UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

BARGAINING AND THE HOLD-UP PROBLEM

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN ECONOMÍA APLICADA

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

PABLO FRANCISCO CUELLAR TAPIA

PROFESOR GUÍA:
JUAN ESCOBAR CASTRO

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
BENJAMÍN VILLENA ROLDÁN
MATTEO TRIOSSI VERONDINI

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por CONICYT.

SANTIAGO DE CHILE
2014

Resumen

En este trabajo se estudia un modelo de negociación secuencial entre dos agentes a la Rubinstein. La principal innovación presentada es la endogenización del protocolo de negociación y del monto a repartir en cada ronda. En el modelo, al principio de cada periodo, los jugadores pueden esforzarse para incrementar el monto disponible, lo que si bien es privadamente costoso, aumenta la probabilidad de manejar la agenda de negociación en el periodo. Este trabajo caracteriza la dinámica de la negociación y las ineficiencias en equilibrio perfecto en subjuegos.

Los principales resultados son los siguientes. Primero, se caracteriza la dinámica de la creación de los beneficios del proyecto. Se muestra que esta consiste de una fase de construcción pura del monto a repartir, en la cual los jugadores se esfuerzan aun cuando la negociación no llegará a su fin, y de una fase de repartición, en la cual los jugadores llegarán a acuerdo y el juego termina. Los agentes ejercen esfuerzo a pesar de que la negociación no terminará porque prefieren hacerlo crecer hasta un monto mayor para luego dividirlo y obtener una ganancia más grande.

Segundo, conforme avanza la negociación, los jugadores van ejerciendo un esfuerzo mayor hasta llegar al máximo posible. Hay dos efectos que motivan la realización de esfuerzo, el primero es que no es rentable tener periodos en que no haya crecimiento del monto a repartir porque esto implica una ineficiencia causada por el costo temporal, la cual es mayor a medida que el monto a repartir es más grande. El segundo es la posibilidad de manejar la agenda de negociación, lo que entrega un beneficio mayor al hacerlo, el cual se va incrementando a medida que crece el monto a repartir.

En los primeros periodos en que se llega a acuerdo domina el primer efecto porque el beneficio extra por manejar la agenda no es tan grande en comparación con el costo del esfuerzo, no obstante a medida que el monto a repartir aumenta, el beneficio de ser quién controla la negociación también se incrementa, lo que lleva a que el segundo efecto sea mayor.

Por último, el tercer resultado es que el monto final que se reparte es menor que el deseable socialmente. La intuición es que el jugador que maneja la agenda sabe que en periodos futuros enfrentará competencia, lo que significa que para volver a ser quien controla la negociación tendrá que incurrir nuevamente en un costo. Además existe un problema de Hold-Up debido a que el jugador que maneja la agenda no puede asegurar que los beneficios por el esfuerzo realizado le pertenezcan en futuras rondas. Esto genera que el agente prefiera asegurar su pago periodos antes de lo socialmente deseable, decidiendo llegar a acuerdo.

A mi familia...

Tabla de contenido

Índice de figuras

Introducción

Motivación

Dentro de la amplia gama de grupos humanos, tales como el parlamento, existen aquellos en que los miebros deben trabajar en conjunto para lograr obtener un beneficio común, pero además deben decidir cómo repartir ese beneficio. Esta situación genera cierta tensión entre los miembros ya que por un lado deben poner esfuerzo en el trabajo en común, pero por otro no pueden asegurar que los frutos de ese esfuerzo les pertenezca.

En el caso de los parlamentarios, su trabajo consiste mayormente en discutir y aprobar proyectos de ley. Estos proyectos van mejorando a través de las sesiones en la cámara y, cuándo finalmente están listos, los legisladores se ven en la obligación de decidir cómo será la repartición de los beneficios, es decir, a qué sector de la ciudadanía se beneficiará mayormente. Esto genera que cada parlamentario intente obtener mejores bonificaciones para sus representados. En este contexto los legisladores, a pesar de haber trabajado duramente por aumentar el producto, podrían obtener un monto bastante menor en comparación al esfuerzo que realizaron.

La noción de que los proyectos de ley van mejorando conforme se van discutiendo en distintas sesiones, es un hecho bien conocido. Famosa es la cita del senador de Nebraska, Earl Nelson, en el marco de la discusión sobre la ley de salud en Estados Unidos: «*Throughout my Senate career, I have consistently rejected efforts to obstruct. That's what the vote on the motion to proceed is all about. It is not for or against the Senate health care bill released Wednesday. It is only to begin debate and an opportunity to make improvements. If you don't like a bill*»[1]. En esta expresión, el parlamentario da cuenta de la necesidad de discutir los proyectos para poder mejorarlos, lo que supone un beneficio mayor para el conjunto de la población. Considerando los datos, en el caso chileno un proyecto de ley demora alrededor de 200 días en ser aprobado[2], lo que verifica el hecho de que es necesario dedicarle varias sesiones a la creación de una ley.

No obstante, las discusiones que sostienen los parlamentarios serían infructuosas, en términos de aumentar el beneficio, si es que no contaran con una correcta asesoría parlamentaría. Esta

[1]Publicado el 21 de Noviembre de 2009. The New York Times. Citado por Torres (2013).
[2]Toro Maureira, Acevedo de la Harpe & Matamala Rosales (2011).

consultoría es costosa, ya que requiere pagarle a expertos, quienes a su vez deben contratar serivicios de encuestas, manejo de datos, etc.

La labor legislativa en los tiempos actuales va de la mano junto a la labor que realizan los asesores, los cuales están presentes practicamente en todos los parlamentos del mundo. Sin más, en los Estados Unidos el Congreso Federal contaba hacia fines del siglo XIX con 140 asesores, cifra que cien años después alcanzó los 23.000 *staffers*[3] resaltando la importancia de este grupo de asesores. Por otro lado, en Chile, en el año 2013 la Cámara de Diputados desembolsó un monto total de 7.377 millones de pesos chilenos por concepto de «Personal de Apoyo a la Labor Parlamentaria»[4]. Estas cifras dan cuenta de que la labor legislativa necesita incurrir en un costo para poder desarrollar un buen proyecto.

Por lo tanto, lo que se observa en la práctica es que los parlamentarios en cada sesión pueden mejorar el beneficio de un proyecto de ley, lo que implica incurrir en un costo. Además deben elegir en qué momento terminar la discusión y repartir las utilidades. En otras palabras, deben decidir en cada sesión si incurrir en un costo para aumentar el tamaño de los beneficios, y decidir si llegar o no a acuerdo en dicha sesión.

El problema de dividir un monto común ha sido profundamente estudiado por los economistas usando modelos de Negociación Secuencial, los cuales tienen su origen en el trabajo seminal de Rubinstein (1982) y que a partir de ahí han crecido en profundidad y extensión de las preguntas que se intentan responder.

Sin embargo, la mayoría de las negociaciones que se han estudiado son aquellas que corresponden a repartir un monto fijo en el tiempo, lo que no representa de buena forma el contexto parlamentario en que el monto es endogenamente creciente en el tiempo.

La diferencia del modelo que se presenta en esta tesis con la literatura existente, es precisamente que el monto a repartir no es un elemento exógeno, sino que se va creando y desarrollando conjuntamente entre los jugadores, lo que es costoso para aquel que realiza la mejora, pero no para aquellos que no la realizan.

Por otro lado, este trabajo se hace cargo del hecho de que quién realiza la mejora es quién debe poseer un mayor control de la agenda, debido a que de cierta forma es dueño del aumento marginal del monto a repartir, a pesar de que esto no está establecido en ningún tipo de contrato ni de coordinación entre los jugadores.

El resultado que se espera del modelo es que los parlamentarios no terminen el juego, es decir repartan las utilidades, en el primer periodo como lo predice Rubinstein (1982), sino que en los periodos iniciales la decisión de los agentes sea hacer crecer el monto a repartir. Cuando se dividan los beneficios del proyecto, se espera que quién maneje la agenda, es decir quien haga la oferta de *repartición*, sea quien conserve la mayor parte del beneficio. La razón de esto es porque manejar la agenda es un bien valioso. Sin embargo no es trivial saber en qué momento se debe realizar dicha acción, ya que existe el *trade-off* de tener un beneficio hoy, o esperar a mañana para que pueda ser mayor.

[3] Prieto & Velasco (2009).

[4] Ejecución Presupuestaria, obtenido de http://www.camara.cl/.

Dadas las variantes que posee el juego, además de la pregunta de cómo se desarrolla este proceso, surge el cuestionamiento si es que es un resultado eficiente o no en el sentido del Óptimo Social, es decir, si es que el momento en que alcanzan el acuerdo corresponde a aquel en que el crecimiento del *pie* alcanzó el punto máximo, considerando el descuento temporal. Otra pregunta relevante es cómo se desarrolla la disputa del control de agenda, es decir, si es que los agentes prefieren delegar el control o intentar ser ellos mismos quienes son dueños del derecho a proponer la *repartición*.

Un elemento de interés que surge en el análisis del modelo es que en el momento que se realiza la *repartición* se observa un comportamiento oportunista de aquel que realiza la propuesta, esto porque se puede dar el caso que dicho agente nunca haya ayudado en las mejoras del proyecto y se termina llevando la mayor parte del *pie*. Este problema de Hold-Up se debe a la imposibilidad de contraer contratos verificables entre los agentes, y cómo se mostrará más adelante, es una fuente de ineficiencia sobre los resultados.

Revisión bibliográfica

La literatura sobre Negociación Secuencial comienza con el trabajo seminal de Rubinstein (1982), en el cual propone un modelo de negociación de ofertas alternadas entre dos jugadores. El juego se desarrolla durante T periodos y existe un factor de descuento temporal $\delta \leq 1$ que captura el costo de dejar pasar el tiempo.

El equilibrio único perfecto en subjuegos que Rubinstein encuentra es que se llega a acuerdo el primer periodo de negociación, y que los pagos que cada uno recibe depende de quién es el que realiza la primera propuesta, quien la realiza en el periodo T, de la paciencia de cada jugador (representado por el factor de descuento δ) y del protocolo.

En términos generales, lo que muestra Rubestein es que controlar la agenda de negociación es beneficioso, al igual que ser paciente intertemporalmente, es decir, poseer un alto δ.

Sutton (1986) generaliza el modelo a uno en que no existe una cantidad máxima de periodos de negociación, es decir, generaliza a $T = \infty$.

El modelo de Rubinstein, si bien es bastante explicativo, depende fuertemente de los supuestos que se realizan tales como alternancia en la propuesta, unanimidad, información perfecta entre otros. Sin embargo, los que principalmente se tratan en esta tesis corresponden al tamaño fijo del monto a repartir y el protocolo fijo de negociación. Estos supuestos se han desarrollado además en la literatura de legislaturas, desde donde se han tomado supuestos para desarrollar el presente trabajo, por lo tanto se hará una revisión del estado del arte tanto en literatura de legislaturas como en negociaciones secuenciales con monto variable a repartir.

Uno de los trabajos de mayor importancia en negociación en legislaturas son los *papers* de Baron and Ferejhon (1987) y (1989), en los que proponen un modelo de negociación multilateral secuencial de n jugadores con regla de mayoría simple, es decir, para que se apruebe una *repartición*, al menos $n/2$ jugadores deben estar de acuerdo con ella. En dicho modelo se debe repartir un dólar entre los jugadores, y se estudian los casos de regla cerrada y abierta. Bajo regla cerrada en cada periodo se elige aleatoriamente a quién realiza una propuesta la que es votada a favor o en contra y, en caso que la mayoría esté a favor, se termina la negociación, mientras que si no es así se pasa al periodo siguiente y se repite el juego. Bajo regla abierta, una vez que el oferente escogido ha realizado la oferta, se escoge a otro jugador para que realice una corrección o elija votarla tal cual, cuando se elige votar tal cual se procede a la votación y si se aprueba se termina el juego, en caso contrario se continua el proceso nuevamente. Los jugadores descuentan el futuro con un factor común $\delta \leq 1$.

El equilibrio que encuentran es que el acuerdo se alcanza en el primer periodo, y que el motor de esto, además de la impaciencia capturada en el factor de descuento, es que cada jugador sabe que tiene la posibilidad de no obtener ningún pago en el futuro por no ser necesario la aprobación de todos para completar la mayoría simple, es decir, la no existencia de poder de veto. Además, los autores observan que existe una distribución desigual de las ganancias *ex-post*.

El principal aporte de dicho trabajo es que sentó las bases para la literatura no cooperativa de legislaturas, marcando las diferencias con el modelo de Rubistein y asentando la importancia de entender cómo se lleva a cabo una negociación entre agentes que no poseen un poder de veto completo, entendiendo así cómo esto influye en el resultado. Además, los entornos de legislatura permiten variar fácilmente el protocolo de negociación cómo se verá más adelante.

La unicidad de los pagos del modelo de Baron and Ferejhon es estudiada a cabalidad en el trabajo de Eraslam (2002), donde se considera un modelo de negociación secuencial multilateral en que los jugadores tienen distinta probabilidad de ser elegidos como el oferente y distinto factor de descuento. El autor caracteriza el conjunto de pagos de equilibrio perfecto en subjuegos estacionarios, estableciendo su unicidad. Además muestra que cuando existe un factor de descuento común, el pago que recibe cada jugador es no decreciente en su probabilidad de ser elegido como oferente. Simétricamente, cuando poseen la misma probabilidad de ser oferente, se muestra que los pagos a cada jugador son no decrecientes en su factor de descuento.

El trabajo de Eraslam muestra las mismas intuiciones heredadas de Rubistein. Estas son que a medida que se es menos paciente, el pago que se obtendrá es menor, mientras que si se tiene un mayor control de la agenda (mayor probabilidad de ser el oferente) se tendrá un pago superior, es decir que tener control de la agenda es valorado por los agentes.

El trabajo de Yildirim (2007) tiene por objetivo endogenizar el proceso de ser electo oferente, permitiendo a los agentes que pertenecen a una legislatura competir por serlo. El modelo que utilizan se basa en el framework de Baron and Ferejhon, pero permite que al comienzo de cada periodo los agentes realicen un esfuerzo costoso que permita aumentar la probabilidad de ser escogidos como oferente.

Yildirim permite que existan diferencias en los valores de descuento y costos de competir, además estudia los casos de unanimidad y de k-mayoría[5]. El resultado que el autor obtiene es que el esfuerzo realizado está determinado por el costo y por el «prize»[6]. Bajo regla de

[5]K-mayoría significa que se necesitan k votos para que se apruebe la *repartición*.

[6]El autor denomina «prize» a la diferencia entre lo que el agente recibe al ser el oferente y lo que espera recibir si no lo es.

unanimidad y costos homogéneos, el esfuerzo realizado por cada agente es el mismo a pesar de la diferencia de factor de descuento[7], mientras que bajo k-mayoría los agentes más pacientes realizan mayor esfuerzo. Además, si los jugadores son idénticos, la unanimidad sería la regla social óptima.

Posteriomente, el autor complementa la investigación estudiando, en Yildirim (2010), el caso en que la probabilidad de ser electo como *proposer* es persistente en el tiempo, es decir, no depende solo del esfuerzo realizado en el periodo en cuestión. Los resultados que se agregan es que los más pacientes tienen una doble ventaja, ya que están más dispuestos a ejercer esfuerzo, lo que redunda en que es más probable que en las rondas siguientes sean más propensos a ser electos como oferentes. Esto aumenta la desigualdad de los pagos entre los jugadores.

Dentro de la literatura que estudia los montos a repartir variables en el tiempo, uno de los primeros trabajos es el de Guth et al. (1993), donde se realiza un test empírico para determinar si el equilibrio predicho para el juego que proponen se obtiene bajo experimentación.

El modelo que los autores proponen es una negociación entre dos agentes que deben repartir un *pie* creciente en cada periodo, el juego dura un máximo de T periodos. En cada ronda, un jugador debe hacer una propuesta de *repartición* y decidir si es una oferta final o no. Ser propuesta final significa que si es rechazada (y no se está en T) el juego continúa, en cambio, si no es final y se rechaza, el juego se detiene ahí y ambos obtienen un pago nulo. Si el *proposer* decide que no es una oferta final, y el jugador rival rechaza la oferta, entonces se pasa al siguiente periodo donde el jugador rival se transforma en el oferente y donde el *pie* creció.

El equilibrio predicho es que se llega a acuerdo en el primer periodo, no obstante lo que desean estudiar es si es que las personas testeadas, cuando toman el rol de oferente, «confían» en que si deciden que la *repartición* no es una propuesta final (con el objetivo que sea rechazada y el *pie* crezca), el jugador rival hará lo mismo en la ronda siguiente, al menos por una cantidad suficiente de periodos.

Los investigadores encuentran que efectivamente no se llega a acuerdo en el primer periodo, lo que interpretan usando consideraciones distributivas y de confianza.

Luego, uno de los estudios sobre montos a repartir variables en el tiempo de mayor importancia es el de Merlo and Wilson (1995), en que consideran un modelo de negociación bajo regla de unanimidad entre k jugadores. La novedad es que el *pie* varía periodo a periodo estocásticamente, siguiendo una cadena de Markov. Además, el *proposer* y el orden en que cada jugador debe decidir si acepta o rechaza la *repartición* (no se vota simultáneamente, sino que secuencialmente) también varía según una cadena de Markov.

La intuición económica detrás de dicho framework es que los beneficios de los proyectos no siempre son estables en el tiempo, sino que se ven afectados por variables externas que no se pueden anticipar perfectamente, tales como recesiones, shock de demanda, etc. Este modelo captura dichas intuiciones.

El trade-off principal que presenta el modelo es si alcanzar el acuerdo en periodo actual, o

[7] La razón de esto es que el prize es el mismo para cada agente.

esperar al siguiente con la esperanza de obtener un beneficio mayor. Merlo and Wilson encuentran que existe un equilibrio estacionario perfecto en subjuegos, indicando las condiciones que se deben cumplir para alcanzar un acuerdo, lo que significa que no siempre el equilibrio es llegar a acuerdo en el primer periodo. No obstante lo anterior, los autores muestran que existe ineficiencia en el sentido que a veces es mejor esperar al periodo siguiente, pero los jugadores llegan a acuerdo en el periodo actual. Este tipo de ineficiencia no se alcanza con el *pie* constante.

Eraslam and Merlo (2002) realizan una extensión de Merlo and Wilson (1995) relajando el supuesto de unanimidad, exigiendo una regla de k-mayoría para alcanzar el acuerdo. Esto genera que en los jugadores exista el trade-off de llegar a acuerdo hoy porque se está recibiendo un monto positivo, o esperar a un próximo periodo en el que se puede quedar fuera de la *repartición*. El resultado que encuentran es un conjunto de equilibrios perfecto en subjuegos, donde los pagos no son necesariamente únicos y donde el juego no siempre termina en el primer periodo.

En la tesis de Torres (2013) se estudia las ineficiencias generadas por la regla de aprobación de la *repartición* en una legislatura, bajo el contexto de *pie* creciente. Se trabaja un modelo de n jugadores, donde el *pie* crece de forma determinística en el tiempo. El *proposer* se elige aleatoriamente y la votación de los rivales se hace de forma simultánea. Se estudian los casos de unanimidad y k-mayoría.

El trabajo captura la situación en que un proyecto puede mejorar en el tiempo, pero dejando de lado el hecho que para aumentar el monto a repartir se debe ejercer algún esfuerzo. El trade-off presentado corresponde a que los jugadores pueden esperar a que el proyecto llegue a su óptimo, existiendo la probabilidad de quedar fuera de la *repartición*, o repartir las ganancias de este a pesar que podrían mejorar más.

El equilibrio del juego es que bajo unanimidad se retrasa el acuerdo hasta que se alcanza el tamaño óptimo del *pie*, lo que es una situación eficiente, esto se debe a que todos los jugadores tienen poder de veto. Por otro lado, bajo k-mayoría se obtiene un acuerdo antes del óptimo (pero no necesariamente en el primer periodo), ya que los jugadores al perder parte del poder de veto, anticipan que seguir negociando los podría dejar fuera de la *repartición*, por lo que se observa cierto nivel de ineficiencia en el resultado.

Organización de la Tesis

En el capítulo 1 se realiza una revisión del Modelo Básico de Negociación con crecimiento del *pie*, en donde el costo de hacerle una mejora al proyecto es $c = 0$, por lo que se asume que en cada periodo todos los jugadores deciden optimamente realizan una mejora. Esto es simétrico a un modelo donde el *pie* crece exógenamente. Este modelo cuenta con n jugadores y se revisan las reglas de unanimidad y k-mayoría.

En el capítulo 2 se plantea el modelo principal, es decir, se explicita el juego, los supuestos y la solución de éste. Luego se discuten las implicancias que genera el resultado y cómo se interpretan. En el capítulo 3 se muestran ejemplos explicativos mientras que en el último se encuentran las conclusiones.

Capítulo 1

Modelo Básico: Crecimiento Exógeno

1.1. El Juego

El Modelo Básico es una forma particular del Modelo con Crecimiento Endógeno del *pie*, el cual corresponde a un costo nulo de hacer una mejora al proyecto. Debido a que para ningún jugador es costoso hacer una mejora, los jugadores lo harán siempre, por lo que es simétrico pensar que el juego posee un crecimiento exógeno.

El problema se modela como un juego repetido con horizonte infinito, con información completa, donde existen $N \equiv \{1, 2, ..., n\}$ jugadores que interactúan en cada periodo intentando repartir las ganancias perfectamente divisibles de un proyecto, el que se denominará *pie* y que se denotará como $s(t)$, función que es creciente en t. A la división del *pie* se le denominará *repartición* y $R \equiv \{(r_1, r_2, ..., r_n)\ \forall i \in N, r_i \geq 0, \sum_i r_i = s(t)\}$ denota el conjunto de todas las *reparticiones* posibles, donde r_i es el monto que el agente i recibe. Los jugadores son idénticos y poseen una función de utilidad neutral al riesgo que solo depende del monto que reciben, además de un factor de descuento de los retornos futuros $\delta \in [0, 1]$.

La interacción entre los agentes corresponde a una negociación secuencial, en donde quién hace la *repartición* se llamará *proposer* y será electo en cada periodo de forma aleatoria. Para que la *repartición* sea aprobada se necesitan $k \leq n$ votos a favor, es decir, $k-1$ votos además el del *proposer*. Como se puede apreciar, esta regla k-mayoría representa varios ambientes de elección, donde $k = n$ se refiere a la regla de unanimidad, $k = \frac{n}{2}$ a mayoría simple[1], $k = 1$ a un ambiente dictatorial, etc.

El juego comienza en el periodo $t = 0$. Al inicio de cada periodo t se produce la elección aleatoria del *proposer*, en que cada agente tiene la misma probabilidad de ser electo, es decir, $p_i = \frac{1}{n}, \forall i \in N$. Luego, el *proposer* elige una *repartición* en R y finalmente los agentes deciden si «aceptar» o «rechazar». En caso que sea aceptada la propuesta, se hace afectiva la *repartición* y se termina el juego, en caso contrario se pasa al siguiente periodo. Una vez que se llega a acuerdo, el jugador i tendrá una utilidad de $U_i = \delta^{t'} r_i(t')$.

[1]si es que n es par, $k = \frac{n+1}{2}$ si es que n es impar.

Se denomina como H_t a la historia que contiene la información de los jugadores que han sido *proposer*, las *reparticiones* que han hecho y las votaciones de los agentes hasta el periodo t. En el periodo t, el jugador i realiza la acción $a_{i,t}(H_t)$.

$$a_{i,t}(H_t) = \begin{cases} R & \text{si el jugador es el } \textit{proposer} \\ \{aceptar, rechazar\} & \text{siempre} \end{cases}$$

Una estrategia ξ_i describe una secuencia de acciones $\{a_{i,t}(H_t)\}_{t=1}^{t=\infty}$. Un Perfil de Estrategias $\xi = \{\xi_1, ..., \xi_n\}$ es un Equilibrio Perfecto en Subjuegos si constituye un Equilibrio de Nash en cada periodo.

1.2. Equilibrio del Juego

Pago de Continuación:

Sea $V_i^E(t+1)$ el pago de continuación del jugador i, es decir, el pago esperado que tiene el jugador i al pasar al siguiente periodo. Este pago de continuación depende de si es que se anticipa que se llegará a acuerdo en el periodo siguiente o no.

Si es que se anticipa llegar a acuerdo en el próximo periodo, la *repartición* óptima que hace el *proposer* es entregarle un monto igual al valor de continuación solamente a los $k-1$ jugadores con valor de continuación más bajo, de esta forma el *proposer* maximiza su ganancia.

Por otro lado, si es que se anticipa no llegar a acuerdo, el valor de continuación del periodo siguiente será el valor descontado de llegar a acuerdo más adelante en el juego. Por lo tanto, $V_i^E(t+1)$ toma la forma

$$V_i^E(t+1) = \\ \begin{cases} \frac{1}{n}\left[s(t+1) - \sum_{j\in\hat{k}} \delta V_j^E(t+2)\right] + \left(1-\frac{1}{n}\right)\delta V_i^E(t+2) & \text{si acuerdo en } t+1 \\ \delta^{t'-1-t} V_i^E(t') & \text{si acuerdo en } t' > t+1 \end{cases}$$

donde $\hat{k}$ se refiere a los $k-1$ agentes que tienen un menor valor de continuación.

Se debe notar que gracias la simetría de los jugadores y los pagos, lo valores de continuación de todos los jugadores son idénticos, es decir $V_i^E(t+1) = V_j^E(t+1)$. Por lo tanto, $V_i^E(t+1)$ se puede escribir como:

$$V_i^E(t+1) = \begin{cases} \frac{s(t+1)}{n} & \text{si se llega a acuerdo en } t+1 \\ \delta^{t'-1-t} V_i^E(t') & \text{si se llega a acuerdo en } t' > t+1 \end{cases}$$

Pago de Hoy:

El pago que obtiene hoy el *proposer* será $V_i(t) = s(t) - (k-1)\delta V^E(t+1)$ si es que quiere que se realice la *repartición*, mientras que el que obtienen $k-1$ miembros es $V_j(t) = \delta V_j^E(t+1)$

lo que los deja indiferente entre decidir jugar mañana o detenerse hoy, no obstante se hace el supuesto de que resuelven la indiferencia jugando «aceptar». Por último, los pagos de quienes no están en los $k-1$ será de $V_j(t) = 0$.

Con estos pagos, la acción que toma el *proposer* luego de la propuesta de *repartición* es «aceptar», al igual que los $k-1$ agentes que reciben el pago de continuación. Por otro lado, los que reciben un pago nulo jugarán la acción «rechazar». El outcome del juego es que se aprobará la *repartición* y se realizarán los pagos.

Por otro lado, si es que el *proposer* desea que el juego continúe, habrán múltiples propuestas que lleven a rechazar la *repartición*, no obstante se tomará el punto focal de que propone quedarse con todo y entregarle un monto nulo al resto de los agentes. Ante esto el juego continuará.

Equilibrio:

Tal como ya se comentó, el Equilibrio Perfecto en Subjuegos será aquel donde en cada Subjuego exista un Equilibrio de Nash. La forma de encontrar dicho Equilibrio es utilizando *Backward Induction*, pero para ello se necesita conocer al menos un Equilibrio en Subjuegos. Es por ello que se definirán los conceptos de *Función de Bienestar Social* y *Óptimo Social.*

Definición 1 La Función de Bienestar Social es aquella que representa el monto total del proyecto en juego, descontado al momento inicial del juego, es decir, corresponde a:

$$BS(t) = \delta^t s(t)$$

Definición 2 El Óptimo Social es el periodo t^* en que se maximiza la Función de Bienestar Social, es decir, corresponde a:

$$t^* = \arg\max_t \delta^t s(t)$$

Con estas dos definiciones que puede enunciar la siguiente Proposición:

Proposición 1 En todos los periodo $t \geq t^*$ se llegará a acuerdo, y el Equilibrio será que el *proposer* ganará $V(t) = s(t) - (k-1)\delta\frac{s(t+1)}{n}$ y que los $k-1$ elegidos en cada periodo tendrán un pago de $V(t) = \delta\frac{s(t+1)}{n}$.

Demostración. Ver Anexo A. □

Gracias a la Proposición 1 se sabe que el juego termina a más tardar en t^*, lo que sirve para aplicar Inducción Inversa a partir de dicho periodo. En términos generales, al resolver el juego recursivamente en cada periodo para saber si se llegará a acuerdo, se debe verificar que se cumpla:

$$s(t) - (k-1)\delta V^E(t+1) \geq \delta V^E(t+1)$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{s(t)}{k} \geq \delta V^E(t+1)$$

es decir, que el promedio de lo que se lleva cada uno de los que obtiene pago no nulo sea mayor que el pago de continuación. Notar que la desigualdad estricta se obtiene cuando el *proposer* gana un pago mayor a su valor de continuación.

Por lo tanto, lo que determina el juego es el pago de continuación de cada periodo. Recursivamente se ve que son:

- En $t = t^* - 1$:
$$V_i^E(t^*) = \begin{cases} \frac{s(t^*)}{n} & \text{siempre} \end{cases}$$
- En $t = t^* - 2$:
$$V_i^E(t^*-1) = \begin{cases} \frac{s(t^*-1)}{n} & \text{si} \frac{s(t^*-1)}{k} \geq \delta V(t^*) \\ \delta V^E(t^*) & \text{si no} \end{cases}$$
- En $t = t^* - 3$:
$$V_i^E(t^*-2) = \begin{cases} \frac{s(t^*-2)}{n} & \text{si} \frac{s(t^*-2)}{k} \geq \delta V(t^*-1) \\ \delta V^E(t^*-1) & \text{si no} \end{cases}$$

.
.
.

- En $t = 1$:
$$V_i^E(2) = \begin{cases} \frac{s(2)}{n} & \text{si} \frac{s(2)}{k} \geq \delta V(3) \\ \delta V^E(3) & \text{si no} \end{cases}$$
- En $t = 0$:
$$V_i^E(1) = \begin{cases} \frac{s(1)}{n} & \text{si} \frac{s(1)}{k} \geq \delta V(2) \\ \delta V^E(2) & \text{si no} \end{cases}$$

Con este procedimiento quedan determinados el valor de continuación y el monto que cada jugador gana. Por lo tanto, queda determinado el Perfil de Equilibrio del juego.

No obstante la formalidad del resultado, es importante en términos intuitivos conocer en qué periodo se llega a acuerdo más que el Perfil de Estrategias de Equilibrio completo. Por lo tanto es necesario profundizar más en el resultado que se obtiene.

Proposición 2 El Perfil de Estrategias de Equilibrio es monótono en el hecho de llegar o no acuerdo, es decir, sea t' el primer periodo en el que se llega a acuerdo, entonces en todo $t \geq t'$ se llegará a acuerdo.

Demostración. Ver Anexo A. $\square$

La Proposición 2 dice que para todo $t \in [0, t')$ no se llegará a acuerdo y para todo $t \in [t', \infty]$ se llegará a acuerdo. La utilidad del resultado es que para poder encontrar en qué periodo se termina el juego, basta conocer donde se encuentra t'.

Teorema 1 El primer periodo en el que se llega a acuerdo corresponde a $t' = \lceil t \rceil$, donde t es el valor que resuelve $\frac{s(t)}{k} = \delta \frac{s(t+1)}{n}$. En los periodos siguientes se llega siempre a acuerdo.

Demostración. Ver Anexo A. □

La importancia del Teorema 1 radica en que da una forma rápida de saber en qué periodo se logrará un acuerdo, sin necesidad de tener que resolver todo el problema. Obviamente este resultado es incompleto porque no entrega el Perfil de Estrategias completo, pero es útil para conocer en términos generales como será el desarrollo del juego.

Para continuar con el análisis es necesario definir el concepto de «Poder de Negociación»:

Definición 3 El Poder de Negociación (PN) se define como la probabilidad de estar dentro del conjunto de agentes que reciben un pago no nulo en los periodos futuros. El Poder de Negociación para cada agente es:

$$PN_i = \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{k-1}{n-1}\right) = \frac{k}{n}$$

es decir, la probabilidad de ser el *proposer* o de no serlo y estar dentro de los elegidos por él.

Desde la definición, se puede notar que para el poder de negociación se cumple que $PN_i \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$, donde para el caso dictatorial se tiene $\frac{1}{n}$ mientras que para la unanimidad se cumple $PN_i = 1$.

1.2.1. Regla de Unanimidad

Examinar el caso de unanimidad es interesante porque da intuiciones sobre el poder de negociación que poseen todos los jugadores, ya que cada uno de ellos tiene un poder de veto absoluto, es decir, es necesario que cada uno de los agentes juegue «aceptar» para que se llegue a acuerdo.

Corolario 1 Bajo regla de unanimidad, $k = n$, se tiene que el primer periodo en que se llega a acuerdo es en el Óptimo Social, t^*.

Demostración. Desde el Teorema 1 se sabe que el juego termina en el primer t que cumple:

$$\frac{s(t)}{k} \geq \delta \frac{s(t+1)}{n}$$

en este caso:

$$\frac{s(t)}{n} \geq \delta \frac{s(t+1)}{n}$$

multiplicando en ambos lados por $\delta^t n$ se tiene:

$$\delta^t s(t) \geq \delta^{t+1} s(t+1)$$
$$\Leftrightarrow BS(t) \geq BS(t+1)$$

que se cumple por primera en $t = t^*$ debido a la concavidad de $BS(\cdot)$.

$\square$

El Corolario 1 dice que bajo unanimidad el periodo en que se acaba el juego es óptimo, ya que ningún agente puede quedar fuera de la *repartición*, lo que hace que nadie tenga el «temor» de tener un pago nulo en el futuro.

1.2.2. Regla General

Tomando el caso general, $k \leq n$, existirá una diferencia en el poder de negociación de los agentes, ya que el poder de veto que cada uno posee es menor, debido a que no se necesita la aceptación de cada uno de ellos, si no que de un subconjunto.

Cuando se tiene el caso general hay dos efectos que participan de forma contraria para quienes deben tomar la decisión de seguir o detener el juego. Por un lado al ser electo dentro de los $k-1$ hace que tengan incentivos a jugar «aceptar» para no correr el riesgo de quedar fuera del acuerdo en el futuro y obtener un pago nulo, pero por otro lado tienen incentivos a seguir negociando y esperar que el *pie* crezca más, y de esa forma obtener un pago mayor en el futuro.

El primero de los efectos descritos no se observa en el caso de unanimidad, pero en el caso general toma relevancia, especialmente a medida que k es más pequeño. Por lo tanto, lo que se observa es que no necesariamente se llegará el Óptimo Social, sino que es posible que se llegue a acuerdo en un periodo anterior.

No obstante, el pago que reciben los jugadores que están dentro de la *repartición* que se aplica al terminar el juego[2] no necesariamente es menor a la que obtendrían si se tuviera la regla de unanimidad.

[2] Considerando solo la primera vez que se llega a acuerdo

1.3. Estáticas Comparativas

Tal como se ha anticipado anteriormente, la diferencia entre la regla de unanimidad y la regla general da la intuición de que el periodo t en que se llega a acuerdo depende del valor de k, no obstante también depende de la cantidad de agentes presentes en la negociación. Los siguientes resultados se refieren a cómo afectan dichos parámetros al resultado.

Proposición 3 A medida que aumenta el valor de k aumenta el valor de $\hat{t}$, mientras que al aumentar el valor de n disminuye el valor de $\hat{t}$.

Demostración. Ver Anexo A. $\square$

La intuición detrás de la Proposición 3 es que a medida que se tiene un mayor valor de k el poder de negociación aumenta, lo que hace crecer los incentivos a esperar al próximo periodo. Por otro lado el valor del monto que obtiene el *proposer* disminuye ya que debe pagarle a más agentes. Estos dos efectos generan que que aumente el beneficio de esperar a que el *pie* crezca más. Es importante notar además que el valor de continuación no se ve afectado.

Por otro lado, al aumentar el valor de n se observa una disminución en el poder de negociación, lo que significa que disminuye los incentivos a esperar al próximo periodo ya que estar dentro de la *repartición* o ser el *proposer* es menos probable. Además, el valor de continuación disminuye, por lo que se anticipa ganar menos en el futuro. Esto genera que el efecto de aumentar n sea que se llegue a acuerdo más rápido.

Es importante notar que un aumento de k no afecta al valor de continuación porque hay dos efectos que se compensan. Por un lado aumenta el valor del PN_i, mientras que por el otro disminuye el monto que se llevaría el *proposer*. Pero un aumento de n si afecta al valor de continuación, ya que solo se tiene el efecto de la disminución del poder de negociación.

Capítulo 2

Modelo General: Crecimiento Endógeno Costoso

2.1. El Juego

El modelo general de negociación costosa representa de forma más fehaciente lo que sucede en el proceso de creación y *repartición* de excedentes de un proyecto, esto porque supone que las mejoras son costosas ya que se debe hacer esfuerzo para realizarlas. Además, incorpora el hecho de que quien hace las mejoras tiene el derecho de manejar la agenda de la discusión y la *repartición*.

Al igual que el Modelo Básico, este modelo considera un juego repetido con horizonte infinito, con información completa, donde existen $N \equiv \{1, 2\}$ jugadores que en cada periodo deben realizar dos acciones: deben decidir si hacer esfuerzo para que el *pie* se incremente, y deben decidir cómo repartir las ganancias perfectamente divisibles del proyecto.

Ambos jugadores deben decidir simultáneamente al inicio de cada periodo si realizan esfuerzo o no, es decir, el esfuerzo será una variable binaria denotada por ε_i el esfuerzo realizado por el agente i. En otras palabras se tendrá $\varepsilon_i, \varepsilon_j \in \{0, 1\}$. Una *mejora* será una función de los esfuerzos realizados en cada periodo, la cual indica la complementariedad que existen entre las acciones de ambos agentes que llevan a que el *pie* aumente su tamaño. Una *mejora* del periodo t se denotará e_t y en términos generales será $e_t = f(\varepsilon_i, \varepsilon_i)$, no obstante en esta tesis se utilizará la función $e_t = \text{máx}\{\varepsilon_i, \varepsilon_i\}$, lo que en términos intuitivos significa que se considerará el mejor esfuerzo de los agentes. De aquí sigue que $e \in \{0, 1\}$, y se llamará e a la cantidad total de *mejoras* realizadas, es decir, $e = \sum_t e_t$. El tamaño del *pie* se denotará por la función $s(e)$, la cual es estrictamente creciente en la cantidad de *mejoras*.

Para trabajar con términos más sencillos, se asumirá que al comienzo de cada periodo t, el tamaño del *pie* será de $s(e - 1)$, por lo que puede llegar a ser igual a $s(e)$ al finalizar la fase de esfuerzos, es decir:

$$s = \begin{cases} s(e) & \text{si en el periodo } t \text{ se realiza esfuerzo} \\ s(e-1) & \text{si en el periodo } t \text{ no se realiza esfuerzo} \end{cases}$$

Los jugadores, luego de la fase de esfuerzos, entran a la fase de negociación en la cual intentan dividir el *pie*. A la división del *pie* se le denominará *repartición* y se denotará R al conjunto de todas las *reparticiones* posibles, es decir, $R \equiv \{(r_1, r_2) \,|\forall i \in N, r_i \geq 0, \sum_i r_i = s(e)\}$ donde r_i es el monto que el agente i recibe. Ambos jugadores son idénticos y poseen una función de utilidad neutral al riesgo que solo depende del monto que obtienen, además de un factor de descuento de los retornos futuros $\delta \in [0, 1]$

La interacción entre ambos jugadores será una negociación secuencial, donde el encargado de realizar la *repartición* se llamará *proposer* y será electo de forma aleatoria en cada periodo según una regla que asigna mayor probabilidad de ser elegido a quien haya ejercido esfuerzo. Dado que este modelo considera solo 2 jugadores la regla de aprobación será de unanimidad, es decir, ambos deben estar de acuerdo con la *repartición* para que se haga efectiva.

La probabilidad $p_i(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ del agente i de ser electo como el *proposer* depende solamente de los esfuerzos realizados en dicho periodo. La forma de esta probabilidad será:

$$p_i(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon_i = 0, \varepsilon_j = 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } \varepsilon_i = \varepsilon_j \\ 1 & \text{si } \varepsilon_i = 1, \varepsilon_j = 0 \end{cases}$$

Es decir, aquel jugador que realiza el esfuerzo es quien maneja la agenda de negociación.

Finalmente, el *proposer* elige una *repartición* en R y el jugador rival debe decidir si «aceptar» o «rechazar». En caso que sea aceptada la propuesta se hace afectiva la *repartición* y se termina el juego, mientras que en caso contrario se pasa al siguiente periodo. Una vez que se llega a acuerdo, el jugador i tendrá una utilidad de $U_i = \delta^{t'} r_i - (t') \sum_{t=0}^{t=t'} \delta^t c$, donde t' es el periodo en que se realizan los pagos.

En el periodo t, el jugador i realiza la acción $a_{i,t}(s(e-1))$.

$$a_{i,t}(s(e-1)) = \begin{cases} \{0, 1\} & \text{siempre} \\ R & \text{si el jugador es el } \textit{proposer} \\ \{aceptar, rechazar\} & \text{siempre} \end{cases}$$

Una estrategia ξ_i describe una secuencia de acciones $\{a_{i,t}(s(e-1))\}_{t=1}^{t=\infty}$. Un perfil de estrategias $\xi = \{\xi_1, \xi_2\}$ es un Equilibrio Perfecto en Subjuegos si constituye un Equilibrio de Nash en cada periodo.

El Equilibrio del juego debe especificar en qué periodo los jugadores deciden que se realice la *repartición* de los pagos, es decir, debe resolver el trade-off que enfrentan los agentes, que en cada momento del juego es si recibir los beneficios hoy, o esperar a que mañana crezca el *pie* ya sea porque ambos realizan esfuerzo o solo uno lo hace, además de tener que descontar el pago según la tasa δ. Es por ello que encontrar el periodo óptimo para realizar los pagos no es trivial, sino que envuelve varias decisiones qué tomar.

2.2. Preliminares

2.2.1. Pagos

Pagos de Continuación:

Sea $V_i^E(\cdot)$ el pago de continuación del jugador i, es decir, el pago esperado que tiene el jugador i de pasar al siguiente periodo. Para hacer más simple la notación del pago de continuación, se usará aquella que fue introducida para el tamaño del *pie*:

$$\delta V_i^E(\cdot) = \begin{cases} \delta V_i^E(s(e)) & \text{si en el periodo } t \text{ se realiza esfuerzo} \\ \delta V_i^E(s(e-1)) & \text{si en el periodo } t \text{ no se realiza esfuerzo} \end{cases}$$

Es importante recalcar que al igual que en el Modelo Básico, el valor de continuación depende de si se anticipa llegar a acuerdo en el periodo siguiente o no, pero en este caso depende además de la forma en que se llega a dicho acuerdo, es decir, depende de si se hace mediante un Equilibrio en Estrategias Pura o Mixta en los esfuerzos desarrollados.

Tal como ya se mencionó en el capítulo 1, cuando el *proposer* escoge una *repartición*, elegirá aquella que le ofrece al jugador rival un monto igual a su valor de continuación si es que se anticipa llegar a acuerdo, ya que de esa forma maximiza la ganancia que él obtiene.

Pago de Hoy:

Para este modelo es necesario diferenciar lo que es el *pago de hoy* con el *pago esperado de hoy*. El primero de ellos será para el *proposer* igual a $V_i(e) = s(e) - \delta V_j^E(s(e))$ y para el jugador rival igual a $V_j(e) = \delta V_j^E(s(e))$. Estos pagos no toman en cuenta el costo c de realizar el esfuerzo ya que al momento de realizar la *repartición* ya es un costo hundido.

Esto lleva a que la condición para que el *proposer* desee llegar a acuerdo es que su *pago de hoy* sea mayor o igual que el pago de continuación, es decir:

$$s(e) - \delta V_j^E(s(e)) \geq \delta V_i^E(s(e)) \tag{2.1}$$

El pago *esperado de hoy* se refiere a lo que cada jugador anticipa ganar según las acciones que ambos tomen. Este pago sí considera el costo c, ya que es el anticipado por cada jugador antes de que se realice el esfuerzo.

Por otro lado, si es que el *proposer* desea que el juego continúe, es decir, que el rival rechace la *repartición* propuesta, se asumirá que le propone un pago nulo para él quedarse con $s(e)$. Ante esto el juego continuará.

Finalmente, para que el juego tenga solución se exigirá que la función $s(e)$ cumpla la condición de transversalidad:

$$\lim_{e \longrightarrow \infty} \delta^e s(e) = 0$$

Esta condición asegura que los agentes no prefieran hacer crecer el *pie* en todos los periodos y que nunca se llegue a acuerdo.

2.2.2. Subjuegos

Para determinar el Equilibrio en cada periodo t es necesario conocer si es que se llegará a acuerdo en él. Esto es importante porque determina qué juego será el que disputen los agentes, lo que determinará el equilibrio de cada etapa. Esto dependerá del valor del *pago de hoy* y del pago de continuación. Existen cuatro casos a considerar.

Notación: *Dado que los jugadores son simétricos, todos los valores asociados son iguales para ambos, por lo que se omitirán los sub-índices que hacen referencia a qué jugador corresponde cada valor. Obviamente cuando amerite hacer la diferencia se utilizarán.*

Gracias a la simetría de los jugadores expresada recién se verifica que la condición (2.1) queda:

$$s(e) - \delta V^E(s(e)) \geq \delta V^E(s(e))$$

o, de forma más concisa, se llega a acuerdo si se cumple:

$$\frac{s(e)}{2} \geq \delta V^E(s(e)) \tag{2.2}$$

y no se llega a acuerdo en el caso contrario.

Esto indica que si los jugadores anticipan que llegarán a acuerdo es porque el promedio de los que se le asigna a cada uno es mayor que el pago de continuación que poseen.

<u>Caso I</u>:

El primer caso es que no se llegue a acuerdo en la etapa actual ni en la anterior, situación que ocurre cuando el *pago de hoy*, aun habiendo realizado esfuerzo, es menor que el pago de continuación, es decir, no se verifica (2.2).

$$\frac{s(e-1)}{2} < \delta V^E(s(e-1))$$
$$\frac{s(e)}{2} < \delta V^E(s(e))$$

En este caso, dado que los jugadores anticipan que no llegarán a acuerdo, saben que no se hará efectiva la *repartición*. Por lo tanto, el *pago esperado de hoy* se resume en la siguiente matriz:

	0	1
0	$\delta V^E(s(e-1)), \delta V^E(s(e-1))$	$\delta V^E(s(e)), \delta V^E(s(e)) - c$
1	$\delta V^E(s(e)) - c, \delta V^E(s(e))$	$\delta V^E(s(e)) - c, \delta V^E(s(e)) - c$

Tabla 2.1: Pagos Caso I

Se puede observar que $\{1,1\}$ nunca es Equilibrio de Nash, debido a que ambos jugadores poseen incentivos a desviarse unilateralmente. Por otro lado, para que $\{0,0\}$ sea Equilibrio de Nash se debe cumplir:

$$\delta V^E(s(e-1)) > \delta V^E(s(e)) - c$$

mientras que en caso contrario se tendrá que los Equilibrios de Nash son $\{1,0\}$, $\{0,1\}$ y uno en Estrategias Mixtas.

Debido a que el objetivo de esta tesis es estudiar la dinámica de negociación bajo competencia, se considerará como punto focal la elección de la Estrategia Mixta por parte de los jugadores. La razón es que si se consideran las Estrategias Puras se deben hacer supuestos sobre el protocolo que siguen los agentes, lo que ya ha sido profundamente estudiado en la literatura.

De la matriz se observa que si no se realiza esfuerzo, en el periodo siguiente se repetirá el mismo juego sin variar el tamaño del *pie*, mientras que si alguno ejerce esfuerzo el *pie* crece y el juego del siguiente periodo comenzará con el nuevo valor y no necesariamente corresponderá a la misma situación. A partir de esto se puede determinar el valor de $\delta V^E(s(e-1))$.

En caso que el Equilibrio de Nash sea $\{0,0\}$, se observará que al periodo siguiente se volverá a jugar $\{0,0\}$ y al periodo subsiguiente también, y así infinitamente. Dicha situación se traduce en que $\delta V^E(s(e-1))$ toma el valor:

$$\delta V^E(s(e-1)) = \delta^2 V^E(s(e-1)) = ... = \delta^\infty V^E(s(e-1)) = 0$$

por lo tanto no se puede cumplir que $\delta V^E(s(e-1)) > \delta V^E(s(e)) - c$, lo que significa que $\{0,0\}$ nunca será Equilibrio de Nash.

Tomando el Equilibrio Mixto, el valor de $\delta V^E(s(e-1))$ será[1]:

[1]La forma de calcular el pago de continuación sabiendo que se jugará una Estrategia Mixta corresponde al valor esperado de dicha estrategia. Dado que se está jugando Mixta, se sabe que ambas acciones reportan la misma utilidad para el jugador, por lo que se usará la más conveniente. En este caso que en el próximo periodo se juegue $\{1\}$, lo que lleva a:

$$\delta V^E(s(e-1)) = \delta\left[(1-p)(\delta V^E(s(e)) - c) + p(\delta V^E(s(e)) - c)\right] = \delta\left[\delta V^E(s(e)) - c\right]$$

$$\delta V^E(s(e-1)) = \delta\left[\delta V^E(s(e)) - c\right]$$

La Estrategia Mixta de cada jugador corresponderá a:

$$\{1-p, p\} = \left\{\frac{c}{\delta V^E(s(e)) - \delta V^E(s(e-1))}, 1 - \frac{c}{\delta V^E(s(e)) - \delta V^E(s(e-1))}\right\} \tag{2.3}$$

donde p es la probabilidad de realizar esfuerzo y $(1-p)$ la probabilidad de no hacerlo.

De aquí se puede ver que la probabilidad de ejercer esfuerzo crece a medida que aumenta la diferencia entre el valor de continuación si es que el *pie* no crece y si es que sí crece, es decir, aumenta cuando $\delta V^E(s(e)) - \delta V^E(s(e-1))$ aumenta. La razón intuitiva de esto es que si es que lo que se deja de ganar por no hacer crecer el *pie* es «grande», entonces el jugador tendrá mayores incentivos a esforzarse más.

Tal como se espera, a medida que el costo del esfuerzo es mayor, el jugador tiene menos incentivos a «aportar».

Caso II:

Este caso es el que representa que los jugadores anticipan llegar a acuerdo independiente si es que realizan esfuerzo o no. Esto se traduce en que:

$$\frac{s(e-1)}{2} \geq \delta V^E(s(e-1)) \wedge$$
$$\frac{s(e)}{2} \geq \delta V^E(s(e))$$

La matriz de pagos se presenta en la **Tabla 2**.

	0	1
0	$\frac{s(e-1)}{2}, \frac{s(e-1)}{2}$	$\delta V^E(s(e)), s(e) - \delta V^E(s(e)) - c$
1	$s(e) - \delta V^E(s(e)) - c, \delta V^E(s(e))$	$\frac{s(e)}{2} - c, \frac{s(e)}{2} - c$

Tabla 2.2: Pagos Caso II

Tal como se puede ver en la **Tabla 2**, para que $\{1, 1\}$ sea Equilibrio de Nash se debe cumplir:

$$\frac{s(e)}{2} - c \geq \delta V^E(s(e)) \tag{2.4}$$

Por otro lado, para que $\{0, 0\}$ lo sea, se debe cumplir:

$$\frac{s(e-1)}{2} > s(e) - \delta V^E(s(e)) - c$$

En cambio, si es que no se cumple ninguna de las condiciones se considerará solo el Equilibrio de Nash en Estrategias Mixtas, ante lo cual la estrategia de ambos jugadores es:

$$\{1-p, p\} = \left\{ \frac{\delta V^E(s(e)) - \left[\frac{s(e)}{2} - c\right]}{\frac{s(e)}{2} - \frac{s(e-1)}{2}}, \frac{\left[s(e) - \delta V^E(s(e)) - c\right] - \left[\frac{s(e-1)}{2}\right]}{\frac{s(e)}{2} - \frac{s(e-1)}{2}} \right\} \tag{2.5}$$

De aquí se puede ver que a medida que el valor de continuación aumenta, la probabilidad de aportar disminuye (contrariamente al caso anterior), esto se debe a que como se desea terminar el juego, un mayor pago de continuación significa un mayor pago que se recibirá en caso de no ser electo como quien reparte, es decir, el pago mínimo que se recibirá es más alto.

Por otro lado, si es que el valor del *pie* ($s(e)$) es alto, entonces la probabilidad de aportar es mayor, esto porque el pago que se recibe hoy será mayor, lo que significa un mayor incentivo a hacer esfuerzo y disputar ser el *proposer*.

Finalmente, a mayor $\frac{s(e-1)}{2}$ menor será la probabilidad de aportar, esto porque se está conforme con el monto que se ha acumulado hasta el momento.

<u>Caso III</u>:

Este caso es el que representa que los jugadores anticipan llegar a acuerdo solo si es que alguno de los dos ejerce esfuerzo, es decir, solo si el *pie* crece. Esto se traduce en que:

$$\frac{s(e-1)}{2} < \delta V^E(s(e-1)) \wedge$$
$$\frac{s(e)}{2} \geq \delta V^E(s(e))$$

En este caso, la matriz de pago es similar a la del Caso II, pero con la diferencia de los pagos del casillero $\{0,0\}$ los cuales corresponden a repetir el juego, ya que en dicha circunstancia no se llegaría a acuerdo. La Matriz de Pagos se puede ver en la **Tabla 3**.

	0	1
0	$\delta V^E(s(e-1)), \delta V^E(s(e-1))$	$\delta V^E(s(e)), s(e) - \delta V^E(s(e)) - c$
1	$s(e) - \delta V^E(s(e)) - c, \delta V^E(s(e))$	$\frac{s(e)}{2} - c, \frac{s(e)}{2} - c$

Tabla 2.3: Pagos Caso III

En este caso se debe cumplir la misma condición que en el Caso II para que $\{1,1\}$ sea Equilibrio de Nash, mientras que para que lo sea $\{0,0\}$ se debe tener:

$$\delta V^E(s(e-1)) > s(e) - \delta V^E(s(e)) - c$$

Tal como en el Caso I, si es que $\{0,0\}$ es el Equilibrio, al periodo siguiente se volverá a jugar el mismo juego, y así por siempre. Por lo tanto se verifica que $\delta V^E(s(e-1) = 0$ en dicho caso, lo que significa que no se puede dar el caso en que $\{0,0\}$ es Equilibrio de Nash.

Por lo tanto se tiene un Equilibrio en Estrategias Mixtas, en el que se ve que:

$$\delta V^E(s(e-1)) = \delta\left((1-p)\left[s(e) - \delta V^E(s(e)) - c\right] + p\left[\frac{s(e)}{2} - c\right]\right) \tag{2.6}$$

En este caso la Estrategia Mixta de ambos jugadores sería:

$$\{1-p, p\} = \left\{\frac{\delta V^E(s(e)) - \left[\frac{s(e)}{2} - c\right]}{\frac{s(e)}{2} - \delta V^E(s(e-1))}, \frac{\left[s(e) - \delta V^E(s(e)) - c\right] - \left[\delta V^E(s(e-1))\right]}{\frac{s(e)}{2} - \delta V^E(s(e-1))}\right\} \tag{2.7}$$

Al igual que en el Caso II, se puede ver que a medida que el valor de continuación aumenta, la probabilidad de aportar disminuye, esto se debe a que como se desea terminar el juego, un mayor pago de continuación significa un mayor pago que se recibirá en caso de no ser electo como quien reparte, es decir, el pago mínimo que se recibirá es más alto.

De forma simétrica, a mayor $\delta V^E(s(e-1))$ menor será la probabilidad de aportar, esto porque se está conforme con el monto que se ha acumulado hasta el momento.

Se debe notar que para conocer exactamente el valor de p se debe resolver el sistema de ecuaciones compuesto por (2.6) y (2.7), lo que entrega la siguiente ecuación cuadrática:

$$p^2\left[\delta\left(\frac{s(e)}{2} + \delta V^E(s(e))\right)\right] + p\left[\delta\left(s(e) - \delta V^E(s(e)) - c\right) - \frac{s(e)}{2}\right] + \left[s(e) - 2\delta V^E(s(e)) - c\right] = 0 \tag{2.8}$$

donde aquellas soluciones que estén en el intervalo $[0,1]$ son las que se deben usar.

<u>Caso IV</u>:

Este caso representa cuando los jugadores llegan a acuerdo solamente si ninguno realiza esfuerzo, es decir, si es que el *pie* crece los agentes preferirán no llegar a acuerdo. Esto se traduce en que:

$$\frac{s(e-1)}{2} \geq \delta V^E(s(e-1)) \land$$

$$\frac{s(e)}{2} < \delta V^E(s(e))$$

La matriz de pago se representa en la **Tabla 4.**

	0	1
0	$\frac{s(e-1)}{2}, \frac{s(e-1)}{2}$	$\delta V^E(s(e)), \delta V^E(s(e)) - c$
1	$\delta V^E(s(e)) - c, \delta V^E(s(e))$	$\delta V^E(s(e)) - c, \delta V^E(s(e)) - c$

Tabla 2.4: Pagos Caso IV

En la matriz se puede observar que jugar $\{1,1\}$ nunca será Equilibrio de Nash, ya que ambos jugadores tienen incentivos a desviarse a no ejercer esfuerzo. Para que $\{0,0\}$ sea Equilibrio de Nash se debe cumplir que:

$$\frac{s(e-1)}{2} \geq \delta V^E(s(e)) - c$$

En caso que no se cumpla se tendrán los equilibrios $\{1,1\}\{1,1\}$ y uno en Estrategias Mixtas. Tal como ya se ha explicado, esta tesis se restringirá a Equilibrios Simétricos, por lo que solo te tomará en cuenta el Equilibrio de Nash en Estrategias Mixtas.

En dicho caso, la Estrategias será:

$$\{1-p, p\} = \left\{ \frac{c}{\delta V^E(s(e)) - \frac{s(e-1)}{2}}, 1 - \frac{c}{\delta V^E(s(e)) - \frac{s(e-1)}{2}} \right\}$$

donde p representa la probabilidad de ejercer esfuerzo y $(1-p)$ la de no hacerlo.

Se puede ver que a medida que el pago de continuación es mayor, la probabilidad de ejercer esfuerzo crece, lo que se debe a se espera ganar más en el futuro, por lo tanto existen incentivos a continuar el juego. Por otro lado, a mayor tamaño actual del *pie* la probabilidad de ejercer esfuerzo es menor, lo que se debe a que si es grande el tamaño que posee, aumentan los incentivos a querer repartirlo. Como siempre, a mayor costo del esfuerzo menor incentivo a ejercerlo.

2.2.3. Estructura

La forma de resolver el juego y encontrar el Perfil de Equilibrio de forma íntegra, es necesario utilizar *Backward Recursion.* No obstante, antes de aplicar dicho método es necesario conocer algunos resultados que facilitan y guían el proceso.

Lo primero que se debe conocer para poder aplicar *Backward Recursion* en este Modelo, es el Equilibrio de al menos un Subjuego. Para ello es útil el siguiente resultado:

Proposición 4 Existe una cantidad de mejoras $\widetilde{e}$ tal que $\forall e \geq \widetilde{e}$ se cumple que

$$\left[\frac{s(\widetilde{e})}{2} - c\right] \geq \delta \left[\frac{s(\widetilde{e}+1)}{2}\right]$$

a partir del periodo donde se cumpla dicha cantidad de mejoras se llegará a acuerdo en Estrategias Puras y el pago de continuación será el de llegar a Equilibrio inmediatamente en Estrategias Puras.

Demostración. Ver Anexo B. □

La Proposición 4 indica que a partir de la cantidad de mejoras $\widetilde{e}$, el equilibrio será siempre que ambos agentes realicen esfuerzo y que decidan aceptar la *repartición* que realiza el *proposer*. La intuición detrás del resultado es que el valor del *pie* ya alcanzó un nivel suficientemente alto en comparación con el costo c, es por ello que los beneficios de ser el *proposer* son bastante altos en comparación con ser el jugador rival, quien solo se lleva el valor de continuación.

Otro resutado importante para conocer la estructura es que los valores de continuación son crecientes en la cantidad de esfuerzos e, lo que se expresa en la siguiente Proposición.

Proposición 5 Los valores de continuación son crecientes a medida que se realizan los esfuerzos, es decir, son crecientes en el tiempo.

Demostración. Ver Anexo B. □

Este resultado quiere decir que a medida que se va avanzando en el juego lo que se espera ganar es mayor, lo que significa que si se es el *proposer* y se desea que el jugador rival acepte, entonces se le debe entregar un monto cada vez mayor, lo que se interpreta como que a medida que va avanzando el juego el piso mínimo de ganancia va aumentando.

Un resultado central en el desarrollo del juego es la monotonía en el hecho de llegar a acuerdo, es decir, que a partir de cierto periodo siempre se realizarán las *reparticiones*.

Proposición 6 El Perfil de Estrategias de Equilibrio del Modelo General es monótono en el hecho de llegar o no acuerdo, es decir, sea $\hat{e}$ el primer periodo en el que se llega a acuerdo, entonces en todo $e \geq \hat{e}$ se llegará a acuerdo.

Demostración. Ver Anexo B. □

La Proposición 6 indica que al comienzo del juego existe una fase en donde no se desea llegar a acuerdo ya que ambos jugadores desean hacer crecer el *pie* para obtener mayor beneficio en el futuro. Esta fase se denominará *construcción*.

Se debe notar además que debido a que en el Caso I de los subjuegos el equilibrio solo es en Estrategias Mixtas, entonces la fase de *construcción* se llevará a cabo en Estrategias Mixtas, lo que se interpreta como un rango de tiempo en que los jugadores desean hacer crecer las utilidades del proyecto pero que no realizan el máximo esfuerzo porque aun el costo de que existan periodos ineficientes por la inexistencia de mejoras no es tan alto. Esto se traduce en que efectivamente se pueden tener periodos donde la realización de la Mixta indique que ninguno realiza una mejora.

Luego de la fase de *construcción* vendría la fase en que los jugadores desean llegar a acuerdo. Esta situación es monótona en el sentido que una vez que se desee alcanzar el acuerdo, entonces no existirá ningún periodo futuro en que lo óptimo sea no realizar la *repartición*.

Este resultado no indica que siempre exista dicha fase de *construcción* del *pie*, porque se podría llegar a acuerdo desde el primer periodo, pero lo que sí se indica es que no existirán periodos donde se llegue a acuerdo y luego no, tal como se mencionó recientemente.

En la misma línea, el siguiente Corolario da más forma al resultado.

Corolario 2 Nunca se estará en el Caso IV de los posibles subjuegos.

Demostración. Este resultado es directo de la Proposición 6, ya que indica que no puede darse el caso que se desea llegar a acuerdo si el *pie* no crece, pero que se prefiere no alcanzar el acuerdo si el *pie* crece. □

El Corolario 2 limita a solo tres los subjuegos posibles, dejando de lado aquel en que los jugadores deciden llegar a acuerdo y luego no. La razón intuitiva de porque no existe el Caso IV es que nunca será eficiente llegar a él, es decir, si es que sucede que es preferible detenerse a aportar, entonces en el subjuego anterior se detiene el juego y de esa forma no se incurre en el descuento temporal, por lo que nunca se podrá estar en dicha situación.

Continuando con la estructura del juego, el siguiente resultado limita las posibilidades de variaciones que sufre el desarrollo del juego.

Proposición 7 La Estrategia $\{0, 0\}$ del Caso II solo puede ser Equilibrio de Nash en el primer periodo de juego, lo que sucede si se cumple $\frac{s(1)}{2} - \frac{s(0)}{2} < c$. Si no se cumple dicha condición entonces nunca será Equilibrio de Nash.

Demostración. Ver Anexo B. □

El resultado recién descrito indica que si los jugadores deciden no llegar a acuerdo en el primer periodo del juego, entonces en ningún periodo posterior decidirán jugar «no aportar» y decidirán llegar a acuerdo en el mismo periodo. La lógica de esto es que no es eficiente dicha situación, ya que si los agentes saben que si en el periodo siguiente preferirán jugar «no aportar» y llegar a acuerdo, entonces lo óptimo sería detenerse en el periodo anterior para no incurrir en el costo del tiempo representado por el factor δ.

En otras palabras, la Proposición 7 da la intuición de que el juego puede ser de dos formas: (1) se hace crecer el *pie*, es decir existe fase de *construcción*, o (2) se llega a acuerdo de forma inmediata.

Continuando con la estructura del juego, el siguiente resultado índica cómo es la dinámica en la fase de acuerdo.

Proposición 8 El Perfil de Estrategias de Equilibrio es monótono en el tipo de Estrategias utilizadas en la fase de acuerdo. Es decir, considerando $\hat{e}$ el primer periodo en el que se llega a acuerdo y e' el primer periodo que se juega Estrategias Puras, luego en todo $e \in [\hat{e}, e' - 1]$ el equilibrio es en Estrategias Mixtas y en todo $e \geq e'$ el equilibrio se alcanza es Estrategias Puras.

DEMOSTRACIÓN. Ver Anexo B. □

El resultado expresado en la Proposición 8 indica que a partir de cierta cantidad de mejoras en la fase de acuerdo los jugadores ejercerán el máximo esfuerzo posible, motivados por ser el *proposer* lo que asegura una proporción mayor del *pie* que existe en disputa, el cual ha ido aumentando paulatinamente.

2.3. Resultados

Conociendo la estructura general que tendrá el juego, se deriva el siguiente resultado.

Teorema 2 El juego se divide monótonamente en tres partes. La primera es la *fase de construcción* en que no se llegará a acuerdo al final de cada periodo y en la cual los jugadores utilizarán Estrategias Mixtas en la fase de esfuerzos. La segunda es la fase de acuerdo en Estrategias Mixtas, en la que se llegará a acuerdo en cada periodo. Finalmente la fase de Acuerdo en Estrategias Puras, en la que también se llegará a acuerdo al final de cada periodo.

DEMOSTRACIÓN. Ver Anexo B. □

El Teorema 2 indica que el juego es monótono en su desarrollo y que se puede identificar cada fase claramente. Si es que el costo c del esfuerzo no es muy alto en comparación al posible beneficio, entonces los agentes partirán con una fase en la que solo hacer esfuerzo para construir el bien público, para luego pasar a la fase de Acuerdo, situación que ocurre primero en Estrategias Mixtas y luego en Estrategias Puras. Es decir, pueden existir dos situaciones:

La primera situación parte con la *construcción* del monto a repartir, en donde los jugadores utilizan Estrategias Mixtas para decidir si aportar o no, lo que hace que sea un crecimiento interrumpido en la eventualidad de que hayan periodos donde nadie aporta. Luego se pasa a una fase de acuerdo en Estrategias Mixtas, esto porque los agentes desean llegar a acuerdo, pero el *pie* no es lo suficientemente grande como para querer disputar decididamente ser el *proposer*. Finalmente, se llega a la etapa de acuerdo en Estrategias Puras, donde ya es suficientemente grande el monto a repartir comparado en el costo c. Es por ello que los jugadores deciden disputar ser quien propone la *repartición*, ya que hacerlo asegura ganancias altas.

La segunda forma que puede tomar el juego es que los jugadores no ejerzan esfuerzo y el *pie* no crezca, lo que significaría que se llega a acuerdo inmediatamente. Mirando lo que sucede *off-the-path*, se ve que si es que se aportara de todas formas, y se hiciese crecer lo suficiente el *pie*, luego vendría una fase de Estrategias Mixtas, que al igual que en la situación descrita en el párrafo anterior, los agentes aleatoriamente deciden si aportar o no. Finalmente se llegaría a la fase de acuerdo en Estrategias Puras, donde el *pie* ha crecido lo suficiente como para que ambos jugadores disputen el monto a repartir.

En términos gráficos se pueden apreciar las dos formas del juego y sus etapas en las siguientes imágenes:

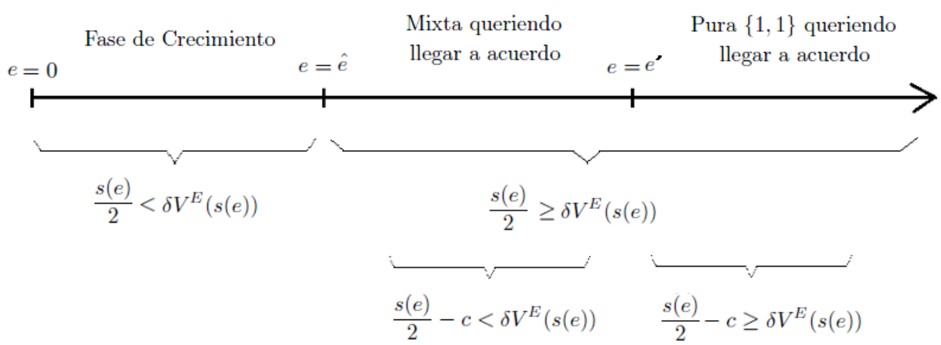

Figura 2.1: Resumen del desarrollo del juego sin acuerdo instantáneo.

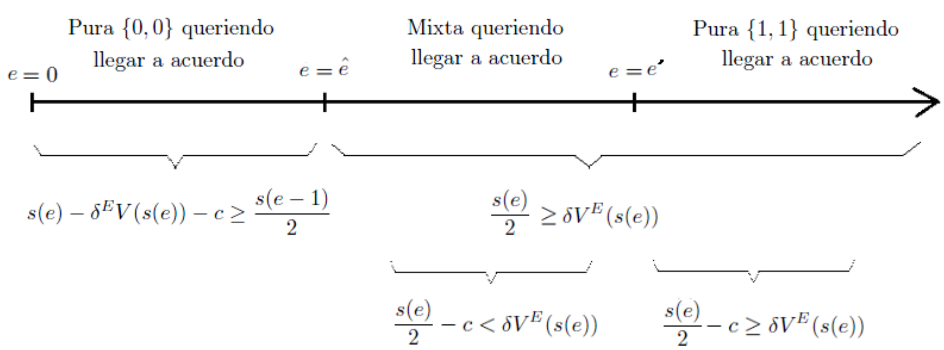

Figura 2.2: Resumen del desarrollo del juego con acuerdo instantáneo.

donde $\hat{e}$ es el primer periodo en que se llega a acuerdo jugando Estrategias Mixtas y e' es el primer periodo en que se juegan Estrategias Puras $\{1, 1\}$.

Otro resultado principal que se obtiene es que la probabilidad de la Estrategia Mixta asociada a «aportar» es creciente a medida que se realizan los esfuerzo. Esto queda capturado en el resultado de a continuación.

Teorema 3 Para los periodos en que se juega Estrategias Mixtas, es decir, $\forall e \in [0, e' - 1]$ se cumple que p_i es creciente en los esfuerzos realizados, es decir, es creciente en el tiempo.

Demostración. Ver Anexo B. $\square$

El Teorema 3 representa un resultado fundamental, porque indica que tanto en la fase de *construcción* como en la de Acuerdo en Estrategias Mixtas, la probabilidad de jugar «aportar» va creciendo en conjunto con el aumento del tamaño del *pie*.

La razón intuitiva de que a lo largo del juego los jugadores vayan ejerciendo una cantidad mayor de esfuerzo, hasta llegar al máximo posible, es que existen dos efectos que dominan las acciones de los jugadores. El primero es no querer caer en periodos de ineficiencia en que no exista aumento del *pie*, estos periodos no son deseables porque su existencia solo genera una perdida del valor del monto a repartir representada por el costo temporal, es por ello que los jugadores quieren evitarlo. No obtante también existe el costo del esfuerzo por lo que enfrentan un trade-off entre ejercer esfuerzo para evitar dichos periodos e incurrir en dicho costo c del esfuerzo.

El segundo efecto que motiva la realización del esfuerzo es la posibilidad de ser el *proposer*, ya que dicha situación entrega al jugador que reparte una proporción mayor del *pie* en comparación con la del rival. No obstante, nuevamente debido al costo del esfuerzo los jugadores enfrentan el trade-off de disputar ser el *proposer* e incurrir el costo, o recibir lo que el otro jugador ofrece evitando la realización de esfuerzo.

En los periodos iniciales del juego, cuando se tiene la fase de *construcción*, los jugadores ejercen esfuerzo aun cuando al final del periodo no habrá *repartición*. La razón de esto es que los jugadores prefieren hacer crecer el *pie* para obtener un pago mayor en el futuro. Se observa además que el efecto que domina en esta fase es el primero, en que los jugadores van aumentando el esfuerzo que realizan para no caer en periodos de ineficiencia, los cuales son más costosos a medida que el *pie* es mayor.

En el periodo de acuerdo en Estrategias Mixtas aun domina el primer efecto, no obstante a medida que el pie va creciendo los esfuerzos tienden al máximo posible, lo que segnifica que el segundo efecto va siendo más relevante cada vez. La razón de esto es que lo que se espera ganar siendo el *proposer* cada vez es más rentable en comparación con el costo del esfuerzo, por lo que los jugadores óptimamente van entrando en la disputa del proposer a medida que el *pie* es mayor.

En la fase de acuerdo en Estrategias Puras, el efecto que domina es el segundo, ya que los jugadores ejercen el máximo esfuerzo posible debido a que las ganacias de ser el *proposer* son rentables en comparación con el costo del esfuerzo. Además se puede notar que en este periodo no existirán ineficiencias causadas por la inexistencia de mejoras, ya que el gran tamaño del *pie* asegura que ambos jugadores ejerzan esfuerzo.

Un elemento fundamental en el análisis del juego es saber que implicancias trae el equilibrio sobre el Bienestar Social, para ello es necesario definirlo primero.

Definición 4 El Óptimo Social es el periodo t^* en que se maximiza la función de Bienestar Social, la que corresponde a:

$$BS(t) = \delta^t s(t) - \sum_{i=0}^{t} \delta^i c$$

o equivalentemente:

$$BS(t) = \delta^t s(t) - \left(\frac{1-\delta^{t+1}}{1-\delta}\right) c$$

Esta definición indica que el Bienestar Óptimo corresponde a que en cada periodo solo un agente realice el esfuerzo, ya que de otra forma se haría esfuerzo ineficiente. Con esto se puede enunciar el siguiente resultado.

Teorema 4 La primera vez que se llega a acuerdo ocurre antes del Óptimo Social.

DEMOSTRACIÓN. Ver Anexo B. □

El Teorema 4 indica que el *pie* no logra crecer tanto como para alcanzar el tamaño socialmente deseable. Esto se debe principalmente a la existencia de competencia entre los agentes. Ambos jugadores anticipan que a medida que el *pie* aumenta, el efecto de disputar ser el *proposer* es cada vez mayor lo que genera quel jugador que reparte en periodos anteriores al óptimo social prefiera asegurar el monto que posee y no arriesgarse a quedar con menos si es que en el próximo periodo es el jugadore rival quien asume el cargo de *proposer*.

Además el jugador que es el *proposer* enfrenta un problema de Hold-Up de parte del rival, ya que si decide no llegar a acuerdo en el próximo periodo no puede asegurar el esfuerzo realizado, por lo tanto el jugador rival podría dejarse para si los frutos del esfuerzo incurrido por él. Este problema surge porque al realizar esfuerzo no existe mecanismo que asegure el derecho de propiedad sobre él, es decir, no se puede contraer un contrato verificable que asegure un monto mayor al valor de continuación como premio por el esfuerzo.

Se debe notar que dado que el acuerdo se alcanza antes de lo que sería el Óptimo Social, se observa una ineficiencia en el resultado. Esta ineficiencia no ha sido explicada por la literatura, ya que no se había desarrollado un modelo de *pie* creciente endógenamente. Lo que se ha descrito antes es que la ineficiencias están dadas por la pérdida del poder de veto o por la incertidumbre del tamaño del *pie* del periodo siguiente, situaciones que ocurren en Merlo and Wilson (1995), Eraslam and Merlo (2002) y Torres (2013).

Es necesario notar que esta situación se justifica porque el esfuerzo es costoso, lo que genera que aportar no siempre sea Equilibrio de Nash de cada etapa. Luego, a pesar de la simetría considerada, no siempre ambos jugadores realizan el esfuerzo, al contrario que lo que sucede cuando el costo es cero, en que ambos aportan siempre, por lo que se elimina el Hold-Up debido a que han realizado las mismas acciones.

2.4. Discusión

En esta sección se desarrolló un Modelo General que intenta explicar la dinámica asociada a una negociación en que los agentes pueden hacer crecer endógenamente el tamaño del monto a repartir. Si bien el modelo intenta ser lo suficientemente general, hay algunos supuestos que se pueden relajar para obtener un resultado aún más amplio. No obstante no todos ellos generarían cambios en las intuiciones que se obtendrían.

El primer supuesto es que el esfuerzo que se desarrolla es unidimensional e involucra un aumento en el tamaño del *pie* y un mayor poder de negociación. En términos generales lo que se obtiene es que existe un esfuerzo destinado a aumentar el monto a repartir (esfuerzo productivo) y una realizado para aumentar la probabilidad de manejar la agenda (esfuerzo improductivo). El primero se denominará esfuerzo productivo y se denotará por ε_i^P y el segundo se llamará esfuerzo improductivo y será representado por ε_i^{NP}. Debido a que son esfuerzos distintos, tienen asociados costos distintos, c^P y c^{NP} respectivamente.

En este trabajo se asume una relación particular para ambos que está dada porque el esfuerzo improductivo tiene un costo nulo, $c^{NP} = 0$, y la cantidad máxima que se puede realizar debe ser menor o igual al esfuerzo improductivo, es decir, $\varepsilon_i^P \geq \varepsilon_i^{NP}$. De aquí se sigue que en equilibrio se tendrá que $\varepsilon_i^P = \varepsilon_i^{NP}$ y que se incurrirá en un costo $c^P = c$ cuando exista esfuerzo.

La razón intuitiva que sustenta la elección de dicha relación entre esfuerzos es que se está en un ambiente legislativo pequeño, donde la labor de asesor está acompañada por la de *lobbista*, por lo tanto se trata de la misma persona quien realiza la actividad de entregar mejoras al proyecto y de generar mayor poder de negociación.

La variación que se espera de los resultados es que mientras se esté en la fase de *construcción* no se realice esfuerzo improductivo porque se sabe que no habrá acuerdo al final del periodo. No obstante debe ir aumentando dicho esfuerzo cuando se va volviendo más atractivo ser el *proposer*. Esta intuición no contradice los resultados encontrados en este trabajo.

El segundo supuesto importante desarrollado es que solo se aplica regla de unanimidad. Al desarrollar el modelo para una mayor cantidad de jugadores se podría implementar una regla de k-mayoría, lo que generaría que en el momento que se llega a acuerdo sea aún anterior al que predice este modelo, lo que suma la intuición que no solo la competencia produce ineficiencia, sino que también la pérdida del poder de veto, lo que ya ha sido desarrollado en trabajos anteriores. Por lo tanto relajar la regla de unanimidad incrementa la intuición de las ineficiencias que se encuentran en este trabajo.

Capítulo 3

Ejemplos: Crecimiento Endógeno Costoso

Para ilustrar los resultados del Modelo General se desarrollarán dos ejemplos, el primero con una función de crecimiento del *pie* lineal que representa que los esfuerzos realizados al inicio son igual de significativos de los realizados en los periodos siguientes, y un segundo ejemplo con un crecimiento a tasa decreciente, que intenta representar que a medida que el proyecto va mejorando, para cada aporte el crecimiento marginal será menor, es decir, que es más costoso desarrollar mejoras significativas.

3.1. Ejemplo 1

Se considerará una función de crecimiento $s(e) = 5 + 6e$, donde $e = 1$ si alguno de los agentes realiza esfuerzo en el periodo t y $e = 0$ si ninguno de los agentes lo realiza. El costo del esfuerzo será $c = 1$ y se descuentan los pagos futuros a una tasa $\delta = 0{,}9$.

Iteración:

Lo primero que se debe hacer es encontrar el punto de inicio para aplicar *Backward Recursion*, es decir el mínimo e que cumple $\left[\frac{s(e)}{2} - c\right] \geq \left[\frac{s(e+1)}{2}\right]$ lo que se cumple en $e = 11$, ya que en dicho periodo se verifica que $37,50 > 37,35$ mientras que en $e = 10$ se tiene $34,50 < 34,65$. Por lo tanto, se sabe que en $e = 11$ se llegará a acuerdo en Estrategias Puras.

<u>$e = 10$:</u>

Luego, se procede en $e = 10$. El valor de continuación (descontado) en este periodo será:

$$\delta V^E(s(10)) = \delta \left[\frac{s(11)}{2} - c\right] = 0,9 \left[\frac{77}{2} - 1\right] = 33,75$$

Conociendo $\delta V^E(s(10))$ se sabe que se llegará a acuerdo, ya que al comprobar si se cumple $\frac{s(10)}{2} \geq \delta V^E(s(10))$, se tiene $35,50 > 33,75$.

Sabiendo que se llega a acuerdo se puede ver que el Equilibrio es en Estrategias Puras, ya que al verificar $\frac{s(10)}{2} - 1 \geq \delta V^E(s(10))$, se tiene $34,50 > 33,75$.

<u>$e = 9$:</u>

Se procede en $e = 9$. El valor de continuación (descontado) en este periodo será:

$$\delta V^E(s(9)) = \delta \left[\frac{s(10)}{2} - c \right] = 0,9 \left[\frac{71}{2} - 1 \right] = 31,05$$

Conociendo $\delta V^E(s(9))$ se sabe que se llegará a acuerdo, ya que al comprobar si se cumple $\frac{s(9)}{2} \geq \delta V^E(s(9))$, se tiene $32,50 > 31,05$.

Sabiendo que se llega a acuerdo se puede ver que el Equilibrio es en Estrategias Puras, ya que al verificar $\frac{s(9)}{2} - 1 \geq \delta V^E(s(9))$, se tiene $31,50 > 31,05$.

<u>$e = 8$:</u>

Se procede en $e = 8$. El valor de continuación (descontado) en este periodo será:

$$\delta V^E(s(8)) = \delta \left[\frac{s(9)}{2} - c \right] = 0,9 \left[\frac{65}{2} - 1 \right] = 28,35$$

Conociendo $\delta V^E(s(8))$ se sabe que se llegará a acuerdo, ya que al comprobar si se cumple $\frac{s(8)}{2} \geq \delta V^E(s(8))$, se tiene $29,50 > 28,35$.

Sabiendo que se llega a acuerdo se puede ver que el Equilibrio es en Estrategias Puras, ya que al verificar $\frac{s(8)}{2} - 1 \geq \delta V^E(s(8))$, se tiene $28,50 > 28,35$.

<u>$e = 7$:</u>

Se procede en $e = 7$. El valor de continuación (descontado) en este periodo será:

$$\delta V^E(s(7)) = \delta \left[\frac{s(8)}{2} - c \right] = 0,9 \left[\frac{59}{2} - 1 \right] = 25,65$$

Conociendo $\delta V^E(s(7))$ se sabe que se llegará a acuerdo, ya que al comprobar si se cumple $\frac{s(7)}{2} \geq \delta V^E(s(7))$, se tiene $26,50 > 25,65$.

Sabiendo que se llega a acuerdo, se puede comprobar que el Equilibrio es en Estrategias Mixtas, ya que al verificar $\frac{s(7)}{2} - 1 < \delta V^E(s(7))$, se tiene $25,50 < 25,65$.

Por lo tanto, para poder calcular las probabilidades de la Mixta, se debe saber qué pasa en el periodo $e = 6$, situación que no es directamente verificable, por lo que se aplicará *Guess and Verify*.

Se partirá asumiendo que en el periodo $e = 6$ también se llegará a acuerdo, por lo que el valor de p será:

$$p = \frac{\Big[s(e) - \delta V^E(s(e)) - c\Big] - \Big[\frac{s(e-1)}{2}\Big]}{\frac{s(e)}{2} - \frac{s(e-1)}{2}} = \frac{\Big[s(7) - \delta V^E(s(7)) - c\Big] - \Big[\frac{s(6)}{2}\Big]}{\frac{s(7)}{2} - \frac{s(6)}{2}}$$

$$p = \frac{[53 - 25,65 - 1] - \Big[\frac{47}{2}\Big]}{\frac{53}{2} - \frac{47}{2}} = 0,95$$

Ahora se, debe verificar si el *Guess* inicial es correcto, para lo cual se traslada el juego a $t = 6$, y se calcula el valor de continuación.

$$\delta V^E(s(6)) = \delta \left[(1-p)\Big(s(7) - \delta V^E(s(7)) - c\Big) + p\left(\frac{s(7)}{2} - c\right)\right]$$

$$\delta V^E(s(6)) = 0,9\left[(1-0,95)(53 - 25,65 - 1) + 0,95\left(\frac{53}{2} - 1\right)\right] = 22,99$$

Luego se comprueba que era correcto ya que la condición $\frac{s(6)}{2} \geq \delta V^E(s(6))$ se cumple, ya que se tiene $23,50 > 22,99$.

Se pasa al periodo anterior sabiendo que las probabilidades asociadas a la Mixta son $\{0,05; 0,95\}$.

<u>$e = 6$:</u>

Se procede en $e = 6$. El valor de continuación (descontado) en este periodo será:

$$\delta V^E(s(6)) = \delta \left[(1-p)\Big(s(7) - \delta V^E(s(7)) - c\Big) + p\left(\frac{s(7)}{2} - c\right)\right]$$

$$\delta V^E(s(6)) = 0,9\left[(1-0,95)(53 - 25,65 - 1) + 0,95\left(\frac{53}{2} - 1\right)\right] = 22,99$$

el que ya fue calculado en el paso anterior.

También, gracias al periodo anterior se sabe que en $e = 6$ se llegará a acuerdo, y por monotonía se sabe que será en Estrategias Mixtas, por lo tanto para poder calcular las probabilidades de la Mixta, se debe saber qué pasa en el periodo $e = 5$, situación que no es directamente verificable, por lo que se aplicará *Guess and Verify* nuevamente.

Se partirá asumiendo que en el periodo $e = 5$ también se llegará a acuerdo, por lo que el valor de p será:

$$p = \frac{\left[s(e) - \delta V^E(s(e)) - c\right] - \left[\frac{s(e-1)}{2}\right]}{\frac{s(e)}{2} - \frac{s(e-1)}{2}} = \frac{\left[s(6) - \delta V^E(s(6)) - c\right] - \left[\frac{s(5)}{2}\right]}{\frac{s(6)}{2} - \frac{s(5)}{2}}$$

$$p = \frac{[47 - 22,99 - 1] - \left[\frac{41}{2}\right]}{\frac{47}{2} - \frac{41}{2}} = 0,84$$

Ahora se, debe verificar si el *Guess* inicial es correcto, para lo cual se traslada el juego a $t = 5$, y se calcula el valor de continuación.

$$\delta V^E(s(5)) = \delta \left[(1-p)\left(s(6) - \delta V^E(s(6)) - c\right) + p\left(\frac{s(6)}{2} - c\right)\right]$$

$$\delta V^E(s(5)) = 0,9\left[(1 - 0,84)(47 - 22,99 - 1) + 0,84\left(\frac{47}{2} - 1\right)\right] = 20,32$$

Luego se comprueba que era correcto ya que la condición $\frac{s(5)}{2} \geq \delta V^E(s(5))$ se cumple, ya que se tiene $20,50 > 20,32$.

Se pasa al periodo anterior sabiendo que las probabilidades asociadas a la Mixta son $\{0,16; 0,84\}$.

<u>$e = 5$:</u>

Se procede en $e = 5$. El valor de continuación (descontado) en este periodo será:

$$\delta V^E(s(5)) = \delta \left[(1-p)\left(s(6) - \delta V^E(s(6)) - c\right) + p\left(\frac{s(6)}{2} - c\right)\right]$$

$$\delta V^E(s(5)) = 0,9\left[(1 - 0,84)(47 - 22,99 - 1) + 0,84\left(\frac{47}{2} - 1\right)\right] = 20,32$$

el que ya fue calculado en el paso anterior.

También, gracias al periodo anterior se sabe que en $e = 5$ se llegará a acuerdo, y por monotonía se sabe que será en Estrategias Mixtas, por lo tanto para poder calcular las probabilidades de la Mixta, se debe saber qué pasa en el periodo $e = 4$, situación que no es directamente verificable, por lo que se aplicará *Guess and Verify* nuevamente.

1. se partirá asumiendo que en el periodo $e = 4$ también se llegará a acuerdo, por lo que el valor de p será:

$$p = \frac{\left[s(e) - \delta V^E(s(e)) - c\right] - \left[\frac{s(e-1)}{2}\right]}{\frac{s(e)}{2} - \frac{s(e-1)}{2}} = \frac{\left[s(5) - \delta V^E(s(5)) - c\right] - \left[\frac{s(4)}{2}\right]}{\frac{s(5)}{2} - \frac{s(4)}{2}}$$

$$p = \frac{[41 - 20,32 - 1] - \left[\frac{35}{2}\right]}{\frac{41}{2} - \frac{35}{2}} = 0,73$$

Ahora se, debe verificar si el *Guess* inicial es correcto, para lo cual se traslada el juego a $e = 4$, y se calcula el valor de continuación.

$$\delta V^E(s(4)) = \delta \left[(1-p)\left(s(5) - \delta V^E(s(5)) - c\right) + p\left(\frac{s(5)}{2} - c\right)\right]$$

$$\delta V^E(s(4)) = 0,9 \left[(1 - 0,73)(41 - 20,32 - 1) + 0,73\left(\frac{41}{2} - 1\right)\right] = 17,59$$

Luego se comprueba que era incorrecto ya que la condición $\frac{s(4)}{2} \geq \delta V^E(s(4))$ no se cumple, ya que se tiene $17,50 < 17,59$.

2. Ahora, ya que se comprobó que 1. es incorrecto, necesariamente se tendrá que no se llega a acuerdo si el *pie* no crece, por lo tanto el valor de p se calcula de la siguiente ecuación cuadrática:

$$p^2 \left[\delta\left(\frac{s(5)}{2} + \delta V^E(s(5))\right)\right] + p\left[\delta\left(s(5) - \delta V^E(s(5)) - c\right) - \frac{s(5)}{2}\right] + \left[s(5) - 2\delta V^E(s(5)) - c\right] = 0$$

desde donde los resultados son $p_1 = 0,72$ y $p_2 = 20,00$, pero solo se considerará el primero ya que el otro está fuera del rango $[0,1]$.

Dado que el punto 2. es correcto, se pasa al periodo anterior sabiendo que las probabilidades asociadas a la Mixta son $\{0,28; 0,72\}$.

<u>$e = 4$:</u>

Se procede en $e = 4$. El valor de continuación (descontado) en este periodo será:

$$\delta V^E(s(4)) = \delta \left[(1-p)\left(s(5) - \delta V^E(s(5)) - c\right) + p\left(\frac{s(5)}{2} - c\right)\right]$$

$$\delta V^E(s(4)) = 0,9 \left[(1 - 0,72)(41 - 20,32 - 1) + 0,72\left(\frac{41}{2} - 1\right)\right] = 17,59$$

Se sabe, gracias al periodo anterior, que en $t = 4$ no se llegará a acuerdo. Por lo que se jugará una Mixta, cuya probabilidad p se calcula de la siguiente forma:

$$p = 1 - \frac{c}{\delta V^E(s(e)) - \delta V^E(s(e-1))} = 1 - \frac{c}{\delta V^E(s(e)) - \delta\left[\delta V^E(s(e)) - c\right]}$$

$$p = 1 - \frac{c}{\delta V^E(s(4)) - \delta\left[\delta V^E(s(4)) - c\right]} = 0,62$$

Con esto se pasa al periodo $t = 3$ sabiendo que las probabilidades asociadas a la Mixta son $\{0,38; 0,62\}$.

<u>$e = 3$:</u>

Se procede en $e = 3$. El valor de continuación (descontado) en este periodo será el de no llegar a acuerdo en $e = 4$:

$$\delta V^E(s(3)) = \delta\left[\delta V^E(s(5)) - c\right] = 0,9\,[17,59 - 1] = 14,93$$

Se sabe, por monotonía, que en $e = 3$ no se llegará a acuerdo. Por lo que se jugará una Mixta, cuya probabilidad p se calcula de la siguiente forma:

$$p = 1 - \frac{c}{\delta V^E(s(e)) - \delta V^E(s(e-1))} = 1 - \frac{c}{\delta V^E(s(e)) - \delta\left[\delta V^E(s(e)) - c\right]}$$

$$p = 1 - \frac{c}{\delta V^E(s(3)) - \delta\left[\delta V^E(s(3)) - c\right]} = 0,58$$

Con esto se pasa al periodo $e = 2$ sabiendo que las probabilidades asociadas a la Mixta son $\{0,42; 0,58\}$.

<u>$e = 2$:</u>

Se procede en $e = 2$. El valor de continuación (descontado) en este periodo será:

$$\delta V^E(s(3)) = \delta\left[\delta V^E(s(4)) - c\right] = 0,9\,[14,93 - 1] = 12,54$$

Se sabe, por monotonía, que en $e = 2$ no se llegará a acuerdo. Por lo que se jugará una Mixta, cuya probabilidad p se calcula de la siguiente forma:

$$p = 1 - \frac{c}{\delta V^E(s(e)) - \delta V^E(s(e-1))} = 1 - \frac{c}{\delta V^E(s(e)) - \delta\left[\delta V^E(s(e)) - c\right]}$$

$$p = 1 - \frac{c}{\delta V^E(s(2)) - \delta\left[\delta V^E(s(2)) - c\right]} = 0,54$$

Con esto se pasa al periodo $e = 1$ sabiendo que las probabilidades asociadas a la Mixta son $\{0,46; 0,54\}$.

$\underline{e = 1:}$

Se procede en $e = 1$. El valor de continuación (descontado) en este periodo será:

$$\delta V^E(s(2)) = \delta \left[\delta V^E(s(3)) - c\right] = 0,9\,[12,54 - 1] = 10,39$$

Se sabe, por monotonía, que en $e = 1$ no se llegará a acuerdo. Por lo que se jugará una Mixta, cuya probabilidad p se calcula de la siguiente forma:

$$p = 1 - \frac{c}{\delta V^E(s(e)) - \delta V^E(s(e-1))} = 1 - \frac{c}{\delta V^E(s(e)) - \delta\,[\delta V^E(s(e)) - c]}$$

$$p = 1 - \frac{c}{\delta V^E(s(1)) - \delta\,[\delta V^E(s(1)) - c]} = 0,48$$

Con esto se pasa al periodo $e = 0$ sabiendo que las probabilidades asociadas a la Mixta son $\{0,52; 0,48\}$.

$\underline{e = 0:}$

Se procede en $e = 0$. El valor de continuación (descontado) en este periodo será:

$$\delta V^E(s(1)) = \delta \left[\delta V^E(s(2)) - c\right] = 0,9\,[10,39 - 1] = 8,45$$

Se sabe, por monotonía, que en $e = 0$ no se llegará a acuerdo. Por lo que se jugará una Mixta, cuya probabilidad p se calcula de la siguiente forma:

$$p = 1 - \frac{c}{\delta V^E(s(e)) - \delta V^E(s(e-1))} = 1 - \frac{c}{\delta V^E(s(e)) - \delta\,[\delta V^E(s(e)) - c]}$$

$$p = 1 - \frac{c}{\delta V^E(s(0)) - \delta\,[\delta V^E(s(0)) - c]} = 0,43$$

con lo que termina la iteración y se sabe que las probabilidades asociadas a la Mixta son $\{0,57; 0,43\}$.

Resultado:

Con el procedimiento descrito se tiene el Perfil Completo de Equilibrio, con todos los valores calculados, los que se resumen en la siguiente tabla:

e	¿Se llega a Acuerdo?	Probabilidades de la Mixta		$V(e)$	$\delta V^E(s(e))$
		1-p	p		
0	no	0,57	0,43	2,55	8,45
1	no	0,52	0,48	6,61	10,39
2	no	0,46	0,54	10,46	12,54
3	no	0,42	0,58	14,07	14,93
4	no	0,38	0,62	17,41	17,59
5	sí	0,28	0,72	20,68	20,32
6	sí	0,16	0,84	24,01	22,99
7	sí	0,05	0,95	27,35	25,65
8	sí	0	1	30,65	28,35
9	sí	0	1	33,95	31,05
10	sí	0	1	37,25	33,75
11	sí	0	1	40,55	36,45
12	sí	0	1	43,85	39,15
13	sí	0	1	47,15	41,85
14	sí	0	1	50,45	44,55
15	sí	0	1	53,75	47,25

Figura 3.1: Resumen Ejemplo 1.

Además se puede notar claramente que las probabilidades de aportar, p, y los valores de continuación son crecientes en el tiempo. Esto se puede ver en las Figuras 4 y 5.

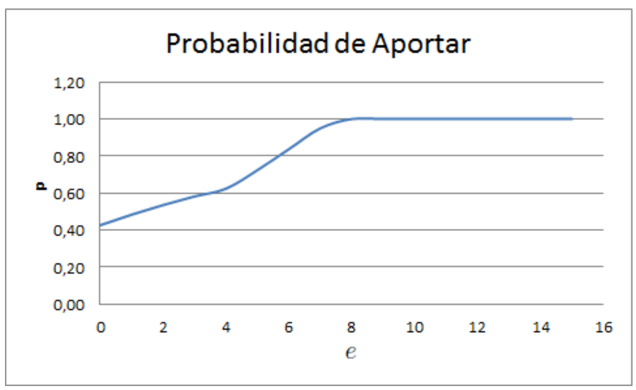

Figura 3.2: Ejemplo 1: Probabilidad de Aportar en el Tiempo.

Figura 3.3: Ejemplo 1: Valor de Continuación en el Tiempo.

Se debe notar que no necesariamente se terminaría en el periodo 4, sino que si es que nunca se realiza el juego $\{0,0\}$ de la Mixta, se terminará el juego ahí, pero si es que en algún periodo resulta que nadie aporta, entonces se repetirá dicho periodo.

Además, aparte de saber que el juego debería terminarse en $e = 4$, es necesario conocer el Perfil Completo del juego, incluidos los Equilibrios *off-the-path* ya que entregan una intuición de cómo se desarrolla una negociación en términos reales, es por ello que es interesante reportar los resultados al menos hasta que se comienza a jugar Estrategias Puras.

3.2. Ejemplo 2

Se considerará una variación del Ejemplo 1, en la que se considera una función de crecimiento cóncava, lo que da la intuición de que hacer contribuciones significativas es cada vez más costoso a medida que el *pie* va creciendo. La función a considerar es $s(e) = 5 + 5e^{0,8}$, donde $e = 1$ si alguno de los agentes realiza esfuerzo en el periodo t y $e = 0$ si ninguno de los agentes lo realiza. El costo del esfuerzo será $c = 1$ y se descuentan los pagos futuros a una tasa $\delta = 0{,}9$.

La iteración que se realiza en el juego es simétrica a lo mostrado en el Ejemplo 1, y da como resultado el siguiente Perfil de Estrategias de Equilibrio.

e	¿Se llega a Acuerdo?	Probabilidades de la Mixta		$V(e)$	$\delta V^E(s(e))$
		1-p	p		
0	no	0,70	0,30	4,80	6,20
1	no	0,63	0,37	7,56	7,89
2	sí	0,48	0,52	9,81	9,64
3	sí	0,35	0,65	11,94	11,25
4	sí	0,19	0,81	14,03	12,71
5	sí	0,05	0,95	16,00	14,16
6	sí	0	1	17,86	15,60
7	sí	0	1	19,66	17,01
8	sí	0	1	21,41	18,39
9	sí	0	1	23,12	19,74
10	sí	0	1	24,80	21,06
11	sí	0	1	26,44	22,36
12	sí	0	1	28,05	23,65
13	sí	0	1	29,64	24,91
14	sí	0	1	31,20	26,16
15	sí	0	1	32,74	27,39

Figura 3.4: Resumen Ejemplo 2.

Este ejemplo sirve para ilustrar que con una función cóncava, en vez de una lineal, los jugadores anticipan que a medida que se realizan los esfuerzos es más difícil hacer aportes significativos, esto es simétrico a pensar que el costo de realizar los aportes es más grande, lo que lleva a que el aumento de los valores de continuación sea bajo. Además, el *pago de hoy* partirá siendo mayor que en el caso lineal, debido a que se le paga poco al jugador rival, pero a medida que crece el *pie* este pago será menor que en el Ejemplo 1 porque el valor de $s(e)$ aumenta poco. Esto lleva a que los jugadores consideren óptimo llegar a acuerdo antes, en los periodos que es fuertemente creciente el *pie*.

Por otro lado, dado que en el modelo de crecimiento cóncavo es más alto el *pago de hoy* en un comienzo, la disposición a realizar esfuerzo (es decir, p) es menor en un comienzo, pero crece rápidamente ya que se no se quiere llegar a los periodos donde es muy costoso hacer aportes significativos. Esto significa que la disputa por ser el *proposer* comienza antes, ya que dado que el valor de continuación crece poco, se vuelve atractivo disputar el monto $s(e) - \delta V^E(s(e))$ más rápidamente.

Finalmente, estos ejemplos muestran que la anticipación que hacen los agentes sobre el resultado del esfuerzo, o lo costoso de estos, determina el periodo en que se llega a acuerdo, lo que va en dirección de que a medida que se vuelve más costoso el futuro, se llega a acuerdo antes.

En la Figura 5 se muestra la diferencia de periodos en que se llega a acuerdo para ambas funciones.

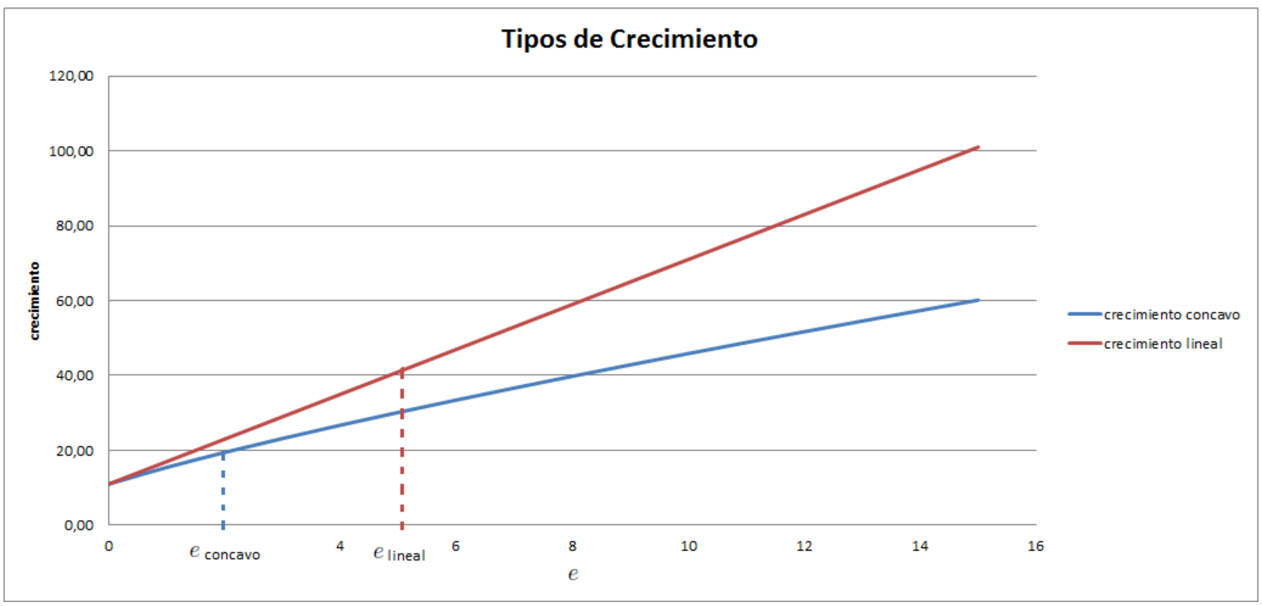

Figura 3.5: Periodo en que se llega a acuerdo según $s(e)$.

Conclusión

Al analizar el modelo de Negociación Secuencial en que se tiene un monto a repartir que no es fijo en el tiempo, si no que endógenamente creciente se obtienen resultados bastante interesantes para entender la dinámica de esta clase de juegos.

El Modelo Básico, si bien es una simplificación del problema a tratar, permite analizar la situación en que un grupo de legisladores no necesita la unanimidad para repartir los pagos de un proyecto, sino que un porcentaje menor de los votos. Esto da interesantes intuiciones sobre el periodo óptimo en que debería terminar el juego, en particular, en dicho caso se ve que a medida que se necesita un menor porcentaje de votos para aprobar el proyecto, se llega al término del juego más rápidamente, ya que los agentes poseen un menor poder de veto por el hecho de que en los periodos futuros podrían quedarse fuera del pacto que se lleva los beneficios, lo que hace que estén dispuestos a aceptar un pago menor hoy. Este resultado es ineficiente, ya que el acuerdo se alcanza en un periodo en que el tamaño del *pie* no corresponde al Óptimo Social. Esto ha sido estudiado por Merlo and Wilson (1995), Eraslam and Merlo (2002) y Torres (2013), quienes han atribuido dicha ineficiencia a la pérdida de poder de veto y a la incertidumbre del tamaño del *pie*.

El Modelo General propuesto permite entender la dinámica cuando son los propios jugadores quienes pueden hacer crecer el monto a repartir, para lo cual deben hacer un esfuerzo costoso, pero el que aumenta sus posibilidades de manejar la agenda de negociación. De este modelo se concluye que los jugadores pasan primero por una fase de *construcción* del *pie* para luego llegar a una fase en que se llega a acuerdo y el juego termina.

Además se obtiene del modelo que los esfuerzos van aumentando a medida que el monto a repartir crece, hasta llegar al máximo esfuerzo posible. Esto se debe a que existen dos efectos principales que motivan la realización del esfuerzo: el primero es querer llegar a repartir el monto sin caer en ineficiencias dadas por tener periodos sin crecimiento, y el segundo es la posibilidad de ser el *proposer*, situación que entrega beneficios más altos que ser el jugador rival.

Cuando el tamaño del *pie* es pequeño domina el primer efecto, ya que el beneficio por ser el *proposer* no es tanto, y dejar pasar periodos son crecimiento no es tan costoso. Esto genera que se realice un menor esfuerzo, pero a medida que va aumentando el *pie* se va volviendo más costoso dejar pasar periodos sin crecimiento y se vuelven más atractivas las ganancias por ser el *proposer*. Esto significa que comienza a ser dominante el segundo efecto descrito, lo que va acompañado de un aumento paulatino de los esfuerzos hasta llegar al máximo posible.

Al analizar cuál debería ser el comportamiento socialmente óptimo, se ve que se alcanza un acuerdo cuando el tamaño del *pie* no crece tanto como lo socialmente deseable. Esta ineficiencia social se expresa a pesar de la regla de unanimidad, lo que es novedoso en la literatura. En este caso la ineficiencia se debe a la competencia costosa que enfrentan los jugadores, lo que hace que cuando el *proposer* tenga que decidir si terminar el juego o pasar al siguiente periodo se incline por la primera alternativa, debido a que dado que existe competencia costosa por ser quien reparte, en el próximo periodo tendrá que volver a hundir el costo c para ser el *proposer*, y ni siquiera esto asegura que lo sea. A esto se suma que los esfuerzos realizados no serás considerados en la próxima ronda, lo que supone un problema de Hold-Up que el agente quiera evitar. Todo esto genera que su valor de continuación será comparativamente bajo.

Una de las causas de que exista el problema de Hold-Up, es porque no existe la posibilidad de realizar ningún tipo de coordinación ni contratos verificables entre los jugadores, que aseguren un resultado mínimo por los aportes realizados para cada uno.

La dinámica del crecimiento del *pie*, los esfuerzos crecientes y la ineficiencia provocada por el Hold-Up, no han sido descritas anteriormente en la literatura, ya que el contexto en que los jugadores hacen crecer el monto a repartir endógenamente no ha sido estudiado.

Bibliografía

[1] Jeffrey S Banks and John Duggan. A bargaining model of collective choice. *American Political Science Review*, pages 73–88, 2000.

[2] David P Baron and John Ferejohn. Bargaining and agenda formation in legislatures. *The American Economic Review*, pages 303–309, 1987.

[3] David P Baron and John A Ferejohn. Bargaining in legislatures. *The American Political Science Review*, pages 1181–1206, 1989.

[4] Ken Binmore, Ariel Rubinstein, and Asher Wolinsky. The nash bargaining solution in economic modelling. *The RAND Journal of Economics*, pages 176–188, 1986.

[5] Hülya Eraslan. Uniqueness of stationary equilibrium payoffs in the baron–ferejohn model. *Journal of Economic Theory*, 103(1):11–30, 2002.

[6] Hülya Eraslan and Antonio Merlo. Majority rule in a stochastic model of bargaining. *Journal of Economic Theory*, 103(1):31–48, 2002.

[7] Werner Güth, Peter Ockenfels, and Markus Wendel. Efficiency by trust in fairness? multiperiod ultimatum bargaining experiments with an increasing cake. *International Journal of Game Theory*, 22(1):51–73, 1993.

[8] Antonio Merlo and Charles Wilson. A stochastic model of sequential bargaining with complete information. *Econometrica*, pages 371–399, 1995.

[9] Salvador Valdés Prieto and Sebastián Soto Velasco. ¿cómo fortalecer la labor legislativa del congreso? propuesta para un nuevo sistema de asesoría parlamentaria. *Estudios públicos*, (114):53–88, 2009.

[10] Ariel Rubinstein. Perfect equilibrium in a bargaining model. *Econometrica*, pages 97–109, 1982.

[11] John Sutton. Non-cooperative bargaining theory: An introduction. *The Review of Economic Studies*, 53(5):709–724, 1986.

[12] Sergio Toro Maureira, Carolina Acevedo de la Harpe, and Kimberling Matamala Rosales. Quebrando paradigmas en contextos presidencialistas: Un examen sobre la capacidad legislativa en chile. *Revista Ibero-Americana de Estudos Legislativos*, 1(1):102–110, 2011.

[13] Juan Pablo Torres Fuentealba. Negociaciones y retrasos ineficientes. 2013.

[14] Huseyin Yildirim. Proposal power and majority rule in multilateral bargaining with costly recognition. *Journal of Economic Theory*, 136(1):167–196, 2007.

[15] Huseyin Yildirim. Distribution of surplus in sequential bargaining with endogenous recognition. *Public Choice*, 142(1-2):41–57, 2010.

Anexo A

Proposición 1 En todos los periodos $t \geq t^*$ se llegará a acuerdo, y el Equilibrio será que el *proposer* ganará $V(t) = s(t) - (k-1)\delta\frac{s(t+1)}{n}$ y que los $k-1$ elegidos en cada periodo tendrán un pago de $V(t) = \delta\frac{s(t+1)}{n}$.

Demostración. Lo que se mostrará es que para cualquier valor de $t \geq t^*$ será óptimo llegar a acuerdo desde el punto de vista del *proposer*. Para ello basta ver que el pago de llegar a acuerdo en t es:

$$V(t) = s(t) - (k-1)\delta V^E(t+1)$$

Si desea continuar, su pago será:

$$V(t) = \delta V^E(t+1) = \begin{cases} \delta\frac{s(t+1)}{n} & \text{si llega a acuerdo en } t+1 \\ \delta\left(\delta\frac{s(t+2)}{n}\right) & \text{si llega a acuerdo en } t+2 \\ \delta\left(\delta\left[\delta\frac{s(t+3)}{n}\right]\right) & \text{si llega a acuerdo en } t+3 \\ \vdots & \\ \delta^l\frac{s(t+l)}{n} & \text{si llega a acuerdo en } l \end{cases}$$

Luego, tomando la generalización, si es que no quisiera llegar a acuerdo en t se debe cumplir:

$$s(t) - (k-1)\delta V^E(t+1) < \delta V^E(t+1)$$

$$\Rightarrow \frac{s(t)}{k} < \delta^l\frac{s(t+l)}{n} \tag{1}$$

Pero, notando que siempre se cumple:

$$\frac{s(t)}{n} \leq \frac{s(t)}{k} \tag{2}$$

Luego, tomando (1) y (2), y multiplicando cada término por δ^t se obtiene:

$$\delta^t \frac{s(t)}{n} \leq \delta \frac{s(t)}{k} < \delta^{t+l} \frac{s(t+l)}{n}$$

, es decir,

$$\delta^t s(t) < \delta^{t+l} s(t+l)$$
$$\Leftrightarrow BS(t) < BS(t+l)$$

lo que no se puede cumplir para un valor $t \geq t^*$ dado que t^* es el máximo de la función $BS(t)$ y a partir de ahí la función es decreciente.

Por lo tanto, el Equilibrio de cada uno de los Subjuegos siguientes es llegar a acuerdo, y el pago será $V(t) = s(t) - (k-1)\delta \frac{s(t+1)}{n}$ para el *proposer* y $V(t) = \delta \frac{s(t+1)}{n}$ para los $k-1$ jugadores que reciban un pago no nulo.

□

Proposición 2 El Perfil de Estrategias de Equilibrio es monótono en en hecho de llegar o no a acuerdo, es decir, sea t' el primer periodo en el que se llega a acuerdo, entonces en todo $t \geq t'$ se llegará a acuerdo.

Demostración. Por el **Teorema** 1 se sabe que a más tardar el juego se detiene en t^*. Suponiendo que al aplicar *Inducción Reversa* se encuentra que $t' < t^*$ es el primer periodo en que no habrá detención, luego, se mostrará que en cualquier $t'' = t' - 1$ no habrá detención tampoco.

En t' se tiene:

$$\frac{s(t')}{k} < \delta \frac{s(t'+1)}{n} \tag{3}$$

Luego, en t'' se tendrá:

$$V(t) = \begin{cases} \delta V^E(t+1) = \delta \left[\delta \frac{s(t'+1)}{n}\right] & \text{si no llega a acuerdo} \\ s(t'') - (k-1)\delta V^E(t+1) = s(t'') - (k-1)\delta \left[\delta \frac{s(t'+1)}{n}\right] & \text{si llega a acuerdo} \end{cases}$$

Luego, suponiendo que decide llegar a acuerdo, se tiene:

$$\frac{s(t'')}{k} \geq \delta \left[\delta \frac{s(t'+1)}{n}\right] \tag{4}$$

Lo que no se puede cumplir, ya que de (3) se tiene:

$$\delta\frac{s(t')}{k} < \delta^2\frac{s(t'+1)}{n} \tag{5}$$

Y además se sabe que:

$$BS(t'') < BS(t')$$
$$\Leftrightarrow \delta^{t''}s(t'') < \delta^{t'}s(t')$$

desde donde, al multiplicar por $\frac{1}{\delta^{t''}k}$ en ambos lados, se obtiene:

$$\frac{s(t'')}{k} < \delta\frac{s(t')}{k} \tag{6}$$

y juntando (5) y (6):

$$\frac{s(t'')}{k} < \delta\frac{t'}{k} < \delta\left[\delta\frac{s(t'+1)}{n}\right]$$
$$\frac{s(t'')}{k} < \delta\left[\delta\frac{s(t'+1)}{n}\right]$$

Lo que contradice (4). □

Teorema 1 El primer periodo en el que se llega a acuerdo corresponde a $t' = \lceil t \rceil$, donde t es el valor que resuelve $\frac{s(t)}{k} = \delta\frac{s(t+1)}{n}$.

Demostración. Dada la monotonía expresada en el *Teorema* 2 se puede saber que en el conjunto de periodos donde se llegará a un acuerdo se cumple $\frac{s(t)}{k} \geq \delta\frac{s(t+1)}{n}$, mientras que donde no se llega a acuerdo se debe cumplir lo contrario, porque, si no fuese así se tendría, para un t y $t+1$ donde no hay detención:

$$\frac{s(t)}{k} \geq \delta\frac{s(t+1)}{n} \tag{7}$$

desde donde se puede construir:

$$\frac{s(t)}{n} \geq \frac{s(t)}{k} \geq \delta\frac{s(t+1)}{n}$$
$$\Rightarrow \frac{s(t)}{n} \geq \delta\frac{s(t+1)}{n}$$

y multiplicando por $\delta^t n$ a ambos lados se obtiene:

$$\delta^t s(t) \geq \delta^{t+1} s(t+1)$$
$$\Rightarrow BS(t) \geq BS(t+1)$$

Lo que no se puede dar, dado que se está en el sector creciente de la función de Bienestar Social, luego no se cumple (7).

Por lo tanto, el menor t que cumple $\frac{s(t)}{k} \geq \delta \frac{s(t+1)}{n}$ es donde se llega a acuerdo por primera vez.

$\square$

Proposición 3 A medida que aumenta el valor de k aumenta el valor de $\hat{t}$, mientras que al aumentar el valor de n disminuye el valor de $\hat{t}$.

Demostración. Sea $\hat{t}(k,n)$ el primer periodo donde se llega a acuerdo. Se mostrará que $\frac{\hat{t}(k,n)}{k} > 0$ y $\frac{\hat{t}(k,n)}{n} < 0$.

1. $\frac{\hat{t}(k,n)}{k} \geq 0$, esto porque al considerar:

$$\frac{s(\hat{t})}{k} = \delta \frac{s(\hat{t}+1)}{n}$$

y derivando a ambos lados por por k:

$$\frac{\frac{\partial s(\hat{t})}{\partial \hat{t}} \frac{\partial \hat{t}}{\partial k} k - s(\hat{t})}{k^2} = \delta \frac{\frac{\partial s(\hat{t}+1)}{\partial (\hat{t}+1)} \frac{\partial (\hat{t}+1)}{\hat{t}} \frac{\partial \hat{t}}{\partial k}}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \hat{t}}{\partial k} \left[\frac{\partial s(\hat{t})}{\partial \hat{t}} \frac{1}{k} - \frac{\delta}{n} \frac{\partial s(\hat{t}+1)}{\partial (\hat{t}+1)} \right] = \frac{s(\hat{t})}{k^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \hat{t}}{\partial k} = \frac{\frac{s(\hat{t})}{k^2}}{\left[\frac{\partial s(\hat{t})}{\partial \hat{t}} \frac{1}{k} - \frac{\delta}{n} \frac{\partial s(\hat{t}+1)}{\partial (\hat{t}+1)} \right]} \geq 0 \tag{8}$$

Para mostrar que el resultado en (8) es positivo, se debe notar que:

- $\frac{s(\hat{t})}{k^2} \geq 0$ siempre.
- $\left[\frac{\partial s(\hat{t})}{\partial \hat{t}} \frac{1}{k} - \frac{\delta}{n} \frac{\partial s(\hat{t}+1)}{\partial (\hat{t}+1)} \right] \geq 0$ ya que, debido a la concavidad de $BS(t)$ para $t < t^*$, se sabe que:

$$\frac{\partial s(\hat{t})}{\partial \hat{t}} > \frac{\partial s(\hat{t}+1)}{\partial (\hat{t}+1)}$$

Sabiendo que $\frac{\delta k}{n} \leq 1$ debido a los valores de los parámetros, se sabe que:

$$\frac{\partial s(\hat{t})}{\partial \hat{t}} > \frac{\partial s(\hat{t}+1)}{\partial (\hat{t}+1)} \geq \frac{\delta k}{n} \frac{\partial s(\hat{t}+1)}{\partial (\hat{t}+1)}$$

Luego, multiplicando a ambos lados por $\frac{1}{k}$:

$$\frac{1}{k}\frac{\partial s(\hat{t})}{\partial \hat{t}} > \delta \frac{1}{n}\frac{\partial s(\hat{t}+1)}{\partial(\hat{t}+1)} \tag{9}$$

Por lo que se tiene

$$\left[\frac{\partial s(\hat{t})}{\partial \hat{t}}\frac{1}{k} - \frac{\delta}{n}\frac{\partial s(\hat{t}+1)}{\partial(\hat{t}+1)}\right] > 0$$

2. $\frac{\partial \hat{t}(k,n)}{\partial n} \leq 0$, esto porque al considerar:

$$\frac{s(\hat{t})}{k} = \delta \frac{s(\hat{t}+1)}{n}$$

y derivando a ambos lados por por n:

$$\frac{\frac{\partial s(\hat{t})}{\partial \hat{t}}\frac{\partial \hat{t}}{\partial n}}{k} = \delta \frac{\frac{\partial s(\hat{t}+1)}{\partial(\hat{t}+1)}\frac{\partial(\hat{t}+1)}{\hat{t}}\frac{\partial \hat{t}}{\partial n}n - s(\hat{t}+1)}{n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \hat{t}}{\partial n}\left[\frac{\delta}{n}\frac{\partial s(\hat{t}+1)}{\partial(\hat{t}+1)} - \frac{\partial s(\hat{t})}{\partial \hat{t}}\frac{1}{k}\right] = \delta \frac{s(\hat{t}+1)}{n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \hat{t}}{\partial n} = \frac{\delta \frac{s(\hat{t}+1)}{n^2}}{\left[\frac{\delta}{n}\frac{\partial s(\hat{t}+1)}{\partial(\hat{t}+1)} - \frac{\partial s(\hat{t})}{\partial \hat{t}}\frac{1}{k}\right]} \leq 0 \tag{10}$$

Para mostrar que el resultado en (10) es negativo, se debe notar que:

- $\delta \frac{s(\hat{t}+1)}{n^2} \geq 0$ siempre.
- $\left[\frac{\partial s(\hat{t})}{\partial \hat{t}}\frac{1}{k} - \frac{\delta}{n}\frac{\partial s(\hat{t}+1)}{\partial(\hat{t}+1)}\right] < 0$ por (9).

□

Proposición 4 Sea $\hat{t}$ el primer periodo en el que se llegará a un acuerdo, entonces se cumple que:

$$\frac{\partial^2 \hat{t}}{\partial n \partial k} \leq 0$$

Demostración. Derivando (8):

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial \hat{t}}{\partial k}\right) = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\frac{s(\hat{t})}{k^2}}{\left[\frac{\partial s(\hat{t})}{\partial \hat{t}}\frac{1}{k} - \frac{\delta}{n}\frac{\partial s(\hat{t}+1)}{\partial(\hat{t}+1)}\right]}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial \hat{t}}{\partial k}\right) = \frac{\left(\left[\frac{\partial s(\hat{t})}{\partial \hat{t}}\frac{\partial \hat{t}}{\partial n}\frac{1}{k^2}\right]\left[\frac{\partial s(\hat{t})}{\partial \hat{t}}\frac{1}{k} - \frac{\delta}{n}\frac{\partial s(\hat{t}+1)}{\partial(\hat{t}+1)}\right]\right) - \left(\frac{s(\hat{t})}{k^2}\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{\partial s(\hat{t})}{\partial \hat{t}}\frac{1}{k} - \frac{\delta}{n}\frac{\partial s(\hat{t}+1)}{\partial(\hat{t}+1)}\right]\right)}{\left[\frac{\partial s(\hat{t})}{\partial \hat{t}}\frac{1}{k} - \frac{\delta}{n}\frac{\partial s(\hat{t}+1)}{\partial(\hat{t}+1)}\right]^2} \tag{11}$$

donde se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{\partial s(\hat{t})}{\partial \hat{t}}\frac{1}{k} - \frac{\delta}{n}\frac{\partial s(\hat{t}+1)}{\partial(\hat{t}+1)}\right] = \frac{1}{k}\underbrace{\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{\partial s(\hat{t})}{\partial \hat{t}}\right]}_{=0} - \left(-\frac{\delta}{n^2}\underbrace{\frac{\partial s(\hat{t}+1)}{\partial(\hat{t}+1)}}_{>0} + \frac{\delta}{n}\underbrace{\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{\partial s(\hat{t}+1)}{\partial(\hat{t}+1)}\right]}_{=0}\right) > 0$$

Luego, el signo de (11) será:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial \hat{t}}{\partial k}\right) = \frac{\left(\left[\overbrace{\frac{\partial s(\hat{t})}{\partial \hat{t}}}^{>0}\overbrace{\frac{\partial \hat{t}}{\partial n}}^{<0}\frac{1}{k^2}\right]\overbrace{\left[\frac{\partial s(\hat{t})}{\partial \hat{t}}\frac{1}{k} - \frac{\delta}{n}\frac{\partial s(\hat{t}+1)}{\partial(\hat{t}+1)}\right]}^{>0}\right) - \left(\overbrace{\frac{s(\hat{t})}{k^2}}^{>0}\overbrace{\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{\partial s(\hat{t})}{\partial \hat{t}}\frac{1}{k} - \frac{\delta}{n}\frac{\partial s(\hat{t}+1)}{\partial(\hat{t}+1)}\right]}^{>0}\right)}{\underbrace{\left[\frac{\partial s(\hat{t})}{\partial \hat{t}}\frac{1}{k} - \frac{\delta}{n}\frac{\partial s(\hat{t}+1)}{\partial(\hat{t}+1)}\right]^2}_{>0}} < 0$$

$\square$

Anexo B

Proposición 5 Existe una cantidad de mejoras $\widetilde{e}$ tal que $\forall e \geq \widetilde{e}$ se cumple que

$$\left[\frac{s(\widetilde{e})}{2} - c\right] \geq \delta \left[\frac{s(\widetilde{e}+1)}{2}\right]$$

a partir del periodo donde se cumpla dicha cantidad de mejoras se llegará a acuerdo en Estrategias Puras y el pago de continuación será el de llegar a Equilibrio inmediatamente en Estrategias Puras.

Demostración. Lo primero es mostrar que efectivamente existe un periodo $\widetilde{e}$ que cumple

$$\left[\frac{s(\widetilde{e})}{2} - c\right] \geq \delta \left[\frac{s(\widetilde{e}+1)}{2}\right] \tag{12}$$

Reescribiendo (12) se tiene:

$$s(\widetilde{e}) - 2c \geq \delta s(\widetilde{e}+1) \tag{13}$$

Y multiplicando a ambos lados de (13) por $\delta^{\widetilde{e}}$:

$$\delta^{\widetilde{e}} s(\widetilde{e}) - \delta^{\widetilde{e}} 2c \geq \delta^{\widetilde{e}+1} s(\widetilde{e}+1)$$

es decir,

$$BS(\widetilde{e}) - K(\widetilde{e}) \geq BS(\widetilde{e}+1)$$

reordenando:

$$BS(\widetilde{e}) - BS(\widetilde{e}+1) \geq K(\widetilde{e}) \tag{14}$$

desde donde se puede ver que $BS(\widetilde{e}) - BS(\widetilde{e}+1)$ es una función creciente para $e \geq e^*$, ya que:

$$\frac{\partial}{\partial e}\left(BS(e) - BS(e+1)\right) = \frac{\partial BS(e)}{\partial e} - \frac{\partial BS(e+1)}{\partial e} > 0$$

ya que $\frac{\partial BS(e)}{\partial e} > \frac{\partial BS(e+1)}{\partial e}$ por concavidad de $BS(\cdot)$.

Por otro lado, $K(e)$ es una función decreciente debido a que a medida que aumenta e, disminuye δ^e. Entonces se cumple (14), lo que prueba que para algún $\widetilde{e} \geq e^*$ se cumple (12).

En segundo lugar, se puede ver que restando δc en el lado derecho de (12) se mantiene la desigualdad:

$$\left[\frac{s(\widetilde{e})}{2} - c\right] \geq \delta\left[\frac{s(\widetilde{e}+1)}{2} - c\right] \tag{15}$$

Por último, se debe mostrar que se cumple que efectivamente el valor de continuación $\delta V^E(s(\widetilde{e}))$ corresponde a jugar Estrategia Pura en $\widetilde{e}+1$. Para ello se debe probar que se cumple la condición siguiente en $e+1$:

$$\frac{s(\widetilde{e}+1)}{2} - c \geq \delta V^E(s(\widetilde{e}+1)) \tag{16}$$

lo que significaría que en $\widetilde{e}+1$ no habrían incentivos unilaterales para ningún jugador de desviarse de $\{1, 1\}$.

Para realizar esto, se asumirá que $\delta V^E(s(\widetilde{e}+1))$ puede tomar distintos valores, según lo que pasaría en $e+2$:

1) si en $e+2$ se llega a equilibrio en Etrategias Puras
$\delta V^E(s(\widetilde{e}+1)) = \delta\left[\frac{s(\widetilde{e+2})}{2} - c\right]$
luego, se debe probar que

$$\frac{s(\widetilde{e}+1)}{2} - c \geq \delta\left[\frac{s(\widetilde{e}+2)}{2} - c\right]$$

lo que se cumple siempre para todo $t \geq \widetilde{t}$ según lo mostrado en (15).

2) si en $t+2$ se llega a equilibrio en Estrategias Mixtas

$$\delta V^E(s(\widetilde{e}+1)) = \delta\left[(1-p)(s(e+2) - \delta V^E(s(\widetilde{e}+2)) - c) + p\left(\frac{s(\widetilde{e}+2)}{2} - c\right)\right]$$

para realizar la demostración se usará el cambio de variable $p = 1-q$ y $1-p = q$ (con $q < 1$), por lo que $\delta V^E(s(\widetilde{e}+1))$ se puede escribir como:

$$\delta V^E(s(\widetilde{e}+1)) = \delta\left[\left(\frac{s(\widetilde{e}+2)}{2} - c\right) + q\left(\frac{s(\widetilde{e}+2)}{2} - \delta V^E(s(\widetilde{e}+2))\right)\right]$$

Se sabe que el máximo valor que puede tomar q es 1 y que el máximo valor que puede tomar $\left(\frac{s(\widetilde{e}+2)}{2} - \delta V^E(s(\widetilde{e}+2))\right)$ es c. La razón de lo último es que si es que se juega una Estrategia Mixta en $\widetilde{e}+2$, es porque se cumple:

$$\delta V^E(s(\widetilde{e}+2)) \geq \frac{s(\widetilde{e}+2)}{2} - c$$
$$\Rightarrow c \geq \frac{s(\widetilde{e}+2)}{2} - \delta V^E(s(\widetilde{e}+2))$$

Luego, el máximo valor que puede tomar $\left[\left(\frac{s(\widetilde{e}+2)}{2} - c\right) + q\left(\frac{s(\widetilde{e}+2)}{2} - \delta V^E(s(\widetilde{e}+2))\right)\right]$ es $\delta\left[\frac{s(\widetilde{e}+2)}{2}\right]$. Entonces se tiene que (por la primera parte):

$$\frac{s(\widetilde{e}+1)}{2} - c \geq \delta\left[\frac{s(\widetilde{e}+2)}{2}\right] \geq \delta V^E(s(\widetilde{e}+1))$$

Por lo tanto se comprueba (16), lo que significa que el valor de continuación de $\widetilde{e}$ corresponde a jugar una Estrategia Pura en $\widetilde{e}+1$. Lo que significa que:

$$\delta V^E(s(\widetilde{e})) = \delta\left[\frac{s(\widetilde{e})}{2} - c\right]$$

Además, como se sabe que se cumple (12), se tiene:

$$\frac{s(\widetilde{e})}{2} - c \geq \delta V^E(s(\widetilde{e}))$$

Lo que cumple la condición de querer llegar a acuerdo, es decir que se cumpla $s(\widetilde{e}) - \delta V^E(s(\widetilde{e})) \geq \delta V^E(s(\widetilde{e}))$ o lo que es simétrico $\frac{s(\widetilde{e})}{2} \geq \delta V^E(s(\widetilde{e}))$.

Por lo tanto, para todo periodo $e \geq \widetilde{e}$ se llegará a acuerdo jugando la Estrategia Pura $\{1, 1\}$.

$\square$

Proposición 6 Los valores de continuación son crecientes a medida que se realizan los esfuerzos, es decir, son crecientes en el tiempo.

Demostración. Para mostrar este resultado, primero de debe notar que hay tres tipos de Valores de Continuación de e. El primero es cuando en $e+1$ no habrá detención, el segundo cuando en $e+1$ habrá detención en Estrategias Mixtas y el último cuando en $e+1$ habrá detención utilizando Estrategias Puras.

- Si es que en $e+1$ hay detención usando Estrategias Puras, el valor de continuación toma la siguiente forma:

$$\delta V^E(s(e)) = \delta\left[\frac{s(e+1)}{2} - c\right]$$

el cual es claramente creciente en e dado que $s(\cdot)$ lo es.

- Si es que en $e+1$ hay detención usando Estrategias Mixtas, el valor de continuación toma la siguiente forma:

$$\delta V^E(s(e)) = \delta\left[(1-p)(s(e+1) - \delta V^E(s(e+1)) - c) + p\left(\frac{s(e+1)}{2} - c\right)\right]$$

No obtante, para realizar la demostración se usará el cambio ed variable $p = 1-q$ y $1-p = q$ (con $q < 1$), por lo que $\delta V^E(s(e))$ se puede escribir como:

$$\delta V^E(s(e)) = \delta\left[\left(\frac{s(e+1)}{2} - c\right) + q\left(\frac{s(e+1)}{2} - \delta V^E(s(e+1))\right)\right]$$

$$\delta V^E(s(e)) = \delta\left[\left(\frac{s(e+1)}{2} - c\right) + \left(\frac{\delta V^E(s(e+1)) - \left[\frac{s(e+1)}{2} - c\right]}{\frac{s(e+1)}{2} - \frac{s(e)}{2}}\right)\left(\frac{s(e+1)}{2} - \delta V^E(s(e+1))\right)\right]$$

$$\delta V^E(s(e)) < \delta\left[\left(\frac{s(e+1)}{2} - c\right) + \left(\frac{\delta V^E(s(e+1)) - \left[\frac{s(e+1)}{2} - c\right]}{\frac{s(e+1)}{2} - \frac{s(e)}{2}}\right)\left(\frac{s(e+1)}{2}\right)\right]$$

$$\delta V^E(s(e)) < \delta\left[\left(\frac{s(e+1)}{2} - c\right) + \frac{\frac{s(e+1)}{2}}{\frac{s(e+1)}{2} - \frac{s(e)}{2}}\left(\delta V^E(s(e+1)) - \left[\frac{s(e+1)}{2} - c\right]\right)\right]$$

donde $\lambda = \frac{\frac{s(e+1)}{2}}{\frac{s(e+1)}{2} - \frac{s(e)}{2}} > 1$. Entonces:

$$\delta V^E(s(e)) < \delta\left[\lambda\left(\frac{s(e+1)}{2} - c\right) + \lambda\left(\delta V^E(s(e+1)) - \left[\frac{s(e+1)}{2} - c\right]\right)\right] = \delta\lambda\left[\delta V^E(s(e+1))\right]$$

$$\delta V^E(s(e)) < \delta V^E(s(e+1))$$

lo que muestra que es creciente.

Notar que este desarrollo fue hecho asumiendo que se está en el Caso II. Para el Caso III lo único que cambia es que se tendrá $\lambda = \frac{\frac{s(e+1)}{2}}{\frac{s(e+1)}{2} - \delta V^E(s(e))}$ que también es mayor que 1.

- Si es que en $e+1$ no hay detención, el valor de continuación toma la siguiente forma:

$$\delta V^E(s(e)) = \delta \left[\delta V^E(s(e+1)) - c\right]$$

donde se puede observar que es decreciente, ya que corresponde al valor de continuación menos un término positivo y multiplicado por un término menor que 1, lo que genera que $\delta V^E(s(e)) < \delta V^E(s(e+1))$.

Dado que para cada situación es creciente, entonces es creciente para todo e.

$\square$

Proposición 7 El Perfil de Estrategias de Equilibrio del Modelo General es monótono en hecho de llegar o no a acuerdo, es decir, sea $\hat{e}$ el primer periodo en el que se llega a acuerdo, entonces en todo $e \geq \hat{e}$ se llegará a acuerdo.

Demostración. Para probar este resultado se mostrará que las funciones $\frac{s(e)}{2}$ y $\delta V^E(s(e))$ poseen la propiedad de *single crossing*, es decir se cruzan una sola vez. Para ello lo primero que se debe notar es que ambas son crecientes, por lo tanto lo que se probará que para todo e se tendrá que la pendiente de $\frac{s(e)}{2}$ es mayor que la de $\delta V^E(s(e))$.

Para hacer esto se hará por casos, es decir, se hará la comparación para los distintos valores que puede tomar $\delta V^E(s(e))$.

- Si es que en $e+1$ hay detención en Estrategias Puras, el valor de continuación es:

$$\delta V^E(s(e)) = \delta \left[\frac{s(e+1)}{2} - c\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial e}\left(\delta V^E(s(e))\right) = \delta \frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{s(e+1)}{2}\right)$$

El cual es claramente menor que que $\frac{\partial}{\partial e}\frac{s(e)}{2}$ si es que la función $s(\cdot)$ es convexa o lineal. Para el caso en que $s(\cdot)$ es cóncava también es menor, porque siempre se debe cumplir que $\frac{s(e)}{2} - c > \delta \left[\frac{s(e)}{2} - c\right]$, lo que significa que $s(e) > \delta s(e+1)$, lo que se cumple ssi $s'(e) > \delta s'(e+1)$.

Por lo tanto, para este caso siempre es más creciente $\frac{s(e)}{2}$ que $\delta V^E(s(e))$.

- Si es que en $e+1$ hay detención en Estrategias Mixtas, el valor de continuación es:

$$\delta V^E(s(e)) = \delta \left[(1-p)(s(e+1) - \delta V^E(s(e+1)) - c) + p\left(\frac{s(e+1)}{2} - c\right)\right]$$

No obstante, para realizar la demostración se usará el cambio de variable $p = 1 - q$ y $1 - p = q$ (con $q < 1$), por lo que $\delta V^E(s(e))$ se puede escribir como:

$$\delta V^E(s(e)) = \delta \left[\left(\frac{s(e+1)}{2} - c \right) + q \left(\frac{s(e+1)}{2} - \delta V^E(s(e+1)) \right) \right]$$

Luego

$$\delta V^E(s(e)) = \delta \left[\frac{s(e+1)}{2} - c \right] + q\delta \left[\frac{s(e+1)}{2} - \delta V^E(s(e+1)) \right]$$

Luego basta mostrar que la derivada en función de e de $q\delta \left[\frac{s(e+1)}{2} - \delta V^E(s(e+1)) \right]$ es negativa. Para ello se ve:

$$q\delta \left[\frac{s(e+1)}{2} - \delta V^E(s(e+1)) \right] = \delta \left[\frac{\left(\delta V^E(s(e+1)) - \left[\frac{s(e+1)}{2} - c \right] \right) \left(\frac{s(e+1)}{2} - \delta V^E(s(e+1)) \right)}{\frac{s(e+1)}{2} - \frac{s(e)}{2}} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial e} \left(q\delta \left[\frac{s(e+1)}{2} - \delta V^E(s(e+1)) \right] \right) =$$

$$= \delta \left[\frac{\left[\frac{\partial}{\partial e} \left(\delta V^E(s(e+1)) \right) - \frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{s(e+1)}{2} \right) \right] c \left(\frac{s(e+1)}{2} - \frac{s(e)}{2} \right)}{\left[\frac{s(e+1)}{2} - \frac{s(e)}{2} \right]^2} \right]$$

$$-\delta \left[\frac{\left[\frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{s(e+1)}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{s(e)}{2} \right) \right] \left[\left(\delta V^E(s(e+1)) - \left[\frac{s(e+1)}{2} - c \right] \right) \left(\frac{s(e+1)}{2} - \delta V^E(s(e+1)) \right) \right]}{\left[\frac{s(e+1)}{2} - \frac{s(t)}{2} \right]^2} \right]$$

$$= \delta \left[\left(\frac{\partial}{\partial e} \left(\delta V^E(s(e+1)) \right) - \frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{s(e+1)}{2} \right) \right) \left(\frac{c}{\frac{s(e+1)}{2} - \frac{s(e)}{2}} \right) \right]$$

$$-\delta \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{s(e+1)}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{s(e)}{2} \right) \right) \left(\frac{\delta V^E(s(e+1)) - \left[\frac{s(e+1)}{2} - c \right]}{\frac{s(e+1)}{2} - \frac{s(e)}{2}} \right) \left(\frac{\frac{s(e+1)}{2} - \delta V^E(s(e+1))}{\frac{s(e+1)}{2} - \frac{s(e)}{2}} \right) \right]$$

Notar que para funciones $s(e)$ lineales o convexas se cumple que $\left(\frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{s(e+1)}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{s(e)}{2} \right) \right)$ es positivo, por lo tanto el término completo sería negativo. Si $s(e)$ es cóncava se ve que $\left(\frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{s(e+1)}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{s(e)}{2} \right) \right)$ es negativo, no obstante el término completo sigue siendo menor que cero, porque se ve que:

- $\delta V^E(s(e+1)) - \left[\frac{s(e+1)}{2} - c \right] < c$, porque si no fuese así se tendría que $\delta V^E(s(e+1)) - \left[\frac{s(e+1)}{2} - c \right] > c$ lo que significa que $\delta V^E(s(e+1)) > \frac{s(e+1)}{2}$, lo que no puede ser porque se llega a acuerdo en $e+1$.

- $\frac{s(e+1)}{2} - \delta V^E(s(e+1)) < c$, porque si no fuese así se tendría que $\frac{s(e+1)}{2} - \delta V^E(s(e+1)) > c$ lo que significa que $\delta V^E(s(e+1)) < \frac{s(e+1)}{2} - c$, lo que no puede ser porque se llega a acuerdo en $e+1$ en Estrategias Mixtas.

Entonces, se tiene que:

$$\frac{c}{\frac{s(e+1)}{2} - \frac{s(e)}{2}} > \frac{\delta V^E(s(e+1)) - \left[\frac{s(e+1)}{2} - c\right]}{\frac{s(e+1)}{2} - \frac{s(e)}{2}}$$

y

$$\frac{c}{\frac{s(e+1)}{2} - \frac{s(e)}{2}} > \frac{\frac{s(e+1)}{2} - \delta V^E(s(e+1))}{\frac{s(e+1)}{2} - \frac{s(e)}{2}}$$

Por lo tanto,

$$\frac{c}{\frac{s(e+1)}{2} - \frac{s(e)}{2}} > \left(\frac{\delta V^E(s(e+1)) - \left[\frac{s(e+1)}{2} - c\right]}{\frac{s(e+1)}{2} - \frac{s(e)}{2}}\right)\left(\frac{\frac{s(e+1)}{2} - \delta V^E(s(e+1))}{\frac{s(e+1)}{2} - \frac{s(e)}{2}}\right)$$

ya que ambos términos son menores que 1. Además, se ve que:

$$\frac{\partial}{\partial e}\left(\delta V^E(s(e+1))\right) - \frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{s(e+1)}{2}\right) < \frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{s(e+1)}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{s(e)}{2}\right)$$

Lo que muestra que para el caso en que en $e+1$ se llega a acuerdo en Estrategias Mixtas siempre será $\frac{s(e)}{2}$ más creciente que $\delta V^E(s(e))$.

- Finalmente, si en el periodo $e+1$ no se desea llegar a acuerdo se tendrá que:

$$\delta V^E(s(e)) = \delta[\delta V^E(s(e+1)) - c]$$

$$\frac{\partial}{\partial e}\left(\delta V^E(s(e))\right) = \delta \frac{\partial}{\partial e}\left(\delta V^E(s(e+1))\right)$$

lo que significa que se cumple $\frac{\partial}{\partial e}\left(\delta V^E(s(e))\right) < \frac{\partial}{\partial e}\left(\delta V^E(s(e+1))\right)$, esto quiere decir que a medida que no se llegue a acuerdo en $e+1$ se tendrá una pendiente creciente en e, que puede llegar hasta el punto en que se llegue a acuerdo, sea en Puras o Mixta. En otras palabra, en e se tiene una pendiente menor que cuando se llega a acuerdo, por lo que se tendrá que se cumplirá que la pendiente de $\frac{s(e)}{2}$ es mayor que la de $\delta V^E(s(e))$.

Con esto, se concluye que para todo e la pendiente de $\frac{s(e)}{2}$ es mayor que la de $\delta V^E(s(e))$. La traducción de esto es que a lo más las curvas se intersectan una vez, por lo que sería monótono el llegar a acuerdo, es decir, desde que se llega a acuerdo la primera vez, siempre se hará.

$\square$

Proposición 8 Si es que existe fase de *construcción*, entonces para el **Caso II**, la Estrategia $\{0,0\}$ nunca será Equilibrio de Nash.

Demostración. Dado que existe periodo de *construcción*, significa que en algún momento se jugará el **Caso III**, es decir, se jugará una Estrategia estrictamente Mixta. Debido a la **Proposición 6** y al **Teorema 2**, se sabe que en los periodos siguientes solo se podrán jugar Estrategias Mixtas o Pura $\{1,1\}$.

$\square$

Proposición 9 El Perfil de Estrategias de Equilibrio del Modelo General es monótono en el tipo de Estrategias utilizadas en la fase de acuerdo. Es decir, si existe fase de construcción, entonces, considerando $\hat{e}$ el primer periodo en el que se llega a acuerdo y e' el primer periodo que se juega Estrategias Puras, luego en todo $e \in [\hat{e}, e'-1]$ el equilibrio es en Estrategias Mixtas y en todo $e \geq e'$ el equilibrio se alcanza es Estrategias Puras. Por otro lado, si no existe fase de acuerdo, considerando $\hat{e}$ como el primer periodo en que se juega Estrategia Mixta y e' el primer periodo que se juega Estrategias Puras, luego en todo $e \in [0, \hat{e}-1]$ se juega Estrategias Puras $\{0,0\}$, en $e \in [\hat{e}, e'-1]$ el equilibrio es en Estrategias Mixtas y en todo $e \geq e'$ el equilibrio se alcanza es Estrategias Puras $\{1,1\}$.

Demostración. Para el caso en que existe fase de *crecimiento*, basta notar que gracias al **Teorema 1** se sabe que $\frac{s(e)}{2}$ y $\delta V(s(e))$ se van alejando a medida que e aumenta, por lo tanto basta notar que $\frac{s(e)}{2} - c$ y $\delta V(s(e))$ se cruzaran a lo más una vez y luego comenzarán a aumentar su diferencia. Luego, primero se llegará a acuerdo en Estrategias Mixtas y después en Estrategias Puras.

Notar además que siempre existirá acuerdo en Estrategias Puras, no obstante la existencia de Estrategias Mixtas depende de las funciones del problema.

Por otro lado, para el caso que no existen fase de *crecimiento*, se puede ver que la condición que se debe cumplir para la existencia de Equilibrio de Nash $\{0,0\}$ es $\frac{s(e-1)}{2} > s(e) - \delta^E V(s(e)) - c$, es decir, $\delta^E V(s(e)) > \left[s(e) - \frac{s(e-1)}{2}\right] - c$. De aquí se puede ver que $\left[s(e) - \frac{s(e-1)}{2}\right] - c > \frac{s(e)}{2} - c$, lo que significa que la primera expresión corta a la curva $\delta^E V(s(e))$ antes que la segunda expresión.

$\square$

Teorema 2 Para los periodos en que se juega Estrategias Mixtas, es decir, $\forall e \in [0, e'-1]$ se cumple que p_i es creciente en los esfuerzos realizados, es decir, es creciente en el tiempo.

Demostración. Directo de las Proposiciones 6 y 8. $\square$

Teorema 3 Para los periodos en que se juega Estrategias Mixtas, es decir, $\forall e \in [0, e' - 1]$ se cumple que p_i es creciente en los esfuerzos realizados, es decir, es creciente en el tiempo.

Demostración. Primero se mostrará que para el rango de periodos en que no se desea llegar a acuerdo, es creciente. Para ello notar que la probabilidad de aportar es:

$$p = 1 - \frac{c}{\delta V^E(s(e)) - \delta V^E(s(e-1))} = 1 - \frac{c}{\delta V^E(s(e)) - \delta(\delta V^E(s(e)) - c)}$$

$$p = 1 - \frac{c}{\delta V^E(s(e))(1-\delta) - \delta c}$$

Dado que $\delta V^E(s(e))$ es creciente, el denominador será creciente, por lo tanto $\frac{c}{\delta V^E(s(e))(1-\delta)-\delta c)}$ será decreciente y, por último, p es creciente.

Ahora se mostrará que para el rango en que se desea llegar a acuerdo es creciente también. Se debe notar que existe una diferencia entre el primer periodo $\hat{e}$ y el resto, por lo que se partirá con el resto.

Primero se debe notar que la probabilidad de aportar para el rango $[\hat{e}+1, e'-1]$, es decir, el rango entre el segundo periodo en que se quiere llegar a acuerdo y se juega mixta y el último, es:

$$p = \frac{\left[s(e) - \delta V^E(s(e)) - c\right] - \left[\frac{s(e-1)}{2}\right]}{\frac{s(e)}{2} - \frac{s(e-1)}{2}}$$

Para mostrar que es creciente en el tiempo se mostrará que la pendiente del numerador es mayor que la del denominador, es decir, o que el numerador aumenta y el denominador decrece, o que ambos aumentan o que ambos decrecen. En cualquier caso al ser la pendiente del numerador mayor que la del denominador, se tendrá que p es creciente.

Al derivar el numerador se obtiene:

$$\frac{\partial s(e)}{\partial e} - \frac{\partial}{\partial e}\delta V^E(s(e)) - \frac{\partial}{\partial e}\frac{s(e-1)}{2}$$

mientras que al derivar el denominador se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial e}\frac{s(e)}{2} - \frac{\partial}{\partial e}\frac{s(e-1)}{2}$$

Se puede ver que dado que $\frac{\partial}{\partial e}\frac{s(e)}{2} > \frac{\partial}{\partial e}\delta V^E(s(e))$, el numerador será mayor que el denominador.

Ahora se debe comprobar que incluyendo el periodo $\hat{e}$ también se tiene que es creciente. Para ello se usará la probabilidad de no aportar $(1-p)$, y se mostrará que decrece, es decirse probara que $(1-p_{\hat{e}}) > (1-p_{\hat{e}+1})$. Para esto basta notar que:

$$(1-p_{\hat{e}}) = \frac{\delta V^E(s(\hat{e})) - \left[\frac{s(\hat{e})}{2} - c\right]}{\frac{s(\hat{e})}{2} - \delta V^E(s(\hat{e}-1))} > \frac{\delta V^E(s(\hat{e})) - \left[\frac{s(\hat{e})}{2} - c\right]}{\frac{s(\hat{e})}{2} - \frac{s(\hat{e}-1)}{2}}$$

ya que en $\hat{e}-1$ se tiene que $\delta V^E(s(\hat{e}-1)) > \frac{s(\hat{e}-1)}{2}$, ya que si no fuese así habría detención en $\hat{e}-1$. Luego, se sabe que:

$$\frac{\delta V^E(s(\hat{e})) - \left[\frac{s(\hat{e})}{2} - c\right]}{\frac{s(\hat{e})}{2} - \frac{s(\hat{e}-1)}{2}} > \frac{\delta V^E(s(\hat{e}+1)) - \left[\frac{s(\hat{e}+1)}{2} - c\right]}{\frac{s(\hat{e}+1)}{2} - \frac{s(\hat{e})}{2}}$$

por lo que se tiene que $(1-p_{\hat{e}}) > (1-p_{\hat{e}+1})$.

$\square$

Teorema 4 La primera vez que se llega a acuerdo ocurre antes del Óptimo Social.

Demostración. Notar que el Óptimo Social indica que solo un jugador debe ejercer esfuerzo en cada periodo. Sin pérdida de generalidad se asumirá que es el mismo jugador (Agente i) todas la veces. Con ello se sabe que en el momento de la primera detención se estará en el Óptimo Social.

El primer momento en que se desea llegar a acuerdo es cuando el *pago de hoy* (en t) es mayor al de $t+1$, es decir,

$$s(t) - \delta V_j^E(s(t)) \geq \delta V_i^E(s(t))$$

es decir,

$$s(t) - \delta V_j^E(s(t)) \geq \delta\left[s(t+1) - \delta V_j^E(s(t+1)) - c\right]$$

pero notar que para j se tiene $\delta V_j^E(s(t)) = \delta\left[\delta V_j^E(s(t+1))\right]$, entonces:

$$s(t) - \delta\left[\delta V_j^E(s(t+1))\right] \geq \delta\left[s(t+1) - \delta V_j^E(s(t+1)) - c\right]$$

$$s(t) \geq \delta\left[s(t+1) - c\right]$$

Entonces, el Óptimo Social se alcanza en el primer periodo en que se cumple:

$$s(t) \geq \delta\left[s(t+1) - c\right]$$

Por otro lado, el primer periodo en que se llega a acuerdo en el Modelo General es:

$$\frac{s(t)}{2} \geq \delta\left[(1-p)(s(t+1) - \delta V^E(s(t+1)) - c) + p\left(\frac{s(t+1)}{2} - c\right)\right]$$

No obstante, para realizar la demostración se usará el cambio de variable $p = 1-q$ y $1-p = q$ (con $q < 1$), por lo que la ecuación de recién se puede escribir como:

$$\frac{s(t)}{2} \geq \delta\left[\left(\frac{s(t+1)}{2} - c\right) + q\left(\frac{s(t+1)}{2} - \delta V^E(s(t+1))\right)\right]$$

o equivalentemente:

$$s(t) \geq \delta\left[s(t+1) - 2c + 2\varphi\right]$$

donde $\varphi = q\left(\frac{s(t+1)}{2} - \delta V^E(s(t+1))\right)$. Se debe notar además que $\varphi < \frac{c}{2}$ debido a que en $t+1$ se llega a acuerdo en Estrategias Mixtas. Luego,

$$s(t) \geq \delta\left[s(t+1) - \xi\right]$$

donde ξ es mayor que c. Lo que significa que las curvas $s(t)$ y $\delta\left[s(t+1) - \xi\right]$ se intersectan antes que $s(t)$ y $\delta\left[s(t+1) - c\right]$, por lo tanto, la detención ocurre antes que el Óptimo Social.

Nota: la razón de que φ es menor que $\frac{c}{2}$ es que φ es:

$$\varphi = \left(\frac{c}{\frac{s(t+1)}{2} - \delta V(s(t))} - \frac{\frac{s(t+1)}{2} - \delta V^E(s(t+1))}{\frac{s(t+1)}{2} - \delta V(s(t))}\right)\left(\frac{s(t+1)}{2} - \delta V^E(s(t+1))\right)$$

lo que se puede escribir como:

$$\varphi = \left(\frac{c}{B} - \frac{A}{B}\right) A$$

donde:

$$\begin{aligned} A &= \frac{s(t+1)}{2} - \delta V^E(s(t+1)) < c \\ B &= \frac{s(t+1)}{2} - \delta V(s(t)) > c \end{aligned}$$

Luego, suponiendo que el valor de A que se tiene es el que maximiza el valor de φ, el cual corresponde a:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial A} = \frac{c}{B} - 2\frac{A}{B}$$

tomando CPO se obtiene $A = \frac{c}{2}$. Luego, el máximo valor que puede tomar φ es:

$$\varphi^* = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \frac{1}{B}$$

pero como $B > c$, se tendrá que:

$$\varphi^* = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \frac{1}{B} < \frac{c}{2}$$

$\square$