



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

COEXISTENCIA Y CASCADAS DE BIFURCACIONES EN UNA FAMILIA DE
SISTEMAS DE PARTÍCULAS CAÓTICOS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN GESTIÓN DE OPERACIONES
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO.

LUIS MAXIMILIANO FREDES CARRASCO

PROFESOR GUÍA:
DANIEL REMENIK ZISIS

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JOAQUÍN FONTBONA TORRES
FERNANDO ORDOÑEZ PIZARRO
MICHAEL SCHRAUDNER

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por CONICYT.

SANTIAGO DE CHILE
MARZO 2015

RESUMEN DE LA TESIS
PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN GESTIÓN DE OPERACIONES
RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: LUIS FREDES CARRASCO
FECHA: 13/02/2015
PROF. GUÍA: DANIEL REMENIK ZISIS.

COEXISTENCIA Y CASCADAS DE BIFURCACIONES EN UNA FAMILIA DE SISTEMAS DE PARTÍCULAS CAÓTICOS

En el presente trabajo se estudian dos sistemas de partículas asumiendo ciertas hipótesis que permiten el cálculo explícito de algunas expresiones. El primer sistema en estudio surge del modelo del votante (VM) y del modelo presentado por Durrett y Remenik en [11] (MM), y tiene por regla de evolución una fusión de las que poseen los sistemas anteriores. Dado que los resultados obtenidos sobre este primer sistema son parecidos a los presentados en el paper de Durrett y Remenik ([11]) sobre MM se prosigue, por simplicidad en los cálculos, estudiando éste último y se obtiene: la determinación de una forma analítica para el punto fijo cuando existe, extensión para la muerte de componentes conexas de tamaño finito, extensión para regla de evolución local y extensión a una cantidad finita de especies que comparten el espacio.

El estudio realizado se estructura, para cada sistema, de la siguiente manera: primero se analiza un candidato a límite y se buscan las hipótesis necesarias para que éste lo sea efectivamente, luego se extraen propiedades del límite encontrado y se buscan condiciones sobre las cuales éste, en su evolución temporal, exhibe extinción, convergencia a un punto fijo o caos. En el caso con dos especies, además de las conductas mencionadas anteriormente, se establecen condiciones sobre las cuales hay coexistencia. Además, en el sistema con una especie y muerte de componentes conexas de tamaño finito se exhiben cascadas de bifurcación sobre el sistema límite, hecho que no se presenta para la muerte de componentes conexas de tamaño infinito. La ocurrencia de las cascadas de bifurcación no pudo ser demostrada, dada la dificultad algebraica de las expresiones, pero se presentan argumentos que sugieren que éstas se verifican. Finalmente, con esta metodología se permite describir completamente el diagrama de fase para el sistema con una especie y parcialmente para el de dos especies, conjeturando el comportamiento sobre algunas zonas.

Agradecimientos

Primero que todo me gustaría agradecer a mi familia por todo el apoyo, cariño y valores que me han entregado. A mi padre y madre, por demostrarme que el trabajo dignifica y por siempre darme las herramientas para estudiar, a mi hermana, por siempre ser un apoyo en todo sentido, y a Dani, por poder contar contigo para cualquier cosa y por potenciarme en todo sentido.

A los profesores Daniel Remenik, Joaquín Fontbona, Michael Schraudner y Fernando Ordoñez muchas gracias por todo el tiempo, apoyo y consejos que me han dado en este tiempo, ha sido un verdadero agrado conocerlos.

No puedo dejar de agradecer a mis amigos; en particular, a Nicolás Sanhueza y Rodolfo Gutierrez, por la guía que me dieron para poder realizar esta tesis; a Avelio Sepulveda por toda la atención puesta en mis postulaciones al extranjero, y en general: a mis amigos de infancia, universidad y colegio. Creo que la sangre no significa nada sin retroalimentación, por ende, a los que considero mi verdadera familia son ustedes.

Quiero agradecer a los profesores y funcionarios del DIM y MGO por la excelente labor que realizan.

Finalmente, agradezco a CONICYT por el financiamiento otorgado para realizar este trabajo.

Tabla de Contenido

Introducción	1
1. Preliminares	4
1.1. Grafos	4
1.2. Sistemas de Partículas	5
1.3. Sistemas Dinámicos	6
1.4. Proceso <i>MM</i>	10
1.5. Función <i>W</i> de Lambert	11
2. Modelo del Votante Modificado	13
2.1. Distribución de $ C_0 $	23
2.2. Extensión de <i>MVM</i> en base a la distribución de $ C_0 $	27
2.2.1. Extinción de la tendencia moda	32
3. Extensiones a <i>MM</i>	39
3.1. Punto Fijo de $f_\beta(p)$	39
3.2. Extensión para $\alpha_N \rightarrow \alpha > 0$	40
3.2.1. Extinción	41
3.3. Extensión a $\mathcal{N}_N(x) = B(i, r_N)$	43
3.4. Extensión con más de un tipo de ocupación	52
3.4.1. Propiedades del sistema h_{β_1, β_2}	65
4. Discusiones	72
4.1. Cascada de bifurcaciones en <i>MM</i>	72
4.1.1. Consecuencias	81
4.2. Coexistencia para dos especies	81
4.3. Comparación con simulaciones	83
4.4. Resumen de los resultados	83
Conclusión	85
Anexo	91
Bibliografía	99

Índice de figuras

1.1.	Gráfico de Cobweb asociado a $4(0.125 + (p - 0.5)^3)$	8
1.2.	Diagrama de Bifurcaciones de la familia logística	9
1.3.	Diagrama de Bifurcaciones MM para $\alpha_N \rightarrow 0$	12
2.1.	Diagrama de Bifurcaciones MVM para $\alpha_N \rightarrow 0$	20
2.2.	Gráfico de Cobweb asociado a $h_{\beta,\alpha}$	37
2.3.	Diagrama de Bifurcaciones MVM para $\alpha = 0.01$	38
3.1.	Gráfico de Cobweb asociado a f_β	41
3.2.	Gráfico de Cobweb asociado a $h_{\beta,\alpha}$	43
4.1.	Gráfico explicativo de la demostración de la proposición 4.15	75
4.2.	Renormalización de máximo menor que 1.	75
4.3.	$R_\beta^{f_\alpha}$ que excede 1.	76
4.4.	Gráfico de una $h_{\beta,0.01}$ que posee renormalización con 1 como máximo.	77
4.5.	Gráfico de la renormalización asociada a fig. 4.4.	77
4.6.	Gráfico de una $h_{\beta,0.5}$ que posee renormalización con 1 como máximo.	78
4.7.	Gráfico de la renormalización asociada a fig. 4.6	78
4.8.	Gráfico segunda iterada de la renormalización para $\alpha = 0.01$	79
4.9.	Gráfico tercera iterada de la renormalización para $\alpha = 0.01$	79
4.10.	Gráfico segunda iterada de la renormalización para $\alpha = 0.5$	80
4.11.	Gráfico tercera iterada de la renormalización para $\alpha = 0.5$	80
4.12.	Diagrama de Bifurcaciones MM para $\alpha = 0.1$	82
4.13.	Diagrama de bifurcaciones. Dos especies con $\beta_1 = 4 \log(2)$	83
4.14.	Diagrama de bifurcaciones 2. Dos especies con $\beta_1 = 4 \log(2)$	84
4.15.	Diagrama de bifurcaciones. Dos especies con $\beta_1 = 1.99 \log(2)$	84
4.16.	Diagrama de bifurcaciones 2. Dos especies con $\beta_1 = 1.99 \log(2)$	85
4.17.	Diagrama de bifurcaciones. Dos especies con $\beta_1 = 1.2$	85
4.18.	Diagrama de bifurcaciones. Dos especies con $\beta_1 = 1.3$	86
4.19.	Diagrama de bifurcaciones de la primera especie con $\beta_1 = 5 \log(2)$	86
4.20.	Diagrama de bifurcaciones de la segunda especie con $\beta_1 = 5 \log(2)$	87
4.21.	Diagrama de bifurcaciones de la suma de las especies con $\beta_1 = 5 \log(2)$	87
4.22.	Diagrama de bifurcaciones del proceso con 10000 nodos.	88
4.23.	Diagrama de bifurcaciones del proceso con una cantidad de nodos entre 20000 y 100000.	88
4.24.	Diagrama de bifurcaciones $h_{\beta,0.1}$	89
4.25.	Gráfica resumen del comportamiento del sistema $h_{\beta,\alpha}$	89

4.26. Segunda gráfica resumen del comportamiento del sistema $h_{\beta,\alpha}$	90
4.27. Gráfica resumen del comportamiento del sistema h_{β_1,β_2}	90

Introducción

En la actualidad es de gran interés conocer ciertos comportamientos que ocurren en sistemas donde agentes interactúan y para obtener propiedades de estos, utilizando la matemática como herramienta principal, se busca un modelo que logre rescatar estas interacciones; dentro de estos se encuentran los sistemas de partículas. Los sistemas de partículas, algunas veces llamados sistemas interactivos de partículas, nacen a finales de la década de los 60's, sus primeros precursores fueron Frank Spitzer en Estados Unidos y Roland Lvovich Dobrushin en Unión Soviética, y se crean con el objetivo de describir y analizar la evolución temporal de modelos estocásticos asociados a la mecánica estadística; entre otras cosas, se esperaba que este tipo de sistemas llevara a un mejor entendimiento del fenómeno de transición de fase. Con el paso del tiempo quedó claro que este tipo de modelamiento posee una estructura matemática que puede ser utilizada en otros contextos, por ejemplo, el seguimiento de las densidades de especies que viven en el mismo hábitat en base a un recurso limitado en el contexto del estudio de ecosistemas, o como lo son las preferencias personales en el caso de los comportamientos sociales.

Dos modelos que vale la pena mencionar, ya que fueron utilizados para este trabajo, son el modelo del votante y un sistema que modela la población de un tipo de polillas introducido por Durrett y Remenik. El modelo del votante fue introducido por Clifford y Sudbury (1973) con una interpretación de invasión y por Holley y Liggett (1975) para votantes en una elección. Este último enfoque consiste en un grupo de gente que puede sostener dos posturas políticas y cada agente espera un tiempo aleatorio que se distribuye como una variable exponencial de parámetro fijo para elegir a un vecino y copiarle la tendencia política (como se explica en [8]).

El modelo introducido por Durrett y Remenik en [11] trata de modelar un tipo de polillas (gypsy moth) con una generación cada un año y con la cualidad de que sus larvas se incuban por aproximadamente 9 meses para en el tiempo restante terminar de crecer y se reproducirse. El modelo consiste en una fase de crecimiento, que representa las larvas que deja por descendencia cada polilla, y una de epidemia, en donde cada larva es atacada con una probabilidad fija mientras que ésta se incubaba. Una vez que una larva es atacada, ésta contagia a las larvas vecinas, luego éstas contagian a sus vecinas y así sucesivamente; consiguiendo finalmente acabar con el conglomerado de larvas donde ella es efectiva. En el paper de Durrett y Remenik [11] el objeto en estudio se enfoca en el ataque de la infección cuando la probabilidad de contagio tiende a cero, lo que propone que la infección en el límite de la evolución sólo ataca a grupos de sitios ocupados por larvas de tamaño infinito.

La motivación de este trabajo surge de la fusión de las dos reglas de evolución asociadas a los sistemas de partículas mencionados anteriormente, en su forma a tiempo discreto, con la intención de explicar el comportamiento de las personas. El nuevo modelo consiste en una fase de crecimiento y una de epidemia, al igual que el modelo de las polillas, pero con una diferencia en la fase de crecimiento.

La fase de crecimiento del nuevo modelo tiene una interpretación parecida a la del modelo del votante, en ésta se utilizan dos posturas políticas $\{0, 1\}$ con una de ellas (1) moda dentro de las preferencias; luego, en esta fase, cada individuo elige aleatoriamente a otro para copiar su preferencia, pero si una persona que tiene la tendencia moda (1) elige a alguien que no posee la preferencia moda (0) para copiarle, éste con cierta probabilidad retiene la postura (1).

Para la etapa de epidemia, se puede pensar que es una etapa de crecimiento de la postura política que no es moda, ya que ésta ataca con cierta probabilidad a la tendencia moda haciendo cambiar de parecer a conglomerados — se puede pensar que la gente traspasa su nueva postura a sus cercanos, haciendo que ellos cambien de parecer—; al igual que el modelo de las polillas, esto representa hechos puntuales en los que una campaña política genera adeptos a su tendencia, como lo son: debates presidenciales, controversias políticas, destape de fraudes de la tendencia moda (1) por parte de la tendencia que no es la mayoritaria (0), entre otros.

Al finalizar el proceso de epidemia, los individuos son reordenados en los sitios aleatoriamente, para luego volver con una etapa de crecimiento, epidemia y reordenamiento; e iterar éstas tres en el mismo orden. El fundamento de este reordenamiento representa un gran paso de tiempo entre cada etapa de crecimiento, pues la gente cambia tanto el lugar donde vive, como las amistades; esto se ve reflejado en el modelo ya que tanto los individuos como sus vecinos cambian de posición en el grafo. Este procedimiento es necesario, pues la densidad de gente que posee una preferencia, vista como proceso estocástico, pasa a ser una cadena de Markov si los individuos son reordenados al final de la fase de epidemia; en caso contrario, la posible retención de la tendencia moda (1) genera que el proceso no sólo dependa del instante anterior.

El interés principal sobre el modelo es saber si la tendencia moda, al hacer evolucionar el sistema, en algún momento desaparece o vive siempre, y en caso de que la tendencia viva siempre, describir el comportamiento de las densidades. Es necesario recalcar que dado el procedimiento de evolución una vez que una tendencia muere no vuelve a existir; además, es importante ver en qué casos la regla de evolución puede ser modificada de modo de obtener resultados más realistas, como por ejemplo, un copio aleatorio dentro de una vecindad del sitio.

La interpretación utilizada para presentar el modelo puede ser modificada con el fin de ser aplicada a otros contextos que posean una tendencia moda y una tendencia que compita por no desaparecer o incluso ganar la posición de ser la preferencia moda; en el caso que sea un grupo de tendencias se puede hacer una agregación de ellas y tratarlas como una sola. Ejemplos naturales surgen para este tipo de casos, como lo son: la competencia entre marcas o empresas que provean un mismo tipo de bien o bienes sustitutos, la evolución de especies en un mismo ecosistema mediante métodos de adaptación, entre otros.

El Modelo fusión tuvo una semejanza con el modelo introducido por Durrett y Remenik en el comportamiento de la función de crecimiento y entre ellas la más fácil de trabajar es la del modelo introducido por Durrett y Remenik. En esta tesis algunos de los resultados obtenidos en [11] fueron adaptados y demostrados para el caso del modelo fusión. Esta semejanza entre las funciones de crecimiento y la evidencia de replicabilidad de resultados es la que hace tomar la decisión de seguir trabajando con el modelo presentado por Durrett y Remenik, extendiendo tanto el modelo, como algunos de sus resultados.

El presente trabajo se distribuye como sigue: en el primer capítulo se presentan los conceptos preliminares necesarios para desarrollar lo expuesto en el resto de ésta tesis; le sigue, el segundo capítulo, el cual corresponde a los estudios realizados sobre el proceso fusión, luego, en el tercer capítulo, se muestran algunos resultados y extensiones obtenidos en el modelo de Durrett y Remenik, para finalmente dar paso al cuarto capítulo donde se discuten ciertos comportamientos de los sistemas estudiados y se resumen los resultados obtenidos.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se introducen los tópicos utilizados mediante definiciones, propiedades y teoremas que serán útiles a lo largo del presente estudio.

1.1. Grafos

Definición 1.1 (Grafo) *Se llamará grafo al par ordenado $G = (V, E)$, donde V conjunto cuyos elementos se denominarán vértices y $E \subset \{\{u, v\} : u, v \in V\}$ y se hará referencia a los elementos de E como aristas del grafo.*

Definición 1.2 (Subgrafo, Subgrafo inducido) *Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos grafos. Se dirá que G' es subgrafo de G si se cumple que $V' \subset V$ y $E' \subset E$. Además se dirá que G' es subgrafo inducido de G o G' es el subgrafo inducido en G por V' si $E' \subset E$ contiene todas las aristas $\{x, y\} \in E$ tal que $x, y \in V'$.*

Definición 1.3 (Camino finito, Rayo, Rayo doble, Camino) *Se define un Camino finito como un grafo finito $P = (V, E)$ de la forma*

$$V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \quad E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\}$$

Un rayo es un grafo infinito $G = (V, E)$ de la forma

$$V = \{x_0, x_1, \dots\} \quad E = \{x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3, \dots\}$$

Un rayo doble es un grafo infinito $G = (V, E)$ de la forma

$$V = \{\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots\} \quad E = \{\dots, x_{-2}x_{-1}, x_{-1}x_0, x_0x_1, x_1x_2, \dots\}$$

Para el contexto de grafos finitos, un camino será un camino finito, mientras que para un grafo infinito un camino será un camino finito, un rayo o un doble rayo.

Definición 1.4 (Grafo conexo) *Un grafo G no vacío es llamado conexo si $\forall x, y \in V$ ellos están conectados por un camino en G .*

Definición 1.5 (Componente conexa) *Sea G un grafo. Una componente conexa es un sub-grafo maximal conexo de G . Se denotará por $CC(x)$ para $x \in V$ a la componente conexa de x en G .*

Dentro de las propiedades de ésta última definición se encuentra que cada componente conexa es inducida, y los conjuntos de vértices que las inducen forman una partición de los vértices de G .

Definición 1.6 (Vecinos) *Sea $G = (V, E)$ un grafo. Se define $N_G(x) := \{y \in V : \{x, y\} \in E\}$ conjunto de todos los vecinos de $x \in V$ en G .*

Definición 1.7 (Grafo d -regular) *Sea $G = (V, E)$ un grafo. El grafo G se dirá d -regular si $|N_G(x)| = d \forall x \in V$, i.e, todos los nodos del grafo tienen igual cantidad de vecinos.*

Definición 1.8 (Árbol) *Sea $G = (V, E)$ un grafo es un árbol si contiene sólo una componente conexa y existe sólo un camino entre cada par de nodos. Se llamará hoja a todo $x \in V$ tal que $|N_G(x)| = 1$.*

Definición 1.9 (d -Árbol) *Un grafo $G = (V, E)$ se dirá d -árbol si es un árbol y $|N_G(x)| = d$ para todo nodo del árbol, salvo sus hoja.*

1.2. Sistemas de Partículas

A continuación se presenta una de las herramientas principales utilizadas en este estudio, los sistemas de partículas, como ya se mencionó en la introducción es la herramienta matemática que se utilizará para modelar las interacciones entre agentes.

Definición 1.10 (Sistemas de partículas) *Un sistema de partículas es un proceso estocástico $(X_t)_{t \in T}$, donde T representa un conjunto de tiempos, en un grafo $G = (V, E)$ un grafo infinito o numerable, y un espacio de estados S para cada sitio o nodo de G ; el espacio de configuraciones de este proceso es $\Omega = S^V$.*

Antes de avanzar, se presenta un ejemplo a tiempo continuo y su análogo a tiempo discreto, para fijar la idea presentada anteriormente.

Ejemplo *Modelo del votante a tiempo continuo*

Se considera $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ para $G = (\mathbb{Z}^d, \{\{x, y\} \in V^2 : |x - y| = 1\})$ y posibles estados en un sitio $S = \{0, 1\}$, se denotará como $(\eta_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ al proceso y $\eta_t(x)$ el estado en que se encuentra el sitio $x \in \mathbb{Z}^d$ en el tiempo t . El mecanismo de evolución del sistema considera que para $x \in \mathbb{Z}^d$, $\eta_t(x) \rightarrow 1 - \eta_t(x)$ con tasa

$$\frac{1}{2d} \sum_{y:|y-x|=1} \mathbb{1}_{\{\eta(y) \neq \eta(x)\}}$$

También se puede pensar que cada sitio tiene espera un tiempo aleatorio exponencial de

parámetro 1 y luego copia la tendencia a un vecino elegido aleatoriamente.

Ejemplo *Modelo del votante a tiempo discreto*

Se considera Ω, G, S igual que antes y se denota por $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ al proceso y $\eta_n(x)$ al estado en que se encuentra el sitio $x \in \mathbb{Z}^d$ en la etapa $n \in \mathbb{N}$. El mecanismo para cada $x \in \mathbb{Z}^d$ elige de forma aleatoria $y \in N(x) \subset \mathbb{Z}^d$ y hace

$$\eta_{n+1}(x) = \begin{cases} 0 \rightarrow 1 & \text{si } \eta_n(y) = 1 \\ 1 \rightarrow 0 & \text{si } \eta_n(y) = 0 \end{cases}$$

A continuación se define el sistema de partículas introducido por Durrett y Remenik en [11], por simplicidad en adelante se denotará por **MM** (Moth Model).

Definición 1.11 (MM) *Sea $N \in \mathbb{N}$ fijo, $T = \mathbb{N}$ y cada sitio en un grafo $G_N = (V_N, E_N)$, de N nodos, el cual puede estar ocupado o vacante, i.e, $\Omega = \{0, 1\}^{V_N}$. Se denominará por $(\eta_n^N)_{n \in \mathbb{N}}$ al proceso y $\eta_n^N(x)$, al igual que antes, el estado en que se encuentra el sitio $x \in G_N$ en la etapa n . El cambio que ocurre en el modelo en una unidad de tiempo se explica en dos fases sucesivas: la fase de crecimiento y la fase de epidemia. Es conveniente definir de inmediato $(\eta_{n+\frac{1}{2}}^N)_{n \in \mathbb{N}}$ como el estado de los sitios después de la fase de crecimiento. Para cierto $n \in \mathbb{N}$ la regla de actualización se define como:*

Crecimiento: Si un sitio $x \in G_N$ cumple que $\eta_n^N(x) = 1$, entonces, este sitio elige una cantidad aleatoria $M(x)$ de media $\beta \geq 1$ (cantidad de larvas nacidas en x); para luego elegir M sitios aleatoriamente digamos $SM(x)$ en $\mathcal{N}_N(x) \subset G_N$, la vecindad de crecimiento de x , y cambia su estado $\eta_{n+\frac{1}{2}}^N(y) = 1 \forall y \in SM(x)$.

Epidemia: Por cada sitio $x \in G_N$ se genera una variable aleatoria $B_N(x)$ tal que $B_N(x) = 1$ con una probabilidad pequeña α_N . Para el subgrafo AG_N de G_N , inducido por $AV_N = \{v \in V(G) : \eta_{n+\frac{1}{2}}^N(v) = 1\}$ (Alive Vertices) en G , si en una componente conexa de AG_N existe un nodo x tal que $B_N(x) = 1$ entonces $\eta_{n+1}^N(y) = 0 \forall y \in CC_{AG_N}(x)$ (Esto representa a la muerte de un conglomerado vivo cada vez que la epidemia se hace efectiva para algún sitio de él).

1.3. Sistemas Dinámicos

Los conceptos introducidos en esta sección tienen como referencias a [1] y [6]

Definición 1.12 (Sistema Dinámico) *Un sistema dinámico consiste en un trio (S, T, g) , donde S es un espacio de estados, T es un conjunto de tiempos y $g : S \times T \rightarrow S$ es una regla de evolución del sistema.*

Un sistema dinámico puede ser considerado como un modelo describiendo la evolución temporal de un sistema de forma determinista, ya que una vez fijado donde parte, se define de forma única todo el resto de la evolución.

Definición 1.13 (Regla de evolución a tiempo discreto) *Una regla de evolución a tiempo discreto es un sistema dinámico donde existe $f : S \rightarrow S$ tal que $g(s, n) = f^n(s)$.*

Definición 1.14 (Mapeo, Órbita) *Un mapeo es una función tal que $f : X \rightarrow X$. Para un mapeo y un punto x , la órbita de x bajo f será $(x, f(x), f^2(x), \dots)$.*

Para un mapeo en los reales, es de gran utilidad considerar los gráficos de Cobweb, estos dan un esquema de la órbita que genera un punto. Los pasos para generar este tipo de gráfico se explica en Algoritmo 1

Algoritmo 1 Algoritmo para generar el gráfico de Cobweb partiendo desde x para el mapeo f .

Entrada: $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow X$, $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$

Salida: Gráfico de Cobweb .

- 1: Se grafica el mapeo f y la identidad en el plano Euclideano $X \times X$.
 - 2: Se grafica el segmento vertical que une a $(x, 0)$ con $(x, f(x))$.
 - 3: **Para** $i = 1$ hasta n **hacer**
 - 4: Se dibuja el segmento horizontal que une a $(x, f(x))$ con $(f(x), f(x))$.
 - 5: Se grafica el segmento vertical que une a $(f(x), f(x))$ con $(f(x), f^2(x))$
 - 6: $x \leftarrow f(x)$
 - 7: **Fin Para**
-

Definición 1.15 (Punto fijo, Atractor, Repulsor) *Para $m \in \mathbb{N}$ se considera una función $f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow X$. Un punto fijo $x \in X$ de f , será un punto tal que $f(x) = x$. Si $\exists \varepsilon > 0$, para x punto fijo de f , tal que $\forall v \in B(x, \varepsilon)$ se cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(v) = x$, entonces x se dirá Atractor. Si $\exists \varepsilon > 0$, para x punto fijo de f , tal que $\forall v \in B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}$ eventualmente es mapeado fuera de $B(x, \varepsilon)$ (i.e. los puntos en la órbita de x bajo f viven fuera de $B(x, \varepsilon)$, salvo una cantidad finita), entonces x se dirá Repulsor.*

Teorema 1.16 *Sea f un mapeo en \mathbb{R}^m , y x un punto fijo de f .*

1. *Si cada valor propio de $Df(x)$ es menor que 1, entonces x es atractor.*
2. *Si cada valor propio de $Df(x)$ es mayor que 1, entonces x es repelente.*

Definición 1.17 (Puntos Hiperbólicos, Punto silla) *Sea f un mapeo en \mathbb{R}^m con $m > 1$ y sea x un punto fijo de f , entonces el punto fijo es llamado hiperbólico si ninguno de los valores propios de $Df(x)$ tiene modulo 1. Si x es hiperbólico y al menos un valor propio de $Df(p)$ tiene magnitud mayor que 1 y al menos uno tiene módulo menor que uno, entonces x es llamado punto silla.*

Los puntos silla son puntos inestables, dado que en una vecindad del punto fijo hay al menos una dirección de atracción a él y al menos una de repulsión.

Proposición 1.18 (Ver [1] Proposición 2.3.5) *Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, cerrado, acotado, y $f : I \rightarrow I$ es un mapeo no decreciente continuo, entonces todo $x \in I$ es un punto fijo o converge a un punto fijo.*

Proposición 1.19 (Ver [1] Proposición 2.6.14) *Si X, Y son espacios métricos, X completo y $f : X \times Y \rightarrow X$ es continua tal que $f_y := f(\cdot, y)$ es una λ contracción $\forall y \in Y$, entonces el punto fijo de f_y depende continuamente de y .*

Se presenta un ejemplo que expone lo definido hasta ahora.

Ejemplo Se utiliza la función $f(p) := 4(0.125 + (p - 0.5)^3)$ la que posee tres puntos fijos 0, 0.5, 1 cumpliendo

$$f'(0) = 3, \quad f'(0.5) = 0, \quad f'(1) = 3$$

Luego gracias al teorema 1.16 0 y 1 son repulentes, mientras que 0.5 es atractor. La proposición 1.18 dice que $\forall x \in [0, 1] \setminus \{0, 1\}$ convergen a 0.5 o son 0.5; i.e. la vecindad de atracción es todo el intervalo salvo el resto de puntos fijos. La fig. 1.1 resume y presenta gráficamente esta propiedad.

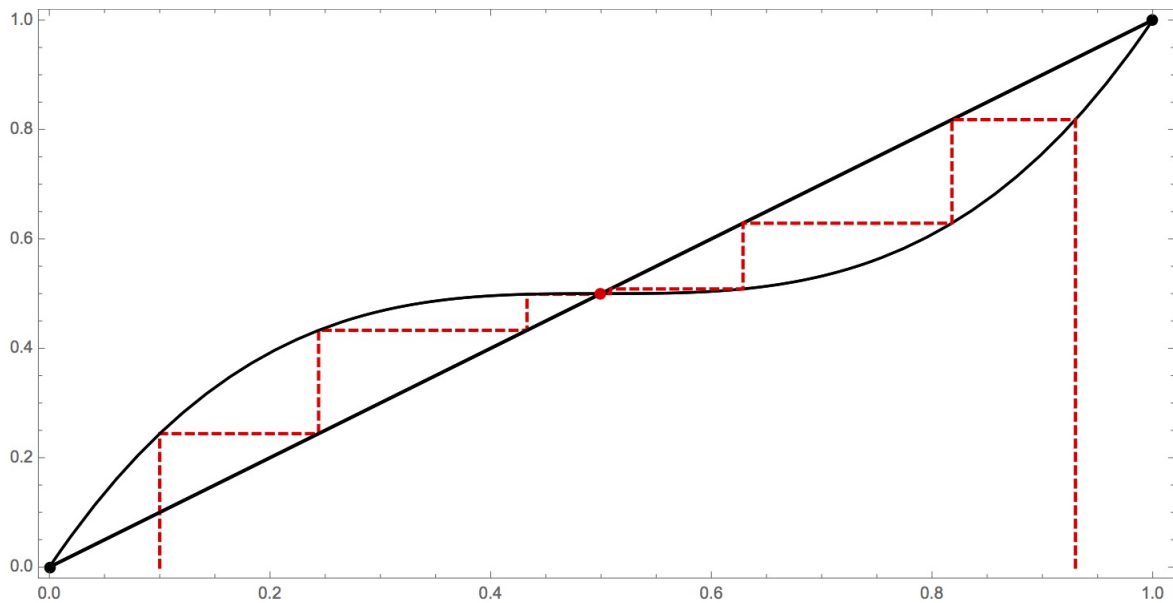


Figura 1.1: Gráfico de Cobweb asociado a $4(0.125 + (p - 0.5)^3)$ partiendo desde los puntos 0.1 y 0.93. Las líneas rojas punteadas son el gráfico de Cobweb de los puntos que van hacia el punto atractor, también en rojo; mientras que los puntos negros son repulsores.

Usando la notación de la definición anterior se puede escribir $s_n = g(s, n) = f^n(s) = f(f^{n-1}(s)) = f(s_{n-1})$. Luego una regla de evolución puede ser pensada como la regla para saber el próximo estado en función al estado actual.

A lo largo de este trabajo se estudió sistemas dinámicos a tiempo discreto (i.e, $T = \mathbb{N}$) siguiendo una regla de evolución y se analizó casos donde el espacio de estados es de la forma $\{0, 1\}^n$ con $n \in \mathbb{N}$.

Para una familia de funciones con respecto a un parámetro $(f_a)_{a \in A \subseteq \mathbb{R}}$ se explica en Algoritmo 2 la construcción del diagrama de bifurcaciones, el cual expone de manera clara el comportamiento del sistema asociado a (S, T, g) , con g ligado a la regla de evolución f_a , a medida que varía el parámetro a .

Algoritmo 2 Diagrama de bifurcaciones de $(f_a)_{a \in A}$

Entrada: $A_d \subset A$ discretización de A , $(f_a, x_0^a \in X) \forall a \in A_d$, cantidad de iteraciones por graficar $n \in \mathbb{N}$, cantidad de iteraciones asociadas a pasar el estado transiente $m \in \mathbb{N}$, $X_a \subseteq X$ rango de ploteo con respecto al eje Y que suponemos contiene a todos los dominios donde está definida la familia $(f_a)_{a \in A_d}$.

Salida: Diagrama de Bifurcaciones.

- 1: Fijar plano Euclideano en $A \times X$
 - 2: **Para** a en A_d **hacer**
 - 3: $x \leftarrow x_0^a$
 - 4: **Para** $i = 1$ hasta m **hacer**
 - 5: $x \leftarrow f(x)$
 - 6: **Fin Para**
 - 7: **Para** $i = 1$ hasta n **hacer**
 - 8: $x \leftarrow f(x)$
 - 9: Graficar (a, x)
 - 10: **Fin Para**
 - 11: **Fin Para**
-

Ejemplo *Familia Logística*

Se define la familia logística $(f_a)_{a \in A}$, donde f_a son funciones asociadas al sistema definido por $x_{n+1} = f_a(x_n) = ax_n(1 - x_n) \forall a \in [0, 4]$. El diagrama de bifurcaciones correspondiente a esta familia se presenta en la fig. 1.2

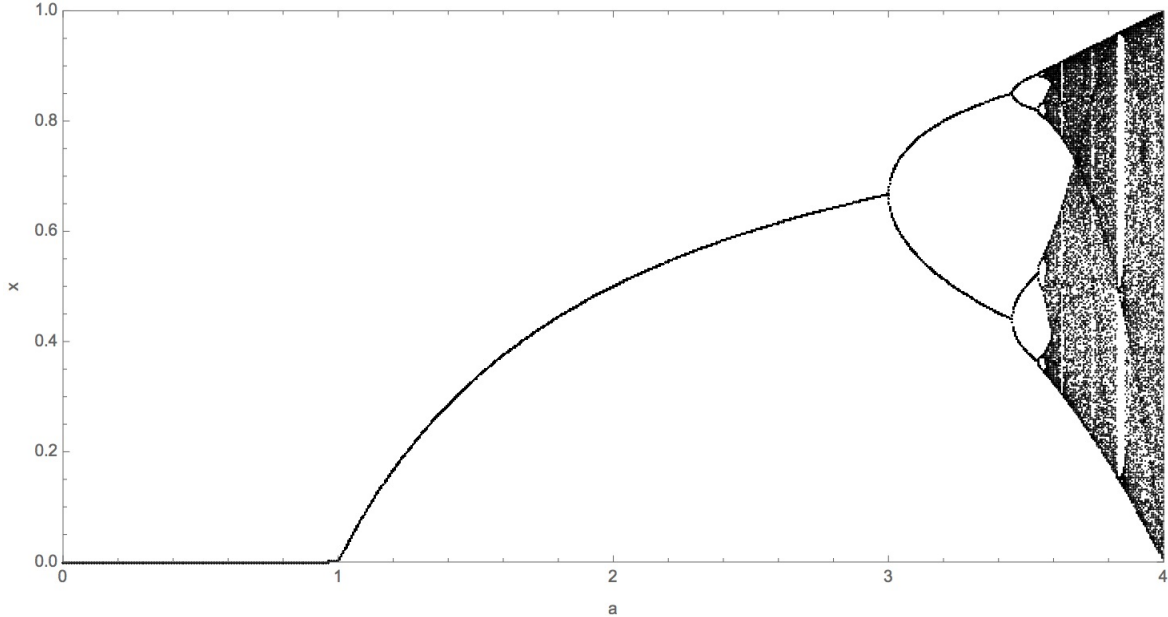


Figura 1.2: Diagrama de Bifurcaciones de la familia logística $f_a(x) = ax(1 - x)$

Definición 1.20 (Caos) *Se dirá que $f : S \rightarrow S$ es caótica si se cumplen las siguientes:*

1. Para todo $k = 1, 2, \dots$, existe un punto en S de periodo k , i.e. un punto x tal que $f^k(x) = x$, y que $f^j(x) \neq x \forall 0 < j < k$.

2. Existe un conjunto no numerable $U \subset J$ que contiene puntos no periódicos tal que se cumplen:

$$(a) \forall p, q \in U, p \neq q$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| > 0$$

y

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| = 0$$

(b) Para todo punto $p \in U$ y todo punto periódico $q \in S$ se tiene que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| > 0$$

Damos con esto paso a un teorema que será necesario para replicar un resultado obtenido en [11].

Teorema 1.21 (Periodo tres implica caos [16]) *Sea $f : S \rightarrow S$ una función continua y $S \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Si $\exists c \in S$ tal que*

$$f^3(c) \leq c < f^1(c) < f^2(c)$$

Entonces la función f es caótica.

1.4. Proceso MM

Los resultados que se presentarán a lo largo de este estudio con respecto al modelo MM requieren algunas propiedades expuestas en [11].

Definición 1.22 (Funciones asociadas a MM) *Se define la función de crecimiento como*

$$f_\beta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$p \rightarrow (1 - e^{-\beta p})$$

También se define la función de epidemia

$$g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$p \rightarrow \begin{cases} p & \text{si } p \leq \frac{1}{2} \\ \frac{(1-p)^3}{p^2} & \text{si } p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Finalmente considerando $a_0 = \frac{\log(2)}{\beta}$ se define

$$h_\beta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$p \rightarrow g(f_\beta(p)) = \begin{cases} (1 - e^{-\beta p}) & \text{si } p \leq a_0 \\ \frac{e^{-3\beta p}}{(1 - e^{-\beta p})^2} & \text{si } p > a_0 \end{cases}$$

Cada una de las funciones definidas anteriormente tienen una interpretación para **MM**. La función $f_\beta(p)$ representa a la densidad esperada de individuos que habrá, luego de la fase de crecimiento, al partir con una densidad p de individuos y donde cada individuo deja una cantidad aleatoria de hijos de media de β ; mientras que g representa la densidad que habrá después de una fase de infección donde sólo se mueren componentes conexas de tamaño infinito. Por consecuencia h_β representa la densidad que habrá ejecutando una fase de crecimiento y luego una fase de epidemia.

Teorema 1.23 *Para el modelo **MM**, si se cumple G_N es un 3- árbol conexo elegido aleatoriamente y*

$$\alpha_N \log_2(N) \rightarrow \infty \quad \wedge \quad \alpha_N \rightarrow 0 \quad \text{Cuando} \quad N \rightarrow \infty$$

Entonces el proceso $(\rho_k^N)_{k \geq 0}$ converge en distribución a la órbita determinista comenzando con p , del sistema dinámico asociado a h_β .

Con esto en mente se considera el sistema dinámico constituido al utilizar h_β como regla de evolución, por lo tanto las siguientes propiedades son inmediatas.

- Si $\beta < 1$ entonces $f(p) < p$, con esto se tiene que $h'_\beta(0) < 1$ y h_β no tiene otro punto fijo— g es decreciente—, i.e. 0 es atractor y es el único punto fijo; luego, $h_\beta^N(p) \rightarrow 0, \forall p \in [0, 1]$.
- $\frac{1}{2}$ es punto fijo de h_β para $\beta = 2 \log(2)$.

Además de esto se expone el siguiente resultado.

Teorema 1.24 *El sistema dinámico definido por la función $h_\beta : [a_1, \frac{1}{2}] \rightarrow [a_1, \frac{1}{2}]$, donde $a_1 = h_\beta(0.5)$*

1. *Es caótico $\forall \beta \geq 2 \log(2)$.*
2. *Si $\beta \in (2 \log(2), 2.48)$. Entonces el sistema tiene una medida invariante , $\mu = \mu \circ h_\beta^{-1}$ la cual es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.*

En la fig. 1.3 se presenta el diagrama de bifurcaciones asociado a este sistema dinámico.

1.5. Función W de Lambert

Para encontrar una expresión analítica explícita para algunos cálculos realizados en este trabajo se utilizó la función W de Lambert, la cual sirve para resolver algunas ecuaciones exponenciales.

Definición 1.25 (Función W de Lambert) *La función W de Lambert, se define como la que resuelve la siguiente ecuación para $x \in \mathbb{C}$*

$$x = W(x)e^{W(x)}$$

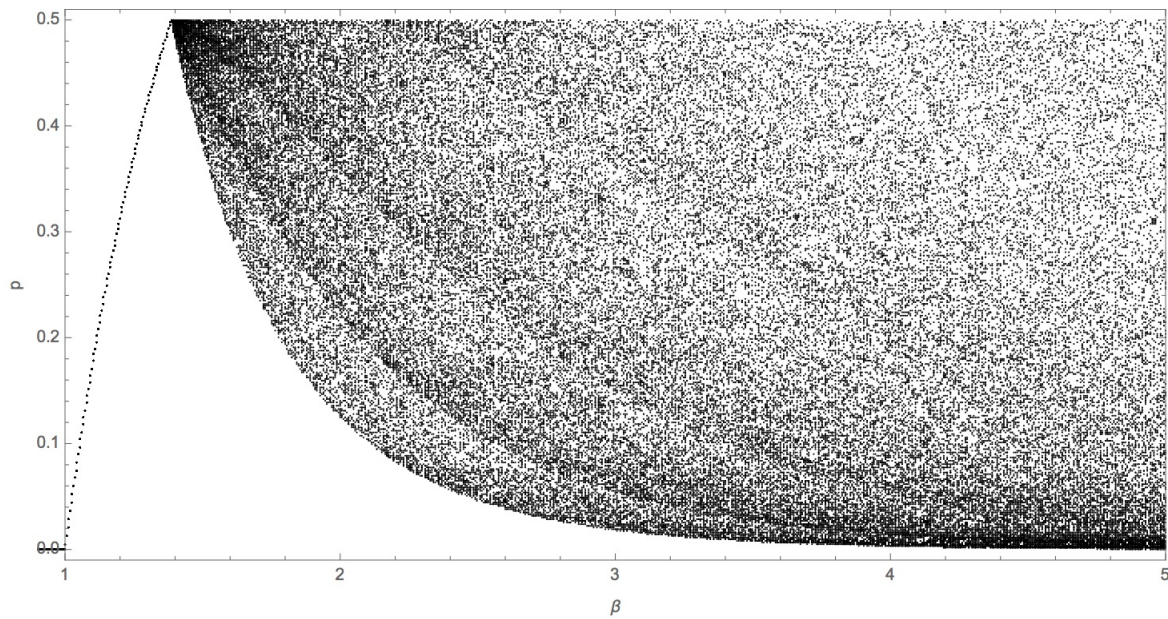


Figura 1.3: Diagrama de Bifurcaciones MM para $\alpha_N \rightarrow 0$. Se muestran desde la iteración 900 a la 1000 consideradas al partir desde el máximo de $h_\beta(p)$.

Proposición 1.26 *La función W de Lambert tiene la siguiente serie como representación*

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n$$

En torno a 0 y tiene radio de convergencia $\frac{1}{e}$.

Capítulo 2

Modelo del Votante Modificado

En este capítulo se propondrá un nuevo modelo y se obtendrán algunos resultados sobre éste, obtenidos en base a los del paper de Durrett y Remenik ([11]) para el modelo **MM**. El modelo que se propondrá es una fusión del modelo del votante a tiempo discreto y el modelo **MM**; tomando en cuenta que estos ya fueron definidos, es posible definir el modelo sobre el que se trabajará en esta sección, el cual se llamará por simplicidad **MVM** (Modified Voter Model).

Definición 2.1 (Modelo del Votante modificado (**MVM**)) *Sea $N \in \mathbb{N}$ fijo, $\beta_N \in [0, 1]$, $T = \mathbb{N}$ y cada sitio en un grafo $G_N = (V_N, E_N)$, de N nodos, el cual puede estar ocupado o vacante (1 si tiene la tendencia moda o 0 si no), i.e, $\Omega = \{0, 1\}^{V_N}$. Se denotará por $(\eta_n^N)_{n \in \mathbb{N}}$ al proceso y $\eta_n^N(x)$ el estado en que se encuentra el sitio $x \in G_N$ en la etapa n . El cambio que ocurre en el modelo en una unidad de tiempo se explica en dos fases sucesivas: la fase de crecimiento y la fase de epidemia. Se hace conveniente definir $(\eta_{n+\frac{1}{2}}^N)_{n \in \mathbb{N}}$ como el estado de los sitios después de la fase de crecimiento. Para cierto $n \in \mathbb{N}$ la regla de actualización se define como:*

Crecimiento: Si un sitio $x \in G_N$ cumple que $\eta_n(x) = 1$, entonces elige una posición aleatoria $y \in \mathcal{N}_N(x) \subseteq G_N$, uniforme en $\mathcal{N}_N(x)$ y se actualiza como

$$\eta_{n+\frac{1}{2}}^N(x) = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } 1, \text{ si } \eta_n^N(x) = 0 \text{ y } \eta_n^N(y) = 1 \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - \beta_N, \text{ si } \eta_n(x) = 1 \text{ y } \eta_n(y) = 0 \end{cases}$$

De esta forma, si tiene la tendencia moda y elige una posición $y \in \mathcal{N}_N(x)$ que no tiene la tendencia moda, éste la podrá retener con probabilidad β_N . Si x e y tienen la misma tendencia entonces no la cambiarán con probabilidad 1.

Epidemia: Por cada sitio $x \in G_N$ se genera una variable aleatoria $B_N(x)$ tal que $B_N(x) = 1$ con una probabilidad pequeña α_N . Para el subgrafo AG_N de G_N , inducido por $AV_N = \{v \in V(G) : \eta_{n+\frac{1}{2}}^N(v) = 1\}$ (Alive Vertices) en G , si en una componente conexa de AG_N existe un nodo x tal que $B_N(x) = 1$ entonces $\eta_{n+1}^N(y) = 0 \forall y \in CC_{AG_N}(x)$. Se considerará que instantáneamente al final de esta fase los sitios del grafo son aleatoriamente mezclados.

Se estudiará el comportamiento del proceso en un grafo G_N 3-regular con N nodos elegidos aleatoriamente en el conjunto de los grafos que cumplen con esta propiedad (notar que N debe ser par por handshaking lema). Se le llamará a ésta elección aleatoria R_N , y se condicionará al evento que R_N es conexo. La elección del modelo radica en que localmente R_N es un árbol, y gracias a esto, se conocen fórmulas explícitas para las probabilidades de percolación. El proceso estudiado en un principio considera $\mathcal{N}_N(x) := R_N \quad \forall x \in V_{R_N}$ y $\beta_N = \beta \quad \forall N \in \mathbb{N}$.

El interés será estudiar la evolución temporal del proceso que contempla la densidad de sitios con la tendencia moda; en particular, el objetivo será buscar un límite del proceso para condiciones adecuadas. Con el fin de obtener un candidato a límite de este proceso, se harán aproximaciones heurísticas; con esto en mente, sea p la densidad de sitios ocupados al inicio de la etapa de crecimiento, por ende, la cantidad de sitios ocupados es pN . Denotaremos por $f_\beta^N(p)$ a la densidad esperada de sitios ocupados luego de la fase de crecimiento para un grafo con N vértices y $f_\beta(p)$ al candidato a límite para ésta fase cuando $N \rightarrow \infty$.

$$f_\beta^N(p) := 1 - \left(\frac{(1-p)N-1}{N-1}(1-p) + \frac{(1-p)N}{N-1}p(1-\beta) \right) \approx f_\beta(p) := 1 - (1-p)(1-\beta p)$$

Para ver el cálculo dirigirse al Anexo.

En lo que sigue se repetirá el argumento mostrado en [11] con algunas adaptaciones para este modelo. Primero se probará que el grafo aleatorio 3-regular R_N luce localmente como un 3-árbol a medida que $N \rightarrow \infty$; además de esto, mediante un análisis heurístico se puede apreciar que cuando $\alpha_N \rightarrow 0$, cada sitio ocupado (tendencia 1) sobrevive la epidemia si y solo si no está en una componente conexa viva de tamaño infinito. Se considerará el proceso de percolación en el 3-árbol definido al tomar abiertos a todos los sitios ocupados después de la etapa de crecimiento. Así si la densidad antes de la epidemia es p , la densidad $g(p)$ después de la epidemia es exactamente la probabilidad que el origen esté abierto al iniciar la percolación, pero que no percole. En los siguientes cálculos se considera un 3-árbol de tamaño infinito. El umbral para la existencia de una componente de tamaño infinito es $p_c = 1/2$, luego si $p \leq 1/2$, entonces $g(p) = p$. Para calcular la densidad para $p > 1/2$ se necesitará calcular la probabilidad de percolación en el 3-árbol. Se hará referencia al evento “el origen es un cluster infinito de sitios ocupados” cada vez que se diga percolación. Se comienza calculando la percolación en el árbol binario, en donde la única diferencia con el 3-árbol es el nodo raíz el cual tiene grado 2. La probabilidad de percolación θ_{bin} satisface

$$\theta_{bin}(p) = p(1 - (1 - \theta_{bin}(p))^2)$$

Se tomará en cuenta la solución no trivial, con lo que se obtiene

$$\theta_{bin} = \frac{2p-1}{p}$$

Y en el 3-árbol la probabilidad de percolación esta dada por

$$\theta_T(p) = p(1 - (1 - \theta_{bin}(p))^3)$$

Entonces para $p \in (1/2, 1]$

$$g(p) = \mathbb{P}_p(0 \text{ esta ocupado}, |C_0| < \infty) = p - \theta_T(p) = \frac{(1-p)^3}{p^2}$$

$f_\beta(p)$ es una parábola que toma el valor $1/2$ en dos puntos ($a_0^- = \frac{1+\beta-\sqrt{1+\beta^2}}{2\beta} \wedge a_0^+ = \frac{1+\beta+\sqrt{1+\beta^2}}{2\beta}$), como sólo son de interés las fracciones menores que uno (dado que representan densidades), se considera solamente $a_0 := a_0^-$. El coeficiente dominante del polinomio $f_\beta(p)$ es negativo, por lo cual esta es una parábola primero creciente y luego decreciente; finalmente $f_\beta(p) > 1/2 \forall p \in [a_0, 1]$ gracias a que $a_0^+ > 1 \forall \beta \in [0, 1]$.

Al combinar las fórmulas para f_β y g se propone el siguiente candidato a límite del sistema

$$h_\beta(p) := g(f_\beta(p)) = \begin{cases} -p(\beta p - (1 + \beta)) & 0 \leq p \leq a_0 \\ \frac{(1+p(\beta p - 1 - \beta))^3}{p^2(\beta p - 1 - \beta)^2} & a_0 < p \leq 1 \end{cases}$$

Se define $a_1 := h_\beta\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{(\beta-2)^3}{4(\beta+2)^2}$.

Para el **MVM** en R_N se denotará la densidad de sitios ocupados en tiempo k como

$$\rho_k^N := \frac{1}{N} |\eta_k^N| = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta_k^N(i)$$

La distribución inicial η_0^N del proceso será siempre utilizada como una medida producto con densidad $p \in [0, 1]$, por lo que en particular $\rho_0^N \rightarrow p$ en probabilidad. En la discusión previa se argumentó heurísticamente que el proceso ρ_k^N converge al sistema determinista definido por h_β . El próximo resultado muestra que esto es un hecho bajo ciertas condiciones.

Teorema 2.2 *Asumiendo que $G_N = R_N$ y que se cumple que*

$$\alpha_N \log_2(N) \rightarrow \infty \quad \wedge \quad \alpha_N \rightarrow 0 \quad \text{Cuando} \quad N \rightarrow \infty$$

Entonces el proceso $(\rho_k^N)_{k \geq 0}$ converge en distribución a la órbita determinista comenzando con p , del sistema dinámico asociado a h_β .

Para probar este resultado será suficiente estudiar las probabilidades de transición de un solo paso del proceso ρ_k^N , este cuenta con $\mathcal{N}_N(x) = G_N$, por consiguiente si la densidad inicial de sitios ocupados es p , entonces todos los sitios tienen probabilidad

$$1 - \left(\frac{(1-p)N-1}{N-1} (1-p) + \frac{(1-p)N}{N-1} p(1-\beta) \right) \approx -p(\beta p - (1 + \beta))$$

de tener la tendencia moda después de la fase de crecimiento. Abusando de la notación, también se llamará η_k^N al conjunto de sitios ocupados en el proceso. Se denotará además por $\{0, \dots, N-1\}$ el conjunto de nodos de R_N y $B(i, r)$ será el conjunto de sitios en un entorno distancia a lo más r de i (distancia usual de teoría de grafos).

Sea $\tilde{\eta}_1^N$ el conjunto de sitios ocupados, después de que la epidemia se propaga, ignorando la infección proveniente de una distancia mayor a $\frac{\log_2(N)}{5}$, $\tilde{\rho}_1^N := \frac{|\tilde{\eta}_1^N|}{N}$. En lo que sigue cada vez que se haga mención de \mathbb{E}_p , \mathbb{P}_p , Var_p y Cov_p se referirá a empezar el proceso de epidemia con una densidad de sitios ocupados igual a p .

Para una demostración de los siguientes tres lemas dirigirse a [11]. La demostración que se expondrá es análoga a la realizada en [11] donde se concluyó que basta con que f_β^N sea uniformemente convergente a f_β con respecto a $p \in [0, 1]$ para poder asegurar la convergencia, puesto que la demostración radica en propiedades después del proceso de crecimiento y para el caso (MM) y (MVM) son iguales; además, la condición sobre α_N esta dada principalmente para que la convergencia en el 3-árbol local a cada punto sea satisfecha sin extinguir demasiado rápido al 3-árbol con raíz en el punto estudiado.

Lema 2.3

$$\mathbb{E}_p (|\tilde{\rho}_1^N - \rho_1^N|) \rightarrow 0 \quad , N \rightarrow \infty$$

Uniformemente en p la densidad inicial.

Sea

$$H_N := \left\{ i \in R_N : B \left(i, \frac{1}{5} \log_2(N) \right) \text{ es un 3-árbol finito} \right\}$$

El próximo lema dice que R_N en el límite luce localmente como un 3-árbol.

Lema 2.4

$$\mathbb{E} \left(\frac{1}{N} |R_N \setminus H_N| \right) = \mathbb{P}(0 \notin H_N) \rightarrow 0 \quad , N \rightarrow \infty$$

Se define $C_0 :=$ Componente conexa. asociada al origen, de sitios ocupados en el 3-árbol.

Lema 2.5 *Sea \mathbb{P}_p la ley del proceso cuando cada sitio es conservado independiente con probabilidad $p \in [0, 1]$. Entonces para todo $k_N \nearrow \infty$*

$$\sup_{p \in [0, 1]} |\mathbb{P}_p(\text{diam}(C_0) < \infty) - \mathbb{P}_p(\text{diam}(C_0) < k_N)| \rightarrow 0 \quad , N \rightarrow \infty$$

Lema 2.6 *La función $f_\beta^N(p)$ converge uniformemente a $f_\beta(p)$ en $p \in [0, 1]$, $\forall \beta \in [0, 1]$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\beta \in [0, 1]$, $p \in [0, 1]$ se tiene que

$$f_\beta^N(p) - f_\beta^{N+1} = -\frac{\beta(p-1)p}{(N-1)N} \geq 0$$

En lo presentado anteriormente $(p-1) \leq 0$ y todos los demás términos son ≥ 0 para $N > 1$. Con esto se obtiene una sucesión decreciente de funciones continuas que convergen puntualmente a una función continua f_β , ergo, la convergencia uniforme (Ver [12] theorem 7.13). \square

Lema 2.7

$$\mathbb{E}_{f_\beta^N(p)} \left(\frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^N \cap H_N| \right) \rightarrow h_\beta(p) \quad , N \rightarrow \infty$$

Uniformemente en la densidad inicial p .

DEMOSTRACIÓN. En los subíndices se utilizará por simplicidad $f_\beta(p)$; la validez de este paso se ve justificada en el lema 2.6. Si $0 \in \tilde{\eta}_1^N$ entonces $0 \in \eta_{\frac{1}{2}}^N$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{f_\beta(p)} \left(\frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^N \cap H_N| \right) &= \mathbb{P}_{f_\beta(p)}(0 \in \tilde{\eta}_1^N | 0 \in H_N \cap \eta_{\frac{1}{2}}^N) \mathbb{P}_{f_\beta(p)}(0 \in H_N \cap \eta_{\frac{1}{2}}^N) \\ &\quad + \mathbb{P}_{f_\beta(p)}(0 \in \tilde{\eta}_1^N | 0 \notin H_N \cap \eta_{\frac{1}{2}}^N) \mathbb{P}_{f_\beta(p)}(0 \notin H_N \cap \eta_{\frac{1}{2}}^N) \\ &= \mathbb{P}_{f_\beta(p)}(0 \in \tilde{\eta}_1^N | 0 \in H_N \cap \eta_{\frac{1}{2}}^N) \mathbb{P}(0 \in H_N) \mathbb{P}_{f_\beta(p)}(0 \in \eta_{\frac{1}{2}}^N) \end{aligned} \quad (2.1)$$

La última separación se debe a la independencia del grafo aleatorio estudiado y la ocupación del origen en el proceso de crecimiento. Por el lema 2.4 se sabe que $\mathbb{P}(0 \in H_N) \rightarrow 1$, por lo que solamente falta encontrar el valor del primer termino de ec. (2.1); para esto basta con estudiar la configuración de $\eta_{1/2}^N$ en $B\left(0, \frac{\log_2(N)}{5}\right)$, en donde, condicional al evento $0 \in H_N$, el grafo es localmente un 3-árbol. Luego se pueden construir variables $(\tilde{\eta}_1^N(0))_{N>0}$ condicional a $\{0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^N\}$ en un espacio de probabilidad común como sigue: sea \mathcal{T} el conjunto de sitios en un 3-árbol, lugar en donde se considerará el proceso de percolación, donde cada sitio está abierto independientemente con probabilidad $f_\beta(p)$. Se denotará por C_0 al cluster de percolación que contiene a 0, además, se considerará la colección $(B_i^N)_{i \in \mathcal{T}, N>0}$ de variables aleatorias tal que $B_i^N \sim \text{Bern}(\alpha_N)$. Con éstas, la variable aleatoria $\tilde{\eta}_1^N(0)$ condicional al evento $\{0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^N\}$, se puede construir como sigue

$$\tilde{\eta}_1^N(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } B_i^N = 0 \forall i \in C_0 \cap B(0, \frac{\log_2(N)}{5}) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es fácil verificar que esta construcción sigue la distribución condicional pedida, ya que es la forma canónica de construirla.

Ahora sea $l_N = \log_2\left(\alpha_N^{-\frac{1}{2}}\right)$, luego $l_N < \frac{\log_2(N)}{5}$ para N grande, entonces

$$\mathbb{P}_{f_\beta(p)}(0 \in \tilde{\eta}_1^N | 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^N) = \mathbb{P}_{f_\beta(p)}(0 \in \tilde{\eta}_1^N, \text{diam}(C_0) \leq l_N | 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^N) \quad (2.2)$$

$$+ \mathbb{P}_{f_\beta(p)}\left(0 \in \tilde{\eta}_1^N, l_N < \text{diam}(C_0) \leq \frac{\log_2(N)}{5} | 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^N\right) \quad (2.3)$$

$$+ \mathbb{P}_{f_\beta(p)}\left(0 \in \tilde{\eta}_1^N, \frac{\log_2(N)}{5} < \text{diam}(C_0) | 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^N\right) \quad (2.4)$$

La primera expresión de la derecha en ec. (2.2)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{f_\beta(p)}(0 \in \tilde{\eta}_1^N, \text{diam}(C_0) \leq l_N | 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^N) &\leq \mathbb{P}_{f_\beta(p)}(0 \leq \text{diam}(C_0) \leq l_N | 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^N) \\ &\rightarrow \mathbb{P}_{f_\beta(p)}(0 \leq \text{diam}(C_0) \leq \infty | 0 \text{ está abierto}) \\ &= \frac{\mathbb{P}_{f_\beta(p)}(0 \leq \text{diam}(C_0) \leq \infty, 0 \text{ está abierto})}{\mathbb{P}_{f_\beta(p)}(0 \text{ está abierto})} \\ &= \frac{g(-p(\beta p - (1 + \beta)))}{-p(\beta p - (1 + \beta))} \end{aligned}$$

Gracias al lema 2.5 la convergencia anterior es uniforme en p , por otro lado como cualquier subconjunto de \mathcal{T} con diámetro n tiene a lo más $1 + 3 \cdot 2^{n-1} < 3 \cdot 2^n$ nodos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{f_\beta(p)}(0 \in \tilde{\eta}_1^N, \text{diam}(C_0) \leq l_N | 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^N) &= \mathbb{P}_{f_\beta(p)}(B_i = 0 \forall i \in C_0, \text{diam}(C_0) \leq l_N | 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^N) \\
&\geq (1 - \alpha_N)^{3\alpha_N^{-\frac{1}{2}}} \mathbb{P}_{f_\beta(p)}(0 \leq \text{diam}(C_0) \leq l_N | 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^N) \\
&\longrightarrow \mathbb{P}_{f_\beta(p)}(0 \leq \text{diam}(C_0) \leq \infty | 0 \text{ está abierto}) \\
&= \frac{\mathbb{P}_{f_\beta(p)}(0 \leq \text{diam}(C_0) \leq \infty, 0 \text{ está abierto})}{\mathbb{P}_{f_\beta(p)}(0 \text{ está abierto})} \\
&= \frac{g(-p(\beta p - (1 + \beta)))}{-p(\beta p - (1 + \beta))}
\end{aligned}$$

uniforme en p por el lema 2.5 y se tiene que $(1 - \alpha_N)^{3\alpha_N^{-\frac{1}{2}}} \approx e^{-3\sqrt{\alpha_N}} \longrightarrow 1$. Así se concluye por el teorema del sándwich que

$$\mathbb{P}_{f_\beta(p)}(0 \in \tilde{\eta}_1^N, \text{diam}(C_0) \leq l_N | 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^N) \longrightarrow \frac{g(-p(\beta p - (1 + \beta)))}{-p(\beta p - (1 + \beta))}$$

uniforme en p . Para ec. (2.3) se tiene que $\mathbb{P}_{f_\beta(p)}(0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^N) \geq C = \frac{-p(\beta p - (1 + \beta))}{2}$ para N suficientemente grande, entonces

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{f_\beta(p)}(0 \in \tilde{\eta}_1^N, l_N < \text{diam}(C_0) \leq \frac{\log_2(N)}{5} | 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^N) \\
&\leq C^{-1} \mathbb{P}_{f_\beta(p)}\left(l_N < \text{diam}(C_0) \leq \frac{\log_2(N)}{5}\right) \\
&= C^{-1} \left(\mathbb{P}_{f_\beta(p)}(l_N < \text{diam}(C_0)) - \mathbb{P}_{f_\beta(p)}(\text{diam}(C_0) < \infty) \right) \\
&- C^{-1} \left(\mathbb{P}_{f_\beta(p)}\left(\frac{\log_2(N)}{5} < \text{diam}(C_0)\right) - \mathbb{P}_{f_\beta(p)}(\text{diam}(C_0) < \infty) \right) \\
&\longrightarrow 0
\end{aligned}$$

Uniformemente en p gracias al lema 2.5. Para la ec. (2.4) se observa que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{f_\beta(p)}\left(0 \in \tilde{\eta}_1^N, \frac{\log_2(N)}{5} < \text{diam}(C_0) \mid 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^N\right) &\leq (1 - \alpha_N)^{\frac{\log_2(N)}{5}} \\
&\approx e^{-\frac{\log_2(N)\alpha_N}{5}} \\
&\longrightarrow 0
\end{aligned}$$

Por todo lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{f_\beta(p)}(0 \in \tilde{\eta}_1^N | 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^N) \mathbb{P}(0 \in H_N) \mathbb{P}_{f_\beta(p)}(0 \in \eta_{1/2}^N) &\longrightarrow \frac{g(-p(\beta p - (1 + \beta)))}{-p(\beta p - (1 + \beta))} (-p(\beta p - (1 + \beta))) \\
&= g(f_\beta(p)) \\
&= h_\beta(p)
\end{aligned}$$

□

DEMOSTRACIÓN TEOREMA 2.2. Gracias a [7] (Teorema 4, considerando la observación), es suficiente demostrar que $\rho_0^N \Rightarrow p$ y que dada una sucesión $p_N \in [0, 1]$ convergente a algún $p' \in [0, 1]$, la sucesión ρ_1^N , iniciado con η_0^N medida producto con densidad p_N , converge débilmente a $h_\beta(p')$.

La primera parte es directa, pues se inicializó con densidad p , para la segunda parte se asumirá por simplicidad que $p_N = p'$ para todo N y que además de eso cada sitio es ocupado con probabilidad $f_\beta(p)$ después de la etapa de crecimiento. El caso general se sigue del lema 2.6, y gracias a lo demostrado anteriormente, todas las convergencias obtenidas serán uniformes en la densidad inicial p' ; elemento que es necesario para el uso de [7]. Gracias a la desigualdad de Markov, dado $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{f_\beta(p')} (|\rho_1^N - h_\beta(p')| > \varepsilon) &\leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}_{f_\beta(p')} (|\rho_1^N - h_\beta(p')|) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}_{f_\beta(p')} (|\rho_1^N - \tilde{\rho}_1^N|) + \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}_{f_\beta(p')} \left(\left| \tilde{\rho}_1^N - \frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^N \cap H_N| \right| \right) \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}_{f_\beta(p')} \left(\left| \frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^N \cap H_N| - \mathbb{E}_{f_\beta(p')} \left(\frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^N \cap H_N| \right) \right| \right) \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \left| \mathbb{E}_{f_\beta(p')} \left(\frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^N \cap H_N| \right) - h_\beta(p') \right| \end{aligned}$$

El primer y último término de la última desigualdad tiende a 0 por lema 2.3 y lema 2.7. El segundo tiende a cero por el lema 2.4

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{f_\beta(p')} \left(\tilde{\rho}_1^N - \frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^N \cap H_N| \right) &\leq \mathbb{E}_{f_\beta(p')} \left(\frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^N| - \frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^N \cap H_N| \right) \\ &\leq \mathbb{E}_{f_\beta(p')} \left(\frac{1}{N} |R_N \setminus H_N| \right) \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Para el tercer término se utilizará la desigualdad de Jensen, para esto se calcula

$$\begin{aligned} \mathbb{V}ar_{f_\beta(p')} (|\tilde{\eta}_1^N \cap H_N|) &= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{C}ov_{f_\beta(p')} (\mathbb{1}_{i \in \tilde{\eta}_1^N \cap H_N}, \mathbb{1}_{j \in \tilde{\eta}_1^N \cap H_N}) \\ &\leq \left| \left\{ (i, j) \in H_N \times H_N : B \left(i, \frac{\log_2(N)}{5} \right) \cap B \left(j, \frac{\log_2(N)}{5} \right) \neq \emptyset \right\} \right| \\ &\leq \left| \left\{ (i, j) \in H_N \times H_N : \text{dist}(i, j) \leq \frac{2 \log_2(N)}{5} \right\} \right| \\ &\leq \underbrace{N}_{\text{Cantidad de nodos}} \cdot \underbrace{\frac{3}{2} N^{\frac{2}{5}}}_{\text{Cantidad de nodos en Bola de tamaño } \frac{2 \log_2(N)}{5}} \end{aligned}$$

Con esto

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{f_\beta(p')} \left(\left| \frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^N \cap H_N| - \mathbb{E}_{f_\beta(p')} \left(\frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^N \cap H_N| \right) \right| \right)^2 &\leq \mathbb{V}ar_{f_\beta(p')} \left(\frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^N \cap H_N| \right) \\ &\leq \frac{\frac{3}{2} N \cdot N^{\frac{2}{5}}}{N^2} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Obteniéndose la convergencia en probabilidad que en este caso es equivalente a la convergencia en distribución, pues el limite es determinista. \square

En la fig. 2.1 se presenta un diagrama de donde se extrajo algunas intuiciones del siguiente teorema el que extrae propiedades del sistema dinámico definido por h_β , el cual ya se demostró es el límite de nuestro proceso bajo ciertas hipótesis.

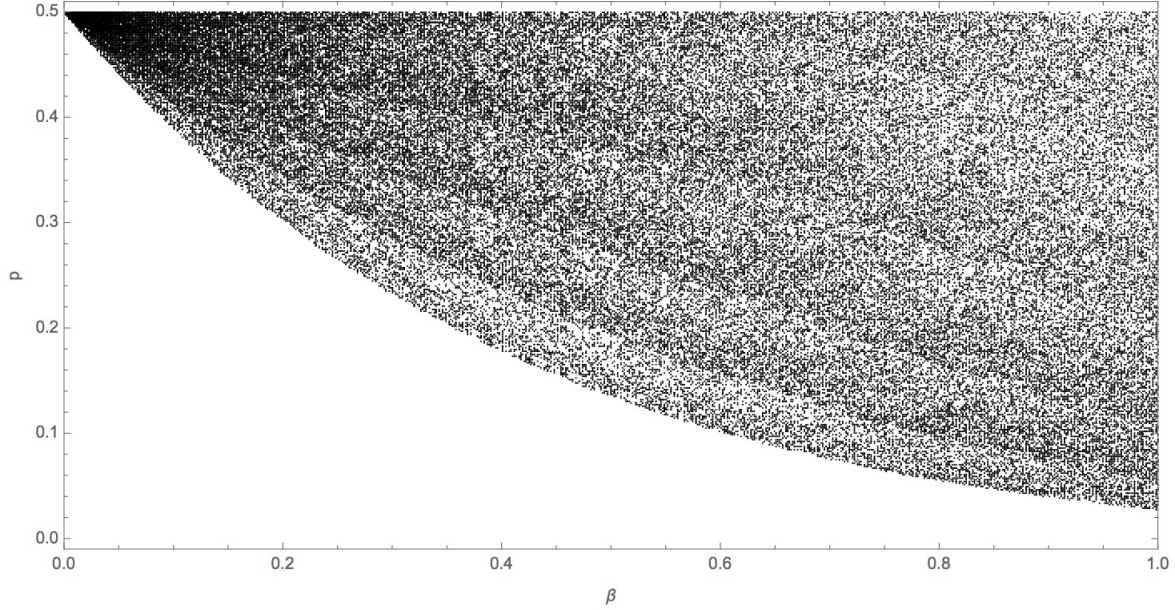


Figura 2.1: Diagrama de Bifurcaciones **MVM** para $\alpha_N \rightarrow 0$. Se muestran desde la iteración 900 a la 1000 consideradas al partir desde el máximo de $h_\beta(p)$.

Teorema 2.8 *El sistema dinámico definido por la función $h_\beta : [a_1, \frac{1}{2}] \rightarrow [a_1, \frac{1}{2}]$*

1. *Es caótico $\forall \beta \in (0, 1]$.*
2. *Si $\beta \in (0, \frac{2}{3})$, entonces el sistema tiene una medida invariante, $\mu = \mu \circ h_\beta^{-1}$ la cual es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.*

La condición $\beta \in (0, \frac{2}{3})$ es netamente técnica y las simulaciones sugieren que esto se tiene para $\beta \in (0, 1)$.

DEMOSTRACIÓN. 1. Se usa el punto definido a continuación con el fin de utilizar el teorema 1.21

$$a = h_\beta^{-1}(a_0) = \frac{\beta + 1 - \sqrt{\beta^2 + 2\sqrt{\beta^2 + 1} - 1}}{2\beta}$$

El punto $a < a_0$ ya que $2\sqrt{\beta^2 + 1} - 1 > 1$, gracias a esto se tiene

$$a < f_\beta(a) = h_\beta(a) = a_0 < h_\beta(a_0) = \frac{1}{2}$$

Falta ver que $h_\beta\left(\frac{1}{2}\right) = a_1 < a$ Para esto basta con probar que

$$-\frac{(-2 + \beta)^3}{16} \leq a$$

Pero esto es equivalente a probar que

$$\begin{aligned} & \frac{\beta + 1 - \sqrt{-1 + \beta^2 + 2\sqrt{\beta^2 + 1}}}{2\beta} + \frac{(-2 + \beta)^3}{16} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{8 + 12\beta^2 - 6\beta^3 + \beta^4 - 8\sqrt{-1 + \beta^2 + 2\sqrt{1 + \beta^2}}}{16\beta} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (8 + 12\beta^2 - 6\beta^3 + \beta^4)^2 \geq -64 + 64\beta^2 + 128\sqrt{1 + \beta^2} \\ \Leftrightarrow & (8 + 12\beta^2 - 6\beta^3 + \beta^4)^2 + 64 - 64\beta^2 \geq 128\sqrt{1 + \beta^2} \\ \Leftrightarrow & \left((8 + 12\beta^2 - 6\beta^3 + \beta^4)^2 + 64 - 64\beta^2 \right)^2 \geq 128^2 + 128^2\beta^2 \\ \Leftrightarrow & \left((8 + 12\beta^2 - 6\beta^3 + \beta^4)^2 + 64 - 64\beta^2 \right)^2 - 128^2 - 128^2\beta^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

El elevar a dos ambos lados de las inecuaciones anteriores se justifica, ya que, $-64 + 64\beta^2 + 128\sqrt{1 + \beta^2} > 0$, $(8 + 12\beta^2 - 6\beta^3 + \beta^4)^2 > 0$, $128\sqrt{1 + \beta^2} > 0$ y $(8 + 12\beta^2 - 6\beta^3 + \beta^4)^2 + 64 - 64\beta^2 > 0$. Al expandir el lado izquierdo de la ec. (2.5) se obtiene

$$\begin{aligned} & 16384\beta^2 - 24576\beta^3 + 57344\beta^4 - 61440\beta^5 + 65536\beta^6 - 70656\beta^7 + 68864\beta^8 \\ & - 60672\beta^9 + 42496\beta^{10} - 21312\beta^{11} + 7376\beta^{12} - 1728\beta^{13} + 264\beta^{14} - 24\beta^{15} + \beta^{16} \end{aligned}$$

Finalmente ésta se puede escribir como

$$\beta^2(16384 + (-2 + \beta)\beta(12288 + \beta(-22528 + \beta(19456 + \beta(-23040 + \beta(23808 + \beta(-22528 + \beta(19072 + \beta(-11712 + \beta(4800 + \beta(-1288 + \beta(220 + (-22 + \beta)\beta)))))))))))))$$

Como $(-2 + \beta)\beta < 0$, se acotará por arriba al factor que lo acompaña

$$\begin{aligned} & 12288 + \beta(-22528 + \beta(19456 + \beta(-23040 + \beta(23808 + \beta(-22528 + \beta(19072 + \\ & \beta(-11712 + \beta(4800 + \beta(-1288 + \beta(220 + (-22 + \beta)\beta)))))))))) \\ \leq & 12288 + \beta(-22528 + \beta(19456 + \beta(-23040 + \beta(23808 + \beta(-22528 + \beta(19072 + \\ & \beta(-11712 + \beta(4800 + \beta(-1288 + \beta(220)))))))))) \\ \leq & 12288 + \beta(-22528 + \beta(19456 + \beta(-23040 + \beta(23808 + \beta(-22528 + \beta(19072 + \\ & \beta(-11712 + \beta(4800 + \beta(-1288 + 220)))))))))) \\ \leq & 12288 + \beta(-22528 + \beta(19456 + \beta(-23040 + \beta(23808 + \beta(-22528 + \beta(19072 + \\ & \beta(-11712 + \beta(4800)))))))))) \\ \leq & 12288 + \beta(-22528 + \beta(19456 + \beta(-23040 + \beta(23808 + \beta(-22528 + \beta(19072 + \\ & \beta(-11712 + 4800)))))))))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 12288 + \beta(-22528 + \beta(19456 + \beta(-23040 + \beta(23808 + \beta(-22528 + \beta(19072)))))) \\
&\leq 12288 + \beta(-22528 + \beta(19456 + \beta(-23040 + \beta(23808 + \beta(-22528 + 19072)))) \\
&\leq 12288 + \beta(-22528 + \beta(19456 + \beta(-23040 + \beta(23808))) \\
&\leq 12288 + \beta(-22528 + \beta(19456 + \beta(-23040 + 23808))) \\
&\leq 12288 + \beta(-22528 + \beta(19456 + \beta(768))) \\
&\leq 12288 + \beta(-22528 + \beta(19456 + 768)) \\
&\leq 12288 + \beta(-22528 + \beta(20224)) \\
&\leq 12288 + \beta(-22528 + 20224) \\
&\leq 12288
\end{aligned}$$

Como $(-2 + \beta)\beta$ consigue su mínimo en -1 cuando $\beta = 1$. Por lo anterior

$$\begin{aligned}
&\beta^2(16384 + (-2 + \beta)\beta(12288 + \beta(-22528 + \beta(19456 + \beta(-23040 + \beta(23808 + \beta(-22528 + \\
&\beta(19072 + \beta(-11712 + \beta(4800 + \beta(-1288 + \beta(220 + (-22 + \beta)\beta)))))))))) \\
&\geq \beta^2(16384 - 12288) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

2. Es suficiente demostrar por [15] que

$$\inf_{p \in [a_1, 1/2] \setminus \{a_0\}} |h'_\beta(p)| > 1$$

Para $\beta \in (0, 2/3)$. Calculando

$$h'_\beta(p) = \begin{cases} -2p\beta + \beta + 1 & \text{si } a_1 \leq p \leq a_0 \\ \frac{(p-1)^2(p\beta-1)^2((p-1)p\beta-p-2)((2p-1)\beta-1)}{p^3((p-1)\beta-1)^3} & \text{si } a_0 \leq p \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si $a_1 \leq p \leq a_0 < 1/2$, entonces

$$|h'_\beta(p)| = 1 + \beta(1 - 2p) > 1$$

El esquema que se utilizará para demostrar la desigualdad en el caso $a_0 \leq p \leq \frac{1}{2}$ se basa en acotar $h'_\beta(p)$, el cual es negativo, por un polinomio $k(p)$ más fácil de estudiar que él, y luego mayorar $k(p)$ por -1 . Se utilizará

$$k(p) := \frac{(p-1)^2(p\beta-1)^2((p-1)p\beta-p-2)((2p-1)\beta)}{p^3((p-1)\beta-1)^3} - 1$$

Se demostrará algo equivalente a la afirmación $k(p)$ mayorar a $h'_\beta(p)$

$$\begin{aligned}
&k(p) - h'_\beta(p) > 0 \\
&\iff \frac{-3p^2\beta + 3p(\beta + 1) - 2}{p^3((p-1)\beta-1)^3} > 0 \\
&\iff -3p^2\beta + 3p(\beta + 1) - 2 < 0
\end{aligned}$$

La función $-3p^2\beta + 3p(\beta + 1) - 2$ es una parábola cóncava que alcanza su máximo en $p^* = \frac{6+6\beta}{12\beta} > \frac{6}{12\beta} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$, por lo que, en el dominio considerado, el máximo está en $p^* = \frac{1}{2}$, ya que hasta el vértice la parábola es creciente. En éste punto

$$-3p^2\beta + 3p(\beta + 1) - 2 \leq \frac{(-2 + 3\beta)}{4} < \frac{1}{4} \left(-2 + 3\frac{2}{3} \right) = 0$$

Se acotará $k(p) \leq -1$, lo que es equivalente a

$$\begin{aligned} k(p) &\leq -1 \\ \iff \frac{(p-1)^2(p\beta-1)^2((p-1)p\beta-p-2)((2p-1)\beta)}{p^3((p-1)\beta-1)^3} &\leq 0 \\ \iff (p-1)^2(p\beta-1)^2((p-1)p\beta-p-2)((2p-1)\beta) &\geq 0 \\ \iff ((p-1)p\beta-p-2)((2p-1)\beta) &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Como $(p-1)p\beta-p-2 < -\frac{1}{2}p\beta-p-2 < 0$, y además $(2p-1)\beta \leq (2\frac{1}{2}-1)\beta = 0$ se cumple

$$((p-1)p\beta-p-2)((2p-1)\beta) \geq 0$$

Se concluye lo pedido gracias al valor absoluto. El paso utilizado ec. (2.6) se justifica por

$$p^3((p-1)\beta-1)^3 < p^3 \left(\left(\frac{1}{2} - 1 \right) \beta - 1 \right)^3 < p^3 \left(-\frac{\beta}{2} - 1 \right)^3 < 0$$

□

2.1. Distribución de $|C_0|$

En ésta sección se estudiará la distribución del tamaño del cluster de percolación en el 3-árbol, requisito esencial para extender el teorema 2.2 como se verá en la próxima subsección. Sin más preámbulo se da inicio con el teorema principal de esta sección.

Teorema 2.9 *Dado G un 3-árbol infinito, si cada vértice es ocupado con probabilidad p . La distribución de probabilidad de $|C_0|$ viene dada por*

$$\mathbb{P}_p(|C_0| = k) = \begin{cases} 1-p & \text{si } k = 0 \\ \frac{3}{n+2} \binom{2n}{n-1} p^n (1-p)^{n+2} & \text{si } k = n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ p - \frac{(1-\sqrt{(1-2p)^2})^3}{8p^2} & \text{si } k = \infty \end{cases}$$

Además para $p \leq \frac{1}{2}$ se tiene que $\mathbb{P}_p(|C_0| = \infty) = 0$.

Para demostrar esta afirmación se necesitará de un par de herramientas previas, por esto se desglosa la demostración en base a varios lemas.

Lema 2.10 Si G es un 3-árbol infinito y $|C_0| = k$ es una componente conexa inducida en G de sitios ocupados de tamaño $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, entonces la cantidad de sitios vacantes adyacentes a la componente conexa es $k + 2$.

DEMOSTRACIÓN. Por inducción, si $|C_0| = 1$ como tiene 3 vecinos y estos no están en la componente conexa, entonces la cantidad de sitios vacantes adyacentes (en adelante abreviados por EAS (empty adjacent sites)) es 3. El paso inductivo asumirá que la propiedad se cumple para $|C_0| = n$. Luego si $|C_0| = n + 1$, sea x una hoja de C_0 . Luego $C'_0 = C_0 \setminus \{x\}$ es conexo y $|C'_0| = n$. Con esto $EAS(|C'_0|) = n + 2$, como x es un sitio vacante para C'_0 se tiene que al agregarlo como activo este genera 2 sitios vacantes, con esto

$$EAS(|C_0|) = EAS(|C'_0|) - 1 + 3 = n + 2 - 1 + 2 = n + 3$$

□

Lema 2.11 Sea G un 3-árbol infinito. Definimos como $\mathcal{F}_k := |\{C_0 : |C_0| = k\}|$, i.e. a la cantidad de formas de inducir sobre G clusters de tamaño k que tienen como raíz a 0. Entonces \mathcal{F}_k cumple con

$$\mathcal{F}_k = \frac{3}{k+2} \binom{2k}{k-1}$$

DEMOSTRACIÓN. Para encontrar una fórmula de conteo se estudiará primero el análogo de \mathcal{F}_k al cual llamaremos \mathcal{C}_k en un árbol binario infinito. Estos cumplen

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 &= 1 \\ \mathcal{C}_{n+1} &= \sum_{i=0}^n \mathcal{C}_i \mathcal{C}_{n-i} \end{aligned}$$

Esta recurrencia se puede resolver mediante la función generatriz definida como

$$\mathcal{C}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n x^n$$

En base a esta función se pueden despejar los coeficientes \mathcal{C}_n , dado que ésta cumple la siguiente ecuación

$$x\mathcal{C}^2(x) + 1 = \mathcal{C}(x)$$

Resolviendo este sistema se obtiene la conocida fórmula analítica para los estos números \mathcal{C}_n , los conocidos números de Catalán. Se debe adaptar el argumento para el caso en estudio, ya que el 3-árbol posee una raíz con tres vecinos y de cada uno de ellos cuelgan árboles binarios y gracias a esto se plantea la siguiente recurrencia

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 &= 1 \\ \mathcal{F}_{n+1} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \mathcal{C}_i \mathcal{C}_j \mathcal{C}_{n-i-j} \end{aligned}$$

De donde se establece que la función generatriz $\mathcal{F}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n x^n$ satisface la siguiente ecuación

$$x\mathcal{C}^3(x) + 1 = \mathcal{F}(x)$$

Esta formula esta asociada a la función generatriz de coeficientes (ver [13])

$$\mathcal{F}_n = \frac{3}{n+2} \binom{2n}{n-1}$$

□

Lema 2.12

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n+2} \binom{2n}{n-1} p^n (1-p)^{n+2} = \frac{\left(1 - \sqrt{(1-2p)^2}\right)^3}{8p^2}$$

DEMOSTRACIÓN. Haciendo uso de la demostración del lema 2.11 la expresión se calcula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n+2} \binom{2n}{n-1} p^n (1-p)^{n+2} = (1-p)^2 (\mathcal{F}(p(1-p)) - 1)$$

Y recordando que $\mathcal{C}(x) = 1 + x\mathcal{C}^2(x)$ por lo cual su solución viene dada por

$$\mathcal{C}(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

luego

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(p(1-p)) - 1 &= p(1-p)\mathcal{C}^3(p(1-p)) \\ &= p(1-p) \left(\frac{1 - \sqrt{1-4p(1-p)}}{2p(1-p)} \right)^3 \\ &= \frac{\left(1 - \sqrt{(1-2p)^2}\right)^3}{8p^2(1-p)^2} \\ \implies (1-p)^2 (\mathcal{F}(p(1-p)) - 1) &= \frac{\left(1 - \sqrt{(1-2p)^2}\right)^3}{8p^2} \end{aligned}$$

□

Lema 2.13 Para $p \in [0, 1]$ se tiene

$$(1-p) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n+2} \binom{2n}{n-1} p^n (1-p)^{n+2} \leq 1$$

DEMOSTRACIÓN. Gracias al lema 2.12 se debe probar que

$$(1-p) + \frac{\left(1 - \sqrt{(1-2p)^2}\right)^3}{8p^2} \leq 1$$

1) Si $p \leq 1/2$

$$(1-p) + \frac{\left(1 - \sqrt{(1-2p)^2}\right)^3}{8p^2} = (1-p) + \frac{8p^3}{8p^2} = 1$$

2) Si $p > 1/2$

$$(1-p) + \frac{\left(1 - \sqrt{(1-2p)^2}\right)^3}{8p^2} = (1-p) + \frac{(p-1)^3}{p^2} \leq (1-p) \leq 1$$

Pues $\frac{(p-1)^3}{p^2} < 0$.

□

DEMOSTRACIÓN TEOREMA 2.9. Para $|C_0| = 0$ el 0 esta vacante, lo cual ocurre con probabilidad $1-p$. Si $n > 0$, sea $K_1, \dots, K_{\mathcal{F}_n}$ las distintas componentes conexas de tamaño n que se pueden formar que contengan a 0 y sea K como la variable aleatoria que denota la componente conexas de 0 elegida. Haciendo uso del lema 2.10 y lema 2.11 se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(|C_0| = n) &= \sum_{i=1}^{\mathcal{F}_n} \mathbb{P}_p(K = K_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\mathcal{F}_n} p^n (1-p)^{n+2} \\ &= \frac{3}{n+2} \binom{2n}{n-1} p^n (1-p)^{n+2} \end{aligned}$$

Gracias al lema 2.13 $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_p(|C_0| = n) \in [0, 1]$, por consiguiente se calcula

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(|C_0| = \infty) &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_p(|C_0| = n) \\ &= 1 - (1-p) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n+2} \binom{2n}{n-1} p^n (1-p)^{n+2} \\ &= p - \frac{\left(1 - \sqrt{(1-2p)^2}\right)^3}{8p^2} \end{aligned}$$

Se concluye por lema 2.13 que $\mathbb{P}_p(|C_0| = \infty) = 0$ para el caso $p \leq \frac{1}{2}$. □

Proposición 2.14 Para un 3-árbol infinito, si $\alpha \in [0, 1]$ es la probabilidad de que la infección

ataque a cada sitio. Entonces

$$\mathbb{E}_p((1 - \alpha)^{|C_0|}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha = 1 \\ 1 - p + \frac{(1 - \sqrt{1 - 4(1 - \alpha)p(1 - p)})^3}{8(1 - \alpha)^2 p^2} & \text{si } \alpha \in (0, 1) \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

La que representa a la densidad esperada de individuos vivos que sobreviven la fase de epidemia, dado que la densidad al fin de la fase de crecimiento es p .

DEMOSTRACIÓN. Para el caso $\alpha = 1$ el resultado es claro. Si $\alpha \in [0, 1)$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p((1 - \alpha)^{|C_0|}) &= \mathbb{P}_p(|C_0| = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \alpha)^k \mathbb{P}_p(|C_0| = k) + \mathbb{1}_{\{\alpha=0\}} \mathbb{P}_p(|C_0| = \infty) \\ &= 1 - p + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \alpha)^k \frac{3}{k + 2} \binom{2k}{k - 1} p^k (1 - p)^{k+2} + \mathbb{1}_{\{\alpha=0\}} \mathbb{P}_p(|C_0| = \infty) \\ &= 1 - p + (1 - p)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k + 2} \binom{2k}{k - 1} ((1 - \alpha)p(1 - p))^k + \mathbb{1}_{\{\alpha=0\}} \mathbb{P}_p(|C_0| = \infty) \\ &= 1 - p + (1 - p)^2 (\mathcal{F}((1 - \alpha)p(1 - p)) - 1) + \mathbb{1}_{\{\alpha=0\}} \mathbb{P}_p(|C_0| = \infty) \\ &= 1 - p + (1 - p)^2 ((1 - \alpha)p(1 - p)\mathcal{C}((1 - \alpha)p(1 - p))^3) + \mathbb{1}_{\{\alpha=0\}} \mathbb{P}_p(|C_0| = \infty) \\ &= 1 - p + \frac{(1 - \sqrt{1 - 4(1 - \alpha)p(1 - p)})^3}{8(1 - \alpha)^2 p^2} + \mathbb{1}_{\{\alpha=0\}} \left(p - \frac{(1 - \sqrt{(1 - 2p)^2})^3}{8p^2} \right) \end{aligned}$$

□

2.2. Extensión de MVM en base a la distribución de $|C_0|$

Como se demostró anteriormente el proceso MVM converge al sistema dinámico definido por h_β cuando se cumplen ciertas condiciones, una de ellas es que $\alpha_N \rightarrow 0$. En esta sección se verá como extender el resultado a $\alpha_N \rightarrow \alpha > 0$, para esto es necesario considerar el cambio que se produce en la función g utilizada anteriormente, ya que esta hace efectiva a la epidemia sólo cuando $|C_0| = \infty$.

A continuación se estudiará el proceso estocástico considerando la muerte de las componentes conexas de tamaño finito. Al igual que en el principio se propondrá un candidato heurístico a límite del proceso estocástico, éste será un sistema dinámico.

Como función asociada al proceso de crecimiento se usará $f_\beta(p)$ definida como al inicio, ya que la extensión en curso tiene relación solamente con el proceso de epidemia. Si $\alpha > 0$

se utilizará para el proceso de epidemia la siguiente función

$$\begin{aligned}
g_\alpha(p) &= \mathbb{P}_p(0 \text{ ocupado}, 0 \text{ sobrevive la fase de epidemia}) \\
&= \mathbb{E}_p((1 - \alpha)^{|C_0|} \mathbf{1}_{|C_0| > 0}) \\
&= \mathbb{E}_p((1 - \alpha)^{|C_0|}) - \mathbb{E}_p((1 - \alpha)^{|C_0|} \mathbf{1}_{|C_0|=0}) \\
&= \mathbb{E}_p((1 - \alpha)^{|C_0|}) - \mathbb{E}_p((1 - \alpha)^{|C_0|} | |C_0| = 0) \mathbb{P}_p(|C_0| = 0) \\
&= \mathbb{E}_p((1 - \alpha_N)^{|C_0|}) - \mathbb{E}_p((1 - \alpha)^{|C_0|} | |C_0| = 0) \mathbb{P}_p(0 \notin \eta_{1/2}) \\
&= 1 - p + \frac{\left(1 - \sqrt{1 - 4(1 - \alpha)(1 - p)p}\right)^3}{8(1 - \alpha)^2 p^2} - (1 - p) \\
&= \frac{\left(1 - \sqrt{1 - 4(1 - \alpha)(1 - p)p}\right)^3}{8(1 - \alpha)^2 p^2}
\end{aligned}$$

Para $\alpha \geq 0$. Lo anterior se obtiene gracias a la proposición 2.14, por lo tanto, la función asociada al sistema dinámico esta definida por

$$h_{\beta, \alpha}(p) = g_\alpha(f_\beta(p)) = \frac{\left(1 - \sqrt{1 - 4(1 - \alpha)(1 - p)(1 - \beta p)(1 - (1 - p)(1 - \beta p))}\right)^3}{8(1 - \alpha)^2 (1 - (1 - p)(1 - \beta p))^2}$$

Primero se demostrará que bajo condiciones adecuadas el proceso **MVM** converge al sistema dinámico expuesto anteriormente, para luego extraer propiedades del sistema límite.

Teorema 2.15 *Asumiendo que $G_N = R_N$, $\alpha \in (0, 1)$ y que la probabilidad de infección de la epidemia satisface*

$$\alpha_N \rightarrow \alpha \quad \text{Cuando} \quad N \rightarrow \infty$$

El proceso $(\rho_k^N)_{k \geq 0}$ converge en distribución a la órbita determinista comenzando con p , del sistema dinámico asociado a $h_{\beta, \alpha}$.

Para la demostración de este teorema y los lemas que se necesitarán para demostrarlo se utilizará la misma notación que en el teorema 2.2.

Lema 2.16 *Sea $\alpha_N \rightarrow \alpha > 0$, entonces $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \bar{k} \in \mathbb{N}$, $\bar{N} \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|(1 - \alpha)^k - (1 - \alpha_N)^k| < \varepsilon \quad \forall k > \bar{k}, \forall N > \bar{N}$$

DEMOSTRACIÓN. Se elige \bar{k} tal que $(1 - \frac{\varepsilon}{2})^{\bar{k}} < \alpha$. Como la función $(1 - x)^{\bar{k}}$ es uniformemente continua con respecto a x en $[0, 1]$, sea $\varepsilon > 0$ cualquiera, entonces $\exists \delta > 0$ tal que

$$|y - x| < \delta \implies |(1 - y)^{\bar{k}} - (1 - x)^{\bar{k}}| < \varepsilon$$

Se elige \bar{N} de modo que $|\alpha - \alpha_N| < \min\{\delta, \varepsilon, \frac{\alpha}{2}\}$ Luego se tiene que para $N > \bar{N}$

$$\begin{aligned} |(1 - \alpha)^{\bar{k}+1} - (1 - \alpha_N)^{\bar{k}+1}| &\leq (1 - \alpha)|(1 - \alpha)^{\bar{k}} - (1 - \alpha_N)^{\bar{k}}| + |\alpha - \alpha_N||1 - \alpha_N|^{\bar{k}} \\ &\leq (1 - \alpha)\varepsilon + \varepsilon \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{\bar{k}} \\ &\leq (1 - \alpha)\varepsilon + \varepsilon\alpha \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Notando que $\forall k > \bar{k}$ se cumple $(1 - \frac{\alpha}{2})^k \leq (1 - \frac{\alpha}{2})^{\bar{k}}$ y usando un argumento análogo se obtiene que

$$|(1 - \alpha)^k - (1 - \alpha_N)^k| < \varepsilon \quad \forall k > \bar{k}, \forall N > \bar{N}$$

□

Lema 2.17 Sea \mathbb{P}_p la ley del proceso cuando cada sitio es conservado independientemente con probabilidad $p \in [0, 1]$ y $\alpha_N \rightarrow \alpha > 0$. Entonces para todo $k_N \nearrow \infty$

$$\sup_{p \in [0, 1]} |\mathbb{P}_p(B_i = 0 \quad \forall i \in C_0, 0 < \text{diam}(C_0) < \infty) - \mathbb{P}_p(B_i^N = 0 \quad \forall i \in C_0, 0 < \text{diam}(C_0) < k_N)| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Donde $(B_i^N)_{i \in \mathbb{N}}$ es una colección i.i.d. para todo $N \in \mathbb{N}$, $B_i^N \sim \text{Bern}(\alpha_N)$, $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ colección i.i.d. con $B_i \sim \text{Bern}(\alpha)$ y $\alpha > 0$.

DEMOSTRACIÓN. Se analiza la siguiente descomposición

$$\begin{aligned} &\sup_{p \in [0, 1]} |\mathbb{P}_p(B_i = 0 \quad \forall i \in C_0, 0 < \text{diam}(C_0) < \infty) - \mathbb{P}_p(B_i^N = 0 \quad \forall i \in C_0, 0 < \text{diam}(C_0) < k_N)| \\ &\leq \sup_{p \in [0, 1]} |\mathbb{P}_p(B_i = 0 \quad \forall i \in C_0, 0 < \text{diam}(C_0) < \infty) - \mathbb{P}_p(B_i = 0 \quad \forall i \in C_0, 0 < \text{diam}(C_0) < k_N)| \\ &+ \sup_{p \in [0, 1]} |\mathbb{P}_p(B_i = 0 \quad \forall i \in C_0, 0 < \text{diam}(C_0) < k_N) - \mathbb{P}_p(B_i^N = 0 \quad \forall i \in C_0, 0 < \text{diam}(C_0) < k_N)| \end{aligned}$$

Para el primer término se define $A_{k_N} := \{B_i = 0 \quad \forall i \in C_0, 0 < \text{diam}(C_0) < k_N\}$ y $A_\infty := \{B_i = 0 \quad \forall i \in C_0, 0 < \text{diam}(C_0) < \infty\}$, entonces $A_k \nearrow A_\infty$. Gracias a la monotonía de la probabilidad, se cumple que $\mathbb{P}_p(A_k) \nearrow \mathbb{P}_p(A_\infty) \quad \forall p \in [0, 1]$; luego, $\mathbb{P}_{(\cdot)}(A_k)$ es una sucesión creciente de funciones continuas que convergen puntualmente, por lo tanto se tiene la convergencia uniforme del primer término (Ver [12], teorema 7.13).

Para el segundo término se utilizará el lema 2.16 el que asegura que $\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{m} \in \mathbb{N}, \bar{N} \in \mathbb{N}$ tal que

$$|(1 - \alpha)^m - (1 - \alpha_N)^m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall N > \bar{N}, \forall m > \bar{m}$$

Además de esto, $\forall i \in \mathbb{N}$ la función $f_i(x) = (1 - x)^i$ es continua por lo que se tiene que $\exists \bar{N}_i \in \mathbb{N}$ tal que $\forall N > \bar{N}_i$

$$|(1 - \alpha)^i - (1 - \alpha_N)^i| \leq \frac{\varepsilon}{2^{i+2}}$$

Luego para $N > \max_{1 \leq i \leq \bar{m}} N_i$ se tiene

$$\begin{aligned}
& \sup_{p \in [0,1]} |\mathbb{P}_p(B_i = 0 \ \forall i \in C_0, 0 < \text{diam}(C_0) < k_N) - \mathbb{P}_p(B_i^N = 0 \ \forall i \in C_0, 0 < \text{diam}(C_0) < k_N)| \\
&= \sup_{p \in [0,1]} \left| \sum_{m=1}^{k_N-1} ((1-\alpha)^m - (1-\alpha_N)^m) \mathbb{P}_p(C_0 = m) \right| \\
&\leq \sup_{p \in [0,1]} \left| \sum_{m=1}^{\infty} ((1-\alpha)^m - (1-\alpha_N)^m) \mathbb{P}_p(C_0 = m) \right| \\
&\leq \sup_{p \in [0,1]} \sum_{m=1}^{\bar{m}} |((1-\alpha)^m - (1-\alpha_N)^m)| \mathbb{P}_p(C_0 = m) + \sup_{p \in [0,1]} \sum_{m=\bar{m}+1}^{\infty} |(1-\alpha)^m - (1-\alpha_N)^m| \mathbb{P}_p(C_0 = m) \\
&\leq \sup_{p \in [0,1]} \sum_{m=1}^{\bar{m}} |((1-\alpha)^m - (1-\alpha_N)^m)| \mathbb{P}_p(C_0 = m) + \frac{\varepsilon}{2} \sup_{p \in [0,1]} \sum_{m=\bar{m}+1}^{\infty} \mathbb{P}_p(C_0 = m) \\
&\leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{m+2}} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Luego se tiene la convergencia uniforme del segundo término, con lo que se concluye. \square

Lema 2.18 Si $\alpha_N \rightarrow \alpha$ y $\alpha > 0$, entonces

$$\mathbb{E}_{f_\beta(p)} \left(\frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^N \cap H_N| \right) \rightarrow h_{\beta,\alpha}(p) \quad , N \rightarrow \infty$$

Uniformemente en la densidad inicial p .

DEMOSTRACIÓN. Se considerará el principio del lema 2.7 hasta la construcción de las variables aleatorias $\tilde{\eta}_1^N(0)$ condicional al evento $\{0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^N\}$ a partir de B_i^N , además de esto se utilizará una colección $(B_i)_{i \in \tau}$ con $B_i \sim \text{Bern}(\alpha)$, variables aleatorias que utilizadas en el proceso límite.

Se calcula el término de la izquierda de ec. (2.1) como sigue

$$\mathbb{P}_{f_\beta(p)}(0 \in \tilde{\eta}_1^N | 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^N) = \mathbb{P}_{f_\beta(p)} \left(0 \in \tilde{\eta}_1^N, \text{diam}(C_0) \leq \frac{\log_2(N)}{5} | 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^N \right) \quad (2.7)$$

$$+ \mathbb{P}_{f_\beta(p)} \left(0 \in \tilde{\eta}_1^N, \frac{\log_2(N)}{5} < \text{diam}(C_0) | 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^N \right) \quad (2.8)$$

Para la expresión en ec. (2.7)

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_{f_\beta(p)} \left(0 \in \tilde{\eta}_1^N, \text{diam}(C_0) \leq \frac{\log_2(N)}{5} \mid 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^N \right) \\
&= \mathbb{P}_{f_\beta(p)} \left(B_i^N = 0 \ \forall i \in C_0, \text{diam}(C_0) \leq \frac{\log_2(N)}{5} \mid 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^N \right) \\
&= \frac{\mathbb{P}_{f_\beta(p)} \left(B_i^N = 0 \ \forall i \in C_0, \text{diam}(C_0) \leq \frac{\log_2(N)}{5}, 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^N \right)}{\mathbb{P}_{f_\beta(p)} \left(0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^N \right)} \\
&= \frac{\mathbb{P}_{f_\beta(p)} \left(B_i^N = 0 \ \forall i \in C_0, 0 < \text{diam}(C_0) \leq \frac{\log_2(N)}{5}, 0 \in H_N \right)}{\mathbb{P}_{f_\beta(p)} \left(0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^N \right)} \\
&\rightarrow \frac{\mathbb{P}_{f_\beta(p)} (B_i = 0 \ \forall i \in C_0, 0 < \text{diam}(C_0) \leq \infty)}{\mathbb{P}_{f_\beta(p)} (0 \text{ está abierto})} \\
&= \mathbb{P}_{f_\beta(p)} (B_i = 0 \ \forall i \in C_0, \text{diam}(C_0) < \infty \mid 0 \text{ está abierto})
\end{aligned}$$

La última convergencia es uniforme en p como se vio en el lema 2.17. Al traducir el resultado anterior se obtiene

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_{f_\beta(p)} (B_i = 0 \ \forall i \in C_0, \text{diam}(C_0) < \infty \mid 0 \text{ está abierto}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_{f_\beta(p)} \left(\prod_{i=1}^{|C_0|} \mathbb{1}_{\{B_i=0\}} \mathbb{1}_{\{|C_0|=k\}} \mid 0 \text{ está abierto} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_{f_\beta(p)} \left(\prod_{i=1}^k \mathbb{1}_{\{B_i=0\}} \mathbb{1}_{\{|C_0|=k\}} \mid 0 \text{ está abierto} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_{f_\beta(p)} \left(\prod_{i=1}^k \mathbb{1}_{\{B_i=0\}} \right) \mathbb{E}_{f_\beta(p)} (\mathbb{1}_{\{|C_0|=k\}} \mid 0 \text{ está abierto}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \alpha)^k \mathbb{E}_{f_\beta(p)} (\mathbb{1}_{\{|C_0|=k\}} \mid 0 \text{ está abierto}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_{f_\beta(p)} ((1 - \alpha)^{|C_0|} \mathbb{1}_{\{|C_0|=k\}} \mid 0 \text{ está abierto}) \\
&= \mathbb{E}_{f_\beta(p)} ((1 - \alpha)^{|C_0|} \mid 0 \text{ está abierto}) \\
&= \frac{\mathbb{E}_{f_\beta(p)} ((1 - \alpha)^{|C_0|} \mathbb{1}_{\{|C_0|>0\}})}{\mathbb{P}_{f_\beta(p)}(|C_0| > 0)} \\
&= \frac{g_\alpha(f_\beta(p))}{f_\beta(p)}
\end{aligned}$$

El intercambio de la suma se puede hacer gracias a Tonelli, pues las cantidades consideradas son todas positivas. Para ec. (2.8) se utiliza N suficientemente grande tal que se cumpla que

$\alpha_N > \frac{\alpha}{2}$, luego

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(0 \in \tilde{\eta}_1^N, \frac{\log_2(N)}{5} < \text{diam}(C_0) \mid 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^N\right) &\leq (1 - \alpha_N)^{\frac{\log_2(N)}{5}} \\ &\leq \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{\log_2(N)}{5}} \\ &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Lo anterior, pues debe existir un camino abierto hacia la frontera, juntando los resultados vistos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(0 \in \tilde{\eta}_1^N \mid 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^N) \mathbb{P}(0 \in H_N) \mathbb{P}(0 \in \eta_{1/2}^N) &\longrightarrow \frac{g_\alpha(f_\beta(p))}{f_\beta(p)}(f_\beta(p)) \\ &= g_\alpha(f_\beta(p)) \\ &= h_{\beta,\alpha}(p) \end{aligned}$$

□

DEMOSTRACIÓN TEOREMA 2.15. Igual a la del teorema 2.9 reemplazando el lema 2.7 por el lema 2.18. □

2.2.1. Extinción de la tendencia moda

En lo que sigue, dado que ya se conoce el comportamiento del proceso en el límite, se buscará describir el diagrama de fase del sistema. En una primera instancia se estudiará la extinción del proceso, notando que para que exista extinción la curva $h_{\beta,\alpha}(p)$ debe estar bajo la identidad, puesto que de esta forma el itinerario de todo punto se acerca al 0. Para encontrar una relación candidata entre α y β desde la cual se cumpla extinción se realiza lo siguiente

Proposición 2.19

$$\lim_{p \rightarrow 0} h'_{\beta,\alpha}(p) = -(\alpha - 1)(1 + \beta)$$

DEMOSTRACIÓN. Ver anexo proposición 4.19 □

Lo anterior dice que la derivada en $p = 0$ es más pequeña que uno si

$$\alpha = \alpha_e := \frac{\beta}{1 + \beta}$$

Proposición 2.20 *El sistema dinámico definido por $h_{\beta,\alpha}$ tiene como único punto fijo atractor al 0 si*

$$\alpha \geq \alpha_e \quad \forall \beta \in [0, 1]$$

Se necesitarán unos lemas antes de continuar.

Lema 2.21 *La función $g_\alpha(p)$ es estrictamente decreciente en α .*

DEMOSTRACIÓN. Calculando

$$\frac{\partial g_\alpha(p)}{\partial \alpha} = \frac{\left(-1 + \sqrt{1 - 4p(1-p)(1-\alpha)}\right)^2 \left(-1 + (1-\alpha)(1-p)p + \sqrt{1 - 4p(1-p)(1-\alpha)}\right)}{4(1-\alpha)^3 p^2 \sqrt{1 - 4p(1-p)(1-\alpha)}}$$

Por lo que para demostrar que es decreciente basta con mostrar que

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 - 4p(1-p)(1-\alpha)} < 1 - (1-\alpha)(1-p)p \\ \iff & 1 - 4p(1-p)(1-\alpha) < 1 - 2(1-\alpha)(1-p)p + (1-\alpha)^2(1-p)^2 p^2 \\ \iff & -2p(1-p)(1-\alpha) < (1-\alpha)^2(1-p)^2 p^2 \end{aligned}$$

Se justifica el primer paso, pues $\sqrt{1 - 4p(1-p)(1-\alpha)} > 0$ y $1 - (1-\alpha)(1-p)p > 0$. La última equivalencia presentada se cumple de forma trivial. \square

Lema 2.22 *La función $g_\alpha(p)$ posee un único máximo para en $p \in [0, 1]$ el cual se denotará por p_α , y el máximo de g_0 es $\frac{1}{2}$.*

DEMOSTRACIÓN. Ver anexo lema 4.20 \square

Luego de esto cabe destacar que se recupera $g_0 \equiv g$ utilizada al principio. Por lo que a su vez se demostró que h_β evaluado en el máximo es $\frac{1}{2}$ pues la función f_β no es más que un cambio de coordenada.

Lema 2.23 *La función*

$$U_{\beta,\alpha}(p) = 8p(1-\alpha)^2(1 - (1-p)(1-\beta p))^2 - 1 - 3(1 - 4(1-\alpha)(1-p)(1 - (1-p)(1-\beta p)))$$

es decreciente en α para $\alpha \in [0, 1]$ $p \in [0, \frac{1}{2}]$ y $\beta \in [0, 1]$.

DEMOSTRACIÓN. Derivando con respecto a α una vez más

$$\frac{\partial U_{\beta,\alpha}(p)}{\partial \alpha} = 4p(\beta - \beta p + 1)(-3 + p(3 + 4(\alpha - 1)p(\beta - \beta p + 1)))$$

Para demostrar que esto es negativo basta con demostrar que

$$-3 + p(3 + 4(\alpha - 1)p(\beta - \beta p + 1)) < 0$$

Entonces

$$\begin{aligned} & -3 + p(3 + 4(\alpha - 1)p(\beta - \beta p + 1)) \\ & \leq -3 + 3p \\ & \leq 0 \end{aligned}$$

\square

Lema 2.24 *La función*

$$I_\beta(p) = U_{\beta, \frac{\beta}{1+\beta}}(p) \\ = \frac{4(-2\beta + \beta^2((p-1)^2 p(2p^2 + 3) - 1) + \beta p(p((7-4p)p - 9) + 6) + p(p(2p-3) + 3) - 1)}{(\beta + 1)^2}$$

es decreciente en β para $\beta \in [0, 1]$ y $p \in [0, \frac{1}{2}]$.

DEMOSTRACIÓN. Derivando con respecto a β

$$\frac{\partial I_\beta(p)}{\partial \beta} = \frac{4p^2(\beta(p-1)(4p^2+3) - 4p^2 + 3p - 3)}{(\beta+1)^3}$$

Luego para demostrar que esto es negativo basta con demostrar que

$$\beta(p-1)(4p^2+3) - 4p^2 + 3p - 3 < 0$$

Pero

$$\underbrace{\underbrace{(p-1)\beta}_{\leq 0} \underbrace{(4p^2+3)}_{\geq 0}}_{\leq 0} - 4p^2 + \underbrace{3p-3}_{\leq 0} \leq 0$$

□

Lema 2.25 *La función*

$$U_{\beta, \alpha}(p) \leq 0$$

Para $p \in [0, \frac{1}{2}]$, $\beta \in [0, 1]$ y $\alpha \in [\alpha_e, 1]$.

DEMOSTRACIÓN. Se obtiene del lema 2.23 y del lema 2.24 que

$$U_{\beta, \alpha}(p) \leq U_{\beta, \frac{\beta}{1+\beta}}(p) = I_\beta(p) \leq I_0(p) = 4(-1+2p)(1+(-1+p)p)$$

El cual es claramente menor o igual a 0.

□

DEMOSTRACIÓN PROPOSICIÓN 2.20. Se demostrará que la identidad está sobre la función $h_{\beta, \alpha}(p)$

$$h_{\beta, \alpha}(p) \leq \frac{\left(1 - \sqrt{1 - 4(1-\alpha)(1-p)(1-(1-p)(1-\beta p))}\right)^3}{8(1-\alpha)^2(1-(1-p)(1-\beta p))^2} \\ \iff p - h_{\beta, \alpha}(p) \geq p - \frac{\left(1 - \sqrt{1 - 4(1-\alpha)(1-p)(1-(1-p)(1-\beta p))}\right)^3}{8(1-\alpha)^2(1-(1-p)(1-\beta p))^2}$$

Con esto basta demostrar equivalentemente que

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow p - \frac{\left(1 - \sqrt{1 - 4(1 - \alpha)(1 - p)(1 - (1 - p)(1 - \beta p))}\right)^3}{8(1 - \alpha)^2(1 - (1 - p)(1 - \beta p))^2} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow 8p(1 - \alpha)^2(1 - (1 - p)(1 - \beta p))^2 \\
&\quad - \left(1 - \sqrt{1 - 4(1 - \alpha)(1 - p)(1 - (1 - p)(1 - \beta p))}\right)^3 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow 8p(1 - \alpha)^2(1 - (1 - p)(1 - \beta p))^2 - 1 - \\
&\quad 3(1 - 4(1 - \alpha)(1 - p)(1 - (1 - p)(1 - \beta p))) \\
&\quad + (3 + (1 - 4(1 - \alpha)(1 - p)(1 - (1 - p)(1 - \beta p)))) \\
&\quad \cdot \sqrt{1 - 4(1 - \alpha)(1 - p)(1 - (1 - p)(1 - \beta p))} \geq 0 \tag{2.9} \\
&\Leftrightarrow - (8p(1 - \alpha)^2(1 - (1 - p)(1 - \beta p))^2 - 1 - \\
&\quad 3(1 - 4(1 - \alpha)(1 - p)(1 - (1 - p)(1 - \beta p))))^2 \\
&\quad + ((3 + (1 - 4(1 - \alpha)(1 - p)(1 - (1 - p)(1 - \beta p)))) \\
&\quad \sqrt{1 - 4(1 - \alpha)(1 - p)(1 - (1 - p)(1 - \beta p))})^2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow -64(\alpha - 1)^2 p^3 (\beta(p - 1) - 1)^2 ((\alpha - 1)\beta p - \alpha(\beta + 1) + \beta) \\
&\quad ((\alpha - 1)p^3 (\beta(p - 1) - 1) + 1) \geq 0 \tag{2.10} \\
&\Leftrightarrow -((\alpha - 1)\beta p - \alpha(\beta + 1) + \beta) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha\beta p - \beta p - \alpha\beta - \alpha + \beta \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha(\beta p - \beta - 1) \leq \beta p - \beta \tag{2.11} \\
&\Leftrightarrow \frac{\beta - \beta p}{\beta + 1 - \beta p} \leq \alpha \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Se justifica el paso realizado en ec. (2.9) gracias a la limitación al recorrido $p \in [0, \frac{1}{2}]$ lo que se obtiene al notar que f_β es sólo un cambio de variable en la función g_α y ésta está mayorada por g_0 (ver lema 2.21), además de esto g_0 tiene máximo $\frac{1}{2}$; Por lo anterior, $h_{\beta, \alpha}$ tiene un máximo menor o igual a $\frac{1}{2}$. Luego haciendo uso del lema 2.25 se obtiene

$$8p(1 - \alpha)^2(1 - (1 - p)(1 - \beta p))^2 - 1 - 3(1 - 4(1 - \alpha)(1 - p)(1 - (1 - p)(1 - \beta p))) < 0$$

En ec. (2.10)

$$64(\alpha - 1)^2 p^3 (\beta(p - 1) - 1)^2 > 0$$

Además

$$\left(\underbrace{(\alpha - 1)}_{\leq 0} \underbrace{p^3}_{\geq 0} \underbrace{(\beta(p - 1) - 1) + 1}_{\leq 1} \right) \geq 0$$

En ec. (2.11) se tiene que

$$\underbrace{\beta p}_{\leq 1} - \beta - 1 \leq -1$$

Justificándose el cambio de sentido de la desigualdad

Finalmente en ec. (2.12) para que se cumpla para todo $p \in [0, \frac{1}{2}]$ se debe examinar la solución al siguiente problema

$$(P_\beta) \quad \begin{aligned} \text{máx}_p \quad & \frac{\beta - \beta p}{\beta + 1 - \beta p} \\ \text{s.a.} \quad & 0 \leq p \leq 1 \end{aligned}$$

Para resolverlo se aplicará KKT lo que conlleva a plantear el siguiente Lagrangeano

$$\mathcal{L}(p, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\beta - \beta p}{\beta + 1 - \beta p} + \lambda_1(p - 1) + \lambda_2 p$$

Se analizan las condiciones de primer orden

$$-\frac{\beta}{(\beta + 1 - \beta p)^2} + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad (2.13)$$

$$\lambda_1(p - 1) = 0 \quad (2.14)$$

$$\lambda_2 p = 0 \quad (2.15)$$

Existen 4 casos

1. $\lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 = 0$: ec. (2.13) no se cumple pues no existe p que cumpla la condición
2. $\lambda_1 \geq 0 \wedge \lambda_2 \geq 0$: Existe una contradicción pues ec. (2.14) y ec. (2.15) $\implies p = 0 \wedge p = 1$.
3. $\lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 \geq 0$: ec. (2.15) $\implies p = 0$ y $\lambda_2 = \frac{\beta}{(\beta+1)^2}$
4. $\lambda_1 \geq 0 \wedge \lambda_2 = 0$ ec. (2.14) $\implies p = 1$ y $\lambda_1 = \beta$

Evaluando se aprecia que el máximo se alcanza en $p = 0$ por lo que se tiene

$$\alpha \geq \frac{\beta}{1 + \beta} = \alpha_e$$

Concluyendo lo pedido. □

Teorema 2.26 *El sistema dinámico definido por $h_{\beta, \alpha}$ se extingue si*

$$\alpha \geq \alpha_e \quad \forall \beta \in [0, 1]$$

DEMOSTRACIÓN. Como ya se señaló anteriormente, la función g_α es C^∞ en $(0, 1)$, $\forall \alpha \in (0, 1)$ y tiene sólo un punto crítico p_α^* en este dominio, por lo tanto antes del punto crítico la derivada siempre tiene el mismo signo, y al evaluar cerca de 0 se aprecia que ésta es positiva, luego entre 0 y p_α^* la función g_α es creciente. Se argumenta que $h_{\beta, \alpha}$ es creciente en $[0, f_\beta^{-1}(p_\alpha^*)]$ gracias a que es la composición de funciones crecientes. Luego utilizando $h_{\beta, \alpha} : [0, f_\beta^{-1}(p_\alpha^*)] \rightarrow [0, f_\beta^{-1}(p_\alpha^*)]$ extendida por continuidad al 0, se sabe que 0 es el único punto fijo gracias al teorema 2.8, finalmente se tiene gracias a la proposición 1.18 que $\forall x \in [0, 1] \lim_{n \rightarrow \infty} h_{\beta, \alpha}^n(x) = 0$. □

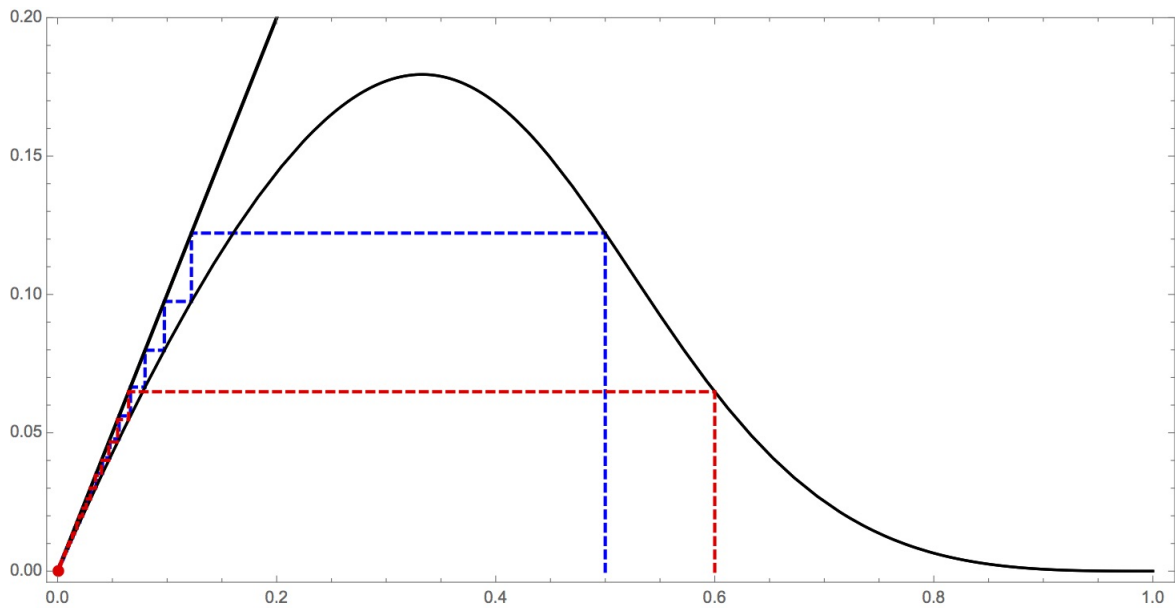


Figura 2.2: Gráfico de Cobweb asociado a $h_{\beta, \alpha}$ para $\beta = 0.1$ y $\alpha = 0.190909$ partiendo desde los puntos 0.5 y 0.6.

En la fig. 2.2 se presenta una imagen que representa el comportamiento del sistema para un parámetro con extinción.

Gracias a lo anterior también se puede pensar que para $\alpha \in [0, 1]$ dado existe β_e tal que si $\beta < \beta_e$, entonces el sistema se extingue. Mediante unos cálculos se obtiene que

$$\beta_e := \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

Las pruebas computacionales de este sistema muestran que para una amplia gama de parámetros $\alpha \in [0, 1]$ su diagrama de bifurcaciones se comporta de forma similar a fig. 2.3, comportamiento que será comentado en el capítulo 4

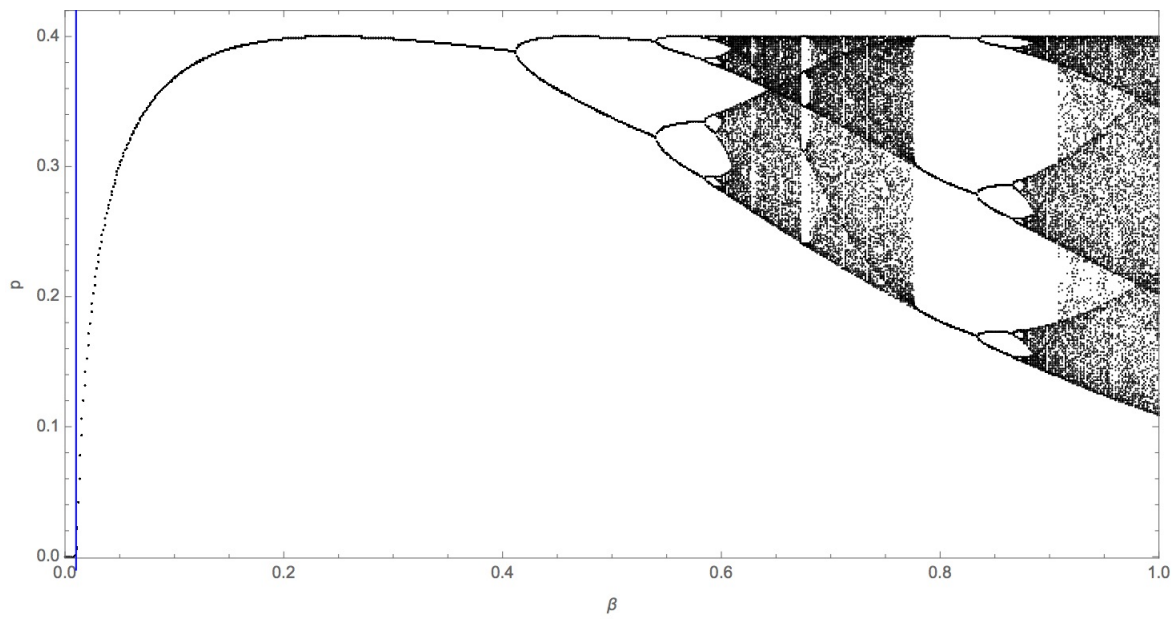


Figura 2.3: Diagrama de Bifurcaciones **MVM** para $\alpha = 0.01$. Se muestran desde la iteración 900 a la 1000 consideradas al partir desde el máximo de $h_{\beta,\alpha}(p)$. La línea azul representa el valor β máximo para el cual se ve extinción, i.e. β_e .

Capítulo 3

Extensiones a MM

En este capítulo se tornará el foco de investigación al modelo MM principalmente por la dificultad algebraica —tamaño de los polinomios— y extensión de las expresiones obtenidas en MVM al demostrar o extraer propiedades de este.

3.1. Punto Fijo de $f_\beta(p)$

Como se recordó en preliminares el sistema h_β posee propiedades interesantes y algunas de ellas fueron demostradas en [11]. A continuación se muestran nuevos resultados para este sistema.

Proposición 3.1 *La función f_β posee un punto fijo no nulo para $\beta > 1$. Este punto fijo está dado por*

$$p^* = 1 + \frac{W(-\beta e^{-\beta})}{\beta} = 1 + \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} (-\beta e^{-\beta})^n}{\beta}$$

Donde W es la función de Lambert.

DEMOSTRACIÓN. Se establece la ecuación de punto fijo

$$\begin{aligned} x &= 1 - e^{-\beta x} \\ \iff e^{-\beta x} &= 1 - x \\ \iff e^{-\beta} e^{\beta(1-x)} &= 1 - x \\ \iff e^{-\beta} &= e^{-\beta(1-x)}(1 - x) \\ \iff -\beta e^{-\beta} &= -\beta(1 - x)e^{-\beta(1-x)} \end{aligned}$$

Esta última puede ser resuelta mediante la función W de Lambert, ya que $|-\beta e^{-\beta}| = \beta e^{-\beta} = \beta e^{-\beta+1} e^{-1} \leq e^{-1}$, pues $1 \leq \beta \leq e^{\beta-1}$. Por lo anterior esta expresión está en el radio de convergencia de la representación como serie de la función, por lo tanto,

$$-\beta(1 - x) = W(-\beta e^{-\beta}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} (-\beta e^{-\beta})^n$$

Y con esto se obtiene

$$x = 1 + \frac{W(-\beta e^{-\beta})}{\beta} = 1 + \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} (-\beta e^{-\beta})^n}{\beta}$$

□

En lo que sigue será de utilidad definir la siguiente función

$$\begin{aligned} FP : [1, \infty] &\rightarrow [0, 1] \\ \beta &\rightarrow 1 + \frac{W(-\beta e^{-\beta})}{\beta} = 1 + \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} (-\beta e^{-\beta})^n}{\beta} \end{aligned}$$

Proposición 3.2 *Para $\beta \in (1, \infty]$ el punto $FP(\beta)$ es un punto fijo atractor de f_β y 0 es un punto fijo repelente.*

DEMOSTRACIÓN. Se calcula

$$f'_\beta(FP(\beta)) = \beta e^{-\beta FP(\beta)} = -W(-\beta e^{-\beta})$$

Y $| -W(-\beta e^{-\beta}) | < 1$ gracias a que la función W de Lambert toma valores en $(-1, 0]$ en la parte negativa. Con esto se tiene la atracción del punto fijo. Para el punto 0 se calcula

$$f'_\beta(0) = \beta > 1$$

Luego este punto es repulsor. □

Proposición 3.3 $\forall x \in [0, 1] \setminus \{0\}$ se cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_\beta^n(x) = FP(\beta)$.

DEMOSTRACIÓN. La función f_β es creciente en p y tiene dos puntos fijos: 0 que es repulsor y $FP(\beta)$ que es atractor; luego, en virtud de la proposición 1.18 se obtiene que $\forall x \in [0, 1] \setminus \{0\}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_\beta^n(x) = FP(\beta)$. □

En la fig. 3.1 se presenta una imagen que representa el comportamiento del sistema f_β y su punto fijo no nulo.

3.2. Extensión para $\alpha_N \rightarrow \alpha > 0$

En esta sección se comenzará a estudiar el proceso estocástico considerando la muerte de las componentes conexas de tamaño finito para el caso de **MM**. Al igual que al principio se obtendrá un candidato heurístico a límite del proceso, éste será un sistema dinámico.

Para el proceso de epidemia se utilizará la función

$$g_\alpha(p) = \frac{\left(1 - \sqrt{1 - 4(1 - \alpha)(1 - p)p}\right)^3}{8(1 - \alpha)^2 p^2}$$

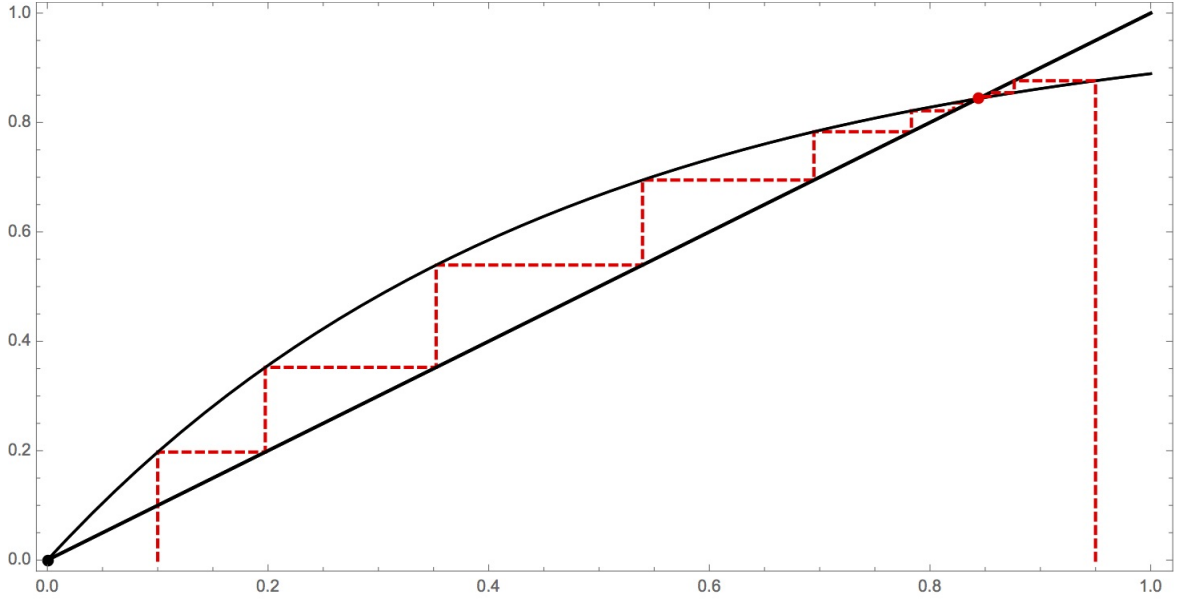


Figura 3.1: Gráfico de Cobweb asociado a f_β para $\beta = 2.2$ partiendo desde los puntos 0.1 y 0.95.

La justificación es igual a la utilizada al principio de la sección 2.2. Por lo tanto la función asociada al sistema dinámico esta definida por

$$h_{\alpha,\beta}(p) = g_\alpha(f_\beta(p)) = \frac{\left(1 - \sqrt{1 - 4(1 - \alpha)e^{-\beta p}(1 - e^{-\beta p})}\right)^3}{8(1 - \alpha)^2(1 - e^{-\beta p})^2}$$

Extendida al 0 por continuidad (se puede hacer ya que la solución de la función de catalán se escoge de modo que en 0 este bien definida por continuidad). Se verá al igual que antes, bajo qué condiciones el proceso estocástico converge a este sistema dinámico; después de esto, se verá algunas propiedades del sistema dinámico. Las notaciones que se utilizarán son análogas con las de *MVM*.

Teorema 3.4 *Para el modelo MM si $G_N = R_N$, $\alpha \in (0, 1)$ y la probabilidad de infección de la epidemia satisface*

$$\alpha_N \rightarrow \alpha \quad \text{Cuando} \quad N \rightarrow \infty$$

Entonces el proceso $(\rho_k^N)_{k \geq 0}$ converge en distribución a la órbita determinista comenzando con p , del sistema dinámico asociado a $h_{\beta,\alpha}$.

DEMOSTRACIÓN. Análoga a la del teorema 2.15, considerando que $(1 - \frac{\beta}{N})^{pN} \rightarrow e^{-\beta p}$ uniforme en $p \in [0, 1]$. \square

3.2.1. Extinción

Lema 3.5

$$\lim_{p \rightarrow 0} h'_{\beta,\alpha}(p) = \beta - \alpha\beta$$

DEMOSTRACIÓN. Ver Anexo lema 4.21

□

Lo anterior entrega como candidato a parámetro crítico para la extinción

$$\alpha = \alpha_e := \frac{\beta - 1}{\beta}$$

Proposición 3.6 *El sistema dinámico definido por $h_{\beta,\alpha}$ tiene como único punto fijo a 0 si*

$$\alpha > \alpha_e \quad \forall \beta \in [0, 1]$$

El cual es atractor.

DEMOSTRACIÓN. Por el lema 3.5 se tiene que es un punto atractor. Para iniciar se hace mención al lema 2.21 el que permite equivalentemente demostrar que

$$\frac{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4e^{-\beta p}(1-e^{-\beta p})}{\beta}}\right)^3}{8\left(\frac{1}{\beta}\right)^2(1-e^{-\beta p})^2} > 0$$

Se utilizará $x = x(\beta, p) = \left(\frac{1-e^{-\beta p}}{\beta}\right) \in [0, 1]$, expresión decreciente en β pues tiene por derivada a

$$\underbrace{\frac{e^{\beta(-p)}}{\beta^2}}_{\geq 0} \underbrace{(\beta p - e^{\beta p} + 1)}_{\leq 0} \leq 0$$

Ya que $e^{p\beta} - 1 \geq p\beta \quad \forall p \in [0, 1], \beta \in \mathbb{R}^+$. Tomando en cuenta esto se realiza la siguiente transformación

$$\frac{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4e^{-\beta p}(1-e^{-\beta p})}{\beta}}\right)^3}{8\left(\frac{1}{\beta}\right)^2(1-e^{-\beta p})^2} = \left(\frac{1}{2x^{\frac{2}{3}}} - \sqrt{\frac{1}{4x^{\frac{4}{3}}} - \frac{e^{-\beta p}}{x^{\frac{1}{3}}}}\right)^3$$

La expresión $x \in [0, 1]$ Luego $\frac{1}{4x^{\frac{4}{3}}} - \frac{e^{-\beta p}}{x^{\frac{1}{3}}}$ es creciente en β , y finalmente

$$\left(\frac{1}{2x^{\frac{2}{3}}} - \sqrt{\frac{1}{4x^{\frac{4}{3}}} - \frac{e^{-\beta p}}{x^{\frac{1}{3}}}}\right)^3$$

es decreciente en β . Luego basta con demostrar que

$$p - \frac{\left(1 - \sqrt{1 - 4e^{-p}(1-e^{-p})}\right)^3}{8(1-e^{-p})^2}$$

Finalmente se minimiza esta expresión computacionalmente en $p \in [0, 1]$ obteniéndose el ínfimo en 0 para el límite de la expresión anterior cuando $p \rightarrow 0$. □

Teorema 3.7 *El sistema dinámico definido por $h_{\beta,\alpha}$ se extingue si*

$$\alpha \geq \alpha_e \quad \forall \beta \in [0, 1]$$

DEMOSTRACIÓN. Como ya se analizó anteriormente, la función g_α es C^∞ en $(0, 1)$, $\forall \alpha \in (0, 1)$ y tiene solo un punto crítico a p_α^* en este dominio, por lo tanto antes del punto crítico la derivada siempre tiene el mismo signo, y al evaluar cerca de 0 se aprecia que ésta es positiva, luego entre 0 y p_α^* la función g_α es creciente. Se argumenta que $h_{\beta,\alpha}$ es creciente en $[0, f_\beta^{-1}(p_\alpha^*)]$ gracias a que es la composición dos funciones crecientes. Luego utilizando $h_{\beta,\alpha} : [0, f_\beta^{-1}(p_\alpha^*)] \rightarrow [0, f_\beta^{-1}(p_\alpha^*)]$ extendida por continuidad al 0, se sabe que el 0 es el único punto fijo gracias al teorema 2.8. Finalmente por la proposición 1.18 se tiene que $\forall x \in [0, 1] \lim_{n \rightarrow \infty} f_\beta^n(x) = 0$. \square

En la fig. 3.2 se presenta una imagen que representa el comportamiento del sistema para un parámetro con extinción.

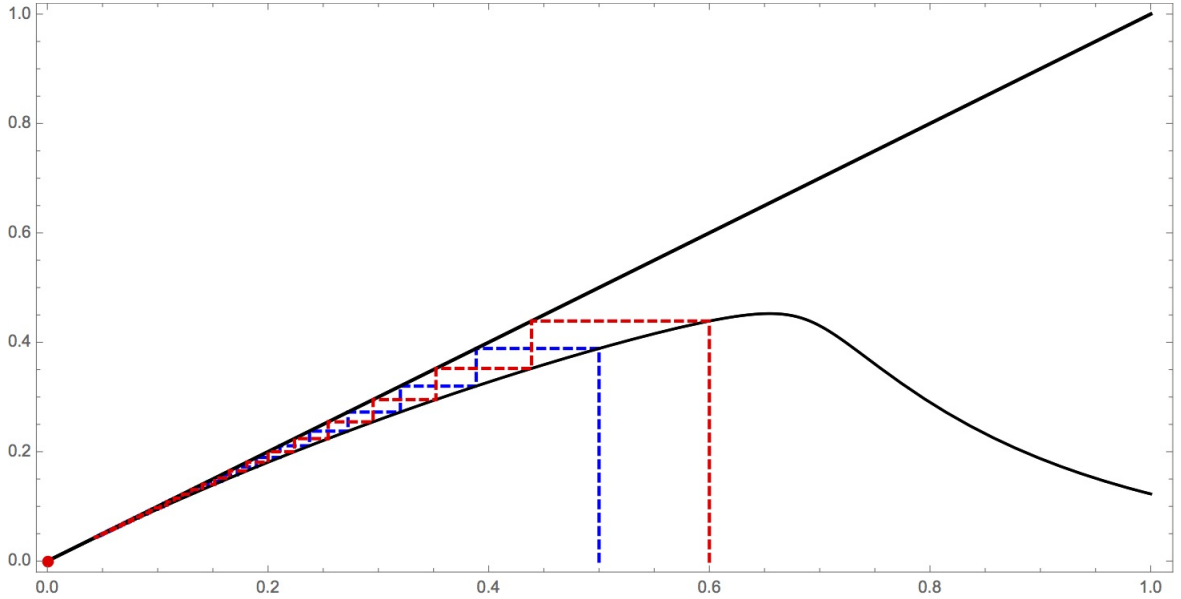


Figura 3.2: Gráfico de Cobweb asociado a $h_{\beta,\alpha}$ para $\beta = 0.1$ y $\alpha = 0.190909$ partiendo desde los puntos 0.375 y 0.5.

En la fig. 4.12a se muestra el diagrama de bifurcaciones de este nuevo sistema, el que será discutido en la sección 4.

3.3. Extensión a $\mathcal{N}_N(x) = B(i, r_N)$

Como se explicó al principio es de interés estudiar el comportamiento del sistema con otra regla de evolución, es por esto que se analizó la convergencia en el caso $\mathcal{N}_N(x) = B(i, r_N)$, logrando extender el resultado bajo ciertas hipótesis como explica el siguiente teorema.

Teorema 3.8 Si para MM se asume que

$$\frac{r_N}{N} \rightarrow 0 \quad \wedge \quad \alpha_N r_N \rightarrow \infty \quad \wedge \quad l_N := \sqrt{\frac{r_N}{\alpha_N}} \leq \frac{\log(N)}{5}$$

Además, $\alpha_N \rightarrow \alpha$, $\mathcal{N}_N(x) = B(i, r_N)$ y donde cada sitio ocupado genera una cantidad aleatoria Poisson(β) de crías. Entonces el proceso $(\rho_k^N)_{k \geq 0}$ converge en distribución a la órbita determinista, partiendo en p , del sistema dinámico asociado a $h_{\beta, \alpha}$.

El resultado anterior se tiene por ejemplo para $\alpha_N \rightarrow \alpha \in (0, 1]$ $r_N = \frac{\log(N)\alpha_N}{5}$.

Dado $i \in R_N$ y $m \in \mathbb{N}$ se definen

$$\begin{aligned} B(i, m) &:= \{j \in R_N : d(i, j) \leq m\} \\ V(m) &:= |B(i, m)| = 3 \cdot 2^m - 2 \\ d_k^N(i) &:= \frac{1}{V(r_N)} \sum_{j \in B(i, r_N)} \eta_k^N(j) \\ G_k^N(\varepsilon) &:= \{i \in \mathbb{R}_N : |d_k^N(i) - h_{\beta, \alpha}^k(p)| < \varepsilon\} \end{aligned}$$

Donde $d_k^N(i)$ es la densidad de sitios ocupados en la vecindad de crecimiento de i , mientras que $G_k^N(\varepsilon)$, es el conjunto de puntos “Buenos” a tiempo k .

Proposición 3.9 Sea $k \in \mathbb{N}$, entonces $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0, \exists \delta_1, \delta_2 > 0, N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{N} \mathbb{E}(|R_N \setminus G_k^N(\delta_1)|) < \delta_2 \implies \frac{1}{N} \mathbb{E}(|R_N \setminus G_{k+1}^N(\varepsilon_1)|) < \varepsilon_2$$

La demostración de este lema se basará en una serie de lemas

Lema 3.10 Dado $\delta > 0$

$$\frac{1}{N} \mathbb{E}(|R_N \setminus G_0^N(\delta)|) \rightarrow 0 \quad \text{Cuando } N \rightarrow \infty$$

DEMOSTRACIÓN. Por la invarianza bajo translación se tiene que

$$\frac{1}{N} \mathbb{E}(|R_N \setminus G_0^N(\delta)|) = \frac{1}{N} \sum_{i \in R_N} \mathbb{P}(i \notin G_0^N(\delta)) = \mathbb{P}(|d_0^N(0) - p| \geq \delta)$$

Donde $\mathbb{E}(d_0^N(0)) = p$, luego $V(r_N)d_0^N(0)$ es la suma de $V(r_N)$ variables aleatorias Bernoulli independientes de parámetro p . Por la desigualdad de Chebyshev se tiene

$$\frac{1}{N} \mathbb{E}(|R_N \setminus G_0^N(\delta)|) = \mathbb{P}(|d_0^N(0) - p| \geq \delta) \leq \frac{V(r_N)p(1-p)}{\delta^2 V(r_N)^2} \rightarrow 0$$

□

Desde aquí se considerarán fijos δ_1 , δ_2 , ε_1 y ε_2 , asumiendo que se cumple la siguiente propiedad para N suficientemente grande

$$\frac{1}{N^d} \mathbb{E}(R_N \setminus G_k^N(\delta_1)) < \delta_2 \quad (3.1)$$

Como cada sitio ocupado i manda una cantidad aleatoria de crías $Poisson(\beta)$ en la fase de crecimiento, cada una de ellas a un sitio escogido aleatoriamente dentro de $B(i, r_N)$, podemos pensar equivalentemente que cada sitio ocupado i lanza una cantidad aleatoria de crías $Poisson\left(\frac{\beta}{V(r_N)}\right)$ a cada uno de los $V(r_N)$ sitios a distancia menor que r_N de él, así mientras dura la fase de crecimiento cada sitio i recibe

$$\sum_{j \in B(i, r_N)} \eta_k^N(j) Y_{j,i}$$

crías, donde $(Y_{i,j})_{i,j \in R_N}$ son $Poisson\left(\frac{\beta}{V(r_N)}\right)$ i.i.d. Condicional a $d_k^N(i)$ la última suma se distribuye como una $Poisson(\beta d_k^N(i))$, por esto se puede pensar en la etapa de crecimiento como que dado η_k^N , cada i estará en $\eta_{k+1/2}^N$ con probabilidad igual a la probabilidad de que una $Poisson(\beta d_k^N(i))$ sea positiva, esto es, con probabilidad $1 - e^{-\beta d_k^N(i)}$. Para l_N definido en el enunciado se cumple que

$$\frac{l_N}{r_N} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_N r_N}} \rightarrow 0 \quad \wedge \quad \alpha_N l_N = \sqrt{\alpha_N r_N}$$

Nuevamente se llamará $\tilde{\eta}_{k+1}^N$ a la configuración obtenida a partir de $\eta_{k+1/2}^N$ ignorando las infecciones provenientes de una distancia mayor a l_N .

Lema 3.11

$$\frac{1}{N} \sum_{i \in R_N} \mathbb{E} (|\eta_{k+1}^N(i) - \tilde{\eta}_{k+1}^N(i)|) \rightarrow 0 \quad \text{Cuando } N \rightarrow \infty$$

En particular

$$\mathbb{E} (|\rho_{k+1}^N - \tilde{\rho}_{k+1}^N|) \rightarrow 0 \quad \text{Cuando } N \rightarrow \infty$$

DEMOSTRACIÓN. Gracias a la invarianza por translación, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i \in R_N} \mathbb{E} (|\eta_{k+1}^N(i) - \tilde{\eta}_{k+1}^N(i)|) &= \frac{1}{N} \sum_{i \in R_N} \mathbb{P} (\eta_{k+1}^N(i) \neq \tilde{\eta}_{k+1}^N(i)) \\ &= \mathbb{P} (0 \in \tilde{\eta}_{k+1}^N(i) \setminus \eta_{k+1}^N(i)) \\ &\leq (1 - \alpha_N)^{l_N} \\ &\approx e^{-\alpha_N l_N} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

□

Al igual que en el teorema 2.2 se dará una construcción explícita de la variable aleatoria $\tilde{\eta}_{k+1}^N(0)$ y también se construirá $\eta_{k+1/2}^N(i)$. Se considerará una colección $X = (X(i))_{i \in R_N}$ i.i.d

de variables aleatorias con distribución uniforme $[0, 1]$ y , dado η_k^N construir $\eta_{k+1/2}^N$ como sigue

$$\eta_{k+1/2}^N(i) = \mathbb{1}_{\{X(i) > e^{-\beta d_k^N(i)}\}}$$

La anterior cumple $\mathbb{P}(\eta_{k+1/2}^N(i) = 1) = 1 - e^{-\beta d_k^N(i)}$ y concuerda con la explicación anterior para la fase de crecimiento. Se denominará por C_0^N al cluster abierto en $\eta_{k+1/2}^N$ que contiene a 0. Se define $((B_i^N)_{i \in R_N})_{N \geq 0}$ como en el lema 2.7 y

$$\tilde{\eta}_{k+1}^N(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } \eta_{k+1/2}^N(0) = 1 \text{ y } B_i^N = 0 \forall i \in C_0^N \cap B(0, l_N) \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Esta construcción, al igual que antes, es la correcta para $\tilde{\eta}_{k+1}^N(0)$, pues es la forma canónica de construirla. Se introduce otra modificación de η_{k+1}^N , esta será una construcción análoga $\hat{\eta}_{k+1}^N(0)$ salvo la etapa de crecimiento en donde se utilizará

$$\hat{\eta}_{k+1/2}^N(i) := \mathbb{1}_{\{X(i) > e^{-\beta h_{\beta, \alpha}^k(p)}\}}$$

Esto quiere decir que $\hat{\eta}_{k+1/2}^N$ es correr el proceso con densidad de sitios ocupados igual a $h_{\beta, \alpha}^k(p)$. Se denotará por $\hat{\rho}_k^N = \frac{|\hat{\eta}_k^N|}{N}$ a la densidad de sitios ocupados por el proceso modificado.

Lema 3.12 *Dado $\varepsilon > 0$ cualquiera, si δ_1 y δ_2 son suficientemente pequeños, entonces*

$$\mathbb{E} (|\tilde{\rho}_{k+1}^N - \hat{\rho}_{k+1}^N|) \leq \varepsilon$$

para N suficientemente grande.

DEMOSTRACIÓN. Se calcula

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} (|\tilde{\rho}_{k+1}^N - \hat{\rho}_{k+1}^N|) \\ & \leq \frac{1}{N} \sum_{i \in R_N} \mathbb{E} (|\tilde{\eta}_{k+1}^N(i) - \hat{\eta}_{k+1}^N(i)|) \\ & = \mathbb{P}(\tilde{\eta}_{k+1}^N(0) \neq \hat{\eta}_{k+1}^N(0)) \\ & \leq \mathbb{P}(\tilde{\eta}_{k+1}^N(0) \neq \hat{\eta}_{k+1}^N(0), 0 \in G_k^N(\delta_1)) + \mathbb{P}(0 \notin G_k^N(\delta_1)) \\ & \leq \mathbb{P}(\tilde{\eta}_{k+1}^N(0) \neq \hat{\eta}_{k+1}^N(0), 0 \in G_k^N(\delta_1)) + \delta_2 \end{aligned}$$

La última cota viene de ec. (3.1). Para lidiar con el término de la izquierda se realiza lo siguiente

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\tilde{\eta}_{k+1}^N(0) \neq \hat{\eta}_{k+1}^N(0), 0 \in G_k^N(\delta_1)) \\ & \leq \mathbb{P}(\tilde{\eta}_{k+1}^N(0) \neq \hat{\eta}_{k+1}^N(0), |d_k^N(i) - h_{\beta, \alpha}^k(p)| \leq 2\delta_1 \forall i \in B(0, l_N), 0 \in G_k^N(\delta_1)) \\ & \quad + \mathbb{P}(|d_k^N(i) - h_{\beta, \alpha}^k(p)| > 2\delta_1 \text{ para algún } i \in B(0, l_N), 0 \in G_k^N(\delta_1)) \\ & \leq \mathbb{P}(\tilde{\eta}_{k+1}^N(0) \neq \hat{\eta}_{k+1}^N(0), |d_k^N(i) - h_{\beta, \alpha}^k(p)| \leq 2\delta_1 \forall i \in B(0, l_N)) \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$+ \mathbb{P}(|d_k^N(i) - d_k^N(0)| > \delta_1 \text{ para algún } i \in B(0, l_N)) \tag{3.3}$$

$$+ \mathbb{P}(|d_k^N(0) - h_{\beta, \alpha}^k(p)| > \delta_1, 0 \in G_k^N(\delta_1)) \tag{3.4}$$

El término en ec. (3.4) es 0 y el termino en ec. (3.3) cumple que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(|d_k^N(i) - d_k^N(0)| > \delta_1 \text{ para algún } i \in B(0, l_N)) \\
& \leq l_N \sup_{i \in B(0, l_N)} \mathbb{P}(|d_k^N(i) - d_k^N(0)| > \delta_1) \\
& = l_N \sup_{i \in B(0, l_N)} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{V(r_N)} \left(\sum_{j \in B(i, r_N) \setminus B(0, r_N)} \eta_k^N(j) - \sum_{j \in B(0, r_N) \setminus B(i, r_N)} \eta_k^N(j) \right)\right| > \delta_1\right) \\
& \leq \sup_{i \in B(0, l_N)} \frac{l_N \mathbb{V}ar\left(\left|\sum_{j \in B(i, r_N) \setminus B(0, r_N)} \eta_k^N(j) - \sum_{j \in B(0, r_N) \setminus B(i, r_N)} \eta_k^N(j)\right|\right)}{V(r_N)^2 \delta_1^2} \\
& \leq \sup_{i \in B(0, l_N)} \frac{l_N \mathbb{V}ar\left(\sum_{j \in B(i, r_N) \setminus B(0, r_N) \cup B(0, r_N) \setminus B(i, r_N)} \eta_k^N(j)\right)}{V(r_N)^2 \delta_1^2} \\
& \leq \frac{2l_N V(r_N) \mathbb{V}ar(\eta_k^N(0))}{V(r_N)^2 \delta_1^2} \\
& \leq \frac{2l_N}{V(r_N) \delta_1^2} \\
& \leq \frac{2l_N}{r_N \delta_1^2} \\
& \rightarrow 0
\end{aligned}$$

En el desarrollo anterior se hizo uso de Chebyshev, que $\eta_k^N(i) \in \{0, 1\} \Rightarrow \mathbb{V}ar(\eta_k^N(i)) \leq 1 \forall i \in B(0, l_N)$ y la invarianza bajo translación. Para continuar se introduce la notación $\xi_{1/2}^q$ que será el conjunto de sitios abiertos en el proceso de percolación en un 3-árbol infinito con cada sitio abierto con probabilidad $1 - e^{-\beta q}$ para $q \in [0, 1]$ construido a partir de la familia X . En otras palabras $\xi_{1/2}^q(i) = \mathbb{1}_{\{X(i) > e^{-\beta q}\}}$ para cada $i \in R_N$. También se denotará por $\xi_1^{q, N}$ a la configuración obtenida de correr la epidemia en $\xi_{1/2}^q$, usando las variables $(B_i^N)_{i \in R_N}$, e ignorando las infecciones provenientes de una distancia mayor que l_N , con esta definición $\hat{\eta}_{k+1/2}^N = \xi_{1/2}^{h_{\beta, \alpha}^k(p)}$ y $\hat{\eta}_{k+1}^N = \xi_1^{h_{\beta, \alpha}^k(p), N}$. Se obtiene

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\tilde{\eta}_{k+1}^N(0) \neq \hat{\eta}_{k+1}^N(0), |d_k^N(i) - h_{\beta, \alpha}^k(p)| \leq 2\delta_1 \forall i \in B(0, l_N)) \\
& \leq \mathbb{P}(\xi_1^{h_{\beta, \alpha}^k(p) + 2\delta_1, N}(0) = 0, \xi_1^{h_{\beta, \alpha}^k(p), N}(0) = 1)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$+ \mathbb{P}(\xi_{1/2}^{h_{\beta, \alpha}^k(p) - 2\delta_1}(0) = 0, \xi_{1/2}^{h_{\beta, \alpha}^k(p)}(0) = 1) \tag{3.6}$$

$$+ \mathbb{P}(\xi_1^{h_{\beta, \alpha}^k(p) - 2\delta_1, N}(0) = 1, \xi_1^{h_{\beta, \alpha}^k(p), N}(0) = 0) \tag{3.7}$$

$$+ \mathbb{P}(\xi_{1/2}^{h_{\beta, \alpha}^k(p) + 2\delta_1}(0) = 1, \xi_{1/2}^{h_{\beta, \alpha}^k(p) - 2\delta_1}(0) = 0) \tag{3.8}$$

Primero se debe notar que $|d_k^N(i) - h_{\beta, \alpha}^k(p)| \leq 2\delta_1$ para todo $i \in B(0, l_N)$ implica que

$$1 - e^{-\beta(h_{\beta, \alpha}^k(p) - 2\delta_1)} \leq 1 - e^{-\beta d_k^N(i)} \leq 1 - e^{-\beta(h_{\beta, \alpha}^k(p) + 2\delta_1)}$$

Entonces

$$\xi_{1/2}^{h_{\beta, \alpha}^k(p) - 2\delta_1} \cap B(0, l_N) \subseteq C_0^N \cap B(0, l_N) \subseteq \xi_{1/2}^{h_{\beta, \alpha}^k(p) - 2\delta_1} \cap B(0, l_N)$$

Si $\tilde{\eta}_{k+1}^N(0) = 0$ y $\hat{\eta}_{k+1}^N(0) = 1$, entonces de inmediato se tiene que $\xi_1^{h_{\beta,\alpha}^k(p),N}(0) = \xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p)}(0) = 1$; además de esto, o bien $\eta_{k+1/2}^N(0) = 0$ o $\eta_{k+1/2}^N(0) = 1$. En el caso que $\eta_{k+1/2}^N(0) = 0$ se tiene que $\xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p)-2\delta_1,N} = 0$, y en el caso que $\eta_{k+1/2}^N(0) = 1$ hay una infección en $C_0 \cap B(0, l_N)$, lo que implica que $\xi_1^{h_{\beta,\alpha}^k(p)+2\delta_1} = 0$.

Haciendo un análisis análogo. Si $\tilde{\eta}_{k+1}^N(0) = 1$ y $\hat{\eta}_{k+1}^N(0) = 0$, entonces de inmediato se tiene que $\xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p)+2\delta_1}(0) = 1$, $\xi_1^{h_{\beta,\alpha}^k(p)}(0) = 0$ y no hay infección en $C_0^N \cap B(0, l_N)$, por lo tanto $\xi_1^{h_{\beta,\alpha}^k(p)-2\delta_1,N}(0) = 1$ cuando $\xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p)-2\delta_1}(0) = 1$.

Para acotar la expresión en ec. (3.5), como $\xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p)-2\delta_1} \subseteq \xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p)} \subseteq \xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p)+2\delta_1}$, se tiene que si $\#\xi$ representa el tamaño del cluster que contiene al 0 en la configuración dada por ξ , entonces

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\xi_1^{h_{\beta,\alpha}^k(p)+2\delta_1,N}(0) = 0, \xi_1^{h_{\beta,\alpha}^k(p),N}(0) = 1 \right) \\ & \leq \mathbb{P} \left(\xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p)+2\delta_1,N}(0) = 0, \xi_1^{h_{\beta,\alpha}^k(p),N}(0) = 1, \#\xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p)+2\delta_1} < \infty \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$+ \mathbb{P} \left(\xi_1^{h_{\beta,\alpha}^k(p),N}(0) = 1, \#\xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p)} = \infty \right) + \mathbb{P} \left(\#\xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p),N} < \#\xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p)+2\delta_1,N} = \infty \right) \quad (3.10)$$

El termino en ec. (3.9) esta acotado por

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p)+2\delta_1,N}(0) = 0, \xi_1^{h_{\beta,\alpha}^k(p),N}(0) = 1, \#\xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p)+2\delta_1} < \infty \right) \\ & \leq \mathbb{E} \left(1 - \left(\frac{1-\alpha}{2} \right)^{\#\xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p)+2\delta_1} \setminus \#\xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p)}} \mathbf{1}_{\{\#\xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p)+2\delta_1} < \infty\}} \right) \\ & \leq \sum_{i=0}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{1-\alpha}{2} \right)^i \right) \mathbb{P} \left(\#\xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p)+2\delta_1} \setminus \#\xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p)} = i \mid \#\xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p)+2\delta_1} < \infty \right) \end{aligned}$$

ésta última tiende a 0 cuando $\delta_1 \rightarrow 0$ por convergencia dominada; lo anterior se debe a

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p)+2\delta_1} = \xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p)} \mid \#\xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p)+2\delta_1} < \infty \right) \\ & = \frac{e^{-\beta(h_{\beta,\alpha}^k(p)+2\delta_1)} + \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}_j \left(1 - e^{-\beta h_{\beta,\alpha}^k(p)} \right)^j e^{-(j+2)\beta(h_{\beta,\alpha}^k(p)+2\delta_1)}}{1 - \mathbb{P}_{1-e^{-\beta(h_{\beta,\alpha}^k(p)+2\delta_1)}}(|C_0| = \infty)} \\ & \rightarrow 1 \end{aligned}$$

por el lema 2.10, lema 2.11 y convergencia dominada; la dominación esta dada por 1, ya que el numerador está acotado por el denominador pues $\left(1 - e^{-\beta h_{\beta,\alpha}^k(p)} \right) \leq \left(1 - e^{-\beta(h_{\beta,\alpha}^k(p)+2\delta_1)} \right)$. Por lo anterior se puede elegir δ_1 suficientemente pequeño de modo que ec. (3.9) sea menor que $\varepsilon/12$.

La expresión a la izquierda de ec. (3.10) tiende a cero pues esta acotada por $(1 - \alpha_N)^{l_N} \approx e^{-\alpha_N l_N}$, entonces se elige N de modo que sea menor que $\varepsilon/12$. La expresión de la derecha es igual a

$$\mathbb{P}\left(\#\xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p)+2\delta_1} = \infty\right) - \mathbb{P}\left(\#\xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p)} = \infty\right)$$

Gracias a la uniforme continuidad de $\mathbb{P}(\#\xi_{1/2}^q = \infty)$ (Continua en $[0,1]$ compacto) se tiene que la expresión anterior es menor que $\varepsilon/12$ si δ_1 es suficientemente pequeño. Para los términos en ec. (3.7) y ec. (3.9) se realiza el mismo procedimiento, se ejemplificará el procedimiento con el segundo término

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p)-2\delta_1}(0) = 0, \xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p)}(0) = 1) \\ &= \mathbb{P}(\xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p)-2\delta_1}(0) = 0) - \mathbb{P}(\xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p)-2\delta_1}(0) = 0, \xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p)}(0) = 0) \\ &= \mathbb{P}(\xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p)-2\delta_1}(0) = 0) - \mathbb{P}(\xi_{1/2}^{h_{\beta,\alpha}^k(p)}(0) = 0) \\ &= e^{-\beta(h_{\beta,\alpha}^k(p)-2\delta_1)} - e^{-\beta(h_{\beta,\alpha}^k(p))} \\ &= e^{-\beta(h_{\beta,\alpha}^k(p))} (e^{2\beta\delta_1} - 1) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

Para δ_1 suficientemente pequeño. Se obtiene que

$$\mathbb{P}(\tilde{\eta}_{k+1}^N(0) \neq \hat{\eta}_{k+1}^N(0), 0 \in G_k^N(\delta_1)) \rightarrow 0 \quad \text{Cuando } N \rightarrow \infty$$

Para δ_1 suficientemente pequeño, concluyendo lo pedido. \square

Lema 3.13

$$\mathbb{E}(\hat{\rho}_{k+1}^N) \rightarrow h_{\beta,\alpha}^{k+1}(p)$$

DEMOSTRACIÓN. A lo largo de esta demostración se utilizará h en vez de $h_{\beta,\alpha}$, con el fin de simplificar la notación.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\hat{\rho}_{k+1}^N) &= \mathbb{P}(0 \in \hat{\eta}_{k+1}^N | 0 \in \hat{\eta}_{k+1/2}^N) \mathbb{P}(0 \in \hat{\eta}_{k+1/2}^N) + \mathbb{P}(0 \in \hat{\eta}_{k+1}^N | 0 \notin \hat{\eta}_{k+1/2}^N) \mathbb{P}(0 \notin \hat{\eta}_{k+1/2}^N) \\ &= \mathbb{P}(0 \in \hat{\eta}_{k+1}^N | 0 \in \hat{\eta}_{k+1/2}^N) (1 - e^{-\beta h^k(p)}) \end{aligned}$$

y

$$\mathbb{P}(0 \in \hat{\eta}_{k+1}^N, \text{diam}(C_0) = \infty | 0 \in \hat{\eta}_{k+1/2}^N) \leq (1 - \alpha_N)^{l_N} \approx e^{-\alpha_N l_N} \rightarrow 0$$

Luego

$$\mathbb{P}(0 \in \hat{\eta}_{k+1}^N, \text{diam}(C_0) < \infty | 0 \in \hat{\eta}_{k+1/2}^N) = \mathbb{P}(0 \in \hat{\eta}_{k+1}^N, \text{diam}(C_0) \leq l_N | 0 \in \hat{\eta}_{k+1/2}^N) \quad (3.11)$$

$$+ \mathbb{P}(0 \in \hat{\eta}_{k+1}^N, l_N < \text{diam}(C_0) < \infty | 0 \in \hat{\eta}_{k+1/2}^N) \quad (3.12)$$

El termino en ec. (3.12) cumple

$$\mathbb{P}(0 \in \hat{\eta}_{k+1}^N, l_N < \text{diam}(C_0) < \infty | 0 \in \hat{\eta}_{k+1/2}^N) \leq \mathbb{P}(l_N < \text{diam}(C_0) < \infty | 0 \in \hat{\eta}_{k+1/2}^N) \rightarrow 0$$

Desarrollando el termino en ec. (3.11)

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(0 \in \hat{\eta}_{k+1}^N, \text{diam}(C_0) \leq l_N | 0 \in \hat{\eta}_{k+1/2}^N) \\
&= \mathbb{P}(B_i^N = 0 \forall i \in C_0 \cap B(0, l_N), \text{diam}(C_0) \leq l_N | 0 \in \hat{\eta}_{k+1/2}^N) \\
&= \mathbb{E} \left((1 - \alpha_N)^{|C_0 \cap B(0, l_N)|}, \mathbb{1}_{\text{diam}(C_0) \leq l_N} | 0 \in \hat{\eta}_{k+1/2}^N \right) \\
&\rightarrow \mathbb{E} \left((1 - \alpha_N)^{|C_0|}, \mathbb{1}_{\text{diam}(C_0) < \infty} | 0 \text{ está abierto} \right) \\
&= \frac{g_\alpha(1 - e^{-\beta h^k(p)})}{1 - e^{-\beta h^k(p)}}
\end{aligned}$$

El límite se justifica pues la expresión anterior a él esta acotada por 1, y gracias al teorema de convergencia dominada se tiene lo pedido. Finalmente juntando los resultados anteriores

$$\mathbb{E}(\hat{\rho}_{k+1}^N) \rightarrow \frac{g_\alpha(1 - e^{-\beta h^k(p)})}{1 - e^{-\beta h^k(p)}}(1 - e^{-\beta h^k(p)}) = g_\alpha(f_\beta(h^k(p))) = h^{k+1}(p)$$

□

DEMOSTRACIÓN. Demostración proposición 3.9

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N} \mathbb{E}(|R_N \setminus G_{k+1}^N(\varepsilon_1)|) &= \mathbb{P}(0 \notin G_{k+1}^N(\varepsilon_1)) \\
&= \mathbb{P}(|d_{k+1}^N(0) - h_{\beta, \alpha}^{k+1}(p)| > \varepsilon_1) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon_1} \mathbb{E}(|d_{k+1}^N(0) - h_{\beta, \alpha}^{k+1}(p)|) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon_1} \left(\mathbb{E}(|d_{k+1}^N(0) - \tilde{d}_{k+1}^N(0)|) + \mathbb{E}(|\tilde{d}_{k+1}^N(0) - \mathbb{E}(\tilde{\rho}_{k+1}^N)|) \right) \quad (3.13)
\end{aligned}$$

$$+ \mathbb{E}(|\mathbb{E}(\tilde{\rho}_{k+1}^N) - \tilde{\rho}_{k+1}^N|) + \mathbb{E}(|\tilde{\rho}_{k+1}^N - h_{\beta, \alpha}^{k+1}(p)|) \quad (3.14)$$

Donde $\tilde{d}_{k+1}^N(0) = \frac{1}{V(r_N)} \sum_{j \in B(0, r_N)} \tilde{\eta}_{k+1}^N(j)$.

Para $\varepsilon > 0$ fijo se quiere mostrar que cada una de estas esperanzas pueden ser acotadas por ε si N es suficientemente grande y β_1, β_2 suficientemente pequeños. La cota para el término de la derecha de ec. (3.14) se sigue inmediatamente del lema 3.12 y lema 3.13. El término de la izquierda de ec. (3.13) por invarianza bajo translación cumple

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|d_{k+1}^N(0) - \tilde{d}_{k+1}^N(0)|) &\leq \frac{1}{V(r_N)} \sum_{j \in B(0, r_N)} \mathbb{E}(|\eta_{k+1}^N(j) - \tilde{\eta}_{k+1}^N(j)|) \\
&= \frac{1}{NV(r_N)} \sum_{i \in R_N} \sum_{j \in B(i, r_N)} \mathbb{E}(|\eta_{k+1}^N(j) - \tilde{\eta}_{k+1}^N(j)|) \\
&= \frac{1}{NV(r_N)} \sum_{i \in R_N} \mathbb{E} \left(\sum_{j \in B(i, r_N)} |\eta_{k+1}^N(j) - \tilde{\eta}_{k+1}^N(j)| \right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i \in R_N} \mathbb{E}(|\eta_{k+1}^N(i) - \tilde{\eta}_{k+1}^N(i)|) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Para N grande gracias al lema 3.11. Con respecto al termino de la derecha de ec. (3.13) se puede notar que $\mathbb{E}(\tilde{d}_{k+1}^N(0)) = \mathbb{E}(\tilde{\rho}_{k+1}^N)$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(|\tilde{d}_{k+1}^N(0) - \mathbb{E}(\tilde{\rho}_{k+1}^N)| \right)^2 &\leq \text{Var}(\tilde{d}_{k+1}^N(0)) \\ &= \frac{1}{V(r_N)^2} \sum_{i,j \in B(0,r_N)} \text{Cov}(\tilde{\eta}_{k+1}^N(i), \tilde{\eta}_{k+1}^N(j)) \\ &\leq \frac{1}{V(r_N)^2} |\{i, j \in B(0, r_N) : d(i, j) \leq l_N\}| \\ &\leq \frac{V(l_N)}{V(r_N)} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Para la última esperanza el procedimiento es análogo al anterior, con esto se deduce que para N suficientemente grande y $\varepsilon < \varepsilon_1 \varepsilon_2 / 4$ se tiene lo pedido. \square

DEMOSTRACIÓN. Demostración teorema 3.8

Como $[0, 1]$ es compacto, es suficiente demostrar la convergencia en distribución de las leyes finito dimensionales de ρ_k^N , y como el limite es determinista solo es necesario demostrar la convergencia en probabilidad para todo $k \geq 0$ y $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\rho_k^N - h_{\beta, \alpha}^k(p)| > \varepsilon) &\leq \frac{1}{\varepsilon} (\mathbb{E}(|\rho_k^N - \tilde{\rho}_k^N|) + \mathbb{E}(|\tilde{\rho}_k^N - \hat{\rho}_k^N|) \\ &\quad + \mathbb{E}(|\hat{\rho}_k^N - \mathbb{E}(\hat{\rho}_k^N)|) + |\mathbb{E}(\hat{\rho}_k^N) - h_{\beta, \alpha}^k(p)|) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Por el lema 3.11, lema 3.12 y lema 3.13 dado cualquier $\mu > 0$ si existen constantes $\delta_1^{k-1}, \delta_2^{k-1} > 0$ tal que

$$\frac{V(l_N)}{N} \mathbb{E}(|R_N \setminus G_{k-1}^N(\delta_1^{k-1})|) < \delta_2^{k-1}$$

Lo que implica que el primero, segundo y tercer término de ec. (3.15) están acotados por $\mu\varepsilon$ para N suficientemente grande, además de esto el tercer término también es menor que $\mu\varepsilon$ lo que se obtiene repitiendo el argumento de la última cota en la demostración de la propiedad anterior. Se obtiene que

$$\mathbb{P}(|\rho_k^N - h_{\beta, \alpha}^k(p)| > \varepsilon) < 4\mu$$

Para N suficientemente grande. Ahora se debe demostrar que existen $\delta_1^{k-1}, \delta_2^{k-1} > 0$ tal que

$$\frac{V(l_N)}{N} \mathbb{E}(|R_N \setminus G_{k-1}^N(\delta_1^{k-1})|) < \delta_2^{k-1}$$

Por la proposición 3.9 se sabe que esto se tendrá si existen $\delta_1^{k-2}, \delta_2^{k-2} > 0$ tal que

$$\frac{V(l_N)}{N} \mathbb{E}(|R_N \setminus G_{k-2}^N(\delta_1^{k-2})|) < \delta_2^{k-2}$$

Repitiendo este argumento, basta con que existan δ_1^0, δ_2^0 que cumplan

$$\frac{V(l_N)}{N} \mathbb{E}(|R_N \setminus G_0^N(\delta_1^0)|) < \delta_2^0$$

Lo cual se sabe que es satisfecho para N suficientemente grande gracias al lema 3.10, concluyendo así la demostración. \square

La demostración presentada anteriormente es una adaptación de una de las demostraciones presentadas en [11] para el caso de crecimiento local en el toro, los pasos claves en la adaptación son el desarrollo realizado al comienzo de la página 47 y el manejo de la ec. (3.9). El resto del desarrollo es prácticamente igual.

El teorema anterior puede ser adaptado al MVM , por motivos de extensión no lo demostraremos en este apartado.

3.4. Extensión con más de un tipo de ocupación

En lo que sigue se extenderá al caso con más de un tipo de individuos y se estudiará como se comportan éstas en competencia por el espacio. Comenzando por el estudio de dos tipos de individuos, se comentará si las extensiones son claras para n tipos; por consiguiente, desde ahora cada nodo puede estar desocupado u ocupado, por un individuo del tipo 1 ó 2. Para definir el proceso se supondrá que hay una densidad p_1, p_2 de polillas del tipo 1 y 2 respectivamente, además de esto se utilizará $\beta_1, \beta_2 > 1$.

Definición 3.14 (*MMM* (Multi Moth Model)) *Sea $N \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{N}$ fijo, $T = \mathbb{N}$ y cada sitio en un grafo $G_N = (V_N, E_N)$, de N nodos, el cual puede estar ocupado por un individuo tipo i o vacante, i.e., $\Omega = \{0, 1, \dots, M\}^{V_N}$. Se denotará por $(\eta_n^N)_{n \in \mathbb{N}}$ al proceso y $\eta_n^N(x) = (\eta_n^{1,N}(x), \dots, \eta_n^{M,N}(x))$ (Si bien la notación es un poco engorrosa, ésta permitirá reducirse al caso de un tipo de ocupación), con $\eta_n^{i,N}(x) = 1$ si el sitio x se encuentra en el estado i para el instante n , 0 si no. El cambio que ocurre en el modelo en una unidad de tiempo se explica en dos fases sucesivas: la fase de crecimiento y la fase de epidemia, al igual que antes.*

Crecimiento: Un sitio ocupado con un individuo del tipo 1 lanza una cantidad de crías Poisson(β_1) en $\mathcal{N}_N(x) \subseteq G_N$, análogamente si un sitio estaba ocupado con un individuo del tipo 2 lanza una cantidad aleatoria de crías Poisson(β_2) en $\mathcal{N}_N(x) \subseteq G_N$. Si un sitio recibe N_i crías del tipo i , entonces cada una de las crías compite por quedarse con el sitio el cual se reparte equiprobablemente entre las crías, por lo que la probabilidad de que sea del tipo 1 es $\frac{N_1}{N_1 + N_2}$.

Epidemia: Con una probabilidad pequeña α_N^i un individuo del tipo i muere en cada sitio. Si el sitio x esta ocupado por un individuo del tipo i y muere a causa de la epidemia, ésta se contagia hacia sus vecinos ocupados, y así se termina expandiendo a toda la componente conexa conformada por los sitios que tienen individuos del tipo i , en la cual se encuentra x .

Se estudiará, al igual que antes, el comportamiento del proceso en un grafo G_N con las mismas propiedades que antes. Se utilizará $\mathcal{N}_N(x) = R_N \quad \forall x \in V_{R_N}$.

Se puede pensar en el proceso de crecimiento como que cada nodo x ocupado con un individuo del tipo i lanza a cada $y \in \mathcal{N}_N(x)$ una cantidad aleatoria de hijos distribuidas

como $Y_{x,y}^i \sim \text{Poisson}\left(\frac{\beta_i}{|\mathcal{N}_N(x)|}\right)$. Notar $(Y_{x,y}^i)_{x \in G_N, y \in \mathcal{N}_N(x)}$ es una colección i.i.d. para cada $i \in \{1, 2\}$. Para encontrar la función candidata a límite se denominará por N_i a la cantidad de crías del tipo i lanzada a 0, y además $\eta_{1/2}^{i,N}(0)$ a la ocupación del 0 después de la etapa de crecimiento en un grafo de N nodos, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\eta_{1/2}^1(0) = 1) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\eta_{1/2}^1(0)=1}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\frac{N_1}{N_1 + N_2} \mathbb{1}_{\{N_1 + N_2 > 0\}}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{N_1 + N_2} \mathbb{1}_{\{N_1 + N_2 > 0\}} \mathbb{E}(N_1 | N_1 + N_2)\right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Donde

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N_1 | N_1 + N_2 = k) &= \sum_{i=1}^k i \frac{\mathbb{P}(N_1 = i \cap N_1 + N_2 = k)}{\mathbb{P}(N_1 + N_2 = k)} \\ &= \sum_{i=1}^k i \frac{\frac{e^{-\beta_1 p_1} (\beta_1 p_1)^i}{i!} \frac{e^{-\beta_2 p_2} (\beta_2 p_2)^{k-i}}{(k-i)!}}{\frac{e^{-(\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2)} (\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2)^k}{k!}} \\ &= \frac{\beta_1 p_1 k}{\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2} \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left(\frac{\beta_1 p_1}{\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2}\right)^i \left(\frac{\beta_2 p_2}{\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2}\right)^{k-1-i}}_{=1} \\ \implies \mathbb{E}(N_1 | N_1 + N_2) &= \frac{\beta_1 p_1 (N_1 + N_2)}{\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Finalizando el cálculo en ec. (3.16)

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\frac{1}{N_1 + N_2} \mathbb{1}_{\{N_1 + N_2 > 0\}} \mathbb{E}(N_1 | N_1 + N_2)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\frac{N_1}{N_1 + N_2} | N_1 + N_2\right) \middle| N_1 + N_2 > 0\right) \mathbb{P}(N_1 + N_2 > 0) \\ &= \frac{\beta_1 p_1}{\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2} (1 - e^{-(\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2)}) \end{aligned}$$

Observación El uso de las variables aleatorias de Poisson es sutil y el hecho recae en que cumple trivialmente la convergencia uniforme para la fase de crecimiento. Para buscar las condiciones necesarias para relajar esta condición se supondrá que cada sitio ocupado lanza una cantidad aleatoria no necesariamente Poisson y se buscarán condiciones para que esta distribución cumpla con lo pedido. Sea $M_x^{i,N}$ la variable aleatoria que representa la cantidad de hijos del tipo i que lanza el sitio x ; luego, la cantidad efectiva lanzada es $M_x^{i,N} \mathbb{1}_{\{\eta^{i,N}(x)=1\}}$

y finalmente la cantidad lanzada por todo el grafo es $M^{i,N} = \sum_{x=1}^N M_x^{i,N} \mathbf{1}_{\{\eta^{i,N}(x)=1\}}$ y con esto $N_i \sim \text{Bin}(M^{i,N}, \frac{1}{N})$. Las variables descritas anteriormente cumplen las siguientes propiedades

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_x^{i,N}) &= \beta_i \quad \forall x \in \{1, \dots, N\} \\ \mathbb{E}(M_x^{i,N} \mathbf{1}_{\{\eta^{i,N}(x)=1\}}) &= \beta_i p_i \quad \forall x \in \{1, \dots, N\} \\ \mathbb{E}(M^{i,N}) &= \beta_i p_i N\end{aligned}$$

Al igual que antes

$$\mathbb{P}(\eta_{1/2}^1(0) = 1) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{N_1 + N_2} \mathbf{1}_{\{N_1 + N_2 > 0\}} \mathbb{E}(N_1 | N_1 + N_2, M^{1,N}, M^{2,N})\right)$$

Calculamos para variables $M_x^{i,N}$ cualquiera

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N_1 | N_1 + N_2 = k, M^{1,N}, M^{2,N}) &= \sum_{i=1}^k i \frac{\mathbb{P}(N_1 = i \cap N_1 + N_2 = k | M^{1,N}, M^{2,N})}{\mathbb{P}(N_1 + N_2 = k | M^{1,N}, M^{2,N})} \\ &= \sum_{i=1}^k i \frac{\mathbb{P}(N_1 = i | M^{1,N}) \mathbb{P}(N_2 = k - i | M^{2,N})}{\mathbb{P}(N_1 + N_2 = k | M^{1,N}, M^{2,N})} \\ &= \sum_{i=1}^k i \frac{\binom{M^{1,N}}{i} \left(\frac{1}{N}\right)^i \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{M^{1,N}-i} \binom{M^{2,N}}{k-i} \left(\frac{1}{N}\right)^{k-i} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{M^{2,N}-k+i}}{\binom{M^{1,N}+M^{2,N}}{k} \left(\frac{1}{N}\right)^k \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{M^{1,N}+M^{2,N}-k}} \\ &= \sum_{i=1}^k i \frac{\binom{M^{1,N}}{i} \binom{M^{2,N}}{k-i}}{\binom{M^{1,N}+M^{2,N}}{k}} \\ &= \frac{M^{1,N}(N_1 + N_2)}{M^{1,N} + M^{2,N}} \\ \implies \mathbb{E}(N_1 | N_1 + N_2, M^{1,N}, M^{2,N}) &= \frac{M^{1,N}(N_1 + N_2)}{M^{1,N} + M^{2,N}}\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{1}{N_1 + N_2} \mathbf{1}_{\{N_1 + N_2 > 0\}} \mathbb{E}(N_1 | N_1 + N_2)\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\frac{N_1}{N_1 + N_2} | N_1 + N_2, M^{1,N}, M^{2,N}\right) \Big| N_1 + N_2 > 0\right) \mathbb{P}(N_1 + N_2 > 0) \\ &= \mathbb{E}\left(\frac{M^{1,N}}{M^{1,N} + M^{2,N}}\right) (1 - e^{-(\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2)})\end{aligned}$$

Como $N_1 + N_2 \sim \text{Bin}(M^{1,N} + M^{2,N}, \frac{1}{N})$ se puede demostrar que $\mathbb{P}(N_1 + N_2 > 0) \rightarrow (1 - e^{-(\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2)}) \quad \forall p_1, p_2 \in (0, 1]$ utilizando una versión modificada del teorema 3.6.1 en [3] (pág. 126), la que se muestra a continuación.

Teorema 3.15 Sea $(X_{N,j})_{j \in \mathbb{N}}$ colección de variables aleatorias i.i.d. para todo $N \in \mathbb{N}$ con $X_{N,j} \sim \text{Bern}\left(\frac{1}{N}\right)$ y sea $M^N = \sum_{x=1}^N M_x^N$ con $(M_x^N)_{x=1}^N$ variables aleatorias i.i.d tal que $\mathbb{E}(M_x^N) = \lambda$. Entonces

$$S_N = \sum_{j=1}^{M^N} X_{N,j} \xrightarrow{d} Z \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración es exactamente igual a la de [3] considerando que se cumple

1. $\frac{1}{N} \rightarrow 0$
2. $\sum_{x=1}^{M^N} \frac{1}{N} = \frac{\sum_{x=1}^{M^N} M_x^N}{N} \xrightarrow{\text{c.s.}} \lambda$
3. y que además el resultado anterior dice que $\sum_{x=1}^{M^N} M_x^N \xrightarrow{\text{c.s.}} \infty$.

□

Finalmente las condiciones que hay que imponer son

$$\mathbb{E}\left(\frac{M^{1,N}}{M^{1,N} + M^{2,N}}\right) \rightarrow \frac{\beta_1 p_1}{\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2} \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(N_1 + N_2 > 0) \rightarrow (1 - e^{-(\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2)})$$

Uniformemente en $p_1, p_2 \in [0, 1]$. La primera de las condiciones no se cumple para toda distribución como presentaremos a continuación

Ejemplo Para $p = 1/3$, $q = 2/3$ y $\beta_1 p_1 N$, $\beta_2 p_2 N > 0$ sean $M^{1,N}$ y $M^{2,N}$ variables aleatorias tal que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M^{1,N} = 0) &= \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(M^{1,N} = 3\beta_1 p_1 N) = \frac{1}{3} \\ \mathbb{P}(M^{2,N} = \beta_2 p_2 N) &= 1 \end{aligned}$$

Luego

$$\mathbb{E}\left(\frac{M^{1,N}}{M^{1,N} + M^{2,N}}\right) = \frac{\beta_1 p_1}{3\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2}$$

Esta cantidad no coincide con lo pedido, y las variables aleatorias cumplen con $\mathbb{E}(M^{1,N}) = \beta_1 p_1 N$ y $\mathbb{E}(M^{2,N}) = \beta_2 p_2 N$.

Continuando el estudio del sistema considerando las variables de *Poisson*, La función asociada a la fase de crecimiento es

$$f_{\beta_1, \beta_2}(p_1, p_2) = (f_{\beta_1, \beta_2}^1(p_1, p_2), f_{\beta_1, \beta_2}^2(p_1, p_2))$$

Donde f^1 y f^2 representan la esperanza de ser del tipo 1 y del tipo 2 dado que había una densidad p_1 , p_2 del tipo 1 y 2 respectivamente, explícitamente

$$\begin{aligned} f_{\beta_1, \beta_2}^1(p_1, p_2) &= (1 - e^{-(\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2)}) \frac{\beta_1 p_1}{\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2} \\ f_{\beta_1, \beta_2}^2(p_1, p_2) &= (1 - e^{-(\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2)}) \frac{\beta_2 p_2}{\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2} \end{aligned}$$

En los cálculos anteriores subyace la probabilidad de que un sitio quede desocupado $e^{-\beta_1 p_1 - \beta_2 p_2}$.

La fase de epidemia considerará una epidemia por cada especie (toda especie diferente a i es inmune a la epidemia asociada a la especie i). Los cálculos realizados en g_α para un solo tipo de polilla, se pueden replicar considerando que un sitio esta libre, para el modelo con dos tipos de polillas, si esta libre o si tiene una especie diferente a la considerada. Con esto se define

$$\begin{aligned} h_{\beta_1, \beta_2, \alpha_1}^1(p_1, p_2) &= g_{\alpha_1}(f_{\beta_1, \beta_2}^1(p_1, p_2)) \\ h_{\beta_1, \beta_2, \alpha_2}^2(p_1, p_2) &= g_{\alpha_2}(f_{\beta_1, \beta_2}^2(p_1, p_2)) \end{aligned}$$

Lo realizado anteriormente se puede generalizar para M tipos de polillas de la siguiente forma. Para $\vec{\beta} = (\beta_i)_{i=1}^M$, $\vec{\alpha} = (\alpha_i)_{i=1}^M$ y $\vec{p} = (p_i)_{i=1}^M$ se define

$$h_{\vec{\beta}, \vec{\alpha}}(\vec{p}) = (h_{\vec{\beta}, \vec{\alpha}}^i(\vec{p}))_{i=1}^M$$

Donde

$$h_{\vec{\beta}, \vec{\alpha}}^i(\vec{p}) = g_{\alpha_i} \left(1 - e^{-\sum_{j=1}^M \beta_j p_j} \right) \left(\frac{\beta_i p_i}{\sum_{j=1}^M \beta_j p_j} \right)$$

A este proceso también se le denotará por $\eta_k^{i,N}$, con $\eta_k^{i,N}(j) = 1$ si j esta ocupado al tiempo k por un individuo del tipo i y $\eta_k^{i,N}(j) = 0$ si no. La densidad de sitios ocupados en tiempo k para los individuos del tipo i será escrita como

$$\rho_k^{i,N} = \frac{1}{N} |\eta_k^{i,N}| = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \eta_k^{i,N}(j)$$

La distribución inicial $\eta_0^{i,N}$ del proceso será siempre utilizada como una medida producto con densidad $p \in [0, 1]$, por lo que en particular $\rho_0^{i,N} \rightarrow p_0^i$ en probabilidad.

A continuación se verá qué pasa cuando $\alpha_N^i \rightarrow 0$ (cuando la infección elimina solo a las componentes conexas de tamaño infinito), luego la función de densidad de sitios ocupados para la etapa de infección será

$$g(p) = \begin{cases} \frac{(1-p)^3}{p^2} & \text{si } p \in (1/2, 1] \\ p & \text{si } p \in [0, 1/2] \end{cases}$$

Por lo que para esta fase de estudio se utiliza

$$h_{\vec{\beta}}^i(p_1, p_2) = g(f_{\vec{\beta}}^i(p_1, p_2))$$

Teorema 3.16 Para $M \in \mathbb{N}$ si se asume que $G_N = R_N$ y que la probabilidad de infección de la epidemia satisface

$$\alpha_N^j \log_2(N) \rightarrow \infty \quad \wedge \quad \alpha_N^j \rightarrow 0 \quad \text{Cuando } N \rightarrow \infty, j \in \{1, \dots, M\}$$

Entonces el proceso $(\rho_k^N)_{k \geq 0}$ converge en distribución a la órbita determinista comenzando con p_0 , del sistema dinámico asociado a $h_{\vec{\beta}}$.

Por simplicidad se demostrará el resultado para $M = 2$, para este caso será suficiente estudiar las probabilidades de transición de un solo paso del proceso ρ_k^N . Se define $S := \{(p_0^1, p_0^2) : p_0^1 + p_0^2 \leq 1, p_0^1, p_0^2 \geq 0\}$, además de esto se considerará la Norma 1 en \mathbb{R}^2 para realizar los siguientes cálculos, aunque no es de gran importancia pues las normas son equivalentes en dimensión finita. Este proceso considerará $\mathcal{N}_N(x) = G_N$, donde todos los sitios tienen probabilidad $\left(1 - e^{-(\beta_1 p_0^1 + \beta_2 p_0^2)}\right) \frac{\beta_1 p_0^1}{\beta_1 p_0^1 + \beta_2 p_0^2}$ de estar ocupados por un individuo del tipo 1 y probabilidad $\left(1 - e^{-(\beta_1 p_0^1 + \beta_2 p_0^2)}\right) \frac{\beta_2 p_0^2}{\beta_1 p_0^1 + \beta_2 p_0^2}$ de estar ocupados por uno del tipo 2, donde (p_0^1, p_0^2) es la densidad inicial de sitios ocupados. Abusando de notación, se denotará $\eta_k^{j,N}$ al conjunto de sitios ocupados por individuos del tipo j en el proceso, $\eta_{k+1/2}^N$ denotará la etapa intermedia entre η_k^N y η_{k+1}^N , después de la fase de crecimiento y antes de la epidemia. Se denotará por $\{0, \dots, N-1\}$ el conjunto de nodos de R_N y $B(i, r)$ denotará el conjunto de sitios en un entorno distancia a lo más r de i (distancia usual de teoría de grafos). Sea $\tilde{\eta}_1^{j,N}$ el conjunto de sitios ocupados por un individuo de tipo i después de la epidemia se propaga ignorando la infección proveniente de una distancia mayor a $\frac{\log_2(N)}{5}$. Definimos $\tilde{\rho}_1^N = \left(\frac{|\tilde{\eta}_1^{1,N}|}{N}, \frac{|\tilde{\eta}_1^{2,N}|}{N}\right)$.

Lema 3.17

$$\mathbb{E} (|\tilde{\rho}_1^N - \rho_1^N|) \rightarrow 0 \quad , N \rightarrow \infty$$

Uniformemente en p la densidad inicial.

DEMOSTRACIÓN. Por la invarianza según traslación y observando que $\tilde{\eta}_1^N(i) \geq \eta_1^N(i)$ —desigualdad por coordenada—(puede sobrevivir en el primero si el ataque infeccioso viene de fuera) para todo $i \in R_N$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (|\tilde{\rho}_1^N - \rho_1^N|) &\leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E} (|\tilde{\eta}_1^N(i) - \eta_1^N(i)|) = \mathbb{P}(0 \in \tilde{\eta}_1^{1,N} \setminus \eta_1^{1,N}) + \mathbb{P}(0 \in \tilde{\eta}_1^{2,N} \setminus \eta_1^{2,N}) \\ &\leq (1 - \alpha_N^1)^{\frac{1}{5} \log_2(N)} \mathbb{P} \left(\eta_{1/2}^{1,N}(i) = 1 \right) + (1 - \alpha_N^2)^{\frac{1}{5} \log_2(N)} \mathbb{P} \left(\eta_{1/2}^{2,N}(i) = 1 \right) \\ &\approx e^{-\frac{1}{5} \alpha_N^1 \log_2(N)} \mathbb{P} \left(\eta_{1/2}^{1,N}(i) = 1 \right) + e^{-\frac{1}{5} \alpha_N^2 \log_2(N)} \mathbb{P} \left(\eta_{1/2}^{2,N}(i) = 1 \right) \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

La segunda desigualdad se sigue pues si 0 está en $\tilde{\eta}_1^N$ pero no en η_1^N , entonces debe haber un camino abierto en $\eta_{1/2}^N$ que va de 0 a $\partial B(0, \frac{1}{5} \log_2(N))$, y todos los sitios del camino no deben haber sido infectados. Además de esto cabe recalcar que este proceso cumple con que a lo mas una de las coordenadas puede ser distinta de cero, en esto se basan los pasos anteriores. \square

Lema 3.18

$$\mathbb{E} \left(\left(\frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{1,N} \cap H_N|, \frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{2,N} \cap H_N| \right) \right) \rightarrow h_{\beta_1, \beta_2}(p_1, p_2) \quad , N \rightarrow \infty$$

Uniformemente en la densidad inicial p .

DEMOSTRACIÓN. Si $0 \in \tilde{\eta}_1^N$ entonces $0 \in \eta_{1/2}^N$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\left(\frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{1,N} \cap H_N|, \frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{2,N} \cap H_N| \right) \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{\eta}_1^{1,N}(i) \mathbf{1}_{H_N}(i), \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{\eta}_1^{2,N}(i) \mathbf{1}_{H_N}(i) \right) \right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{H_N}(i) \left(\tilde{\eta}_1^{1,N}(i), \tilde{\eta}_1^{2,N}(i) \right) \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{H_N}(0) \left(\tilde{\eta}_1^{1,N}(0), \tilde{\eta}_1^{2,N}(0) \right) \right) \tag{3.18} \\
&= (1, 0) \mathbb{P} \left(\left(\tilde{\eta}_1^{1,N}(0), \tilde{\eta}_1^{2,N}(0) \right) = (1, 0), 0 \in H_N \right) + (0, 1) \mathbb{P} \left(\left(\tilde{\eta}_1^{1,N}(0), \tilde{\eta}_1^{2,N}(0) \right) = (0, 1), 0 \in H_N \right) \\
&= \left(\mathbb{P} \left(\left(\tilde{\eta}_1^{1,N}(0), \tilde{\eta}_1^{2,N}(0) \right) = (1, 0), 0 \in H_N \right), \mathbb{P} \left(\left(\tilde{\eta}_1^{1,N}(0), \tilde{\eta}_1^{2,N}(0) \right) = (0, 1), 0 \in H_N \right) \right) \tag{3.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\mathbb{P} \left(\left(\tilde{\eta}_1^{1,N}(0), \tilde{\eta}_1^{2,N}(0) \right) = (1, 0) | 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^{1,N} \right) \mathbb{P}(0 \in H_N) \mathbb{P}(0 \in \eta_{1/2}^{1,N}), \right. \\
&\quad \left. \mathbb{P} \left(\left(\tilde{\eta}_1^{1,N}(0), \tilde{\eta}_1^{2,N}(0) \right) = (0, 1) | 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^{2,N} \right) \mathbb{P}(0 \in H_N) \mathbb{P}(0 \in \eta_{1/2}^{2,N}) \right)
\end{aligned}$$

En particular, la cantidad anterior es igual a

$$\left(\mathbb{E} \left(\frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{1,N} \cap H_N| \right), \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{2,N} \cap H_N| \right) \right)$$

El paso utilizado en ec. (3.18) línea, del desarrollo anterior, tiene como justificación la invarianza bajo traslación y el paso en ec. (3.19) tiene como justificación lo siguiente: Para $j \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(\left(\tilde{\eta}_1^{1,N}(0), \tilde{\eta}_1^{2,N}(0) \right) = (1, 0), 0 \in H_N \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\left(\tilde{\eta}_1^{1,N}(0), \tilde{\eta}_1^{2,N}(0) \right) = (1, 0) | 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^{1,N} \right) \mathbb{P} \left(0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^{1,N} \right) \\
&+ \mathbb{P} \left(\left(\tilde{\eta}_1^{1,N}(0), \tilde{\eta}_1^{2,N}(0) \right) = (1, 0) | 0 \notin H_N \cap \eta_{1/2}^{1,N} \right) \mathbb{P} \left(0 \notin H_N \cap \eta_{1/2}^{1,N} \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\left(\tilde{\eta}_1^{1,N}(0), \tilde{\eta}_1^{2,N}(0) \right) = (1, 0) | 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^{1,N} \right) \mathbb{P}(0 \in H_N) \mathbb{P}(0 \in \eta_{1/2}^{1,N}) \tag{3.20}
\end{aligned}$$

La última separación se debe a la independencia del grafo aleatorio estudiado y la ocupación del origen en el proceso de crecimiento. Por un procedimiento equivalente se obtiene un análogo para la segunda coordenada.

Por el lema 2.5 se sabe que $\mathbb{P}(0 \in H_N) \rightarrow 1$; también se sabe que para $j \in \{1, 2\}$ se tiene que $\mathbb{P}(0 \in \eta_{1/2}^{j,N}) = \left(1 - e^{-(\beta_1 p_0^1 + \beta_2 p_0^2)} \right) \frac{\beta_j p_0^j}{\beta_1 p_0^1 + \beta_2 p_0^2} \forall N \in \mathbb{N}$, por lo que en particular converge a este valor uniformemente en (p_0^1, p_0^2) . Falta solo encontrar el valor del primer termino de ec. (3.20), solo será necesario ver la configuración de $\eta_{1/2}^{j,N}$ en $B \left(0, \frac{\log_2(N)}{5} \right)$, en donde, condicional al evento $0 \in H_N$, el grafo se ve localmente como un 3-árbol. Se construirán variables $(\tilde{\eta}_1^{j,N}(0))_{N>0}$ condicional a $\{0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^{j,N}\}$ en un espacio de probabilidad

común como sigue. Sea \mathcal{T} el conjunto de sitios en un 3-árbol y considerando el proceso de percolación en \mathcal{T} en donde cada sitio esta abierto independientemente con probabilidad $\left(1 - e^{-(\beta_1 p_0^1 + \beta_2 p_0^2)}\right) \frac{\beta_j p_0^j}{\beta_1 p_0^1 + \beta_2 p_0^2}$. Se llamará C_0^j al cluster de percolación que contiene a 0 —Como se utiliza el evento $\{0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^{j,N}\}$, se tiene que 0 pertenece al cluster del tipo j —. También se considerará la colección $(B_i^{j,N})_{i \in \mathcal{T}, N > 0}$ de variables aleatorias tal que $B_i^{j,N} \sim \text{Bern}(\alpha_N^j)$. Con éstas, la variable aleatoria $\tilde{\eta}_1^{j,N}(0)$ condicional al evento $\{0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^{j,N}\}$, se puede construir como sigue

$$\tilde{\eta}_1^{j,N}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } B_i^{j,N} = 0 \forall i \in C_0^j \cap B\left(0, \frac{\log_2(N)}{5}\right) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ahora sea $l_N^j = \log_2((\alpha_N^j)^{-\frac{1}{2}})$. Se ve que $l_N^j < \frac{\log_2(N)}{5}$ para N grande, entonces

$$\mathbb{P}(0 \in \tilde{\eta}_1^{j,N} | 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^{j,N}) = \mathbb{P}(0 \in \tilde{\eta}_1^{j,N}, \text{diam}(C_0^j) \leq l_N^j | 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^{j,N}) \quad (3.21)$$

$$+ \mathbb{P}\left(0 \in \tilde{\eta}_1^{j,N}, l_N^j < \text{diam}(C_0^j) \leq \frac{\log_2(N)}{5} \mid 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^{j,N}\right) \quad (3.22)$$

$$+ \mathbb{P}\left(0 \in \tilde{\eta}_1^{j,N}, \frac{\log_2(N)}{5} < \text{diam}(C_0^j) \mid 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^{j,N}\right) \quad (3.23)$$

La expresión de la derecha en ec. (3.21)

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(0 \in \tilde{\eta}_1^{j,N}, \text{diam}(C_0^j) \leq l_N^j | 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^{j,N}) \\ & \leq \mathbb{P}(0 \leq \text{diam}(C_0^j) \leq l_N^j | 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^{j,N}) \\ & \longrightarrow \mathbb{P}(0 \leq \text{diam}(C_0^j) \leq \infty | 0 \text{ está abierto}) \\ & = \frac{\mathbb{P}(0 \leq \text{diam}(C_0^j) \leq \infty, 0 \text{ está abierto})}{\mathbb{P}(0 \text{ está abierto})} \\ & = \frac{g\left(\left(1 - e^{-(\beta_1 p_0^1 + \beta_2 p_0^2)}\right) \frac{\beta_j p_0^j}{\beta_1 p_0^1 + \beta_2 p_0^2}\right)}{\left(1 - e^{-(\beta_1 p_0^1 + \beta_2 p_0^2)}\right) \frac{\beta_j p_0^j}{\beta_1 p_0^1 + \beta_2 p_0^2}} \end{aligned}$$

Gracias al lema 2.5 la convergencia anterior es uniforme en p , por otro lado como cualquier subconjunto de \mathcal{T} con diámetro n tiene a lo mas $1 + 3 \cdot 2^{n-1} < 3 \cdot 2^n$ nodos, luego se tiene

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(0 \in \tilde{\eta}_1^{j,N}, \text{diam}(C_0^j) \leq l_N^j | 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^{j,N}) \\ & = \mathbb{P}(B_i^{j,N} = 0 \forall i \in C_0^j, \text{diam}(C_0^j) \leq l_N^j | 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^{j,N}) \\ & \geq (1 - \alpha_N^j)^{3(\alpha_N^j)^{-\frac{1}{2}}} \mathbb{P}(0 \leq \text{diam}(C_0^j) \leq l_N^j | 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^{j,N}) \\ & \longrightarrow \mathbb{P}(0 \leq \text{diam}(C_0^j) \leq \infty | 0 \text{ está abierto}) \\ & = \frac{\mathbb{P}(0 \leq \text{diam}(C_0^j) \leq \infty, 0 \text{ está abierto})}{\mathbb{P}(0 \text{ está abierto})} \\ & = \frac{g\left(\left(1 - e^{-(\beta_1 p_0^1 + \beta_2 p_0^2)}\right) \frac{\beta_j p_0^j}{\beta_1 p_0^1 + \beta_2 p_0^2}\right)}{\left(1 - e^{-(\beta_1 p_0^1 + \beta_2 p_0^2)}\right) \frac{\beta_j p_0^j}{\beta_1 p_0^1 + \beta_2 p_0^2}} \end{aligned}$$

uniforme en p por el lema 2.5 y también se tiene que $(1 - \alpha_N^j)^{3(\alpha_N^j)^{-\frac{1}{2}}} \approx e^{-3\sqrt{\alpha_N^j}} \rightarrow 1$. Así se concluye por el teorema del sandwich que

$$\mathbb{P}(0 \in \tilde{\eta}_1^{j,N}, \text{diam}(C_0^j) \leq l_N^j | 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^{j,N}) \rightarrow \frac{g\left(\left(1 - e^{-(\beta_1 p_0^1 + \beta_2 p_0^2)}\right) \frac{\beta_j p_0^j}{\beta_1 p_0^1 + \beta_2 p_0^2}\right)}{\left(1 - e^{-(\beta_1 p_0^1 + \beta_2 p_0^2)}\right) \frac{\beta_j p_0^j}{\beta_1 p_0^1 + \beta_2 p_0^2}}$$

uniforme en p . Para ec. (3.22) se tiene que $\mathbb{P}(0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^{j,N}) \geq C = (1 - e^{-(\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2)}) \frac{\beta_j p_j}{2(\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2)}$ para N suficientemente grande

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(0 \in \tilde{\eta}_1^{j,N}, l_N^j < \text{diam}(C_0^j) \leq \frac{\log_2(N)}{5} | 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^{j,N}) \\ \leq C^{-1} \mathbb{P}\left(l_N^j < \text{diam}(C_0^j) \leq \frac{\log_2(N)}{5}\right) \\ = C^{-1} (\mathbb{P}(l_N^j < \text{diam}(C_0^j)) - \mathbb{P}(\text{diam}(C_0^j) = \infty)) \\ - C^{-1} \left(\mathbb{P}\left(\frac{\log_2(N)}{5} < \text{diam}(C_0^j)\right) - \mathbb{P}(\text{diam}(C_0^j) = \infty)\right) \\ \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Uniformemente en p nuevamente gracias al lema 2.5. Para ec. (3.23) se observa que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(0 \in \tilde{\eta}_1^{j,N}, \frac{\log_2(N)}{5} < \text{diam}(C_0^j) | 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^{j,N}\right) &\leq (1 - \alpha_N^j)^{\frac{\log_2(N)}{5}} \\ &\approx e^{-\frac{\log_2(N)\alpha_N^j}{5}} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Por todo lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(0 \in \tilde{\eta}_1^{j,N} | 0 \in H_N \cap \eta_{1/2}^{j,N}) \mathbb{P}(0 \in H_N) \mathbb{P}(0 \in \eta_{1/2}^{j,N}) \\ \rightarrow \frac{g\left(\left(1 - e^{-(\beta_1 p_0^1 + \beta_2 p_0^2)}\right) \frac{\beta_j p_0^j}{\beta_1 p_0^1 + \beta_2 p_0^2}\right)}{\left(1 - e^{-(\beta_1 p_0^1 + \beta_2 p_0^2)}\right) \frac{\beta_j p_0^j}{\beta_1 p_0^1 + \beta_2 p_0^2}} \left(1 - e^{-(\beta_1 p_0^1 + \beta_2 p_0^2)}\right) \frac{\beta_j p_0^j}{\beta_1 p_0^1 + \beta_2 p_0^2} \\ = h_{j\beta_1, \beta_2}(p_0^1, p_0^2) \end{aligned}$$

□

Gracias a ec. (3.20) la demostración anterior, a grosso modo, es igual a la realizada para el caso con un tipo de individuo, ya que los sitios ocupados por otra especie o vacantes funcionan de igual forma que los vacantes para un solo tipo de individuo. Para efecto de la demostración lo que se debe considerar es el parámetro de infección adecuado, al igual que la función de crecimiento adecuada.

DEMOSTRACIÓN TEOREMA 1.2. Se demostrará este hecho por coordenadas. Gracias a [7], es suficiente demostrar que $\rho_0^N \Rightarrow (p_1, p_2)$ y que dada una sucesión $(p_{1,N}, p_{2,N}) \in S$ convergente a algún $(p'_1, p'_2) \in S$, la sucesión ρ_1^N , con η_0^N iniciada en la medida producto con densidad

$(p_{1,N}, p_{2,N})$, converge débilmente a $(h1_{\beta_1, \beta_2}(p'_1, p'_2), h2_{\beta_1, \beta_2}(p'_1, p'_2))$. La primera parte es directa, para la segunda parte se asumirá por simplicidad que $p_N = p'$ para todo N (para el caso general se sigue gracias a la continuidad uniforme de $h_{\beta_1, \beta_2}(p'_1, p'_2)$). Gracias a los lemas anteriores, todas las convergencias que se mostrarán son uniformes en la densidad inicial p' . Por la desigualdad de Markov, dado $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} (|\rho_1^N - h_{\beta_1, \beta_2}(p'_1, p'_2)| > \varepsilon) \\
& \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E} (|\rho_1^N - h_{\beta_1, \beta_2}(p'_1, p'_2)|) \\
& \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E} (|\rho_1^N - \tilde{\rho}_1^N|) + \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E} \left(\left| \tilde{\rho}_1^N - \left(\frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{1,N} \cap H_N|, \frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{2,N} \cap H_N| \right) \right| \right) \\
& + \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E} \left(\left| \left(\frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{1,N} \cap H_N|, \frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{2,N} \cap H_N| \right) - \mathbb{E} \left(\left(\frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{1,N} \cap H_N|, \frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{2,N} \cap H_N| \right) \right) \right| \right) \\
& + \frac{1}{\varepsilon} \left| \mathbb{E} \left(\left(\frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{1,N} \cap H_N|, \frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{2,N} \cap H_N| \right) \right) - h_{\beta_1, \beta_2}(p') \right|
\end{aligned}$$

El primer y último término de la última desigualdad tiende a 0 por el lema 3.17 y el lema 3.18. El segundo tiende a cero pues usando el lema 2.4

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\left| \tilde{\rho}_1^N - \left(\frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{1,N} \cap H_N|, \frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{2,N} \cap H_N| \right) \right| \right) \\
& \leq \mathbb{E} \left(\left| \left(\frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{1,N}| - \frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{1,N} \cap H_N|, \frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{2,N}| - \frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{2,N} \cap H_N| \right) \right| \right) \\
& \leq \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} |R_N \setminus H_N| \right) \\
& \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Para el tercer término se ve que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\left| \left(\frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{1,N} \cap H_N|, \frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{2,N} \cap H_N| \right) - \mathbb{E} \left(\left(\frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{1,N} \cap H_N|, \frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{2,N} \cap H_N| \right) \right) \right| \right) \\
& = \mathbb{E} \left(\left| \left(\frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{1,N} \cap H_N|, \frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{2,N} \cap H_N| \right) - \left(\mathbb{E} \left(\frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{1,N} \cap H_N| \right), \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{2,N} \cap H_N| \right) \right) \right| \right) \\
& = \mathbb{E} \left(\left| \left(\frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{1,N} \cap H_N| - \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{1,N} \cap H_N| \right), \frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{2,N} \cap H_N| - \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{2,N} \cap H_N| \right) \right) \right| \right) \\
& = \mathbb{E} \left(\left| \frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{1,N} \cap H_N| - \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{1,N} \cap H_N| \right) \right| \right) + \mathbb{E} \left(\left| \frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{2,N} \cap H_N| - \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{2,N} \cap H_N| \right) \right| \right)
\end{aligned}$$

La segunda línea es gracias a la deducción al comienzo de esta demostración. Ahora se

utilizará la desigualdad de Jensen, para esto se calculará para $j \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar \left(|\tilde{\eta}_1^{j,N} \cap H_N| \right) &= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{C}ov(\mathbf{1}_{i \in \tilde{\eta}_1^{j,N} \cap H_N}, \mathbf{1}_{j \in \tilde{\eta}_1^{i,N} \cap H_N}) \\
&\leq |\{(i, j) \in H_N \times H_N : B\left(i, \frac{\log_2(N)}{5}\right) \cap B\left(j, \frac{\log_2(N)}{5}\right) \neq \emptyset\}| \\
&\leq |\{(i, j) \in H_N \times H_N : d(i, j) \leq \frac{2 \log_2(N)}{5}\}| \\
&\leq \underbrace{N}_{\text{Cantidad de nodos}} \cdot \underbrace{\frac{3}{2} N^{\frac{2}{5}}}_{\text{Cantidad de nodos en Bola de tamaño } \frac{2 \log_2(N)}{5}}
\end{aligned}$$

Con esto

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(\left| \frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{j,N} \cap H_N| - \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{j,N} \cap H_N| \right) \right| \right)^2 &\leq \mathbb{V}ar \left(\frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{j,N} \cap H_N| \right) \\
&\leq \frac{\frac{3}{2} N \cdot N^{\frac{2}{5}}}{N^2} \\
&\rightarrow 0
\end{aligned}$$

Y con esto se tiene la convergencia en probabilidad que en este caso es equivalente a la convergencia en distribución, pues el límite es determinista. \square

Esta demostración consiste principalmente en separar por coordenada la desigualdad de Markov realizada en el caso de un tipo de individuo. Bajo el mismo principio del teorema anterior se puede demostrar lo siguiente. Para este estudio la función de densidad de sitios ocupados para la etapa de infección es

$$g_\alpha(p) = \frac{\left(1 - \sqrt{1 - 4(1 - \alpha)(1 - p)p}\right)^3}{8(1 - \alpha)^2 p^2}$$

Por lo que para esta fase de estudio se utiliza

$$\begin{aligned}
h_{\beta_1, \beta_2, \alpha_1}^1(p_1, p_2) &= g_{\alpha_1}(f_{\beta_1, \beta_2}^1(p_1, p_2)) \\
h_{\beta_1, \beta_2, \alpha_2}^2(p_1, p_2) &= g_{\alpha_2}(f_{\beta_1, \beta_2}^2(p_1, p_2))
\end{aligned}$$

Teorema 3.19 *Para $M \in \mathbb{N}$ si $G_N = R_N$, $\alpha^j \in (0, 1) \forall j \in \{1, \dots, M\}$ y la probabilidad de infección de la epidemia satisface*

$$\alpha_N^j \rightarrow \alpha^j \quad \text{Cuando } N \rightarrow \infty, \forall j \in \{1, \dots, M\}$$

El proceso $(\rho_k^N)_{k \geq 0}$ converge en distribución a la órbita determinista comenzando con p , del sistema dinámico asociado a $h_{\vec{\beta}, \vec{\alpha}}$.

DEMOSTRACIÓN. Se demuestra al igual que la demostración anterior utilizando el lema 2.17 en vez del lema 2.5 y adaptando la demostración del lema 2.18 para probar el siguiente lema

Lema 3.20 Si $\alpha_N^j \rightarrow \alpha^j$ y $\alpha^j > 0$, entonces

$$\mathbb{E} \left(\left(\frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{1,N} \cap H_N|, \frac{1}{N} |\tilde{\eta}_1^{2,N} \cap H_N| \right) \right) \rightarrow h_{\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2}(p_1, p_2) \quad , N \rightarrow \infty$$

Uniformemente en la densidad inicial p .

□

Además, el proceso estocástico de crecimiento cumple la siguiente propiedad de monotonía

Proposición 3.21 Si $1 \leq \bar{\beta}_1 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \bar{\beta}_2$, $1 \geq x_0^1 \geq \bar{x}_0^1 \geq 0$, $0 \leq x_0^2 \leq \bar{x}_0^2 \leq 1$, $N \in \mathbb{N}$ la cantidad de sitios en el grafo. Entonces se pueden construir (X^1, X^2) y (\bar{X}^1, \bar{X}^2) procesos que representan la densidad de cada tipo de polilla sin infección por coordenada con ley definida por (β_1, β_2) y $(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2)$ respectivamente, partiendo en $\vec{x}_0 = (x_0^1, x_0^2)$ y $\vec{\bar{x}}_0 = (\bar{x}_0^1, \bar{x}_0^2)$ respectivamente, en un mismo espacio de probabilidad de forma que

$$X_n^1 \geq \bar{X}_n^1 \quad y \quad X_n^2 \leq \bar{X}_n^2 \quad c.s \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

esto es $\mathbb{P}_{\vec{x}_0, \vec{\bar{x}}_0} \left(X_n^1 \geq \bar{X}_n^1, X_n^2 \leq \bar{X}_n^2 \right) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. En particular

$$\mathbb{P}_{\vec{x}_0, \vec{\bar{x}}_0} \left(X_n^1 \geq \bar{X}_n^1, X_n^2 \leq \bar{X}_n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \right) = 1$$

DEMOSTRACIÓN. Para $\beta_1, \beta_2 \in [1, \infty)$, \vec{x}_0 distribución inicial y $x_1^1, x_1^2 \in [0, 1]$ tal que $x_1^1 + x_1^2 \leq 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{\vec{x}_0} \left((X_1^1, X_1^2) = (x_1^1, x_1^2) \right) \\ &= \frac{N!}{(x_1^1 N)! (x_1^2 N)! (N - x_1^1 N - x_1^2 N)!} (f_{\beta_1, \beta_2}^1(p_1, p_2))^{x_1^1 N} \\ & \quad (f_{\beta_1, \beta_2}^2(p_1, p_2))^{x_1^2 N} (1 - f_{\beta_1, \beta_2}^2(p_1, p_2) - f_{\beta_1, \beta_2}^1(p_1, p_2))^{N - x_1^1 N - x_1^2 N} \\ &= \frac{N!}{(x_1^1 N)! (x_1^2 N)! (N - x_1^1 N - x_1^2 N)!} \left(\left(1 - e^{-(\beta_1 x_0^1 + \beta_2 x_0^2)} \right) \frac{\beta_1 x_0^1}{\beta_1 x_0^1 + \beta_2 x_0^1} \right)^{x_1^1 N} \\ & \quad \left(\left(1 - e^{-(\beta_1 x_0^1 + \beta_2 x_0^2)} \right) \frac{\beta_2 x_0^2}{\beta_1 x_0^1 + \beta_2 x_0^1} \right)^{x_1^2 N} \\ & \quad \left(1 - \left(1 - e^{-(\beta_1 x_0^1 + \beta_2 x_0^2)} \right) \frac{\beta_1 x_0^1}{\beta_1 x_0^1 + \beta_2 x_0^1} - \left(1 - e^{-(\beta_1 x_0^1 + \beta_2 x_0^2)} \right) \frac{\beta_2 x_0^2}{\beta_1 x_0^1 + \beta_2 x_0^1} \right)^{N - x_1^1 N - x_1^2 N} \end{aligned}$$

Se denotará por \mathbb{P} a la probabilidad bajo (β_1, β_2) y $\bar{\mathbb{P}}$ a la probabilidad bajo $(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2)$. Se construirá $\left((X_n^1, X_n^2), (\bar{X}_n^1, \bar{X}_n^2) \right)$ coupling Markoviano. Si en la etapa n hay $\vec{x}_n = (x_n^1, x_n^2)$ y $\vec{\bar{x}}_n = (\bar{x}_n^1, \bar{x}_n^2)$ respectivamente, se utiliza $U_{n+1}^j \sim U([0, 1])$ para hacer un paso en el proceso

de la siguiente forma

$$\eta_{n+1}(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq U_{n+1}^j \leq \left(\left(1 - e^{-(\beta_1 x_n^1 + \beta_2 x_n^2)} \right) \frac{\beta_1 x_n^1}{\beta_1 x_n^1 + \beta_2 x_n^2} \right) \\ 0 & \text{si } \left(\left(1 - e^{-(\beta_1 x_n^1 + \beta_2 x_n^2)} \right) \frac{\beta_1 x_n^1}{\beta_1 x_n^1 + \beta_2 x_n^2} \right) \leq U_{n+1}^j \leq \left(1 - \left(1 - e^{-(\beta_1 x_n^1 + \beta_2 x_n^2)} \right) \frac{\beta_2 x_n^2}{\beta_1 x_n^1 + \beta_2 x_n^2} \right) \\ 2 & \text{si } \left(1 - \left(1 - e^{-(\beta_1 x_n^1 + \beta_2 x_n^2)} \right) \frac{\beta_2 x_n^2}{\beta_1 x_n^1 + \beta_2 x_n^2} \right) \leq U_{n+1}^j \leq 1 \end{cases}$$

$$\overline{\eta_{n+1}(j)} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq U_{n+1}^j \leq \left(\left(1 - e^{-(\overline{\beta_1} \overline{x_n^1} + \overline{\beta_2} \overline{x_n^2})} \right) \frac{\overline{\beta_1} \overline{x_n^1}}{\overline{\beta_1} \overline{x_n^1} + \overline{\beta_2} \overline{x_n^2}} \right) \\ 0 & \text{si } \left(\left(1 - e^{-(\overline{\beta_1} \overline{x_n^1} + \overline{\beta_2} \overline{x_n^2})} \right) \frac{\overline{\beta_1} \overline{x_n^1}}{\overline{\beta_1} \overline{x_n^1} + \overline{\beta_2} \overline{x_n^2}} \right) \leq U_{n+1}^j \leq \left(1 - \left(1 - e^{-(\overline{\beta_1} \overline{x_n^1} + \overline{\beta_2} \overline{x_n^2})} \right) \frac{\overline{\beta_2} \overline{x_n^2}}{\overline{\beta_1} \overline{x_n^1} + \overline{\beta_2} \overline{x_n^2}} \right) \\ 2 & \text{si } \left(1 - \left(1 - e^{-(\overline{\beta_1} \overline{x_n^1} + \overline{\beta_2} \overline{x_n^2})} \right) \frac{\overline{\beta_2} \overline{x_n^2}}{\overline{\beta_1} \overline{x_n^1} + \overline{\beta_2} \overline{x_n^2}} \right) \leq U_{n+1}^j \leq 1 \end{cases}$$

Donde $\eta_i(j)$ y $\overline{\eta_i(j)}$ son variables que definen

$$X_{n+1}^1 = \sum_{j=1}^N \mathbb{1}_{\eta_{n+1}(j)=1} \quad \text{si} \quad X_{n+1}^2 = \sum_{j=1}^N \mathbb{1}_{\eta_{n+1}(j)=2}$$

\overline{X}_1^1 y \overline{X}_1^2 se definen de forma análoga con $\overline{\eta_i}$. Y es un coupling gracias a que lo anterior simula

$$Multinomial(N, f_{\beta_1, \beta_2}^1(p_1, p_2), f_{\beta_1, \beta_2}^2(p_1, p_2), 1 - f_{\beta_1, \beta_2}^1(p_1, p_2) - f_{\beta_1, \beta_2}^2(p_1, p_2))$$

La cual es la distribución de cada una de las cadenas, por lo que las distribuciones marginales coinciden.

Dado que

$$\begin{aligned} x_0^1 &\geq \overline{x_0^1} \\ x_0^2 &\leq \overline{x_0^2} \end{aligned}$$

Se tendrá que $\mathbb{P}_{\overline{x_0^1}, \overline{x_0^2}} \left(X_1^1 \geq \overline{X}_1^1, X_1^2 \leq \overline{X}_1^2 \right) = 1$ si se cumplen las siguientes condiciones simultáneamente

$$\begin{aligned} \left(\left(1 - e^{-(\beta_1 x_n^1 + \beta_2 x_n^2)} \right) \frac{\beta_1 x_n^1}{\beta_1 x_n^1 + \beta_2 x_n^2} \right) &\geq \left(\left(1 - e^{-(\overline{\beta_1} \overline{x_n^1} + \overline{\beta_2} \overline{x_n^2})} \right) \frac{\overline{\beta_1} \overline{x_n^1}}{\overline{\beta_1} \overline{x_n^1} + \overline{\beta_2} \overline{x_n^2}} \right) \\ \left(1 - \left(1 - e^{-(\beta_1 x_n^1 + \beta_2 x_n^2)} \right) \frac{\beta_2 x_n^2}{\beta_1 x_n^1 + \beta_2 x_n^2} \right) &\geq \left(1 - \left(1 - e^{-(\overline{\beta_1} \overline{x_n^1} + \overline{\beta_2} \overline{x_n^2})} \right) \frac{\overline{\beta_2} \overline{x_n^2}}{\overline{\beta_1} \overline{x_n^1} + \overline{\beta_2} \overline{x_n^2}} \right) \end{aligned}$$

Lo que se cumple, pues la función $f(x, y) = (1 - e^{-(x+y)}) \frac{x}{x+y}$ es creciente en x y decreciente en y ya que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{e^{-x-y} (y(e^{x+y} - 1) + x(x+y))}{(x+y)^2} \geq 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \frac{x e^{-x-y} (-e^{x+y} + x + y + 1)}{(x+y)^2} \leq 0 \end{aligned}$$

Gracias a que se considera $x \geq 0$, $y \geq 0$, $e^z > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$ y que $e^x - 1 \geq x$ si $x \geq 0$. Luego para concluir la afirmación nos basta por inducción notar que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_{\vec{x}_0, \vec{x}_0} \left(X_{n+1}^1 \geq \overline{X_{n+1}^1}, X_{n+1}^2 \leq \overline{X_{n+1}^2} \right) \\
&= \mathbb{P}_{\vec{x}_0, \vec{x}_0} \left(X_{n+1}^1 \geq \overline{X_{n+1}^1}, X_{n+1}^2 \leq \overline{X_{n+1}^2} \mid X_n^1 \geq \overline{X_n^1}, X_n^2 \leq \overline{X_n^2} \right) \mathbb{P}_{\vec{x}_0, \vec{x}_0} \left(X_n^1 \geq \overline{X_n^1}, X_n^2 \leq \overline{X_n^2} \right) \\
&= \mathbb{P}_{\vec{x}_n, \vec{x}_n} \left(X_{n+1}^1 \geq \overline{X_{n+1}^1}, X_{n+1}^2 \leq \overline{X_{n+1}^2} \mid X_n^1 \geq \overline{X_n^1}, X_n^2 \leq \overline{X_n^2} \right) \mathbb{P}_{\vec{x}_0, \vec{x}_0} \left(X_n^1 \geq \overline{X_n^1}, X_n^2 \leq \overline{X_n^2} \right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Luego se tiene que $\mathbb{P}_{\vec{x}_0, \vec{x}_0} \left(X_n^1 \geq \overline{X_n^1}, X_n^2 \leq \overline{X_n^2} \right) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y dado que son numerables eventos de probabilidad 1 se tiene que $\mathbb{P}_{\vec{x}_0, \vec{x}_0} \left(X_n^1 \geq \overline{X_n^1}, X_n^2 \leq \overline{X_n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \right) = 1$. \square

3.4.1. Propiedades del sistema h_{β_1, β_2}

Se volcará completamente la atención sobre el sistema límite considerado $\alpha_N \rightarrow 0$. Para este sistema se estudiará la extinción y los puntos fijos de convergencia del sistema

Proposición 3.22 *Si $1 \leq \beta_1 < \beta_2$, entonces el sistema dinámico definido por*

$$\begin{aligned}
f_{\beta_1, \beta_2} : \quad [0, 1]^2 &\rightarrow [0, 1]^2 \\
(p_1, p_2) &\rightarrow \left((1 - e^{-(\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2) \frac{\beta_1 p_1}{\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2}}), (1 - e^{-(\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2) \frac{\beta_2 p_2}{\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2}}) \right)
\end{aligned}$$

Posee dos puntos fijos $\{(0, FP(\beta_2)), (FP(\beta_1), 0)\}$ Atractor e Inestable respectivamente.

Para el caso $1 < \beta_1 = \beta_2$. Los siguientes puntos son puntos fijos no hiperbólicos.

$$\left\{ (0, FP(\beta_2)), (FP(\beta_1), 0), \left(\frac{FP(\beta_1)}{2}, \frac{FP(\beta_2)}{2} \right) \right\}$$

Para ambos casos $(0, 0)$ es un punto fijo, gracias a la extensión por continuidad de f .

Lema 3.23 *La función W de Lambert es estrictamente creciente en $(-\frac{1}{e}, \infty)$, en particular es inyectiva.*

DEMOSTRACIÓN. La función W de Lambert resuelve la ecuación $x = W(x)e^{W(x)}$, por lo tanto, tiene por inversa a la función $W^{-1}(y) = ye^y$, la cual es estrictamente creciente en $(-1, \infty)$ gracias a que $(W^{-1}(y))' = (y+1)e^y$. Como W^{-1} es estrictamente creciente en $(-1, \infty)$, la función W es estrictamente creciente en $(-\frac{1}{e}, \infty)$, y gracias a esto es inyectiva en $(-\frac{1}{e}, \infty)$. \square

DEMOSTRACIÓN PROPOSICIÓN 3.22. El punto 0 en cualquiera de las coordenadas siempre es un punto fijo, luego si alguna de las coordenadas es 0 la otra coordenada se reduce al caso de una dimensión (un tipo de polilla), luego se tiene $(0, FP(\beta_2))$ y $(FP(\beta_1), 0)$ son puntos fijos. Para

ver si existe alguno con coordenadas no triviales se explora la ecuación exponencial asociada a cada coordenada, así

$$\begin{aligned}
\iff x &= (1 - e^{-(\beta_1 x + \beta_2 y)}) \frac{\beta_1 x}{\beta_1 x + \beta_2 y} \\
\iff \frac{\beta_1 x + \beta_2 y}{\beta_1} &= (1 - e^{-(\beta_1 x + \beta_2 y)}) \\
\iff e^{-(\beta_1 x + \beta_2 y)} &= 1 - x - \frac{\beta_2 y}{\beta_1} \\
\iff e^{-\beta_2 y - \beta_1 \left(1 - \frac{\beta_2 y}{\beta_1}\right)} e^{\beta_1 \left(1 - x - \frac{\beta_2 y}{\beta_1}\right)} &= 1 - x - \frac{\beta_2 y}{\beta_1} \\
\iff -\beta_1 e^{-\beta_1} &= -\beta_1 \left(1 - x - \frac{\beta_2 y}{\beta_1}\right) e^{-\beta_1 \left(1 - x - \frac{\beta_2 y}{\beta_1}\right)}
\end{aligned}$$

Luego se tiene

$$x = \frac{W(-\beta_1 e^{-\beta_1})}{\beta_1} + 1 - \frac{\beta_2 y}{\beta_1}$$

Y por simetría se tiene que

$$y = \frac{W(-\beta_2 e^{-\beta_2})}{\beta_2} + 1 - \frac{\beta_1 x}{\beta_2}$$

Con todo esto, un punto fijo con $x \neq 0$, $y \neq 0$ tendría que satisfacer

$$x = \frac{W(-\beta_1 e^{-\beta_1})}{\beta_1} + 1 - \frac{\beta_2}{\beta_1} \left(\frac{W(-\beta_2 e^{-\beta_2})}{\beta_2} + 1 - \frac{\beta_1 x}{\beta_2} \right)$$

De donde se deduce que

$$W(-\beta_2 e^{-\beta_2}) - W(-\beta_1 e^{-\beta_1}) = \beta_1 - \beta_2$$

Considerando $r(\beta) = -\beta e^{-\beta}$ la cual es estrictamente monotonamente en $[1, \infty)$ Finalmente lo anterior sólo se cumple para $\beta_1 = \beta_2$, gracias a la inyectividad de $W \circ r + I$ obtenida gracias al lema 3.23.

Ahora que se cuenta con los conjuntos de puntos fijos, se chequeará la condición de atracción/repulsión.

$$Df(0, FP(\delta_2)) = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1}{\beta_2} & 0 \\ -\frac{\beta_1(W(-\beta_2 e^{-\beta_2}) + 1)}{\beta_2} & -W(-\beta_2 e^{-\beta_2}) \end{pmatrix}$$

Luego los valores propios de esta matriz son

$$\left\{ \frac{\beta_1}{\beta_2}, -W(-\beta_2 e^{-\beta_2}) \right\}$$

Donde $\left| \frac{\beta_1}{\beta_2} \right| < 1$ gracias a las hipótesis, además $| -W(-\beta_2 e^{-\beta_2}) | < 1$, pues en $(-\frac{1}{e}, 0)$ la función W de Lambert es mayor que -1, que $| -\beta_2 e^{-\beta_2} | < e^{-1}$ se chequeó anteriormente. Con esto se obtiene que este punto es atractor. Chequear para $(FP(\beta_1), 0)$ es análogo a lo anterior quedando como valores propios

$$\left\{ \frac{\beta_2}{\beta_1}, -W(-\beta_1 e^{-\beta_1}) \right\}$$

Y donde $\left| \frac{\beta_2}{\beta_1} \right| > 1$, luego este es un punto silla o punto inestable. Para el caso $\beta_1 = \beta_2$ se tiene que los puntos anteriores consiguen como valor propio $\left| \frac{\beta_2}{\beta_1} \right| = 1$,

$$Df \left(\frac{FP(\beta_1)}{2}, \frac{FP(\beta_2)}{2} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - W(-\beta_2 e^{-\beta_2})) & \frac{1}{2}(-W(-\beta_2 e^{-\beta_2}) - 1) \\ \frac{1}{2}(-W(-\beta_2 e^{-\beta_2}) - 1) & \frac{1}{2}(1 - W(-\beta_2 e^{-\beta_2})) \end{pmatrix}$$

Los valores propios

$$\left\{ 1, -W(-\beta_2 e^{-\beta_2}) \right\}$$

Luego los 3 puntos son no hiperbólicos. □

Definición 3.24 Se dirá que un sistema $([0, 1] \times [0, 1], T)$ domina a $([0, 1] \times [0, 1], S)$ hasta N para $x_0 = (x_0^1, x_0^2)$ condición inicial si cumple

$$T_1^n(x_0) \leq S_1^n(x_0) \quad y \quad T_2^n(x_0) \geq S_2^n(x_0) \quad \forall 0 \leq n \leq N$$

Si lo anterior se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$ se dirá simplemente que $([0, 1] \times [0, 1], T)$ domina a $([0, 1] \times [0, 1], S)$ para $x_0 = (x_0^1, x_0^2)$.

Lema 3.25 El sistema $([0, 1] \times [0, 1], T_{\beta_1, \beta_2})$, donde $T_{\beta_1, \beta_2}(x^1, x^2) = (f_{\beta_1, \beta_2}^1(x^1, 0.5), 0.5)$, posee dos puntos fijos $\left(\frac{W(-\beta_1 e^{-\beta_1})}{\beta_1} + 1 - \frac{\beta_2}{2\beta_1}, 0.5 \right)$ y $(0, 0.5)$. Si $\beta_1 < \beta_2 < 2W(-\beta_1 e^{-\beta_1}) + 2\beta_1$, el primero es atractor y el segundo es repulsor; mientras que, los roles se cambian cuando $\beta_2 > 2W(-\beta_1 e^{-\beta_1}) + 2\beta_1$.

DEMOSTRACIÓN. Se toma como primera consideración una iteración del sistema y se utiliza ésta como condición inicial, lo que transforma el sistema en uno unidimensional— Aquí la proposición 1.18 es válida —. El punto $(0, 0.5)$ es trivialmente punto fijo, y se tiene que $\left(\frac{W(-\beta_1 e^{-\beta_1})}{\beta_1} + 1 - \frac{\beta_2}{2\beta_1}, 0.5 \right)$ es punto fijo, ya que resuelve la ecuación $x = (1 - e^{-(\beta_1 x + \beta_2/2)}) \frac{\beta_1 x}{\beta_1 x + \beta_2/2}$ como se vio anteriormente. Se estudiará el comportamiento de estos puntos (atractor/repulsor). Calculando la derivada de f^1 se obtiene que

$$\frac{\partial f_{\beta_1, \beta_2}^1 \left(\frac{W(-\beta_1 e^{-\beta_1})}{\beta_1} + 1 - \frac{\beta_2 y}{\beta_1}, 0.5 \right)}{\partial x^1} = \frac{1}{2} \left(\beta_2 - \beta_2 \frac{\beta_1 - 1}{\beta_1 + W(-e^{-\beta_1} \beta_1)} - 2W(-e^{-\beta_1} \beta_1) \right)$$

Esta última es claramente creciente con respecto a β_2 , ya que $W(-e^{-\beta_1} \beta_1) > -1$ y $\beta_1 > 1$, luego se evalúa la derivada de f^1 en β_2 tal que se cumpla $\frac{W(-\beta_1 e^{-\beta_1})}{\beta_1} + 1 - \frac{\beta_2}{2\beta_1} = 0$, lo que se cumple para $\beta_2^* = 2W(-\beta_1 e^{-\beta_1}) + 2\beta_1$, en donde

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\beta_2^* + \frac{\beta_2^* - \beta_1 \beta_2^*}{\beta_1 + W(-e^{-\beta_1} \beta_1)} - 2W(-e^{-\beta_1} \beta_1) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(2W(-\beta_1 e^{-\beta_1}) + 2\beta_1 + \frac{2W(-\beta_1 e^{-\beta_1}) + 2\beta_1 - \beta_1(2W(-\beta_1 e^{-\beta_1}) + 2\beta_1)}{\beta_1 + W(-e^{-\beta_1} \beta_1)} - 2W(-e^{-\beta_1} \beta_1) \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Luego este punto pasa de ser atractor a repelente en β_2^* . Para analizar el comportamiento de $(0, 0.5)$ se calcula la derivada de f^1 en este punto.

$$\frac{\partial f_{\beta_1, \beta_2}^1(0, 0.5)}{\partial x^1} = \frac{\beta_1 \left(e^{-\frac{\beta_2}{2}} - 1 \right)}{-\frac{\beta_2}{2}}$$

Luego se tiene que esta cantidad es decreciente en β_2 ya que la función $\frac{(1-e^{-x})}{-x}$ es decreciente en x . Finalmente se busca β_2^{**} tal que $\frac{2\beta_1 \left(1 - e^{-\frac{\beta_2}{2}} \right)}{\beta_2} = 1$ para esta ecuación nuevamente se despeja la ecuación exponencial utilizando la función W de Lambert.

$$\begin{aligned} \iff \beta_1 \left(1 - e^{-\frac{\beta_2^{**}}{2}} \right) &= \frac{\beta_2^{**}}{2} \\ \iff \beta_1 - \frac{\beta_2^{**}}{2} &= \beta_1 e^{-\frac{\beta_2^{**}}{2} + \beta_1} e^{-\beta_1} \\ \iff -\left(\beta_1 - \frac{\beta_2^{**}}{2} \right) e^{-(\beta_1 - \frac{\beta_2^{**}}{2})} &= -\beta_1 e^{-\beta_1} \end{aligned}$$

Así

$$-\left(\beta_1 - \frac{\beta_2^{**}}{2} \right) = W(-\beta_1 e^{-\beta_1}) \implies \beta_2^{**} = 2W(-\beta_1 e^{-\beta_1}) + 2\beta_1$$

Así desde β_2^{**} el punto $(0, 0.5)$ pasa de ser repelente a atractor. \square

Lema 3.26 Si $\beta_2 > \beta_1$ para toda condición inicial (x_0^1, x_0^2) con $x_0^2 \neq 0$ el sistema dinámico definido por f_{β_1, β_2} converge a $(0, FP(\beta_2))$; i.e. La cuenca de atracción de $(0, FP(\beta_2))$ es el conjunto $C = \{(x^1, x^2) \in [0, 1]^2 : x^2 \neq 0\}$.

DEMOSTRACIÓN. Primero se demostrará que para las hipótesis dadas la primera coordenada tiende a 0, luego se demostrará que la segunda coordenada tiende a $FP(\beta_2)$ acotando la segunda coordenada del sistema definido por f por otras sucesiones tanto por arriba como por abajo.

Antes de partir se define por conveniencia la notación

$$(x_n^1, x_n^2) = f^n(x_0^1, x_0^2)$$

Para la condición inicial (x_0^1, x_0^2) el sistema definido por f cumple en cada iteración que

$$\frac{x_n^1}{x_n^2} = \frac{\beta_1 x_{n-1}^1}{\beta_2 x_{n-1}^2} = \left(\underbrace{\frac{\beta_1}{\beta_2}}_{< 1} \right)^n \frac{x_0^1}{x_0^2} \quad (3.24)$$

por lo que la primera coordenada debe tender a 0.

Para mostrar que (x_n^1, x_n^2) para n suficientemente grande vive cerca de $(0, FP(\beta_2))$ se introduce el siguiente sistema $D : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$ definido por

$$D(x_1, x_2) = \left((1 - e^{-\beta_2(x_1+x_2)}) \frac{\beta_1 x_1}{\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2}, (1 - e^{-\beta_2(x_1+x_2)}) \frac{\beta_2 x_2}{\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2} \right)$$

La primera coordenada de este sistema también converge a 0 pues cumple la propiedad presentada en ec. (3.24). La suma de ambas coordenadas en el sistema anterior define un sistema dinámico en una dimensión definido por $SD : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definido por

$$SD(x) = (1 - e^{-\beta_2(x)})$$

Como ya ha sido estudiado SD tiende a 0 y $FP(\beta_2)$ como puntos fijos con el primero repelente y el segundo atractor; y gracias a la proposición 1.18 se tiene que toda condición inicial no nula converge al punto $FP(\beta_2)$. Como la suma converge a $FP(\beta_2)$ y la primera coordenada converge a 0, se tiene que la segunda coordenada debe converger a $FP(\beta_2)$. Ahora si se define

$$(y_n^1, y_n^2) = D^n(x_0^1, x_0^2)$$

Se cumple que $x_n^2 \leq y_n^2 \forall n \in \mathbb{N}$.

En lo que sigue se acotará por debajo la segunda coordenada de f , será conveniente escribir ésta como

$$x_{n+1}^2 = \left(1 - e^{-\beta_2 x_n^2 \left(1 + \frac{\beta_1 x_n^1}{\beta_2 x_n^2} \right)} \right) \frac{1}{1 + \frac{\beta_1 x_n^1}{\beta_2 x_n^2}}$$

y para $\delta > 0$ se considera N_0 tal que $0 < \frac{x_n^1}{x_n^2} < \delta \forall n \geq N_0$ (se tiene pues este cociente es decreciente). Se define el sistema $S : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ como

$$S(x) = (1 - e^{-\beta_2(1+\delta)x}) \frac{1}{1 + \delta}$$

Este sistema tiene dos puntos fijos 0 y $\frac{FP(\beta_2)}{1+\delta}$, además si se denota por $z_n^2 = S^{n-N_0}(x_{N_0}^2)$ se tiene que $z_n^2 \leq x_n^2 \forall n > N_0$ (esto pues $(1 - e^{-x-y}) \frac{x}{x+y}$ es decreciente en y).

Las cotas anteriores dicen que $\exists n_0^{\delta, \gamma} \in \mathbb{N}, \forall \delta > 0, \forall \gamma > 0$ tal que

$$\frac{FP(\beta_2)}{1 + \delta} - \gamma \leq z_n^2 \leq x_n^2 \leq y_n^2 \leq FP(\beta_2) + \gamma \quad \forall n > n_0$$

Del cual se deduce

$$\frac{FP(\beta_2)}{1 + \delta} - \gamma \leq \limsup x_n^2 \leq FP(\beta_2) + \gamma \quad \forall \delta > 0, \forall \gamma > 0$$

Luego haciendo $\delta \rightarrow 0$ y $\gamma \rightarrow 0$ se tiene que $\limsup x_n^2 = FP(\beta_2)$. Análogamente se obtiene que $\liminf x_n^2 = FP(\beta_2)$, por lo que se concluye lo pedido. □

Teorema 3.27 *Para $\beta_1 > 2 \log(2)$ si $\beta_2 \in (\beta_1, 2W(-\beta_1 e^{-\beta_1}) + 2\beta_1)$, entonces las especies coexisten para cualquier densidad inicial no nula en cada especie.*

DEMOSTRACIÓN. Se mayorará el sistema dinámico definido por $([0, 1]^2, h_{\beta_1, \beta_2})$ por otro en el que sea más fácil demostrar la coexistencia, en particular se considerará un sistema en donde la primera coordenada sea minorada, y esta minoración consiga coexistir.

Sea (p_0^1, p_0^2) una condición inicial cualquiera no nula por coordenada, sin pérdida de generalidad la condición inicial es menor o igual que 0.5 por coordenada, ya que en otro caso, se itera una vez el sistema h_{β_1, β_2} el cual tiene por recorrido $[0, 0.5]$.

Para una primera fase se sabe que $(0, FP(\beta_2))$ es el único punto fijo atractor de $([0, 1] \times [0, 1], f_{\beta_1, \beta_2})$, donde $FP(\beta_2) > \frac{1}{2}$ ya que $\beta_2 > 2 \log(2)$, por lo cual se iterará este sistema hasta un n_0 tal que $(f^2)_{\beta_1, \beta_2}^{n_0}(p_0^1, p_0^2) < 0.5$ y $(f^2)_{\beta_1, \beta_2}^{n_0+1}(p_0^1, p_0^2) > 0.5$ por primera vez.

Se define $x_n = h_{\beta_1, \beta_2, \alpha}^n(p_0^1, p_0^2) = f_{\beta_1, \beta_2}^n(p_0^1, p_0^2)$ y $y_n = x_n$ para $0 \leq n \leq n_0$.

En una segunda fase se utilizará el sistema $([0, 1] \times [0, 1], T_{\beta_1, \beta_2})$, donde $T(x^1, x^2) = (f_{\beta_1, \beta_2}^1(x^1, x^2), 0.5)$. Este último sistema dinámico tiene dos puntos fijos dependiendo los valores de β_1 y β_2 , y como $\beta_2 \in (\beta_1, 2W(-\beta_1 e^{-\beta_1}) + 2\beta_1)$, por el lema 3.25, $(\frac{W(-\beta_1 e^{-\beta_1})}{\beta_1} + 1 - \frac{\beta_2}{2\beta_1}, 0.5)$ es el punto fijo atractor y gracias a la proposición 1.18 todo punto salvo $(0, 0.5)$ cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{\beta_1, \beta_2}^n(x_1, x_2) = \left(\frac{W(-\beta_1 e^{-\beta_1})}{\beta_1} + 1 - \frac{\beta_2}{2\beta_1}, 0.5 \right)$$

Se puede notar que el sistema $([0, 1] \times [0, 1], T_{\beta_1, \beta_2})$ domina a $([0, 1] \times [0, 1], h_{\beta_1, \beta_2})$ para x_{n_0} , lo cual es claro pues $f(x, y) = (1 - e^{-(x+y)}) \frac{x}{x+y}$ es decreciente con respecto a y y $h^2(x) \leq 0.5 \forall x \in [0, 1]^2$. En tal caso se define $x_n = h_{\beta_1, \beta_2, \alpha}^{n-n_0}(x_{n_0})$ y $y_n = T_{\beta_1, \beta_2}^{n-n_0}(x_{n_0})$ para $n \in \mathbb{N}$.

Solo falta notar que

$$\frac{W(-\beta_1 e^{-\beta_1})}{\beta_1} + 1 - \frac{\beta_2}{2\beta_1} > 0 \quad \text{y} \quad x_n^2 \not\rightarrow 0$$

Para la primera de estas condiciones se nota que $\frac{W(-\beta_1 e^{-\beta_1})}{\beta_1} + 1 - \frac{\beta_2}{2\beta_1}$ es una recta en β_2 que alcanza el 0 en $2W(-\beta_1 e^{-\beta_1}) + 2\beta_1$, evaluando en $\beta_2 = 2W(-\beta_1 e^{-\beta_1}) + 2\beta_1 - \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$

$$\frac{W(-\beta_1 e^{-\beta_1})}{\beta_1} + 1 - \frac{2W(-\beta_1 e^{-\beta_1}) + 2\beta_1 - \varepsilon}{2\beta_1} = \frac{\varepsilon}{2\beta_1} > 0$$

Luego si $\beta_2 \in (\beta_1, 2W(-\beta_1 e^{-\beta_1}) + 2\beta_1)$ se tiene que $\frac{W(-\beta_1 e^{-\beta_1})}{\beta_1} + 1 - \frac{\beta_2}{2\beta_1} > 0$. Para ver que $x_n^2 \not\rightarrow 0$, sea el punto (p_1, p_2) no nulo en ambas coordenadas, al iterar se puede estar en dos regímenes determinados por g

1. Si $f_{\beta_1, \beta_2}^2(p_1, p_2) > \frac{1}{2}$, entonces g aplica $(1-p)^3/p^2$, luego se tiene para la fase de crecimiento

$$f_{\beta_1, \beta_2}^2(p_1, p_2) = (1 - e^{-\beta_1 p_1 - \beta_2 p_2}) \frac{\beta_2 p_2}{\beta_2 p_2 + \beta_1 p_1} < (1 - e^{-\beta_1 p_1 - \beta_2 \frac{1}{2}}) \frac{\beta_2 \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \beta_2 + \beta_1 p_1} < (1 - e^{-\frac{\beta_2}{2}})$$

Considerando que la función $(1 - e^{-x-y}) \frac{x}{x+y}$ es decreciente en y y creciente en x . Luego aplicando g que es decreciente en la zona donde aplica a $(1-p)^3/p^2$, se tiene

$$g(f_{\beta_1, \beta_2}^2(p_1, p_2)) > g((1 - e^{-\frac{\beta_2}{2}})) > 0$$

Por esto única forma que esta coordenada tienda a 0 se debe a la fase de crecimiento.

2. Si $f_{\beta_1, \beta_2}^2(p_1, p_2) \leq \frac{1}{2}$, si se asume que $f_{\beta_1, \beta_2}^1(p_1, p_2) \leq \frac{1}{2}$, entonces el comportamiento del sistema se ve gobernado por f_{β_1, β_2} y por proposición 3.22, este tiene como punto fijo atractor a $(0, FP(\beta_2))$ si $\beta_1 < \beta_2$, luego la segunda coordenada crece hacia $FP(\beta_2)$ (Como $\beta_2 > 2 \log(2)$, se cumple que $FP(\beta_2) > 0.5$) por lo que no se anulará a menos que se inicialice nula. En el caso en que $f_{\beta_1, \beta_2}^1(p_1, p_2) > \frac{1}{2}$ el comportamiento de la segunda coordenada no se ve afectada puesto que ésta se queda estancada con el efecto de la función de crecimiento.

□

Capítulo 4

Discusiones

4.1. Cascada de bifurcaciones en MM

En esta sección se discutirá la existencia de las cascadas de bifurcaciones presentadas en fig. 2.3 y fig. 4.12a. Para demostrar la existencia de estas se trato de utilizar un teorema que pide chequear cinco hipótesis, de las cuales al menos dos de estas son de dificultad algebraica alta, por lo cual se dará evidencia suficiente de que ellas ocurren.

Se dará inicio a la discusión definiendo un par de elementos, donde como base se usará una función $f : [\mu_1, \mu_2] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ un parámetro del sistema dinámico, por lo que las definiciones y teoremas presentados a continuación será una adaptación de [9] para funciones a valores en \mathbb{R} .

Definición 4.1 (Punto p -periódico y órbita periódica) *Se dirá que el punto (μ, x_0) es un punto p -periódico si $f^p(\mu, x_0) = x_0$ y p es el menor número entero para el cual esto es cierto. El siguiente conjunto se denominará la órbita periódica asociada a (μ, x_0)*

$$\{(\mu, x_0), (\mu, x_1), \dots, (\mu, x_{p-1})\}, \text{ Donde } x_j = F^j(\mu, x_0)$$

Definición 4.2 (Órbitas periódicas hiperbólicas, Órbita de bifurcación) *Para el punto n -periódico (μ, x) su órbita se dirá hiperbólica si $|\partial_x f^n(\mu, x_0)| \neq 1$. Todas las otras órbitas se llamarán órbitas de bifurcación.*

Definición 4.3 (Órbita de cambio y órbita regular) *Se llamará a una órbita periódica como órbita de cambio si tiene derivada menor estricta que -1 . Toda otra órbita periódica se llamará órbita regular.*

Definición 4.4 (Camino) *Se dirá que para cierto intervalo K , $Y : K \rightarrow S$ es un camino si es continuo y cumple*

1. $Y(\psi) = (\mu(\psi), x(\psi))$ es un punto periódico regular en S para todo $\psi \in K$.
2. Y nunca esta en la misma órbita para diferentes ψ , i.e. para $\psi_1, \psi_2 \in K$ con $\psi_1 \neq \psi_2$

entonces $Y(\psi_1)$ y $Y(\psi_2)$ no son parte de la misma órbita.

Además se dirá que el camino es maximal si

- 3) Y no puede ser extendida a un intervalo más grande y no puede ser redefinida para incluir más puntos de órbitas regulares.

Ejemplos de la definición anterior se presentan en [9]

Definición 4.5 (Órbitas de bifurcación genéricas) *Se dirá que una órbita es de bifurcación genérica si cada órbita de bifurcación cae dentro de las siguientes dos categorías:*

1. Bifurcación de punto silla: $\partial_x f^n(\mu, x_0) = 1$
2. Bifurcación period-doubling: $\partial_x f^n(\mu, x_0) = -1$

Definición 4.6 (Cascada) *Se llamará a un camino regular $Y(\psi)$ para $\psi \in [a, b)$ cascada si el camino contiene infinitas bifurcaciones de period-doubling, y para algún periodo p , los periodos de los puntos en el camino son precisamente $p, 2p, 4p, \dots$. A medida que $\psi \rightarrow b$ el periodo de los puntos en el camino tiende a infinito.*

Definición 4.7 (Crecimiento exponencial de órbitas periódicas) *Hay crecimiento exponencial de órbitas periódicas en μ si existe un número $G > 1$ tal que el número de órbitas periódicas de periodo p satisface $|\text{fixed}(\mu, p)| \geq G^p$; donde $\text{fixed}(\mu, p)$ representa al conjunto de puntos de periodo p en μ .*

Definición 4.8 (Caos de órbita periódica (POC)) *Se dirá que el mapeo $f(\mu, x)$ tiene caos de órbita periódica para el parámetro μ si hay crecimiento exponencial de órbitas periódicas*

Definición 4.9 (Dimensión inestable) *La dimensión inestable $\text{Dim}_u(\mu, x)$ del punto periódico (μ, x) (u órbita periódica) se define como $\mathbb{1}_{\{|\partial_x f(\mu, x)| > 1\}}$.*

Definición 4.10 (Caos de órbita periódica virtualmente uniforme (VUPOC)) *Se dirá que hay caos virtualmente uniforme de órbita periódica o abreviado del inglés VUPOC (virtually uniform periodic orbit chaos) en μ si hay POC y, salvo finitas órbitas periódicas, todas tienen la misma dimensión inestable, denotada por $\text{Dim}_u(\mu)$.*

Definición 4.11 (Derivada Schwarziana) *Si $f : I \rightarrow I$ con I intervalo, es una función C^3 y $f'(x) \neq 0$ la derivada Schwarziana de f en x se define por*

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2$$

Teorema 4.12 (Singer (ver [2]) Teorema 3.1) *Si $f : I \rightarrow I$ con I intervalo, es una función C^3 con derivada Schwarziana negativa, entonces el número de puntos periódicos hiperbólicos atractores o no hiperbólicos de f son finitos.*

La definición anterior es consistente gracias a que todo punto en una órbita periódica tiene la misma derivada por la regla de la cadena (Ver [6]).

Teorema 4.13 (Ruta al caos de órbitas periódicas [9]) *Si se cumplen las siguientes hipótesis*

- H0) f es infinitamente diferenciable en μ y x , y todas sus órbitas de bifurcación son genéricas.*
- H1) Sea $J = [\mu_1, \mu_2]$, entonces existe un conjunto acotado M que contiene todos los puntos periódicos (μ, x) para $\mu \in J$.*
- H2) Todas las órbitas periódicas en μ_1 y μ_2 son hiperbólicas.*
- H3) El número de órbitas periódicas Λ_1 en μ_1 es finito.*
- H4) En μ_2 hay caos virtualmente uniforme de órbita periódica. Y se denominará por Λ_2 el número de órbitas periódicas teniendo dimensión inestable distinto a $\text{Dim}_u(\mu_2)$.*

Entonces hay infinitas cascadas de period-doubling entre μ_1 y μ_2 .

Definición 4.14 (Operador de Renormalización, Función renormalizable) *Para una función $f_\mu : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ unimodal, tal que tiene un punto fijo p_d a la derecha del punto crítico, se le llamará $p_i < p_d$ a la preimagen del punto fijo que está a la izquierda del punto crítico. Luego se define*

$$L_\mu(x) = \frac{x - p_d}{p_i - p_d} \quad y \quad L_\mu^{-1}(x) = p_i x + p_d(1 - x)$$

Luego el operador de renormalización se define como

$$R_\mu^f(x) = L_\mu \circ f_\mu^2 \circ L_\mu^{-1}(x)$$

Se dirá que una función es renormalizable si $R_\mu^f : [0, 1] \rightarrow S \subset [0, 1]$.

Proposición 4.15 *Para $\alpha \in (0, 1)$ fijo, $h_{\beta, \alpha}$ es una función renormalizable para todo β suficientemente cerca de β_c que cumple $FP(\beta_c) = p_\alpha^*$.*

DEMOSTRACIÓN. A lo largo de la demostración se llamará $fp(\beta)$ al punto fijo no nulo de la función $h_{\beta, \alpha}$, y se llamará $CP(\beta, \alpha)$ al punto crítico de $h_{\beta, \alpha}$.

Primero se analiza la continuidad de $fp(\beta)$, para esto se hace uso de la proposición 1.19, utilizando $X = \overline{B(CP(\beta_c, \alpha), \varepsilon_1)}$ y $Y = B(\beta_c, \varepsilon_2)$ para $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tal que $|h_{\beta, \alpha}(x) - h_{\beta, \alpha}(y)| < |x - y| \forall x, y \in X, \beta \in Y$, esto se puede hacer gracias a la continuidad de h con respecto a ambos parámetros y gracias a que $\partial_x h_{\beta_c, \alpha}(fp(\beta_c)) = 0$; luego, $fp(\beta)$ es continuo en Y .

Gracias a la continuidad del punto fijo sea $\varepsilon > 0$, entonces $\exists \delta > 0$ tal que $|\beta_1 - \beta_c| < \delta \implies |fp(\beta_1) - fp(\beta_c)| < \varepsilon$; luego se considera $\beta_1 \in B(\beta_c, \delta)$ y denominamos $\bar{\varepsilon} < \varepsilon$ al que cumple $h_{\beta_1, \alpha}(fp(\beta_c) - \bar{\varepsilon}) = fp(\beta_1)$, osea $fp(\beta_c) - \bar{\varepsilon} = fp(\beta_1)$. Este último paso se justifica, pues en β_c el punto fijo se alcanza en el máximo de g , luego cualquier otro punto fijo es menor.

Haciendo una expansión de Taylor de orden 3 se tiene para C adecuado que

$$\begin{aligned} h_{\beta_1, \alpha}(fp(\beta_c) - \bar{\varepsilon}) &= h_{\beta_1, \alpha}(fp(\beta_c)) + h''_{\beta_1, \alpha}(fp(\beta_c))\bar{\varepsilon}^2 + O(\bar{\varepsilon}^3) \\ \implies |fp(\beta_1) - h^2_{\beta_1, \alpha}(CP(\beta_1, \alpha))| &\leq |h''_{\beta_1, \alpha}(fp(\beta_c))|\bar{\varepsilon}^2 + C\bar{\varepsilon}^3 \end{aligned}$$

Lo anterior se tiene pues $fp(\beta_c) = h_{\beta_1, \alpha}(CP(\beta_1, \alpha)) \quad \forall \beta_1 > \beta_c$ (ver fig. 4.1). Luego para $\bar{\varepsilon}$ apropiado se tiene que la diferencia anterior es menor que la diferencia entre $|fp(\beta_c) - fp(\beta_1)|$.

Haciendo nuevamente una expansión de Taylor de $h_{\beta,\alpha}$ se puede notar que como la función cerca del máximo se comporta de forma cuadrática, entonces se puede refinar la elección de β_1 de modo que se cumpla que $\bar{\varepsilon} < \bar{\delta}$ (Ver fig. 4.1). \square

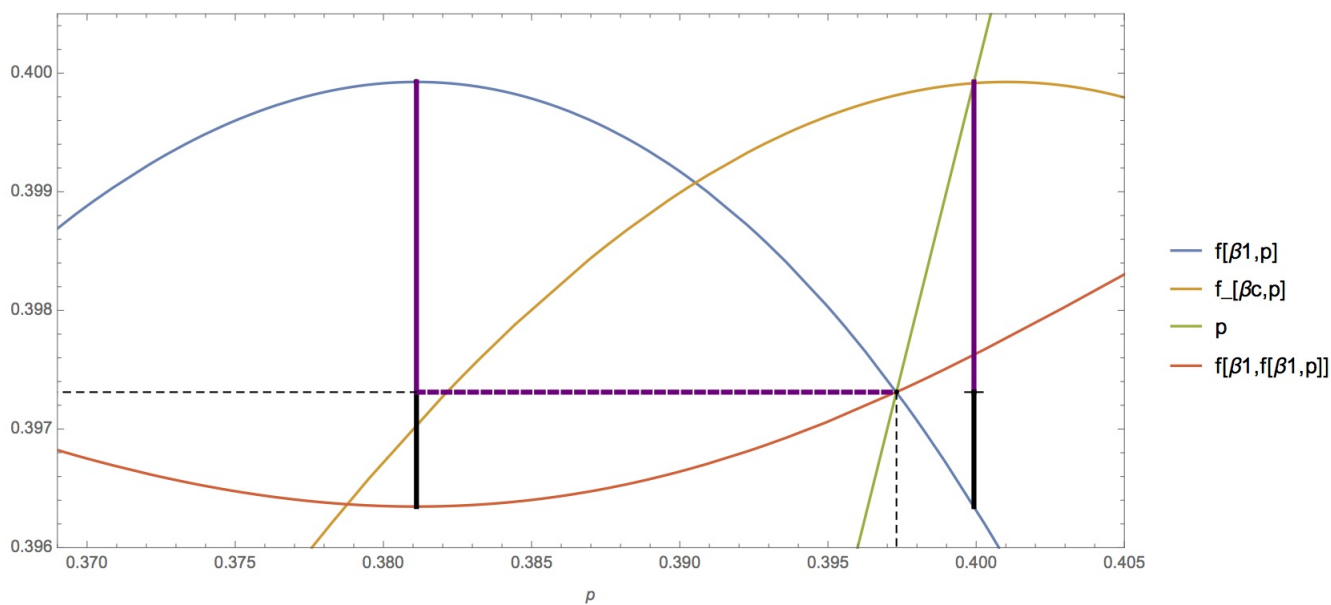


Figura 4.1: En la primera fase de la propiedad se demostró que, para cierta elección, el segmento negro sólido es menor que el segmento purpura sólido; mientras que en la segunda fase, se demostró que se puede elegir todo de modo que el segmento purpura sólido sea menor que el segmento purpura punteado.

Una muestra de lo anterior es presentada en la fig. 4.2 y la fig. 4.3.

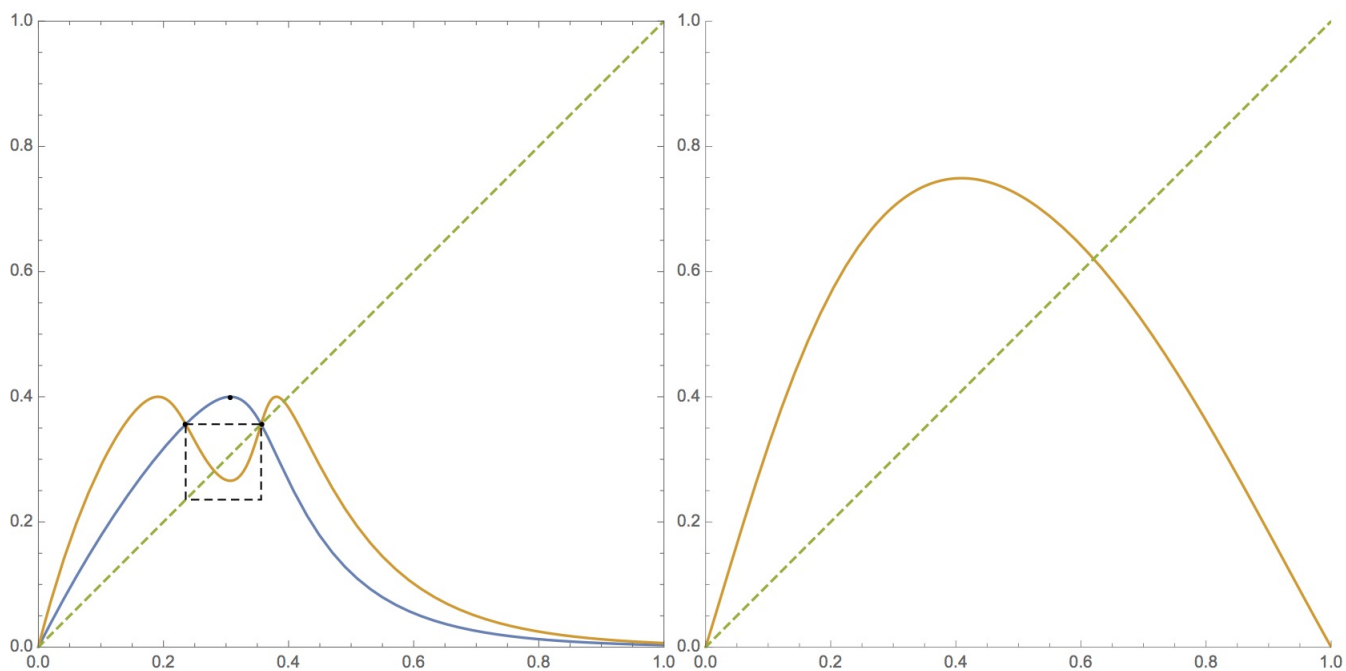


Figura 4.2: Renormalización de máximo menor que 1.

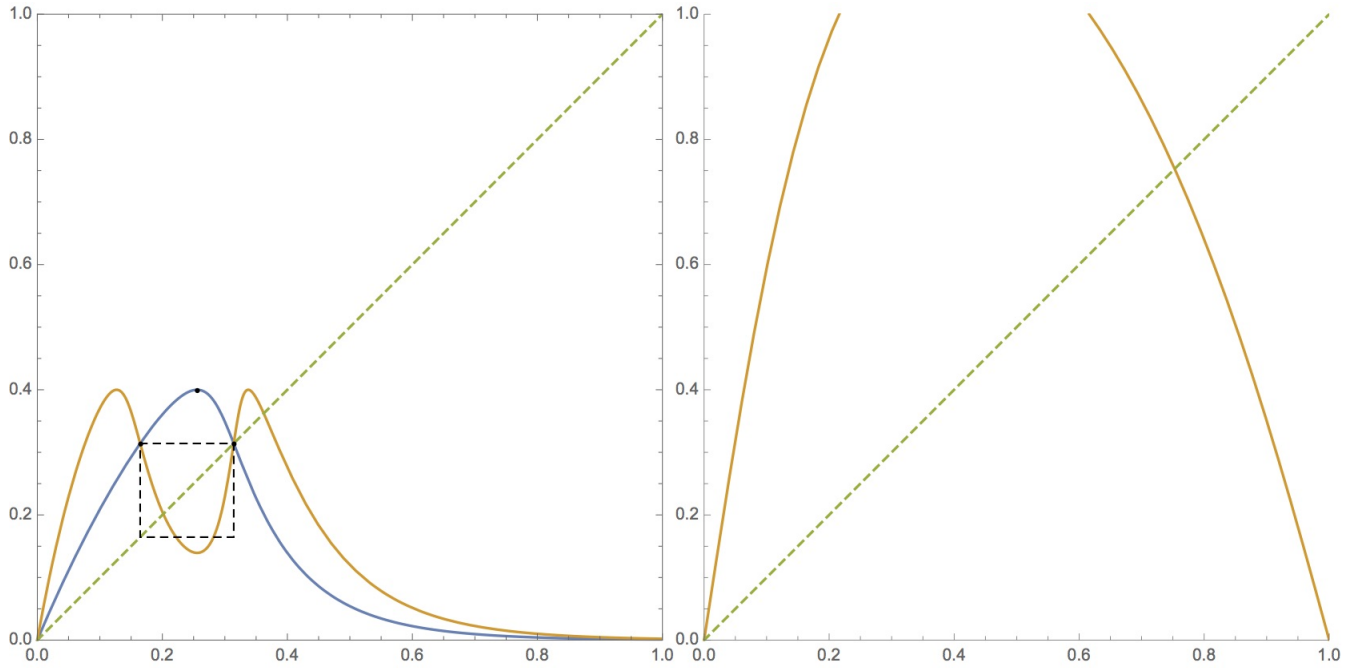


Figura 4.3: $R_\beta^{f_\alpha}$ que excede 1 para $\alpha = 0.01$ — En estricto rigor no es renormalización —.

En lo que sigue se dará evidencia suficiente de que se cumplen desde $H0)$ - $H4)$ para la renormalización de $h_\alpha(\beta, p) := h_{\beta, \alpha}(p)$, pues luego de la primera bifurcación, la que ocurre con $h' = -1$, el comportamiento de h_α se aprecia desde su primera renormalización, de hecho, desde antes, ya que cuando la renormalización tiene a 0 como único punto fijo, este representa al punto fijo no nulo de la función $h_{\beta, \alpha}$. (ver [4]).

Primero el estudio del sistema da información suficiente para explicar por qué para todo $\alpha \in (0, 1)$ fijo debiera existir β tal que la renormalización consiga máximo igual a 1. Intuitivamente esto se debe a que en algún momento la renormalización se debe salir del intervalo $[0, 1]$ pues la cola de f_α tiene un decaimiento muy rápido a 0; por esto la compresión a la que se ve afectada p_i en algún momento hace que $|p_d - p_i| < |f^2(PC(\beta)) - p_i|$; con esto en mente, y agregando la continuidad de los elementos participantes debe existir un momento en que la renormalización alcanza su máximo en 1, esto porque hay un momento que es menor que 1 (proposición 4.15) y por lo recién argumentado en algún momento es mayor que 1. Un par de ejemplos donde se registra exactamente el momento en que la renormalización consigue su máximo en 1 se aprecia en la fig. 4.4, fig. 4.6, fig. 4.5 y fig. 4.7.

Luego de notar esto se chequea $H0)$ - $H4)$ para esta renormalización haciendo la analogía con los parámetros presentados en la introducción de esta sección. Se utilizará $\mu_1 = \beta_c + \varepsilon$ para ε pequeño de modo que la renormalización solo posea un único punto fijo igual a 0 y que este sea atractor; además de esto se considerará $\mu_2 = \beta_u$ donde β_u es el parámetro de modo que la renormalización alcanza su máximo en 1. Por ende $J = [\mu_1, \mu_2] = [\beta_c + \varepsilon, \beta_u]$.

Chequear $H1)$ es trivial dado que se está haciendo uso de un intervalo, por esto se considera $M = [0, 1]$. La condición $H3)$ se tiene gracias a que se elige μ_1 de modo que su único punto fijo es 0, de este modo $\Lambda_1 = 1$.

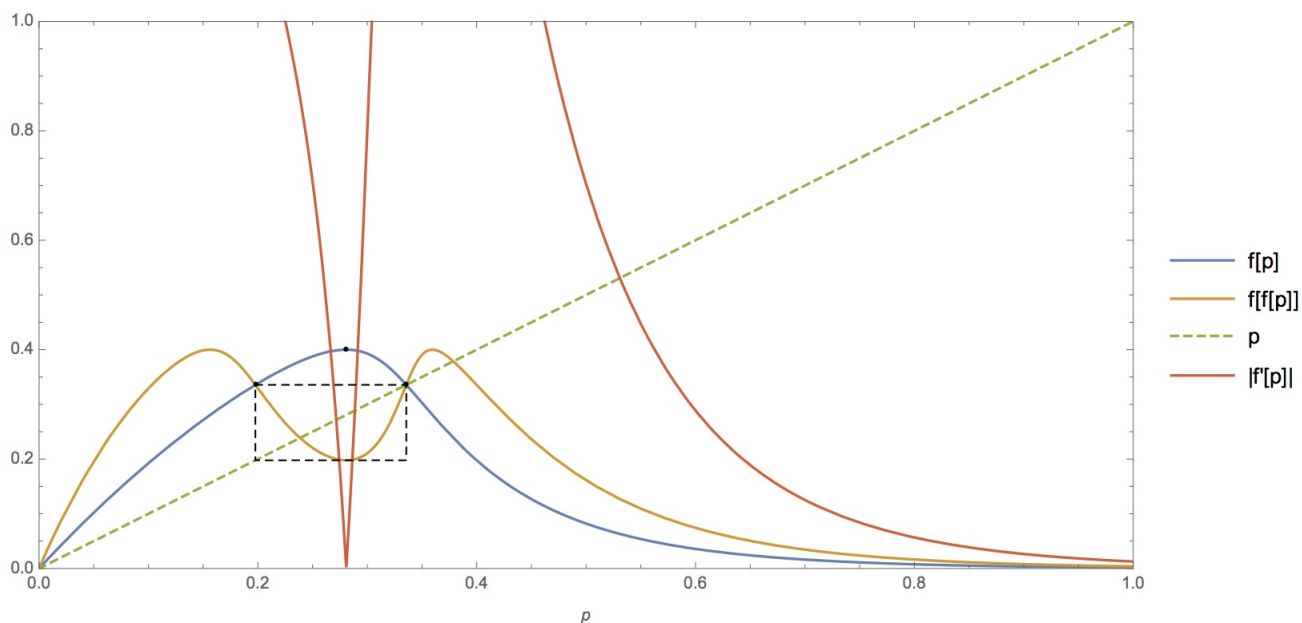


Figura 4.4: Gráfico para $\alpha = 0.01$ con β de modo que la renormalización tiene a 1 como máximo

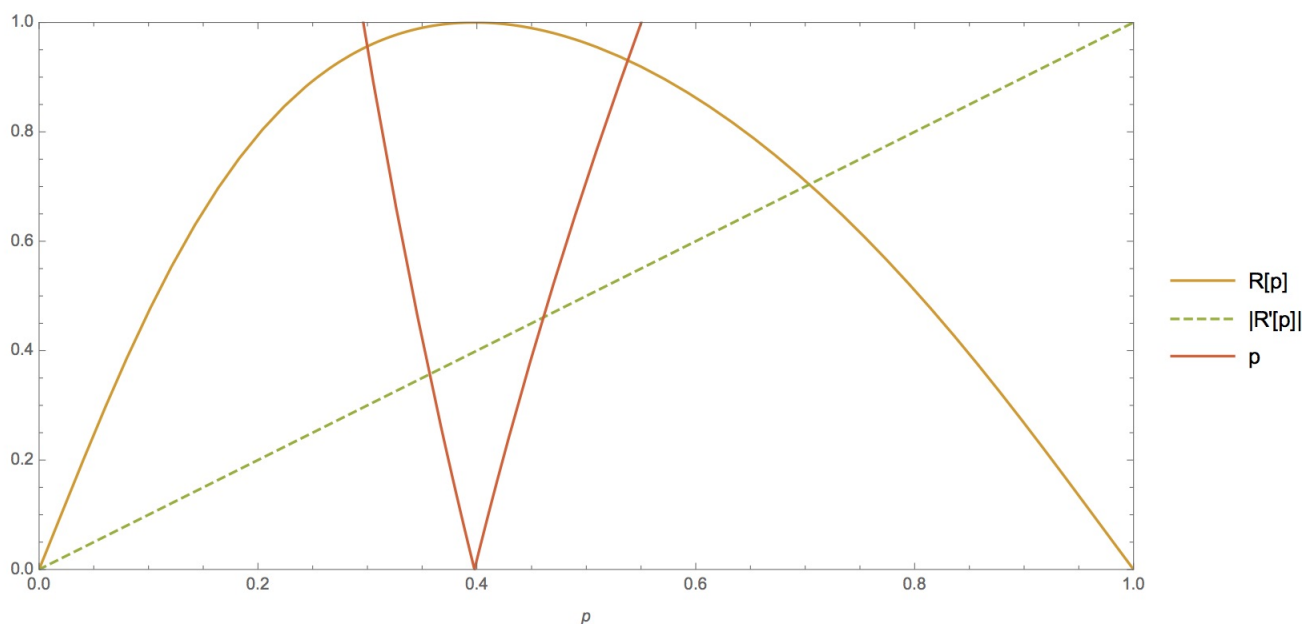


Figura 4.5: Renormalización asociada a $\alpha = 0.01$ con máximo 1

Para $H2$) primero se aprecia que μ_1 sólo tiene un punto periódico que es el punto 0, y éste es atractor gracias a la elección de μ_1 . Para justificar que μ_2 sólo tiene puntos hiperbólicos se hará un estudio numérico, ya que chequearlo es de dificultad elevada, por ello se presenta la fig. 4.8, fig. 4.9, fig. 4.10 y fig. 4.11 en conjunto con la fig. 4.6 y la fig. 4.7.

El comportamiento de esta función es bastante parecido al de la familia logística para $\mu = 4$, para ésta se conocen las fórmulas explícitas de sus puntos periódicos y es demostrable que ellos son repelentes (ver [5] pág. 71). Para la función sobre la cual se trabaja en esta sección se puede desprender de los gráficos que los puntos donde la derivada tiene módulo 1

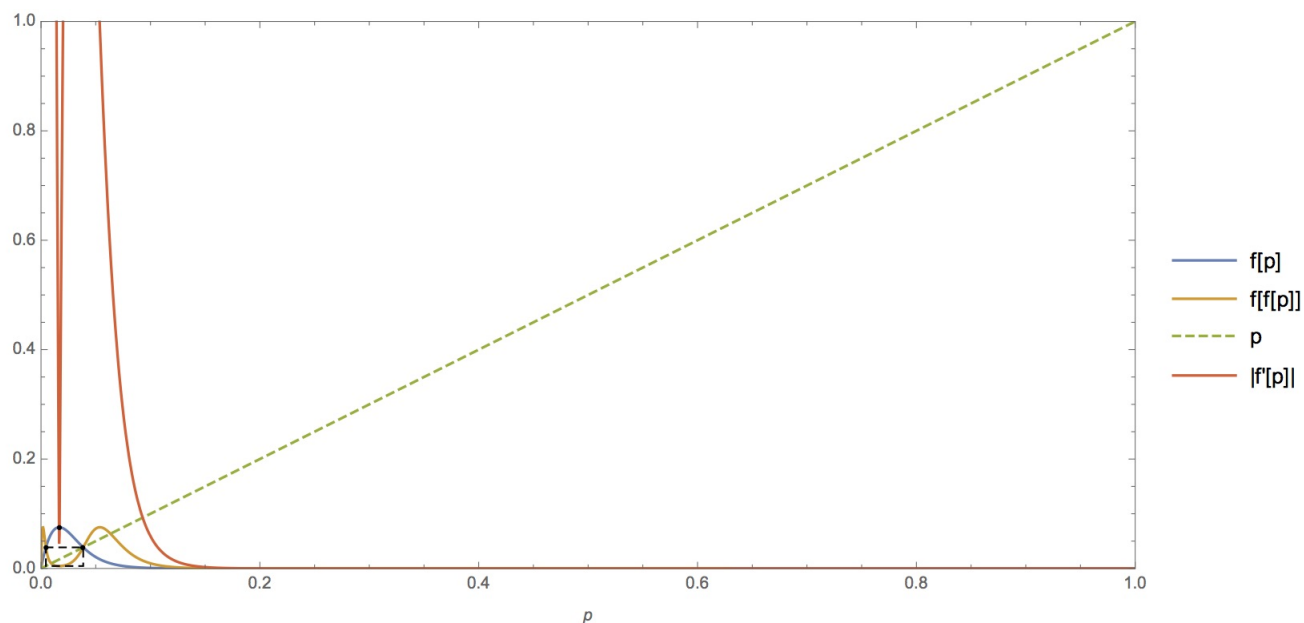


Figura 4.6: Gráfico para $\alpha = 0.5$ con β de modo que la renormalización tiene a 1 como máximo

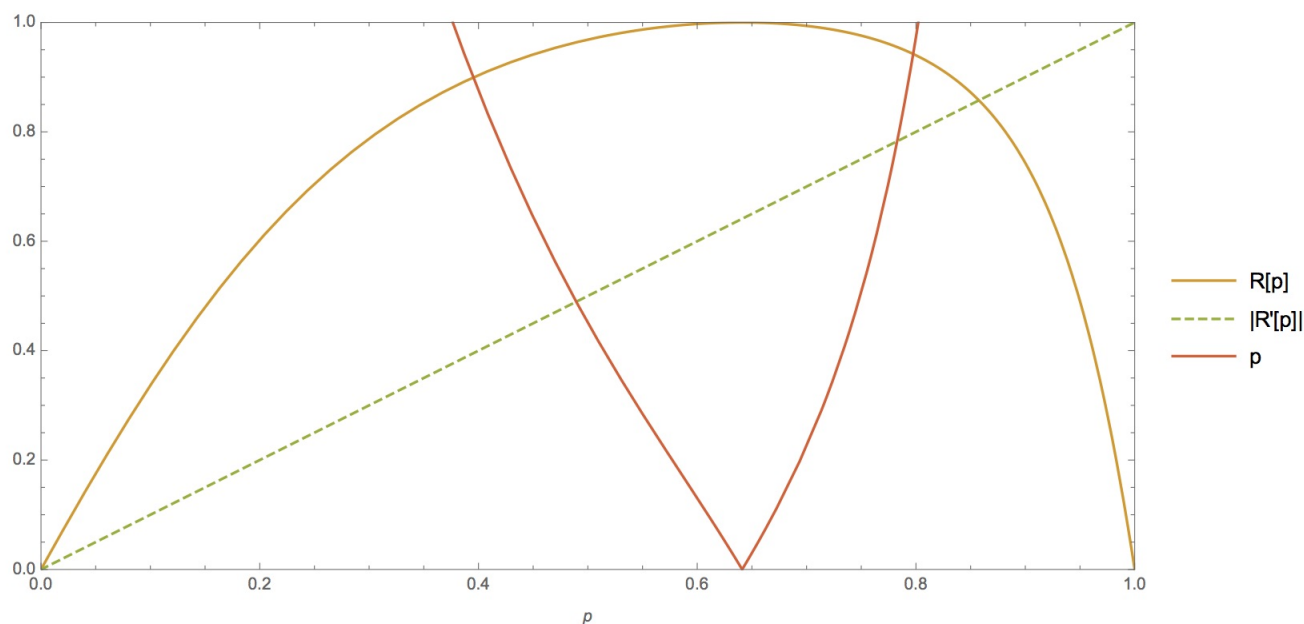


Figura 4.7: Renormalización asociada a $\alpha = 0.5$ con máximo 1

cada vez se acerca más a los máximos y mínimos de la función lo cual hace imposible que los puntos periódicos sean no hiperbólicos.

Para mostrar H_4), por la elección de μ_2 los puntos periódicos se duplican cada vez que se compone f_α , este hecho se debe a que cada punto en $[0, 1]$ tiene dos preimágenes; por esto en cada iteración cada punto duplica la cantidad de preimágenes y con esto la identidad cruza 2^n veces a f_α^n , luego se cumple la propiedad POC . Para demostrar que hay a lo más una cantidad finita de puntos que tienen dimensión inestable distinta de $Dim_u(\mu)$. Se mostrará este último hecho demostrando que $SR_\beta^{f_\alpha}(x) < 0 \forall x \in (0, 1)$.

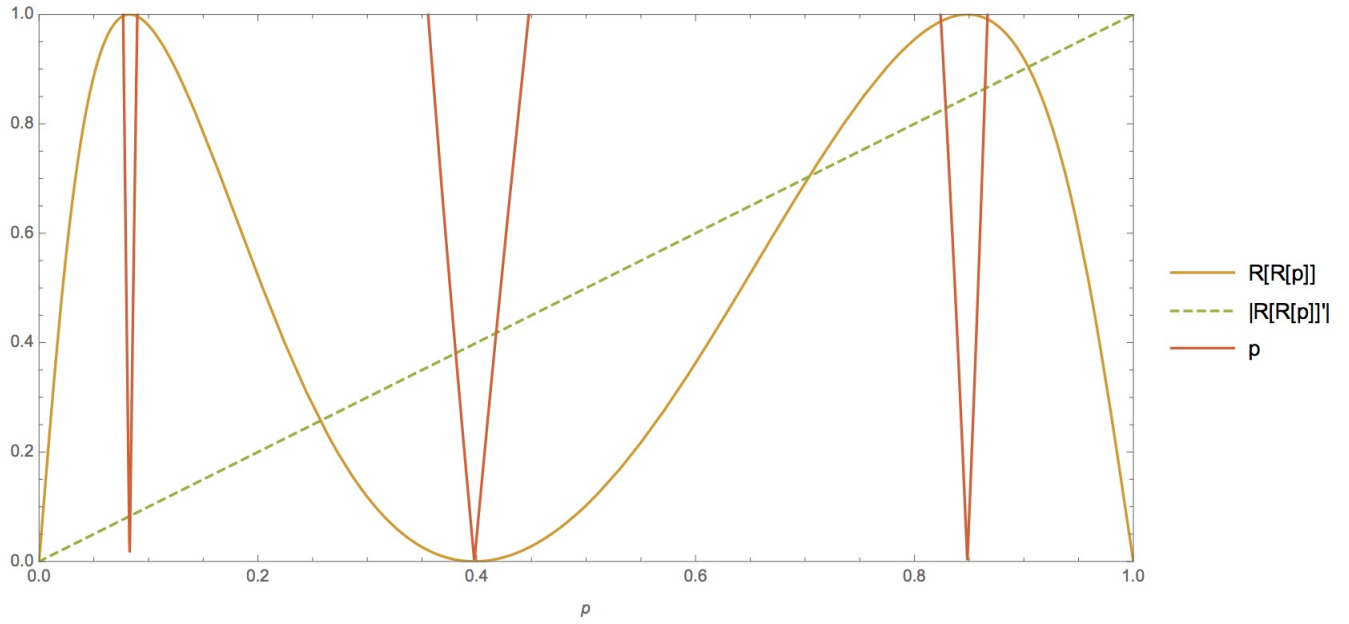


Figura 4.8: Gráfico de la segunda iterada de la renormalización y del módulo de su derivada para $\alpha = 0.01$ renormalización.

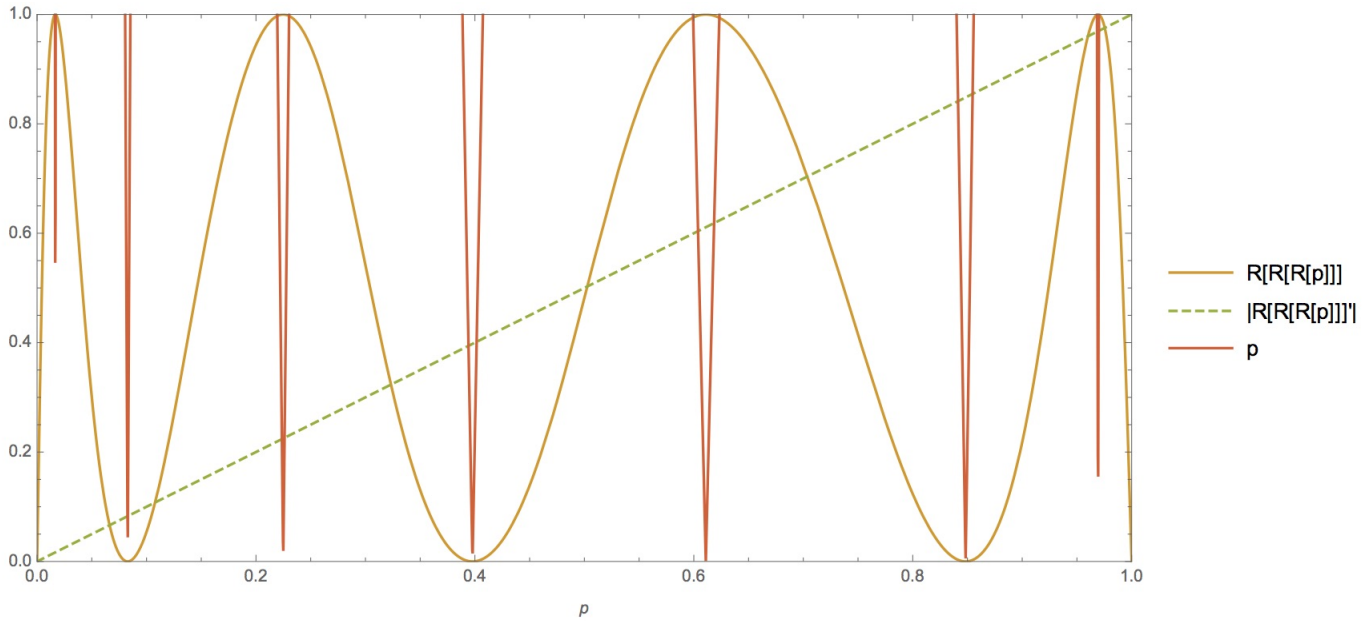


Figura 4.9: Gráfico de la tercera iterada de la renormalización y del módulo de su derivada para $\alpha = 0.01$ renormalización.

Lema 4.16 $Sf_\alpha(\beta, x) < 0 \forall x \in (0, 1), \alpha \in (0, 1), \beta > 1$

DEMOSTRACIÓN. Ver Anexo lema 4.22

□

Finalmente se sabe que si f tiene derivada Schwarziana negativa, entonces su renormalización también cumple esta propiedad [10]; luego haciendo uso del teorema 4.12 se tiene

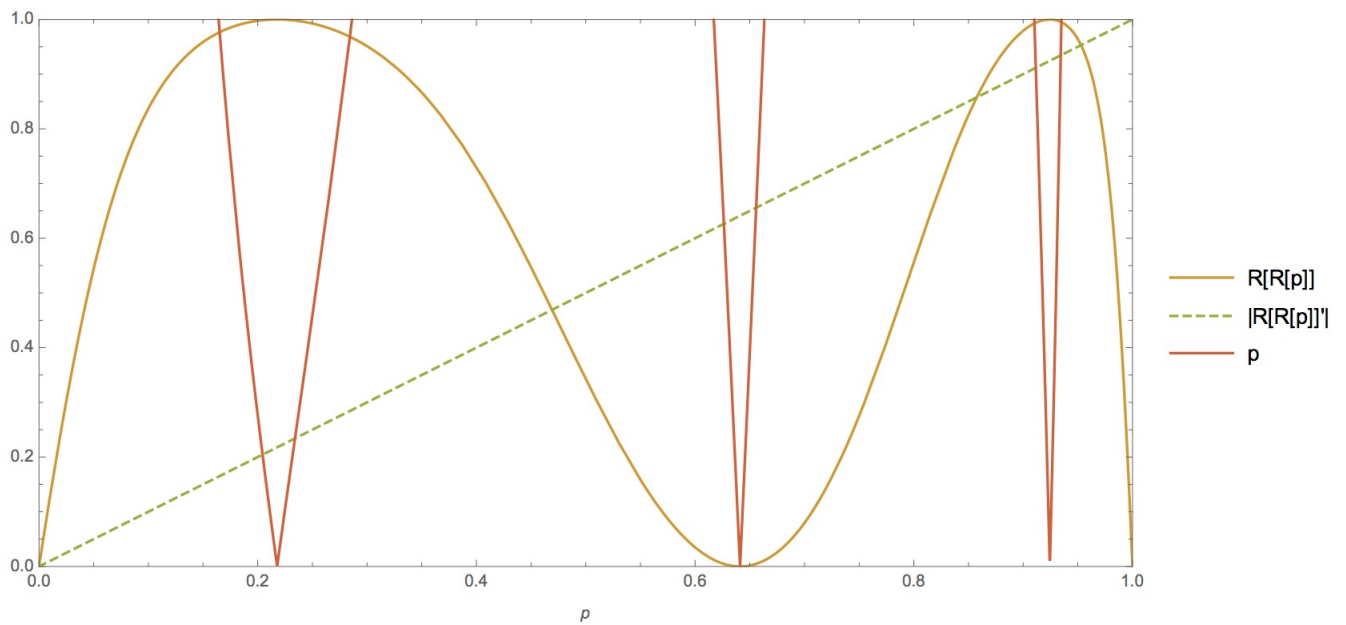


Figura 4.10: Gráfico de la segunda iterada de la renormalización y del módulo de su derivada para $\alpha = 0.5$ renormalización.

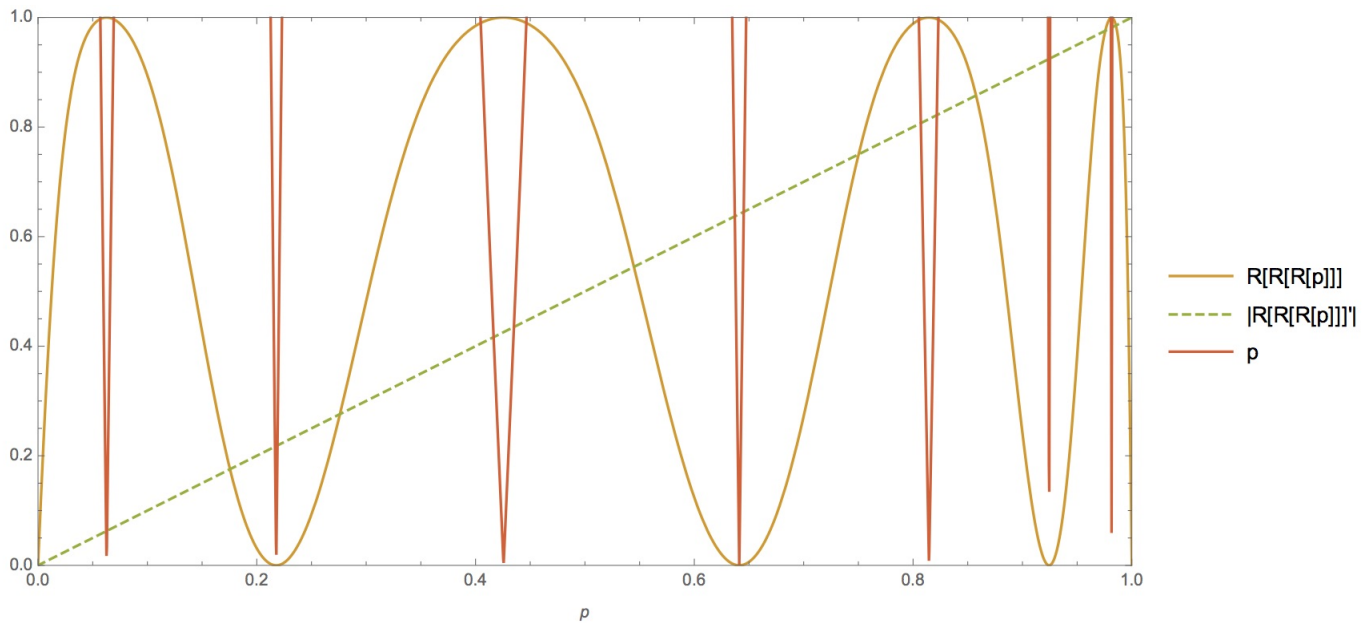


Figura 4.11: Gráfico de la tercera iterada de la renormalización y del módulo de su derivada para $\alpha = 0.5$ renormalización.

que el número de puntos periódicos hiperbólicos atractores de f son finitos, por lo cual $Dim_u(\mu_2) = 1$.

Chequear $H0$) es extremadamente engorroso por lo que se dará una justificación intuitiva de por qué se cumple que las bifurcaciones de este sistema son del tipo period-doubling. La renormalización asociada a este sistema se comporta de forma parecida a la de la familia logística a medida que el parámetro crece, como se puede apreciar en las fig. 4.4 y fig. 4.5;

esto quiere decir que se parece a una función cuadrática donde las bifurcaciones ocurren en los puntos con derivada igual a -1 , pues ocurren, pasado el punto crítico donde la derivada es negativa, ahí las únicas bifurcaciones que ocurren son del tipo period-doubling.

Si ocurre el caso en que todas las bifurcaciones son de tipo period-doubling gracias a que $SR_{\beta}^{f_{\alpha}}(x) < 0 \forall x \in (0, 1)$ se tendría que éstas son supercríticas, i.e. a medida que avanza el parámetro las órbitas duplican su periodo.

4.1.1. Consecuencias

Gracias a las justificaciones expuestas se comenzará a analizar los resultados suponiendo que el teorema anterior se cumple; por esto se analiza el gráfico de la función (fig. 4.12a) y haciendo un zoom en la imagen, se muestra una cascada que a simple vista no se ve (fig. 4.12b); además, en ésta se puede ver que hay más subcascadas asociadas la cascada principal en análisis para este zoom.

La función en estudio cumple con la constante de Feigenbaum (ver [4]) para cada una de sus cascadas de bifurcaciones, esto pues la conjetura expuesta por Feigenbaum fue luego demostrada y generalizada para toda familia de funciones con derivada Schwarziana negativa ([6] pág. 502,[14] pág. 220). El teorema de universalidad se presenta a continuación

Teorema 4.17 (Universalidad en cascadas de bifurcación) *Para toda familia de funciones unimodales con derivada schwarziana negativa se cumple que*

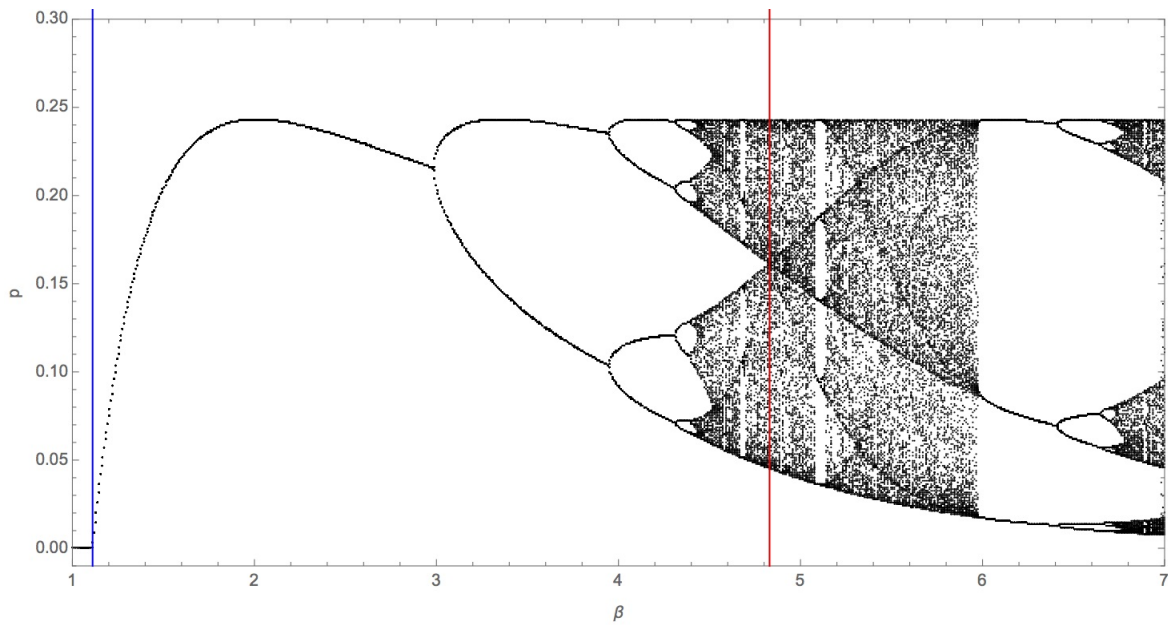
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{a_n - a_{n-1}} = 4.669201609 \dots$$

Donde a_n es el parámetro donde la cascada en estudio realiza su period-doubling n -ésimo y la cantidad de la derecha es la constante de Feigenbaum.

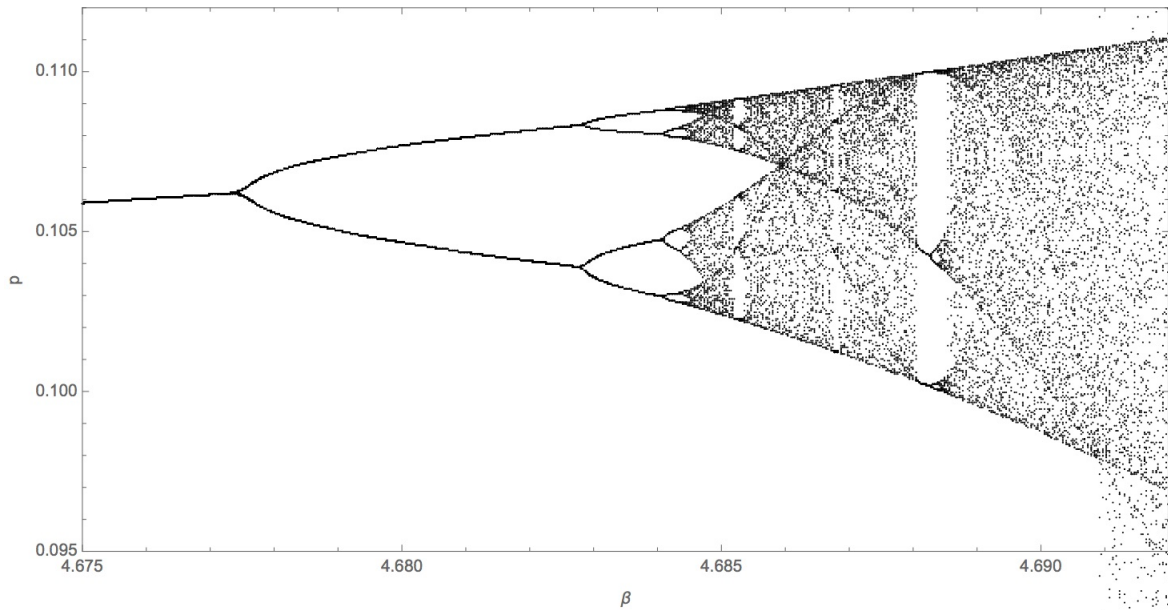
4.2. Coexistencia para dos especies

El objetivo de esta sección es presentar los resultados obtenidos sobre la coexistencia de dos especies, ya que si bien se demostró en el teorema 3.27 que existen parámetros para los cuales ambas especies coexisten, las simulaciones dan pie para pensar que ésta se obtiene para una mayor gama de parámetros, incluyendo un caso muy especial.

En la fig. 4.13a, fig. 4.13b, fig. 4.14a y fig. 4.14b se presenta un caso donde la coexistencia se demostró para ciertos parámetros, pero ésta se cumple para una gama mucho mayor. En donde se aprecia el hecho que la coexistencia para $\beta_1 = 4 \log(2)$ fijo, se tiene al menos hasta $\beta_2 = 100$, muy lejos de la barrera demostrada en teorema 3.27 como se puede apreciar en la fig. 4.14b. Otro caso muy especial se presenta en la fig. 4.15a, fig. 4.15b, fig. 4.16a y fig. 4.16b donde $\beta_1 < 2 \log(2)$, para este parámetro el sistema unidimensional asociado a p_1 no es caótico. Una explicación a este comportamiento es que p_1 sobrevive cuando el valor de β_2 es cercano β_1 ya que p_2 baja muy seguido dejándole espacio suficiente en el grafo para



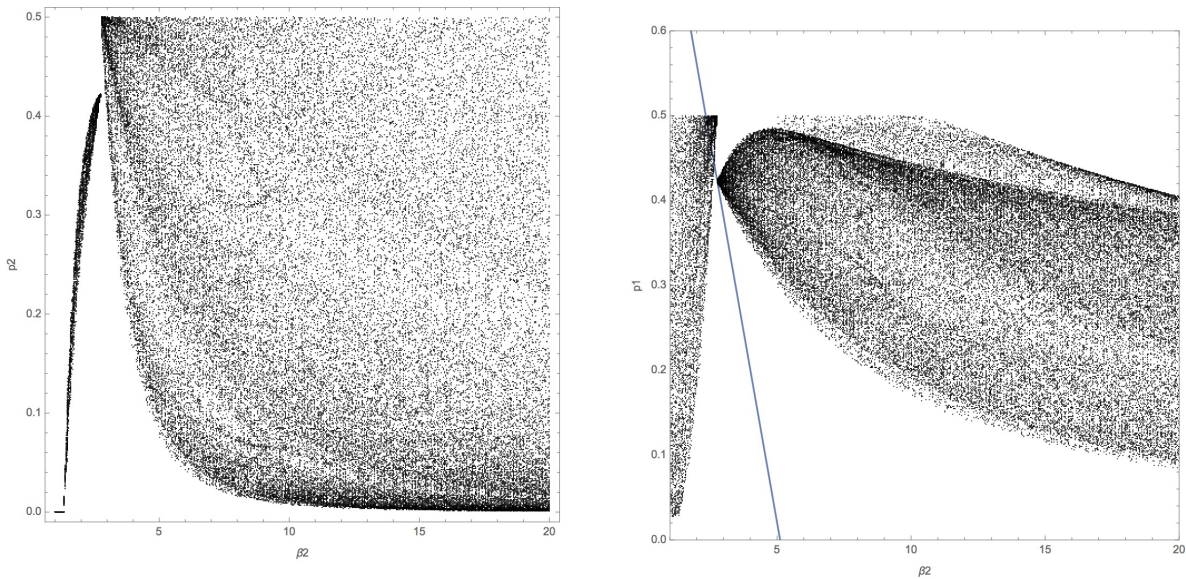
(a) Diagrama de Bifurcaciones MM para $\alpha = 0.1$. Se muestran desde la iteración 900 a la 1000 consideradas al partir desde el máximo de $h_{\beta,\alpha}(p)$. La línea verde representa el valor β máximo para el cual se ve extinción, i.e. β_e . La línea roja representa a μ_2 para este α



(b) Zoom hecho al diagrama de bifurcaciones fig. 4.12a (Los parámetros presentados en los rótulos son la zona de zoom).

Figura 4.12

crecer, y como p_1 crece rápidamente a un punto fijo muy cercano a 0.5 ellos logran una resonancia que los hace coexistir. En la fig. 4.17a, fig. 4.17b, fig. 4.18a y fig. 4.18b se muestra el comportamiento del sistema cuando $1 < \beta_1 \ll 2 \log(2)$. En este régimen para β_1 es posible apreciar que hay ciertos β_2 donde $p_2 > 0$ y $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ y $p_1 = 0$, y $p_1 > 0$ y $p_2 = 0$. En este se presenta un problema numérico, principalmente porque $h_{2\beta_1, \beta_2}(0.5, \varepsilon)$ es positivo pero muy cercano a cero; así desde un punto en adelante los cálculos computaciones lo utilizan



(a) Diagrama de bifurcaciones para p_2 (densidad especie 2) con $\beta_1 = 4 \log(2)$ fijo.

(b) Diagrama de bifurcaciones de p_1 para $\beta_1 = 4 \log(2)$ fijo. La línea azul es el punto fijo del sistema que acota por debajo a p_1 utilizado en teorema 3.27.

Figura 4.13

como 0. Principalmente la primera coordenada si se anula a causa de $f1_{\beta_1, \beta_2}$, dado que cada vez le reparte menos fracción de $1 - e^{-(\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2)}$, mientras que la segunda se queda con la mayor parte de esta fracción, luego el mínimo de la densidad de la especie 2 es $h2_{\beta_1, \beta_2}(0.5, \varepsilon)$. Además de los comportamientos presentados anteriormente, en la fig. 4.19, fig. 4.20 y fig. 4.21 se muestran diagramas a los que aún no se les asocia una explicación de su conducta.

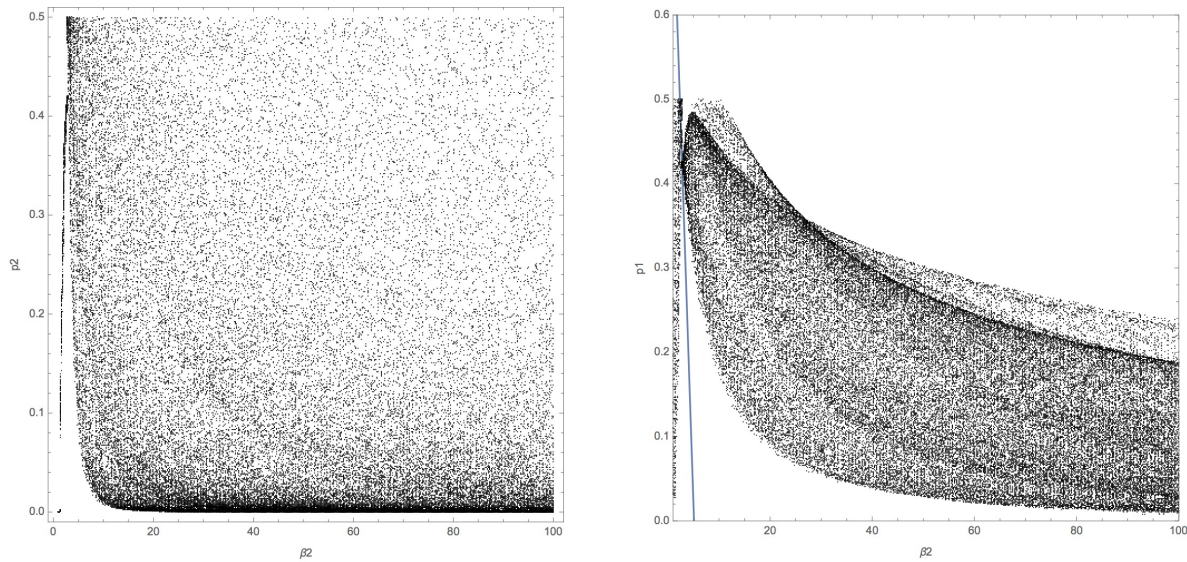
4.3. Comparación con simulaciones

En esta sección se presentan algunos resultados obtenidos en las simulaciones del proceso luego de pasar el para distintas cantidades de nodos junto con el resultado de simular el sistema dinámico asociado al límite. La finalidad de este apartado consiste en mostrar que el proceso estocástico se comporta similar al sistema límite.

4.4. Resumen de los resultados

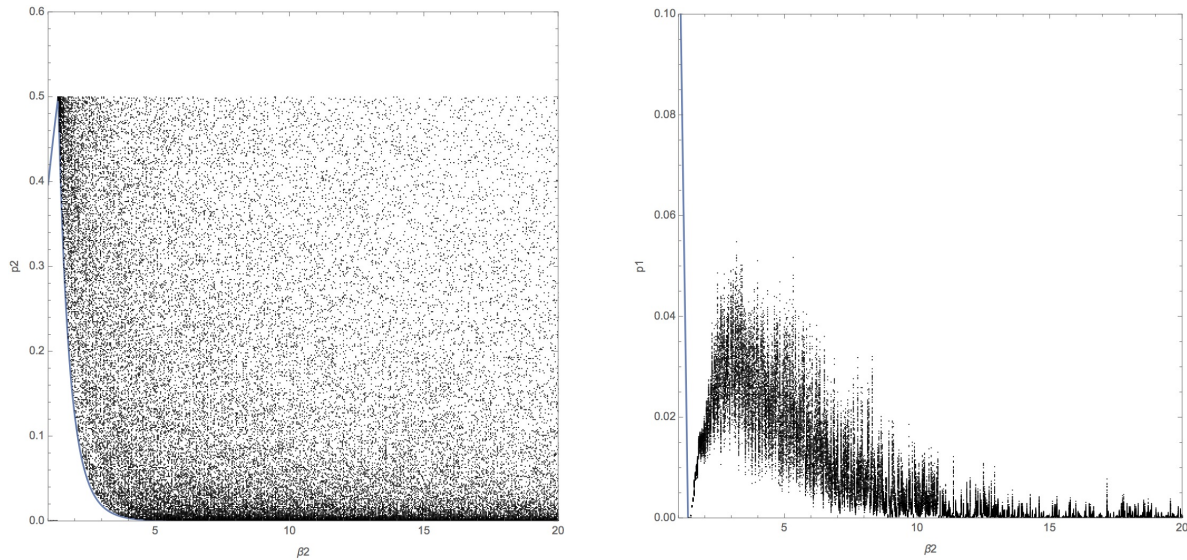
A lo largo de este trabajo se ha recopilado información acerca del comportamiento tanto del sistema que considera solo un tipo de especie, como del que considera dos especies diferentes que comparten el espacio.

Para el caso de una especie la fig. 4.25 y fig. 4.26 explican para cada par de parámetros $\alpha \in [0, 1]$, $\beta \in [1, \infty)$ como se comporta el sistema dinámico asociado al límite del proceso



(a) Análogo a fig. 4.13a pero extendiendo el estudio en β_2 . (b) Análogo a fig. 4.13b pero extendiendo el estudio en β_2 .

Figura 4.14

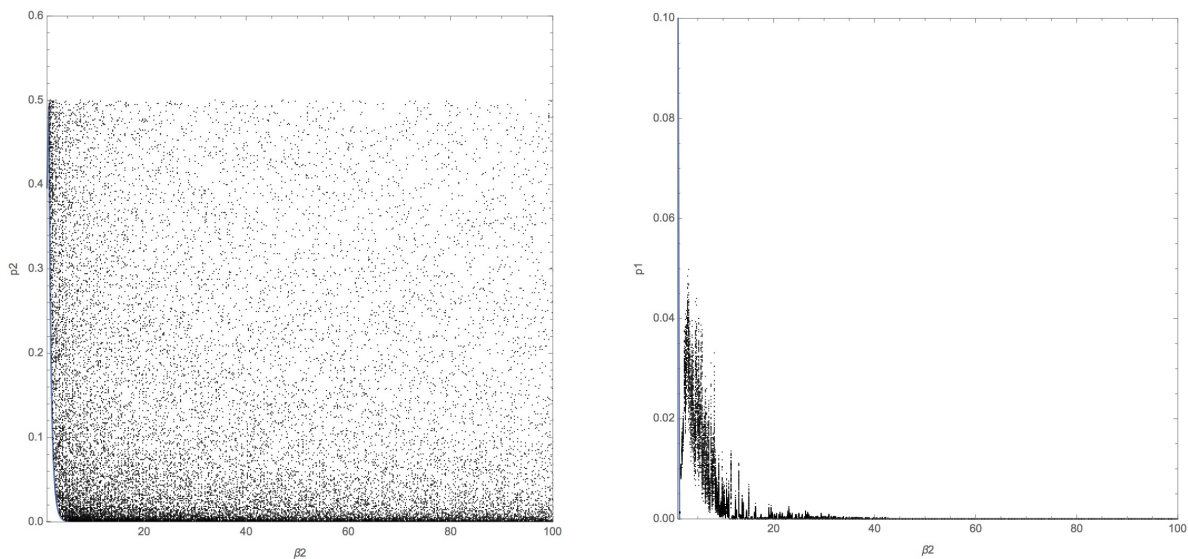


(a) Diagrama de bifurcaciones para p_2 (densidad especie 2) con $\beta_1 = 1.99 \log(2)$ fijo. La línea azul que pasa por debajo es la curva determinada por $h_{\beta,\alpha}(0.5)$. (b) Diagrama de bifurcaciones de p_1 para $\beta_1 = 1.99 \log(2)$ fijo. La línea azul es el punto fijo del sistema que acota por debajo a p_1 utilizado en teorema 3.27.

Figura 4.15

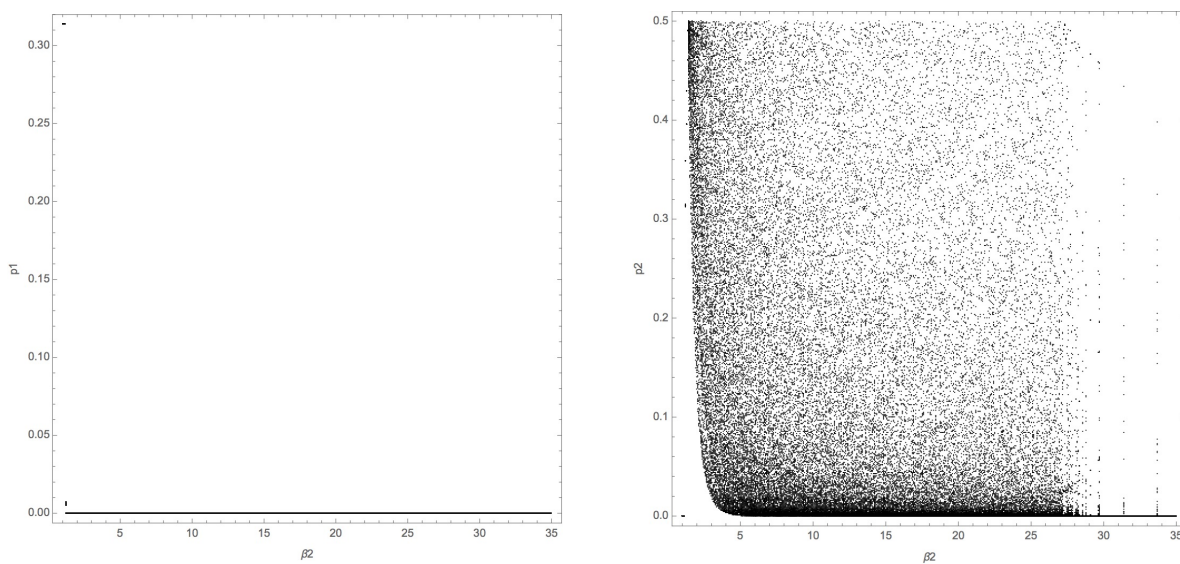
MM a medida que la cantidad de sitios del grafo tiende a infinito.

Cabe resaltar que en el gráfico anterior la zona azul es exacta, ($\alpha > \frac{\beta-1}{\beta}$) pero el resto de las zonas no son más que un bosquejo de cómo se deberían ver basado en las simulaciones realizadas. Al fijar α , la recta horizontal que pasa a ésta altura revela el comportamiento del sistema al variar el parámetro β . El estudio realizado en [11] es el comportamiento presentado



(a) Análogo a fig. 4.15a pero extendiendo el estudio en β_2 . (b) Análogo a fig. 4.15b pero extendiendo el estudio en β_2 .

Figura 4.16

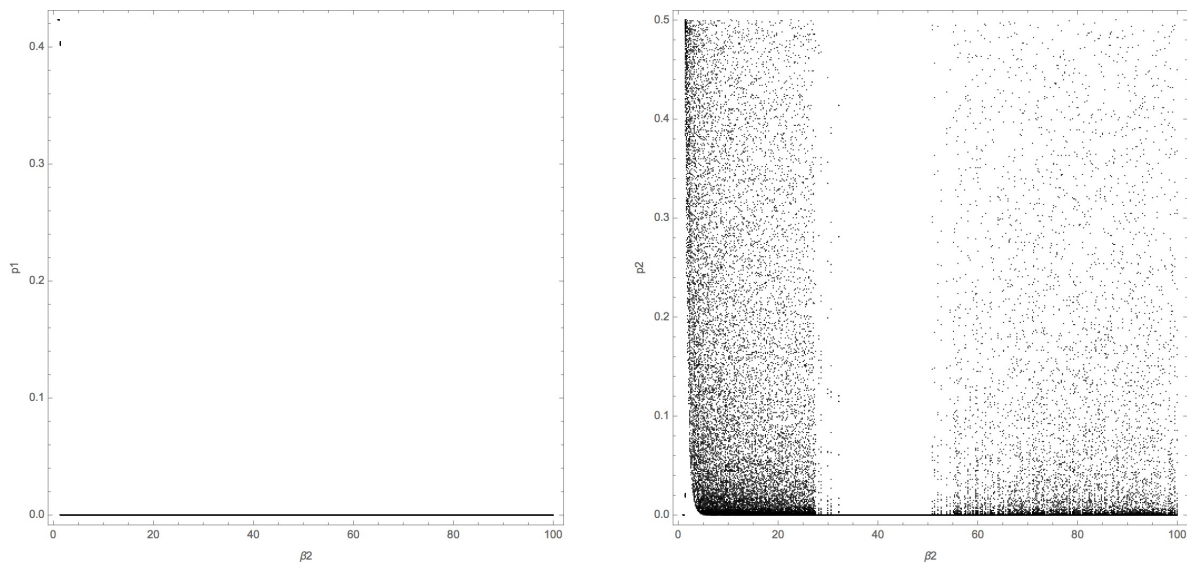


(a) Diagrama de bifurcaciones de p_1 (densidad especie 1) con $\beta_1 = 1.2 < 2 \log(2)$. (b) Diagrama de bifurcaciones de p_2 con $\beta_1 = 1.2 < 2 \log(2)$.

Figura 4.17

por el sistema cuando $\alpha = 0$, el que corresponde al borde horizontal inferior en la fig. 4.25 y fig. 4.26.

Para el sistema que considera dos especies la fig. 4.27 resume el comportamiento de este.



(a) Diagrama de bifurcaciones de p_1 con $\beta_1 = 1.3 < 2 \log(2)$. (b) Diagrama de bifurcaciones de p_2 con $\beta_1 = 1.3 < 2 \log(2)$.

Figura 4.18

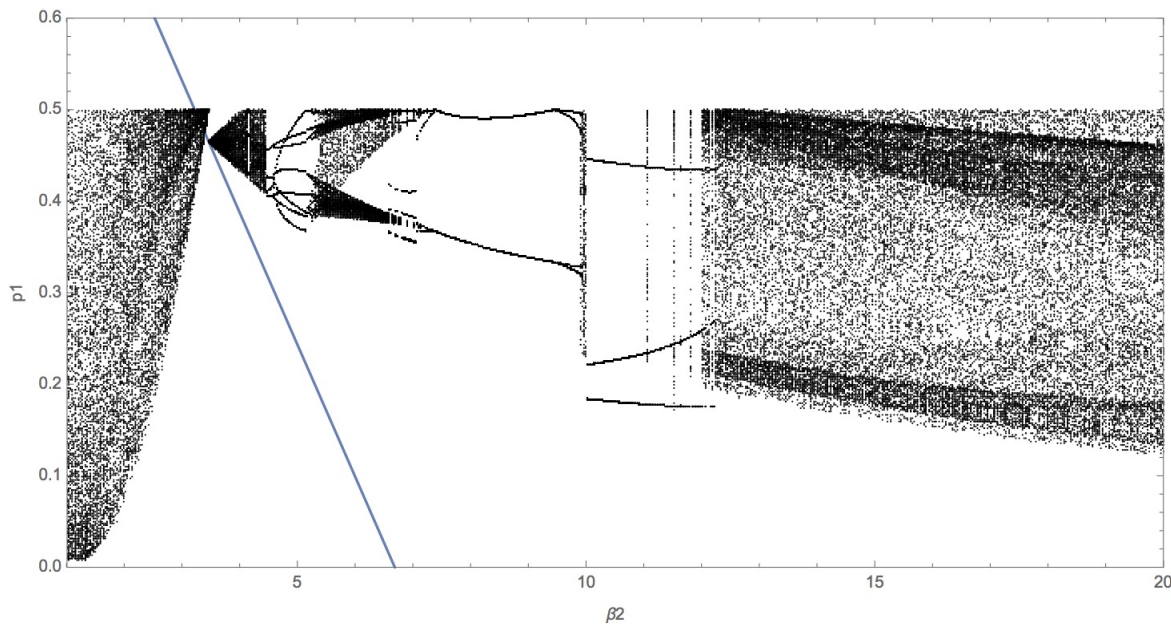


Figura 4.19: Diagrama de bifurcaciones de p_1 para $\beta_1 = 5 \log(2)$ fijo. La línea azul es el punto fijo del sistema que acota por debajo a p_1 utilizado en teorema 3.27.

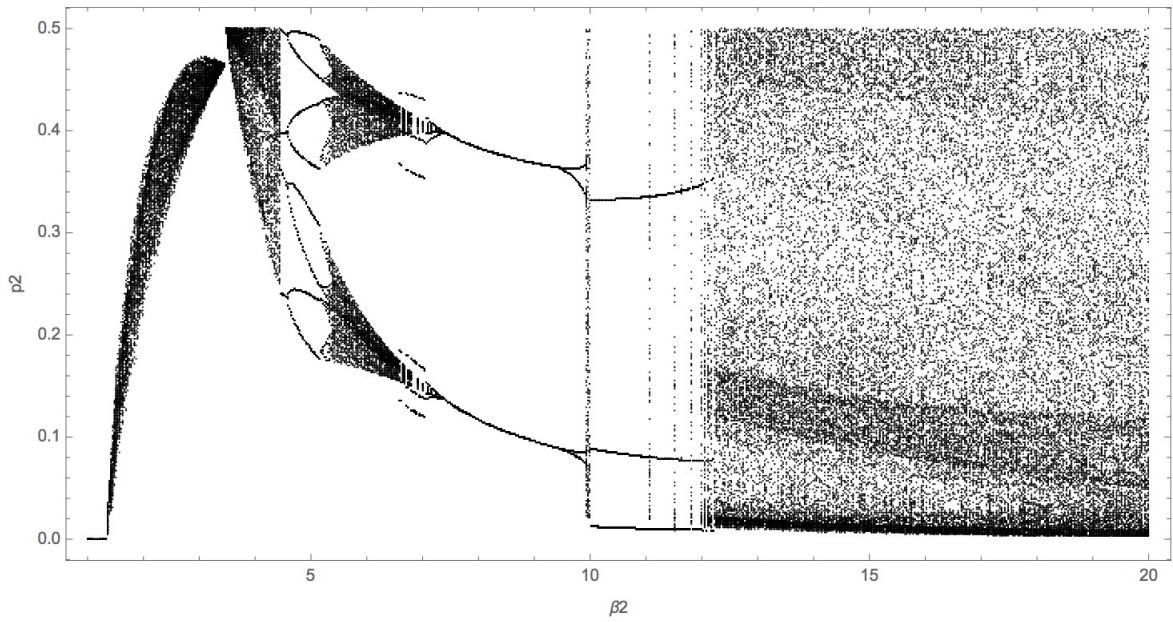


Figura 4.20: Diagrama de bifurcaciones para p_2 (densidad especie 2) con $\beta_1 = 5 \log(2)$ fijo.

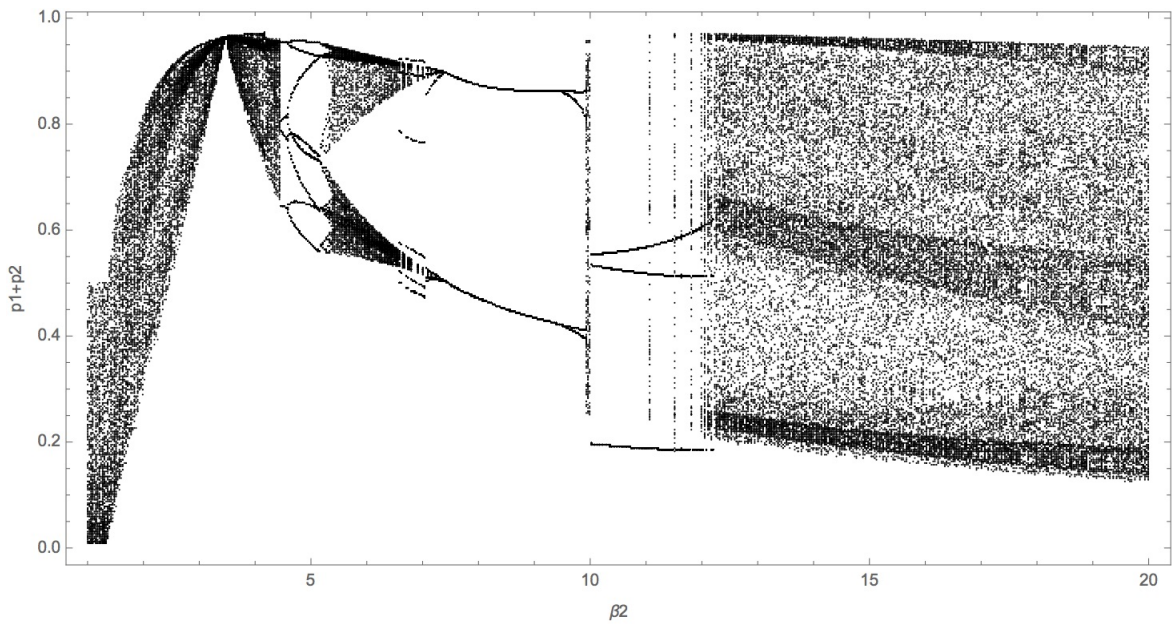


Figura 4.21: Diagrama de bifurcaciones para $p_1 + p_2$ (densidad especie 2) con $\beta_1 = 5 \log(2)$ fijo.

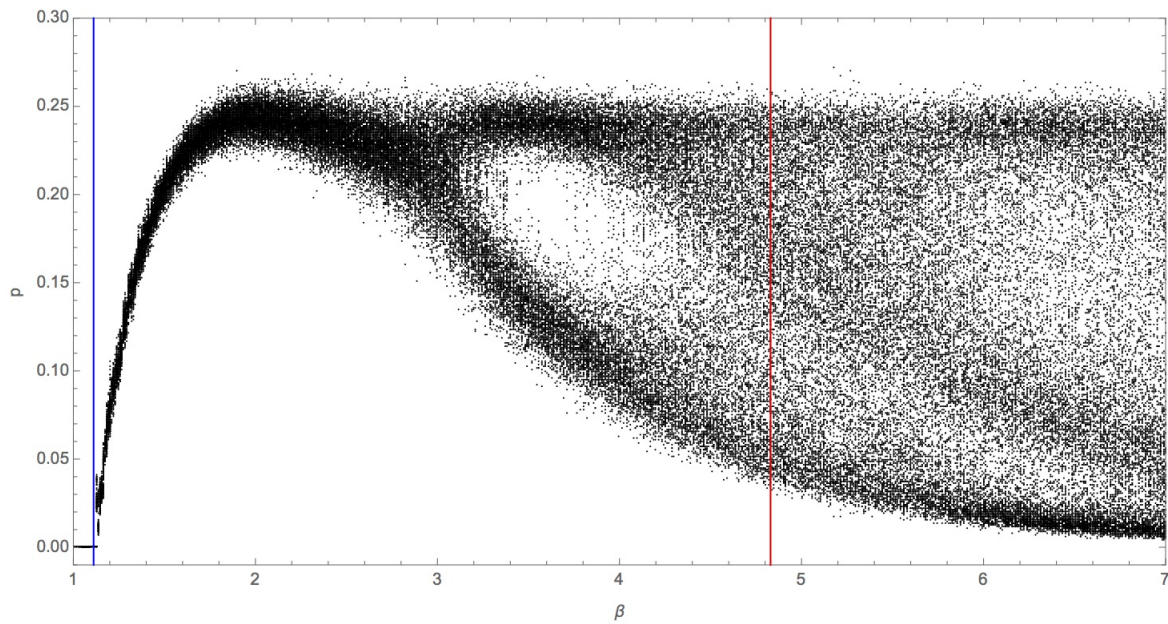


Figura 4.22: Diagrama de bifurcaciones del proceso con 1000 nodos para $\alpha = 0.1$. Se muestran desde la iteración 900 a la 1000.

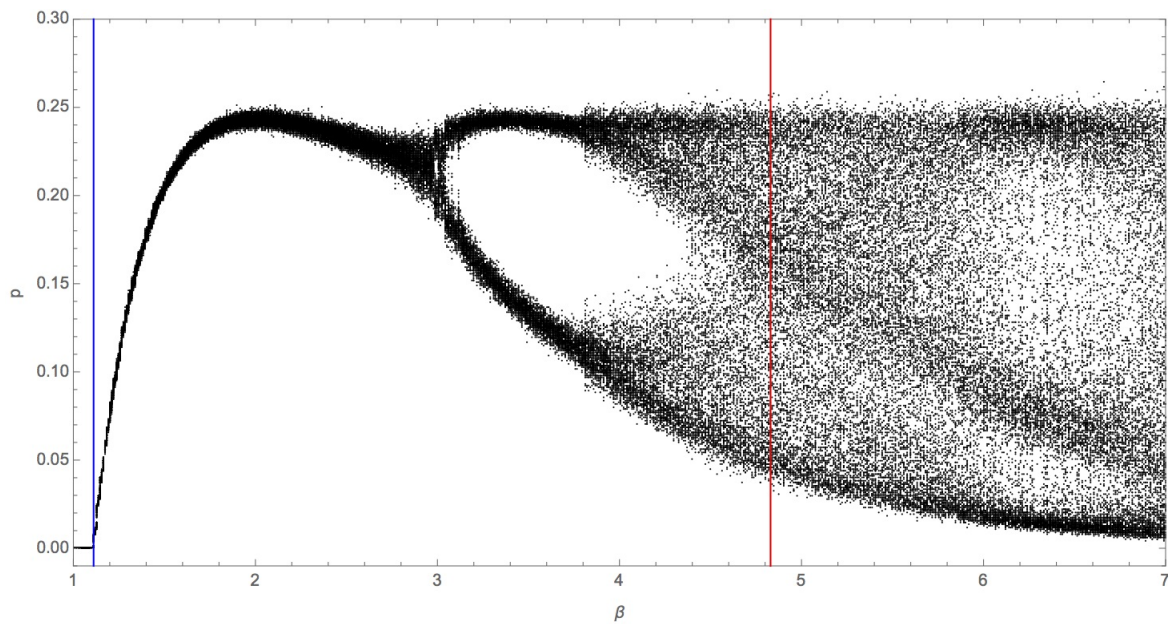


Figura 4.23: Diagrama de bifurcaciones del proceso con una cantidad de nodos entre 20000 y 100000 para $\alpha = 0.1$. Se muestran desde la iteración 400 a la 500.

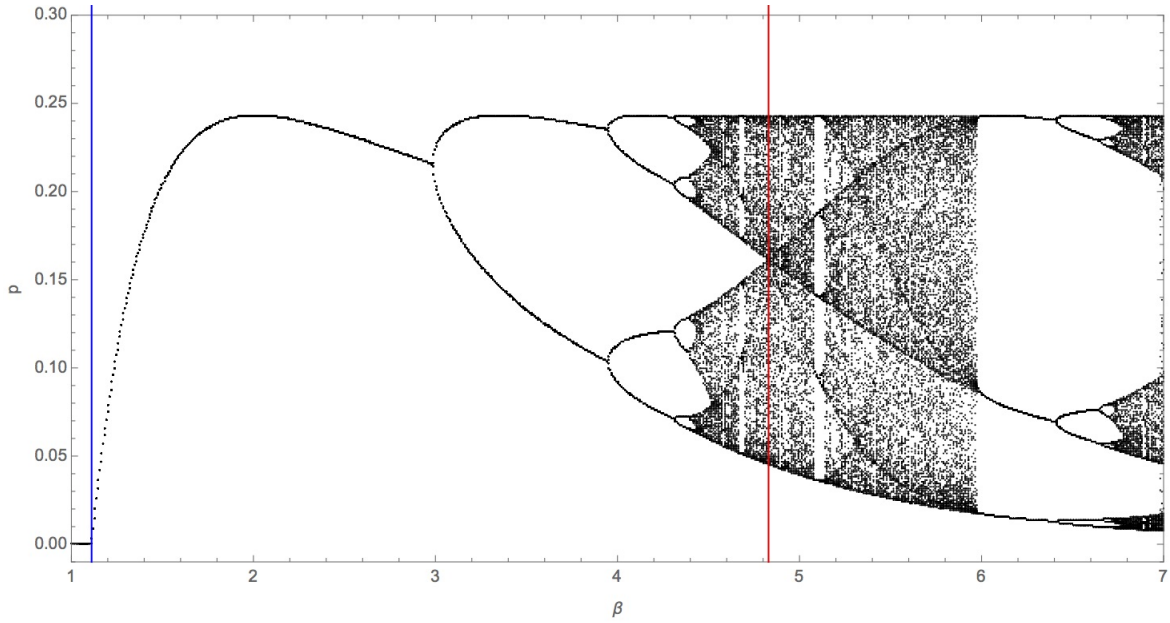


Figura 4.24: Diagrama de bifurcaciones $h_{\beta,0.1}$; sistema límite asociado a la fig. 4.22, fig. 4.23.

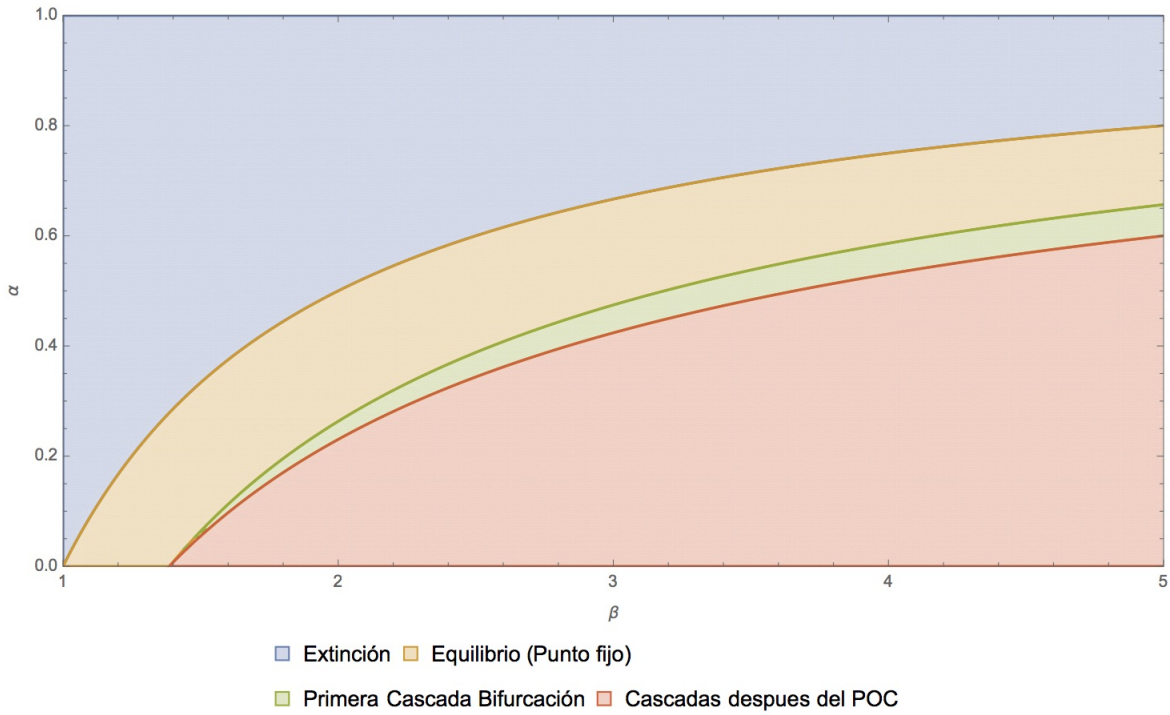


Figura 4.25: Gráfica resumen del comportamiento del sistema $h_{\beta,\alpha}$. La zona azul se justifica por el teorema 3.7, mientras que el resto de las zonas se ve justificada por simulaciones por la seccion 4.1.

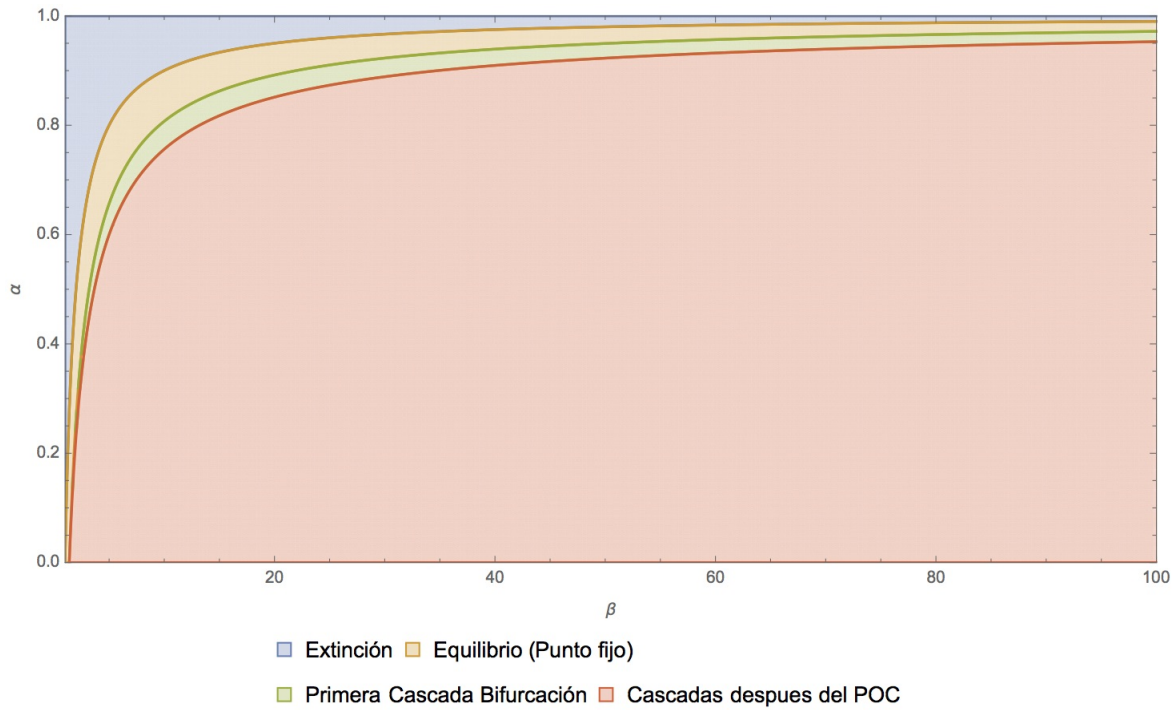


Figura 4.26: Análogo a fig. 4.25 para una gama más amplia de parámetros β

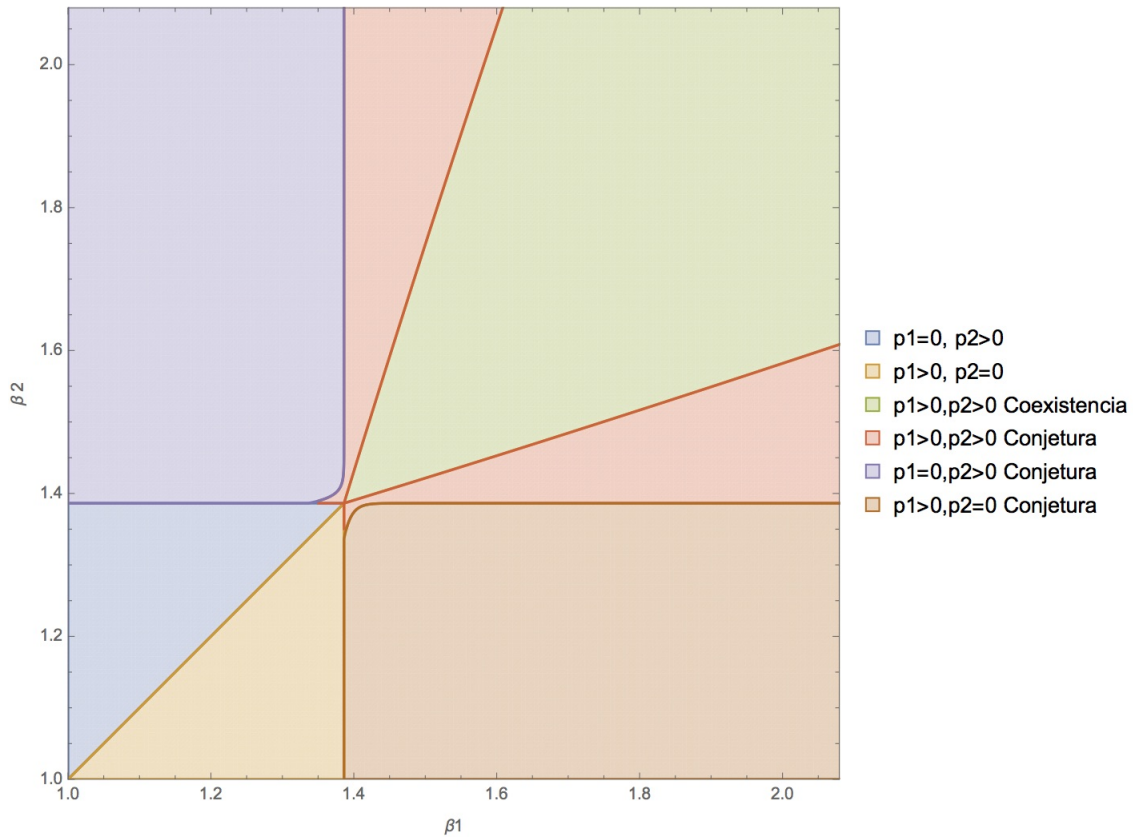


Figura 4.27: Gráfica resumen del comportamiento del sistema h_{β_1, β_2} . La zona azul y amarilla se justifican por la proposición 3.22, mientras que la zona verde fue demostrada en el teorema 3.27. El resto de zonas se conjeturan gracias al estudio del sistema por simulaciones.

Conclusión

El trabajo presentado tiene como logro principal poder definir el modelo *MVM* y extender *MM*, generando una familia más grande de procesos que permiten modelar un espectro mucho mayor de sistemas. Un hecho clave en las extensiones realizadas en este trabajo recae en el teorema 2.9, éste da la posibilidad de mirar el proceso de epidemia *MM* a un nivel microscópico en comparación con lo realizado en [11], hecho que permite revisar de una forma más fácil, mediante simulaciones, la convergencia anterior.

El caso de crecimiento con dos especies tiene como limitante la necesidad de utilizar variables aleatorias de Poisson, esto se debe principalmente a el uso del paper de Karr [7], el cual exige, para asumir por simplicidad $p' = p_N$, la convergencia uniforme de la esperanza asociada a la fase de crecimiento, lo cual es satisfecho trivialmente por las variables de este tipo.

Lamentablemente extender los resultados del sistema h_{β_1, β_2} a más de dos especies no es claro, como tampoco es claro el comportamiento que tendrá $h_{\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2}$, como ejemplo se puede exponer el paso de muerte de componentes conexas de tamaño infinito ($\alpha_N \rightarrow 0$) a finito ($\alpha_N \rightarrow \alpha > 0$). Para las extensiones mencionadas anteriormente se hace imprescindible el conocimiento y uso de teoría más avanzada en sistemas dinámicos, por ejemplo las cuencas de atracción de sistemas en más de una dimensión es más difícil de estudiar que las unidimensionales.

Como fue presentado en la fig. 4.19, fig. 4.20 y fig. 4.19 hay parámetros donde la conducta del sistema dinámico, en la evolución temporal, no pueden ser explicados fácilmente; además de esto, los cálculos necesarios para seguir explorando estos comportamientos son muy complejos, lo cual limita la posibilidad de profundizar el estudio.

Las simulaciones muestran que los resultados son consistentes, mostrando zonas de concentración de las órbitas muy parecidas a las del sistema límite asociado. Ésta extensión hace pensar que $h_{\beta, \alpha}$ es una buena aproximación para N grande.

Para finalizar la discusión, esta tesis presenta una serie resultados que explica a grandes rasgos tanto el comportamiento límite del proceso estocástico para una amplia gama de parámetros, como la conducta del sistema límite en la evolución temporal, para una o más dimensiones; y abre interrogantes acerca del diagrama de fase para más de dos especies y ciertas zonas del diagrama de fase para dos tipos de individuos.

Anexo

Lema 4.18 *Sea $D = V.A$ que indica la densidad de los sitios ocupados luego de la fase de crecimiento en un grafo 3-regular a N vértices con la regla asociada a MVM. Entonces se tiene que*

$$\mathbb{E}(D) = \frac{(1-p)N-1}{N-1}(1-p) + \frac{(1-p)N}{N-1}p(1-\beta)$$

DEMOSTRACIÓN. **Calculo** Definimos:

$T_A(v)$ = V.A que indica la tendencia del punto v antes de la fase de crecimiento.

$T_D(v)$ = V.A que indica la tendencia del punto v luego de la fase de crecimiento.

Y = V.A que representa al sitio elegido donde posiblemente se copie la tendencia.

Calculo Exacto (eligiendo Y de los sitios restantes)

$$\begin{aligned} f_\beta^N(p) &= \mathbb{E}(D) \\ &= \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{T_D(i)=1} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(\mathbf{1}_{T_D(i)=1}) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{T_D(1)=1}) \\ &= \mathbb{P}(T_D(1) = 1) \\ &= 1 - \mathbb{P}(T_D(1) = 0) \\ &= 1 - \left(\frac{(1-p)N-1}{N-1}(1-p) + \frac{(1-p)N}{N-1}p(1-\beta) \right) \end{aligned}$$

Pues

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_D(1) = 0) &= \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(T_D(1) = 0 | Y = i) \mathbb{P}(Y = i) \\
&= \mathbb{P}(T_D(1) = 0 | T_A(1) = 0) \mathbb{P}(T_A(1) = 0) \\
&\quad + \mathbb{P}(T_D(1) = 0 | T_A(1) = 1) \mathbb{P}(T_A(1) = 1) \\
&= \sum_{i=1}^N [\mathbb{P}(T_D(1) = 0 | Y = i, T_A(1) = 0) \mathbb{P}(Y = i | T_A(1) = 0) \mathbb{P}(T_A(1) = 0)] \\
&\quad + \sum_{i=1}^N [\mathbb{P}(T_D(1) = 0 | Y = i, T_A(1) = 1) \mathbb{P}(Y = i | T_A(1) = 1) \mathbb{P}(T_A(1) = 1)] \\
&= \frac{(1-p)N-1}{N-1} (1-p) \mathbb{P}(T_D(1) = 0 | T_A(Y) = 0, T_A(1) = 0) \\
&\quad + \frac{(1-p)N}{N-1} p \mathbb{P}(T_D(1) = 0 | T_A(Y) = 0, T_A(1) = 1) \\
&= \frac{(1-p)N-1}{N-1} (1-p) + \frac{(1-p)N}{N-1} p(1-\beta)
\end{aligned}$$

En (1.12) solo sobreviven los sitios que tienen tendencia 0. Pues si $T_A(1) = 1$ y $T_A(Y) = 1$, entonces $T_D(1) = 1$; si $T_A(1) = 0$ y $T_A(Y) = 1$, entonces con probabilidad 1 $T_D(1) = 1$. Así si $T_A(Y) = 1$ obligatoriamente $T_D(1) = 1$. \square

Proposición 4.19

$$\lim_{p \rightarrow 0} h'_{\beta, \alpha}(p) = -(\alpha - 1)(1 + \beta)$$

DEMOSTRACIÓN. Se procede a calcular

$$\begin{aligned}
h'_{\beta, \alpha}(p) &= -(\beta(2p-1) - 1) \left(\sqrt{1 - 4(\alpha-1)(p-1)p(\beta(p-1) - 1)(\beta p - 1)} - 1 \right)^2 \\
&\quad \cdot \left(\frac{(\alpha-1)(-p)(\beta(p-1) - 1)(2\beta(p-1)p - 2p - 1)}{4(\alpha-1)^2 p^3 (\beta(p-1) - 1)^3 \sqrt{1 - 4(\alpha-1)(p-1)p(\beta(p-1) - 1)(\beta p - 1)}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sqrt{1 - 4(\alpha-1)(p-1)p(\beta(p-1) - 1)(\beta p - 1)} - 1}{4(\alpha-1)^2 p^3 (\beta(p-1) - 1)^3 \sqrt{1 - 4(\alpha-1)(p-1)p(\beta(p-1) - 1)(\beta p - 1)}} \right)
\end{aligned}$$

El anterior se separará en los siguientes términos para calcular el límite

$$\begin{aligned}
t_1(p) &= \frac{-(\beta(2p-1)-1)}{4(\alpha-1)^2(\beta(p-1)-1)^3\sqrt{1-4(\alpha-1)(p-1)p(\beta(p-1)-1)(\beta p-1)}} \\
t_2(p) &= \frac{\left(\sqrt{1-4(\alpha-1)(p-1)p(\beta(p-1)-1)(\beta p-1)}-1\right)^2}{p^2} \\
t_3(p) &= \frac{(\alpha-1)(-p)(\beta(p-1)-1)(2\beta(p-1)p-2p-1)}{p} \\
t_4(p) &= \frac{\left(\sqrt{1-4(\alpha-1)(p-1)p(\beta(p-1)-1)(\beta p-1)}-1\right)^3}{p^3}
\end{aligned}$$

Los límites de los términos anteriores se presentan a continuación

$$\begin{aligned}
\lim_{p \rightarrow 0} t_1(p) &= \frac{-1}{(\alpha-1)^2(1+\beta)^2} \\
\lim_{p \rightarrow 0} t_2(p) &= (\alpha-1)^2(\beta+1)^2 \\
\lim_{p \rightarrow 0} t_3(p) &= -(\alpha-1)(\beta+1) \\
\lim_{p \rightarrow 0} t_4(p) &= 2(\alpha-1)^3(\beta+1)^3
\end{aligned}$$

Los límites de $t_2(p)$ y $t_4(p)$ corresponden a aplicar la función generatriz asociada a los números de catalán, ésta es continua en 0. Al multiplicar los términos anteriores se concluye. \square

Lema 4.20 *La función $g_\alpha(p)$ posee un único máximo para en $p \in [0, 1]$, y el máximo de g_0 es $\frac{1}{2}$.*

DEMOSTRACIÓN.

$$dg_\alpha(p) = -\frac{\left(-1 + \sqrt{1-4(1-\alpha)(1-p)p}\right)^2 \left(-1 + (\alpha-1)p(2p+1) + \sqrt{1-4(1-\alpha)(1-p)p}\right)}{4(1-\alpha)^2 p^3 \sqrt{1-4(1-\alpha)(1-p)p}}$$

Para $0 \leq p$, $\alpha \leq 1$ se tiene que tanto el término de la izquierda del numerador como el denominador no se anulan, por consiguiente el único término que arroja candidatos a máximo de la función g_α es el de la derecha del numerador. Al imponer la condición necesaria de primer orden

$$\begin{aligned}
& -1 + (\alpha-1)p(2p+1) + \sqrt{1-4(1-\alpha)(1-p)p} = 0 \\
\iff & \left(\sqrt{1-4(1-\alpha)(1-p)p}\right)^2 = (1 - (\alpha-1)p(2p+1))^2 \\
\iff & \left(\sqrt{1-4(1-\alpha)(1-p)p}\right)^2 - (1 - (\alpha-1)p(2p+1))^2 = 0 \\
\iff & -(\alpha-1)p\left(4(\alpha-1)p^3 + 4(\alpha-1)p^2 + (7+\alpha)p - 2\right) = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto los candidatos a máximo son las raíces de un polinomio de grado 3, las cuales pueden ser explicitadas. Parte del cálculo lleva a identificar los siguientes factores:

$$\begin{aligned}
A(\alpha) &:= \frac{1}{9} \left(\frac{3(\alpha + 7)}{4(\alpha - 1)} - 1 \right) \\
B(\alpha) &:= \frac{1}{54} \left(\frac{9(\alpha + 7)}{4(\alpha - 1)} + \frac{27}{2(\alpha - 1)} - 2 \right) \\
S_1(\alpha) &:= \sqrt[3]{B(\alpha) + \sqrt{A(\alpha)^3 + B(\alpha)^2}} \\
S_2(\alpha) &:= \sqrt[3]{B(\alpha) - \sqrt{A(\alpha)^3 + B(\alpha)^2}}
\end{aligned}$$

Como

$$A(\alpha)^3 + B(\alpha)^2 = \frac{\alpha(3\alpha + 125)}{432(\alpha - 1)^3} < 0$$

el polinomio tiene 3 raíces reales, las cuales se pueden explicitar como sigue

$$\begin{cases}
p_1(\alpha) = +S_1(\alpha) + S_2(\alpha) - \frac{1}{3} \\
p_2(\alpha) = -\frac{S_1(\alpha) + S_2(\alpha)}{2} - \frac{1}{3} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(S_1(\alpha) - S_2(\alpha)) \\
p_3(\alpha) = -\frac{S_1(\alpha) + S_2(\alpha)}{2} - \frac{1}{3} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(S_1(\alpha) - S_2(\alpha))
\end{cases}$$

Luego de chequear las tres soluciones se obtiene que la que cae dentro del intervalo en estudio y es el máximo se alcanza en

$$\begin{aligned}
p_3(\alpha) &= \\
&\frac{1}{12}i \left(4i + i\sqrt[3]{\frac{126}{\alpha - 1} + 1 + 6\sqrt{3}\sqrt{\frac{\alpha(3\alpha + 125)}{(\alpha - 1)^3}}} - \sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{126}{\alpha - 1} + 1 + 6\sqrt{3}\sqrt{\frac{\alpha(3\alpha + 125)}{(\alpha - 1)^3}}} \right. \\
&\left. + \sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{126}{\alpha - 1} + 1 - 6\sqrt{3}\sqrt{\frac{\alpha(3\alpha + 125)}{(\alpha - 1)^3}}} + i\sqrt[3]{\frac{126}{\alpha - 1} + 1 - 6\sqrt{3}\sqrt{\frac{\alpha(3\alpha + 125)}{(\alpha - 1)^3}}} \right) \\
&- \frac{(1 - i\sqrt{3})\sqrt[3]{\alpha^3 + 123\alpha^2 + 6\sqrt{3}\sqrt{3}\alpha^5 + 116\alpha^4 - 366\alpha^3 + 372\alpha^2 - 125\alpha - 249\alpha + 125}}{12(\alpha - 1)} \\
&+ \frac{(1 + i\sqrt{3})(-4\alpha^2 + 104\alpha - 100)}{48(\alpha - 1)\sqrt[3]{\alpha^3 + 123\alpha^2 + 6\sqrt{3}\sqrt{3}\alpha^5 + 116\alpha^4 - 366\alpha^3 + 372\alpha^2 - 125\alpha - 249\alpha + 125}} - \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

A este punto se le llamará p_α^* , para comodidad en la notación. Finalmente al reemplazar $\alpha = 0$ en p_3 se obtiene $p_0^* = \frac{1}{2}$ \square

Lema 4.21

$$\lim_{p \rightarrow 0} h'_{\beta, \alpha}(p) = \beta - \alpha\beta$$

DEMOSTRACIÓN. Se calcula primero

$$h'_{\beta,\alpha}(p) = -\frac{\beta \left(\sqrt{1 - 4(1 - \alpha)e^{-2\beta p} (e^{\beta p} - 1)} - 1 \right)^2}{4(1 - \alpha)^2 (e^{\beta p} - 1)^3 \sqrt{1 - 4(1 - \alpha)e^{-2\beta p} (e^{\beta p} - 1)}} \cdot \left((1 - \alpha) (-5e^{\beta p} + 3e^{2\beta p} + 2) + e^{2\beta p} \left(\sqrt{1 - 4(1 - \alpha)e^{-2\beta p} (e^{\beta p} - 1)} - 1 \right) \right)$$

Se define

$$p_1(p) := -\frac{\left(\sqrt{1 - 4(1 - \alpha)e^{-2\beta p} (e^{\beta p} - 1)} - 1 \right)}{2(1 - \alpha) (e^{\beta p} - 1)}$$

$$p_2(p) := \frac{-5e^{\beta p} + 3e^{2\beta p} + 2}{e^{\beta p} - 1}$$

$$p_3(p) := \frac{1}{\sqrt{1 - 4(1 - \alpha)e^{-2\beta p} (e^{\beta p} - 1)}}$$

Así

$$h'_{\beta,\alpha}(p) = (1 - \alpha)\beta \cdot p_1(p)^2 \cdot p_2(p) \cdot p_3(p) + 2(1 - \alpha)\beta \cdot e^{2\beta p} p_1(p)^3 \cdot p_3(p)$$

El límite de cada una de las funciones explicitadas anteriormente es

$$\lim_{p \rightarrow 0} p_1(p) = -1$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p_2(p) = 1$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p_3(p) = 1$$

En el cálculo del primer límite se utilizó la función generadora asociada a los números de Catalán, la que tiene radio de convergencia 1, por lo que cual es convergente, y en 0 solo toma el valor del primer termino de la sucesión; luego se concluye. \square

Lema 4.22 $Sf_\alpha(\beta, x) < 0 \forall x \in (0, 1), \alpha \in (0, 1), \beta > 1$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned}
Sf_\alpha(\beta, x) = & \\
& \left(e^{-2p\beta} \left(-1280e^{p\beta}(\alpha - 1)^5 + 128(\alpha - 1)^5 - 32e^{2p\beta} \left(-195\alpha + 2\sqrt{4e^{-2p\beta}(-1 + e^{p\beta})(\alpha - 1) + 1} \right. \right. \right. \\
& + 245) (\alpha - 1)^4 + 32e^{3p\beta} \left(-575\alpha + 48\sqrt{4e^{-2p\beta}(-1 + e^{p\beta})(\alpha - 1) + 1} + 833 \right) (\alpha - 1)^4 \\
& + 8e^{4p\beta} \left(\alpha \left(4361\alpha - 930\sqrt{4e^{-2p\beta}(-1 + e^{p\beta})(\alpha - 1) + 1} - 10858 \right) \right. \\
& + 850\sqrt{4e^{-2p\beta}(-1 + e^{p\beta})(\alpha - 1) + 1} + 6613 \left. \right) (\alpha - 1)^3 \\
& - 8e^{5p\beta} \left(\alpha \left(5421\alpha - 2038\sqrt{4e^{-2p\beta}(-1 + e^{p\beta})(\alpha - 1) + 1} - 13102 \right) \right. \\
& + 1704\sqrt{4e^{-2p\beta}(-1 + e^{p\beta})(\alpha - 1) + 1} + 8120 \left. \right) (\alpha - 1)^3 \\
& + 2e^{7p\beta} \left(\alpha \left(8\alpha \left(-1115\alpha + 789\sqrt{4e^{-2p\beta}(-1 + e^{p\beta})(\alpha - 1) + 1} + 3666 \right) \right. \right. \\
& - 11164\sqrt{4e^{-2p\beta}(-1 + e^{p\beta})(\alpha - 1) + 1} - 33029 \left. \right) \\
& + 4600\sqrt{4e^{-2p\beta}(-1 + e^{p\beta})(\alpha - 1) + 1} + 13141 \left. \right) (\alpha - 1)^2 \\
& + 2e^{6p\beta} \left(\alpha \left(7 \left(2452\sqrt{4e^{-2p\beta}(-1 + e^{p\beta})(\alpha - 1) + 1} + 9419 \right) \right. \right. \\
& + 2\alpha \left(8780\alpha - 9 \left(535\sqrt{4e^{-2p\beta}(-1 + e^{p\beta})(\alpha - 1) + 1} + 3229 \right) \right) \left. \right) \\
& - 7414\sqrt{4e^{-2p\beta}(-1 + e^{p\beta})(\alpha - 1) + 1} - 25603 \left. \right) (\alpha - 1)^2 \\
& - 4e^{9p\beta} \left(\alpha \left(\alpha \left(6\alpha \left(27\alpha - 20\sqrt{4e^{-2p\beta}(-1 + e^{p\beta})(\alpha - 1) + 1} - 174 \right) \right. \right. \right. \\
& + 320\sqrt{4e^{-2p\beta}(-1 + e^{p\beta})(\alpha - 1) + 1} + 2053 \left. \right) - 355\sqrt{4e^{-2p\beta}(-1 + e^{p\beta})(\alpha - 1) + 1} - 1567 \left. \right) \\
& + 110\sqrt{4e^{-2p\beta}(-1 + e^{p\beta})(\alpha - 1) + 1} + 453 \left. \right) (\alpha - 1) \\
& + e^{8p\beta} \left(\alpha \left(4\alpha \left(2\alpha \left(645\alpha - 527\sqrt{4e^{-2p\beta}(-1 + e^{p\beta})(\alpha - 1) + 1} \right. \right. \right. \right. \\
& - 2975) + 2962\sqrt{4e^{-2p\beta}(-1 + e^{p\beta})(\alpha - 1) + 1} + 10025 \left. \right) \\
& - 10883\sqrt{4e^{-2p\beta}(-1 + e^{p\beta})(\alpha - 1) + 1} - 30013 \left. \right) \\
& + 3123\sqrt{4e^{-2p\beta}(-1 + e^{p\beta})(\alpha - 1) + 1} + 8713 \left. \right) (\alpha - 1) \\
& + e^{12p\beta} \left(\sqrt{4e^{-2p\beta}(-1 + e^{p\beta})(\alpha - 1) + 1} - 1 \right) (1 - 3\alpha)^2 \\
& + 2e^{11p\beta} (3\alpha - 1) \left(\alpha \left(3 \left(4\sqrt{4e^{-2p\beta}(-1 + e^{p\beta})(\alpha - 1) + 1} - 5 \right) \alpha \right. \right. \\
& - 22\sqrt{4e^{-2p\beta}(-1 + e^{p\beta})(\alpha - 1) + 1} + 26 \left. \right) + 8\sqrt{4e^{-2p\beta}(-1 + e^{p\beta})(\alpha - 1) + 1} - 9 \left. \right) \\
& + 2e^{10p\beta} \left(\alpha \left(\alpha \left(3\alpha \left(6 \left(\sqrt{4e^{-2p\beta}(-1 + e^{p\beta})(\alpha - 1) + 1} - 9 \right) \alpha \right. \right. \right. \right. \\
& - 56\sqrt{4e^{-2p\beta}(-1 + e^{p\beta})(\alpha - 1) + 1} + 235 \left. \right) \left. \right) \left. \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +261\sqrt{4e^{-2p\beta}(-1+e^{p\beta})(\alpha-1)+1}-988) - 120\sqrt{4e^{-2p\beta}(-1+e^{p\beta})(\alpha-1)+1}+551) \\
& +17\sqrt{4e^{-2p\beta}(-1+e^{p\beta})(\alpha-1)+1}-114)) \beta^2) \\
& / \left((-1+e^{p\beta})^2 \left(\sqrt{4e^{-2p\beta}(-1+e^{p\beta})(\alpha-1)+1}-1 \right)^2 (4e^{p\beta}(\alpha-1)+e^{2p\beta}-4\alpha+4)^2 \right. \\
& \left. \left(5e^{p\beta}(\alpha-1)-2\alpha+e^{2p\beta} \left(-3\alpha+\sqrt{4e^{-2p\beta}(-1+e^{p\beta})(\alpha-1)+1}+2 \right) +2 \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

Y como el denominador es positivo basta con chequear con el computador que el numerador es negativo, en este caso se hizo con *Mathematica* y entregó por resultado que la cantidad anterior es negativa para $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$, $0 < x < 1$ \square

Bibliografía

- [1] A. Katok B. Hasselblatt. *A first course in dynamics: with a Panorama of Recent Developments*. Cambridge University Press, 1st edition, 2003.
- [2] W. de Melo and S. van Strien. *One-Dimensional Dynamics*. Springer-Verlag, 1st edition, 1993.
- [3] R. Durrett. *Probability: Theory and Examples*. Cambridge University Press, 4.1 edition, 2013.
- [4] M. Feigenbaum. *Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations*. Journal of statistical physics, 1st edition, 1978.
- [5] G. Goodson. *Chaotic dynamics: Fractals, Tilings and substitutions*. Towson University Mathematics Department, 1st edition, 2014.
- [6] T. Sauer & J. Yorke K. Alligood. *Chaos: An introduction to dynamical systems*. Springer, 1st edition, 1997.
- [7] A. F. Karr. *Weak Convergence Of Markov Chains*. Springer-Verlag, 1975.
- [8] T. M. Liggett. *Interacting Particle Systems*. Springer, Los Angeles, 1st edition, 1985.
- [9] E. Sander & J. Yorke M. Joglekar. *Fixed points indices and period-doubling cascades*. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 1st edition, 2010.
- [10] V. Ovsienko and S. Tabachnikov. *The Schwarzian derivative?* Notices of the AMS, volume 56, number 1 edition, 2009.
- [11] R. Durrett & D. Remenik. *Chaos In Spatial Epidemic Model*. The Annals of Applied Probability, Cornell University, 2009.
- [12] W. Rudin. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill, New York, 1976.
- [13] N. J. A. Sloane. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. OEIS, 2002.
- [14] M. Tabor. *Chaos and integrability in non-linear dynamics*. Wiley, Columbia, New York, 1989.

- [15] A. Lasota & J. A. Yorke. *On The Existence Of Invariant Measures For Piecewise Monotonic Transformations*. Transactions of the American Mathematical Society, 1973.
- [16] T. Y. LI & J. A. YORKE. *Period Three Implies Chaos*. The American Mathematical Monthly, 1975.