



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

EFFECTO DE FLUCTUACIONES INTERNAS EN PATRONES Y PAREDES DE
DOMINIO

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS, MENCIÓN FÍSICA

DIEGO ANDRÉS CONTRERAS CONTRERAS

PROFESOR GUÍA:
MARCEL G. CLERC GAVILÁN

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
SERGIO DAVIS IRARRÁZABAL
DANIEL ESCAFF DIXON
ERIC LOUVERGNEAUX
ENRIQUE TIRAPEGUI ZURBANO

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por CONICYT-PCHA/Magíster
Nacional/2013 - 22131268.

SANTIAGO DE CHILE
2015

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL
GRADO DE: Magíster en Ciencias, mención Física
POR: Diego Andrés C. Contreras
FECHA: 31/03/2014
PROFESOR GUÍA: Marcel Clerc Gavilán

EFECTO DE FLUCTUACIONES INTERNAS EN PATRONES Y PAREDES DE DOMINIO

El objetivo principal de esta tesis fue estudiar el efecto del ruido interno en el límite de baja intensidad sobre patrones y paredes de dominio entre estados simétricos, particularmente analizando como afecta el ruido a modos críticos como el de traslación. Se utilizaron modelos prototipo y universales, caracterizando la dinámica de sus soluciones mediante el uso de herramientas de la física no lineal, procesos estocásticos y simulaciones numéricas. A su vez, los resultados obtenidos han sido contrastados con diferentes experimentos.

En el caso de estructuras disipativas, se caracterizó la bifurcación precursor-patrón, encontrando una fórmula para describir la dispersión de fase cerca de la inestabilidad, y una ecuación de Langevin para la dinámica de fase. Mediante esta ecuación se muestra como al incluir los efectos de tamaño se induce una transición de bloqueo de fase. Se contrastaron los resultados con datos experimentales obtenidos de patrones en una película de cristal líquido con retro-inyección óptica.

Para el caso de frentes entre estados simétricos, o kinks, el ruido induce un movimiento Browniano de su posición. La consideración del tamaño del sistema induce la aparición de fuerzas de atracción hacia los bordes. En el caso de kinks espacialmente no monótonos, la dinámica de la posición del kink se caracteriza por fluctuaciones en torno a equilibrios y saltos abruptos a equilibrios adyacentes. Esta dinámica también es observada en el caso en que, en lugar de bordes, se consideren inhomogeneidades en los parámetros. Adicionalmente, se estudió el efecto del ruido en la transición de Ising-Bloch. Para todos los casos, se dedujo una ecuación para la posición de la pared, que da cuenta de la dinámica observada.

Finalmente, cabe destacar que las simulaciones numéricas se realizaron usando una librería propia para la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de uso general desarrollada en el contexto la tesis.

THESIS ABSTRACT FOR
MASTER'S DEGREE IN SCIENCE,
PHYSICS MENTION,
BY: Diego Andrés C. Contreras
DATE: 31/03/2014
ADVISOR: Marcel Clerc Gavilán

EFFECTS OF INTERNAL FLUCTUATION ON PATTERNS AND DOMAIN WALLS

The main objective of this thesis is to study the effects of additive noise in the limit of low intensity level on patterns and domain walls between symmetric states, particularly analyzing how noise affects critical modes such as translation.

Universal and prototype models were used to characterize the dynamics of their solutions using tools from nonlinear physics, stochastic processes and numerical simulations. In turn, the results have been contrasted with different experiments.

For dissipative structures, the bifurcation precursor-pattern was characterized, finding a formula to describe phase dispersion near instability, and a Langevin equation for phase dynamics. Using this equation is shown as the size effects induces a phase locking transition. Analytical predictions were contrasted with experimental data obtained from patterns on a thin layer of liquid crystal with optical feedback.

For the case of fronts between symmetrical states, or kinks, noise induces Brownian motion on its position. Consideration of system size induces the appearance of attractive forces towards the edges. In the case of spatially non-monotonic kinks, the dynamics of the kink position is characterized by fluctuations around certain equilibrium positions and sudden jumps to adjacent equilibrium position. This dynamic is also observed in the case where, instead of edges, inhomogeneities are considered in equation parameters. Additionally, the effect of noise in Ising-Bloch transition was studied. For all cases, appropriate equation for wall position is deduced, which accounts for the observed dynamic.

Finally, numerical simulations were performed using a adequate library for solving partial differential equations of general purpose developed in the context of this thesis.

Agradecimientos

Esta tesis no pudo haberse hecho sin el apoyo de Marcel Clerc, su paciencia y vocación como formador de investigadores. Esta tesis, así como las otras de los trabajos que ha guiado, son testimonio de su gran capacidad como guía de futuros científicos.

A Ulises, Camila y Carlos, por nuestras valiosas discusiones sobre la física, la ciencia y la vida, mientras estudiábamos en pregrado. Mi actual forma de ver y pensar la física está sumamente influida por ese tiempo.

A Alejandro, por las interesantes conversaciones sobre el sentido y estética de la física, y por las valiosas discusiones científicas que me ayudaron a generar, mejorar o descartar ideas para desarrollar esta investigación.

En Francia, donde desarrollé parte de este trabajo, quisiera agradecer a Saliya Coulibaly, Eric Louvergneaux y Vincent Odent por su acogida y los conocimientos que compartieron conmigo.

A los miembros de la comisión, Sergio Davis, Daniel Escaff, Eric Louvergneaux y Enrique Tirapegui, agradezco por sus comentarios y críticas, así como su buena disposición con las fechas de esta tesis.

A quienes desde fuera del ámbito académico apoyaron el desarrollo de este trabajo; a Cati, que me acompañó y apoyó durante todas las complejidades de este periodo; y a mis padres por respaldarme y confiar en mis decisiones.

En general a quienes ayudaron de una forma u otra a que la posibilidad impensada hace ocho años de seguir una carrera como científico se volviera un hecho, muchas veces de forma casual, y sin darse cuenta de lo relevantes que fueron sus aportes. Como *Ceja* (Marcelo), quien hace muchos años me enseñó a derivar el día antes de una evaluación en la que me fue inesperadamente muy bien, siendo este un punto de bifurcación fundamental que condujo una serie de eventos que me llevó a estudiar física. No tengo espacio para mencionar otros momentos claves, pero sé que sin ellos, estaría haciendo algo más, pero no ciencia.

Finalmente, agradezco también el financiamiento de “Becas de Magíster nacional” de Conicyt y “Ayudas para estancias cortas de investigación” del Departamento de Postgrado y Postítulo de la Vicerrectoría de Asuntos Académicos de la Universidad de Chile.

Tabla de Contenido

Tabla de Contenido	7
Índice de figuras	9
1. Introducción	1
1.1. Introducción General	1
1.1.1. Estructuras en Sistemas Macroscópicos	2
1.2. Objetivos	4
1.2.1. Objetivo General	4
1.2.2. Objetivo Específicos	4
2. Marco Conceptual	5
2.1. Herramientas de Sistemas Dinámicos	5
2.1.1. Separación de Escalas	6
2.1.2. Bifurcaciones	6
2.1.3. Sistemas extendidos y Bifurcaciones espaciales	8
2.1.4. Diagramas de Bifurcación	8
2.1.5. Función de Lyapunov	9
2.2. Condición de Solubilidad	10
2.3. Patrones	11
2.3.1. Ecuación Prototipo para Sistemas con Patrones	11
2.3.2. Formas Normales con Espacio	12
2.4. Frentes	14
2.4.1. Frentes Monótonos	15
2.4.2. Frentes no Monótonos	16
2.4.3. Paredes de Ising y de Bloch	17
2.5. Ruido y Procesos Estocásticos	19
2.5.1. Movimiento Browniano	20
2.5.2. Ecuación de Langevin	21
2.5.3. Ruido Multiplicativo: Itô y Stratonovich	22
2.5.4. Ecuación de Fokker-Planck	23
2.5.5. Tasa de Kramers	25
2.6. Fenómenos Robustos del Ruido	25
2.6.1. Ejemplos Ilustrativos	25
2.6.2. Precursores de Patrón	27
2.7. Transformada de Hilbert	28

2.8.	Métodos Numéricos	30
2.8.1.	Método de Integración Estocástico	30
2.8.2.	Método de Integración con Espacio	30
3.	Transición de Bloqueo de Fase en Patrones	32
3.1.	Dinámica de Fase	32
3.1.1.	Ecuación Emendada de Amplitud	34
3.1.2.	Ecuación para la fase	36
3.1.3.	Bloqueo de Fase en Precursores	39
3.2.	Otras formas de Medir la Coherencia del Patrón	39
3.3.	Caracterización Experimental de la Transición de Bloqueo de Fase	41
4.	Frentes y Efecto del Ruido	43
4.1.	Ruido en Kinks Monótonos	44
4.1.1.	Efectos de Tamaño	45
4.2.	Kinks No Monótonos	48
4.2.1.	Kinks no Monótonos en Ecuación de Swift-Hohenberg	49
4.2.2.	Dinámica de Kinks no Monótonos Bajo Ruido Interno y Efectos de Tamaño	50
4.3.	Dinámica de Saltos Inducida por Inhomogeneidades	55
4.4.	Observación Experimental de la Dinámica de Saltos	56
4.5.	Efecto del Ruido en Transición de Ising-Bloch	57
4.5.1.	Dinámica de la Pared	59
4.5.2.	Correlaciones	62
5.	Librería Para Simulación de Ecuaciones Diferenciales	64
5.0.3.	¿Por qué Python?	64
5.1.	Integración	65
5.2.	Visualización	66
5.3.	Programación de una Simulación	66
6.	Conclusiones	70
	Bibliografía	72
A.	Internal noise and system size effects induce nondiffusive kink dynamics	79

Índice de figuras

1.1. Patrones en la arena del desierto. Contrario a lo que uno podría esperar, el viento genera una estructura sumamente ordenada sobre la superficie de la arena. La arena se deposita más rápidamente tras un refugio del viento, lo que contribuye a aumentar la profundidad del mismo [75].	2
1.2. Patrón de pigmentación en la concha de una <i>Amoria ellioti</i>	3
1.3. Un frente es un concepto bastante general para referirse a dos estados que coexisten y se conectan espacialmente, donde uno puede propagarse sobre el otro. Un ejemplo puede ser una hoja de papel quemándose, o las dendritas que forma el hielo al propagarse sobre el estado líquido.	4
2.1. Diagrama de bifurcación de la ecuación (2.6).	7
2.2. Diagrama de bifurcación de la ecuación (2.7).	8
2.3. Ejemplo de diagrama de bifurcación.	9
2.4. Perfil de un patrón de la ecuación de Swift-Hohenberg (2.20) para $\mu = 0,1$	11
2.5. Gráfico de la función (2.21) para $\sigma(q)$	12
2.6. Frente propagándose en un sistema extendido de dominos.	15
2.7. Frente entre dos estados simétricos, kink, dado por la expresión (2.41). $\{\Delta, l\}$ da cuenta de la posición de la interfaz del kink	16
2.8. Frente entre dos estados simétricos conectados mediante una interfaz con oscilaciones amortiguadas, kink no monótono, $\{\Delta, l\}$ da cuenta de la posición de la interfaz del kink.	16
2.9. Diagrama de bifurcación de la ecuación de Swift-Hohenberg (2.20), donde el área oscurecida da cuenta de la amplitud de los patrones. La línea continua y segmentada dan cuenta de estados uniformes estables e inestables respectivamente. $\{\mu_0, \mu_p\}$ corresponden a las bifurcaciones espaciales y el área en verde corresponde a la inestabilidad espacial del estado $u = 0$	17
2.10. Perfil de una pared de Bloch con quiralidad positiva, donde X da cuenta de la componente real, e Y de la imaginaria, para la ecuación (2.42) con los parámetros $\mu = 1, \nu = \alpha = \beta = 0$, y $\gamma = 0,2$	18
2.11. Trayectorias estocásticas para la ecuación (2.54).	21
2.12. Diagrama de una cuenca de atracción, indicando las magnitudes importantes en el cálculo de tiempos de escape y tasa de Kramers.	25
2.13. Trayectorias estocástica para la ecuación (2.78), para diferentes intensidades del ruido. Se observa claramente como la máxima coherencia aparece para un nivel de ruido intermedio (Imagen obtenida de la referencia [38]).	26

2.14. Ejemplo ilustrativo de otro tipo de resonancia estocástica. Una imagen es mejorada mediante la adición de un nivel adecuado de ruido (Imagen obtenida de la referencia [43]).	26
2.15. (Izquierda) Un frente entre un estado patrón y uno homogéneo se propaga por efecto del ruido hacia la dirección del estado más estable (derecha) Velocidad promedio para un frente entre un estado patrón y un estado homogéneo. El parámetro de bifurcación ε controla la diferencia de energía entre los estados. La línea roja y los triángulos corresponden al caso determinista, la línea azul y las cruces, el caso estocástico. Imágenes obtenidas de la referencia [18] . . .	27
2.16. Comparación de un patrón ($\mu = 0,2$, arriba) y un precursor ($\mu = -0,1$, abajo) para la ecuación (2.80) con $\eta = 0,0018$. A la izquierda, se observa el perfil de estas soluciones, y a la derecha la transformada de Fourier del perfil. Se observa como aún bajo la bifurcación existe una longitud de onda privilegiada.	27
2.17. Diagrama de bifurcación para patrones en dos sistemas experimentales distintos: (arriba) amplitud de un patrón versus intensidad de la luz en un sistema óptico con retro-inyección (ver detalles en referencia [3]); (abajo) amplitud de un patrón versus la amplitud presión del forzamiento paramétrico en un medio granular fluidizado (ver detalles en referencia [67]). Ambos sistemas presentan intrínsecamente un elevado nivel de ruido.	29
3.1. (arriba) Diagramas espacio temporales del patrón para $\mu = -0,1$ y $\mu = 0,2$ respectivamente. (abajo) Gráfico de los diferentes valores de la fase en representación polar. Se observa como al pasar la bifurcación, el sistema fija la fase a un valor particular.	33
3.2. Fase (azúl) y amplitud (rojo) promedio, con sus respectivas barras de error para el modelo estocástico de Swift-Hohenberg con $k = 1$ y $\eta = 0,72$. La fase y amplitud corresponden a la representación polar $\{\psi, A \}$ del máximo positivo de la transformada de Fourier del patrón. Para la estadística, se tomó un mismo campo durante un tiempo $T = 10^4$ cada $t = 1$	34
3.3. Perfil del patrón (arriba en gris) y la fase y la envolvente obtenida usando transformada de Hilbert (abajo en azul y rojo respectivamente). A la izquierda considerando condiciones de borde fijas(condición tipo Neumann), y a la derecha condiciones de borde especulares (condición tipo Dirichlet). Para el caso de borde fijo, se observa claramente como cerca de los bordes las variaciones de la envolvente son de la escala del patrón subyacente. En el caso de las condiciones de borde especulares, no es tan clara el acople entre las escalas, sin embargo, gracias a la transformada de Hilbert, nuevamente notamos como la envolvente varía rápidamente cerca de los bordes.	35
3.4. En azul, dispersión de la fase para simulación numérica de la ecuación de Swift-Hohenberg. La curva roja representa el módulo de la amplitud del patrón. Se consideró $k = 1$ y $\eta = 0,72$, y se tomó un patrón durante un tiempo $T = 1000$ cada $T_0 = 1$	39
3.5. Comparación entre la dispersión de la derivada temporal de la fase en el caso de condiciones de borde periódicas y especulares. Sobre la bifurcación resulta evidente el efecto de los bordes, sin embargo, bajo ella, no se aprecian diferencias significativas. Se consideró $k = 1$ y $\eta = 0,72$	40

3.6.	(izquierda) Dispersión de la fase menos un ajuste lineal. (derecha) Dispersión de derivada de la fase o dispersión del modo crítico. Se consideró un patrón de Swift-Hohenberg con $\eta = 0,72$ y $k = 1$. Se observa claramente para ambas caracterizaciones de la coherencia del patrón una abrupta caída luego del punto crítico.	40
3.7.	Montaje experimental de una película de cristal liquido tipo Kerr uni-dimensional sujeto a retro inyección óptica; LC película de cristal líquido, el espejo corresponde a un espejo virtual; F, B corresponden al campo óptico incidente y reflejado. d es la distancia entre el espejo y la película.	41
3.8.	(arriba) Diagramas espacio temporales del patrón para $F = 0,7 \text{ W/cm}^2$ (bajo la inestabilidad espacial) y $F = 1,2 \text{ W/cm}^2$ (sobre la inestabilidad espacial) respectivamente. (abajo) Gráfico de los diferentes valores de la fase en representación polar. El comportamiento experimental es análogo al observado en simulaciones, donde se observa como al pasar la bifurcación, el sistema fija la fase a un valor particular.	42
3.9.	Dispersión de la fase (azul) y módulo de la amplitud (rojo) para los datos experimentales. Las líneas continuas corresponden a un ajuste numérico usando la fórmula (3.23) para la fase y (2.84) para la amplitud.	42
4.1.	Dinámica estocástica del estado kink. a) Simulación numérica de un solo kink bajo Eq. (4.1) en un sistema finito con condiciones especulares de borde, con $\mu = 1$, $\eta = 0,0018$ y $L = 25$, partiendo de la posición $\Delta = 0,3L$. b) El perfil al comienzo de la simulación c) Evolución de la probabilidad de sobrevivencia para un kink en diferentes instantes de tiempo $t_1 = 0$ (negro), $t_2 = 20000$ (azul), and $t_3 = 40000$ (verde).	45
4.2.	Esquema del ansatz de la ecuación (4.12). El efecto del borde es reemplazado por la consideración de un kink <i>reflejado</i> al otro lado de este.	46
4.3.	Ley cinética para la posición del kink como resultado de los efectos de borde. Los puntos se obtienen numéricamente considerando la evolución temporal de un kink ubicado lejos de la pared, calculando luego la velocidad en cortas ventanas de tiempo en diferentes puntos hasta llegar al borde. La línea roja es la expresión analítica para la dinámica de la posición del (4.15) con $\eta = 0$, y $f(\Delta) = f_1 + f_2 + f_3$	47
4.4.	Evolución temporal de la ecuación de Fokker-Plank (4.22) con condiciones de borde absorbentes, usando una fuerza de deriva $h(\Delta) = -C[\Delta^{-a} + (L - \Delta)^{-a}]$ con $C = 0,033$, $a = 3,08$, $\Delta_0 = 0,3L$, y $\eta = 2,69 \times 10^{-3}$	48
4.5.	Solución kink de la ecuación de Swift-Hohenberg con los parámetros $\mu = q = 1$ and $\eta = 0,0018$. a) perfil de la solución b) diagrama espacio-temporal de la evolución del kink.	50
4.6.	Dinámica estocástica de un kink del modelo de Swift-Hohenberg (2.20). a) Simulación numérica de un kink bajo condiciones especulares de borde en un sistema finito del modelo (2.20), con $\mu = 1$, $q = 1$ y $\eta = 0,0018$ partiendo de la posición $\Delta = \Delta_0 \approx 0,15L$. b) El kink en el momento inicial. c) Evolución de la probabilidad de supervivencia de un kink en diferentes instantes de tiempo $t_1 = 0$ (negro), $t_2 = 10^6$ (verde) y $t_3 = 2 \times 10^6$ (azul).	51
4.7.	Esquema del ansatz de la ecuación (4.33). El efecto del borde es reemplazado por la consideración de un kink <i>reflejado</i> al otro lado de este.	51

4.8.	Ley cinemática para la posición del kink no monótono por efectos de tamaño. Los puntos son obtenidos considerando una distribución inicial de condiciones de kinks repartidos uniformemente por el sistema. Luego se hacen evolucionar numéricamente por un breve instante de tiempo, para calcular la variación de la posición del kink y así su velocidad. La curva sólida es obtenida usando la forma integral predicha. El panel inferior muestra el potencial asociado. . . .	53
4.9.	Evolución temporal de la ecuación de Fokker-Planck (4.46) con condiciones de borde absorbentes, usando el potencial (4.43) con $\alpha' = 1,157$, $a = 0,4940$ y $b = 1,026$ como parámetros de fiteo y $\eta = 2 \times 10^{-3}$	54
4.10.	Dinámica estocástica de kinks de la ecuación forzada de Ginzburg-Landau real. (4.47) con $k = \pi/3$, $a = 0,02$ y $\eta = 0,02$. Diferentes colores representan diferentes trayectorias de la posición del kink. El panel inferior muestra el perfil del kink en el instante inicial.	55
4.11.	(Arriba) Imagen del perfil de un kink en una capa delgada cuasi-unidimensional de un medio granular fluidizado sujeto a un flujo periódico de aire. (Abajo) Promedio del perfil del kink tomado en 1000 ciclos. Si bien al observar el kink en un momento dado no es evidente tenga una longitud de onda característica, esta se aprecia claramente al promediar. Imágenes cortesía de Juan Macías y Juan Falcón.	56
4.12.	Evolución temporal de la posición de un kink granular, x_0 . Se distingue claramente como el kink luego de oscilar en torno a ciertas posiciones, abruptamente se mueve a otra. Imagen cortesía de Juan Macías y Claudio Falcón.	57
4.13.	Perfil de una pared de Bloch con quiralidad positiva, donde X da cuenta de la componente real, e Y de la imaginaria, para la ecuación (2.42) con los parámetros $\mu = 1$, y $\gamma = 0,2$, y considerando términos no variacional no nulos $\nu = 0,1$, $\alpha = -0,1$ y $\beta = -0,15$	58
4.14.	Velocidad determinista del frente para la ecuación (4.51), con $\mu = 1$, $\nu = 0,1$, $\alpha = -0,1$, $\beta = -0,15$, $\eta = 0$ y para distintos valores de γ	58
4.15.	Trayectorias típicas de paredes cerca de la bifurcación, para la ecuación (4.51), con $\mu = 1$, $\nu = 0,1$, $\alpha = -0,1$, $\beta = -0,15$, $\eta = 0,05$ y para $\gamma = 0,42, 0,44, 0,45$	59
4.16.	Distribución de Probabilidad de velocidades obtenida numéricamente para la ecuación (2.42), con $\mu = 1$, $\nu = 0,1$, $\alpha = \beta = 0$ para $\gamma = 0,42, 0,44, 0,45$. Bifurcación ocurre aproximadamente en $\gamma_c = 0,44$	62
4.17.	Función de auto-correlación para paredes de la ecuación (2.42), con $\mu = 1$, $\nu = 0,1$, $\alpha = \beta = 0$, $\eta = 0,05$ para $\gamma = 0,44, 0,45$	62
5.1.	Ejemplo de Script de simulación con dos subvisualizaciones.	65

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción General

Esta tesis trata del ruido, y su efecto en estructuras formadas en sistemas macroscópicos. Llamamos ruido a las fluctuaciones azarosas en las diversas variables que puedan caracterizar un sistema macroscópico, y llamamos sistema macroscópico a los sistemas conformados por un enorme número de elementos constituyentes. Así, son ejemplos de estos todos los sistemas que se pueden observar cotidianamente, incluso, nosotros mismos.

Los sistemas macroscópicos son descritos usualmente por un número pequeño de variables físicas, pese al gigantesco número de grados de libertad que poseen. Esto se logra mediante la separación de escalas temporales y espaciales de los fenómenos en los que uno está interesado, es decir, entre variables rápidas y variables lentas. Para clarificar esta idea, consideremos un sistema macroscópico como un vaso con agua, el cuál puede ser descrito, entre otras variables, por su temperatura, variable que es fácil de medir, tiene un valor que varía lentamente en el tiempo, y puede identificarse en equilibrio termodinámico con la energía cinética promedio de cada átomo. En contraste, la caracterización de variables rápidas como la energía cinética de cada átomo, además de ser una tarea prácticamente imposible, no aporta una caracterización mejor respecto a la temperatura en el estudio de fenómenos que ocurren a escala macroscópica. Cabe notar que la identificación de muchas de estas variables macroscópicas, como temperatura, presión, magnetización, densidad de carga y masa, deformación, por nombrar algunos, fueron anteriores al descubrimiento de los átomos que les dan origen, y sin embargo, hasta el día de hoy se consideran útiles modelos como el de los gases ideales o la ecuación de Van der Waals, que relacionan estas variables en equilibrio termodinámico. No siempre es posible identificar estas variables macroscópicas con variables físicas microscópicas, afortunadamente, esto no representa un gran obstáculo en el estudio de las mismas.

Estas variables pueden corresponder a escalares o vectores, o ser promovidos a campos al considerar inhomogeneidades de sus valores en el espacio. Además, en sistemas fuera del equilibrio, estas evolucionan en el tiempo. Sea cual sea el caso, dado que su origen está en la dinámica de una enorme cantidad de variables microscópicas, su valor aún en equilibrio

fluctúa, haciendo que el ruido sea inherente a ellas. La ley de los grandes números hace que en la medida que más partículas componen un medio, las fluctuaciones decrezcan hasta ser incluso despreciables en muchos sistemas, donde leyes deterministas proveen una adecuada descripción de este. Sin embargo, en otros casos, el ruido aparece como un elemento claramente identificable en la dinámica, como en el conocido caso del movimiento Browniano, e incluso, es capaz de inducir fenómenos [38, 43, 42, 18].

Es importante hacer notar que el ruido como un elemento azaroso en los sistemas macroscópicos es un modelo fenomenológico para describir la dinámica caótica y rápida que emerge de la interacción de los elementos constituyentes de un medio, sin que esto signifique, necesariamente, que tras el sistema modelado no exista una dinámica determinista. En este sentido, es un ejemplo de como a cada fenómeno del mundo material que la física intente modelar no le corresponde uno y solo un modelo. La pertinencia de un modelo no radica en si sus hipótesis son certeras en un sentido profundo, si es que tal certeza se puede definir, sino, si permite entender y modelar satisfactoriamente un fenómeno.

1.1.1. Estructuras en Sistemas Macroscópicos



Figura 1.1: Patrones en la arena del desierto. Contrario a lo que uno podría esperar, el viento genera una estructura sumamente ordenada sobre la superficie de la arena. La arena se deposita más rápidamente tras un refugio del viento, lo que contribuye a aumentar la profundidad del mismo [75].

Los sistemas macroscópicos exhiben una rica variedad de comportamientos y fenómenos cuando son mantenidos fuera del equilibrio, mediante la inyección y disipación de cantidades como energía, momento, materia, entre otros. Estos se auto-organizan en llamadas estructuras disipativas [74]. Estas estructuras, como Ilya Prigogine propuso, son una generalización del concepto de estructuras cristalinas de los sólidos para los sistemas macroscópicos fuera del equilibrio. La arena en el desierto forma patrones al ser la superficie golpeada por el viento, las montañas serpentean por efecto de las mismas fuerzas que las crearon, simplemente como efecto azaroso de las fuerzas con las que están en contacto. Estos mismos mecanismos son también aprovechados por diferentes seres vivos en su desarrollo. Así por ejemplo, encontramos patrones en las conchas de muchos moluscos [75] o las líneas de las cebras. En el laboratorio, existen interesantes ejemplos de este tipo de estructuras en diversos tipos de sistemas; la reacción de Beloúsov-Zhabotinsky [90] es un ejemplo, donde una reacción química

oscila y forma patrones. Se generan patrones de convección al someter a un fluido a una diferencia de temperatura suficientemente alta [89]; Granos forman patrones al ser agitados a una alta frecuencia [67], entre otros ejemplos. La naturaleza que nos rodea esta invadida por fenómenos de auto-organización.



Figura 1.2: Patrón de pigmentación en la concha de una *Amoria ellioti*.

Por otra parte, es muy común encontrar sistemas donde uno o más estados de equilibrio son posibles simultáneamente. Si estos sistemas están extendidos en el espacio, podemos imaginar que localmente nos encontremos al sistema en torno a un estado y en otra parte este en uno diferente, lo que lleva a la formación de paredes de dominio o frentes, los cuales exhiben una diversa dinámica espacio-temporal [72, 68, 23]. No en todos los casos estos frentes corresponden a estructuras disipativas, sin embargo, se presentan comúnmente en sistemas fuera del equilibrio. Estas estructuras son muy relevantes para caracterizar múltiples sistemas como sistemas con dominios magnéticos [35], procesos de solidificación dirigida [10], sistemas ópticos no lineales [21, 46, 20, 70], reacciones químicas oscilantes [69], medios granulares fluidizados [5, 60, 31, 62, 61, 58, 59], o dinámica de poblaciones [64, 37, 18], por mencionar algunos casos.

Es importante notar que tanto las estructuras disipativas como los frentes son fenómenos intrínsecamente no lineales.

Cuando un sistema se encuentra en un estado estacionario desde el punto de vista determinista, es cuando se puede esperar que las fluctuaciones internas tengan un rol más protagónico al no existir una dinámica determinista manifiesta. En esta tesis se analizará el efecto del ruido en algunas estructuras extendidas espacialmente en sistemas macroscópicos fuera del equilibrio, como patrones y frentes, en los límites donde no presentan una dinámica determinista.

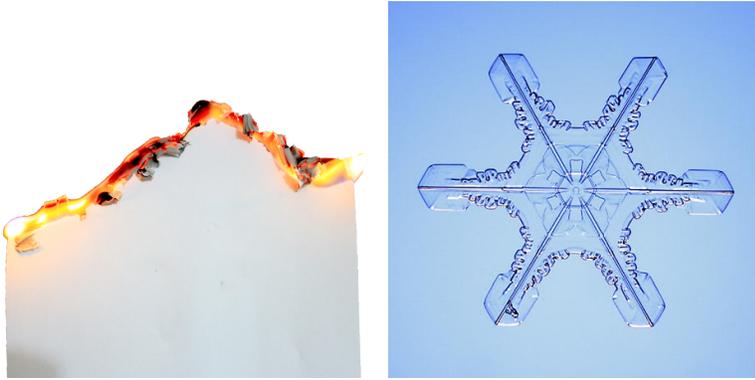


Figura 1.3: Un frente es un concepto bastante general para referirse a dos estados que coexisten y se conectan espacialmente, donde uno puede propagarse sobre el otro. Un ejemplo puede ser una hoja de papel quemándose, o las dendritas que forma el hielo al propagarse sobre el estado líquido.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General

Estudiar el efecto aditivo en el límite de baja intensidad en patrones y paredes de dominio, especialmente estudiando como afecta a modos de traslación, los cuales en ausencia de ruido no tendrían dinámica.

1.2.2. Objetivo Específicos

- Estudiar la formación de patrones bajo la influencia de fluctuaciones internas.
- Estudiar el efecto del ruido en paredes de dominio entre estados simétricos de sistemas variacionales, los cuales no tienen dinámica propia.
- En ambos casos, estudiar la influencia simultanea de efectos de tamaño y ruido.
- El desarrollo de un marco conceptual adecuado para la descripción de los fenómenos estudiados.
- El desarrollo de herramientas computacionales adecuadas para el estudio numérico de objetivos anteriores particularmente (pero no restringido a ellos necesariamente).

Capítulo 2

Marco Conceptual

En esta sección presentaremos de forma más bien breve diferentes herramientas y conceptos necesarios para comprender el trabajo presentado en esta tesis. Si el lector tiene dominio sobre los métodos utilizados en esta tesis, puede omitir la lectura de esta sección.

2.1. Herramientas de Sistemas Dinámicos

Un sistema dinámico es definido como una regla para la evolución temporal en un espacio de estados, llamado espacio de fase. Ejemplos de estas reglas son los mapas, donde a partir de un estado n -ésimo—y los anteriores si se quiere—se determina el estado $n + 1$ -ésimo (como ejemplo considerar el mapa logístico [80]), siendo en este caso el tiempo discreto. Otro ejemplo de una regla para la evolución temporal, son las ecuaciones diferenciales. Como ejemplo, podemos tomar cualquier sistema mecánico que responda a la segunda ley de Newton, donde la evolución temporal está dada por la ecuación diferencial $m d^2 \mathbf{q} / dt^2 = F(\mathbf{q})$.

En sistemas macroscópicos, los cuales están compuestos típicamente por un número gigantesco de elementos individuales, comúnmente átomos, en cuyo caso ese número es del orden del número de Avogadro ($\sim 10^{23}$), el estudiarlo como sistema dinámico requiere superar la complejidad dada por la elevada dimensión del problema que hace imposible su resolución directa. La creación de un marco teórico apropiado para describir sistemas macroscópicos, requiere reducir la dimensión del sistema, esto se logra eligiendo nuevas variables adecuadamente, o dicho de otra forma, una nueva base, tal que permita una clara distinción entre variables activas de otras que son esclavas, en el sentido de que su dinámica sigue a la dinámica de las primeras [65]. Un método para obtener esta separación consiste en examinar la estabilidad lineal de cada modo. Aquellos cuyas tasas de crecimiento sean positivas, cero o débilmente negativas dominarán la dinámica (y son llamadas variables lentas o modos críticos) y las demás corresponderán a variables exponencialmente suprimidas (llamadas variables rápidas). A las primeras se les llama parámetros de orden porque dan cuenta del grado de orden del sistema [65, 53].

2.1.1. Separación de Escalas

Explicamos como las variables más relevantes para describir un sistema corresponde a sus variables lentas, ya que son las que dominan la dinámica. Un ejemplo simple para clarificar esta idea es considerar un oscilador amortiguado,

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad (2.1)$$

$$m \frac{dv}{dt} = -kx - \gamma v, \quad (2.2)$$

donde x da cuenta de la coordenada para la posición y v la velocidad. Considerando el cambio de escala $t = \gamma\tau$, podemos reescribir las ecuaciones anteriores como,

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dx}{d\tau} = v, \quad (2.3)$$

$$\frac{m}{\gamma} \frac{dv}{d\tau} = -kx - \gamma v. \quad (2.4)$$

Tomando el límite sobre amortiguado $\gamma \gg 1$, podemos despreñar la dinámica en v , obteniendo a partir de la ecuación (2.4) que $v = -kx/\gamma$. Sustituyendo en (2.3) se sigue,

$$\frac{dx}{d\tau} = -kx. \quad (2.5)$$

En este límite, la dinámica variable v es rápida respecto a la dinámica de x ($dv/d\tau \sim \gamma dx/d\tau$), Para escalas de tiempo grande, sólo es necesario caracterizar la dinámica de x como parámetro de orden apropiado para el problema.

2.1.2. Bifurcaciones

Los sistemas físicos habitualmente exhiben transiciones al variar sus parámetros. Un comportamiento particular puede aparecer para ciertos valores de los parámetros, y desaparecer con otros valores. Estos cambios de comportamiento pueden ser modelados por medio de bifurcaciones, un cambio cualitativo en la dinámica de un sistema físico debido a un pequeño cambio en uno o más variable físicas [80, 27]. A continuación se ilustrará esto mediante ejemplos.

Bifurcación de Saddle-Node

Esta bifurcación da cuenta de la creación de un equilibrio. Consideremos el sistema dinámico correspondiente a la forma normal de *Saddle-Node* (del inglés, punto silla),

$$\dot{x} = x^2 - r, \quad (2.6)$$

donde r es un parámetro. Cuando este parámetro es negativo, el sistema estacionario $\dot{x} = 0$ no tiene ninguna solución. Cuando es positivo, existen dos soluciones, $x = \pm\sqrt{r}$. ¿Y qué pasa cuando $r = 0$? Este es el punto de bifurcación, cuando las dos soluciones se crean en este caso a partir de un punto silla $x = 0$.

En este ejemplo, vemos dos comportamiento cualitativamente diferente cuando r es positivo y negativo. Dado que r controla cuando la bifurcación ocurre, es llamado *parámetro de bifurcación*. Un ejemplo mecánico simple es una partícula de Shilnikov, revisado en referencia [16].

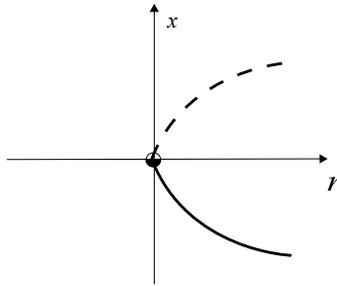


Figura 2.1: Diagrama de bifurcación de la ecuación (2.6).

Bifurcación de Pitchfork

Esta bifurcación da cuenta de la emergencia de dos equilibrios estables a partir de uno. Consideremos un sistema dinámico dado por la ecuación de Ginzburg-Landau real sin espacio

$$\dot{x} = \mu x - x^3, \quad (2.7)$$

donde en este caso μ es el parámetro de bifurcación. Notamos que cuando $\mu < 0$, el sistema sólo tiene un estado estacionario, correspondiente a $u = 0$, el cual es estable y se inestabiliza en $\mu = 0$, siendo inestable para $\mu > 0$, mientras dos nuevos estados estables son creados $x = \pm\sqrt{\mu}$. Esta bifurcación es llamada de *Pitchfork*, del inglés, horquilla, por la forma de su diagrama de bifurcación.

Ejemplo del esta bifurcación es el péndulo de Andronov, (ver [66]).

Péndulo Sobre-amortiguado

Los ejemplos anteriores corresponden a inestabilidades, sin embargo, no toda bifurcación es una inestabilidad. Como ejemplo, tomemos el péndulo sobre amortiguado mostrado anteriormente en 2.1.1. En este caso se observa como al aumentar γ hasta llegar sobre $\gamma_c = 2\sqrt{km}$ se pasa de un comportamiento oscilatorio a uno solamente de relajación.

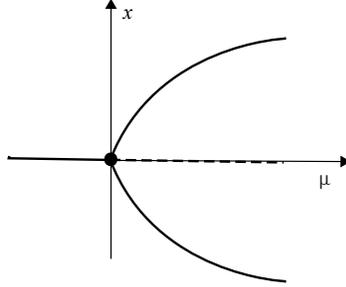


Figura 2.2: Diagrama de bifurcación de la ecuación (2.7).

2.1.3. Sistemas extendidos y Bifurcaciones espaciales

Un sistema extendido está compuesto de un gran número sistemas locales acoplados. Un ejemplo prototipo de esto es una cadena de osciladores armónicos, lo que corresponde a un sistema extendido discreto [76]. Un sistema como un fluido, una cuerda, una membrana, una solución de reactivos, por nombrar algunos ejemplos, es modelado usualmente como un sistema extendido, y representado dinámicamente por una ecuación diferencial en derivadas parciales.

Estos sistemas, tienen como solución de equilibrio la extensión natural de los equilibrio naturales locales. Así, también podemos encontrar soluciones inesperadas como como patrones [74], las cuales emergen como consecuencia de la inestabilidad de un modo espacial.

Veremos un ejemplo de este tipo de bifurcaciones más adelante cuando exhibamos la ecuación de Swift-Hohenberg como modelo prototipo para la emergencia de patrones en 2.3.1.

2.1.4. Diagramas de Bifurcación

Los diagramas de bifurcación describen esquemáticamente las transiciones que sufre un sistema dinámico cuando un parámetro de control es modificado.

Elementos que podemos distinguir en estos diagramas son

- **Soluciones estacionarias:** Son marcadas como líneas y representan las soluciones para diferentes valores del parámetro de bifurcación. Soluciones estables se representan mediante líneas sólidas y soluciones inestables mediante líneas discontinuas.
- **Punto crítico:** El punto donde emerge un nuevo comportamiento.
- **Punto de Maxwell:** En el caso de sistemas con multi-estabilidad, este punto corresponde al valor del parámetro de bifurcación donde dos estados son igualmente favorables desde el punto de vista dinámico.

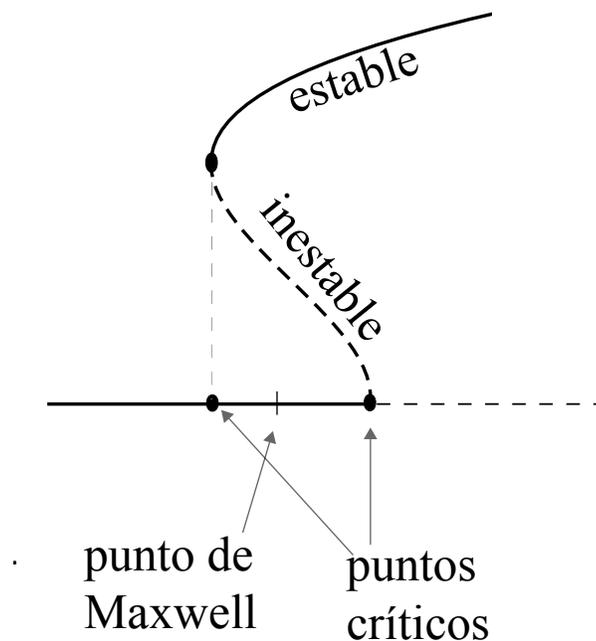


Figura 2.3: Ejemplo de diagrama de bifurcación.

2.1.5. Función de Lyapunov

Una clase de sistema dinámico con interesantes propiedades son los variacionales o gradientes. Estos sistemas, pueden ser escritos de la siguiente manera,

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = -\nabla U, \quad (2.8)$$

donde $U(\mathbf{y})$ es una función escalar que de tratarse de un sistema físico, comúnmente se identifica el valor de U con la energía potencial del sistema. La principal propiedad de estos sistemas es que relajan hacia los valores mínimos de U . Se puede mostrar fácilmente que U se minimiza en el tiempo proyectando ambos lados de (2.8) sobre ∇U

$$\nabla U \cdot \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \frac{dU}{dt} = -|\nabla U|^2. \quad (2.9)$$

En este caso, $\mathcal{F} = U(\mathbf{y})$ es una función de Lyapunov para el sistema (2.8). En general se llama a una función \mathcal{F} función de Lyapunov si solo si satisface,

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}(t)} \leq 0, \quad (2.10)$$

donde $\mathbf{y}(t)$ es solución del sistema dinámico (2.8). Este concepto es generalizable a sistemas con espacio, donde dado un sistema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = H(u, \partial_x). \quad (2.11)$$

Este se llamará variacional si existe una acción S tal que,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\delta S}{\delta u}, \quad (2.12)$$

donde $\delta/\delta u$ da cuenta de la derivada funcional, y S tiene la forma,

$$S = \int \mathcal{L}(u, \partial_x) dx \quad (2.13)$$

2.2. Condición de Solubilidad

Una herramienta fundamental para encontrar ecuaciones que describan la dinámica de un sistema no lineal es la Alternativa de Fredholm o condición de solubilidad. Consideremos un operador lineal $L : V \rightarrow W$ y el sistema lineal de ecuaciones,

$$Lv = b \quad (2.14)$$

Donde v es incógnita. Nos preguntamos ¿Qué condición debe satisfacer este sistema para tener solución? Para entender este método analicemos un ejemplo simple, tomemos un sistema de ecuaciones de orden 2

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Resulta claro en este caso que si $b_2 \neq 0$ el sistema no puede tener solución para ningún valor de x e y . Luego, la condición de solubilidad es $b_2 = 0$. Se puede construir una regla general que permita obtener las condiciones necesarias y suficientes para que el sistema tenga solución para casos más complicados, considerando operadores lineales no necesariamente matriciales. Es trivial que este sistema tiene solución si sólo si $b \in \text{Im}(L)$, sin embargo, esta condición es demasiado compleja de aplicar debido a que en general la dimensión de $\text{Im}(L)$ es muy alta. Alternativamente, tomemos además un vector u tal que $u \in \ker(L^\dagger)$, donde L^\dagger denota el operador adjunto de L bajo un producto interno arbitrario $(|)$, definido como el operador que satisface para todo f y g ,

$$(L^\dagger g|f) = (g|Lf). \quad (2.16)$$

De este modo se tiene

$$uL^\dagger = 0 = Lu, \quad (2.17)$$

aplicando producto interno a ambos lados por la izquierda contra u en la ecuación (2.14) se sigue,

$$(u|Lv) = (u|b) = (L^\dagger u|v) = 0, \quad (2.18)$$

por tanto, dado que esto debe satisfacerse para cualquier $u \in \ker(L^\dagger)$ se tiene la condición de solubilidad [71],

$$b \perp \ker(L^\dagger). \quad (2.19)$$

En el ejemplo, podemos ver que el kernel del operador adjunto L^\dagger está dado por $\{v_K = (0, 1)\}$. Al imponer $(v_K|b) = 0$ bajo el producto interno usual, lleva claramente a exigir $b_2 = 0$. Remarcar que esta propiedad es válida para cualquier producto interno que se quiera definir. Además es válida para operadores lineales de toda clase, no solo matriciales.

Cabe notar que esta versión de la alternativa de Fredholm es una versión *ad-hoc* para los problemas habitualmente tratados en física no lineal. El origen de este teorema está en las matemáticas, y su planteamiento suele ser más abstracto que el aquí presentado.

2.3. Patrones

Una estructura que comúnmente podemos encontrar en sistemas macroscópicos fuera del equilibrio son patrones, esto es, una estructura periódica extendida en el espacio en sistemas macroscópicos fuera del equilibrio [74].

2.3.1. Ecuación Prototipo para Sistemas con Patrones

Para entender la emergencia de patrones, consideraremos un modelo prototipo, accesible matemáticamente, la ecuación de Swift-Hohenberg,

$$\partial_t u = \mu u - u^3 - (\partial_{xx} + k^2)^2 u, \quad (2.20)$$

El parámetro de orden $u(x, t)$ es un campo escalar, x y t son coordenadas espaciales y temporales respectivamente, μ es el parámetro de bifurcación y k un parámetro que controla la longitud de onda del patrón que emerge.

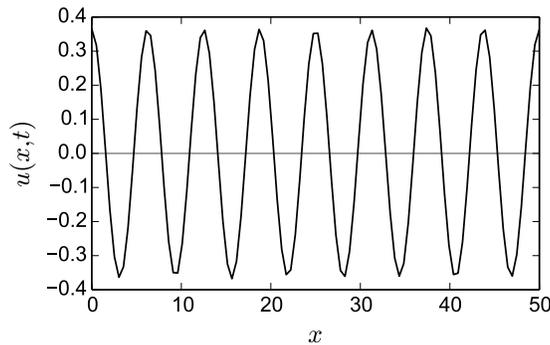


Figura 2.4: Perfil de un patrón de la ecuación de Swift-Hohenberg (2.20) para $\mu = 0,1$.

Uno puede imaginar muchas estructuras periódicas, no obstante, un mecanismo simple y universal de formación de estas estructuras se da por medio de una bifurcación espacial tipo pitchfork de un estado homogéneo. Para entender la emergencia de patrones en este sistema, estudiaremos la dinámica lineal de cada modo de Fourier en torno a $u = 0$ introduciendo el

ansatz (o adivinanza) $u(x, t) = ae^{iqx + \sigma t}$ en la ecuación (2.20). Al orden lineal se obtiene,

$$\sigma(q) = \mu - (q^2 - k^2)^2, \quad (2.21)$$

donde $\sigma(q)$ corresponde a la tasa de crecimiento del modo q . La inestabilidad espacial ocurre cuando σ se vuelve positivo para algún modo q . Derivando σ respecto a q e igualando a cero, encontramos que tiene un máximo para $q_c = k$, siendo este el modo dominante que tiene la tasa de crecimiento mayor $\sigma(q_c) = \mu$, y es también el primero en inestabilizarse cuando $\mu > 0$, y por lo tanto la solución uniforme trivial $u = 0$ sufre una bifurcación espacial y emerge una solución patrón $u_p(x, t)$, con k como número de onda característico, y una amplitud cerca de la bifurcación dada por $a_0 = \sqrt{\mu/3}$, la cual como mostraremos en la siguiente sección, aparece mediante una bifurcación de *pitchfork*.

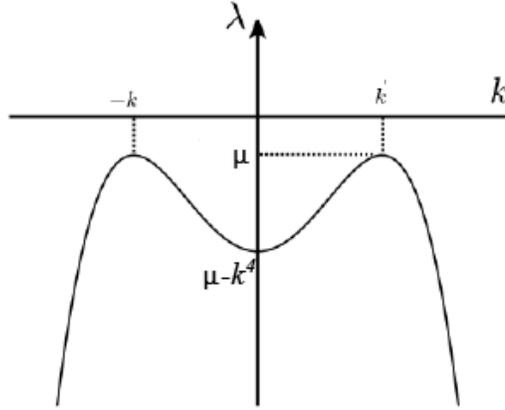


Figura 2.5: Gráfico de la función (2.21) para $\sigma(q)$

2.3.2. Formas Normales con Espacio

Una forma normal es una ecuación que captura la dinámica del modo dominante cerca de una bifurcación [34].

Un caso particular de forma normal son las ecuaciones de amplitud, las cuales corresponden a la forma normal para describir la envolvente de un patrón o una onda, o una oscilación, cerca de la inestabilidad espacial [28].

Consideraremos como ejemplo la forma normal para la formación de patrones en la ecuación de Swift-Hohenberg (2.20). El primer paso para dar con la ecuación de amplitud es encontrar la inestabilidad espacial. En la sección anterior, al exigir $\sigma(q) = 0$ en la ecuación (2.21), mostramos que el modo crítico corresponde al número de onda $q_c = k$, para el parámetro crítico $\mu_c = 0$. Siendo este el modo espacial dominante, tomaremos el *ansatz*,

$$u(x, t) = \frac{A(X, T)}{\sqrt{3}} e^{ikx} + c.c. + w^{[2]}(A, \bar{A}) + w^{[3]}(A, \bar{A}) + \dots \quad (2.22)$$

y con este cambio de variable se busca una ecuación dinámica para la nueva variable

$$\frac{\partial A}{\partial t} = f^{[1]}(A, \bar{A}) + f^{[2]}(A, \bar{A}) + \dots \quad (2.23)$$

donde $w^{[n]}$ y $f^{[n]}$ son proporcionales a monomios de orden n en A y \bar{A} , y *c.c.* hace referencia al complejo conjugado del último término. Simultáneamente construiremos la ecuación (2.23) y el cambio de variable (2.22) orden por orden, hasta llegar al primer término no lineal saturante. Consideraremos de momento que estamos justo en el punto crítico $\mu = 0$ y A es una variable lenta espacialmente, por tanto sus derivadas espaciales son despreciables.

Susituyendo el *ansatz* (2.22) en (2.20) al orden lineal en A y \bar{A} , confirmamos la validez de nuestro *ansatz*, y encontramos trivialmente que $f^{[1]} = 0$. A orden cuadrático se tiene

$$\mathcal{L}w^{[2]} + \frac{1}{\sqrt{3}}\partial_A w^{[2]}f^{[1]} + c.c. = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}f^{[2]}e^{ikx} + c.c.\right), \quad (2.24)$$

donde $\mathcal{L} = (\partial_{xx} + k^2)^2$ es un operador lineal auto-adjunto bajo el producto interno,

$$(f|g) = \frac{k}{2\pi n} \int_x^{x+\frac{2\pi n}{k}} f(x)\bar{g}(x)dx, \quad (2.25)$$

donde n es un número entero. De este modo, $e^{\pm ikx} \in \ker \mathcal{L}^\dagger$. Dado que $f^{[1]} = 0$, al aplicar la condición de solubilidad se tiene trivialmente que $f^{[2]} = 0$. A orden cúbico se tiene

$$\mathcal{L}w^{[3]} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(f^{[3]}e^{ikx} + c.c.) - \frac{1}{3\sqrt{3}}(A^3e^{3ikx} + 3|A|^2Ae^{ikx} + c.c.), \quad (2.26)$$

reordenando,

$$\mathcal{L}w^{[3]} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(f^{[3]} + |A|^2A + c.c.)e^{ikx} - \frac{1}{3\sqrt{3}}(A^3e^{3ikx} + c.c.), \quad (2.27)$$

Imponiendo la condición de solubilidad se tiene

$$f^{[3]} + |A|^2A + c.c. = 0 \quad (2.28)$$

por tanto $f^{[3]} = -|A|^2A$. Por otra parte hemos encontrado el primer término correctivo,

$$w^{[3]}(x) = \frac{1}{192\sqrt{3}k^4}A^3e^{3ikx} + c.c. \quad (2.29)$$

Dado que $f^{[3]}$ es un término saturante, este nos basta para caracterizar la dinámica cerca del punto crítico cuando $A \ll 1$. Si este término tuviera un signo positivo, habría que continuar calculando correcciones, considerando para ordenes mayores los términos producidos por la corrección cúbica.

Unfolding

Ahora podemos considerar el para metro de bifurcación (lo que es llamado *unfolding*). Consideremos $\mu \ll 1$. Dado que el orden de μ es independiente del de A , consideremos correcciones $w^{[n,m]}$ y $f^{[n,m]}$, donde n da cuenta del orden en A y \bar{A} y m el orden en μ . A orden $n = 1$ y $m = 1$ se tiene

$$\mathcal{L}w^{[1,1]} = -(f^{[1,1]} + \mu A + c.c.)e^{ikx} \quad (2.30)$$

Aplicando condición de solubilidad, se tiene $f^{[1,1]} = \mu A$ y $w^{[1,1]} = 0$.

Unfolding Espacial

Ahora promoveremos a $A(t)$ a una variable lenta del espacio $A(x, t)$, donde $\partial_x A \ll 1$. Consideremos correcciones $w^{[n,m,l]}$ y $f^{[n,m,l]}$, donde n da cuenta del orden en A y \bar{A} , m el orden en μ y l el orden en derivadas en x . Al orden $n = 1, m = 0$, y $l = 1$ se tiene,

$$\mathcal{L}w^{[1,0,1]} = - (f^{[1,0,1]} + c.c.) e^{ikx} \quad (2.31)$$

Aplicando condición de solubilidad, $f^{[1,0,1]} = 0$ y $w^{[1,0,1]} = 0$. Al orden $n = 1, m = 0$, y $l = 2$ se tiene,

$$\mathcal{L}w^{[1,0,2]} = - (f^{[1,0,2]} + c.c. - 2k^2 \partial_{xx} A) e^{ikx} \quad (2.32)$$

Aplicando condición de solubilidad, $f^{[1,0,1]} = 2k^2 \partial_{xx} A$ y $w^{[1,0,1]} = 0$

Ecuación de Amplitud

Uniendo a todas las correcciones encontradas hasta el primer orden saturante, el unfolding, y el unfolding espacial tenemos, que la nuevas variables A y \bar{A} se relacionan con la original u mediante

$$u(x, t) = \frac{A(X, T)}{\sqrt{3}} e^{ikx} + c.c. + w^{[2]}(A, \bar{A}) + w^{[3]}(A, \bar{A}) + w^{[1,1]}(A, \bar{A}) \quad (2.33)$$

$$+ w^{[1,0,1]}(A, \bar{A}) + w^{[1,0,2]}(A, \bar{A}) + \mathcal{O}(|A|^4) \quad (2.34)$$

$$= \frac{A(X, T)}{\sqrt{3}} e^{ikx} + c.c. + \frac{1}{192\sqrt{3}k^4} A^3 e^{3ikx} + c.c. + \mathcal{O}(|A|^4), \quad (2.35)$$

De este modo, la ecuación dinámica para envolvente queda dada por una ecuación de Ginzburg-Landau,

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \mu A - |A|^2 A + 2k^2 \partial_{xx} A \quad (2.36)$$

Haciendo el cambio de variable $x = \sqrt{2}kX$ se tiene

$$\frac{\partial A}{\partial T} = \mu A - |A|^2 A + \partial_{XX} A, \quad (2.37)$$

donde las variables y parámetros siguen el escalamiento $A \sim \varepsilon$, $\mu \sim \varepsilon^2$, $\partial_t \sim \varepsilon^2$ y $\partial_X \sim \varepsilon$, con $\varepsilon \ll 1$.

2.4. Frentes

Sistemas macroscópicos fuera del equilibrio usualmente exhiben coexistencia entre diferentes estados —lo que es denominado multiestabilidad [74]. En sistemas extendidos espacialmente, estos estados pueden ser separados por interfases conocidas como frentes o paredes de

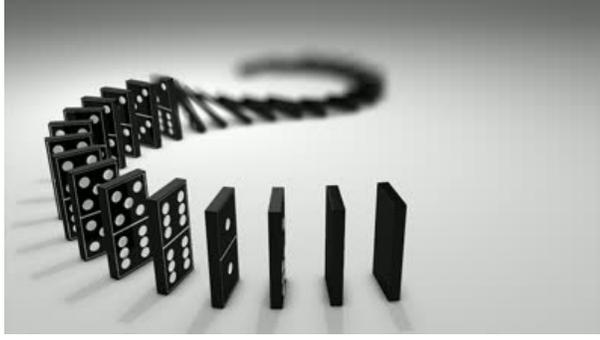


Figura 2.6: Frente propagándose en un sistema extendido de dominos.

dominio [71, 28, 29]. Un ejemplo heurístico es una fila de dominós; en este caso, reconocemos dos estados, el dominó vertical y el caído; si están lo suficientemente juntos, el empujar a uno inducirá un frente que se propagará haciendo que se extienda el estado caído.

Sistemas con simetrías de reflexión discretas pueden tener dos estados equivalentes, las cuales son conectadas por paredes de dominio que permanecen genéricamente en reposo. Estaremos particularmente interesados en este trabajo en este tipo de frentes, los cuales son llamados *kinks*. La posición de los *kinks* al no poseer muchas veces una dinámica determinista, al ser ambos estados conectados simétricos, representa un caso interesante para analizar los efectos del ruido. No obstante, la consideración de términos no variacionales posibilita un rompimiento espontáneo de simetría, situación en la cual estos frentes adquieren una velocidad no nula. Este fenómeno es llamado transición no variacional de Ising-Bloch [26].

2.4.1. Frentes Monótonos

El modelo más simple para describir un sistema biestable es la ecuación de Ginzburg-Landau real supercrítica [43],

$$\partial_t u = \mu u - u^3 + \partial_{xx} u, \quad (2.38)$$

La variable escalar $u(x, t)$ corresponde a un parámetro de orden y $\{x, t\}$ a las coordenadas espaciales y temporales respectivamente, μ es un parámetro de control y el último término corresponde a un término difusivo que da cuenta del acople entre diferentes estados locales. Según el contexto físico en que esta ecuación sea deducida, el parámetro $u(x, t)$ puede corresponder a la magnetización, campo eléctrico, orientación molecular promedio, concentración química, por mencionar algunos. Para valores de μ negativos, el sistema exhibe un único equilibrio estable en $u = 0$. Para valores positivos de μ , este estado se inestabiliza y emergen dos estados homogéneos estables para $u = \pm\sqrt{\mu}$. Podemos esperar que a partir de condiciones iniciales arbitrarias emerjan soluciones que conecten los dos estados. Este modelo es del tipo variacional, y puede ser escrito cómo,

$$\partial_t u = -\frac{\delta \mathcal{F}[u]}{\delta u}, \quad (2.39)$$

con su correspondiente función de Lyapunov.

$$\mathcal{F}[u] = \int \left(\frac{1}{2} (\partial_x u)^2 - \frac{\mu}{2} u^2 + \frac{1}{4} u^4 \right) dx. \quad (2.40)$$

Para el caso de una pared de dominio (pared de Ising o solución kink) la solución tiene una expresión analítica dada por,

$$u_k^\pm(x; \Delta) = \pm\sqrt{\mu} \tanh \left[\sqrt{\frac{\mu}{2}}(x - \Delta) \right], \quad (2.41)$$

donde Δ da cuenta de la posición de la interfaz entre los dos estados, y tenemos que $u_k^\pm(x = \Delta) = 0$ y el ancho característico de la interfaz está dado por $l = \sqrt{2/\mu}$. El signo positivo y negativo describen una solución kink y anti-kink respectivamente. La figura 2.7 ilustra una solución tipo kink, su posición y la interfaz, respectivamente.

Al ser ambos estados simétricos (y con la misma energía), la solución la ser trasladada sigue siendo solución. De este modo Δ parametriza una familia infinita no numerable de soluciones del sistema estacionario de la ecuación (2.38). Otra forma de decirlo, es que se trata del autovalor del modo de Goldstone $\partial_x u_k^\pm(x; \Delta)$ del operador lineal asociado a la ecuación (2.38).

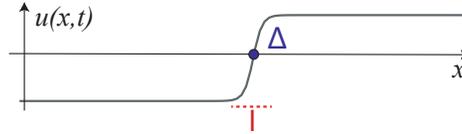


Figura 2.7: Frente entre dos estados simétricos, kink, dado por la expresión (2.41). $\{\Delta, l\}$ da cuenta de la posición de la interfaz del kink .

2.4.2. Frentes no Monótonos

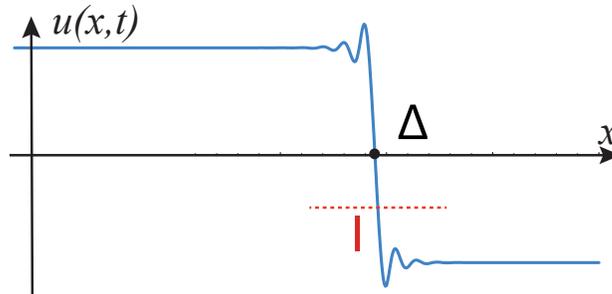


Figura 2.8: Frente entre dos estados simétricos conectados mediante una interfaz con oscilaciones amortiguadas, kink no monótono, $\{\Delta, l\}$ da cuenta de la posición de la interfaz del kink.

Una de las principales características de los frentes entre dos estados simétricos de la ecuación real de Ginzburg-Landau, modelo (2.38), es que sus kinks son monótonos, creciendo

o decreciendo espacialmente (ver Fig. 2.7). Muchos sistemas físicos biestables con estados simétricos uniformes exhiben interfaces con oscilaciones espaciales amortiguadas *soluciones kink no monótonos*. Ejemplos de esos frentes son observados en capas delgadas cuasi unidimensionales de materia granular fluidizadas sometidas a un flujo periódico de aire [58, 59], modelos de dinámica de poblaciones [18], sistemas depredador-presa [64, 32], cadenas de péndulos forzados paramétricamente [15], por mencionar unos pocos. Figura 2.8 muestra un típico perfil de un kink no monótono.

Anteriormente presentamos a el modelo de Swift-Hohenberg como una ecuación prototipo de la formación de patrones en 2.3.1. Por otra parte, esta ecuación es también el modelo más simple con kinks no monótonos. Mientras la bifurcación espacial ocurre para $\mu > 0$,

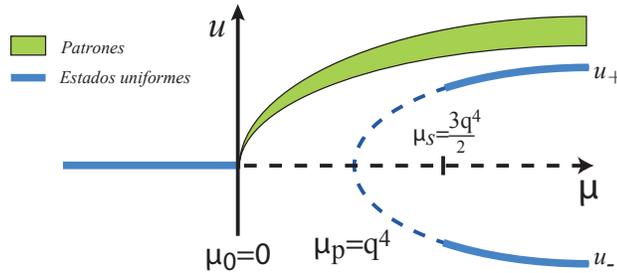


Figura 2.9: Diagrama de bifurcación de la ecuación de Swift-Hohenberg (2.20), donde el área oscurecida da cuenta de la amplitud de los patrones. La línea continua y segmentada dan cuenta de estados uniformes estables e inestables respectivamente. $\{\mu_0, \mu_p\}$ corresponden a las bifurcaciones espaciales y el área en verde corresponde a la inestabilidad espacial del estado $u = 0$.

Como ya vimos, para $\mu < 0$, el sistema solo presenta como solución un estado uniforme $u = 0$, y la emergencia de patrones para $\mu > 0$. Si uno continúa incrementando el valor del parámetro μ , encontramos que para $\mu > q^4$ ocurre una bifurcación secundaria de pitchfork desde el estado $u = 0$ que genera un nuevo estado uniforme e inestable $u_{\pm} = \pm\sqrt{\mu - q^4}$ (ver figura 2.9). Esos estados se vuelven estables al seguir incrementando el valor del parámetro de bifurcación para $\mu \equiv \mu_s = 3q^4/2$ [47]. De este modo, para un valor del parámetro de bifurcación más grande que μ_s , uno espera observar kinks entre estados uniformes, pero en este caso, la pared exhibe oscilaciones amortiguadas. La figura 4.5 muestra un kink típico observado en este modelo.

2.4.3. Paredes de Ising y de Bloch

Para conectar estados simétricos podemos considerar dos maneras. Anteriormente vimos ejemplos en que estos estados son conectados mediante un pared donde el módulo del campo pasa por cero para pasar desde el estado u_+ al estado u_- o viceversa. En este caso, los frentes son llamados paredes de Ising, y no tienen dinámica permanente en el caso variacional. Otra forma es considerar un campo complejo, y conectar los estados sin que el módulo se anule, sino, cambie la proyección sobre las componentes. Estas frentes son llamados paredes de Bloch [26]. En el caso de sistemas no variacionales, se puede esperar una dinámica permanente para este tipo de paredes.

Sistemas con paredes de dominio pueden exhibir transiciones de paredes de Ising en que

se transforman en paredes de Bloch, transición de Ising-Bloch, relacionado con un quiebre espontáneo de simetría [26], dando lugar a interfaces quirales.

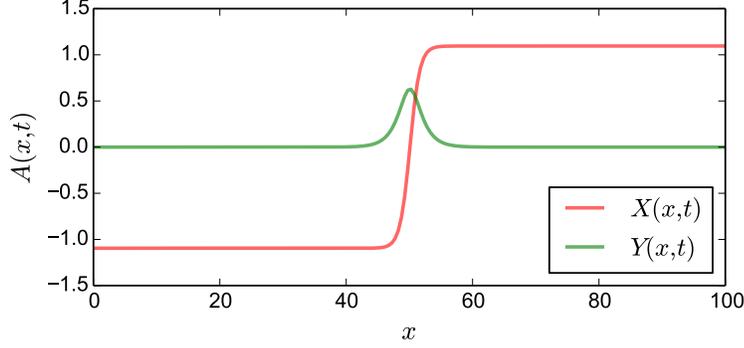


Figura 2.10: Perfil de una pared de Bloch con quiralidad positiva, donde X da cuenta de la componente real, e Y de la imaginaria, para la ecuación (2.42) con los parámetros $\mu = 1, \nu = \alpha = \beta = 0$, y $\gamma = 0,2$.

Consideremos la siguiente ecuación de Ginzburg-Landau compleja,

$$\frac{\partial A}{\partial t} = (\mu + i\nu)A + (1 + i\alpha)\partial_{xx}A - (1 + i\beta)|A|^2A + \gamma\bar{A}, \quad (2.42)$$

donde μ mide la distancia de la inestabilidad de Andronov-Hopf, ν es el parámetro de *detuning* o sintonización y γ es el forzamiento. Cuando los parámetros ν , α y β son despreciables, la ecuación (2.42) toma forma variacional,

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\bar{A}}, \quad (2.43)$$

donde

$$\mathcal{F} = \int \mu(X^2 + Y^2) + |\partial_x X|^2 + |\partial_x Y|^2 + \frac{1}{2}(X^2 + Y^2)^2 - \gamma(X^2 - Y^2), \quad (2.44)$$

y $A = X + iY$. El sistema variacional tiene como solución paredes de Ising,

$$X_I(x) = \pm\sqrt{\mu + \gamma} \tanh\left(\sqrt{\frac{\mu + \gamma}{2}}x\right), \quad (2.45)$$

$$Y_I(x) = 0, \quad (2.46)$$

y también paredes de Bloch

$$X_B(x) = \pm\sqrt{\mu + \gamma} \tanh\left(\sqrt{2\gamma}x\right), \quad (2.47)$$

$$Y_B(x) = \pm\sqrt{\mu - 3\gamma} \operatorname{sech}\left(\sqrt{2\gamma}x\right). \quad (2.48)$$

La pared de Ising existe cuando $\gamma > \gamma_c = \mu/3$, y la pared de Bloch cuando $\gamma < \gamma_c$. En el caso de paredes de Bloch, encontramos dos tipos de paredes según la dirección en que el campo rote. Definiremos como quiralidad al valor extremo de Y $\chi = Y(0) = \pm\sqrt{\mu - 3\gamma}$. Este parámetro de orden obedece la siguiente ecuación.

$$(\mu - 3\gamma)\chi - \chi^3 = 0 \quad (2.49)$$

que se comporta como $\sqrt{\gamma_c - \gamma}$ sobre el punto crítico.

Podemos entender perturbativamente el efecto de los términos no variacionales, considerando soluciones de la forma $A = A_0(x - \Delta(t)) + w(A, \bar{A})$ donde $A_0 = X_I + iY_I$ bajo la bifurcación y $A_0 = X_B + iY_B$ sobre la bifurcación, y w corresponde a una corrección pequeña. Reemplazando en *ansatz* y aplicando condición de solubilidad se llega a la siguiente ecuación dinámica para Δ ,

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = \chi \sqrt{\frac{\mu + \gamma}{2\gamma}} \frac{3\pi}{2(3\mu - \gamma)} [-\nu + \beta\mu + (\alpha - \beta)\gamma] \quad (2.50)$$

La velocidad solo está definida en el caso de paredes de Bloch, y su signo depende del signo de la quiralidad, por lo que en un mismo sistema, encontraremos tanto paredes propagándose hacia la derecha como a la izquierda, según la asimetría de la condición inicial.

2.5. Ruido y Procesos Estocásticos

La descripción de sistemas macroscópicos fuera del equilibrio, cómo se mencionó anteriormente, se realiza usualmente mediante un pequeño número de variable en una aproximación de grano grueso (*Coarse-grained*), determinadas por el efecto colectivo de sus constituyentes, y su dinámica puede ser modelada por ecuaciones diferenciales. No obstante, estas variables macroscópicas corresponden a *variables lentas*, las cuales son obtenidas por medio de la eliminación adiabática de un enorme número de variables rápidas, y por tanto son intrínsecamente fluctuantes. En la medida que el número de constituyentes aumenta, las fluctuaciones disminuyen, y pueden ser despreciadas sin que eso perjudique el correcto modelamiento del sistema. Sin embargo, en muchos sistemas las fluctuaciones son un elemento claramente identificable en la dinámica, y en tal caso, resulta apropiado el uso de ecuaciones diferenciales estocásticas, donde se considera, además de términos deterministas, términos cuyo valor en cada instante de tiempo es aleatorio, y del cual sólo conocemos sus propiedades estadísticas. Una ecuación diferencial estocástica de una variable tiene la forma,

$$\frac{dy}{dt} = f(y) + g(y)\chi(t), \quad (2.51)$$

donde $f(y)$ corresponde a una fuerza determinista, $g(y)$ da cuenta de la intensidad de la fluctuaciones y $\chi(t)$ es una función fluctuante de promedio nulo, y correlación $\langle \chi(t), \chi(t') \rangle = C(t-t')$. Un ejemplo de función de correlación está caracterizado por un tiempo de correlación τ pequeño pero no nulo $C(t) = \exp\left(-\frac{|t|}{\tau}\right)$. Esto significa que los valores esperados de $\chi(t)$ en un instante tienen relación con momentos anteriores y posteriores, pero que rápidamente se vuelven casi independiente para tiempos $t > \tau$. Sin embargo, una correlación de este tipo resulta difícil de tratar teóricamente, por lo que resulta más conveniente tomar el límite $\tau \rightarrow 0$, el cual guarda realismo físico para una enorme cantidad de sistemas, debido a que las fluctuaciones ocurren en una escala microscópica mucho más rápida que la macroscópica,

llegando así al límite de ruido blanco. En general consideraremos ecuaciones diferenciales estocásticas de la forma,

$$\frac{dy}{dt} = f(y) + g(y)\zeta(t), \quad (2.52)$$

donde $\zeta(t)$ corresponde a un ruido blanco, i.e. delta-correlacionado $\langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = \delta(t - t')$ (el valor de ζ en un instante de tiempo t no tiene ninguna relación con el valor en un instante t' si $t \neq t'$), y promedio nulo $\langle \zeta(t) \rangle = 0$. Este ruido es llamado blanco dado que todas las frecuencias se manifiestan con la misma intensidad en promedio (al tomar la transformada de Fourier de la función de auto-correlación, se obtiene una constante) [44]. A diferencia del caso anterior, que es un ejemplo de ruido coloreado. Durante toda esta tesis se mantendrá la definición de $\zeta(t)$.

Para sistemas donde se considere además la inhomogeneidad de las variables dinámicas, estas satisfacen ecuaciones diferenciales estocásticas en derivadas parciales,

$$\frac{du}{dt} = F(u(x, t), \partial_x u, \partial_{xx} u, \dots) + G(u(x, t), \partial_x u, \partial_{xx} u, \dots)\zeta(x, t), \quad (2.53)$$

donde $\zeta(x, t)$ se modela como un ruido blanco, i.e. delta-correlacionado tanto temporal como espacialmente $\langle \zeta(x, t)\zeta(x', t') \rangle = \delta(t - t')\delta(x - x')$. También esta definición será conservada durante toda la tesis.

2.5.1. Movimiento Browniano

El estudio riguroso de los procesos estocásticos se dio tarde en el siglo XIX con el fin de entender el comportamiento de los mercados y el movimiento Browniano. Robert Brown, biólogo y botánico, descubrió en 1827 como partículas de polen disueltas en agua se desplazaban siguiendo trayectorias aleatorias sin razón aparente. Si bien en primera instancia Brown consideró que el movimiento se debía que las partículas de polen estaban vivas, ya antes el mismo fenómeno fue reportado en 1785 por Jan Ingenhousz sobre partículas de carbón en alcohol. Más tarde, fue el mismo Brown quién al repetir el experimento con partículas de polvo concluyó que la razón del movimiento no radicaba en que se tratara de partículas vivas.

Fue recién en 1905 cuando Einstein entregó una explicación física al fenómeno, tomando como hipótesis la existencia de átomos —algo sobre lo que en aquellos días aún no había consenso: Las partículas son golpeadas constantemente por otras partículas más pequeñas que se mueven debido a la energía térmica del medio. No obstante, la fuerza ejercida por los átomos no es uniforme, y la presión ejercida sobre los lados puede variar ligeramente en el tiempo, empujando a la partícula de forma azarosa como se observa en los experimento. Cabe mencionar que antes de Einstein, el matemático Louis Bachelier había ya estudiado el movimiento Browniano en 1900.

El modelo más simple de movimiento Browniano es el proceso de Wiener,

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\eta}\zeta(t) \quad (2.54)$$

donde η da cuenta de la intensidad de las fluctuaciones. Un conjunto de partículas sometidas a este tipo de fuerzas tendrá un comportamiento difusivo.

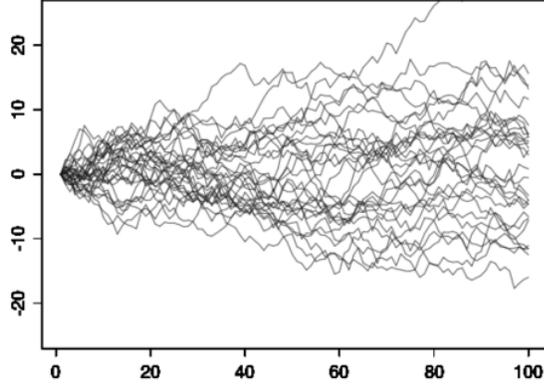


Figura 2.11: Trayectorias estocásticas para la ecuación (2.54).

2.5.2. Ecuación de Langevin

Esta ecuación diferencial estocástica describe el movimiento Browniano de una partícula en un potencial. Su forma general es,

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (2.55)$$

$$m \frac{dv}{dt} = f(x) - \gamma v + \sqrt{\eta} \zeta(t), \quad (2.56)$$

Donde $f(x)$ es una fuerza, γ el coeficiente de roce viscoso, m la masa de la partícula. De tratarse de un sistema físico en equilibrio, podemos identificar la intensidad del ruido η con la temperatura física del medio (teorema de fluctuación disipación [78]),

$$\eta = 2\gamma k_B T, \quad (2.57)$$

Donde k_B es la constante de Boltzmann. En esta tesis, encontraremos en ecuaciones de Langevin en el límite de alta disipación,

$$\frac{dy}{dt} = f(y) + \sqrt{\eta} \zeta(t). \quad (2.58)$$

Proceso de Orstein-Ulhenbeck

Un caso particular de la ecuación de Langevin es el proceso de Orstein-Ulhenbeck

$$\frac{dy}{dt} = -ky + \sqrt{\eta} \zeta(t), \quad (2.59)$$

donde $k > 0$. Esta ecuación tiene correlación,

$$\langle y(t), y(t') \rangle = \exp\left(-\frac{|t - t'|}{\tau}\right), \quad (2.60)$$

donde $\tau = \eta/k$ es el tiempo característico de correlación.

Cerca de una inestabilidad lineal, se tiene que el coeficiente lineal tiende a cero. Si se aproximara la dinámica por una ecuación tipo Orstein-Uhlenbeck, cerca de la inestabilidad, se tiene $k \rightarrow 0$, por tanto $\tau \rightarrow \infty$. Un estudio interesante al respecto de la dinámica estocástica en torno a la inestabilidad se puede encontrar en la referencia [81].

2.5.3. Ruido Multiplicativo: Itô y Stratonovich

Los análisis realizados en el presente trabajo se basan principalmente en la consideración de términos de ruido aditivo, esto es, cuya intensidad es independiente del valor de las variables dinámicas del sistema (el caso $g = cte$ para la ecuación (2.52)). El ruido térmico habitualmente actúa como un ruido de este tipo. En tal caso, las ecuaciones diferenciales estocásticas quedan bien definidas.

Por otra parte, si consideremos un ruido multiplicativo, esto es, un ruido cuya intensidad cambia con las variables del sistema, debemos hacer una serie de nuevas consideraciones. Tomemos una ecuación diferencial estocástica con ruido multiplicativo como (2.52). Esta puede ser reescrita de una forma más rigurosa como,

$$dy = f(y)dt + g(y)dW, \quad (2.61)$$

donde $W(t) = \int_0^t \zeta(t')dt'$ es un proceso de Wiener. Aún escrita la ecuación de este modo no tiene sentido matemático si $g(y)$ no es constante. Cada pulso de $\zeta(t)$ da lugar a un pulso en dy/dt y esto a un salto en y . pero para calcular el valor de este salto, es necesario saber cuanto vale y para ser usado en la función $g(y)$. Luego, necesitamos definir cómo se realizará la integración. Existen dos principales maneras de definirla, según Itô y según Stratonovich, la primera, principalmente usada en matemáticas y finanzas, y la segunda utilizada habitualmente en física [85].

La convención de Ito da significado a la ecuación (2.52) definiendo que el valor de y para ser usado en $g(y)$ es su valor justo antes del salto. De esta forma se satisface $\langle g(y(t))\zeta(t) \rangle = 0$. En esta convención, la dinámica promedio coincide con la dinámica determinista.

$$\frac{d}{dt} \langle y \rangle = \langle f(y) \rangle. \quad (2.62)$$

Por otra parte, **la convención de Stratonovich** considera el promedio de los valores de y antes y después del salto para ser sustituido en $g(y)$. Este ligero cambio tiene importantes consecuencias en la dinámica de la ecuación diferencial estocástica. Ahora, el ruido es capaz de inducir fuerzas efectivas,

$$\langle g(y(t))\zeta(t) \rangle = \frac{1}{2} \left\langle g(y) \frac{dg}{dy} \right\rangle, \quad (2.63)$$

En este caso, aparece una fuerza efectiva al evaluar la evolución temporal de la variable promedio,

$$\frac{d}{dt} \langle y \rangle = \langle f(y) \rangle + \frac{1}{2} \left\langle g(y) \frac{dg}{dy} \right\rangle, \quad (2.64)$$

Se pueden definir otras convenciones, sin embargo estas son las más usadas. Ahora toca preguntarse ¿Cuál es la más apropiada para usar en sistemas físicos? Para responder esto consideremos una ecuación diferencial estocástica con un ruido coloreado cómo en la ecuación (2.51), pero de auto-correlación simétrica,

$$\frac{dy}{dt} = f(y) + g(y)\chi(t). \quad (2.65)$$

Esta ecuación está bien definida sin necesidad de definir ninguna convención. Si tomamos el límite $\tau \rightarrow 0$, llegaríamos a la convención de Stratonovich. Esta es la razón por la que esta convención tiene más realismo físico. Mientras, físicamente, la convención de Itô significa que entre salto y salto no hubieron fluctuaciones, la de Stratonovich aproxima el caso en que el sistema permanece fluctuando a toda escala temporal.

Un análisis más completo donde se comparan estas dos convenciones puede encontrarse en [85].

2.5.4. Ecuación de Fokker-Planck

La ecuación de Fokker-Planck es una ecuación central en la teoría de procesos estocásticos que describe la evolución temporal de la distribución de probabilidad condicional de un proceso donde existan términos fluctuantes y fuerzas deterministas [78].

Considerando una ecuación diferencial estocástica (2.52), la ecuación de Fokker-Planck asociada será bajo la convención de Stratonovich [78, 84],

$$\frac{\partial}{\partial t} P(y, t|y_0, t_0) = -\frac{\partial}{\partial y} [f(y)P(y, t|y_0, t_0)] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[g(y) \frac{\partial}{\partial y} g(y) P(y, t|y_0, t_0) \right], \quad (2.66)$$

donde $P(y, t|y_0, t_0)$ es la probabilidad condicional de encontrar a la variable en el valor y en el instante t si en el instante t_0 estaba en el valor y_0 . En caso de ruido aditivo se tiene simplemente,

$$\frac{\partial}{\partial t} P(y, t|y_0, t_0) = -\frac{\partial}{\partial y} (f(y)P(y, t|y_0, t_0)) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} P(y, t|y_0, t_0). \quad (2.67)$$

Por otra parte, al considerar una ecuación estocástica de varias variables $\dot{y}_i = f_i(\mathbf{y}) + g_i(\mathbf{y})\zeta_i(t)$ la ecuación de Fokker-Planck queda,

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{y}, t|\mathbf{y}_0, t_0) = -\sum_i \frac{\partial}{\partial y_i} [f_i(\mathbf{y})P(\mathbf{y}, t|\mathbf{y}_0, t_0)] \quad (2.68)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_i \sum_k \frac{\partial}{\partial y_i} \left[g_{ik}(y) \sum_j \frac{\partial}{\partial y_j} g_{jk}(\mathbf{y}) P(\mathbf{y}, t|\mathbf{y}_0, t_0) \right]. \quad (2.69)$$

Es posible reescribir la ecuación (2.67) como una ecuación de continuidad

$$\partial_t P(y, t|y_0, t_0) + \partial_y J = 0, \quad (2.70)$$

donde J corresponde al flujo de probabilidad

$$J = f(y)P(y, t|y_0, t_0) - \frac{\eta}{2} \partial_y P(y, t|y_0, t_0). \quad (2.71)$$

La probabilidad estacionaria es encontrada al imponer flujo nulo en todo el sistema, de este modo se deduce que

$$P_0(y) = N_0 \exp \left[\frac{2}{\eta} \int f(y) dy \right], \quad (2.72)$$

donde N_0 es una constante de normalización. Si se trata de una dinámica variacional y $f(y)$ corresponde a la derivada de un potencial U ,

$$f(y) = -\frac{dU}{dy}, \quad (2.73)$$

se tiene que la probabilidad estacionaria está dada por,

$$P_{var}(y) = N_0 \exp \left[-\frac{2}{\eta} U(y) \right] \quad (2.74)$$

En este caso uno tiene una distribución tipo Gibbs. En el caso de estudiar sistemas con bordes absorbentes, esto es, condiciones de borde fijadas a cero, la probabilidad condicional no se conservará, y será llamada probabilidad de supervivencia.

Proceso de Wiener

Como ejemplo sencillo, se puede deducir la ecuación de Fokker-Planck para el proceso de Wiener (2.54), que coincide con una ecuación de difusión simple,

$$\partial_t P_W(x, t|x_0, t_0) = \frac{\eta}{2} \partial_{yy} P_W(x, t|x_0, t_0) \quad (2.75)$$

Se puede demostrar que dado que una partícula en un instante t_0 se encuentre en x_0 , la distribución de probabilidad de encontrarla en una posición x en un instante t está dada por la expresión,

$$P(x, t|x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta(t-t_0)}} \exp \left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\eta(t-t_0)} \right) \quad (2.76)$$

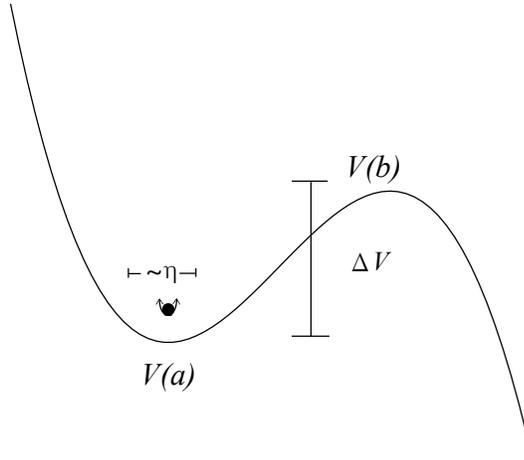


Figura 2.12: Diagrama de una cuenca de atracción, indicando las magnitudes importantes en el cálculo de tiempos de escape y tasa de Kramers.

2.5.5. Tasa de Kramers

Consideremos un potencial como el mostrado en la figura 2.12. La tasa en que un conjunto de partículas inicialmente en la tina de atracción salga de esta, está dada por el alto de la barrera [48, 84].

$$r_K = \frac{|U''(a)U''(b)|}{2\pi\gamma} \exp\left(-\frac{U(b) - U(a)}{\eta}\right) \quad (2.77)$$

Aproximación válida en el límite de nivel de ruido de baja intensidad.

2.6. Fenómenos Robustos del Ruido

El ruido puede, más allá de producir fluctuaciones en torno a la dinámica esperada determinísticamente, inducir dinámica novedosa, y que se presenta en diversos contextos.

2.6.1. Ejemplos Ilustrativos

Ejemplos de fenómenos inducidos por ruido lo constituyen por ejemplo las resonancias estocásticas [38]. Consideremos un potencial biestable forzado débilmente de forma periódica.

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dU}{dx} + A_0 \cos(\Omega t) + \sqrt{\eta}\zeta(t), \quad (2.78)$$

donde $U(x) = (x^2 - a)x^2$ tiene equilibrios estables en $x_{\pm} = \pm a$. Para optimizar el efecto del forzamiento, tal que en la señal $x(t)$ su componente en la frecuencia Ω sea dominante, se

puede demostrar existe un ruido óptimo dado por la relación,

$$\frac{2}{r_K} = T_\Omega, \quad (2.79)$$

donde r_K es la tasa de Kramers en equilibrio y T_Ω el periodo del forzamiento.

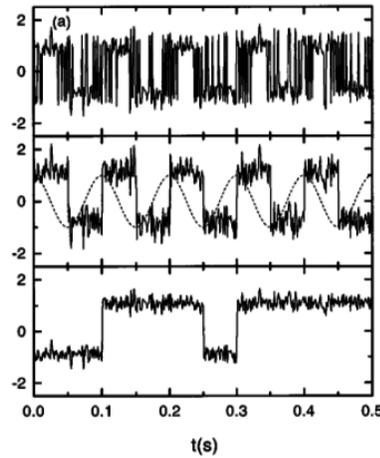


Figura 2.13: Trayectorias estocástica para la ecuación (2.78), para diferentes intensidades del ruido. Se observa claramente como la máxima coherencia aparece para un nivel de ruido intermedio (Imagen obtenida de la referencia [38]).

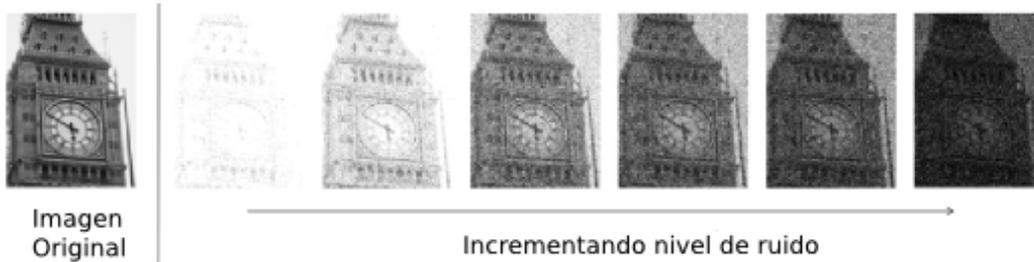


Figura 2.14: Ejemplo ilustrativo de otro tipo de resonancia estocástica. Una imagen es mejorada mediante la adición de un nivel adecuado de ruido (Imagen obtenida de la referencia [43]).

Otro fenómeno es que en el caso de frentes entre estados asimétricos, con transición *pinning-depinning*. Consideremos un frente conectando un estado patrón con uno homogéneo. En este caso, pese a que un estado es energéticamente más favorable que el otro, para cierto parámetros, un frente entre estos estados no se moverá, debido a que siente un potencial periodo efectivo para la interfaz de la forma $U(x) = a \cos(kx) - b$. Con ruido, el frente se propagara en promedio con una velocidad no nula [18].

Finalmente, el ruido también puede inducir caos [40, 39, 88], afectar la velocidad de propagación de frentes o inducir transiciones [43, 49, 13, 14], o inducir ondas viajeras [91] entre otros fenómenos descritos.

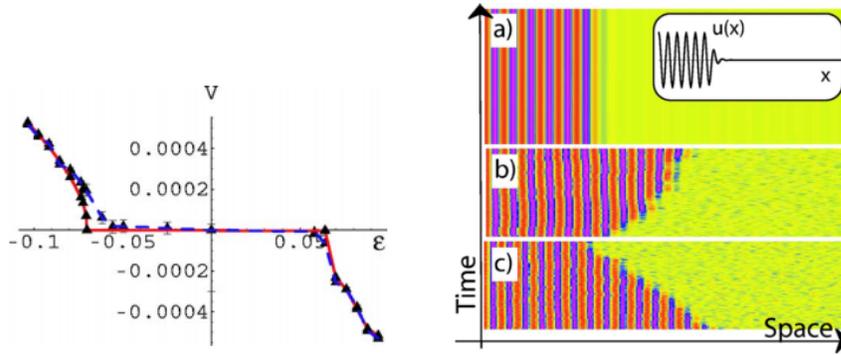


Figura 2.15: (Izquierda) Un frente entre un estado patrón y uno homogéneo se propaga por efecto del ruido hacia la dirección del estado más estable (derecha) Velocidad promedio para un frente entre un estado patrón y un estado homogéneo. El parámetro de bifurcación ϵ controla la diferencia de energía entre los estados. La línea roja y los triángulos corresponden al caso determinista, la línea azul y las cruces, el caso estocástico. Imágenes obtenidas de la referencia [18]

2.6.2. Precursores de Patrón

Otro caso interesante son los precursores de patrón. Consideremos el análisis de estabilidad lineal para los diferentes modos de la ecuación de Swift-Hohenberg (2.21). Consideremos el caso $\mu < 0$. La teoría lineal nos dice que mientras $\sigma(q)$ sea negativo para todo modo q , la perturbación decrece asintóticamente. Si además consideramos un término de ruido aditivo Gaussiano en la ecuación de Swift-Hohenberg,

$$\partial_t u = \mu u - u^3 - (\partial_{xx} + k^2)^2 u + \sqrt{\eta} \zeta(x, t). \quad (2.80)$$

Llamaremos a esta ecuación modelo de estocástico de Swift-Hohenberg. El escenario anterior cambia, debido a que aún para $\mu < 0$ el sistema es linealmente estable para todos los modos, debido a que la tasa de crecimiento tiene un máximo global para un número de onda $k \neq 0$, mientras el término de ruido Gaussiano excita todos los modos en promedio con la misma intensidad, dando como resultado que los modos más lentos se manifiesten más claramente.

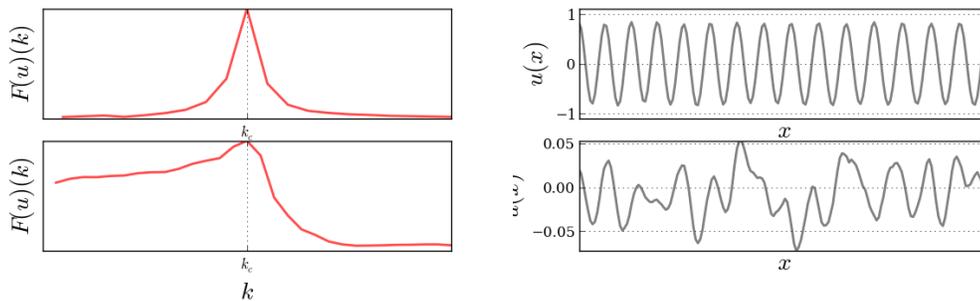


Figura 2.16: Comparación de un patrón ($\mu = 0,2$, arriba) y un precursor ($\mu = -0,1$, abajo) para la ecuación (2.80) con $\eta = 0,0018$. A la izquierda, se observa el perfil de estas soluciones, y a la derecha la transformada de Fourier del perfil. Se observa como aún bajo la bifurcación existe una longitud de onda privilegiada.

De este modo, el ruido anticipa la bifurcación, suavizando la transición observada anteriormente en la figura (2.9). En la figura (2.17) se observa el diagrama de bifurcación para el modelo de Swift-Hohenberg en presencia de ruido.

Para describir teóricamente la estadística de la amplitud del patrón, consideraremos la ecuación de amplitud (2.37) asociada a la ecuación de Swift-Hohenberg, que con el término estocástico queda,

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \mu A - |A|^2 A + \partial_{XX} A + \sqrt{\eta'} \zeta(X, T), \quad (2.81)$$

donde $\eta' = \eta k / 2\pi$, y $\zeta(X, T)$ corresponde a un ruido complejo $\zeta(X, T) = \zeta_r(X, T) + i\zeta_i(X, T)$ con promedio nulo y correlación delta $\langle \zeta_j(X, T), \zeta_{j'}(X', T') \rangle = \delta_{jj'} \delta(X - X') \delta(T - T')$ [3].

Se puede demostrar que la distribución de probabilidad para la magnitud de la amplitud $|A|$ está dada por la distribución,

$$P_s(A, \bar{A}) = Q_{sup}(\mu, \eta') |A| \exp\left(\frac{\mu |A|^2 - \frac{|A|^4}{2}}{\eta'}\right) \quad (2.82)$$

Donde $Q_{sup}(\mu, \eta')$ es una constante de normalización dada por,

$$Q_{sup}(\mu, \eta') = \sqrt{\frac{8}{\pi \eta'}} \frac{\exp -\frac{\mu^2}{2\eta'}}{1 - \operatorname{erf} \frac{\mu}{\sqrt{2\eta'}}} \quad (2.83)$$

El valor de expectación $|a_{max}|$, que describe la curva de la imagen (2.17) está dado por la expresión,

$$|a_{max}| = \sqrt{\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\eta'}}{2}}, \quad (2.84)$$

Estos últimos cálculos se pueden encontrar más detalladamente en la referencia [3].

2.7. Transformada de Hilbert

La transformada de Hilbert es una herramienta útil en el análisis de señales. En particular, nos permite construir la señal analítica, y de allí, obtener la envolvente y la fase.

La señal analítica se construye filtrando en Fourier las frecuencias negativas. Dada una señal $u(x)$ con transformada de Fourier $U(k)$, la señal analítica corresponde a

$$u_a(x) = 2F^{-1} \{U(k)\Theta(k)\} (x) \quad (2.85)$$

$$= F^{-1} \{U(k) + \operatorname{sgn}(k)U(k)\} (x) \quad (2.86)$$

$$= F^{-1} \{U(k)\} (x) + F^{-1} \{\operatorname{sgn}(k)U(k)\} (x) \quad (2.87)$$

$$= u(x) + F^{-1} \{\operatorname{sgn}(k)\} * u(x) \quad (2.88)$$

Donde $\Theta(k)$ es la función escalón de Heaviside. La transformada inversa de Fourier de la función $\operatorname{sgn}(k)$ es $1/\pi x$, se define la transformada de Hilbert de una señal $u(x)$ como [11],

$$H \{u\} (x) = \left(u(x) * \frac{1}{\pi x}\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{u(y)}{x - y}, \quad (2.89)$$

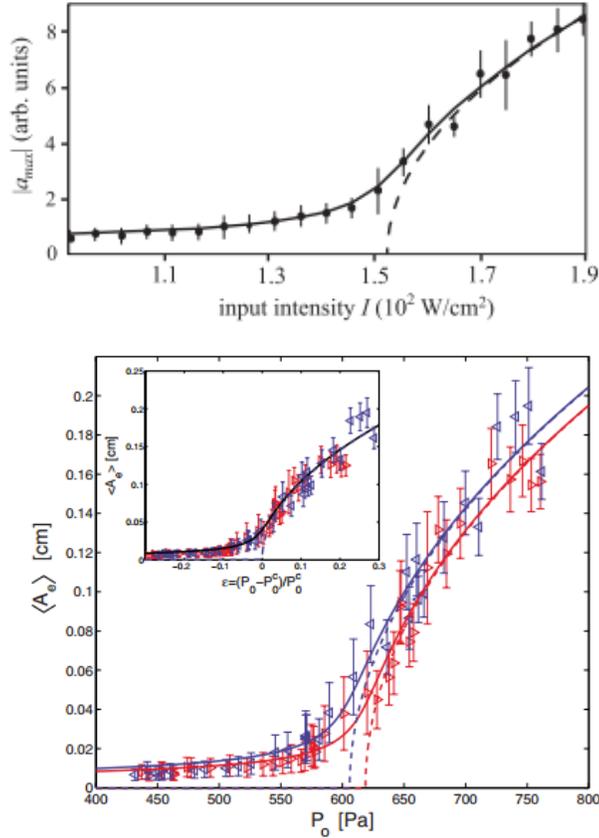


Figura 2.17: Diagrama de bifurcación para patrones en dos sistemas experimentales distintos: (arriba) amplitud de un patrón versus intensidad de la luz en un sistema óptico con retro-inyección (ver detalles en referencia [3]); (abajo) amplitud de un patrón versus la amplitud presión del forzamiento paramétrico en un medio granular fluidizado (ver detalles en referencia [67]). Ambos sistemas presentan intrínsecamente un elevado nivel de ruido.

La señal analítica corresponde a ,

$$u_a(x) = u(x) + iH \{u\} (x), \quad (2.90)$$

La transformada de Hilbert impone un desfase en $\pi/2$ en el espacio complejo, lo que crea una nueva señal ortogonal en el espacio. En el caso de señales armónicas, el módulo $R(x)$ y la fase $\phi(x)$ están dadas por,

$$R(x) = \sqrt{u^2(x) + H \{u\}^2(x)} \quad (2.91)$$

$$\phi(x) = \arctan \left(\frac{H \{u\} (x)}{u(x)} \right) \quad (2.92)$$

En caso de que la señal no sea armónica, se puede definir una transformación que produzca una función analítica más apropiada, filtrando en torno al número de onda k_c que se quiera caracterizar,

$$T_{mod}\{u\}(x) = 2F^{-1} \{U(k)\Theta_{mod}(k; k_1, k_2)\} (x), \quad (2.93)$$

donde

$$\Theta_{\text{mod}}(k; k_1, k_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } k_1 < k < k_2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad (2.94)$$

donde $k_c > k_1$ y $k_c < k_2$.

2.8. Métodos Numéricos

En el presente trabajo se hizo uso extensivo de simulaciones numéricas para analizar diversos aspectos de la dinámica de las ecuaciones diferenciales estocásticas estudiadas.

2.8.1. Método de Integración Estocástico

Consideremos una ecuación diferencial estocástica con ruido blanco (2.52). Conocido el valor de $y(t)$, queremos calcular el valor para $y(t+h)$, con $h \ll 1$. Definiendo las variables

$$k = hf(t, y(t)) \quad (2.95)$$

$$l = \sqrt{h}g(y(t))\zeta(t), \quad (2.96)$$

se tiene luego,

$$y(t+h) = y(t) + \frac{h}{2}(f(t, y(t)) + f(t+h, y(t+h) + k + l)), \quad (2.97)$$

$$+ \frac{\sqrt{h}}{2}\zeta(t)(g(t, y(t)) + g(t+h, y(t+h) + k + l)). \quad (2.98)$$

Este método es conocido como método de Heun. En el caso de sólo tener ruido aditivo, ese método queda,

$$k = hf(t, y(t)), \quad (2.99)$$

$$l = \sqrt{h\eta}\zeta(t), \quad (2.100)$$

$$y(t+h) = y(t) + \frac{h}{2}(f(t, y(t)) + f(t+h, y(t+h) + k + l)) + \sqrt{h\eta}\zeta(t). \quad (2.101)$$

2.8.2. Método de Integración con Espacio

Para la integración de una ecuación diferencial estocástica en derivadas parciales, el primer paso es la discretización del espacio, pasando desde la ecuación (2.53) a un sistema de ecuaciones de la forma,

$$\partial_t u_i = F(\{u_j\}) + \frac{1}{\sqrt{\Delta x}}G(\{u_j\})\zeta_i(t), \quad (2.102)$$

donde $x_i - x_{i-1} = \Delta x$ y la correlación de $\zeta_i(t)$ está da por $\langle \zeta_i(t), \zeta_j(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t - t')$, y se ha usado la discretización,

$$\zeta(x, t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} \zeta_i(t), \quad (2.103)$$

$$\partial_x u(x_i, t) \rightarrow \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}, \quad (2.104)$$

$$\partial_{xx} u(x_i, t) \rightarrow \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2}. \quad (2.105)$$

En el caso de Swift-Hohenberg la cual tiene derivadas hasta orden 4 se utilizó

$$\partial_{xx} u(x_i, t) \rightarrow \frac{-u_{i+2} + 16u_{i+1} - 30u_i + 16u_{i-1} - u_{i-2}}{12\Delta x^2}, \quad (2.106)$$

$$\partial_{xxxx} u(x_i, t) \rightarrow \frac{u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{\Delta x^4}. \quad (2.107)$$

Por otro lado, se usaron condiciones de borde especulares, fijas y periódicas. Considerando una grilla de largo N , con posiciones $i = 0, 1, \dots, N - 1$, para efectos de calcular derivadas espaciales, en el caso de condiciones especulares, si $i < 0$ es reemplazado por $-i$, y si $i > N - 1$ es reemplazado por $2N - 1 - i$, en el caso de condiciones fijas, tanto para $i < 0$ como $i > N - 1$ se toma un valor de u_i fijo. Para condiciones periódicas de borde, $i < 0$ se sustituye por $i = N + i$ y para $i > N - 1$ por $i = N - i$.

Capítulo 3

Transición de Bloqueo de Fase en Patrones

En este capítulo presentaremos una caracterización alternativa de la dinámica de patrones mediante el estudio de su fase global. Una ventaja natural de esta variable es que cerca de la bifurcación es de orden uno, y por tanto simple de detectar experimentalmente.

Consideraremos el modelo estocástico de Swift-Hohenberg, presentado anteriormente (2.20), un modelo prototipo para describir la formación de patrones. La ecuación (2.20) tiene simetría de traslación, y como consecuencia, sus soluciones patrón también tienen esta respectiva simetría. Este grado de libertad implica que los patrones pueden ser etiquetados por un parámetro continuo, identificable como la fase del patrón. Cabe notar, que solo tiene sentido definir la fase luego de que el patrón emerge, para valores positivos del parámetro de bifurcación μ cuando la amplitud no es nula, en otro caso la fase estará indefinida.

Como se explicó anteriormente, el ruido induce la formación de precursores de patrón (ver 2.6.2), estructuras que privilegian una longitud de onda, pero sin embargo, más incoherentes espacial y temporalmente que un patrón determinista. En este escenario, aún bajo la bifurcación, la magnitud de la amplitud del patrón en promedio no es nula, lo que permite definir la fase aún para todo valor del parámetro de bifurcación.

3.1. Dinámica de Fase

Al considerar un término de ruido aditivo en la ecuación (2.20), induce la formación de patrones y precursores de patrón, y por otra parte, convierte a la fase en una variable dinámica, fluctuante en el tiempo. Se puede encontrar una ecuación para su dinámica analíticamente, considerando la ecuación de amplitud (2.37), la cual describe la dinámica del modo crítico. Tomando un nuevo cambio de variable $A = Re^{i\psi}$, llamada transformada de Medelung, obtenemos un nuevo par de ecuaciones, una para el módulo de la amplitud R , y la otra para la fase del modo crítico ψ ,

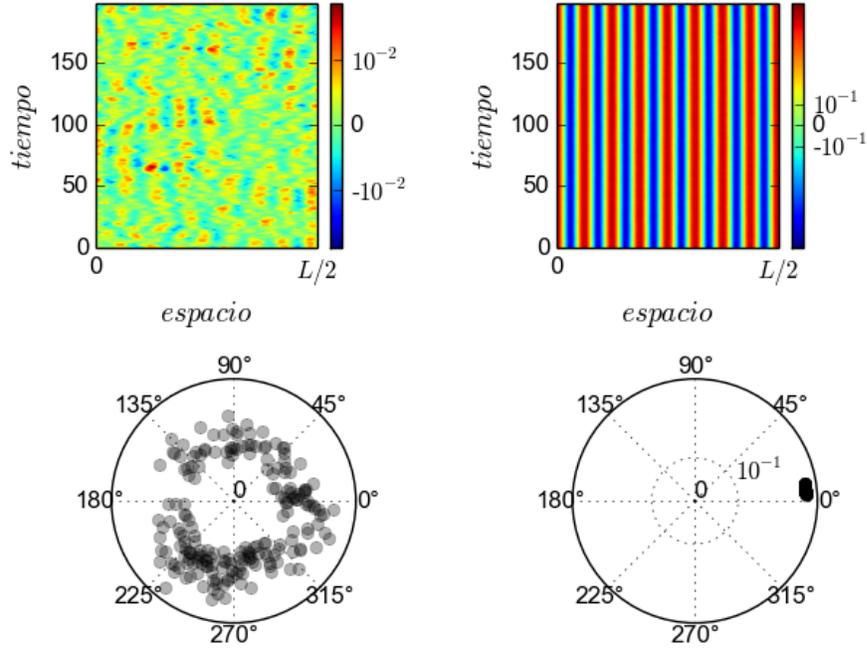


Figura 3.1: (arriba) Diagramas espacio temporales del patrón para $\mu = -0,1$ y $\mu = 0,2$ respectivamente. (abajo) Gráfico de los diferentes valores de la fase en representación polar. Se observa como al pasar la bifurcación, el sistema fija la fase a un valor particular.

$$\begin{aligned} \partial_T R &= \mu R - R^3 + \sqrt{\eta'} \zeta_r(T) \\ R \partial_T \psi &= \sqrt{\eta'} \zeta_i(T) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$(3.2)$$

donde hemos despreciado variaciones espaciales. R fluctúa en torno a un valor esperado R_0 dado por la expresión (2.84). Sustituyendo R por este valor, se obtiene una ecuación de Wiener para la dinámica de la fase.

$$\partial_T \psi = \sqrt{\frac{\eta'}{R^2}} \zeta_i(T) \quad (3.3)$$

De esta ecuación se desprende que un aumento en el modulo de la amplitud produce que el nivel de ruido efectivo sobre la fase decaiga. Sin embargo, en muchos casos, numéricamente nos encontraremos con una dinámica diferente. Esto es resultado del efecto de los bordes, que rompen la invarianza traslacional. Al considerar condiciones de borde—tipo Neumann o Dirichlet—que fijan el valor del campo o de su derivada en los bordes, induce al patrón a favorecer ciertos valores de la fase por sobre otros.

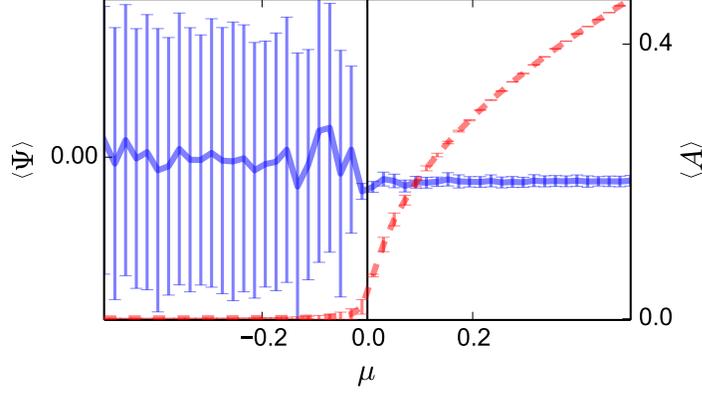


Figura 3.2: Fase (azúl) y amplitud (rojo) promedio, con sus respectivas barras de error para el modelo estocástico de Swift-Hohenberg con $k = 1$ y $\eta = 0,72$. La fase y amplitud corresponden a la representación polar $\{\psi, |A|\}$ del máximo positivo de la transformada de Fourier del patrón. Para la estadística, se tomó un mismo campo durante un tiempo $T = 10^4$ cada $t = 1$.

3.1.1. Ecuación Emendada de Amplitud

La ecuación de amplitud (2.37) no nos permite comprender los efectos de los bordes en cuanto es invariante de fase. Las ecuaciones de amplitud se basan en la separación de escalas, en este caso, de la escala espacialmente lenta de la amplitud y la rápida del patrón subyacente. Esta separación se vuelve relevante en la condición de solubilidad que implica un producto interno de la forma

$$\langle f|g \rangle = (\sqrt{\mu}k/2\pi) \int_X^{X+2\pi\sqrt{\mu}/k} f(x/\sqrt{\mu}, t)g^*(x/\sqrt{\mu}, t)dx \quad (3.4)$$

donde X da cuenta de la escala lenta, x la escala rápida, y $\{f, g\}$ son funciones periódicas en x . Considerando $\sqrt{\mu} \rightarrow 0$, las variaciones espaciales de la envolvente del patrón son lentas respecto a las variaciones del patrón subyacente ($\partial_X A \ll kA/\sqrt{\mu}$).

De forma similar a un trabajo anterior, donde se corrigen las ecuaciones de amplitud para considerar el acople entre ambas escalas una ecuación de Swift-Hohenberg con deriva (*drift*) [19].

Integral de Laplace

En primer lugar, para estudiar como se acopla el modo espacial crítico $e^{\pm ikx}$ con el primer modo no resonante de la ecuación de Swift-Hohenberg $e^{\pm 3ikx}$, calcularemos el valor de una integral de la forma

$$I = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{2\pi n} \int_X^{X+\frac{2\pi n}{k}} dX A^3 e^{3ikX} e^{-ikX}, \quad (3.5)$$

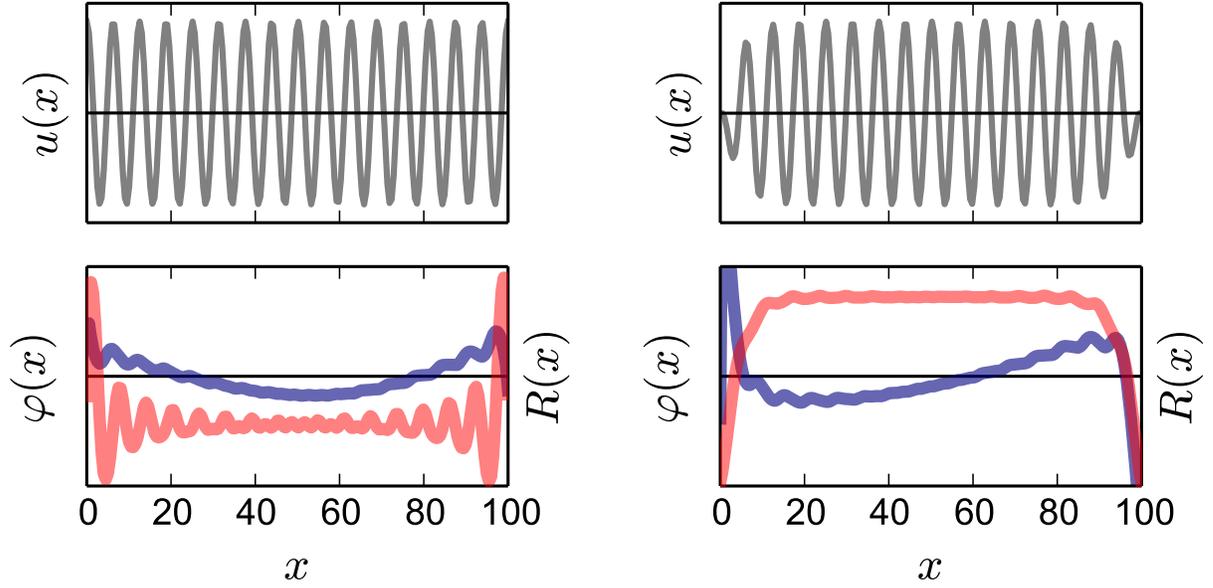


Figura 3.3: Perfil del patrón (arriba en gris) y la fase y la envolvente obtenida usando transformada de Hilbert (abajo en azul y rojo respectivamente). A la izquierda considerando condiciones de borde fijas(condición tipo Neumann), y a la derecha condiciones de borde especulares (condición tipo Dirichlet). Para el caso de borde fijo, se observa claramente como cerca de los bordes las variaciones de la envolvente son de la escala del patrón subyacente. En el caso de las condiciones de borde especulares, no es tan clara el acople entre las escalas, sin embargo, gracias a la transformada de Hilbert, nuevamente notamos como la envolvente varía rápidamente cerca de los bordes.

integrando por partes se sigue

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{2\pi n} \left[\frac{A^3 e^{2ikX}}{2ik} \Big|_X^{X + \frac{2\pi n}{k}} - \frac{1}{2ik} \int_X^{X + \frac{2\pi n}{k}} dX (\partial_x A^3) e^{2ikX} \right] \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{2\pi n} \left[\frac{A^3 e^{2ikX}}{2ik} \Big|_X^{X + \frac{2\pi n}{k}} - \frac{\partial_x A^3}{(2ik)^2} e^{2ikX} \Big|_X^{X + \frac{2\pi n}{k}} + \frac{1}{(2ik)^2} \int_X^{X + \frac{2\pi n}{k}} dX (\partial_{xx} A^3) e^{2ikX} \right] \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{2\pi n} \left[\frac{A^3 \left(X + \frac{2\pi n}{k} \right) - A^3(X)}{2ik} \right] e^{ikX} - \frac{k}{2\pi n} \left[\frac{\partial_x A^3 \left(X + \frac{2\pi n}{k} \right) - \partial_x A^3(X)}{(2ik)^2} \right] e^{ikX} + \dots \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{A^3 \left(X + \frac{2\pi n}{k} \right) - A^3(X)}{\left(\frac{2\pi n}{k} \right)} \right] \frac{e^{ikX}}{2ik} - \left[\frac{\partial_x A^3 \left(X + \frac{2\pi n}{k} \right) - \partial_x A^3(X)}{\left(\frac{2\pi n}{k} \right)} \right] \frac{e^{ikX}}{(2ik)^2} + \dots
\end{aligned}$$

Tomando límite, se tendría que $I \rightarrow 0$. Sin embargo en este caso, estamos considerando un acople entre escalas, por lo que si bien k les grande, no es infinito. Luego, para k muy grande pero no infinito se tiene,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{2\pi n} \int_X^{X + \frac{2\pi n}{k}} dX A^3 e^{3ikX} e^{-ikX} \approx \frac{e^{ikX}}{2ik} \partial_X (A^3(X)) - \frac{e^{ikX}}{(2ik)^2} \partial_{XX} (A^3(X)) + \dots \quad (3.6)$$

Condición de Solubilidad

Consideremos la ecuación de Swift-Hohenberg estocástica, pero considerando un tamaño finito L ,

$$\partial_t u = \mu u - u^3 - (\partial_{xx} + k^2)^2 u + \sqrt{\eta} \zeta(x, t), \quad (3.7)$$

$$B(u(x=0, t), \partial_x) = c_1, \quad (3.8)$$

$$B(u(x=L, t), \partial_x) = c_1, \quad (3.9)$$

donde B es una función cualquiera del campo u en el borde y sus derivadas. Tomando como como *Ansatz*

$$u(x, t) = \frac{A(X, T)}{\sqrt{3}} e^{ikx} + \frac{\bar{A}(X, T)}{\sqrt{3}} e^{-ikx} + w(A, \bar{A}), \quad (3.10)$$

y sustituyendo en la ecuación (3.8) se sigue,

$$\mathcal{L}w = -\frac{1}{\sqrt{3}} (\partial_t A - \mu A + |A|^2 A + \partial_{XX} A + c.c.) e^{ikx} - \frac{1}{3\sqrt{3}} (A^3 e^{3ikx} + c.c.) \quad (3.11)$$

Hasta acá no hay diferencias respecto al procedimiento exhibido anteriormente en el marco conceptual, excepto porque se ha resumido un poco al incluir todos los ordenes simultáneamente. Sin embargo, al utilizar el producto interno (3.4), el término no resonante proporcional a $e^{\pm 3ikx}$ no es ortogonal al kernel de \mathcal{L}^\dagger , y tiene una proyección sobre este debido a las variaciones de la envolvente se acoplan a la del patrón subyacente. Así, aparecerá una proyección de este término sobre el kernel en la condición de solubilidad. Considerando la expansión de la integral de Laplace mostrado en 3.1.1, se tiene la ecuación amendada de amplitud,

$$\partial_T A = \mu A - |A|^2 A + \partial_{XX} A - i\gamma A^2 \partial_X A e^{2iqX} + \sqrt{\eta'} \zeta(X, T), \quad (3.12)$$

donde $\gamma = 3/k$ y $q = k/\sqrt{\mu}$. Del mismo modo al usado anteriormente, podemos obtener ecuaciones explicitas para la fase y magnitud del módulo de la fase por medio del cambio de variable $A = Re^{i\phi}$

$$\begin{aligned} \partial_T R &= \mu R - R^3 + \partial_{XX} R - R(\partial_X \phi)^2 + \sqrt{\eta'} \zeta_r(X, T) + \gamma R^2 [\partial_X R \sin(2\phi + qX) + R \partial_X \phi \cos(2\phi + qX)] \\ R \partial_T \phi &= R \partial_{XX} \phi + 2\partial_X R \partial_X \phi + \sqrt{\eta'} \zeta_i(X, T) + \gamma R^2 [\partial_X R \cos(2\phi + qX) - R \partial_X \phi \sin(2\phi + qX)] \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.1.2. Ecuación para la fase

La ecuación encontrada anteriormente es sumamente difícil de tratar analíticamente. Para simplificar el tratamiento de esta ecuación, se construirán las ecuaciones para el promedio espacial de R y ϕ . Definiremos el promedio espacial de una variable $f(x)$ mediante

$$\{f\} = \frac{1}{L} \int_0^L dx f(x), \quad (3.14)$$

donde L es el largo del sistema. Convenientemente, podemos definir dos nuevas variables, una que capture las variaciones locales de la fase $\varphi(X, T)$, cuyo promedio espacial sea cero, y una segunda que de cuenta de la fase global del patrón, $\psi(T)$ correspondiente al promedio espacial. De este modo tenemos,

$$\phi(X, T) = \varphi(X, T) + \psi(T), \quad (3.15)$$

$$\psi(T) = \{\phi(X, T)\}_X = \frac{1}{L} \int_0^L dX \phi(X, T), \quad (3.16)$$

$$\{\varphi(X, T)\} = 0, \quad (3.17)$$

Para la variable R , consideraremos su valor promedio R_0 , presentado en (2.84) (detalles de su deducción pueden verse en la referencia [3]), el valor más probable de R está dado por la expresión,

$$R_0^2 = |R|_{moda}^2 = \frac{\mu + \sqrt{\mu + 2\eta'}}{2} \quad (3.18)$$

Una forma de simplificar aún más la expresión para la dinámica de R y ϕ es considerar la separación de escalas entre la dinámica de una y la otra variable. Visto como un proceso de Orstein-Ulhenbeck, el tiempo de relajación para la variable R está dado por $\tau_0 = 1/\mu$, mientras que en la ecuación de ϕ no hay términos lineales excepto por la difusión. De allí, cuando $|\mu| \gg 1$ podemos considerar R una variable rápida y puede ser eliminada adiabáticamente de la dinámica. Sin embargo cerca de la bifurcación, μ se acerca a cero, y hace que la dinámica de R sea cada vez más lenta. Sin embargo, dado que ϕ no tiene a orden lineal una escala de tiempo característica, aún es posible para $\mu \ll 1$ eliminar adiabáticamente R tomando una escala temporal $\tau \gg 1/\mu$.

De este modo, a orden dominante tenemos una ecuación de R independiente de la variable ϕ , al despreciar el acople de la variable ϕ en R , y se puede escribir una ecuación para ϕ , usando $R = R_0(1 + \rho(X, T))$,

$$\partial_T \phi = \partial_{XX} \phi + 2\partial_X \rho \partial_X \phi + \frac{1}{R_0} \sqrt{\eta'} \zeta_i(X, T) + \gamma R_0 [\partial_X \rho \cos(2\phi + qX) - R_0 \partial_X \phi \sin(2\phi + qX)],$$

Las condiciones de borde quedan reflejadas en el valor de $\varphi(X, T)$ y $\rho(X, T)$. Integrando sobre todo el espacio (3.19) obtenemos una ecuación simple para la dinámica de la fase global ψ ,

$$\partial_T \psi = \beta - R_0 \sqrt{A^2 + B^2} \sin(2(\psi - \psi_0)) + \frac{\sqrt{\eta''}}{R_0} \sigma(T) \quad (3.19)$$

donde,

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{\gamma}{L} \int_0^L dX \partial_X \rho [\cos(2\varphi + qX) + \sin(2\varphi + qX)] \\
B &= \frac{\gamma}{L} \int_0^L dX [\cos(2\varphi + qX) - \sin(2\varphi + qX)] \\
\beta &= \frac{1}{L} \int_0^L dX (\partial_{XX} \varphi + 2\partial_X \rho \partial_X \varphi) \\
\psi_0 &= \frac{1}{2} \left(\arctan \frac{B}{A} + \frac{\pi}{2} \right) \\
\eta'' &= \frac{\eta'}{L}
\end{aligned}$$

Esta ecuación de Langevin describe la dinámica de la fase. La parte determinista corresponde a una fuerza de periódico π que deriva de un potencial tipo tabla de lavar (en inglés *Washboard potential*). El parámetro β da cuenta de la asimetría entre los bordes. Para condiciones de borde tipo Neumann y Dirichlet, se encuentra $\beta = 0$. En este caso, la ecuación de Fokker-Planck asociada, considerando ψ una variable periódica desde $-\pi/2$ a $\pi/2$ tiene la siguiente probabilidad estacionaria,

$$P(\psi) = I_0 \left(\frac{aR_0}{\eta''} \right) \exp \left[\frac{aR_0}{\eta''} \cos(2(\psi - \psi_0)) \right], \quad (3.20)$$

donde I_0 es la función modificada de Bessel de orden 0. En torno al primer equilibrio $\psi = y + \psi_0$ con $y \ll 1$ se obtiene la siguiente ecuación aproximada a primer orden,

$$\partial_T y = -2R_0 a y + \frac{\sqrt{\eta''}}{R_0} \zeta(T) \quad (3.21)$$

Esto corresponde a un proceso de Orstein-Uhlenbeck. Este modelo simple tiene los ingredientes básicos para entender la dinámica de la fase de un patrón o precursor ruidoso. Por un lado, la intensidad del ruido decrece en la medida que la magnitud de la amplitud del patrón aumenta, disminuyendo el tamaño de las fluctuaciones en torno al equilibrio. Por otro lado, este efecto se ve reforzado por el término determinista, el cual se vuelve más fuerte al aumentar la magnitud de la amplitud del patrón, ayudando a fijar la fase. En este límite, las fluctuaciones de $y \ll 1$ tiene una probabilidad estacionaria Gaussiana dada por

$$P(y) = \sqrt{\frac{\eta''}{4\pi a R_0^3}} \exp \left(\frac{-a R_0^3}{\eta''} y^2 \right). \quad (3.22)$$

La dispersión está dada por

$$\begin{aligned}
\sigma_\psi &= \sqrt{\frac{\eta''}{2aR_0^3}} \\
&= \sqrt{\frac{\eta'}{aL}} \left[\sqrt{\frac{1}{\mu + \sqrt{\mu + 2\eta'}}} \right]^3
\end{aligned} \quad (3.23)$$

Esta expresión está en acuerdo con las simulaciones numéricas mostradas en la 3.4.

La fase, como variable cíclica, tiene una máxima dispersión cuando esta iguala el tamaño de medio período, y la expresión (3.23) deja de ser válida. Esta expresión está de acuerdo a con los análisis obtenidos numéricamente para distintos valores de μ , como se puede ver en la figura 3.4.

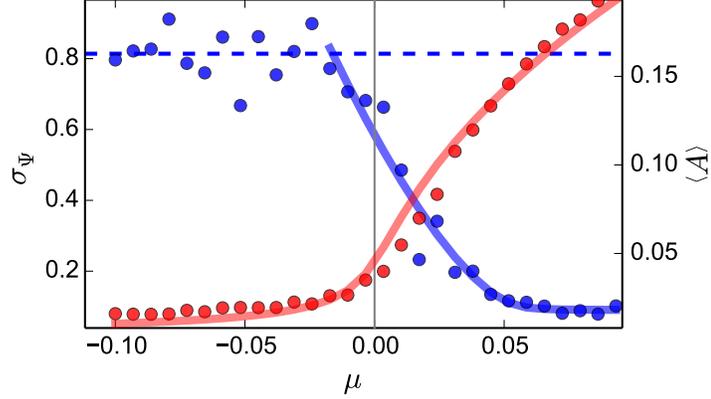


Figura 3.4: En azul, dispersión de la fase para simulación numérica de la ecuación de Swift-Hohenberg. La curva roja representa el módulo de la amplitud del patrón. Se consideró $k = 1$ y $\eta = 0,72$, y se tomó un patrón durante un tiempo $T = 1000$ cada $T_0 = 1$.

Cabe mencionar que medir las fluctuaciones de la fase tiene ciertas dificultades insoslayables. En un sistema de largo $2\pi n/k_c$ así como es estable un patrón con n ciclos, es meta-estable uno con $n \pm 1$. En presencia de ruido, el patrón sufre transiciones entre estos estados, cada uno de los cuales tiene un valor de equilibrio para la fase global distinto.

3.1.3. Bloqueo de Fase en Precusores

El precursor, a diferencia de un patrón, es una estructura súmamente incoherente. Por esto, cabe preguntarse si al acoplarse con el borde inducirá sobre su fase una fuerza efectiva que sea notoria en la dinámica de esta.

En la figura 3.5 se evalúa numéricamente la dispersión de derivada temporal de la fase global comparando la consideración de condiciones especulares y periódicas de borde. Sobre el punto crítico, se observa claramente que la fuerza inducida por el borde disminuye las fluctuaciones de la derivada temporal de la fase. Sin embargo, bajo la bifurcación, no se observan diferencias apreciables.

3.2. Otras formas de Medir la Coherencia del Patrón

La utilización de la dispersión de la fase como medida de la coherencia del patrón es una de tantas opciones que se pueden utilizar. Así como se identifica que un patrón mientras más

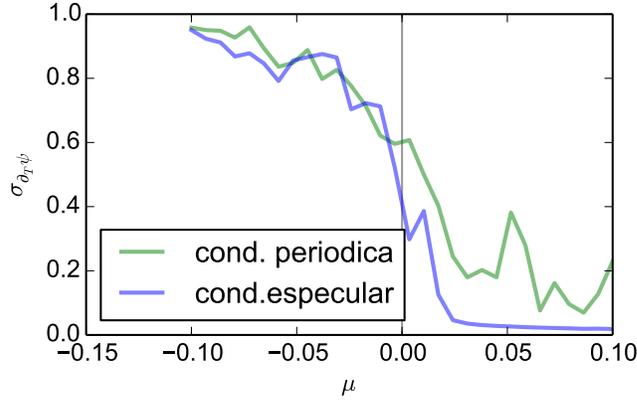


Figura 3.5: Comparación entre la dispersión de la derivada temporal de la fase en el caso de condiciones de borde periódicas y especulares. Sobre la bifurcación resulta evidente el efecto de los bordes, sin embargo, bajo ella, no se aprecian diferencias significativas. Se consideró $k = 1$ y $\eta = 0,72$

coherente es más, menor dispersión deberíamos encontrar en su fase, también existen otras magnitudes que dan cuenta de como un sistema pasa de un estado precursor, caracterizado por una alta incoherencia, a una estructura perfectamente reconocible como un patrón.

En un patrón perfecto, la fase del campo $u_p(x)$ de un modo crítico k debería comportarse como $\Psi_p(x) = \Psi_0 + kx$. La introducción de ruido perturbará esto y tendremos $\Psi_p(x) = \Psi_0 + kx + w(x)$. Mientras el patrón sea coherente, w será pequeño. De este modo, podemos medir la coherencia del patrón mirando la dispersión de la fase menos un ajuste lineal. El resultado se observa en la figura 3.6(izquierda).

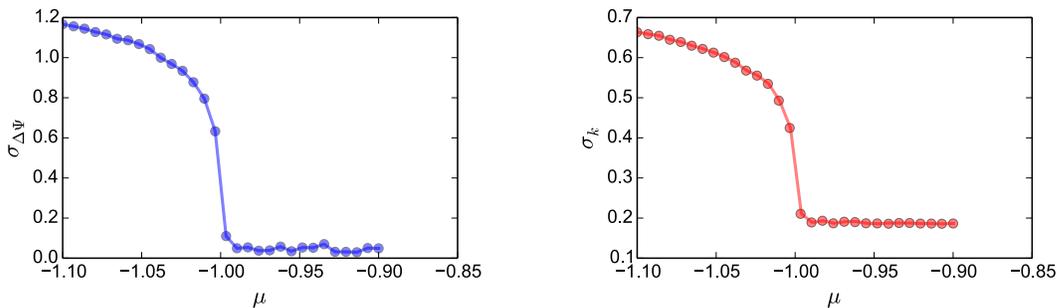


Figura 3.6: (izquierda) Dispersión de la fase menos un ajuste lineal. (derecha) Dispersión de derivada de la fase o dispersión del modo crítico. Se consideró un patrón de Swift-Hohenberg con $\eta = 0,72$ y $k = 1$. Se observa claramente para ambas caracterizaciones de la coherencia del patrón una abrupta caída luego del punto crítico.

A diferencia de la dispersión de la fase global, esta magnitud no se ve afectada por el tipo de bordes del sistema.

Otra forma de estudiar la coherencia de un patrón es en lugar de estudiar cuanto se desvía la fase respecto a su valor determinista, es estudiar cuanto varía su derivada $\partial_x \Psi_p(x)$. Dicho de otro modo, estudiar la dispersión de k . Se observa el resultado de hacer este análisis en la figura 3.6(derecha).

En estas formas alternativas de estudiar la coherencia del patrón se observa el mismo comportamiento que el observado para la dispersión de la fase global: La coherencia aumenta continuamente desde un estado de alta incoherencia para μ muy negativo, a uno de alta coherencia para μ positivo. Lamentablemente, durante el desarrollo de esta tesis no fue posible obtener resultado teóricos relevantes para la fase local y su dinámica.

3.3. Caracterización Experimental de la Transición de Bloqueo de Fase

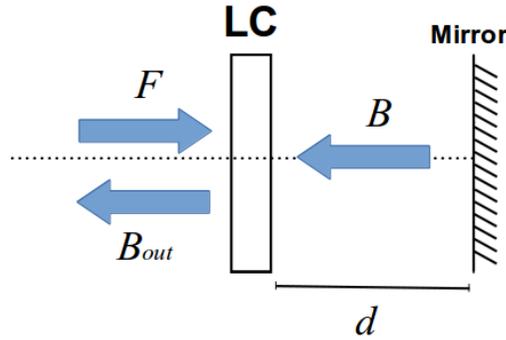


Figura 3.7: Montaje experimental de una película de cristal líquido tipo Kerr uni-dimensional sujeta a retro inyección óptica; LC película de cristal líquido, el espejo corresponde a un espejo virtual; F, B corresponden al campo óptico incidente y reflejado. d es la distancia entre el espejo y la película.

Para contrastar nuestros análisis teóricos para la dinámica de la fase, consideramos una lámina de cristal líquido tipo Kerr en una dimensión, sujeta a retro alimentación óptica descrito en la referencias [56, 57, 1]. Este consiste en una lámina de cristal líquido nemático (LC) radiado por un rayo laser (F) el cual es reflejado de vuelta por un espejo ubicado a una distancia variable d . Se sigue sin problema una derivación de las ecuaciones de amplitud amendadas [33] que describen el sistema experimental.

El medio no lineal es una capa de E_7 LC de $50\mu m$ de ancho, homeotrópicamente anclado, con un tiempo de respuesta $\tau = 2,3s$ y una longitud de difusión $l_d = 10\mu m$ [1]. El rayo es provisto por un láser mono-modo de frecuencia doble $Nd^{3+}:YVO_4$ ($\lambda_0 = 532nm$) el que es formado por dos telescopios cilíndricos para obtener un haz cuasi-unidimensional (diámetros del diámetro $\approx 93\mu m \times 650\mu m$). La longitud de la retro reflexión óptica d es igual a $5mm$. El rayo reflejado es monitorizado después de su segunda pasado a través de la capa de LC B_{out} (Fig. 3.7). La inyección tiene una forma Gaussiana, una suerte de condición de borde tipo Dirichlet.

Este sistema exhibe para un valor crítico de intensidad F formación de patrones como resultado del efecto Talbot [1]. Debido a fluctuaciones térmicas, inducidas por el rayo F , el sistema muestra un nivel de ruido proporcional a $K_B T$ (donde K_B es la constante de Boltzmann y T la temperatura absoluta). Figura 3.9 ilustra el diagrama espacio-temporal y la distribución de la fase bajo, en, y sobre la bifurcación espacial. Hay buen acuerdo entre nuestras predicciones y las observaciones experimentales. La dispersión de la fase es bien

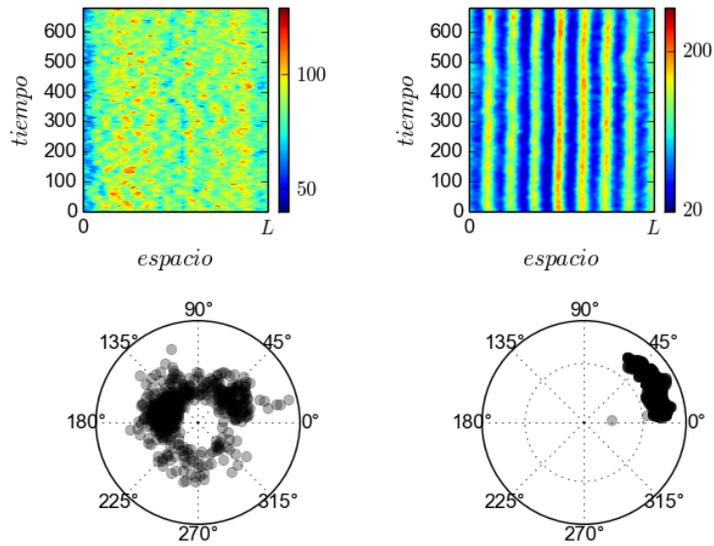


Figura 3.8: (arriba) Diagramas espacio temporales del patrón para $F = 0,7 \text{ W/cm}^2$ (bajo la inestabilidad espacial) y $F = 1,2 \text{ W/cm}^2$ (sobre la inestabilidad espacial) respectivamente. (abajo) Gráfico de los diferentes valores de la fase en representación polar. El comportamiento experimental es análogo al observado en simulaciones, donde se observa como al pasar la bifurcación, el sistema fija la fase a un valor particular.

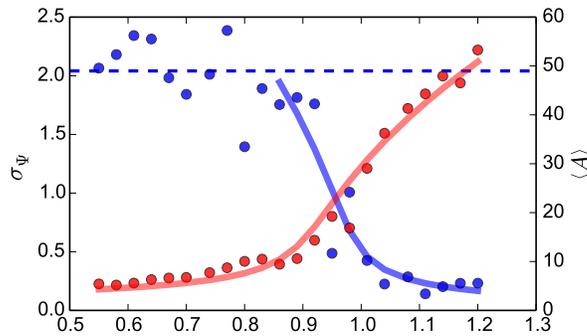


Figura 3.9: Dispersión de la fase (azúl) y módulo de la amplitud (rojo) para los datos experimentales. Las líneas continuas corresponden a un ajuste numérico usando la fórmula (3.23) para la fase y (2.84) para la amplitud.

descrita por la fórmula (3.23). Claramente el sistema exhibe una transición de fase entre un estado incoherente que se vuelva coherente. Dicho de otra forma, el sistema exhiben una transición de bloqueo de fase de un precursor de patrón.

Capítulo 4

Frentes y Efecto del Ruido

En esta sección se estudia el efecto del ruido entre frentes, lo cual tiene aplicaciones en diversos contextos [35, 10, 21, 46, 20, 69, 5, 60, 31, 62, 61, 58, 59, 64, 37, 18, ?].

La consideración de ruido tendrá efectos más notorios sobre los modos más lentos del sistema, y por ello se estudiarán particularmente aquellos frentes que en ausencia de ruido, no tienen una dinámica propia, es decir, paredes de dominios inmóviles. Desde el punto de vista de la teoría de sistemas dinámicos, en sistemas unidimensionales espacialmente un frente puede ser identificado como un órbita heteroclina conectando dos estados uniformes espacialmente extendidos [87, 24], y su evolución temporal puede ser vista como soluciones tipo partícula, es decir, caracterizadas por un conjunto de parámetros como posición de la interfaz, ancho, carga topológica (kink-antikink), por mencionar algunos ejemplos. Soluciones tipo frentes estacionarios para ecuaciones con simetría de traslación, corresponden a modos de Goldstone, cuyo autovalor corresponde a un parámetro identificable con la posición del frente.

Se considerarán por un lado sistemas variacionales con bi-estabilidad. Para estos sistemas se tiene que el estado más estable, dado por el de menor energía o función de Lyapunov, invadirá al menos estable. Para este trabajo se considerará el caso en que los estados conectados tengan la misma energía, situación en que frente, en este caso un kink, no se moverá. El punto en el espacio de parámetros donde esto ocurre es comúnmente llamado punto de Maxwell [45]. También se considerará un modelo débilmente no variacional, y el cual tiene una bifurcación donde exhibe un rompimiento de simetría y la aparición de frentes propagativos entre estados simétricos.

Usando herramientas de la física no lineal, se encontrarán leyes cinemáticas para la posición de diferentes tipos de frentes. En todos los casos, el ruido inducirá una dinámica en los frentes; en algunos casos inducirá una dinámica Browniana para la posición de los frentes; en otros casos, la acción conjunta de el ruido con efectos de tamaño o inhomogeneidades generará dinámicas inesperadas.

4.1. Ruido en Kinks Monótonos

Para describir la dinámica de kinks monótonos, usaremos el modelo de Ginzburg-Landau (2.38), presentado anteriormente 2.4.1, el cual es el modelo más simple para describir la dinámica de este tipo de kinks. Adicionalmente, para describir inherentes fluctuaciones internas, consideraremos un término de ruido aditivo blanco, obteniendo así la ecuación estocástica de Ginzburg-Landau [43]

$$\partial_t u = \mu u - u^3 + \partial_{xx} u + \sqrt{\eta} \zeta(x, t), \quad (4.1)$$

donde η da cuenta del nivel de ruido. Para sistemas en equilibrio, este parámetro es proporcional a la temperatura. $\zeta(x, t)$ es un ruido blanco con valor medio nulo, $\langle \zeta(x, t) \rangle = 0$, y correlación

$$\langle \zeta(x, t) \zeta(x', t') \rangle = \delta(x - x') \delta(t - t'). \quad (4.2)$$

De este modo, el ruido es espacial y temporalmente independiente. Considerando un nivel de ruido pequeño ($\eta \ll 1$), es razonable suponer que el más importante efecto de este sobre la solución es afectar el modo más lento. En este caso, la solución del sistema determinista corresponde a un modo de Goldstone, y su autovalor, el parámetro Δ de la solución (2.41), que da cuenta de la posición del kink. Como *ansatz*, consideraremos una solución tipo (2.41), donde hemos promovido el parámetro Δ a una función del tiempo, más un pequeño término correctivo w , es decir,

$$u(x, t) = u_k^+(x - \Delta(t)) + w(x, \Delta). \quad (4.3)$$

Introduciendo el *ansatz* anterior en Eq. (4.1) y linealizando en w , se obtiene,

$$\mathcal{L}w = \dot{\Delta} \partial_x u_k^+ + \sqrt{\eta} \zeta(x, t), \quad (4.4)$$

donde el operador lineal $\mathcal{L} \equiv -\mu + 3(u_k^+)^2 - \partial_{xx}$ es un operador auto-adjunto bajo el producto interno

$$(f|g) = \int f(x)g(x)dx \quad (4.5)$$

Este operador satisface

$$\mathcal{L} \partial_x u_k^+ = 0. \quad (4.6)$$

De este modo, podemos aplicar condición de solubilidad 2.2, multiplicando por $\partial_x u_k^+$, e integrando sobre todo el espacio, obteniendo la ecuación,

$$\dot{\Delta} = \sqrt{\eta} \bar{\zeta}(t), \quad (4.7)$$

donde

$$\bar{\eta} \equiv \eta / (\partial_x u_k^+ | \partial_x u_k^+) \quad (4.8)$$

$$\bar{\zeta}(t) \equiv \frac{\int \zeta(x, t) \partial_x u_k^+ dx}{(\partial_x u_k^+ | \partial_x u_k^+)} \quad (4.9)$$

donde $\zeta(t)$ es un nuevo ruido Gaussiano blanco con valor medio nulo, $\langle \bar{\zeta}(t) \rangle = 0$, y correlación

$$\langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}(t') \rangle = \delta(t - t'). \quad (4.10)$$

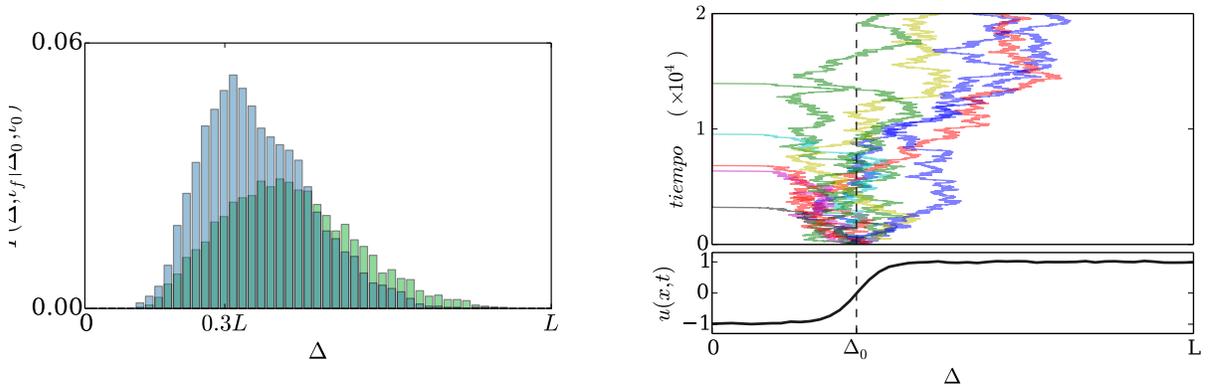


Figura 4.1: Dinámica estocástica del estado kink. a) Simulación numérica de un solo kink bajo Eq. (4.1) en un sistema finito con condiciones especulares de borde, con $\mu = 1$, $\eta = 0,0018$ y $L = 25$, partiendo de la posición $\Delta = 0,3L$. b) El perfil al comienzo de la simulación c) Evolución de la probabilidad de supervivencia para un kink en diferentes instantes de tiempo $t_1 = 0$ (negro), $t_2 = 20000$ (azul), and $t_3 = 40000$ (verde).

Luego, la posición del kink satisface una simple dinámica de Wiener Eq. (4.7), describiendo una partícula Browniana [50, 84, 44].

Asociada con la anterior ecuación de Langevin, tenemos la siguiente ecuación para la probabilidad condicional (Ecuación de Fokker-Planck [84, 44])

$$\partial_t P(\Delta, t | \Delta_0, t_0) = \frac{\bar{\eta}}{2} \partial_{\Delta\Delta} P(\Delta, t | \Delta_0, t_0), \quad (4.11)$$

donde $P(\Delta, t = t_0 | \Delta_0, t_0) = \delta(\Delta - \Delta_0)$. De este modo, la probabilidad condicional satisface una simple ecuación de difusión y su evolución es caracterizada por la dispersión de una gaussiana. No obstante, simulaciones numéricas de esta la ecuación Eq. (4.1) para un solo kink en un sistema finito con condiciones especulares de borde exhibe una dinámica que no se corresponde con este comportamiento, donde una distribución de supervivencia difunde asimétricamente como muestra la figura 4.1. Es importante notar que cuando el kink llega al borde del sistema este desaparece debido a que el sistema así minimiza su energía libre (cf. Fig. 4.1). Es por esto que en este caso no hablamos de una probabilidad condicional, dado que esta no conserva su norma, sino de una probabilidad de supervivencia. Adicionalmente, se espera que el valor de expectación se mueva hacia el centro del sistema.

4.1.1. Efectos de Tamaño

Para describir adecuadamente la dinámica exhibida por los kinks en simulaciones numéricas, se deben considerar efectos de tamaño. Tomemos la ecuación de Ginzburg-Landau 4.1, dado un dominio de largo L con condiciones especulares de borde o condiciones de Neumann, i.e. $\partial_x u(x = 0, t) = \partial_x u(x = L, t) = 0$. El efecto de estas condiciones de borde es análogo a considerar imágenes espejos del kink tras los bordes. De este modo, su dinámica puede ser descrita considerando un sistema extendido con un par kink-antikink. Figura 2.7b ilustra esta analogía. La dinámica del par kink-antikink para una pared especular ubicada en $x = 0$,

puede ser descrita considerando el siguiente ansatz

$$u(x, t) = u_k^+ [x + \Delta(t)] + u_k^- [x - \Delta] - \sqrt{\mu} + w(x, \Delta), \quad (4.12)$$

donde $\Delta(t)$, da cuenta de la posición del kink en el tiempo, y $w(x, \Delta)$ es una corrección pequeña por efecto del ruido. Notar que este ansatz solo es valido mientras el kink y el anti-kink se encuentren lo suficientemente lejos, i.e., Δ es mucho mayor que el núcleo del kink ($\Delta \gg l$).

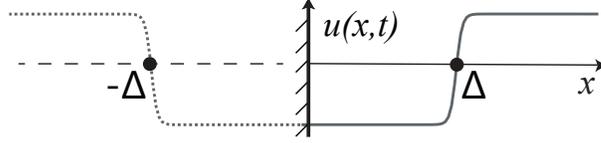


Figura 4.2: Esquema del ansatz de la ecuación (4.12). El efecto del borde es reemplazado por la consideración de un kink *reflejado* al otro lado de este.

Introduciendo el ansatz de la ecuación (4.12) en (4.1), se obtiene luego de despreciar términos no lineales en w ,

$$\mathcal{L}w = \dot{\Delta}(\partial_x u_k^+ + \partial_x u_k^-) + \sqrt{\eta}\zeta(x, t) \quad (4.13)$$

$$+ 3[u_k^+ \mu - \sqrt{\mu}(u_k^+)^2 + (u_k^-)^2(u_k^+ - \sqrt{\mu}) - u_k^-(u_k^+ - \sqrt{\mu})^2], \quad (4.14)$$

imponiendo alternativa de Fredholm, de manera similar a como se hizo anteriormente se sigue mediante cálculos directos la ecuación de Langevin

$$N\dot{\Delta} = f_1(\Delta) + f_2(\Delta) + f_3(\Delta) + \sqrt{\eta}\bar{\zeta}(t)N, \quad (4.15)$$

donde

$$f_1(\Delta) \equiv 3\sqrt{\mu}(\partial_x u_k^- |u_k^- [u_k^+ - \sqrt{\mu}]), \quad (4.16)$$

$$f_2(\Delta) \equiv 3(\partial_x u_k^- |(u_k^-)^2 [u_k^+ - \sqrt{\mu}]), \quad (4.17)$$

$$f_3(\Delta) \equiv 3(\partial_x u_k^- |u_k^- [u_k^+ - \sqrt{\mu}]^2), \quad (4.18)$$

y la movilidad $N \equiv (\partial_x u_k^- | \partial_x u_k^-)$ es una constante. Esta ecuación describe la ley cinemática para la posición del kink como resultado de los efectos de tamaño. Esta dinámica está dada por tres fuentes $f(\Delta) = f_1 + f_2 + f_3$. En la figura 4.3 se muestra la comparación entre la interacción calculada numérica y analíticamente mediante la fórmula (4.15) con $\eta = 0$. En ella, observamos un buen acuerdo entre los cálculos numéricos y nuestras predicciones teóricas para paredes suficientemente alejadas. Sin embargo, cuando el kink se encuentra demasiado cerca, la interacción se intensifica y nuestro análisis perturbativo no sigue siendo válido. Una descripción analítica en esta zona resulta sumamente compleja, y es sólo accesible numéricamente.

Esta ley, si bien tiene una expresión complicada, puede ser aproximada por una ley mucho más simple. Consideraremos el limite de kinks diluidos, esto es, cuando el kink se encuentra

suficientemente lejos del borde ($\Delta \gg 1/\sqrt{\mu}$). De este modo f_3 se vuelve despreciable y luego de cálculos directos se obtiene

$$\dot{\Delta} = -\alpha e^{-2\sqrt{2\mu}\Delta} + \sqrt{\bar{\eta}}\bar{\zeta}(t), \quad (4.19)$$

donde α es una constante positiva definida por

$$\alpha \equiv -6\sqrt{\mu} \frac{\int e^{-\sqrt{2\mu}x} [u_k^- + \sqrt{\mu}] u_k^- \partial_x u_k^- dx}{(\partial_x u_k^- | \partial_x u_k^-)}. \quad (4.20)$$

De este modo, es claro como la condición de borde produce una fuerza atractiva sobre el kink, la cual es exponencial y tiene una longitud característica $1/2\sqrt{2\mu}$.

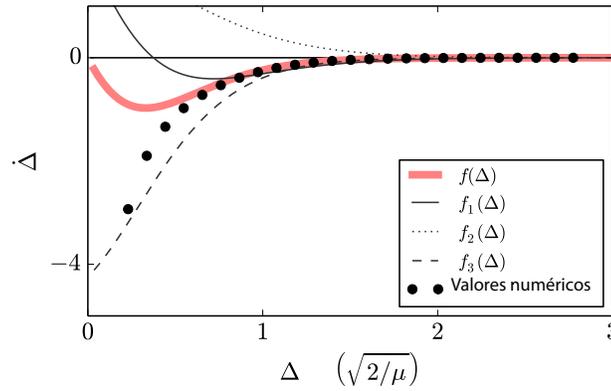


Figura 4.3: Ley cinética para la posición del kink como resultado de los efectos de borde. Los puntos se obtienen numéricamente considerando la evolución temporal de un kink ubicado lejos de la pared, calculando luego la velocidad en cortas ventanas de tiempo en diferentes puntos hasta llegar al borde. La línea roja es la expresión analítica para la dinámica de la posición del (4.15) con $\eta = 0$, y $f(\Delta) = f_1 + f_2 + f_3$.

Para describir el efecto de los bordes, debemos considerar al kink sometido a la interacción de dos anti-kinks, de modo que la dinámica queda descrita por

$$\dot{\Delta} = h(\Delta) + \sqrt{\bar{\eta}}\bar{\zeta}(t), \quad (4.21)$$

con $\Delta \leq L$ y $h(\Delta) \approx -\alpha e^{-2\sqrt{2\mu}\Delta} + \alpha e^{-2\sqrt{2\mu}(L-\Delta)}$ para una posición Δ lejos de alguno de los bordes, $\Delta \gg \sqrt{\mu}$ and $(L-\Delta) \gg \sqrt{\mu}$. Luego, cada borde atrae al kink con una intensidad que decae asintóticamente de una manera exponencial. Asociada con esta ecuación de Langevin, se sigue la siguiente ecuación de Fokker-Planck

$$\partial_t P(\Delta, t | \Delta_0, t_0) = -\partial_\Delta [h(\Delta)] P + \frac{\bar{\eta}}{2} \partial_{\Delta\Delta} P, \quad (4.22)$$

con condiciones absorbentes de borde $P(\Delta = 0, t; \Delta_0, t_0) = P(\Delta = L, t; \Delta_0, t_0) = 0$ y $P(\Delta, t; \Delta_0, t_0)$. Esta ecuación da cuenta de la evolución temporal de probabilidad de supervivencia del kink, que inicialmente se ubica en una posición $\Delta = \Delta_0$. Estas condiciones de borde consideran que una vez que el kink llega al borde este desaparece.

Figura 4.4 muestra la evolución de la probabilidad de supervivencia considerando una fuerza de deriva de la forma $h(\Delta) = -C[\Delta^{-a} + (L-\Delta)^{-a}]$, donde $\{C, a\}$ con parámetros de

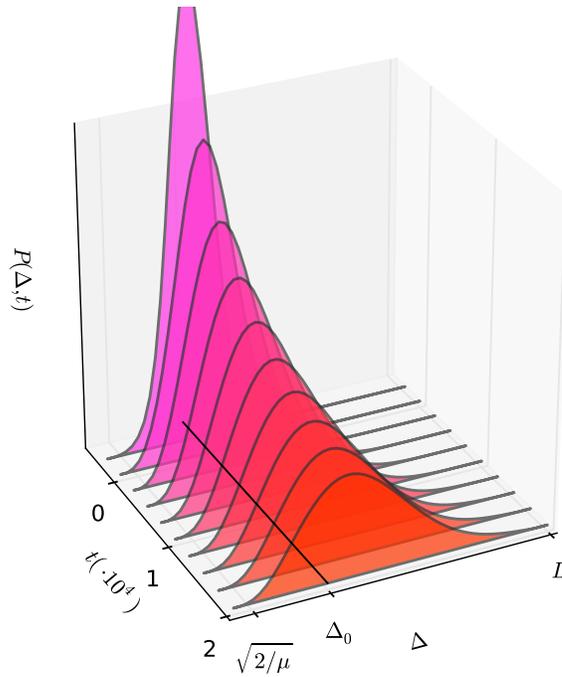


Figura 4.4: Evolución temporal de la ecuación de Fokker-Plank (4.22) con condiciones de borde absorbentes, usando una fuerza de deriva $h(\Delta) = -C[\Delta^{-a} + (L - \Delta)^{-a}]$ con $C = 0,033$, $a = 3,08$, $\Delta_0 = 0,3L$, y $\eta = 2,69 \times 10^{-3}$.

ajuste adecuados. Se hace uso de esta expresión para ajustar más adecuadamente cerca de los bordes, donde la ley cinemática ya no es válida.

La probabilidad de sobrevivencia tiene un buen acuerdo cualitativo con las simulaciones numéricas de la ecuación (4.1), como se puede ver en el panel inferior de la figura 4.1. De este modo, un kink bajo la influencia de ruido interno y efectos de tamaño exhibe una dinámica no difusiva.

4.2. Kinks No Monótonos

La dinámica descrita para kinks monótonos, en presencia de ruido y efectos de tamaño, es influenciada principalmente por la forma del mismo kink. De este modo, uno podría esperar que en el caso de kinks no monótonos, la interacción se vuelva más interesante. En esta sección consideraremos un modelo simple con kinks no monótonos, el anteriormente presentado modelo de Swift-Hohenberg (2.20), caracterizaremos las soluciones deterministas del modelo, y luego, análogamente a como se trató en el caso de kinks monótonos de la ecuación de Ginzburg-Landau, se estudiará el efecto conjunto del ruido y los efectos de tamaño en este modelo, encontrando una dinámica nueva ausente en el caso anterior.

4.2.1. Kinks no Monótonos en Ecuación de Swift-Hohenberg

Las soluciones tipo kink para el modelo de Swift-Hohenberg corresponden a las soluciones del sistema determinista estacionario al considerar $\partial_t u = 0$ en (2.20),

$$\mu u_k - u_k^3 - (\partial_{xx} + q^2) u_k = 0, \quad (4.23)$$

el cual es un sistema Lagrangiano con la siguiente acción,

$$S = \int -\frac{(\mu - q^2)}{2} u_k^2 + \frac{u_k^4}{4} - q^2 (\partial_x u_k)^2 + \frac{(\partial_{xx} u_k)^2}{2} dx. \quad (4.24)$$

No integrabilidad del sistema espacial para Swift-Hohenberg

Los kinks de este modelo, sin embargo, no tienen una expresión analítica debido a que el sistema espacial es caótico. Para demostrar esto, consideremos el Lagrangiano de la acción del sistema espacial (4.24),

$$L(u, u_x, u_{xx}) = \frac{1}{2}(u_{xx})^2 - q^2(u_x)^2 - \frac{1}{2}(\mu - q^4)u^2 + \frac{1}{4}u^4, \quad (4.25)$$

por regla de la cadena se sigue,

$$\frac{dL}{dx} = \frac{\partial L}{\partial u} u_x + \frac{\partial L}{\partial u_x} u_{xx} + \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} u_{xxx}. \quad (4.26)$$

Por otra parte, se tiene la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u_x} - \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial L}{\partial u_{xx}}. \quad (4.27)$$

Sustituyendo (4.27) en (4.26) se sigue

$$0 = \frac{d}{dx} \left(u_x \frac{\partial L}{\partial u_x} + u_{xx} \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} - u_x \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} - L \right), \quad (4.28)$$

de donde se deduce que el sistema tiene una cantidad conservada que corresponde a la función hamiltoniana, el cual es de la forma

$$E = \frac{(\mu - q^2)}{2} u_k^2 - \frac{u_k^4}{4} - q^2 (\partial_x u_k)^2 + \frac{(\partial_{xx} u_k)^2}{2} - \partial_x u_k \partial_{xxx} u_k. \quad (4.29)$$

Sin embargo, esta es la única cantidad conservada, luego, el sistema dinámico no es integrable, y uno puede mostrar que los kinks y estructuras estacionarias exhibidas por este sistema son resultado del comportamiento caótico de este sistema espacial [25].

Otra forma, más bien heurística, de entender esto mismo, es que dada la mínima diferencia entre el conjunto de estructuras localizadas que son soluciones de esta ecuación, y dada una condición inicial, una pequeña diferencia repercutirá en un drástico cambio entre la cantidad de veces que pasara de un estado al otro, y por medio de cuantas oscilaciones lo hará en cada caso.

Comportamiento Asintótico

Por otra parte, podemos caracterizar el comportamiento asintótico del kink mediante la linealización de la Eq. (4.23) en torno a sus estados uniformes $u_{\pm} = \pm\sqrt{\mu - q^4}$

$$u_k(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow \pm\sqrt{\mu - q^4}e^{-ax} \cos(bx) + u_{\pm}, \quad (4.30)$$

donde

$$a \equiv \sqrt{2\mu - 3q^4}/4\sqrt{-q^2 + \sqrt{2(\mu - q^4)}} \quad (4.31)$$

$$b \equiv \sqrt{-q^2 + \sqrt{2(\mu - q^4)}}. \quad (4.32)$$

Luego, podemos caracterizar analíticamente las oscilaciones espaciales amortiguadas exhibidas por las soluciones kinks no monótonos. Es importante notar que este comportamiento asintótico es fundamental para caracterizar la interacción entre kinks.

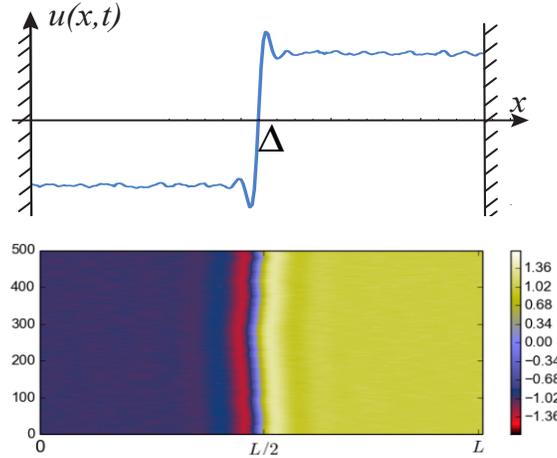


Figura 4.5: Solución kink de la ecuación de Swift-Hohenberg con los parámetros $\mu = q = 1$ and $\eta = 0,0018$. a) perfil de la solución b) diagrama espacio-temporal de la evolución del kink.

4.2.2. Dinámica de Kinks no Monótonos Bajo Ruido Interno y Efectos de Tamaño

Consideramos los efectos de un término estocástico en la ecuación de Swift-Hohenberg (2.20), luego de la bifurcación secundaria cuando los dos estados uniformes son estables y permiten la aparición de frentes entre estados simétricos, considerando un dominio de tamaño L con condiciones especulares de borde.

Simulaciones numéricas nos muestran que la dinámica para la posición del kink es no está únicamente caracterizada por una difusión, sino muestra la preferencia de ubicarse en torno a posiciones específicas del sistema. Figura 4.6 muestra diferentes realizaciones de trayectorias de la posición. De forma inesperada, la dinámica de la posición del kink está caracterizada por una dinámica de salto, esto es, la posición del kink permanece por largos

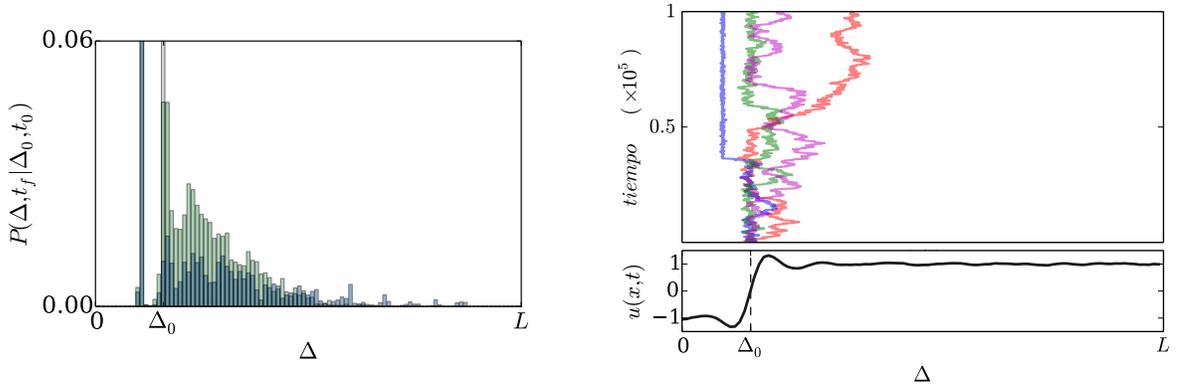


Figura 4.6: Dinámica estocástica de un kink del modelo de Swift-Hohenberg (2.20). a) Simulación numérica de un kink bajo condiciones especulares de borde en un sistema finito del modelo (2.20), con $\mu = 1$, $q = 1$ y $\eta = 0,0018$ partiendo de la posición $\Delta = \Delta_0 \approx 0,15L$. b) El kink en el momento inicial. c) Evolución de la probabilidad de supervivencia de un kink en diferentes instantes de tiempo $t_1 = 0$ (negro), $t_2 = 10^6$ (verde) y $t_3 = 2 \times 10^6$ (azul).

periodos fluctuando en torno a posiciones definidas y bruscamente salta a otra. Considerando diferentes trayectorias del kink surgidas de una misma condición inicial, podemos construir la probabilidad de supervivencia mostrada en la misma figura, y notamos como esta se propaga asimétricamente de forma similar a la forma descrita anteriormente para el kink monótono. Pero además, emergen máximos locales en posiciones específicas, posiciones donde el kink tiene mayor probabilidad de ser encontrado.

Del mismo modo que en el caso de la emergencia de patrones y precursores de patrón en la ecuación de Swift-Hohenberg, dado que el sistema tiene un modo espacial privilegiado, las fluctuaciones sustentan la aparición de precursores de patrón sobre el kink. Sin embargo, debido a su baja coherencia, esta estructura no genera potenciales efectivos que permitan generar mínimos locales. La dinámica es gobernada por las oscilaciones deterministas del kink, y es por ello que la dinámica de salto no se observa sino cerca de los bordes.

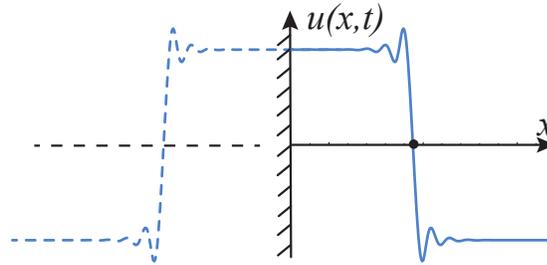


Figura 4.7: Esquema del ansatz de la ecuación (4.33). El efecto del borde es reemplazado por la consideración de un kink *reflejado* al otro lado de este.

Para entender la dinámica observada, usaremos una estrategia similar a la usada para obtener la dinámica de kinks monótonos bajo la influencia de ruido interno y efectos de tamaño. Esto es, considerar un par kink anti-kink generado por una condición de borde tipo

especular. Para ello tomaremos el *ansatz*,

$$u(x, t) = u_k^+ [x + \Delta(t)] + u_k^- [x - \Delta(t)] - \sqrt{\mu - q^4} + w(x, \Delta), \quad (4.33)$$

donde u_k^+ ahora corresponde a una solución tipo kink de la ecuación determinista de Swift-Hohenberg (2.20), y u_k^- una solución tipo anti-kink, $\Delta(t)$ es la posición en el tiempo del kink, a la derecha del borde que se ubica en el origen del sistema, y $w(x, \Delta)$ es una pequeña función correctiva. El *ansatz* anterior es válido cuando el kink y el anti-kink están suficientemente separados (i.e. $\Delta \gg 1$). La figura 4.7 muestra la solución representada por el *ansatz* anterior.

Introduciendo este *ansatz* en la ecuación (2.20), se sigue luego de despreciar términos no lineales en w ,

$$\mathcal{L}w = \dot{\Delta}(\partial_x u_k^+ + \partial_x u_k^-) + \sqrt{\eta}\bar{\zeta}(x, t) \quad (4.34)$$

$$+ 3[u_k^+ \mu - \sqrt{\mu}(u_k^+)^2 + (u_k^-)^2(u_k^+ - \sqrt{\mu}) - u_k^-(u_k^+ - \sqrt{\mu})^2], \quad (4.35)$$

esta vez, el operador \mathcal{L} está dado por la expresión ,

$$\mathcal{L} \equiv -(\mu - q^4) + 3(u_k^+)^2 - (\partial_{xx} + k^2)^2, \quad (4.36)$$

el cual es auto-adjunto bajo el producto interno usual,

$$(f(x)|g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx \quad (4.37)$$

Nuevamente, análogamente al caso del kink monótono, la solución tipo kink es un modo de Goldstone, y se tiene

$$\mathcal{L}\partial_x u_k = 0 \quad (4.38)$$

de este modo, este caso es totalmente análogo al caso del kink monótono, solo cambia la solución que debemos considerar, por tanto, para describir la dinámica de la posición del kink nos encontramos con una expresión totalmente análoga a (4.15)

$$N\dot{\Delta} = f_1(\Delta) + f_2(\Delta) + f_3(\Delta) + \sqrt{\eta}\bar{\zeta}(t)N, \quad (4.39)$$

donde,

$$f_1(\Delta) \equiv 3\sqrt{\mu - q^4}(\partial_x u_k^- | u_k^- [u_k^+ - \sqrt{\mu - q^4}]), \quad (4.40)$$

$$f_2(\Delta) \equiv 3(\partial_x u_k^- | (u_k^-)^2 [u_k^+ - \sqrt{\mu - q^4}]), \quad (4.41)$$

$$f_3(\Delta) \equiv 3(\partial_x u_k^- | u_k^- [u_k^+ - \sqrt{\mu - q^4}]^2), \quad (4.42)$$

donde $N = (\partial_x u_k^- | \partial_x u_k^-)$ corresponde a la movilidad. Esta ecuación puede ser aproximada por la ecuación de Langevin

$$\begin{aligned} \dot{\Delta} &= -\frac{\partial U}{\partial \Delta} + \sqrt{\eta}\bar{\zeta}(t), \\ &= -\alpha' e^{-2a\Delta} \sin(2b\Delta) + \sqrt{\eta}\bar{\zeta}(t), \end{aligned} \quad (4.43)$$

donde el potencial es,

$$U(\Delta) \equiv -e^{2a\Delta} \frac{b \cos(2b\Delta) + a \sin(2a\Delta)}{2(a^2 + b^2)},$$

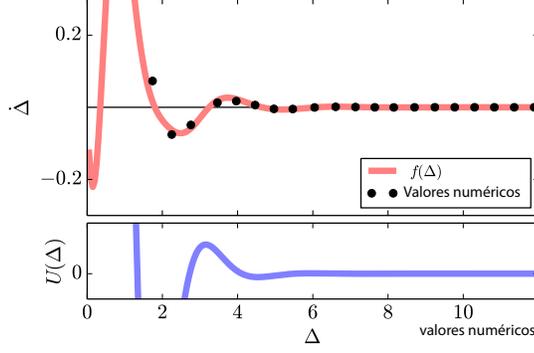


Figura 4.8: Ley cinemática para la posición del kink no monótono por efectos de tamaño. Los puntos son obtenidos considerando una distribución inicial de condiciones de kinks repartidos uniformemente por el sistema. Luego se hacen evolucionar numéricamente por un breve instante de tiempo, para calcular la variación de la posición del kink y así su velocidad. La curva sólida es obtenida usando la forma integral predicha. El panel inferior muestra el potencial asociado.

con α una constante definida por,

$$\alpha' \equiv -\sqrt{\mu - q^4} \frac{\int e^{-ax} \sin(bx) (u_k)^2 \partial_x u_k dx}{(\partial_x u_k | \partial_x u_k)},$$

y $\eta' \equiv \eta / (\partial_x u_k | \partial_x u_k)$.

De este modo, las oscilaciones espaciales amortiguadas en conjunto con las condiciones de borde producen una fuerza que alterna entre ser repulsiva y atractiva, y cuya intensidad disminuye exponencialmente al alejarse del borde.

Para verificar esta ley cinemática para la posición del kink, se considero una distribución uniforme de condiciones iniciales repartidas en diferentes posiciones del sistema. Posteriormente se dejan evolucionar por un breve instante de tiempo, calculando posteriormente el cambio en su posición y así su velocidad. La figura 4.8 muestra la comparación entre el comportamiento predicho y los datos obtenidos numéricamente, los cuales muestran un buen acuerdo a suficiente distancia del borde del sistema. Cuando se acerca demasiado, la ley no es válida.

Tomando la ley cinemática de la posición del kink, ecuación (4.43), y su respectivo potencial, podemos inferir que el sistema tiene una familia de equilibrios, que satisfacen aproximadamente $\sin(2b\Delta^*) = 0$, separadas por una distancia constante $l = \pi/2b$, i.e. $\Delta_n^* = \pi n/2b$ con $n = 1, 2, \dots$. Notar que el equilibrio es más estable en la medida en que se acerca a los bordes del sistema. Figura 4.8 muestra la forma del potencial $U(\Delta)$ cerca del borde del sistema. La dinámica en torno a un equilibrio, $\Delta(t) = \Delta^* + v(t)$, toma la forma,

$$\dot{v} = -\alpha' 2b e^{-2a\Delta^*} v + \sqrt{\eta'} \bar{\zeta}(t). \quad (4.44)$$

Luego, la dispersión en torno a un equilibrio específico está dada por,

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\eta'}{\alpha' 2b e^{-2a\Delta^*}}. \quad (4.45)$$

Así, las fluctuaciones en torno a equilibrios más estables (más cercanos al borde), son menores. De este modo, uno espera que el ancho de los máximos de la probabilidad de supervivencia en torno a un equilibrio más estable sea menor. (cf. panel inferior de la figura 4.6).

De la ecuación de Langevin (4.43), podemos derivar la ecuación de Fokker-Planck para la probabilidad de supervivencia para la posición del kink,

$$\partial_t P(\Delta, t|\Delta_0, t_0) = \partial_\Delta \left[\frac{\partial U}{\partial \Delta} \right] P + \frac{\eta'}{2} \partial_{\Delta\Delta} P, \quad (4.46)$$

con condiciones de borde absorbentes $P(\Delta = 0, t|\Delta_0, t_0) = P(\Delta = L, t|\Delta_0, t_0) = 0$. La figura 4.9 muestra la evolución de la probabilidad de supervivencia para la posición del kink no monótono, mostrando cualitativamente un buen acuerdo con las simulaciones numéricas de la ecuación estocástica de Swift-Hohenberg (2.20). Así, la dinámica de kinks no monótonos bajo la influencia de ruido interno y efectos de tamaño exhiba un comportamiento no difusivo con una dinámica de saltos.

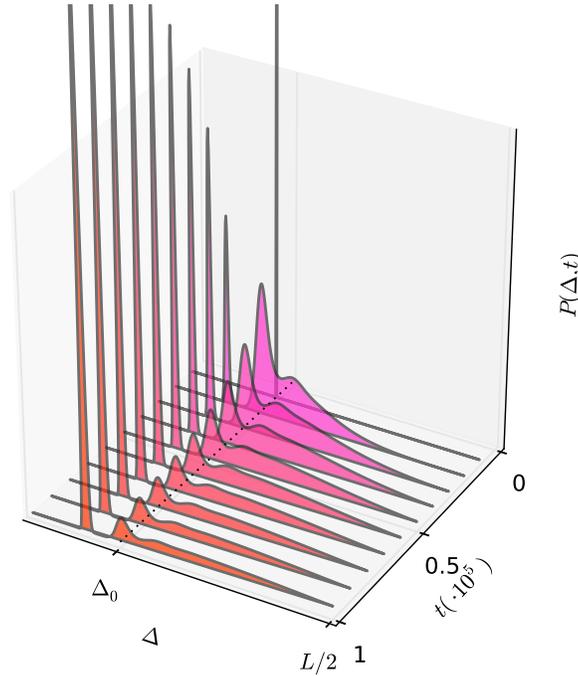


Figura 4.9: Evolución temporal de la ecuación de Fokker-Planck (4.46) con condiciones de borde absorbentes, usando el potencial (4.43) con $\alpha' = 1,157$, $a = 0,4940$ y $b = 1,026$ como parámetros de fiteo $\eta\eta = 2 \times 10^{-3}$.

Mediante las condiciones de borde, la probabilidad de supervivencia para tiempos largos converge asintóticamente a la solución cero.

Es importante notar como en el análisis presentado, hemos asumido que la creación de nuevos kinks por efecto de fluctuaciones es un evento sumamente improbable, aunque para niveles altos de ruido es un fenómeno observado fácilmente.

4.3. Dinámica de Saltos Inducida por Inhomogeneidades

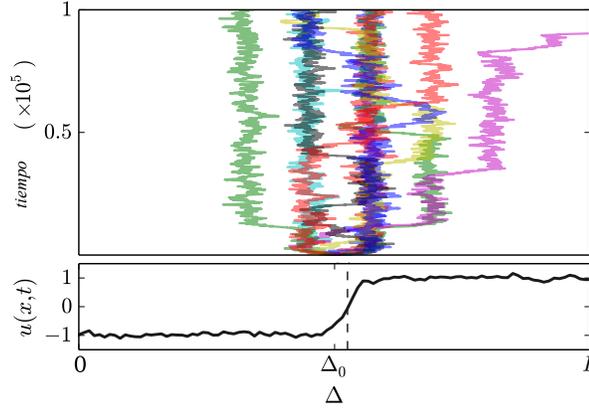


Figura 4.10: Dinámica estocástica de kinks de la ecuación forzada de Ginzburg-Landau real. (4.47) con $k = \pi/3$, $a = 0,02$ y $\eta = 0,02$. Diferentes colores representan diferentes trayectorias de la posición del kink. El panel inferior muestra el perfil del kink en el instante inicial.

Otros kinks no monótonos que exhiben una dinámica de salto como consecuencia del ruido, son aquellos que conectan dos estados periódicos [18]. Este fenómeno es evidente debido a que el patrón genera una barrera de nucleación que se opone a la propagación de la pared. En este caso, los saltos no se relacionan con un efecto de los bordes. Un sistema que presenta este tipo de kinks o frentes, es considerar un sistema donde sus parámetros están espacialmente modulados. Note que este tipo de forzamiento rompe la invarianza traslacional del sistema. Luego, uno espera que cualquier solución tipo partícula prefiera posiciones precisas, y el ruido posibilite que el frente transite de una posición en otra, dando lugar a una dinámica de salto.

Con el objetivo de ilustrar esto, consideremos la siguiente ecuación real de Ginzburg-Landau forzado,

$$\partial_t u = a \cos(kx) + \mu u - u^3 + \partial_{xx} u + \sqrt{\eta} \zeta(x, t), \quad (4.47)$$

donde a y k son la amplitud y número de onda del forzamiento respectivamente. Del mismo modo que un forzamiento temporal induce al sistema a responder en la misma frecuencia del forzamiento, en el caso de un forzamiento espacial oscilatorio, inducirá ondas estacionarias. Si el forzamiento es pequeño, las oscilaciones aparecen en torno a los estados de equilibrio del sistema sin forzamiento. En el caso de la ecuación de Ginzburg-Landau (4.10), los estados homogéneos se vuelven periódicos de la forma

$$u \approx \pm \sqrt{\mu} - a \cos(kx) / 2\mu. \quad (4.48)$$

Así, la ecuación real de Ginzburg-Landau ahora tiene soluciones tipo kink que conectan dos estados periódicos, los cuales en equilibrio se ubican en posiciones precisas de la forma $2\pi n/k$, with $n = 1, 2, 3, \dots$. Mediante un análisis análogo al usado en secciones anteriores, obtenemos la ley cinemática para la posición del kink,

$$\dot{\Delta} = \alpha'' \sin(k\Delta) + \sqrt{\eta} \bar{\zeta}(t), \quad (4.49)$$

donde,

$$\alpha'' = a \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x u_k^+(x) \cos(kx) dx / (\partial_x u_k^+ | \partial_x u_k^+). \quad (4.50)$$

Así, la dinámica de la posición del kink es caracterizada por un movimiento browniano en un potencial periódico. Referencia [78] presenta un análisis detallado de este tipo de partícula estocástica. Figura 4.10 muestra trayectorias numéricas para soluciones kink de la ecuación estocástica forzada de Ginzburg-Landau (4.47), donde todas las soluciones parten de la misma condición inicial. El sistema claramente exhibe una dinámica de saltos, en este caso, producida por un parámetro inhomogéneo. En las trayectorias ilustradas en la figura, los efectos de borde son despreciables. Cabe notar que aún para un forzamiento pequeño y un nivel de ruido relativamente alto respecto al forzamiento, al punto que el perfil de $u(x, t)$ no muestra claras oscilaciones, la dinámica de la posición del kink exhibe claramente una dinámica de salto.

4.4. Observación Experimental de la Dinámica de Saltos

Es importante notar que en observaciones recientes, se encontró un comportamiento similar al descrito anteriormente, en kinks sobre un medio granular [58, 59].

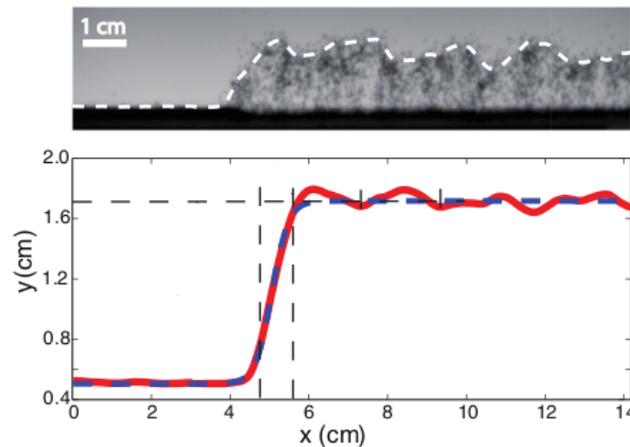


Figura 4.11: (Arriba) Imagen del perfil de un kink en una capa delgada cuasi-unidimensional de un medio granular fluidizado sujeto a un flujo periódico de aire. (Abajo) Promedio del perfil del kink tomado en 1000 ciclos. Si bien al observar el kink en un momento dado no es evidente tenga una longitud de onda característica, esta se aprecia claramente al promediar. Imágenes cortesía de Juan Macías y Juan Falcón.

Este medio granular, compuesto de aproximadamente 25000 partículas esféricas mono-dispersas de un diámetro de $a = 350\mu\text{m}$, puesto en una celda de 200mm largo, 200mm de alto y 3.5 mm, lo que lo convierte en un sistema con una dinámica cuasi-unidimensional. Este medio es fluidizado por medio de un flujo de aire periódico que fluye desde abajo del medio en contra de la gravedad. Este forzamiento paramétrico induce la aparición de una frecuencia sub-armónica en el medio sobre cierta presión y frecuencia crítica. Al observar la dinámica extendida en el espacio, se ve la aparición de kinks sobre la superficie del medio, como se muestran en la figura 4.11.

Los medios granulares excitados por medio de forzamientos paramétricos o similares se encuentran en un contexto entre la descripción continua y discreta, es decir, son demasiadas partículas para tratarlas como un problema mecánico, pero por otro lado, son demasiado

pocas para que una aproximación termodinámica tenga buen acuerdo. Debido a sus enormes fluctuaciones inherentes, que en este caso, se manifiestan en una gran irregularidad en el comportamiento espacial y temporal de la superficie del medio, fluctuaciones que no son mucho menores que el tamaño del sistema.

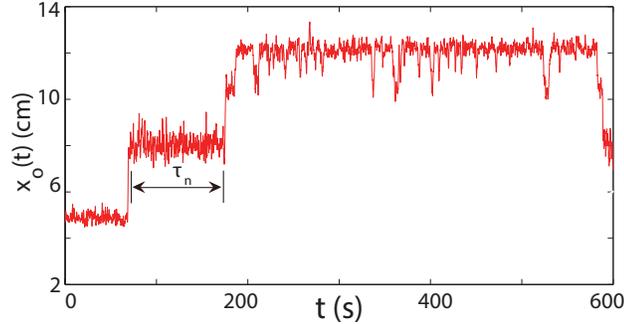


Figura 4.12: Evolución temporal de la posición de un kink granular, x_0 . Se distingue claramente como el kink luego de oscilar en torno a ciertas posiciones, abruptamente se mueve a otra. Imagen cortesía de Juan Macías y Claudio Falcón.

En este sistema se observa una dinámica de salto para la posición del kink tal como se aprecia en la figura 4.12. Si bien no es evidente que se trata de kinks no monótonos, en la figura 4.11 se puede notar claramente que al tomar promedios sobre muchos instantes el kink tiene una longitud de onda privilegiada, lo que es consistente con los resultados aquí presentados: kinks no monótonos presentan una dinámica de salto. En este caso, se observa que las fluctuaciones disminuyen al acercarse al borde (ver figura 4.12), lo que nos hace conjeturar que esta dinámica es producto de efectos de tamaño.

Dado que los medios granulares no poseen ecuaciones que permitan estudiarlos desde primeros principios como sistema macroscópico, sólo es posible hacer una comparación cualitativa.

4.5. Efecto del Ruido en Transición de Ising-Bloch

Otro tipo de paredes de dominio con una dinámica interesante, son las paredes de Bloch, las cuales como fue explicado en 2.4.3. Un sistema no variacional al sufrir una transición desde paredes de Ising a paredes de Bloch, por medio una bifurcación de *pitchfork* por ejemplo, pasan luego de un valor crítico para los parámetros de bifurcación, de tener una velocidad de propagación exactamente nula a propagarse en una dirección u otra mediante un rompimiento espontáneo de simetría. Considerando así como el ruido induce la aparición de precursores de patrón en la ecuación de Swift-Hohenberg, anticipando el levantamiento de patrones, o en el caso de el modelo logístico, puede anticipar el surgimiento de caos [40], cabe preguntarse **¿Podría el ruido anticipar también la aparición del rompimiento de simetría y la propagación coherente de una pared de Ising cerca de la transición a convertirse en una pared de Bloch?**

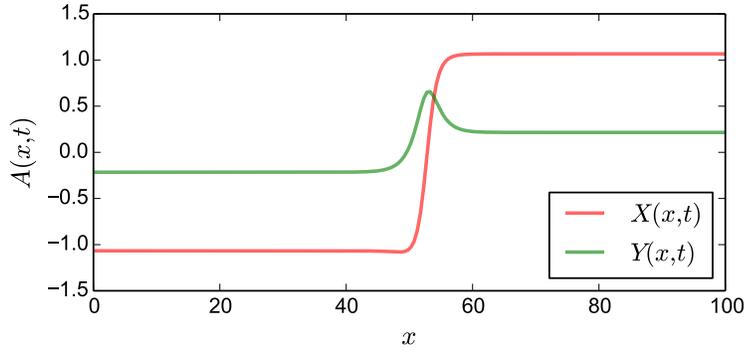


Figura 4.13: Perfil de una pared de Bloch con quiralidad positiva, donde X da cuenta de la componente real, e Y de la imaginaria, para la ecuación (2.42) con los parámetros $\mu = 1$, y $\gamma = 0,2$, y considerando términos no variacional no nulos $\nu = 0,1$, $\alpha = -0,1$ y $\beta = -0,15$.

La respuesta es no, al menos no en el sentido más ingenuo de esperar que la moda de la velocidad de propagación bajo la bifurcación sea distinta de cero como en el caso determinista. Sin embargo, mostraremos que el ruido hace al sistema manifestar síntomas de que una bifurcación se acerca. En tal sentido, este ejemplo, es un caso interesante para comprender que puede el ruido hacer en una bifurcación.

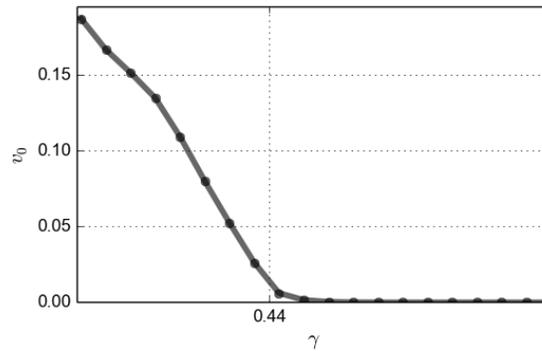


Figura 4.14: Velocidad determinista del frente para la ecuación (4.51), con $\mu = 1$, $\nu = 0,1$, $\alpha = -0,1$, $\beta = -0,15$, $\eta = 0$ y para distintos valores de γ .

Un estudio de la distribución de velocidades para la pared bajo el punto de bifurcación pero cerca de este nos muestra que el valor esperado se encuentra justo en cero, análogamente a lo que ocurriría en el caso variacional. Si bien velocidades no nulas tienen una probabilidad distinta de cero, sobre el frente no se manifiesta un movimiento coherente en una dirección, sino fluctúa y tiene un movimiento azaroso. En la figura 4.15 podemos ver trayectorias típicas de la dinámica de las paredes cerca de la bifurcación.

Heurísticamente, el motivo radica en que si bien el ruido hace emerger una quiralidad, esta surge débilmente y es del mismo orden que el ruido que la perturba, impidiendo a la pared mantener un movimiento coherente en una dirección.

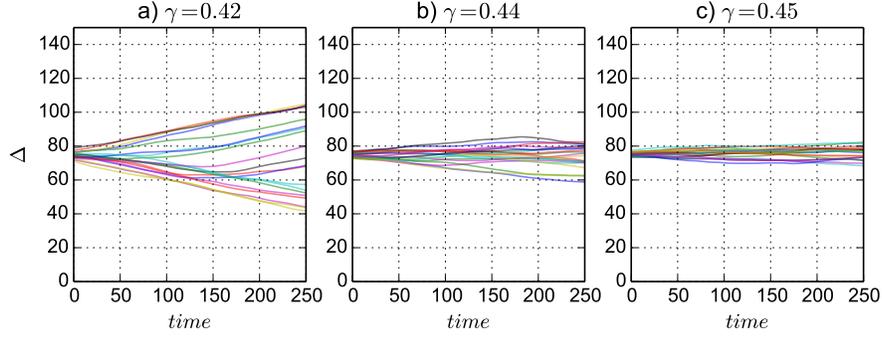


Figura 4.15: Trayectorias típicas de paredes cerca de la bifurcación, para la ecuación (4.51), con $\mu = 1, \nu = 0,1, \alpha = -0,1, \beta = -0,15, \eta = 0,05$ y para $\gamma = 0,42, 0,44, 0,45$.

4.5.1. Dinámica de la Pared

Para caracterizar teóricamente la dinámica de una pared tipo Ising y tipo Bloch, consideremos la ecuación estocástica de Ginzburg Landau,

$$\frac{\partial A}{\partial t} = (\mu + i\nu)A + (1 + i\alpha)\partial_{xx}A - (1 + i\beta)|A|^2A + \gamma\bar{A} + \sqrt{\eta}\zeta(x, t) \quad (4.51)$$

Con el cambio de variable $A = X + iY$ podemos reescribir esta ecuación de forma matricial,

$$\partial_t \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - (X^2 + Y^2) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

$$+ \mathcal{L}^{nv} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \beta(X^2 + Y^2) \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix} + \sqrt{\eta} \begin{pmatrix} \zeta_X(x, t) \\ \zeta_Y(x, t) \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mu + \gamma + \partial_{xx} & 0 \\ 0 & \mu - \gamma + \partial_{xx} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}^{nv} = \begin{pmatrix} 0 & -\nu - \alpha\partial_{xx} \\ \nu + \alpha\partial_{xx} & 0 \end{pmatrix}$$

Donde $\zeta_i(x, t)$ $i = X, Y$ son ruidos Gaussianos con promedio cero y correlación delta temporal y espacialmente $\langle \zeta_i(x, t), \zeta_j(x', t') \rangle = \delta_{ij}\delta(t-t')\delta(x-x')$. Consideraremos pequeños los términos estocásticos y no variacionales $\nu, \alpha, \beta, \eta \ll 1$. En el punto crítico se tiene como solución $A_0(x) = X_0(x) = 2\sqrt{\frac{\mu}{3}} \tanh(\sqrt{\frac{\mu}{3}}x)$. Luego, tomando el cambio de variable,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (4.54)$$

con $u, v \ll 1$ se tiene considerando perturbativamente los términos estocásticos y no variacionales,

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} &= \left[\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_0^{nv} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \mu - 3\gamma & 0 \\ 0 & -\mu + 3\gamma \end{pmatrix} \right] \mathbf{u} \\ &\quad - \begin{pmatrix} u^3 + uv^2 + 3u^2x + v^2X_0 \\ u^2v + v^3 + 2uvX_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_X(x, t) \\ \zeta_Y(x, t) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.55)$$

donde,

$$\mathcal{L}_0 = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_X & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_Y \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\mu + \partial_{xx} - 3X_0^2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\mu + \partial_{xx} - X_0^2 \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

$$\mathcal{L}_0^{nv} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{L}_Y^{nv} \\ \mathcal{L}_X^{nv} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\nu - \alpha\partial_{xx} - \beta X_0^2 \\ \nu + \alpha\partial_{xx} + 3\beta X_0^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

El operador es auto-adjunto bajo el producto interno,

$$\left((f_1, f_2) \middle| \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x)dx, \quad (4.60)$$

Su kernel está caracterizado por $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$

$$\mathbf{X}_1 = \partial_x X_0(x - \Delta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\mu \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\mu}{3}(x - \Delta) \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

$$\mathbf{X}_2 = \chi(t)Y_0(x - \Delta) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \chi(t) \operatorname{sech} \left[\frac{\mu}{3}(x - \Delta) \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

donde Δ y χ son parámetros que parametrizan la familia de elementos del kernel, y dan cuenta de la posición de la pared y su quiralidad. En este caso obtendremos dos ecuaciones al aplicar la condición de solubilidad. Tomando estas soluciones como *ansatz*,

$$\begin{pmatrix} X(x, t) \\ Y(x, t) \end{pmatrix} = \mathbf{X}_0(x - \Delta) + \mathbf{w}(\mathbf{X}_0) \quad (4.63)$$

$$= \begin{pmatrix} X_0(x - \Delta(t)) \\ \chi(t)Y_0(x - \Delta(t)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_X(X_0, Y_0) \\ w_Y(X_0, Y_0) \end{pmatrix}, \quad (4.64)$$

donde w_X y w_Y son correcciones pequeñas. Al sustituir en la ecuación(4.55) se sigue,

$$\mathcal{L}_0 \mathbf{w} = \dot{\Delta} \partial_x \mathbf{X}_0 + \dot{\chi} \begin{pmatrix} 0 \\ Y_0 \end{pmatrix} + \left[\mathcal{L}_0^{nv} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \mu - 3\gamma & 0 \\ 0 & -\mu + 3\gamma \end{pmatrix} \right] \mathbf{X}_0 + \sqrt{\eta} \begin{pmatrix} \zeta_X(x, t) \\ \zeta_Y(x, t) \end{pmatrix}, \quad (4.65)$$

Aplicando condición de solubilidad usando \mathbf{X}_1 y \mathbf{X}_2 , y considerando que X_0 es una función impar, e Y_0 una función par, se obtiene respectivamente para cada vector,

$$\dot{\Delta} = \chi(t) \frac{(\partial_x X_0 | \mathcal{L}_Y^{nv} Y_0)}{(\partial_x X_0 | \partial_x X_0)} + \sqrt{\eta} (\partial_x X_0 | \zeta_X(x, t)) \quad (4.66)$$

$$\dot{\chi} = (\mu - 3\gamma) \chi - \chi^3 + \sqrt{\eta} (Y_0 | \zeta_Y(x, t)) \quad (4.67)$$

Calculando las integrales se llega a las ecuaciones dinámicas,

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = \chi v_0(\nu, \alpha, \beta) + \sqrt{\eta_\Delta} \zeta_1(t), \quad (4.68)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = (\mu - 3\gamma) \chi - \chi^3 + \sqrt{\eta_\chi} \zeta_2(t) \quad (4.69)$$

donde $\zeta_{i=1,2}(t)$ son ruidos gaussianos con promedio nulo y correlación $\langle \zeta_i(t), \zeta_j(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t - t')$, y,

$$v_0 = \frac{\sqrt{2\pi}}{48\mu} [-3\nu + 2\beta\mu + \alpha\mu], \quad (4.70)$$

$$\eta_\Delta = \frac{9\eta}{16} \sqrt{\frac{3}{\mu^3}}, \quad (4.71)$$

$$\eta_\chi = \frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{\mu}{3}}. \quad (4.72)$$

En la ecuación de Δ términos no lineales en Δ y χ fueron despreciados. En el caso de χ se conservó el primer término saturante, debido a que el término lineal es ser positivo sobre la transición de Ising-Bloch. Esta expresión es distinta a la encontrada en la referencia [26] debido a que en este caso también se consideró $\mu - 3\gamma \ll 1$, para capturar apropiadamente la bifurcación.

La ecuación de Fokker-Planck asociada a las variables Δ y χ es,

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\Delta, \chi, t | \Delta_0, \chi_0, t_0) = -\frac{\partial}{\partial \Delta} [\chi v_0] P - \frac{\partial}{\partial \chi} [(\mu - 3\gamma) \chi - \chi^3] P, \quad (4.73)$$

$$+ \frac{\eta_\Delta}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \Delta^2} + \frac{\eta_\chi}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \chi^2}, \quad (4.74)$$

promediando sobre χ se sigue,

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\Delta, t | \Delta_0, t_0) = -\langle \chi \rangle v_0 \frac{\partial P}{\partial \Delta} + \frac{\eta_\Delta}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \Delta^2} \quad (4.75)$$

Podemos estudiar la velocidad promedio con la que se moverá el frente. Integrando por parte y considerando que $P(\pm\infty, t | \Delta_0, t_0) \rightarrow 0$ se sigue,

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \Delta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta \frac{\partial}{\partial t} P(\Delta, t | \Delta_0, t_0) d\Delta \quad (4.76)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Delta \frac{\partial}{\partial \Delta} \left[-\langle \chi \rangle v_0 P(\Delta, t | \Delta_0, t_0) + \frac{\eta'}{2} \frac{\partial}{\partial \Delta} P(\Delta, t | \Delta_0, t_0) \right] d\Delta \quad (4.77)$$

$$= \langle \chi \rangle v_0 \quad (4.78)$$

La velocidad promedio coincide con la velocidad determinista. De este modo, mostramos que en este límite el ruido no anticipa la bifurcación, ya que bajo esta $\langle \chi \rangle = 0$. En la figura (4.16) se muestra la distribución de probabilidad para las velocidades para diferentes valores de γ . Antes de cruzar la bifurcación, el promedio se encuentra en torno a cero.

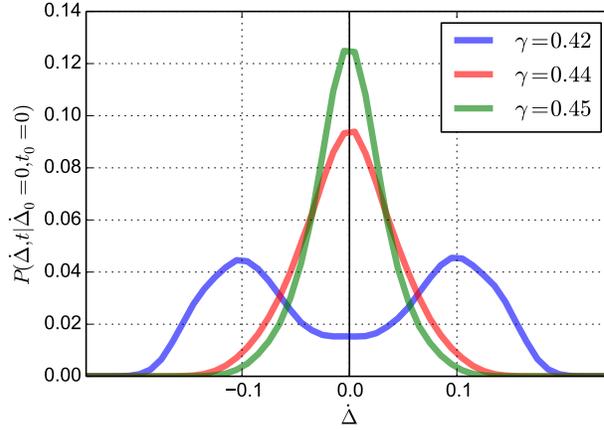


Figura 4.16: Distribución de Probabilidad de velocidades obtenida numéricamente para la ecuación (2.42), con $\mu = 1, \nu = 0,1, \alpha = \beta = 0$ para $\gamma = 0,42, 0,44, 0,45$. Bifurcación ocurre aproximadamente en $\gamma_c = 0,44$

4.5.2. Correlaciones

Por otra parte, podemos notar en la ecuación (4.68) que esta no tiene parte lineal. Esto significa que los tiempos de correlación son enormes. Simulaciones numéricas de las paredes de dominio coinciden con este resultado, como se puede ver en el lento decaimiento de las funciones de autocorrelación de en la figura 4.17

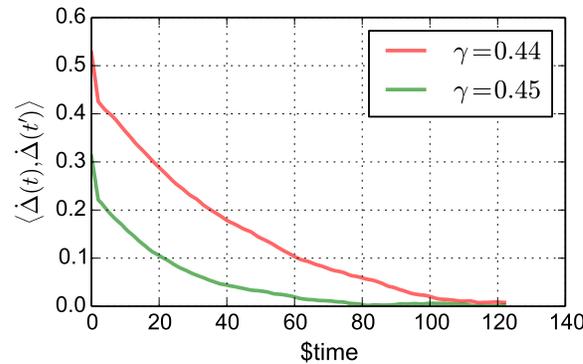


Figura 4.17: Función de auto-correlación para paredes de la ecuación (2.42), con $\mu = 1, \nu = 0,1, \alpha = \beta = 0, \eta = 0,05$ para $\gamma = 0,44, 0,45$.

Si volvemos a la imagen 4.15, vemos que el movimiento de la pared no corresponde a un movimiento Browniano típico. En este caso, si bien la velocidad fluctúa, cambia de dirección lentamente. A partir de la ecuaciones (4.68) y (4.69) podemos calcular la auto-correlación de la velocidad de la pared

$$\langle \dot{\Delta}(t), \dot{\Delta}(t') \rangle = \langle [v_0\chi(t) + \sqrt{\eta_\Delta}\zeta_1(t)], [v_0\chi(t') + \sqrt{\eta_\Delta}\zeta_1(t')] \rangle \quad (4.79)$$

$$= v_0^2 \langle \chi(t), \chi(t') \rangle + \eta_\Delta \langle \zeta_1(t), \zeta_1(t') \rangle \quad (4.80)$$

podemos aproximar la función de auto-correlación de χ bajo la transición de Ising-Bloch suponiendo su dinámica como un proceso de Orstein-Uhlenbeck de tiempo de correlación $\tau = \eta_\Delta/(\mu - 3\gamma)$, de este modo

$$\langle \dot{\Delta}(t), \dot{\Delta}(t') \rangle = v_0^2 \chi_0^2 \exp\left[-\frac{|t-t'|}{\tau}\right] + \eta_\Delta \delta(t-t'), \quad (4.81)$$

En este análisis es claro que cerca de la transición Ising-Bloch, cuando $\gamma \rightarrow \mu/3$ entonces $\tau \rightarrow \infty$, lo que explica el largo tiempo de correlación observado numéricamente. Incluso, el segundo término explica el cambio de curvatura cerca de $t = 0$.

De esta forma, bajo la bifurcación, el ruido la anticipa no de la forma en que se pudo intuir inicialmente, mediante la aparición de una velocidad cuyo valor de expectación fuera no nulo, sino, aumentando notoriamente los tiempo de correlación para la velocidad de propagación.

Capítulo 5

Librería Para Simulación de Ecuaciones Diferenciales

Con el fin de facilitar el desarrollo de simulaciones numéricas, extensamente usadas durante este trabajo, se construyó una librería bajo el lenguaje de programación *Python*. Todas las simulaciones en este trabajo fueron realizadas usando esta herramienta.

La idea original de un programa que permitiera resolver ecuaciones diferenciales de manera interactiva, pudiendo dibujar condiciones iniciales o cambiar los parámetros en medio de la simulación, surge de un programa desarrollado por Pierre Couillet hace más de 20 años bajo *Yellow Box*. Sin embargo, cómo se explica a continuación, existen múltiples ventajas que justifican el re-hacer la rueda", dadas las necesidades y los desarrollos informáticos actuales.

5.0.3. ¿Por qué Python?

Python es un lenguaje de programación interpretado, esto significa, que no se genera un código de máquina usando un compilador, sino, se interpreta directamente el código escrito por el programador.

Este lenguaje tiene múltiples ventajas sobre otras opciones como C,C++ o Java, entre las que cabe destacar,

- **Simplicidad de la Sintaxis:** Lo cual permite escribir código muy rápidamente. Programas que lleven a cabo funciones complejas pueden tomar una cantidad mínima de líneas respecto a otros lenguajes.
- **Python viene con pilas incluidas:** Este lenguaje trae implementado de forma nativa un gran conjunto de funciones que en otros lenguajes deberían ser implementadas de forma independiente. Cabe destacar la librería Scipy, la cuál provee de prácticamente todas las rutinas que pueden ser encontradas en Matlab, incluyendo poderosas herramientas de visualización de datos. Por otra parte, una activa comunidad mantiene un conjunto de librerías para los más diversos fines.

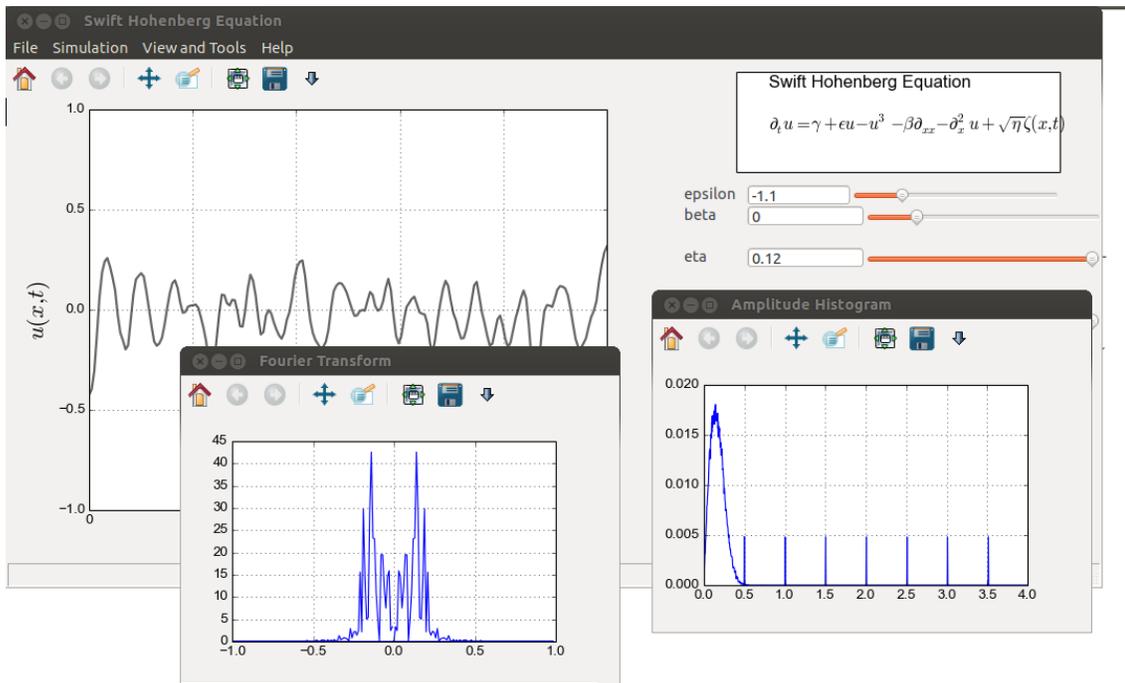


Figura 5.1: Ejemplo de Script de simulacion con dos subvisualizaciones.

- **Multiplataforma:** Python corre de forma nativa en los principales sistemas operativos, incluyendo Windows, OSX, y todas las distribuciones de Linux.

Cabe mencionar que pese a sus múltiples ventajas, python al ser interpretado, es más lento que un lenguaje compilado como C++. Sin embargo, posee multiples herramientas para integrar código escrito en C y C++. Actualmente, se trabaja en una versión que permita fácilmente incorporar simulaciones escritas en estos lenguajes.

La librería está programada para *Python 2.7*. y requiere además instalar las liberías estándar,

- **python-wx**
- **python-scipy:** la cual incluye,
 - **python-numpy**
 - **python-matplotlib**

5.1. Integración

La integración se basa en el uso de *arrays* provistos por la librería estándar *Numpy*. Esta librería permite realizar operaciones aritméticas entre arreglos de números de forma natural, a una velocidad no mucho mayor a la que se realizarían bajo un lenguaje compilado.

Posee multiples métodos para realizar la integracion:

- Euler
- Método de Leap Frog
- Método de Runge-Kutta Órden 4
- Método de Heun (estocástico)

Además, trae métodos para el cálculo automático de derivadas espaciales. Incluye programadas condiciones de borde periódicas y especulares, las cuales se seleccionan con solo ingresar un comando.

Cabe notar, que tal como están diseñados los métodos en base a arrays de Numpy, permite resolver ecuaciones de una dimensión arbitraria.

5.2. Visualización

Quizá el aspecto más único de esta librería es que ofrece diversas herramientas visuales. Al iniciar una visualización interactiva, opción que puede ser inactivada, se abre una ventana donde se puede intervenir directamente el campo, permitiendo dibujar condiciones iniciales manualmente. Trae un cuadro de control para mover múltiples parámetros de la ecuación simulada. Esto es muy útil para comenzar a familiarizarse con una nueva ecuación.

En el menú superior existen opciones para guardar y cargar estados (esto es, se guarda tanto el campo como los parámetros usados), permitiendo poner una breve descripción. De este modo, se pueden guardar comportamientos descubiertos durante el estudio exploratorio de una ecuación.

Tiene un menú donde se pueden escoger visualizaciones especiales. Por ejemplo, para abrir una ventana con la transformada de Fourier del campo. Por defecto trae la transformada de Fourier, el gráfico de $\partial_x u(x, t)$ vs $u(x, t)$, y el campo promedio. Sin embargo, se pueden agregar cuantas visualizaciones se quiera, las cuales usando las herramientas provistas por *Scipy* toma solo un par de líneas programar.

También trae funciones menores, como por ejemplo para pausar o reiniciar la simulación, hacer *zoom*, exportar gráficos como imagen (pudiendo elegir entre diversos formatos) o extraer los datos de este.

5.3. Programación de una Simulación

La librería provee todas las herramientas habitualmente utilizadas para hacer una simulación de una ecuación diferencial en derivadas parciales en una dimensión, con o sin ruido.

Estas se seleccionan mediante un *script*, donde se crea una función que será ejecutada en cada paso. A continuación se pone un ejemplo, donde se integrará la ecuación de Ginzburg-

Landau Real forzada.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma + \varepsilon u(x, t) - u^3(x, t) + \partial_{xx}u(x, t) \quad (5.1)$$

```

from Kit import *      #Importación de la libreria

#Parámetros de la simulación y valores predeterminados. Se pueden modificar
al llamar el programa agregando la orden variable=valor
comandos = {'epsilon':1,'gamma':0,'DIV':200,'dx':0.5,'dt':0.01,'tipo_borde':'especular'}
##### PREAMBULO BASICO #####
def to_variable(comandos):
    for name, value in comandos.iteritems():
        globals()[name]=value
comandos=leer_argumentos(sys.argv,comandos)
to_variable(comandos)

mx,Lx,my,Ly = 0,DIV*dx,-3,6
DIV = int(DIV)

#### CONDICION INICIAL Y DEFINICION DE LOS CAMPOS #####
X=linspace(0,Lx,DIV)
U = 1.5*tanh(X-Lx/2.0)

borde = Boundary(tipo_borde) #se fija el tipo de condición de borde

#### DEFINICION FUNCIONES A ITERAR #####

Se define la función a integrar, p son los parámetros,
t el tiempo y U el campo
def f(p,t,U):
#El cálculo del laplaciano lo provee el objeto global llamado
    en este caso borde
    lapU = borde.lap(U,dx)
    dU = p[0]*U - U*U*U + lapU + p[1]
    return dU

#La función que es llamada en cada petición de la animación.
En este caso, la visualización se actualiza cada 100 pasos. parent es el
objeto que posee todos los parámetros de la simulación y visualización.
def simulacion(parent,U):
    for i in range(100):
        parent.t += dt
        U = parent.metodo.integrar(parent.t,U)
    return U

#### INICIALIZACION DE VISUALIZACIONES #####

#Se puede colocar una descripción de la ecuación simulada.
Admite LaTeX

```

```

eqcaption = 'Real Ginzburg Landau Equation \n \n
            $\partial_t u = \gamma + \epsilon u - u^3 + \partial_{xx} u $\n'

#Parámetros cuyo valor se puede variar interactivamente.
param = ListParams({"epsilon":(epsilon,0,2,0),"gamma":(gamma,-0.1,0.1,1)})
#etiqueta: valor predefinido ,mínimo,máximo,índice en p[i]

#Se puede programar visualizaciones secundarias.
En este ejemplo, el cuadrado del campo simulado.
secondary_plots = {"U^2": (lambda parent: (parent.X,parent.Y**2))}

# Se crea un objeto Simulation, que guarda todos los parámetros
relevantes de la simulación
SIM = Simulation(f,dt,param.values(),simulacion,method='RK4',X=X,Y=U,dx=dx)

#Se inicializa la simulación entregando como parámetros los objetos
definidos anteriormente
app = wx.App()
frame = Main(mode='interactive',simulation=SIM,param=param,secplot=secondary_plots,
            title='Real Ginzburg Landau Equation',caption=eqcaption,file='id')
app.MainLoop()

```

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis se mostraron novedosos fenómenos inducidos por el ruido aditivo, en modelos prototipos y universales, lo que significa que pueden ser aplicados en diversos contextos físicos. Luego, se estudiaron fenómenos robustos del ruido.

Gran parte del modelamiento de sistemas físicos macroscópicos se ha desarrollado ignorando cualquier forma de ruido, ya que implica una mayor complejidad, pero principalmente, dado que en muchos casos, el estudiar el sistema de forma determinista producirá resultados satisfactorios. En un entendimiento sobre simplificado del rol del ruido en la dinámica de un sistema físico particular, se podría presumir que este no producirá otro efecto más que una desviación en torno al comportamiento esperado determinísticamente. Sin embargo como es evidente a esta altura de la tesis, un análisis más profundo lleva a comprender la amplia variedad de fenómenos que el ruido puede inducir. Por un lado, en el caso de ruido multiplicativo, este es capaz de inducir fuerzas efectivas (como se presentó en 2.5.3). No obstante, en este caso, se observa como el ruido induce una fuerza, pero esta fuerza puede ser tratada del mismo modo que una determinista. Es por esto que revisar el efecto del ruido aditivo es interesante, ya que un fenómeno surgido a causa de este será producto enteramente de la capacidad que provee el ruido de explorar estados que el sistema determinísticamente no permite. Si se trata de un sistema variacional, el ruido permite superar eventualmente barreras de energía. En esta línea, ya algunos ejemplos conocidos de efectos robustos producto del ruido aditivo se presentaron brevemente en el marco conceptual de esta tesis 2.6.

En esta tesis, se consideraron dos estructuras paradigmáticas que encontramos en diversos sistemas macroscópicos: frentes entre estados simétricos y patrones, en el límite de ruido de baja intensidad. De este modo, el ruido se manifestará más claramente sobre los modos críticos. En ambos casos, tanto patrones como frentes entre estados simétricos, uno de estos modos correspondía al de traslación. Consecuentemente, se reportó una dinámica estocástica para la posición del kink y la fase del patrón.

En el caso de patrones, los cuales son habitualmente caracterizados por medio de la magnitud de su amplitud como parámetro de orden, se estudió la dinámica de su fase en presencia de ruido aditivo. En caso de un sistema infinito o con condiciones periódicas de borde, se reporta que esta sigue un proceso de Wiener simple. La consideración de bordes induce el

acople entre la escala de la amplitud, y la escala del patrón subyacente, por lo que resultó necesario el cálculo de una ecuación de amplitud amendada para considerar estos efectos. A partir de ella, se dedujo una ecuación dinámica de Langevin para la fase, donde la fuerza determinista está dada por un potencial periódico, que hace que esta fluctúe en torno a determinados valores compatibles con las condiciones de borde.

Por otra parte, frentes entre estado simétricos, o kinks, bajo la influencia de ruido aditivo presentan una rica variedad de comportamientos. A primer orden, genera la difusión Browniana en su posición. La consideración de efectos de tamaño mediante la inclusión de bordes en el sistema, induce la aparición de una fuerza determinista. En este sentido, se distinguen dos casos: una fuerza atractiva hacia las paredes para el caso de kinks monótonos, lo que induce al considerar la probabilidad de supervivencia para la posición del kink, su moda se mueva hacia el interior del sistema; y una fuerza caracterizada por múltiples posiciones de equilibrio en el caso de kinks no monótonos. En este caso, la posición se caracteriza por una dinámica de saltos, en que pasa gran tiempo fluctuando en torno a un equilibrio, para de forma abrupta, saltar a otro. Una dinámica similar fue encontrada al considerar una versión modificada de la ecuación de Ginzburg-Landau, donde un parámetro variaba periódicamente.

Tomando como inspiración el caso de los precursores ruidosos, casos donde el ruido anticipa una bifurcación, se estudió la transición Ising-Bloch, donde un frente entre estados simétricos sufre un quiebre espontáneo de simetría y adquiere una dinámica propia, y se analizó si el ruido haría que este quiebre ocurriera antes de la bifurcación. La respuesta fue negativa en ese sentido, dado que el valor esperado para la velocidad coincidía con el determinista al hacer un estudio analítico y numérico. No obstante, este problema permitió obtener una visión más sofisticada sobre lo que el ruido puede y no puede hacer. El ruido aditivo puede anticipar inestabilidades al excitar todos los modos de un sistema, permitiendo a los más lentos manifestarse de forma predominante. Sin embargo, en general, los valores de expectación en general seguirán sobre el valor determinista. Aún así, se reportaron *síntomas* al estudiar la dinámica de la posición de la pared bajo la transición que muestran que una bifurcación se encuentra cerca.

Debido a que prácticamente todos los modelos teóricos aquí utilizados son aproximados, y se basan en considerar ciertos límites e hipótesis particulares que permitan simplificar cálculos, es fundamental contar con simulaciones numéricas que permitan un contraste detallado de las conclusiones obtenidas de manera analítica. Parte del trabajo de esta tesis fue la creación de una herramienta para la resolución interactiva de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales estocásticas, el cual tiene múltiples posibles usos más allá de esta tesis.

Bibliografía

- [1] G Agez, P Glorieux, M Taki, and E Louvergneaux. Two-dimensional noise-sustained structures in optics: Theory and experiments. *Physical Review A*, 74(4):043814, 2006.
- [2] G Agez, C Szwaj, E Louvergneaux, and P Glorieux. Noisy precursors in one-dimensional patterns. *Physical Review A*, 66(6):063805, 2002.
- [3] Gonzague Agez, Marcel G Clerc, Eric Louvergneaux, and René G Rojas. Bifurcations of emerging patterns in the presence of additive noise. *Physical Review E*, 87(4):042919, 2013.
- [4] Guenter Ahlers and David S Cannell. Vortex-front propagation in rotating couette-taylor flow. *Physical Review Letters*, 50(20):1583, 1983.
- [5] Igor S Aranson, Lev S Tsimring, Florent Malloggi, and Eric Clément. Nonlocal rheological properties of granular flows near a jamming limit. *Physical Review E*, 78(3):031303, 2008.
- [6] Felipe Barra, Marcel Clerc, and Enrique Tirapegui. Detailed balance in non-equilibrium systems. *Dynamics and Stability of Systems*, 12(1):61–70, 1997.
- [7] Andreas Becker and Lorenz Kramer. Linear stability analysis for bifurcations in spatially extended systems with fluctuating control parameter. *Physical review letters*, 73(7):955, 1994.
- [8] Carl M Bender and Steven A Orszag. Advanced mathematical methods for scientists and engineers. 1978.
- [9] U Bortolozzo, MG Clerc, F Haudin, RG Rojas, and S Residori. Localized states in bi-pattern systems. *International Journal of Optics*, 2009, 2009.
- [10] Tamás Börzsönyi, Silvère Akamatsu, and Gabriel Faivre. Weakly faceted cellular patterns versus growth-induced plastic deformation in thin-sample directional solidification of monoclinic biphenyl. *Physical Review E*, 80(5):051601, 2009.
- [11] Ron Bracewell. The fourier transform and iis applications. *New York*, 1965.
- [12] J Buceta, M Ibanes, JM Sancho, and Katja Lindenberg. Noise-driven mechanism for pattern formation. *Physical Review E*, 67(2):021113, 2003.

- [13] H Calisto, E Cerda, and E Tirapegui. Comment on noise and bifurcations. *Journal of statistical physics*, 69(5-6):1115–1122, 1992.
- [14] H Calisto, E Cerda, and E Tirapegui. Effective potential and weak noise transitions. *Journal of statistical physics*, 82(3-4):1015–1045, 1996.
- [15] Marcel G Clerc, Saliya Coulibaly, and David Laroze. Parametrically driven instability in quasi-reversal systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 19(10):3525–3532, 2009.
- [16] Marcel G Clerc, Pablo C Encina, and Enrique Tirapegui. Shilnikov bifurcation: stationary quasi-reversal bifurcation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 18(07):1905–1915, 2008.
- [17] MG Clerc, D Escaff, and VM Kenkre. Analytical studies of fronts, colonies, and patterns: combination of the allee effect and nonlocal competition interactions. *Physical Review E*, 82(3):036210, 2010.
- [18] MG Clerc, C Falcon, and Enrique Tirapegui. Additive noise induces front propagation. *Physical review letters*, 94(14):148302, 2005.
- [19] MG Clerc, C Fernandez-Oto, MA García-Ñustes, and E Louvergneaux. Origin of the pinning of drifting monostable patterns. *Physical review letters*, 109(10):104101, 2012.
- [20] MG Clerc, Tomoyuki Nagaya, A Petrossian, Stefania Residori, and CS Riera. First-order fréedericksz transition and front propagation in a liquid crystal light valve with feedback. *The European Physical Journal D-Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*, 28(3):435–445, 2004.
- [21] MG Clerc, S Residori, and CS Riera. First-order fréedericksz transition in the presence of light-driven feedback in nematic liquid crystals. *Physical Review E*, 63(6):060701, 2001.
- [22] JD Cole and J Kevorkian. Multiple scale and singular perturbation methods. *Appl. Math. Sci*, 114, 1996.
- [23] Pierre Collet and Jean-Pierre Eckmann. *Instabilities and fronts in extended systems*. Princeton University Press, 2014.
- [24] P Couillet. Localized patterns and fronts in nonequilibrium systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12(11):2445–2457, 2002.
- [25] P Couillet, C Elphick, and D Repaux. Nature of spatial chaos. *Physical review letters*, 58(5):431, 1987.
- [26] P Couillet, J Lega, B Houchmanzadeh, and J Lajzerowicz. Breaking chirality in nonequilibrium systems. *Physical review letters*, 65(11):1352, 1990.
- [27] John David Crawford. Introduction to bifurcation theory. *Rev. Mod. Phys.*, 63:991–1037,

Oct 1991.

- [28] Mark C Cross and Pierre C Hohenberg. Pattern formation outside of equilibrium. *Reviews of modern physics*, 65(3):851, 1993.
- [29] Michael Cross and Henry Greenside. *Pattern formation and dynamics in nonequilibrium systems*. Cambridge University Press, 2009.
- [30] Orazio Descalzi, Servet Martinez, and Enrique Tirapegui. Thermodynamic potentials for non-equilibrium systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 12(14):2619–2630, 2001.
- [31] S Douady, S Fauve, and C Laroche. Subharmonic instabilities and defects in a granular layer under vertical vibrations. *EPL (Europhysics Letters)*, 8(7):621, 1989.
- [32] Steven R Dunbar. Travelling wave solutions of diffusive lotka-volterra equations. *Journal of Mathematical Biology*, 17(1):11–32, 1983.
- [33] G d’Alessandro and WJ Firth. Hexagonal spatial patterns for a kerr slice with a feedback mirror. *Physical Review A*, 46(1):537, 1992.
- [34] C Elphick, E Tirapegui, ME Brachet, P Coulet, and G Iooss. A simple global characterization for normal forms of singular vector fields. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 29(1):95–127, 1987.
- [35] Andrew H Eschenfelder. *Magnetic bubble technology*, volume 12. Springer-Verlag Berlin, 1980.
- [36] Jay Fineberg and Victor Steinberg. Vortex-front propagation in rayleigh-bénard convection. *Physical review letters*, 58(13):1332, 1987.
- [37] Ronald Aylmer Fisher. The wave of advance of advantageous genes. *Annals of Eugenics*, 7(4):355–369, 1937.
- [38] Luca Gammaitoni, Peter Hänggi, Peter Jung, and Fabio Marchesoni. Stochastic resonance. *Reviews of modern physics*, 70(1):223, 1998.
- [39] JB Gao, J Hu, WW Tung, and YH Cao. Distinguishing chaos from noise by scale-dependent lyapunov exponent. *Physical Review E*, 74(6):066204, 2006.
- [40] JB Gao, SK Hwang, and JM Liu. When can noise induce chaos? *Physical review letters*, 82(6):1132, 1999.
- [41] Jordi García-Ojalvo, Aurora Hernández-Machado, and José M Sancho. Effects of external noise on the swift-hohenberg equation. *Physical review letters*, 71(10):1542, 1993.
- [42] Jordi García-Ojalvo, JMR Parrondo, José M Sancho, and Christian Van den Broeck. Reentrant transition induced by multiplicative noise in the time-dependent ginzburg-landau model. *Physical Review E*, 54(6):6918, 1996.
- [43] Jordi García-Ojalvo and José M Sancho. *Noise in spatially extended systems*. Springer,

- 1999.
- [44] CW Gardiner. *Stochastic methods*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo, 1985.
 - [45] Raymond E Goldstein, Gemunu H Gunaratne, L Gil, and P Coulet. Hydrodynamic and interfacial patterns with broken space-time symmetry. *Physical Review A*, 43(12):6700, 1991.
 - [46] Damià Gomila, Pere Colet, Gian-Luca Oppo, and Maxi San Miguel. Stable droplets and growth laws close to the modulational instability of a domain wall. *Physical review letters*, 87(19):194101, 2001.
 - [47] A Hagberg, A Yochelis, H Yizhaq, C Elphick, L Pismen, and E Meron. Linear and nonlinear front instabilities in bistable systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 217(2):186–192, 2006.
 - [48] Peter Hänggi, Peter Talkner, and Michal Borkovec. Reaction-rate theory: fifty years after kramers. *Rev. Mod. Phys.*, 62:251–341, Apr 1990.
 - [49] Werner Horsthemke and René Lefever. *Noise-Induced Transitions: Theory and Application in Physics, Chemistry, and Biology*, volume 15. 1984.
 - [50] Werner Horsthemke and René Lefever. Noise-induced transitions: Theory and application in physics, chemistry, and biology. *Springer Series in Synergetics*, Springer-Verlag, Berlin, 15, 1984.
 - [51] E Knobloch, J Hettel, and G Dangelmayr. Parity breaking bifurcation in inhomogeneous systems. *Physical review letters*, 74(24):4839, 1995.
 - [52] AN Kolmogorov, IG Petrovsky, and NS Piskunov. Investigation of a diffusion equation connected to the growth of materials, and application to a problem in biology. *Bull. Univ. Moscow, Ser. Int. Sec. A*, 1(1), 1937.
 - [53] Lev Davidovich Landau. *Collected papers of LD Landau*. Pergamon, 1965.
 - [54] Lev Davidovich Landau and EM Lifshitz. *Statistical Physics. Part 1: Course of Theoretical Physics*. Pergamon, 1980.
 - [55] JS Langer. An introduction to the kinetics of first-order phase transitions. *Solids far from Equilibrium*, pages 297–363, 1992.
 - [56] Eric Louvergneaux. Pattern-dislocation-type dynamical instability in 1d optical feedback kerr media with gaussian transverse pumping. *Physical review letters*, 87(24):244501, 2001.
 - [57] Eric Louvergneaux, Christophe Sz waj, Gonzague Agez, Pierre Glorieux, and Majid Taki. Experimental evidence of absolute and convective instabilities in optics. *Physical review letters*, 92(4):043901, 2004.

- [58] JE Macías, MG Clerc, C Falcón, and MA García-Ñustes. Spatially modulated kinks in shallow granular layers. *Physical Review E*, 88(2):020201, 2013.
- [59] JE Macías and C Falcón. Dynamics of spatially modulated kinks in shallow granular layers. *New Journal of Physics*, 16(4):043032, 2014.
- [60] Francisco Melo, Paul B Umbanhowar, and Harry L Swinney. Hexagons, kinks, and disorder in oscillated granular layers. *Physical Review Letters*, 75(21):3838, 1995.
- [61] Sung Joon Moon, Daniel I Goldman, JB Swift, and Harry L Swinney. Kink-induced transport and segregation in oscillated granular layers. *Physical review letters*, 91(13):134301, 2003.
- [62] Sung Joon Moon, MD Shattuck, C Bizon, Daniel I Goldman, JB Swift, and Harry L Swinney. Phase bubbles and spatiotemporal chaos in granular patterns. *Physical Review E*, 65(1):011301, 2001.
- [63] R Müller, K Lippert, A Kühnel, and U Behn. First-order nonequilibrium phase transition in a spatially extended system. *Physical Review E*, 56(3):2658, 1997.
- [64] James D Murray. *Mathematical Biology I: An Introduction, vol. 17 of Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer, New York, NY, USA,, 2002.
- [65] Alan C Newell, Thierry Passot, and Joceline Lega. Order parameter equations for patterns. *Annual review of fluid mechanics*, 25(1):399–453, 1993.
- [66] Grégoire Nicolis. *Introduction to nonlinear science*. Cambridge University Press, 1995.
- [67] Ignacio Ortega, Marcel G. Clerc, Claudio Falcón, and Nicolás Mujica. Subharmonic wave transition in a quasi-one-dimensional noisy fluidized shallow granular bed. *Phys. Rev. E*, 81:046208, Apr 2010.
- [68] Stanley Osher and James A Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of computational physics*, 79(1):12–49, 1988.
- [69] Valery Petrov, Qi Ouyang, and Harry L Swinney. Resonant pattern formation in a chemical system. *Nature*, 388(6643):655–657, 1997.
- [70] A Piccardi, U Bortolozzo, S Residori, and G Assanto. Spatial solitons in liquid-crystal light valves. *Optics letters*, 34(6):737–739, 2009.
- [71] Len M Pismen. *Patterns and interfaces in dissipative dynamics*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [72] Yves Pomeau. Front motion, metastability and subcritical bifurcations in hydrodynamics. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 23(1):3–11, 1986.
- [73] Thomas R Powers and Raymond E Goldstein. Pearling and pinching: propagation of

- rayleigh instabilities. *Physical review letters*, 78(13):2555, 1997.
- [74] Ilya Prigogine and Grégoire Nicolis. *Self organization in non-equilibrium systems*. J. Wiley and Sons, New York, 1977.
- [75] Przemyslaw Prusinkiewicz, Deborah R Fowler, and Hans Meinhardt. *The algorithmic beauty of sea shells*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [76] Michel Remoissenet. *Waves called solitons: concepts and experiments*. Springer Science & Business Media, 1999.
- [77] Stefania Residori, A Petrossian, Tomoyuki Nagaya, CS Riera, and MG Clerc. Fronts and localized structures in a liquid-crystal-light-valve with optical feedback. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 199(1):149–165, 2004.
- [78] Hannes Risken. *Fokker-Planck Equation*. Springer, 1984.
- [79] Wolfgang Schöpf and Walter Zimmermann. Convection in binary fluids: Amplitude equations, codimension-2 bifurcation, and thermal fluctuations. *Physical Review E*, 47(3):1739, 1993.
- [80] Steven H Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Westview press, 2014.
- [81] Adam Svenkeson, Mauro Bologna, and Paolo Grigolini. Linear response at criticality. *Phys. Rev. E*, 86:041145, Oct 2012.
- [82] C Van den Broeck, JMR Parrondo, and R Toral. Noise-induced nonequilibrium phase transition. *Physical review letters*, 73(25):3395, 1994.
- [83] Christian Van den Broeck, JMR Parrondo, Raúl Toral, and Ryoichi Kawai. Nonequilibrium phase transitions induced by multiplicative noise. *Physical Review E*, 55(4):4084, 1997.
- [84] NG Van Kampen. Amsterdam, new york: 1992. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*.
- [85] NG Van Kampen. Itô versus stratonovich. *Journal of Statistical Physics*, 24(1):175–187, 1981.
- [86] Wim van Saarloos. Front propagation into unstable states. *Physics reports*, 386(2):29–222, 2003.
- [87] Wim van Saarloos and PC Hohenberg. Fronts, pulses, sources and sinks in generalized complex ginzburg-landau equations. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 56(4):303–367, 1992.
- [88] Kurt Wiesenfeld. Noisy precursors of nonlinear instabilities. *Journal of Statistical Physics*, 38(5-6):1071–1097, 1985.

- [89] Mingming Wu, Guenter Ahlers, and David S Cannell. Thermally induced fluctuations below the onset of rayleigh-bénard convection. *Physical review letters*, 75(9):1743, 1995.
- [90] AM Zhabotinsky. Periodical process of oxidation of malonic acid in a solution. *Biophysics*, 9:306–311, 1964.
- [91] LQ Zhou, X Jia, and Q Ouyang. Experimental and numerical studies of noise-induced coherent patterns in a subexcitable system. *Physical review letters*, 88(13):138301, 2002.
- [92] Martin G Zimmermann, Raúl Toral, Oreste Piro, and Maxi San Miguel. Stochastic spatiotemporal intermittency and noise-induced transition to an absorbing phase. *Physical review letters*, 85(17):3612, 2000.

Apéndice A

Internal noise and system size effects induce nondiffusive kink dynamics

En este apéndice se adjunta la publicación titulada *Internal noise and system size effects induce nondiffusive kink dynamics*, publicado en Physical Review E.

Internal noise and system size effects induce nondiffusive kink dynamicsDiego A. C. Contreras^{*} and Marcel G. Clerc[†]*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Casilla 487-3, Santiago, Chile*

(Received 12 January 2015; published 23 March 2015)

We investigate the effects of inherent fluctuations and system size in the dynamics of domain between uniform symmetric states. In the case of monotonous kinks, this dynamics is characterized by exhibiting nonsymmetric random walks, being attracted to the system borders. For nonmonotonous interface, the dynamics is replaced by a hopping dynamic. Based on bistable universal models, we characterize the origin of these unexpected dynamics through use of the stochastic kinematic laws for the interface position and the survival probability. Numerical simulations show a quite good agreement with the theoretical predictions.

DOI: [10.1103/PhysRevE.91.032922](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.032922)

PACS number(s): 05.45.-a, 05.10.Gg, 05.40.Ca

I. INTRODUCTION

Macroscopic systems under the influence of injection and dissipation of quantities such as energy and momenta usually exhibit coexistence of different states—this feature is usually denominated multistability [1]. This is clearly a manifestation that far from equilibrium systems are of nonlinear nature. Heterogeneous initial conditions usually caused by the inherent fluctuations generate spatial domains, which are separated by their respective interfaces. These interfaces are known as front solutions or interfaces, or domain walls [2–4]. Interfaces between these metastable states appear in the form of propagating fronts and give rise to rich spatiotemporal dynamics [5–7]. Front dynamics occurs in systems as different as walls separating magnetic domains [8], directed solidification processes [9], nonlinear optical systems [10,11,13,33], oscillating chemical reactions [14], fluidized granular media [15–21], and population dynamics [22–24], to mention a few. From the point of view of dynamical systems theory, in one spatial dimension a front is a nonlinear solution that is identified in the comoving frame system as a heteroclinic orbit linking two spatially extended uniform states [25,26]. The evolution of front solutions can be regarded as a particle-type one, i.e., they can be characterized by a set of continuous parameters such as position, core width, and so forth.

The interface dynamics depends on the nature of the states that are connected. In the case of a front connecting a stable and an unstable state, it is usually called a Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov (FKPP) front [22,27,28]. One of the characteristic features of these fronts is that their speed is not unique, but determined by the initial conditions. When the initial condition is bounded, after a transient, two counterpropagative fronts with the minimum asymptotic speed emerge [22,28]. FKPP fronts have been observed in Taylor-Couette [29], Rayleigh-Benard experiments [30], pearling and pinching on the propagating Rayleigh instability [31], spinodal decomposition in polymer mixtures [32], and liquid crystal light valves [33], to mention a few.

The former scenario changes drastically for a front connecting two stable uniform states. In this case, a variational

system tends to develop the most stable state, in order to minimize its energy or Lyapunov function, so that the front always propagates towards the most energetically unfavorable state. There is only one point in the parameter space for which the front is motionless, which is commonly called the Maxwell point and is the point for which the two states have exactly the same energy [34]. Close to the Maxwell point, based on the parameters variation method, one can analytically determine the front speed [5]. For variational systems away from the Maxwell point one can have implicit expressions for the front speed [5], which correspond to nonlinear eigenvalue problems. In the nonvariational case, the analytical expression of the front speed is a problem still unresolved.

Systems with discrete reflection symmetries can possess two equivalent uniform states with interfaces, or domain walls, which are generically at rest. Indeed, the two connected states are energetically equivalent. These front solutions are termed kinks. However, under spontaneous breaking of the parity symmetry, these fronts can acquire a nonzero asymptotic speed. This phenomenon is denominated the nonvariational Ising-Bloch transition [35]. Variational systems do not exhibit this phenomenon, because the front speed is proportional to the energy difference between the two equivalent states.

On the other hand, a characteristic property of macroscopic systems is to present incoherent and uncontrollable fluctuations, as a result of their microscopic constituents. When macroscopic fluctuations are not dependent on the macroscopic variables describing the system is called internal or additive noise, in the opposite case, it is called external or multiplicative noise. Usually, the effects of these fluctuations were either considered as a nuisance (degradation of the signal-to-noise ratio) or ignored because it was not known how to handle them. In recent decades, a wealth of theoretical and experimental research has shown that fluctuations can have rather surprisingly constructive and counterintuitive effects in many physical systems, and that they can be figured out with the help of different analysis tools. These situations occur when there are mechanisms of noise amplification, or when noise interacts with nonlinearities or driving forces on the system. The most well-known examples in zero-dimensional systems are noise-induced transition [36] and stochastic resonance [37]. More recently, examples in spatially extended system are noise-induced phase transition, noise-induced patterns (see Ref. [38] and references therein),

^{*}diegocc@ug.uchile.cl[†]marcel@dfi.uchile.cl

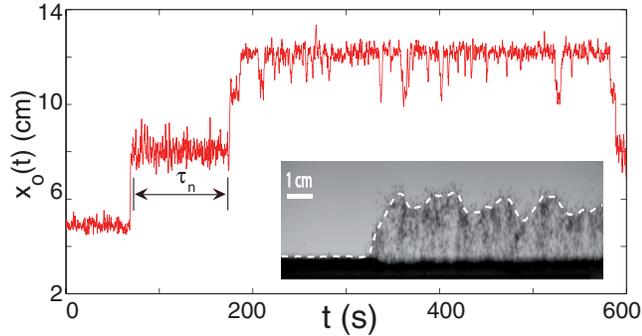


FIG. 1. (Color online) Temporal evolution of a granular kink position, x_0 , in a shallow one-dimensional fluidized granular layer subjected to a periodic air flow [45]. The inset snapshot corresponds to a granular kink observed at a given moment.

noise-sustained structures in convective instability [39], stochastic spatiotemporal intermittency [40], precursor of patterns [41], noise-induced traveling waves [42], noise-induced ordering transition [43], and front propagation [44]. A natural question that arises is what is the effect of internal fluctuations on kink dynamics. As we have mentioned before, these extended solutions can be described as particle-type solutions. Hence, one expects that the effect of the inherent fluctuations induces a Brownian particle for the kink position (see Ref. [38] and references therein). Recently in Refs. [20,21], observations of kinks in a shallow one-dimensional fluidized granular layer subjected to a periodic air flow were reported each domain varied periodically with half of the forcing period. Figure 1 shows a granular kink observed at a given moment and the respective dynamic evolution of the kink position. Due to the internal fluctuations of the granular bed, the kink profile exhibits an effective wavelength, a precursor, which modulates spatially the homogeneous states and drastically modifies the kink dynamic. Indeed, it is shown that the temporal evolution of these kinks is dominated by a hopping dynamics, related directly to the underlying spatial structure (cf. Fig. 1).

The aim of this paper is to characterize the nondiffusive dynamics of a kink state under the influence of internal noise. The temporal evolution of the kinks is characterized by a hopping dynamic. This dynamic is a result of the combinations of the effects of system size and inherent fluctuations. Figure 1 illustrates this type of dynamic. When the kinks are spatially monotonous the system borders attract exponentially the interfaces. Based on bistable universal models, we characterize the origin of these unexpected dynamics, through determination of the kinematic laws and the survival probability of the kink position. In the case of nonmonotonous kinks, as a result of fluctuations and the system size, the interface exhibits a hopping dynamic. The bistable universal models allow us to characterize the origin of these unexpected dynamics. Numerical simulations show quite good agreement with the theoretical predictions.

The paper is organized as follows. In Sec. II, a prototype model for dissipative bistability systems is considered—the real Ginzburg-Landau equation. The stochastic dynamics exhibited by an interface between two symmetric states is characterized by finding its kinematics law and the survival

probability. Interfaces with damped spatial oscillations are analyzed in Sec. III. As a result of fluctuations and the system size, an interface between two symmetric states exhibits a hopping dynamic. Analogously, by obtaining the kinematic law and the survival probability of the kink position, the hopping dynamic is characterized. Our conclusions and remarks are left to the final section.

II. REAL GINZBURG-LANDAU EQUATION UNDER THE INFLUENCE OF INTERNAL NOISE

The simplest model that describes bistable systems is the supercritical real Ginzburg-Landau equation [38]. This model accounts for the dynamics of a scalar order parameter $u(x,t)$, where $\{x,t\}$ stand for the spatial coordinate and time, respectively. The scalar order parameter satisfies

$$\partial_t u = \mu u - u^3 + \partial_{xx} u, \quad (1)$$

where μ is the control parameter and the last term on the right-hand side accounts for the coupling process between the different local domains, which is of diffusive type. Depending on the context in which this equation has been derived, the physical meaning of the field $u(x,t)$ could be the dominant magnetization, electric field, phytomass density, average molecular orientation, or chemical concentration, to mention a few. For negative μ , the above model is characterized by exhibiting a single equilibrium, $u = 0$. This scenario is modified when the control parameter changes sign. For $\mu > 0$, $u = 0$ is always unstable, while the homogenous states $u = \pm\sqrt{\mu}$ are stable. Hence, this model exhibits bistability.

The above model is variational type, that is,

$$\partial_t u = -\frac{\delta \mathcal{F}[u]}{\delta u},$$

with the Lyapunov function

$$\mathcal{F}[u] = \int \left(\frac{1}{2} (\partial_x u)^2 - \frac{\mu}{2} u^2 + \frac{1}{4} u^4 \right) dx. \quad (2)$$

Therefore, the dynamical behavior of this system consists in the minimization of the functional \mathcal{F} , the free energy. Since the homogenous states $u = \sqrt{\mu}$ and $u = -\sqrt{\mu}$ have the same free energy, we expect that an arbitrary initial condition can generate the appearance of domains. That is, solutions that connect regions with different equilibria. One solution that accounts for a single domain is (the Ising wall or kink solution)

$$u_k^\pm(x; \Delta) = \pm\sqrt{\mu} \tanh \left[\sqrt{\frac{\mu}{2}} (x - \Delta) \right] \quad (3)$$

where Δ stands for the position separating the different domains, that is, $u_k^\pm(x = \Delta) = 0$ and the core of the kink is $l = \sqrt{2/\mu}$. The positive (negative) sign describes the kink (antikink) solution. Figure 2 illustrates the kink solution, its position, and core, respectively.

A. Stochastic real Ginzburg-Landau equation and kink dynamics

To describe the internal inherent fluctuations of the macroscopic system under study, let us consider an additive noise

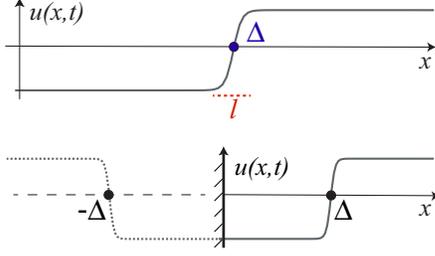


FIG. 2. (Color online) Domain solution between two symmetric states, kink solution (top), $\{\Delta, l\}$ account for the position and the core of the kink. Bottom shows a kink and an antikink solution as consequence of the specular boundary condition.

term in the Ginzburg-Landau equation [38]

$$\partial_t u = \mu u - u^3 + \partial_{xx} u + \sqrt{\bar{\eta}} \zeta(x, t), \quad (4)$$

where η is the noise intensity level, for equilibrium systems this parameter is proportional to the temperature. $\zeta(x, t)$ is a Gaussian white noise with zero mean value, $\langle \zeta(x, t) \rangle = 0$, and correlation

$$\langle \zeta(x, t) \zeta(x', t') \rangle = \delta(x - x') \delta(t - t'), \quad (5)$$

where parentheses $\langle \rangle$ accounts for average over the noise realizations. Then, the noise is spatially and temporally independent.

To determine the effect of fluctuations on the kink solution we consider the noise intensity level as small ($\eta \ll 1$) and the following ansatz

$$u(x, t) = u_k^+(x - \Delta(t)) + w(x, \Delta), \quad (6)$$

where the kink position, $\Delta(t)$, is promoted to a temporal function of the order of η and w is a small corrective function. Introducing the above ansatz in Eq. (4) and linearizing in w , one obtains

$$\mathcal{L}w = \dot{\Delta} \partial_x u_k^+ + \sqrt{\bar{\eta}} \zeta(x, t), \quad (7)$$

where the linear operator $\mathcal{L} \equiv -\mu + 3(u_k^+)^2 - \partial_{xx}$ is a self-adjoint operator, when one introduces the inner product $(f|g) = \int f(x)g(x)dx$. Besides, this operator satisfies $\mathcal{L} \partial_x u_k^+ = 0$. Hence, to solve the above linear equation we multiply it by $\partial_x u_k^+$, integrating throughout all the space and then we obtain the solvability condition

$$\dot{\Delta} = \sqrt{\bar{\eta}} \bar{\zeta}(t), \quad (8)$$

where $\bar{\eta} \equiv \eta / (\partial_x u_k^+ | \partial_x u_k^+)$ and

$$\bar{\zeta}(t) \equiv \frac{\int \zeta(x, t) \partial_x u_k^+ dx}{(\partial_x u_k^+ | \partial_x u_k^+)} \quad (9)$$

is a Gaussian white noise with zero mean value, $\langle \bar{\zeta}(t) \rangle = 0$, and correlation

$$\langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}(t') \rangle = \delta(t - t'). \quad (10)$$

Therefore, the kink position satisfies a simple Langevin dynamic, Eq. (8), describing a Brownian particle [36,46,47]. The kink position Eq. (8) is derived rigorously in Ref. [48]. Associated with the above Langevin equation, one has

the following equation for the conditional probability (Fokker-Planck equation [46,47])

$$\partial_t P(\Delta, t | \Delta_0, t_0) = \frac{\bar{\eta}}{2} \partial_{\Delta\Delta} P(\Delta, t | \Delta_0, t_0), \quad (11)$$

where $P(\Delta, t = t_0 | \Delta_0, t_0) = \delta(\Delta - \Delta_0)$. Then, the conditional probability satisfies a simple diffusion equation and its evolution is characterized by the dispersion of a Gaussian. Simulating the above equation in a finite system with absorbing boundary conditions [$P(\Delta = L, t | \Delta_0, t_0) = P(\Delta = 0, t | \Delta_0, t_0) = 0$, where L is the system size], the probability does not conserve its norm and accounts for the survival probability. Notwithstanding, numerical simulations of Eq. (4) for a single kink solution in a finite system with specular boundary conditions do not exhibit this behavior, where the survival probability distribution spreads asymmetrically. Figure 3(a) outlines the evolution of the kink position and its conditional probability. It is important to note that when the kink reaches the border of the system it disappears, because the system minimizes its free energy [cf. Fig. 3(a)]. Then the probability distribution for sufficiently small noise accounts for the survival probability of the kink, i.e., this probability does not preserve its norm. This probability corresponds to the kink remaining within the system. Once it reaches the border the survival probability is no longer considered. In addition, we note that the expected value moves toward the center of the system.

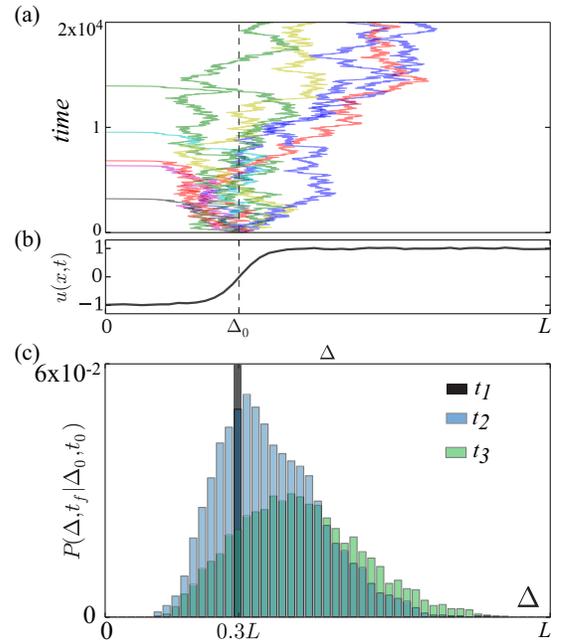


FIG. 3. (Color online) Stochastic dynamics of a kink state. (a) Numerical simulations of a single kink of Eq. (4) in a finite size system with specular boundary conditions, with $\mu = 1$ and $\eta = 0.0018$ and $L = 25$, starting at the position $\Delta = 0.3L$. (b) The profile link at an initial moment. (c) Evolution of survival probability of a single kink for different instants of time, $t_1 = 0$ (black), $t_2 = 20000$ (blue), and $t_3 = 40000$ (green).

B. System size effects

To account for the dynamics described above, one must consider the effects of system size. Thus, we consider the Ginzburg-Landau equation, model (4), in a given domain L with specular or Neumann boundary conditions, i.e., $\partial_x u(x = 0, t) = \partial_x u(x = L, t) = 0$. These boundary conditions are consistent with having an Ising wall as a solution. The effect of boundary conditions is to create mirror images of the kink, so its dynamics is described by considering the system as extended with a kink-antikink pair. Figure 2 illustrates the system size effect. The dynamics of the kink-antikink pair can be described by considering the following ansatz

$$u(x, t) = u_k^+[x + \Delta(t)] + u_k^-[x - \Delta] - \sqrt{\mu} + w(x, \Delta), \quad (12)$$

where the kink position, $\Delta(t)$, is promoted to a temporal variable, the position of the left edge is set in the origin of the coordinate system, and $w(x, \Delta)$ is a small corrective function. Note that the above ansatz is valid when the kink and antikink are sufficiently isolated, i.e., Δ is much larger than the core of the kink ($\Delta \gg l$). Introducing the above ansatz in Eq. (4), linearizing in w , and imposing the solvability condition, in a similar manner to the previous calculation, we obtain the following Langevin equation

$$N \dot{\Delta} = f_1(\Delta) + f_2(\Delta) + f_3(\Delta) + \sqrt{\eta} \bar{\zeta}(t) N, \quad (13)$$

where

$$f_1(\Delta) \equiv 3\sqrt{\mu}(\partial_x u_k^- | u_k^- [u_k^+ - \sqrt{\mu}]), \quad (14)$$

$$f_2(\Delta) \equiv 3(\partial_x u_k^- | (u_k^-)^2 [u_k^+ - \sqrt{\mu}]), \quad (15)$$

$$f_3(\Delta) \equiv 3(\partial_x u_k^- | u_k^- [u_k^+ - \sqrt{\mu}]^2), \quad (16)$$

and the mobility $N \equiv (\partial_x u_k^- | \partial_x u_k^-)$ is a constant. The above equation describes the kinematic law for the kink position as result of size effect. The dynamics of the kink position has three sources $f(\Delta) = f_1 + f_2 + f_3$. With the aim of to obtain insight into the dynamics, we consider the limit of diluted kink, that is, the domains are sufficiently separated ($\Delta \gg 1/\sqrt{\mu}$). Then, the third term on the right side is negligible, and after straightforward calculations we obtains the following expression

$$\dot{\Delta} = -\alpha e^{-2\sqrt{2\mu}\Delta} + \sqrt{\eta} \bar{\zeta}(t), \quad (17)$$

where α is positive constant defined by

$$\alpha \equiv -6\sqrt{\mu} \frac{\int e^{-\sqrt{2\mu}x} [u_k^- + \sqrt{\mu}] u_k^- \partial_x u_k^- dx}{(\partial_x u_k^- | \partial_x u_k^-)}. \quad (18)$$

Therefore, the boundary condition produces an attractive force on the kink, which is exponential with a characteristic length $1/2\sqrt{2\mu}$. To verify the above kinematic law, we follow numerically the evolution of the position and the speed of kink. Figure 4 shows the comparison between the numerical observations and theoretical predictions. However, when the kinks are closer the interaction intensifies and the exponential law is no longer valid. The

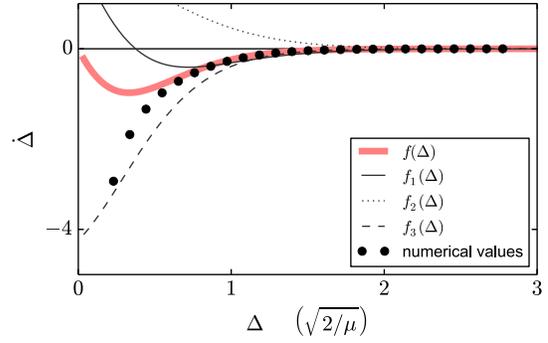


FIG. 4. (Color online) Kinematic law of the kink position as a result of size effect. Points are obtained numerically by considering a uniform distribution of initial conditions for a single kink, then numerically the system evolves during a brief moment of time, and finally the temporal variation of the kink position is calculated. The solid line is the analytical expression (13) with $\eta = 0$, and $f(\Delta) = f_1 + f_2 + f_3$.

analytical description of this dynamic becomes complex and is only accessible numerically. Notice that the range of validity of the kinematic law is $\Delta > \sqrt{2/\mu}$

To describe the effect of the two edges, one must consider that the kink is under the influence of two antikinks, then the dynamic of a kink in a finite system is described by

$$\dot{\Delta} = h(\Delta) + \sqrt{\eta} \bar{\zeta}(t), \quad (19)$$

with $\Delta \leq L$ and $h(\Delta) \approx -\alpha e^{-2\sqrt{2\mu}\Delta} + \alpha e^{-2\sqrt{2\mu}(L-\Delta)}$ for large Δ , $\Delta \gg \sqrt{\mu}$ and $(L - \Delta) \gg \sqrt{\mu}$. Thus, each border attracts the kink with an intensity that decays asymptotically in an exponential manner. Associated with this Langevin equation, one has the following Fokker-Planck equation

$$\partial_t P(\Delta, t | \Delta_0, t_0) = -\partial_\Delta [h(\Delta)] P + \frac{\eta}{2} \partial_{\Delta\Delta} P, \quad (20)$$

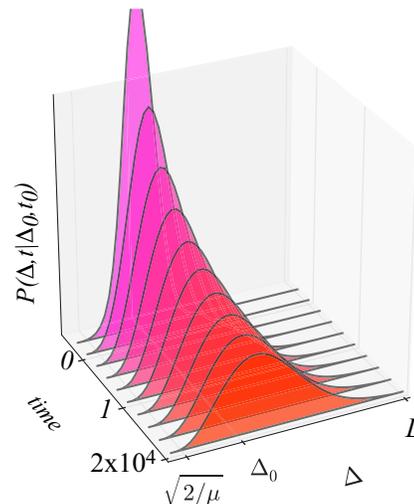


FIG. 5. (Color online) Temporal evolution of Fokker-Planck Eq. (20) with absorbing boundary conditions, using a drift force $h(\Delta) = -C[\Delta^{-a} + (L - \Delta)^{-a}]$ with $C=0.033$, $a=3.08$, $\Delta_0=0.3L$, and $\eta = 2.69 \times 10^{-3}$.

with the absorbing boundary conditions $P(\Delta = 0, t | \Delta_0, t_0) = P(\Delta = 0, t | \Delta_0, t_0) = 0$ and $P(\Delta, t | \Delta_0, t_0)$ account for the survival probability of the kink, which was initially at $\Delta = \Delta_0$. These boundary conditions take into consideration that when the kink reaches the border it disappears. Figure 5 shows the evolution of the survival probability, considering a fitting drift force of the form $h(\Delta) = -C[\Delta^{-a} + (L - \Delta)^{-a}]$, where $\{C, a\}$ are fittings parameters. This simple drift force accounts qualitatively for the kinematics law of kink position in whole system, including the dynamic near the borders of the system. The survival probability has qualitative good agreement with the numerical simulations of Eq. (4), see the bottom panel of Fig. 3(c). Therefore, the kink dynamics under the influence of internal noise and system size effects exhibits nondiffusive behavior.

III. NONMONOTONIC KINK SOLUTIONS

One of the main characteristics of the domains between two symmetric states exhibited by the real Ginzburg-Landau equation, model (1), is that the kinks are monotonously increasing or decreasing spatially (see Fig. 2). Several bistable physical systems with symmetric uniform states show interfaces between two states with spatially damped oscillations, nonmonotonic kink solutions. Examples of these fronts are observed in a shallow one-dimensional fluidized granular layer subjected to a periodic air flow [20,21], population dynamics models [24], predator-prey systems [22,49], parametrically driven chain of pendula [50], to mention a few. Figure 6 shows the typical profile of a nonmonotonic kink solution. Because of the spatial oscillations, the size of the kink core is several times larger than in the case of monotonous kink states. Therefore, one expects a more relevant role of interactions between kinks and system border in the dynamics of these interfaces. To understand the dynamics of these nonmonotonic kink solutions, let us consider the simplest model that describes a bistable system with nonmonotonic kink solutions, the Swift-Hohenberg equation

$$\partial_t u = \mu u - u^3 - (\partial_{xx} + q^2)u + \sqrt{\eta}\zeta(x, t), \quad (21)$$

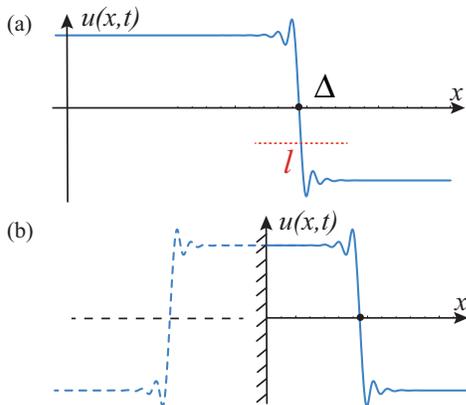


FIG. 6. (Color online) Domain solution between two symmetric states with damping spatial oscillations (top), $\{\Delta, l\}$ account for the position and the core of the kink. Bottom: kink and an antikink solution as consequence of the specular boundary condition.

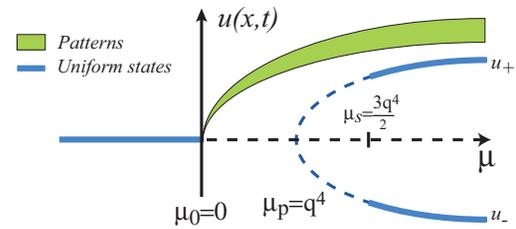


FIG. 7. (Color online) Bifurcation diagram of Swift-Hohenberg Eq. (21), where the darkened area accounts for the amplitude of the patterns. The continuous and dashed lines account for stable and unstable uniform states, respectively. $\{\mu_0, \mu_p\}$ correspond to the spatial and the pitchfork bifurcations of the state $u = 0$, respectively. μ_s stands for the spatial bifurcation of the states $u_{\pm} = \pm\sqrt{\mu - q^4}$.

where $u(x, t)$ is a scalar field, μ is the bifurcation parameter, q is the pattern wave-number parameter, η is the noise intensity level, and $\zeta(x, t)$ is a Gaussian white noise with zero mean value, $\langle \zeta(x, t) \rangle = 0$, and correlation $\langle \zeta(x, t)\zeta(x', t') \rangle = \delta(x - x')\delta(t - t')$. The Swift-Hohenberg model was introduced to describe the onset of Rayleigh-Benard convection, however, recent generalizations have been used intensively to account for pattern formation in several physical systems [3,4].

The deterministic Swift-Hohenberg Eq. (21), $\eta = 0$, describes a spatial supercritical bifurcation. For $\mu < 0$, the system presents a stable uniform state $u(x, t) = 0$. At $\mu \equiv \mu_0 = 0$ the system bifurcates, the uniform solution becomes unstable and giving rise to a pattern state. For $\mu > 0$, the pattern amplitude, at wave number $k_c = \pm q$, grows as the square root of μ . Figure 7 illustrates the bifurcation diagram of Swift-Hohenberg Eq. (21), where the shaded area stands for the amplitude of the patterns. If one continues to increase the bifurcation parameter μ , the unstable uniform state $u = 0$ has a secondary pitchfork bifurcation for $\mu \equiv \mu_p = q^4$, which generates new uniform unstable states $u_{\pm} = \pm\sqrt{\mu - q^4}$ (see Fig. 7). These states become stable through a spatial bifurcation, when one increases the bifurcation parameter, at $\mu \equiv \mu_s = 3q^4/2$ [51]. Then for a bifurcation parameter larger than μ_s , one expects to observe kinks between uniform states. Figure 8 shows the typical kink observed in this model. Although nonmonotonous kink solutions, u_k are simple and occur in many dynamical systems, there are not analytical expressions of these solutions. This is due to fact that the kink solutions are solutions of the deterministic stationary system, $\partial_t u = 0$,

$$\mu u_k - u_k^3 - (\partial_{xx} + q^2)u_k = 0, \quad (22)$$

which is a Lagrangian system with the following action

$$S = \int \left(-\frac{(\mu - q^2)}{2} u_k^2 + \frac{u_k^4}{4} - q^2 (\partial_x u_k)^2 + \frac{(\partial_{xx} u_k)^2}{2} \right) dx. \quad (23)$$

This system has only one conserved quantity that corresponds to the Hamiltonian function, which has the form

$$E = \frac{(\mu - q^2)}{2} u_k^2 - \frac{u_k^4}{4} - q^2 (\partial_x u_k)^2 + \frac{(\partial_{xx} u_k)^2}{2} - \partial_x u_k \partial_{xxx} u_k. \quad (24)$$

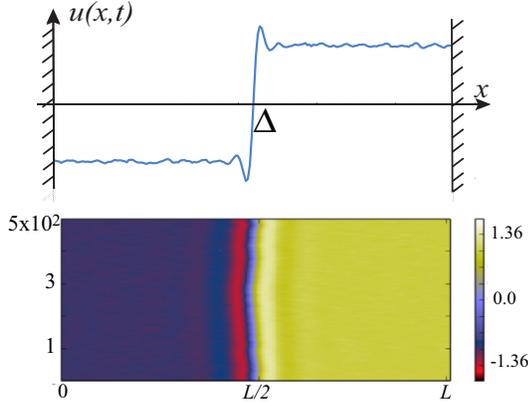


FIG. 8. (Color online) Kink solution of the Swift-Hohenberg equation with the parameters $\mu = q = 1$ and $\eta = 0.0018$. (a) kink solution profile and (b) spatiotemporal evolution of the kink.

Then, the dynamical system is not integrable, and one can show that the kink and localized structures displayed on this stationary dynamical system (22) are the result of chaotic behavior in this system [52].

One can characterize the asymptotic behavior of the kink through linearizing Eq. (22) around uniform states

$$u_k(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow \pm\sqrt{\mu - q^4}e^{-ax} \cos(bx) + u_{\pm},$$

where $a \equiv \sqrt{2\mu - 3q^4}/4\sqrt{-q^2 + \sqrt{2(\mu - q^4)}}$ and $b \equiv \sqrt{-q^2 + \sqrt{2(\mu - q^4)}}$. Thus, one can analytically characterize the spatial damped oscillations exhibiting nonmonotonic kink solution. It is worth noting that, this type of asymptotic behavior is fundamental to characterize the interaction between kinks.

A. Nondiffusive dynamics of nonmonotonic kink solution under the influence of internal noise and system size effects

We consider the effects of the stochastic term in the kink dynamics of the stochastic Swift-Hohenberg Eq. (21), considering a size domain L with specular boundary conditions. Numerical simulations of this model show that the kink dynamics is not diffusive type. Figure 9 shows different realization of trajectories of the kink position from the same initial condition, the nonmonotonic kink solution at the initial time and the spatiotemporal evolution of the survival probability. Unexpectedly, we observe that the evolution of the kink is characterized by a hopping dynamic. That is, the position of the kink remains for long periods fluctuating around defined positions and suddenly changes its position. It is also important to note that the fluctuations near the border are smaller. From the different trajectories of the kink position, we can build up the survival probability of the kink to remain inside the domain [cf. Fig. 9(c)]. We observe that the distribution initially spreads asymmetrically, similar to the evolution of the survival probability described in the previous section. Subsequently, a local maximum begins to emerge of the survival probability at a precise distance inward from the border of the domain. Later, a local maximum begins to emerge at a given distance to the border of the domain, as it is illustrated

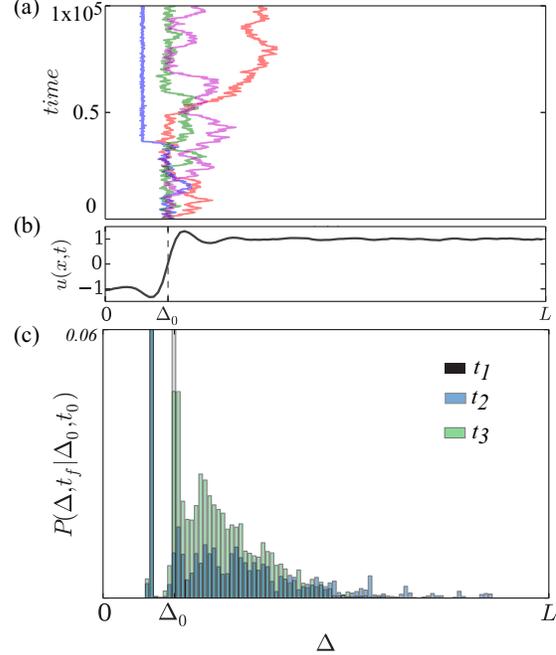


FIG. 9. (Color online) Stochastic dynamics of a kink state of the stochastic Swift-Hohenberg Eq. (21). (a) Numerical simulations of a single kink of the model (21) in a finite size system with specular boundary conditions, with $\mu = 1$, $q = 1$ and $\eta = 0.0018$ starting at the position $\Delta = \Delta_0 \approx 0.15L$. (b) The kink at an initial moment. (c) Evolution of survival probability of a single kink at different instants of time, $t_1 = 0$ (gray), $t_2 = 10^6$ (green), and $t_3 = 2 \times 10^6$ (blue).

in the spatiotemporal evolution of the survival probability [see Fig. 9(c)]. Likewise, as a result of fluctuations is that this type of nonmonotone kink exhibits the appearance of a spatial pattern on the homogeneous states. This phenomenon is due to the fact that the noise is exciting equally all spatial modes, however, the decay rate of the spatial modes are different and the mode with slowest decay rate has a finite wavelength. Thus, the balance between relaxation and fluctuations of the spatial modes generates an incoherent pattern. This phenomenon is known in the literature as precursor [41,53,54]. Notice that the spatial damped oscillations observed on the deterministic nonmonotone kink also result from the spacial slower decay mode. Hence, one expects noise-induced precursors in these kinks. For instance, this was experimentally observed in the granular kinks in a shallow one-dimensional fluidized granular layer subjected to a periodic air flow (cf. Fig. 1).

To understand the intriguing dynamics described above, we will use a similar strategy to the one we have used to figure out the dynamics of the monotonic kink under the influence of internal noise and system size effects. That is, we will consider the dynamics of a kink and an antikink generated by the boundary conditions. Let us consider the ansatz

$$u(x,t) = u_k [x + \Delta(t)] + u_{ak} [x - \Delta(t)] - \sqrt{\mu - q^4} + w(x, \Delta), \tag{25}$$

where u_{ak} stands for an antikink solution, $\Delta(t)$ is the kink position, which has been promoted to a temporal variable, the

position of the left edge is set to the origin of the coordinate system, and $w(x, \Delta)$ is a small corrective function. The above ansatz is valid when the kink and antikink are sufficiently diluted, i.e., Δ is much larger than the kink core ($\Delta \gg 1$). Figure 6(b) shows the solution generated by the above ansatz. Introducing this ansatz in Eq. (21), linearizing in w , and imposing the solvability condition, in a similar manner to the precedent calculations, we obtain the following Langevin equation

$$N \dot{\Delta} = f'_1(\Delta) + f'_2(\Delta) + f'_3(\Delta) + \sqrt{\eta'} \bar{\zeta}(t) N, \quad (26)$$

where

$$f'_1(\Delta) \equiv 3\sqrt{\mu}(\partial_x u_{ak}|u_{ak}[u_k - \sqrt{\mu - q^4}], \quad (27)$$

$$f'_2(\Delta) \equiv 3(\partial_x u_{ak}|(u_{ak})^2[u_k - \sqrt{\mu - q^4}], \quad (28)$$

$$f'_3(\Delta) \equiv 3(\partial_x u_{ak}|u_{ak}[u_k - \sqrt{\mu - q^4}]^2), \quad (29)$$

and the mobility $N \equiv (\partial_x u_{ak}|\partial_x u_{ak})$ is a constant. In the limit of diluted kinks, the above dynamics reads

$$\begin{aligned} \dot{\Delta} &= -\frac{\partial U}{\partial \Delta} + \sqrt{\eta'} \bar{\zeta}(t), \\ &= -\alpha' e^{-2a\Delta} \sin(2b\Delta) + \sqrt{\eta'} \bar{\zeta}(t), \end{aligned} \quad (30)$$

where the potential is

$$U(\Delta) \equiv -e^{2a\Delta} \frac{b \cos(2b\Delta) + a \sin(2a\Delta)}{2(a^2 + b^2)},$$

α is a constant defined by

$$\alpha' \equiv -\sqrt{\mu - q^4} \frac{\int e^{-ax} \sin(bx)(u_k)^2 \partial_x u_k dx}{(\partial_x u_k|\partial_x u_k)}.$$

and $\eta' \equiv \eta/(\partial_x u_k|\partial_x u_k)$.

Therefore, the spatial damped oscillations and the boundary condition produce a force that alternates between being attractive and repulsive. To verify the above kinematic law of the kink position, similarly to what we have presented in the previous section, we have considered a uniform distribution of initial conditions for a single kink, then we numerically evolve the system for a brief moment of time, and finally we calculate the temporal variation of the kink position. Figure 10 depicts the comparison between the numerical and deterministic kinematics law in a similar manner of the previous section. The numerical and theoretical results shows an adequate agreement. However, when the kinks are closer enough the interaction intensifies and the kinematic law is no longer valid. The analytical description of this dynamic becomes complex and is only accessible numerically. Although, the analytical calculation in this region is only valid qualitatively.

From the kinematic law of the kink position, Eq. (30), and its respective potential, we can infer that the system has a family of equilibria, which satisfies approximately $\sin(2b\Delta^*) = 0$, separated by a constant distance $l = \pi/2b$, i.e., $\Delta_n^* = \pi n/2b$ with $n = 1, 2, \dots$. Notice that the equilibria are more stable as one approaches the system borders. Figure 10 shows the shape of potential $U(\Delta)$ near the system border.

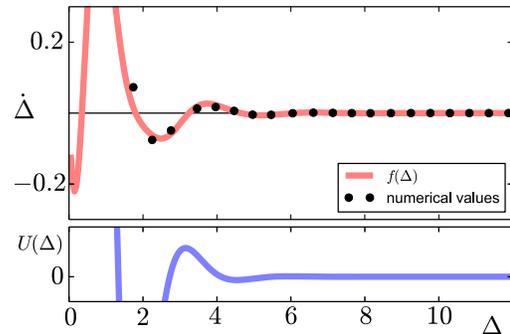


FIG. 10. (Color online) Kinematic law of the kink position as a result of size effect. Points are obtained numerically by considering a uniform distribution of initial conditions for a single kink, then numerically the system evolves in a brief moment of time, and finally the temporal variation of the kink position is calculated. The solid curve is obtained by using the integral form of the kinematic law of the kink position $f(\Delta) = f'_1 + f'_2 + f'_3$, using the expressions (27–29). The lower panel shows the potential $U(\Delta)$.

The dynamics around a given equilibrium, $\Delta(t) = \Delta^* + v(t)$, takes the form

$$\dot{v} = -\alpha' 2b e^{-2a\Delta^*} v + \sqrt{\eta'} \bar{\zeta}(t). \quad (31)$$

Then the dispersion around a given equilibrium take the form

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\eta'}{\alpha' 2b e^{-2a\Delta^*}}.$$

Hence, the fluctuations around more stable equilibria are smaller. That is, one expects the width around an equilibrium of the survival probability to get smaller, when it is closer to the border (cf. bottom panel of Fig. 9). It is important to note that recent observations of the dynamics of granular kinks in a shallow one-dimensional fluidized granular layer subjected to a periodic air flow exhibit similar dynamic behavior that the one described above, that is, these granular kinks show a hopping dynamic [20,21].

From Langevin Eq. (30), one can derive the Fokker-Planck equation for the survival probability of the kink

$$\partial_t P(\Delta, t|\Delta_0, t_0) = \partial_\Delta \left[\frac{\partial U}{\partial \Delta} \right] P + \frac{\eta'}{2} \partial_{\Delta\Delta} P, \quad (32)$$

with the absorbing boundary conditions $P(\Delta = 0, t|\Delta_0, t_0) = P(\Delta = l, t|\Delta_0, t_0) = 0$. Figure 11 shows the evolution of the survival probability, which has good qualitative agreement with the numerical simulations of the stochastic Swift-Hohenberg Eq. (21). Hence, the kink dynamics under the influence of internal noise and system size effects exhibits nondiffusive behavior with a hopping dynamic.

Due to the boundary conditions, the survival probability for large times converges asymptotically to a zero solution. However, since the system is of potential type, one can easily infer the qualitative behavior of the survival probability. For example, one expects that initially the probability distribution widens asymmetrically, as a result of the nucleation barrier, the distribution grows into the system by exploring the attraction basins of different equilibria, exhibiting new local maxima. Later, the local maxima appearing are those towards the system

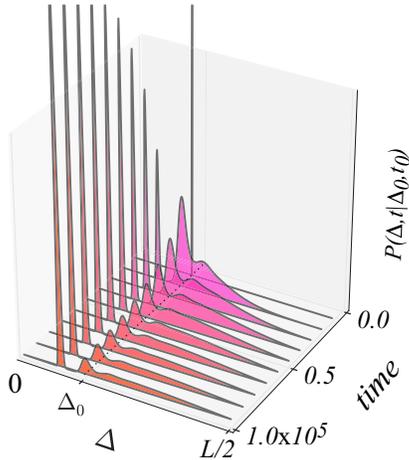


FIG. 11. (Color online) Temporal evolution of Fokker-Planck Eq. (32) with absorbing boundary conditions, using the potential (30) with $\alpha' = 1.157$, $a = 0.4940$, and $b = 1.026$ as fitting parameters and $\eta' = 2 \times 10^{-3}$.

borders, which eventually will become the dominant peaks. Finally, they began to decrease. The above description is consistent with the numerical observations (cf. Fig. 9). It is worthy to note that throughout the presented analysis, we have assumed that the creation of a kink from a large fluctuation of the uniform state is a highly improbable event. Such events are easily observed for high noise levels.

B. Hopping dynamics sustained by inhomogeneities

Other kinks or fronts, which exhibit an interesting hopping dynamic as a consequence of noise are the solutions connecting two periodic states [44]. This phenomenon is evident because pattern states generate a nucleation barrier opposing the propagation of the wall. Therefore this phenomenon is not related to border effects. An alternative way to generate a hopping dynamic, which is not generated by the border effects, is considering that the parameters are spatially modulated. Note that this type of forcing breaks the translational invariance of the system. Since one expects that any particle-type solution will prefer some precise spatial positions, then the presence of noise will generate a hopping dynamic. In order to illustrate this dynamic, let us consider the following forcing real Ginzburg-Landau equation

$$\partial_t u = a \cos(kx) + \mu u - u^3 + \partial_{xx} u + \sqrt{\eta} \zeta(x, t), \quad (33)$$

where a and k , respectively, are the amplitude and wave number of the forcing. For small forcing, the homogeneous states of the Ginzburg-Landau Eq. (12) become periodic and they have the form $u \approx \pm \sqrt{\mu - a \cos(kx)} / 2\mu$. Then, the kink solution of the real Ginzburg-Landau equation [see formula (3)], now connects two periodic states induced by periodic forcing, which are positioned at precise positions of the form $2\pi n/k$, with $n = 1, 2, 3, \dots$. Performing an analysis similar to that the one we have implemented in the previous sections, we obtain the following kinematic law for the kink position

$$\dot{\Delta} = \alpha'' \sin(k\Delta) + \sqrt{\eta} \bar{\zeta}(t), \quad (34)$$

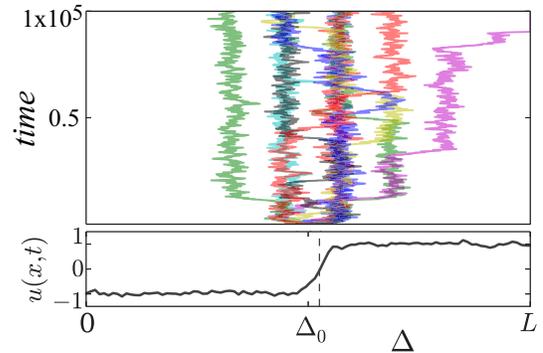


FIG. 12. (Color online) Stochastic dynamics of a kink state of the forcing real Ginzburg-Landau Eq. (33) with $k = \pi/3$, $a = 0.02$, and $\eta = 0.02$. Different colors represent different trajectories of the kink solution. The bottom panel shows the profile of the kink at the initial time.

where $\alpha'' = a \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x u_k^+(x) \cos(kx) dx / (\partial_x u_k^+ | \partial_x u_k^+)$. Then, the dynamic of the kink position is characterized by a Brownian particle in a periodic potential. Reference [55] presents a detailed analysis of this type of stochastic particle. Figure 12 shows the numerical trajectories of stochastic kink solutions of the forcing real Ginzburg-Landau Eq. (33), where all solutions begin at the same initial condition. Hence, this system clearly exhibits hopping dynamics sustained by inhomogeneities. In the trajectories illustrated in this figure, there are not border effects, as they approach the border the above dynamics is modified by the effects of the interaction with a virtual kink. Note that for small forcing and large noise intensity level, the $u(x, t)$ profile field does not exhibit clear periodic oscillations. However, the forcing effect is evident in the dynamics of the kink.

IV. CONCLUSIONS AND REMARKS

Diverse macroscopic physical systems exhibit spontaneous breaking of symmetry generating extended bistable systems. As a result of the inherent fluctuations, these systems exhibit coexisting domains separated by interfaces or domain walls. Moreover, fluctuations induce an erratic dynamic of the interfaces, which is expected of diffusive nature. However, we show that joint effect of the inherent fluctuations and size effects induces unexpected nondiffusive dynamics of an interface between two symmetric states.

Monotonous kink solutions under the influence of fluctuations are characterized by exhibiting nonsymmetric random walks. These trajectories are characterized by being attracted to the system borders. Hence, the survival probability in a given domain is characterized by a nondiffusive dynamic.

In the particular case of domains between two symmetrical states with damped spatial oscillations, the temporal evolution of these nonmonotonous kinks is characterized by a hopping dynamic. As the interface approaches the borders, the fluctuations decrease and the interface remains longer around well-defined positions. Such dynamic behavior has

been recently observed qualitatively in an interface between two symmetric states in a shallow one-dimensional fluidized granular layer subjected to a periodic air flow, where each domain varies periodically with half the period of the forcing (cf. Fig. 1). A rigorous analysis in this direction a subject for future research.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors thank E. Vidal-Henriquez for the critical reading of the manuscript. M.G.C. thanks the financial support of FONDECYT Project 1120320. D.A.C.C. thanks Conicyt fellowship *Beca Nacional*, Contract No. 22131268.

-
- [1] G. Nicolis and I. Prigogine, *Self-Organization in Non Equilibrium Systems* (Wiley, New York, 1977).
- [2] L. M. Pismen, *Patterns and Interfaces in Dissipative Dynamics*, Springer Series in Synergetics (Springer, Berlin, 2006).
- [3] M. C. Cross and P. C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851 (1993).
- [4] M. Cross and H. Greenside, *Pattern Formation and Dynamics in Nonequilibrium Systems* (Cambridge University Press, New York, 2009).
- [5] Y. Pomeau, *Physica D* **23**, 3 (1986).
- [6] J. S. Langer, *Rev. Mod. Phys.* **52**, 1 (1980).
- [7] P. Collet and J. P. Eckman, *Instabilities and Fronts in Extended Systems*, Princeton Series in Physics (Princeton University Press, Princeton, 2014).
- [8] A. H. Eschenfelder, *Magnetic Bubble Technology* (Springer, Berlin, 1980).
- [9] T. Börzsönyi, S. Akamatsu, and G. Faivre, *Phys. Rev. E* **80**, 051601 (2009).
- [10] M. G. Clerc, S. Residori, and C. S. Riera, *Phys. Rev. E* **63**, 060701 (2001).
- [11] D. Gomila, P. Colet, G. L. Oppo, and M. San Miguel, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 194101 (2001).
- [12] M. G. Clerc, T. Nagaya, A. Petrossian, S. Residori, and C. Riera, *Eur. Phys. J. D* **28**, 435 (2004).
- [13] S. Residori, *Phys. Rep.* **416**, 201 (2005).
- [14] V. Petrov, Q. Ouyang, and H. L. Swinney, *Nature (London)* **388**, 655 (1997).
- [15] I. Aranson and L. Tsimring, *Granular Patterns* (Oxford University Press, Oxford, 2008).
- [16] F. Melo, P. B. Umbanhowar, and H. L. Swinney, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3838 (1995).
- [17] S. Douady, S. Fauve, and C. Laroche, *Europhys. Lett.* **8**, 621 (1989).
- [18] S. J. Moon, M. D. Shattuck, C. Bizon, D. I. Goldman, J. B. Swift, and H. L. Swinney, *Phys. Rev. E* **65**, 011301 (2001).
- [19] S. J. Moon, D. I. Goldman, J. B. Swift, and H. L. Swinney, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 134301 (2003).
- [20] J. E. Macias, M. G. Clerc, C. Falcon, and M. A. Garcia-Nustes, *Phys. Rev. E* **88**, 020201 (2013).
- [21] J. E. Macias and C. Falcon, *New J. Phys.* **16**, 043032 (2014).
- [22] J. D. Murray, *Mathematical Biology* (Springer, Berlin, 1989).
- [23] R. A. Fisher, *Ann. Eugen.* **7**, 355 (1937).
- [24] M. G. Clerc, D. Escaff, and V. M. Kenkre, *Phys. Rev. E* **72**, 056217 (2005); **82**, 036210 (2010).
- [25] W. van Saarloos and P. C. Hohenberg, *Physica D* **56**, 303 (1992).
- [26] P. Couillet, *Int. J. Bifurcation Chaos* **12**, 2445 (2002).
- [27] A. Kolmogorov, I. Petrovsky, and N. Piskunov, *Bull. Univ. Moskou Ser. Int. Se.* **7**, 1 (1937).
- [28] W. van Saarloos, *Phys. Rep.* **386**, 29 (2003).
- [29] G. Ahlers and D. S. Cannell, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1583 (1983).
- [30] J. Fineberg and V. Steinberg, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1332 (1987).
- [31] T. R. Powers and R. E. Goldstein, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2555 (1997).
- [32] J. Langer, in *Solids Far from Equilibrium*, edited by C. Godrèche (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
- [33] S. Residori, A. Petrossian, T. Nagaya, C. Riera, and M. G. Clerc, *Physica D* **199**, 149 (2004).
- [34] R. E. Goldstein, G. H. Gunaratne, L. Gil, and P. Couillet, *Phys. Rev. A* **43**, 6700 (1991).
- [35] P. Couillet, J. Lega, B. Houchmanzadeh, and J. Lajzerowicz, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1352 (1990).
- [36] W. Horsthemke and R. Lefever, *Noise-Induced Transitions: Theory and Applications in Physics, Chemistry and Biology* (Springer, Berlin, 1984).
- [37] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung and F. Marchesoni, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 223 (1998).
- [38] J. Garcia-Ojalvo and J. M. Sancho, *Noise in Spatially Extended Systems* (Springer-Verlag, New York, 1999).
- [39] G. Agez, P. Glorieux, M. Taki, and E. Louvergneaux, *Phys. Rev. A* **74**, 043814 (2006).
- [40] M. G. Zimmermann, R. Toral, O. Piro, and M. San Miguel, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3612 (2000).
- [41] G. Agez, M. G. Clerc, and E. Louvergneaux, *Phys. Rev. E* **77**, 026218 (2008); G. Agez, M. G. Clerc, E. Louvergneaux, and R. G. Rojas, *ibid.* **87**, 042919 (2013).
- [42] L. Q. Zhou, X. Jia, and Q. Ouyang, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 138301 (2002).
- [43] R. Muller, K. Lippert, A. Kuhnelt, and U. Behn, *Phys. Rev. E* **56**, 2658 (1997).
- [44] M. G. Clerc, C. Falcon, and E. Tirapegui, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 148302 (2005); *Phys. Rev. E* **74**, 011303 (2006).
- [45] Experimental image of a granular kink and temporal evolution of kink position is a courtesy of J. Macias and C. Falcon.
- [46] N. G. V. Kampen, *Stochastic Process in Physics and Chemistry* (North-Holland, Amsterdam, 1992).
- [47] C. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods* (Springer-Verlag, Berlin, 1985).
- [48] T. Funaki, *Prob. Th. Rel. Flds.* **102**, 221 (1995).
- [49] S. R. Dunbar, *J. Math. Biol.* **17**, 11 (1983).
- [50] M. G. Clerc, S. Coulibaly, and D. Laroze, *Int. J. Bifurcation Chaos* **19**, 3525 (2009).
- [51] A. Hagberg, A. Yochelis, H. Yizhaq, C. Elphick, L. Pismen, and E. Meron, *Physica D* **217**, 186 (2006).
- [52] P. Couillet, C. Elphick, and D. Repaux, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 431 (1987).
- [53] G. Agez, C. Szwaj, E. Louvergneaux, and P. Glorieux, *Phys. Rev. A* **66**, 063805 (2002).
- [54] W. Schöpfl and W. Zimmermann, *Phys. Rev. E* **47**, 1739 (1993).
- [55] H. Risken, *Fokker-Planck Equation* (Springer, Berlin, 1984).