $E^h = 10 \cdot E^s$  el salto es menor que para la relación con 100 veces  $E^s$ , pero es mayor que para  $10^6$  veces. Ahora, con respecto al cambio en la magnitud de las deformaciones en la zona flexible se tiene lo mismo que para lo visto en los esfuerzos: suelen ser más constantes en la zona flexible si la zona rígida es más rígida.

Ahora, si se ven los componentes del campo de deformación y su comportamiento frente a cambios de carga de presión para los problemas del tubo cilíndrico y esfera hueca (véase figuras 3.11 y 3.18), se aprecia que en el primer problema existen saltos en la interface, y mientras mayor sea la carga, mayor es el salto en magnitud. En el caso de la esfera no existen saltos, pero sí cambios bruscos de comportamiento entre zonas. Se puede ver que en la zona dura el comportamiento es similar a lineal, mientras que en la zona blanda se aprecia una curva parecida a una función cuadrática. De todas formas, se puede ver claramente la localización de la interface con ese cambio de comportamiento. En ambos problemas se puede ver claramente que a mayor carga, la interface se mueve a un  $r$  mayor.

Para el caso de las deformaciones en los problemas donde existe una carga de corte, algo similar se ve con la interface y la relación con la magnitud de la carga: a medida que esta es mayor, la interface se mueve a un  $r$  más alejado de  $a$ . También se pueden ver las diferencias vistas en los campos de esfuerzos: para el corte longitudinal  $\tau_{rz}$  el aumento del corte influye más en los componentes radial y longitudinal (mayores saltos en  $\sigma_z$  y  $\sigma_r$  cuando es mayor el corte), mientras que el corte torsional  $\tau_{r\theta}$  influye más en la magnitud del componente azimutal del esfuerzo (mayores saltos en magnitud en  $\sigma_\theta$  cuando la torsión es mayor).

En el problema 3.3 no se pudo obtener resultados numéricos del sistema de ecuaciones algebraicas propuesto para utilizar el método de Newton-Broyden. Se buscó el origen de este problema en base a resolver el caso clásico de una sola zona mediante la aplicación del método de Magnus para la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales 3.129 aplicando las condiciones de borde en  $r = a$  y  $b$  (Véase anexo 7.5). En este desarrollo se verificó que no se logra convergencia para las series de Magnus y de matriz exponencial para la cantidad de 8 y 6 términos, respectivamente. Para mayor cantidad de términos el algoritmo arroja resultados erróneos, por lo que se deduce que en la resolución del problema 3.3 el origen es la no convergencia de dichas series. Sin embargo, se deja patente la metodología del problema, bajo una optimización del algoritmo utilizado, o bien con un aumento de recursos computacionales. Cabe destacar que el problema 3.3 en un comienzo se intentó resolver mediante la nueva

ecuación constitutiva propuesta por Bustamante 2.11, pero por el nivel de complejidad del sistema de ecuaciones diferenciales encontrado, se opta por desarrollarlo como aparece en el capítulo 3.3. Ahora, existe la posibilidad de que no sea ese el problema, sino que, como muestran los resultados del problema resuelto mediante elementos finitos, sea efectivo que el máximo esfuerzo principal no se encuentre en  $r = a$  y  $\theta = 0^\circ$ , si no que en  $r > a$ . Si fuese el caso, el problema sería la suposición de la forma de la función  $r^*(\theta)$  mostrada en 3.134, y el mismo sería el origen de que los métodos numéricos no resuelvan el problema.

Para el problema 4 del estudio de la inestabilidad elástica para un material 2D semi infinito se puede observar que, dadas las condiciones de  $\Delta T_{12}$  y  $\Delta T_{22}$  en 4.27, que en general si existen cargas axiales dentro de un rango establecido, el sistema siempre es estable para todo el rango elástico estudiado por el modelo 4.8. Dicho modelo tiene validez para ciertas condiciones de las cargas axiales y de corte (Ver 4.58), dado que posterior a esos límites se visualiza que la rigidez varía negativamente con la carga, lo cual no tiene sentido físico. Es decir, el problema es estable para toda combinación de cargas que puedan ser usadas en el modelo 4.8.

En síntesis, se puede concluir lo siguiente:

- La relación entre la interface zona rígida- zona flexible y la carga de presión de los problemas unidimensionales tratados en esta tesis es casi lineal (figuras 3.4 y 3.14).
- La suposición de zonas rígida y flexible para el modelo de los problemas 3.2.1, 3.2.2 y 3.2.3 no conduce a contradicciones como el asumir deformaciones pequeñas y luego obtener como resultados deformaciones grandes.
- El modelo bilineal 3.1 es un modelo útil simplificado de la nueva ecuación constitutiva, pues resuelve el problema de los resultados de las componentes del campo de deformaciones, además de que admite problemas en el que en cierto punto de la deformación no siga aumentando ésta, pero si al infinito el esfuerzo.
- Al existir zonas flexible y rígida, la mayor caída en la magnitud de los componentes del campo de esfuerzos ocurre en la última, por lo que, dada una posición, en la zona flexible serán menores que en el mismo problema considerando sólo zona flexible (problema clásico lineal).
- Si la zona rígida es más rígida, los cambios en magnitud del esfuerzo y deformación son más bruscos en la interface. Además, bajo mismas condiciones de carga, la zona rígida del cuerpo es menor.
- En el problema 3.2.1 si la elongación  $\lambda_z$  es mayor, se aprecia un cambio sólo en  $\sigma_z$ , además, bajo mismas condiciones de elongación, si la zona rígida es más rígida, la interface registra cambios menos bruscos para  $\sigma_z$ .

- En los problemas unidimensionales tratados en esta tesis, si el cuerpo tiene dimensiones más pequeñas bajo mismas condiciones de carga, el esfuerzo es mayor (concentración de esfuerzos).
- En los problemas 3.2.3 y 3.2.4 la carga de corte aplicada (longitudinal y torsional respectivamente) produce cambios en los componentes del campo de esfuerzos en la interface. Si es mayor, los cambios son mayores; en el primer caso se refleja más en el esfuerzo  $\sigma_\theta$  y el segundo en  $\sigma_z$ . Además, bajo mismas condiciones de carga axial, si el corte inducido es mayor, la zona rígida es una proporción más grande del cuerpo que con un corte menor; se observan pequeñas variaciones de la magnitud de dicha proporción para los dos problemas.
- El modelo 3.1 es mejor modelo que el lineal elástico para materiales duros como el utilizado para realizar los cálculos (Carburo de Circonio), al obtener mejores resultados (y no absurdos) referente a los componentes del campo de deformaciones. Si la zona rígida es más rígida, la deformación es menor en la zona rígida y flexible.
- Para la resolución del problema 3.3 se requiere una mejora en el algoritmo, o bien un aumento en los recursos computacionales, para tener la cantidad de términos de las series de Magnus y de la matriz exponencial de forma tal que tengan una convergencia. Este análisis se puede realizar observando los resultados para el problema clásico respecto a los resultados encontrados para el mismo problema por Timoshenko. De todas formas se deja estipulado una metodología que debiese ser capaz de obtener resultados tras la solución de los problemas anteriormente mencionados.
- Como trabajo futuro es necesario realizar un análisis completo de convergencia para las series utilizadas del problema:
  - Serie suposición de solución de funciones desplazamiento 3.127.
  - Serie suposición de función interface con respecto a  $\theta$  3.134.
  - Serie de Magnus A.29.
  - Serie matriz exponencial A.26.

Este análisis es el que conllevará a una resolución del problema 3.3, pues el análisis de solo la convergencia de la serie de Magnus y la serie matriz exponencial no llegan por si solos a un buen resultado (Véase anexo 7.5).

- Existe la opción de que el problema sea la suposición de la función  $r^*(\theta)$  mostrada en 3.134 y que por ello no se pueda resolver el problema. Ese sería el caso en que lo resuelto por elementos finitos sea correcto: el esfuerzo principal máximo se encuentre en  $r > a$ . Es otra hipótesis que se debe comprobar en futuros trabajos.



- En el problema 4, dadas las condiciones en la ecuación 4.8 de los incrementos de las cargas axiales, el problema es elásticamente estable para todo el rango elástico estudiado por el modelo 4.8. Para órdenes mayores a lo establecido en 4.58, el modelo no tiene sentido físico, y no tiene sentido hablar entonces de inestabilidad.
- Como trabajo futuro en estabilidad se plantea el resolver el problema para otras condiciones de borde, distintas de las mostradas en 4.27. Esto es para estudiar problemas distintos en donde existan esfuerzos residuales, o bien cargas variantes en el tiempo, las cuales podrían ser de interés como objetivo del modelo planteado en 4.8 (como por ejemplo materiales rocos para la geofísica, u otros).

## 6. Bibliografía

- [1] Rajagopal K. R. 2011 Conspectus of Concepts of Elasticity. *Mathematics and Mechanics of Solids*. Vol. 16 no. 5 536-562. DOI:10.1177/1081286510387856
- [2] Rajagopal K. R. 2010 On a New Class of Models in Elasticity. *Mathematical and Computational Applications*. Vol. 15, No. 4, pp. 506-528. DOI:10.1098/rspa.2008.0427.
- [3] Bustamante R. 2009 Some topics on a new class of elastic bodies. *Proceedings of the royal society, Mathematical, physical and engineering sciences*. Vol. 465 no. 2105 1377-1392. DOI:10.1098/rspa.2008.0427.
- [4] Rajagopal K. R. 2007 Elasticity of Elasticity. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*. Volume 58, Issue 2, pp 309-317.
- [5] Bustamante R. & Rajagopal K. R. 2010 A Note on Plane Strain and Plane Stress Problems for a New Class of Elastic Bodies. *Mathematics and Mechanics of Solids*. Vol. 15 no. 2 229-238. DOI:10.1177/1081286508098178.
- [6] Bustamante R. & Rajagopal K. R. 2011 Solutions of some simple boundary value problems within the context of a new class of elastic materials. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. Volume 46, Issue 2, Pages 376–386.
- [7] Rajagopal K. R. & Saravanan U. 2011 Spherical inflation of a class of compressible elastic bodies. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. Volume 46, Issue 9, Pages 1167–1176.

- [8] Rajagopal K. R. & Saravanan U. 2011 Extension, inflation and circumferential shearing of an annular cylinder for a class of compressible elastic bodies. *Mathematics and Mechanics of Solids*. Vol. 17 no. 5 473-499. DOI:10.1177/1081286511423125.
- [9] Ortiz A., Bustamante R. & Rajagopal K. R. 2012 A numerical study of a plate with a hole for a new class of elastic bodies. *Acta Mechanica*. Volume 223, Issue 9, Pages 1971-1981.
- [10] Slaughter W. S. 2002 *The linearized theory of elasticity*, Birkhauser. ISBN: 978-1-4612-0093-2. Pages 78-90.
- [11] Granta Design. Software CES EDUPACK 2013.
- [12] Timoshenko S. 1951 *Theory of elasticity*. Second edition. McGraw-Hill. Pages 55-155.
- [13] Wolfram Research. Software WOLFRAM MATHEMATICA 8.
- [14] Deufhard P. 2004 *Newton Methods for Nonlinear Problems. Affine Invariance and Adaptive Algorithms*. Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 35. Springer. ISBN 3-540-21099-7.
- [15] Broyden, C. G. 1965 A Class of Methods for Solving Nonlinear Simultaneous Equations. *Mathematics of Computation* (American Mathematical Society) 19 (92): pp. 577–593. DOI:10.2307/2003941.
- [16] Feynman R. P. 1948 Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics, *Rev. Mod. Phys.* 20, 367-387.
- [17] Wolfe P. 1969 Convergence Conditions for Ascent Methods. *SIAM Review* 11 (2): 226–000.
- [18] Magnus W. 1954 On the exponential solution of differential equations for a linear operator. *Commun. Pure Appl. Math.* 7 , 649-673.
- [19] Bustamante R. & Rajagopal K. R. 2014 Solutions of some boundary value problems for a new class of elastic bodies undergoing small strains. Comparison with the classical theory of linearized elasticity: Part I “Problems with cylindrical symmetry”. *Acta Mechanica* (accepted).
- [20] Saada A. 1974 *Elasticity, theory and applications*. Pages 69-91.
- [21] Springer Science & Business Media. 2014 *An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series*. Pages 292-299.

## 7. Anexos

### 7.1. Método de Newton- Rhapson

Para el caso específico de sistemas de ecuaciones no lineales es sabido que en general no hay criterios de existencia o unicidad para un sistema no lineal. Determinar la solución de estos sistemas usualmente es una tarea bastante difícil.

El método de Newton-Rhapson [14] es un método numérico iterativo cuyo objetivo es el encontrar soluciones de ecuaciones o sistemas de éstas, aplicando sucesivas correcciones a una estimación inicial  $x_1$  (o un escalar en el caso de una dimensión)

Sea  $x_{sol}$  tal que  $f(x_{sol}) = 0$ . La expansión de Taylor de  $f(x)$  en torno a  $x_1$  evaluada en  $x_{sol}$  es:

$$f(x_{sol}) = 0 = f(x_1) + \frac{df}{dx}(x_1) \cdot (x_{sol} - x_1) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f}{dx^2}(x_1) \cdot (x_{sol} - x_1)^2 + \dots \quad A.1$$

Si se tiene que  $|x_{sol} - x_1| \ll 1$ , entonces:

$$|x_{sol} - x_1| \gg |x_{sol} - x_1|^2 \gg |x_{sol} - x_1|^3 \gg \dots, \quad A.2$$

y la primera derivada permite obtener una buena aproximación de la solución, luego:

$$0 = f(x_1) + \frac{df}{dx}(x_1) \cdot (x_{sol} - x_1), \quad \frac{df}{dx}(x_1) \neq 0, \quad A.3$$

Por lo que despejando y generalizando en el paso  $k$ , se tiene la regla de iteración del método de Newton-Rhapson de una variable:

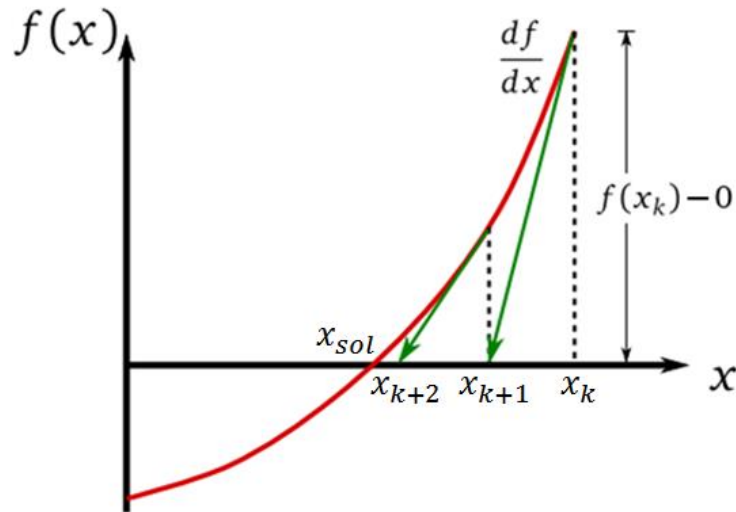
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad A.4$$

La interpretación gráfica de la ecuación A.4 mostrada en la figura A.1 dice que a partir de una estimación inicial  $x_k$  se extrapola una tangente a la función evaluada en ese punto hasta cortar el eje  $x$ . Con esto se obtiene una nueva estimación  $x_{k+1}$ .

Para la resolución de ecuaciones no lineales se procede de forma análoga. Sea el vector de incógnitas:

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad \text{A. 5}$$

y sea el sistema de ecuaciones no lineales a resolver de la forma mostrada en A. 6.



**Figura A.1:** Interpretación gráfica del método de Newton-Rhapson.

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= 0, \\ f_2(\mathbf{x}) &= 0, \\ &\dots, \\ f_n(\mathbf{x}) &= 0. \end{aligned} \quad \text{A. 6}$$

El sistema de ecuaciones equivale a  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ . De la misma forma que en A. 1 se puede utilizar una expansión de Taylor para aproximar la componente  $f^{[i]} = \mathbf{f}[i]$  en la vecindad de la estimación  $\mathbf{x}_k$ .

$$\begin{aligned} f^{[i]}(\mathbf{x}) &= f^{[i]}(\mathbf{x}_k) + \sum_{m=1}^n \frac{\partial f^{[i]}}{\partial x_m}(\mathbf{x}_k) \cdot (x_m - x_{k_m}) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^n (x_m - x_{k_m}) \frac{\partial^2 f^{[i]}}{\partial x_m \partial x_p}(\mathbf{x}_k) \cdot (x_n - x_{k_n}). \end{aligned} \quad \text{A. 7}$$

Usando análogamente el argumento A.2, ahora  $|\mathbf{x}_{sol} - \mathbf{x}_k| \ll 1$ , y la definición de matriz Jacobiana como la matriz  $\mathbf{J}_k$  de  $n \times n$  mostrada en A. 8, se considera una buena aproximación lo mostrado en A. 9.

$$J_{kim} = \frac{\partial f^{[i]}}{\partial x_m}(\mathbf{x} = \mathbf{x}_k). \quad A.8$$

$$f^{[i]}(\mathbf{x}_{sol}) = 0 \approx f^{[i]}(\mathbf{x}_k) + \sum_{m=1}^n J_{kim} \cdot (x_{sol_m} - x_{k_m}). \quad A.9$$

Generalizando para el paso  $k$ , se tiene que:

$$0 = f^{[i]}(\mathbf{x}_k) + \sum_{m=1}^n J_{kim} \cdot (x_{k+1_m} - x_{k_m}). \quad A.10$$

Se define el vector actualización  $\Delta \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$ , por lo que el sistema de ecuaciones lineales queda

$$f^{[i]}(\mathbf{x}_k) = - \sum_{m=1}^n J_{kim} \Delta x_{k_m}, \quad A.11$$

por lo que la regla de iteración del método de Newton para sistemas de ecuaciones no lineales queda:

$$\Delta \mathbf{x}_k = -(\mathbf{J}_k)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k). \quad A.12$$

Es decir, en cada paso se calcula el vector actualización  $\Delta \mathbf{x}$  para luego obtener el nuevo vector  $\mathbf{x}_{k+1}$ . Las condiciones de término de la iteración, utilizando los valores de tolerancia relativa  $\delta r$  y absoluta  $\delta a \ll 1$  consisten en comparar las magnitudes de la función  $\mathbf{f}$  evaluada en cada paso  $k$ , es decir:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)\| &\leq \delta a, \\ \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)\| &\leq \delta a, \\ \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)\| &\leq \delta r \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)\|, \end{aligned} \quad A.13$$

con la norma  $\|\cdot\|$  electa cuidadosamente, y que en muchos casos se utiliza:

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)\|_{\infty} = \max\{|f_i(\mathbf{x}_k)|\}. \quad A.14$$

El desempeño del método de Newton para sistemas de ecuaciones no lineales depende fuertemente de  $\mathbf{x}_1$ . Una mala estimación puede provocar que el método demore muchas iteraciones en converger. Una pésima estimación puede que no converja.

El cálculo del Jacobiano puede realizarse de forma analítica y posteriormente evaluar para cada  $\mathbf{x}_k$  o bien obtenerlo mediante diferencias finitas, como lo muestra la aproximación:

$$J_{kim} = \frac{f^{[i]}(\mathbf{x}_k + \varepsilon \mathbf{e}_m) - f^{[i]}(\mathbf{x}_k)}{\varepsilon}, \quad \mathbf{e}_m^{[j]} = \delta_{ij}, \quad \text{A.15}$$

y  $\varepsilon$  escogido de forma cuidadosa, por ejemplo la norma del vector  $\mathbf{x}_k$  multiplicada por un número  $\varepsilon \ll 1$ . Esta aproximación ayuda bastante cuando no se puede calcular de forma fácil por definición analítica (expresiones muy grandes).

**Tabla A.1:** Resumen del método de Newton.

1. Se construye el "vector ecuaciones"  $\mathbf{f}$ , que contiene las expresiones a las que se les quiere encontrar los ceros.
2. Se define el vector incógnitas  $\mathbf{x}$ .
3. Se definen los valores del paso de inicio  $\mathbf{x}_1$ , tolerancias relativa  $\delta r$  y absoluta  $\delta a$  y número de pasos  $kM$ .
4. (Optativo) Cálculo del Jacobiano analítico  $\mathbf{J}$ .
5. Se inicia el ciclo, aumentando el paso  $k$  hasta  $kM$ .
  - 5.1. Evaluación para  $\mathbf{f}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$ .
  - 5.2. Cálculo de Jacobiano  $\mathbf{J}_k$  evaluado en  $\mathbf{x}_k$ .
  - 5.3. Inversión de Jacobiano.
  - 5.4. Cálculo del vector actualización  $\Delta \mathbf{x}_k$ .
  - 5.5. Cálculo del vector del nuevo paso  $\mathbf{x}_{k+1}$ .
  - 5.6. Criterio de finalización.

## 7.2. Método de Newton-Broyden de paso reducido

El método de Newton-Broyden [15] de paso reducido es una modificación al método de Newton clásico, empleado para la resolución de ecuaciones no lineales.

El método de Newton-Rhaphson requiere en cada iteración la evaluación de  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$  y de la matriz jacobiana  $\mathbf{J}_k$ . Estas dos acciones son de alto costo computacional, sobre todo si son un gran número de ecuaciones a resolver, o son de expresiones muy grandes. El método de Newton-Broyden resuelve en buena parte estos problemas. Se basa principalmente en asumir una

aproximación a la matriz Jacobiana  $\mathbf{B}_k \approx \mathbf{J}_k$ . Luego se trabaja de la misma forma que el de Newton-Rhapson.

Sea  $\mathbf{B}_k$  la estimación actual de la matriz Jacobiana. Entonces el nuevo paso  $\mathbf{x}_{k+1}$  se calcula:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{x}_k &= -(\mathbf{B}_k)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k), \\ \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \Delta \mathbf{x}_k.\end{aligned}\tag{A.16}$$

Luego, para obtener el nuevo paso  $\mathbf{x}_{k+2}$ :

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{x}_{k+1} &= -(\mathbf{B}_{k+1})^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}), \\ \mathbf{x}_{k+2} &= \mathbf{x}_{k+1} + \Delta \mathbf{x}_{k+1},\end{aligned}\tag{A.17}$$

por lo que se necesita una nueva estimación del Jacobiano  $\mathbf{B}_{k+1}$ . Esto es precisamente lo que hace el método de Newton-Broyden. Se tiene la fórmula del camino integral [16]:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \int_0^1 \mathbf{J}(\mathbf{x}_k + s\Delta \mathbf{x}_k) \Delta \mathbf{x}_k ds \\ &\approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{J}(\mathbf{x}_{k+1}) \Delta \mathbf{x}_k\end{aligned}\tag{A.18}$$

El método de Broyden exige que se satisfaga la siguiente ecuación:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_{k+1}) \Delta \mathbf{x}_k.\tag{A.19}$$

Usando la ecuación A.12 combinada con la A.19, se tiene entonces la aproximación de Broyden para el Jacobiano:

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k + \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1})(\Delta \mathbf{x}_k)^T}{|\Delta \mathbf{x}_k|^2}\tag{A.20}$$

Se puede utilizar  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{I}$ , pero en general es bueno calcular solo el Jacobiano del paso inicial utilizando diferencias finitas como es mostrado en A.15.

Para aumentar el desempeño en cuánto a la convergencia del método se puede utilizar un algoritmo que reduzca la magnitud de la actualización. A esto se le denomina paso reducido, y queda representado por:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \Delta \mathbf{x}_k, \quad 0 < \alpha_k < 1.\tag{A.21}$$

La idea es que se busque una reducción de paso  $\alpha_k$  que cumpla que, al final, la magnitud de la función  $f$  evaluada en el nuevo paso  $\mathbf{x}_{k+1}$  sea menor que la del paso actual, denominado criterio de descenso [17]:

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1})\| = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k + \alpha_k \Delta \mathbf{x}_k)\| < \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)\|, \quad \text{A.22}$$

y por supuesto que sea el máximo valor de  $\alpha_k$  posible que cumpla lo anterior. Se puede utilizar por ejemplo  $\alpha_k = 2^{-m}$ , con  $m \in \mathbb{N}$ . Además, si el Jacobiano exacto está disponible para la función  $f$ , es posible afirmar que es siempre posible encontrar  $\alpha_k$  tal que satisfaga el criterio de descenso [13].

En general la convergencia es más lenta comparando con el método de Newton-Rhapson, que es compensada con la mayor probabilidad de convergencia.

**Tabla A.2:** Resumen del método de Newton-Broyden de paso reducido.

1. Se construye el "vector ecuaciones"  $\mathbf{f}$ , que contiene las expresiones a las que se les quiere encontrar los ceros.
2. Se definen los valores del paso de inicio  $\mathbf{x}_1$ , tolerancias relativa  $\delta r$  y absoluta  $\delta a$  y los números de pasos  $kM$  y  $mM$ .
3. Evaluación de  $\mathbf{f}$  en el paso inicial  $\mathbf{x}_1$ .
4. Cálculo del Jacobiano  $\mathbf{B}_1$  de  $\mathbf{f}$  para el paso inicial  $\mathbf{x}_1$  mediante la definición usando diferencias finitas.
5. Se inicia el ciclo, aumentando el paso  $k$  hasta  $kM$ .
  - 5.1. Evaluación para  $\mathbf{f}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$ .
  - 5.2. Inversión de Jacobiano  $\mathbf{B}_k$ .
  - 5.3. Cálculo del vector actualización  $\Delta \mathbf{x}_k$ .
  - 5.4. Ciclo de paso reducido, con paso  $m$  hasta  $mM$ .
    - 5.4.1. Suposición de  $\alpha_k = g(m)$ .
    - 5.4.2. Evaluación de  $\mathbf{f}$  en  $\mathbf{x}_k + \alpha_k \Delta \mathbf{x}_k$ .
    - 5.4.3. Criterio de descenso.
  - 5.5. Cálculo del vector del nuevo paso  $\mathbf{x}_{k+1}$ .
  - 5.6. Evaluación de  $\mathbf{f}_{k+1}$  en el nuevo paso  $\mathbf{x}_{k+1}$ .
  - 5.7. Cálculo del Jacobiano  $\mathbf{B}_{k+1}$
  - 5.8. Criterio de finalización.



### 7.3. Método de Magnus para ecuaciones diferenciales ordinarias homogéneas

Sea una matriz  $\mathbf{A}(r)$  de dimensiones  $n \times n$ . El sistema asociado a la ecuación diferencial ordinaria:

$$\mathbf{x}'(r) = \mathbf{A}(r) \mathbf{x}(r), \quad \mathbf{x}(r_0) = \mathbf{x}_0, \quad \text{A.23}$$

puede resolverse a través del método de Magnus.

Si  $n = 1$  se tiene el problema clásico cuya solución es:

$$\mathbf{x}(r) = \exp\left(\int_{r_0}^r \mathbf{A}(s) ds\right) \mathbf{x}_0. \quad \text{A.24}$$

Se podría pensar que la solución para el caso  $n > 1$  por consecuencia debiese ser:

$$\mathbf{x}(r) = \exp\left(\int_{r_0}^r \mathbf{A}(s) ds\right) \mathbf{x}_0, \quad \text{A.25}$$

pero esto es válido sí y sólo sí  $\mathbf{A}(r_1) \mathbf{A}(r_2) = \mathbf{A}(r_2) \mathbf{A}(r_1)$  para cualquier  $r_1$  y  $r_2$ . Particularmente esto se cumple en el caso que la matriz  $\mathbf{A}$  sea una matriz de constantes (no dependa de  $r$ ). En general no es cierto.

El método de Magnus [18] señala que la solución del sistema A.14 se puede expresar en función de una función matriz  $\mathbf{\Omega}(r, r_0)$ :

$$\mathbf{x}(r) = \exp(\mathbf{\Omega}(r, r_0)) \mathbf{x}_0, \quad \text{A.26}$$

en donde  $\mathbf{\Omega}$  es construido a partir de una serie de expansión del tipo:

$$\mathbf{\Omega}(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{\Omega}_k(r). \quad \text{A.27}$$

Por simplicidad simplemente se habla de  $\mathbf{\Omega}(r) = \mathbf{\Omega}(r, r_0)$  y se toma  $r_0 = 0$ . La serie de expansión A.27 corresponde a:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}(r) &= \boldsymbol{\Omega}_1(r) + \boldsymbol{\Omega}_2(r) + \cdots + \boldsymbol{\Omega}_n(r) + \cdots \\ &= \int_0^r \mathbf{A}(r_1) dr_1 - \frac{1}{2} \int_0^r \left[ \int_0^{r_1} \mathbf{A}(r_2) dr_2, \mathbf{A}(r_1) \right] dr_1 + \cdots,\end{aligned}\quad \text{A.28}$$

con la operación  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \equiv \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$  denominada conmutadora de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ . Se puede apreciar que la generación de  $\boldsymbol{\Omega}$  es muy costosa con respecto al álgebra que se debe utilizar. Existe una opción recursiva eficiente, en donde se definen:

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_n^{(1)} &= [\boldsymbol{\Omega}_{n-1}, \mathbf{A}], \\ \mathbf{s}_n^{(j)} &= \sum_{m=1}^{n-j} [\boldsymbol{\Omega}_m, \mathbf{s}_{n-m}^{(j-1)}], \quad j \in [2, n-1],\end{aligned}\quad \text{A.29}$$

las matrices que se utilizan para obtener cada término de la serie de expansión, dadas por:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}_1 &= \int_0^r \mathbf{A}(r) dr, \\ \boldsymbol{\Omega}_n &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{B_j}{j!} \int_0^r \mathbf{s}_n^{(j)}(r) dr,\end{aligned}\quad \text{A.30}$$

en los que  $B_j$  son los números de Bernoulli, definidos recursivamente por:

$$\begin{aligned}B_0 &= 1, \\ B_k &= - \sum_{j=1}^{n-1} \binom{k}{j} \frac{B_j}{k+1-j}.\end{aligned}\quad \text{A.31}$$

Cabe destacar finalmente que las condiciones de borde del problema se aplican para obtener el vector de constantes  $\mathbf{x}_0$ .

## 7.4. Método de Magnus para ecuaciones diferenciales ordinarias no-homogéneas

Sea el sistema a resolver:

$$\mathbf{A}(r)\mathbf{x}'(r) + \mathbf{B}(r)\mathbf{x}(r) = \mathbf{b}(r), \quad \mathbf{x}(r_0) = \mathbf{x}_0,\quad \text{A.32}$$

en donde  $\mathbf{b}$  es el vector que contiene la parte no homogénea de la ecuación. Aplicando pre-multiplicación por  $\mathbf{A}^{-1}$  y despejando  $\mathbf{x}'$  se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(r) &= -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \mathbf{x}(r) + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \\ &= \mathbf{D}(r) \mathbf{x}(r) + \mathbf{z}(r). \end{aligned} \quad \text{A.33}$$

Ahora, para expresarlo debidamente para el uso del método de Magnus, se realiza el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \{\mathbf{x}, 1\}, \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} [\mathbf{D}] & [\mathbf{z}] \\ [\mathbf{0}] & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad \text{A.34}$$

por lo que la ecuación A.23 queda finalmente como:

$$\mathbf{y}'(r) = \mathbf{C}(r)\mathbf{y}(r), \quad \mathbf{y}(r_0) = \mathbf{y}_0 = \{\mathbf{x}_0, 1\}, \quad \text{A.35}$$

la cual es una ecuación apta para el uso del método de Magnus.

## 7.5. Resolución del problema clásico bidimensional de placa plana con agujero circular bajo el efecto de carga uniforme de tracción aplicada lejos del mismo

Se considera el problema de una placa con agujero circular de radio interior  $a$ , sometida a lo lejos del mismo por una carga vertical uniforme de tracción  $\sigma_0$ , tal como muestra la figura A.2.

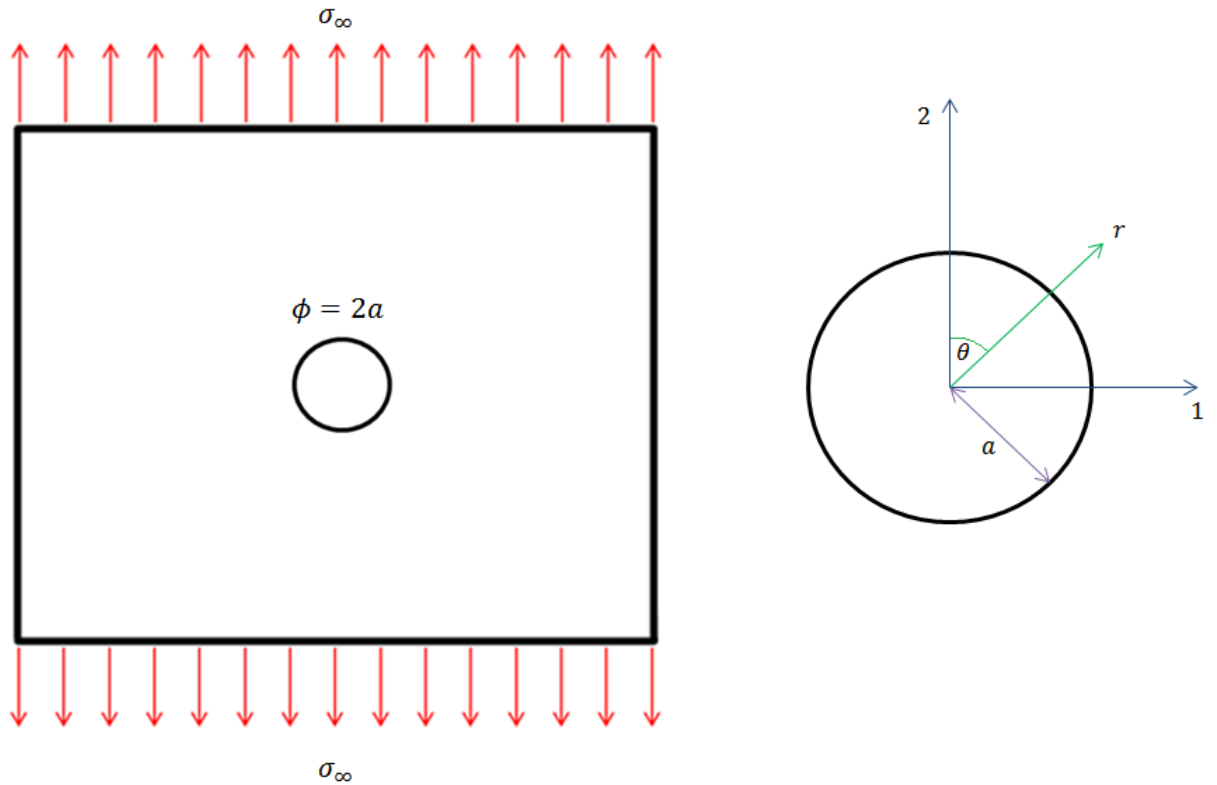
Los campos de esfuerzos y de desplazamiento asumidos para el presente problema son [12]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_r \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \sigma_\theta \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \tau_{r\theta} \cdot (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r), \quad \text{A.36}$$

$$\mathbf{u} = u_r(r, \theta) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + u_\theta(r, \theta) \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta. \quad \text{A.37}$$

A su vez utilizando la ecuación de compatibilidad y definiciones de la deformación para coordenadas cilíndricas, se tiene el siguiente campo de deformaciones:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right). \quad \text{A.38}$$



**Figura A.2:** Esquema del problema de placa plana con agujero circular.

El desarrollo del problema se realiza de la misma forma que lo mostrado en las ecuaciones 3.85.a, 3.86.a, 3.87.a, 3.88-3.91, 3.94, 3.95, 3.98, 3.102, 3.105, y de 3.128 hasta 3.135, que es equivalente a asumir para todo el cuerpo solo zona flexible. En  $r = a$  se asumen las condiciones que en dicho problema eran para la zona rígida, es decir las condiciones 3.139 que desembocan en las ecuaciones 3.140 y 3.141.

Si son aplicadas las condiciones en  $r = b$  para encontrar las funciones  $U_{r_i}(r)$  y  $U_{\theta_i}(r)$ , se deduce mediante la condición de que

$$U_{r_i}(r) = U_{\theta_i} = 0, \quad i = 2, 3, 4, \quad \text{A. 39}$$

que es lo mismo decir que la aproximación 3.98 queda:

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta) &= U_{r_0}(r) + U_{r_1}(r) \cos(2\theta), \\ u_\theta(r, \theta) &= U_{\theta_1}(r) \sin(2\theta). \end{aligned} \quad \text{A. 40}$$

Luego, de 3.135 queda:

$$\begin{aligned}
U'_{r_0}(b) &= \frac{b\sigma_\infty}{2b(\alpha + \beta)}, \\
U'_{r_1}(b) &= \frac{b\sigma_\infty}{2b(\alpha + \beta)}, \\
U'_{\theta_1}(b) &= \frac{-b\sigma_\infty}{2b}.
\end{aligned}
\tag{A.41}$$

El aplicar estas condiciones al método de Magnus, entrega como resultado funciones con incógnitas. Para obtenerlas de forma íntegra se requiere aplicar la condición en  $r = a$ . Se tiene que para las tres funciones por obtener hay tres constantes desconocidas. Del resultado de aplicar las condiciones de borde en  $r = b$  se aplica:

$$\begin{aligned}
U_{r_0}(r = a) &= U_{r_0}(a), \\
U_{r_1}(r = a) &= U_{r_1}(a), \\
U_{\theta_1}(r = a) &= U_{\theta_1}(a),
\end{aligned}
\tag{A.42}$$

por lo que se pueden obtener  $U_{r_0}(a)$ ,  $U_{r_1}(a)$  y  $U_{\theta_1}(a)$  de forma numérica, ya que  $U_{r_0}(b)$ ,  $U_{r_1}(b)$  y  $U_{\theta_1}(b)$  corresponden a las constantes de movimiento rígido, por lo que son nulas. Finalmente se aplica el método de Magnus con las condiciones de borde, ya calculadas, en  $r = a$ , y se obtienen por tanto los desplazamientos  $u_r$  y  $u_\theta$ , suficientes para determinar los elementos en los campos de deformación y esfuerzo.

Según el desarrollo de Timoshenko, el campo de esfuerzos está dado por:

$$\begin{aligned}
\sigma_r(r, \theta) &= \frac{1}{2}\sigma_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2}\sigma_\infty \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right) \cos(2\theta), \\
\sigma_\theta(r, \theta) &= \frac{1}{2}\sigma_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{1}{2}\sigma_\infty \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos(2\theta), \\
\tau_{r\theta}(r, \theta) &= -\frac{1}{2}\sigma_\infty \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{4a^2}{r^2}\right) \sin(2\theta).
\end{aligned}
\tag{A.43}$$

Se plantea, a vista de resolver el problema 3.3, que es necesaria una cantidad de términos de la serie de matriz exponencial y de la serie de Magnus que, por el momento, no es posible de procesar. Se apela a una necesidad de mejoría del algoritmo de obtención, o bien mayores recursos computacionales. En la tabla A.3 se muestran los esfuerzos  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  y  $\tau_{r\theta}$  manteniendo una cantidad de elementos de la serie matriz exponencial y variando la de elementos de la serie de Magnus.

**Tabla A.3:** Esfuerzo radial  $\sigma_r$  en [Pa] vs radio  $r$  [m] para el problema de placa plana con agujero circular (radio medido desde su centro), para distintos términos de las series de matriz exponencial y Magnus.

Términos serie Magnus	Términos serie exp. 2	Términos serie exp. 4	Términos serie exp. 8
2			
4			
6			
8			Problemas de recursos y/o algoritmo

## 7.6. Códigos de programación utilizados

### 7.6.1. Problema 3.2.1

#### Inicialización de constantes

```

a=.05;
b=.06;
E0=380 109;
E1=10*E0;
nu0=.23;
nu1=nu0/10;
sigma0=820 106;
lambda=1.0;
alpha=(1+nu0)/E0;
beta=(1+nu1)/E1;

```

```

λ=(1-ν1²)/E1;
λ2=2*(σ0/(r² b⁻²+1))*(α - β);
PP=352*10⁶ (*Carga de presión*);

```

---

## Cálculo de Esfuerzos

### Esfuerzos zona flexible

```

σr2[r]=σ0 (b⁻²-r⁻²)/(r⁻²+b⁻²);
σθ2[r]=σ0;
σz2[r]=E0(λz-1)+2ν0*σ0/(1+b² r⁻²);

```

### Esfuerzos zona rígida

```

K1=(a² (r² λ2-b² (4 P λ+λ2)+2 b² λ2 Log[a/r]))/(2 (a²-b²) λ);
K2=K1 (a⁻²-r⁻²)/(b⁻²-r⁻²)+λ2*Log[a/r]/(λ(b⁻²-r⁻²))-2P/(b⁻²-r⁻²);

```

```

σr1[r]=.5K1(a⁻²-r⁻²)+((.5*λ2/λ)Log[a/r])-P;
σθ1[r]=.5K1(a⁻²+r⁻²)+((.5*λ2/λ)(Log[a/r]-1))-P;
σz1[r]=ν1(σr1[r]+σθ1[r])-ν1(σ0+σr2[r]+σz2[r]);

```

---

## Cálculo de desplazamientos

```

εθ[r]=α*σ0-(ν0/E0)*(E0(λz-1)+2σ0((1+ν0)/(1+b² r⁻²)));

```

```

ursr1[r]=r*(εθ[r]+β(σθ1[r]-σ0)-(ν1/E1)(σr1[r]+σθ1[r]+σz1[r]-σ0-
σr2[r]-σz2[r]));

```

```

ursr2[r]=r*(α*σθ2[r]-(ν0/E0)(σr2[r]+σθ2[r]+σz2[r]));

```

```

g[r]=Abs[ursr2[r]-ursr1[r]]

```

### 7.6.2. Problema 3.2.2.

---

## Inicialización de constantes

```

ClearAll[r,rr]
a=.05;
b=.06;
E0=380 10⁹;
E1=10*E0;
ν0=.23;
ν1=ν0/10;
σ0=820 10⁶;
λz=1;
α=(1+ν0)/E0;
β=(1+ν1)/E1;
λ=(1-ν1)/E1;
λ2=(3σ0/(r³ b⁻³+2))(α-β);

P=133.9*10⁶; (*218.9*)

```

$$K1=(a^3 (2 r^3 \lambda 2-b^3 (9 P \lambda+2 \lambda 2)+6 b^3 \lambda 2 \text{Log}[a/r]))/(3 (a^3-b^3) \lambda);$$

$$K2=(b^3 (2 r^3 \lambda 2-a^3 (9 P \lambda+2 \lambda 2)+6 a^3 \lambda 2 \text{Log}[a/r]))/(3 (a^3-b^3) \lambda);$$

## Cálculo de Esfuerzos

$$\sigma r2[r]=K2 (b^{-3}-r^{-3})/3;$$

$$\sigma \theta 2[r]=K1 (b^{-3}+2r^{-3})/3;$$

$$\epsilon_{\theta}[r]=((1+\nu 0)/E 0) \sigma \theta 2[r]-(\nu 0/E 0) (\sigma r2[r]+2 \sigma \theta 2[r]);$$

$$\sigma r1[r]=(K1/3) (a^{-3}-r^{-3})+2 \lambda 2 * \text{Log}[a/r]/(3 \lambda)-P;$$

$$\sigma \theta 1[r]=(K1/3) (a^{-3}+2r^{-3})+2 \lambda 2 * (\text{Log}[a/r]-1)/(3 \lambda)-P;$$

$$\text{ursr1}[r]=r * (\epsilon_{\theta}[r]+\beta (\sigma \theta 1[r]-\sigma 0)-(\nu 1/E 1) (\sigma r1[r]+2 \sigma \theta 1[r]-2 \sigma 0-\sigma r2[r]));$$

$$\text{ursr2}[r]=r * (\alpha * \sigma \theta 2[r]-(\nu 0/E 0) (\sigma r2[r]+2 \sigma \theta 2[r]));$$

$$g[r]=\text{Abs}[\text{ursr2}[r]-\text{ursr1}[r]]$$

$$rr=0.0505;$$

$$s_{\theta}=(1/(3 (a^3-b^3) \lambda) a^3 (2 r r^3 ((3 \sigma 0/(r r^3 b^{-3}+2)) (\alpha-\beta))-b^3 (9 P \lambda+2 ((3 \sigma 0/(r r^3 b^{-3}+2)) (\alpha-\beta))))+6 b^3 ((3 \sigma 0/(r r^3 b^{-3}+2)) (\alpha-\beta)) \text{Log}[a/rr])/3 (a^{-3}+2 r r^{-3})+2 ((3 \sigma 0/(r r^3 b^{-3}+2)) (\alpha-\beta)) * (\text{Log}[a/rr]-1)/(3 \lambda)-P$$

### 7.6.3. Problema 3.2.3 y Método de Newton-Broyden

## Esfuerzos principales según invariantes

$$\text{Solve}[x^3-12*x^2+112*x-1112==0, x]$$

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{12}{3} - \frac{(2^{1/3} (-12^2 + 3 \cdot 112))}{(3 (2 \cdot 12^3 - 9 \cdot 12 \cdot 112 + 27 \cdot 1112 + 3 \sqrt{3} \cdot (12^2 \cdot 112^2 + 4 \cdot 112^3 + 4 \cdot 12^3 \cdot 1112 \cdot 18 \cdot 12 \cdot 112 \cdot 1112 + 27 \cdot 1112^2))^{1/3})} + (2 \cdot 12^3 - 9 \cdot 12 \cdot 112 + 27 \cdot 1112 + 3 \sqrt{3} \cdot (12^2 \cdot 112^2 + 4 \cdot 112^3 + 4 \cdot 12^3 \cdot 1112 \cdot 18 \cdot 12 \cdot 112 \cdot 1112 + 27 \cdot 1112^2))^{1/3} / (3 \cdot 2^{1/3}) \right\}, \left\{ x \rightarrow \frac{12}{3} + \frac{((1+i) \sqrt{3}) (-12^2 + 3 \cdot 112)}{(3 \cdot 2^{2/3} (2 \cdot 12^3 - 9 \cdot 12 \cdot 112 + 27 \cdot 1112 + 3 \sqrt{3} \cdot (12^2 \cdot 112^2 + 4 \cdot 112^3 + 4 \cdot 12^3 \cdot 1112 \cdot 18 \cdot 12 \cdot 112 \cdot 1112 + 27 \cdot 1112^2))^{1/3})} - \frac{1}{(6 \cdot 2^{1/3})} \frac{(1-i) \sqrt{3}}{(2 \cdot 12^3 - 9 \cdot 12 \cdot 112 + 27 \cdot 1112 + 3 \sqrt{3} \cdot (12^2 \cdot 112^2 + 4 \cdot 112^3 + 4 \cdot 12^3 \cdot 1112 \cdot 18 \cdot 12 \cdot 112 \cdot 1112 + 27 \cdot 1112^2))^{1/3}} \right\}, \left\{ x \rightarrow \frac{12}{3} + \frac{((1-i) \sqrt{3}) (-12^2 + 3 \cdot 112)}{(3 \cdot 2^{2/3} (2 \cdot 12^3 - 9 \cdot 12 \cdot 112 + 27 \cdot 1112 + 3 \sqrt{3} \cdot (12^2 \cdot 112^2 + 4 \cdot 112^3 + 4 \cdot 12^3 \cdot 1112 \cdot 18 \cdot 12 \cdot 112 \cdot 1112 + 27 \cdot 1112^2))^{1/3})} \right\} \right\}$$



$$\frac{\sqrt{3} \sqrt{12^2 112^2 + 4 112^3 + 4 12^3 1112 \cdot 18 12 112 1112 + 27 1112^2}}{(1+i \sqrt{3}) (2 12^3 - 9 12 112 + 27 1112 + 3 \sqrt{3})^{1/3}} - \frac{1}{(6 2^{1/3}) (1+i \sqrt{3}) (2 12^3 - 9 12 112 + 27 1112 + 3 \sqrt{3})^{1/3}}$$

```
(* T1=SparseArray[{{1,1}-> σr1,{2,2}-> σθ1,{3,3}-> σz1,{1,3}->
τrz1,{3,1}-> τrz1}] //MatrixForm;
T2=SparseArray[{{1,1}-> σr2,{2,2}-> σθ2,{3,3}-> σz2,{1,3}->
τrz2,{3,1}-> τrz2}] //MatrixForm;
```

```
I1=Tr[SparseArray[{{1,1}-> σr1,{2,2}-> σθ1,{3,3}-> σz1,{1,3}->
τrz1,{3,1}-> τrz1}]];
I2=Tr[SparseArray[{{1,1}-> σr2,{2,2}-> σθ2,{3,3}-> σz2,{1,3}->
τrz2,{3,1}-> τrz2}]]];
```

```
II1=.5*((I1)^2-Tr[(SparseArray[{{1,1}-> σr1,{2,2}-> σθ1,{3,3}->
σz1,{1,3}-> τrz1,{3,1}-> τrz1}])^2]);
II2=.5*((I2)^2-Tr[(SparseArray[{{1,1}-> σr2,{2,2}-> σθ2,{3,3}->
σz2,{1,3}-> τrz2,{3,1}-> τrz2}])^2]);
```

```
III1=Det[SparseArray[{{1,1}-> σr1,{2,2}-> σθ1,{3,3}-> σz1,{1,3}->
τrz1,{3,1}-> τrz1}]]];
```

```
III2=Det[SparseArray[{{1,1}-> σr2,{2,2}-> σθ2,{3,3}-> σz2,{1,3}->
τrz2,{3,1}-> τrz2}]]];
```

```
R2=2 (σr2+σz2+σθ2)^3-9.` (σr2+σz2+σθ2) (σz2 σθ2+σr2
```

```
ClearAll[r]
```

---

## Iniciación de constantes

```
a=.05;
b=.06;
E0=380 109;
E1=10*E0;
ν0=.23;
ν1=ν0/10;
σ0=820 106;
α=(1+ν0)/E0;
β=(1+ν1)/E1;
ξ1=(1-ν12)/E1;
τ0=5 105;
```

```
K1=4.329428894 106;
K2=104;
```

```
P=220*106;
```

```
(*r=0.058;*)
```

```
 $\xi_2 = K_2 r^{-2} (\alpha - \beta);$ 
```

---

## Cálculo de Esfuerzos

```
 $\sigma_{r2}[r] = .5 * K_2 (b^{-2} - r^{-2});$ 
```

```
 $\sigma_{\theta 2}[r] = .5 * K_2 (b^{-2} + r^{-2});$ 
```

```
 $\sigma_{z2}[r] = \nu_0 * K_2 b^{-2};$ 
```

```
Solve[x3-12*x2+112*x-1112==0,x]
```

```
 $\sigma_{r1}[r] = .5 K_1 (a^{-2} - r^{-2}) + ((.5 * \xi_2 / \xi_1) \text{Log}[a/r]) - P;$ 
```

```
 $\sigma_{\theta 1}[r] = .5 K_1 (a^{-2} + r^{-2}) + ((.5 * \xi_2 / \xi_1) (\text{Log}[a/r] - 1)) - P;$ 
```

```
 $\sigma_{z1}[r] = \nu_1 (K_1 a^{-2} + (\xi_2 / 2 \xi_1) (2 \text{Log}[a/r] - 1) - 2P) + (1 + \nu_1) \sigma_{z2}[r] - \nu_1 (\sigma_{r2}[r] + \sigma_{\theta 2}[r] + \sigma_{z2}[r]);$ 
```

```
 $\epsilon_{\theta}[r] = \sigma_{\theta 2}[r] (1 + \nu_0) / E_0 - \nu_0 (1 + \nu_0) (K_1 (a^{-2} - r^{-2}) / (b^{-2} - r^{-2}) + \xi_2 * \text{Log}[a/r] / (\xi_1 (b^{-2} - r^{-2})) - 2P / (b^{-2} - r^{-2})) b^{-2} / E_0;$ 
```

```
ursr1[r]=r*( $\epsilon_{\theta}[r] + \beta (\sigma_{\theta 1}[r] - \sigma_0) - (\nu_1 / E_1) (\sigma_{r1}[r] + \sigma_{\theta 1}[r] + \sigma_{z1}[r] - \sigma_0 - \sigma_{r2}[r] - \sigma_{z2}[r])$ );
```

```
ursr2[r]=r*( $\alpha * \sigma_{\theta 2}[r] - (\nu_0 / E_0) (\sigma_{r2}[r] + \sigma_{\theta 2}[r] + \sigma_{z2}[r])$ );
```

```
g[r]=Abs[ursr2[r]-ursr1[r]];
```

```
(*NSolve[g[r]==0,r]
```

```
ceros= {Extract[r/.res,{1}],Extract[r/.res,{2}]} *)
```

```
{ $\sigma_{i\alpha}, \sigma_{i\beta}, \sigma_{i\gamma}$ }
```

```
{ $\sigma_{iia}, \sigma_{iib}, \sigma_{iig}$ }
```

El método de Newton-Broyden también fue utilizado en el problema 3.3.

## Método de Newton, Broyden, $\alpha$ de relajación

---

### Iniciación

```

AbsoluteTiming[Parallelize[dim=34;      (*Dimensión del sistema*)

x1={1,0.0015,.0005,0.0002,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,1,1,1,1,
,1,1,1,8,1,1,1,1,1,1}; (* Punto de partida Subscript[x, 1]
Orden:
  {R0,R1,R2,R3,Subscript[Ura, 0],Subscript[Ura, 1],Subscript[Ura,
2],Subscript[Ura, 3],Subscript[Ura, 4],Subscript[Uθθa,
1],Subscript[Uθθa, 2],Subscript[Uθθa, 3],Subscript[Uθθa,
4],Uri0,Uri1,Uri2,Uri3,Uri4,Urri0,Urri1,Urri2,Urri3,Urri4,Uθi1,Uθ
i2,Uθi3,Uθi4,Uθθi1,Uθθi2,Uθθi3,Uθθi4,Subscript[Urb,
0],Subscript[Urb, 1],Subscript[Uθb, 1]} *)
  δa=N[10-5];      (*Tolerancia absoluta<1*)
  δr=N[10-4];      (*Tolerancia relativa<1*)
  s=0;              (*Contador para convergencia relativa, si se
cumple 10 veces sale*)
  kM=1000;          (*Iteración k MAX*)
  mM=3500000;      (*Iteración m MAX , Subscript[α,
min]=4.36015·10-106*)
  eps=10-5;      (*Precisión relativa para cálculo de Jacobiano x
diferencias finitas*)
  Mon=ConstantArray[Null,kM];
  Mon2=ConstantArray[Null,kM];
  Mon3=ConstantArray[Null,kM];

  f=Table[gi,{i,1,dim}]; (*Función problema, con Subscript[g, i]
INPUT ecuaciones *)]]

```

```

AbsoluteTiming[Parallelize[fi=N[ReplaceAll[f,{R0→x1[[1]],R1→x1[[2]
],R2→x1[[3]],R3→x1[[4]],Ura0→x1[[5]],Ura1→x1[[6]],Ura2→x1[[7]],Ura3→
x1[[8]],Ura4→x1[[9]],Uθθa1→x1[[10]],Uθθa2→x1[[11]],Uθθa3→x1[[12]],Uθθ
a4→x1[[13]],Uri0→x1[[14]],Uri1→x1[[15]],Uri2→x1[[16]],Uri3→x1[[17]]
,Uri4→x1[[18]],Urri0→x1[[19]],Urri1→x1[[20]],Urri2→x1[[21]],Urri3→
x1[[22]],Urri4→x1[[23]],Uθi1→x1[[24]],Uθi2→x1[[25]],Uθi3→x1[[26]],U
θi4→x1[[27]],Uθθi1→x1[[28]],Uθθi2→x1[[29]],Uθθi3→x1[[30]],Uθθi4→x1
[[31]],Urb0→x1[[32]],Urb1→x1[[33]],Uθb1→x1[[34]]}]]; (*Construcción
de "Subscript[f, 1]"*)]]
  ε=eps N[Norm[x1]]; (*Precisión absoluta para cálculo de
Jacobiano x diferencias finitas*)

```

(\*Definición de Jacobiano aproximado a diferencias finitas para Subscript[B, 1]\*)

```

AbsoluteTiming[Parallelize[For[i=1,i≤dim,i++,
  For[j=1,j≤dim,j++,
    For[l=1,l≤dim,l++,If[j==1,e1=1,e1=0]];

```

```

bbi,j=(ReplaceAll[f[[i]],{R0→x1[[1]]+e1ε,R1→x1[[2]]+e2ε,R2→x1[[3]]+e3
ε,R3→x1[[4]]+e4ε,Ura0→x1[[5]]+e5ε,Ura1→x1[[6]]+e6ε,Ura2→x1[[7]]+e7ε,Ur
a3→x1[[8]]+e8ε,Ura4→x1[[9]]+e9ε,Uθθa1→x1[[10]]+e10ε,Uθθa2→x1[[11]]+e11ε
,Uθθa3→x1[[12]]+e12ε,Uθθa4→x1[[13]]+e13ε,Uri0→x1[[14]]+e14ε,Uri1→x1[[1

```

```

5]]+e15ε,Uri2→x1[[16]]+e16ε,Uri3→x1[[17]]+e17ε,Uri4→x1[[18]]+e18ε,Urri
0→x1[[19]]+e19ε,Urri1→x1[[20]]+e20ε,Urri2→x1[[21]]+e21ε,Urri3→x1[[22]
]+e22ε,Urri4→x1[[23]]+e23ε,Uθi1→x1[[24]]+e24ε,Uθi2→x1[[25]]+e25ε,Uθi3→
x1[[26]]+e26ε,Uθi4→x1[[27]]+e27ε,Uθθi1→x1[[28]]+e28ε,Uθθi2→x1[[29]]+e2
9ε,Uθθi3→x1[[30]]+e30ε,Uθθi4→x1[[31]]+e31ε,Urb0→x1[[32]]+e32ε,Urb1→x1[[
33]]+e33ε,Uθb1→x1[[34]]+e34ε]]-f1[[i]])/ε;
]]];]]

```

```

AbsoluteTiming[Parallelize[B1=Table[Table[bbi,j,{j,1,dim
}],{i,1,dim}]]; ]]

```

## (\*Comienzo del ciclo\*)

```

For[k=1,k≤kM,k++,
Monitor[

```

```

Mon[[k]]=fk[[1]]/f1[[1]];
Mon2[[k]]=fk[[20]]/f1[[20]];
Mon3[[k]]=fk[[30]]/f1[[30]];

```

```

(*0.Msje de error si diverge el método*)
If[N[Norm[Table[fk[[i]],{i,1,dim}],Infinity]]>1050,Print["----
----->DIVERGENCIA"]; Break[]];

```

```

(*1.Estimación de Δx*)
dxk=N[-Inverse[Bk]].fk;

```

```

(*2.Determinación de constante de relajación Subscript[α,
k]*)

```

```

For[m=0,m≤mM,m++,
αk=N[2-m];

```

```

fnewk=ReplaceAll[f,{R0→xk[[1]]+αk dxk[[1]],R1→xk[[2]]+αk
dxk[[2]],R2→xk[[3]]+αk dxk[[3]],R3→xk[[4]]+αk
dxk[[4]],Ura0→xk[[5]]+αk dxk[[5]],Ura1→xk[[6]]+αk
dxk[[6]],Ura2→xk[[7]]+αk dxk[[7]],Ura3→xk[[8]]+αk
dxk[[8]],Ura4→xk[[9]]+αk dxk[[9]],Uθθa1→xk[[10]]+αk
dxk[[10]],Uθθa2→xk[[11]]+αk dxk[[11]],Uθθa3→xk[[12]]+αk
dxk[[12]],Uθθa4→xk[[13]]+αk dxk[[13]],Uri0→xk[[14]]+αk
dxk[[14]],Uri1→xk[[15]]+αk dxk[[15]],Uri2→xk[[16]]+αk
dxk[[16]],Uri3→xk[[17]]+αk dxk[[17]],Uri4→xk[[18]]+αk
dxk[[18]],Urri0→xk[[19]]+αk dxk[[19]],Urri1→xk[[20]]+αk
dxk[[20]],Urri2→xk[[21]]+αk dxk[[21]],Urri3→xk[[22]]+αk
dxk[[22]],Urri4→xk[[23]]+αk dxk[[23]],Uθi1→xk[[24]]+αk
dxk[[24]],Uθi2→xk[[25]]+αk dxk[[25]],Uθi3→xk[[26]]+αk
dxk[[26]],Uθi4→xk[[27]]+αk dxk[[27]],Uθθi1→xk[[28]]+αk
dxk[[28]],Uθθi2→xk[[29]]+αk dxk[[29]],Uθθi3→xk[[30]]+αk
dxk[[30]],Uθθi4→xk[[31]]+αk dxk[[31]],Urb0→xk[[32]]+αk
dxk[[32]],Urb1→xk[[33]]+αk dxk[[33]],Uθb1→xk[[34]]+αk dxk[[34]]}];

```

```

(*2.1.Condición de descenso para Subscript[α, k]*)
If[Norm[fnewk,Infinity]< Norm[fk,Infinity],Break[]]
];

```

(\*3.Cálculo de Subscript[x, k]\*)

$x_{k+1}=N[x_k+\alpha k dx_k];$

(\*4.f evaluado en Subscript[x, k+1]\*)

$f_{k+1}=\text{ReplaceAll}[f, \{R0 \rightarrow x_{k+1}[[1]], R1 \rightarrow x_{k+1}[[2]], R2 \rightarrow x_{k+1}[[3]], R3 \rightarrow x_{k+1}[[4]], U$   
 $ra_0 \rightarrow x_{k+1}[[5]], Ura_1 \rightarrow x_{k+1}[[6]], Ura_2 \rightarrow x_{k+1}[[7]], Ura_3 \rightarrow x_{k+1}[[8]], Ura_4 \rightarrow x_{k+1}[[9]],$   
 $U\theta\theta a_1 \rightarrow x_{k+1}[[10]], U\theta\theta a_2 \rightarrow x_{k+1}[[11]], U\theta\theta a_3 \rightarrow x_{k+1}[[12]], U\theta\theta a_4 \rightarrow x_{k+1}[[13]], Uri0$   
 $\rightarrow x_{k+1}[[14]], Uri1 \rightarrow x_{k+1}[[15]], Uri2 \rightarrow x_{k+1}[[16]], Uri3 \rightarrow x_{k+1}[[17]], Uri4 \rightarrow x_{k+1}[[$   
 $18]], Urri0 \rightarrow x_{k+1}[[19]], Urri1 \rightarrow x_{k+1}[[20]], Urri2 \rightarrow x_{k+1}[[21]], Urri3 \rightarrow x_{k+1}[[22$   
 $]], Urri4 \rightarrow x_{k+1}[[23]], U\theta i1 \rightarrow x_{k+1}[[24]], U\theta i2 \rightarrow x_{k+1}[[25]], U\theta i3 \rightarrow x_{k+1}[[26]], U\theta$   
 $i4 \rightarrow x_{k+1}[[27]], U\theta\theta i1 \rightarrow x_{k+1}[[28]], U\theta\theta i2 \rightarrow x_{k+1}[[29]], U\theta\theta i3 \rightarrow x_{k+1}[[30]], U\theta\theta i4$   
 $\rightarrow x_{k+1}[[31]], Urb_0 \rightarrow x_{k+1}[[32]], Urb_1 \rightarrow x_{k+1}[[33]], U\theta b_1 \rightarrow x_{k+1}[[34]]\}];$

(\*5.Aprox de Broyde para Jacobiano\*)

For[i=1, i≤dim, i++,

For[j=1, j≤dim, j++,

mm<sub>i,j</sub>=f<sub>k+1</sub>[[i]]dx<sub>k</sub>[[j]];]; (\* Producto Tensorial \*)

M<sub>k</sub>=N[Table[Table[mm<sub>i,j</sub>, {i, 1, dim }], {j, 1, dim}]];

B<sub>k+1</sub>=B<sub>k</sub>+M<sub>k</sub>/Norm[N[Subscript[dx, k]]]<sup>2</sup>;

(\*6. Norma infinito para criterio de terminación δa y δr \*)

na<sub>k</sub>=N[Norm[Table[f<sub>k</sub>[[i]], {i, 1, dim}], Infinity]];

nr<sub>k</sub>=N[Norm[Table[f<sub>k+1</sub>[[i]]-f<sub>k</sub>[[i]], {i, 1, dim}], Infinity]];

(\*7.Condición de salida\*)

If[na<sub>k</sub>≤ δa, Print["----->CONDICIÓN DE TERMINACIÓN δa  
ALCANZADA, CONVERGENCIA CORRECTA"]; Break[]];

(\*8.Condición de convergencia\*)

If[nr<sub>k</sub>≤ δr na<sub>k</sub>, s++; If[s==10, Print["----->CONDICIÓN DE  
δr ALCANZADA, CONVERGENCIA"]]]];

EvaluationMonitor, Grid[{{ListLinePlot[Mon, AxesOrigin→  
{1, 0}, PlotRange→{{1, k}, {0, .1}},  
PlotLabel→"Convergencia r0="<>ToString[Mon[[k-  
1]]], ImageSize→ Medium], ListLinePlot[Mon2, AxesOrigin→  
{0, 0}, PlotRange→Full,  
PlotLabel→"Convergencia Urri1="<>ToString[Mon[[k-  
1]]], ImageSize→ Medium], ListLinePlot[Mon3, AxesOrigin→  
{0, 0}, PlotRange→Full,  
PlotLabel→"Convergencia Uθθi3="<>ToString[Mon[[k-  
1]]], ImageSize→ Medium]}}]Print[{k, m}]];

];

# Magnus y Matrix Exponencial

```

ClearAll[CC]

A={{r(α1+β1), n r(α1+2β1), r2 (α1+β1), 0}
  ,{-n r (α1+2β1), r α1/2, 0, r2 α1/2}
  ,{ 1, 0,0, 0}
  ,{ 0, 1, 0, 0}};

B={{-2α1 n2-α1-β1,-(3α1+2β1)n, 0, 0}
  ,{-n(3α1+2β1) , -4 n2 (α1+β1)-α1/2,0, 0}
  ,{ 0 , 0, -1, 0}
  ,{ 0, 0, 0,-1}};

b={f3n, f4n, 0,0};

r∈Reals;
v0∈Reals;
E0∈Reals;

Ai=FullSimplify [Inverse[A]];

CE=-Ai.B;
z=Ai.b;

Ce={{CE[[1,1]],CE[[1,2]],CE[[1,3]],CE[[1,4]],z[[1]]},{CE[[2,1]],C
E[[2,2]],CE[[2,3]],CE[[2,4]],z[[2]]},{CE[[3,1]],CE[[3,2]],CE[[3,3
]],CE[[3,4]],z[[3]]},{CE[[4,1]],CE[[4,2]],CE[[4,3]],CE[[4,4]],z[[
4]]},{0,0,0,0,0}}//MatrixForm

(
  {
    {0, 0, 1, 0, 0},
    {0, 0, 0, 1, 0},
    {-((-α1-2 n2 α1-β1)/(r2 (α1+β1))), -(n (-3 α1-2 β1))/(r2
(α1+β1))}, -((n (α1+2 β1))/(r (α1+β1))), f3n/(r2
(α1+β1))},
    {(2 n (3 α1+2 β1))/(r2 α1), -((2 (-α1/2)-4 n2 (α1+β1)))/(r2
α1)}, (2 n (α1+2 β1))/(r α1), -(1/r), (2 f4n)/(r2 α1)},
    {0, 0, 0, 0, 0}
  }
)
Cc[r]:=(
  {
    {0, 0, 1, 0, 0},
    {0, 0, 0, 1, 0},

```

```

      { -(((-α1-2 n² α1-β1)/(r² (α1+β1))), -(n (-3 α1-2 β1))/(r²
(α1+β1))), -(1/r), -(n (α1+2 β1))/(r (α1+β1))), f3n/(r²
(α1+β1))},
      {(2 n (3 α1+2 β1))/(r² α1), -(2 (-α1/2)-4 n² (α1+β1))/(r²
α1)}, (2 n (α1+2 β1))/(r α1), -(1/r), (2 f4n)/(r² α1)},
      {0, 0, 0, 0, 0}
    }_);

```

```

Ω1=Integrate[Cc[r],r];
S2,1=Ω1.Cc[r]-Cc[r].Ω1;

```

```

(* Sea "p" el numero de términos de la serie para Ω=sum
Subscript[Ω, k] *)
p=4;

```

```

For[i=2,i≤p,i++,

```

```

  Ωi=FullSimplify[Sum[(BernoulliB[k]/k!)*FullSimplify[Integrate[Si,k,
r]],{k,1,i-1}]];
  Si+1,1=FullSimplify[Ωi.Cc[r]-Cc[r].Ωi];

```

```

  For[j=2,j≤i,j++,
    Si+1,j=FullSimplify[Sum[Ωm.Si-m+1,j-1-Si-m+1,j-1.Ωm,{m,1,i+1-j}]]];

```

## Magnus Expansion

```

M=Ω1;
For[i=2,i≤p,i++,

```

```

  M=FullSimplify[M+Ωi];
]

```

## Exponential series

```

EE=IdentityMatrix[5]+M;
For[i=2,i≤2,i++,
  EE=FullSimplify[EE+Mi/i!];
]

```

```

EE2M4 (*2 terminos matriz exponencial, 4 terminos Magnus*)

```

## Condiciones de borde para M

```

a=.01;
b=.5;
E0=380 109;

```

```

v0=.23;
E1=1000 E0;
v1=v0/1000;
σ0=200 106;
α0=E0/(1+v0);
β0=E0 v0/((1+v0)(1-2v0));

```

```

CBb={{Urb0,Urb1,0,0,0},{0,Uθb1,0,0,0},{(b σa-2 Urb0)/(2 b
(α0+β0)},{(b σa-2 Urb1-4 Uθb1)/(2 b (α0+β0)),0,0,0},{0,(-b σa+2 α0
Urb1+2 Uθb1)/(2 b),0,0,0}};

```

```

For[i=0,i<4,i++,

```

```

ki={k1i,k2i,k3i,k4i};
xi=EE2M4.ki/.n→i;
φ2i=xi[[1]];

```

(\*φ2 es U<sub>r1</sub>, U<sub>2</sub> es Uθ<sub>1</sub>, V<sub>2</sub> es ξ<sub>r1</sub> y ξ<sub>2</sub> es ξθ<sub>1</sub> \*)

```

U2i=xi[[2]];
V2i=xi[[3]];
ξ2i=xi[[4]];

```

```

]
```

```

kk0=Solve[{(φ20/.r→b)==CBb[[1,1]],(U20/.r→b)==CBb[[2,1]],
(V20/.r→b)==CBb[[3,1]],(ξ20/.r→b)==CBb[[4,1]]},k0];
KK0={Extract[k10/.kk0,{1}],Extract[k20/.kk0,{1}],Extract[k30/.kk0,{1
}],Extract[k40/.kk0,{1}]};

```

```

kk1=Solve[{(φ21/.r→b)==CBb[[1,2]],(U21/.r→b)==CBb[[2,2]],
(V21/.r→b)==CBb[[3,2]],(ξ21/.r→b)==CBb[[4,2]]},k1];
KK1={Extract[k11/.kk1,{1}],Extract[k21/.kk1,{1}],Extract[k31/.kk1,{1
}],Extract[k41/.kk1,{1}]};

```

```

kk2=Solve[{(φ22/.r→b)==CBb[[1,3]],(U22/.r→b)==CBb[[2,3]],
(V22/.r→b)==CBb[[3,3]],(ξ22/.r→b)==CBb[[4,3]]},k2];
KK2={Extract[k12/.kk2,{1}],Extract[k22/.kk2,{1}],Extract[k32/.kk2,{1
}],Extract[k42/.kk2,{1}]};

```

```

kk3=Solve[{(φ23/.r→b)==CBb[[1,4]],(U23/.r→b)==CBb[[2,4]],
(V23/.r→b)==CBb[[3,4]],(ξ23/.r→b)==CBb[[4,4]]},k3];
KK3={Extract[k13/.kk3,{1}],Extract[k23/.kk3,{1}],Extract[k33/.kk3,{1
}],Extract[k43/.kk3,{1}]};

```

```

kk4=Solve[{(φ24/.r→b)==CBb[[1,5]],(U24/.r→b)==CBb[[2,5]],
(V24/.r→b)==CBb[[3,5]],(ξ24/.r→b)==CBb[[4,5]]},k4];
KK4={Extract[k14/.kk4,{1}],Extract[k24/.kk4,{1}],Extract[k34/.kk4,{1
}],Extract[k44/.kk4,{1}]};

```

```

xx0=EE2M4.KK0/.n→0;

```



```

 $\phi_{2_0} = \text{Collect}[\mathbf{xx}_0[[1]], \{r, \text{Ub}_0, \text{Vb}_0, \text{Log}[r]\}];$ 
 $U_{2_0} = \text{Collect}[\mathbf{xx}_0[[2]], \{r, \text{Ub}_0, \text{Vb}_0, \text{Log}[r]\}];$ 
 $V_{2_0} = \text{Collect}[\mathbf{xx}_0[[3]], \{r, \text{Ub}_0, \text{Vb}_0, \text{Log}[r]\}];$ 
 $\xi_{2_0} = \text{Collect}[\mathbf{xx}_0[[4]], \{r, \text{Ub}_0, \text{Vb}_0, \text{Log}[r]\}];$ 

```

```

 $\mathbf{xx}_1 = \text{EE2M4.KK}_1 /. n \rightarrow 1;$ 
 $\phi_{2_1} = \text{Collect}[\mathbf{xx}_1[[1]], \{r, \text{Ub}_1, \text{Vb}_1, \text{Log}[r]\}];$ 
 $U_{2_1} = \text{Collect}[\mathbf{xx}_1[[2]], \{r, \text{Ub}_1, \text{Vb}_1, \text{Log}[r]\}];$ 
 $V_{2_1} = \text{Collect}[\mathbf{xx}_1[[3]], \{r, \text{Ub}_1, \text{Vb}_1, \text{Log}[r]\}];$ 
 $\xi_{2_1} = \text{Collect}[\mathbf{xx}_1[[4]], \{r, \text{Ub}_1, \text{Vb}_1, \text{Log}[r]\}];$ 

```

```

 $\mathbf{xx}_2 = \text{EE2M4.KK}_2 /. n \rightarrow 2;$ 
 $\phi_{2_2} = \text{Collect}[\mathbf{xx}_2[[1]], \{r, \text{Ub}_2, \text{Vb}_2, \text{Log}[r]\}];$ 
 $U_{2_2} = \text{Collect}[\mathbf{xx}_2[[2]], \{r, \text{Ub}_2, \text{Vb}_2, \text{Log}[r]\}];$ 
 $V_{2_2} = \text{Collect}[\mathbf{xx}_2[[3]], \{r, \text{Ub}_2, \text{Vb}_2, \text{Log}[r]\}];$ 
 $\xi_{2_2} = \text{Collect}[\mathbf{xx}_2[[4]], \{r, \text{Ub}_2, \text{Vb}_2, \text{Log}[r]\}];$ 

```

```

 $\mathbf{xx}_3 = \text{EE2M4.KK}_3 /. n \rightarrow 3;$ 
 $\phi_{2_3} = \text{Collect}[\mathbf{xx}_3[[1]], \{r, \text{Ub}_3, \text{Vb}_3, \text{Log}[r]\}];$ 
 $U_{2_3} = \text{Collect}[\mathbf{xx}_3[[2]], \{r, \text{Ub}_3, \text{Vb}_3, \text{Log}[r]\}];$ 
 $V_{2_3} = \text{Collect}[\mathbf{xx}_3[[3]], \{r, \text{Ub}_3, \text{Vb}_3, \text{Log}[r]\}];$ 
 $\xi_{2_3} = \text{Collect}[\mathbf{xx}_3[[4]], \{r, \text{Ub}_3, \text{Vb}_3, \text{Log}[r]\}];$ 

```

```

 $\mathbf{xx}_4 = \text{EE2M4.KK}_4 /. n \rightarrow 4;$ 
 $\phi_{2_4} = \text{Collect}[\mathbf{xx}_4[[1]], \{r, \text{Ub}_4, \text{Vb}_4, \text{Log}[r]\}];$ 
 $U_{2_4} = \text{Collect}[\mathbf{xx}_4[[2]], \{r, \text{Ub}_4, \text{Vb}_4, \text{Log}[r]\}];$ 
 $V_{2_4} = \text{Collect}[\mathbf{xx}_4[[3]], \{r, \text{Ub}_4, \text{Vb}_4, \text{Log}[r]\}];$ 
 $\xi_{2_4} = \text{Collect}[\mathbf{xx}_4[[4]], \{r, \text{Ub}_4, \text{Vb}_4, \text{Log}[r]\}];$ 

```

```

 $url = \text{FullSimplify}[\text{Sum}[\phi_{2_i} \text{Cos}[2i \theta], \{i, 0, 4\}]];$ 
 $u\theta 1 = \text{FullSimplify}[\text{Sum}[U_{2_i} \text{Sin}[2i \theta], \{i, 0, 4\}]];$ 

```

# Ecuaciones para condiciones de borde interno (a) y otros

Definiciones

$U_{ji}$  = Desplazamiento en  $j$  de  $r$  evaluado en  $r_{crit}$  (si es  $U_{jji}$  es la derivada del desplazamiento)

```

 $e_0 = U_{\theta\theta i1} R_1/2 + U_{\theta\theta i2} R_2 + U_{\theta\theta i3} 3R_3/2;$ 
 $e_1 = U_{\theta\theta i1} R_2 + U_{\theta\theta i2} (R_1 + 3R_3)/2 + U_{\theta\theta i3} R_2;$ 

```

```

e2=U00i1 (-R1+3R3)/2+ U00i3 R1/2+U00i4 R2;
e3=-U00i1 R2- U00i2 R1/2+U00i4 R1/2;
e4=-U00i1 3R3/2- U00i2 R2-U00i3 R1/2;

i1=Urri0 R1+Urri1 R2-Urri2 (R1/2+3R3/2)-Urri3 R2-Urri4 3R3/2;
i2=Urri0 2R2+Urri1 (R1/2+3R3/2)-Urri3 R1/2-Urri4 R2;
i3=Urri0 3R3+Urri1 R2+Urri2 R1/2-Urri4 R1/2;
i4=Urri1 3R3/2+Urri2 R2+Urri3 R1/2;

F1:=(e0+e1 Cos[2θ]+e2 Cos[4θ]+e3 Cos[6θ]+e4 Cos[8θ])/(R0+R1
Cos[2θ]+R2 Cos[4θ]+R3 Cos[6θ]);

F2:=(Uri0+Uri1 Cos[2θ]+Uri2 Cos[4θ]+Uri3 Cos[6θ]+Uri4
Cos[8θ])/(R0+R1 Cos[2θ]+R2 Cos[4θ]+R3 Cos[6θ]);

F3:=(i1 Sin[2θ]+i2 Sin[4θ]+i3 Sin[6θ]+i4 Sin[8θ])/(R0+R1
Cos[2θ]+R2 Cos[4θ]+R3 Cos[6θ]);

F4:=(U0i0+U0i1 Cos[2θ]+U0i2 Cos[4θ]+U0i3 Cos[6θ]+U0i4
Cos[8θ])/(R0+R1 Cos[2θ]+R2 Cos[4θ]+R3 Cos[6θ]);
(* Coefficient[F1,Cos[4θ]] = (1/2 (-R1+3 R3) U00i1+(R1
U00i3)/2+R2 U00i4)/(R0+R1 Cos[2 θ]+R2 Cos[4 θ]+R3 Cos[6 θ] *)
Serie de Fourier al 8 vo término para F1
NN=100;
h=2Pi/NN;

a1_0=Simplify[N[h ((F1/.θ→-Pi)+(F1/.θ→Pi)+2Sum[F1/.θ→(-Pi+i
h) , {i,2,NN-1}])]/(2Pi)]];

For[i=1,i≤4,i++,
p=2i;

a1_p=Simplify[N[h ((F1 Cos[p θ])/θ→-Pi)+(F1 Cos[p
θ])/θ→Pi)+2Sum[(F1 Cos[p θ])/θ→(-Pi+i h) , {i,2,NN-
1}])]/(2Pi)]];

Serie de Fourier al 8 vo término para F2
a2_0=Simplify[N[h ((F2/.θ→-Pi)+(F2/.θ→Pi)+2Sum[F2/.θ→(-Pi+i
h) , {i,2,NN-1}])]/(2Pi)]];

For[i=1,i≤4,i++,
p=2i;

a2_p=Simplify[N[h ((F2 Cos[p θ])/θ→-Pi)+(F2 Cos[p
θ])/θ→Pi)+2Sum[(F2 Cos[p θ])/θ→(-Pi+i h) , {i,2,NN-
1}])]/(2Pi)]];

Serie de Fourier al 8 vo término para F3
a3_0=Simplify[N[h ((F3/.θ→-Pi)+(F3/.θ→Pi)+2Sum[F3/.θ→(-Pi+i
h) , {i,2,NN-1}])]/(2Pi)]];

For[i=1,i≤4,i++,
p=2i;

```

```
a3_p=Simplify[N[h ((F3 Cos[p θ])/θ→-Pi)+(F3 Cos[p θ])/θ→Pi)+2Sum[(F3 Cos[p θ])/θ→(-Pi+i h),{i,2,NN-1}]]/(2Pi)];
```

Serie de Fourier al 8 vo término para F4

```
a4_o=Simplify[N[h ((F4/θ→-Pi)+(F4/θ→Pi)+2Sum[F4/θ→(-Pi+i h),{i,2,NN-1}]]/(2Pi)]];
```

```
For[i=1,i<4,i++,
  p=2i;
```

```
  a4_p=Simplify[N[h ((F4 Cos[p θ])/θ→-Pi)+(F4 Cos[p θ])/θ→Pi)+2Sum[(F4 Cos[p θ])/θ→(-Pi+i h),{i,2,NN-1}]]/(2Pi)]];]
```

## Condiciones de Borde

```
Ec1:=(α0-α1+β0-β1)(Urri0+Urri1 Cos[2θ]+Urri2 Cos[4θ]+Urri3 Cos[6θ]+Urri4 Cos[8θ])+(β0-β1)(-2(a1_0/2+a1_2Cos[2θ]+a1_4Cos[4θ]+a1_6Cos[6θ]+a1_8Cos[8θ])+(a2_0/2+a2_2Cos[2θ]+a2_4Cos[4θ]+a2_6Cos[6θ]+a2_8Cos[8θ]))+(α1+β1)(Urri0+Urri1 Cos[2θ]+Urri2 Cos[4θ]+Urri3 Cos[6θ]+Urri4 Cos[8θ])+(β1/a)(2(Uθa1 Cos[2θ]+2Uθa2 Cos[4θ]+3Uθa3 Cos[6θ]+4Uθa4 Cos[8θ])+(Ura0+Ura1 Cos[2θ]+Ura2 Cos[4θ]+Ura3 Cos[6θ]+Ura4 Cos[8θ]));
```

```
Ec10:=(α0-α1)Urri0+(β0-β1)(-(a1_0)+a2_0/2+Urri0)+(α1+β1)(Urri0);
```

```
Ec2:=(α1/2)((-2/a)(Ura1 Sin[2θ]+2Ura2 Sin[4θ]+3Ura3 Sin[6θ]+4Ura4 Sin[8θ])+(Uθa1 Sin[2θ]+Uθa2 Sin[4θ]+Uθa3 Sin[6θ]+Uθa4 Sin[8θ])-a^-1(Uθa1 Sin[2θ]+Uθa2 Sin[4θ]+Uθa3 Sin[6θ]+Uθa4 Sin[8θ]))+(α0-α1)((Uθi1/2-a3_2-a4_2/2) Sin[2θ]+(Uθi2/2-a3_4-a4_4/2) Sin[4θ]+(Uθi3/2-a3_6-a4_6/2) Sin[6θ]+(Uθi4/2-a3_8-a4_8/2) Sin[8θ])
```

Solución de condiciones de borde (Dejar Urri y Uθa en función de Ura)

```
X1=Solve[Ec10==0,Ura0];
Urri00=Simplify[Extract[Urri0/.X1,{1}]];
```

```
X2=Solve[{Coefficient[Ec1,Cos[2θ]]==0,Coefficient[Ec2,Sin[2θ]]==0},{Urri1,Uθa1}];
Urri11=Simplify[Extract[Urri1/.X2,{1}]]];
Uθa11=Simplify[Extract[Uθa1/.X2,{1}]]];
```

```
X3=Solve[{Coefficient[Ec1,Cos[4θ]]==0,Coefficient[Ec2,Sin[4θ]]==0},{Urri2,Uθa2}];
Urri22=Simplify[Extract[Urri2/.X3,{1}]]];
Uθa22=Simplify[Extract[Uθa2/.X3,{1}]]];
```

```
X4=Solve[{Coefficient[Ec1,Cos[6θ]]==0,Coefficient[Ec2,Sin[6θ]]==0},{Urri3,Uθa3}];
Urri33=Simplify[Extract[Urri3/.X4,{1}]]];
Uθa33=Simplify[Extract[Uθa3/.X4,{1}]]];
```

```
X5=Solve[{Coefficient[Ec1,Cos[8θ]]==0,Coefficient[Ec2,Sin[8θ]]==0},{Urri4,Uθa4}];
Urri44=Simplify[Extract[Urri4/.X5,{1}]]];
```

```
U0a44=Simplify[Extract[U0a4/.X5,{1}]];
{Urri0,Urri1,Urri2,Urri3,Urri4}
```

```
{0,U0a11,U0a22,U0a33,U0a44};
```

```
f3=Simplify[(-
2(a1_0+a1_2Cos[2θ]+a1_4Cos[4θ]+a1_6Cos[6θ]+a1_8Cos[8θ])+(a2_0+a2_2Cos[2θ]+a
2_4Cos[4θ]+a2_6Cos[6θ]+a2_8Cos[8θ])-(Urri0+Urri1Cos[2θ]+Urri2
Cos[4θ]+Urri3Cos[6θ]+Urri4Cos[8θ]))r(α0-α1)]
```

```
f4=N[r(α1-α0)((U0θi1-2a3_2-a4_2)Sin[2θ]+(U0θi2-2a3_4-
a4_4)Sin[4θ]+(U0θi3-2a3_6-a4_6)Sin[6θ]+(U0θi4-2a3_8-a4_8)Sin[8θ])]
f3_0=Simplify[N[(-2(a1_0)+(a2_0)-(Urri0))r(α0-α1)]]
f3_0=Coefficient[Coefficient[Coefficient[Coefficient[f3,Cos
[8θ],0],Cos[6θ],0],Cos[4θ],0],Cos[2θ],0];
```

# ZONA RÍGIDA

```
For[i=0,i<4,i++,
```

```
κi={κ1_i,κ2_i,κ3_i,κ4_i,1};
xi=(EE2M4.κi/.n→i);
```

```
φ1_i=x_i[[1]];
U1_i=x_i[[2]];
V1_i=x_i[[3]];
ξ1_i=x_i[[4]];
```

```
]
```

```
kk_0=Solve[{Collect[(φ1_0/.r→a),{κ1_0,κ2_0,κ3_0,κ4_0}]==Cba[[1,1]],Collect
[(U1_0/.r→a),{κ1_0,κ2_0,κ3_0,κ4_0}]==Cba[[3,1]],
Collect[(V1_0/.r→a),{κ1_0,κ2_0,κ3_0,κ4_0}]==Cba[[2,1]],
Collect[(ξ1_0/.r→a),{κ1_0,κ2_0,κ3_0,κ4_0}]==Cba[[4,1]]},{κ1_0,κ2_0,κ3_0,κ4_0}];
KK_0={Extract[κ1_0/.kk_0,{1}],Extract[κ2_0/.kk_0,{1}],Extract[κ3_0/.kk_0,{1
}],Extract[κ4_0/.kk_0,{1}]};
```

```
kk_1=Solve[{Collect[(φ1_1/.r→a),{κ1_1,κ2_1,κ3_1,κ4_1}]==Cba[[1,2]],Collect
[(U1_1/.r→a),{κ1_1,κ2_1,κ3_1,κ4_1}]==Cba[[3,2]],Collect[
(V1_1/.r→a),{κ1_1,κ2_1,κ3_1,κ4_1}]==Cba[[2,2]],
Collect[(ξ1_1/.r→a),{κ1_1,κ2_1,κ3_1,κ4_1}]==Cba[[4,2]]},{κ1_1,κ2_1,κ3_1,κ4_1}];
KK_1={Extract[κ1_1/.kk_1,{1}],Extract[κ2_1/.kk_1,{1}],Extract[κ3_1/.kk_1,{1
}],Extract[κ4_1/.kk_1,{1}]};
```

```
kk_2=Solve[{Collect[(φ1_2/.r→a),{κ1_2,κ2_2,κ3_2,κ4_2}]==Cba[[1,3]],Collect
```

```

[(U12/.r→a), {κ12, κ22, κ32, κ42}]=CBa[[3,3]], Collect[
(V12/.r→a), {κ12, κ22, κ32, κ42}]=CBa[[2,3]],
Collect[(ξ12/.r→a), {κ12, κ22, κ32, κ42}]=CBa[[4,3]], {κ12, κ22, κ32, κ42};
KK2={Extract[κ12/.kk2, {1}], Extract[κ22/.kk2, {1}], Extract[κ32/.kk2, {1
}], Extract[κ42/.kk2, {1}]};
kk3={κ1→-(-(-(-CBa[[1,4]]+EE2M4[[1,5]]))
EE2M4[[2,4]]+EE2M4[[1,4]] (-CBa[[3,4]]+EE2M4[[2,5]]))
(EE2M4[[1,4]] EE2M4[[3,3]]-EE2M4[[1,3]]
EE2M4[[3,4]])+(EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,3]]-EE2M4[[1,3]]
EE2M4[[2,4]]) (-(-CBa[[1,4]]+EE2M4[[1,5]]))
EE2M4[[3,4]]+EE2M4[[1,4]] (-CBa[[3,4]]+EE2M4[[3,5]]))
((EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,3]]-EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,4]])
(EE2M4[[1,4]] EE2M4[[4,2]]-EE2M4[[1,2]] EE2M4[[4,4]])-
(EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,2]]-EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,4]])
(EE2M4[[1,4]] EE2M4[[4,3]]-EE2M4[[1,3]]
EE2M4[[4,4]]))+(EE2M4[[1,4]]2 EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,2]]-
EE2M4[[1,3]] EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,2]]-EE2M4[[1,4]]2
EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,3]]+EE2M4[[1,2]] EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,4]]
EE2M4[[3,3]]+EE2M4[[1,3]] EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,4]]-
EE2M4[[1,2]] EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,4]]) (-(-(-
CBa[[1,4]]+EE2M4[[1,5]])) EE2M4[[2,4]]+EE2M4[[1,4]] (-
CBa[[3,4]]+EE2M4[[2,5]])) (EE2M4[[1,4]] EE2M4[[4,3]]-EE2M4[[1,3]]
EE2M4[[4,4]])+(EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,3]]-EE2M4[[1,3]]
EE2M4[[2,4]]) (-(-CBa[[1,4]]+EE2M4[[1,5]]))
EE2M4[[4,4]]+EE2M4[[1,4]] (-
CBa[[4,4]]+EE2M4[[4,5]])))/((EE2M4[[1,4]]2 EE2M4[[2,3]]
EE2M4[[3,2]]-EE2M4[[1,3]] EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,2]]-
EE2M4[[1,4]]2 EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,3]]+EE2M4[[1,2]] EE2M4[[1,4]]
EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,3]]+EE2M4[[1,3]] EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,2]]
EE2M4[[3,4]]-EE2M4[[1,2]] EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,4]])
((EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,3]]-EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,4]])
(EE2M4[[1,4]] EE2M4[[4,1]]-EE2M4[[1,1]] EE2M4[[4,4]])-
(EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,1]]-EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,4]])
(EE2M4[[1,4]] EE2M4[[4,3]]-EE2M4[[1,3]] EE2M4[[4,4]])-
((EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,3]]-EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,4]])
(EE2M4[[1,4]] EE2M4[[3,1]]-EE2M4[[1,1]] EE2M4[[3,4]])-
(EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,1]]-EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,4]])
(EE2M4[[1,4]] EE2M4[[3,3]]-EE2M4[[1,3]] EE2M4[[3,4]])
((EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,3]]-EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,4]])
(EE2M4[[1,4]] EE2M4[[4,2]]-EE2M4[[1,2]] EE2M4[[4,4]])-
(EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,2]]-EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,4]])
(EE2M4[[1,4]] EE2M4[[4,3]]-EE2M4[[1,3]] EE2M4[[4,4]]))), κ2→-
(CBa[[4,4]] EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,1]]-CBa[[4,4]]
EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,1]]-CBa[[4,4]] EE2M4[[1,4]]
EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,3]]+CBa[[4,4]] EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,4]]
EE2M4[[3,3]]+CBa[[4,4]] EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,4]]-
CBa[[4,4]] EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,4]]-CBa[[3,4]]
EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[4,1]]+CBa[[3,4]] EE2M4[[1,3]]
EE2M4[[2,4]] EE2M4[[4,1]]+CBa[[3,4]] EE2M4[[1,4]] EE2M4[[3,3]]
EE2M4[[4,1]]-CBa[[1,4]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,3]]
EE2M4[[4,1]]+EE2M4[[1,5]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,1]]-
EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,5]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,1]]-CBa[[3,4]]
EE2M4[[1,3]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,1]]+CBa[[1,4]] EE2M4[[2,3]]
EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,1]]-EE2M4[[1,5]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,4]]
EE2M4[[4,1]]+EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,5]] EE2M4[[3,4]]

```

$EE2M4[[4,1]]+EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,5]] EE2M4[[4,1]]-$   
 $EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,5]] EE2M4[[4,1]]+CBa[[3,4]]$   
 $EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[4,3]]-CBa[[3,4]] EE2M4[[1,1]]$   
 $EE2M4[[2,4]] EE2M4[[4,3]]-CBa[[3,4]] EE2M4[[1,4]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,3]]+CBa[[1,4]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,3]]-$   
 $EE2M4[[1,5]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,3]]+EE2M4[[1,4]]$   
 $EE2M4[[2,5]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,3]]+CBa[[3,4]] EE2M4[[1,1]]$   
 $EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,3]]-CBa[[1,4]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,4]]$   
 $EE2M4[[4,3]]+EE2M4[[1,5]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,3]]-$   
 $EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,5]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,3]]-EE2M4[[1,4]]$   
 $EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,5]] EE2M4[[4,3]]+EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,4]]$   
 $EE2M4[[3,5]] EE2M4[[4,3]]-CBa[[3,4]] EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,1]]$   
 $EE2M4[[4,4]]+CBa[[3,4]] EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,3]]$   
 $EE2M4[[4,4]]+CBa[[3,4]] EE2M4[[1,3]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,4]]-$   
 $CBa[[1,4]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,4]]+EE2M4[[1,5]]$   
 $EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,4]]-EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,5]]$   
 $EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,4]]-CBa[[3,4]] EE2M4[[1,1]] EE2M4[[3,3]]$   
 $EE2M4[[4,4]]+CBa[[1,4]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,4]]-$   
 $EE2M4[[1,5]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,4]]+EE2M4[[1,1]]$   
 $EE2M4[[2,5]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,4]]+EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,1]]$   
 $EE2M4[[3,5]] EE2M4[[4,4]]-EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,5]]$   
 $EE2M4[[4,4]]-EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,5]]+EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,5]]+EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,5]]-$   
 $EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,5]]-EE2M4[[1,3]]$   
 $EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,5]]+EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,3]]$   
 $EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,5]])/(EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,3]])$   
 $EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,1]]-EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,2]]$   
 $EE2M4[[4,1]]-EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,3]]$   
 $EE2M4[[4,1]]+EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,3]]$   
 $EE2M4[[4,1]]+EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,1]]-$   
 $EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,1]]-EE2M4[[1,4]]$   
 $EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,2]]+EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,4]]$   
 $EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,2]]+EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,3]]$   
 $EE2M4[[4,2]]-EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,2]]-$   
 $EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,2]]+EE2M4[[1,1]]$   
 $EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,2]]+EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,2]]$   
 $EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,3]]-EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,3]]-EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,2]]$   
 $EE2M4[[4,3]]+EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,2]]$   
 $EE2M4[[4,3]]+EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,3]]-$   
 $EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,3]]-EE2M4[[1,3]]$   
 $EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,4]]+EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,3]]$   
 $EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,4]]+EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,2]]$   
 $EE2M4[[4,4]]-EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,4]]-$   
 $EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,4]]+EE2M4[[1,1]]$   
 $EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,4]]) , \kappa 3 \rightarrow -(-CBa[[4,4]])$   
 $EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,1]]+CBa[[4,4]] EE2M4[[1,2]]$   
 $EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,1]]+CBa[[4,4]] EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,1]]$   
 $EE2M4[[3,2]]-CBa[[4,4]] EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,2]]-$   
 $CBa[[4,4]] EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,4]]+CBa[[4,4]]$   
 $EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,4]]+CBa[[3,4]] EE2M4[[1,4]]$   
 $EE2M4[[2,2]] EE2M4[[4,1]]-CBa[[3,4]] EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,4]]$   
 $EE2M4[[4,1]]-CBa[[3,4]] EE2M4[[1,4]] EE2M4[[3,2]]$   
 $EE2M4[[4,1]]+CBa[[1,4]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,1]]-$   
 $EE2M4[[1,5]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,1]]+EE2M4[[1,4]]$

$EE2M4[[2,5]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,1]]+CBa[[3,4]] EE2M4[[1,2]]$   
 $EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,1]]-CBa[[1,4]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,4]]$   
 $EE2M4[[4,1]]+EE2M4[[1,5]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,1]]-$   
 $EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,5]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,1]]-EE2M4[[1,4]]$   
 $EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,5]] EE2M4[[4,1]]+EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,4]]$   
 $EE2M4[[3,5]] EE2M4[[4,1]]-CBa[[3,4]] EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,1]]$   
 $EE2M4[[4,2]]+CBa[[3,4]] EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,4]]$   
 $EE2M4[[4,2]]+CBa[[3,4]] EE2M4[[1,4]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,2]]-$   
 $CBa[[1,4]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,2]]+EE2M4[[1,5]]$   
 $EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,2]]-EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,5]]$   
 $EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,2]]-CBa[[3,4]] EE2M4[[1,1]] EE2M4[[3,4]]$   
 $EE2M4[[4,2]]+CBa[[1,4]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,2]]-$   
 $EE2M4[[1,5]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,2]]+EE2M4[[1,1]]$   
 $EE2M4[[2,5]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,2]]+EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,1]]$   
 $EE2M4[[3,5]] EE2M4[[4,2]]-EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,5]]$   
 $EE2M4[[4,2]]+CBa[[3,4]] EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[4,4]]-$   
 $CBa[[3,4]] EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[4,4]]-CBa[[3,4]]$   
 $EE2M4[[1,2]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,4]]+CBa[[1,4]] EE2M4[[2,2]]$   
 $EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,4]]-EE2M4[[1,5]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,4]]+EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,5]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,4]]+CBa[[3,4]] EE2M4[[1,1]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,4]]-$   
 $CBa[[1,4]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,4]]+EE2M4[[1,5]]$   
 $EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,4]]-EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,5]]$   
 $EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,4]]-EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,5]]$   
 $EE2M4[[4,4]]+EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,5]]$   
 $EE2M4[[4,4]]+EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,5]]-$   
 $EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,5]]-EE2M4[[1,4]]$   
 $EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,5]]+EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,4]]$   
 $EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,5]]+EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,4]]$   
 $EE2M4[[4,5]]-EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,4]]$   
 $EE2M4[[4,5]])/(EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,2]])$   
 $EE2M4[[4,1]]-EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,1]]-$   
 $EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,1]]+EE2M4[[1,2]]$   
 $EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,1]]+EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,2]]$   
 $EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,1]]-EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,4]]$   
 $EE2M4[[4,1]]-EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,2]]+EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,2]]+EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,2]]-$   
 $EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,2]]-EE2M4[[1,3]]$   
 $EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,2]]+EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,3]]$   
 $EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,2]]+EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,3]]-EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,3]]-$   
 $EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,3]]+EE2M4[[1,1]]$   
 $EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,3]]+EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,1]]$   
 $EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,3]]-EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,4]]$   
 $EE2M4[[4,3]]-EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,4]]+EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,4]]+EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,4]]-$   
 $EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,4]]-EE2M4[[1,2]]$   
 $EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,4]]+EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,2]]$   
 $EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,4]]) , \kappa 4 \rightarrow - (CBa[[4,4]] EE2M4[[1,3]]$   
 $EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,1]]-CBa[[4,4]] EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,3]]$   
 $EE2M4[[3,1]]-CBa[[4,4]] EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,1]]$   
 $EE2M4[[3,2]]+CBa[[4,4]] EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,3]]$   
 $EE2M4[[3,2]]+CBa[[4,4]] EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,3]]-$   
 $CBa[[4,4]] EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,3]]-CBa[[3,4]]$

```

EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[4,1]]+CBa[[3,4]] EE2M4[[1,2]]
EE2M4[[2,3]] EE2M4[[4,1]]+CBa[[3,4]] EE2M4[[1,3]] EE2M4[[3,2]]
EE2M4[[4,1]]-CBa[[1,4]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,2]]
EE2M4[[4,1]]+EE2M4[[1,5]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,1]]-
EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,5]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,1]]-CBa[[3,4]]
EE2M4[[1,2]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,1]]+CBa[[1,4]] EE2M4[[2,2]]
EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,1]]-EE2M4[[1,5]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,3]]
EE2M4[[4,1]]+EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,5]] EE2M4[[3,3]]
EE2M4[[4,1]]+EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,5]] EE2M4[[4,1]]-
EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,5]] EE2M4[[4,1]]+CBa[[3,4]]
EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[4,2]]-CBa[[3,4]] EE2M4[[1,1]]
EE2M4[[2,3]] EE2M4[[4,2]]-CBa[[3,4]] EE2M4[[1,3]] EE2M4[[3,1]]
EE2M4[[4,2]]+CBa[[1,4]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,2]]-
EE2M4[[1,5]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,2]]+EE2M4[[1,3]]
EE2M4[[2,5]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,2]]+CBa[[3,4]] EE2M4[[1,1]]
EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,2]]-CBa[[1,4]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,3]]
EE2M4[[4,2]]+EE2M4[[1,5]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,2]]-
EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,5]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,2]]-EE2M4[[1,3]]
EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,5]] EE2M4[[4,2]]+EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,3]]
EE2M4[[3,5]] EE2M4[[4,2]]-CBa[[3,4]] EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,1]]
EE2M4[[4,3]]+CBa[[3,4]] EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,2]]
EE2M4[[4,3]]+CBa[[3,4]] EE2M4[[1,2]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,3]]-
CBa[[1,4]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,3]]+EE2M4[[1,5]]
EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,3]]-EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,5]]
EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,3]]-CBa[[3,4]] EE2M4[[1,1]] EE2M4[[3,2]]
EE2M4[[4,3]]+CBa[[1,4]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,3]]-
EE2M4[[1,5]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,3]]+EE2M4[[1,1]]
EE2M4[[2,5]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,3]]+EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,1]]
EE2M4[[3,5]] EE2M4[[4,3]]-EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,5]]
EE2M4[[4,3]]-EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,1]]
EE2M4[[4,5]]+EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,1]]
EE2M4[[4,5]]+EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,5]]-
EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,5]]-EE2M4[[1,2]]
EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,5]]+EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,2]]
EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,5]])/(EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,3]]
EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,1]]-EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,2]]
EE2M4[[4,1]]-EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,3]]
EE2M4[[4,1]]+EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,3]]
EE2M4[[4,1]]+EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,1]]-
EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,1]]-EE2M4[[1,4]]
EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,2]]+EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,4]]
EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,2]]+EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,3]]
EE2M4[[4,2]]-EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,2]]-
EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,2]]+EE2M4[[1,1]]
EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,2]]+EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,2]]
EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,3]]-EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,1]]
EE2M4[[4,3]]-EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,2]]
EE2M4[[4,3]]+EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,2]]
EE2M4[[4,3]]+EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,3]]-
EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,3]]-EE2M4[[1,3]]
EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,4]]+EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,3]]
EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,4]]+EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,2]]
EE2M4[[4,4]]-EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,4]]-
EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,4]]+EE2M4[[1,1]]
EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,4]])} }/.r→a;

```



```

KK3={Simplify[Extract[κ1/.kk3,{1}],TimeConstraint→4500],Simplify[
Extract[κ2/.kk3,{1}],TimeConstraint→4500],Simplify[Extract[κ3/.kk
3,{1}],TimeConstraint→4500],Simplify[Extract[κ4/.kk3,{1}],TimeCon
straint→4500]};
kk4 ={{κ1→-(-(-(-(-CBa[[1,5]]+EE2M4[[1,5]]))
EE2M4[[2,4]]+EE2M4[[1,4]] (-CBa[[2,5]]+EE2M4[[2,5]]))
(EE2M4[[1,4]] EE2M4[[3,3]]-EE2M4[[1,3]]
EE2M4[[3,4]])+(EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,3]]-EE2M4[[1,3]]
EE2M4[[2,4]]) (-(-CBa[[1,5]]+EE2M4[[1,5]]))
EE2M4[[3,4]]+EE2M4[[1,4]] (-
CBa[[3,5]]CBa[[3,5]]CBa[[3,5]]+EE2M4[[3,5]])) ((EE2M4[[1,4]]
EE2M4[[2,3]]-EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,4]]) (EE2M4[[1,4]]
EE2M4[[4,2]]-EE2M4[[1,2]] EE2M4[[4,4]])-(EE2M4[[1,4]]
EE2M4[[2,2]]-EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,4]]) (EE2M4[[1,4]]
EE2M4[[4,3]]-EE2M4[[1,3]] EE2M4[[4,4]])+(EE2M4[[1,4]]2
EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,2]]-EE2M4[[1,3]] EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,4]]
EE2M4[[3,2]]-EE2M4[[1,4]]2 EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,3]]+EE2M4[[1,2]]
EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,3]]+EE2M4[[1,3]] EE2M4[[1,4]]
EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,4]]-EE2M4[[1,2]] EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,3]]
EE2M4[[3,4]]) (-(-(-CBa[[1,5]]+EE2M4[[1,5]]))
EE2M4[[2,4]]+EE2M4[[1,4]] (-CBa[[2,5]]+EE2M4[[2,5]]))
(EE2M4[[1,4]] EE2M4[[4,3]]-EE2M4[[1,3]]
EE2M4[[4,4]])+(EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,3]]-EE2M4[[1,3]]
EE2M4[[2,4]]) (-(-CBa[[1,5]]+EE2M4[[1,5]]))
EE2M4[[4,4]]+EE2M4[[1,4]] (-
CBa[[4,5]]+EE2M4[[4,5]])))/((EE2M4[[1,4]]2 EE2M4[[2,3]]
EE2M4[[3,2]]-EE2M4[[1,3]] EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,2]]-
EE2M4[[1,4]]2 EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,3]]+EE2M4[[1,2]] EE2M4[[1,4]]
EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,3]]+EE2M4[[1,3]] EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,2]]
EE2M4[[3,4]]-EE2M4[[1,2]] EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,4]])
((EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,3]]-EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,4]])
(EE2M4[[1,4]] EE2M4[[4,1]]-EE2M4[[1,1]] EE2M4[[4,4]])-
(EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,1]]-EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,4]])
(EE2M4[[1,4]] EE2M4[[4,3]]-EE2M4[[1,3]] EE2M4[[4,4]])-
((EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,3]]-EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,4]])
(EE2M4[[1,4]] EE2M4[[3,1]]-EE2M4[[1,1]] EE2M4[[3,4]])-
(EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,1]]-EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,4]])
(EE2M4[[1,4]] EE2M4[[3,3]]-EE2M4[[1,3]] EE2M4[[3,4]])
((EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,3]]-EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,4]])
(EE2M4[[1,4]] EE2M4[[4,2]]-EE2M4[[1,2]] EE2M4[[4,4]])-
(EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,2]]-EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,4]])
(EE2M4[[1,4]] EE2M4[[4,3]]-EE2M4[[1,3]] EE2M4[[4,4]]))},κ2→-
(CBa[[4,5]] EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,1]]-CBa[[4,5]]
EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,1]]-CBa[[4,5]] EE2M4[[1,4]]
EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,3]]+CBa[[4,5]] EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,4]]
EE2M4[[3,3]]+CBa[[4,5]] EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,4]]-
CBa[[4,5]] EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,4]]-
CBa[[3,5]]CBa[[3,5]]CBa[[3,5]] EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,3]]
EE2M4[[4,1]]+CBa[[3,5]]CBa[[3,5]]CBa[[3,5]] EE2M4[[1,3]]
EE2M4[[2,4]] EE2M4[[4,1]]+CBa[[2,5]] EE2M4[[1,4]] EE2M4[[3,3]]
EE2M4[[4,1]]-CBa[[1,5]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,3]]
EE2M4[[4,1]]+EE2M4[[1,5]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,1]]-
EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,5]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,1]]-CBa[[2,5]]
EE2M4[[1,3]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,1]]+CBa[[1,5]] EE2M4[[2,3]]
EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,1]]-EE2M4[[1,5]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,4]]
EE2M4[[4,1]]+EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,5]] EE2M4[[3,4]]

```

$EE2M4[[4,1]]+EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,5]] EE2M4[[4,1]]-$   
 $EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,5]]$   
 $EE2M4[[4,1]]+CBa[[3,5]]CBa[[3,5]]CBa[[3,5]] EE2M4[[1,4]]$   
 $EE2M4[[2,1]] EE2M4[[4,3]]-CBa[[3,5]]CBa[[3,5]]CBa[[3,5]]$   
 $EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[4,3]]-CBa[[2,5]] EE2M4[[1,4]]$   
 $EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,3]]+CBa[[1,5]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,3]]-EE2M4[[1,5]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,3]]+EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,5]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,3]]+CBa[[2,5]] EE2M4[[1,1]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,3]]-$   
 $CBa[[1,5]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,3]]+EE2M4[[1,5]]$   
 $EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,3]]-EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,5]]$   
 $EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,3]]-EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,5]]$   
 $EE2M4[[4,3]]+EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,5]] EE2M4[[4,3]]-$   
 $CBa[[3,5]]CBa[[3,5]]CBa[[3,5]] EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,1]]$   
 $EE2M4[[4,4]]+CBa[[3,5]]CBa[[3,5]]CBa[[3,5]] EE2M4[[1,1]]$   
 $EE2M4[[2,3]] EE2M4[[4,4]]+CBa[[2,5]] EE2M4[[1,3]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,4]]-CBa[[1,5]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,4]]+EE2M4[[1,5]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,4]]-$   
 $EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,5]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,4]]-CBa[[2,5]]$   
 $EE2M4[[1,1]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,4]]+CBa[[1,5]] EE2M4[[2,1]]$   
 $EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,4]]-EE2M4[[1,5]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,3]]$   
 $EE2M4[[4,4]]+EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,5]] EE2M4[[3,3]]$   
 $EE2M4[[4,4]]+EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,5]] EE2M4[[4,4]]-$   
 $EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,5]] EE2M4[[4,4]]-EE2M4[[1,4]]$   
 $EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,5]]+EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,4]]$   
 $EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,5]]+EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,3]]$   
 $EE2M4[[4,5]]-EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,5]]-$   
 $EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,5]]+EE2M4[[1,1]]$   
 $EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,5]])/(EE2M4[[1,4]]$   
 $EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,1]]-EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,4]]$   
 $EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,1]]-EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,3]]$   
 $EE2M4[[4,1]]+EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,3]]$   
 $EE2M4[[4,1]]+EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,1]]-$   
 $EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,1]]-EE2M4[[1,4]]$   
 $EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,2]]+EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,4]]$   
 $EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,2]]+EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,3]]$   
 $EE2M4[[4,2]]-EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,2]]-$   
 $EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,2]]+EE2M4[[1,1]]$   
 $EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,2]]+EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,2]]$   
 $EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,3]]-EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,3]]-EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,2]]$   
 $EE2M4[[4,3]]+EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,2]]$   
 $EE2M4[[4,3]]+EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,3]]-$   
 $EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,3]]-EE2M4[[1,3]]$   
 $EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,4]]+EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,3]]$   
 $EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,4]]+EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,2]]$   
 $EE2M4[[4,4]]-EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,4]]-$   
 $EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,4]]+EE2M4[[1,1]]$   
 $EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,4]]) , \kappa 3 \rightarrow -(-CBa[[4,5]]$   
 $EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,1]]+CBa[[4,5]] EE2M4[[1,2]]$   
 $EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,1]]+CBa[[4,5]] EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,1]]$   
 $EE2M4[[3,2]]-CBa[[4,5]] EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,2]]-$   
 $CBa[[4,5]] EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,4]]+CBa[[4,5]]$   
 $EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,2]]$   
 $EE2M4[[3,4]]+CBa[[3,5]]CBa[[3,5]]CBa[[3,5]] EE2M4[[1,4]]$   
 $EE2M4[[2,2]] EE2M4[[4,1]]-CBa[[3,5]]CBa[[3,5]]CBa[[3,5]]$

$EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[4,1]] - CBa[[2,5]] EE2M4[[1,4]]$   
 $EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,1]] + CBa[[1,5]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,2]]$   
 $EE2M4[[4,1]] - EE2M4[[1,5]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,2]]$   
 $EE2M4[[4,1]] + EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,5]] EE2M4[[3,2]]$   
 $EE2M4[[4,1]] + CBa[[2,5]] EE2M4[[1,2]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,1]] -$   
 $CBa[[1,5]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,1]] + EE2M4[[1,5]]$   
 $EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,1]] - EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,5]]$   
 $EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,1]] - EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,5]]$   
 $EE2M4[[4,1]] + EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,5]] EE2M4[[4,1]] -$   
 $CBa[[3,5]] CBa[[3,5]] CBa[[3,5]] EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,1]]$   
 $EE2M4[[4,2]] + CBa[[3,5]] CBa[[3,5]] CBa[[3,5]] EE2M4[[1,1]]$   
 $EE2M4[[2,4]] EE2M4[[4,2]] + CBa[[2,5]] EE2M4[[1,4]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,2]] - CBa[[1,5]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,2]] + EE2M4[[1,5]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,2]] -$   
 $EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,5]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,2]] - CBa[[2,5]]$   
 $EE2M4[[1,1]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,2]] + CBa[[1,5]] EE2M4[[2,1]]$   
 $EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,2]] - EE2M4[[1,5]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,4]]$   
 $EE2M4[[4,2]] + EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,5]] EE2M4[[3,4]]$   
 $EE2M4[[4,2]] + EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,5]] EE2M4[[4,2]] -$   
 $EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,5]]$   
 $EE2M4[[4,2]] + CBa[[3,5]] CBa[[3,5]] CBa[[3,5]] EE2M4[[1,2]]$   
 $EE2M4[[2,1]] EE2M4[[4,4]] - CBa[[3,5]] CBa[[3,5]] CBa[[3,5]]$   
 $EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[4,4]] - CBa[[2,5]] EE2M4[[1,2]]$   
 $EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,4]] + CBa[[1,5]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,4]] - EE2M4[[1,5]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,4]] + EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,5]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,4]] + CBa[[2,5]] EE2M4[[1,1]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,4]] -$   
 $CBa[[1,5]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,4]] + EE2M4[[1,5]]$   
 $EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,4]] - EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,5]]$   
 $EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,4]] - EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,5]]$   
 $EE2M4[[4,4]] + EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,5]]$   
 $EE2M4[[4,4]] + EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,5]] -$   
 $EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,5]] - EE2M4[[1,4]]$   
 $EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,5]] + EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,4]]$   
 $EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,5]] + EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,4]]$   
 $EE2M4[[4,5]] - EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,4]]$   
 $EE2M4[[4,5]]) / (EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,2]])$   
 $EE2M4[[4,1]] - EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,1]] -$   
 $EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,1]] + EE2M4[[1,2]]$   
 $EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,1]] + EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,2]]$   
 $EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,1]] - EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,4]]$   
 $EE2M4[[4,1]] - EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,2]] + EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,2]] + EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,2]] -$   
 $EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,2]] - EE2M4[[1,3]]$   
 $EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,2]] + EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,3]]$   
 $EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,2]] + EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,3]] - EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,3]] -$   
 $EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,3]] + EE2M4[[1,1]]$   
 $EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,3]] + EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,1]]$   
 $EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,3]] - EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,4]]$   
 $EE2M4[[4,3]] - EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,4]] + EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,4]] + EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,4]] -$   
 $EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,4]] - EE2M4[[1,2]]$   
 $EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,4]] + EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,2]]$

$EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,4]]) , \kappa 4 \rightarrow - (CBa[[4,5]] EE2M4[[1,3]]$   
 $EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,1]] - CBa[[4,5]] EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,3]]$   
 $EE2M4[[3,1]] - CBa[[4,5]] EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,1]]$   
 $EE2M4[[3,2]] + CBa[[4,5]] EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,3]]$   
 $EE2M4[[3,2]] + CBa[[4,5]] EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,3]] -$   
 $CBa[[4,5]] EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,3]] -$   
 $CBa[[3,5]] CBa[[3,5]] CBa[[3,5]] EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,2]]$   
 $EE2M4[[4,1]] + CBa[[3,5]] CBa[[3,5]] CBa[[3,5]] EE2M4[[1,2]]$   
 $EE2M4[[2,3]] EE2M4[[4,1]] + CBa[[2,5]] EE2M4[[1,3]] EE2M4[[3,2]]$   
 $EE2M4[[4,1]] - CBa[[1,5]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,2]]$   
 $EE2M4[[4,1]] + EE2M4[[1,5]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,1]] -$   
 $EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,5]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,1]] - CBa[[2,5]]$   
 $EE2M4[[1,2]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,1]] + CBa[[1,5]] EE2M4[[2,2]]$   
 $EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,1]] - EE2M4[[1,5]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,3]]$   
 $EE2M4[[4,1]] + EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,5]] EE2M4[[3,3]]$   
 $EE2M4[[4,1]] + EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,5]] EE2M4[[4,1]] -$   
 $EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,5]]$   
 $EE2M4[[4,1]] + CBa[[3,5]] CBa[[3,5]] CBa[[3,5]] EE2M4[[1,3]]$   
 $EE2M4[[2,1]] EE2M4[[4,2]] - CBa[[3,5]] CBa[[3,5]] CBa[[3,5]]$   
 $EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[4,2]] - CBa[[2,5]] EE2M4[[1,3]]$   
 $EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,2]] + CBa[[1,5]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,2]] - EE2M4[[1,5]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,2]] + EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,5]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,2]] + CBa[[2,5]] EE2M4[[1,1]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,2]] -$   
 $CBa[[1,5]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,2]] + EE2M4[[1,5]]$   
 $EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,2]] - EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,5]]$   
 $EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,2]] - EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,5]]$   
 $EE2M4[[4,2]] + EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,5]] EE2M4[[4,2]] -$   
 $CBa[[3,5]] CBa[[3,5]] CBa[[3,5]] EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,1]]$   
 $EE2M4[[4,3]] + CBa[[3,5]] CBa[[3,5]] CBa[[3,5]] EE2M4[[1,1]]$   
 $EE2M4[[2,2]] EE2M4[[4,3]] + CBa[[2,5]] EE2M4[[1,2]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,3]] - CBa[[1,5]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,3]] + EE2M4[[1,5]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,3]] -$   
 $EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,5]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,3]] - CBa[[2,5]]$   
 $EE2M4[[1,1]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,3]] + CBa[[1,5]] EE2M4[[2,1]]$   
 $EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,3]] - EE2M4[[1,5]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,2]]$   
 $EE2M4[[4,3]] + EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,5]] EE2M4[[3,2]]$   
 $EE2M4[[4,3]] + EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,5]] EE2M4[[4,3]] -$   
 $EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,5]] EE2M4[[4,3]] - EE2M4[[1,3]]$   
 $EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,5]] + EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,3]]$   
 $EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,5]] + EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,2]]$   
 $EE2M4[[4,5]] - EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,5]] -$   
 $EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,5]] + EE2M4[[1,1]]$   
 $EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,5]]) / (EE2M4[[1,4]]$   
 $EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,1]] - EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,4]]$   
 $EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,1]] - EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,3]]$   
 $EE2M4[[4,1]] + EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,3]]$   
 $EE2M4[[4,1]] + EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,1]] -$   
 $EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,1]] - EE2M4[[1,4]]$   
 $EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,2]] + EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,4]]$   
 $EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,2]] + EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,3]]$   
 $EE2M4[[4,2]] - EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,2]] -$   
 $EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,2]] + EE2M4[[1,1]]$   
 $EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,2]] + EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,2]]$   
 $EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,3]] - EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,1]]$   
 $EE2M4[[4,3]] - EE2M4[[1,4]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,2]]$

```

EE2M4[[4,3]]+EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,4]] EE2M4[[3,2]]
EE2M4[[4,3]]+EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,3]]-
EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,4]] EE2M4[[4,3]]-EE2M4[[1,3]]
EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,4]]+EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,3]]
EE2M4[[3,1]] EE2M4[[4,4]]+EE2M4[[1,3]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,2]]
EE2M4[[4,4]]-EE2M4[[1,1]] EE2M4[[2,3]] EE2M4[[3,2]] EE2M4[[4,4]]-
EE2M4[[1,2]] EE2M4[[2,1]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,4]]+EE2M4[[1,1]]
EE2M4[[2,2]] EE2M4[[3,3]] EE2M4[[4,4]])} /.r→a;

```

```

KK4={Simplify[Extract[κ1/.kk4,{1}],TimeConstraint→4500],Simplify[
Extract[κ2/.kk4,{1}],TimeConstraint→4500],Simplify[Extract[κ3/.kk
4,{1}],TimeConstraint→4500],Simplify[Extract[κ4/.kk4,{1}],TimeCon
straint→4500]};

```

```

KKK0={KK0[[1]],KK0[[2]],KK0[[3]],KK0[[4]],1};
KKK1={KK1[[1]],KK1[[2]],KK1[[3]],KK1[[4]],1};
KKK2={KK2[[1]],KK2[[2]],KK2[[3]],KK2[[4]],1};
KKK3={KK3[[1]],KK3[[2]],KK3[[3]],KK3[[4]],1};
KKK4={KK4[[1]],KK4[[2]],KK4[[3]],KK4[[4]],1};

```

```

xx0=(EE2M4.KKK0)/.n→0;
φ10=xx0[[1]];
U10=xx0[[2]];
V10=xx0[[3]];
ξ10=xx0[[4]];

```

```

xx1=(EE2M4.KKK1)/.n→1;
φ11=xx1[[1]];
U11=xx1[[2]];
V11=xx1[[3]];
ξ11=xx1[[4]];

```

```

xx2=(EE2M4.KKK2)/.n→2;
φ12=xx2[[1]];
U12=xx2[[2]];
V12=xx2[[3]];
ξ12=xx2[[4]];

```

```

xx3=(EE2M4.KKK3)/.n→3;
φ13=xx3[[1]];
U13=xx3[[2]];
V13=xx3[[3]];
ξ13=xx3[[4]];

```

```

xx4=(EE2M4.KKK4)/.n→4;
φ14=xx4[[1]];
U14=xx4[[2]];
V14=xx4[[3]];
ξ14=xx4[[4]];

```

```

ur2=Sum[φ1i Cos[2i θ],{i,0,4}];
uθ2=Sum[U1i Sin[2i θ],{i,1,4}];

```

# Sistema de ecuaciones en Interfase

```

σa=200 108;
Uθi0=0;

```

```

α1=E1/(1+ν1);
β1=E1 ν1/((1+ν1)(1-2ν1));
a=.01;
b=.5;
E0=380 109;
ν0=.23;
E1=1000 E0;
ν1=ν0/1000;
σ0=200 106;
α0=E0/(1+ν0);
β0=E0 ν0/((1+ν0)(1-2ν0));

```

## Derivadas Deformaciones y Esfuerzos

```

Ura0=Ura0;
Ura1=Ura1;
Ura2=Ura2;
Ura3=Ura3;
Ura4=Ura4;
Uθθa1=Uθθa1;
Uθθa2=Uθθa2;
Uθθa3=Uθθa3;
Uθθa4=Uθθa4;
urdr1=D[ur1,r];
urdr2=D[ur2,r];
urdθ1=D[ur1,θ];
urdθ2=D[ur2,θ];

```

```

uθdr1=D[uθ1,r];
uθdr2=D[uθ2,r];
uθdθ1=D[uθ1,θ];
uθdθ2=D[uθ2,θ];

```

```

εr1=urdr1;
εr2=urdr2;
εθ1=r-1 (uθdθ1+ur1);
εθ2=r-1 (uθdθ2+ur2);
εrθ1=.5 (urdθ1 r-1+uθdr1-uθ1 r-1);
εrθ2=.5 (urdθ2 r-1+uθdr2-uθ2 r-1);

```

```

or1=α0 εr1+β0(εr1+εθ1);
ot1=α0 εθ1+β0(εr1+εθ1);
trθ1=α0 εrθ1;

```

Evaluando en  $r^* = \sum R_j \cos 2j\theta$

```

uR1=ur1/.r→(R0+R1 Cos[2θ]+R2 Cos[4θ]+R3 Cos[6θ]);
uR2=ur2/.r→(R0+R1 Cos[2θ]+R2 Cos[4θ]+R3 Cos[6θ]);
ut1=uθ1/.r→(R0+R1 Cos[2θ]+R2 Cos[4θ]+R3 Cos[6θ]);
ut2=uθ2/.r→(R0+R1 Cos[2θ]+R2 Cos[4θ]+R3 Cos[6θ]);

```

```

uRdr1=urdr1/.r→(R0+R1 Cos[2θ]+R2 Cos[4θ]+R3 Cos[6θ]);
uRdr2=urdr2/.r→(R0+R1 Cos[2θ]+R2 Cos[4θ]+R3 Cos[6θ]);
uRdθ1=urdθ1/.r→(R0+R1 Cos[2θ]+R2 Cos[4θ]+R3 Cos[6θ]);
uRdθ2=urdθ2/.r→(R0+R1 Cos[2θ]+R2 Cos[4θ]+R3 Cos[6θ]);

```

```

utdr1=uθdr1/.r→(R0+R1 Cos[2θ]+R2 Cos[4θ]+R3 Cos[6θ]);
utdr2=uθdr2/.r→(R0+R1 Cos[2θ]+R2 Cos[4θ]+R3 Cos[6θ]);
utdθ1=uθdθ1/.r→(R0+R1 Cos[2θ]+R2 Cos[4θ]+R3 Cos[6θ]);
utdθ2=uθdθ2/.r→(R0+R1 Cos[2θ]+R2 Cos[4θ]+R3 Cos[6θ]);

```

```

εR1=uRdr1;
εR2=uRdr2;
εt1=(R0+R1 Cos[2θ]+R2 Cos[4θ]+R3 Cos[6θ])-1 (utdθ1+uR1);
εt2=(R0+R1 Cos[2θ]+R2 Cos[4θ]+R3 Cos[6θ])-1 (utdθ2+uR2);
εRt1=.5(uRdθ1 (R0+R1 Cos[2θ]+R2 Cos[4θ]+R3 Cos[6θ])-1+utdr1-ut1
(R0+R1 Cos[2θ]+R2 Cos[4θ]+R3 Cos[6θ])-1);
εRt2=.5(uRdθ2 (R0+R1 Cos[2θ]+R2 Cos[4θ]+R3 Cos[6θ])-1+utdr2-ut2
(R0+R1 Cos[2θ]+R2 Cos[4θ]+R3 Cos[6θ])-1);

```

```

k=0;
For[i=1,i≤34,i++,
t=(i-1) Pi/66;
If[i≤7,
gi:= (uR1/.θ→t) - (uR2/.θ→t);k=1];

If[i>7 && i≤14,
gi:= (ut1/.θ→t) - (ut2/.θ→t);k=2];

If[i≥15,
gi:=Max[Abs[.5(εR1/.θ→t+εt1/.θ→t)+Sqrt[(.5(εR1/.θ→t-
εt1/.θ→t))2+εRt12/.θ→t]],Abs[.5(εR1/.θ→t+εt1/.θ→t)-
Sqrt[(.5(εR1/.θ→t-εt1/.θ→t))2+εRt12/.θ→t]]]- σa/E0 ;k=0]

```

```

(* If[i≥18 && i≤27,
Subscript[g,
i]:=Max[Abs[.5(εR2/.θ→t+εt2/.θ→t)+Sqrt[(.5(εR2/.θ→t-
εt2/.θ→t))2+εRt22/.θ→t]],Abs[.5(εR2/.θ→t+εt2/.θ→t)-
Sqrt[(.5(εR2/.θ→t-εt2/.θ→t))2+εRt22/.θ→t]]]- σa/E0]*)

```

```

]

```





$\sigma a = 10^5$ ; (\*Carga\*)

$CBb = \{ \{ Urb_0, Urb_1, 0, 0, 0 \}, \{ 0, U\theta b_1, 0, 0, 0 \}, \{ (b \sigma a - 2 Urb_0) / (2 b (\alpha 0 + \beta 0)), (b \sigma a - 2 Urb_1 - 4 U\theta b_1) / (2 b (\alpha 0 + \beta 0)), 0, 0, 0 \}, \{ 0, (-b \sigma a + 2 \alpha 0 Urb_1 + 2 U\theta b_1) / (2 b), 0, 0, 0 \} \}$ ;

For[i=0, i<=4, i++,

$k_i = \{ k1_i, k2_i, k3_i, k4_i \}$ ;

$x_i = Ex.k_i /. n \rightarrow i$ ;

$\varphi 2_i = x_i[[1]]$ ;

(\* $\varphi 2$  es  $Ur1$ ,  $U2$  es  $U\theta 1$ ,  $V2$  es  $\xi r1$  y  $\xi 2$  es  $\xi \theta 1$  \*)

$U2_i = x_i[[2]]$ ;

$V2_i = x_i[[3]]$ ;

$\xi 2_i = x_i[[4]]$ ;

]

$kk_0 = Solve[\{ (\varphi 2_0 /. r \rightarrow b) == CBb[[1, 1]], (U2_0 /. r \rightarrow b) == CBb[[2, 1]],$

$(V2_0 /. r \rightarrow b) == CBb[[3, 1]], (\xi 2_0 /. r \rightarrow b) == CBb[[4, 1]] \}, k_0]$ ;

$KK_0 = \{ Extract[k1_0 /. kk_0, \{1\}], Extract[k2_0 /. kk_0, \{1\}], Extract[k3_0 /. kk_0, \{1\}], Extract[k4_0 /. kk_0, \{1\}] \}$ ;

$kk_1 = Solve[\{ (\varphi 2_1 /. r \rightarrow b) == CBb[[1, 2]], (U2_1 /. r \rightarrow b) == CBb[[2, 2]],$

$(V2_1 /. r \rightarrow b) == CBb[[3, 2]], (\xi 2_1 /. r \rightarrow b) == CBb[[4, 2]] \}, k_1]$ ;

$KK_1 = \{ Extract[k1_1 /. kk_1, \{1\}], Extract[k2_1 /. kk_1, \{1\}], Extract[k3_1 /. kk_1, \{1\}], Extract[k4_1 /. kk_1, \{1\}] \}$ ;

$kk_2 = Solve[\{ (\varphi 2_2 /. r \rightarrow b) == CBb[[1, 3]], (U2_2 /. r \rightarrow b) == CBb[[2, 3]],$

$(V2_2 /. r \rightarrow b) == CBb[[3, 3]], (\xi 2_2 /. r \rightarrow b) == CBb[[4, 3]] \}, k_2]$ ;

$KK_2 = \{ Extract[k1_2 /. kk_2, \{1\}], Extract[k2_2 /. kk_2, \{1\}], Extract[k3_2 /. kk_2, \{1\}], Extract[k4_2 /. kk_2, \{1\}] \}$ ;

$kk_3 = Solve[\{ (\varphi 2_3 /. r \rightarrow b) == CBb[[1, 4]], (U2_3 /. r \rightarrow b) == CBb[[2, 4]],$

$(V2_3 /. r \rightarrow b) == CBb[[3, 4]], (\xi 2_3 /. r \rightarrow b) == CBb[[4, 4]] \}, k_3]$ ;

$KK_3 = \{ Extract[k1_3 /. kk_3, \{1\}], Extract[k2_3 /. kk_3, \{1\}], Extract[k3_3 /. kk_3, \{1\}], Extract[k4_3 /. kk_3, \{1\}] \}$ ;

$kk_4 = Solve[\{ (\varphi 2_4 /. r \rightarrow b) == CBb[[1, 5]], (U2_4 /. r \rightarrow b) == CBb[[2, 5]],$

$(V2_4 /. r \rightarrow b) == CBb[[3, 5]], (\xi 2_4 /. r \rightarrow b) == CBb[[4, 5]] \}, k_4]$ ;

$KK_4 = \{ Extract[k1_4 /. kk_4, \{1\}], Extract[k2_4 /. kk_4, \{1\}], Extract[k3_4 /. kk_4, \{1\}], Extract[k4_4 /. kk_4, \{1\}] \}$ ;

$xx_0 = Ex.KK_0 /. n \rightarrow 0$ ;

$Ur_0 = Collect[xx_0[[1]], \{r, Ub_0, Vb_0, Log[r]\}]$ ;

$U\theta 0 = Collect[xx_0[[2]], \{r, Ub_0, Vb_0, Log[r]\}]$ ;

$\xi r_0 = Collect[xx_0[[3]], \{r, Ub_0, Vb_0, Log[r]\}]$ ;

$\xi \theta 0 = Collect[xx_0[[4]], \{r, Ub_0, Vb_0, Log[r]\}]$ ;

```

xx1=Ex.KK1/.n→1;
Ur1=Collect[xx1[[1]],{r,Ub1,Vb1,Log[r]};
Uθ1=Collect[xx1[[2]],{r,Ub1,Vb1,Log[r]};
ξr1=Collect[xx1[[3]],{r,Ub1,Vb1,Log[r]};
ξθ1=Collect[xx1[[4]],{r,Ub1,Vb1,Log[r]};

xx2=Ex.KK2/.n→2;
Ur2=Collect[xx2[[1]],{r,Ub2,Vb2,Log[r]};
Uθ2=Collect[xx2[[2]],{r,Ub2,Vb2,Log[r]};
ξr2=Collect[xx2[[3]],{r,Ub2,Vb2,Log[r]};
ξθ2=Collect[xx2[[4]],{r,Ub2,Vb2,Log[r]};

xx3=Ex.KK3/.n→3;
Ur3=Collect[xx3[[1]],{r,Ub3,Vb3,Log[r]};
Uθ3=Collect[xx3[[2]],{r,Ub3,Vb3,Log[r]};
ξr3=Collect[xx3[[3]],{r,Ub3,Vb3,Log[r]};
ξθ3=Collect[xx3[[4]],{r,Ub3,Vb3,Log[r]};

xx4=Ex.KK4/.n→4;
Ur4=Collect[xx4[[1]],{r,Ub4,Vb4,Log[r]};
Uθ4=Collect[xx4[[2]],{r,Ub4,Vb4,Log[r]};
ξr4=Collect[xx4[[3]],{r,Ub4,Vb4,Log[r]};
ξθ4=Collect[xx4[[4]],{r,Ub4,Vb4,Log[r]};

```

---

## Igualdad

```

Uaa=Solve[{(Ur0/.r→a)==Ura0,(Ur1/.r→a)==Ura1,(Uθ1/.r→
a)==Uθa1},{Ura0,Ura1,Uθa1 }];
Ua=Simplify[{Extract[Ura0/.Uaa,{1}],Extract[Ura1/.Uaa,{1}],Extract
[Uθa1/.Uaa,{1}]}];(*Ctes de borde de b en fn de las de a *)

Urb0=0;
Urb1=0;
Uθb1=0;
CBa={{Ua[[1]],Ua[[2]],0,0,0},{0,Ua[[3]],0,0,0},{-((β0 Ua[[1]])/(a
(α0+β0))),(-β0 Ua[[2]]-2 β0 Ua[[3]])/(a
(α0+β0)),0,0,0},{0,(2Ua[[2]]+Ua[[3]])/a,0,0,0}}

```

---

## Cálculo de funciones desde el borde a

```

ClearAll[k0,k1,k2,k3,k4];

kkk0=Solve[{(φ20/.r→a)==CBa[[1,1]],(U20/.r→a)==CBa[[2,1]],
(V20/.r→a)==CBa[[3,1]],(ξ20/.r→a)==CBa[[4,1]],k0};
KKK0={Extract[k10/.kkk0,{1}],Extract[k20/.kkk0,{1}],Extract[k30/.kkk
0,{1}],Extract[k40/.kkk0,{1}]}];

kkk1=Solve[{(φ21/.r→a)==CBa[[1,2]],(U21/.r→a)==CBa[[2,2]],
(V21/.r→a)==CBa[[3,2]],(ξ21/.r→a)==CBa[[4,2]],k1};
KKK1={Extract[k11/.kkk1,{1}],Extract[k21/.kkk1,{1}],Extract[k31/.kkk
1,{1}],Extract[k41/.kkk1,{1}]}];

```

```

kkk2=Solve[{(φ2/r→a)==CBa[[1,3]],(U2/r→a)==CBa[[2,3]],
(V2/r→a)==CBa[[3,3]],(ξ2/r→a)==CBa[[4,3]]},k2];
KKK2={Extract[k12/kkk2,{1}],Extract[k22/kkk2,{1}],Extract[k32/kkk2,{1}],Extract[k42/kkk2,{1}]};

```

```

kkk3=Solve[{(φ3/r→a)==CBa[[1,4]],(U3/r→a)==CBa[[2,4]],
(V3/r→a)==CBa[[3,4]],(ξ3/r→a)==CBa[[4,4]]},k3];
KKK3={Extract[k13/kkk3,{1}],Extract[k23/kkk3,{1}],Extract[k33/kkk3,{1}],Extract[k43/kkk3,{1}]};

```

```

kkk4=Solve[{(φ4/r→a)==CBa[[1,5]],(U4/r→a)==CBa[[2,5]],
(V4/r→a)==CBa[[3,5]],(ξ4/r→a)==CBa[[4,5]]},k4];
KKK4={Extract[k14/kkk4,{1}],Extract[k24/kkk4,{1}],Extract[k34/kkk4,{1}],Extract[k44/kkk4,{1}]};

```

```

xxx0=Ex.KKK0/n→0;
Ur20=Collect[xxx0[[1]],{r,Ub0,Vb0,Log[r]}];
Uθ20=Collect[xxx0[[2]],{r,Ub0,Vb0,Log[r]}];
ξr20=Collect[xxx0[[3]],{r,Ub0,Vb0,Log[r]}];
ξθ20=Collect[xxx0[[4]],{r,Ub0,Vb0,Log[r]}];

```

```

xxx1=Ex.KKK1/n→1;
Ur21=Collect[xxx1[[1]],{r,Ub1,Vb1,Log[r]}];
Uθ21=Collect[xxx1[[2]],{r,Ub1,Vb1,Log[r]}];
ξr21=Collect[xxx1[[3]],{r,Ub1,Vb1,Log[r]}];
ξθ21=Collect[xxx1[[4]],{r,Ub1,Vb1,Log[r]}];

```

```

xxx2=Ex.KKK2/n→2;
Ur22=Collect[xxx2[[1]],{r,Ub2,Vb2,Log[r]}];
Uθ22=Collect[xxx2[[2]],{r,Ub2,Vb2,Log[r]}];
ξr22=Collect[xxx2[[3]],{r,Ub2,Vb2,Log[r]}];
ξθ22=Collect[xxx2[[4]],{r,Ub2,Vb2,Log[r]}];

```

```

xxx3=Ex.KKK3/n→3;
Ur23=Collect[xxx3[[1]],{r,Ub3,Vb3,Log[r]}];
Uθ23=Collect[xxx3[[2]],{r,Ub3,Vb3,Log[r]}];
ξr23=Collect[xxx3[[3]],{r,Ub3,Vb3,Log[r]}];
ξθ23=Collect[xxx3[[4]],{r,Ub3,Vb3,Log[r]}];

```

```

xxx4=Ex.KKK4/n→4;
Ur24=Collect[xxx4[[1]],{r,Ub4,Vb4,Log[r]}];
Uθ24=Collect[xxx4[[2]],{r,Ub4,Vb4,Log[r]}];
ξr24=Collect[xxx4[[3]],{r,Ub4,Vb4,Log[r]}];
ξθ24=Collect[xxx4[[4]],{r,Ub4,Vb4,Log[r]}];

```

```

Ur=Ur20+Ur21Cos[2θ];
Uθ=Uθ21Sin[2θ];
εrr=D[Ur,r];
εθθ=Ur/r+D[Uθ,θ]/r;
εrθ=.5(D[Ur,θ]r-1+D[Uθ,r]-Uθ/r);

```

```

σr=α0 εrr+β0 (εrr+εθθ);
σθ=α0 εθθ+β0 (εrr+εθθ);
σrθ=α0 εrθ;

(*Timoshenko*)

σr1=.5σa(1-a2/r2)+.5σa(1+3a4/r4-4a2/r2)Cos[2θ];
σθ1=.5σa(1+a2/r2)-.5σa(1+3a4/r4)Cos[2θ];
σrθ1=-.5σa(1-3a4/r4+4a2/r2)Sin[2θ];

```

---

## Ploteo

```

Grid[{"T. Matrix Exponencial = 8 ", "T. Magnus = 8", "Problemas
de recursos"},{Plot[{σr/.θ→Pi/4 ,σr1/.θ→Pi/4
},{r,a,b}],Plot[{σθ/.θ→Pi/4 ,σr1/.θ→Pi/4
},{r,a,b}],Plot[{σrθ/.θ→Pi/4 ,σr1/.θ→Pi/4 },{r,a,b}]}]}]

```

### 7.6.6. Problema 4

---

## Programa

-----Iniciación y Solución de M para E1-----

```

(*α=0.01;
β=9.27681 10-8;
γ=4.01995 10-9;
ι=2 10-14;
k=1; (* k libre *)
*)

```

```

α=0.01;
β=9.27681 10-8;
γ=4.01995 10-9;
ι=2 10-14;
k=1;

```

```

For[ii=-100,ii≤100,ii++,
For[jj=-100,jj≤100,jj++,

```

```

T11=ii 105;
T22=jj 105;
T12=10-4;

```

```

f=ConstantArray[0,4];
m=ConstantArray[1,4];
f2=ConstantArray[0,8];
m2=ConstantArray[1,8];

```

```

l1= ConstantArray[1,4];

```

```

l2=ConstantArray[1,4];
l3= ConstantArray[1,4];
l4= ConstantArray[1,8];
l5= ConstantArray[1,8];

ClearAll[AA];
ClearAll[BB];
AA= {A1,A2,A3,A4};
BB={B1,B2,B3,B4,B5,B6,B7,B8};

I1= T11+T22;
I2= .5*(Subscript[T, 11]2+Subscript[T, 22]2);
We=- (α/β) Log[Cosh[β I1]]+(γ/ι) (1+2ι I2)-5;

Cinv1111 = α*β(Tanh[β*I1]2-1)-γ*ι (1+2ι*I2)-3/2*Subscript[T, 11]2+γ
(1+2ι*I2)-1/2;

Cinv2222 = α*β(Tanh[β*I1]2-1)+γ (1+2ι*I2)-1/2-γ*ι (1+2ι*I2)-3/2
*Subscript[T, 22]2;

Cinv1212 = - γ*ι (1+2ι*I2)-3/2*Subscript[T, 12]2+γ (1+2ι I2)-5;

Cinv1122 = α*β(Tanh[β*I1]2-1)-γ*ι (1+2ι*I2)-3/2*T11*T22;

Cinv1112 = -γ*ι (1+2ι*I2)-3/2*T12*T11;

Cinv1222 = -γ*ι (1+2ι*I2)-3/2*T22*T12;

(* CINV=N[{{Subscript[Cinv, 1111],Subscript[Cinv,
1122],Subscript[Cinv, 1112]},{Subscript[Cinv,
1122],Subscript[Cinv, 2222],Subscript[Cinv,
1222]},{Subscript[Cinv, 1112],Subscript[Cinv,
1222],Subscript[Cinv, 1212]}}]];

If[Det[CINV]==0,Break[]];
CC=N[Quiet[Inverse[CINV]]];*)

a= Cinv1111;
b= Cinv2222;
c= 4Cinv1212+2Cinv1122;
d= -4 Cinv1112;
e= -4 Cinv1222;

n1= a2;
n2= (d2) (k2)-2*a*c*k2;
n3= 2*a*b*k4+(c2) (k4)-2*d*e*k4;
n4= (e2) (k6)-2b*c*k6;
n5= b2 k8;

ξ∈Reals;
λ∈Reals;

M= n1*ξ4+n2*ξ3+n3*ξ2+n4*ξ+n5 (* λ2=ξ *) ;

```

```

M2= n1*λ8+n2*λ6+n3*λ4+n4*λ2+n5 ;

E1=InverseLaplaceTransform[a (a ξ2+b k4-c k2 ξ)/M,ξ,y];
E21=InverseLaplaceTransform[a (d k λ3-e k3 λ)/M2,λ,y];
x= NSolve[M,ξ];
s=
{Extract[ξ/.x,{1}],Extract[ξ/.x,{2}],Extract[ξ/.x,{3}],Extract[ξ/
.x,{4}]}];

For[i=1,i≤4,i++,
  f[[i]]= ξ-s[[i]];
]

For[i=1,i≤3,i++,
  If[f[[i+1]]===f[[i]],
    m[[i+1]]=m[[i+1]]+1;
    m[[i]]=0;]];

F=f[[1]]m[[1]]*f[[2]]m[[2]]*f[[3]]m[[3]]*f[[4]]m[[4]];
W=0;

For[i=1,i≤3,i++,
  If[s[[i]]∉Reals && m[[i]]==1,

    P=F/(f[[i]] f[[i+1]]);
    p=Part[Part[P,1],1];
    P2=(Re[p]+ξ)2+Im[p]2;
    W= W+(AA[[i]]+AA[[i+1]]*ξ)*P2;
    i++;
  ];

If[s[[4]]∉Reals && m[[4]]==2,

  P=F/(f[[4]] f[[2]]);
  p=Part[Part[Part[P,1]],1];
  P2=(Re[p]+ξ)2+Im[p]2;

  W=W+(AA[[1]]+AA[[2]]*ξ)*P2+(AA[[3]]+AA[[4]]*ξ);]

For[i=1,i≤4,i++,
  If[s[[i]]∈Reals && Coefficient[f[[i]],ξ,0]≠1&&m[[i]]==1,
    W= W+AA[[i]]*F/f[[i]];
  ];

For[i=1,i≤3,i++,
  If[s[[5-i]]∈Reals && Coefficient[f[[i]],ξ,0]≠1 && m[[5-
i]]==2,W= W+AA[[5-i]]*F/f[[5-i]]+AA[[4-i]]*F/f[[5-i]]2
];

ecus= CoefficientList[Collect[Expand[W],ξ],ξ];

```

```

xx1=NSolve[{ecus=={0,0,1,0}},AA];
ss1=
{Extract[A1/.xx1,{1}],Extract[A2/.xx1,{1}],Extract[A3/.xx1,{1}],E
xtract[A4/.xx1,{1}]];

For[i=1,i<=4,i++,
  If[s[[i]]∈Reals,
    l1[[i]]=ss1[[i]]*Es[[i]]*y]]

For[i=1,i<=3,i++,

  If[s[[i]]∉Reals,l1[[i]]=
ss1[[i]]*ERe[s[[i]]*y*Sin[Im[s[[i]]*y]+(ss1[[i+1]]+ss1[[i]]*Re[s[[i]]
])*ERe[s[[i]]*y*Cos[Im[s[[i]]*y]]];

xx2=NSolve[{ecus=={1,0,0,0}},AA];
ss2=
{Extract[A1/.xx2,{1}],Extract[A2/.xx2,{1}],Extract[A3/.xx2,{1}],E
xtract[A4/.xx2,{1}]];

For[i=1,i<=4,i++,
  If[s[[i]]∈Reals,
    l2[[i]]=ss2[[i]]*Es[[i]]*y]]

For[i=1,i<=3,i++,

  If[s[[i]]∉Reals,l2[[i]]=
ss2[[i]]*ERe[s[[i]]*y*Sin[Im[s[[i]]*y]+(ss2[[i+1]]+ss2[[i]]*Re[s[[i]]
])*ERe[s[[i]]*y*Cos[Im[s[[i]]*y]]];

xx3=NSolve[{ecus=={0,1,0,0}},AA];
ss3=
{Extract[A1/.xx3,{1}],Extract[A2/.xx3,{1}],Extract[A3/.xx3,{1}],E
xtract[A4/.xx3,{1}]];

For[i=1,i<=4,i++,
  If[s[[i]]∈Reals,
    l3[[i]]=ss3[[i]]*Es[[i]]*y]]

For[i=1,i<=3,i++,

  If[s[[i]]∉Reals,l3[[i]]=
ss3[[i]]*ERe[s[[i]]*y*Sin[Im[s[[i]]*y]+(ss3[[i+1]]+ss3[[i]]*Re[s[[i]]
])*ERe[s[[i]]*y*Cos[Im[s[[i]]*y]]];

s2={Sqrt[s[[1]]],-Sqrt[s[[1]]],Sqrt[s[[2]]],-
Sqrt[s[[2]]],Sqrt[s[[3]]],-Sqrt[s[[3]]],Sqrt[s[[4]]],-
Sqrt[s[[4]]]};

(*Definicion de partes reales e imaginarias, y factores*)
s1=Im[s2[[1]]];
s3=Im[s2[[3]]];
s5=Im[s2[[5]]];
s7=Im[s2[[7]]];
r1=Re[s2[[1]]];

```

```

r3=Re[s2[[3]]];
r5=Re[s2[[5]]];
r7=Re[s2[[7]]];

For[i=1,i<=8,i++,
  f2[[i]]= λ-s2[[i]];
]

For[i=1,i<=6,i++,
  If[f2[[i+2]]===f2[[i]],
    m2[[i+2]]=m2[[i+2]]+1;
    m2[[i]]=0;]

F2=f2[[1]]m2[[1]]*f2[[2]]m2[[2]]*f2[[3]]m2[[3]]*f2[[4]]m2[[4]]
f2[[5]]m2[[5]]*f2[[6]]m2[[6]]*f2[[7]]m2[[7]]*f2[[8]]m2[[8]];
W2=0;

For[i=1,i<=6,i++,
  If[s2[[i]]∈Reals &&
m2[[i]]==1&&Abs[Re[f2[[i]]]]==Abs[Re[f2[[i+2]]]],

  Q=F2/(f2[[i]] f2[[i+2]]);
  q21=Part[Part[Q,1],1];
  q23=Part[Part[Q,3],1];
  q25=Part[Part[Q,5],1];
  Q21=(Re[q21]+λ)2+Im[q21]2;
  Q23=(Re[q23]+λ)2+Im[q23]2;
  Q25=(Re[q25]+λ)2+Im[q25]2;
  Q2=Q21 Q23 Q25;
  W2= W2+(BB[[i]]+BB[[i+2]]*λ)*Q2;

];]

ecus2= CoefficientList[Collect[Expand[W2],λ],λ];
xx4=NSolve[{ecus2=={0,0,0,1,0,0,0,0}},BB];
ss4=
{Extract[B1/.xx4,{1}],Extract[B2/.xx4,{1}],Extract[B3/.xx4,{1}],E
xtract[B4/.xx4,{1}],Extract[B5/.xx4,{1}],Extract[B6/.xx4,{1}],Ext
ract[B7/.xx4,{1}],Extract[B8/.xx4,{1}]}];

For[i=1,i<=7,i++,

  If[s2[[i]]∈Reals ,l4[[i]]=
ss4[[i]]*ERe[s2[[i]]*y]*Sin[Im[s2[[i]]*y]]+(ss4[[i+1]]+ss4[[i]]*Re[s2[[
i]]])*ERe[s2[[i]]*y]*Cos[Im[s2[[i]]*y]]
];

For[i=1,i<=8,i++,
  If[s2[[i]]∈Reals && Coefficient[f2[[i]],λ,0]≠1,
    l4[[i]]= ss4[[i]]*Es2[[i]]*y];

xx5=NSolve[{ecus2=={0,1,0,0,0,0,0,0}},BB];
ss5=
{Extract[B1/.xx5,{1}],Extract[B2/.xx5,{1}],Extract[B3/.xx5,{1}],E
xtract[B4/.xx5,{1}],Extract[B5/.xx5,{1}],Extract[B6/.xx5,{1}],Ext

```



```

ract[B7/.xx5,{1}],Extract[B8/.xx5,{1}]];

For[i=1,i≤7,i++,

  If[s2[[i]]∈Reals ,l5[[i]]=
ss5[[i]]*ERe[s2[[i]]*y]*Sin[Im[s2[[i]]]*y]+(ss5[[i+1]]+ss5[[i]]*Re[s2[[
i]])*ERe[s2[[i]]*y]*Cos[Im[s2[[i]]]*y]]
];

For[i=1,i≤8,i++,
  If[s2[[i]]∈Reals && Coefficient[f2[[i]],λ,0]≠1,
    l5[[i]]= ss5[[i]]*Es2[[i]]*y]];

(*Generación de transformadas inversas*)

L1=Sum[l1[[i]],{i,Length[l1]}];
L2=Sum[l2[[i]],{i,Length[l2]}];
L3=Sum[l3[[i]],{i,Length[l3]}];
L4=Sum[l4[[i]],{i,Length[l4]}];
L5=Sum[l5[[i]],{i,Length[l5]}];

St= a2*L1+a*b*k4*L2-a*c*k2*L3;
As= -a*d*k*L4+a*e*k3*L5;

If[(St/.y→Infinity)≥ 10300 || (As/.y→Infinity)≥
10300,T11&&T22>>>INES; (*guarda en archive INES los datos de
inestables*)

]

]]

```