



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

INTERVALOS ERRANTES EN TRANSFORMACIONES DE INTERCAMBIO DE
INTERVALOS AFINES

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

RODOLFO JOAQUÍN GUTIÉRREZ ROMO

PROFESOR GUÍA:
ALEJANDRO MAASS SEPÚLVEDA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
MICHAEL SCHRAUDNER
SERVET MARTÍNEZ AGUILERA

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Proyecto Basal PFB 03 de CONICYT.

SANTIAGO DE CHILE
2015

**RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR AL
TÍTULO DE:** Ingeniero Civil Matemático y grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería,
Mención Matemáticas Aplicadas
POR: Rodolfo Joaquín Gutiérrez Romo
FECHA: 10/08/2015
PROFESOR GUÍA: Alejandro Maass Sepúlveda

INTERVALOS ERRANTES EN TRANSFORMACIONES DE INTERCAMBIO DE INTERVALOS AFINES

El estudio de la existencia de intervalos errantes en distintos tipos de sistemas dinámicos se remonta al Teorema de Denjoy, que lo realizó en los homeomorfismos del círculo.

Las transformaciones de intervalos son generalizaciones naturales de las rotaciones del círculo que se pueden obtener al considerar una sección de Poincaré de un flujo lineal en una superficie compacta orientable. Las transformaciones de intervalos afines son perturbaciones de transformaciones de intervalos en las que cada pendiente es positiva, pero no necesariamente igual a uno.

Se han encontrado y estudiado varios ejemplos de transformaciones de intercambio de intervalos afines con intervalos errantes. Particularmente, se han estudiado casos en las que estas transformaciones de intervalos afines con intervalos errantes son semiconjugadas a transformaciones de intercambio de intervalos autosimilares.

Este trabajo se concentra en este último caso. Específicamente, se encuentran condiciones para que, dada una transformación de intercambio de intervalos autosimilar, exista una transformación de intercambio de intervalos afín que sea semiconjugada a ésta y que contenga intervalos errantes. El caso que se considera es donde la matriz de renormalización tiene un valor propio módulo mayor a 1 y que, al normalizarlo, induce una rotación irracional en el círculo. Una herramienta esencial para probar el resultado son los modelos geométricos fractales de la sustitución asociada a la transformación de intercambio de intervalos autosimilar.

El resultado principal que se obtuvo es que cierta condición aritmética, que se llamará la propiedad de representación única, implica el resultado buscado. Ésta tiene que ver con la cantidad de maneras que los puntos extremos de los fractales pueden ser escritos como series de números complejos.

Un segundo resultado fue encontrar otras condiciones que implican la propiedad de representación única. Éstas son: (i) condición algebraica: el valor propio mencionado anteriormente es conjugado de Galois al inverso del valor propio de Perron-Frobenius, (ii) condición geométrica: condición de finitud sobre ciertos puntos extremos de los fractales, (iii) condición combinatorial: condición sobre las componentes minimales de cierto *skew product*.

El último resultado es aplicar las técnicas desarrolladas en este trabajo al mapeo cúbico de Arnoux-Yoccoz, probando que existe una transformación de intercambio de intervalos afín con intervalos errantes semiconjugado a este mapeo.

Tabla de contenido

Introducción	1
1 Preliminares	3
1.1 Sustituciones y Subshifts Sustitutivos	3
1.2 Transformaciones de Intercambio de Intervalos	4
1.2.1 Transformaciones de Intercambio de Intervalos Autosimilares	5
1.3 Extensiones Afines con Intervalos Errantes	6
1.4 Fractales Asociados a Espacios Expansivos	7
2 Teorema Principal	8
2.1 Estrategia	8
2.2 Secuencias mínimas de una t.i.i. autosimilar	9
2.3 Fractales asociados a una t.i.i. autosimilar	10
2.3.1 Definiciones y propiedades básicas	10
2.3.2 Secuencias mínimas y puntos extremos	13
2.4 Teorema Principal	15
2.4.1 Enunciado del Teorema Principal	15
2.4.2 Pasos principales para probar el Teorema 2.15	15
2.4.3 Conclusión de la demostración del Teorema 2.15	22
3 Mapeo de Arnoux-Yoccoz cúbico	23
3.1 La t.i.i. de A-Y	23
3.2 Fractales asociados a la t.i.i. de A-Y	24
3.2.1 Parametrización de la frontera del fractal de tribonacci	25
3.2.2 Parametrización de la frontera de los fractales de Arnoux-Yoccoz	26
3.2.3 Propiedad de representación única para la t.i.i. de A-Y	32
4 Condiciones algebraica, geométrica y combinatorial para el Teorema 2.14	35
4.1 La condición algebraica	35
4.2 La condición geométrica	36
4.2.1 El <i>skew product</i> \mathbf{H}	37
4.3 La condición combinatorial	40
4.4 Demostración de la propiedad de representación única	41
4.5 T.i.i. de A-Y y las condiciones algebraica, geométrica y combinatorial	41
Conclusión	42
Bibliografía	43

Introducción

El tópico de la existencia de intervalos errantes ha sido estudiado por mucho tiempo en la teoría de sistemas dinámicos. Denjoy [Den32] mostró que un difeomorfismo \mathcal{C}^1 del círculo que preserva orientación con número de rotación irracional es conjugado a una rotación irracional si y sólo si no tiene intervalos errantes y construyó ejemplos de tales difeomorfismos de clase \mathcal{C}^r con intervalos errantes para todo $r < 2$. La ausencia de intervalos errantes está asegurada para un difeomorfismo \mathcal{C}^2 .

Al considerar un flujo de suspensión de una rotación, se obtiene un flujo lineal en un toro de dos dimensiones. Una generalización natural de estos flujos son los flujos lineales en superficies de género mayor, que, mediante una sección de Poincaré, producen transformaciones de intercambio de intervalos. En este sentido, una transformación de intercambio de intervalos es una generalización natural de una rotación del círculo.

Un mapeo biyectivo $T: [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ se dice una *transformación de intercambio de intervalos* (i.e.m.) si existe una partición finita $(I_a; a \in \mathcal{A})$ de $[0, 1)$ compuesta por intervalos tal que $T(t) = t + \delta_a$ para cada $t \in I_a$ y $a \in \mathcal{A}$. Claramente, T es una isometría por pedazos del intervalo unitario que intercambia los intervalos $\{I_a; a \in \mathcal{A}\}$. Una t.i.i. T se dice *autosimilar* si existe $0 < \alpha < 1$ tal que la transformación $T^{(1)}: [0, \alpha) \rightarrow [0, \alpha)$ de primer retorno por T al intervalo $[0, \alpha)$ es, salvo un reescalamiento, igual a T . Una transformación de intercambio de intervalos afín (t.i.i. afín) $f: [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ es un mapeo biyectivo, afín por pedazos con pendientes positivas.

La extensión simbólica natural de una t.i.i. autosimilar es generada por una sustitución. En este caso, la matriz de renormalización de la transformación coincide con la matriz de tal sustitución.

Levitt [Lev87] construyó un ejemplo de una t.i.i. afín que no es únicamente ergódica y tiene intervalos errantes, mostrando que existen contraejemplos de tipo Denjoy con regularidad arbitraria. Camelier y Gutiérrez [CG97] encontraron un ejemplo de una t.i.i. afín únicamente ergódica con intervalos errantes que es semiconjugada a una t.i.i. autosimilar. Este ejemplo es fue estudiado más profundamente por Cobo [Cob02]. En particular, se examinó la regularidad de tales conjugaciones. Más tarde, Bressaud, Hubert y Maass [BHM10] determinaron condiciones algebraicas suficientes en la matriz de renormalización de una t.i.i. autosimilar para que exista una t.i.i. afín con intervalos errantes que sea semiconjugada a ésta. En este caso, existe un valor propio real de módulo estrictamente mayor a uno distinto del valor propio de Perron-Frobenius que es conjugado de Galois a este último. El caso en el que el vector de logaritmos de la extensión afín yace en un subespacio propio neutral fue considerado por

Bressaud, Bufetov y Hubert en [BBH14], concluyendo que en este caso no hay intervalos errantes. Marmi, Moussa y Yoccoz [MMY10] probaron que casi toda t.i.i. posee una t.i.i. afín con intervalos errantes semiconjugada a ésta.

Este trabajo es de una naturaleza similar a [BHM10], pero se concentra del caso en el que la matriz de renormalización de una t.i.i. autosimilar T tiene un valor propio no real β con $|\beta| > 1$ y con $\arg(\beta)/\pi$ irracional. Este caso no ha sido considerado previamente. El trabajo se apoya en gran medida en los modelos geométricos para sustituciones definidos por Arnoux, Bernat y Bressaud en [ABB11]. Estos modelos son obtenidos considerando «líneas quebradas» generadas por los prefijos de las aplicaciones sucesivas de la sustitución a una letra y por un vector propio asociado a β y luego renormalizando por una potencia apropiada de β . Los conjuntos resultantes son frecuentemente de naturaleza fractal. Se verá que algunas propiedades de estos fractales son condiciones suficientes para la existencia de una t.i.i. afín con intervalos errantes que sea semiconjugada a T . Específicamente, se probará lo siguiente:

Teorema 1 *Sea T una t.i.i. autosimilar. Supóngase que su matriz de renormalización M tiene un valor propio complejo β con $|\beta| > 1$ y $\arg(\beta)/\pi$ irracional que tiene un vector propio asociado γ con coordenadas no nulas. Si T tiene la propiedad de representación única para β y γ , entonces T es semiconjugada a una t.i.i. afín con intervalos errantes.*

La propiedad de representación única se relaciona a las diferentes formas que los puntos extremos, que son algunos puntos de interés en la frontera de los fractales, pueden ser escritos como sumas complejas. La definición precisa puede ser encontrada en la Sección 2.3.2.

Se probará también que la propiedad de representación única es implicada por otras hipótesis que pueden parecer más naturales:

Teorema 2 *Sea T una t.i.i. autosimilar. Supóngase que su matriz de renormalización M tiene un valor propio β con $|\beta| > 1$ y $\arg(\beta)/\pi$ irracional que es Galois-conjugado a la inversa del valor propio de Perron-Frobenius de M . Si los fractales asociados a β y γ satisfacen la condición geométrica y combinatorial, entonces T es semiconjugada a una t.i.i. afín con intervalos errantes.*

La condición geométrica es una condición de finitud y la condición combinatorial se relaciona con las componentes minimales de un cociclo que aparece al estudiar la manera en la que se generan los puntos extremos.

Se aplicarán las técnicas desarrolladas en este trabajo al ejemplo cúbico de Arnoux-Yoccoz, probando que existe una t.i.i. afín que es semiconjugada a éste. Este ejemplo se comporta bastante bien y satisface todas las hipótesis.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Sustituciones y Subshifts Sustitutivos

Para una referencia sobre la teoría general de sustituciones, ver [Que87] y [Fog02].

Sea \mathcal{A} un conjunto finito o *alfabeto*. Una *palabra* es una cadena finita de símbolos en \mathcal{A} , es decir, $w = w_0 \dots w_{n-1}$, donde a n se le llama el largo de w . La palabra vacía ε se define como la palabra de largo cero. El conjunto de todas las palabras en \mathcal{A} se denota \mathcal{A}^* y el de las palabras de largo positivo se denota $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A}^* \setminus \{\varepsilon\}$.

Se considerarán palabras indexadas por enteros. Esta clase de palabras se denotarán como $w = w_{-m} \dots w_{-1}.w_0 \dots w_n$, donde m, n son enteros no negativos y el punto separa las coordenadas positivas y negativas. El conjunto de secuencias infinitas en una dirección $\omega = (\omega_n)_{n \geq 1}$ en \mathcal{A} se denota $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Análogamente, $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es el conjunto de secuencia infinitas en ambas direcciones $\omega = (\omega_m)_{m \in \mathbb{Z}}$.

Una *sustitución* es una función $\sigma: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^+$. Estas funciones se extienden naturalmente a \mathcal{A}^+ , $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ y $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ por concatenación. Para $\omega = (\omega_m)_{m \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ la extensión está dada por

$$\sigma(\omega) = \dots \sigma(\omega_{-2})\sigma(\omega_{-1}).\sigma(\omega_0)\sigma(\omega_1) \dots,$$

donde el punto central separa las coordenadas positivas y negativas de $\sigma(\omega)$. Otra convención natural es que la imagen por σ de la palabra vacía ε es ε .

Sea M^σ la matriz con índices en \mathcal{A} tal que $M_{a,b}^\sigma$ cuenta el número de veces que b aparece en $\sigma(a)$ para cualquier $a, b \in \mathcal{A}$. La sustitución se dice primitiva si existe $n \geq 1$ tal que, para cualquier $a \in \mathcal{A}$, $\sigma^n(a)$ contiene todas las letras de \mathcal{A} (aquí σ^n significa n iteraciones consecutivas de σ). Bajo primitividad, se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que todas las coordenadas de M^σ son positivas.

Sea $\Omega_\sigma \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ el subshift inducido por σ . Esto es, $\omega \in \Omega_\sigma$ si y sólo si toda subpalabra de ω es una subpalabra de $\sigma^n(a)$ para algún entero $n \geq 0$ y $a \in \mathcal{A}$. Llamamos Ω_σ el subshift sustitutivo asociado a σ . Este subshift es minimal si σ es primitiva. También es σ -invariante, esto es, $\sigma(\Omega_\sigma) \subseteq \Omega_\sigma$.

Supóngase que σ es primitiva. Para toda secuencia $\omega \in \Omega_\sigma$, existe una única secuencia $(p_m, c_m, s_m)_{m \geq 0} \in (\mathcal{A}^* \times \mathcal{A} \times \mathcal{A}^*)^{\mathbb{N}}$ tal que, para todo $m \geq 0$, $\sigma(c_{m+1}) = p_m c_m s_m$ y

$$\dots \sigma^3(p_3) \sigma^2(p_2) \sigma^1(p_1) p_0 c_0 s_0 \sigma^1(s_1) \sigma^2(s_2) \sigma^3(s_3) \dots$$

es la parte central de ω , donde el punto separa las coordenadas positivas y negativas. Obsérvese que los p_m (respectivamente los s_m) son en el subconjunto finito de \mathcal{A}^* que consiste en todos los prefijos (respectivamente todos los sufijos) de $\sigma(a)$ para todo a in \mathcal{A} . Esta secuencia se conoce como la *descomposición prefijo-sufijo (d.p.s.)* de ω (ver, por ejemplo, [CS01]).

Si sólo finitos sufijos s_m son no vacíos, entonces existen $a \in \mathcal{A}$ y enteros no negativos m y q tales que

$$\omega_{[0, \infty)} = c_0 s_0 \sigma^1(s_1) \dots \sigma^n(s_n) \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma^{mq}(a).$$

Análogamente, si sólo finitos prefijos p_m son no vacíos, entonces existen $a \in \mathcal{A}$ y enteros no negativos n y q tales que

$$\omega_{(-\infty, -1]} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma^{mq}(a) \sigma^n(p_n) \dots \sigma^1(p_1) p_0.$$

1.2. Transformaciones de Intercambio de Intervalos

Las transformaciones de intercambio intervalos son un tópico clásico en dinámica que ha recibido bastante atención en las últimas décadas. Esto se explica por dos razones principales. Por un lado, poseen una formulación particularmente simple, pero aún así exhiben un comportamiento rico. Por otro lado, están íntimamente relacionadas con otros objetos en dinámica y en muchas otras áreas de la matemática.

En esta sección se recopilan algunos resultados básicos de las transformaciones de intercambio de intervalos directamente de [Via06], con mínimos cambios de notación para adaptarse mejor a este trabajo.

Definición 1.1 (Transformación de Intercambio de Intervalos) *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo cerrado a la izquierda y abierto a la derecha y $\{I_a \mid a \in \mathcal{A}\}$ una partición de este intervalo en subintervalos cerrados a la izquierda y abiertos a la derecha, indexada por un alfabeto \mathcal{A} con $d \geq 2$ letras.*

Una transformación de intercambio de intervalos $T: I \rightarrow I$ es una función biyectiva tal que $T|_{I_a}$ es una traslación para cada $a \in \mathcal{A}$.

Una transformación de intercambio de intervalos puede determinarse con la siguiente información:

1. Un par $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ de biyecciones $\pi_\varepsilon: \mathcal{A} \rightarrow \{1, 2, \dots, d\}$ que describen el orden en el que quedan los subintervalos antes y después de aplicar la transformación. Esto se representará como

$$\pi = \begin{pmatrix} a_1^0 & a_2^0 & \dots & a_d^0 \\ a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_d^1 \end{pmatrix}$$

4	2	3	1
1	2	3	4

Figura 1.1

donde $a_j^\varepsilon = \pi_\varepsilon^{-1}(a)$ para $\varepsilon \in \{0, 1\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, d\}$.

2. Un vector $\lambda = (\lambda_a)_{a \in \mathcal{A}}$ de entradas estrictamente positivas que representa el largo de cada subintervalo I_a llamado *vector de largos*.

Ejemplo 1.1 La transformación de intercambio intervalos descrita por la figura 1.1 corresponde al par $\pi = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 1.2 Para $d = 2$, hay esencialmente una posible transformación, cuya información combinatorial está dada por $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

La transformación de intercambio de intervalos asociada a (π, λ) está dada por

$$T(x) = \begin{cases} x + \lambda_b & \text{si } x \in I_a \\ x + \lambda_a & \text{si } x \in I_b. \end{cases}$$

Identificando el intervalo I con el círculo $\mathbb{R}/((\lambda_a + \lambda_b)\mathbb{Z})$, obtenemos que $T(x) = x + \lambda_b$ mód $(\lambda_a + \lambda_b)\mathbb{Z}$. Esto es, T es exactamente una rotación de ángulo $\lambda_b/(\lambda_a + \lambda_b)$.

Claramente, una transformación de intercambio de intervalos no puede tener intervalos errantes, pues T preserva la medida de Lebesgue.

Por simplicidad, supondremos siempre que el intervalo donde están definidas las transformaciones es $[0, 1)$.

1.2.1. Transformaciones de Intercambio de Intervalos Autosimilares

Una t.i.i. T se dice *autosimilar* si existe $0 < \alpha < 1$ tal que el mapeo $T^{(1)}: [0, \alpha) \rightarrow [0, \alpha)$ de primer retorno por T al intervalo $[0, \alpha)$ es, salvo un reescalamiento, igual a T .

Las t.i.i. autosimilares tienen propiedades algebraicas interesantes. Para cada $a \in \mathcal{A}$ defínase $I_a^{(1)} = \alpha I_a$ y denótese por M la *matriz de renormalización* de T cuyas coordenadas están dadas por $M_{a,b} = |\{0 \leq k < r_a \mid T^k(I_a^{(1)}) \subseteq I_b\}|$, donde r_a es el tiempo de primer retorno de $I_a^{(1)}$ a $[0, \alpha)$. Se tiene que α es el inverso del valor propio de Perron-Frobenius de M y que es un valor propio de M asociado al vector propio δ . Además, λ es un vector propio de M^T asociado al valor propio α^{-1} . Más aún, $\delta, \lambda \in \mathbb{Q}(\alpha)^{\mathcal{A}}$. Para más detalles, ver el Teorema 6 en [LPV08].

Sistema simbólico asociado a una t.i.i. autosimilar

Sean T una t.i.i. minimal y autosimilar e $(I_a)_{a \in \mathcal{A}}$ los intervalos asociados. Dado $t \in [0, 1)$ se construye una secuencia simbólica $\omega = (\omega_m)_{m \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, donde $\omega_m = a$ si y sólo si $T^m(t) \in I_a$. Sea $\Omega_T \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ la cerradura del conjunto de secuencias construidos de esta forma para todo $t \in [0, 1)$. Claramente, la secuencia asociada a $T(t)$ corresponde a $S(\omega)$, donde $S: \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es el shift por la izquierda. Un resultado clásico asegura que existe una función continua y sobreyectiva $\pi_T: \Omega_T \rightarrow [0, 1)$ tal que $T \circ \pi_T = \pi_T \circ S$. Más aún, π_T es invertible salvo en numerables puntos que corresponden a las órbitas de las discontinuidades de T . Como T es minimal y autosimilar, la restricción de S a Ω_T es minimal (todas las órbitas para el shift son densas) y Ω_T es un subshift sustitutivo asociado a una sustitución $\sigma: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^+$, esto es, $\Omega_T = \Omega_\sigma$ para algún σ . La sustitución se construye de la siguiente forma: $\sigma(a) = w_0 \dots w_{r_a-1}$ si y sólo si $T^n(I_a^{(1)}) \subseteq I_{w_n}$ para todo $0 \leq n < r_a$ y $a \in \mathcal{A}$. Se tiene entonces que $M^\sigma = M$, la matriz de renormalización asociada a T . Para más detalles, ver [CG97].

1.3. Extensiones Afines con Intervalos Errantes

Definición 1.2 (Transformación de Intercambio de Intervalos Afín) *Una función biyectiva $f: [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ es una transformación de intercambio de intervalos afín (t.i.i. afín) si es afín por pedazos y tiene pendiente positiva en cada trozo. Si $(I_a)_{a \in \mathcal{A}}$ son los intervalos de continuidad de f , se dice que $\ell = (\ell_a)_{a \in \mathcal{A}}$ es el vector de pendientes de f , donde $\ell_a > 0$ es la pendiente de f restringida a I_a . Claramente, una t.i.i. es una t.i.i. afín con $\ell = (1, \dots, 1)$.*

Una t.i.i. afín puede tener intervalos errantes, como se muestra en [Lev87] en el caso no únicamente ergódico y en [CG97] en el caso únicamente ergódico.

Sean ahora $T: [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ una t.i.i. y $(I_a)_{a \in \mathcal{A}}$ sus intervalos asociados. El problema general que es de interés es el siguiente:

Problema ¿Existe una t.i.i. afín $f: [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ con intervalos errantes que es una extensión de T (o, equivalentemente, semiconjugada a T)?

Supóngase que T es autosimilar con vector de largos λ . Se tiene que existe una t.i.i. afín $f: [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ con vector de pendientes ℓ que es semiconjugada a T si y solamente si $\log \ell = (\log \ell_a)_{a \in \mathcal{A}}$ es ortogonal a λ , como se probó en [CG97]. Resultados previos muestran lo siguiente:

- si $\log \ell$ pertenece a un subespacio M -invariante y estable para M , entonces f es conjugada a T . Luego, f no tiene intervalos errantes (ver [CG97]);
- si β es un valor propio de M con $|\beta| = 1$ y $\log \ell$ pertenece al subespacio propio asociado a β (si $\beta \notin \mathbb{R}$ se considera el espacio generado por las partes reales de los vectores propios asociados a β y $\bar{\beta}$), entonces f es conjugada a T . Nuevamente, f no puede poseer intervalos errantes (ver [BBH14]).

- si β es un valor propio real de M con $\beta > 1$ que es Galois-conjugado y distinto al valor propio de Perrón-Frobenius, entonces se puede elegir f de modo que tenga intervalos errantes (ver [BHM10]).

El caso que se analizará en este trabajo es el siguiente: β es un valor propio asociado a M con $|\beta| > 1$ y $\arg(\beta)/\pi$ irracional y $\log \ell$ pertenece al espacio propio generado por las partes reales de los vectores propios asociados a β y $\bar{\beta}$.

En [CG97] se desarrolló además la siguiente estrategia general para encontrar una extensión afín para una t.i.i. T :

Teorema 1.3 *Si existe una medida boreliana μ sobre $[0, 1)$ tal que:*

1. *μ tiene átomos y soporte completo;*
2. *existen reales positivos $\ell = (\ell_a)_{a \in \mathcal{A}}$ tales que $\mu(T(J)) = \ell_a \mu(J)$ para cada boreliano $J \subseteq I_a$ y $a \in \mathcal{A}$;*

entonces existe una extensión afín de T con vector de pendientes ℓ .

Esta estrategia se describe más detalladamente en la Sección 2.1

1.4. Fractales Asociados a Espacios Expansivos

Sea T una t.i.i. minimal y autosimilar con matriz de renormalización M y sustitución asociada σ .

A continuación se presentará cómo se definen los fractales asociados a σ para un espacio expansivo, como se definen en [ABB11].

Sea $F \oplus G$ una descomposición invariante de \mathbb{R}^A tal que la restricción de M a G es estrictamente expansiva y sea Π la proyección sobre G paralela a F .

Para $a \in \mathcal{A}$ y $n \geq 0$, se define la *línea quebrada* asociada a $\sigma^n(a) = w_1 \dots w_m$ como el conjunto

$$\mathbf{L}_a^{(n)} = \left\{ 0, \mathbf{e}_{w_1}, \mathbf{e}_{w_1} + \mathbf{e}_{w_2}, \dots, \sum_{j=1}^m \mathbf{e}_{w_j} \right\},$$

donde $(\mathbf{e}_a)_{a \in \mathcal{A}}$ es la base canónica de \mathbb{R}^A .

Se define el *fractal* a $a \in \mathcal{A}$ como el conjunto $\mathfrak{F}_a = \overline{\bigcup_{n \geq 0} M^{-n} \Pi(\mathbf{L}^{\sigma^n(a)})}$. Estos conjuntos son compactos y conexos por caminos. En la Sección 2.3 se analizan estos conjuntos en detalle. Se presentará una definición distinta a la expuesta aquí, que se puede verificar que es equivalente mediante un cálculo elemental.

Capítulo 2

Teorema Principal

2.1. Estrategia

Sea $T: [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ una t.i.i. autosimilar con intervalos de continuidad $(I_a)_{a \in \mathcal{A}}$. El objetivo es probar que bajo las hipótesis del Teorema 1 existe una t.i.i. afín $f: [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ con intervalos errantes que es semiconjugada a T o, equivalentemente, que es una extensión topológica de T .

Para lograr esto, se seguirá la estrategia desarrollada por Camelier y Gutiérrez en [CG97] y usada por Cobo en [Cob02] y por Bressaud, Hubert y Maass en [BHM10]. Esto es, se busca una medida de probabilidad boreliana con átomos μ en $[0, 1)$ que asigna medida positiva a todo intervalo abierto con la siguiente propiedad: para cada $a \in \mathcal{A}$ existe un real positivo ℓ_a tal que $\mu(T(J)) = \ell_a \mu(J)$ para cada boreliano $J \subseteq I_a$. Dada tal medida μ , la función $g(t) = \mu([0, t])$ es estrictamente creciente, continua por la derecha y tiene límites por la izquierda. Por lo tanto, g admite una inversa por la derecha h . No es difícil ver entonces que $f = g \circ T \circ h$ es una t.i.i. afín con vector de pendientes $\ell = (\ell_a)_{a \in \mathcal{A}}$ y que, si $t \in [0, 1)$ es algún átomo de μ , entonces el intervalo $[\lim_{s \rightarrow t^-} g(s), g(t)]$ es un intervalo errante para f .

Una forma de construir tal medida es encontrar una secuencia $\omega \in \Omega_T$, donde Ω_T es la extensión simbólica de T construida codificando las órbitas T de los puntos respecto a los intervalos de continuidad $(I_a)_{a \in \mathcal{A}}$, un vector complejo $\gamma \in \mathbb{C}^{\mathcal{A}}$, $\xi \in \mathbb{S}^1$ y un real $\rho > 0$ tales que:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Re}(\xi \gamma_n(\omega))}{n^\rho} > 0 \quad \text{y} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Re}(\xi \gamma_{-n}(\omega))}{n^\rho} > 0, \quad (2.1)$$

donde $\gamma_n(\omega) = \gamma_{\omega_0} + \cdots + \gamma_{\omega_{n-1}}$ y $\gamma_{-n}(\omega) = -(\gamma_{\omega_{-n}} + \cdots + \gamma_{\omega_{-1}})$ para todo $n \geq 0$.

Las condiciones anteriores implican que $K = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(-\operatorname{Re}(\xi \gamma_n(\omega))) < \infty$. Si ω es la codificación de $t \in [0, 1)$, la medida $\mu = \frac{1}{K} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(-\operatorname{Re}(\xi \gamma_n(\omega))) \mathbf{1}_{T^n(t)}$ satisface las propiedades deseadas para el vector de pendientes $\ell = (\exp(-\operatorname{Re}(\xi \gamma(a))))_{a \in \mathcal{A}}$ debido a que $T^n(t) \in I_a$ si y sólo si $\gamma(\omega_n) = \gamma(a)$.

Se ha reducido el problema a probar (2.1) en el subshift minimal Ω_T . Esto se logrará impo-

niendo las condiciones del Teorema 2.14.

2.2. Secuencias mínimas de una t.i.i. autosimilar

Sea T una t.i.i. autosimilar que intercambia los intervalos $(I_a)_{a \in \mathcal{A}}$. Supóngase que $\beta \in \mathbb{C}$ es un valor propio complejo de M , la matriz de renormalización asociada a T , tal que $\arg(\beta)/\pi$ es irracional. Sea $\gamma = (\gamma(a))_{a \in \mathcal{A}}$ un vector propio asociado a β . Recuérdese que T está asociada a una sustitución $\sigma: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$ con $M^\sigma = M$.

Para una palabra dada $w = w_1 \dots w_m \in \mathcal{A}^*$ se denota $\gamma(w) = \gamma(w_1) + \dots + \gamma(w_m)$. Es fácil ver que para todo entero $n \geq 0$:

$$\gamma(\sigma^n(w)) = \beta^n \gamma(w). \quad (2.2)$$

Definición 2.1 *Un prefijo w' de una palabra $w \in \mathcal{A}^*$ se dice mínimo para w y la dirección $\tau \in \mathbb{S}^1$ si*

$$\operatorname{Re}(\tau\gamma(w')) = \min\{\operatorname{Re}(\tau\gamma(w'')) \mid w'' \text{ es un prefijo de } w\}.$$

Para una secuencia $\omega = (\omega_m)_{m \in \mathbb{Z}} \in \Omega_T$ se define $\gamma_0(\omega) = 0$, $\gamma_n(\omega) = \gamma(\omega_0 \dots \omega_{n-1})$ para $n \geq 1$ y $\gamma_n(\omega) = -\gamma(\omega_n \dots \omega_{-1})$ para $n \leq -1$.

Definición 2.2 *Una secuencia $\omega \in \Omega_T$ se dice mínima para la dirección $\tau \in \mathbb{S}^1$ si*

$$\operatorname{Re}(\tau\gamma_n(\omega)) \geq 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

El objetivo es probar que algunas secuencias mínimas para la dirección $\tau \in \mathbb{S}^1$ verifican la ecuación (2.1). Esta desigualdad no es satisfecha, en general, por una secuencia mínima arbitraria.

El siguiente lema ilustra la definición anterior de otra forma útil para palabras finitas.

Lema 2.3 *Sea $\omega \in \Omega_T$ una secuencia mínima para la dirección $\tau \in \mathbb{S}^1$. Entonces, para enteros cualesquiera $n \leq -1$ y $m \geq n$ se tiene que*

$$\operatorname{Re}(\tau\gamma(\omega_n \dots \omega_{-1})) \leq \operatorname{Re}(\tau\gamma(\omega_n \dots \omega_m)).$$

DEMOSTRACIÓN. Si $m \leq -1$, entonces

$$\operatorname{Re}(\tau\gamma(\omega_n \dots \omega_{-1})) - \operatorname{Re}(\tau\gamma(\omega_n \dots \omega_m)) = -\operatorname{Re}(\tau\gamma_{m+1}(\omega)) \leq 0$$

porque ω es una secuencia mínima. Si $m \geq 0$, entonces

$$\operatorname{Re}(\tau\gamma(\omega_n \dots \omega_m)) - \operatorname{Re}(\tau\gamma(\omega_n \dots \omega_{-1})) = \operatorname{Re}(\tau\gamma_m(\omega)) \geq 0$$

porque ω es una secuencia mínima. □

Bajo una condición débil sobre γ se tiene la existencia de secuencias mínimas en Ω_T .

Lema 2.4 *Supóngase que $\gamma(a) \neq 0$ para cada $a \in \mathcal{A}$. Entonces, existe un abierto $\Xi \subseteq \mathbb{S}^1$ tal que para cada $\tau \in \Xi$ existen secuencias mínimas para la dirección τ .*

DEMOSTRACIÓN. Primero se construirá el conjunto Ξ apropiado. Para cada $\tau \in \mathbb{S}^1$, defínase $\mathcal{A}^+(\tau) = \{a \in \mathcal{A} \mid \operatorname{Re}(\tau\gamma(a)) > 0\}$ y $\mathcal{A}^-(\tau) = \{a \in \mathcal{A} \mid \operatorname{Re}(\tau\gamma(a)) < 0\}$. Se afirma que existe un abierto $\Xi \subseteq \mathbb{S}^1$ tal que para cada $\tau \in \Xi$ se tiene que $\mathcal{A}^+(\tau)$ y $\mathcal{A}^-(\tau)$ son no vacíos y cumplen $\mathcal{A} = \mathcal{A}^+(\tau) \cup \mathcal{A}^-(\tau)$. En efecto, primero nótese que γ no puede ser de la forma $\gamma = z\gamma'$ con $z \in \mathbb{C}$ y $\gamma' \in \mathbb{R}^A$, pues en este caso se tendría que γ' es un vector propio asociado al número no real β , lo que no es posible. Luego, existen $a, b \in \mathcal{A}$ distintos y un abierto Ξ' compuesto por $\tau \in \mathbb{S}^1$ que verifican $\operatorname{Re}(\tau\gamma(a)) < 0$ y $\operatorname{Re}(\tau\gamma(b)) > 0$. Por hipótesis, para cada $c \in \mathcal{A}$ el conjunto de $\tau \in \mathbb{S}^1$ tales que $\operatorname{Re}(\tau\gamma(c)) = 0$ es finito. Se concluye que la intersección del complemento de la unión de estos conjuntos finitos con Ξ' , denotado Ξ , cumple las propiedades deseadas.

Ahora se probará la existencia de secuencias mínimas para cada $\tau \in \Xi$. Como T es minimal y $\tau \in \Xi$, existen $a \in \mathcal{A}^-(\tau)$ y $b \in \mathcal{A}^+(\tau)$ tales que $I_a \cap T^{-1}(I_b) \neq \emptyset$. Por lo tanto, ab aparece en alguna secuencia en Ω_T .

Sea $\beta_0 = \beta/|\beta|$ y considérese $(n_k)_{k \geq 1}$ una sucesión de enteros tal que $\beta_0^{n_k} \rightarrow 1$ cuando $k \rightarrow \infty$. Nótese que $\tau\gamma(\sigma^{n_k}(a)) = \tau\beta^{n_k}\gamma(a) = \tau|\beta|^{n_k}\beta_0^{n_k}\gamma(a)$ y que $\tau\gamma(\sigma^{n_k}(b)) = \tau|\beta|^{n_k}\beta_0^{n_k}\gamma(b)$, por lo que

$$\operatorname{Re}(\tau\gamma(\sigma^{n_k}(a))) \rightarrow -\infty \quad \text{and} \quad \operatorname{Re}(\tau\gamma(\sigma^{n_k}(b))) \rightarrow \infty.$$

De este modo, hay una descomposición

$$\sigma^{n_k}(ab) = \sigma^{n_k}(a)\sigma^{n_k}(b) = \sigma^{n_k}(a)\sigma^{n_k}(b) = \omega_{-m_k}\omega_{-m_k+1} \dots \omega_{-1} \cdot \omega_0\omega_1 \dots \omega_{m'_k},$$

donde $\operatorname{Re}(\tau\gamma(\omega_{-m_k} \dots \omega_{-1})) \leq \operatorname{Re}(\tau\gamma(\omega_{-m_k} \dots \omega_m))$ para cada $m \in \{-m_k, \dots, m'_k\}$ y ambas secuencias, $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y $(m'_k)_{k \in \mathbb{N}}$, divergen a infinito cuando $k \rightarrow \infty$.

Al tomar una subsucesión se puede suponer que $\omega_{-m_k}\omega_{-m_k+1} \dots \omega_{-1} \cdot \omega_0\omega_1 \dots \omega_{m'_k}$ converge a una secuencia $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Como ab es una subpalabra de un punto en Ω_T y $\sigma(\Omega_T) \subseteq (\Omega_T)$, se tiene que $\omega \in \Omega_T$. Más aún, se concluye que $\operatorname{Re}(\tau\gamma_n(\omega)) \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, lo que demuestra que $\omega \in \Omega$ es una secuencia mínima para τ . \square

Se verá posteriormente en el Capítulo 4 que la condición del lema anterior está garantizada cuando β es conjugado de Galois a α , el inverso del valor propio de Perron-Frobenius de M .

2.3. Fractales asociados a una t.i.i. autosimilar

2.3.1. Definiciones y propiedades básicas

Sea $a \in \mathcal{A}$. Se define

$$\mathcal{S}_a = \{(p_m, c_m, s_m)_{m \geq 1} \mid \sigma(a) = p_1 c_1 s_1 \text{ and } \sigma(c_{m-1}) = p_m c_m s_m \text{ for all } m \geq 2\}.$$

Para cada $x \in \mathcal{S}_a$ se escribirá $x = (p_m^x, c_m^x, s_m^x)_{m \geq 1}$. Además, se definen los números complejos $f_a(x) = \sum_{m \geq 1} \beta^{-m} \gamma(p_m^x)$ y $f_a^{(n)}(x) = \sum_{m=1}^n \beta^{-m} \gamma(p_m^x)$.

Definición 2.5 *El fractal asociado a $a \in \mathcal{A}$ es el conjunto $\mathfrak{F}_a = \{f_a(x) \mid x \in \mathcal{S}_a\}$. También se define $\mathfrak{F}_a^{(n)} = \{f_a^{(n)}(x) \mid x \in \mathcal{S}_a\}$.*

Sea $a \in \mathcal{A}$. Obsérvese que $\mathfrak{F}_a = \overline{\bigcup_{n \geq 1} \mathfrak{F}_a^{(n)}}$. En efecto, sea $x \in \mathcal{S}_a$ y $n \geq 1$. Se puede “truncar” x del siguiente modo: sea $x|_n$ definido por $(p_m^{x|_n}, c_m^{x|_n}, s_m^{x|_n}) = (p_m^x, c_m^x, s_m^x)$ para cada $1 \leq m \leq n$. Sea $m \geq n$. Se continúa inductivamente tomando $c_{m+1}^{x|_n} \in \mathcal{A}$ y $s_{m+1}^{x|_n} \in \mathcal{A}^*$ tales que $\sigma(c_m^{x|_n}) = c_{m+1}^{x|_n} s_{m+1}^{x|_n}$ y tomando $p_{m+1}^{x|_n} = \varepsilon$. Es fácil ver que $x|_n \in \mathcal{S}_a$ y que $f_a(x|_n) = f_a^{(n)}(x)$, por lo que $\mathfrak{F}_a^{(n)} \subseteq \mathfrak{F}_a$ y se obtiene lo deseado. De manera similar, se puede construir un punto $x \in \mathcal{S}_a$ tal que $p_m^x = \varepsilon$ para cada entero $m \geq 1$. Claramente, $f_a(x) = 0$, por lo que $0 \in \mathfrak{F}_a$. Más aún, $\mathfrak{F}_a \neq \{0\}$. En efecto, sea $b \in \mathcal{A}$ tal que $\gamma(b) \neq 0$. Por primitividad existe un entero $n \geq 0$ tal que $\sigma^n(a)$ contiene a la letra b . Es fácil ver que algún prefijo w de $\sigma^n(a)$ entonces satisface $\gamma(w) \neq 0$. Finalmente, existe una secuencia finita $(p_m, c_m, s_m)_{m=0}^{n-1}$ tal que $\sigma^{n-1}(p_{n-1})\sigma^{n-2}(p_{n-2}) \dots p_0 = w$ con $\sigma(c_{m+1}) = p_m c_m s_m$ para cada $0 \leq m \leq n-2$ y $\sigma(a) = p_n c_n s_n$. Se define x por $(p_m^x, c_m^x, s_m^x) = (p_{n-m}, c_{n-m}, s_{n-m})$ para todo $1 \leq m \leq n$ y $p_m^x = \varepsilon$ para cada $m \geq n+1$, que pertenece a \mathcal{S}_a . Usando (2.2) no es difícil ver que

$$\begin{aligned} f_a(x) &= \sum_{m=1}^n \beta^{-m} \gamma(p_m^x) = \sum_{m=1}^n \beta^{-m} \gamma(p_{n-m}) \\ &= \beta^{-n} \sum_{m=1}^n \beta^{n-m} \gamma(p_{n-m}) \\ &= \beta^{-n} \sum_{m=0}^{n-1} \beta^m \gamma(p_m) = \beta^{-n} \gamma(w) \neq 0. \end{aligned}$$

Un cálculo elemental muestra que \mathfrak{F}_a es un caso particular del fractal construido al proyectar líneas quebradas en un plano expansivo, como se define en [ABB11] y no es necesariamente un fractal de Rauzy clásico. Luego, cada \mathfrak{F}_a es un subconjunto compacto y conexo por caminos del plano. Además, en [ABB11] se estudian los fractales asociados a la t.i.i. cúbica de Arnoux-Yoccoz, probando que tienen interior no vacío y que están relacionados de algún modo al fractal de tribonacci. Este mapeo servirá como ejemplo para ilustrar el resultado principal y las técnicas desarrolladas en este trabajo. Aunque esta t.i.i. no sea autosimilar en el sentido definido anteriormente (ver Capítulo 1), el Teorema 1 se le puede aplicar al hacer algunas pequeñas modificaciones.

Los puntos extremos de estos fractales sobre ciertas direcciones son de interés.

Definición 2.6 *Para $\tau \in \mathbb{S}^1$ y $n \geq 1$ se define*

$$v_a(\tau) = \min_{z \in \mathfrak{F}_a} \operatorname{Re}(\tau z) \text{ and } v_a^{(n)}(\tau) = \min_{z \in \mathfrak{F}_a^{(n)}} \operatorname{Re}(\tau z).$$

Se llama al conjunto $E_a(\tau) = \{z \in \mathfrak{F}_a \mid \operatorname{Re}(\tau z) = v_a(\tau)\}$ el conjunto de puntos extremos de \mathfrak{F}_a para la dirección τ y se define $E_a^{(n)}(\tau) = \{z \in \mathfrak{F}_a^{(n)} \mid \operatorname{Re}(\tau z) = v_a^{(n)}(\tau)\}$ para un entero $n \geq 1$. Claramente $v_a(\tau) \leq v_a^{(n)}(\tau)$, pues $\mathfrak{F}_a^{(n)} \subseteq \mathfrak{F}_a$.

Se necesitarán algunas propiedades simples de los puntos extremos.

Lema 2.7 (Propiedad de continuación) *Sean $a \in \mathcal{A}$ y $\tau \in \mathbb{S}^1$. Si $x \in \mathcal{S}_a$ y $\mathbf{f}_a(x) \in E_a(\tau)$, entonces $\mathbf{f}_{c_1^x}(S(x)) \in E_{c_1^x}(\beta_0^{-1}\tau)$, donde S es el shift usual. Más aún,*

$$\operatorname{Re}(\tau \mathbf{f}_a(x)) = \operatorname{Re}(\tau \beta^{-1} \gamma(p_1^x)) + |\beta|^{-1} v_{c_1^x}(\beta_0^{-1}\tau).$$

Similarmente, si $x \in \mathcal{S}_a$ y $\mathbf{f}_a(x) \in E_a^{(n)}(\tau)$ para $n \geq 1$, entonces $\mathbf{f}_{c_1^x}(S(x)) \in E_{c_1^x}^{(n-1)}(\beta_0^{-1}\tau)$ y

$$\operatorname{Re}(\tau \mathbf{f}_a^{(n-1)}(x)) = \operatorname{Re}(\tau \beta^{-1} \gamma(p_1^x)) + |\beta|^{-1} v_{c_1^x}^{(n-1)}(\beta_0^{-1}\tau).$$

DEMOSTRACIÓN. Si $x \in \mathcal{S}_a$, entonces $\mathbf{f}_a(x) = \beta^{-1} \gamma(p_1^x) + \beta^{-1} \mathbf{f}_a(S(x))$. Si $\mathbf{f}_{c_1^x}(S(x)) \notin E_{c_1^x}(\beta_0^{-1}\tau)$, se tiene que existe $y \in \mathcal{S}_{c_1^x}$ tal que $\operatorname{Re}(\beta_0^{-1} \tau \mathbf{f}_{c_1^x}(y)) < \operatorname{Re}(\beta_0^{-1} \tau \mathbf{f}_{c_1^x}(S(x)))$. Más aún, se tiene que $(p_1^x, c_1^x, s_1^x)y \in \mathcal{S}_a$ y que $\operatorname{Re}(\tau \mathbf{f}_a((p_1^x, c_1^x, s_1^x)y)) < \operatorname{Re}(\tau \mathbf{f}_a(x))$, lo que implica que $\mathbf{f}_a(x) \notin E_a(\tau)$. La igualdad

$$\operatorname{Re}(\tau \mathbf{f}_a(x)) = \operatorname{Re}(\tau \beta^{-1} \gamma(p_1^x)) + |\beta|^{-1} v_{c_1^x}(\beta_0^{-1}\tau).$$

se desprende directamente del hecho que $\mathbf{f}_{c_1^x}(S(x)) \in \mathcal{S}_{c_1^x}(\beta_0^{-1}\tau)$. El resto de la demostración es análoga. □

Lema 2.8 (Aproximación exponencial) *Sean $a \in \mathcal{A}$ y $\tau \in \mathbb{S}^1$. Para cada entero $n \geq 1$ se tiene que $|v_a^{(n)}(\tau) - v_a(\tau)| \leq C|\beta|^{-n}$, donde $C = \max\{-v_b(\tau) \mid b \in \mathcal{A}, \tau \in \mathbb{S}^1\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in \mathcal{S}_a$ con $\mathbf{f}_a(x) \in E_a(\tau)$. Entonces, $v_a(\tau) \leq v_a^{(n)}(\tau) \leq \operatorname{Re}(\tau \mathbf{f}_a^{(n)}(x))$. Luego,

$$|v_a^{(n)}(\tau) - v_a(\tau)| = v_a^{(n)}(\tau) - v_a(\tau) \leq -\operatorname{Re}\left(\tau \sum_{m>n} \beta^{-m} \gamma(p_m^x)\right) = -|\beta|^{-n} v_{c_n^x}(\tau \beta_0^{-n}),$$

donde en la última igualdad se usó la Propiedad de continuación del lema anterior. □

Para cada $a \in \mathcal{A}$ y $\tau \in \mathbb{S}^1$ es claro que $|E_a(\tau)| \geq 1$, ya que \mathfrak{F}_a es compacto. Se define entonces $\mathfrak{T}_a = \{\tau \in \mathbb{S}^1 \mid |E_a(\tau)| \geq 2\}$, esto es, el conjunto de direcciones para las cuales existen al menos dos puntos extremos.

Lema 2.9 *Para cada $a \in \mathcal{A}$, el conjunto \mathfrak{T}_a es a lo más numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Para $Z \subseteq \mathbb{C}$ y $\tau \in \mathbb{S}^1$, sea $E_Z(\tau) = \{z \in Z \mid \operatorname{Re}(\tau z) = \min_{z' \in Z} \operatorname{Re}(\tau z')\}$, el conjunto de los puntos extremos de Z para la dirección τ y $\mathfrak{T}_Z(\tau) = \{\tau \in \mathbb{S}^1 \mid |E_Z(\tau)| \geq 2\}$, el conjunto de direcciones para las cuales existen al menos dos puntos extremos. Denótese la envoltura convexa de Z por $\operatorname{conv}(Z)$.

Sea a un elemento fijo de \mathcal{A} . Claramente, $E_a(\tau) = E_{\mathfrak{F}_a}(\tau)$, $\mathfrak{T}_a(\tau) = \mathfrak{T}_{\mathfrak{F}_a}(\tau)$. No es difícil ver que $E_{\operatorname{conv}(\mathfrak{F}_a)}(\tau) = \operatorname{conv}(E_a(\tau))$ y que $\mathfrak{T}_{\operatorname{conv}(\mathfrak{F}_a)} = \mathfrak{T}_a$, ya que $|E_a(\tau)| \geq 2$ si y sólo si $|\operatorname{conv}(E_a(\tau))| \geq 2$.

Como $\text{conv}(\mathfrak{F}_a)$ es convexo y compacto, puede ser igual a un punto, un segmento de recta o ser homeomorfo a un disco cerrado. En los primeros dos casos $\mathfrak{T}_{\text{conv}(\mathfrak{F}_a)}$ es finito, por lo que se puede suponer que el tercer caso ocurre. Sea $\Phi: \mathbb{S}^1 \rightarrow \partial\text{conv}(\mathfrak{F}_a)$ un homeomorfismo entre \mathbb{S}^1 y la frontera de $\text{conv}(\mathfrak{F}_a)$. Se tiene que $\tau \in \mathfrak{T}_a$ si y sólo si el mapeo $\text{Re}(\tau\Phi): \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ es constante en un intervalo abierto de \mathbb{S}^1 . Como tales intervalos abiertos deben ser disjuntos para distintos $\tau \in \mathbb{S}^1$ y una familia de abiertos disjuntos en \mathbb{S}^1 esa lo más numerable, se concluye que \mathfrak{T}_a es a lo más numerable. \square

2.3.2. Secuencias mínimas y puntos extremos

Los puntos en \mathcal{S}_a se pueden ver como elementos «revertidos» de Ω_T . En efecto, considérese una secuencia mínima $\omega \in \Omega_T$ para la dirección $\xi \in \mathbb{S}^1$ y sea $(p_m^\omega, c_m^\omega, s_m^\omega)_{m \geq 1}$ su descomposición prefijo-sufijo. Recuerdese que $\beta_0 = \beta/|\beta|$.

Sea $(n_k)_{k \geq 1}$ una sucesión creciente de enteros tal que $\xi\beta_0^{n_k} \rightarrow \tau \in \mathbb{S}^1$ y $c_{n_k}^\omega = a \in \mathcal{A}$ para cada $k \geq 1$. Para todo $k \geq 1$ considérese un punto $x_{n_k} \in \mathcal{S}_a$ que comience con

$$(p_{n_k-1}^\omega, c_{n_k-1}^\omega, s_{n_k-1}^\omega)(p_{n_k-2}^\omega, c_{n_k-2}^\omega, s_{n_k-2}^\omega) \cdots (p_0^\omega, c_0^\omega, s_0^\omega)$$

y tal que $p_m^{x_{n_k}} = \varepsilon$ para cada $m \geq n_k$. Ésta es una secuencia obtenida al revertir los índices de finitas coordenadas de la descomposición prefijo-sufijo de ω . Supóngase que la sucesión $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ converge a $x \in \mathcal{S}_a$.

Lema 2.10 *Para cualquier $x \in \mathcal{S}_a$ construido como arriba, $f_a(x)$ es un punto extremo en $E_a(\tau)$.*

DEMOSTRACIÓN. Como ω es una secuencia mínima para ξ , el Lema 2.3 asegura que para todo $k \geq 1$ la palabra $w_k = \sigma^{n_k-1}(p_1^{x_{n_k}}) \cdots p_{n_k}^{x_{n_k}}$ es mínima para $\sigma^{n_k}(a)$ en la dirección ξ . Sea $y \in \mathcal{S}_a$ tal que $f_a(y) \in E_a(\tau)$. Se tiene que $\sigma^{n_k-1}(p_1^y) \sigma^{n_k-2}(p_2^y) \cdots p_{n_k}^y$ es un prefijo de $\sigma^{n_k}(a)$, por lo que $\text{Re}(\xi\gamma(w_k)) \leq \text{Re}(\xi\gamma(\sigma^{n_k-1}(p_1^y) \cdots p_{n_k}^y))$. Más aún, de (2.2) se deduce que

$$\gamma(w_k) = \sum_{m=1}^{n_k} \beta^{n_k-m} \gamma(p_m^{x_{n_k}}) = \beta^{n_k} \sum_{m=1}^{n_k} \beta^{-m} \gamma(p_m^{x_{n_k}}) = \beta^{n_k} f_a(x_{n_k}).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{Re}(\xi\beta_0^{n_k} f_a(x_{n_k})) &= \text{Re} \left(\xi\beta_0^{n_k} \sum_{m=1}^{n_k} \beta^{-m} \gamma(p_m^{x_{n_k}}) \right) \\ &= |\beta|^{-n_k} \text{Re}(\xi\gamma(w_k)) \\ &\leq |\beta|^{-n_k} \text{Re}(\xi\gamma(\sigma^{n_k-1}(p_1^y) \sigma^{n_k-2}(p_2^y) \cdots p_{n_k}^y)) \\ &= \text{Re} \left(\xi\beta_0^{n_k} \sum_{m=1}^{n_k} \beta^{-m} \gamma(p_m^y) \right) \\ &= \text{Re}(\xi\beta_0^{n_k} f_a^{(n_k)}(y)). \end{aligned}$$

Como $f_a(y) \in E_a(\tau)$, tomando $k \rightarrow \infty$ se concluye que $\text{Re}(\tau f_a(x)) \leq v_a(\tau)$.

□

Definición 2.11 Para $a \in \mathcal{A}$ y $z \in \mathfrak{F}_a$, se dirá que $x \in \mathcal{S}_a$ es una representación de z si $z = f_a(x)$.

Lema 2.12 Para cada $a \in \mathcal{A}$, los puntos extremos de \mathfrak{F}_a no tienen representaciones últimamente periódicas en \mathcal{S}_a .

DEMOSTRACIÓN. Sea x un elemento últimamente periódico de \mathcal{S}_a . Entonces, existen enteros no negativos Q y P tales que para cada $k \geq 0$ y $0 \leq m \leq P-1$ se tiene que

$$(p_{Q+kP+m}^x, c_{Q+kP+m}^x, s_{Q+kP+m}^x) = (p_m, c_m, s_m).$$

Supóngase que $f_a(x)$ es un punto extremo para la dirección $\tau \in \mathbb{S}^1$. Por definición y periodicidad, para cada $k \geq 0$:

$$\text{Re}(\tau f_a(x)) = \text{Re} \left(\tau \sum_{m=1}^{Q+kP} \beta^{-m} \gamma(p_m^x) \right) + |\beta|^{-Q-kP} \text{Re} \left(\tau \beta_0^{-Q-kP} \sum_{j \geq 0} \beta^{-jP} \sum_{m=0}^{P-1} \beta^{-m} \gamma(p_m) \right).$$

Defínase $z = \sum_{j \geq 0} \beta^{-jP} \sum_{m=0}^{P-1} \beta^{-m} \gamma(p_m)$. Luego,

$$\text{Re}(\tau f_a(x)) = \text{Re} \left(\tau \sum_{m=1}^{Q+kP} \beta^{-m} \gamma(p_m^x) \right) + |\beta|^{-Q-kP} \text{Re}(\tau \beta_0^{-Q-kP} z).$$

Del Lema 2.7, $\text{Re}(\tau \beta_0^{-Q-kP} z) = v_{c_Q}(\tau \beta_0^{-Q-kP} z)$. Así, $\text{Re}(\tau \beta_0^{-Q-kP} z) \leq 0$ para todo $k \geq 0$. Como $(\beta_0^{-kP})_{k \geq 0}$ es denso en \mathbb{S}^1 , se deduce que $z = 0$ y, consecuentemente, que $v_{c_Q}(\tau \beta_0^{-Q-kP} z) = 0$ para todo $k \geq 0$. Finalmente, por continuidad y densidad, $v_{c_Q}(\xi) = 0$ para todo $\xi \in \mathbb{S}^1$. Como \mathfrak{F}_{c_Q} no es igual a $\{0\}$ se obtiene una contradicción. □

Obsérvese que del lema anterior se deduce que $v_a(\tau) < 0$ para cada $a \in \mathcal{A}$ y $\tau \in \mathbb{S}^1$. En efecto, $v_a(\tau) \leq 0$ y si $v_a(\tau) = 0$ se tendría que $0 \in \mathfrak{F}_a$ es un punto extremo, lo que contradice el lema.

Definición 2.13 Para $a \in \mathcal{A}$ y $\tau \in \mathbb{S}^1$, un punto extremo $z \in E_a(\tau)$ se llamará punto extremo límite si tiene una representación $x \in \mathcal{S}_a$ tal que para cada entero $m \leq 0$ existe (p_m, c_m, s_m) en $\mathcal{A}^* \times \mathcal{A} \times \mathcal{A}^*$ con $\sigma(c_m) = p_{m+1} c_{m+1} s_{m+1}$ y $c_0 = a$ tal que

$$f_{c_m}((p_{m+1}, c_{m+1}, s_{m+1}) \dots (p_0, c_0, s_0)x) \in E_{c_m}(\beta_0^{-m} \tau).$$

El conjunto de los puntos extremos límite de \mathfrak{F}_a para la dirección τ se denota por $E_a^*(\tau)$.

Un punto extremo límite es un punto extremo que tiene una representación que tiene infinitas preimágenes por el shift en $\bigcup_{a \in \mathcal{A}} \mathcal{S}_a$. Se puede probar fácilmente de la construcción que el punto obtenido en la demostración del Lema 2.10 es un punto extremo límite. Más aún, esto se puede lograr para cualquier $\tau \in \mathbb{S}^1$.

La propiedad deseada es que los puntos extremos límite en $E_a^*(\tau)$ tengan una única representación en \mathcal{S}_a para todo $a \in \mathcal{A}$ y $\tau \in \mathbb{S}^1$. Si la última propiedad se satisface, se dirá que T tiene la *propiedad de representación única* para β y γ .

2.4. Teorema Principal

2.4.1. Enunciado del Teorema Principal

Teorema 2.14 *Sea T una t.i.i. autosimilar. Supóngase que su matriz de renormalización M tiene un valor propio complejo β con $|\beta| > 1$ y $\arg(\beta)/\pi$ irracional que tiene un vector propio asociado γ con coordenadas no nulas. Si T tiene la propiedad de representación única para β y γ , entonces T es semiconjugada a una t.i.i. con intervalos errantes.*

Como se mencionó en la Sección 2.1, la demostración de este teorema es una consecuencia de un enunciado más técnico.

Teorema 2.15 *Bajo las mismas condiciones del Teorema 2.14, existe una dirección $\xi \in \mathbb{S}^1$, una secuencia mínima $\omega \in \Omega_T$ para la dirección ξ y un número $\rho > 0$ tales que*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Re}(\xi \gamma_n(\omega))}{n^\rho} > 0 \quad \text{and} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Re}(\xi \gamma_{-n}(\omega))}{n^\rho} > 0, \quad (2.3)$$

donde $\gamma_n(\omega) = \gamma_{\omega_0} + \cdots + \gamma_{\omega_{n-1}}$ y $\gamma_{-n}(\omega) = -(\gamma_{\omega_{-n}} + \cdots + \gamma_{\omega_{-1}})$ para $n \geq 0$.

La propiedad de representación única puede parecer técnica y difícil de verificar para un ejemplo específico. Se presentarán entonces algunas condiciones algebraicas y geométricas que implican esta propiedad en la Sección 4. Más precisamente, se tiene una condición algebraica como en el caso de [BHM10], una condición geométrica sobre los fractales y una última condición relacionada con las componentes minimales de un *skew product* que aparece al estudiar la manera en la que se generan los puntos extremos.

2.4.2. Pasos principales para probar el Teorema 2.15

Sea T una t.i.i. autosimilar que intercambia los intervalos $(I_a)_{a \in \mathcal{A}}$ y considérense valores de β y γ como en el enunciado del Teorema 2.14.

Primero se deben describir algunas propiedades de diferenciabilidad del mapeo $v_a : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$.

Lema 2.16 *Sea $a \in \mathcal{A}$ y $\tau \in \mathbb{S}^1$. Se tiene que*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{v_a(\tau \exp(it)) - v_a(\tau)}{t} &= -\operatorname{Im}(\tau e_a^+(\tau)), \\ \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{v_a(\tau \exp(it)) - v_a(\tau)}{t} &= -\operatorname{Im}(\tau e_a^-(\tau)), \end{aligned}$$

donde $e_a^+(\tau), e_a^-(\tau)$ son los puntos de $E_a(\tau)$ tales que $z \mapsto \text{Im}(\tau z)$ es máximo y mínimo, respectivamente. Como consecuencia, $v_a: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ es continuo.

DEMOSTRACIÓN. Sólo se probará la primera igualdad, ya que la segunda es análoga. Sean $z = e_a^+(\tau), z_t \in E_a(\tau \exp(it))$ y defínanse $\tau z = r \exp(i\theta)$ y $\tau z_t = r_t \exp(i\theta_t)$ para $r, r_t > 0, \theta, \theta_t \in [0, 2\pi)$. Se asumirá que $0 < t < \pi/2$.

Como $z = e_a^+(\tau)$ y $z_t \in E_a(\tau \exp(it))$, se tiene que

$$\begin{aligned} v_a(\tau) &= \text{Re}(\tau z) = r \cos(\theta), \\ v_a(\tau \exp(it)) &= \text{Re}(\tau \exp(it) z_t) = r_t \cos(\theta_t + t), \\ -\text{Im}(\tau e_a^+(\tau)) &= -r \sin(\theta). \end{aligned}$$

Por lo tanto, se debe probar que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{r_t \cos(\theta_t + t) - r \cos(\theta)}{t} = -r \sin(\theta).$$

Como $z_t \in E_a(\tau \exp(it))$, se tiene que

$$r \cos(\theta + t) = \text{Re}(\tau \exp(it) z) \geq \text{Re}(\tau \exp(it) z_t) = r_t \cos(\theta_t + t).$$

Luego,

$$\begin{aligned} 0 &\geq r_t \cos(\theta_t + t) - r \cos(\theta + t) \\ &= (r_t \cos(\theta_t) - r \cos(\theta)) \cos(t) + (r \sin(\theta) - r_t \sin(\theta_t)) \sin(t). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Además, como $z \in E_a(\tau)$ se tiene que $r \cos(\theta) = \text{Re}(\tau z) \leq \text{Re}(\tau z_t) = r_t \cos(\theta_t)$. Se concluye que $(r_t \cos(\theta_t) - r \cos(\theta)) \cos(t) \geq 0$ para todo t suficientemente pequeño. Por lo tanto, de que $\sin(t) > 0$ y (2.4), se tiene que $r \sin(\theta) - r_t \sin(\theta_t)$ no puede ser positivo. Esto prueba que $\text{Im}(\tau z) = r \sin(\theta) \leq r_t \sin(\theta_t) = \text{Im}(\tau z_t)$.

Se afirma que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \text{Im}(\tau z_t) = \text{Im}(\tau z)$. Fíjese un real $\eta > 0$ y considérese

$$u(t) = \text{mín}\{\text{Re}(\tau \exp(it) z') \mid z' \in \mathfrak{F}_a, \text{Im}(\tau z') \geq \text{Im}(\tau z) + \eta\}.$$

Como z está en $E_a(\tau)$ y se elige para que sea el mayor valor posible de $\text{Im}(\tau z)$, se tiene que $\text{Re}(\tau z) < u(0)$. El mapeo $u: [0, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ es continuo, por lo que existe $t_0 > 0$ tal que $\text{Re}(\tau \exp(it) z) < \text{Re}(\tau \exp(it) z')$ para $0 \leq t < t_0$ y $z' \in \mathfrak{F}_a$ cualesquiera que verifiquen $\text{Im}(\tau z') \geq \text{Im}(\tau z) + \eta$. Por lo tanto, si $0 \leq t < t_0$ y $\text{Im}(\tau z_t) \geq \text{Im}(\tau z) + \eta$ entonces $\text{Re}(\tau \exp(it) z) < \text{Re}(\tau \exp(it) z_t)$, lo que contradice el hecho que $z_t \in E_a(\tau \exp(it))$. Esto prueba que $\text{Im}(\tau z_t) < \text{Im}(\tau z) + \eta$ para $0 \leq t < t_0$, por lo que se obtiene el resultado deseado tomando $\eta \rightarrow 0$.

La afirmación anterior y (2.4) implican que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{r_t \cos(\theta_t + t) - r \cos(\theta + t)}{t} \geq \lim_{t \rightarrow 0^+} (\text{Im}(\tau z_t) - \text{Im}(\tau z)) \frac{\sin(t)}{t} = 0.$$

Finalmente,

$$\frac{v_a(\tau \exp(it)) - v_a(\tau)}{t} = \frac{r_t \cos(\theta_t + t) - r \cos(\theta + t)}{t} + \frac{r \cos(\theta + t) - r \cos(\theta)}{t},$$

y el resultado se sigue tomando $t \rightarrow 0^+$. □

Par aprobar la convergencia en (2.3) se necesita controlar la velocidad con la que β_0^n se acerca a un número τ en \mathbb{S}^1 . En lo que sigue,

$$d(\tau, \tau') = \min\{|\arg(\tau) - \arg(\tau')|, 2\pi - |\arg(\tau') - \arg(\tau)|\}.$$

Definición 2.17 *Se dirá que $\xi \in \mathbb{S}^1$ es una buena dirección si para cada constante $A > 1$ se tiene que $\liminf_{n \rightarrow \infty} A^n d(\tau, \xi \beta_0^n) > 0$ para cada $\tau \in \mathfrak{T} = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} \mathfrak{T}_a$.*

Se mostrará que casi toda dirección es buena.

Lema 2.18 *Casi toda dirección $\xi \in \mathbb{S}^1$ es buena.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $A > 1$ y $\tau \in \mathbb{S}^1$. Primero se probará que

$$K(A, \tau) = \left\{ \xi \in \mathbb{S}^1 \mid \liminf_{n \rightarrow \infty} A^n d(\tau, \xi \beta_0^n) > 0 \right\}$$

tiene medida de Lebesgue completa.

Considérense los conjuntos $B_n = \{\xi \in \mathbb{S}^1 \mid d(\tau, \xi \beta_0^n) < A^{-n}\}$. Por el Lema de Borel-Cantelli, la medida de Lebesgue de $\limsup_n B_n$ es cero, esto es, el conjunto de $\xi \in \mathbb{S}^1$ que pertenecen a infinitos B_n tiene medida de Lebesgue cero. Esto implica que para un $\xi \in \mathbb{S}^1$ típico existe algún $N \geq 1$ tal que $A^n d(\tau, \xi \beta_0^n) \geq 1$ si $n \geq N$. Se concluye así lo deseado.

Ahora, como \mathfrak{T} es numerable, claramente la intersección $K(A) = \bigcap_{\tau \in \mathfrak{T}} K(A, \tau)$ tiene medida de Lebesgue completa. Finalmente, $K = \bigcap_{k \geq 1} K(1 + 1/k)$ tiene medida de Lebesgue total y es fácil ver que cualquier elemento de K es una buena dirección. \square

Ahora se probará que la convergencia en (2.3) para el caso en el que $\xi \in \mathbb{S}^1$ es una buena dirección que tiene una secuencia mínima asociada. Luego se probará la existencia de tal dirección ξ .

Proposición 2.19 *Supóngase que $\xi \in \mathbb{S}^1$ es una buena dirección y que $\omega \in \Omega_T$ es una secuencia mínima para la dirección ξ . Sean $\eta > 0$ con $|\beta| - \eta > 1$ y $\rho = \frac{\log(|\beta| - \eta)}{\log(\alpha^{-1} + \eta)} > 0$. Entonces,*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Re}(\xi \gamma_n(\omega))}{n^\rho} > 0 \quad \text{y} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Re}(\xi \gamma_{-n}(\omega))}{n^\rho} > 0. \quad (2.5)$$

DEMOSTRACIÓN. Se probará solamente la primera desigualdad, ya que la otra es análoga. Denotaremos la d.p.s. de ω por $(p_m^\omega, c_m^\omega, s_m^\omega)_{m \geq 0}$.

Primer paso: la d.p.s. de ω tiene infinitos sufijos no vacíos. Supóngase que sólo finitos sufijos en $(p_m^\omega, c_m^\omega, s_m^\omega)_{m \geq 0}$ son no vacíos. Luego, existe una letra $c \in \mathcal{A}$ y enteros positivos q y N tales que $\sigma^q(c) = cs$ para alguna palabra $s \in \mathcal{A}^+$ y

$$\omega_N \omega_{N+1} \omega_{N+2} \omega_{N+3} \dots = cs \sigma^q(s) \sigma^{2q}(s) \sigma^{3q}(s) \dots$$

Como ω es una secuencia mínima para la dirección ξ , se tiene que $\operatorname{Re}(\xi \gamma_n(\omega)) \geq 0$ para cada $n \geq 0$. Luego, para cada $k \geq 0$ se obtiene que

$$0 \leq \operatorname{Re}(\xi(\gamma_N(\omega) + \gamma(c) + \gamma(s) + \beta^q \gamma(s) + \dots + \beta^{kq} \gamma(s)))$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Re}(\xi(\gamma_N(\omega) + \gamma(c))) + \operatorname{Re}\left(\xi\gamma(s)\frac{(\beta^q)^{k+1} - 1}{\beta^q - 1}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\xi\left(\gamma_N(\omega) + \gamma(c) - \frac{\gamma(s)}{\beta^q - 1}\right)\right) + |\beta^q|^{k+1} \operatorname{Re}\left((\beta_0^q)^{k+1} \frac{\xi\gamma(s)}{\beta^q - 1}\right).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

De (2.2) se tiene que $\beta^q\gamma(c) = \gamma(\sigma^q(c)) = \gamma(c) + \gamma(s)$ y luego que $\gamma(s) = (\beta^q - 1)\gamma(c)$, que es distinto de cero por hipótesis. Sea $z = \frac{\xi\gamma(s)}{\beta^q - 1} \neq 0$. Por continuidad, existe un intervalo abierto $J \subseteq \mathbb{S}^1$ tal que $u = \sup_{\tau \in J} \operatorname{Re}(\tau z) < 0$. Como $((\beta_0^q)^{k+1})_{k \geq 0}$ es denso en \mathbb{S}^1 , se obtiene que $(\beta^q)^{k+1} \in J$ para infinitos k . Por lo tanto, para cualquiera de estos k

$$|\beta^q|^{k+1} \operatorname{Re}\left((\beta_0^q)^{k+1} \frac{\xi\gamma(s)}{\beta^q - 1}\right) = |\beta^q|^{k+1} \operatorname{Re}(\beta_0^{k+1} z) \leq |\beta^q|^{k+1} u < 0.$$

Se obtiene que se puede elegir $k \geq 0$ tal que $|\beta^q|^{k+1} \operatorname{Re}(\beta_0^{k+1} z)$ es tan negativo como se quiera, lo que contradice la ecuación (2.6).

Segundo paso: la contradicción. Supóngase que existe una secuencia creciente de enteros $(n_k)_{k \geq 1}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Re}(\xi\gamma_{n_k}(\omega))}{n_k^\rho} = 0. \tag{2.7}$$

Sea $(p_m^\omega, c_m^\omega, s_m^\omega)_{m \geq 0}$ la d.p.s. de $\omega_k = S^{n_k}(\omega)$. Recuérdese que S es el shift en el subshift correspondiente. Es fácil verificar que la d.p.s. de ω y $S^{n_k}(\omega)$ son últimamente iguales (para una referencia, véase el Lema 18 en [BHM10]). Sea N_k el primer entero tal que $(p_m^\omega, c_m^\omega, s_m^\omega)_{m \geq N_k} = (p_m^{\omega_k}, c_m^{\omega_k}, s_m^{\omega_k})_{m \geq N_k}$. Tomando una subsucesión, se puede suponer que $(N_k)_{k \geq 1}$ es una secuencia creciente de enteros. Más aún, se puede suponer que

- (i) $c_{N_k}^\omega = c_{N_k}^{\omega_k} = a$ para cada $k \geq 1$;
- (ii) $(p_{N_k-1}^\omega, c_{N_k-1}^\omega, s_{N_k-1}^\omega) = (p, c, s)$ y $(p_{N_k-1}^{\omega_k}, c_{N_k-1}^{\omega_k}, s_{N_k-1}^{\omega_k}) = (p', c', s')$ para cada $k \geq 1$;
- (iii) pc es un prefijo de p' ;
- (iv) $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi\beta_0^{N_k} = \tau \in \mathbb{S}^1$.

Como pc es un prefijo de p' , se tiene que

$$\sigma^{N_k-1}(p_{N_k-1}^{\omega_k}) \dots p_0^{\omega_k} = \sigma^{N_k-1}(p_{N_k-1}^\omega) \dots p_0^\omega \omega_0 \dots \omega_{n_k-1} \tag{2.8}$$

para cada $k \geq 1$.

Se procederá ahora a revertir los índices de la d.p.s. de ω para construir un punto extremo límite en \mathcal{S}_a . Sea $(x_{N_k})_{k \geq 1}$ la secuencia en \mathcal{S}_a obtenida al revertir las coordenadas de $(p_m^\omega, c_m^\omega, s_m^\omega)_{m \geq 0}$ hasta la $(N_k - 1)$ -ésima coordenada y tal que $p_m^{x_{N_k}} = \varepsilon$ para cada $m > N_k$, como se explica al principio de la Sección 2.3.2. Como $c_{N_k}^\omega = a$ para cada $k \geq 1$, se tiene que $x_{N_k} \in \mathcal{S}_a$ para todo $k \geq 1$. También se tiene que $(p_1^{x_{N_k}}, c_1^{x_{N_k}}, s_1^{x_{N_k}}) = (p, c, s)$ para cada $k \geq 1$. Sin pérdida de generalidad, se supondrá que esta sucesión converge a $x \in \mathcal{S}_a$, que es la representación de un punto extremo límite $E_a^*(\tau)$ por el Lema 2.10 y el comentario después del Lema 2.13. Claramente, $(p_1^x, c_1^x, s_1^x) = (p, c, s)$.

Sea $(y_{N_k})_{k \geq 1}$ la sucesión definida por: $(p_1^{y_{N_k}}, c_1^{y_{N_k}}, s_1^{y_{N_k}}) = (p', c', s')$, $p_m^{y_{N_k}} = \varepsilon$ para cada $m \geq N_k$ y eligiendo $(p_m^{y_{N_k}}, c_m^{y_{N_k}}, s_m^{y_{N_k}})_{m=2}^{N_k}$ de modo que

$$\operatorname{Re}(\xi \beta_0^{N_k-1} \mathfrak{f}_{c'}(S(y_{N_k}))) = v_{c'}^{(N_k-1)}(\xi \beta_0^{N_k-1});$$

esto es, se elige para que $\mathfrak{f}_{c'}(S(y_{N_k}))$ alcance el mínimo en $\mathfrak{F}_{c'}^{(N_k-1)}$ para la dirección $\xi \beta_0^{N_k-1}$. Como $c_{N_k}^\omega = a$ para todo $k \geq 1$, se tiene que $y_{N_k} \in \mathcal{S}_a$ para todo $k \geq 1$. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer también que esta secuencia converge a $y \in \mathcal{S}_a$. Claramente, $(p_1^y, c_1^y, s_1^y) = (p', c', s')$.

Aplicando γ a la ecuación (2.8) y luego multiplicando por $\xi |\beta|^{-N_k}$, se obtiene que, para cada $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \xi \beta_0^{N_k} \sum_{m=1}^{N_k} \beta^{-m} \gamma(p_{N_k-m}^{\omega_k}) &= \xi \beta_0^{N_k} \sum_{m=1}^{N_k} \beta^{-m} \gamma(p_{N_k-m}^\omega) + \xi |\beta|^{-N_k} \gamma_{n_k}(\omega) \\ &= \xi \beta_0^{N_k} \sum_{m=1}^{N_k} \beta^{-m} \gamma(p_m^{x_{N_k}}) + \xi |\beta|^{-N_k} \gamma_{n_k}(\omega), \end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad sale de la definición de x_{N_k} . Tomando partes reales, se llega a

$$\operatorname{Re} \left(\xi \beta_0^{N_k} \left(\sum_{m=1}^{N_k} \beta^{-m} \gamma(p_{N_k-m}^{\omega_k}) - \mathfrak{f}_a(x_{N_k}) \right) \right) = |\beta|^{-N_k} \operatorname{Re}(\xi \gamma_{n_k}(\omega)). \quad (2.9)$$

Por definición de y_{N_k} , se tiene que $(p_1^{y_{N_k}}, c_1^{y_{N_k}}, s_1^{y_{N_k}}) = (p', c', s') = (p_{N_k}^{\omega_k}, c_{N_k}^{\omega_k}, s_{N_k}^{\omega_k})$ y

$$\operatorname{Re}(\xi \beta_0^{N_k-1} \mathfrak{f}_a(S(y_{N_k}))) \leq \operatorname{Re} \left(\xi \beta_0^{N_k-1} \sum_{m=2}^{N_k} \beta^{-m} \gamma(p_{N_k-m}^{\omega_k}) \right).$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{Re}(\xi \beta_0^{N_k} \mathfrak{f}_a(y_{N_k})) \leq \operatorname{Re} \left(\xi \beta_0^{N_k} \sum_{m=1}^{N_k} \beta^{-m} \gamma(p_{N_k-m}^{\omega_k}) \right). \quad (2.10)$$

Más aún, $\operatorname{Re}(\xi \beta_0^{N_k} \mathfrak{f}_a(x_{N_k})) \leq \operatorname{Re}(\xi \beta_0^{N_k} \mathfrak{f}_a(y_{N_k}))$ por el mismo argumento que el de la demostración del Lema 2.10. Luego, por (2.9) y (2.10) se obtiene

$$0 \leq \operatorname{Re}(\xi \beta_0^{N_k} (\mathfrak{f}_a(y_{N_k}) - \mathfrak{f}_a(x_{N_k}))) \leq |\beta|^{-N_k} \operatorname{Re}(\xi \gamma_{n_k}(\omega)). \quad (2.11)$$

Por otro lado, como $\omega_0 \omega_1 \dots \omega_{n_k-1}$ es una subpalabra de $\sigma^{N_k}(a)$ y $\sigma^{N_k}(a)$ crece como α^{-N_k} , se tiene que $n_k \leq (\alpha^{-1} + \eta)^{N_k}$ para $k \geq 1$ suficientemente grande, donde $\eta > 0$ se definió en el enunciado del lema. Luego, por definición de ρ ,

$$n_k^{-\rho} \geq (\alpha^{-1} + \eta)^{-N_k \rho} = (|\beta| - \eta)^{-N_k} \geq |\beta|^{-N_k}.$$

De la hipótesis (2.7), se obtiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (|\beta| - \eta)^{-N_k} \operatorname{Re}(\xi \gamma_{n_k}(\omega)) = \lim_{k \rightarrow \infty} |\beta|^{-N_k} \operatorname{Re}(\xi \gamma_{n_k}(\omega)) = 0.$$

Amplificando la ecuación (2.11) por A^{N_k} , donde $A = \frac{|\beta|}{|\beta|-\eta} \in (1, |\beta|)$, y usando la igualdad anterior resulta que

$$0 \leq A^{N_k} \operatorname{Re}(\xi \beta_0^{N_k} (\mathbf{f}_a(y_{N_k}) - \mathbf{f}_a(x_{N_k}))) \leq (|\beta| - \eta)^{-N_k} \operatorname{Re}(\xi \gamma_{n_k}(\omega))$$

para k suficientemente grande. Luego,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^{N_k} \operatorname{Re}(\xi \beta_0^{N_k} (\mathbf{f}_a(y_{N_k}) - \mathbf{f}_a(x_{N_k}))) = 0. \quad (2.12)$$

Ahora, se construirá una contradicción a (2.12) suponiendo (2.7). Específicamente, se mostrará que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} A^{N_k} \operatorname{Re}(\xi \beta_0^{N_k} (\mathbf{f}_a(y_{N_k}) - \mathbf{f}_a(x_{N_k}))) > 0.$$

Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que existe una secuencia creciente de enteros $(L_k)_{k \geq 1}$, con $L_k \leq N_k$, tal que:

- (i) $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_0^{-L_k} = \nu \in \mathbb{S}^1$;
- (ii) para cada $k \geq 1$ y $1 \leq m \leq L_k$ se tiene que $(p_m^{x_{N_k}}, c_m^{x_{N_k}}, s_m^{x_{N_k}}) = (p_m^x, c_m^x, s_m^x)$ y que $(p_m^{y_{N_k}}, c_m^{y_{N_k}}, s_m^{y_{N_k}}) = (p_m^y, c_m^y, s_m^y)$.

Defínase $\tau_{N_k} = \xi \beta_0^{N_k}$. Como ω es una secuencia mínima para la dirección ξ , por el Lema 2.7 y el Lema 2.10 se tiene que, para $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\tau \mathbf{f}_a(x)) - \operatorname{Re}(\tau_{N_k} \mathbf{f}_a(x_{N_k})) &= \operatorname{Re} \left((\tau - \tau_{N_k}) \sum_{m=1}^{L_k} \beta_0^{-m} \gamma(p_m^x) \right) \\ &\quad + |\beta|^{-L_k} \left(v_{c_{L_k}^x}(\tau \beta_0^{-L_k}) - v_{c_{L_k}^x}^{(N_k-L_k)}(\tau_{N_k} \beta_0^{-L_k}) \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Del lema 2.8,

$$0 \leq v_{c_{L_k}^x}^{(N_k-L_k)}(\tau_{N_k} \beta_0^{-L_k}) - v_{c_{L_k}^x}(\tau \beta_0^{-L_k}) \leq C |\beta|^{-(N_k-L_k)}$$

para todo $k \geq 1$, donde C es una constante universal. Luego, usando esta igualdad, sumando y restando $|\beta|^{-L_k} v_{c_{L_k}^x}(\tau_{N_k} \beta_0^{-L_k})$ a (2.13) y usando la definición de $\mathbf{f}_a^{(L_k)}$ se obtiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\tau \mathbf{f}_a(x)) - \operatorname{Re}(\tau_{N_k} \mathbf{f}_a(x_{N_k})) &= \operatorname{Re}((\tau - \tau_{N_k}) \mathbf{f}_a^{(L_k)}(x)) \\ &\quad + |\beta|^{-L_k} \left(v_{c_{L_k}^x}(\tau \beta_0^{-L_k}) - v_{c_{L_k}^x}(\tau_{N_k} \beta_0^{-L_k}) \right) \\ &\quad + C_k |\beta|^{-N_k}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

para cada $k \geq 1$ y algún C_k con $|C_k| \leq C$.

Similarmente, de la definición de y_{N_k} se tiene que

$$\operatorname{Re}(\tau_{N_k} \beta_0^{-L_k} \mathbf{f}_{c_{L_k}^y}^{(L_k)}(S^{L_k}(y))) = v_{c_{L_k}^y}^{(N_k-L_k)}(\tau_{N_k} \beta_0^{-L_k}).$$

Luego, del lema 2.7 se obtiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\tau \mathbf{f}_a(y)) - \operatorname{Re}(\tau_{N_k} \mathbf{f}_a(y_{N_k})) &= \operatorname{Re}((\tau - \tau_{N_k}) \mathbf{f}_a^{(L_k)}(y)) \\ &+ |\beta|^{-L_k} \left(v_{c_{L_k}^y}(\tau \beta_0^{-L_k}) - v_{c_{L_k}^y}(\tau_{N_k} \beta_0^{-L_k}) \right) \\ &+ C'_k |\beta|^{-N_k}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

para todo $k \geq 1$ y algún C'_k tal que $|C'_k| \leq C$.

Restando (2.14) y (2.15) y usando que $\operatorname{Re}(\tau \mathbf{f}_a(x)) = \operatorname{Re}(\tau \mathbf{f}_a(y))$ se deduce que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \operatorname{Re}(\tau_{N_k}(\mathbf{f}_a(y_{N_k}) - \mathbf{f}_a(x_{N_k}))) \\ &= d(\tau, \tau_{N_k}) \left[\operatorname{Re} \left(\frac{\tau - \tau_{N_k}}{d(\tau, \tau_{N_k})} (\mathbf{f}_a^{(L_k)}(x) - \mathbf{f}_a^{(L_k)}(y)) \right) \right. \\ &+ |\beta|^{-L_k} \frac{v_{c_{L_k}^x}(\tau \beta_0^{-L_k}) - v_{c_{L_k}^x}(\tau_{N_k} \beta_0^{-L_k})}{d(\tau \beta_0^{-L_k}, \tau_{N_k} \beta_0^{-L_k})} \\ &\left. - |\beta|^{-L_k} \frac{v_{c_{L_k}^y}(\tau \beta_0^{-L_k}) - v_{c_{L_k}^y}(\tau_{N_k} \beta_0^{-L_k})}{d(\tau \beta_0^{-L_k}, \tau_{N_k} \beta_0^{-L_k})} \right] \\ &+ |\beta|^{-N_k} (C_{N_k} - C'_{N_k}), \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde $d(\cdot, \cdot)$ es la distancia en \mathbb{S}^1 y se usó que $d(\tau, \tau_{N_k}) = d(\tau \beta_0^{-L_k}, \tau_{N_k} \beta_0^{-L_k})$. Como $(\tau_{N_k})_{k \geq 1}$ converge a τ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tau - \tau_{N_k}}{d(\tau, \tau_{N_k})} = i\tau.$$

Ahora, recuérdese que $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{N_k}$ es la representación de un punto extremo límite en \mathcal{S}_a para la dirección $\tau = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_{N_k} \in \mathbb{S}^1$. De la ecuación (2.11), $y = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{N_k}$ también es la representación de un punto extremo límite en \mathcal{S}_a para la dirección τ . Se tiene que $(p_1^x, c_1^x, s_1^x) = (p, c, s) \neq (p', c', s') = (p_1^y, c_1^y, s_1^y)$, por lo que $x \neq y$. De la hipótesis del Teorema 2.14, todo punto extremo límite tiene una única representación, por lo que $\mathbf{f}_a(x) \neq \mathbf{f}_a(y)$. Se sabe que $\operatorname{Re}(\tau \mathbf{f}_a(x)) = \operatorname{Re}(\tau \mathbf{f}_a(y)) = v_a(\tau)$, por lo que se tiene que $\operatorname{Im}(\tau \mathbf{f}_a(x)) \neq \operatorname{Im}(\tau \mathbf{f}_a(y))$.

Finalmente, del Lema 2.16 se obtiene que la expresión dentro de los corchetes en (2.16) converge a

$$\operatorname{Re}(i\tau(\mathbf{f}_a(x) - \mathbf{f}_a(y))) = -\operatorname{Im}(\tau(\mathbf{f}_a(x) - \mathbf{f}_a(y))) \neq 0.$$

El otro término (2.16) converge a 0 al ser multiplicado por A^{N_k} , ya que $A < |\beta|$. Además, $A^{N_k} d(\tau, \tau_{N_k}) \geq 0$ para todo $k \geq 1$, de donde $-\operatorname{Im}(\tau(\mathbf{f}_a(x) - \mathbf{f}_a(y))) > 0$.

Como ξ es una buena dirección, por definición se tiene que

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} A^{N_k} d(\tau, \xi \beta_0^{N_k}) = \liminf_{k \rightarrow \infty} A^{N_k} d(\tau, \tau_{N_k}) > 0.$$

Luego, multiplicando (2.16) por A^{N_k} se llega a que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} A^{N_k} \operatorname{Re}(\xi \beta_0^{N_k} (\mathbf{f}_a(y_{N_k}) - \mathbf{f}_a(x_{N_k}))) > 0,$$

que es la contradicción buscada. \square

2.4.3. Conclusión de la demostración del Teorema 2.15

Recuérdese del Lema 2.4 que $\Xi \subseteq \mathbb{S}^1$ es un conjunto abierto no vacío tal que existe una secuencia mínima para la dirección ξ para todo $\xi \in \Xi$. Como del Lema 2.18 casi toda dirección es buena y Ξ es abierto, existe una buena dirección $\xi \in \Xi$. La Proposición 2.19 entonces implica la convergencia de la serie para esta elección de ξ y $\rho = \frac{\log(|\beta| - \eta)}{\log(\alpha^{-1} + \eta)} > 0$, donde $\eta > 0$ es cualquier real positivo tal que $|\beta| - \eta > 1$. \square

Capítulo 3

Mapeo de Arnoux-Yoccoz cúbico

En esta sección se ilustra el Teorema 2.14 para la t.i.i. cúbica de Arnoux-Yoccoz (o t.i.i. de A-Y por simplicidad). Este ejemplo no es autosimilar en el sentido definido en el Capítulo 1. Sin embargo, sí verifica el resto de las hipótesis del teorema. Además, la única parte donde la autosimilaridad juega un rol es al obtener un sistema simbólico sustitutivo, lo que también ocurre en este caso. Por otro lado, en [LPV08] se prueba que un sistema inducido de la t.i.i. de A-Y en un intervalo particular es una t.i.i. autosimilar, pero la sustitución resultante es innecesariamente compleja de analizar. Algunas modificaciones técnicas, pero no difíciles en el estudio que se desarrollará para la t.i.i. de A-Y en esta sección permiten probar que este sistema inducido también verifica las hipótesis del Teorema 2.14.

3.1. La t.i.i. de A-Y

Sea α el único real tal que $\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 = 1$ y sea G_{t_0, t_1} el mapeo que intercambia las dos mitades del intervalo $[t_0, t_1)$ manteniendo orientación, esto es,

$$G_{t_0, t_1}(t) = \begin{cases} t + (t_0 + t_1)/2 & t \in [t_0, (t_0 + t_1)/2), \\ t - (t_0 + t_1)/2 & t \in [(t_0 + t_1)/2, t_1), \\ t & t \notin [t_0, t_1). \end{cases}$$

Entonces, la t.i.i. de A-Y está dada por $T = G_{0,1} \circ G_{0,\alpha} \circ G_{\alpha,\alpha+\alpha^2} \circ G_{\alpha+\alpha^2,1}$ (para mayor claridad, ver las figuras 3.1 y 3.2). Varias propiedades de T son discutidas extensamente en [ABB11]. En particular, se prueba que el mapeo T es conjugado a su sistema inducido en $[0, \alpha)$ y que, considerando una partición apropiada de $[0, 1)$ en nueve subintervalos, se pueden codificar las órbitas de T para esta partición y las órbitas del sistema inducido para la partición inducida por la siguiente sustitución σ en el alfabeto $\mathcal{A} = \{1, \dots, 9\}$:

$$\begin{array}{lll} \sigma(1) = 35 & \sigma(4) = 17 & \sigma(7) = 29 \\ \sigma(2) = 45 & \sigma(5) = 18 & \sigma(8) = 2 \\ \sigma(3) = 46 & \sigma(6) = 19 & \sigma(9) = 3 \end{array}$$

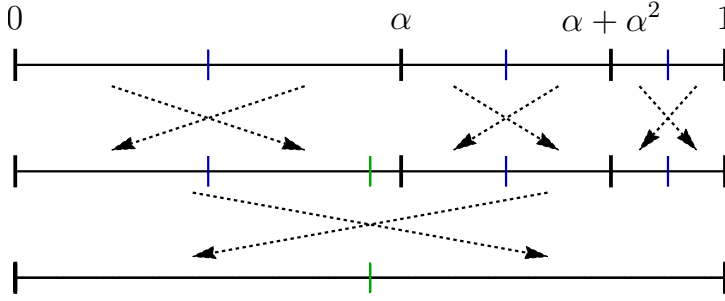


Figura 3.1: Las composiciones usadas para construir T .

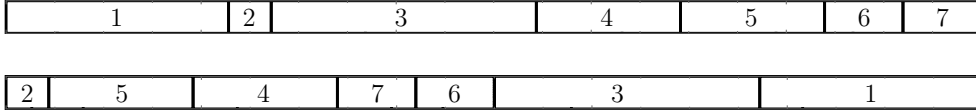


Figura 3.2: El mapeo T .

Sea M la matriz asociada a la sustitución σ , esto es,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico es $(1 - t^3)(t^3 + t^2 + t - 1)(-t^3 + t^2 + t + 1)$, donde los últimos dos factores son irreducibles. Las raíces de $t^3 + t^2 + t - 1$ son α , β^{-1} y $\bar{\beta}^{-1}$, mientras que las raíces de $-t^3 + t^2 + t + 1$ son α^{-1} , β y $\bar{\beta}$, donde α^{-1} es el valor propio de Perron-Frobenius. Se supondrá que β es el valor propio con parte imaginaria positiva. Numéricamente, se tiene que $\beta \approx -0,771845 + 1,11514i$. Se muestra en [Mes00] que $\arg(\beta)/\pi$ es irracional. Se tiene que el espacio propio asociado a β es generado por

$$\gamma = (\beta^2 + \beta + 1, -\beta, -\beta, -\beta^2 - \beta - 1, \beta + 1, \beta + 1, -\beta^2 - \beta - 2, -1, -1).$$

Claramente, $\gamma(a) \neq 0$ para cada $a \in \mathcal{A}$. En lo que sigue, β y γ son el valor propio y vector propio de M usados en el enunciado del Teorema 2.14.

3.2. Fractales asociados a la t.i.i. de A-Y

El teorema 6.4 de [ABB11] muestra que los fractales definidos en la Sección 2.3 existen y verifican $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_3$, $\mathfrak{F}_5 = \mathfrak{F}_6$ y $\mathfrak{F}_8 = \mathfrak{F}_9$. Una ilustración de cada fractal es dada en la Figure

3.5. La frontera de cada uno de estos fractales puede construirse combinando piezas de la frontera del fractal de tribonacci estándar y, por lo tanto, puede ser parametrizada, como se verá después.

3.2.1. Parametrización de la frontera del fractal de tribonacci

Primero se enuncian algunas propiedades importantes del fractal de tribonacci. Se seguirá [Mes00] libremente. Sea \mathcal{N} el conjunto de las secuencias en $\{0, 1\}$ sin tres unos consecutivos. El fractal de tribonacci (estándar) se define por

$$\mathfrak{R} = \left\{ \sum_{m \geq 3} \beta^{-m} a_{m-2} \mid (a_m)_{m \geq 1} \in \mathcal{N} \right\}.$$

Para $(a_m)_{m \geq 1} \in \mathcal{N}$, se define $\mathfrak{r}((a_m)_{m \geq 1}) = \sum_{m \geq 3} \beta^{-m} a_{m-2}$. Para $z \in \mathfrak{R}$, se dice que $(a_m)_{m \geq 1} \in \mathcal{N}$ es una *representación* de z si $z = \mathfrak{r}((a_m)_{m \geq 1})$. Claramente, toda secuencia en \mathcal{N} empieza con 0, 10 o 11. Se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_0 &= \beta^{-1} \mathfrak{R} = \{z \in \mathfrak{R} \mid z \text{ tiene una representación que empieza con } 0\}, \\ \mathfrak{R}_{10} &= \beta^{-3} + \beta^{-2} \mathfrak{R} = \{z \in \mathfrak{R} \mid z \text{ tiene una representación que empieza con } 10\}, \\ \mathfrak{R}_{11} &= \beta^{-3} + \beta^{-4} + \beta^{-3} \mathfrak{R} = \{z \in \mathfrak{R} \mid z \text{ tiene una representación que empieza con } 11\}. \end{aligned}$$

Estos tres subconjuntos de \mathfrak{R} son escalamientos, rotaciones y traslaciones de \mathfrak{R} y son disjuntos salvo en un conjunto de medida cero (ver Figura 3.3).

Claramente \mathcal{N} es un subshift. Sea S el shift en \mathcal{N} . Para $z \in \mathfrak{R}$ y $(a_m)_{m \geq 1} \in \mathcal{N}$ una representación de z , se tiene que $\mathfrak{r}(S((a_m)_{m \geq 1})) \in \mathfrak{R}$ y que

$$\mathfrak{r}(S((a_m)_{m \geq 1})) = \begin{cases} \beta z & \text{si } a_1 = 0 \\ \beta(z - \beta^{-3}) & \text{si } a_1 = 1. \end{cases}$$

Es fácil ver que los puntos en \mathfrak{R}_{11} son mapeados biyectivamente sobre \mathfrak{R}_{10} , que los puntos en \mathfrak{R}_{10} son mapeados biyectivamente sobre \mathfrak{R}_0 y que los puntos en \mathfrak{R}_0 son mapeados biyectivamente sobre \mathfrak{R} .

Ahora, la parametrización de la frontera del fractal de tribonacci se construye como sigue. Defínase $z_0 = \beta^{-4}/(1 - \beta^{-3})$ y para cada $t \in [0, 1]$ sea $(a_m)_{m \geq 1}$ una sucesión en $\{0, 1, 2\}$ tal que $t = \sum_{m \geq 1} 3^{-m} a_m$. Defínase $\kappa(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \kappa_{a_1} \circ \kappa_{a_2} \circ \cdots \circ \kappa_{a_m}(z_0)$, donde

$$\begin{aligned} \kappa_0(z) &= \beta^{-4} + \beta^{-3}z, \\ \kappa_1(z) &= \beta^{-4} + \beta^{-6} + \frac{\beta^{-10}}{1 - \beta^{-3}} - \beta^{-4}z, \\ \kappa_2(z) &= \beta^{-3} + \beta^{-4} + \beta^{-3}z. \end{aligned}$$

Se muestra en la Sección 4 de [Mes00] que κ es biyectiva y que $\mathfrak{R}' = \kappa([0, 1]) = \mathfrak{R} \cap (\mathfrak{R} + \beta^{-1})$. Además, \mathfrak{R}' es un trozo de la frontera del fractal de tribonacci. El resto de la frontera se obtiene escalando, rotando y trasladando \mathfrak{R}' .

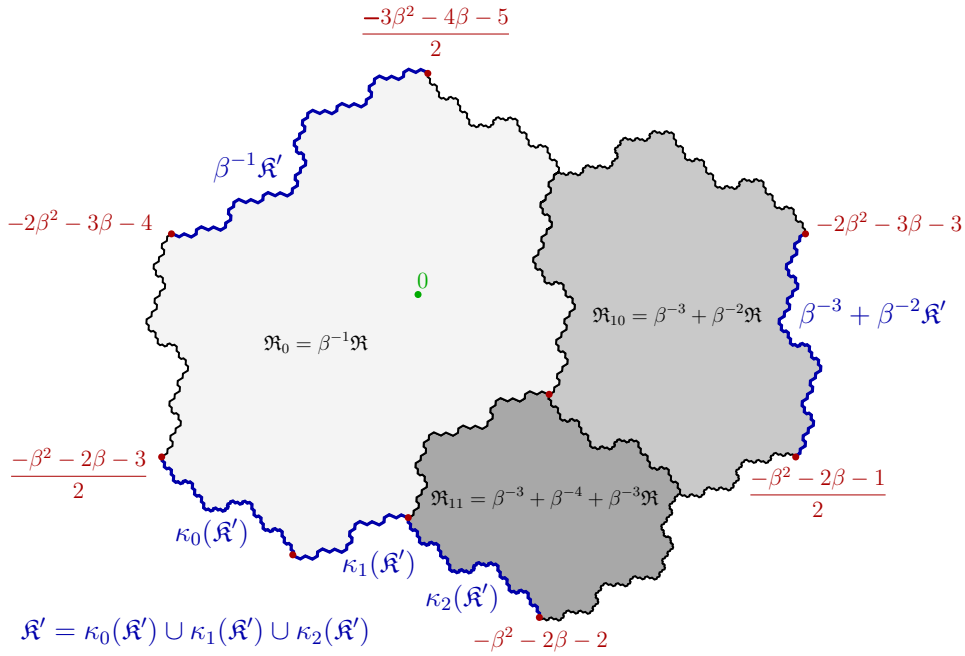


Figura 3.3: El fractal de tribonacci con algunas características importantes.

Se tiene que $\mathfrak{R}' \subseteq \mathfrak{R}_0 \cup \mathfrak{R}_{11}$, esto es, todo punto de \mathfrak{R}' tiene una representación que empieza con 0 o 11. Más aún, $\mathfrak{R}' = \kappa_0(\mathfrak{R}') \cup \kappa_1(\mathfrak{R}') \cup \kappa_2(\mathfrak{R}')$, lo que es una consecuencia del Lema 4 de [Mes00], y

$$\mathfrak{R}' \cap \mathfrak{R}_0 = \kappa_0(\mathfrak{R}') \cup \kappa_1(\mathfrak{R}'), \quad \mathfrak{R}' \cap \mathfrak{R}_{11} = \kappa_2(\mathfrak{R}').$$

Un cálculo simple muestra que al aplicar el shift a $\mathfrak{R}' \cap \mathfrak{R}_{11}$ se obtiene $\beta^{-3} + \beta^{-2}\mathfrak{R}'$ y que al aplicarlo nuevamente se obtiene $\beta^{-1}\mathfrak{R}'$ (ver Figura 3.3).

Finalmente se enuncian algunas propiedades básicas adicionales de \mathfrak{R} y \mathfrak{R} que se necesitarán:

Lema 3.1 *Se tiene que*

$$(i) \quad \mathfrak{R} \cap \left(\mathfrak{R} + \frac{\beta^2 - 1}{2} \right) = \emptyset;$$

$$(ii) \quad \mathfrak{R}' \cap \left(\mathfrak{R} + \frac{\beta^2 + 2\beta + 3}{2} \right) = \emptyset;$$

$$(iii) \quad \mathfrak{R}' \cap \beta^{-2} \mathfrak{R} = \emptyset;$$

3.2.2. Parametrización de la frontera de los fractales de Arnoux-Yoccoz

Se usará $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}' - z_0$ para parametrizar la frontera de \mathfrak{F}_a para cada $a \in \mathcal{A}$. No es difícil ver que (luego de un cálculo simple) que \mathfrak{R} es una curva con extremos $\kappa(0) - z_0 = 0$ y $\kappa(1) - z_0 = (-\beta^2 - 2\beta - 1)/2$. Para obtener la parametrización se necesitarán los siguientes cuatro lemas que finalmente prueban que la frontera de \mathfrak{F}_a es una curva de Jordan.

Lema 3.2 *Se tienen las siguientes igualdades:*

$$\begin{aligned}\mathfrak{K} &= \kappa(1) - \mathfrak{K} \\ \mathfrak{K} &= \beta^{-3}\mathfrak{K} \cup (\beta^{-4}\mathfrak{K} + \beta^{-3}) \cup (\beta^{-3}\mathfrak{K} + \beta^{-3}).\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. La primera igualdad sale del hecho que \mathfrak{K}' es simétrico, como se muestra en el Lema 4 de [Mes00]. Más aún, como $\mathfrak{K}' = \kappa_0(\mathfrak{K}') \cup \kappa_1(\mathfrak{K}') \cup \kappa_2(\mathfrak{K}')$, restando z_0 de ambos lados, expandiendo y usando la primera igualdad se obtiene lo deseado. \square

Los siguientes dos lemas servirán para probar que partes de las fronteras de los fractales de Arnoux-Yoccoz que provienen del fractal de tribonacci se intersectan en un único punto (ver Figura 3.5).

Lema 3.3 *Se tiene que $\mathfrak{K} \cap \left(\beta\mathfrak{K} + \frac{\beta^2+1}{2}\right) = \mathfrak{K} \cap \left(\beta^2\mathfrak{K} + \frac{-\beta^2+1}{2}\right) = \{0\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Recuérdense que $z_0 = \beta^{-4}/(1 - \beta^{-3}) = \frac{-\beta^2-2\beta-3}{2}$ y que $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K} \cap (\mathfrak{K} + \beta^{-1})$. Sea $K_1 = \mathfrak{K} \cap \left(\beta\mathfrak{K} + \frac{\beta^2+1}{2}\right)$ y $K_2 = \mathfrak{K} \cap \left(\beta^2\mathfrak{K} + \frac{-\beta^2+1}{2}\right)$.

(i) Se probará que $-\beta^2z \in K_2$ para cada $z \in K_1$. Por definición, se tiene que

$$z = \zeta - z_0 = \beta(\zeta' - z_0) + \frac{\beta^2 + 1}{2},$$

donde $\zeta, \zeta' \in \mathfrak{K}'$. Por lo tanto,

$$\zeta = \beta\zeta' - \beta z_0 + z_0 + \frac{\beta^2 + 1}{2} = \beta\zeta' + \frac{\beta^2 - 1}{2}.$$

De la discusión en la Sección 3.2.1, ζ' tiene una representación que comienza con 0 o 11. Sean a_1, a_2, a_3 las primeras tres letras de esta representación de ζ' y considérese el punto $\zeta'' = \beta(\zeta' - \beta^{-3}a_1) \in \mathfrak{K}$, esto es, el punto obtenido al shiftear la representación de ζ' . Se obtiene que $\zeta = \zeta'' + \beta^{-2}a_1 + \frac{\beta^2-1}{2}$, donde $a_1 \in \{0, 1\}$.

Del Lema 3.1 parte (i) se tiene que $\mathfrak{K} \cap \left(\mathfrak{K} + \frac{\beta^2-1}{2}\right) = \emptyset$, por lo que $a_1 \neq 0$ y así $a_1a_2a_3 = 110$. Entonces, $\zeta' \in \mathfrak{K}' \cap \mathfrak{K}_{11}$, de donde $\zeta'' \in \beta^{-3} + \beta^{-2}\mathfrak{K}' = \beta^{-2}\mathfrak{K} + \frac{-\beta^2-2\beta-1}{2}$ y remplazando el valor de a_1 en las expresiones anteriores se llega a que $\zeta = \zeta'' + \frac{3\beta^2+4\beta+3}{2}$.

Finalmente, se obtiene que $z \in \mathfrak{K} \cap \left(\beta^{-2}\mathfrak{K} + \frac{3\beta^2+4\beta+5}{2}\right)$ y luego que

$$-\beta^2z \in \left(\frac{-\beta^2 - 2\beta - 1}{2} - \mathfrak{K}\right) \cap (-\beta^2\mathfrak{K}) = K_2,$$

donde la última igualdad se desprende del Lema 3.2 y un cálculo simple.

(ii) Se probará que $-\beta z \in K_1$ para $z \in K_2$. La demostración es similar a (i), por lo que se omitirán algunos detalles.

Por definición, se tiene que

$$z = \zeta - z_0 = \beta^2(\zeta' - z_0) + \frac{-\beta^2 + 1}{2},$$

donde $\zeta, \zeta' \in \mathfrak{K}'$. Por lo tanto,

$$\zeta = \beta^2\zeta' - \beta^2z_0 + z_0 + \frac{-\beta^2 + 1}{2} = \beta^2\zeta' + \frac{-\beta^2 - 2\beta - 1}{2}.$$

Como en la demostración de (i), ζ' tiene una representación que comienza con 0 o 11. Sean a_1, a_2, a_3 las primeras tres letras de esta representación de ζ' y considérese el número complejo $\zeta'' = \beta^2(\zeta' - \beta^{-3}a_1 - \beta^{-4}a_2) \in \mathfrak{K}$, esto es, el punto obtenido al shiftear la representación de ζ' dos veces. Se tiene que $\zeta = \zeta'' + \beta^{-1}a_1 + \beta^{-2}a_2 + \frac{-\beta^2 - 2\beta - 1}{2}$, donde $a_1, a_2 \in \{0, 1\}$.

Se sabe que $a_1a_2 \neq 10$. Si $a_1a_2 = 01$, se tendría que $\zeta = \zeta'' + \frac{\beta^2 + 2\beta + 3}{2}$. Del Lema 3.1 parte (ii) se tiene que $\mathfrak{K}' \cap \left(\mathfrak{K} + \frac{\beta^2 + 2\beta + 3}{2}\right) = \emptyset$, por lo que esto no puede pasar. Más aún, de la parte (iii) del mismo lema se tiene que $\mathfrak{K}' \cap \beta^{-2}\mathfrak{K} = \emptyset$, por lo que $a_1a_2 \neq 00$. Se obtiene que $a_1a_2a_3 = 110$, por lo que $\zeta = \zeta'' + \frac{3\beta^2 + 4\beta + 5}{2}$ y $\zeta'' \in \beta^{-1}\mathfrak{K}' = \beta^{-1}\mathfrak{K} + \frac{-3\beta^2 - 4\beta - 5}{2}$. Finalmente, $z \in \mathfrak{K} \cap \left(\beta^{-1}\mathfrak{K} + \frac{\beta^2 + 2\beta + 3}{2}\right)$ y así

$$-\beta z \in \left(\frac{-\beta^2 - 2\beta - 1}{2} - \mathfrak{K}\right) \cap (-\beta\mathfrak{K}) = K_1,$$

donde la última igualdad se desprende del Lema 3.2 y un cálculo simple.

De (i) y (ii) se deduce que si z pertenece a K_1 o K_2 , entonces $\beta^n z$ o $-\beta^n z$ pertenece a $K_1 \cup K_2$ para cada $n \geq 1$. Como $K_1 \cup K_2$ es acotado y $|\beta| > 1$, se debe tener que $z = 0$. \square

Lema 3.4 *Se tiene que $(\mathfrak{K} - 2\beta^2 - 3\beta - 4) \cap \left(\mathfrak{K} + \frac{-3\beta^2 - 4\beta - 7}{2}\right)$ es un único punto.*

DEMOSTRACIÓN. Se ilustra la prueba en la Figura 3.4. Obsérvese que $(\mathfrak{K} - 2\beta^2 - 3\beta - 4) \subseteq \mathfrak{K}$. Del lema anterior y una traslación, rotación y escalamiento, $\mathfrak{K} - 2\beta^2 - 3\beta - 4$ es un subconjunto de $\text{int } \mathfrak{K}$ salvo por un punto. Por otro lado, $\left(\mathfrak{K} + \frac{-3\beta^2 - 4\beta - 7}{2}\right) \subseteq \mathfrak{K} - 1 - \beta^{-1}$. Se sabe de [Mes00] que $\mathfrak{K} - 1 - \beta^{-1} \subseteq \mathbb{C} \setminus \text{int } \mathfrak{K}$, por lo que $\left(\mathfrak{K} + \frac{-3\beta^2 - 4\beta - 7}{2}\right)$ es un subconjunto de $\mathbb{C} \setminus \mathfrak{K}$ salvo por un punto. \square

Ahora se presenta la parametrización de la frontera de cada fractal de Arnoux-Yoccoz. Defínase

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_1 = & (\beta^{-1}\mathfrak{K}) \cup (\beta^{-2}\mathfrak{K} + \beta^2 + \beta + 1) \cup \left(\mathfrak{K} + \frac{3\beta^2 + 4\beta + 3}{2}\right) \\ & \cup \left(\beta^{-2}\mathfrak{K} + \frac{3\beta^2 + 4\beta + 3}{2}\right) \cup \left(\beta^{-1}\mathfrak{K} + \frac{\beta^2 + 2\beta + 1}{2}\right) \\ & \cup \left(\mathfrak{K} + \frac{\beta^2 + 2\beta + 1}{2}\right), \end{aligned}$$

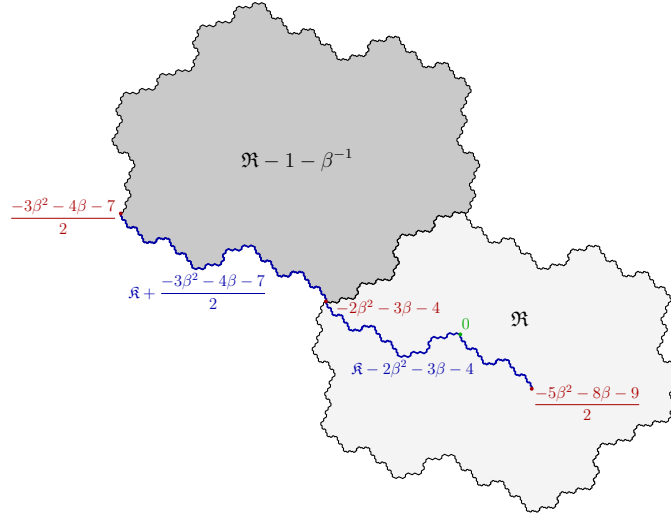


Figura 3.4: Ilustración de la demostración del Lema 3.4.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}_2 &= \mathfrak{K} \cup (\beta\mathfrak{K} - \beta) \cup \left(\mathfrak{K} + \frac{\beta^2 + 1}{2} \right) \cup \left(\beta\mathfrak{K} + \frac{\beta^2 + 1}{2} \right), \\
\mathfrak{C}_4 &= \beta\mathfrak{K} \cup (\beta^{-1}\mathfrak{K} + \beta + 1) \cup (\beta^{-3}\mathfrak{K} + \beta + 1) \cup (\beta^{-2}\mathfrak{K} - \beta^2 - \beta - 1) \\
&\quad \cup \left(\beta^{-2}\mathfrak{K} + \frac{\beta^2 + 2\beta + 3}{2} \right) \cup \left(\beta^{-1}\mathfrak{K} + \frac{\beta^2 + 2\beta + 3}{2} \right), \\
\mathfrak{C}_5 &= \beta\mathfrak{K} \cup (\beta^{-1}\mathfrak{K} + \beta + 1) \cup \left(\beta\mathfrak{K} + \frac{\beta^2 + 2\beta + 3}{2} \right) \cup \left(\beta^{-1}\mathfrak{K} + \frac{\beta^2 + 2\beta + 3}{2} \right), \\
\mathfrak{C}_7 &= \beta^{-1}\mathfrak{K} \cup (\mathfrak{K} - 1) \cup (\beta^{-2}\mathfrak{K} - 1) \cup (\beta^{-1}\mathfrak{K} - \beta^2 - \beta - 2) \\
&\quad \cup \left(\beta^{-2}\mathfrak{K} + \frac{\beta^2 + 2\beta + 1}{2} \right) \cup \left(\mathfrak{K} + \frac{\beta^2 + 2\beta + 1}{2} \right), \\
\mathfrak{C}_8 &= \beta^{-1}\mathfrak{K} \cup (\mathfrak{K} - 1) \cup \left(\beta^{-1} + \frac{\beta^2 + 2\beta + 1}{2} \right) \cup \left(\mathfrak{K} + \frac{\beta^2 + 2\beta + 1}{2} \right)
\end{aligned}$$

y $\mathfrak{C}_3 = \mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_6 = \mathfrak{C}_5$, $\mathfrak{C}_9 = \mathfrak{C}_8$.

Lema 3.5 *Para cada $a \in \mathcal{A}$ se tiene que \mathfrak{C}_a es una curva de Jordan.*

DEMOSTRACIÓN. En la definición de cada \mathfrak{C}_a , los términos entre las uniones corresponden a los segmentos de la frontera de \mathfrak{F}_a como se muestran en la Figura 3.5 en sentido horario. Luego, es suficiente probar que la intersección de dos segmentos consecutivos es un único punto. En efecto, usando los resultados del fractal de tribonacci de [Mes00] se deduce que la intersección de la mayoría de los pares de segmentos contiguos tiene un sólo punto. La conclusión del lema sale de los dos lemas anteriores.

Por ejemplo, considérense los segmentos $\beta^{-1}\mathfrak{K}$ y $\beta^{-2}\mathfrak{K} + \beta^2 + \beta + 1$, que son parte de \mathfrak{C}_1 . Trasladando por $-\beta^{-1}z_0$ y reemplazando \mathfrak{K} por $\mathfrak{K}' - z_0$, se obtiene que estos segmentos se intersecan en un único punto si y sólo si $\beta^{-1}\mathfrak{K}'$ y $\beta^{-2}\mathfrak{K}' + \beta^{-2} + \beta^{-1}$ lo hacen. Estos dos últimos segmentos son parte de la frontera del fractal de tribonacci, que es una curva de Jordan. Otro ejemplo son los segmentos $\mathfrak{K} + \frac{\beta^2 + 2\beta + 1}{2}$ y $\beta^{-1}\mathfrak{K}$, que también son parte de \mathfrak{C}_1 .

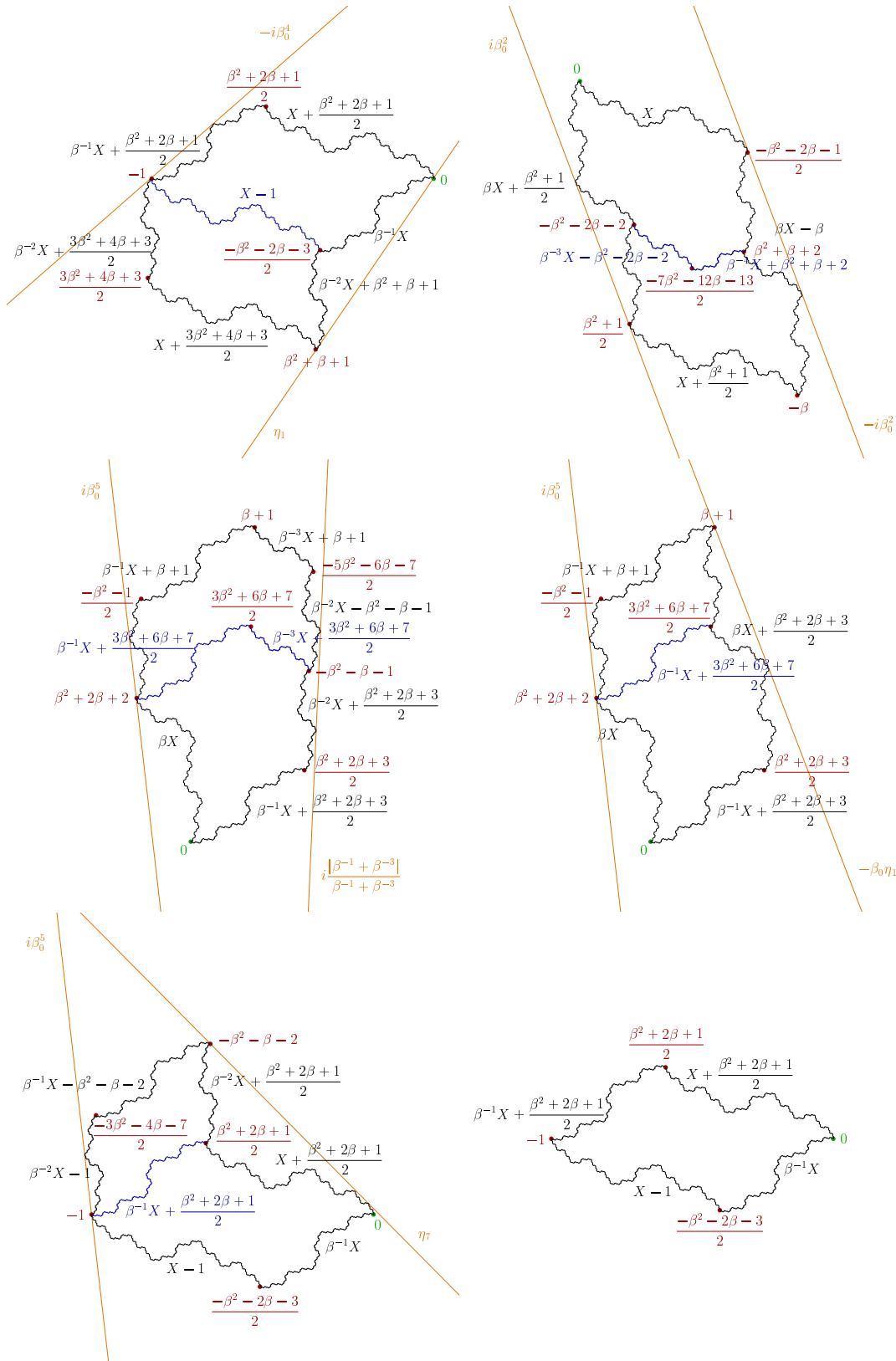


Figura 3.5: Descripción de los fractales de Arnoux-Yoccoz y sus características.

Se puede amplificar por β para obtener que estos segmentos se intersectan en un único punto si y sólo si \mathfrak{K} y $\beta\mathfrak{K} + \frac{\beta^2+1}{2}$ lo hacen, lo que es una consecuencia del Lema 3.3. \square

Ahora se puede demostrar que los conjuntos \mathfrak{C}_a son parametrizaciones de las fronteras de los fractales de Arnoux-Yoccoz.

Lema 3.6 *Para cada $a \in \mathcal{A}$ se tiene que \mathfrak{F}_a es la cerradura del interior (en el sentido de Jordan) de \mathfrak{C}_a . Más aún, si $\sigma(a)$ se puede escribir como $\sigma(a) = bc$ con $b, c \in \mathcal{A}$ entonces $\mathfrak{F}_b \cap \text{int}(\gamma(b) + \mathfrak{F}_c) = \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN. Para simplificar la notación, se harán las identificaciones $3 \sim 2$, $6 \sim 5$ y $9 \sim 8$. Por definición de cada \mathfrak{C}_a se obtiene que

$$\begin{aligned} \beta^{-1}\mathfrak{C}_1 &= (\beta^{-2}\mathfrak{K}) \cup (\beta^{-3}\mathfrak{K} + \beta^2 + 2\beta + 2) \cup \left(\beta^{-1}\mathfrak{K} + \frac{3\beta^2 + 6\beta + 7}{2} \right) \\ &\quad \cup \left(\beta^{-3}\mathfrak{K} + \frac{3\beta^2 + 6\beta + 7}{2} \right) \cup \left(\beta^{-2}\mathfrak{K} + \frac{\beta^2 + 2\beta + 3}{2} \right) \\ &\quad \cup \left(\beta^{-1}\mathfrak{K} + \frac{\beta^2 + 2\beta + 3}{2} \right), \\ \beta^{-1}\mathfrak{C}_2 &= \beta^{-1}\mathfrak{K} \cup (\mathfrak{K} - 1) \cup \left(\beta^{-1}\mathfrak{K} + \frac{\beta^2 + 2\beta + 1}{2} \right) \cup \left(\mathfrak{K} + \frac{\beta^2 + 2\beta + 1}{2} \right), \\ \beta^{-1}\mathfrak{C}_4 &= \mathfrak{K} \cup (\beta^{-2}\mathfrak{K} + \beta^2 + \beta + 2) \cup (\beta^{-4}\mathfrak{K} + \beta^2 + \beta + 2) \\ &\quad \cup (\beta^{-3}\mathfrak{K} - \beta^2 - 2\beta - 2) \cup \left(\beta^{-3}\mathfrak{K} + \frac{3\beta^2 + 4\beta + 5}{2} \right) \\ &\quad \cup \left(\beta^{-2}\mathfrak{K} + \frac{3\beta + 4\beta + 5}{2} \right), \\ \beta^{-1}\mathfrak{C}_5 &= \mathfrak{K} \cup (\beta^{-2}\mathfrak{K} + \beta^2 + \beta + 2) \cup \left(\mathfrak{K} + \frac{3\beta^2 + 4\beta + 5}{2} \right) \\ &\quad \cup \left(\beta^{-2}\mathfrak{K} + \frac{3\beta^2 + 4\beta + 5}{2} \right), \\ \beta^{-1}\mathfrak{C}_7 &= \beta^{-2}\mathfrak{K} \cup (\beta^{-1}\mathfrak{K} - \beta^2 - \beta - 1) \cup (\beta^{-3}\mathfrak{K} - \beta^2 - \beta - 1) \\ &\quad \cup (\beta^{-2}\mathfrak{K} - 2\beta^2 - 3\beta - 3) \cup \left(\beta^{-3}\mathfrak{K} + \frac{\beta^2 + 2\beta + 3}{2} \right) \\ &\quad \cup \left(\beta^{-1}\mathfrak{K} + \frac{\beta^2 + 2\beta + 3}{2} \right), \\ \beta^{-1}\mathfrak{C}_8 &= \beta^{-2}\mathfrak{K} \cup (\beta^{-1}\mathfrak{K} - \beta^2 - \beta - 1) \cup \left(\beta^{-2} + \frac{\beta^2 + 2\beta + 3}{2} \right) \\ &\quad \cup \left(\beta^{-1}\mathfrak{K} + \frac{\beta^2 + 2\beta + 3}{2} \right). \end{aligned}$$

Usando el Lema 3.2 cuando sea necesario, se concluye que

$$\begin{aligned} \beta^{-1}\mathfrak{C}_2 \cup \beta^{-1}(-\beta + \mathfrak{C}_5) &= \mathfrak{C}_1 \cup (\mathfrak{K} - 1), \\ \beta^{-1}\mathfrak{C}_4 \cup \beta^{-1}(-\beta^{-1} + \mathfrak{C}_5) &= \mathfrak{C}_2 \cup (\beta^{-4}\mathfrak{K} + \beta^2 + \beta + 2) \cup (\beta^{-3}\mathfrak{K} - \beta^2 - 2\beta - 2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta^{-1}\mathfrak{C}_1 \cup \beta^{-1}(\beta^{-1} + \mathfrak{C}_7) &= \mathfrak{C}_4 \cup \left(\beta^{-1}\mathfrak{K} + \frac{3\beta^2 + 6\beta + 7}{2} \right) \\
&\quad \cup \left(\beta^{-3}\mathfrak{K} + \frac{3\beta^2 + 6\beta + 7}{2} \right), \\
\beta^{-1}\mathfrak{C}_1 \cup \beta^{-1}(\beta^{-1} + \mathfrak{C}_8) &= \mathfrak{C}_5 \cup \left(\beta^{-1}\mathfrak{K} + \frac{3\beta^2 + 6\beta + 7}{2} \right), \\
\beta^{-1}\mathfrak{C}_2 \cup \beta^{-1}(-\beta + \mathfrak{C}_8) &= \mathfrak{C}_7 \cup \left(\beta^{-1}\mathfrak{K} + \frac{\beta^2 + 2\beta + 1}{2} \right), \\
\beta^{-1}\mathfrak{C}_2 &= \mathfrak{C}_8.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Se tiene que las siguientes ecuaciones enunciadas en (6-1) de [ABB11] producen una única solución para la elección γ dada:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_1 &= \beta^{-1}\mathfrak{F}_2 \cup \beta^{-1}(-\beta + \mathfrak{F}_5), & \mathfrak{F}_2 &= \beta^{-1}\mathfrak{F}_4 \cup \beta^{-1}(-\beta^{-1} + \mathfrak{F}_5), \\
\mathfrak{F}_4 &= \beta^{-1}\mathfrak{F}_1 \cup \beta^{-1}(\beta^{-1} + \mathfrak{F}_7), & \mathfrak{F}_5 &= \beta^{-1}\mathfrak{F}_1 \cup \beta^{-1}(\beta^{-1} + \mathfrak{F}_8), \\
\mathfrak{F}_7 &= \beta^{-1}\mathfrak{F}_2 \cup \beta^{-1}(-\beta + \mathfrak{F}_8), & \mathfrak{F}_8 &= \beta^{-1}\mathfrak{F}_2.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Finalmente, sea \mathfrak{F}'_a la adherencia del interior de Jordan de \mathfrak{C}_a . Se debe probar que $(\mathfrak{F}'_a)_{a \in \mathcal{A}}$ satisface (3.2). Se tiene que (ver Figura 3.5)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{K} - 1 &\subseteq \mathfrak{F}'_1, & (\beta^{-4}\mathfrak{K} + \beta^2 + \beta + 2) \cup (\beta^{-3}\mathfrak{K} - \beta^2 - 2\beta - 2) &\subseteq \mathfrak{F}'_2 \\
\left(\beta^{-1}\mathfrak{K} + \frac{3\beta^2 + 6\beta + 7}{2} \right) \cup \left(\beta^{-3}\mathfrak{K} + \frac{3\beta^2 + 6\beta + 7}{2} \right) &\subseteq \mathfrak{F}'_4, \\
\left(\beta^{-1}\mathfrak{K} + \frac{3\beta^2 + 6\beta + 7}{2} \right) &\subseteq \mathfrak{F}'_5, & \left(\beta^{-1}\mathfrak{K} + \frac{\beta^2 + 2\beta + 1}{2} \right) &\subseteq \mathfrak{F}'_7.
\end{aligned}$$

Luego, por (3.1), se concluye que $(\mathfrak{F}'_a)_{a \in \mathcal{A}}$ satisface (3.2), que demuestra que $\mathfrak{F}_a = \mathfrak{F}'_a$ para cada $a \in \mathcal{A}$.

La segunda parte del lema sale directamente de la parametrización dada (ver Figura 3.5). \square

Es directo del lema anterior que

Corolario 3.7 $\partial\mathfrak{F}_a = \mathfrak{C}_a$ for each $a \in \mathcal{A}$.

3.2.3. Propiedad de representación única para la t.i.i. de A-Y

Finalmente se probará que cada punto extremo de cada fractal \mathfrak{F}_a tiene una única representación.

Lema 3.8 Para cada $a \in \mathcal{A}$, cada punto extremo de la frontera de \mathfrak{F}_a tiene una única representación.

DEMOSTRACIÓN. La demostración es por contradicción. Se probará que los puntos extremos en \mathfrak{F}_a con más de una representación tienen una representación últimamente periódica, lo que contradirá el Lema 2.12.

Sea $z \in \partial\mathfrak{F}_a$ un punto extremo con dos representaciones. Shifteando y usando el Lema 2.7 se puede suponer que las primeras letras de las representaciones son distintas. Esto implica que $\sigma(a)$ no puede ser una única letra. Sea $\sigma(a) = bc$. Entonces, $z \in \beta^{-1}\mathfrak{F}_b \cap \beta^{-1}(\gamma(b) + \mathfrak{F}_c)$ y, del Lema 3.6,

$$z \in \partial(\beta^{-1}\mathfrak{F}_b \cap \beta^{-1}(\gamma(b) + \mathfrak{F}_c)) = \partial\beta^{-1}\mathfrak{F}_b \cap \partial\beta^{-1}(\gamma(b) + \mathfrak{F}_c).$$

Ahora, para obtener la contradicción buscada se probará que todos estos puntos tienen una representación últimamente periódica. Hay siete casos (ver Figura 3.5 para entender los casos):

(i) si $a = 1$, entonces puede ocurrir que $z = -1$ o $z = \frac{-\beta^2 - 2\beta - 3}{2}$. El punto $x_1 \in \mathcal{S}_a$ definido por $(p_1^{x_1}, c_1^{x_1}, s_1^{x_1}) = (3, 5, \varepsilon)$ y $p_m^{x_1} = \varepsilon$ para cada $m \geq 2$ es una representación últimamente periódica de $z = -1$, y el punto $x_2 \in \mathcal{S}_a$ definido por

$$x_2 = (\varepsilon, 3, 5)(\varepsilon, 4, 6)(1, 7, \varepsilon)(\varepsilon, 2, 9)(\varepsilon, 4, 5)(1, 7, \varepsilon)(\varepsilon, 2, 9)(\varepsilon, 4, 5) \dots$$

es una representación últimamente periódica de $z = \frac{-\beta^2 - 2\beta - 3}{2}$;

(ii) si $a = 2$, entonces $z = -\beta^2 - 2\beta - 2$ o $z = \beta^2 + \beta + 2$. El punto $x_1 \in \mathcal{S}_a$ definido por $(p_1^{x_1}, c_1^{x_1}, s_1^{x_1}) = (4, 5, \varepsilon)$ y $p_m^{x_1} = \varepsilon$ para cada $m \geq 2$ es una representación últimamente periódica de $z = -\beta^2 - 2\beta - 2$, y el punto $x_2 \in \mathcal{S}_a$ definido por $(p_1^{x_2}, c_1^{x_2}, s_1^{x_2}) = (4, 5, \varepsilon)$, $(p_2^{x_2}, c_2^{x_2}, s_2^{x_2}) = (1, 8, \varepsilon)$ y $p_m^{x_2} = \varepsilon$ para cada $m \geq 3$ es una representación últimamente periódica de $z = \beta^2 + \beta + 2$;

(iii) si $a = 3$, entonces $z = -\beta^2 - 2\beta - 2$ o $z = \beta^2 + \beta + 2$. El punto $x_1 \in \mathcal{S}_a$ definido por $(p_1^{x_1}, c_1^{x_1}, s_1^{x_1}) = (4, 6, \varepsilon)$ y $p_m^{x_1} = \varepsilon$ para cada $m \geq 2$ es una representación últimamente periódica de $z = -\beta^2 - 2\beta - 2$, y el punto $x_2 \in \mathcal{S}_a$ definido por $(p_1^{x_2}, c_1^{x_2}, s_1^{x_2}) = (4, 6, \varepsilon)$, $(p_2^{x_2}, c_2^{x_2}, s_2^{x_2}) = (1, 9, \varepsilon)$ y $p_m^{x_2} = \varepsilon$ para cada $m \geq 3$ es una representación últimamente periódica de $z = \beta^2 + \beta + 2$;

(iv) si $a = 4$, entonces $z = \beta^2 + 2\beta + 2$ o $z = -\beta^2 - \beta - 1$. El punto $x_1 \in \mathcal{S}_a$ definido por $(p_1^{x_1}, c_1^{x_1}, s_1^{x_1}) = (1, 7, \varepsilon)$ y $p_m^{x_1} = \varepsilon$ para cada $m \geq 2$ es una representación últimamente periódica de $z = \beta^2 + 2\beta + 2$, y el punto $x_2 \in \mathcal{S}_a$ definido por $(p_1^{x_2}, c_1^{x_2}, s_1^{x_2}) = (\varepsilon, 1, 7)$, $(p_2^{x_2}, c_2^{x_2}, s_2^{x_2}) = (3, 5, \varepsilon)$ y $p_m^{x_2} = \varepsilon$ para cada $m \geq 3$ es una representación últimamente periódica de $z = -\beta^2 - \beta - 1$;

(v) si $a = 5$, entonces $z = \beta^2 + 2\beta + 2$ o $z = \frac{3\beta^2 + 6\beta + 7}{2}$. El punto $x_1 \in \mathcal{S}_a$ definido por $(p_1^{x_1}, c_1^{x_1}, s_1^{x_1}) = (1, 8, \varepsilon)$ y $p_m^{x_1} = \varepsilon$ para cada $m \geq 2$ es una representación últimamente periódica de $z = \beta^2 + 2\beta + 2$, y el punto $x_2 \in \mathcal{S}_a$ definido por

$$x_2 = (\varepsilon, 1, 8)(3, 5, \varepsilon)(\varepsilon, 1, 8)(\varepsilon, 3, 5)(4, 6, \varepsilon)(\varepsilon, 1, 9)(\varepsilon, 3, 5)(4, 6, \varepsilon)(\varepsilon, 1, 9) \dots$$

es una representación últimamente periódica de $z = \frac{3\beta^2+6\beta+7}{2}$;

(vi) si $a = 6$, entonces $z = \beta^2 + 2\beta + 2$ o $z = \frac{3\beta^2+6\beta+7}{2}$. El punto $x_1 \in \mathcal{S}_a$ definido por $(p_1^{x_1}, c_1^{x_1}, s_1^{x_1}) = (1, 9, \varepsilon)$ y $p_m^{x_1} = \varepsilon$ para cada $m \geq 2$ es una representación últimamente periódica de $z = \beta^2 + 2\beta + 2$, y el punto $x_2 \in \mathcal{S}_a$ definido por

$$x_2 = (\varepsilon, 1, 9)(3, 5, \varepsilon)(\varepsilon, 1, 8)(\varepsilon, 3, 5)(4, 6, \varepsilon)(\varepsilon, 1, 9)(\varepsilon, 3, 5)(4, 6, \varepsilon)(\varepsilon, 1, 9) \dots$$

es una representación últimamente periódica de $z = \frac{3\beta^2+6\beta+7}{2}$;

(vii) si $a = 7$, entonces puede ocurrir que $z = -1$ or $z = \frac{\beta^2+2\beta+1}{2}$. El punto $x_1 \in \mathcal{S}_a$ definido por $(p_1^{x_1}, c_1^{x_1}, s_1^{x_1}) = (2, 9, \varepsilon)$ y $p_m^{x_1} = \varepsilon$ para cada $m \geq 2$ es una representación últimamente periódica de $z = -1$, y el punto $x_2 \in \mathcal{S}_a$ definido por

$$x_2 = (\varepsilon, 2, 9)(4, 5, \varepsilon)(\varepsilon, 1, 8)(\varepsilon, 3, 5)(4, 6, \varepsilon)(\varepsilon, 1, 9)(\varepsilon, 3, 5)(4, 6, \varepsilon)(\varepsilon, 1, 9) \dots$$

es una representación últimamente periódica de $z = \frac{\beta^2+2\beta+1}{2}$. □

Capítulo 4

Condiciones algebraica, geométrica y combinatorial para el Teorema 2.14

Sea T una t.i.i. autosimilar con intervalos de continuidad $(I_a)_{a \in \mathcal{A}}$. Recuérdese que $\delta = (\delta_a)_{a \in \mathcal{A}}$ es el vector de traslación asociado a T , donde $T(t) = t + \delta_a$ para $t \in I_a$. Además, M es la matriz de renormalización asociada a T y α es el inverso del valor propio de Perron-Frobenius de M . Considérese un valor propio complejo β de M con $|\beta| > 1$ y $\arg(\beta)/\pi \notin \mathbb{Q}$ como en la Sección 2.4.

El propósito de este capítulo es mostrar que algunas condiciones algebraicas, geométricas y combinatoriales implican la propiedad de representación única y la existencia de un vector propio asociado a β con coordenadas no nulas, es decir, las hipótesis del Teorema 2.14.

4.1. La condición algebraica

Esta condición es muy similar a la usada en [BHM10],

(CA) Los valores propios α y β son Galois-conjugados.

Esta condición implica la existencia de un vector propio γ asociado a β tal que $\gamma(w) \neq 0$ para cualquier palabra w que aparece en Ω_T . Para esto se necesitará el siguiente lema clásico:

Lema 4.1 *El vector de traslaciones δ es un vector propio de M asociado al valor propio $\alpha < 1$. Más aún, $\delta \in \mathbb{Q}(\alpha)^{\mathcal{A}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Recuérdese que T es igual, salvo reescalamiento, a su mapeo inducido sobre $[0, \alpha)$. Además, para cada $a \in \mathcal{A}$, r_a es el tiempo de primer retorno del intervalo $I_a^{(1)} = \alpha I_a$ a $[0, \alpha)$ por T . De la definición de M se tiene que para todo $a \in \mathcal{A}$ y $t \in I_a^{(1)}$

$$(M\delta)_a = \sum_{b \in \mathcal{A}} |\{0 \leq k < r_a; T^k(I_a^{(1)}) \subseteq I_b\}| \delta_b.$$

Luego, $T^{r_a}(t) = t + (M\delta)_a$. Por otro lado, como el tiempo de primer retorno de t a $[0, \alpha)$ es exactamente r_a , se tiene que $t + (M\delta)_a = t + \alpha\delta_a$. Por lo tanto, $(M\delta)_a = \alpha\delta_a$. Esto prueba la primera parte del lema.

Ahora, por el Teorema 6 de [LPV08] se tiene que el vector de largos $\lambda = (\lambda_a)_{a \in \mathcal{A}}$ de T pertenece a $\mathbb{Q}(\alpha^{-1})^{\mathcal{A}} = \mathbb{Q}(\alpha)^{\mathcal{A}}$. Además, un resultado clásico muestra que δ puede ser obtenido al multiplicar λ por una matriz entera, por lo que $\delta \in \mathbb{Q}(\alpha)^{\mathcal{A}}$. \square

Bajo la condición algebraica **(CA)** existe un isomorfismo de cuerpos $\psi: \mathbb{Q}(\alpha) \rightarrow \mathbb{Q}(\beta)$ que «reemplaza α por β ». Este isomorfismo puede extenderse naturalmente a un isomorfismo de espacios vectoriales $\psi: \mathbb{Q}(\alpha)^{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{Q}(\beta)^{\mathcal{A}}$. Aplicando ψ a la igualdad $M\delta = \alpha\delta$, dada por el lema anterior, se obtiene que $M\psi(\delta) = \beta\psi(\delta)$, por lo que $\psi(\delta)$ es un vector propio asociado a β . Sea $\gamma = \psi(\delta)$.

Lema 4.2 *Sea $w = w_0 \dots w_{n-1}$ una subpalabra finita y no vacía de una secuencia en Ω_T . Bajo la hipótesis **(CA)** se tiene que $\gamma(w) \neq 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Por definición de w y minimalidad de T , existe $t \in [0, 1)$ tal que $T^m(t) \in I_a$ si y sólo si $w_m = a$ para cada $0 \leq m \leq n-1$. Por definición de δ , se tiene que $T^n(t) = t + \delta(w)$ y que $\delta(w) \neq 0$, ya que T es aperiódico. Aplicando el isomorfismo ψ se concluye que $\gamma(w) \neq 0$. \square

Obsérvese que el lema anterior implica que $\gamma(a) \neq 0$ para todo $a \in \mathcal{A}$.

4.2. La condición geométrica

Para enunciar esta hipótesis se necesita más notación. Defínase para cada $a \in \mathcal{A}$

$$\bar{\mathcal{A}}_a = \{(p, c, s) \in \mathcal{A}^* \times \mathcal{A} \times \mathcal{A}^*; \sigma(a) = pcs\},$$

$\bar{\mathcal{A}} = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} \bar{\mathcal{A}}_a$ y $\mathfrak{F}_{(p,c,s)} = \beta^{-1}(\gamma(p) + \mathfrak{F}_c)$ para $(p, c, s) \in \bar{\mathcal{A}}$. Como se probó en la Proposición 2.20 de [ABB11], se tiene la siguiente descomposición $\mathfrak{F}_a = \bigcup_{(p,c,s) \in \bar{\mathcal{A}}_a} \mathfrak{F}_{(p,c,s)}$ para cada $a \in \mathcal{A}$. De esta descomposición, se deduce que $v_a(\tau) = \min_{(p,c,s) \in \bar{\mathcal{A}}_a} v_{(p,c,s)}(\tau)$ para cada $\tau \in \mathbb{S}^1$, donde $v_{(p,c,s)}(\tau)$ es el mínimo de $z \mapsto \operatorname{Re}(\tau z)$ sobre $z \in \mathfrak{F}_{(p,c,s)}$. Entonces, es natural definir para cada $a \in \mathcal{A}$ y $\tau \in \mathbb{S}^1$ el conjunto $P_a(\tau) = \{(p, c, s) \in \bar{\mathcal{A}}_a; v_a(\tau) = v_{(p,c,s)}(\tau)\}$. Éste contiene los índices de los subfractales $\mathfrak{F}_{(p,c,s)}$ de \mathfrak{F}_a donde el mínimo $v_a(\tau)$ se alcanza. Nótese que $|P_a(\tau)| \geq 1$ y no es siempre igual a 1. Esto motiva la condición geométrica:

(CG) Para cada $a \in \mathcal{A}$, el conjunto $\Psi_a = \{\tau \in \mathbb{S}^1; |P_a(\tau)| \geq 2\}$ es finito.

La condición geométrica **(CG)** afirma que el mínimo del mapeo $z \mapsto \operatorname{Re}(\tau z)$ se alcanza en sólo un subfractal de \mathfrak{F}_a , excepto para las finitas direcciones en Ψ_a . Esta condición será usada en la siguiente sección para definir un mapeo que permite describir los puntos extremos de los fractales \mathfrak{F}_a . Antes de eso, se necesita el siguiente lema:

Lema 4.3 *Supóngase que se verifica la condición (CG). Para cada $a \in \mathcal{A}$ y $(p, c, s) \in \bar{\mathcal{A}}_a$, el conjunto*

$$J_{a,(p,c,s)} = \{\tau \in \mathbb{S}^1; (p, c, s) \in P_a(\tau)\}$$

es una unión finita de intervalos cerrados.

DEMOSTRACIÓN. Se probará que cada conjunto $J_{a,(p,c,s)}$ es cerrado y que tiene una cantidad finita de componentes conexas. Sea $(\tau_m)_{m \geq 1}$ una sucesión en $J_{a,(p,c,s)}$ que converge a $\tau \in \mathbb{S}^1$. Sea $(z_m)_{m \geq 1}$ una sucesión en $\mathfrak{F}_{(p,c,s)}$ tal que $\text{Re}(\tau_m z_m) = v_a(\tau_m)$. Como $\mathfrak{F}_{(p,c,s)}$ es compacto, se puede suponer que $(z_m)_{m \geq 1}$ converge a $z \in \mathfrak{F}_{(p,c,s)}$. Por lo tanto, $\text{Re}(\tau z) = v_a(\tau)$ y, por definición, se concluye que $\tau \in J_{a,(p,c,s)}$. Así, $J_{a,(p,c,s)}$ es cerrado.

Ahora, como cada conjunto $J_{a,(p,c,s)}$ es cerrado, si J es una componente conexa en $J_{a,(p,c,s)}$ su frontera ∂J está contenida en Ψ_a . Luego, por (CG), cada $J_{a,(p,c,s)}$ tiene una cantidad finita de componentes conexas. \square

4.2.1. El *skew product* H

La principal consecuencia de la condición geométrica (CG) es la definición de un *skew product* $H: \bar{\mathcal{A}} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \bar{\mathcal{A}} \times \mathbb{S}^1$ que permite describir los puntos extremos de los fractales.

Definición 4.4 *Sea $X = \mathbb{S}^1 \times \bar{\mathcal{A}}$. Sea $\pi_{\mathbb{S}^1}: X \rightarrow \mathbb{S}^1$ la proyección en la primera coordenada y $\pi_{\bar{\mathcal{A}}}: X \rightarrow \bar{\mathcal{A}}$ la proyección en la segunda coordenada.*

Se define el mapeo $H: X \rightarrow X$ por

$$H(\tau, (p, c, s)) = (\beta_0^{-1}\tau, (p', c', s')),$$

donde $(p', c', s') \in \bar{\mathcal{A}}_c$ y satisface $\tau \in J_{c,(p',c',s')}$.

Como hay más de una elección posible para (p', c', s') si $\tau \in \Psi_c$, se define \mathcal{H} como el conjunto todos los H definidos de esta forma. Este conjunto es claramente finito. Por definición, si $\tau \in \mathbb{S}$, $a \in \mathcal{A}$ entonces $x \in S_a$ es la representación de un punto extremo en $E_a(\tau)$ si y sólo si existe $H \in \mathcal{H}$ tal que $(p_m^x, c_m^x, s_m^x) = \pi_{\mathcal{A}}(H^m(\tau, (p, a, s)))$ para cada entero $m \geq 1$, donde $p, s \in \mathcal{A}^*$ satisfacen $(p, a, s) \in \bar{\mathcal{A}}$.

En lo que queda de esta sección, se fijará $H \in \mathcal{H}$ como la única elección continua por la derecha. El Lema 4.3 asegura que H es esencialmente una transformación de translación de intervalos (t.t.i.). Estos mapeos son isometrías por pedazos no necesariamente biyectivas de un intervalo con finitas discontinuidades. Propiedades básicas de las t.t.i. pueden ser encontradas en [BK95]. Para visualizar H como una t.t.i., se asocia a cada $\mathbb{S}^1 \times \{(p, c, s)\}$ con $(p, c, s) \in \bar{\mathcal{A}}$ un intervalo $[t_{(p,c,s)}^-, t_{(p,c,s)}^+)$ de largo $1/|\bar{\mathcal{A}}|$ que forman una partición de $[0, 1)$. El mapeo que H induce en $[0, 1)$ de la manera natural es una t.i.i..

Debemos definir una noción de *componente minimal* para H . Como H no es continua, necesitamos extender la definición clásica de dinámica topológica. Esto se hace adaptando un

procedimiento clásico en la teoría de t.i.i. a las t.t.i. que se resumirá aquí siguiendo la discusión de la Sección 2 de [BK95]. Para este propósito, se verá a H como un t.t.i. sobre el intervalo $[0, 1)$.

Primero se define un nuevo espacio \hat{X} . Sea D el conjunto de discontinuidades de H junto con sus preimágenes por H , además de los puntos $\lim_{s \nearrow t} H(s)$ y sus imágenes, donde t es una discontinuidad de H . Luego, se construye el conjunto ordenado $\hat{X} = X \cup D^- \cup \{1\}$, donde $D^- = \{t^-; t \in D\}$ es una copia disjunta de D , poniendo cada punto t^- inmediatamente a la izquierda de t . Esto es, se introducen pequeños «agujeros» en $[0, 1)$ en las posiciones $t \in D$ y se llama al extremo de la izquierda del agujero t^- y al de la derecha t . El orden de $[0, 1)$ se extiende naturalmente a este nuevo conjunto. El conjunto \hat{X} dotado de la topología del orden es un espacio métrico compacto. Finalmente, sea $\hat{H}: \hat{X} \rightarrow \hat{X}$ el mapeo definido como H en X , $\hat{H}(t^-) = (\lim_{s \nearrow t} H(s))^-$ para $t \in D$ y $\hat{H}(1)$ se define por continuidad. Se prueba que \hat{H} es un mapeo continuo en el espacio métrico compacto \hat{X} . Más aún, X es invariante para \hat{H} y $\hat{H}|_X$ (la restricción de \hat{H} a X) coincide con H .

Definición 4.5 ([ST00]) *Se dice que $Y \subseteq X$ es una componente minimal de H si $Y = \hat{Y} \cap X$, donde \hat{Y} es una componente minimal de \hat{H} . Esto es, $\hat{H}(\hat{Y}) = \hat{Y}$ y cada punto en \hat{Y} tiene una órbita \hat{H} densa por en \hat{Y} (para la topología de \hat{X}). Nótese que para cada $t \in Y$ se tiene que $Y \subseteq \overline{\text{Orb}_H(t)}$.*

Usando el hecho que H es una t.t.i. aperiódica se obtiene que

Lema 4.6 *H tiene un número finito de componentes minimales.*

DEMOSTRACIÓN. El Teorema 2.4 de [ST00] asegura que una t.t.i. aperiódica tiene un número finito de componentes minimales. Como H tiene una rotación irracional en la primera coordenada, se tiene que es aperiódica. \square

Considérese nuevamente H vista en $\mathbb{S}^1 \times \bar{\mathcal{A}}$. Recuértese que se ha identificado todo punto $(\tau, (p, c, s)) \in X$ con un único $t \in [0, 1)$. Esta identificación puede ser extendida a \hat{X} identificado t^- al mismo $(\tau, (p, c, s)) \in X$ que t para cada $t \in D$. Se denotará por \hat{t} a cualquier elemento de \hat{Y} asociado a $t \in [0, 1]$, esto es, en la mayoría de los casos es sólo t , pero puede ser t o t^- si $t \in D$.

Lema 4.7 *Cada componente minimal de \hat{H} y H es una unión finita de intervalos de largo positivo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea Y una componente minimal. Entonces, por definición, $Y = \hat{Y} \cap X$ para alguna componente minimal \hat{Y} para \hat{H} . Para cada $(p, c, s) \in \bar{\mathcal{A}}$ defínase

$$\hat{Y}_{(p,c,s)} = \{\tau \in \mathbb{S}^1; (\tau, (p, c, s)) \text{ is associated in } \hat{X} \text{ to some } \hat{t} \text{ in } \hat{Y}\}.$$

Sean $\hat{t} \in \hat{Y}$ y $(\tau, (p, c, s)) \in X$ asociado a \hat{t} . Se tiene que $\hat{H}^m(\hat{t})$ está asociado a un punto cuya primera coordenada es $\beta_0^{-m}\tau$ para cualquier entero $m \geq 0$. Como la rotación por β_0^{-1} es irracional, se tiene que $\{\beta_0^{-m}\tau\}_{m \geq 0} = \mathbb{S}^1$. Más aún, es posible encontrar subsucesiones que

converjan a cualquier punto en \mathbb{S}^1 por arriba o por abajo. Luego, tomando otra subsucesión y notando que \hat{Y} es compacto, se obtiene que $\mathbb{S}^1 = \bigcup_{(p,c,s) \in \bar{\mathcal{A}}} \hat{Y}_{(p,c,s)}$. Nótese que se ha usado la convergencia en la topología de \hat{X} . Un argumento similar muestra que los $\hat{Y}_{(p,c,s)}$ son cerrados. Entonces, existe $(p, c, s) \in \bar{\mathcal{A}}$ tal que $\hat{Y}_{(p,c,s)}$ contiene un intervalo abierto $\hat{J} \subseteq \mathbb{S}^1$. Por minimalidad, existe $n \geq 1$ tal que $\bigcup_{m=0}^n \hat{H}^m(\hat{J}) = \hat{Y}$. Finalmente, sea $J = \hat{J} \cap X$. Como X y D^- son invariantes para \hat{H} , se obtiene que $Y = \bigcup_{m=0}^n H^m(J)$. Para concluir, se tiene que $\bigcup_{m=0}^n \hat{H}^m(\hat{J})$ y que $\bigcup_{m=0}^n H^m(J)$ son uniones finitas de intervalos de largo positivo, pues la imagen mediante H o \hat{H} de un intervalo es una unión finita de intervalos (son t.t.i.). \square

Dado $(\tau, (p, c, s)) \in X$ siempre existe una componente minimal contenida en la órbita cerrada de $(\tau, (p, c, s))$ por H . En efecto, considérese el elemento $t \in \hat{X}$ asociado a $(\tau, (p, c, s))$. Se tiene que su órbita cerrada por \hat{H} contiene una componente minimal \hat{Y} . Luego, tómose $Y = \hat{Y} \cap X$ que verifica $Y \subseteq \overline{\text{Orb}_{\hat{H}}(t)} \cap X \subseteq \overline{\text{Orb}_H(\tau, (p, c, s))}$.

Lema 4.8 *Existe un entero $N_H \geq 1$ universal tal que para cada $(\tau, (p, c, s)) \in X$ y la componente minimal Y contenida en la órbita cerrada de $(\tau, (p, c, s))$ por H se tiene que $H^{N_H}(\tau, (p, c, s)) \in Y$. En particular, existe una única componente minimal contenida en la órbita cerrada de cualquier punto en X .*

DEMOSTRACIÓN. Sea $(\tau, (p, c, s)) \in X$ y sea Y una componente minimal contenida en la órbita cerrada de $(\tau, (p, c, s))$ por H . Por definición, $Y = \hat{Y} \cap X$, donde \hat{Y} es una componente minimal para \hat{H} con $\hat{Y} \subseteq \overline{\text{Orb}_{\hat{H}}(t)}$, como se discutió antes del lema.

Por el Lema 4.7, se tiene que \hat{Y} tiene interior no vacío. Como \hat{Y} está contenido en $\overline{\text{Orb}_{\hat{H}}(t)}$, existe un entero $n \geq 0$ tal que $\hat{H}^n(t)$ alcanza el interior de \hat{Y} . Esto implica en particular que $\overline{\text{Orb}_{\hat{H}}(t)}$ contiene una única componente minimal. Luego, $\overline{\text{Orb}_{\hat{H}}(t)} = \bigcup_{m \geq 0} \hat{H}^{-m}(\hat{Y})$. Por otro lado, \hat{Y} tiene interior no vacío y \hat{H} es continua, por lo que, por compacidad, existe $N \geq 1$ tal que $\overline{\text{Orb}_{\hat{H}}(t)} = \bigcup_{m=0}^N \hat{H}^{-m}(\hat{Y})$. Usando un argumento similar al presentado en la demostración del lema anterior para pasar de \hat{X} to X , se deduce que $H^N(\tau, (p, c, s)) \in Y$.

Para concluir que N_H puede ser escogido uniformemente, se observa que, del lema 4.6, H y \hat{H} tienen finitas componentes minimales. \square

Sea $\Lambda_H = \bigcap_{m \geq 1} H^m(X)$ el conjunto límite de H .

Lema 4.9 *$\Lambda_H = H^{N_H}(X)$ para algún $N_H \geq 1$. Más aún, Λ_H es igual a la unión disjunta de las componentes minimales de H y, por lo tanto, es una unión finita de intervalos de largo positivo.*

DEMOSTRACIÓN. Del lema anterior, cada punto $(\tau, (p, c, s))$ alcanza la componente minimal en la adherencia de su órbita en N_H pasos uniformemente. Además, H restringida a una componente minimal es sobreyectiva. Luego, $\Lambda_H = H^{N_H}(X)$ es igual a la unión disjunta de las componentes minimales de H . \square

4.3. La condición combinatorial

Esta condición es esencialmente técnica, incluso ad hoc, y requiere la existencia de H como en la sección anterior. Se supondrá entonces **(CG)**.

Sean $\Lambda_H = \bigcap_{m \geq 0} H^m(X)$ para cada $H \in \mathcal{H}$ y $\Lambda = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} \Lambda_H$.

Fíjese $(\tau, (p, c, s)) \in X$. Se tiene que cualquier $H' \in \mathcal{H}$ coincide con la versión continua por la derecha $H \in \mathcal{H}$, excepto por finitos puntos. Como H es aperiódica, existe un entero $n \geq 0$ tal que $(H')^m(\tau, (p, c, s)) = H^{m-n}((H')^n(\tau, (p, c, s)))$ para todo entero $m \geq n$. Por lo tanto, si $Y' \subseteq X$ es la componente minimal contenida en la órbita cerrada de $(H')^n(\tau, (p, c, s))$ por H , se tiene que $(H')^m(\tau, (p, c, s)) \in Y'$ para todo $m \geq n$. La componente minimal contenida en la órbita cerrada de $(\tau, (p, c, s))$ por H puede o no coincidir con Y' . Si no coinciden para algún $H' \in \mathcal{H}$ se dirá que $(\tau, (p, c, s))$ es una *discontinuidad esencial* de \mathcal{H} . Existen discontinuidades esenciales de \mathcal{H} siempre que H tenga más de una componente minimal.

Dada una componente minimal $Y \subseteq X$ para H y $(p, c, s) \in \mathcal{A}$ se define

$$Y_{(p,c,s)} = \{\tau \in \mathbb{S}^1 \mid (\tau, (p, c, s)) \in Y\}.$$

Se puede enunciar ahora la condición combinatorial:

(CC) Sea $H \in \mathcal{H}$ continua por la derecha. Entonces, para cada componente minimal $Y \subseteq X$ de H se tiene que $\{Y_{(p,c,s)} \times \{(p, c, s)\}\}_{(p,c,s) \in \bar{\mathcal{A}}}$ constituye una partición de Y . Además, Λ no contiene discontinuidades esenciales de \mathcal{H} .

Nótese que la primera parte de la condición combinatorial afirma que para cada componente minimal $Y \subseteq X$ de la versión continua por la derecha $H \in \mathcal{H}$ y para todo $\tau \in \mathbb{S}^1$ existe un único $(p, c, s) \in \bar{\mathcal{A}}$ tal que $(\tau, (p, c, s)) \in Y$. La segunda parte establece que un punto en el conjunto límite Λ no puede moverse de una componente minimal a otra por distintas elecciones de $H \in \mathcal{H}$.

Lema 4.10 Sean $\tau \in \mathbb{S}^1$, $a \in \mathcal{A}$ y $x, y \in \mathcal{S}_a$ con $f_a(x), f_a(y) \in E_a(\tau)$. Supóngase que $(\tau, (p, a, s)) \in \Lambda$ para algún $p, s \in \mathcal{A}^*$. Si se verifica **(CC)**, entonces x y y son últimamente iguales.

DEMOSTRACIÓN. Sean $H \in \mathcal{H}$ continua por la derecha y $Y \subseteq X$ la componente minimal contenida en la órbita cerrada por H de $(\tau, (p, a, s))$. Por **(CC)**, se tiene que $(\tau, (p, a, s))$ no es una discontinuidad esencial de \mathcal{H} porque pertenece a Λ . Por definición, existe $n \geq 0$ tal que $(\beta_0^{-m}\tau, (p_m^x, c_m^x, s_m^x)), (\beta_0^{-m}\tau, (p_m^y, c_m^y, s_m^y)) \in Y$ para cada $m \geq n$. Por **(CC)**, se concluye que $(p_m^x, c_m^x, s_m^x) = (p_m^y, c_m^y, s_m^y)$ para todo $m \geq n$. \square

4.4. Demostración de la propiedad de representación única

Se probará ahora que **(CA)**, **(CG)** y **(CC)** implican la propiedad de representación única. Por definición, si $\tau \in \mathbb{S}^1$, $a \in \mathcal{A}$ y $x \in \mathcal{S}_a$ es la representación de un punto en $E_a(\tau)$, entonces $\mathfrak{f}_a(x) \in E_a^*(\tau)$ si y sólo si $(\tau, (p, a, s)) \in \Lambda$ para algunos $p, s \in \mathcal{A}^*$.

Teorema 4.11 *Supóngase que T satisface **(CA)**, **(CG)** and **(CC)** para β y γ . Entonces T tiene la propiedad de representación única para β y γ .*

DEMOSTRACIÓN. Considérense $a \in \mathcal{A}$, $\tau \in \mathbb{S}^1$ y $x, y \in \mathcal{S}_a$ representaciones de puntos extremos límite para la dirección τ que satisfagan $\mathfrak{f}_a(x) = \mathfrak{f}_a(y)$. Se probará $x = y$.

Por el Lema 4.10, x y y son últimamente iguales. Como $\mathfrak{f}_a(x) = \mathfrak{f}_a(y)$ se tiene que

$$\mathfrak{f}_a^{(n)}(x) = \sum_{m=1}^n \beta^{-m} \gamma(p_m^x) = \sum_{m=1}^n \beta^{-m} \gamma(p_m^y) = \mathfrak{f}_a^{(n)}(y)$$

para $n \geq 0$ suficientemente grande. Por lo tanto, $\gamma(\sigma^{n-1}(p_1^x) \dots p_n^x) = \gamma(\sigma^{n-1}(p_1^y) \dots p_n^y)$. Sin embargo, $\sigma^{n-1}(p_1^x) \dots p_n^x$ y $\sigma^{n-1}(p_1^y) \dots p_n^y$ son prefijos de $\sigma^n(a)$, por lo que, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $\sigma^{n-1}(p_1^y) \dots p_n^y = \sigma^{n-1}(p_1^x) \dots p_n^x w$ para alguna palabra no vacía $w \in \mathcal{A}^*$. Esto implica que $\gamma(w) = 0$, lo que contradice el Lema 4.2, que es una consecuencia de **(CA)**. \square

4.5. T.i.i. de A-Y y las condiciones algebraica, geométrica y combinatorial

Sea T el mapeo cúbico de Arnoux-Yoccoz. Las condiciones **(CA)**, **(CG)** y **(CC)** son satisfechas por T . Sin embargo, como T no es autosimilar, no se puede concluir de **(CA)** que $\gamma(w) \neq 0$ si w aparece en una secuencia en Ω_T (este hecho es, en realidad, falso para T). El mapeo T sí satisface una versión más débil del Lema 4.2 que es suficiente para probar el Teorema 4.11. Esta condición se enunciará en el siguiente lema. Además, la versión autosimilar de T definida en [LPV07] también satisface las tres condiciones, pero, como se dijo al comienzo del Capítulo 3, no se analizará en este trabajo.

Lema 4.12 *Sea $a \in \mathcal{A}$. Si x, y son secuencias en \mathcal{S}_a que satisfacen $p_m^x \neq p_m^y$ y $c_n^x = c_n^y$ para algunos enteros $n \geq 1$ y $m \leq n$, entonces $\mathfrak{f}_a^{(n)}(x) \neq \mathfrak{f}_a^{(n)}(y)$.*

DEMOSTRACIÓN. Shifteando las secuencias y usando el Lema 2.7 se puede suponer que $m = 1$. Si $\mathfrak{f}_a^{(n)}(x) = \mathfrak{f}_a^{(n)}(y)$ tendríamos que $\mathfrak{f}_a^{(n)}(x) + \beta^{-n} \mathfrak{F}_{c_n^x} = \mathfrak{f}_a^{(n)}(y) + \beta^{-n} \mathfrak{F}_{c_n^y}$. Por otro lado, iterando la conclusión del Lema 3.6 se obtiene que si $wb, w'c$ con $b, c \in \mathcal{A}$ son prefijos distintos de $\sigma^n(a)$ entonces $(\gamma(w) + \mathfrak{F}_b) \cap \text{int}(\gamma(w') + \mathfrak{F}_c) = \emptyset$. Tomando $w = \sigma^{n-1}(p_1^x) \dots p_n^x$ y $w' = \sigma^{n-1}(p_1^y) \dots p_n^y$ se obtiene una contradicción. \square

Este lema es suficiente para concluir el Teorema 4.11, ya que las secuencias $x, y \in \mathcal{S}_a$ en el enunciado del teorema son últimamente iguales.

Lema 4.13 *Se tiene que*

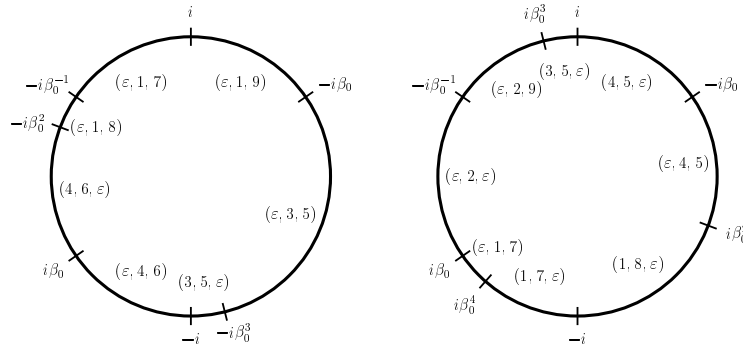
$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \{-i\beta_0^4, \eta_1\} & \Psi_5 &= \{i\beta_0^5, -\beta_0\eta_1\} \\ \Psi_2 &= \{i\beta_0^2, -i\beta_0^2\} & \Psi_7 &= \{i\beta_0^5, \eta_7\} \\ \Psi_4 &= \left\{i\beta_0^5, i\frac{|\beta^{-1}+\beta^{-3}|}{\beta^{-1}+\beta^{-3}}\right\} & \Psi_8 &= \emptyset,\end{aligned}$$

donde $\phi - \frac{\pi}{2} < \arg(\eta_1) < 2\phi - \frac{3\pi}{2}$ y $4\phi - \frac{9\pi}{2} < \arg(\eta_7) < 2\pi$, $\phi = \arg(\beta_0) \in [0, 2\pi)$. Por lo tanto, se satisface **(CG)**.

DEMOSTRACIÓN. Las cotas para η_1 y η_7 fueron encontradas con un computador. El resto de las direcciones se pueden encontrar analizando la parametrización de \mathfrak{F}_a (ver Figura 3.5). \square

Usando los resultados del lema anterior, es posible calcular la versión continua por la derecha $H \in \mathcal{H}$ casi explícitamente. Las cotas para η_1 y η_7 son suficientemente buenas para que el conjunto límite Λ , y sus componentes minimales, no dependa de los valores exactos de η_1 y η_7 .

Lema 4.14 Λ *consiste de dos componentes minimales, cuyas adherencias son*



Más aún, la adherencia de cada una de estas componentes minimales es invariante para cualquier elección de $H \in \mathcal{H}$, por lo que Λ satisface **(CC)**.

DEMOSTRACIÓN. Iterando $H \in \mathcal{H}$ continua por la derecha, se observa $H^{30}(X) = H^{31}(X)$, por lo que $\Lambda_H = H^{30}(X)$. Finalmente, $\Lambda = \overline{\Lambda}_H$, pues $|\Psi_a| \leq 2$ para cada $a \in \mathcal{A}$. Es directo verificar que cada componente minimal es invariante para cada $H \in \mathcal{H}$. \square

Conclusión

En [MMY10], Marmi, Moussa y Yoccoz mostraron que casi toda transformación de intercambio de intervalos posee una extensión afín con intervalos errantes. Sin embargo, en general es difícil encontrar ejemplos explícitos fuera de la clase estudiada en este artículo.

En esta dirección ha habido varios resultados que dependen del espacio en el que se encuentra el vector de logaritmos de la transformación de intercambio de intervalos afín ([CG97; BHM10; BBH14] etc.), pero no se había considerado previamente el caso con un valor propio expansivo y no real.

Los objetos estudiados en este trabajo parecen ser la forma natural de abordar este último caso. En particular, el estudio del los fractales definidos en [ABB11] y del *skew product* H dice mucho sobre la convergencia del promedio ergódico necesaria para la existencia de la extensión afín.

De todos modos, las hipótesis no son fáciles de verificar para un ejemplo explícito. Para entender el mapeo cúbico de Arnoux-Yoccoz se requirió analizar muy profundamente los fractales con métodos específicos para este caso. El estudio de los ejemplos de Arnoux-Yoccoz de mayor orden deberían ser el próximo paso a seguir para entender mejor las hipótesis.

Por la falta de ejemplos, es difícil comprender cuáles hipótesis son realmente necesarias y cuáles son las relaciones entre éstas. La propiedad de representación única parece ser necesaria para la convergencia y la condición algebraica **(CA)** se ve natural. Falta encontrar condiciones más simples, posiblemente algebraicas como la misma condición **(CA)**, que impliquen la condición geométrica. La condición combinatorial es muy técnica y probablemente se pueda eliminar o entender mejor estudiando más profundamente el mapeo H .

En resumen, es necesario estudiar más a fondo los ejemplos para entender las relaciones entre las hipótesis y lograr una comprensión más profunda del fenómeno estudiado.

Bibliografía

- [ABB11] P. Arnoux, J. Bernat y X. Bressaud. “Geometrical models for substitutions”. En: *Exp. Math.* 20.1 (2011), págs. 97-127.
- [Bar99] R. Barreto. “On C^r -class of conjugacy between affine interval exchange maps and its isometric model”. Tesis doct. IMPA, 1999.
- [BBH14] X. Bressaud, A. I. Bufetov y P. Hubert. “Deviation of ergodic averages for substitution dynamical systems with eigenvalues of modulus 1”. En: *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* 109.2 (2014), págs. 483-522.
- [BHM10] X. Bressaud, P. Hubert y A. Maass. “Persistence of wandering intervals in self-similar affine interval exchange transformations”. En: *Ergodic Theory Dynam. Systems* 30.3 (2010), págs. 665-686.
- [BK95] Michael Boshernitzan e Isaac Kornfeld. “Interval translation mappings”. En: *Ergodic Theory Dynam. Systems* 15.5 (1995), págs. 821-832.
- [CG97] R. Camelier y C. Gutiérrez. “Affine interval exchange transformations with wandering intervals”. En: *Ergodic Theory Dynam. Systems* 17.6 (1997), págs. 1315-38.
- [Cob02] M. Cobo. “Piece-wise affine maps conjugate to interval exchanges”. En: *Ergodic Theory Dynam. Systems* 22.2 (2002), págs. 375-407.
- [Cob99] M. Cobo. “Affine transformations semi-conjugate to interval exchanges”. Tesis doct. IMPA, 1999.
- [CS01] V. Canterini y A. Siegel. “Automate des préfixes-suffixes associé à une substitution primitive”. En: *J. Théor. Nombres Bordeaux* 13.2 (2001), págs. 353-369.
- [Den32] A. Denjoy. “Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore”. En: *J. Math. Pures Appl.* 11.9 (1932), págs. 333-376.
- [Fog02] P. Fogg. *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics*. Vol. 1794. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [Kea75] M. Keane. “Interval exchange transformations”. En: *Math. Zeitschrift* 141 (1975), págs. 25-31.
- [Lev87] G. Levitt. “La décomposition dynamique et la différentiabilité des feuilletages des surfaces”. En: *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 37.3 (1987), págs. 85-116.
- [LPV07] J. H. Lowenstein, G. Poggiaspalla y F. Vivaldi. “Interval exchange transformations over algebraic number fields: the cubic Arnoux-Yoccoz model”. En: *Dyn. Syst.* 22.1 (2007), págs. 73-106.
- [LPV08] J. H. Lowenstein, G. Poggiaspalla y F. Vivaldi. “Geometric representation of interval exchange maps over algebraic number fields”. En: *Nonlinearity* 21.1 (2008), págs. 149-177.
- [Mes00] Ali Messaoudi. “Frontière du fractal de Rauzy et système de numération complexe”. En: *Acta Arith.* 95.3 (2000), págs. 195-224.

- [MMY10] S. Marmi, P. Moussa y J.-C. Yoccoz. “Affine interval exchange maps with a wandering interval”. En: *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* 100.3 (2010), págs. 639-669.
- [Que87] M. Queffélec. *Substitution dynamical systems—spectral analysis*. Vol. 1294. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [ST00] J. Schmeling y S. Troubetzkoy. “Interval translation mappings”. En: *Dynamical systems (Luminy-Marseille, 1998)*. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2000, págs. 291-302.
- [Via06] M. Viana. “Ergodic theory of interval exchange maps”. En: *Rev. Mat. Complut.* 19.1 (2006), págs. 7-100.
- [Zor96] A. Zorich. “Finite Gauss measure on the space of interval exchange transformations. Lyapunov exponents”. En: *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 46.2 (1996), págs. 325-370.