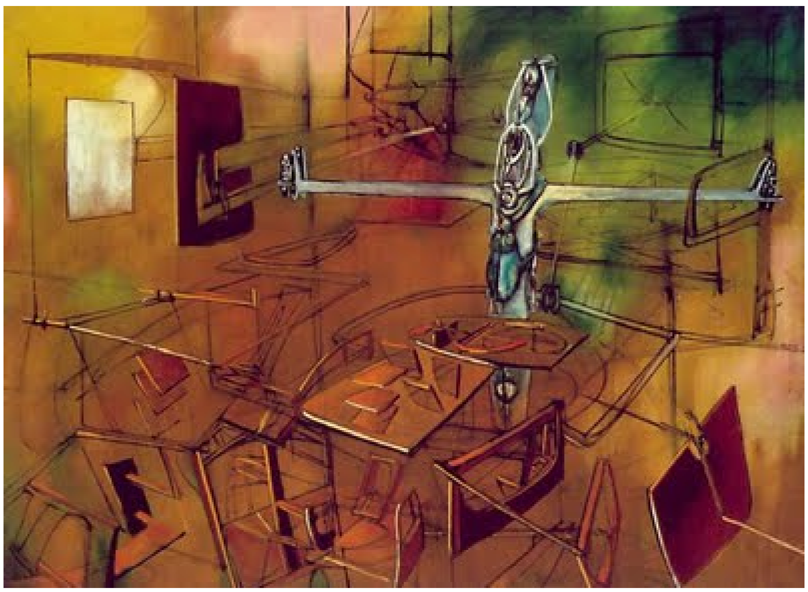
UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
DEPARTAMENTO DE PSICOLOGÍA



Matta, R. (1946). A Grave Situation. Óleo sobre tela. Museo de Arte Contemporáneo, Chicago.

Intuición en Matemáticas: Una mirada Psicoeducativa

Memoria de Título Carrera de Psicología

Estudiante: Daniela Díaz Rojas
Profesor Guía: Jorge Soto Andrade
Profesora Patrocinante: Sonia Pérez Tello

Centro de Investigación Avanzada en Educación

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi familia, en especial a mis padres, mi hermana, mi hermano y mi abuela Inés, por su apoyo incondicional, por ese humor chispeante y veloz, por disfrutar de conversar desde la seriedad más grave y desde la incoherencia eterna cargada de sonrisas cosquillosas, por día a día cimentar fortaleza, por su cariño inmenso y, sobre todo, por compartir el amor por aprender y entregar con convicción.

A mis amigas y amigos, compañeros y compañeras de proyectos y caminos, por nutrirme de experiencias, juegos, curiosidad y aprendizajes diversos, por compartir amor y trabajo.

En especial, agradezco a Felipe Acuña, Consuelo Achurra y Felipe Cares por acompañarme en este proceso con su cariño y creatividad, a través de correcciones, ideas, colores y conversaciones sin tiempo.

A todos los estudiantes con los que he compartido estos años, por su participación y entrega, por el amor que ha cimentado relaciones de mutuo aprendizaje.

A Sonia Pérez, por embarcarse en este proyecto a pesar de todo, por sus palabras precisas y su sonrisa constante.

Y finalmente, agradezco a Jorge Soto Andrade por compartir su humildad y su sabiduría, por enseñarme sobre el vínculo pedagógico con el ejemplo más que con palabras, por amar y confiar en su trabajo, por su inmensa generosidad.

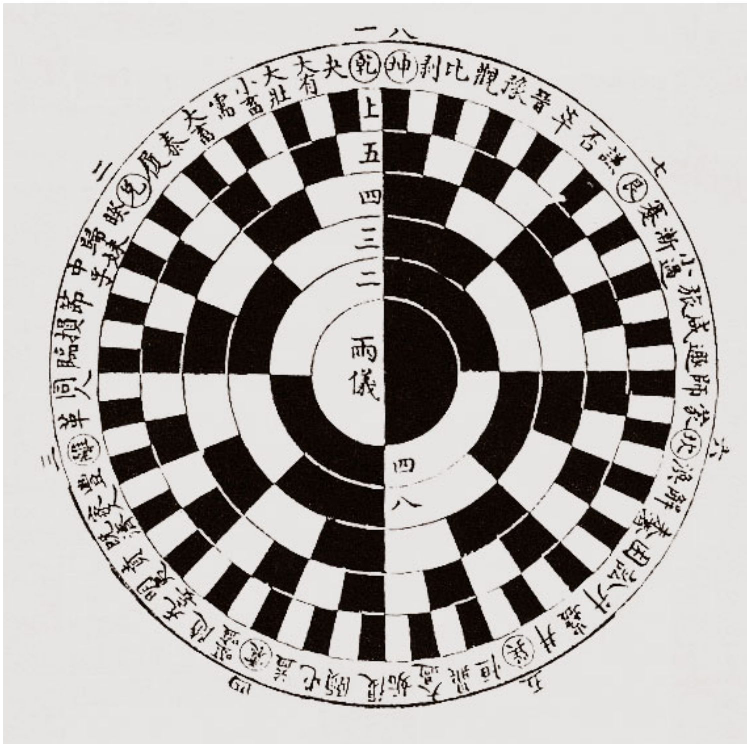
ÍNDICE

CUARTA PARTE:

Los paseos de la intuición y su vínculo con el pensamiento matemático

QUINTA PARTE:

Al final del recorrido: Reflexiones sobre el viaje



Yong, S. (1011-1077) Xiantian (“Antes del cielo”).

0.- RESUMEN

La intuición se ha caracterizado por ser un concepto ambiguo, cuya utilización indiscriminada ha generado una desvalorización teórica que ha invisivilizado su potencial analítico, vinculándola principalmente a la idea de error, ilógico, etc. (Fischbein 1987; Benlloch, 1997; Tirosh & Tsamir, 2012).

A partir de un análisis bibliográfico, la siguiente investigación teórica exploratoria indaga en un concepto que ha recibido un trato paradójico: al mismo tiempo que es silenciando, es reconocido mediante evidencia que es un concepto que juega un rol significativo en el desempeño de los estudiantes de matemáticas, en la medida que el background intuitivo podría influir en las interpretaciones formales y/o procedimientos algorítmicos (Fischbein, 1993 citado en Tirosh & Tsamir, 2012).

En este marco, el siguiente trabajo tiene como objetivo principal analizar la relación entre intuición, el pensamiento matemático y su posible uso pedagógico. Para esto se recogen antecedentes generales desde distintas miradas, historizando el concepto de intuición y

su vínculo con las matemáticas, a través del diálogo entre autores de diversos enfoques teóricos como Psicología Humanista, Teorías Implícitas, Neurociencia, Psicología Educacional en Matemáticas, etc., fundamentalmente a través de los siguientes autores: Jung, 1964 citado en Shallcros, 1998; Pozo & Carretero, 1987 citado en Benlloch, 1997; Fischbein, 1979, 1982, 1987, 1997, 1999; López, 2006; Molina, 2007; Wan, Takano, Asamizuya, Suzuki, Ueno, Cheng et al., 2012; Tirosh & Tsamir, 2012; Dorbolo, 2012.

Luego se contextualiza la intuición específicamente dentro del marco de la Educación en Matemáticas, planteando lineamientos fenomenológicos, es decir, un relato descriptivo breve en relación a su naturaleza y funcionamiento. En este escrito, se plantea la intuición como un tipo de conocimiento asociado a la experiencia y a la historia de aprendizajes de los sujetos, por lo mismo, lícito de deconstruir a partir de nuevas experiencias. Sus características específicas son enumeradas, nombradas y descritas, para establecer un marco de distinción que permita abordar dicha problemática. A esta descripción se agrega una breve propuesta de clasificación de los tipos de intuición observables dentro del aula de matemáticas, basada en los planteamientos de Efraim Fischbein, el cual es reconocido como uno de los principales exponentes y referentes a nivel investigativo y teórico.

Por último, este texto explora y problematiza distintos temas asociados a la intuición en matemáticas, así como también posibles caminos epistemológicos que permitan trabajar pedagógicamente la relación entre intuición y pensamiento matemático. Así, se hace una pausa en la idea de intuiciones erróneas y su posibilidad de descosntruirlas, y en la relación que se puede entrever entre la intuición, la experiencia y procesos cognitivos asociados a analogías y metáforas. Es decir, esta investigación plantea reflexiones que sirven de base para asentar preguntas de posibles futuras investigaciones asociadas al tema, cuyos alcances puedan implicar un aporte para la Educación en Matemáticas de este país.

1.- INTRODUCCIÓN

La Intuición: su ambigüedad y silencio histórico. Un concepto eclipsado, pendiente.

Seguramente hay pocas palabras tan ambiguas como “intuición”. Su utilización indiscriminada ha sido tan engañosa que ha generado rechazo, olvido o negación en algunos casos, tanto desde la práctica cotidiana como desde la investigación. Sin embargo, dicho menosprecio no ha sido capaz de disolver su arraigo al lenguaje común y técnico (Bunge, 1965; Fischbein 1987; Tirosh & Tsamir, 2012).

Diversas discusiones se han planteado desde el quehacer filosófico y científico en torno al significado de la palabra “intuición”. Para los filósofos ha sido, en la mayoría de los casos, una facultad de la mente humana que difiere tanto de la emoción como de la razón, constituyendo un modo de conocimiento autónomo, algo así como una aprehensión súbita, total y exacta. Por el contrario, en su mayoría los científicos se han ocupado principalmente del conocimiento inferido que desde su mediatez, parcialidad e inexactitud es arduamente elaborado y trabajado. Los científicos se han inclinado más hacia la existencia de construcciones más o menos rápidas, hacia inferencias veloces, fragmentarias, que a creer en la aprehensión inmediata de ideas preexistentes o en la evidencia súbita y segura (Bunge, 1965).

Si bien se ha dicho que la intuición podría ser una fuente de crecimiento y desarrollo cuando sus productos son puestos a prueba, dicha palabra se ha utilizado indiscriminada y descuidadamente, incluso por quienes han buscado diferenciarse del Intuicionismo, tendencia regresiva de la filosofía, que proclama dogmáticamente la existencia y la superioridad inclusive, de un modo de conocimiento inescrutable e incontrolable (Bunge, 1965).

Términos como “pensamiento intuitivo” o “modelo intuitivo” con frecuencia son utilizados sin la necesidad de ser explicados o definidos. La intuición ha sido equiparada, entonces, al sentido común y ha abarcado una gran diversidad de fenómenos diferentes, quedando relegada de ser un constructo científicamente validado. Por su parte, la Psicología consta de conceptos como imaginación, inteligencia, sentimiento, que han sido igualmente elaborados por el lenguaje cotidiano, cubriendo una amplia variedad de significados, no obstante, todos ellos han llegado a constituir un status más o menos científico dentro de dicha disciplina. Así, estos términos, han sido parte de muchas investigaciones, teniendo incluso un lugar privilegiado en varias publicaciones (Fischbein, 1982).

Aunque la Psicología históricamente no ha considerado a la intuición dentro de sus constructos principales, dentro de la Educación Matemática existe un debate asociado a ella, centrado principalmente en el rol que juega la intuición en los procesos de enseñanza- aprendizaje desde la perspectiva del “equilibrio apropiado entre la intuición y la lógica” y en menor medida desde la idea de complementariedad entre ambos (Tirosh & Tsamir, 2012). Es decir, mayoritariamente en relación a aspectos cognitivos (y dualistas) y lejos de considerar cuestiones sociales o políticas.

Principalmente, se ha señalado que la intuición en matemáticas opera de manera inconsciente y con una fuerte sensación de certeza, lo que frente a ciertos contenidos matemáticos ha implicado el devenir de conclusiones erróneas y dificultades en el aprendizaje por su alta resistencia al cambio (Fischbein & Schnarch, 1997; Tirosh & Tsamir, 2012).

En este sentido, la intuición en el contexto de las matemáticas se inserta dentro de una problemática aún más amplia. En varios países se han dado diversos debates en torno a la dificultad que presenta el aprendizaje en matemáticas, y Chile no es una excepción. En este país, se ha planteado en más de una oportunidad que los planes y programas del MINEDUC no están siendo aplicados “adecuadamente” en las aulas. Tales afirmaciones se sustentan en los resultados arrojados en evaluaciones estandarizadas, como el test del Sistema Nacional de Medición de Calidad de la Educación (SIMCE), resultados que han sido categorizados de “insuficientes”, por diferentes sectores vinculados a la educación (investigación, docencia, etc.) (Soto-Andrade, Cosmelli, Cubillos, Gálvez, Luci, Flores et al., 2011). Los últimos resultados del test SIMCE, año 2012, indican para el caso de cuarto año básico, por ejemplo, que en la prueba de Educación Matemática no hubo una variación significativa del porcentaje de estudiantes en ninguno de los niveles de aprendizajes respecto de la evaluación anterior, denotando un escaso progreso académico. Asimismo, los resultados de esta prueba indican que el 37,1% de los estudiantes se encuentra en un Nivel de Aprendizaje Insuficiente (el menor de los tres niveles establecidos), es decir, no logran demostrar consistentemente que han adquirido los conocimientos y las habilidades más elementales estipulados en el currículum correspondiente a su período (MINEDUC, 2013).

En base a estos resultados, se ha planteado que el aula de matemáticas ha estado marcada por un entrenamiento tradicional, donde con frecuencia se dejan de lado prácticas reflexivas y situadas, donde los estudiantes terminan aprendiendo y memorizando recetas universales, válidas para todo número, más allá de las formas y de las relaciones específicas que puedan existir entre ellos (Soto-Andrade, Cosmelli et al., 2011). Tal vez es en la Educación Matemática donde mayor cabida se le ha dado a un trabajo mecánico y poco reflexivo, negando la multiplicidad de respuestas, priorizando resultados frente a procesos (Mason, 2003). Sin duda, tanto los resultados de las pruebas estandarizadas como las reflexiones que emergen a partir de ellos, suscitan un gran desafío en esta área.

La siguiente investigación teórica exploratoria trabaja, entonces, con un concepto que ha sido menospreciado e invisibilizado por los discursos científicos y, específicamente, ignorado en los textos generales de Psicología, a pesar de estar presente en la cotidianeidad del lenguaje coloquial (popular) y dentro del lenguaje en esferas científicas.

Pese de ser un concepto silenciado y menospreciado en Psicología, la intuición es un concepto que ha sido indicado como de alta relevancia en el contexto de la Educación Matemática, lo que como se mencionó, es un área de la educación especialmente débil en Chile (Tirosh & Tsamir, 2012).

Es por todo lo anterior, que el objetivo principal de esta investigación es analizar la relación que existe entre la intuición, el pensamiento matemático y su posible uso pedagógico, para lo cual se revisan algunos antecedentes históricos, culturales y teóricos relacionados al concepto de intuición. En este escrito se busca diferenciar las particularidades de la intuición dentro del aula de Matemáticas, es decir, propone características principales y una breve clasificación que ayudan a distinguir el fenómeno de la intuición dentro de dicho contexto.

Es importante señalar que este objetivo principal, que será problematizado con mayor profundidad a continuación, ha sido abordado a través de cinco momentos. El primero, a modo de antecedentes, donde se historiza el concepto. El segundo, donde se mencionan problemáticas de la Educación Matemática, otorgándole un contexto específico a la intuición. El tercero, donde se trabaja la intuición en el marco de las matemáticas, abordando su naturaleza y el rol que juega dentro de ella, sus características y una breve clasificación. Todos los elementos de este tercer momento sirven como referentes para luego analizar y discutir con mayor claridad el vínculo de la intuición con las matemáticas y sus alcances pedagógicos. Luego, en un cuarto momento, se aborda la intuición en matemáticas relacionada con diferentes tópicos: su relación con el error, la posibilidad de deconstruirlas, su vínculo con la experiencia y, por último, los cruces que se pueden hacer con las metáforas y las analogías. Estas temáticas contribuyen a situar la reflexión en torno a implicancias prácticas pedagógicas que devienen dentro del aula. Finalmente, se encuentra un quinto momento que contiene dos partes. En la primera, se plantean algunas conclusiones relacionadas con la pregunta de investigación, el objetivo general y los objetivos específicos y, en la segunda, se lleva a cabo una discusión final que aborda con mayor profundidad la pregunta de investigación y los objetivos, trazando lineamientos que sugieren proyecciones de este estudio.

Finalmente, sin duda al ser la intuición un concepto que habita en lo tácito, en lo inconsciente, plantea una dificultad en su observación y autocontrol, constituyéndose un desafío personal y pedagógico tanto en el terreno de la enseñanza-aprendizaje como en el de la investigación. Por esta razón, este trabajo pretende ser una provocación muy humilde y sencilla, dándole a la intuición el peso analítico que merece, para aportar con diversas preguntas, flujos, incomodidades e inquietudes que puedan promover a que se realicen futuras exploraciones o investigaciones en torno al tema. Esto asociado a la confianza de que dichas indagaciones podrían contribuir a los procesos de enseñanza-aprendizaje en Matemáticas de niños, niñas, adolescentes y adultos en diversos contextos.

2.-PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Son innumerables las problemáticas que focalizan la atención en relación a este tema. Sin ánimo de responder, se podrían plantear, por ejemplo, las siguientes preguntas: ¿qué misterios oculta esta visión empavonada de la Intuición?, ¿qué es la Intuición?, ¿cómo se podría definir?, ¿cómo opera?, ¿para qué sirve?, ¿será más fecundo preguntarse por el “Intuir”?, Si fuera un sentido ¿cuál sería, el olfato, la vista?, ¿es una capacidad innata o aprendida?, ¿es una capacidad?, ¿es una habilidad?, ¿o es un tipo de conocimiento?, ¿es “algo” que se puede desarrollar?, ¿es algo que se puede deconstruir?, ¿qué ocurre en el Sistema Nervioso cuando ésta opera?, ¿qué correlatos fisiológicos se podría observar?, ¿se puede controlar?, ¿cómo se puede distinguir dentro del aula?, ¿de qué manera influye en los procesos de enseñanza-aprendizaje?, ¿es la Intuición en el aula un flujo, una construcción colectiva, individual o ambos?, ¿es lo que sé pero no sé cómo lo sé?, ¿cuáles son las historias de interacciones que se configuran para dar pie a una intuición?, ¿en qué terreno germina la Intuición?, ¿qué está dado y qué se desarrolla?, ¿qué relación tiene la intuición con los procesos creativos?, ¿será que la Intuición como otros territorios cuestiona el ver al estudiante como una vasija vacía donde se acumula lo que el profesor le traspasa, le deposita?, ¿puede ser el intuir una actividad colectiva y colaborativa?, ¿qué tiene que ver la Intuición con las matemáticas?, ¿de qué manera se vincula esto a los estados de consciencia?, ¿de qué manera un profesor puede (podría) facilitar un estado de consciencia que propicie el “Intuir” en un estudiante?, ¿de qué manera el docente puede generar autonomía con respecto a ese estado de consciencia, es decir, lograr junto al estudiante que éste último pueda tener a la mano un estado que le permita estimar un área de solución a un conflicto, que le permita ser más asertivo y tomar mejores decisiones, tanto referente al proceso de resolución de problemas matemáticos como al resultado “final” a que se llega?, ¿cuán preciso se puede ser?, ¿qué tan fino se puede hilar la Intuición en Matemáticas y de qué manera el profesor puede favorecer este tejer intuitivo en los estudiantes?, ¿cómo se relaciona esto con la economía de energía, la optimización, la ergonomía?, ¿qué traducciones o correlatos con el lenguaje corporal tiene la Intuición?, ¿cómo sé que estoy trabajando desde la Intuición y no desde otra forma de cognición o desde otra fuente de conocimiento?, ¿qué distingue a la Intuición del pensamiento lógico formal analítico?, ¿será la Intuición una ráfaga de pensamientos lógicos o ésta se escapa de la lógica?, ¿tendrá que haber una base corporal, emocional, cognitiva para que la Intuición pueda emerger?, ¿Intuición en Educación?, ¿Intuición en Matemáticas?

Las preguntas que se puede plantear son muchas, unas más confusas, otras más precisas, unas pretenciosas y abstractas, otras concretas pero quizás no por eso menos pretenciosas. Ahora bien, de ningún modo este escrito buscará resaltar dicho término como fuente de conocimiento último, irreprochable, irrefutable más válido o legítimo que otros procesos cognitivos, es decir, los objetivos de este texto circundan otros territorios.

Típicamente, la intuición se ha definido en términos de no ser producto de la deliberación consciente (Westcott, 1968 citado en Dorbolo, 2012), es decir, en la literatura se encuentra una preponderancia de definiciones negativas que ciertamente reflejan el hecho de que poco se sabe cómo funciona y cuáles son sus alcances o consecuencias, a pesar de que muchas personas aseguran experimentar o haber experimentado la intuición y sus devenires. Debido a su carácter inconsciente, la intuición durante milenios ha sido asociada a fuentes místicas o irracionales de conocimiento (Dorbolo, 2012).

Sin duda, que como parte de la historia de la Intuición han quedado pendientes varios ribetes, por ejemplo, problematizar su definición, explorar sus implicancias dentro de contextos educativos, o más específicamente, problematizar un camino a recorrer, un verbo a ejecutar y construir como lo es el “Intuir”, pero no en cualquier área sino que específicamente en el subsector de Matemáticas, ya que es aquí donde se han observado cómo diversos conocimientos formales o “verdades” matemáticas entran en contradicción con intuiciones que los estudiantes traen producto de su historia, construidas desde sus experiencias, dificultando y obstaculizando procesos de aprendizaje (Fischbein, 1979, 1987). Incluso, se ha constatado cómo conceptos intuitivos erróneos presentan una gran resistencia al cambio, manteniéndose vigentes a pesar de estar los estudiantes expuestos a una constante instrucción avanzada o especializada (Fischbein & Schnarch, 1997). Así, se ha planteado que uno de los obstáculos principales del pensamiento intuitivo “correcto” es que las intuiciones forjadas desde las experiencias cotidianas tempranas (Intuiciones Primarias) en algunas ocasiones entran en contradicción con las intuiciones correctas construidas desde la instrucción o entrenamiento sistemático (Intuiciones Secundarias), siendo las primeras más probables de ser utilizadas en situaciones no estándar (Fischbein, 1979, 1987). Por esta razón, en este texto se buscará abordar no sólo una posible caracterización del concepto de intuición, sino que también explorar la relación del pensamiento matemático con intuiciones correctas y erróneas, relevando las implicancias pedagógicas que esta tensión pueda alcanzar.

Ahora bien, los estudios en torno a la Intuición han estado principalmente vinculados a su injerencia en el aprendizaje en Ciencias Experimentales, supeditándola a la idea de error y con un claro énfasis en su persistencia y resistencia al cambio. Un ejemplo de esto son las Teorías Implícitas, donde las “ideas intuitivas” se mencionan como sinónimo de “ideas espontáneas”, “misconceptions”, “ideas incorrectas”, entre otras (Benlloch,1997). Si bien estas ideas han sido objeto de diversas investigaciones, el marco desde donde se han realizado queda limitado, por una parte, por lo específico tanto de los contenidos tratados como de las situaciones exploradas, es decir, por los dominios específicos en donde ellas parecen desarrollarse, a la vez que el límite divisorio entre la psicología y la didáctica es difuso, entre el interés por conocer el origen y naturaleza de estas ideas y el uso escolar que de ellas hacen los estudiantes (Benlloch, 1997).

En la medida que la intuición se construye desde las experiencias que el sujeto tiene a lo largo de su vida en diversos contextos, ha quedado pendiente hacer ubicua, en términos de ejemplo simplemente, a la intuición, al intuir como rescate de esa subjetividad, de la historia de aprendizajes del sujeto, dando paso a la advertencia que si una herramienta pedagógica es efectiva, no lo es simplemente por su pureza o asepsia sino que también por la consideración política que plantea, es decir, por la relevación de los aspectos culturales, materiales, históricos de quienes participan en los procesos de enseñanza-aprendizaje. De este modo, al darle un lugar a la intuición dentro del aula se reconoce que el otro no es una vasija vacía, a la vez que se explicita una oportunidad para trabajar y deconstruir dichos contenidos, para que en vez de operar como obstáculos contribuyan al aprendizaje y desarrollo de quienes son agentes de dichos procesos pedagógicos (Freire, 1970).

Muchas veces los estudios llamados sobre didáctica dejan de lado aspectos culturales como queriendo encontrar un método “natural” universal que sirva a todo ser humano. El peligro claro de una postura como ésta, sea explícita o negada por sus investigadores, es promover la ignorancia y la “normalización”.

Desde la experiencia pedagógica entretejida con la formación profesional desde la psicología, se hace evidente que la intuición es un concepto que vale la pena "limpiar", problematizar, poner sobre la mesa, para ver qué elementos posee que puedan ser útiles tanto en el proceso mismo de enseñanza-aprendizaje como en el cómo se está entendiendo la relación humana que lo sostiene.

Este escrito pretende ser una provocación para hacer varios alertas o subrayados respecto a cómo se trata diversos temas conflictivos de nuestras aulas, relevando, extrayendo y reivindicando la intuición ya no desde lo místico sino, como se ha señalado, dándole el peso analítico que merece.

Es decir, al ser este un concepto históricamente enmarcado dentro de una desvalorización teórica por estar vinculado generalmente con lo incorrecto, irreal, ilógico, etc., su potencial analítico ha quedado silenciado e invisibilizado. No obstante, existe evidencia que indica que es clave en el desempeño de un estudiante en matemáticas, en la medida que el background intuitivo manipularía y obstaculizaría las interpretaciones formales o el uso de procedimientos algorítmicos (Fischbein, 1993 citado en Tirosh & Tsamir, 2012). Siendo una excepción, en este maco, los trabajos de Efraim Fischbein, psicólogo y profesor de matemáticas[1], poco estudiado por la Psicología, que problematiza y analiza el concepto de intuición. Así, al ser hoy uno de los objetivos más buscados en educación escolar el poder aumentar el desempeño de los estudiantes en matemáticas, queda clara la *relevancia* de estudiar teóricamente un tema como éste, en la medida que plantea una tensión pedagógica que deviene en problemáticas y desafíos cuyo análisis podría ser un aporte para la educación matemática escolar.

En vista de lo recién expuesto, es que el presente texto se plantea como una memoria teórica exploratoria, interrogándose como elemento clave a investigar ¿cuál es la relación teórica (o epistemológica) entre las intuiciones, el pensamiento matemático y su posible uso pedagógico?

Objetivo general:

Analizar la relación entre intuición, el pensamiento matemático y su posible uso pedagógico.

---

[1] En el anexo n° 4 se encuentran más referencias de Efraim Fischbein, escritas por David Tall (1999), en el contexto de la 23ª Conferencia del Grupo Internacional de Psicología de Educación Matemática

Para resolver este objetivo general y dar respuesta a las preguntas planteadas, se abordarán 4 objetivos específicos:

1.-Historizar el concepto de intuición y su vínculo con las matemáticas.
2.-Analizar el rol de la intuición en el pensamiento matemático.
3.-Caracterizar y clasificar las intuiciones basándose en los planteamientos desarrollados por Efraim Fischbein.
4.-Explorar posibles caminos epistemológicos para trabajar pedagógicamente la relación entre pensamiento matemático e intuición.

3.- PROBLEMATIZACIÓN DESDE LA EXPERIENCIA

Con el objetivo de brindarle un soporte, una raíz material a esta investigación teórica exploratoria, a continuación se relata brevemente el origen de las reflexiones que conforman la trama de este escrito.

Desde la formación como psicóloga y “autoformación” de profesora en espacios antipedagógicos vinculados con la Educación Popular y espacios académicos formales asociados a las matemáticas, entre otros, nacen con naturalidad las preguntas relacionadas con la autonomía, la colaboración, el inconsciente, la disciplina, las emociones, el juego, las metáforas, el cuerpo, etc.

Específicamente en el área de matemáticas, en la calidad de profesora ayudante, tanto en el trabajo con estudiantes universitarios de formación humanista como de formación científica, se construye y se consolida un entramado de experiencias y de experimentación vinculadas a la pedagogía en dicha área. En estos contextos, con frecuencia se podía ver cómo en ocasiones estudiantes llegaban rápidamente al resultado de un problema matemático a partir de ciertas preguntas o estímulos. Cuando se entrevistaba al estudiante por su experiencia, cómo sabía, de dónde sacaba esa respuesta, no siempre tenía claridad de esto, es decir, no tenía consciencia de su propio proceso cognitivo, sentía una certeza extraña que no podía explicar bien ni los por qué, ni los qué, ni los cómo.

El año 2008 es publicado un paper que toca temas asociados a cálculos inconscientes (Sistema Numérico Aproximado) (Halberda, Mazzocco & Feigenson, 2008) y desde ese territorio emergen preguntas asociadas, entre otras cosas, a los procesos de aprendizajes y al rendimiento escolar, las cuales empiezan a cimentar las bases de lo que sería más tarde esta investigación. Dentro de la cátedra de Matemáticas del Programa de Bachillerato de la Universidad de Chile, la autora de este texto junto al profesor con quien trabaja, quien además es el profesor guía de esta memoria, exploran dicho concepto (ANS) a través del test que propone la investigación publicada y también bajo dispositivos didácticos que facilitaban este tipo de experiencias vinculadas al inconsciente.

Las actividades que se fueron realizando, relacionadas a la exploración intuitiva, fueron muchas y diversas, entretanto se iba observando distintos fenómenos como, por ejemplo, que frente a ciertos contenidos aparecían intuiciones erróneas en los casos en que no había una experiencia previa asociada a dicha temática, develando la importancia de facilitar experiencias especialmente enactivas en algunos casos.

Con el paso del tiempo, varias preguntas emergieron a partir del quehacer pedagógico, y dentro de las ayudantías y cátedras de los diferentes cursos de matemáticas, ese espacio de experimentación y juego fue sistematizándose, construyendo una metodología de clase[2] que buscaba explorar lo que los estudiantes traían, poder legitimar su historia de aprendizajes y su subjetividad, escucharlos, a la vez que abrir un espacio de deconstrucción de contenidos matemáticos, relevando la participación, el diálogo, la experimentación, el juego, las emociones, el cuerpo, la colaboración y construcción colectiva, entre otros. Asimismo, era evidente cómo, tal cual la neblina se entremezcla en el ambiente, la palabra intuición estaba bastante a la mano en el lenguaje cotidiano de estudiantes, profesores, investigadores, etc.

Es decir, si bien este escrito es una investigación teórica exploratoria, que representa un conjunto de inquietudes e ideas analíticas, abstractas, es también fruto de la observación y cocreación de experiencias pedagógicas en matemáticas dentro del aula.

Quizás, siguiendo la línea que se encuentra en el prefacio del libro de Aebli (1973): “Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget”, donde Piaget hace alusión a la

[2] En el anexo n°1 se describe brevemente una propuesta de clase.

formación del autor del libro (pedagogo y experiencia en investigación en psicología), este pequeño apartado es una imagen especular de dicho prefacio que busca transparentar el origen y devenir de las bases de este texto, la experiencia constante de entrar y salir, de mirar y mirarse, de observar dentro y fuera del aula, desde lo psicológico, pero también desde lo pedagógico, esperando construir una coherencia que pueda devenir en un aporte a las reflexiones actuales en torno a la educación en matemáticas.

4.- ASPECTOS METODOLÓGICOS

Para desarrollar los objetivos expuestos, se optó metodológicamente por un análisis bibliográfico en torno a tres ejes: la definición de la intuición; la relación de la intuición con el pensamiento matemático y la relación entre intuición matemática y contexto educativo. Se describen a continuación las acciones realizadas en la construcción de este análisis.

1.-Se seleccionó alrededor de 122 textos (artículos, papers, capítulos de libros, libros completos, etc.) de diversas disciplinas (filosofía-epistemología, matemáticas, educación, psicología transpersonal, psicología cognitiva, neurociencias, etc.), para revisar distintas miradas. Este conjunto de escritos comprendía tres líneas principales: (1) textos que abordaran el tema de la intuición (filosofía, psicología, educación matemática), (2) textos de educación matemática (donde se plantearan problemáticas relacionadas al aprendizaje, didáctica y específicamente a procesos inconscientes vinculados o no a la intuición) y, finalmente, (3) textos sobre Educación (que trazaran problemáticas epistemológicas, políticas desde una mirada crítica). Estos textos fueron clasificados y ordenados, por temática y por autor. Luego, se analizaron comparativamente sus referencias bibliográficas, lo que permitió dilucidar los autores principales que constituían un referente en la temática de esta investigación.

2.-Se ordenó cronológicamente la obra o publicaciones de Efraim Fischbein, al ser reconocido éste como uno de los principales exponentes relacionados con la temática de la Intuición en Matemáticas (Tirosh & Tsamir, 2012).

3.-Después fueron seleccionados los textos más vinculados con la Educación Escolar y con la Psicología, descartando aquellos que profundizaban en contenidos matemáticos más especializados o avanzados, es decir, que se escapaban de los temas de matemáticas propios de la escuela.

4.- Luego se llevó a cabo un procedimiento de lectura el cuál consistió en lo siguiente:
a) Bola de Nieve: Se comenzó con un texto[3], se hizo una lista con sus referencias bibliográficas y desde ahí se siguió con la lectura y análisis de otros textos. Ese procedimiento de recopilar bibliografías, se continuó sistemáticamente como “bola de nieve”, lo que permitió ampliar progresivamente la base de textos y construir un mapeo general de los principales autores.
b) Fichas: Se hicieron fichas de lectura por cada texto. Cada una contenía: nombre corto del texto, referencia según normas APA, fuente, año, resumen (supuestos, preguntas, ideas principales, etc.) y un apartado final con citas relevantes, comentarios y observaciones.
c) Narrativa de textos y experiencia: Se hizo un Diario de Campo de Lectura que llegó a tener 95 páginas. Éste consistía en anotaciones diarias de las lecturas y sus análisis. Este archivo evoca citas relevantes, traducciones y comentarios relacionados con observaciones, ideas y experiencias, tanto desde la mirada psicológica como desde la experiencia en docencia en matemáticas.

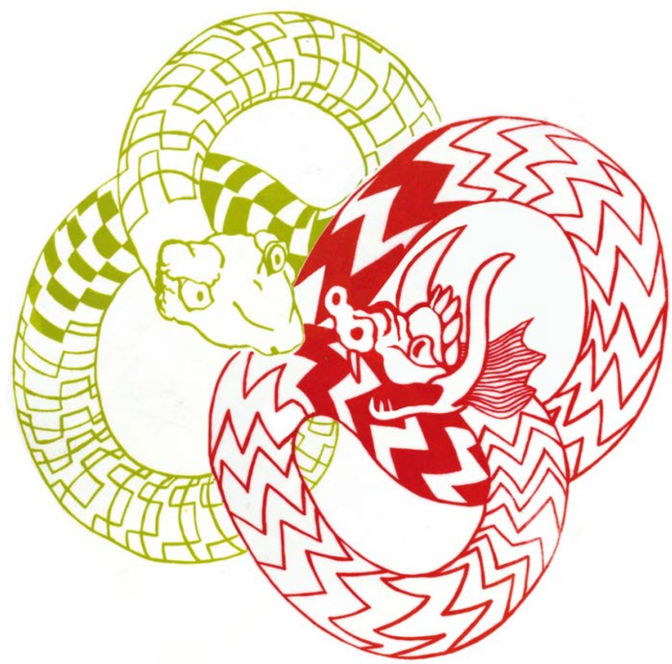
5.- La lectura se continuó hasta que se alcanzó un punto de saturación del contenido. Esto, en la práctica, se evidenció cuando los textos no aportaban nuevas distinciones o ideas significativas, sino que empezaban a redundar en lo que ya habían planteado en otros textos anteriores de los mismos u otros autores.

6.- Luego, se levantaron categorías, en función de los tres ejes anteriormente expuestos, codificando y agrupando párrafos (de citas y comentarios), concentrándose en función de lo que se estaba clasificando. Esto dio como resultado una estructura, que es el producto de esta investigación. Las categorías eran: Introducción, Antecedentes de la intuición, Contexto: Educación Matemática, Definición, Funcionamiento en relación con el pensamiento matemático, Características, Clasificaciones, Intuición y Error, Intuición y Experiencia, Intuición y Metáforas, Intuición y Analogías, Discusiones Finales.

---

[3] Fischbein, E. (1979). Intuition and Mathematical Education. En R. Lesh & W. Secada (Eds.), *Some Theoretical Issues in Mathematics Educations: Papers from a Research Presession* (pp.33-54). Columbus: ERIC (Education Resources Information Center).

7.-Finalmente, fueron analizadas esas categorías y sus contenidos, sistematizándolos en un escrito que permitiera, por una parte, incluir una discusión final que develara las principales tensiones asociadas a la pregunta de investigación, dando respuesta a los objetivos planteados. Ello permitió además la construcción de anexos que complementaran el trabajo realizado. Para esto, en este último apartado, fueron incluidos antecedentes biográficos de Efraim Fischbein que aportaran con darle contexto a la discusión, así también se agregaron apoyos visuales y discursivos relacionados con ejemplos y discusiones tratados en el escrito y, por último, se incorpora una serie de sistematizaciones en torno a experiencias prácticas dentro del aula de matemáticas, asociadas tanto a resquicios didácticos como de contenido, como otra forma de abordar y situar la problemática de la intuición en matemáticas.



Silva, C. (1985). Trentren y Caicai. Serigrafía.

PRIMERA PARTE: Antecedentes

5.- LA HISTORIA DE UN CONCEPTO SILENCIADO

Si bien la intuición ha tenido diversos devenires, no se puede negar su peso histórico, es decir, más allá de las tenciones relacionadas a su verosimilitud, ésta ha sido pensada a lo largo de la historia en diversos momentos y a lo largo del espacio en diversas culturas.

Por ejemplo, para los Griegos y los Romanos clásicos tanto el razonamiento lógico analítico como el conocimiento intuitivo tenían un lugar válido. La intuición incluso tenía la posibilidad de reemplazar conclusiones racionales, puesto que ocupaba un lugar especial en el ámbito del conocimiento (Shallcross & Sisk, 1989 citado en Shallcross, 1998).

Asimismo, algunos autores han propuesto (como Noddings & Shore (1984)) que el Idealismo, escuela filosófica derivada de las ideas de Platón que otorga primacía al razonamiento mental dentro de lo cognoscible, se basaría en la noción de la intuición como una fuente fidedigna de conocimiento (Shallcross, 1998).

Por otra parte, desde la propuesta aristotélica de que el pensamiento estaría conformado por imágenes capaces de evocar emociones que revelan la sabiduría interior, se pensó que el razonamiento intuitivo era aquél capaz de atrapar los primeros principios del pensamiento. De este modo también, se planteó la intuición como un salto en la capacidad de comprensión, como la posibilidad de atrapar un concepto mayor inalcanzable por medio de otros procesos intelectuales. Es decir, dicha visión estaba basada en la intuición como un proceso fundamentalmente intelectual (Shallcross, 1998).

Así, la filosofía ha protagonizado diversos debates en torno al tema de la intuición desde perspectivas materiales, intelectuales, espirituales y místicas, largo camino que no será detallado en este escrito.[4]

Hessen escribió (2003): “Admitir o rechazar la existencia de un conocimiento intuitivo al lado del conocimiento discursivo-racional, es un proceso que surge, primordialmente, de

---

[4] Para tener una visión general de dicho recorrido revisar Hessen, J. (2003). *Teoría del Conocimiento*. Santiago: Editorial Centro Gráfico Limitada.

la idea que se defienda en cuanto a la esencia del hombre. Quien piense que el hombre es un ser teórico exclusiva y o principalmente, cuya función primordial es el pensamiento, únicamente admitirá el conocimiento racional. Por el contrario, quien considere que la parte más importante del ser humano es un aspecto emotivo y volitivo, anticipadamente estará dispuesto a reconocer que, al lado del método discursivo-racional, existen otras formas de aprender los objetos. Estará convencido de que un conjunto de funciones cognoscitivas corresponde a la multitud de aspectos que aparecen en la realidad (…) Dentro de la actividad *teórica*, la intuición no puede ser considerada como un medio autónomo de conocimiento cuyos derechos sean los mismos del conocimiento racional-discursivo. En este campo, la razón dice siempre la última palabra. Toda intuición debe ser legitimada por el tribunal de la razón (…) Pero otra cosa sucede en la actividad práctica. La intuición, en ella, es un principio autónomo de conocimiento. Como seres que sentimos y queremos, la intuición es para nosotros un medio cierto de conocimiento" (pp. 99-100).

Así también, en otras culturas y religiones se encuentran antecedentes sobre este concepto. En el budismo, por ejemplo, se distingue el razonamiento de la intuición en que ésta última sería fuente de verdad y sabiduría total. "En la filosofía oriental, la intuición es considerada una facultad de la mente que se desarrolla durante el curso del crecimiento espiritual" (Shallcross, 1998, p.17). Por otro lado, para los hindúes mediante la meditación y el control disciplinado de la mente se alcanzaría una sabiduría intuitiva, relacionada con el despliegue de temas "cósmicos universales" y no con problemas concretos. De este modo, la "experiencia intuitiva" estaría muy vinculada a la espiritualidad y la estética. Así, uno de los objetivos del yoga, como práctica, sería el desarrollo sistemático de la intuición. "La intuición se considera una función estable y fiable de los niveles más altos de la conciencia a partir de la cual queda accesible una amplia gama de información" (Shallcross, 1998, p.18).

De esta manera, la intuición ha sido vinculada a una sabiduría universal, relacionada con antepasados, con una fuente de conocimiento *interior* más allá del aprendizaje, la experiencia o de fenómenos externos, una sabiduría relacionada con la vivencia de certeza, algo que se sabe simplemente porque se "recuerda" una información primigenia. Por otra parte, desde la hegemonía de la razón y del modelo científico, de la mano de la psicología del comportamiento (Behaviorist), en Occidente se ignoró y se declaró irrelevante por un largo período el campo de la mente y el espíritu.

Se ha dicho, por ejemplo, que en los años sesenta se contaba con sólo dos estudios psicológicos que utilizaban el término “intuición” (Stein, 1975 citado en Shallcross, 1998).

Por otra parte, Jung (1964 citado en Shallcross, 1998), uno de los psicólogos influyentes de la modernidad, le dio un espacio a la intuición dentro de la función intelectual. El autor declara que la información se recibiría de dos maneras:

1) Externamente, a través de los cinco sentidos.
2) Internamente, a través de la intuición.

Según este autor, el comportamiento humano estaría basado en cuatro criterios: percepción, intuición, pensamiento y sentimiento. La percepción y la intuición estarían relacionadas con maneras en las que se recoge la información, es decir, serían funciones de la percepción, mientras que el pensamiento y el sentimiento se relacionarían con el procesamiento de la información. De este modo, estos cuatro tipos de funciones corresponderían a los medios habituales con los que la consciencia obtendría su orientación para la experiencia (Shallcross, 1998).

Jung (1971 citado en Shallcross, 1998) declaró: “Bajo la sensación incluyo todas las percepciones a través de los órganos de los sentidos; con el pensamiento quiero decir la unión de la cognición intelectual y la formación de conclusiones lógicas; el sentimiento es una forma de evaluación subjetiva; la intuición la tomo como percepción a través del inconsciente, o percepción de contenidos inconscientes". Es decir, la sensación diría que algo existe; el pensamiento, expresaría lo que es; el sentimiento diría si se está de acuerdo o no; la intuición señalaría de dónde viene y a dónde va (Shallcross, 1998).

Así, específicamente en torno a la intuición, el autor señala que ésta no sería producto de una acción voluntaria sino de un acontecimiento involuntario, “presentimiento”, el cual dependería de circunstancias tanto externas como internas, pero en ningún caso de una acción de juicio (Shallcross, 1998).

Asimismo, entre las décadas del 60, 70 y 80 hubo un auge en torno a temáticas de intuición y creatividad, donde se podían observar diversas maneras de definir la intuición. Por ejemplo, Clark (1979 citado en Shallcross, 1998), destacada por su trabajo con niños superdotados en EEUU, desarrolló una propuesta entorno a dominios del funcionamiento humanos (Cognitivo, Afectivo, Social e Intuitivo). En el Desarrollo Intuitivo ubicó las acciones de iniciación o de conocimiento interior y la actividad creativa. Según Clark (1979 citado en Shallcross, 1998), mientras que el dominio intuitivo sería el área menos definida del funcionamiento humano, podría ser el área con más promesa en relación a la continuidad y satisfacción humana. Todas las otras áreas estarían apoyadas por ésta. Así, a medida que cada una se desarrolla hacia niveles más altos, las funciones intuitivas y creativas se harían más disponibles (Shallcross, 1998).

Por otra parte, Ornstein (1976 citado en Shallcross, 1998), conocido por su trabajo en investigación cerebral sostuvo que la intuición debería ser comprendida como un *conocimiento sin recurso a interferencia*. Es decir, se podría entender como una comprensión inmediata no lineal, la cual actuaría como complemento de la secuencia deductiva, mediada y ordenada del pensamiento “racional”.

Así también, por esos años, Ferguson (1980 citado en Shallcross, 1998), investigadora que se ha especializado en hemisferios cerebrales, denominó a la intuición “el saber al que no se le puede seguir la pista”. “Ferguson dice que a nivel del sentido común intentamos calcar las ideas de un punto a otro, como tender cables o un hilo de pensamiento. A lleva a B y B lleva a C. Pero, los procesos no lineales en la naturaleza, como la cristalización y ciertos acontecimientos cerebrales, abarcan de la A a la Z simultáneamente. El cerebro no está limitado a nuestros conceptos del sentido común, ya que en ese caso no funcionaría (…) si esta percepción instantánea es ignorada por la mente lineal, no nos debería sorprender” (Shallcross, 1998, p.21). Así, Ferguson señala que existe una clara tendencia a pensar la intuición separada del intelecto, cuando en realidad la intuición conlleva la intelectualización. Todo lo que se ha intuido también se archivaría y se encontraría disponible. Shallcross (1998) señaló en torno a las investigaciones de Ferguson (1980): “El reino de la intuición es el más amplio, sabe todo lo que sabemos y mucho más. "La Sabiduría Tácita" (el saber silencioso, señales interiores), siempre ha tenido sus defensores, incluyendo a muchos de nuestros grandes y creativos científicos y artistas. Este saber ha sido el compañero esencial y silencioso de todo nuestro progreso. La parte izquierda del cerebro puede organizar nueva información dentro del esquema existente de las cosas, pero no puede generar nuevas ideas. La parte derecha percibe el contexto y, por lo tanto, el significado. Sin la intuición, estaríamos en la oscuridad. Cada acción rompedora, cada salto hacia adelante en la historia, ha dependido de los hallazgos de la parte derecha del cerebro, la habilidad del cerebro holístico para detectar anomalías, la novedad en los procesos y la percepción de nuevas relaciones" (p.22).

Asimismo, en otras disciplinas la intuición ha sido definida de diversas maneras. En algunos casos como una "sabiduría" interior a "despertar". Incluso se han descrito pasos para que esto ocurra, tales como la intención, el tiempo, el silencio, la honestidad, sensibilidad, etc., apelando a actitudes cotidianas, disposiciones psicológicas, más allá de habilidades determinadas, conocimientos específicos y/o acciones concretas (Vaughan, 1979). Por ejemplo, según Vaughan, (1979) "La intuición ya se halla en tu interior, pero para lograr que despierte debes valorarla y desear desarrollarla" (p.1).

Otros autores han propuesto que la dificultad implicada a la hora de abordar el tema de la intuición radica en que los seres humanos como especie dependen principalmente de las palabras para la comunicación, aunque se piense antes en imágenes. "Gran parte de nuestro conocimiento interior nos llega inicialmente en imágenes. Uno de los motivos por el que los artistas y músicos, por ejemplo, a menudo se sienten cómodos permitiendo que surja su intuición es debido a que ellos se expresan (se comunican con otros) a través de imágenes, no palabras. Para aquellas personas que se expresan principalmente con palabras, el proceso de ir de un estado de imagen a un estado de palabra es a menudo tedioso debido a que posiblemente la imagen inicial no es entendida o creíble" (Shallcross, 1998, p.16).

Por otro lado, hay autores que han definido la intuición a partir del contraste con lo que no es. Por ejemplo, Goldberg (1994, 1983 citado en Shallcross, 1998) señala que la intuición es aquello que no es mediado por la consciencia ni por el proceso racional deliberado. Además, agrega que el sentido básico de la palabra intuición sugiere espontaneidad e inmediación.

Asimismo, otras investigaciones han puesto el énfasis en la intuición como una capacidad superior en la resolución de problemas, asociada a un procesamiento rápido de la información. Estas investigaciones tienen el supuesto que la intuición se desarrolla luego de una formación o entrenamiento extenso a largo plazo, supeditados a correlatos neuronales poco explorados por la ciencia (Wan, Takano, Asamizuya, Suzuki, Ueno, Cheng et al., 2012).

Así también, se han construido diversas clasificaciones sobre la intuición, con el objeto de distinguir tipos de intuición. Algunos ejemplos son "Niveles de Conocimiento Intuitivo" de Frances Vaughan y "Tipos Funcionales de la Intuición" de Phillip Goldberg (Shallcross, 1998).

De este modo, el recorrido en torno a la intuición ha sido basto en discusiones, clasificaciones y definiciones. Así intuición, concepto derivado de la palabra latina intueri, que podría traducirse como “mirar dentro” o “contemplar”, no sólo ha sido parte de una controversia en ciencia y filosofía por ser aceptada o no como conocimiento verdadero, sino que también diversos significados y roles se le han atribuido (como concepto y como método) además en otros ámbitos, entre ellos la psicología, los estudios religiosos, en consideraciones místicas, en la ética, la estética, las matemáticas y la educación. “La intuición se ha considerado como la forma más alta del conocimiento, a través del cual la esencia misma de las cosas se revela (por ejemplo, Descartes, 1967, Espinoza, 1967), como un medio particular de comprender la verdad (por ejemplo, Bergson 1954), como la fuente de genuina, innovación creativa (por ejemplo, Hadamard, 1945, Poincaré, 1958), como un primer paso necesario para la educación superior (por ejemplo, Bruner, 1965). Sin embargo, también se ha considerado como una fuente de ideas falsas que deben ser eliminados (Hahn, 1956)” (Tirosh & Tsamir, 2012, p.1).

Tal como se mencionó anteriormente, como parte del background que hay de investigaciones asociadas a la intuición, se encuentran aquellas vinculadas a las Teorías Implícitas. Como se dijo, desde esta perspectiva, en su mayoría, las “ideas intuitivas” son entendidas como sinónimos de conceptos tales como “misconceptions”, “ideas espontáneas”, “ideas incorrectas”, entre otras, donde el énfasis ha estado puesto en su calidad de error y en la curiosidad por su persistencia y resistencia al cambio. Uno de los espacios donde mayor acopio de trabajos investigativos se ha realizado es en el de la

Ciencias Experimentales (Benlloch, 1997). Ahora bien, el marco desde donde estas ideas intuitivas-implícitas son estudiadas, por una parte, se encuentra limitado por los dominios específicos en donde ellas parecen desarrollarse y, por otro lado, presenta una delimitación difusa entre la psicología y la didáctica, es decir, entre el interés que manifiesta por conocer el origen y naturaleza de estas ideas y el uso escolar que de ellas hacen los estudiantes (Benlloch, 1997).

Así por ejemplo, una manera de abordar esta problemática ha sido a partir de la Teoría del Cambio Conceptual de Chi[5] (1992 citado en Benlloch, 1997), quien ha sugerido que dentro de la ciencia se encuentran tipos de nociones, en especial aquellas provenientes de procesos (electricidad, calor, velocidad, etc.) que implicarán una mayor dificultad en su aprendizaje que otras referentes a entidades materiales (sólidos, vivo/no vivo, etc.). Según esta teoría, si los conceptos implicados en los procesos contienen determinados rasgos definitorios que no coinciden con los científicos, entonces toda su estructura asociada de conceptos generales y subconceptos quedaría sometida a principios explicativos que serían falsos para la ciencia, más allá de que puedan ser perfectamente coherentes para los sujetos que las utilizan. Este modelo explicativo construido por Chi, se constituye como un modelo predictivo del cambio conceptual, donde además de diferenciar los cambios conceptuales fuertes de aquellos que son débiles, se predice qué conceptos van a resultar más difíciles de aprender y cambiar. En definitiva, Chi defiende una hipótesis de incompatibilidad ontológica, donde las ideas intuitivas serían nociones que tendrían a la base una utilización errónea, en términos ontológicos, de los conceptos asociados a un determinado aprendizaje. La autora señala que para abordar este tipo de errores se necesita de un proceso lento y prolongado de muchas horas de instrucción. Es decir, desde esta perspectiva, se contrapone la intuición y la experiencia cotidiana al quehacer científico, entendiendo a las primeras como un obstáculo para el aprendizaje que genera conceptos contradictorios a conceptualizaciones científicas (Benlloch, 1997).

Asimismo, dentro del marco de las Teorías Implícitas, "cierto consenso entre investigadores de uno y otro campo, (Driver, Guesne y Tiberghien, 1985; Pozo, 1987-

[5] Michelene Chi, Ph.D. 1975, Carnegie-Mellon University. Profesora del Departamento de Psicología (Cognición, Acción y Percepción), College of Liberal Arts and Sciences Education. Profesora en la División de Liderazgo e Innovación Educativa Mary Lou Fulton Teachers College, Arizona State University. Más referencias en: https://webapp4.asu.edu/directory/person/1274385?pa=true

1991; Clement, 1982; Clement et al., 1989; Hashweh, 1986; Gilbert y Watts, 1983; Engel y Driver; 1986; Chi, 1992) lleva a admitir que aquellas ideas intuitivas poseen algunas características tales como las descritas en Pozo y Carretero (1987)" (Benlloch, 1997, p.71). Dicha categorización puede verse en la Tabla 1 (Pozo & Carretero 1987 citado en Benlloch, 1997, p.72). Características que sólo en algunos puntos se tocan con las propuestas en este escrito, contraste que será abordado más adelante.

Tabla 1

Características comunes de las ideas intuitivas según Pozo y Carretero (1987)
Espontáneas y personales, puesto que surgen de un modo natural en la mente del alumno como una elaboración propia del sujeto, sin necesidad de instrucción previa.
A menudo implícitas y por lo tanto inconscientes para el propio sujeto.
Persistentes a lo largo de las edades y resistentes al cambio mediante instrucción.
Ubicuas, presentes en todas las áreas, no sólo en las ciencias.
Científicamente incorrectas, ya que su grado de abstracción es limitado y están muy influidas por lo observable.
Incoherentes o contradictorias entre sí. Así situaciones o tareas que requieren un mismo tipo de ideas son resueltas empleando diferentes conceptos.

Asimismo, la intuición, con la diversidad y contradicciones que se le han atribuido, también se relaciona con una amplia variedad de investigaciones cognitivas: "resolución de problemas (iluminación, heurística, esquemas anticipatorios, etc.), imágenes y modelos (representaciones intuitivas, modelos intuitivos, significados didácticos intuitivos, pensamiento en imágenes, etc.), creencias y niveles de confianza, estudios de desarrollo de la inteligencia" (López, 2006, p. 29).

López (2006) señaló: “Según Fischbein para cada uno de sus significados existen otros términos, más específicos, como sentido común, entendimiento, comprensión, creencia, conjetura, insight, pero en los libros de texto de psicología no se incluye la intuición entre los conceptos básicos que trata. A pesar de esto, el término intuición aparece frecuentemente, aún en descripciones psicológicas, pero sin conferirle un estatus formal o científico. La intuición se usa más como sentido común o como noción primitiva” (p.29). Según López (2006), para Fischbein si bien la intuición no sería una fuente de conocimiento necesariamente verdadero, sí aparentaría serlo porque ese sería su rol exacto, crear esa apariencia de certeza, uniendo el atributo de certeza intrínseca incuestionable con diversas interpretaciones o representaciones.

“Though the concept of intuition has various meanings and has been defined in various forms, there is a common feature which is always mentioned: intuition is immediate knowledge” (Fischbein, 1979, p.33).

Así, en la Educación Matemática, los debates sobre el rol que juega la intuición en los procesos de enseñanza-aprendizaje están a menudo incrustados en interminables discusiones en torno al “equilibrio apropiado entre la intuición y la lógica”. Al parecer muy de la mano de aspectos cognitivos y lejos de considerar cuestiones sociales o políticas. “Throughout history, prominent voices have regarded intuition and rigor as being at odds, while others have argued that these two dimensions play complementary roles in mathematics education (e.g., Klein, 1953; Hahn, 1956; Begle, 1969; Freudenthal, 1973; Thom, 1973; Wittman, 1981; Howson, 1984; Otte, 1993; Bass 2005)” (Tirosh & Tsamir, 2012, p.1).

Fischbein, dedicó gran parte de su trabajo teórico e investigativo al vínculo entre la intuición y las matemáticas en el ámbito de la pedagogía, tratando de descifrar sus dimensiones, de aclarar el concepto, de discriminar sus características y relaciones, de distinguirlo del sentido común. Según Fischbein (1982), el sentimiento de evidencia intuitiva, ya sea de comprensión intuitiva, claridad intuitiva, aceptabilidad intuitiva etc., parece ser tan primitivo, tan básico, tan claro al sentido común que cualquier necesidad de investigar lo que significa la claridad intuitiva parece estar bloqueado de antemano. Asimismo, ha existido una tendencia hacia igualar las interpretaciones o representaciones intuitivas con las interpretaciones o representaciones de sentido común. “The commonsense interpretation of intuition is that intuition is commonsense (…) Instead of saying "Intuitively, space appears as three-dimensional," you may equally well say the commonsense representation of space is three dimensional" (Fischbein, 1982, p.9).

Según Fischbein (1982), es probable que al ser en parte correcta tal equiparación entre sentido común e intuición, se hayan bloqueado los intereses de los psicólogos por investigar el fenómeno de la intuición. Así, con frecuencia se utilizan términos como "pensamiento intuitivo", "explicaciones intuitivas", "modelo intuitivo", etc., sin la necesidad de definir o explicar la aplicación de dichos términos. Con respecto a este punto, el autor ha señalado que frente a la pregunta de por qué la investigación psicológica ha "descuidado" el esclarecimiento de la intuición, se ha respondido que dicho término abarca una gran diversidad de fenómenos diferentes, siendo de hecho una noción de sentido común, por lo que al intentar utilizarlo como un concepto científico podría devenir en oscurecer aún más la problemática a investigar. Fischbein, a estos argumentos les respondió diciendo que dichas afirmaciones son defectuosas en la medida que términos como imaginación, inteligencia, carácter, sentimiento, han sido igualmente elaborados por el lenguaje cotidiano, cubriendo cada uno una amplia variedad de significados y, sin embargo, todos ellos han llegado a constituir un status más o menos científico dentro de la psicología. Así, dichos términos se han transformado, dice él, en objeto de muchas investigaciones, teniendo incluso un lugar privilegiado en varios textos y publicaciones. Fischbein (1982) agrega: "In fact, intuition has not yet found its defined place in psychology, not because it is an obscure term, but, on the contrary, because it is implicitly considered to be a primitive, self-evident term" (p. 9).

Así, como si no existiera la necesidad de cuestionarse este tipo de términos por la vivencia que trae consigo, es que la intuición, como sentido de aceptación intuitiva, algunas veces aparece como algo tan primigeniamente obvio al sentido común que no se experimenta o no se siente la necesidad de analizar interpretar o investigar dicho término. Por ejemplo, cuando intuitivamente se piensa que el camino más corto entre dos puntos es la línea recta, parece una declaración absolutamente clara, "intuitivamente clara", como sin la necesidad de explicación.

"We do not feel any need to explain what we mean by terms like "red", "between", "I feel", "I am sorry", "I see", "straight line", etc. They have, for us, a full intuitive meaning. It seems to be the same with a term like "intuitive understanding", even for most psychologists" (Fischbein, 1982, p.9).

Es así como, cada esfuerzo por mejorar la estructura de una rama de las matemáticas o de la ciencia se ha relacionado con los esfuerzos por mejorar su estructura formal, racional, axiomática. El científico centra su trabajo en definir, describir, explicar las características generales y regularidades con la mayor objetividad posible, intentando excluir de sus descripciones, interpretaciones y predicciones, cualquiera de sus contribuciones subjetivas no analizables (Fischbein, 1982). Constituyéndose así una tensión constante de esta epistemología positivista, explícita o tácita, y la subjetividad de sus actores. Así, cada una de sus interpretaciones científicas básicas estarán acompañadas naturalmente de la comparación de dichas interpretaciones de sentido común con los demás hallazgos científicos. Entonces, cada descubrimiento nuevo que contradiga una verdad intuitiva bien aceptada incrementará los esfuerzos de los científicos para ser más cuidadosos con sus interpretaciones. De este modo, el progreso de la ciencia siempre ha estado relacionado con un esfuerzo permanente por liberar los puntos de vista de los científicos de sus propias representaciones e interpretaciones primarias e intuitivas (Fischbein, 1982). Pareciera que tanto la psicología como la ciencia en general, la actitud científica, la educación en ciencias y específicamente en matemáticas ha existido históricamente la intención de diferenciarse de la intuición como fuente de conocimiento verosímil en pos de una supuesta asepsia, dejando de lado un territorio posible, un espacio que se constituye de un tipo de conocimiento arraigado a la historia y red de experiencias de un sujeto. ¿Qué sucede con las decisiones epistemológicas-políticas que se toman dentro del aula y sus consecuencias prácticas?, ¿qué lugar ocupa la subjetividad y su historia?, ¿quiénes defienden en la actualidad el positivismo clásico?, ¿quiénes hablan de la objetividad a secas (y no "entre paréntesis")? Seguro, aunque no sea explícito, muchas de las aulas están teñidas de una pulcritud ciega y contraproducente.

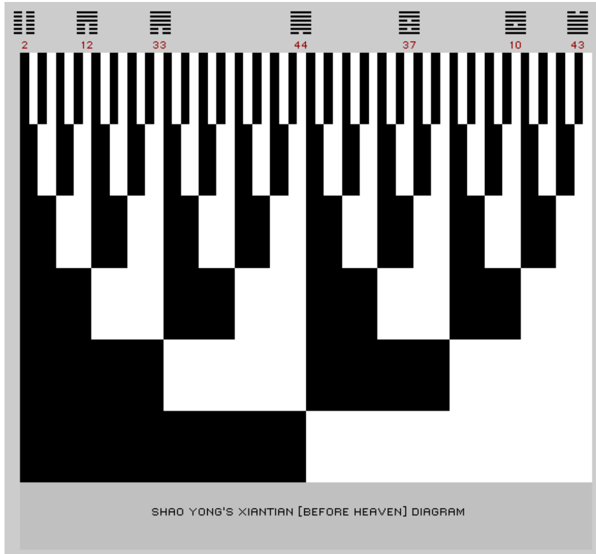
"Efforts to formalize completely the structure of mathematics have led the mathematician to strive to detect, and, as far as possible, to eliminate all those aspects which have only an intuitive expression or justification" (Fischbein, 1982, p.9). Al parecer, como mencionaba Fichbein (1982), esta ha sido una lucha difícil y permanente que los matemáticos han tenido que llevar a cabo con su propia mente. Así, pareciera que la problemática asociada a las interpretaciones, prejuicios intuitivos parece ser aún más aguda en la educación en ciencias y en la educación en matemáticas. “One cannot simply say: "The intuitive interpretations and representations of the child do not bother me. I shall teach him good, rational science, or pure, axiomatized mathematics, and he will learn them as I teach them"” (Fischbein, 1982, p.9).

Así como Freire en su “Pedagogía del Oprimido” (1970) hablaba que los estudiantes no debían ser entendidos como vasijas vacías donde se les depositaba o transfería el conocimiento, Fischbein (1982) también hizo énfasis en este punto afirmando que todo profesor sabe que su estudiante no es un receptor pasivo ni de información, ni de formas de resolución de problemas, ni de determinados procedimientos. Según él, el concepto de asimilación de Piaget sería esencial para entender, describir y explicar los procesos de aprendizaje en relación al desarrollo. Ahora cabría preguntarse ¿será que hay consciencia de este punto entre los profesores?, ¿estará la problemática centrada en que los profesores sepan o no sepan, aprehendan o no aprehendan esta idea?, si esto es así, ¿por qué históricamente la educación en matemáticas ha estado más cercana a la reproducción?, ¿qué lecturas dentro del aula y fuera del aula, es decir, contando tanto el quehacer del profesor como las condiciones materiales que le dan un contexto a dicho quehacer, determinan o facilitan determinadas prácticas?

“We learn, we understand, and we use information by processing and integrating it according to our own mental schémas hierarchically organized” (Fischbein, 1982, p.10). Por eso, a veces pareciera ser extraño que si es tan evidente que los estudiantes traen consigo una estructura-función biológica determinada, una historia de aprendizajes asociada desde dónde se piensa, crea, entiende, no se releve esto, no sea esto el punto de partida desde donde se pueda construir colectivamente experiencias de enseñanza aprendizaje.

De la mano de dichas discusiones es que Fischbein abrió un espacio de comunicación y diálogo en torno a los aportes de Piaget al concepto de intuición. Bien es sabido que los esquemas mentales no son en esencia rígidos, es decir, constantemente son parte de procesos laboriosos, perdurables, duraderos en que se van modificando y acomodando, en el largo plazo, a las características de la realidad de los contextos. De este modo, se van haciendo cada vez más aptos para manejar y resolver los problemas en los que se va viendo involucrado el ser humano (Fischbein, 1982). Así, se ha dicho que en los seres humanos cada período del desarrollo mental se caracterizaría por un complejo sistema de esquemas mentales básicos, los cuales determinarían la capacidad de los niños y niñas de para aprender, interpretar y utilizar la información recibida (Beth & Piaget, 1961 citado en Fischbein, 1982). Sin embargo, dentro de la teoría Piagetiana, que contempla un aporte significativo en cuanto a la explicación de los esquemas y al desarrollo del pensamiento analítico se refiere, está más bien alejado de las formas implícitas de la cognición y pensamiento productivo. “An intuitive representation of a phenomenon seems to be, according to that theory, only a substitute before a complete formal understanding becomes possible” (Fischbein, 1982, p.10).

De modo general, se podría decir que para Fischbein (1982) las estructuras intuitivas representaban componentes esenciales de todas las formas de comprensión activa y de pensamiento productivo. Según el autor, la intuición como tal puede constituir la única o la principal forma de conocimiento si se carece la correspondiente estructura analítica, como sería en el caso del período intuitivo de pensamiento, según la terminología piagetiana. Sin embargo, es importante destacar que Fischbein es enfático en estimar que el rol de las estructuras intuitivas no llega a su fin cuando las formas operacionales-analíticas se hacen posibles. Es decir, las estructuras intuitivas constituirían los componentes indispensables para todas las formas de pensamiento productivo. Sin embargo, el autor también es enfático en afirmar que para aceptar dicha idea es relevante extender, ampliar el sentido de la intuición mucho más allá de la mera interpretación de la intuición como simple sentido común. Se hace indispensable, entonces, profundizar y esclarecer la comprensión de su rol y sus mecanismos, definiendo con precisión sus cualidades y su conexión con otros fenómenos psicológicos relacionados.



Yong, S. (1011-1077) Xiantian ("Antes del cielo").

SEGUNDA PARTE:

Las Matemáticas en el aula: un contexto para la intuición

6.-LAS MATEMÁTICAS: SU DIFICULTAD HISTÓRICA Y SU POTENCIALIDAD

6.1.- ¿Por qué las Matemáticas?

"A great part of mathematical axioms are based on such self-evident, intuitively accepted truths" (Fischbein, 1979, p.33).

Mucho se ha escrito sobre la dificultad que han presentado las matemáticas en su quehacer pedagógico. Asimismo, es común escuchar en el relato de la experiencia escolar episodios aversivos en torno a sus prácticas y dificultades. Así, a pesar de las investigaciones en didáctica, de las innovaciones que se han planteado tanto curriculares como metodológicas, esto sigue siendo materia de debate, discusión y análisis, pues los conflictos medulares parecen seguir presentes dentro del aula.

Así, por ejemplo, en vez de darle énfasis o prioridad al Cálculo Mental, tal como se estipuló en los programas definidos por el MINEDUC (Ministerio de Educación de Chile), reformulados el 2002 y aún vigentes, en la mayoría de las aulas se siguen enseñando principalmente procedimientos únicos de cálculo escrito, que los estudiantes utilizan, memorizan y reproducen, quedando incapacitados de detectar y corregir los errores en su aplicación, a la vez que terminan siendo supeditados a las correcciones del profesor para validar sus resultados (Soto-Andrade, Cosmelli, Cubillos, Gálvez, Luci, Flores et al., 2011). "De este modo, aunque hayan manipulado material concreto e icónico cuando aprenden los números en el primer y segundo año de la educación básica, surge una neta ruptura cognitiva con el ulterior aprendizaje mecánico y simbólico de algoritmos. Este hecho avala lo conjeturado por Radford y André (2009): Puede ser que uno de los problemas con la enseñanza tradicional, centrada en el papel y el lápiz, es que no permite hacer conexiones durables con la experiencia sensorial vivida por los alumnos en sus primeros años escolares[6]. Por tanto, la fórmula aparece abstracta, sin fundamento y desprovista de sentido (p. 246)." (Soto-Andrade, Cosmelli, Cubillos, Gálvez, Luci, Flores et al., 2011, p.11).

El Cálculo Mental es sólo un ejemplo dentro de un contexto mayor. Así, se ha planteado que pareciera ser evidente que los planes y programas del MINEDUC no están siendo aplicados "adecuadamente" en las aulas. A pesar de las variables sociales, económicas, materiales y políticas que en ocasiones parecieran ser pasadas por alto, se constata dicha afirmación a partir de los resultados arrojados en evaluaciones estandarizadas, como el test del Sistema Nacional de Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE), resultados que han sido categorizados de "insuficientes" en más de una ocasión y por más de alguna mirada (Soto-Andrade, Cosmelli, Cubillos, Gálvez, Luci, Flores et al., 2011).

El test recién mencionado, cuya índole está más cercana a TIMMS (Trends in International Mathematics and Science Study) que a PISA (Program for International Student Assessment), define y distingue tres niveles de logro de aprendizaje: Inicial, Intermedio y Avanzado. "Los últimos resultados del test SIMCE, aplicado a cuarto y octavo año básico, indican un escaso progreso académico de los alumnos en la prueba de Educación Matemática (Beyer, 2010; Mineduc, 2010). Por ejemplo, en 2009, el 37% de los alumnos de cuarto año resultó clasificado, a escala nacional, en un modesto "nivel inicial" de logro de aprendizajes, que corresponde a un grado de apropiación mínimo de los contenidos curriculares" (Soto-Andrade, Cosmelli, Cubillos, Gálvez, Luci, Flores et al., 2011, p.12). De este modo, el aula de matemáticas ha estado inundado de "psitacismo

[6] Como referencia de propósitos similares a éstos se encuentran los de Arzarello, Bosch, Gascón y Sabena (2008).

algorítmico" como resultado de su entrenamiento tradicional, donde, en desmedro de prácticas reflexivas y situadas, los estudiantes terminan aprendiendo recetas universales, válidas para todo número, independientemente de su forma y de las relaciones específicas que puedan existir entre ellos (Soto-Andrade, Cosmelli, Cubillos, Gálvez, Luci, Flores et al., 2011).

Por otra parte, hablar de Matemáticas no sólo es hablar de estancamiento, de frustraciones y dificultades, también es en parte hablar de transversalidad. Es decir, parece claro cómo en ellas se encierra un aporte al desarrollo de competencias de cómo ser y actuar en el mundo, de una actitud frente a una decisión, a cómo los seres humanos se relacionan con los desafíos, problemas, conflictos, con lo desconocido y desafiante. De este modo, la matemática atraviesa no sólo la resolución de problemas, sino que además la capacidad de crear, de jugar, de equivocarse, de aceptar desafíos trascendiendo el miedo al error, el desarrollo de la creatividad y de la asertividad. Así, cercanos a una pedagogía que ve en el estudiante un conocedor-conociendo y no un alumno, es posible trabajar relevando habilidades sociales y subjetivas que son transversales, ya que apelan a cómo los seres humanos se mueven en el mundo, más allá de contenidos curriculares específicos.

Seguramente, esa transversalidad es reconocible en los diversos subsectores si se mira desde un plano abstracto y analítico, pero precisamente en la práctica eso será reconocido en la medida que las personas involucradas en los procesos de enseñanza-aprendizaje así lo dispongan y sobre todo consientan. Es decir, en la relación pedagógica se juegan posibilidades: posibilidades de interacción, de compartir, de resignificar, de problematizar, de aprender y aprehender, de entender, de crecer, reconocer, etc. Es así como, cuando se habla de enseñanza-aprendizaje, de didáctica, metodología, relaciones pedagógicas, se comienza a vislumbrar una noción espacial, un territorio, y se hace evidente cómo éstas se dan en un contexto determinado, contexto que cambia según edades y condiciones sociales, económicas, culturales, políticas, etc., poniéndose en juego una particularidad, una especificidad grupal que sin duda debe ser considerada[7].

[7]Se pone en juego una "subjetividad grupal", que sin duda no puede ser obviada en la medida que es capaz de establecer variables de línea base, que podrían delimitar y/o teñir el campo de operacionalidad, acción, o incluso de aprendizajes.

Si bien las matemáticas plantean respuestas específicas en relación a resultados, es decir hay axiomas y teoremas que sostienen ciertos saberes, reglas y conocimientos, aquí entra en juego el legitimar no sólo caminos para llegar a un resultado sino también procesos cognitivos, es decir, se puede entender que las distintas estrategias funcionan acordes a ciertas maneras de aprender, memorizar, pensar, etc. con ciertos modos cognitivos predominantes si se quiere, que facilitan ciertos caminos frente a otros. Es por esta razón, que dentro del aula de matemáticas esto puede ser una oportunidad para observar grupalmente, los distintos modos de "ver", pensar, relacionar y reaccionar frente a un mismo problema, explorar esos distintos caminos más que apelar a la repuesta o al resultado esperado, quizás pensándolo como "afrontamientos fecundos", en la receptividad de que siempre un estudiante puede sorprender con un nuevo camino, con una nueva manera de enfrentar el desafío, de resolver el problema y que esta diversidad puede ser terreno fértil de aprendizaje.

Pero ¿hay condiciones didácticas que favorecen ese desarrollo, ese aprendizaje en matemáticas?, ¿qué podría estar a la base de esa didáctica?, ¿qué supuestos relacionales tendrían que darse para que un profesor sea efectivamente un funámbulo y no un dictador, un patriarca o un opresor cuando los contenidos son de la matemática?

Los estudiantes, ya decía Freire (1970) "sufren una dualidad que se instala en la "interioridad" de su ser. Descubren que, al no ser libres, no llegan a ser auténticamente. Quieren ser, mas temen ser. Son ellos y al mismo tiempo son el otro yo introyectado en ellos como conciencia opresora. Su lucha se da entre ser ellos mismos o ser duales. Entre expulsar o no al opresor desde "dentro" de sí. Entre desalienarse o mantenerse alienados. Entre seguir prescripciones o tener opciones. Entre ser espectadores o ser actores. Entre actuar o tener la ilusión de que actúan en la acción de los opresores. Entre decir la palabra o no tener voz, castrados en su poder de crear y recrear, en su poder de transformar el mundo. Este es el trágico dilema de los oprimidos, dilema que su pedagogía debe enfrentar" (p.45).

Tal vez es en matemáticas donde se ha dado cabida con mayor amplitud a la reproducción, partiendo de la base que uno más uno es dos. Así, cuando se pregunta "¿qué ves en 2/3 y 14/21?", no se recoge necesariamente la multiplicidad de respuestas y se termina relevando la tarea indicada por el profesor, la respuesta única (Mason, 2003).

El lenguaje simbólico parece ser más árido, limpio y preciso, tal vez sujeto a menos interpretaciones que en el caso del subsector de lenguaje, historia o comprensión del medio, etc., pero sucede que al indagar en las relaciones pedagógicas hay aquí algo evidente para todos, y es que la subjetividad se pone en juego constantemente, aunque normalmente no se lo reconozca.

Es así como, entre cúmulos de variables la histórica dificultad que ha presentado en términos pedagógicos es evidente, tal como lo planteó Kline (1970): "There is not much doubt that the difficulties the great mathematicians encountered are precisely the stumbling blocks that the students experience and that no attempt to smoothe these difficulties with logical verbiage will succeed. If it took mathematicians 1000 years from the time that first class mathematics appeared to arrive at the concept of negative numbers, and it did, and if it took another 1000 years for mathematicians to accept negative numbers, as it did, we may be sure that students will have difficulties with negative numbers. Moreover, the students will have to master these difficulties in about the same way that the mathematicians did, by gradually accustoming themselves to the new concepts, by working with them and by taking advantage of all the intuitive support that the teacher can master" (p. 270).

De este modo, se hace aún más evidente cómo la necesidad de innovar es histórica en las matemáticas. Diversos conceptos, nociones han presentado una dificultad para ser aprendidos, quizás atentan con la historia de aprendizajes previos, quizás su abstracción o su manera de probarlos son poco espontáneos o cercanos a los estudiantes. Es por esto quizás que se hace necesario considerar la trayectoria, los procesos y replantearse el trabajo con niños y niñas desde ahí, de un modo constructivo, tomando en consideración y aprovechando, como decía Kline, el soporte intuitivo que el maestro pueda dominar (Fischbein, 1987).

Ahora bien, como parte de innovaciones curriculares y metodológicas se puede observar cómo, usando metodologías no convencionales (por ejemplo, visualización), se despliega una capacidad de "ver" de manera eficiente, siendo perezoso y rápido, llegando a respuestas bastantes asertivas en poco tiempo. Aquí se levanta un protagonista que no es sólo el Estímulo, entendido éste último como una interacción, sino que también un "saber" que se activa, un conocimiento que se tiene a mano, que no se sabe con seguridad de dónde viene, si es que viene de alguna parte, pero que otorga una delimitación territorial al menos, si no es aún más preciso, de dónde puede encontrarse una determinada respuesta o solución a un problema matemático o a una ecuación. Esto es bastante sugerente sobre todo si se piensa en la transversalidad que encierran las matemáticas.

Así, tal vez como el lenguaje corporal, la intuición representa otro de los terrenos poco obvios de explorar en una disciplina como las matemáticas, otro de los fenómenos que parecen no ser concernientes, relevantes, pertinentes a ellas, incluso poco probables, falseables, hasta místicos o demasiado subjetivos si se quiere.

6.2.- La intuición y el aula de matemáticas: ¿por qué y para qué considerarla?

¿Por qué entonces considerar la intuición situada en el territorio de las matemáticas?, ¿cuál podría ser su relevancia?

En relación con lo que se ha planteado, se podría decir que en el aula se observa cómo diversas verdades matemáticas entran en contradicción con intuiciones que los estudiantes traen, instaurándose con frecuencia una dificultad para aceptar dichas verdades (Fischbein, 1979). Por ejemplo, se han reconocido complicaciones para aceptar que el conjunto de números naturales es equivalente al conjunto de números pares positivos o que el conjunto de puntos de un segmento es equivalente al conjunto de puntos de un cuadrado (Fischbein, 1979), incluso se ha observado cómo conceptos erróneos presentan una resistencia significativa al cambio, especialmente en el campo de las probabilidades, manteniéndose a pesar de la reiterada instrucción avanzada o especializada (Fischbein & Schnarch, 1997).

Fischbein (1979), uno de los exponentes más reconocidos en esta temática, explicitó dos razones por las que consideraba que la educación matemática no podía descuidar las reacciones intuitivas de los estudiantes:

En primer lugar, según el autor, las *intuiciones erróneas* contribuyen en dificultar la adquisición de interpretaciones correctas en un campo determinado. Incluso en aquellos casos en que el estudiante ha tenido éxito en el aprendizaje de versiones científicamente correctas, no se asegura que una interpretación primitiva falsa haya sido eliminada. Según Fischebein (1979), "The survival of such wrong interpretations may endanger the adequate use of correct knowledge, especially in non-standard situations" (p.33).[8]

Y como una segunda razón, menciona que las *interpretaciones intuitivas correctas* son capaces de estimular el pensamiento matemático productivo. Según él, "Pure, formal symbolic representations of mathematical truths are, by themselves, not efficient at mental tools, especially when the solution to non-standard problems is requested" (Fischbein, 1979, p.33).

En relación con estas ideas Fischbein planteó: "It is impossible to explain the ways of thinking in the history of sciences and in the ontogenesis of intelligence without taking into account the lines of force created by these cognitive beliefs (Fischbein, 1982, p.12).

Así, en el rescate mismo de la intuición dentro del aula se vislumbra una tercera razón que apoya este acto, entrelazado de las dos anteriores y de mano de la construcción colectiva de autonomía. Este espacio que se le da a la intuición es necesario también en términos políticos, ya que podría ser un lugar de diferenciación de la reproducción social simple y llana, para dar crédito y legitimidad a la subjetividad de quienes componen los procesos de enseñanza-aprendizaje, reivindicando sus devenires, la historia social, cultural que los constituye, tanto a ellos mismos como a sus conocimientos. Entonces, si se reconoce lo que el otro trae, lo que el otro es, lo que el otro vale, considerando la historia que sostiene la construcción de una determinada intuición, dando cabida a la problematización de este conocimiento y su fuerza, desde un hacer colectivo que propicie la autonomía de todos y todas las involucradas, sin duda se abre un camino hacia la construcción social.

A pesar de los años, las culturas y la temática misma que aquí se abre, no se distancia de lo que Fiori (1970 citado en Freire, 1970) escribió sobre la pedagogía de Freire: "El Método de Paulo Freire es, fundamentalmente un método de cultura popular: concientiza

[8] Un ejemplo interesante de este punto en el campo de las probabilidades se encuentra en la siguiente investigación: Fischbein, E. & Schnarch, D. (1997). The Evolution with Age of Probabilistic, Intuitively Based Misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 28, No. 1, pp. 96-105 Published by: National Council of Teachers of Mathematics.

y politiza. No absorbe lo político en lo pedagógico ni enemista la educación con la política. Las distingue sí, pero en la unidad del mismo movimiento en que el hombre se historiciza y busca reencontrarse, esto es, busca ser libre. No tiene la ingenuidad de suponer que la educación, y sólo ella, decidirá los rumbos de la historia, sino tiene, con todo, el coraje suficiente para afirmar que la educación verdadera concientiza las contradicciones del mundo humano, sean estructurales, supraestructurales o interestructurales, contradicciones que impelen al hombre a ir adelante. Las contradicciones concientizadas no le dan más descanso sino que vuelven insoportable la acomodación" (p.25).

6.3.- Acercándose a la Intuición en Matemáticas…

Los orígenes de las reflexiones que circundan este texto están arraigados en un paper que Halberda, Mazzocco y Feigenson publicaron en la Revista Nature el año 2008, el cual tiene como título: "Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement".

En esta publicación se plantea que las competencias humanas matemáticas surgirían de dos sistemas de representación. Por una parte, competencias asociadas a ciertos dominios de las matemáticas, como el cálculo, según ellos dependerían de representaciones simbólicas que serían exclusivas de aquellos seres humanos que hubiesen sido objeto de enseñanza explícita. Por otra parte, señalan que intuiciones numéricas más básicas estarían apoyadas por un "Sistema Numérico Aproximado (ANS)", el cual sería evolutivamente antiguo y compartido por adultos, niños y animales no-humanos. De este modo, todos estos grupos podrían representar el número aproximado de unidades en matrices visuales o auditivas sin contar verbalmente ni utilizar dicha capacidad para sus conductas cotidianas, por ejemplo, como buscar comida, señalan. El ANS sería entonces uno de los sistemas representacionales desde donde emergerían ciertas competencias matemáticas básicas (Halberda, Mazzocco & Feigenson, 2008).

Luego plantean que si bien el ANS posee un carácter generalizado o ampliamente difundido tanto a través de las especies como a través del desarrollo, no se tiene certeza si algunos individuos poseen un "sentido numérico" no-verbal más preciso que otros. Asimismo, plantean que también es desconocido el grado en que este sistema interactúa o interfiere con las habilidades matemáticas simbólicas formales adquiridas mediante la instrucción explícita (Halberda, Mazzocco & Feigenson, 2008).

En esta publicación se muestra, mediante trabajo empírico, que existen grandes diferencias entre individuos de 14 años de edad en cuanto a sus habilidades de aproximación no-verbal y, más aún, dichas diferencias estarían correlacionadas con puntuaciones pasadas de esos niños en pruebas estandarizadas de logro en matemáticas, pasado que contemplaría todo el recorrido desde kindergarten. Por otra parte, se observó que dicha correlación seguía siendo significativa cuando se controlaban diferencias individuales en otros factores cognitivos y de rendimiento. Es decir, los resultados mostraron que las diferencias individuales en el rendimiento en matemáticas en la escuela estaban relacionadas con las diferencias individuales en la agudeza o precisión de este sentido numérico aproximado no-aprendido y evolutivamente antiguo. Asimismo, ellos plantearon que la investigación adicional sería determinar si las diferencias tempranas o iniciales en la agudeza del sentido numérico afectan después al aprendizaje de las matemáticas, si la educación matemática mejora la precisión del sentido numérico, y en qué medida los factores terciarios pueden afectar a ambos (Halberda, Mazzocco & Feigenson, 2008).

Es así como este paper, pequeño en extensión pero amplio en sus alcances, planteaba por aquellos años diversos campos de observación a ser explorados y sin duda fue una semilla para este escrito. En primer lugar, un aspecto relevante del mismo es cómo sus conclusiones más que cerrar una discusión la amplía incluso, planteando nuevos espacios de investigación y discusión. Asimismo, es relevante por la metodología que desarrollan para medir el ANS[9]. Por otra parte, es un texto provocativo en la medida que de él surgen varias preguntas teñidas por lo incierto y lo desconocido como: ¿se puede encontrar aquí una asepsia válida y confiable en torno al aislamiento de variables?, ¿cómo se está midiendo esa aproximación numérica innata?, ¿cuán preciso es dicho test?, ¿qué sucede con la historia de aprendizajes visuales?, ¿qué correlato fisiológico, particularmente a nivel de SNC, tendrá el ANS?, ¿de qué manera está influyendo en los resultados la historia de aprendizajes?, ¿de qué forma influyen las herencias culturales y genéticas?, ¿qué factores sociales, económicos, materiales y culturales hay en juego?, ¿qué sucede

[9] Para ver notica donde se describe y adjunta el artículo, así como también el test, revisar este link: http://www.nytimes.com/interactive/2008/09/15/science/20080915_NUMBER_SENSE_GRAPHIC.html

si se le aplica dicho test a un niño que trabaja en una feria y que estudia en una escuela con un “bajo nivel” educativo?, ¿qué es lo que miden efectivamente dichas pruebas estandarizadas en matemáticas con las cuales correlacionaron las diferencias en el ANS?, ¿qué dimensiones operan en ese “rendimiento”?, ¿se podría hacer un paralelo con Chile, pensando que las pruebas estandarizadas en este país están relacionadas a la estratificación social?

Así, de estas reflexiones se enuncian al menos dos puntos. Lo primero tiene relación con su capacidad o posibilidad de abrir preguntas, actitud que se espera reproducir en este escrito. Y segundo, desde la pregunta por lo innato, lo aprendido, lo inconsciente, lo rápido, lo arcaico, evolutivo, lo que se comparte con los otros animales, lo que es exclusivamente humano, etc., como una niña que al dudar seriamente la existencia de Dios duda también de la existencia de los dones, de esos regalos divinos dados desde algún lugar, perfectos, plenos, completos, sin el respaldo de un desarrollo histórico. Desde esas inquietudes, desde esa sospecha surge la idea de abordar el campo de lo inconsciente pero ahora desde otro lugar. Así la intuición como concepto empieza a aflorar arraigada a un contexto social, contexto que se busca concientizar, explicitar, mas no ignorar. Si bien es cierto que la intuición como concepto podría compartir más de algún elemento con el ASN, estos se diferencian enormemente. La intuición invita a abordar procesos rápidos, inconscientes, pero ahora de la mano de sus procesos históricos, incluyendo así un contenido social que no sólo será tela de fondo sino que un marco desde donde se mirará el fenómeno.

Díaz, D. (2010). La Escuelita. Foto digital.

TERCERA PARTE: La Intuición en Matemáticas

7.- LA INTUICIÓN: NAVEGANDO EN SU NATURALEZA…

> "Do intuitions really have essential features in common, or has language simply equated various forms of cognitive reactions on the basis of some external, accidentally similar aspects? Intuitions represent the basic mental mechanisms for connecting knowledge with action" (Fischbein,1979, p.36).

Entendiendo el conocimiento como aquella imagen, esa replicación interna y subjetiva de la "realidad objetiva", que básicamente contribuye a preparar y orientar al ser humano para la acción, se puede notar que al discriminar, distinguir y sintetizar señales mediante la evaluación de distancias o intervalos, por ejemplo, el ser humano se prepara y puede provocar reacciones adaptadas y eficaces. Así, las percepciones en general, debido a su origen y estructura, están directamente implicadas en dicho proceso, ya que por sí mismas pueden preparar y dirigir la acción (Fischbein, 1979).

Ahora, ¿ocurrirá lo mismo con las formas simbólicas de conocimiento, en particular, con el pensamiento lógico analítico? Es claro que la resolución de problemas a través de procedimientos analíticos requiere de tiempo. A menudo no se puede ser eficaz cuando se requiere una forma de adaptación rápida y directa. Según Fischbein (1979), el rol esencial de la intuición es traducir las adquisiciones cognitivas en términos de acción. Las intuiciones comparten características esenciales con las formas icónicas de conocimiento, lo que contribuye en la traducción de la información directamente en términos de decisiones prácticas.

"Intuition is, simultaneously, a derived form of cognition—as thinking is—and a programme for action, as perception is. Intuition and perception have essential common features and for this reason the term intuitive knowledge[10] is sometimes used for denominating both categories. Both are global, direct, effective form of information" (Fischbein, 1979, p.37).

Ahora bien, la diferencia entre intuición, entendiéndola como una forma específica de conocimiento, y la percepción, es que la intuición no refleja directamente un objeto o un evento con todas las cualidades concretas que lo constituyen. La intuición es principalmente una forma de interpretación, una solución a un determinado problema, se podría decir que es una forma derivada del conocimiento como el conocimiento simbólico. Por otra parte, la diferencia entre la intuición y el pensamiento lógico analítico radica en que la intuición no es analítica ni discursiva, sino que una forma *compacta*[11] de conocimiento tal como la percepción. Asimismo, al igual que esta última, la intuición no requiere de una justificación externa e introduce a su vez la sensación de estar sumergidos directamente entre los objetos materiales. Es decir, la percepción parece ser más bien la realidad misma más allá de pura apariencia. Con la intuición se tiene la vivencia de estar en el objeto y no ser un simple intérprete del mismo (Fischbein, 1979).

Fischbein (1979) escribió: "Being a derived form of knowledge like analytical thinking, intuition can organize information, synthesize previously acquired experiences, select efficient attitudes, generalize verified reactions, and guess, by extrapolation, beyond the facts at hand. The greatest part of the whole process is unconscious and the product is a crystallized form of knowledge which, like perception, appears to be self-evident, internally structured, and ready to guide action" (p.37).

[10] Todos los subrayados de citas textuales son originales del autor.
[11] "Compacto" en el sentido de totalidad, de ahí su distinción con lo analítico secuencial.

Es así como, la intuición desde su carácter anticipatorio, ofrece una perspectiva global de un posible camino o manera de resolver un problema, inspirando y dirigiendo de este modo, los pasos hacia la búsqueda y construcción de la solución. Así, el rol de la intuición será condensar en una visión global y compacta una solución analítica obtenida previamente. De esta forma, el rol de la intuición, como se dijo, será preparar y guiar la acción, teniendo como resultado esa interpretación final concentrada destinada a hacer de la solución una construcción directamente útil dentro de un proceso activo y productivo de pensamiento (Fischbein, 1979).

La intuición, entonces, tendría un correlato primitivo asociado a acciones "externas" como nociones espaciales, estimaciones temporales, formas rudimentarias de evaluaciones de distancia, evaluaciones simples de frecuencias relativas, comparaciones globales, etc., a la vez que alcanzaría el territorio cognitivo, en la medida que mientras se piensa, se experimenta mentalmente, se elabora una explicación o en la búsqueda de un nuevo modelo teórico, por ejemplo, también se estaría actuando en correlación con la necesidad de una "visión intuitiva" que inspire, guíe, dirige y prepare dicha acción (mental) para mantener así dicho proceso mental moviéndose en una dirección productiva (Fischbein, 1979). "The essential function of (intellectual) intuition is to be the homologue of perception at the symbolic level when the same task as perception is to prepare and to guide action" (Fischbein, 1979, p.37).

Ahora bien, con respecto a la idea de "pensamiento intuitivo" descrito por Piaget (1981) como una de las fases del desarrollo y elaboración del pensamiento, entendido como previo al desarrollo de esquemas operacionales y donde la intuición no es sólo un momento particular del proceso de pensamiento, sino que el proceso de pensamiento mismo, Fischbein (1979) afirma: "Though described by Piaget as being specific to the period of intuitive thinking (4-7 years of age), all the features of intuitive thinking are, in fact, common to all of the various forms of intuitions which may be encountered at all age levels" (p.38). Es decir, el autor plantea que la inteligencia no abandona las formas intuitivas cuando aparecen los esquemas operacionales de pensamiento. El conocimiento intuitivo, no sería una forma inmadura o transitoria de pensar, sino que al contrario, cuando el pensamiento operacional aparece, la intuición continuaría sobreviviendo como una forma complementaria de pensar. Así, en los niveles operacionales de pensamiento, la intuición como conocimiento funcionaría como una forma efectiva de cognición, mejor adaptada para la acción que el conocimiento lento, analítico, lógico, discursivo (Fischbein, 1979).

Ahora bien, la hipótesis anterior tiene una implicancia importante y directa no sólo en términos de procesos psicológicos sino que también desde una perspectiva educativa o pedagógica. Si se considera a la intuición como una versión condensada, prácticamente adaptada, de alguna información, interpretación o solución, entonces es evidente que está estrechamente relacionada con la experiencia adquirida con anterioridad. "This does not exclude the possibility of a priori schemata intervening in our representations of facts. But it is natural to assume that if intuitions prove themselves to be useful mental tools--adapted to the particular requirements of certain classes of situations--then they must be the result (totally or partially) of personal practical experience" (Fischbein, 1979, p.38).

Si se considera entonces que la intuición está relacionada con la historia del sujeto, es decir, con sus experiencias y aprendizajes previos, ¿por qué es considerada un tipo de conocimiento y no un sistema bien estructurado de hábitos o habilidades mentales?

La intuición, a pesar de ser un concepto con varios significados y con una historia de definiciones diversas, hay en ella una característica común que siempre se menciona: la intuición es un conocimiento inmediato (Fischbein, 1979).

"Intuitions cannot be reduced to mental habits. A habit is essentially a stabilized manner of acting in response to a class of situations. An intuition is primarily a cognition, i.e., a subjective reflection--corrector not--of some real facts" (Fischbein, 1979, p.38). Así, como se dijo más arriba lo importante de este tipo de conocimiento es que gracias a sus características está adaptado a las necesidades de la acción. De este modo, aunque la intuición pueda derivar de la cognición así como el conocimiento conceptual, tiene como características principales ser inmediata, internamente estructurada, auto evidente y coercitiva, al igual que la percepción (Fischbein, 1979).

Es así como, la intuición generalmente está determinada por la práctica, en relación con una categoría definida de situaciones. Sin embargo, el producto o el resultado de esa experiencia no es simplemente un hábito mental o práctico, una habilidad, sino que más bien puede ser una imagen, una interpretación, una evaluación, una representación, que debido a su naturaleza intrínseca mencionada más arriba, puede traducirse directa e inmediatamente en términos de reacciones adaptadas, sean éstas últimas “externas” o “internas” (Fischbein, 1979).

Es por esta razón, que si se conoce la fórmula de ecuaciones cuadráticas, por ejemplo, teniendo las habilidades correspondientes para utilizarla automáticamente, no se genera ninguna intuición. Es decir, la intuición no se reduce a un algoritmo, no es una simple habilidad mental, hay involucrada en ella algo más (Fischbein, 1979).

Por ejemplo[12], si se considera la fórmula para calcular el número de permutaciones para n elementos (la fórmula es P (n) = n!) con un elemento, evidentemente, hay una sola posibilidad. Luego, con dos elementos, hay dos permutaciones posibles. Esto es intuitivamente evidente. Ahora bien, si se añade un tercer elemento, cada una de las dos permutaciones obtenidas anteriormente, AB y BA, proveerán tres permutaciones ya que el tercer elemento, C, puede ocupar tres lugares diferentes:
CAB, ACB, ABC, ACB, BCA, BAC

De este modo, se puede decir que aquella representación de cómo se puede construir permutaciones cuando se añaden más y más elementos es una representación intuitiva. Así, cuando se agrega un cuarto elemento, cada una de las permutaciones obtenidas anteriormente proporcionará cuatro permutaciones, porque hay cuatro lugares diferentes donde se puede ubicar ese cuarto elemento.

De esta manera, la comprensión intuitiva es suficiente para alcanzar, por extrapolación, la fórmula general: P(n) = 1* 2* 3…n = n! ¿Expresará esta fórmula un simple algoritmo o se encuentra aquí algo más? Después de constatar cómo se construye la fórmula, cómo se dedujo, se puede llegar a un nivel y tipo de comprensión que va más allá del simple conocimiento de un programa de acción. Así, el proceso de ir sucesivamente multiplicando por 2, por 3, por 4, etc. expresa directamente la manera de ir construyendo permutaciones. Esta fórmula de permutación, entonces, contiene su justificación en su estructura específica (P(n) = 1*2*3*4*…n).

[12] Ejemplo propuesto por Fischbein, E. (1979). Intuition and Mathematical Education. Some Theoretical Issues in Mathematics Educations: Papers from a Research Presession. Columbus, Ohio. USA. (pp.33-54).

Así, cuando se recupera la fórmula, se recuerda de una manera directa, global la idea básica de *cómo* son producidas las permutaciones en función del número de elementos, y *por qué* se producen de dicha manera. Como dijo Fischbein (1979), esto parece ser más que una habilidad mental, más que un programa para la acción, “it is grasping the meaning of a process with an extrapolative perspective in mind” (p.39).
Otro ejemplo, análogo al anterior, podría ser la construcción de números a partir de un sistema binario.

“Briefly speaking, intuitions are mental structures based on previously accumulated experience and expressed in an interpretative and predictive form of knowledge. Therefore, intuitions are generally based on systems of mental skills. But mental skills do not, by themselves, entirely explain the particular nature of intuitions” (Fischbein, 1979, p.39). De este modo, aquella experiencia que es acumulada en un campo determinado también debe ser expresada en una “visión global” interpretativa y predictiva. Probablemente, algún tipo de inducción realizado en gran medida inconscientemente, es la fuente principal de esa representación o visión global. Es así como, una aceptación intuitiva implica una vivencia de obviedad, un sentimiento de evidencia que es el resultado de aquella congruencia entre la justificación de una interpretación y un determinado programa de acción (Fischbein, 1979).

Ahora, si bien se encuentran modos intuitivos de diversos rangos de representación e identificación sobre un amplio espectro de estructuras mentales aparentemente muy diferentes, todas comparten las mismas características básicas. Así, por una parte se pueden identificar todas aquellas formas más elementales de conocimiento, casi “reducibles” a la percepción en sí misma, tales como la estimación y toma de decisiones asociadas a estructuras sensorio-motoras, como aquellas que se observan en las evaluaciones de espacio y tiempo. Y por otro lado, se encuentran aquellas quizás de mayor complejidad y sofisticación que pueden estar casi listas para ser traducidas completamente en presentaciones analíticas formalizadas por científicos, matemáticos, etc. Así, entre estos dos polos se encuentra una gran diversidad de representaciones, interpretaciones, explicaciones intuitivas más o menos conectadas con modelos figurativos y formas verbales de expresión. Y todas y cada una de ellas sintetizan la larga cantidad de experiencia personal en una visión global, autoevidente y extrapolada (Fischbein, 1979).

8.- CARACTERÍSTICAS Y CLASIFICACIÓN DE LAS INTUICIONES SEGÚN FISCHBEIN

8.1.-Características según Fischbein

Uno de los aportes de Fischbein en su teoría es que sistematizó en varias de sus publicaciones las características de la intuición. A continuación se desarrolla una breve descripción de cada una de ellas.

1. Autoevidente
2. Certeza Intrínseca
3. Perseverancia
4. Carácter Coercitivo
5. Estatus de Teoría
6. Carácter Extrapolable
7. Globalidad
8. Carácter Implícito

1. Autoevidente:

El autor la describió como la característica fundamental de las intuiciones (Fischebin, 1987). Con este término se está señalando que las intuiciones no necesitan de argumentos para convencer de su certeza, es decir, se aceptan como ciertas por sí mismas. Por ejemplo, si se lanza una moneda al aire, no se necesita argumentar para convencer a una persona que la moneda caerá (Molina, 2007).

“If we affirm that the whole is bigger than each of its parts, that every number has a successor, or that two points determine a straight line, we feel that these statements are true by themselves without the need for any justification” (Fischbein, 1987, p 43).

De este modo, al afirmar que el todo es mayor que la parte, el sujeto siente que esa afirmación es verdadera por sí misma, sin la necesidad de justificación (López, 2006).

Antes de ser aceptada la evidencia matemática de los números irracionales y del conjunto de los números reales, apareció el concepto de número irracional en contradicción con el concepto de número en sí mismo, este último representado por los número naturales. Así, según Fischbein (1987), dos ítems contradictorios de evidencia pueden coexistir y manifestarse alternativamente como tales. Es decir, si se compara, por ejemplo, el conjunto de números naturales con el conjunto de los números pares, se puede sentir por un lado que el conjunto de los números naturales tiene más elementos y por otra parte se sabe que los conjuntos son equivalentes, al ser ambos conjuntos infinitos.

De este modo, la autoevidencia no implicaría solamente que el sujeto sea capaz de justificar (lógica o empíricamente) la afirmación pertinente. Una afirmación aceptada intuitivamente no es siempre verdadera (o aparentemente verdadera), pero sí parece ser explicativa por sí misma. Es así como, la expresión “Cada número tiene un sucesor”, por ejemplo, podría ser intuitiva ya que el concepto de número refiere la idea de iteración ilimitada. Asimismo, la idea “El todo es mayor que la parte” también lo sería, ya que el concepto de entero implicaría la noción de una suma de partes (López, 2006).

2. Certeza Intrínseca:

Una segunda característica fundamental del razonamiento intuitivo es el de ser aceptado como cierto. Ahora bien, las características de ser evidente por sí mima y la certeza están correlacionadas estrechamente, pero no aluden a una misma propiedad ni son reducibles una a la otra. Es decir, aquellas certezas no necesariamente serán autoevidentes. Por ejemplo, el teorema de Pitágoras no es evidente en sí mismo, pero luego de su demostración e instrucción escolarizada e institucionalizada un sujeto puede convencerse de su certeza (Molina, 2007). Así, una persona puede estar completamente convencida que una afirmación es verdad sin tener el sentimiento de que es autoevidente. Así, la certeza no implica la evidencia por sí misma y la evidencia por sí misma no denota certeza (López, 2006).

De este modo, si se quiere identificar la presencia de un razonamiento intuitivo se debe determinar hasta dónde le parece al sujeto que es una creencia intrínseca. Mucha de la información que se tiene: nombres, fórmulas, datos numéricos, teoremas, leyes científicas, se aceptan después de haber sido probados, o bien, aunque no sean vivenciadas o sentidas como una creencia intrínseca y no sean conocimientos intuitivos, se aceptan bajo el principio de autoridad, es decir, por la autoridad que representa determinada revista, libro o persona (profesor/a) (López, 2006). “In contrast, the axioms of Euclidean geometry, for instance, are not only accepted because they were taught; they are also accepted as self-evident with a feeling of intrinsic certainty” (Fischbein, 1987, p.46). De este modo, si bien la certeza no es un criterio absoluto de verdad objetiva, la sensación de seguridad permanece como un criterio para el conocimiento intuitivo, es decir, un criterio para un conocimiento que se impone subjetivamente para el individuo como absoluto (López, 2006).

3. Perseverancia:

Una característica con fuertes implicancias pedagógicas es ésta, pues una vez establecida, fijada la intuición, ésta se arraiga firmemente. Es decir, las intuiciones son nociones que pueden influir en los pensamientos a lo largo de la vida, incluso después de haber adquirido un grado avanzado de educación formal, ellas se mantienen (Molina, 2007).

Un ejemplo de dicho fenómeno es el modelo tácito denominado por Fischbein (1989) “input-output” (Molina, 2004):

Cuando a un niño o niña de primaria se le presenta la siguiente expresión: 3 = 3, podría interpretar que 6 - 3 = 3 o que 7 – 4 = 3. De igual manera, si se le presenta una situación como 4 + 5 = 3 + 6, podría dar la siguiente respuesta “después del igual va una respuesta, no otro problema” (Kieran, 1981, p. 319 citado en Molina, 2004, p.27). Lo que ocurre con los niños y niñas es que perciben que de un lado de la igualdad hay un proceso y del otro su resultado. Ahora bien, cuando se les pide a los estudiantes de secundaria que simplifiquen la expresión 2a + 5b, escriben 2a + 5b = 7ab y, sin embargo, no suelen escribir 7ab = 2a + 5b. Por otra parte, si se considera a estudiantes universitarios y se les pide que encuentren el equivalente de 1/3, ellos intuitivamente aceptan que 1/3 = 0, 33333…. Asimismo, estos mismos estudiantes se mostrarían reacios a aceptar que 0, 33333… es igual a 1/3, para ellos faltaría siempre una pequeñísima fracción para considerarlo igual o que tal expresión tendería 1/3 (Molina, 2004).

Fischbein (1989) señala que cada uno de estos casos es generado por el mismo modelo intuitivo tácito llamado "*entrada-salida*". Como se dijo, de un lado de la igualdad los estudiantes ven un proceso y del otro un resultado, así, como el 0,33333… se prolonga indefinidamente, infinitamente, sería un proceso que no termina, por esta razón para estos estudiantes 0, 33333… nunca será igual a 1/3 (Molina, 2004).

A partir de este ejemplo se intenta subrayar que se ha observado que los estudiantes universitarios, de quienes se puede pensar que presentan cierto discernimiento o madurez en cuanto al razonamiento matemático, tienen concepciones intuitivas que les acompañan de por vida (perseverancia) y que eventualmente podrían obstaculizar su entendimiento de conceptos matemáticos (Molina, 2004).

Es así como, se ha observado que la instrucción formal tradicional que proporciona al estudiante el conocimiento conceptual tiene un bajo impacto sobre el conocimiento intuitivo. Así, las intuiciones erróneas pueden coexistir y convivir a lo largo del tiempo junto a las interpretaciones conceptuales correctas, incluso toda la vida (López, 2006). Por ejemplo, se sabe que se vive en un cuerpo esférico llamado Tierra que ha girado alrededor de sol durante millones de años. Sin embargo, se ha observado una gran dificultad para intuitivamente aceptar dicha representación. Se sabe que la materia está compuesta de moléculas que a su vez se componen de átomos que están compuestos de partículas extremadamente pequeñas que se mueven a una gran velocidad. No obstante, la representación intuitiva de que la materia está compuesta de partículas que se mueven constantemente es prácticamente imposible. Se enseñan dichos conocimientos, se está de acuerdo con ellos, pero difícilmente se les puede internalizar como una representación natural y obvia. Por otro lado, la compacidad o compactibilidad de la materia, especialmente en los sólidos, parece ser intuitivamente una propiedad intrínseca (Fischbein, 1987).

"The survival of such contradictions between intuitive, robust representations and scientifically acquired concepts is a permanent source of difficulties for the teacher. Very often the main recommendable procedure is to make the student aware of the conflict and to help him to develop control through conceptual schemas over his intuitions" (Fischbein, 1987, p.47). Es decir, reconocerlas, darles un lugar, analizarlas, deconstruirlas. Sobre el punto de intuiciones erróneas relacionadas con esta característica se volverá en detalle más abajo.

4. Carácter Coercitivo:

Otra característica importante del conocimiento intuitivo es que ejerce un efecto coercitivo sobre las vías de razonamiento de los individuos. Es decir, como consecuencia de su evidencia intrínseca, las intuiciones pueden ejercer un efecto coercitivo sobre aquellos procesos donde el sujeto conjetura, explica y/o interpreta diversos hechos (Fischbein, 1979). Estas nociones se imponen subjetivamente sobre ellos como representaciones o interpretaciones absolutas y únicas (López, 2006).

Se acepta como evidente, por ejemplo, que por un punto no perteneciente a una recta pasa una y solamente una paralela a la misma, pero no se puede aceptar otras alternativas como, por ejemplo, que no pasa ninguna paralela o que pasan infinitas paralelas, como se afirma en las geometrías no euclidianas (López 2006).

Asimismo, se oponen al conocimiento formal, provocando como consecuencia que determinados conceptos matemáticos sean considerados como inaceptables. Por ejemplo, según Molina (2007) la idea intuitiva de que "la suma infinita de términos es infinita" podría eventualmente ser un obstáculo para poder aceptar la convergencia de series.

De este modo, en la historia de la ciencia y la matemática la naturaleza coercitiva de las intuiciones con frecuencia ha contribuido a perpetuar las interpretaciones incorrectas y a rechazar las correctas, aún después de que hayan sido probadas. "La idea intuitiva de la tierra como el centro del universo impidió el desarrollo de la correcta concepción copernicana de la dinámica del sistema solar" (López, 2006, p.31).

Ahora bien, es preciso distinguir entre el carácter coercitivo que un conocimiento intuitivo pueda contener y la convicción inspirada por una prueba. Es decir, es bastante evidente que no es difícil renunciar a una convicción si se encuentra una prueba incorrecta, no obstante una convicción intuitiva, una interpretación intuitiva no puede ser erradicada con facilidad (López, 2006). “It forms an integral part of our mental schemata. The imperativeness of intuitions may be explained by the fact that they are not, generally, isolated mental conceptions. They express fundamental mental constraints organized in comprehensive structures. We cannot easily give up our space intuitions, because they are an integral part of our way of living and behaving. The Cantorian theorems contradict the finiteness of our mental schemas and therefore they cannot replace our natural mental attitudes” (Fischbein, 1987, p.49).

5. Estatus de Teoría:

> “An intuition is a theory (or a mini-theory) never a mere skill or the mere perception of a given fact” (Fischbein, 1987, p.50).

Este rasgo de ciertas intuiciones tiene por efecto que al aceptar intuitivamente una frase, se acepta su generalidad y universalidad, pero se hace a través de una pieza de información muy particular, como una analogía o diagrama. Por ejemplo, se puede pensar en un niño o niña de no tan corta edad que arroja o deja caer un objeto al aire, lo ve caer y podría percibir en el fenómeno cierta noción, la cual lo llevaría a conjeturar de que cualquier objeto que arroje al aire caerá (Molina, 2004).

Ahora bien, si se acepta intuitivamente que “a través de un punto externo a una línea, se puede dibujar una y sólo una perpendicular a esa línea”, se acepta la necesidad y la generalidad de dicha afirmación (Fischbein, 1987). Asimismo, se puede aseverar que “dos rectas que se cortan determinan ángulos opuestos por el vértice iguales” y luego afirmar que esto es evidente por sí mismo (autoevidente). En realidad, al percibir la imagen se distingue la igualdad de los ángulos, pero esto es una percepción no una intuición (López, 2006). *“What we intuit is the universality of the property”* (Fischbein, 1987, p.50).

La propiedad teórica de las intuiciones implica, entonces, varios aspectos. Una intuición nunca se limita tan sólo a afirmar la universalidad de una propiedad ni a la percepción de un determinado hecho. Es decir, en una intuición generalmente se capta, se comprende la universalidad de un principio, de una relación, de una ley (de un “invariante”), a través de una realidad particular (Fischbein, 1987).

Aceptar intuitivamente el postulado de Euclides, por ejemplo, no quiere decir que en *términos prácticos* se está en condiciones de trazar un cierto segmento de línea paralelo a otro segmento de línea. Más bien, aceptar el postulado intuitivamente significa que siente que, *más allá de toda evidencia posible en la práctica*, se está absolutamente convencidos/as de que las dos líneas pueden ser extendidas indefinidamente, infinitamente, sin cruzarse entre sí, en ambas direcciones (Fischbein, 1987).

Así, al mismo tiempo, se pueden imaginar las dos líneas paralelas como extensiones potencialmente infinitas de aquellos segmentos en particular. De este modo, dichos segmentos confieren “intuitividad” a la propiedad general expresada en el postulado Euclidiano. Es decir, si se continúan mentalmente las líneas en ambos sentidos se “ve” aquella dinámica que de ser prolongados indefinidamente no se cruzará la una con la otra (Fischbein, 1987).

Una intuición, entonces, no es pura teoría. Es una teoría expresada en una representación particular utilizando un modelo: un paradigma, una analogía, un diagrama, un constructo corporal, una construcción, etc. (López, 2006).

6. Carácter Extrapolable:

Westcott (1968) escribió: “It appears, that intuition can be said to occur when an individual reaches a conclusion on the basis of less explicit information that is ordinarily required to reach that conclusion” (Westcott, 1968, p. 97 citado en Fischbein, 1987, p.50).

Según Fischbein (1987), Westoctt ha utilizado esta definición como la base teórica de un método de medición de la intuición. En éste, los sujetos tendrían que resolver cinco problemas claves. Así, determinaban la pista final sobre la base de la información obtenida sucesivamente, solicitando, las pistas anteriores. Por ejemplo, un sujeto ve “Enero”, pide más información (segunda pista o clave) y obtendría “Febrero”. Luego podría decidir que la quinta clave debería ser Junio. Asimismo, otro sujeto tiene como primera pista: 326-1957, pide otra pista y obtiene 732-6195. No puede resolver el problema y pide una tercera clave, entonces obtiene 573-2619. Entonces decide que la quinta pista debería ser 195-7326 (Westcott, 1968 citado en Fischbein, 1987). Así, la medida de la capacidad intuitiva del sujeto dependerá de cuántas claves o pistas necesite para resolver el problema. De esta manera, una persona con alta capacidad intuitiva imaginó la solución basándose sólo en un pequeño número de señales o pistas, es decir, en una pequeña cantidad de información (Fischbein, 1987).

Las nociones intuitivas tienen la capacidad de extrapolarse de un dominio a otro. Así, por ejemplo, en el caso de un estudiante que aplica las propiedades de los conjuntos finitos a los infinitos, se puede observar cómo se rechaza la posibilidad de establecer una relación unívoca entre el conjunto de los números pares positivos y el de los números naturales (Fischbein, 1987 citado en Molina, 2007).

Ahora, si bien parte de la base de que la intuición siempre excede la información disponible, no obstante, una conjetura obtenida por extrapolación no es suficiente para definir una intuición. La combinación particular entre el carácter incompleto de la información y de la seguridad o certeza intrínseca caracterizan muy bien a una intuición (López, 2006).

Sin embrago, el rasgo extrapolable de una intuición no es siempre evidente, ya que la aparente obviedad implicada en la intuición termina ocultando el carácter incompleto de la información sobre la cual estaría basada. De este modo, una información intuitivamente evidente podrá no requerir de información adicional o de una prueba lógica que la sustente, ya que esa aparente obviedad de la información implicada en la intuición tendría como resultado el ocultar la posible necesidad de una prueba adicional (López, 2006).

Por ejemplo, si se considera el siguiente postulado: “por un punto exterior a una recta dada, sólo cabe trazar una paralela”. Pareciera ser que la expresión es intuitivamente evidente, por lo que no parece requerir ninguna información adicional ni prueba lógica. De hecho, la declaración es capaz de extrapolar una experiencia limitada hasta el infinito. Sin embargo, la aparente obviedad de tal declaración oculta la necesidad (y, por supuesto, la imposibilidad) de una prueba adicional (Fischbein, 1987).

“Poincaré has emphasized the intuitive leap which characterizes the recurrent method of reasoning. If a statement is true for 1 and if true for n - 1, it is also true for n, one concludes that the statement is true for every n. The reasoning proceeds through “a cascade of hypothetical syllogisms”. If true for 1 than it is also true for 2; if true for 2 than it is also true for 3, etc. It is enough to conclude with absolute certitude that *the theorem is true for every n*” (Fischbein, 1987, p.51).

De este modo, el salto intuitivo del razonamiento tendrá que intervenir cuando se trate con procesos infinitos o con conjuntos infinitos. Al parecer, la forma dinámica del infinito no presenta dificultad, pareciera ser que se está naturalmente apto/a para concebir la indefinida continuación de un proceso. “La noción de infinito dinámico expresa directamente, en la forma más pura, el carácter extrapolable de la intuición” (López, 2006, p.32).

“This is in fact the fundamental role of intuitive cognitions: to confer certainty on extrapolated ideas” (Fischbein, 1987, p.53).

7. Globalidad:

El conocimiento intuitivo tiene un carácter general, unitario, explicativo de un fenómeno o concepto. Es decir, cuando se forma una noción intuitiva de algo, ésta llega en forma íntegra, completa. Por ejemplo, si se le mostrara a un sujeto una foto de un amigo, no llegaría a su mente la información referente a su corte de pelo, ojos, forma de vestir, etc. para luego reconocerlo e identificar quién es. La información se daría en un instante, como un todo, es decir, al ver la imagen, inmediatamente sabría de quién se trata, sin tener que enfocarse o detenerse en los detalles. De este modo, esta característica de las nociones intuitivas, permite que se pueda tener una idea-visión general de ciertos fenómenos (Molina, 2007).

Es así como, la intuición ha sido descrita a su vez como un panorama global y sintético, que se opone al pensamiento analítico que es de naturaleza discursiva. Así, al ser una “visión” condensada, la intuición se expresa frecuentemente a través de una simbolización visual (Fischbein, 1979). Se ha dicho que el carácter global anidado en la intuición está relacionado con el concepto de la Gestalt. La teoría de la Gestalt tiene como máxima que "el todo es más que la suma de sus partes", es decir, sería el todo el que le daría sentido a las partes (López, 2006). Si se considera entonces, que la intuición es un conocimiento estructurado capaz de ofrecer una mirada global, unitaria o "insight" de una cierta situación, fenómeno o concepto, se puede considerar que las leyes que gobiernan la cristalización de las intuiciones son similares a las leyes de la Teoría de la Gestalt (Fischbein, 1987). Esto se ve claramente en el ejemplo revisado más arriba, así, "for instance, one may plausibly connect the role of analogy in structuring an intuitive view with the fact that the meaning of a Gestalt is determined by its basic internal dependencies rather than by the discrete elements from which it is composed" (Fischbein, 1987, p.53).

Ahora bien, Fischbein (1987) da otro ejemplo que vale la pena rescatar. Si a un estudiante por primera vez se le confronta con el problema de encontrar la fórmula para el volumen de un prisma, ésta podría ser inspirada por analogía con la fórmula para calcular el área de un rectángulo. "Globalmente" las dos situaciones son similares, se puede decir que existe una misma idea básica en ambos procedimientos, se multiplica la base por la altura. Según Fischbein (1987), la transferencia de una situación a otra no se haría a través de la deducción, sino más bien por captar intuitivamente, en forma directa, las situaciones globales comunes y la idea de la solución en ambos casos.

Así, las intuiciones pueden ser más o menos estructuradas (internamente organizadas) y como consecuencia más o menos estables. Es decir, habrían intuiciones inmaduras incipientes que eventualmente podrían desvanecerse con facilidad bajo el impacto de algunos conflictos que se opongan al carácter evidente de las mismas. Y, por otro lado, habrían intuiciones fuertes, arraigadas profundamente en la experiencia de una persona, muy bien articuladas internamente y al mismo tiempo, muy bien articuladas con la estructura entera de las habilidades y esquemas mentales del sujeto (Fischbein, 1987; López, 2006).

8. Carácter Implícito:

> "According to Jung, intuition perceives, unconsciously and uncritically, possibilities, principles, implications and situations as a whole"
> (Westcott, 1968, p. 34 citado en Fischbein, 1987, p.55).

Como se dijo más arriba, esta característica es un centro prístino de este texto, desde aquí emergen varios de los cuestionamientos y problemáticas que se plantean. Este rasgo de las nociones intuitivas hace referencia a que las personas que portan aquellas nociones no están conscientes de ellas. Un ejemplo acuñado por Molina (2004) es cuando a estudiantes universitarios les es difícil aceptar que se puede establecer una relación uno a uno entre los puntos de un plano y de una línea recta. Ellos podrían estar ignorando, por ejemplo, que la razón de que rechacen la posibilidad radica en sus nociones sobre conjuntos finitos, las cuales estarían influyendo en su razonamiento.

"It has been affirmed here that intuitions appear, generally, to the individual as self-evident, self-consistent cognitions. This does not exclude the assumption that the intuitive reactions are in fact the surface structure expression of tacit, subjacent processes and mechanisms" (Fischbein, 1987, p.54). De este modo, el carácter tácito de los procesos sobre los cuales una intuición está basada explicaría su aparente obviedad. Sin duda que esta condición hace que el autocontrol que se pueda tener sobre las intuiciones se convierta en una difícil tarea de realizar, constituyéndose un desafío personal y pedagógico en el terreno tanto de la enseñanza- aprendizaje como en el de la investigación.

"La intuición no sólo oculta sus estrategias tácitas sino que se opone automáticamente a cualquier análisis porque podría destruir su certeza intrínseca, su carácter compacto, su robustez" (López, 2006, p.33). Como resultado de tal análisis el sujeto se vería enfrentado al riesgo de confundirse, poniendo en peligro su actividad de razonamiento.

Así, en algunos ejemplos, interpretaciones o evaluaciones intuitivas se utilizan deliberadamente significados intuitivos, principalmente modelos intuitivos y actividades prácticas. Por ejemplo, a veces la analogía del sistema solar se utiliza para la interpretación de la estructura del átomo, o diagramas de árbol son utilizados en problemas de combinatoria, o segmentos de recta orientados son utilizados para representar magnitudes vectoriales, etc. En estos casos, los procesos íntimos desde donde surge la comprensión intuitiva son en su mayoría desconocidas para los sujetos. Es decir, muchas veces la identificación con el modelo y viceversa, se realiza sobre la bases de ciertas reglas y procesos que el individuo "no conoce" o no está consciente (López, 2006).

8.2.- Breve clasificación de las intuiciones basada en los planteamientos de Fischbein

Diversos autores han propuesto clasificaciones y categorizaciones en torno a la intuición, entre ellos Piaget (1966). Fischebin mismo también propuso a lo largo de su carrera varias clasificaciones, sin embargo, todo desglose del conocimiento intuitivo propuesto por él lejos de buscar ser absoluto o concluyente, está basado en sus funciones, en sus orígenes y en su relación con otros tipos de cognición.

Las clasificaciones que se plantean a continuación son una selección construida por la autora de este escrito, en base a lo que Fischbein planteó en sus artículos.

A.- Primera Clasificación

Fischbein distinguió dos categorías básicas de intuición: Intuiciones Anticipatorias e Intuiciones Afirmatorias.

a) Intuiciones Anticipatorias (Anticipatory Intuitions):

Son puntos de vista preliminares, visiones globales que preceden a la solución analítica, completamente desarrollada de un problema (Fischbein, 1979).

Según Fischbein (1982), diversos autores han hablado de este fenómeno con distintos nombres: "Anticipatory intuitions have been investigated and described by psychologists in relation to problem solving. O. Selz [1922] used the term "anticipatory schemes". The Gestaltists have frequently used the term "insight" and others, like Bruner [1965, pp. 55-68] and Wescott [1968], have used the term "intuitive" - or "intuitive thinking" - for describing almost the same phenomenon" (p.10). Según el autor, dichas descripciones hacen referencia al hecho de que mientras se esfuerza por resolver un problema, de repente se puede tener la sensación de que se ha comprendido la solución, incluso antes de que se pueda ofrecer ninguna justificación explícita y completa para ella (Fischbein, 1982).

De este modo, las Intuiciones Anticipatorias serían aquellas relacionadas con esa vivencia de "iluminación" que experimenta el sujeto cuando intuye haber hallado la respuesta a un problema. Es decir, aparecen durante un esfuerzo resolutor, acompañadas de un carácter global, produciendo conjeturas que están fuertemente asociadas a un sentimiento de certeza (Parraguez, 2012).

b) Intuiciones Afirmatorias (Affirmatory Intuitions):

.

Son representaciones autoevidentes, interpretaciones de explicaciones. Como por ejemplo, parece ser evidente por sí mismo que "los ángulos opuestos formados por dos líneas intersectadas son iguales" o que "en un triángulo, cada lado es menor que la suma de los otros dos lados" (Fischbein, 1979).

De este modo, se habla de "comprensión intuitiva", "significado intuitivo", "interpretación intuitiva", "modelos intuitivos", "la verdad intuitivamente aceptada". Según Fischbein (1982), Piaget utilizaba el adjetivo "intuitivo" principalmente en este sentido.

Así, las Intuiciones Afirmatorias harían referencia a una afirmación, representación, explicación o interpretación directamente aceptada como algo natural, evidente por sí misma, intrínsecamente significativa, como un simple hecho dado (Fischbein, 1982).

"When we claim that the psychologists have neglected the concept of intuition we refer especially to the category of intuitions that we have termed "affirmatory intuitions". The fact that there are representations, notions, interpretations, statements, which are accepted directly as intrinsically meaningful while others are not, has not been investigated by psychological research" (Fischbein, 1982, p. 10).

B) Segunda Clasificación, basada en el origen de las Intuiciones Afirmatorias

a) Intuiciones Primarias (Primary Intuitions):

Son aquellas creencias interpretativas o explicativas que se desarrollan naturalmente como efecto de la experiencia personal de los seres humanos, es decir, antes o independientemente de una instrucción sistemática. Asimismo, estas intuiciones están profundamente influenciadas por el entorno o contexto social-cultural del sujeto. Un ejemplo de este tipo de intuición es el peso, que se constituye como una representación primaria intuitiva, como una cualidad intrínseca de los objetos. Así también, otro ejemplo, es la representación natural tridimensional, no-isotrópica que se tiene del espacio (Fischbein, 1979).

De acuerdo a sus características, no se quiere decir que las intuiciones primarias se fijan para siempre, que no cambian. Muy por el contrario, ellas dependen en gran medida de las experiencias personales que el sujeto vaya teniendo. Al decir Intuiciones Primarias, se busca hacer énfasis en el hecho de que dichas intuiciones se desarrollan naturalmente en los niños y niñas como resultado de aquellas experiencias básicas de la vida cotidiana. Algunas de las que se desarrollan son de tipos espaciales, temporales, físicas, numéricas y relativas al infinito (Fischbein, 1979).

Así, este conocimiento va surgiendo espontáneamente, cuyo origen se mantiene arraigado a aquellas experiencias personales y conocimientos previos, donde los primeros conocimientos adquiridos irán modulando y dándole forma a las Intuiciones Primarias del sujeto (Tirosh & Tsamir, 2012).

Otro ejemplo, que hace referencia a este tipo de fenómeno, es la experiencia que se puede tener con el compuesto, mezcla de Nitrato de Sodio y Nitrato de Potasio, llamado "Sales para Intercambiadores de Calor", utilizados en la industria de hidrocarburos (Petróleo, Gas). Estas máquinas (Intercambiadores de Calor)[13] son usadas para calentar hidrocarburos y facilitar su transporte en ambientes fríos, debido a que cuando se enfrían los hidrocarburos su consistencia se hace viscosa y difícil de escurrir. Se utilizan estas sales, ya que su punto de ebullición es significativamente más alto que el del agua. Su

[13] En el anexo n°2 se incluye una imagen de dicha maquinaria.

punto de fusión (de sólido a líquido) es de 142°C y su temperatura de servicio fluctúa entre los 149°C y los 593°C, según la normativa oficial. En estado líquido, estas sales conservan un aspecto muy similar al del agua fría, es transparente, no emite vapores ni burbujas, a pesar de que podría estar a 400 grados Celsius de temperatura. Si un trabajador ignora esta característica, fácilmente podría quemarse. Por ejemplo, si se tuvieran dos baldes, uno con estas sales a 400°C y otro con agua fría, ambos contenidos lucirían exactamente igual, pero uno podría quemar por completo una mano y el otro no. Es decir, probablemente la experiencia cotidiana con el agua podría inducir un accidente al reaccionar intuitivamente frente a un compuesto que contiene otras propiedades.

De este modo, debido a un efecto de primacía, donde lo que se aprende primero es difícilmente olvidado y "sobre-implementado", estas Intuiciones Primarias suelen proveerse de mucha resistencia. Así, en diversos casos son capaces de coexistir con conocimiento formal adquirido a través de la instrucción, educación y/o institucionalización explícita. Fischbein proporcionó numerosas y significativas evidencias como material de ejemplo y discusión en torno al razonamiento matemático intuitivo, provenientes de sus propias investigaciones, a partir de otros estudios y de la historia de las matemáticas. Un ejemplo bastante citado es el del problema de comparar el número de elementos en dos conjuntos infinitos. Una respuesta intuitiva común que se ha registrado, es afirmar que el número de elementos de un conjunto infinito es mayor que el número de elementos en cada uno de sus propios subconjuntos infinitos. Respuesta que podría estar influenciada y/o basada en la experiencia del sujeto con conjuntos finitos. Asimismo, Fischbein describió cómo esta tendencia también formó parte de descripciones de matemáticos a lo largo de la historia. "For example, Hahn (1956, p. 1604) stated that "if we look for examples of enumerable infinite sets we arrive immediately at highly surprising results. The set of all positive even numbers is an enumerable infinite set and has the same cardinal number as the set of all the natural numbers, though we would be inclined to think that there are fewer even numbers than natural numbers" (Tirosh & Tsamir, 2012, p. 2).

Por último, un ejemplo común es cuando se plantea la situación de dejar caer simultánea y libremente desde la misma altura dos objetos de apariencia externa idéntica, pero de pesos diferentes, existe aún la creencia, a pesar de los trabajos de Galileo, de que el objeto más pesado llegará primero al piso. Esta noción se constituye como una creencia intuitiva, a pesar de ser incorrecta (Parraguez, 2012).

b) Intuiciones Secundarias (Secondary Intuitions):

Son aquellas que se van desarrollando a partir de una instrucción y entrenamiento intelectual sistemático y prolongado, generalmente asociado al contexto escolar. Así, por ejemplo, la ejercitación sistemática de las fórmulas para la simplificación, factorización, etcétera, de expresiones para algunos docentes tiene por objetivo crear estas intuiciones en los estudiantes de secundaria y bachillerato para sus cursos posteriores de matemática, como los de Geometría Analítica o Cálculo (Parraguez, 2012).

Es decir, a grandes rasgos, si bien la distinción que se establece entre las Intuiciones Afirmatorias Primarias y Secundarias no es general, pues depende del desarrollo de cada sujeto, básicamente dicha diferencia radica en el medio utilizado para adquirirlas: de manera natural (Primarias) o a través de un entrenamiento sistemático en condiciones instruccionales adecuadas (Secundarias) (Parrraguez, 2012).

Un ejemplo acuñado por Fischbein (1979) que cabe mencionar es: para un físico parece natural afirmar que un cuerpo se mantiene en movimiento con dirección y velocidad constante, si ninguna fuerza interviene. Esto sería una Intuición Secundaria, que a la vez podría contradecir la Intuición Primaria de que un cuerpo se mantiene en movimiento sólo si una fuerza actúa sobre dicho cuerpo (Fischbein, 1979).

Es decir, a partir de los postulados que Fischbein propone se podría afirmar que las “verdades aprendidas”, incluso aquellas elaboradas mediante un complejo sistema conceptual podrían alcanzar las características de las intuiciones, es decir, ser aceptadas como verdades naturales autoevidentes (Fischbein, 1979).

“The above classification implies the following fundamental hypothesis: Intuitions-though appearing as givens (i.e., as produced by some a priori mechanisms) are, in fact, changeable. They may be built, transformed, corrected, or eliminated as a result of adequate training” (Fischbein, 1979, p. 35).

(Imagen sin referencia). Un /a profesor/a es un/a funámbulo/a, que trabaja sin red…
Otra metáfora para un profesor o profesora…

CUARTA PARTE:

Los paseos de la intuición y su vínculo con el pensamiento matemático

9.- ¿QUÉ SUCEDE ENTONCES CON LAS INTUICIONES ERRÓNEAS?

Si bien el campo de las intuiciones no ha sido bastamente explorado por la ciencia, Fischbein durante su vida realizó diversas investigaciones explorando las influencias de de las intuiciones y de los modelos intuitivos en el aprendizaje en matemáticas.

Según Fischbein (1987), la vivencia de obviedad, evidencia, certidumbre, alta certeza etc., con respecto a una determinada solución (que al estar combinadas producen la sensación de intuición) determinan la solidez de las respectivas nociones intuitivas. Así, si es el caso, de no ser correcta es muy difícil de eliminar. De esta manera, sin duda que la categoría de conocimiento sólido erróneo impone la necesidad de una atención didáctica especial. La experiencia ha demostrado que las intuiciones sólidas, “robustas”, sin importar si son correctas o erróneas, tienden a sobrevivir incluso si están en contradicción con una instrucción formal sistemática.

Como se dijo más arriba, de la mano de nociones matemáticas, físicas, químicas, etc. existen intuiciones construidas desde la experiencia que muchas veces entran en contradicción con conocimientos formales, produciéndose una tensión pedagógica que deviene en algunas problemáticas y dificultades. Así, por ejemplo, en relación a las probabilidades, a los principios de movimiento, caídas libres, ley de inercia, planos inclinados, etc. se han visto este tipo de procesos contradictorios. Tal como en el ejemplo ya enunciado, una primera intuición puede ser que un cuerpo tarde o temprano para de moverse si la fuerza que lo impulsa cesa. Luego otra idea lógica, es que si la aceleración de un cuerpo es cero, es decir, si su velocidad es constante, dicho cuerpo no parará de moverse si ninguna fuerza interviene.

Existen así, conclusiones, teorías basadas en análisis lógicos que plantean contradicciones con las nociones arraigadas fuertemente a las experiencias familiares de de vida de los sujetos. Frente a estas situaciones Fischbein (1987) planteó: “Can such a theory be transformed into an intuitive acceptance (i.e., as a self-evident truth)? And, is it necessary that such a logically based theory should be associated with an intuitive feeling of obviousness, of direct credibility? Our answer to the second question is: Yes, particularly if it must be opposed to a different, incorrect intuition. Why? Simply because for non-standard questions, there is a high probability that the student will answer according to his intuition and not the learned conceptual framework” (p.45).

Las intuiciones a menudo pueden ser muy coercitivas y persistentes. En consecuencia, aquellas que son erróneas pueden influenciar engañosamente, desde el error, a los sujetos, incluso a quienes poseen una buena preparación teórica en un campo determinado. Este fenómeno es bien conocido sobre todo en el campo de las probabilidades. Aunque, como se dijo, este tipo de nociones erróneas también pueden ser encontradas en otras ramas de las matemáticas (Fischbein, 1979).

Así, algunas interpretaciones primitivas suelen ser peligrosas, ya que podrían eventualmente distorsionar el pensamiento matemático. Extrapolaciones ilegítimas, erróneas podrían realizarse en el caso de que sea posible para las intuiciones “invadir” o inmiscuirse en las actividades matemáticas. Así como también la plena confianza en las intuiciones, claramente podría terminar por limitar la libertad creativa del pensamiento matemático (Fischbein, 1979).

Fischbein y Schnarch (1997), realizaron un estudio que tenía como propósito investigar la evolución, con la edad, de estas intuiciones probabilísticas basadas en nociones erradas. Ellos habían construido una hipótesis sobre la base de investigaciones previas con los conceptos de infinito, que consistía en afirmar que aquellas nociones erróneas se estabilizarían durante la emergencia del período de operaciones formales. En aquellos estudios previos se había encontrado que varios conceptos erróneos, de base intuitiva, relacionados con la noción de infinitud se mantenían relativamente estables en todas las edades, a partir del periodo de operaciones formales.

Ahora bien, en este estudio el objetivo principal era investigar si dicho hallazgo era generalizable mediante la extensión de aquella investigación a un dominio diferente de las matemáticas: las intuiciones probabilísticas. En dicha temática las investigaciones eran escasas[14], por lo que se buscaba además ser un aporte en relación al tema, a la vez que se esperaba que dicho estudio aportara a una mayor comprensión de los mecanismos que contribuyen a las ideas intuitivas falsas en general y a las relacionadas a las probabilidades en particular (Fischbein & Schnarch, 1997).

Las respuestas a los problemas de probabilidad de los estudiantes de 5°, 7°, 9° y 11° grado y de los eventuales profesores, indicaron, contrariamente a la hipótesis que ellos tenían, que algunas de aquellas nociones erróneas se hicieron aún más fuertes con la edad, mientras que otras se debilitaron. Sólo una de las nociones erradas investigadas fue estable a través de las edades. Así, se hizo el intento en dicho paper por encontrar una explicación teórica para esa situación compleja y extraña (Fischbein & Schnarch, 1997).

En términos generales, en las soluciones intuitivas de los estudiantes a los problemas que se plantearon, se pudo identificar una estructura común: la solución estaría conformada por la interacción entre un esquema intelectual general, aceptado intuitivamente por el

[14] Para la revisión de investigaciones relacionadas a los aspectos del desarrollo de las intuiciones probabilísticas ver Fischbein, 1975; Fischbein y Gazit, 1984; Fischbein, Nello, y Marino, 1991; Garfield y Ahlgren, 1988; Green, 1983; Hawkins y Kapadia, 1984; Piaget & Inhelder, 1951; y Shaughnessy, 1992.

estudiante, y ciertas limitaciones específicas del problema. El impacto de aquellos esquemas aumentaría con la edad del sujeto. Donde dicha influencia, ciertamente tácita, podría ser adecuada o inadecuada. En este paper se propone la utilidad de examinar y discutir durante la instrucción de las probabilidades, problemáticas como las analizadas en dicha investigación. Se propone que esto sería un aporte no sólo en relación a la presentación del problema y la corrección de su solución, sino que también en el análisis de la estructura psicológica de los errores correspondientes. Se ha visto que en cuanto a las probabilidades no se trata del manejo de una mera información técnica y de procedimientos que conducen a ciertas soluciones, sino más bien esta rama de las matemáticas requiere una manera de pensar genuinamente diferente a la requerida por la mayoría de las nociones matemáticas escolares. Según los autores, en el aprendizaje asociado a las probabilidades, los estudiantes deben crear necesariamente nuevas intuiciones. La educación puede llevar a los estudiantes a experimentar activamente los conflictos entre sus esquemas intuitivos primarios y los distintos tipos de razonamiento específicos para situaciones o procesos estocásticos. Así, según ellos, si los estudiantes son capaces de aprender a analizar las causas de sus conflictos y errores, entonces podrán ser capaces de superarlos y alcanzar una genuina forma probabilística de pensar (Fischbein & Schnarch, 1997).

“The problem is not only to avoid the negative effect of some immature or false intuitions. <u>Correct intuitive representations, interpretations or explanations represent essential prerequisities for mathematical thinking and for scientific thinking in general.</u> Michael Pollany expressed this as following;

...We can understand mathematics only by our tacit contribution to its formalism. I have shown how all the proofs and theorems of mathematics have been originally discovered by relying on their intuitive anticipation; how the established results of such discoveries are properly taught, understood, remembered in the form of their intuitively grasped outline; how these results are effectively reapplied and developed further by pondering their intuitive content; and they can therefore gain our legitimate assent only in terms of our intuitive approval. I have indeed shown that all articulation depends on a tacit component of the same kind for conveying a meaning accredited by the person uttering it” (Polany, 1958, p. 188 citado en Fischbein, 1979, p.47).

10.- CONSTRUYENDO…

Ahora bien, si las matemáticas son una ciencia “dura”, “exacta”, ¿cómo se podría pensar, sentir y vivir el construccionismo de ahí?, ¿cómo abrir un espacio de deconstrucción de aquellos conocimientos intuitivos?

Si se hace referencia a las Intuiciones de Anticipación o Anticipatorias, podría parecer una discusión bastante trivial. En general, existe un acuerdo de que mientras se trata de resolver un problema matemático la solución completa generalmente es anticipada por una visión global de la misma. Sin embrago, parece ser menos evidente que la comprensión intuitiva, la mirada intuitiva de las “verdades” matemáticas, habitualmente no es menos importante para la actividad matemática que esas experiencias de Intuiciones Anticipatorias (Fischbein, 1979).

En su texto “Intuition and Mathematical Education”, Fischbein (1979) señalaba que el pensamiento matemático productivo incluye necesariamente dentro de sus componentes activos formas intuitivas de aceptación, representación y prueba. Según el autor, el punto crucial no sería reemplazar la estructura formal por intuiciones, sino más bien inyectarle a esa estructura formal la dinámica específica del pensamiento humano. Es decir, según Fischbein mientras que la verdad matemática está garantizada por aquellos sistemas lógicos, la evolución del pensamiento matemático sería estimulada y garantizada por sus posibles diversos modelos y representaciones intuitivas.

Se ha hecho común que en diversas áreas de las matemáticas se tienen una serie de conceptos cuyos significados no son fáciles de comprender por los estudiantes. Incluso en el caso de que cada uno de dichos conceptos sea previa y claramente definido y que los estudiantes conozcan dichas definiciones, se presentan dificultades significativas. Parece una tarea difícil ordenarlos y coordinarlos en un sentido unitario, puramente lógico (Fischbein, 1979).

Fischbein (1979) escribió: “In fact -as has been frequently repeated- we must distinguish between the axiomatic form of a constituted branch of mathematics and mathematical thinking as a productive process. <u>Mathematical thinking is a constructive activity</u> during which we try, we combine, we guess, we formulate assumptions, we check, we extrapolate, and we make large mental jumps. Mathematical activity possesses all these qualities which are shared by every adaptive intelligent activity. Therefore, if we admit that intuitions are a sine-qua-non component of intelligent behavior, we must also admit that mathematical thinking normally includes intuitive ways of looking for, of trying, of checking, and of representing" (p.47).

Ahora bien, considerando aquella posibilidad de error antes mencionada, se podría haber preguntado si es necesario entonces desterrar sistemáticamente a las interpretaciones intuitivas del pensamiento matemático. Seguramente no, por la sencilla razón, como diría Fischbein, de que sin intuiciones no se puede pensar de forma productiva. A Pavlov se le atribuye haber dicho "Los hechos son el aire de los científicos", ahora bien, se entiende de dicha frase que los "hechos" no son sólo aquellos físicos, materiales, sino que comprenden a su vez aquellos "hechos mentales", "objetos mentales" utilizados en el pensamiento creativo. Con respecto a esta frase, Fischbein (1979) decía "Intuitive representations are the most stimulating category of such mental facts" (p.48). De este modo, se entiende que las intuiciones son capaces de guiar, inspirar, provocar, e incluso algunas veces, verificar la actividad productiva-adaptativa. Según el autor, la superioridad y el peligro, a su vez, que implican las intuiciones radica en que ellas no ofrecen una información meramente fenomenal. Así, se puede decir que, una intuición es una teoría, expresada en una elaborada y condensada estructura cognitiva, basada en la experiencia personal previamente vivida, más o menos generalizada (Fischbein, 1979).

De este modo, la especificidad de la intuición no estaría dada por su primitivismo o aspereza, sino que se definiría a partir de su globalidad e inmediatez. Así, en correspondencia con los distintos niveles de abstracción matemática, podrían haber distintos modos de interpretación intuitiva de un mismo concepto. Es decir, en esa representación global y autoevidente, por lo general, se encuentran imágenes mezcladas e interpretaciones expresadas verbalmente. Sin embargo, más allá de todo esto se puede observar un sentido unificador que es clave en las nociones intuitivas: inspirar, dirigir, estimular y controlar el proceso constructivo mental (Fischbein, 1979).

11.- INTUICIÓN Y EXPERIENCIA

“The basic source of intuitive cognitions is the experience accumulated by a person in relatively constant conditions” (Fischbein, 1987, p.85).

En este espacio de construcción de conocimiento anidado en la vivencia de nociones intuitivas, la experiencia cobra un rol protagónico desde donde se construye a su vez que conocimiento, historia y subjetividad.

Así, algo importante de rescatar, como se dijo más arriba, es que al ser la intuición una versión condensada y adaptada desde lo práctico de alguna información, interpretación o solución, su relación con la experiencia adquirida previamente es bastante natural u obvia si se quiere. Así, a su vez se van conjugando los esquemas que se tienen a priori y las representaciones que se van construyendo de los hechos y situaciones específicas, donde la intuición va siendo resultado, total o parcial, de la experiencia práctica personal (Fischbein, 1979).

“La experiencia constituye un factor fundamental en la formación de intuiciones y produce con el tiempo un sistema estable de representaciones que se traducen en programas estructurados de acción y de espera” (López, 2006, p.34).

Se han distinguido tres aspectos principales: (1) Los elementos comunes a toda la experiencia humana; (2) las experiencias que están vinculadas a la cultura y al ambiente geográfico en el cual cada persona vive (intuiciones básicas) y (3) por último, las experiencias particulares personales, propias de la vida de cada sujeto (intuiciones individuales. Por ejemplo, intuiciones profesionales) (López, 2006).

Dentro de estas categorías, se ha señalado que las intuiciones espaciales pertenecerían al dominio de la experiencia humana, éstas van evolucionando con la edad y se constituyen como producto de la práctica y de la maduración bilógica. Si bien algunos factores innatos contribuyen a la organización de las representaciones espaciales, la conducta y la experiencia juegan un rol fundamental en ella. De este modo, por ejemplo, las representaciones espaciales primarias están formadas básicamente por la vida en la Tierra, por la experiencia de ese habitar. Así, no se puede imaginar el espacio infinito o absolutamente limitado, ya que ambas interpretaciones están totalmente fuera del alcance de la experiencia humana (López, 2006).

“La naturaleza limitada de la experiencia humana impone restricciones sobre el carácter seguro de las intuiciones y la calidad de práctica de las experiencias tiende a atribuir intuitivamente a nociones y operaciones mentales, propiedades que pertenecen puramente a lo concreto” (López, 2006, p. 34).

Es decir, en la relación de la intuición con la experiencia se juega algo significativo, relevante. Partiendo del supuesto básico de que las intuiciones juegan un papel constitutivo en la gestión constante y dinámica y que sólo pueden ser elaboradas en el curso de tal enfoque activo, se entiende que a través de meras explicaciones formales verbales, sólo se podrá enseñar una estructura conceptual. Así, esta estructura podría parecer muy convincente desde un punto de vista lógico formal. Un estudiante podría decir, por ejemplo, “ahora estoy convencido de que esto debe ser así, porque no encuentro ninguna laguna o vacío en su prueba”. Pero también podría agregar “A pesar de esto no me siento completamente cómodo con su enunciado”. Así, se ha planteado que para superar o trascender este tipo de conflictos, es decir, para poder crear una aceptación genuina, verdadera, intuitiva de un enunciado “x”, tanto la prueba como el enunciado deberían proporcionar una dimensión conductual. Ahora bien, esta “dimensión conductual” sólo podrá ser creada si el estudiante tiene la oportunidad de ser personal, práctica y experiencialmente involucrado en dicho proceso (Fischbein, 1979).

Como se mencionó anteriormente, en el campo de las probabilidades se encuentra un background intuitivo deficiente entre los estudiantes. Se podría decir, entonces, que en esta área de las matemáticas se puede demostrar bien el rol que juega la experiencia en la creación de nuevas intuiciones correctas.

Para Piaget e Inhelder (1951; 1975 citado en Fischbein, 1979), el concepto de probabilidad puede ser entendido por el niño o la niña sólo en el nivel de operaciones formales, al construir una síntesis entre el azar y las operaciones deductivas. Más aún, mencionan que aquella síntesis generalmente no ocurre espontáneamente en dicho nivel. Fischbein (1979) en relación a esta problemática señaló que debido a que la educación científica actual está en su mayoría orientada hacia la elaboración de formas deterministas de pensar e interpretar, se termina desarrollando un desequilibrio entre ambos componentes. Así, como efecto de dicha educación escolar, los estudiantes van asimilando diversas habilidades mentales y formas intuitivas de interpretación que los van ayudando a afrontar con éxito situaciones deterministas. Por otro lado, cuando se ven enfrentados a problemas, incluso simples, que están relacionados a procesos aleatorios, los estudiantes con frecuencia dan soluciones equivocadas. Así, muchas veces no sólo carecen de procedimientos técnicos correspondientes, sino que sobre todo de intuiciones básicas mentales que sean correctas. Lo que Freudenthal (1979 citado en Fischbein, 1979) llamó “objetos mentales” (Fischbein, 1979).

El siguiente ejemplo acuñado por Fischbein (1979), es un fiel representante de este tipo de situaciones: En un intento por enseñar a estudiantes de doce años de edad el concepto de probabilidad un profesor comienza trabajando los conceptos de posible, seguro, imposible. Luego, les da varios ejemplos de ciertos eventos y acontecimientos posibles, utilizando cajas que contenían bolitas (canicas) de colores, por ejemplo, rojas y blancas. Así, en una caja que contenía el mismo número de bolitas rojas y blancas, les pide a los estudiantes que saquen una bolita en cada ensayo. En el experimento participaron cinco estudiantes y cada uno de ellos realizó un total de 20 ensayos. Después de los cien ensayos, el resultado fueron 47 bolitas rojas y 53 blancas. Entonces el profesor concluyó diciendo “Como pueden ver, el número de bolitas rojas y el número de bolitas blancas registradas están muy cerca (47-53). Ambas cercanas a 50. Qué piensan: ¿Obtendríamos resultados similares si se replicara la experiencia? En otras palabras, si otro grupo de estudiantes repitiera la experiencia en las mismas condiciones, ¿conseguirían de nuevo un número aproximadamente igual de bolitas rojas y blancas?” La respuesta de los estudiantes fue negativa: “No, no podemos predecir nada porque los resultados son aleatorios”. De este modo, lo que aquí estaría faltando es exactamente la síntesis entre lo posible y lo necesario que caracteriza a la probabilidad. No está en juego acá un procedimiento de cálculo, se trataría, diría Fischbein (1979) en palabras de Freudenthal (1979), de “objetos mentales”. Los estudiantes no estarían aún preparados para “superar” aquella contradicción que involucra dos categorías opuestas de los sucesos (determinado y aleatorio) y de entender la posibilidad de que exista una racionalidad y una predictibilidad asociada a los fenómenos de masas. En relación a dicha temática, Fischbein (1979) señaló: “In Piaget and Inhelder's view, probability is one operational schemata which (together with the schemata of combinatorics, proportion, etc.)

characterizes the formal operational period. I do not exclude the possibility of describing the concept of probability as an operational schema. I submit, however, that the capacity to understand probability and to correctly use probabilistic procedures requires some specific intuitions. The basic intuition is that of the possible regularity of change events when considering them as mass phenomena” (p.42).

Ahora bien, otro ejemplo similar que se puede rescatar es en un aula universitaria. Estudiantes del Electivo Básico “Matemáticas Postmodernas 1” de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile, donde participaban principalmente estudiantes de 4° año de las carreras de Licenciatura en Ciencias con mención en Matemática y Licenciatura en Ciencias Exactas (Pedagogía en Física y Matemática), el año 2012, se trabajó a partir de un ejercicio enactivo, es decir, que involucraba una experiencia de acción-interacción ocupando el cuerpo en relación con los objetos del medio. Aquí se buscó trabajar principalmente los conceptos de Demora, Frecuencia Relativa, Esperanza y Probabilidad.

El ejercicio consistía primero en abordar desde la asociación libre de conceptos e ideas la palabra “Demora”. Se hizo una lluvia de ideas grupal con las palabras que se venían a la mente con dicho concepto. Luego de jugar un rato a eso, se analizó el listado, se categorizaron las palabras, se agruparon, y a partir de dicho trabajo se construyó colectivamente una definición. Luego, el grupo de estudiantes se ubicó de pie formando un círculo. La profesora se puso al medio del círculo y les pidió que lanzaran monedas hasta que obtuvieran una cara. El registro de la experiencia debía ser hecho frente a cada uno en el suelo, es decir, cada estudiante debía poner en el suelo los sellos y la cara correspondiente al centro del círculo, frente a su puesto. Una vez que todos terminaron de lanzar hasta obtener una cara, la profesora ubicada al centro les pidió que observaran el resultado, tanto grupal como individual, que guardaran en sus mentes este “diagrama” compuesto por cada estudiante con sus monedas al frente y un observador al medio. Tomaron asiento y se comenzó a trabajar sobre la experiencia. Se conversó en torno a la experiencia científica, a los métodos de observación, a la idea de perspectiva, al registro, al para qué y cómo registrar, etc. Se hizo un dibujo en la pizarra de esa imagen mental que se subrayó, donde aparecía cada persona con sus monedas y la observadora. Luego de explicitar entre todos qué se podía observar en dicho registro, qué números aparecían y qué significaban, se rescató la definición de Demora previamente construida y se relacionó con la experiencia. Después de igualar dicho concepto con un número específico, se contrastó con la Frecuencia Relativa. Ahora, luego se les pregunta a los estudiantes qué sucedería si esta misma experiencia se repitiera con otro grupo de estudiantes, qué sucedería si se repite con cien personas y con un millón de personas. Acá surge algo interesante, debido en parte a la diversidad subjetiva en cuanto a historias particulares de vida pero también diversidades grupales, por ser estudiantes de distintas carreras y de distintos años. Se generó en dicha ocasión una discusión porque varios estudiantes respondieron que era imposible saber qué ocurriría, puesto que se estaba trabajando con una experiencia aleatoria. Por otro lado, otro estudiante argumentó que la Demora sería cada vez más cercana a 2, se le preguntó ¿por qué, de dónde sale esa conjetura?, y él dijo "en realidad no sé, me tinca, pero siento que quizás si hago algo de álgebra, quizás con la Esperanza, pueda llegar a algo así". En el grupo se generó una tensión, habían varios estudiantes que esto no les parecía tan claro ni tan obvio, que dudaban de cualquier regularidad de masa en este tipo de sucesos. Luego de discusiones y conjeturas varias, surgió espontáneamente el concepto de Probabilidad y su relación con la Demora (la Demora como inverso de la Probabilidad).

En este grupo curso, si bien tenían una formación bastante avanzada en relación a las matemáticas, las intuiciones erróneas que surgieron en las discusiones fueron evidentes. Como antecedente se barajaba que nunca como grupo habían lanzado al menos 100 veces una moneda como ejercicio de investigación y análisis. No estaba dentro de su historia el trabajo con "grandes números" desde la experiencia, desde lo "práctico". Así por el contrario, cuando se realizó esta misma experiencia con un grupo de estudiantes del Programa de Bachillerato con Mención en Humanidades y Ciencias Sociales de la Universidad de Chile, es decir, con estudiantes con menos instrucción matemática, luego de haber lanzado la moneda 100 veces y de haber registrado y analizado dicha experiencia en varias ocasiones, las intuiciones erróneas y las resistencias fueron mínimas en comparación con el grupo anterior. Era evidente que la experiencia estaba jugando un rol importante en el trabajo de dichos conceptos probabilísticos.

En relación con dichas temáticas Fischbein (1979) señaló: "Let us return to the basic hypothesis: Intuitions are shaped by direct involvement in a practical experience. <u>To create probabilistic intuitions in pupils, there is no other way than by helping them experience probability</u>" (p.42). Es así como, en base a los ejemplos señalados y a los planteamientos de Fischbein, se observa que si, por ejemplo, se organiza a los estudiantes en grupos para realizar una misma experiencia aleatoria en condiciones similares, es muy probable que estos sean capaces de darse cuenta de que si bien cada único resultado de cada ensayo es impredecible, los conjuntos de resultados siguen cierta regularidad. Es decir, al aumentar el número de ensayos, los resultados tienden a distribuirse de acuerdo con ciertas proporciones predecibles (Fischbein, 1979).

Asimismo, en relación a esta rama de las matemáticas se ha visto (Fischbein, 1979) que en general los sujetos no poseen intuiciones naturales para la estimación de eventos compuestos. Así también se ha observado que cuando se busca crear apoyo, acompañando explicaciones verbales con listas de resultados posibles, esto no es suficiente. Es decir, los sujetos deben participar de experiencias aleatorias. Deben ser capaces de ver, por ejemplo, que las frecuencias relativas de los pares de números iguales son de hecho más pequeñas que las frecuencias relativas de pares de números no iguales al lanzar un dado[15]. Se ha visto que algunos estudiantes realizan dicha operación mentalmente, pero esto sale de lo común, es decir, no es lo que ocurre con regularidad. Más aún, se ha observado que como resultado de la participación en experimentos reales, como resultado de dicha vivencia, los estudiantes generalmente mejoran su capacidad para llevar a cabo tales experimentos mentalmente (Fischbein, 1979).

Ahora bien, en torno a la relación entre intuición y experiencia, se puede concluir en palabras de Fischbein (1979): "The main point is that intuitions can be elaborated (or corrected) only as a result of personal involvement in a practical experimental activity. An intuition is not a passive copy (iconic or symbolic) of a given reality. An intuition is always a construct, an interpretation, a presumptive explanation, a guessed solution. An intuition is not a perception and not a simple substitute for a perception-like elementary mental image. An intuition is a theory presented in a perceptual- like manner; it is characterized by globality and practical effectiveness. Such a symbiosis between a theoretical model (with its capacity for interpreting, explaining, and predicting) and perceptual qualities (globality, obviousness, imperativeness, effectiveness) can only be created in a practical, experimental activity. Such an activity requires moments of thoughtful guessing, of assimilating and coordinating information, and of formulating plausible predictions. The

[15] Por ejemplo, poder diferenciar en el lanzamiento de dos dados la variable aleatoria D, definida como número de puntos que muestra un dado. Así, se buscará distinguir la diferencia entre la probabilidad de obtener 5-6 y 6-6 (2/36 y 1/36 respectivamente; donde 1/36 = 1/6 x 1/6).

result is a mental structure having both the qualities of a theory and the qualities of a perception. Like a theory, it is an explanatory or predictive device which is able to connect in one structure the variety of facts gathered; and, like a perception, the same conclusive construct will possess the qualities of a perceptual representation (as a result of the pragmatic character of activity itself)" (p.43).

Como parte de dicha reflexión y análisis, se puede decir entonces que si bien existen ramas de las matemáticas, como la geometría elemental, donde la mayoría de los conceptos y operaciones tienen su representante intuitivo natural, este no es el caso de las probabilidades. Como se dijo, incluso hay problemas relacionados que son de alta simplicidad, donde se necesitan intuiciones especialmente adaptadas que generalmente no existen si el estudiante no ha recibido una educación "especial" o adecuada, pertinente a su experiencia. Muchas de las fórmulas y cálculos asociados a las probabilidades comprenden una estructura algorítmica relativamente simple, así, el problema pedagógico asociado a ellas, más bien está anidado principalmente en la posibilidad de formar un background intuitivo adecuado. De este modo, incluir al estudiante en el proceso de indagación e investigación en la creación de intuiciones, toma especial relevancia en la enseñanza de probabilidades (Fischbein, 1979).

Ahora bien, quizás está demás mencionar que para construir, deconstruir, desarrollar intuiciones probabilísticas adecuadas, existen una serie de experiencias, de situaciones experimentales posibles de realizar como el lanzamiento de monedas, el lanzamiento de dados, la extracción de bolitas de colores, ruletas, ejercicios enactivos que involucren el cuerpo, etc. Actividades que se pueden realizar de una manera práctica y experimental, donde el estudiante puede reflexionar en torno a cómo está acotado el problema, cuáles son las variables involucradas, cómo se puede registrar la experiencia, es decir, el estudiante puede analizar una situación dada, hacer predicciones, construir hipótesis, organizar o diseñar un experimento adecuado, observar, registrar, ordenar y clasificar resultados, comparar resultados con predicciones e hipótesis, etc.

12.- INTUICIÓN, ANALOGÍAS Y METÁFORAS

“To see a world in a grain of sand
And a heaven in a wild flower,
Hold infinity in the palm of your hand
And eternity in an hour.
(Ver un mundo en un grano de arena
Y un cielo (paraíso) en una flor silvestre,
Sostener el infinito en la palma de tu mano
y la eternidad en una hora.)
Extracto de Auguries of Innocence
(Augurios de Inocencia, William Blake, 1757-1827)” (Soto-Andrade, 2007, p.73).

Otro espacio donde la intuición se entrelaza con su andar es la analogía. Como se ha mencionado, parte constitutiva de la intuición es aquella tensión o juego donde es posible, por una parte, entenderla como una guía invaluable para la construcción de conocimiento, a la vez que en otras ocasiones se comporta como un obstáculo para la adquisición y construcción del mismo (López, 2006).

Las analogías, así como las metáforas y los símiles, forman parte de lo que se ha llamado *tropos* retóricos. Etimológicamente, “tropo” significa “giro” en griego. De este modo, en Retórica, un tropo se ha entendido como un giro, expresión o figura del lenguaje que es tomada en un sentido que va más allá de su sentido literal. Históricamente, los tropos fueron considerados sólo como ornamentos del leguaje, como artificios retóricos. Más recientemente, a partir del siglo XVIII, se comenzó a constatar la importancia de su rol cognitivo (Soto-Andrade, 2007, 2012).

En el marco de dicha dinámica, se ha observado que las intuiciones en determinados casos pueden facilitar la emergencia de analogías. De este modo, un estudiante o un científico, frente a conceptos específicos, podría asociar espontáneamente y comparar el nuevo conocimiento con el que existe con anterioridad en su campo conceptual, tratando de aplicar al nuevo conocimiento nociones referidas al anterior. “Establecer esas comparaciones es lo propio del descubrimiento y es el objeto de una forma de intuición de capital importancia, la intuición analógica” (López, 2006, p. 34).

En este sentido, cuando se habla de analogía se está haciendo referencia a una similitud de estructura que podría ser significativa en la construcción de un modelo. Es decir, un modelo produce un objeto mental, el cual posee una consistencia interna a la vez que se constituye relativamente familiar, estructurado y compacto, como un componente viable, un avatar de un proceso activo de razonamiento experimental. De este modo, lo esencial del pensamiento analógico sería aquella posibilidad de transferir un determinado conocimiento de una situación a otra mediante un proceso de mapeo. Estableciéndose, así, un conjunto de correspondencias biunívocas, habitualmente incompletas, entre aspectos de uno y otro conjunto de información (López, 2006).

López (2006), señaló en su texto "La Intuición y la Matemática": "Una analogía intuitiva ayuda a obtener una representación icónica unitaria con un significado concreto de comportamiento que posibilita una comprensión intuitiva, sin embargo, si la intuición analógica se siguiese sin ningún tipo de control en todas sus indicaciones podría conducir frecuentemente a conclusiones contrarias a la realidad" (p.35). De este modo, al igual que en la construcción de un ejemplo para una situación dada, si se descontextualiza una analogía o se escapa de la estructura sistémica que propone, se corre el riesgo de malos entendidos y conclusiones erróneas. Así, cuando un estudiante, matemático, etc. extrapola por analogía se está exponiendo a ser desmentido por los hechos, sin embargo, ese riesgo no debe determinar que no utilice esta forma de exploración mientras pueda resguardar que la lógica siga teniendo sus derechos. Así como un ejemplo, las analogías surgen tendenciosamente para aportar, para distinguir algo concreto en medio de los juegos de equilibrio del aprendizaje. "La exploración analógica conduce, en algunos dominios, a perspectivas de conjunto cuya armonía constituye un elemento esencial de la belleza de la matemáticas" (López, 2006, p.35).

Según Fischbein (1987), la analogía interviene con frecuencia en el razonamiento matemático. Por ejemplo, si un estudiante sabe que el área de un rectángulo es A x B, naturalmente podrá extender dicho principio de aquella solución para el volumen de un prisma o de un cilindro en el que A se convierte en el área de la base del prisma o del cilindro. Ahora bien, Polya (1954 citado en Fischbein, 1987), ha escrito sobre las "grandes analogías" en la matemática y hace referencia a la existencia de una analogía fundamental entre el dominio de los números y el de las figuras (que representaría la base de la geometría analítica) y entre lo finito y lo infinito.

Se han distinguido los diferentes tipos de analogías que pueden intervenir, tácita o explícitamente, en el pensamiento matemático (López, 2006). En primer lugar, se pueden considerar dos categorías principales de analogías “intra-matemáticas”:

a) Esta primera categoría hace referencia a aquellos casos en que tanto el modelo como el original no utilizan medios intuitivos explícitos, sino un simbolismo numérico-algebraico. Por ejemplo, el caso de las operaciones con números imaginarios, definidas por analogía con los números reales.

b) En esta segunda categoría están aquellos términos que son intuitivos, como puede ser una representación geométrica, y el segundo término es una expresión simbólica. Por ejemplo, pertenecen a esta categoría aquellas representaciones geométricas de funciones basadas en el isomorfismo fundamental que existe entre los números y las figuras.

c) Una tercera categoría de analogías, ahora “extra-matemáticas”, que interviene sobre el razonamiento matemático son aquellas que lo hacen mediante el uso de un modelo que puede ser una representación material de los conceptos matemáticos. Por ejemplo, materiales estructurados, representaciones pictóricas de números o conceptos geométricos (como manchas pequeñas para puntos, etc.).[16]

Ahora bien, se ha visto que en procesos de razonamiento reales, estos tipos de modelos pueden presentarse combinados. Y, por lo general, estas mezclas de los modelos son parte de los procesos tácitos, incontrolables, inconscientes y pueden, por lo tanto, dar lugar a interpretaciones erróneas y soluciones incorrectas (Fischbein, 1987).

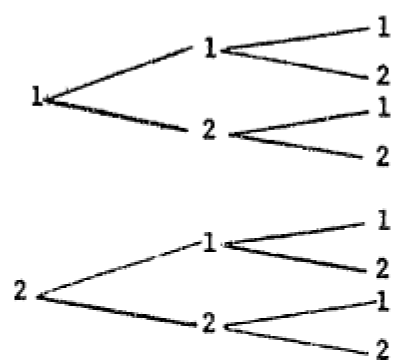
En relación con dichas ideas López (2006) señaló: “Las analogías en la matemática pueden ser beneficiosas si después de ser aceptadas intuitivamente pueden ser justificadas lógicamente. También pueden ser fuente de concepciones erróneas cuando se suponen y/o se asumen correspondencias que no son parte de mapeo estructural de los dos sistemas. Generalmente, esos errores se generan por la incompatibilidad entre

[16] Quizás en este punto se podría agregar la reflexión en torno a las matemáticas y el cuerpo. Es decir, el cuerpo como herramienta en la construcción de analogías que favorezcan el aprendizaje en matemáticas.

una propiedad formal del sistema que está siendo modelizado y una propiedad intuitiva del modelos de representación que, consciente o tácitamente, guía los procesos cognitivos" (p.35).

A partir de estos planteamientos se podría hacer la siguiente pregunta: ¿De qué manera entonces se podría dar cabida a las analogías para favorecer el aprendizaje en matemáticas?

Se podría considerar, por ejemplo, en torno a procedimientos combinatorios, la utilización de un diagrama de árbol para resolver el siguiente problema: ¿Cuántos números de tres cifras se pueden obtener yuxtaponiendo los dígitos 1 y 2?



Frente a esta propuesta, se podrían plantear las siguientes preguntas como ejercicio de movimiento: ¿qué fenómenos circundan en torno a la relación entre intuiciones y analogías?, ¿cómo se aportan?, ¿cómo pueden confluir en un discurso y lugar político-pedagógico común?, ¿cómo se toca todo esto con la interacción entre las metáforas y el aprendizaje en matemáticas?, ¿es este diagrama una metáfora visual?, ¿qué sucede si a este diagrama se le agrega alquimia y los números se transforman en personajes y se entreteje una historia?

Más aún, una pregunta también podría ser: ¿Es suficiente esta imagen estática para provocar una comprensión intuitiva de los procedimientos combinatorios?

Esta última pregunta es quizás trivial y su respuesta demasiado evidente. Sin embargo, cabe hacer hincapié en que para que exista una comprensión intuitiva sólida, los estudiantes <u>deben participar del proceso de construcción</u>. Es decir, si dicho diagrama de árbol forma parte de un proceso de construcción individual y/o colectivo a la vez que simboliza dicho recorrido o proceso de construcción, entonces podrá ser interpretado como un "programa de acción" y, por lo tanto, ganará la eficiencia intuitiva que merece (Fischbein, 1979). Es así como las analogías y su relación con las intuiciones ponen en cuestión no sólo la construcción del conocimiento en sí, sino que también la conjunción de dicha construcción con la de metodologías o formas de abordar los problemas, de la mano de herramientas, competencias que promuevan una actitud activa y creativa frente a una determinada dificultad o desafío.

Ahora bien, a continuación se cita un ejemplo acuñado por Fischbein (1979) en torno al concepto intuitivo de un locus (lugar) geométrico. Según el autor, para enseñar algún concepto geométrico un profesor podría presentarles a sus estudiantes diversos dibujos: "a circle, the perpendicular drawn on the middle of a segment, an angle and its bisectrix, etc. These can be used as examples of the concept of a geometric locus. Moreover, they are represented by visual images. However, such static images contribute little to an intuitive understanding of geometrical locus. They lack a constructive, dynamic component. The circle, the bisector, etc., <u>must emerge as a Gestalt from the set of points which have been drawn by the child himself</u>, in conformity to a given rule. The formal proof comes afterwards. But the intuition of a specific geometrical locus (and, by way of generalization of the concept of geometrical loci in general) can be obtained only by joining, in one single "vue d'esprit" the deductive and the constructive, the iconic and the enactive aspects of the concept" (p. 41).

Asimismo, se podría decir entonces que la representación gráfica de una función, por ejemplo, no es sólo una imagen o la traducción icónica de un concepto, sino que también constituye una ayuda conceptual esencial debido a sus características intuitivas. Es decir, una representación puede incluir una visión unívoca, condensada, que a la vez "renombra" la *dinámica* de una relación matemática. De este modo, se sugiere no sólo una situación limitada (por ejemplo, como resultado de la variación de x entre a y b), sino que también la tendencia, las particularidades de un proceso (Fischbein, 1979).

Ahora bien, lo propuesto por López (2006) y Fischbein (1979, 1987), recién revisado, se relaciona con los planteamientos de Soto-Andrade (2007, 2012) en torno al despliegue de las metáforas dentro del aula de matemáticas.

El autor señala que las analogías son comparaciones entre dos cosas, similares en algún aspecto. Con frecuencia se utilizan para explicar lo poco familiar de lo familiar. Por su parte, metáfora, que en griego significa “transferencia” o “transporte”, alude a cuando se asimilan dos objetos aparentemente no relacionados, describiendo el primero como si fuera el segundo, es decir, transporta significado de un dominio a otro. Ahora bien, un símil o comparación, que es otro de los “tropos” mencionados, usualmente acogido, indicado bajo la palabra “como”, refiere a una similaridad o semejanza entre dos objetos, la cual está explícitamente expresada, tanto en términos de tenor[17] como de vehículo (Soto-Andrade, 2007). “Así entonces, las comparaciones “muestran su juego”. Por el contrario, las metáforas “no gritan agua va”: “Une métaphore est une brevis qui broute dans le pré du voisin” (Una metáfora es una oveja que pasta en el prado del vecino), propone Vinsauf, citado por Prandi (2001)” (Soto-Andrade, 2007, p.72).

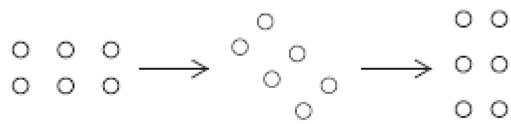
Ahora bien, en relación al rol cognitivo que juegan las metáforas en el aula de matemáticas, Soto-Andrade (2007) señala que en la última década se ha tomado progresivamente conciencia de que éstas no son sólo artefactos retóricos, sino que herramientas cognitivas significativas y de gran potencial. Según el autor, las metáforas ayudan a aprehender y a construir nuevos conceptos matemáticos, así como también a resolver problemas de manera eficaz y amigable. “(Acevedo, 2005; Araya, 2000; Detienne, 2005; Dubinsky, 1999; Duval, 1995; Edward, 2005; English, 1997; Ferrara, 2003; Gardener, 2005; Johnson & Lakoff, 2003; Lakoff & Núñez, 2000; Parzysz et al., 2003; Pesci, 2005; Pouilloux, 2004; Presmeg, 1997; Seitz, 2001; Sfard, 1997, Soto-Andrade, 2005)” (Soto-Andrade, 2007, p.73).

El autor plantea que “luego de “las metáforas con que vivimos” (Johnson & Lakoff, 1998), han ingresado al escenario “las metáforas con las que calculamos” (Bills, 2003). Se reconoce así la existencia de metáforas conceptuales (Lakoff & Núñez, 2000), que son transformaciones o “mapeos” de un dominio “fuente” a un dominio “blanco”, que transportan la estructura inferencial del primero en la del segundo y nos permiten

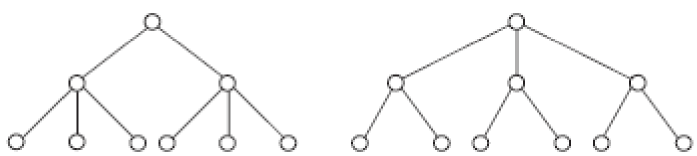
[17] “En una metáfora, Analogía o Símil, el tenor recibe los atributos del vehículo” (Soto-Andrade, 2007, p.72).

entender el segundo, usualmente más abstracto y opaco, en términos del primero, más “aterrizado” y transparente” (Soto-Andrade, 2007, p.74).

Un ejemplo concreto de estas ideas, son las metáforas utilizadas para la conmutatividad de la multiplicación. Se les podría preguntar a los estudiantes “¿Cómo ven ustedes que 2 por 3 es lo mismo que 3 por 2?”. Entonces una posible respuesta sería: “¡Con ayuda de alguna metáfora!”, ¿Cuál? En la figura que hay a continuación se muestra una opción: la metáfora del área: 2 por 3 es la cantidad de fichas que hay en un arreglo de 2 filas de 3 fichas cada una y 3 por 2 es la cantidad de fichas que hay en un arreglo de 3 filas de 2 fichas cada una:



Otra opción sería la metáfora del árbol: 2 por 3 es la cantidad de puntas que tiene un árbol de 2 ramas que se bifurcan en 3 ramitas cada una, y 3 por 2 es la cantidad de puntas que tiene un árbol de 3 ramas que se bifurcan en 2 ramitas cada una:



Ahora bien, lo interesante de este ejemplo, además de sus aportes concretos didácticos, en que se instala un proceso de traducción entre diversos lenguajes y modos cognitivos (Verbal-No verbal; Simbólico-Icónico) en el sujeto que aprende o construye dichas metáforas, también hay ahí otros alcances. Nótese que la primera metáfora hace obvia la conmutatividad del producto, porque aparece como la invariancia del área (o la cantidad de fichas de un arreglo) por rotación de éste. Aparece aquí un “ya visto” (“metbefore” en el sentido de Tall, 2005 citado en Soto-Andrade, 2007) que forma parte, se podría decir, de la experiencia psicomotriz de la infancia. “Por el contrario, la segunda metáfora no hace tan obvia la conmutatividad. Esto sugiere, como lo han intuido Lakoff y Núñez (2000), que la multiplicación no es a priori conmutativa, y podría haber permitido barruntar que hay ejemplos “naturales” de multiplicación no conmutativa” (Soto-Andrade, 2007, p. 82).

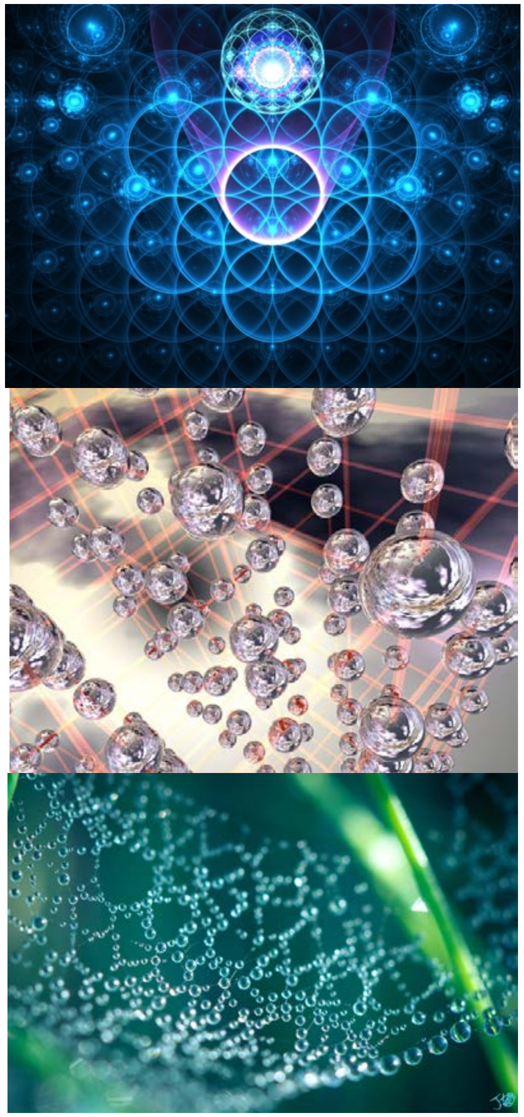
Así, Soto-Andrade (2007) señala: “Las metáforas admiten a menudo realizaciones concretas, con las que los niños pueden jugar, en el marco de un abordaje constructivista y corporizado a los objetos y métodos matemáticos. Como las metáforas transfieren objetos de un dominio a otro, nos permiten sacar partido de nuestras intuiciones en ambos dominios y transferir comprensión de uno a otro. De hecho, podemos así transferir comprensión entre las probabilidades, la termodinámica, la hidráulica, la economía, la sociología, etc.” (p.75).

“Las metáforas necesitan un suelo fértil para crecer. Ese suelo es suministrado en gran medida por las experiencias sensoriomotoras y lúdicas de la primera infancia. Como dice D. Tall (2005), “Metaphors are ‘metbefores’” (Las metáforas son algo que encontramos antes). Recíprocamente, las metáforas emergen espontáneamente como una herramienta privilegiada para comunicar experiencias somáticas y cenestésicas (Bertherat, 1998)” (Soto-Andrade, 2007, p.75).

La hipótesis que trabaja dicho autor y sus colaboradores, es que aquellas experiencias tempranas corporizadas serían fuertemente significativas y relevantes más tarde, cuando el sujeto se encuentra con conceptos abstractos. “La cognición hecha cuerpo, florece en metáforas” dice el autor (Soto-Andrade, 2007, p. 71). Por lo mismo, dicha postura rechaza aquellos supuestos didácticos (y sus decisiones) que planteen que los niños y niñas al deber acceder al pensamiento abstracto en el segundo ciclo básico o en la enseñanza media, se entienda que dicho proceso implique por sí mismo sacar el material concreto del aula. Por esto, dicha hipótesis rechaza la idea de que se debe enseñar usando lenguaje abstracto, resolver problemas abstractos usando métodos abstractos, calculando con algoritmos eficaces, etc. El autor señala: “Nuestra hipótesis es que los niños a quienes les fue así robada una parte de su infancia, tendrán mayores dificultades más adelante para desarrollar su pensamiento abstracto. Porque las metáforas que podrían ayudarlos no tendrán un suelo propicio en qué crecer… Por ejemplo: la media y la desviación estándar de una variable aleatoria, pueden ser aprehendidas (y descubiertas) a partir de nuestra intuición y experiencia estática (juegos de equilibrio o de balancín) y dinámica (juegos de giro)” (Soto-Andrade, 2007, p.76).

Las investigaciones que circundan dichas hipótesis han sido abordadas, a partir de diversas investigaciones con estudiantes de educación básica, media, universitaria y con profesores de pre-básica a media (Soto-Andrade, 2007, 2008, 2011, 2012). Sin duda, que tanto el trabajo en aula como en las investigaciones que se han realizado, representan un gran aporte para la Educación en Matemáticas, en la medida que plantean sacarla del terreno en que se adolece de una enseñanza basada primordialmente en un solo modo cognitivo (verbal-secuencial) y en procedimientos únicos orientados a la reproducción y memorización vacía.

Así, estas líneas de investigación, tanto en el caso de analogías como en el de metáforas, representan un aporte, en términos analíticos y prácticos, a una educación tradicional que cristaliza respuestas en los niños y niñas, que los “sedimenta” y les roba de manera progresiva su espontaneidad. Es decir, que no reconoce ni valora sus nociones intuitivas, a la vez que no sólo no fomenta el abordaje y construcción de estrategias alternativas para abordar problemas sino que, más aún, tiende a bloquear en ellos su búsqueda, incluso frente a los problemas más elementales (Espinoza, Barbé & Gálvez, 2009 citado en Soto-Andrade, Cosmelli, Cubillos, Gálvez, Luci, Flores et al., 2011).



Imágenes de la Red de Indra
"Una red infinita de perlas, cada una reflejando todas las otras, en un proceso sin fin de reflexiones de reflexiones…" (Soto-Andrade, 2012, p.1).

QUINTA PARTE:

Al final del recorrido: Reflexiones sobre el viaje

13.-CONCLUSIONES

Con el objetivo de puntualizar el trabajo realizado durante el desarrollo de esta investigación y de preparar al lector para el despliegue de reflexiones que se exponen en el siguiente apartado, a continuación se realiza una breve descripción de las conclusiones en relación con la pregunta de investigación, el objetivo general y los cuatro objetivos específicos. En profundidad estas conclusiones, sus implicancias teóricas y prácticas, así como sus proyecciones, serán abordadas en el siguiente capítulo.

Para trabajar la pregunta de investigación **¿cuál es la relación teórica (o epistemológica) entre las intuiciones, el pensamiento matemático y su posible uso pedagógico?** y su objetivo general (analizar la relación entre intuición, el pensamiento matemático y su posible uso pedagógico), se comenzó por *historizar el concepto de intuición y su vínculo con las matemáticas*.

El pretender hacer una revisión exhaustiva de cada detalle del uso que ha tenido la palabra intuición, parece ser una tarea prácticamente absurda o imposible, ya que desde un principio se tenía como antecedente que este concepto ha sido utilizado ampliamente a lo largo de la historia y en las distintas culturas. No obstante, una mirada general a su historia devela varias tensiones.

En términos generales, queda claro que esta noción ha guardado una problemática inherente en relación a su verosimilitud. En su historia se ve una polarización en cuanto al lugar que le han otorgado dentro del conocimiento, ya sea como un conocimiento prístino, superior o como una noción asociada a errores e ideas ilógicas, inferior a la razón.

En distintas culturas como, por ejemplo, romanos y griegos, y en ciertas líneas de la filosofía, esta noción ocupaba un lugar privilegiado dentro del conocimiento. En esos espacios, se le opuso a la lógica, pero se le impregnó de un hálito de sabiduría, considerándola un conocimiento primigenio que permitía orientar decisiones y obtener mejores resultados. Ahora bien, esta supremacía de la intuición no es generalizable, puesto que en algunos lineamientos filosóficos si bien se le consideró como un conocimiento autónomo cuando se trataba de la actividad práctica, en el caso de la actividad teórica se la ha planteado como subordinada a la razón (Hessen, 2003). Ahora bien, en ciertas religiones, como budismo e hinduismo, se pretende que la intuición podría perfeccionarse, lo cual es una idea interesante puesto que la define, aunque no se diga siempre explícitamente, como una habilidad más que como un tipo de conocimiento, algo que eventualmente podría ir desarrollándose. En todo caso, para estas líneas de pensamiento más cercanos a la religión se sugieren acciones concretas de cómo desarrollarla, como la meditación, el yoga o ciertas actitudes o disposiciones psicológicas (honestidad, sensibilidad, etc.) (Shallcross, 1998).

La intuición ha sido entendida, entonces, como parte de una “sabiduría universal” y del linaje de antepasados, como una habilidad, como un tipo de conocimiento, como opuesta a la razón, cercana a la idea de presentimiento, asociada a la noción de conocimiento inescrutable, es decir, sin interferencia, vinculada a la vivencia de creer, a la percepción (como un modo de recoger información), a la satisfacción, a la creatividad, a la asertividad, en ocasiones algo a desarrollar, en otras algo a descubrir o recordar, incluso en más de algún momento se ha intentado explicitar su correlato neuronal, pretendiendo asociarla al funcionamiento de ciertas áreas del cerebro, discusión que por lo demás hasta el día de hoy no está zanjada. Lo que se dilucida detrás de todo este entramado de definiciones, apreciaciones, juicios y valoraciones con respecto a la intuición es que la historia prueba que es un concepto ambiguo, de mucha presencia, muy utilizado, pero difuso, contradictorio, extraño, confuso, dónde el qué es (conocimiento, habilidad, etc.) y cómo opera, no está consensuado.

Por otra parte, desde las esferas científicas este término ha sido silenciado y menospreciado, considerándolo en estrecha relación con la idea de error, donde la intuición se ha entendido principalmente como un obstáculo, ejemplo de estas ideas son los postulados de las Teorías Implícitas. Dentro de la Educación Matemática, se encuentran varios cruces con dichas ideas, entre ellos el claro énfasis en su contraposición a la lógica, sin abordar una posible complementariedad entre ambos o un vínculo más directo. El referente en esta disciplina es Efraim Fischbein (psicólogo, profesor de matemáticas en escuelas y de psicología en el contexto universitario), cuyos postulados se encuentran aún vigentes, siendo recordados y discutidos hasta el día de hoy. Si bien este autor consideró a la intuición como componente indispensable para todas las formas de pensamiento productivo y propuso características y especificaciones del funcionamiento de la intuición que se desmarcan de lo que se ha planteado desde la Teorías Implícitas, compartió con ellas el carácter inconsciente y el énfasis en su persistencia y resistencia al cambio, así como en su vínculo con el error y la dificultad en el aprendizaje, es decir, el énfasis de sus trabajos e investigaciones estuvo en entender las intuiciones más como un obstáculo que como una oportunidad en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

El segundo objetivo específico de esta investigación era *analizar el rol de la intuición en el pensamiento matemático.* Sobre este punto y sus alcances se profundiza más ampliamente en el siguiente apartado debido a su relevancia con respecto a la pregunta de investigación. En el capítulo 7 (La intuición: navegando en su naturaleza…), se propone básicamente que la intuición es un tipo de conocimiento que prepara y orienta a la acción, la particularidad en este caso sería que la intuición aparece como un conocimiento inmediato, veloz (Fischbein, 1979).

Esto se relaciona específicamente con aquellas situaciones en que a menudo no se puede ser eficaz si se requiere una forma de adaptación rápida y directa. El rol principal de la intuición sería, entonces, traducir las adquisiciones cognitivas en términos de acción de una manera rápida y efectiva. La intuición aparecería de forma compacta, no secuencial ni analítica, como en el caso del pensamiento formal. En esta investigación se propone que, sin necesidad de justificación externa, la intuición desde su carácter anticipatorio ofrece una perspectiva global de un posible camino a recorrer o manera de resolver un problema, inspirando y dirigiendo de este modo los pasos hacia la búsqueda y construcción de una solución (Fischbein, 1979, 1987).

En relación con lo recién expuesto, algo clave que cabe destacar es que la intuición no sería considerada en este caso una habilidad, como se entendió a lo largo de su historia desde diversas perspectivas, sino que como un tipo de conocimiento, el cual tampoco sería una develación de una "sabiduría universal", sino que construido en base a experiencias. Así, como se dijo, generalmente la intuición estaría determinada por la práctica, en relación con una categoría definida de situaciones, cuyo producto podrá ser una interpretación, una imagen etc., lo que finalmente podrá traducirse en una reacción (externa o interna) más o menos adaptada. Dentro de este rol que cumple la intuición en el pensamiento matemático, aquí se propone que es posible encontrar una amplia gama de representaciones intuitivas como producto de dichos procesos antes señalados. Desde nociones más elementales de conocimiento, más rudimentarias como estimaciones y toma de decisiones asociadas a estructuras sensorio-motoras, como aquellas que se observan en las evaluaciones de espacio y tiempo. En el otro extremo se encontrarán aquellas de quizás mayor complejidad y sofisticación que pueden estar casi listas para ser traducidas completamente en presentaciones analíticas formalizadas por científicos, matemáticos, etc. Como se dijo, entre estos dos polos se encontraría una gran diversidad de representaciones, interpretaciones intuitivas más o menos conectadas a modelos figurativos y formas verbales de expresión. Todas y cada una de ellas sintetizarían una amplia cantidad de experiencia personal en una visión global, autoevidente y extrapolada de conocimiento (Fischbein, 1979).

De este modo, el conocimiento intuitivo sería un puente o nodo de articulación entre el conocimiento formal analítico y la experiencia, en la medida en que sus dimensiones alcanzan ambos territorios, y desde ahí, desde ese entretejido, prepararía la acción. Así, en la práctica del razonamiento matemático, para que un estudiante aprenda formalmente qué significa una prueba formal completa, por ejemplo, y pueda sacar provecho de dicho conocimiento, necesitará forjar una nueva “base de creencia”, un nuevo enfoque intuitivo, el cual podrá ser construido en base a la experimentación, a la vivencia de nuevas experiencias. Estas dimensiones, entrelazadas desde lo intuitivo, influirían en el desempeño de los estudiantes en matemáticas. Sobre este punto se profundiza en el siguiente capítulo (Fischbein, 1979,1982; Tirosh & Tsamir, 2012).

Ahora bien, sacando en limpio y considerando la ambigüedad histórica que se muestra en los resultados del objetivo específico uno, no deja de ser un aporte el proponer una lista de características propias de la intuición, el objetivo específico tres de este trabajo. Intentar apostar por una geometría concéntrica donde cada uno de sus nodos mire la intuición desde una característica particular, en un territorio tan difuso como ha sido el de este concepto, sin duda que es un riesgo, una aventura. Como se mencionó, varios autores o líneas teóricas han planteado características de la intuición, levantando un amplio y diverso universo de conjuntos de particularidades de este fenómeno. Entre dichos conjuntos se encuentran algunas intersecciones, como las ideas de ser inconsciente y persistente. En contraste con las características que expusieron Pozo y Carretero (1987 citado en Benlloch, 1997) en el marco de las Teorías Implícitas, en esta investigación se propone otra clasificación, basada en los planteamientos de Fischbein, puesto que ésta última no incluye al error como inherente a la intuición. Esta decisión conlleva plantear que, así como hay intuiciones que inducen al error en matemáticas, también hay otras intuiciones que son efectivas, es decir, que son un aporte en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, las cuales podrían eventualmente ser reforzadas, pulidas, fortalecidas y valoradas. Es decir, si se reconoce la diversidad de las intuiciones, no asociada a priori con el error, el análisis que se pueda hacer de la relación que existe entre la intuición, el pensamiento matemático y sus posibles alcances pedagógicos presenta un espectro aún más amplio, en la medida que no se está limitando el fenómeno sólo a aquellos momentos en que se dificulta el aprendizaje de ciertos contenidos matemáticos producto de nociones intuitivas falsas o erradas. Acá se proponen 8 características principales, las cuales fueron detalladas y explicadas a lo largo de la investigación: Autoevidente, Certeza Intrínseca, Perseverancia, Carácter Coercitivo, Estatus de Teoría, Carácter Extrapolable, Globalidad y Carácter Implícito. Sobre esta discusión se ahonda más en el siguiente capítulo de este escrito (Fischbein, 1987).

El tercer objetivo específico buscaba no sólo *caracterizar*, sino también *clasificar las intuiciones basándose en los planteamientos desarrollados por Efraim Fischbein. S*in ánimo de injerir en obsesiones taxonómicas, en esta investigación se proponen dos clasificaciones gruesas. Éstas se basan, como se dijo, en las propuestas de Fischbein, quién durante sus años de investigación planteó más de un diseño de clasificación, con distintas separaciones y derivaciones. Acá se selecciona y muestra una versión lo más simple y general posible, haciendo distinciones gruesas para no incurrir en divisiones que confundan niveles de análisis. El objetivo de introducir una clasificación en esta investigación no es dilucidar una verdad o concluir una estructura rígida, sino que utilizar los elementos que alguna vez planteó dicho autor en sus clasificaciones, para dar algunas luces o marcas que sirvan de guía en el amplio mapa que comprende la intuición y así poder profundizar y analizar con mayor claridad la relación entre intuición, pensamiento matemático y sus posibles usos pedagógicos, es decir, para poder abordar con mayor precisión la pregunta de investigación.

La primera clasificación, establece una diferencia entre Intuiciones Anticipatorias (Anticipatory Intuitions) e Intuiciones Afirmatorias (Afirmatory Intuitions). Las primeras aluden a aquellas nociones que aparecen como un “chispazo”. Cuando se pregunta a las personas “qué es la intuición” con frecuencia aparece esta noción como definición. Son aquellos puntos de vista preliminares, visiones globales que preceden a la solución analítica, completamente desarrollada de un problema. Son parte de una vivencia de “iluminación”, algo así como una verdad, una idea, que sin saber por qué ni cómo, aparece de repente operando como una certeza (Fischbein, 1982).

Por otra parte, las Intuiciones Afirmatorias, son el eje central de esta investigación, ellas refieren a una afirmación, representación, explicación o interpretación directamente aceptada como algo natural, evidente por sí misma, intrínsecamente significativa, como un simple hecho dado (Fischbein, 1979).

La segunda clasificación que se propone es en base al origen de las Intuiciones Afirmatorias, se diferencia entre Intuiciones Primarias e Intuiciones Secundarias. Las Intuiciones Primarias serían todas aquellas creencias interpretativas o explicativas que se desarrollarían naturalmente como efecto de la experiencia personal y cotidiana de los seres humanos, es decir, antes o independientemente de la instrucción. Éstas estarían profundamente influenciadas por el entorno o contexto socio-cultural del individuo y sujetas a la posibilidad de cambiar. Por otro lado, las Intuiciones Secundarias serían aquellas que se van desarrollando producto de la instrucción y entrenamiento sistemático y prolongado, generalmente asociado al contexto escolar (Parraguez, 2012).

Quizás, lo interesante de observar y analizar en torno a esta clasificación que se propone, son sus alcances con respecto a la pregunta de investigación. Esta clasificación plantea una relación entre ambas categorías y abre las siguientes preguntas: ¿cómo emergen cada una dentro del aula?, ¿de qué manera podría influir una Intuición Primaria en una Secundaria?, ¿qué podría hacerse para que dicha relación sea coordinada y fructífera para el aprendizaje? Es decir, esta clasificación favorece la consciencia en una diferenciación, para que cuando emerjan dentro del aula se posea una herramienta de observación y análisis que permita abordar con mayor claridad la interacción entre ellas.

En cuanto al último objetivo específico (*explorar posibles caminos epistemológicos para trabajar pedagógicamente la relación entre pensamiento matemático e intuición*), en esta investigación se construye una propuesta concreta, una opinión y una crítica fundamentada y elaborada a partir del complemento entre el análisis bibliográfico y la experiencia práctica en el quehacer pedagógico, tanto en espacios de educación formal tradicional como antipedagógicos. La clave está en comprender que las intuiciones no son inmutables, sino que muy por el contrario se construyen, por lo que el énfasis debiera estar en poder facilitar experiencias que abran dichos procesos de deconstrucción. En este contexto, el trabajo con analogías y metáforas se presenta como un ejemplo de caminos prácticos posibles, que permite indagar y trabajar las intuiciones que traen los estudiantes como parte de su historia de aprendizajes, a la vez que sirve como un espacio para construir nuevas nociones intuitivas.

En este sentido, la propuesta de esta investigación comprende una relación estrecha y significativa entre la psicología y la pedagogía. Tal como se ha mencionado, al entender la intuición como un tipo de conocimiento que es capaz de entretejer el conocimiento formal analítico y la experiencia, la teoría y la práctica, se hace hincapié, en primer lugar, en la necesidad de dar un espacio de escucha y valoración a lo que cada persona que conforma la relación pedagógica trae, es decir, darle un lugar a su historia de aprendizajes y los posibles alcances o implicancias que ésta pueda tener y, en segundo lugar, abrir la posibilidad de deconstruir aquellos conocimientos que se busca trabajar dentro del aula de matemáticas, ya sea fortaleciendo intuiciones que contribuyen positivamente en los procesos de enseñanza-aprendizaje, rearmando aquellas que inducen a error o construyendo nuevas que puedan ser necesarias para abordar ciertos contenidos o desarrollar ciertas habilidades matemáticas.

Como se ha mencionado, en general la intuición ha estado marcada por su énfasis en el error, incluso en el caso de Fischbein, que si bien propone una mirada más amplia, varias de sus investigaciones abordan la intuición como un obstáculo en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Es por esta razón, que el énfasis de esta investigación, en relación a la pregunta de investigación (*¿cuál es la relación teórica (o epistemológica) entre las intuiciones, el pensamiento matemático y su posible uso pedagógico?*), ha sido comprender a la intuición como una oportunidad para facilitar la enseñanza-aprendizaje en matemáticas, así como un ejemplo de una variedad de fenómenos que cuestiona la manera en que se construye conocimiento y se establecen las relaciones pedagógicas dentro del aula de matemáticas. El énfasis principal de esta propuesta está en la experiencia, donde se pueda hilar armónicamente junto al conocimiento formal analítico. Sobre estas ideas se profundiza en el siguiente capítulo, entrelazando la relación entre la intuición, el pensamiento matemático y su alcance pedagógico, es decir, ahondando en la pregunta de investigación, y por ende en el objetivo general.

14.- DISCUSIONES FINALES

En el contexto de la Educación en Matemáticas, los debates en torno al papel que juega la intuición en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas han estado frecuentemente embutidos en los perennes debates sobre "el equilibrio apropiado entre la intuición y la lógica" (Tirosh & Tsamir, 2012). La tendencia, entonces, ha sido dicotomizar ambos territorios, polarizándolos y tensionándolos en categorías como verdaderos-falsos, correctos-incorrectos, lógicos-ilógicos, científicos-no científicos, etc. Es por eso, que este escrito ha buscado propiciar nuevos espacios de reflexión que no se vean atrapados en discusiones veteranas, incluyendo tanto aspectos humanos, sociales y políticos, como aquellos más prácticos, metodológicos y concretos, haciendo zoom in y zoom out en la medida de lo posible.

Así, en el marco de Las Teorías Implícitas, se ha hecho referencia a las "ideas intuitivas" como sinónimo de "ideas espontáneas", "misconceptions", "ideas incorrectas", entre otras, con un claro énfasis en el error y en la curiosidad por su persistencia y resistencia al cambio (Benlloch, 1997). Estas ideas han sido objeto de diversas investigaciones, donde el marco desde el cual son estudiadas se encuentra, por una parte, limitado por los dominios específicos en donde ellas parecen desarrollarse, a la vez que presenta una frontera difusa entre la psicología y la didáctica, entre el interés por conocer el origen y naturaleza de estas ideas y el uso escolar que de ellas hacen los estudiantes. Uno de los espacios con mayor investigación asociada es en ciencias experimentales (Benlloch, 1997).

Dentro de las características comunes de las ideas intuitivas, según Pozo y Carretero (1987 citado en Benlloch, 1997), que fueron mencionadas más arriba se entrevé con claridad aquellos puntos en común y disidentes en relación a lo planteado por Fischbein. Si bien, se comparte la noción de que aquellas ideas serían implícitas, es decir, inconscientes para el propio sujeto, así como también "persistentes" a lo largo de las edades y resistentes al cambio mediante la instrucción, hay características en la clasificación elaborada por Pozo y Carretero (1987) que se alejan tanto de lo planteado por Fishcbein en sus trabajos como del énfasis dado en este texto. De este modo, como parte de dicha disidencia se encuentran las siguientes características planteadas por Pozo y Carretero (1987) como comunes a las intuiciones: (1) que son espontáneas y personales puesto que surgen de un modo natural en la mente del estudiante como una elaboración propia del sujeto, sin necesidad de instrucción previa, (2) que son científicamente incorrectas, ya que su grado de abstracción es limitado y están muy influidas por lo observable, así como también que (3) son incoherentes o contradictorias entre sí, en la medida que situaciones o tareas que requieren un mismo tipo de ideas son resueltas empleando diferentes conceptos (Pozo & Carretero, 1987 citado en Benlloch, 1997).

Si bien, este texto está lejos de querer darle a la intuición un lugar sagrado, inocuo, o aséptico, tampoco su énfasis está en repetir aquellas nociones que la asocian con lo ontológicamente incorrecto o erróneo, en contraposición a las nociones de lógica, instrucción y/o ciencia.

Tal vez, las preguntas que se encuentran a la base son las mismas, como por ejemplo, "¿por qué algunas ideas intuitivas parecen coincidir con mayor facilidad con las científicas mientras que otras persisten al margen de la ciencia enseñada en la escuela?" o "¿por qué un tipo de ideas se aprenden con más dificultad que otras?" (Benlloch, 1997, p.72). Ahora bien, está claro que diversas razones podrían dar explicación a estas preguntas, pero antes de las respuestas, habría que dilucidar los contrastes en relación a su definición, ontología, epistemología, fenomenología, etc., es decir, a qué es y cómo opera, para luego poder aterrizarlo al aula y sus implicancias prácticas.

Así por ejemplo, una manera de abordar esta problemática ha sido a partir de la Teoría del Cambio Conceptual de Chi (1992 citado en Benlloch, 1997), mencionada anteriormente durante el desarrollo de la investigación. Esta autora, a partir de su hipótesis de incompatibilidad ontológica, construye un diagrama de árbol de conceptos y subconceptos, desde donde explica el cambio débil como una reubicación de la localización de los nodos y del contexto de los árboles, donde los conceptos se desplazan. Mientras que en los cambios fuertes entre categorías ontológicas, los nodos cambiarían de significado y no habría isomorfismo entre árboles antes y después, serían entonces inconmensurables, intraducibles en términos de los conceptos anteriores. Según Benlloch (1997), "Chi (1992) insiste en que no es adecuado pensar en el cambio conceptual como movimiento o evolución de un concepto desde un árbol a otro, sea en una forma abrupta o gradual, aun en el cambio dentro de una misma categoría ontológica.

Esta autora sugiere que nuevos conceptos pueden desarrollarse gradualmente en árboles ontológicos distintos, sin que procedan de otras categorías ontológicas anteriores. Pero añade que el proceso es muy lento, no es espontáneo y el resultado puede ser abrupto pero sólo después de muchas horas de aprendizaje y instrucción" (p.76).

Más allá de germinar una polémica en torno a cómo funciona la mente, es interesante esta teoría para contrastar los énfasis del análisis, acá pareciera que se está hablando de cambios, contradicciones, analogías etc. en el plano de lo conceptual, con el énfasis en la ontología de aquellos conceptos. Algo así como la mente organizada en diagramas de relaciones entre conceptos con jerarquías. Las ideas intuitivas serían, entonces, nociones que tendrían a la base una utilización errónea, en términos ontológicos, de los conceptos asociados a un determinado aprendizaje. Así también, la experiencia en el marco de este modelo sería puesta en relieve más bien para considerarla como un obstáculo que genera conceptos contrapuestos a conceptualizaciones científicas, constituyéndose a su vez en un obstáculo para el aprendizaje. Es decir, la vida cotidiana en contraposición al quehacer científico (Benlloch, 1997). Ahora bien, se podría preguntar: ¿puede ser el facilitar experiencias cotidianas una forma de instrucción?, ¿es la experiencia una antagonista a la instrucción?, ¿cómo se podría dar cabida a las experiencias previas?, ¿cómo se podría rastrear sus dimensiones y aprendizajes asociados?, ¿de qué manera se pueden validar dichas experiencias previas para que sean un aporte a los nuevos aprendizajes?, ¿puede ser un niño un científico?

Este énfasis queda claramente plasmado en la siguiente cita de Benlloch (1997): "La dificultad en comprender la actividad de las partículas no sólo se plantea entre estudiantes jóvenes. Frente a ciertas reacciones químicas por ejemplo, muchos bachilleres y algunos universitarios, persisten en comprender de <u>forma intuitiva o ingenua</u> la conducta de las partículas. Así muchos sujetos expresan los procesos reactivos mediante un esquema que, señala las reacciones de adición entre ellas y no empleando un punto de vista interactivo […] El modelo de partículas exige una violenta acomodación de ciertas creencias arraigadas en las ideas intuitivas de las personas. Algunas de estas creencias deben ser sustituidas por los conocimientos científicos de la ciencia" (pp.85-87).

Ahora bien, se podría pensar, cuando Fischbein teorizó la intuición como un tipo de conocimiento caracterizado por la inmediatez, la autoevidencia, la certeza intrínseca, la perseverancia, la coerción, lo implícito, con estatus de teoría, extrapolable y global, que esa dicotomía ciencia(lógica) / intuición(ilógico) empieza a diluirse. Si bien, Fischbein afirma que el conocimiento intuitivo es un tipo de conocimiento que no se basa en evidencia empírica científica o en rigurosos argumentos lógicos, a pesar de todo, la tendencia sigue siendo a aceptarlo como cierto y evidente, donde la experiencia y el aprendizaje previo juegan un rol fundamental en la educación en matemáticas (Tirosh & Tsamir, 2012). Es decir, la intuición comienza a aparecer como una tercera punta de esta figura geométrica, donde ciencia-lógica formal, intuición y experiencia comienzan a articularse contenidas por la sensación básica de certeza, desde la inmediatez o inconsciencia.

En palabras de Fischbein (1979): "According to Hilbert, the founder of modern axiomatics, the living process of mathematical thinking must not and cannot be "purged" of intuitive representations. Consequently, the great problem of mathematical education is not how to avoid the interference of intuition in the flow of mathematical thinking. Such an avoidance is, not a realistic enterprise. Rather the problem is how to control, conceptually, intuitions without stifling them. If good intuitions are lacking we have to build them. If wrong intuitions are present, we have to eliminate them. If vague or distorted intuitions are present, we have to correct them, to clarify them and to include them into a conceptually controlled process" (p.51).

Ahora bien, se podría preguntar entonces: si la vida cotidiana produce (supuestamente) confusiones en desmedro de la aprendizaje científico (matemático), ¿qué se puede hacer con estas tensiones, con esas contradicciones?, ¿de qué manera se puede abordar ese desafío?, si se observa eso que superficialmente pareciera ser un obstáculo, ¿será que en vez de contraponerse a él, la clave está en desmenuzarlo, deconstruirlo?, ¿experiencia o instrucción?, ¿qué- instrucción- cómo?, ¿de qué manera la instrucción podría ser facilitar experiencias "cotidianas" pedagógicas? Así, quizás como plantea Fischbein más arriba, si se cambia el foco donde las experiencias y la vida cotidiana son la base explicativa a errores, misconceptions, etc., y se rompe esa dicotomía anunciando al menos otro soporte (pata) de la mesa, esa mesa quedaría al parecer firmemente sostenida en dicha ruptura, al generar nuevas experiencias que deconstruyan el conocimiento, para posibilitar nuevas intuiciones que al operar inconscientemente y con la fuerza o certeza que la caracterizan, lo hagan desde el contexto en que experiencia, intuición y ciencia son un sistema coordinado, es decir, una mesa de tres soportes.

Así, en ningún caso esto significaría polarizar la pedagogía hacia la veta de la práctica, más bien se trata de hacer puente entre lo que históricamente se ha polarizado. Tal como afirma Acuña (2010) en su texto "Implicancias pedagógicas de la triple dialéctica del razonar" a propósito de los procesos de deducción, inducción y abducción (generación de hipótesis): "Si se observa, esto no es muy distinto a las corrientes actuales de pedagogía crítica o a las corrientes constructivistas que apelan a que el aprendizaje, para que sea significativo, tienen que poder relacionar la teoría con la práctica. En el fondo, existen teorías, de las cuales podemos deducir fenómenos que ocurren en el mundo. También existen estrategias de observación concreta de estos fenómenos que nos permiten generalizar. Nos movemos en un doble juego entre la teoría y la práctica (...). Quizás por ello, la introducción de la generación de hipótesis en este doble juego puede conllevar implicancias bien novedosas e insospechadas. De lo que se trata es de una forma distinta de entender cómo razonamos los seres humanos, y si seguimos a Wittgenstein con la idea de que los límites del lenguaje son los límites de (mi) mundo, la introducción de una nueva distinción al interior de la forma de entender el razonamiento humano, varía la forma en que entiendo la relación pedagógica del enseñar-aprender que llevan a cabo el profesor y el alumno" (p.4).

Es decir, como análogo a este triple proceso de razonar, las relaciones pedagógicas y sus desafíos implican, se podría decir, darle cabida e integrar la creatividad en todas sus dimensiones (pensamiento, emoción, cuerpo, acción, etc.) dentro de las reflexiones didácticas y metodológicas en el quehacer, en este caso, de la educación en matemáticas. Si bien, no cabe duda que diversas corrientes críticas o constructivistas han intentado ir en esta línea, se entrevé un vacío en cuanto a la intuición y su relación a dichas problemáticas en el marco de la educación en matemáticas, la didáctica y la psicología (Acuña, 2010).

Es así como, siguiendo con la analogía de los procesos de razonamiento, la relación inducción-deducción de alguna forma se dinamiza al incluir a la abducción, toda vez que se incluye la problemática de cómo se generan nuevas hipótesis para entender un problema. Asimismo, en caso de la consideración de la intuición, ya no bastaría con la dicotomía teoría-práctica o ciencia-vida cotidiana, sino que se apela a la inclusión del trabajo desde la creación. Es decir, no bastaría con saber un “x” número de teorías referidas a determinada materia y las estrategias empíricas para observar un fenómeno “y” de tal forma que permita falsear o validar una hipótesis, el desafío sería cómo se generan nuevas hipótesis para entender un problema, cómo se favorecen espacios de creatividad y se fortalece la curiosidad de cada actor que participa en las relaciones pedagógicas. Así, la incertidumbre se cristaliza, pues el acto creativo no será fruto de una ley o de un método empírico, sino que parte de las formas de razonamiento humano, una actitud frente a un problema, una posibilidad cuando todo parece ser binario (Acuña, 2010).

“El profesor, de partida, no se puede contentar con exponer las teorías que maneja al revés y al derecho, o con elaborar un trabajo de investigación que permita a los estudiantes constatar proposiciones, se torna necesario además de esto llevar a cabo metodologías que permitan generar hipótesis sobre un tema. En las dos primeras situaciones, el profesor es el que sabe. Él conoce las teorías y también conoce a qué conclusiones llevará la contrastación de las proposiciones, cuando se trabaja en la creación de hipótesis, no es posible saber de antemano qué va a ocurrir, pues se crearán éstas. En este sentido, y si bien esto es algo que sin duda se hace indirectamente cuando se le pide a un grupo que elabore una hipótesis para un trabajo cualquiera, <u>la diferencia está en la importancia pedagógica que este proceso cobra</u>. La generación de la hipótesis, digamos la discusión grupal sobre qué hipótesis suena más plausible en un grupo de estudiantes, es igual de importante a la posterior (o anterior) discusión teórica o contrastación empírica de dicha hipótesis. Por ello, exige una reflexión metodológica y didáctica de cómo propiciarla, sistematizarla e incluso evaluarla” (Acuña, 2010, p.5).

Asimismo sucede con la intuición, sobre todo si se considera que dentro de sus posibilidades está el conducir a respuestas rápidas y precisas a la vez que a errores sostenidos en el tiempo. Es decir, abrirla, legitimarla en el espacio del aula implicaría reconocer la historia (de aprendizajes) del otro, lo que trae, constatando que los estudiantes no son vasijas vacías, creando así caminos posibles y destinos probables.

En el marco de dichas consideraciones, se hacen ubicuas las palabras de Freire (1996): “Si existe una práctica ejemplar como negación de la experiencia formadora es la que dificulta o inhibe la curiosidad del educando y, en consecuencia, la del educador. Es que el educador que sigue procedimientos autoritarios o paternalistas que impiden o dificultan el ejercicio de la curiosidad del educando, termina por entorpecer su propia curiosidad. Ninguna curiosidad se sustenta éticamente en el ejercicio de la negación de la otra curiosidad (…) El buen clima pedagógico-democrático es aquel en el que el educando va aprendiendo, a costa de su propia práctica, que su curiosidad como su libertad debe estar sujeta a límites, pero en ejercicio permanente. Límites asumidos éticamente por él" (p. 81).

En concordancia entonces con los planteamientos freirianos, se podría afirmar que la construcción o la producción del conocimiento del objeto implicaría a su vez el ejercicio de la curiosidad, es decir, la capacidad crítica de "tomar distancia" del objeto, de observarlo, de escindirlo, delimitarlo, cercarlo o hacer su "*aproximación* metódica", la capacidad de comparar, contrastar, de preguntar. En didáctica de las matemáticas, esto podría entenderse como "ser un buen periodista" de problemas matemáticos, aprender a entrevistarlos, observarlos, dimensionarlos. Esto no quiere decir burocratizar un ir y venir de preguntas y respuestas, reduciendo así la actividad docente o la relación pedagógica. En cambio, se está pensando que estimular la pregunta, la reflexión crítica sobre la propia pregunta, así como también la capacidad de diálogo, no niega la validez de momentos explicativos, narrativos, en los que el profesor o profesora expone o habla de un determinado objeto (Freire, 1996). En palabras de Freire (1996): "Lo fundamental es que profesor y alumnos sepan que la postura que ellos, profesor y alumnos, adoptan, es *dialógica*, abierta, curiosa, indagadora y no pasiva, en cuanto habla o en cuanto escucha. Lo que importa es que profesor y alumnos se asuman como seres *epistemológicamente curiosos.* En este sentido, el buen profesor es el que consigue, mientras habla, traer al alumno hasta la intimidad del *movimiento* de su pensamiento. De esa manera, su aula es un desafío y no una "canción de cuna". Sus alumnos se *cansan*, no se *duermen*. Se cansan porque acompañan las idas y venidas de su pensamiento, descubren sus pausas, sus dudas, sus incertidumbres" (p.82).

Es así como, se podría decir que en la pedagogía, en general, y en la educación en matemáticas, en particular, el ejercicio de la curiosidad convoca no sólo a la imaginación, sino que también a la intuición, a las emociones, a la capacidad de conjeturar, de comparar, de crear, de generar hipótesis, para que los estudiantes sean actores participativos en la búsqueda del perfil del objeto o en el hallazgo de su razón de ser, siendo agentes de su aprendizaje, protagonistas de su educación (Freire, 1996).

En este sentido, Freire (1996) fue enfático en sus planteamientos: "Por eso mismo pensar acertadamente impone al profesor o, en términos más amplios, a la escuela, el deber de respetar no sólo los saberes con que llegan los educandos, sobre todo los de las clases populares -saberes socialmente construidos en la práctica comunitaria-, sino también, como lo vengo sugiriendo hace más de treinta años, discutir con los alumnos la razón de ser de esos saberes en relación con la enseñanza de los contenidos (…) ¿Por qué no discutir con los alumnos la realidad concreta, a la que hay que asociar la materia cuyo contenido se enseña: la realidad agresiva, en que la violencia es una constante y la convivencia de las personas con la muerte es mucho mayor que con la vida?. ¿Por qué no establecer una "intimidad" necesaria entre los saberes curriculares fundamentales para los alumnos y la experiencia social que ellos tienen como individuos?" (p.32).

Si bien, en la actualidad los debates sobre el sentido[18] o lo significativo de un aprendizaje no son en realidad algo nuevo, pareciera ser, en cambio, que en la didáctica de las matemáticas el vínculo de las experiencias previas con los contenidos científicos, la intuición y posibles nuevas experiencias no ha sido tan evidente. Es decir, pensar el conocimiento intuitivo no como un obstáculo, sino como un ejemplo más del ejercicio del reconocimiento del otro (estudiante) dentro del aula.

Ahora bien, para asentar este tipo de prácticas, donde se busca legitimar la experiencia, será necesario una actitud de seguridad frente a los conocimientos por parte del profesor/a que no descanse en falsos supuestos de que lo sabe todo o que es "lo máximo". En cambio, dicha seguridad deberá fundarse en la convicción de que algo sabe y de que algo ignora, junto con la certeza de que puede saber mejor lo que ya sabe y conocer lo que aún ignora. Su seguridad se afirmará, entonces, en el saber confirmado

[18] Con respecto al "sentido" vinculado al aprendizaje se rescata la siguiente cita: "Para G. Brousseau (1983), el sentido de un conocimiento matemático se define: no sólo por la colección de situaciones donde este conocimiento es realizado como teoría matemática; no sólo por la colección de situaciones donde el sujeto lo ha encontrado como medio de solución, sino también por el conjunto de concepciones que rechaza, de errores que evita, de economías que procura, de formulaciones que retoma, etc. Agreguemos que la construcción de la significación de un conocimiento debe ser considerada en dos niveles: (1) un nivel "externo":¿cuál es el campo de utilización de este conocimiento y cuáles son los límites de este campo?; (2) un nivel "interno": ¿cómo y por qué funciona tal herramienta? (por ejemplo, ¿cómo funciona un algoritmo y por qué conduce al resultado buscado?" (Parra & Saiz, 1994, p.52).

por la propia experiencia de que, si su inconclusión, de la que es consciente, atestigua de un lado su ignorancia, le abre del otro, el camino para conocer (Freire, 1996).

Entonces, así como en la legitimidad que se pone en juego en la creación de hipótesis al posicionarla en un nivel de igual importancia que la derivación de proposiciones de dichas hipótesis y la contrastación de las proposiciones derivadas, el acentuar el espacio de la intuición exige asimismo por parte de la pedagogía, pero también de otros campos del saber (como la psicología), reflexionar en torno al cómo relevar un ámbito de la racionalidad humana que ha sido subvalorado a la vez que vinculado a nociones o justificaciones como la genialidad de algún individuo, a complejidades psicológicas específicas de una determinada persona o a su situación cultural o social de un momento histórico del cual formó parte, etc. Entonces, será necesario dejar de excluir la posibilidad de replicar en cada ser humano un trabajo creativo, reconstructor, reparador, es decir, dejar de excluir la posibilidad de entender al ser humano como un ser curioso y creativo, y por tanto, abrirse a la posibilidad de entender la creatividad asociada a la intuición (en este caso), como un razonamiento abordable metodológicamente y no como una peculiaridad de algunos iluminados o privilegiados (Acuña, 2010).

Así, no muy lejos de dichas ideas, en torno al vínculo con la genialidad, está la crítica que sutilmente plantea Soto-Andrade (2012) en su paper “Metaphors in Mathematics Education” a los postulados aristotélicos: “Metaphors are very likely as old as humankind. Recall Indra's net, a 2 500 year old Buddhist metaphor of dependent origination and interconnectedness (Cook, 1987; Capra, 1982), consisting of an infinite network of pearls, each one reflecting all others, in a never ending process of reflections of reflections, highly appreciated by mathematicians (Mumford et al., 2002). It was Aristotle however, with his taxonomic genius, who first christened and characterized metaphors c. 350 BC in his Poetics: “Metaphor consists in giving the thing a name that belongs to something else; the transference being either from genus to species, or from species to genus, or from species to species, on the grounds of analogy” (Aristotle, 1984, 21:1457b). Interestingly for education, Aristotle added: “The greatest thing by far is to be a master of metaphor. It is the one thing that cannot be learned from others; it is also a sign of genius, since a good metaphor implies an eye for resemblance” (loc. cit. 21:1459a). But time has not passed in vain since Aristotle. Widespread agreement has been reached (Richards, 1936; Black, 1962; 1979; Ortony, 1979; Ricoeur, 1975; Reddy, 1993; Gibbs, 1994; 2008; Indurkhya, 1992; 2006; Johnson and Lakoff, 2003; Lakoff and Núñez, 2000; Wu, 2001; Sfard, 1994; 1997; 2009) that metaphor serves as the often unknowing foundation for human thought (Gibbs, 2008) since our ordinary conceptual system, in terms of which we both think and act, is fundamentally metaphorical in nature (Johnson and Lakoff, 2003)" (p. 1). Asimismo, además de la idea sobre la relación que existiría, según algunos autores, entre dichos conceptos y el lugar del genio, se podría hacer un paralelo entre las metáforas y el uso que de ellas se hace dentro del aula, y la intuición y sus prácticas asociadas. Sobre este punto, se volverá más adelante.

Así, en esta integración de distintos campos del saber, se configura, entonces, otro desafío para la pedagogía en matemáticas. Desde este enfoque psicoeducativo, será necesario el ser capaces de abordar no sólo la problemática metafísica, teórica y/o política, sino que también poder sistematizar esta problemática, de la mano de la construcción de una "buena" metodología (sound methodology), capaz de sacar a la intuición del terreno rígido del error, del privilegio, etc., sin incurrir por eso en sobrevaloraciones o en la ignorancia de creer en la intuición a ciegas (Soto, 2009 citado en Acuña, 2010).

De este modo, en coherencia con lo planteado más arriba, Fischbein hizo alusión a la importancia de dicho proceso de construcción concatenado de forma dialéctica con las experiencias previas de los sujetos. A pesar de ser un autor de origen rumano, sus ideas no excluyen las de los autores latinoamericanos recién presentadas. Fischbein (1979), afirmó con vehemencia que existen diversas formas de mejorar y enriquecer el aspecto intuitivo de un concepto o afirmación, siendo enfático con una particularidad de alto valor didáctico. Fischbein (1979) señaló: "I am referring to the act of elaborating a conceptual, rigorous structure (for instance, a definition) corresponding to some intuitively known property or operation. This is what creative mathematicians are usually doing, but it is very seldom that pupils are also asked to do by themselves. The new concept must not be built aside from the primitive representation, but in connection with it, in a dialectical dialogue with it. The new concept should inherit the inner structurality, the meaningfulness, the quality of objectual compactness, expressed by the original intuition. On the other hand, the intuitive representation itself will gain in clarity and in precision in communicability" (p.51).

Es así como, el autor plantea que lo que sigue a un proceso constructivo, en el espacio de la educación en matemáticas, es la inclusión de la intuición en un marco conceptual riguroso. A su vez, dicho proceso atestigua que la intuición ya no será lo que ha sido. Se habrá reconstruido y transformado en una estructura mental cuasi-nueva en la cual, seguramente, se conservarán ecos de ideas anteriores sobre continuidad u otros conceptos, pero donde lo esencial estará representado por la estructura matemática en sí misma, comprendida como un todo (Fischbein, 1979). Vale decir, "what is important here, for building or rebuilding an intuition, is primarily the <u>constructive process</u>" (p.52). Es decir, aquí lo fundamental es que para llegar a una aceptación intuitiva de un enunciado matemático (ya sea una definición, teorema, fórmula, etc.), dicha declaración deberá ser elaborada por el propio estudiante como resultado de un personal, incluso original, esfuerzo de búsqueda, como la elaboración de una nueva experiencia. Al respecto Fischbein (1979) señaló: "The didactic utility of such an active approach is well-known and it sounds rather like a trivial request. What has not been said explicitly is that this requirement refers not to the conceptual structure but to the intuitive component of the understanding process" (p.52).

Así, para Fischbein, la experiencia previa, el dar un espacio y reconocer lo que el estudiante trae es fundamental. Más aún, afirma que una nueva intuición que contradice una antigua o que representa una versión mejorada de una antigua, no puede ser elaborada sin considerar la intuición primaria. Agrega: "<u>the personal involvement of the learner in that constructive process is especially necessary when the respective truth has something to do with an existing, formerly acquired, and stabilized intuition</u>" (Fischbein, 1979, p.52). Es decir, como parte principal de la relación pedagógica, para un aprendizaje y reconstrucción de la intuición, está el reconocimiento del otro, de su historia, de su subjetividad.

Así, como parte de la realidad dentro del aula de matemáticas, se viven con frecuencia situaciones conflictivas como, por ejemplo, se presentan a niños/as de doce años de edad dos segmentos AB y CD, donde CD>AB. Se pregunta "¿cuántos puntos hay en el segmento AB?", la respuesta será "una infinidad de puntos". Luego se pregunta a los estudiantes: "¿Se puede poner los puntos de AB y los puntos de CD en una correspondencia de uno a uno?", entonces, más de algún /a niño/a responderá "no". "¿Por qué?", "Debido a que el segmento CD contiene más puntos". Otros agregarán "Usted dijo que en ambos hay una infinidad de puntos”, “Sí, pero el segmento CD es más largo. La infinidad de CD es mayor que la infinidad de AB”, dirán otros (Fischbein, 1979).

Ahora bien, frente a situaciones como ésta, es probable que haya un acuerdo en cuanto a que no se debería buscar evitarlas, sino más bien posibilitar situaciones conflictivas que el estudiante pueda experimentar con el fin de trascenderlas e integrarlas. Asimismo, en relación con esta temática, una reflexión típica es pensar que no hay correspondencia entre los números naturales y los números pares positivos, a pesar de que ambos conjuntos son infinitos, debido a que la relación entre ellos es 1:2. Como dijera Fischbein (1979) en uno de sus papers, está claro que en diversas situaciones los estudiantes utilizan sus esquemas “finitistas”, los cuales están basados en intuiciones profundamente arraigadas (como “el todo es mayor que sus partes”, etc.), a la hora de interpretar relaciones entre conjuntos infinitos. Lo que sigue sorprendiendo, y le da un cariz interesante desde el punto de vista psicológico, es que con frecuencia los estudiantes aceptan sus propias afirmaciones contradictorias sin protestar o buscar una solución. Fischbein diría que es muy probable que a través de los años escolares los estudiantes se acostumbren o naturalicen interpretaciones tácitamente aceptadas y afirmaciones que se contradicen entre sí (Fischbein, 1979). Ahora bien, esto también podría relacionarse con variables sociales y políticas (no excluyentes a las cognitivas), donde es habitual que las “narraciones” de contenidos, tiendan a petrificarse o transformarse en algo inerme, ya sean estos valores o dimensiones empíricas de la realidad (Freire, 1970).

Fischbein, en relación con estas problemáticas, rescata, entre otras cosas, la perspectiva intuicionista de las matemáticas. “But, returning to the constructive process, it seems interesting--both from a psychological and a didactical point of view--that, for the intuitionist doctrine in mathematics, <u>an intuition is equivalent to the result of a constructive mental process</u>. An idea is intuitively clear, it is intuitively acceptable, only if it can be effectively constructed by a mental process. In Heyting's words: Intuitionist mathematics consists of mental, constructions; a mathematical theorem expresses a purely empirical fact namely the success of a certain mental construction. Thus, "2+2=3+1" means I have effected the mental construction as indicated by (2+2) and by (3+1) and I have found they lead to the same result. (Wilder, 1965, pp. 247-248)” (Fischbein, 1979, p.53).

Ahora bien, este punto es importante en cuanto Fischebin de ningún modo está tratando de discutir el papel que el Intuicionismo ha jugado en la historia de las matemáticas o su validez como concepto matemático. Así, más bien, Fischbein está haciendo hincapié en que el análisis del enfoque Intuicionista puede ser muy sugerente en la didáctica de las matemáticas. Lo que tampoco quiere decir que sólo aquellos conceptos que expresen un proceso constructivo serán matemáticamente válidos. En palabras de Fischbein (1979): "But I must take into account the fact that only those concepts and statements which the learner has attained by his own mental constructive processes have for him an intuitive validity. A difficult problem is that of mathematical concepts which do not have a constructive nature, such as, for instance, the concept of actual infinity. Such situations generate mental conflicts, hard to overcome. But in such situations, too, didactical means should be invented in order to overcome the difficulty and to attain an intuitive acceptance" (p.53). Es decir, facilitar experiencias que generen aquellas intuiciones.

En relación con lo señalado, aquí se plantea que una intuición no podrá ser construida a través de meras exploraciones verbales ni por una práctica ciega de procedimientos de resolución de problemas matemáticos. Una intuición, entonces, podrá ser elaborada sólo en el marco de situaciones prácticas, como resultado de la propia participación de estudiantes en la resolución de problemas reales planteados en dichas situaciones prácticas. Lo mismo sucede con el/la niño/a en una edad temprana, cuando una gran variedad de genuinas situaciones problemáticas prácticas contribuyen en la formación de sus representaciones intuitivas básicas de espacio y tiempo, de identificaciones objetuales, de estimaciones de cantidad y oportunidad, etc. (Fischbein, 1982). Es decir, así como en el marco de las experiencias tempranas de aprendizaje que modelan y construyen diversas intuiciones (que sin duda más tarde afectarán al aula de matemáticas), dentro de los procesos (constructivos) intelectuales educativos se divisa como requisito el componente comportamental, un componente práctico fundamentado en la experiencia. Como se dijo anteriormente, esto es especialmente evidente en cuanto a las probabilidades se refiere, donde la experiencia del lanzamiento de cien monedas puede hacer una diferencia significativa a la hora de pensar en torno a límites de sumas de potencias, series geométricas, infinito, etc. En palabras de Fischbein (1982): "The same must happen if new intuitions are to be built in the process of the intellectual education of the pupil, in his school years. Every problem used must imply some request for a global, predictive, extrapolative interpretation having a behavioral meaning" (p.12).

Así, por ejemplo, con el fin de crear nuevas intuiciones probabilísticas que sean correctas el/la estudiante deberá ser autónomo y protagonista de su aprendizaje, deberá participar activamente en procesos involucrados en la realización de experimentos de cambios, en adivinar resultados y evaluar riesgos, en contrastar resultados individuales y de masas con predicciones “calculadas” a priori, etc. Es decir, nuevas, correctas y poderosas intuiciones probabilísticas no podrán construirse con la mera ejercitación o aplicación de fórmulas. Lo mismo ocurrirá con la geometría y con cada rama de las matemáticas (Fischbein, 1982).

Será darle cabida al trazado de la experiencia, la experimentación en probabilidades, comenzar por construir intuiciones que contribuyan al trabajo analítico posterior, el jugar a adivinar para luego contrastar esas dos maneras distintas de operar, qué se puede imaginar que ocurrirá, qué resultado(s) se puede(n) ver rápidamente sin un procedimiento aritmético consciente, preguntarse qué se ve, qué se olfatea, qué resuena, qué diferencias y qué similitudes se pueden distinguir con respecto a los cálculos posteriores que se hizo. Se podrá jugar a nombrar las palabras que están dando vueltas asociadas a la temática en curso, podrá inmiscuirse en el mundo de las probabilidades y los grandes números, en sus nociones y leyes, lanzando la moneda pocas y muchas veces, abordando ideas como frecuencias relativas, probabilidades, foto, retrato, aleatoriedad, movimiento browniano, real-ideal, etc., desde la corporización de metáforas[19], desde lo cotidiano, para establecer un piso y complementarlo con el quehacer simbólico aritmético, desde la técnica dura de los números, desde el cuerpo, desde el traducir experiencias (Jiménez, 2013; Soto-Andrade, 2011).

De este modo, pareciera ser que a pesar de haber sido históricamente cuestionada la validez o verosimilitud de estas preconcepciones tácitas, comúnmente son parte del desarrollo individual de los sujetos así como también de la historia de la ciencia. Algo así como, tanto de procesos científicos como de procesos personales científicos, como parte de lo micro y de lo macro. Así, este conocimiento intuitivo se complementará con el conocimiento analítico. Este último, a nivel de comportamiento práctico efectivo (ya sea

[19] “Las metáforas corporizadas ocupan un lugar central en la labor cotidiana docente. El profesor hace uso de ellas de manera semántica y kinética, de manera consciente o inconsciente, como un instrumento de explicación, clarificación o consolidación de conceptos y de relaciones procedimentales entre conceptos, durante su interacción pedagógica con los alumnos en el aula. Su uso constituye un elemento central y generalizado de cualquier interacción en la clase. En la enseñanza de las ciencias aparecen como un elemento esencial, desplegado en complemento con acciones de tipo demostración, experimentos o experiencias” (Jiménez, 2013, p.10).

mental o externo), a pesar de ser un instrumento cognitivo altamente confiable, presenta en la mayoría de las oportunidades un inconveniente esencial: su falta de inmediatez, de eficacia directa, de eficiencia. En palabras de Fischbein (1982): “A pure conceptual structure has not, in itself, the orienting and inspiring power requested by a productive mental process. The processes of discovering, organizing and using information are largely influenced by the personal, sympathetic attachment characteristic of intuitions, by the kind of "tacit knowledge" so beautifully described by Michael Polanyi [1969]. Although we sometimes question their validity, pre-conceived tacit interpretations are very frequently taken for granted in the history of science and in the course of individual development. Their influence on the ways of posing and solving problems may be considerable” (p. 13).

Es por esto que, si se piensa que el aprendizaje es dialógico, la pedagogía de las matemáticas exige una actitud no sólo del docente. Es decir, es necesario ir más allá de las ideas que suponen el lugar del profesor/a como único/a responsable del aprendizaje de su estudiante, ideas peligrosas que podrían desconocer las condiciones materiales, políticas, económicas e institucionales del contexto educativo. Es así como, tal como un científico tiene a la mano algunas pruebas experimentales y otras lógicas, el estudiante también se verá en relación con dicha diversidad, asimétrica, por lo demás, en la medida que ambas no tienen el mismo peso en cuanto a la actividad práctica se refiere (Fischbein, 1982). De este modo, en convivencia con ambos tipos de pruebas y con la tensión que de ellas se desprende, el estudiante será invitado a experimentar, a jugar, pero también a creer, será instigado al desafío de entrelazarlas, disolver o remover aquellas fuerzas en juego (Fischbein, 1982).

Es decir, se ha observado que para el comportamiento adaptativo actual, la principal forma de producir representaciones e interpretaciones generales es mediante la inducción empírica. Así, mientras se logre acumular más hechos concretos que confirmen ciertas visiones o premisas generales, más se estará convencido de su validez. El grado de creencia, de confianza, de convicción dependerá, naturalmente entonces, de la cantidad y, por supuesto, de la variedad de hechos confirmatorios que se logren acumular (Fischbein, 1982).

En relación con lo anterior, se ha dicho que el concepto de prueba formal está completamente fuera de la corriente principal de conducta de un sujeto. Así, aunque una prueba formal podrá ofrecer una garantía absoluta para un enunciado matemático, dicha forma de pensar, conocer y probar, básicamente, se contradice con la forma práctica de adaptación del conocer, en la que se está permanentemente en búsqueda de una confirmación adicional. En todo caso, en principio, la estructura formal de pensamiento de un adolescente, por ejemplo, poseería todos los elementos básicos necesarios para hacer frente a situaciones tanto formales como empíricas (Fischbein, 1982).

Así, un estudiante podrá analizar una situación dada, tratar de identificar algunas propiedades generales, relaciones invariantes, dependencias, correlaciones, diseñar metodologías de registro, etc., pero en un determinado momento se detendrá dicho proceso de búsqueda y aparecerá una nueva situación: el matemático, el niño científico, habrá encontrado una demostración completa para su solución o teorema. En torno a esta temática Fischbein (1982) escribió: “Such a proof is the absolute guarantee of the universal validity of the theorem. *He believes in that validity*. This is a new situation in relation to natural mental behavior. Naturally, intuitively, we continue to believe in the usefulness of enlarging our field of research, of accumulating more confirmation. To think means to experiment mentally. Mental experience is the duplicate of the practical trial-and-error goal-oriented process. Therefore the ideal, the perfect proof, has no meaning for the natural empirical way of thinking. In order to really understand what a mathematical proof means the learner's mind must undergo a fundamental modification” (p.17).

De ningún modo, esto quiere decir que sea imposible aprender una prueba y/o nociones generales de una prueba desde una perspectiva formal. Sólo se está haciendo hincapié que, tal como las investigaciones lo han demostrado, esto parece no ser suficiente. Tal como lo afirmara Fischbein (1982): “A profound modification is required. A new completely non-natural "basis of belief” is necessary, which is different from the way in which an empirical "basis of belief” is formed. *The concept of formal noninductive nonintuitive, non-empirical proof can become an effective instrument for the reasoning process if and only if it gets itself the qualities required by adaptive empirical behavior!*” (p.17). Así, como se ha ratificado en varias ocasiones, la necesidad de una relación con la práctica es evidente. Se deberá procurar, entonces, que la formalidad, la lógica estén anidadas en la realidad cotidiana, aterrizadas en aprendizajes significativos. En otras palabras, las maneras formales de pensar y probar (demostrar), en la didáctica de las matemáticas, podrán liberarse de los límites del conocimiento empírico sólo si llegan a ser capaces de incluir en sí mismos aquellas cualidades que le confieren a la exploración empírica su productividad específica. Es decir, aquellas formas globales, sintéticas, intuitivas de predicción e interpretación (Fischbein, 1982).

"*Briefly, in our opinion, even at the level of purely formal concepts, productive thinking needs such forms of intuitive sympathetic representations*. The problem for the pedagogy of mathematics is not to exclude or to avoid them - which is not possible - but, rather, to refine them and to bring them under a complete conceptual control" (Fischbein, 1982, p. 14). Así, como se ha mencionado en otras ocasiones, la importancia entre hacer puentes entre diversas formas de aprender, pensar, probar, tiene como requisito el cuidado y la precaución de no polarizar(se) ninguna práctica. Es decir, así como será necesario construir una relación entre los conocimientos formales y experiencias cotidianas, también será necesario cuidar que dichas experiencias no estén exentas de contenido a trabajar, que no induzcan a errores que promuevan confusiones, prejuicios etc. Asimismo, será necesario poner dicha relación, entre lo formal y lo empírico, siempre en cuestión, preguntándose constantemente qué particularidades tiene, cómo se significan y se relacionan ambos espacios (Fischbein, 1982).

Más aún, se ha observado que no será suficiente, en la práctica de razonamiento matemático, que el estudiante aprenda formalmente qué significa una prueba formal completa para que pueda estar listo para sacar provecho sobre dicho conocimiento. Así, una nueva "base de creencia", un nuevo enfoque intuitivo deberá ser elaborado para que el estudiante esté en condiciones no sólo para entender una prueba formal, sino que también para creer completa, emocional e intuitivamente en la universalidad a priori de un teorema garantizado por una respectiva prueba (Fischbein, 1982).

Así, como en todas las formas de pensamiento, se necesitará además de esquemas conceptuales lógicos, esa capacidad de aceptación directa, global y afectiva, la cual se ve expresada en un enfoque (aproximación) intuitivo. Es decir, después de aprender una prueba formal, no sólo será necesario alcanzar una convicción "formal" lógica, analítica, sino que también aquella concordancia interna, directa que dice "Oh, sí, es obvio que la propiedad descrita debe estar presente en cada objeto que pertenezca a la categoría dada". En palabras de Fischbein (1982): "*The feeling of the universal necessity of a certain property is not reducible to a pure conceptual format. It is a feeling of agreement, a basis* *of belief an intuition - but which is congruent with the corresponding formal acceptance*" (p. 17). Ahora bien, este componente afectivo o emocional del aprendizaje, del cual se hace mención, de ningún modo hace referencia al construir experiencias que comprueben una premisa o al promover reproducciones ciegas o repeticiones robóticas de una idea con el fin de asentar un espacio de convicción o creencia desde la sumisión, sino más bien, el rescate de este componente afectivo, da cuenta de la necesidad de generar experiencias que construyan conocimiento intuitivo, para que a la hora de institucionalizar, nombrar, explicitar las formalidades que de ellas se desprenden, el componente emocional esté arraigado y la intuición haya sido modificada, pulida, construida o reconstruida, según sea el caso. Así, las emociones se podrán remover y comenzar a asentar desde el juego de pitonizar, de predecir, de adivinar, de experimentar, registrar, falsear, construir, aseverar, etc. Es decir, en realidad lo que se necesitará será conferirle la fuerza y universalidad de una creencia a la convicción formal derivada de una prueba sin que, por ello, se destruya el sentido o la legitimidad conceptual de la propia prueba (Fischbein, 1982).

De esta forma, se está apelando al complemento de dos modos de comportarse de entender, de aprender, de ver, de trabajar, de probar, de ser, etc. Parece radical connotar la importancia de trabajar en el aula de matemáticas ambas dimensiones, ambos espacios y entrelazarlos desde el tejido intuitivo. Pareciera imposible enseñar-aprender matemáticas, trabajar el pensamiento formal, abstraerse, si los actores educativos se conforman con axiomas inconexos con la experiencia, con la realidad concreta y subjetiva. La pedagogía en matemáticas pareciera necesitar hacerse cargo del peligro que conlleva en sus pasos, el peligro de ser pura reproducción, de robotizar sus procedimientos, de anular al sujeto en la medida que promueva el no pensar-ni sentir, que no cuestione las grandes verdades, los grandes principios y vaticinios. Es decir, la matemática conlleva el peligro de ser creencia ignorante, de asentarse sobre la fe de poco razonamiento y crítica, de repetir cuestionando lo mínimo. Y más aún, esa fe, esa religiosidad que promueve en algunos casos incluye, por lo mismo, una dificultad llena de frustraciones, termina siendo una creencia áspera, amarga, difícil de tragar y digerir, porque no va acompañada de entendimiento, porque su abstracción a ratos es infértil, porque incluso se contradice con la experiencia (por ejemplo, si lanzo 10 veces una moneda, es poco probable que la frecuencia relativa de "cara" coincida con la probabilidad ½ de "cara").

Así, el elemento adicional del cual se hace referencia, está constituido por la necesidad de una aceptación intuitiva que sea complementaria con aquella capacidad predictiva absoluta de una declaración que se ha demostrado formalmente. Es decir, una verdad matemática puede llegar a ser realmente efectiva para la actividad (matemática) productiva si, junto con la compresión formal de dicha verdad, se puede producir ese tipo de aceptación sintética, afectiva, directa, comprensiva, simpática de aquella validez. Lo mismo se aplica para un concepto, afirmación, prueba o para principios básicos de generalización en matemáticas (deducir, demostrar). Por lo tanto, el estudiante tendrá que ser capaz de integrar, sintetizar en su mente dos exigencias contradictorias en una sola estructura mental. Por una parte, será necesario que pueda tener el pleno control conceptual de los hechos en consideración. Por otra parte, su razonamiento matemático deberá preservar aquellas cualidades, como movilidad, flexibilidad y empiricidad, que son condiciones sine qua non para la actividad mental productiva. Ahora bien, si bien no se está diciendo cómo (desde la didáctica), ya que eso va a depender de las características propias de los sujetos que conformen las relaciones pedagógicas, de los conceptos a trabajar, de los contextos materiales, etc., sí se está trayendo a la mano un marco epistemológico, un margen de cómo relacionarse entre las personas y con las ideas, qué preservar, qué cambiar, se está haciendo énfasis en cuáles podrían ser los ingredientes para el resultado sea al menos parecido a lo que se espera lograr (Fischbein, 1982).

Entonces, si se encuentra con que un/a niño/a admite la veracidad de una prueba matemática, pero que sigue sintiendo inseguridad con respecto a su generalidad, se puede suponer que, en ese caso, no se ha alcanzado aquella síntesis fundamental. Seguramente eso podrá ser un punto, una pausa, un respiro que valdrá el esfuerzo hacer, una alerta a que queda algo por trabajar, por experimentar. O si no el estudiante quedará sumido en ese estado donde oscilará entre la comprensión formal, pero no suficientemente poderosa, de un enunciado matemático y las tendencias intuitivas y empíricas que lo empujarán a querer seguir buscando nuevos hechos concretos adicionales en pos de aumentar su convicción, su creencia en la validez general de la declaración ya probada (Fischbein, 1982).

A modo de resumen, siguiendo las ideas de Fischbein, recatadas por Tirosh y Tsamir (2012), en su artículo “Intuition in Mathematics Education”, publicado en la Encyclopedia of Mathematics Education, se puede decir, entonces, que para analizar el rendimiento matemático de los estudiantes, se puede establecer un marco desde donde se desprenden dos componentes complementarios del conocimiento matemático: el conocimiento formal y el conocimiento algorítmico (Fischbein, 1993 citado en Tirosh & Tsamir, 2012). El Conocimiento Formal se basaría en el pensamiento proporcional y haría referencia al rigor y a la coherencia de la construcción deductiva. Este tipo de conocimiento estaría libre de las limitaciones impuestas por las características concretas o prácticas. Por otro lado, el Conocimiento Algorítmico, sería la capacidad de de utilizar procedimientos teóricamente justificados. Fischbein (1993 citado en Tirosh & Tsamir, 2012), haría referencia a un tercer tipo de conocimiento: El Conocimiento Intuitivo. De este modo, cada uno de estos tres tipos de conocimiento (Formal, Algorítmico e Intuitivo) y sus interrelaciones jugarían un papel fundamental en el desempeño de un estudiante en matemáticas. El Background intuitivo manipularía, según el autor, y obstaculizaría las interpretaciones formales o el uso de procedimientos algorítmicos (Fischbein, 1993 citado en Tirosh & Tsamir, 2012).

Ahora bien, según lo que se ha planteado, la situación más favorable sería, seguramente, cuando un conocimiento formal se convierte en Intuición Secundaria (aquella mediada por espacios educativos de instrucción). Sin embargo, el marco de cambio conceptual que se ha planteado enfatiza la naturaleza gradual, lenta y prolongada de aquellos cambios (Tirosh & Tsamir, 2012).

Si se está apelando a que el profesor/a considere las intuiciones, la subjetividad, la historia de aprendizajes de sus estudiantes, se podría formular la siguiente pregunta: ¿sería un aporte que el docente complementara dicha búsqueda con la constatación de las propias intuiciones, que comenzara también por rescatar su propia historia y curiosidad, para elevar la relación pedagógica desde su conjunto y complementariedad, desde su dialéctica, desde una epistemología en primera persona? (Varela, Thompson & Rosch, 1992).

De este modo, tal como mencionaran Tirosh y Tsamir (2012) en su artículo, el objetivo principal de la educación en matemáticas debiera ser incitar a los estudiantes a utilizar el pensamiento crítico. Ahí, donde la tarea del estudiante y del profesor sea deconstruir constantemente en distintas magnitudes, a nivel de trazos gruesos y de pulir detalles, donde se observe, se concientice y se sospeche lo que se pensaba, lo que se piensa y lo que otros les muestran. Asimismo, acompañando el criticar, el intuir, el analogar y metaforizar, se entiende que este ejercicio cognitivo debiera ir en conjunto con un espacio donde los componentes afectivos y corporales estén a su vez presentes, donde el interés, la curiosidad, la creatividad, la motivación y la actitud de juego sean protagonistas, para que los estudiantes en vez de cruzarse de brazos, contrayendo y rigidizando su musculatura frente a un problema matemático, se sientan en cambio capaces y motivados a moverse, a probar, a soltar, donde el error sea tan válido como las respuestas "inteligentes", donde jugar sea igual a aprender-enseñar.

Por esto mismo, el incitar a los estudiantes a ser actores críticos de sus propios procesos deberá incluirse como una práctica con mucho cuidado y cautela, con el fin de no desalentar sus mecanismos básicos e intuitivos de pensamiento. Así, se hace evidente que la problemática de la intuición no sólo trata de cuestiones cognitivas, sino que invita a reflexionar en torno a las dimensiones políticas de dichos procesos, a las relaciones pedagógicas (de poder) que están ahí en juego, a pensar en cómo se están construyendo dichas relaciones, cómo se podría legitimar y darle un lugar a la subjetividad e historia del otro con el cual se convive. Es decir, abordar la dimensión social, humana, para que la pedagogía no se resuma en didáctica (Tirosh & Tsamir, 2012).

Diversos métodos didácticos han sido sugeridos para abordar esta "delicada situación" pedagógica. Entre ellos se encuentran la enseñanza por analogías, el trabajo a través de metáforas, la enseñanza de resolución de conflictos, la focalización de la atención en variables relevantes, favorecer la consciencia de los estudiantes con respecto al papel que juega la intuición en sus procesos de pensamiento, el desarrollo de habilidades metacognitivas, experienciar actividades prácticas, introducir el significado, el sentido y el contenido formal tan pronto como sea posible, etc. Sin embrago, la factibilidad y el impacto de dichos métodos, <u>contextualizados en situaciones específicas</u>, aún necesitan ser exploradas (Tirosh & Tsamir, 2012).

Si bien esta memoria de título pretende ser sólo un pequeño acercamiento hacia el papel que podría jugar la intuición, entendida como un mero ejemplo dentro de un contexto más amplio de situaciones y variables, más que nada su objetivo ha sido evocar preguntas interesantes, incómodas que generen movimiento en vez de respuestas fijas. Queda claro, que éste puede ser sólo un comienzo a futuras investigaciones o exploraciones que rompan con visiones dualistas, para hacer hincapié en la unión, mixtura y deconstrucción de aquello que por lo general se ha separado (Conocimiento Científico/Experiencias Cotidianas, Formal/Empírico, Investigación en Didáctica/Aspectos Sociopolíticos, Cognitivo/Afectivo, Ciencias Duras/ Ciencias Blandas, Micro/Macro, Lo Concreto/Lo Abstracto, etc.).

Esta memoria, que surge desde espacios pequeños y limitados de observación, tanto teóricos como prácticos, ha buscado situarse en la epistemología que resuena en la intuición dentro del aula de matemáticas. Desde ahí, ha buscado cuestionarse y aportar en torno a la relación que establecen las personas con las matemáticas. Una relación, que al estar influenciada, a su vez, por relaciones humanas, no está exenta de variables relativas al poder o de variables como la creatividad. Así, si dicho espacio, aquella relación entre cada persona y las matemáticas se hace más fértil de experiencias enriquecedoras, podrían trascenderse ansiedades, frustraciones y angustias matemáticas, podría valorarse y darle cabida a la diversidad, podría abrirse la posibilidad de aprender a observar-se, aprender a escuchar, sobre todo a escuchar, podría generarse una puerta de entrada hacia el experienciar, hacia el crecer y hacia analogías con la vida cotidiana, donde se tenga consciencia “que si la especulación no sirve para construir puentes, entonces no sirve realmente”, donde se potencien actitudes humanas que vayan en pos del desarrollo y crecimiento de cada uno y de todos en comunidad.

15.- REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Libros, Artículos de Revistas e Investigaciones

Acuña, F. (2010). *Implicancias pedagógicas de la triple dialéctica del razonar*. Escrito realizado para Postítulo de Filosofía y Educación. Manuscrito no publicado. Universidad de Chile, Santiago, Chile.

Aebli, H. (1973). *Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget*. Buenos Aires: Editorial Kapelusz S.A.

Benlloch, M. (1997). *Desarrollo cognitivo y teorías implícitas en el aprendizaje de las ciencias*. Madrid: Visor Distribuciones S.A.

Biard, J. (2012). Intuitive and Abstractive Cognition. En H. Lagerlund (Ed.), *Encyclopedia of the Medieval Philosophy* (pp.1-5). Berlín: Springer Reference.

Bruner, J. (1984). *Acción, pensamiento y lenguaje*. Madrid: Alianza Editorial.

Bunge, M. (1965). *Intuición y Ciencia*. Buenos Aires: Editorial Universitaria.

Cappon, D. (1993). The anatomy of intuition. *Psychology Today, 3* (26), 40-91.

Darbolo, J. (2012). Intuition Pumps and Augmentation of Learning. En N. Seel (Ed.), *Encyclopedia of the Sciences of Learning* (pp.1-6). Berlín: Springer Reference.

Dejours, C. (2012). *Trabajo Vivo. Tomo I. Sexualidad y trabajo.* (1ª ed.). Buenos Aires: Editorial Topía.

Feigenson, L., Halberda, J. & Mazzocco, M. (2008). Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement. *Journal Nature, 455,* 665-669.

Fischbein, E. (1979). Intuition and Mathematical Education. En R. Lesh & W. Secada (Eds.), *Some Theoretical Issues in Mathematics Educations: Papers from a*

Research Presession (pp.33-54). Columbus: ERIC (Education Resources Information Center).

Fischbein, E. (1982). Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics, 2* (3), 9-24.

Fischbein (1987/2002). *Intuitions in Science and Mathematics: An Educational Approach*. New York: Kluwer Academic Publishers.

Fischbein, E. (1989). Tacit Models and Mathematical Reasoning. *For the Learning of Mathematics, 2* (9), 9-14.

Fischbein, E. (1999). Psychology and Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning, 1* (1), 47-58.

Fischbein, E. & Schnarch, D. (1997). The Evolution with Age of Probabilistic, Intuitively Based Misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education, 1* (28), 96-105.

Freire, P. (1970/1972). *Pedagogía del Oprimido* (4ª ed.). Buenos Aires: Siglo XXI Editores S.A.

Freire, P. (1993/2004). *Cartas a quien pretende enseñar.* (1ª ed.). Buenos Aires: Siglo XXI Editores S.A.

Freire, P. (1996/2011). *Pedagogía de la Autonomía. Saberes necesarios para la práctica educativa* (2ª ed.). Buenos Aires: Siglo XXI Editores S.A.

Goldberg, P. (1994). *La dimensión intuitiva.* Barcelona: Editorial Apóstrofe S.L.

Hessen, J. (1925/2003). *Teoría del Conocimiento*. Santiago: Editorial Centro Gráfico Limitada.

Jimenez, C. (2013) *Neurociencias Aplicadas a la Educación*. Presentación para Laboratorio de Neurociencias Aplicadas a la Educación no publicada, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.

Kline, M. (1970). Logic versus Pedagogy. *The American Mathematical Monthly, March,* 264-281.

López, C. (2006). La intuición y la matemática. *Revista de Ciencia y Tecnología Facultad de Ingeniería. Universidad de Palermo, 6,* 29-36.

Marrero, J., Rodrigo, M. & Rodríguez, A. (1993) *Las Teorías Implícitas. Una aproximación al conocimiento cotidiano*. Madrid: Visor Distribuciones S.A.

Mason, J. (2003). Structure of Attention in the Learning of Mathematics, En J. Novotná (Ed.) *Proceedings, International Symposium on Elementary Mathematics Teaching* (pp. 9-16). Prague: Charles University.

Molina, J. (2004). *Las concepciones que los estudiantes tienen sobre la transformación lineal en contexto geométrico*. Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa, Unidad Distrito Federal Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Distrito Federal, México.

Molina, J. & Oktaç, A. (2007). Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico. *RELIME (Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa), 10* (2), 241-273.

Parra, C & Saiz, I. (1994/2009). *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones* (12ª Reimpresión). Buenos Aires: Paidós.

Parraguez, M. (2012). *Los Modelos Intuitivos y La Intuición. Primera Parte*. Disertación doctoral no publicada, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.

Piaget, J. (1981). *Psicología de la inteligencia*. Buenos Aires: Editorial Psique.

Shallcross, D. (1998). La Intuición como proceso primario. En Servicio de Publicaciones e Intercambio Científico Universidad de Santiago de Compostela (Ed.), *Intuición* (pp.15-22). Santiago de Compostela: Editores.

Soto-Andrade, J. (2007). La cognición hecha cuerpo florece en metáforas… En D. Cosmelli & A. Ibañez (Eds.), *Nuevos enfoques de la cognición. Redescubriendo la dinámica de la acción, la intención y la intersubjetividad* (pp. 71-89). Santiago: Ediciones Universidad Diego Portales.

Soto-Andrade, J. (2008). Mathematics as the art of seeing the invisible… *Proceedings of ICME 11 (The 11th International Congress in Mathematical Education)* (pp. 1-14). Monterrey, México.

Soto-Andrade, J. (2012). Metaphors in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp.1-6). Berlín: Springer Reference.

Soto-Andrade, J. & Reyes, P. (2011). Conceptual metaphors and "Grundvorstellungen": a case of convergence? *Proceedings of CERME 7 (The 7th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education)* (pp. 735-744). Rzészow, Polonia.

Soto-Andrade, J., Cosmelli, D., Cubillos, L., Gálvez, G., Luci, G., Flores, X. et al. (2011). Estrategias cognitivas para el cálculo mental. *RELIME (Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa), 1* (14), 9-40.

Tall, D. (1999). Efraim Fischbein, 1920–1998, Founder President of PME - A Tribute. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of PME (Psychology of Mathematic Education)* (pp. 3-5), Haifa, Israel.

Tirosh, D. & Tsamir, P. (2012). Intuition in Mathematics Education. *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 1-6). Berlín: Springer Reference.

Varela, F., Thompson, E. & Rosch, E. (1992/2011). *De cuerpo presente. Las ciencias cognitivas y la experiencia humana* (4ª ed.). Barcelona: Editorial Gedisa S.A.

Vaughan, F. (1979/1991). Pautas para despertar la intuición. En A. Celis (Trad.), *Awakening Intuition* (pp. 198-211), New York, NY: Doubleday Editors.

Wan, X., Takano, D., Asamizuna, T., Suzuki, C., Ueno, K., Cheng, K. et al. (2012). Developing Intuition: Neural Correlates of Cognitive-Skill Learning in Caudate Nucleus. *The Journal of Neuroscience, November,* 17492-17501.

Weinstein, L. (2008). *Autoritarismo o Creatividad Social*. Santiago: Editorial Universidad Bolivariana.

Documentos en línea

Abercrombie, M.L.J. (1989). Análisis grupal y educación superior. *Ilusión Grupal, 2,* 1-8. Extraído el 28 de Mayo de 2013 de http://www.psicologiagrupal.cl/escuela/index.php?option=com_content&view=article&id=207:analisis-grupal-y-educacion-superior&catid=43:articulos&Itemid=69)

MINEDUC (2010). Primera mirada a resultados SIMCE 2009. Extraído el 27 de febrero de 2013, de http://www.educarchile.cl/Portal.Base/Web/VerContenido.aspx?ID=203472

MINEDUC (2013). Síntesis de Resultados SIMCE 4.° Básico 2012. Extraído el 26 de Julio de 2013, de http://www.agenciaeducacion.cl/simce/resultados-simce/

16.- ANEXOS

Anexo N°1:

Una clase de Matemáticas en el Programa de Bachillerato de la Universidad de Chile

Sabemos que cada clase es diferente, porque va a depender de quiénes sean las personas (y sus relaciones) que estén participando y construyendo los procesos pedagógicos, es decir, dependerá de sus necesidades, inquietudes, historias, de las contingencias académicas y sociales, entre otras cosas. Partiendo de dicha base, a continuación se describe una modesta estructura, que más que perseguir reproducirla, es una planilla base, un mapa que, a la vez que se tiene presente, permite pasear por él de manera aleatoria, tal como las partículas de polen pasearon en la solución acuosa, entre moléculas, en la danza del ritmo “browniano”.

Mi experiencia como profesora ha germinado desde diversos nichos como, por ejemplo, desde el trabajo con niños/as y jóvenes en el contexto de la Educación Popular; desde clases particulares a jóvenes y personas de la tercera edad; desde la docencia en CFG de la línea de Compromiso Ciudadano de la Facultad de Medicina de la Universidad de Chile, en el contexto de Proyectos Comunitarios, Salud y Arte, entre otros temas. Esto sin duda, ha sido complementado con el trabajo de psicóloga en una escuela municipal rural. Ahora bien, en el marco de las Matemáticas, específicamente, mi rol ha estado sujeto al de profesora ayudante. Esto es significativo, en la medida en que mi trabajado ha sido en realidad no “mío” sino que “nuestro”, construido con los estudiantes y con el profesor de las cátedras que he asistido (Jorge Soto Andrade). Así también, esto ha enmarcado mi trabajo desde la idea de apoyo y complemento, desde el ir acompañando un proceso, lo que le ha dado características específicas a mi quehacer dentro del aula, tanto por sus alcances como por sus limitantes.

Las clases comienzan con un trabajo corporal, de entre 3 a 5 minutos, sentados en la silla (ejercicios de respiración, meditación, flexión y/o torsión de la columna, movimientos articulares, etc.). Qué se haga dependerá de cómo llegan los estudiantes (cansados, activos, verborreicos, etc.).

Luego, se escucha lo que traen, qué contenidos tienen a nivel consciente o latente con respecto a lo que se ha visto en el curso, para esto se hace una lluvia de ideas de frases, conceptos, imágenes de lo que está presente y va emergiendo. Para construir colectivamente esta lluvia de ideas se responde a la pregunta: ¿qué ideas, palabras, imágenes, conceptos se les vienen a la mente cuando piensan en qué se ha visto hasta ahora en el curso? Esta actividad es rápida y lúdica, no debiera tardar más de 5 minutos, se registra además en la pizarra.

Después, si se va a institucionalizar[20] algún concepto matemático con el que se ha estado jugando-trabajando, se hace una asociación libre con la palabra, por ejemplo, “Demora”. Esas palabras asociadas se agrupan y se levantan categorías entre todos. Luego, se analiza y se construye una definición tentativa que queda escrita en la pizarra como referente, como propuesta. Esta actividad también es lúdica y breve.

Después se plantea un problema matemático. Se podrá comenzar por jugar a “pitonisar”[21] su resultado, sin todavía analizar el problema. Esas respuestas se anotan en la pizarra y se agrupan según sus similitudes. Luego, el comienzo del trabajo analítico será entrevistar a ese problema, saber hacerle buenas preguntas, preguntas fructíferas, observar si está claramente delimitado, cómo se podría hacer un registro, etc.[22]

Así también, este problema matemático podrá ser abordado de diversas maneras: con el cuerpo, con álgebra, con esquemas, dibujos, etc. En la clase se intenta abordar cada problema por lo menos en tres o cuatro formas diferentes, las cuales van a construirse en base a lo que ese grupo humano en particular sugiera en ese momento.

Otra posibilidad, complementaria a lo antes señalado, será abordarlo en grupos pequeños de tres personas aproximadamente. Esta modalidad grupal permite que los estudiantes

[20] Institucionalizar, se refiere en este caso a ponerle nombre a la experiencia, explicitar de qué se ha estado hablando, con qué concepto de la matemática se ha estado trabajando, algo así como “sacar en limpio”, hacer acuerdos a nivel del lenguaje verbal.

[21] Este término, que hace referencia a la diosa Pitonisa, lo ocupamos bastante en las clases, alude a la noción de adivinar o especular resultados posibles.

[22] Si es que emergen algunas incomodidades por parte de los estudiantes, aquí se hace énfasis en la actitud que se puede tener frente a un problema: o uno se cruza de brazos, rigidiza su musculatura y le teme al error; o se atreve a jugar y usa el cuerpo de una manera liviana y lúdica. En general, a principios de semestre acá se hace un alto porque los estudiantes vienen más rígidos y temerosos. Por lo mismo, se invita a que se observen a sí mismos, cómo se sienten con el problema, cómo esa reacción se relaciona con otras reacciones que tienen frente a problemas que no son matemáticos.

lleven sus propios ritmos, que los que son (o están) más rápidos no limiten a los más lentos, emerge con mayor amplitud la diversidad de respuestas y preguntas, los contrastes se abordan con mayor naturalidad y da pie para una mayor participación.

Luego, si se trabajó en grupos se hace una plenaria, subrayando las diversas posibilidades, los diferentes recorridos, los modos cognitivos[23], enfatizando en la auto-observación, en preguntarme cómo aprendo, cómo podría aprender, qué modo me es más cómodo o más fácil, cuál no, etc. Constantemente buscamos reconocer la diversidad y darle un lugar legítimo.

Luego, dependiendo de qué se trate la clase, de qué temas y preguntas emerjan, se podrá vincular la definición antes construida con los resultados, relacionándolo siempre con la vida cotidiana, con temas de diversas disciplinas, preguntando, por ejemplo, cómo se ve esto en mi diario vivir, en la economía, en el arte, qué habría dicho tal filósofo, etc. En las clases del curso de Bachillerato, se trata de establecer cruces con sus intereses vocacionales, al ser éste, en general, un tema relevante para ellos.

Lo importante es facilitar un espacio que sea dinámico y entretenido, donde constantemente haya lugar para preguntas, y donde sea posible entretejer el trabajo de resolución de problemas en grupos, con trabajos individuales y plenarias.

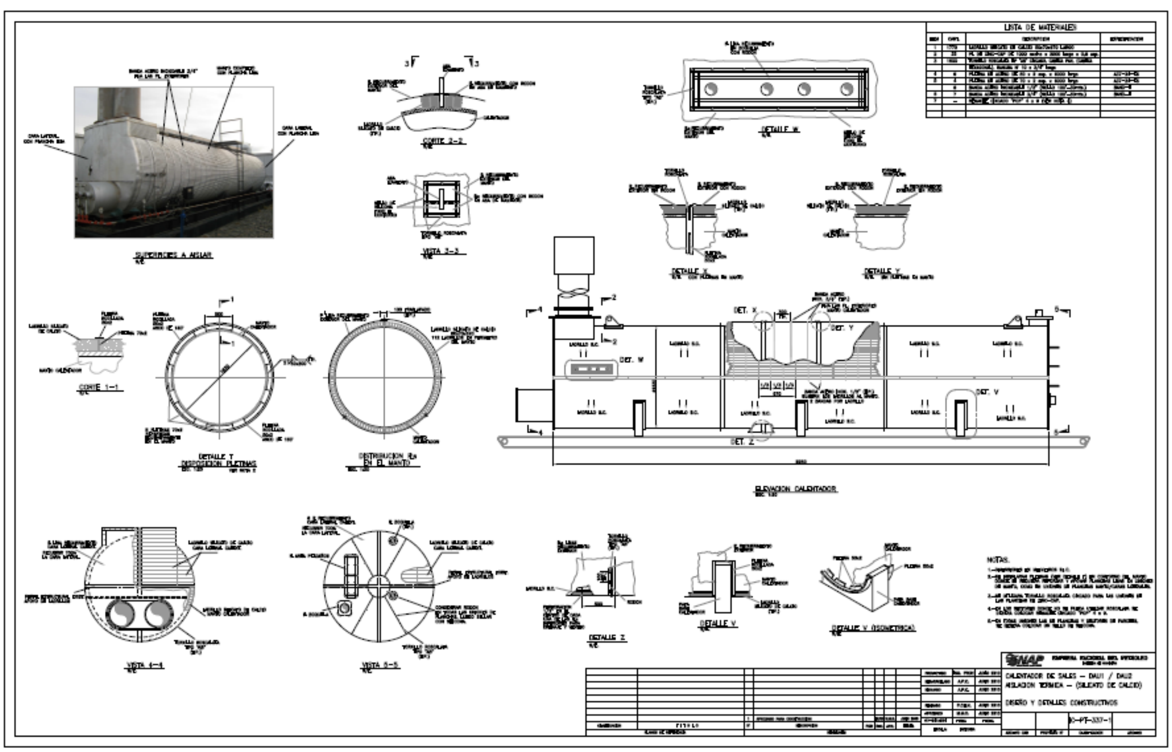
Para finalizar, me gustaría mencionar, que desde mi corta experiencia como ayudante y como docente, pienso que la clave se juega en el vínculo, en la relación de amor que se pueda construir con el otro, desde ahí la escucha, el respeto, la honestidad, la humildad, la entrega, etc. emergen con naturalidad, los estudiantes se motivan y se involucran en su aprendizaje. Para mí, la clave en estos años ha estado en amar mi trabajo y a las personas con las que comparto.

---

[23] No se trabaja con una nomenclatura oficial de modos cognitivos. Se mencionan, por ejemplo, la de los modos (o estilos) cognitivos básicos (Secuencial-Verbal; Secuencial-No Verbal; No secuencial-Verbal; No Secuencial-Noverbal), propuestos por Flessas y Lussier (2004), a partir de los trabajos de Luria (1972 citado en Soto-Andrade, 2007), o también la propuesta de Bruner (1984), continuada por Varela, donde se proponen lo Enactivo, Icónico y Simbólico como vías posibles de organización del conocimiento.

Anexo N°2:

Imagen de un Intercambiador de Calor, Industria de Hidrocarburos.



Anexo N°3:

Resumen final del texto: Fischbein, E. (1982). Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics, 2* (3), 9-24.

Summary

Many people who have moved beyond a dualistic view of knowledge in general, have difficulty with mathematics because they continue to see it only dualistically. My experience with the women in my study indicates that a more relativistic view of mathematics, coupled with a sense of personal responsibility for their own learning, made mathematics more approachable for them.

I am not making a general claim. Clearly my small and specialized sample is much too limited for that. I share this experience instead because of its depth and richness. There is much we can learn from listening to the way our students view mathematics as a field of knowledge. This group of able women provide us with a particularly articulate voice.

I share this experience also because I believe that a look at apprehension about mathematics from the perspective of a developmental scheme like William Perry's provides an alternative not usually present in work with the math avoidant. It is unfortunate that the term "math anxiety" has become such a popular one for it carries such a negative connotation.

Let me conclude with an excerpt from Emmy's final journal entry:

In this group I have very much enjoyed the philosophic insights the (statements and journal) entries gave. They sent me off into regions I love, and I apologize (particularly to Maria) that those regions were sometimes strange and irritating to others. I guess I got carried away. I do feel however that this wandering has helped me to think through the values that define my own character as well as mathematics. This seems to me an important step in repairing the flawed "relationship" I have with math. To think philosophically about math and to play with math problems simultaneously seem to me a lovely teaching method.

For the first time I think I have had the experience of learning something about myself from doing math. I feel somehow relieved that we all do not have the same symptoms or sources of "math anxiety": the fact that my problems are particular makes them seem easier to overcome. I almost feel foolish enough to give calculus another whirl without a pre-calc. review course! I am suddenly very curious, though, about how to find out the math books and teachers that will teach to my strengths (visual intuition) and not to my weaknesses (mechanics: arithmetic, algebra, trig., etc.). If mathematical thinking can take on so many styles, so can math teaching. I have not seen so many math teaching styles, though, at least not consciously.

Anexo N°4:

Tributo a Efraim Fischbein, escrito por David Tall, en el contexto de la 23ª Conferencia del Grupo Internacional de Psicología de Educación Matemática (23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME)

Efraim Fischbein, 1920-1998, Founder President of PME

A Tribute

David Tall

The 23rd meeting of the International Group for the Psychology of Learning Mathematics in Israel is touchingly the first in which we cannot be joined by our Founder President, Professor Efraim Fischbein, who left us on July 22nd 1998. It is a time of sadness, yes, but it is also a time for celebrating the achievements of this gentle man who is responsible for the existence of our organisation. In particular, it is to him that we owe our focus on the *psychology* of learning mathematics.

Efraim Fischbein was born in Bucharest on January 20th, 1920. He was a precocious child who learned to read Hebrew from the old testament at the age of three. He spent his formative years in Romania where he had to cope with the hardship of living in a rising fascist state. When World War II broke out he was forced into hard labour with other Jewish youths. His sight was seriously damaged and at the end of the war he prepared for his university examinations by listening to the reading of friends and conversation with his fellow students. He graduated at the Bucharest University in 1947 with an MA in Psychology and the qualification to teach mathematics in high school.

His first activity was to travel to Transylvania to care for a hundred orphans who were survivors of death camps. In 1948 he returned to Bucharest as a high school teacher and then, in parallel, as a lecturer in developmental psychology at the university. His long association with the University of Bucharest culminated as head of the Department of Educational Psychology from 1959 to 1975.

He was a prolific author of articles and books during this time, including the first original Romanian text-book on Psychology (*How do we know the world*, 1958). His monograph

The Figural Concepts: the nature of geometric entities and their development in children was published in 1963 and accepted for his PhD. Other titles published in Romanian include: *The Man, Master of His Habits* (1955), *Concept and Image in Mathematics Thinking* (1965), *The Art of Thinking* (1968), *Hazard and Probability in Children's Thinking* (1974).

He caught the eye of the international mathematics community and was invited to address the first International Congress in Mathematics Education in 1969. His outstanding presentation on "Enseignement mathématique et dévelopement intellectuel" and his rising eminence led to his invitation to chair the Working Group on the Psychology of Mathematics Education at the second ICME conference in 1972. This highly successful working group continued under his chairmanship at the third Congress in Karlsruhe in 1976 where the participants voted to continue with conferences every year as "The International Group for the Psychology of Mathematics Education". Efraim Fischbein was elected its founder president and served in this role from 1976 to 1980. Meanwhile he was appointed Professor of Psychology and founder chairman of the School of Education in Tel-Aviv University in 1975. He remained here for the rest of his life, with many visiting positions abroad, at Nottingham, UK, Montréal, Canada, Pisa, Italy, Georgia, USA, Heidelberg, Germany, and Granada & Valencia in Spain.

He continued to publish prolifically throughout his working life, including books in English on *The Intuitive Source of Probabilistic Thinking* (1975) and *Intuition in Science and Mathematics* (1987). His articles are a model of carefully designed research methodology and generative theory. Although well-versed in the methods of psychology, he was critical of its limited application to mathematics and saw that the psychology of mathematics education must develop its own theoretical perspectives.

His greatest creation is surely the organisation to which we belong. Following the decision to meet annually at Karlsruhe in 1976, the first meeting occurred the following year at Utrecht, organised by Hans Freudenthal. At Osnabrüch in 1978 the organization was formally constituted under the title "International Group for the Psychology of Mathematics Education", subsequently shortened from IGPME to PME.

I remember vividly the talk he gave at PME in 1978, for it was to change my whole professional life. He presented his empirical and theoretical ideas on individual conceptions of infinity. His slim, wiry frame resonated with vigour and emotion as he passionately advocated the theoretical implications of his empirical findings. His enthusiasm had a profound effect on me personally. My own, previously solitary studies in undergraduate thinking suddenly began to take their place in the wider picture that he painted. It inspired me to make the study of limits and infinity—and broader research in undergraduate mathematics—as the focal point of my studies at that time. By 1985 a growing interest in this area led to the formation of the Advanced Mathematical Thinking group. Thus it was that Efraim’s interest in the psychology of school mathematics permeated through to mathematics education at all levels.

He had a salutary wisdom that challenged those who professed to wear Emperor’s clothes. I remember explaining to him that I could “see” an infinitesimal as a graph that tended to zero. He challenged me forcefully, saying: “*Show* me an infinitesimal”. I was taken aback. I could not do it. Though I could formulate the formal mathematical framework, I had never analysed what it was that made the ideas work cognitively. It took a perceptive genius to ask the right question that cause a new theory to blossom. In my own case, this question from Fischbein spurred the journey of a life-time as I struggled to understand the relationship between conceptions to *think* about mathematics and processes that allow us to *do* it.

It is a salutary thought that he continued in vigour in his sixties and seventies, producing books and research articles of great quality at a time when many others have taken a well-earned retirement. At almost every conference of PME it has been my privilege and delight to take my turn amongst his many friends and colleagues who sought his wisdom and advice.

His research has a subtle balance between theory and empirical evidence that has always been the hallmark of his scholarship. It is these qualities which should continue to mark our present and future work in PME.

His work on primary and secondary intuitions, on children’s probabilistic thinking, on the complex meaning of infinite concepts and on intuition in both mathematics and science have been seminal. They provide us with fundamental notions on which we can continue to build into the future. While we lament his passing, we therefore rightly celebrate his achievement and his legacy:—the gift of "PME" which draws us together every year to pursue our continuing quest to understand the subtleties of psychological studies in mathematics education.

Farewell dear friend, our journeys continue in your footsteps.

* * * * *

A selection of publications by Efraim Fischbein in the last decade:

E. Fischbein (1989). Tacit Models of Mathematical Reasoning. *For the Learning of Mathematics*.

E. Fischbein, R. Stavy and H. Ha-Naim (1989). The Psychological Structure in Naive Impetus Conceptions. *The International Journal of Science Education*, *11* (1).

E. Fischbein & J. Engel (1989). Difficolta psicologiche nella compresione del principio di induzione matematica. *La Matematica ed la suo didactica, 3* (1).

E. Fischbein (1990). Intuition and information processing in mathematical activity. International *Journal of Educational Research, 14* (1).

E. Fischbein, D. Tirosh, R. Stavy and A. Oster (1990). The autonomy of mental models. *For the Learning of Mathematics, 10* (1).

E. Fischbein, M.S. Nello and G.S. Merino (1991). Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics, 11.*

E. Fischbein (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*.

E. Fischbein (1994). Didactics of mathematics as a scientific discipline. In R. Biehler, R. Scholtz, R. W. Sträßer, B. Winkelmann (Eds) *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline – The State of the Art.* Dordrecht: Kluwer

E. Fischbein and D. Schnarch (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively-based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education, 28* (1).

E. Fischbein and A. Grossman (1997). Schemata and intuitions in combinatorial reasoning. *Educational Studies in Mathematics*.

E. Fischbein and A. Grossman (1997). Tacit mechanism of combinatorial intuitions. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education*. Lahti, Finland.

E. Fischbein and T. Nachlieli. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education, 20* (10).

E. Fischbein (1998). Conoscenza intuitiva e conoscenza logico in attività matematica. *La Matematica e la sua didattica, 4.*

E. Fischbein (1999). Psychology and mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, an International Journal, 1* (1).

Anexo N°5:

Aforismos relacionados a la Intuición en Matemáticas, construidos por estudiantes de primer y segundo año del Programa de Bachillerato de la Universidad de Chile, que cursan el ramo de Matemática el año 2013.

LA INTUICIÓN EN MATEMÁTICA ES DESCUBRIR

La intuición en matemática es como las oportunidades de la vida... es un riesgo que hay que correr.

Aforismo: La intuición en matemática es una sensación errónea.

"La intuición en matemática es una tincada"

La intuición en matemáticas es ingenua.

"La intuición en matemáticas es práctica"

LA INTUICIÓN MATEMÁTICA ES EL DON DE UNOS POCOS, PERO QUE ESTÁ AL ALCANCE DE MUCHOS.

"La intuición en matemáticas es encontrarle el sentido a una abstracción numérica"

La intuición en matemáticas es genuina.

"La intuición en matemáticas es seguir la lógica"

"La intuición en matemáticas es fortuna"

"La intuición en matemáticas es lo que diferencia al que mueve números, con el que los comprende"

"La intuición en matemáticas es experiencia"

"La intuición en matemáticas es atreverse"

La intuición en matemática es... sentir que algo se cierra.

LA INTUICIÓN EN MATEMÁTICA ES DESARROLLO

LA INTUICIÓN EN MATEMÁTICA ES CONOCER

"La intuición en matemáticas es una herramienta"

Anexo N°6:

El avatar de la Intuición

Instrucciones: Sacar el origami del sobre plástico, explorar, jugar, disfrutar.

El siguiente juego fue construido en base a dos recursos:

1.- Citas textuales de relatos de estudiantes de primer y segundo año del Programa de Bachillerato de la Universidad de Chile, que cursaron el ramo de Matemática el año 2012. Los estudiantes respondieron un ejercicio voluntario que contenía dos preguntas: 1) ¿Qué es para ti la intuición en matemáticas?, ¿cómo la definirías?; 2) ¿Has tenido alguna experiencia relacionada?

2.- Imágenes asociadas a la Intuición, la Pedagogía y las Matemáticas. En estas imágenes se encuentran: metáforas de la pedagogía como funámbulos, fractales como la Isla de Koch y el Triágulo de Sierpinski, obras de Escher que contienen relaciones matemáticas claras aludiendo al infinito o a series geométricas (sumas de potencias de ½), imágenes que esbozan a la Sucesión de Fibonacci, imágenes chinas que hacen referencia a árboles binarios, Ouroboros que aluden a sistemas autopiéticos, imágenes de la Red de Indra, estructuras rizomáticas y arbóreas. Todas estas imágenes se utilizan dentro del curso como recursos pedagógicos para trabajar diversos contenidos.

Este trabajo, antes de ser digitalizado, fue construido artesanalmente, es decir, con las manos, con el objetivo de que quedarán en él plasmadas las nociones de experiencia, juego, experimentación, del valor al error, la historia y la intuición. Este trabajo reúne la relación con el cuerpo, con lo simbólico y con lo icónico. Alude a una forma simple y conocida de jugar y divertirse, tal como lo fue esta investigación, un ejemplo más de lo que ocurre dentro del aula.