



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

## ANÁLISIS DE MECANISMOS DE PRECIOS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN ECONOMÍA APLICADA  
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

ANDRÉS PERLROTH VITRIOL

PROFESOR GUÍA:  
JOSÉ CORREA HAEUSSLER

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
LUIS BRICEÑO ARIAS  
ARIS DANIILIDIS  
JUAN ESCOBAR CASTRO

SANTIAGO DE CHILE  
2015

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR AL  
TÍTULO DE: INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO Y  
GRADO DE: MAGÍSTER EN ECONOMÍA APLICADA  
POR: ANDRÉS PERLROTH VITRIOL  
FECHA: 19/08/2015  
PROF. GUÍA: JOSÉ CORREA HAEUSSLER

## ANÁLISIS DE MECANISMOS DE PRECIOS

Entender los mecanismos de asignaciones de objetos cuando los interesados poseen valoraciones privadas ha tenido una gran relevancia en economía tanto del punto de vista teórico como empírico. Dentro de las principales preguntas abordadas, destaca comprender el comportamiento de los agentes, en otras palabras, poder garantizar y caracterizar la existencia de los equilibrios bayesianos asociados a cada juego. También, el entender cuándo el mecanismo asociado cumple que el agente con mayor valoración es aquel que recibe el producto, denominado eficiencia del remate.

Uno de los métodos clásicos para vender productos es la aplicación de un remate descendente, comúnmente conocido como subasta Holandesa. En este mecanismo, el vendedor comienza ofreciendo un precio alto por el objeto, el cual es rebajado hasta que un interesado decida comprarlo. Sin embargo, con el devenir de la tecnología este sistema de ventas ha mutado, incorporando el tiempo como variable a considerar en su diseño. En esta tesis buscamos comprender la versión dinámica de la subasta Holandesa.

Estudiaremos un modelo donde un vendedor publica, a comienzo de temporada, el potencial precio que tendrán los objetos si es que estos aún no se han vendido. En la otra vereda, los compradores llegan de manera privada según un proceso estocástico Poisson no-homogéneo presentando una tasa de descuento temporal.

El primer resultado obtenido es que si las valoraciones se distribuyen de manera independiente según una ley  $F$  Bernoulli, entonces existe un equilibrio simétrico para el caso de un único ítem en venta. Más aún, el equilibrio encontrado implica eficiencia del mecanismo aunque, dependiendo de la curva de precio, este equilibrio será en estrategia mixtas.

Para el caso en que  $F$  sea continua mostramos que, en caso de existir equilibrio, se podrá representar a partir de una función umbral: para cada valoración existe un tiempo crítico luego del cual todo jugador con dicha valoración compra al llegar a la tienda. Lo anterior conlleva a que el mecanismo no sea eficiente.

Respecto al caso de múltiples objetos a vender, damos el primer paso para su comprensión. Para ello, obviaremos el factor temporal y estudiaremos el remate descendente. Mostramos que en el caso de dos jugadores y tres objetos, existe un equilibrio simétrico que tiene la particularidad de ser ineficiente.

*A mis abuelos, a mis padres.*

# Agradecimientos

Quiero agradecer profundamente a mi familia por su constante apoyo en todos mis proyectos. A mi mamá Verónica, por mostrarme el interesante camino de la investigación y de la ciencia. A mi papá Samuel, por generar esa pasión por la búsqueda de entender el comportamiento de los individuos mediante la Economía. ¡Este logro es tan mío como suyo!

En segundo lugar, mis reconocimientos a la Oma que, aparte de haberme recibido los primeros años, me brindó compañía y sustento en esa exigente época. ¡Qué sigamos viviendo alegrías por mucho tiempo más! Para terminar con la familia, expreso mi gratitud a la Deborah, al Alex y especialmente al Papá por haberme ayudado a mejorar la redacción de esta tesis.

Agradezco a José Correa por toda su amistad y confianza en este proceso, su ayuda ha sido fundamental para el desarrollo de este trabajo y todos sus consejos y experiencias me han permitido poder desarrollarme como investigador. A Juan Escobar por su excelente disposición para responder mis inquietudes de Economía, como también por todas las interesantes discusiones que hemos tenido a lo largo del último año. También agradezco a Luis Briceño y Aris Daniilidis por formar parte de la comisión. A Andreas Schulz por la inolvidable experiencia de trabajar con él en MIT.

A todos los profesores, compañeros y funcionarios del DIM y del MAGCEA, más allá del conocimiento que me han entregado, gracias a ustedes he tenido seis excelentes años de entretenimiento y crecimiento personal. Mención honrosa para Alberto, Eduardo y Gian Luca por sus valiosos aportes para la presentación de la Tesis.

Finalmente, agradezco a CONICYT por financiar parte de mis estudios de postgrado.

# Tabla de contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Literatura . . . . .	3
1.3. Organización de la tesis . . . . .	4
<b>2. El modelo</b>	<b>5</b>
2.1. El juego . . . . .	5
2.2. Equilibrio del juego . . . . .	6
2.3. Modelo Dinámico . . . . .	8
2.4. Modelo de remates de múltiples objetos . . . . .	10
<b>3. Análisis de Equilibrio Dinámico</b>	<b>11</b>
3.1. Literatura . . . . .	11
3.2. Modelo Bernoulli . . . . .	12
3.3. Modelo Continuo . . . . .	22
<b>4. Análisis equilibrio múltiples productos</b>	<b>24</b>
4.1. Literatura . . . . .	25
4.2. Existencia de Equilibrio . . . . .	27
<b>5. Conclusiones</b>	<b>36</b>
5.1. Futura investigación . . . . .	37
<b>Bibliografía</b>	<b>37</b>
<b>Apéndice</b>	<b>40</b>
<b>A. Demostraciones Capítulo 3</b>	<b>41</b>
<b>B. Demostraciones Capítulo 4</b>	<b>47</b>

# Índice de Ilustraciones

3.1. Descomposición de la temporada de ventas . . . . .	18
A.1. Ironing mecanismo óptimo . . . . .	43

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

Desde la antigüedad los métodos para realizar transacciones han sido clave tanto para el comercio como para diversas instancias de la sociedad. Debido a la asimetría de información entre los compradores y vendedores numerosos sistemas de ventas, o mecanismos, se han creado para tratar con ello. Uno de los más destacados ha sido el remate descendente comúnmente llamado subasta Holandesa. En este mecanismo, el vendedor empieza a bajar el potencial precio del único producto en venta hasta que alguno de los postores esté dispuesto a pagar el precio actual, llevándose consigo el deseado producto. Una de las grandes ventajas de este remate, en comparación con otras clásicas licitaciones (e.g. sobre cerrado primer precio, sobre cerrado segundo precio), es la rapidez que tiene el procedimiento, es decir, se requiere poco tiempo para efectuar la venta. Aplicaciones importantes de esta subasta ha sido el sistema de ventas de flores en Holanda (Van den Berg *et al.*, 2001), de ahí el nombre del mecanismo. También esta licitación se ha utilizado para la venta de pescado en Israel y la venta de tabaco en Canadá.

Con el devenir de la teoría de juegos, el estudio de dichos mecanismos ha sido formalizado generando importantes preguntas tanto teóricas como relativas a sus implementaciones. Dentro de las primeras, destacan la de entender cómo se comportan los consumidores en diversas instancias, a partir de ello se ha buscado responder temas cruciales como cuáles sistemas son eficientes desde el punto vista social como también desde la mirada del vendedor. Liderados por los trabajos de Vickrey (1961); Myerson (1981), estas preguntas han podido ser respondidas para el caso de que hay un único posible ítem a vender y la distribución de las valoraciones privadas de cada jugador son idénticas.

Con la irrupción de la tecnología, las estructuras de ventas se han desarrollado y novedosos sistemas de licitación han aparecido. Hoy en día es posible apreciar ventas *online* donde el lapso de los tiempos de compras duran varios periodos permitiendo la incorporación de más interesados. Así por ejemplo, la empresa *Mercado Minero*<sup>1</sup> informa al público de una potencial

---

<sup>1</sup><http://www.mercadominero.cl/sitio/home.php?lang=1>.

política de precio hasta fin de temporada para cierto *stock* de camiones; los interesados deberán decidir cuándo comprar enfrentando la disyuntiva entre el riesgo de esperar y la ventaja de pagar a un precio menor. Reafirmando la importancia de estos mecanismos de *pricing*, Einav *et al.* (2013) documentan que eBay ha cambiado sus métodos de ventas, pasando de utilizar remates convencionales a políticas similares a la empresa chilena.

En esta tesis buscaremos entender como se comportan los agentes estratégicos en un modelo inspirado en el ejemplo anterior. Suponiendo que los agentes son *ex-ante* simétricos, nos enfocaremos en tratar de encontrar equilibrios simétricos del juego. En este modelo agregaremos dos variables que serán de información privada para cada jugador: su valoración por llevarse un único objeto y el tiempo en que arriban a la tienda y se informan de la existencia de los productos. Asumiendo que el proceso de llegada es Poisson no homogéneo y que los clientes pueden tener una alta valoración o baja (ley Bernoulli); mostraremos que en el caso de vender un único producto un equilibrio simétrico existe. Más aún, dependiendo de la política de precio, el equilibrio encontrado utilizará estrategias mixtas. En la extensión para valoraciones sobre un conjunto continuo, concluiremos que en caso de existir equilibrio éste podrá ser caracterizado por una ley umbral: para cada valoración existe un tiempo crítico luego del cual todo jugador con dicha valoración compra al llegar a la tienda.

Gracias a la caracterización de los equilibrios, concluiremos que en el caso del modelo Bernoulli, la única opción para que un jugador de baja valoración reciba el producto es que no haya arribado a la tienda ningún consumidor de valoración alta. Esto se resume en que el mecanismo asigna eficientemente. Sin embargo, para el caso continuo la caracterización vía función umbral tendrá como consecuencia que no siempre el jugador con mayor valoración es aquel que recibe el producto.

Para entender el caso de múltiples objetos, analizaremos el caso límite donde todos los jugadores llegan al final de temporada. Considerando que los clientes están interesados en adquirir a lo más un producto encontraremos un equilibrio simétrico ineficiente. Específicamente, para el caso en que existan dos productos a licitar y tres competidores, con valoraciones privadas distribuidas según una ley continua a soporte compacto, encontraremos un equilibrio bayesiano perfecto. La estrategia encontrada confirma la intuición de que los jugadores tienden a aumentar su apuesta cuando pasan de competir por dos objetos contra dos postores versus el escenario en que apuestan por un ítem bajo la amenaza de un solo jugador. Así, existirán instancias donde los competidores restantes apostarán el mismo precio, generando una lotería para adjudicarse el objeto.

Para poder sustentar dicho equilibrio, el juego de la segunda etapa consiste en apostar bajo la misma regla que un remate primer precio si la valoración es menor que cierto umbral, luego de ella todo los jugadores apuestan el precio inicial de venta del segundo ítem. Lo anterior permite equilibrar entre el peligro de que el objeto sea llevado por un adversario con menor valoración (en el sorteo) y el beneficio de llevarse el producto teniendo valoración menor que el otro postor.

Cabe mencionar que la estructura de los juegos a estudiar, al igual que los principales mecanismos estudiados en el área, presenta dos grandes complicaciones para asegurar la existencia de equilibrio. En primer lugar, el hecho de las estrategias no pertenezcan a un conjunto finito. Es de común conocimiento que los principales teoremas de punto fijo son



basados en que los espacios de estrategias sean compactos. En segundo lugar, la discontinuidad que presenta la función de utilidad: si un jugador compra en el mismo tiempo que su competidor, entonces en caso de existir un exceso de demanda, se sorteará el producto entre los interesados. Mas, si uno de ellos se desviara y comprase  $\varepsilon$  antes, entonces evitaría el sorteo obteniendo una ganancia esperada aproximadamente dos veces mayor que en la situación anterior. Luego, dicha discontinuidad presentará problemas para la existencia de la función de mejor respuesta como también para que ésta sea semicontinua superior.

Dado lo anterior, a continuación presentaremos un resumen sobre las principales resultados sobre existencia de equilibrios en juegos similares al que estudiaremos. Como el lector podrá apreciar, dichos teoremas no son simples de aplicar y delimitan la posibilidad de entender el comportamiento en equilibrio de los agentes. Respecto al estado de arte sobre los modelos a estudiar, preferimos dejarlos al comienzo de cada capítulo a modo de introducir los resultados.

## 1.2. Literatura

El estudio de existencia de equilibrios en modelos de información incompleta ha tenido un gran desarrollo en las últimas décadas. Particularmente, en modelos de remates las dos grandes dificultades para aplicar los clásicos puntos fijos son la discontinuidad de la función de utilidad y, en el caso de valoraciones continuas, el hecho de obtener una topología adecuada que respete la compacidad en el espacio de estrategias y a la vez que la función de mejor respuesta<sup>2</sup> de cada jugador sea semicontinua superior.

Uno de los primeros resultados que trabaja con esto corresponde al de Athey (2001), ella concluye que si la función de utilidad cumple la *single crossing property* entonces existe equilibrio. En particular esto implica que si  $\partial_{b,u}U_i(b, u) \geq 0$ , donde  $U_i(b, u)$  corresponde a la utilidad de jugador de valoración  $u$  y que apuesta  $b$ , entonces un equilibrio existe. La técnica de demostración se basa en aproximaciones límites del caso en que el soporte de la distribución de valoraciones es finito.

En el caso de juegos continuos y espacios de estrategias no numerables, Reny y Zamir (2004) extiende el resultado anterior, mostrando que en condiciones más generales, se tiene la existencia de un equilibrio en estrategias puras que además cumplen monotonía. Es decir, en mecanismos como los de remates, a mayor valoración privada mayor es la apuesta en equilibrio. Vale la pena remarcar que, a diferencia del trabajo anterior, el método no pasa por aproximaciones de juegos finitos, sino utiliza un teorema de punto fijo sobre conjuntos retráctiles.

Respecto a juegos discontinuos, Reny (1999); Borelli y Meneghel (2013); Reny (2013) generalizan los resultados anteriores concluyendo que si los espacios de estrategias son compactos, convexos, la función de utilidad  $u_i(s) = \mathbb{E}_u[U_i(s(u), u)]$  quasicóncava y que el juego sea *point secure*, entonces existe un equilibrio del juego<sup>3</sup>.

---

<sup>2</sup>Dado un perfil de estrategia  $s$ , la mejor respuesta del jugador  $i$  corresponde al conjunto de estrategias que maximiza sus ganancias condicional que el resto jugó con  $s_{-i}$ .

<sup>3</sup>Dependiendo de la definición del espacio de estrategias, el equilibrio será en estrategias puras o mixtas.

**Definición 1.1** *El juego se dice que es point secure, si para cada  $s \in S = \prod S_i$  que no es equilibrio de Nash, existe  $\hat{s} \in S$  y una vecindad  $U$  de  $s$  tal que para todo  $z \in U$  existe un jugador  $i$  cumpliendo*

$$u_i(\hat{s}_i, s'_{-i}) > u_i(z) \quad \forall s' \in U .$$

### 1.3. Organización de la tesis

El desarrollo de este trabajo está estructurado de la siguiente manera: En el Capítulo 2 construiremos un modelo que engloba los dos casos que se estudiarán en los siguientes capítulos. Luego en el Capítulo 3 estudiaremos la existencia de equilibrio para el juego dinámico cuando hay un único ítem en venta. En el Capítulo 4 analizaremos el remate descendente con múltiples objetos. Finalmente, en el Capítulo 5 se presentarán las principales conclusiones del trabajos. Las demostraciones técnicas que no entreguen mayor intuición de los resultados son pospuestas al Apéndice.

# Capítulo 2

## El modelo

En esta sección mostraremos un modelo que engloba los escenarios a tratar en los próximos capítulos. Para ello estudiaremos un mecanismo dinámico de *pricing* a tiempo continuo, con horizonte finito y considerando una cantidad aleatoria de jugadores. En primer lugar, daremos las especificaciones del juego, posteriormente señalaremos cual solución de equilibrio se utilizará. Finalmente, se explicará bajo que condiciones en los parámetros del juego se tendrá el modelo del Capítulo 3 y del Capítulo 4.

### 2.1. El juego

Dado un horizonte de ventas  $[0, T]$ , un vendedor se compromete a comienzos de temporada a una política de precios  $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  para vender una cantidad  $K$  de objetos indistinguibles, los cuales no tienen valor para él. De esta manera, si a tiempo  $t$  se encuentran  $k$  objetos sin vender y  $l$  agentes deciden comprar en dicho momento, el vendedor asigna a cada jugador un único ítem con probabilidad  $r_{kl} = \min\{1, \frac{k}{l}\}$ , percibiendo por ello un ingreso igual a  $p(t) \min\{k, l\}$ . Dicho esto, el objetivo es entender cómo se comporta la demanda frente a dicha curva, o equivalentemente, en qué momento deciden comprar los agentes.

Inspirándonos en la literatura de *Revenue Management*, el modelo consta de una cantidad infinita numerable de jugadores que poseen dos tipos<sup>1</sup> privados: el tiempo de llegada y la valoración del objetos.

El tiempo de llegada corresponde al momento en que se enteran de la existencia de los productos restantes, se informan de la política de precios y del historial de ventas. Así, los tiempos factibles de compras serán aquellos posteriores al tiempo de arribo. Matemáticamente, dado un proceso de nacimiento  $\mathcal{N}(t)$ , el tiempo de llegada del jugador  $i$ -ésimo será:

$$\tau_i = \inf_{t \geq 0} \{\mathcal{N}(t) = i\} .$$

---

<sup>1</sup>Proveniente del inglés *type*, se utiliza para referirse a la información privada de los jugador (ver Fudenberg y Tirole (1991)).

En resumidas cuentas, podemos entender el tiempo de nacimiento como un elemento que cada jugador recibe antes de la temporada y que le impone una restricción en los tiempos de adquisición.

La valoración privada del objeto corresponde a la cuantificación de felicidad que tendrá el jugador en caso de obtener un objeto. De esta manera, si el cliente  $i$  valora en  $v_i$  tener un ítem y lo compra en tiempo  $t \geq \tau_i$ , su utilidad será

$$(v_i - p(t))e^{-\mu(t-\tau_i)}, \quad (2.1)$$

donde  $\mu$  corresponde a una tasa de descuento temporal sobre la utilidad que supondremos homogénea entre los jugadores<sup>2</sup>. Notar que  $\mu$  también se puede interpretar como el costo asociado a volver a la tienda para comprar el objeto.

Por razones de intratabilidad, al igual que en Briceño *et al.* (2015); Gershkov *et al.* (2014); Board y Skrzypacz (2015), haremos el siguiente supuesto sobre la distribución de las valoraciones de los jugadores.

**Supuesto 2.1** *La probabilidad de que un jugador tenga valoración  $v$  se distribuye según  $F : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  de manera independiente del tiempo e *i.i.d* entre los jugadores.*

En gran parte de los modelos usados en remates se estudian distribuciones continuas definidas en un intervalo o distribuciones tipo *Bernoulli* (ver Krishna (2009)). De esta manera, nos restringiremos a esta familia de distribuciones.

**Supuesto 2.2** *La densidad  $f$  asociada a  $F$ , puede tomar la forma de una Bernoulli de parámetro  $q$  con soporte  $\{v, V\}$  o una densidad continua en un intervalo  $[v, V]$  satisfaciendo que  $f > 0$ .*

Como ya se mencionó, se considerará como información privada los tiempos de llegadas y las valoraciones de los jugadores, siendo de información común las leyes de dichos procesos. Cabe mencionar que el resto de los elementos, como la política de precios y la cantidad de objetos que restan sin vender son de información pública.

## 2.2. Equilibrio del juego

Siguiendo a Fudenberg y Tirole (1991), la noción de equilibrio ad-hoc para el problema corresponde a la de Equilibrio Bayesiano Perfecto (EBP).

Denotamos por  $H^t$  como la información pública hasta tiempo  $t$ , es decir, corresponde a la información sobre el historial de ventas de los objetos hasta tiempo  $t$ . Bajo la misma idea, definimos  $H = \cup_{t \in [0, T]} H^t$  como el conjunto de todas las historias públicas del juego.

De esta manera, una estrategia de comportamiento será un plan de contingencia que dependiendo de la valoración, del tiempo de nacimiento y del historial de ventas, un comprador

---

<sup>2</sup>Notar que descontar el tiempo desde 0 o desde  $\tau_i$  no afecta la decisión del jugador.

decide con que probabilidad comprar en  $t$ . En otras palabras, una estrategia para el jugador  $i$  es una familia de funciones  $\sigma_i = (\sigma_i^t)_{t \in [0, T]}$  donde  $\sigma_i^t : A \times [0, T] \times H^t \rightarrow \{0, 1\}$  satisfaciendo la siguiente restricción de factibilidad:

- Para todo nacimiento  $\tau_i$  el jugador no puede comprar antes de  $\tau_i$ . Es decir que si  $t < \tau_i$  entonces  $\sigma_i^t(\cdot, \tau_i, \cdot) = 0$ .

De este modo,  $\sigma_i^t(v_i, \tau_i, h^t) = 1$  significa que si el jugador  $i$  tiene valoración  $v_i$ , nace en el momento  $\tau_i$  y hasta tiempo  $t$  ocurre  $h^t$  entonces ejercerá, con probabilidad 1, la opción de compra de un objeto en tiempo  $t$ .

Sea  $S \subseteq \prod_{t \in [0, T]} \{0, 1\}^{A \times [0, T] \times H^t}$ , el espacio de estrategias para los jugadores. Así, extendemos la noción de estrategia a los elementos pertenecientes a  $\Delta S$ , las medidas de probabilidad sobre  $S$ .

**Definición 2.3** *En el caso en que la estrategia  $\sigma_i \in S$ , diremos que  $\sigma_i$  es una estrategia pura. Caso contrario, si  $\sigma_i \in \Delta S \setminus S$  nos referiremos a  $\sigma_i$  como una estrategia mixta (no degenerada).*

La definición de equilibrio dinámico requiere la noción de creencias de cada jugador sobre la cantidad de agentes que comprarán a futuro<sup>3</sup>. De esta forma, para el jugador  $i$  sus creencias  $\alpha_i = (\alpha_i^t)_{t \in [0, T]}$  son una familia de probabilidades tal que  $\alpha_i^t(s)$  corresponde a su estimación de cuantos agentes comprarán un objeto en tiempo  $s \geq t$ , tomando en consideración las estrategias de los jugadores, el tiempo de llegada  $\tau_i$  y la historias públicas hasta antes de  $t$ .

Dada las estrategias de los jugadores  $(\sigma_i)_{i \in \mathbb{N}}$  y una regla de creencias  $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , es posible calcular la medida de probabilidad  $\gamma_i$  de que el jugador  $i$  se lleve un ítem antes de tiempo  $t$ . Con lo anterior, si dicho participante tiene un tiempo de arribo  $\tau_i$ , valoración  $v_i$  y en tiempo  $t$  aún no ha comprado el producto, entonces aconteciendo  $h^t \in H^t$  su utilidad esperada en el juego es:

$$u_i^t(\sigma_i, \sigma_{-i} | \tau_i, v_i, h^t) = \int_{\max\{t, \tau_i\}}^T (v_i - p(s)) e^{-\mu(s - \tau_i)} d\gamma_i(s | \tau_i, v_i, h^t),$$

donde  $\gamma_i(\cdot | h^t)$  es la medida de probabilidad condicional en que ocurrió  $\tau_i, v_i$ , y  $h^t$ .

Finalmente estamos en condición de definir el EBP para este juego. El par  $(\sigma_i^*, \alpha_i^*)_{i \in \mathbb{N}}$  es equilibrio si, cuando es posible, las creencias son calculadas vía la regla de Bayes a partir de las estrategias y la historia pública; y además se cumple que las estrategias son secuencialmente racionales: para todo jugador  $i$ , todo  $(v_i, \tau_i) \in A \times [0, T]^4$ , todo tiempo  $t \in [0, T]$ , toda historia  $h^t \in H$  y toda estrategia  $\sigma_i$  se tiene que:

$$u_i^t(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^* | \tau_i, v_i, h^t) \geq u_i^t(\sigma_i, \sigma_{-i}^* | \tau_i, v_i, h^t).$$

<sup>3</sup>Rigurosamente, el conjunto de creencias corresponden a la presunción sobre los tiempo de nacimientos del resto de los clientes como las valoraciones que éstos tienen. Sin embargo, dicha premisa sólo se utiliza para computar las chances de adquirir un objeto, razón por la cual optamos por cambiar la definición de creencias.

<sup>4</sup>Salvo para un conjunto de medida nula asociado a la medida producto  $F \times \nu$ , donde  $\nu$  corresponde a la medida de Lebesgue.

De esta manera, hemos definido la noción de equilibrio en el modelo general. Notando que los jugadores son ex-ante idénticos, un subconjunto de equilibrios importante a estudiar son los equilibrios simétricos.

**Definición 2.4** *Un equilibrio  $(\sigma_i^*, \alpha_i^*)_{i \in \mathbb{N}}$  se dirá simétrico si para todo jugador  $i$  se tiene que  $\sigma_i^* = \sigma^*$  y  $\alpha_i^* = \alpha^*$ .*

A partir del conocimiento de un equilibrio de juego, se puede simular el comportamiento de los agentes. Un concepto clave para la implementación del mecanismo estudiado, será el de poder cuantificar su eficiencia. Siguiendo la noción definida en Milgrom (2004) para escenarios estáticos, diremos que la asignación será eficiente (ex-pos) si los jugadores que más valoran el objeto son aquellos que lo reciben.

**Definición 2.5** *Para toda realización del juego  $(v_i, \tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$  y equilibrio  $\sigma^*$ , diremos que el mecanismo será eficiente si los jugadores que obtienen los productos son los que tienen mayor valoración, condicional a que su tiempo de llegada sea antes que  $T$ .*

Notemos que dicho concepto sólo incorpora de manera tangencial el segundo tipo de los jugadores, en el próximo capítulo discutiremos la correctitud de esta definición.

En las próximas dos secciones, estudiaremos los casos particulares que se abordarán en este trabajo. Vale la pena notar, que esta compleja noción de EPB se simplificará permitiendo obtener los resultados de esta tesis.

## 2.3. Modelo Dinámico

Este modelo a estudiar en el Capítulo 3, considera el mismo escenario que el modelo general cuando hay un único objeto a vender ( $K = 1$ ). La gran ventaja de suponer un único ítem radica en que el conjunto  $H^t$  es trivial. Por lo tanto, podemos definir la estrategias de comportamiento como una función  $\sigma_i : A \times [0, T] \rightarrow \Delta[0, T]$  tal que para todo  $\tau_i$  y valoración  $v_i$  se cumple que  $\text{supp}(\sigma_i(v_i, \tau)) \subseteq [\tau_i, T]$ , donde  $\text{supp}$  es el operador soporte de una distribución.

Dentro de las estrategias simétricas se destacan aquellas que son simples de entender, éstas son las que se encuentran definidas por una función de *threshold*.

**Definición 2.6** *Una función  $\varphi : [0, T] \rightarrow A$  genera una estrategia simétrica tipo threshold si  $\sigma(v, \tau)$  compra, con probabilidad uno, en  $t$  cuando  $v > \varphi(\tau)$  y en caso contrario, compra una cierta distribución sobre  $\varphi^{-1}(v) \cap [t, T]$ <sup>5</sup>.*

**Nota 2.7** *En el caso en que  $\varphi$  sea decreciente y el modelo de valoraciones sea el continuo, salvo un conjunto de medida nula,  $\varphi^{-1}$  será un singleton o vacío. En este caso, notar que  $\sigma(v, \tau)$  compra, con probabilidad uno en el tiempo  $\max\{\tau, \varphi^{-1}(v)\}$ .*

---

<sup>5</sup>En el caso  $\{\varphi^{-1}(v) \geq \tau\} = \emptyset$ , el jugador con dicha valoración decide no comprar nunca el objeto.

El lector avezado podrá notar que en este escenario la noción de equilibrio puede interpretarse como la de Equilibrio Bayesiano (ver Fudenberg y Tirole (1991)). Debido a que la noción de EBP impone que las creencias sean regidas por la ley de Bayes; en nuestro modelo, esto equivale a computar la probabilidad de que el objeto sea adjudicado a partir de las estrategias del resto, al igual que en los modelos de información incompleta estáticos. Sin embargo, cabe destacar que al persistir una tasa de descuento el juego aún mantiene cierta estructura dinámica. Por lo anteriormente mencionado, en el próximo capítulo utilizaremos la noción bayesiana no dinámica como concepto de equilibrio.

Siguiendo el modelo estudiado en Briceño *et al.* (2015); Board y Skrzypacz (2015)<sup>6</sup>, haremos el siguiente supuesto sobre el proceso de llegadas.

**Supuesto 2.8** *El proceso  $\mathcal{N}(t)$  es un proceso de Poisson no homogéneo de tasa de  $\lambda(t)$ .*

Hay dos razones para dicho supuesto. La primera apunta al hecho de que el proceso de Poisson es el único que cumple la conocida propiedad de la pérdida de memoria (Gallager, 2013). Un proceso con pérdida de memoria es aquel que para todo tiempo la probabilidad de ocurrencia futura es independiente de lo sucedido hasta tiempo  $t$  incluido. Matemáticamente, que para todo tiempos  $t, s$  y llegadas  $m > n$  se cumpla

$$\mathbb{P}[\mathcal{N}(t+s) = m | \mathcal{N}(s) = n] = \mathbb{P}[\mathcal{N}(t+s) - \mathcal{N}(s) = m - n] .$$

Este supuesto permitirá encontrar estrategias que también cumplan con pérdida de memoria, vale decir, que la decisión de compra de un agente es independiente del actuar de los jugadores que llegaron antes que él.

La otra gran ventaja de un modelo Poisson es la propiedad de *filtraje*: la tasa de llegada de agentes con valoración mayor o igual a  $v$  también es un proceso de Poisson no homogéneo de tasa  $(1 - F(v))\lambda(t)$ .

Una observación que simplificará los cálculos en la próxima sección se asocia a la tasa de descuento temporal  $\mu$ . Recordando que  $\alpha(t)$  es la probabilidad de recibir el objeto en tiempo  $t$ , el problema del comprador con valoración  $v_i$  y tiempo de llegada  $\tau_i$  es

$$\max_{t \geq \tau_i} (v_i - p(t))e^{-\mu(t-\tau_i)} \alpha(t \mid \text{el objeto esta disponible en } \tau_i) .$$

Pero notando que el último término equivale a  $\frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau_i)}$ , el problema anterior equivale a resolver

$$\max_{t \geq \tau_i} (v_i - p(t))e^{-\mu t} \alpha(t)$$

el cual es el que utilizaremos en el próximo capítulo.

---

<sup>6</sup>Dichos autores imponen que el proceso tenga pérdida de memoria implicando con esto que el proceso es Poisson no homogéneo.

## 2.4. Modelo de remates de múltiples objetos

En el Capítulo 4 daremos el primer paso para entender la estructura de equilibrio en el caso general cuando  $K > 1$ . Para ello estudiaremos el caso en que el precio de venta se mantiene constante en  $V$  hasta el fin de temporada cuando cae abruptamente hasta  $v$ . A su vez, supondremos que el proceso de nacimiento deja de ser estocástico, específicamente, dado  $n \in \mathbb{N}$  consideraremos el caso en que

$$\mathcal{N}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < T \\ n & \text{si } t = T \end{cases} .$$

La interpretación de juego en este caso pasa a ser la de un remate descendente, tipo subasta Holandesa. En éste, se tiene  $K$  objetos que simultáneamente descienden los precios hasta que un postor decide parar el “reloj” de uno de los productos a un determinado precio, momento en el cual dicho ítem es vendido. El resto de los productos siguen bajando de precio hasta que sean vendidos.

Es claro apreciar que el dinamismo desaparece por lo que sin pérdida de generalidad, se puede asumir que  $\mu = 0$ . Del mismo modo, las variables relacionadas a los tiempos de llegada son obviadas en el juego.

Respecto al conjunto de historias públicas y creencias, éstas son levemente cambiadas. Se entenderá  $H^t$  como el historial de ventas hasta que el precio de los objetos disponibles sea  $p(t)$ . Del mismo modo el conjunto de creencias, calculado vía la regla de Bayes, será la cantidad de agentes que deseen comprar un producto en tiempo  $p(t)$  dado el historial hasta dicho precio.

Si bien la definición formal de subjuego requiere que todos los jugadores conozcan las historias completas del juego, incluyendo los tipos privados, abusaremos del concepto y nos referiremos como subjuego al remate posterior a la venta del primer producto.



# Capítulo 3

## Análisis de Equilibrio Dinámico

En esta sección mostraremos, bajo ciertos supuestos sobre la función de precios, la existencia de un equilibrio simétrico para el modelo dinámico estudiado en la Sección 2.3 del Capítulo 2 cuando las valoraciones se distribuyen según una ley Bernoulli. Concluiremos que dependiendo de la política de precios, el equilibrio podrá utilizar estrategias mixtas no degeneradas, vale decir, para ciertos tiempos de llegadas la gente comprará acorde a una distribución en el tiempo. Respecto al caso continuo, bajo el supuesto de existencia de equilibrio concluiremos que las estrategias se podrán caracterizar por una función de threshold.

A continuación haremos un resumen del estado del arte en el tema. Posteriormente, demostraremos nuestro resultado para el caso discreto, dejando para el final el análisis del caso continuo.

### 3.1. Literatura

Los tres aspectos económicos claves a tratar en este modelo corresponden a la incertidumbre de la valoración de los jugadores, la incertidumbre sobre los tiempos de llegadas y el aspecto dinámico del juego.

Respecto al primer punto, en escenarios estáticos dicho tema ha sido estudiado en los últimos 30 años. Señalamos los libros de Milgrom (2004); Krishna (2009) como fuentes que resumen los principales resultados. Entre ellos destacan un análisis a cabalidad de los equilibrios para diversos mecanismos, también la caracterización de los mecanismos óptimos, visto desde el punto de vista del vendedor y de la sociedad.

Sobre la incertidumbre en el número de jugadores para el caso estático, según nuestro conocimiento, el primer estudio fue realizado por McAfee y McMillan (1987). Ellos analizan un remate a primer precio y concluyen que bajo aversión al riesgo, los jugadores elevan sus apuestas respecto al caso en que conociesen el número de jugadores; mas en el caso de utilidades lineales afín, los autores concluyen que las estrategias de equilibrio y el remate óptimo no cambian respecto al caso de información completa. Posteriormente, Levin y Smith (1994)

estudian un modelo en donde los agentes deben decidir si participar o no en un mecanismo con costo de entrada; los autores prueban que la decisión óptima ocurre en estrategias mixtas generando incertidumbre en el número de postores. Ellos muestran que el mecanismo óptimo es afectado por esta decisión de entrada, aumentando los beneficios del vendedor. En los últimos años, Levin y Ozdenoren (2004); Haviv y Milchtaich (2012) han estudiado remates con un número estocástico de jugadores para diversos escenarios e imponiendo restricciones en el presupuesto de los postores.

Respecto al área de mecanismos dinámicos, Pavan *et al.* (2014); Athey y Segal (2013) estudian mecanismos dinámicos óptimos, desde el punto de vista del vendedor y de la sociedad respectivamente, además de considerar poder de compromiso por parte del vendedor y una cantidad finita de jugadores que se enfrentan en infinitos periodos. Inspirándose en la técnica de Myerson (1981), ellos restringen su atención a mecanismos donde los jugadores revelan sus tipos (principio de la revelación), de esta manera el estudio del comportamiento de los jugadores pasa a ser trivial.

Por otro lado, Gershkov *et al.* (2014); Board y Skrzypacz (2015) estudian un modelo similar al nuestro donde existe incertidumbre en el número de jugadores y una cantidad finita de objetos a repartir; nuevamente utilizando el principio de la revelación y suponiendo compromiso del vendedor, caracterizan el mecanismo que maximiza sus ingresos. Éste consta de una política de precios (con un equilibrio de threshold asociado que es constante) más un remate a fin de temporada en caso de que el objeto aún permanezca en bodega.

Respecto a mecanismos dinámicos que se restringen a políticas de pricing, éstos han sido estudiados arduamente tanto en Economía como en el área de *Revenue Management*. Wang (1993) compara la utilidad entre realizar un remate a fin de temporada versus el de proponer un política de precio, considerando en el último caso miopía de los clientes (sólo pueden comprar cuando llegan a la tienda). Suponiendo un proceso de llegadas de Poisson e inexistencia de descuento temporal, el autor compara la utilidad esperada del vendedor concluyendo que cuando la dispersión de la ley  $F$ , asociada a las valoraciones privadas, sobrepasa un umbral es preferible el remate que un mecanismo de pricing.

En la última década Aviv y Pazgal (2008) y luego Elmaghraby *et al.* (2008); Correa *et al.* (2013) quitan la asunción de miopía de parte de los clientes, convergiendo así, a un modelo similar al nuestro. Destaca el hecho de que dichos autores permiten un inventario superior a la unidad. Sin embargo, ellos suponen la fuerte de restricción de que la función de precios es constante salvo una cantidad finitas de tiempos. Finalmente, Su (2007) estudia por primera vez un modelo de pricing continuo pero con el costo de suponer llegadas determinísticas de los jugadores y sin poseer una tasa de descuento temporal.

## 3.2. Modelo Bernoulli

En esta sección mostraremos la existencia de equilibrio simétrico para una gran familia de funciones de precio cuando la distribución de las valoraciones es una Bernoulli, esto es, que con probabilidad  $q$  el jugador valora en  $V$  el objeto y con probabilidad  $1 - q$  lo aprecia en  $v$ .

## Restricciones sobre la política de precio

Para asegurar existencia de equilibrio supondremos que la función de precio cumple las siguientes propiedades técnicas.

**Supuesto 3.1** *La función de precio cumple las siguientes propiedades:*

1.  $p(t)$  es continua en  $[0, T)$ .
2. Para todo tiempo  $t$  se tiene  $p(t) \geq v$ .
3.  $\lim_{t \rightarrow T^-} p(t) \in [v, b^*]$ , donde  $b^* = V - \frac{(V-v)(1-e^{-\int_0^T (1-q)\lambda(t)dt})}{\int_0^T (1-q)\lambda(t)dt}$ .
4.  $p(T) = v$ .

La propiedad uno permite evitar sorteos en  $[0, T)$ , es decir, en equilibrio no puede ocurrir que dos personas decidan comprar en  $t < T$ , pues al menos una de ellas debió nacer antes de  $t$  (casi seguramente) y por la continuidad de  $p$ , comprar en  $t - \varepsilon$  le entregará beneficios estrictamente mayores (evitará sorteo). La segunda restricción se debe a que, naturalmente, el vendedor no tiene interés en vender el producto bajo  $v$ , además simplifica el análisis estratégico pues los jugadores de tipo  $v$  no tienen incentivos en esperar para comprar.

Respecto a la restricción tres, el hecho de imponer que la discontinuidad en  $T$  no sea mayor que  $b^*$ , implica que un jugador con valoración  $V$  prefiere evitar un sorteo compitiendo contra jugadores  $v$  en tiempo  $T$ . La siguiente proposición da cuenta de ello.

**Proposición 3.2** *En tiempo  $T$ , el precio  $b^*$  es aquel que deja indiferente a un jugador de tipo  $V$  en comprar, con probabilidad uno, el objeto o el de participar en un sorteo contra una cantidad incierta de competidores de valoración  $v$ .*

DEMOSTRACIÓN. Ver Apéndice A. □

**Nota 3.3** *Notar que lo anterior equivale a que  $b^*$  es aquel que deja indiferente al jugador  $V$  entre las dos opciones del siguiente mecanismo: una subasta segundo precio, con precio de reserva  $b$  y en caso que no se venda el ítem, se asigna aleatoriamente a alguien cobrando un precio de  $v$ .*

Para poder entender de mejor manera la restricción tres, el siguiente lema nos caracteriza el mejor mecanismo que se puede hacer al final de temporada, considerando que antes de  $T$  no ha ocurrido nada <sup>1</sup>.

**Lema 3.4** *El mecanismo a fin de temporada que maximiza las ganancias del vendedor consiste en:*

- Si  $qV > v$ , entonces el mecanismo óptimo se implementa vendiendo a precio  $V$ .
- Si  $qV \leq v$ , entonces el mecanismo óptimo consiste en un remate segundo precio con

---

<sup>1</sup>Para ser más explícito, se refiere al mejor mecanismo a tiempo  $T$  considerando que el precio hasta antes de  $T$  era estrictamente mayor que  $V$ .

precio de reserva  $b^*$ . Y en caso de que nadie participe en dicho sorteo, se vende el objeto a precio  $v$ .

DEMOSTRACIÓN. La prueba completa se realiza en el Apéndice A.

Esta es basada en dos resultados cruciales. McAfee y McMillan (1987) concluyen que cuando las utilidades de los jugadores son lineales afín (como en este caso), informar sobre la cantidad de competidores no afecta a la estructura del mecanismo óptimo. Así, podemos considerar que los jugadores conocen el número de competidores, luego aplicar el resultado de Skreta (2006) el cual señala que la asignación óptima consiste en tomar límite ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ) sobre la asignación *myersoniana* en la siguiente familia de distribuciones a soporte en  $[v, V]$ :

$$F^\varepsilon(x) = \begin{cases} \left(\frac{1-q-\varepsilon}{\varepsilon} - 1\right)x & \text{si } x \in [v, v + \varepsilon] \\ \frac{\varepsilon}{V-v+2\varepsilon}(x - (V - \varepsilon)) + 1 - q & \text{si } x \in (v + \varepsilon, V - \varepsilon) \text{ ,} \\ \frac{q}{\varepsilon}(x - V) + 1 & \text{si } x \in [V - \varepsilon, V] \end{cases}$$

y por último tomar esperanza sobre la cantidad de jugadores.

Como se muestra en el apéndice, la valoración virtual  $c^\varepsilon(x) = x - \frac{1-F^\varepsilon(x)}{f^\varepsilon(x)}$  no es monótona, por tanto es necesario utilizar la técnica de *ironing* para encontrar el mecanismo óptimo.

□

Notemos que el resultado es natural: si hay pocas posibilidades de que hayan jugadores tipo  $v$  entonces lo mejor es quitar el excedente a los jugadores (fijando el precio en  $V$ ). Por otro lado, si con alta probabilidad se encontrarán jugadores de tipo  $v$ , el máximo excedente que se puede aprovechar de los jugadores de valoración  $V$  sin que se hagan pasar por jugadores  $v$  es hacer el remate segundo precio con precio de reserva  $b^*$ . Vale pena remarcar que cuando  $qV \leq v$ , se tiene que el mecanismo es también eficiente: el producto es siempre asignado al jugador que mayor lo valora. Es sabido que en el escenario clásico (e.g. valoraciones distribuidas uniformemente) el mecanismo óptimo no es eficiente; el hecho de tener que planchar las valoraciones virtuales permite, en este caso, que no exista *trade-off* entre rentabilidad y eficiencia.

Finalmente, la última restricción simplemente asegura que se considerará a los jugadores con tipo  $v$ . Sin embargo, el lector podrá notar que nuestro análisis permite el caso en que  $p(T) \in (v, V]$ .

## Construcción de equilibrio simétrico

Dado los requerimientos técnicos de la función de precio estamos en condiciones de citar el principal teorema de la sección.

**Teorema 3.5** *Bajo el Supuesto 3.1 sobre la política de precios, existe un equilibrio simétrico del juego.*

Antes de comenzar la demostración, notemos que va a ser fundamental utilizar estrategias mixtas. Intuitivamente, si para cierto tiempo  $t$  la función de precios cae fuertemente, entonces un jugador  $V$  que llegue en ese momento a la tienda le convendrá esperar hasta  $s > t$  para comprar, implicando que los jugadores  $V$  que lleguen en  $(t, s)$  (que ocurre con probabilidad positiva) también comprarán en  $s$ . Esto significa que con probabilidad positiva habrá un sorteo en tiempo  $s$ . Así, por la continuidad de  $p$ , el jugador que llegó en  $t$  obtendría una ganancia estrictamente mayor si comprara en  $s - \varepsilon$  con  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, contradiciendo el potencial equilibrio. Vemos entonces que la forma de evitar estos sorteos será la de jugar con una cierta distribución en el tiempo de modo de suavizar los posibles saltos causados por los sorteos.

De esta manera, podemos interpretar el juego como la lucha de dos fuerzas: la de asegurarse el objeto comprando inmediatamente al llegar a la tienda, o la de esperar por cierto tiempo “compitiendo” contra los otros jugadores. Lo anterior se puede interpretar como una versión novedosa del afamado *war of attrition*. En dicho modelo, dos jugadores eligen su respectivo tiempo de permanencia en la batalla (el cual es costoso) y gana aquel que dura más tiempo<sup>2</sup>, Milgrom y Weber (1985) muestran que el equilibrio ocurre en estrategias mixtas. De esta misma forma, en nuestro juego los jugadores buscan esperar lo más posible tomando como costo el riesgo de perder. Así, cuando la política de precios es tal que incentiva que los jugadores demoren su compra, es natural observar la aparición de estrategias mixtas. Para completar lo anterior, Hendricks *et al.* (1988) muestran que el resultado de Milgrom y Weber (1985) se extiende de manera natural al caso dinámico.

Para la construcción de las estrategias, veamos que podemos suponer que si  $t < T$  entonces  $p(t) > v$ . En otras palabras, supongamos que si  $p$  cumple dicha propiedad entonces podremos construir un equilibrio para el caso general. En efecto, sea  $t_1 < T$  el primer tiempo tal que  $p(t_1) = v$  (existe por continuidad de  $p$ ), definiendo las estrategias de los jugadores que llegan en  $t < t_1$  como las estrategias de equilibrio para el juego reducido (cuando el fin de temporada es  $t_1$ ), se tiene que dichos clientes no obtienen ganancias desviándose a  $s > t_1$ : dada las estrategias del resto, la única forma de que el objeto esté disponible en  $s$  es que nadie haya llegado hasta tiempo  $t_1$ , pero como  $p(s) \geq p(t_1)$  se desprende que la utilidad esperada de todo jugador en  $t_1$  es mayor o igual que en  $s$ ; se concluye que jugadores llegando hasta tiempo  $t_1$  no tienen incentivos en desviarse. Luego, usando la pérdida de memoria del proceso de llegadas, en el caso de que el objeto siga disponible en  $t > t_1$ , solamente implicará que nadie llegó. Por lo anterior, podemos hacer una traslación temporal del juego, cambiando la función de precios por  $g(t) = p(t + t_1)$  y, realizando el mismo análisis anterior, encontraremos estrategias de equilibrio para jugadores que llegan entre  $(t_1, t_2]$ , con  $t_2$  el siguiente momento donde  $p(t_2) = v$ . Procediendo iterativamente se tendrá, por construcción, que dichas estrategias serán equilibrios del juego general.

En segundo lugar, notemos que en equilibrio todo jugador de tipo  $V$  posee utilidad positiva (comprando en tiempo  $T$  le entrega  $V - v$  si es que nadie más llega a la tienda), con esto concluimos que el equilibrio asociado a una política  $p(t)$  es el mismo que aquel asociado a  $g(t) = \min\{p(t), V\}$ .

Estos dos últimos párrafos, nos permiten restringir el Teorema 3.5. a políticas de precio

---

<sup>2</sup>Notar que el modelo es equivalente a un subasta todos pagan

$p : [0, T) \rightarrow (v, V]$  con  $p(T) = v$ . Cabe destacar que en este escenario, independiente del tiempo de llegada a la tienda, todo cliente con tipo  $v$  comprará con probabilidad uno en  $T$ . Esto se resume en que el siguiente teorema equivale a resolver el principal resultado de la sección.

**Teorema 3.6** *Sea  $p(t)$  una política de precios tal que para todo  $t \in [0, T)$  se tiene que  $p(t) \in (v, V]$  y cumple las propiedades enunciadas en el Supuesto 3.1. Entonces existe una estrategia simétrica para los jugadores de tipo  $V$  que es equilibrio del juego general.*

Para resolver el trade-off entre esperar un precio más bajo y el riesgo de no obtener el ítem, separamos la temporada en dos conjuntos disjuntos. Uno donde los agentes compran inmediatamente al llegar y el otro donde utilizan estrategias mixtas. Específicamente, dividimos los posibles tiempos de llegadas  $[0, T]$  en una familia de intervalos donde, dependiendo del tiempo de nacimiento, un jugador compra al llegar y en otras jugará estrategias mixtas sobre dicho intervalo, el cual llamaremos *mixing interval*.

Para encontrar las estrategias mixtas en los mixing interval  $(t_1, t_2)$ , veremos que un paso fundamental es considerar que la función  $t \rightarrow (V - p(t))e^{-\mu t}$  es creciente, teniendo así que planchar la función de precios en caso de que lo anterior no se cumpla. En segundo lugar, impondremos que el equilibrio simétrico se encuentre definido a partir de una distribución  $H : [t_1, t_2] \rightarrow [0, 1]$ , donde un jugador llegando en tiempo  $t$  comprará con una distribución  $H_t$  correspondiente a la ley condicional a partir de  $H$ . A partir de las condiciones necesarias de equilibrio, particularmente que el jugador compre sobre todo el intervalo, caracterizamos  $H$  vía una ecuación diferencial la cual, finalmente, cumplirá las propiedades deseadas para que sea equilibrio.

En resumidas cuentas, la técnica de construcción consta de una subdivisión del tiempo de modo tal que los jugadores sólo compiten con potenciales clientes que lleguen en su mismo intervalo. Con esto buscaremos estrategias que eliminen los desvíos dentro del mismo intervalo, posteriormente chequearemos que con dichas estrategias no existen desvíos a lo largo de la temporada.

Para facilitar la comprensión de la construcción de las estrategias supondremos que  $p$  es continua en  $[0, T]$  y al momento de la demostración del Teorema 3.6 mostraremos que la estrategia obtenida también es equilibrio cuando  $p$  posee un salto menor a  $b^* - v$  en  $T$ .

## Descomposición temporal

Ahora procederemos a descomponer el intervalo  $[0, T]$  en una familia de subintervalos.

Dada un función  $p : [0, T) \rightarrow (v, V)$  tal que  $p(T) \in [v, b^*]$ , definiendo para  $t \in [0, T]$  el promedio de llegadas hasta tiempo  $t$  de los jugadores tipo  $V$  como  $m(t) = \int_0^t q\lambda(x)dx$ , definimos el conjunto  $I \subseteq [0, T]$ :

$$I = \left\{ t \in [0, T] : t \in \arg \max_{s \in [t, T]} (V - p(s))e^{-(\mu s + m(s))} \right\}. \quad (3.1)$$

En la construcción del equilibrio, los clientes que llegan en  $I$  compran inmediatamente al

arribar a la tienda. En lo que sigue definimos

$$t_* = \min \left\{ t \in [0, T] : t \in \arg \max_{s \in [0, T]} (V - p(s))e^{-(\mu s + m(s))} \right\} \quad (3.2)$$

$$t_0 = \min \left\{ t \in [0, t_*] : (V - p(t))e^{-\mu t} = (V - p(t_*))e^{-(\mu t_* + m(t_*))} \right\}. \quad (3.3)$$

**Lema 3.7** *Los tiempos  $t_*$  y  $t_0$  están bien definidos. Más aún,  $t_* = 0$  si y sólo si  $t_0 = 0$ .*

DEMOSTRACIÓN. Ver Apéndice A. □

A modo de simplificar la notación futura, dada ciertas estrategias de los jugadores y recordando que  $\alpha(t)$  corresponde a la probabilidad de que el objeto este disponible en tiempo  $t$ , definimos

$$U(t) = (V - p(t))e^{-\mu t} \alpha(t),$$

la utilidad esperada de un jugador  $V$  dada las estrategias del resto.

Respecto a los compradores que lleguen en  $[0, t_*]$ , ellos usarán una estrategia con soporte en  $(t_0, t_*)$ . Notemos que bajo ningún punto de vista, un jugador compraría en tiempo  $t < t_0$ , pues  $U(t) \leq (V - p(t))e^{-\mu t} < (V - p(t_*))e^{-(\mu t_* + m(t_*))} \leq U(t_*)$ . Claramente en  $t = 0$  la desigualdad es cierta (sino  $t_* = 0$ ), luego el primer tiempo en que se alcance la igualdad es por definición  $t_0$ .

Como veremos en el Lema 3.12, lo que resta de intervalo  $[0, T]$  se puede descomponer en una familia de intervalos abiertos  $(t_1, t_2)$ , tal que

$$t_2 = \min \left\{ t \in [0, T] : t \in \arg \max_{s \in (t_1, T]} (V - p(s))e^{-(\mu s + m(s))} \right\}, \quad (3.4)$$

y  $t_1$  es el mayor tiempo  $t < t_2$  que cumple

$$(V - p(t_1))e^{-(\mu t_1 + m(t_1))} = (V - p(t_2))e^{-(\mu t_2 + m(t_2))}. \quad (3.5)$$

Así, los jugadores que lleguen en  $(t_1, t_2)$  comprarán en el mismo intervalo con una estrategia mixta definida en la siguiente sección. Además es relevante mencionar que para  $t_1 < t < t_2$  se tiene que  $(V - p(t))e^{-(\mu t + m(t))} < (V - p(t_2))e^{-(\mu t_2 + m(t_2))}$ , lo que permitirá encontrar una distribución que deje indiferente a los clientes sobre dicho intervalo. Como ya se mencionó anteriormente, dichos conjuntos los denotaremos por mixing interval.

Concretamente, en la próxima sección probaremos que todo mixing interval  $(t_1, t_2)$  admite una distribución  $H$  con soporte en  $[t_1, t_2]$ , tal que los clientes que lleguen en  $t \in (t_1, t_2)$  comprarán de manera estocástica según una ley  $H_t$ , correspondiente a la distribución condicional de  $H$  en  $[t, t_2]$ . Lo anterior se resume en que, dependiendo del tiempo de llegada el equilibrio será de la siguiente manera (ver Figura 3.1):

1. Jugadores llegando en  $I$ , compran con probabilidad uno al momento de llegar a la tienda.
2. Jugadores llegando en  $t \in [0, t_0]$  usan una estrategia mixta de ley  $H$  sobre el mixing interval  $(t_0, t_*)$ .

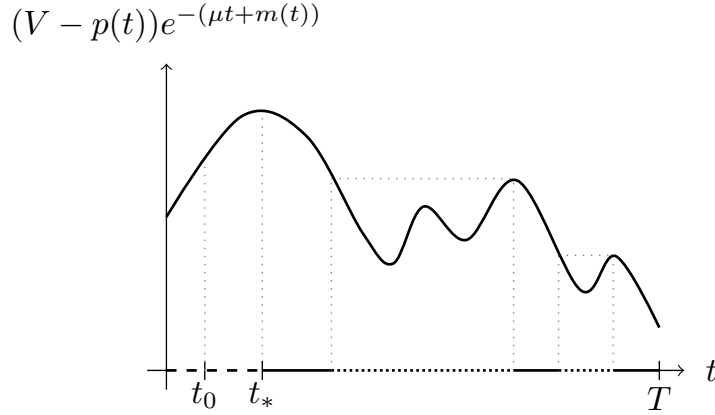


Figura 3.1: La temporada  $[0, T]$  descompuesta en tres tipos intervalos. Jugadores llegando en  $I$  (línea continua) compran inmediatamente. Clientes que llegan en los tiempos punteados compran con estrategia mixta. Por último, aquellos que llegan en el primer intervalo (línea segmentada) compran con estrategias mixtas en  $(t_0, t_*)$

3. Jugadores llegando en  $t \in [t_0, t_*]$  usan una estrategia mixta de ley  $H_t$ , correspondiente a la ley condicional generada por la distribución  $H$  sobre el mixing interval  $(t_0, t_*)$ .
4. Jugadores llegando en  $t \in (t_1, t_2)$  usan una estrategia mixta de ley  $H_t$ , correspondiente a la ley condicional generada por la distribución  $H$  sobre el mixing interval  $(t_1, t_2)$ .

Para terminar la sección, el lector podrá notar una especie de asimetría entre el primer intervalo  $[0, t_*]$  respecto al resto de los mixing interval  $(t_1, t_2)$ . La razón de que no ocurra un tiempo de espera en el restos de los mixing interval, a diferencia de  $[0, t_0]$ , se debe a que el tiempo  $t_1$  es un tiempo máximo de compras ( $t_1 \in I$ ), a diferencia del inicio de temporada. Intuitivamente, si a comienzo de temporada los precios son extremadamente altos no habrá forma de generar incentivos para que se compre ahí.

## Estrategias en un mixing interval

En esta sección definimos las estrategias de equilibrio cuando los jugadores llegan en un mixing interval  $(t_1, t_2)$  con  $t_1$  y  $t_2$  cumpliendo (3.4) y (3.5), respectivamente. Para esto, aislamos  $(t_1, t_2)$  suponiendo que nadie ha comprado hasta  $t_1$ , lo que es consistente con la partición del horizonte de tiempo  $T$ . Por simplicidad asumiremos en una primera etapa que la política  $p$  es tal que la función

$$g_p(t) := (V - p(t))e^{-\mu t}$$

es creciente. Al final de la sección consideramos el caso de una función de precios general.

El siguiente lema permitirá una descripción crucial de la distribución. Para ello impondremos que, en caso de que el objeto no se haya vendido en tiempo  $t$ , la distribución de un jugador que llega en dicho momento es la misma que la de un jugador que llegó antes (dentro del mixing interval) y aún no ha comprado el objeto.



**Lema 3.8** Sea  $H$  una distribución continua sobre  $[t_1, t_2]$ . Suponiendo que los clientes que llegan en tiempo  $t \in (t_1, t_2)$  compran con una ley igual a la distribución condicional de  $H$ , entonces la probabilidad de que el ítem este disponible en tiempo  $t \in [t_1, t_2]$  esta dado por

$$\alpha(t) = \exp \left( -m(t) + (1 - H(t)) \int_{t_1}^t \frac{q\lambda(x)dx}{1 - H(x)} \right).$$

DEMOSTRACIÓN. Ver Apéndice A. □

La naturaleza de las estrategias mixtas nos dice que todo jugador debe quedar indiferente comprando en cualquier parte del soporte de su distribución. Utilizando lo anterior, el Lema 3.9 permitirá encontrar, de manera explícita, las estrategias de los jugadores llegando en un mixing interval. Específicamente, encontraremos un  $K > 0$  de modo que la función  $H(t)$

$$H(t) = 1 - \frac{\ln \left( \frac{g_p(t_1)}{g_p(t)} \right) + m(t) - m(t_1)}{K \exp \left( - \int_t^{(t_1+t_2)/2} \frac{q\lambda(x)dx}{\ln \left( \frac{g_p(t_1)}{g_p(x)} \right) + m(x) - m(t_1)} \right)}, \quad (3.6)$$

genere las estrategias de equilibrios. Así, mostrando que  $H(t)$  cumple las propiedades de distribución, tendremos que en el equilibrio los clientes comprarán con una distribución condicional

$$H_t(s) = 1 - \exp \left( - \int_t^s \frac{q\lambda(x)dx}{\ln \left( \frac{g_p(t_1)}{g_p(x)} \right) + m(x) - m(t_1)} \right) \frac{\ln \left( \frac{g_p(t_1)}{g_p(s)} \right) + m(s) - m(t_1)}{\ln \left( \frac{g_p(t_1)}{g_p(t)} \right) + m(t) - m(t_1)}, \quad (3.7)$$

cumpliendo que la utilidad esperada  $U(t)$  es constante dentro del intervalo  $[t_1, t_2]$ .

**Lema 3.9** Sea  $p(t)$  una función de precios tal que  $g_p(t)$  es creciente. Entonces existe un  $K > 0$  tal que  $H$ , definido en (3.6), es creciente, continua y cumple que  $H(t_2) = 1$ . Además, si todos los jugadores utilizan las estrategias  $(H_t)_{t \in (t_1, t_2)}$ , entonces las familias de distribuciones definidas en (3.7), satisfacen que  $U(t) = U(t_1)$  para todo  $t \in [t_1, t_2]$ .

DEMOSTRACIÓN. Ver Apéndice A. □

La siguiente nota será clave para poder extender el análisis cuando  $g_p(t)$  no necesariamente es monótono.

**Nota 3.10** A partir de (3.6) vemos que  $H(t)$  permanece constante en un subconjunto de  $(t_1, t_2)$  si y sólo si  $g_p(t)$  permanece constante en dicho subconjunto.

Lo anterior inspira a aplanar la función  $g_p(t)$  de modo de obtener la monotonía deseada. Para esto definimos sobre  $(t_1, t_2)$  la función de precios planchada

$$\bar{p}(t) := V + \inf_{\tau \in (t_1, t)} \{e^{\mu(t-\tau)}(p(\tau) - V)\} = V - e^{\mu t} \sup_{\tau \in (t_1, t)} g_p(\tau). \quad (3.8)$$

Intuitivamente,  $\bar{p}$  es la función más grande por debajo de  $p$  tal que  $g_{\bar{p}}(t) = \sup_{\tau \in (t_1, t)} g_p(\tau)$  es creciente. Es claro ver que en caso de que  $g_p$  decrezca, se tendrá que  $g_{\bar{p}}$  permanecerá constante. Más aún, en todo intervalo de tiempo tal que  $g_{\bar{p}} \neq g_p$  se tendrá que  $g_{\bar{p}}$  también permanecerá constante.

Lo anterior nos hace definir la distribución,  $\bar{H}$ , correspondiente al mixing interval  $(t_1, t_2)$  como en (3.6) pero usando  $g_{\bar{p}}$  en vez  $g_p$ . Análogamente, para  $t \in (t_1, t_2)$  definimos la estrategia  $\bar{H}_t$ , como la distribución condicional  $\bar{H}$  descrita en (3.7).

Notar que  $\bar{H}_t$  es efectivamente una distribución. Para ver esto, basta observar que  $p(t) = \bar{p}(t)$  si y sólo si  $g_p(t) = g_{\bar{p}}(t)$  lo que implica que el conjunto  $A = \{t \in (t_1, t_2) \mid \bar{p}(t) \neq p(t)\}$  es igual al conjunto de los tiempos donde  $g_{\bar{p}}(\cdot)$  permanece constante. Así, usando la Nota 3.10 vemos que el soporte de  $\bar{H}$  es  $[t_1, t_2] \setminus A$  y por lo tanto  $\bar{H}_t$  es una función creciente. Además gracias al Lema 3.8, tenemos que los tiempos donde  $\alpha(t)$  permanece constante es justamente el conjunto  $A$ .

**Nota 3.11** *Respecto al mixing interval  $(t_0, t_*)$ , se realiza el mismo análisis que en  $(t_1, t_2)$  con la salvedad de que al momento de calcular  $\alpha(t)$  (ver Lema 3.8), hay que considerar que los clientes que llegan en  $[0, t_0]$  compran sobre  $(t_0, t_*)$  según la ley  $H$ .*

## Chequear que las estrategias son equilibrio

A partir de la construcción anterior, estamos en condiciones de demostrar el Teorema 3.6 y por ende el Teorema 3.5. Para ello recordemos como son las estrategias de equilibrio en función del tiempo de llegada.

1. Jugadores llegando en  $I$ , compran con probabilidad uno al momento de llegar a la tienda.
2. Jugadores llegando en  $t \in [0, t_0]$  usan una estrategia mixta de ley  $\bar{H}$  sobre el mixing interval  $(t_0, t_*)$ , construidas usando (3.6), (3.8) y la Nota 3.11.
3. Jugadores llegando en  $t \in [t_0, t_*]$  usan una estrategia mixta de ley  $\bar{H}_t$ , correspondiente a la ley condicional generada por la distribución  $\bar{H}$  sobre el mixing interval  $(t_0, t_*)$ , construida usando (3.6), (3.8) y la Nota 3.11.
4. Jugadores llegando en  $t \in (t_1, t_2)$  usan una estrategia mixta de ley  $\bar{H}_t$ , correspondiente a la ley condicional generada por la distribución  $\bar{H}$  sobre el mixing interval  $(t_1, t_2)$ , construida usando (3.6) y (3.8).

Antes de la demostración de inexistencia de desvíos rentables, es importante probar que la segmentación temporal utilizada, cubre efectivamente la temporada completa.

**Lema 3.12** *La temporada  $[0, T]$  se encuentra fragmentada en el conjunto  $I$ , el intervalo  $[0, t_*)$ , y la familia de mixing interval de la forma  $(t_1, t_2)$ , definidos por las ecuaciones (3.1)–(3.5). Así, las estrategias construidas están bien definidas para todo tiempo  $t \in [0, T]$ .*

DEMOSTRACIÓN. Ver Apéndice A. □

Abusando levemente la notación, denotaremos la estrategia construidas a tiempo  $t$  por  $H_t$ . Así mostraremos que las estrategias  $\sigma_t^*(V, \tau) = H_\tau$  y  $\sigma^*(v, \tau) = T$  (comprar sólo en tiempo  $T$ ) son un equilibrio del juego.

DEMOSTRACIÓN TEOREMA 3.6. Antes que nada, notemos que trivialmente los jugadores con tipo  $v$  no poseen ningún desvío que les otorgue un mayor beneficio.

En segundo lugar, mostremos que si la estrategias  $H_t$  definidas para el caso cuando  $p$  es continua son equilibrio, entonces también lo serán cuando  $p$  presenta una discontinuidad en  $T$ . La razón se debe a que, si un cliente llega en  $t < T$  y compra según  $H_t$  su utilidad es mayor o igual a  $(V - p(T^-))e^{-(\mu T + m(T))}$  y como, por hipótesis,  $p(T^-) \leq V - \frac{(V-v)(1-e^{-\int_0^T (1-q)\lambda(t)dt})}{\int_0^T q\lambda(t)dt}$ , concluimos que participar en el sorteo le entrega una utilidad esperada menor. Con esto, sólo resta probar que para un jugador llegando  $t < T$  no le conviene comprar en otro tiempo  $s < T$  fuera del soporte  $H_t$ .

Por contradicción, asumamos que existe un tiempo  $t < T$  y  $z \geq t$  tal que  $z$  no está en el soporte de  $H_t$  y reporta una mejor utilidad que seguir  $H_t$ , i.e.,  $U(z) > U(s)$  con  $s$  en el soporte de  $H_t$ .

Si  $t \in I$ ,  $H_t$  consiste en comprar con probabilidad uno al llegar a la tienda. Luego por definición de  $I$ , tenemos que  $(V - p(t))e^{-(\mu t + m(t))} \geq (V - p(t_1))e^{-(\mu z + m(t_1))} \geq U(z)$ , donde  $t_1 = \max\{s \leq z \mid s \in I\}$ . Donde la primera desigualdad es simplemente recalcar que  $t_1 \geq t$  y la segunda desigualdad se tiene por la construcción de las estrategias  $H_t$ .

En el segundo caso posible, si  $t$  pertenece a un mixing interval de la forma  $(t_1, t_2)$ , tenemos que la utilidad esperada siguiendo la estrategia  $H_t$  es  $U(t_1)$ . Si  $z \in (t_1, t_2]$ , entonces por construcción vemos que  $U(z) \leq U(t_1)$  y gracias al Lema 3.9 y la Nota 3.10 vemos que la igualdad se tiene sólo cuando  $p(z) = \bar{p}(z)$ . En caso contrario, observar que  $g_{\bar{p}}(z) > g_p(z)$ , implicando que la desigualdad es estricta. Ahora el caso en que  $z > t_2$ , un análisis similar al párrafo anterior nos lleva a que  $U(t_1) \geq U(t_2) \geq U(z)$ , prohibiendo que el desvío sea rentable.

Finalmente, falta analizar el caso en que  $t \in [0, t_*]$  con  $t_* > 0$ . Si  $z \geq t_0$ , el caso es idéntico al estudiado al anterior. Si por el contrario  $z < t_0$ , bajo el supuesto de que el desvío es rentable, tendríamos que  $U(z) > U(t_0)$ . Pero por otro lado, como  $t_* > 0$  tenemos que  $U(0) < U(t_*) = U(t_0)$ , luego por el teorema de valor intermedio encontraríamos  $\bar{z} < t_0$  tal que  $U(\bar{z}) = (V - p(\bar{z}))e^{-\mu\bar{z}} = U(t_*) = (V - p(t_*))e^{-(\mu t_* + m(t_*))}$ , lo que contradice la minimalidad de  $t_0$ .

De esta forma, lo que concluye la demostración es que no existen incentivos para desviarse de esta estrategia.  $\square$

A partir de la construcción de las estrategias vemos que en equilibrio la única forma de que un jugador de valoración  $v$  reciba con cierta probabilidad el objeto es que no haya llegado ningún jugador con valoración  $V$ . Lo anterior nos dice que implementar este mecanismo es eficiente socialmente. Lo anterior queda resumido en el siguiente corolario.

**Corolario 3.13** *Para una política de precios  $p$  que cumpla el Supuesto 3.1 y que  $p(t) = v$*

únicamente en  $t = T$ , la asignación de equilibrio es eficiente.

### 3.3. Modelo Continuo

En esta sección mostraremos que en caso de existir un equilibrio, entonces éste es caracterizado por una función tipo *threshold*.

La intuición de la existencia se basa en que para un jugador que llega en tiempo  $t$ , el costo de oportunidad de esperar es mayor a medida que su valoración aumenta. Luego, en equilibrio tendrá que ocurrir que si un jugador con valoración  $u$  se encuentra indiferente entre comprar al llegar a la tienda o adquirirlo en el futuro, entonces la mejor respuesta para otro cliente  $u' > u$  arribando  $t$  será la de comprar inmediatamente.

A continuación presentaremos el principal resultado de la sección.

**Teorema 3.14** *Dado un equilibrio simétrico  $(\sigma^*, \alpha^*)$ , existe un función de threshold que los representa.*

DEMOSTRACIÓN. Para esto veamos que todo equilibrio cumple la siguiente propiedad de monotonía: Dadas dos valoraciones  $u < u'$ ,  $s \in \text{supp } \sigma^*(u, \tau)$  y  $s' \in \text{supp } \sigma^*(u', \tau)$ , entonces si  $s > \tau$  se tiene que  $s > s'$ . Para ello, dado  $\tilde{s} \in [0, T]$  tenemos que

$$(u' - p(\tilde{s}))e^{-\mu\tilde{s}}\alpha^*(\tilde{s}) = (u - p(\tilde{s}))e^{-\mu\tilde{s}}\alpha^*(\tilde{s}) + (u' - u)e^{-\mu\tilde{s}}\alpha^*(\tilde{s}). \quad (3.9)$$

Tomando  $s$  el menor tiempo perteneciente al soporte de  $\sigma^*(u, \tau)$ , vemos que en lado izquierdo de (3.9) el primer término se maximiza en  $\tilde{s} = s$  y el segundo es estrictamente decreciente en el tiempo. Concluimos  $s' \in [\tau, s)$ .

Lo anterior nos dice que si un jugador  $u$  llegando en  $\tau$  compra al llegar a la tienda, cualquier otro jugador con mayor valoración también comprará en  $\tau$ . Con esto se desprende directamente que

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \inf\{u \mid t \in \text{supp } \sigma^*(u, t)\} \\ &= \inf_{u \geq p(T)} \{u \mid t \in \arg \max_{s \geq t} (u - p(s))e^{-\mu s} \alpha^*(s)\}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

es una función de threshold que caracteriza el equilibrio <sup>3,4</sup>. □

Respecto a la pregunta de eficiencia, para el caso en que  $p$  sea continua con  $p(T) < V$  en vista de que los agentes con valoración  $u > p(T)$  evitarán un sorteo en tiempo  $T$ , se tendrá que la función de threshold no será constante. Lo anterior aseveración tiene como consecuencia que un jugador de menor valoración se lleve el objeto. Para esto, notar que dado  $\varphi$  threshold asociado al equilibrio, si en tiempo  $t > t_V$  llega a la tienda un jugador con

<sup>3</sup>Definimos el ínfimo del conjunto vacío como  $V$ .

<sup>4</sup>En la segunda caracterización de  $\varphi$  es importante recalcar que el ínfimo debe sólo considerar las valoraciones que en equilibrio tendrán intención de comprar el objeto en algún momento, i.e.,  $u \geq p(T)$ .

valoración  $\varphi(t)$  y en tiempo  $t + \varepsilon$  alguien con valoración  $V$  se tendrá que el primer jugador comprará el ítem, siendo una asignación ineficiente pues el jugador  $V$  apreciaría de mayor manera haberlo comprado.

**Corolario 3.15** *Para una política de precio continua tal que  $p(T) < V$  y posee un equilibrio, entonces la asignación entregada por el mecanismo es ineficiente.*

Agregando al problema de ineficiencia los resultados computacionales encontrados en Briceño *et al.* (2015), los cuales intuyen (bajo simulaciones numéricas) que en la asignación óptima del vendedor el equilibrio está caracterizado por una función de threshold decreciente, lo que invita a pensar que en el caso de información incompleta con más de un tipo, donde la valoración como en el tiempo de llegada son desconocidos, ambos factores debiesen ser considerados a la hora de realizar un *ranking* sobre los jugadores. Con esto, un jugador con una valoración levemente menor pero llegando a comienzo de temporada tendrá mayor valor para la sociedad que uno con valoración superior pero llegando cercano a  $T$ . Con esto la pregunta abierta será, de qué manera se debe ordenar a los jugadores de modo de poder compararlos razonablemente.

Para terminar, remarcamos que si el equilibrio estuviese caracterizado por una threshold decreciente continua, entonces la probabilidad de que el ítem esté disponible se convierte en algo tratable. Definiendo la cantidad esperada de jugadores como  $m(t) = \int_0^T \lambda(t) dt$ , si  $\varphi$  es un threshold decreciente entonces  $\alpha^*(t) = e^{-m(t)(1-F(\varphi(t)))}$ . Así conectando esta idea con (3.10), de manera natural el problema de existencia se podría resolver vía un punto fijo en el espacio de las funciones continuas decrecientes<sup>5</sup>. Si bien Briceño *et al.* (2015) concluyen que en la política de precios, la curva de equilibrio debe ser decreciente, las técnicas clásicas de punto fijo no son directas a utilizar.

---

<sup>5</sup>Es importante chequear que la función sea continua, de otro modo, habrá sorteo en los puntos de discontinuidad impidiendo utilizar la caracterización anterior para  $\alpha^*$ .

# Capítulo 4

## Análisis equilibrio múltiples productos

En esta sección damos el primer paso para entender el comportamiento de los agentes cuando el inventario del vendedor no es uno. Para ello, estudiaremos el caso límite cuando tres jugadores llegan al final de la temporada, quedan dos productos a vender y el vendedor hace bajar la política de precios bruscamente desde  $V$  hasta  $v$ . Analizando el caso de valoraciones acorde a una ley  $F$  continua, mostraremos que bajo cierta regularidad de dicha variable, un equilibrio simétrico existe.

En la búsqueda del equilibrio veremos que en el subjuego, cuando resta un ítem, los jugadores desearán aumentar su pago del ofrecido inicialmente, sin embargo, tendrán el impedimento de no poder apostar más que el precio de venta del primer producto. Lo anterior significará que para valoraciones similares de los jugadores, ambos compradores que no ganaron el primer objeto desearán apostar más alto que el precio permitido. Esto tendrá como consecuencia que el segundo ítem será sorteado, con probabilidad  $\frac{1}{2}$ , entre los dos interesados. Lo recién mencionado nos permitirá concluir que, con probabilidad positiva, el equilibrio asigna ineficientemente los productos.

Parte clave del análisis técnico será el poder caracterizar totalmente el subjuego cuando resta un producto por vender. Es importante notar que dicho subjuego es equivalente a un remate a primer precio con apuesta máxima, el cual posee un equilibrio simple de caracterizar cuando los postores tienen igual distribuciones a priori. Sin embargo, en el caso de que los agentes utilicen estrategias asimétricas para su primera apuesta, el aprendizaje que realizarán los jugadores será distinto. En dicha situación, la segunda venta será equivalente a un remate a primer precio asimétrico, el cual no posee una descripción clara como el caso clásico. Razón por la cual obviaremos un estudio general sobre el conjunto de equilibrios del juego.

A continuación presentaremos la literatura en el tema, posteriormente construiremos las estrategias de equilibrio dejando para el final las consecuencias de éste.

## 4.1. Literatura

El análisis de mecanismos de ventas secuenciales ha sido foco de estudio en las últimas décadas. En el caso de remates ascendentes, Ausubel (2004) propone una licitación simple de ejecutar (a diferencia de la subasta Vickrey), con las propiedades de que el diseñador no requiere conocer la valoración de los postores. La principal propiedad que cumple este remate es que la asignación entregada es siempre eficiente.

En el caso de productos indistinguibles y jugadores que demandan un único producto, en el Capítulo 15 de Krishna (2009) se describen los equilibrios para el caso en que los productos son vendidos como remates a primer precio y a segundo precio. En el primer formato, luego de la venta de cada ítem se realiza un nuevo remate a primer precio con los postores que aún no han comprado. En particular, para el caso de tres jugadores, dos productos y valoraciones continuas  $F$ , el autor encuentra que existe un equilibrio simétrico donde en la primera etapa un jugador con valoración  $u$  apuesta  $\mathbb{E}[Y^2 \mid Y^1 < u]$  donde  $Y^2$  es la variable aleatoria del segundo máximo de las valoraciones e  $Y^1$  es la variable aleatoria del primer máximo. En caso de que dicho jugador deba competir por el segundo producto su apuesta será  $\int_0^u z dF(z)/F(u)$ . Vale la pena remarcar que dicha apuesta es independiente del precio en que se vendió el primer objeto.

Un modelo intermedio entre el mencionado anteriormente y el nuestro corresponde a Bulow y Klemperer (1994). Ellos estudian un modelo de subasta Holandesa con múltiples objetos pero con la importante diferencia de que en caso de existir un exceso de demanda por el producto, entonces el potencial sorteo es evitado reiniciando el “reloj” asociado. Es decir, la diferencia en los modelos radica de que en caso de que dos personas deseen comprar al mismo tiempo un producto, Bulow y Klemperer (1994) proponen que el diseñador reinicia la venta de dicho producto desde un precio elevado, en contraposición de nuestro caso donde el producto es sorteado entre los interesados. Considerando valoraciones continuas, ex-ante simétricas, los autores muestran que en los equilibrios simétricos ocurre, con probabilidad positiva, que más de un postor desea adquirir un producto en el mismo momento, reseteando así la subasta e implicando que la apuesta de los interesados sea mayor al precio inicial. Como se aprecia, un punto esencial para su estudio de equilibrios es permitir elevar el precio en caso de exceso de demanda, razón por la cual el equilibrio que los autores encuentran es el mismo que el encontrado para el remate a primer precio secuencial descrito en el párrafo anterior. Finalmente, un punto interesante de dicho artículo es que los autores dan a entender la posible existencia de múltiples equilibrios simétricos para su juego, lo cual es refutado gracias al resultado de Chawla y Hartline (2013).

Por otro lado, inspirado en el trabajo de Vickrey (1961) que muestra para el caso de un ítem, que un remate Holandés se puede modificar levemente para ser equivalente a una subasta VCG<sup>1</sup>; Mishra y Parkes (2009) diseñan un mecanismo de remates descendentes para múltiples objetos. Bajo el supuesto de que las valoraciones privadas toman valores enteros, los autores definen un mecanismo descendente el cual a partir de los precios de cada objeto, recibe las demandas de los jugadores y asigna de manera eficiente. Los autores muestran que

---

<sup>1</sup>Corresponde a un remate equivalente al de segundo precio, el cual tiene la gran propiedad que la estrategia dominante de cada jugador es revelar su tipo.

dicho método no genera incentivos para que los postores deseen mentir sobre sus valoraciones, además tiene la ventaja de ser fácil de ejecutar<sup>2</sup>.

Como parte fundamental de nuestro análisis es entender la eficiencia de los mecanismos, Krishna (2009) muestra que para un escenario ex-ante simétrico y no dinámico, un equilibrio genera una asignación eficiente si y sólo si el equilibrio encontrado es simétrico y con funciones de apuestas estrictamente crecientes en las valoraciones.

Como ya se mencionó en el apartado anterior, en el caso de un objeto, el remate a primer precio es equivalente a una subasta Holandesa; luego entender dicho modelo será clave para resolver la etapa en que se tenga un único ítem restante.

En el caso de que las valoraciones sean independientes y provengan de la misma ley de distribución, Maskin y Riley (2003) caracterizan los equilibrios del remate a primer precio como soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales. Posteriormente, Maskin y Riley (2003) concluyen unicidad de equilibrio bajo condiciones razonables siendo además simétrico. Uno de los últimos avances proviene de Chawla y Hartline (2013), los autores consideran un mecanismo que asigna a lo más un ítem a cada jugador a partir de sus respectivas apuestas. Bajo los supuestos de que la distribución de valoraciones es i.i.d, continua a soporte compacto, que la asignación es simétrica y débilmente creciente en función de las apuestas, y que el pago de cada jugador es simétrico y creciente dependiendo únicamente de su apuesta (condicional a que se lleve un objeto, lo que sí puede depender del resto de las ofertas), entonces no existe equilibrio asimétrico. Más aún, si respecto a la asignación del mecanismo se cumple que tener la mayor apuesta es mejor que un empate con el resto de los interesados, entonces existe un único equilibrio de juego.

Si bien nuestro modelo consiste en un escenario simétrico, en el caso de que los jugadores utilicen estrategias asimétricas, las creencias sobre las distribuciones de las valoraciones en el segundo escenario serán distintas. Luego, la comprensión de remates asimétricos es fundamental para un análisis a cabalidad del juego.

Así, en el caso de que las valoraciones sean independientes pero generadas por distintas distribuciones, Maskin y Riley (2000b) concluyen la existencia de un equilibrio asumiendo que en caso de posibles empates entre apuestas, el objeto es asignado al jugador de mayor valoración, evitando de esta manera un posible sorteo. Luego Maskin y Riley (2003) caracterizan los equilibrios asimétricos vía ecuaciones diferenciales y muestran unicidad bajo una serie de fuertes asunciones, entre ellas, que los soportes de las distribuciones sean intervalos tales que el extremo derecho sea el mismo para todos los jugadores. Si bien no siempre se garantiza unicidad, Kaplan y Zamir (2012) resuelven dichas ecuaciones encontrando soluciones explícitas para dicho remate.

Para complementar, Maskin y Riley (2000a); Kaplan y Zamir (2002) estudian el comportamiento de los agentes y las ganancias del vendedor entre un remate a primer precio y uno a segundo precio. Los primeros muestran que el famoso teorema de *Revenue Equivalence* no se satisface en este modelo y estudian la agresividad de los postores en ambos escenarios cuando la distribución de uno domina estocásticamente a la del otro. Los segundos auto-

---

<sup>2</sup>El algoritmo toma tiempo polinomial



res estudian un modelo donde los jugadores son ex-ante simétricos pero cada uno tiene una diferente creencia sobre la distribución de los contrincantes, así analizan las ganancias del vendedor y estudian la rentabilidad de entregar información a los clientes a modo de cambiar sus presunciones.

En lo que sigue mostraremos la existencia de un equilibrio simétrico. Posteriormente resolveremos el juego general caracterizando las estrategias de equilibrio.

## 4.2. Existencia de Equilibrio

En esta sección mostraremos la existencia de un equilibrio simétrico para el caso de tres jugadores y dos objetos cuando las valoraciones se distribuyen según una ley  $F$  suave, convexa, a soporte compacto y cumpliendo condiciones para que cierta ecuación diferencial tenga solución. Más aún, gracias a la convexidad de  $F$ , el equilibrio simétrico del subjuego será único.

Recordemos que una estrategia  $\sigma_i$  es un plan de contingencia que dependiendo del historial de ventas decide con que probabilidad comprará. En el caso de dos objetos, la historia pública simplemente consiste en el precio de venta del primer objeto. En este caso podemos reescribir  $\sigma_i(u, h_t) = \mathbf{1}_{\{h_t=\emptyset\}}b_i^1(u) + \mathbf{1}_{\{h_t=p_t\}}b_i^2(u, p_t)$ , donde  $b_i^1(u)$  corresponde al tiempo de compra cuando los dos objetos están disponibles y  $b_i^2(u, p_t)$  la estrategia de venta cuando queda un objeto y el precio de venta del primero fue  $p_t$ .

Por convención, denotaremos  $b_i^2(u, p_t) = z$  la estrategia en que con probabilidad uno el jugador  $i$  comprará en  $z$ . En cambio, si  $\text{supp } b_i^2(u, p_t) = [z', z]$  entenderemos que el postor con tipo  $v$  jugará una estrategia mixta con soporte  $[z', z]$ .

Para enfrentar el problema, tendremos que entender lo que ocurre en el subjuego<sup>3</sup>. Así, interpretándolo como una especie de remate a primer precio, construiremos estrategias de equilibrio. Gracias a dicha caracterización, podremos mostrar la existencia de equilibrio en el modelo global. Además, en caso de que  $F$  resulte ser convexa tendremos un único equilibrio simétrico del subjuego.

Antes de comenzar, podemos sin pérdida de generalidad trasladar el problema de modo tal que  $v = 0$ , lo anterior será clave pues de esta forma tendremos que los espacios de estrategias en un remate a primer precio y nuestro modelo para un único producto son equivalentes. Así, como mencionamos anteriormente, podremos utilizar toda la teoría de remates a primer precio y aplicarla para entender el subjuego del modelo.

### Unicidad simétrica del subjuego

A partir del concepto de equilibrio enunciado en el Capítulo 2, vemos que para hablar de unicidad del subjuego estamos obligados a restringirnos a igualdad en casi todos los

---

<sup>3</sup>Revisar en el Capítulo 2 lo que se entenderá por subjuego.

puntos. Es decir, dos estrategias son iguales si salvo un conjunto de medida nula, tanto en las valoraciones como en los soportes de la estrategia mixta, el comportamiento del agente es el mismo.

Como se describió en el segundo capítulo, la noción de equilibrio requiere creencias sobre las valoraciones de los contrincantes, las cuales posteriormente serán derivadas a partir de la regla de Bayes. Así, en equilibrio la estrategia de subjuego debe ser la mejor respuesta a la estrategia del otro, condicional a que su valoración se distribuye a partir de la creencia que se tiene sobre ésta.

El párrafo anterior nos dice que para entender el subjuego es necesario conocer el equilibrio cuando el primer objeto se vendió a precio  $p_t$ , existen dos clientes compitiendo por el segundo objeto y saben que la valoración de su competidor no puede ser mayor o igual que  $\nu \in [0, V]$ .

Recordando que la subasta Holandesa clásica, con un único objeto, es equivalente al remate sobre cerrado primer precio, en caso de que  $\nu$  fuese lo suficientemente grande en comparación con  $p_t$ , entonces existirá un conjunto de valoraciones que desearán apostar más que  $p_t$ . Luego, dicha gente apostará  $p_t$  (implicando un potencial sorteo) incentivando gente con menor valoración a aumentar su apuesta y participar en el sorteo. Sin embargo, en el caso en que  $\nu$  no sea muy grande entonces el juego será equivalente al clásico remate a primer precio, simplificando el análisis de equilibrio.

**Proposición 4.1** *Si  $\nu \leq p_t$ , entonces el juego posee un único equilibrio. Donde  $b^2(u, p_t) = \frac{\int_0^u z f(z) dz}{F(u)}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Notemos que podemos olvidar la restricción sobre  $p_t$ , de igual manera nadie apostará sobre dicho precio. Luego todo equilibrio en el juego sin restricción es equilibrio en el subjuego. Con esto gracias al teorema Maskin y Riley (2003) tenemos unicidad del juego.

Para calcular la estrategia de equilibrio basta encontrar que  $w(u)$  tal que

$$w(u) \in \arg \max_{s \geq 0} (u - s) F(w^{-1}(s)) .$$

Imponiendo condiciones de primer orden (suponiendo que  $w$  es diferenciable y estrictamente creciente), encontramos una e.d.o cuya solución  $w(u) = \frac{\int_0^u z f(z) dz}{F(u)}$ . Luego, por construcción, el único punto que cumple las condiciones de primer orden es  $w(u)$  y como apostar 0 no es óptimo, concluimos que dicho punto es máximo. Es decir,  $w(u)$  es equilibrio para el remate a primer precio. Consecuentemente,  $b^1(u, p_t) = w(u)$  es el único equilibrio del subjuego.  $\square$

Para el caso en que  $p_t$  sea una restricción activa, existirá un equilibrio que será una mezcla entre el encontrado en la proposición anterior y una estrategia tipo *cut off*. Es decir, si la valoración del jugador es suficientemente baja, entonces seguirá la estrategia del remate a primer precio; en cambio, si su tipo sobrepasa cierto umbral, su estrategia consistirá en comprar inmediatamente a precio  $p_t$ .

**Lema 4.2** *Existe  $u^*(\nu, p_t) \in [0, V]$  tal que la siguiente estrategia es equilibrio simétrico del*

subjuego:

$$b^2(u, p_t) = \begin{cases} \frac{\int_0^u z f(z) dz}{F(u)} & \text{si } u \leq u^* \\ p_t & \text{si } u > u^* \end{cases} \quad (4.1)$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración para el caso general queda pospuesta para el Apéndice B. De igual manera, bosquejaremos el resultado para cuando  $F$  es una uniforme a soporte  $[0, 1]$ . Para evitar sobrecargar la notación diremos  $u^*$  en lugar de  $u^*(\nu, p_t)$ .

Si  $\nu \leq p_t$ , entonces tomando  $u^* = V$  se concluye el resultado.

En el caso en que  $\nu > p_t$ , busquemos la valoración tal que el jugador queda indiferente entre apostar lo que indica el remate a primer precio versus ir a un sorteo contra los tipos que tienen valoración mayor o igual a  $u^*$  pagando, en caso de adjudicárselo, un precio de  $p_t$ .

Lo anterior equivale a igualar

$$(u^* - w(u^*))\mathbb{P}(u \leq u^* | u \leq \nu) = (u^* - p_t)(\mathbb{P}(u \leq u^* | u \leq \nu) + \frac{1}{2}(1 - \mathbb{P}(u \leq u^* | u \leq \nu))), \quad (4.2)$$

donde  $w$  es la función de apuesta del remate a primer precio (el cual es independiente de la creencia  $\nu$ .)

Notando que  $\mathbb{P}(u \leq u^* | u \leq \nu) = \frac{u^*}{\nu}$ . Simple álgebra nos permite encontrar  $u^* = \frac{p_t \nu}{\nu - p_t}$ .

Si  $u^* \geq \nu$ , entonces se tendrá que el precio  $p_t$  es tal que no incentiva a ningún jugador a pagar  $p_t$ . En efecto, si un jugador tipo  $u$  decide comprar en  $b \leq p_t$ , entonces su utilidad esperada es  $(u - b)\mathbb{P}(b \geq w(v_{-i}))$  donde  $w$  es la estrategia de equilibrio en el remate a primer precio. Sabemos que la mejor respuesta es comprar en  $\frac{u}{2}$ . Como  $u^* \geq \nu$ , entonces tendremos que  $p_t \geq \frac{\nu}{2}$ . Luego la apuesta  $\frac{u}{2}$  es factible y por lo tanto seguir la estrategia diseñada es equilibrio.

Ahora analicemos el caso en que  $u^* \leq \nu$ . Para esto consideremos  $U_2(u, b)$  la utilidad esperada (dada la estrategia ya definida) de comprar en  $b$ . Así vemos que

$$U_2(u, w(u^*)) = U_2(u, p_t) + (u - u^*) \left[ \frac{1}{2}(1 - \mathbb{P}(u \leq u^* | u \leq \nu)) \right].$$

La igualdad anterior nos dice que si  $u < u^*$ , entonces la utilidad de comprar en  $w(u^*)$  es mayor que apostar  $p_t$ . Pero usando el razonamiento de que  $w$  es la estrategia del remate a primer precio, vemos que la máxima utilidad se alcanza apostando  $w(u)$ , concluyendo que seguir el equilibrio es su mejor respuesta. Por otro lado, si  $u > u^*$ , vemos que cualquier desvío que llama la atención a  $u$  debe ser una apuesta en  $b \in [0, w(u^*)]$ . Nuevamente, gracias a la caracterización de remate a primer precio, vemos que el único punto de derivada cero,  $w(u)$ , está incluido en  $[0, w(u^*)]$ . Luego la solución debe ser esquina. Gracias a la ecuación anterior vemos que  $w(u^*)$  no puede llamarle la atención y claramente apostar 0 le entrega una utilidad menor que jugar lo que señala el equilibrio.

Concluimos que no existen incentivos para que los jugadores se desvíen. En conclusión, la estrategia definida es equilibrio del juego.  $\square$

Respecto al resultado anterior vale la pena remarcar que un jugador tipo  $u^*(\nu, p_t)$  está indiferente entre jugar según la estrategia del remate a primer precio o apostar en  $p_t$ . Así, vemos que es necesario restringirnos a igualdad en casi todas partes para hablar de unicidad.

Con relación a la intuición económica del equilibrio, el hecho de restringir la apuesta máxima aumenta el interés de los clientes por apostar en  $p_t$ . Sin la restricción, los clientes con mayor valoración tienen el poder para llevarse el objeto (siempre pueden comprar  $\varepsilon$  más arriba) pero la cota los obliga a ir al sorteo con gente de menor valoración. Luego  $p_t$  separa a los que pueden competir contra los de alta valoración y aquellos que su tipo es tan baja que de igual manera no les conviene ir al sorteo.

En tercer lugar notemos que, a diferencia del modelo de Bulow y Klemperer (1994) y el remate a primer precio secuencial, la estrategia de equilibrio sí depende de las creencias que se tengan sobre el contrincante. Esto se conecta con el párrafo anterior, en un remate a primer precio el hecho de saber que su valoración es menor que  $\nu$  no afecta la decisión de apuesta pues uno compete contra las valoraciones menores (la cual es la misma probabilidad salvo una constante). En cambio en nuestro modelo, el conocer  $\nu$  permite apreciar con que probabilidad un jugador no podrá realizar su apuesta de primer precio y verse obligado a apostar  $p_t$ , implicando que conocer la distribución afectará el momento en que se “saltará” a apostar  $p_t$ .

A continuación mostraremos un resultado clave para mostrar unicidad de equilibrio en estrategias simétricas.

**Proposición 4.3** *Dado un equilibrio  $b_i$  del subjuego, para todo jugador  $i$ ,  $u, u' \leq \nu$  y  $z \in \text{supp}(b_i^2(u, p_t))$ ,  $z' \in \text{supp}(b_i^2(u', p_t))$ , se tendrá que si  $u > u'$  entonces  $z' \geq z$*

DEMOSTRACIÓN. Ver Apéndice B □

Este resultado simplemente muestra que las apuestas de los jugadores deben ser débilmente monótonas. A mayor valoración la apuesta no puede ser menor. Revisando la demostración, el lector podrá notar que el supuesto de simetría no es necesario para su prueba.

A partir del resultado, definiendo  $u^* = \inf_{u \in [0, V]} \{p_t \in \text{supp}(b^2(u, p_t))\}$ , tenemos que para toda valoración  $u > u^*$  el jugador apuesta en  $p_t$ . Así, en el siguiente lema probaremos que las estrategias para los tipos con  $u < u^*$  deben ser un equilibrio para el remate a primer precio cuando es de conocimiento común que las valoraciones de los competidores son  $u \leq u^*$ . Luego, nuevamente gracias a Maskin y Riley (2003) dicho equilibrio es único. Asumiendo convexidad de la ley de distribución  $F$  veremos que la ecuación (4.2) posee una única solución, implicando unicidad en  $u^*$  y por ende de las estrategias simétricas del subjuego.

**Lema 4.4** *Dado dos jugadores con valoraciones menores o igual  $\nu \in [0, V]$ , un historial público  $p_t$ . Si las valoraciones se distribuyen a partir de una ley  $F$  convexa, entonces existe un único equilibrio simétrico del subjuego.*

DEMOSTRACIÓN. Dado un equilibrio simétrico  $b^2(\cdot, p_t)$ , por la proposición anterior las estra-

tegias son débilmente crecientes, luego sea  $a_t = \inf_{u \in [v, \nu]} p_t \in \text{supp}(b^2(u, p_t))^4$ . Gracias a la Proposición 4.3 todo jugador con valoración en  $(a_t, \nu]$  comprará con probabilidad uno en  $p_t$ . Ahora notemos que los jugadores con valoraciones menores a  $a_t$  no compran en  $a_t$  y sólo compiten contra jugadores que tienen valoraciones menores o iguales a  $a_t$ . Al internalizar el hecho de que si algún adversario tiene valoración mayor a  $a_t$  no obtendrán el producto, se tendrá que su comportamiento estratégico es el mismo que si compitiese con un agente cuya valoración está en  $[0, a_t]$  y se distribuye según la condicional de  $F$  en  $a_t$ . Luego, vemos que  $b^2|_{[0, a_t]}$  es equilibrio para el juego en que el “reloj” parte en  $V$  y sólo existen agentes con valoraciones menores a  $a_t$ . Aquí, apelando a la unicidad de Maskin y Riley (2003), vemos que el equilibrio debe ser la apuesta en un remate a primer precio.

Luego definiendo  $a_t = u^*$ , salvo  $a_t$ , el equilibrio es el mismo que el definido en (4.1).

Ahora si la estrategia del juego fuese definida según un threshold  $u^*$ , entonces gracias a la ecuación (4.2) la diferencia de utilidad del tipo  $u^*$  entre seguir el remate primer precio y comprar en  $p_t$  se puede reescribir como la función

$$g(u^*) = u^*F(u^*) - 2 \int_0^{u^*} z f(z) dz - u^*F(\nu) + p_t F(u^*) + p_t F(\nu). \quad (4.3)$$

Notemos que si  $a_t \leq \nu$ , entonces se tendrá que  $g(a_t) = 0$ .

Simple álgebra nos lleva a que  $g'(u^*) = F(u^*) - F(\nu) + (p_t - u^*)f(u^*)$ . Así, bajo el supuesto que  $F$  es convexo, entonces tenemos que  $F(u^*) - F(\nu) \leq f(u^*)(\nu - u^*)$ . Se concluye que  $g$  es decreciente. Más aún, notemos que  $g(0) > 0$  y  $g(\nu) \leq 0$  si y sólo si  $\int_0^\nu (p_t - z)f(z) dz \leq 0$ . Luego  $a_t$  es único, concluyendo al unicidad del equilibrio.  $\square$

Vale la pena notar que para la demostración es clave suponer simetría en las estrategias, pues de otro modo,  $a_t$  cambiaría para cada jugador. Queda abierta la gran pregunta si bajo condiciones en la ley  $F$  existirá unicidad de equilibrio para el subjuego.

## Caracterización del equilibrio

Para la existencia de equilibrio asumiremos que los jugadores apuestan según una función  $b^1$  estrictamente monótona y diferenciable. Así, un jugador con valoración  $u$  debe cumplir que su mejor respuesta, dada las estrategias del resto, sea apostar  $b^1(u)$ . De esta forma, nuestro enfoque para encontrar el equilibrio será el de suponer la existencia, imponer la optimalidad de la estrategia (condiciones de primer orden); lo anterior se resumirá en una ecuación diferencial la cual tendrá una solución que satisface las condiciones de equilibrio.

En lo que resta de la sección por simplificación de notación, llamaremos  $b$  a la estrategia de ventas para la compra del primer ítem.

Para comenzar la demostración, notemos que en el subjuego la estrategia a utilizar debe ser la mejor respuesta dada las creencias que se tienen. Así, si el primer objeto se vendió a un

---

<sup>4</sup>En caso ser vacío  $a_t = \nu + 1$ .

precio de  $p_t$ , las creencias bayesianas de los jugadores para el subjuego será que la valoración de su contrincante está contenida en  $\{b(v_{-i}) \leq p_t\}$ , donde  $v_{-i}$  es el tipo del contrincante.

Con lo anterior vemos que si un jugador va a la segunda ronda y el precio de venta del primer producto es  $p_t$ , entonces gracias a la caracterización simétrica del subjuego impondremos que el equilibrio a jugar sea el definido en la Lema 4.2.

De esta forma, un agente que tiene valoración  $u$ , que decide esperar hasta el precio de  $z$  por el primer ítem y toma en consideración que sus oponentes juegan según  $\sigma$ , tendrá una utilidad esperada igual a

$$\begin{aligned}
U_1(u, z) = & (u - z)F(b^{-1}(z))^2 \\
& + \int_z^V \mathbf{1}_{\{u \leq u^*(b^{-1}(q), q)\}} \left( u - \frac{\int_v^u z f(z) dz}{F(u)} \right) \mathbb{P}(u \geq v_{-i} \mid b(v_{-i}) \leq q) dG(q) \\
& + \int_z^V \mathbf{1}_{\{u \geq u^*(b^{-1}(q), q)\}} (v - q) \mathbb{P}(v_{-i} \leq u^*(b^{-1}(q), q) \mid b(v_{-i}) \leq q) dG(q) \\
& + \int_z^V \frac{1}{2} \mathbb{P}(v_{-i} \geq u^*(b^{-1}(q), q) \mid b(v_{-i}) \leq q) dG(q) .
\end{aligned}$$

Donde  $G(q)$  es la probabilidad de que los contrincantes compren el primer objeto a precio menor o igual a  $q$ . Y como  $b$  es estrictamente creciente, entonces su inversa esta bien definida, luego  $G(q) = F(b^{-1}(z))^2$ .

El primer término corresponde a la utilidad asociada al caso en que el jugador se adjudica el primer objeto. Respecto a las integrales, ellas cuantifican las ganancias asociadas al subjuego. La primera integral, considera el caso en que el precio de venta fue lo suficientemente alto de modo que no tiene interés en ir a una lotería a precio  $q$ . Las últimas dos, es el caso contrario.

A modo facilitar la comprensión del análisis, estudiaremos el caso de la distribución  $U[0, 1]$  relegando el análisis general al Apéndice B.

Como se vio anteriormente, en el caso de la uniforme a soporte  $[0, 1]$  la estrategia en equilibrio para el subjuego está determinado por  $u^*(b^{-1}(q), q) = \frac{qb^{-1}(q)}{b^{-1}(q)-q}$ . Notemos que en caso de que el objeto se venda en  $q$ , la valoración de jugador que lo adquiere debe ser estrictamente mayor que  $q$ , lo que deja bien definido a  $u^*$  en todo punto.

Asumiendo diferenciabilidad de  $b$  tenemos que las condiciones de primer orden permiten concluir que

$$0 = \partial_2 U(u, b(u)) = -b'(u) + 1 - 2 \frac{b(u)}{u} ,$$

donde dicha igualdad ocurre tanto si  $u \geq u^*(u, b(u))$  como en el caso contrario. Sin embargo, si  $u < u^*(u, b(u)) = \frac{ub(u)}{u-b(u)}$  entonces se tendrá que la derivada de  $b'(u) < 0$  contradiciendo nuestra hipótesis. Luego es de esperar que la solución encontrada cumpla que  $u^*(u, b(u)) \leq u$ .

Resolviendo la ecuación anterior e imponiendo que  $b(0) = 0$ , vemos que la única solución es  $b(u) = \frac{u}{3}$ . Es claro apreciar que  $b$  cumple con todas las hipótesis que habíamos asumido

sobre ella: es derivable, estrictamente creciente y cumple que  $u^*(u, b(u)) \leq u$ . Para concluir la construcción de equilibrio, notemos que para todo  $u \in [0, V]$ , el único punto donde la derivada de  $U(u, \cdot)$  se anula es en  $b(u)$ . Luego la mejor respuesta del jugador puede ser dicho punto o los extremos del intervalo. Concluimos que la estrategia es equilibrio del juego.

De esta forma, podemos describir el equilibrio del juego como la estrategia

$$\sigma^*(u, h_t) = \begin{cases} \frac{u}{3} & \text{si } h_t = \emptyset \\ p_t & \text{si } h_t = p_t \text{ y } u > u^*(b^{-1}(p_t), p_t) = \frac{3}{2}p_t, \\ \frac{u}{2} & \text{si } h_t = p_t \text{ y } u \leq u^*(b^{-1}(p_t), p_t) = \frac{3}{2}p_t \end{cases}$$

y las creencias sobre las valoraciones  $\alpha(h_t) = F(\cdot | \frac{v-i}{3} \leq z)$ , donde  $z = p_t$  si  $h_t \neq \emptyset$  y  $z = V$  en el caso contrario. Notando que  $u^*(u, b(u)) < u$ , tendremos eventos de medida positiva tal que habrá un sorteo en la segunda etapa. Así, bajo el equilibrio encontrado, la asignación del mecanismo es ineficiente.

Para el caso general, el análisis es análogo (ver Apéndice B). Sin embargo, es necesario poder asegurar solución de la ecuación diferencial para  $b$ .

**Supuesto 4.5** *Supondremos que la densidad  $F$  es tal que la ecuación diferencial*

$$(P) \quad \begin{cases} b'(u) = h(u, b(u)) \\ b(0) = 0 \end{cases}$$

con

$$h(u, b) = \frac{2(u-b)F(u)f(u) - (u-b)[F(u^*(u, b)) + F(u)]f(u)}{F(u)^2}$$

posee una solución estrictamente creciente en  $[0, V]$ .

**Teorema 4.6** *Para toda distribución continua  $F$  suave, convexa y que satisface el Supuesto 4.5, se tiene que el juego posee un equilibrio simétrico. Más aún, dicho equilibrio es ineficiente.*

DEMOSTRACIÓN. Ver Apéndice B. □

Un análisis análogo a la Proposición 4.3, nos permite concluir que en todo equilibrio la estrategia de apuestas por el primer objeto es en puras y crecientes<sup>5</sup>, luego las condiciones de primer orden se cumplirán en casi todo punto. Además, notemos que si dicho plan de contingencia fuese discontinuo en un cierto  $u$ , entonces se tendría que para  $\varepsilon, \delta$  suficientemente pequeños los jugadores con valoraciones  $\tilde{u} \in (u, u + \delta)$  tendrían la misma posibilidad de ganar el objeto si es que apuestan  $p(u) + \varepsilon < p(\tilde{u})$ , contradiciendo el equilibrio.

Así, si tenemos unicidad de solución del problema (P) (ver Supuesto 4.5) en el espacio de funciones continuas y utilizamos el resultado de unicidad del subjuego para el caso en que  $F$  sea convexa, tenemos el siguiente corolario.

<sup>5</sup>Notar que como para todo equilibrio el conjunto  $\{u \mid \mu(\text{supp}(b^1)(u)) > 0\}$  mide cero, donde  $\mu$  es la medida de Lebesgue. Así, todo equilibrio es en estrategia puras.

**Corolario 4.7** *Si  $h$  definida en el Supuesto 4.5 satisface las propiedades de Teorema Picard-Lindelöf, entonces existe un único equilibrio simétrico que sea absolutamente continuo.*

Debido a que para una distribución  $F$  general, el umbral  $u^*(\nu, p_t)$  se caracteriza de manera implícita, en la próxima sección hablaremos de las consecuencias del equilibrio encontrado para el caso en que las valoraciones se distribuyan acorde a una uniforme con soporte  $[0, 1]$ .

## Discusión para el caso de distribución $U[0, 1]$

Un punto destacable de la estrategia encontrada es que las apuestas por el primer objeto son las mismas que en el remate secuencial de primer precio y en el modelo de Bulow y Klemperer (1994). Intuitivamente, en nuestro caso los jugadores pagan menos que en los otros dos modelos, generando incentivos a esperar por la segunda etapa, lo que nos llevaría a pensar que la apuesta en el primer periodo es menor. Por otro lado, un jugador de valoración alta que perdió en la primera etapa tendrá la desventaja de que no podrá diferenciarse de su competidor apostando más alto, teniendo como consecuencia que la apuesta en la primera etapa debiese ser mayor a modo de evitar lo recién mencionado. De esta forma, estas dos fuerzas se contraponen de modo tal que el comportamiento estratégico de los clientes es análogo a los modelos anteriores al nuestro.

Sin embargo, como se mencionó en el Teorema 4.6, el mecanismo encontrado asignará de manera ineficiente. Luego, gracias a la caracterización de los mecanismos óptimos (Myerson, 1981), vemos que tanto la utilidad esperada de los jugadores como las ganancias del vendedor serán menores que las producidas en un remate secuencial a primer precio. Denotando por  $U^H(u)$  la utilidad esperada de un jugador con tipo  $u$  en la subasta Holandesa y por  $U^F(u)$  los beneficios en el remate a primer precio secuencial, tenemos que

$$U^H(u) = \begin{cases} u^2 - \frac{1}{4}u^3 & \text{si } u \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12}u^3 + \frac{3}{4}u - \frac{1}{6} & \text{si } u > \frac{1}{2} \end{cases} \text{ y } U^F(u) = u^2 - \frac{1}{3}u^3.$$

Del mismo modo podemos calcular las ganancias esperadas del vendedor  $R^H$  ( $R^F$ ) para ambos escenarios obteniendo que

$$R^H = \frac{1}{4} + \int_0^1 \left( \frac{y}{2} - \frac{y^4}{64} \right) 6(1-y)y dy$$

donde lo que aparece en púrpura corresponde a la pérdida por la lotería en la subasta Holandesa respecto al remate secuencial. Así concluimos que  $R^H \approx 0,4977$  y  $R^F = \frac{1}{2}$ .

Lo anterior ratifica que tanto, desde la perspectiva social como de la del vendedor, la subasta Holandesa es superada por el remate secuencial y el modelo de Bulow y Klemperer (1994). Sin embargo, dicha diferencia en este ejemplo es marginal.

Dado que nuestro modelo es un caso límite de un esquema de pricing, vemos que para el caso en que el proceso de llegadas se encuentre muy cercano al fin de temporada, ejecutar un mecanismo de precio descendente no será óptimo para el vendedor. De esta forma, vemos



que un resultado importante de nuestro modelo es que, para una empresa no es óptimo implementar un mecanismo de políticas de precios descendente cuando gran parte de la demanda llega cerca del tiempo final.

Para concluir el capítulo, el lector podrá preguntarse si existirá algún equilibrio asimétrico que permita disminuir la probabilidad de sorteo y por tanto mejorar la eficiencia de la subasta. En el capítulo 13 del libro Krishna (2009), el autor muestra que en el caso de un remate combinatorial sin dinamismo, un equilibrio es eficiente si y sólo si las estrategias son simétricas y estrictamente crecientes. Lo anterior nos hace pensar que a mayor asimetría la eficiencia debiese empeorar. Pero mirando el resultado encontrado en Maskin y Riley (2000a), el hecho de generar distintas creencias para el subjuego podría tener como consecuencia que un jugador sea más agresivo que el otro, de modo tal que disminuyan los incentivos a comprar inmediatamente ocurriendo con menor probabilidad una lotería y mejorando así la asignación esperada del remate.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo se dio el primer paso en la comprensión del comportamiento de consumidores racionales cuando se enfrentan a un mecanismo de política de precio en el cual agentes arriban de manera privada a la tienda y su valoración es desconocida para el resto de los interesados.

Bajo el supuesto de una política de precio continua hasta el final de la temporada, procesos de llegadas con pérdida de memoria, un único producto en venta y valoraciones distribuidas en dos posibles puntos (uno de alta valoración y otro de baja valoración) mostramos que existe un equilibrio simétrico del juego. Dependiendo de la curva de precios, existirán tiempos de llegadas tales que los jugadores esperarán para comprar; teniendo como consecuencia la utilización de estrategias mixtas en el tiempo.

Respecto al caso en que las valoraciones se distribuyan de manera continua, mostramos que todo potencial equilibrio simétrico puede ser descrito mediante una función umbral. Para cada valoración existirá un tiempo de inflexión, donde todo jugador llegando antes de dicho tiempo esperará hasta ahí para ejercer la opción de compra. En cambio si el jugador se informa del producto posteriormente a su tiempo umbral, comprará inmediatamente al arribar.

Sobre la eficiencia del equilibrio, vemos que para el caso de distribución Bernoulli teniendo supuestos débiles en la función de precio, el equilibrio encontrado otorgará el producto al jugador que posee una mayor valoración. En cambio, para el caso continuo la ineficiencia se tendrá en varias instancias.

Para el análisis del caso de múltiples productos indistinguibles a vender, se dio el primer paso a su entendimiento. Para el caso límite en que llegan tres jugadores al final de la temporada, restan dos productos y el precio baja fuertemente al estilo de una subasta Holandesa, probamos que un equilibrio simétrico existe cuando los jugadores tienen valoraciones continuas. De manera interesante, ocurrirán eventos de probabilidad positiva tal que los dos competidores restantes comprarán inmediatamente luego del primero, teniendo que concursar en un sorteo para dividirse el producto.

Así vemos que dicho equilibrio implicará ineficiencia del mecanismo lo que conllevará a que el remate tendrá menor utilidad que métodos alternativos como el propuesto por Bulow y Klemperer (1994) en el cual, en caso de existir exceso de demanda, el remate es reiniciado partiendo nuevamente desde un precio elevado.

Lo anterior nos hace concluir que para el caso de más de un ítem a vender, el mecanismo dinámico óptimo no podrá tomar la forma de una política de precios, en contraposición de lo observado por Briceño *et al.* (2015) en el caso de una unidad.

## 5.1. Futura investigación

Dentro de las preguntas que surgieron en esta tesis para futura investigación están la de poder asegurar la existencia de equilibrio para el modelo de un único producto y valoraciones continuas.

Una pregunta asociada a esto refiere a cómo definir un ranking correcto que considere tanto el tiempo de arribo a la tienda como la valoración por el producto, de modo de tener un concepto de eficiencia que sea razonable.

Respecto al caso de varios productos, una pregunta natural para abordar será cuán lejos están las ganancias en el remate Holandés en comparación con un mecanismo eficiente. Cómo cambiará la eficiencia a medida que aumenta tanto el número de postores como el de productos a vender. ¿Se tendrá que al considerar la posibilidad de estrategias asimétricas, la ineficiencia disminuirá?

Para finalizar, en el caso de valoraciones distribuidas uniformemente mostramos que las estrategias de equilibrio son las mismas que para un remate primer precio secuencial, a partir de lo anterior surge la pregunta natural de si existirá una conexión más profunda entre ambos mecanismos.

# Bibliografía

- Athey, S. (2001). Single crossing properties and the existence of pure strategy equilibria in games of incomplete information. *Econometrica*, 69(4):pp. 861–889.
- Athey, S. y Segal, I. (2013). An efficient dynamic mechanism. *Econometrica*, 81(6):2463–2485.
- Ausubel, L. M. (2004). An efficient ascending-bid auction for multiple objects. *The American Economic Review*, pp. 1452–1475.
- Aviv, Y. y Pazgal, A. (2008). Optimal pricing of seasonal products in the presence of forward-looking consumers. *Manufacturing & Service Operations Management*, 10(3):339–359.
- Barelli, P. y Meneghel, I. (2013). A note on the equilibrium existence problem in discontinuous games. *Econometrica*, 81(2):813–824.
- Board, S. y Skrzypacz, A. (2015). Revenue management with forward-looking buyers. *Forthcoming in Journal of Political Economy*.
- Briceño, L., Correa, J., y Perloth, A. (2015). Optimal continuous pricing with strategic consumers. *Available at SSRN*.
- Bulow, J. y Klemperer, P. (1994). Rational frenzies and crashes. *Journal of Political Economy*, 102(1).
- Chawla, S. y Hartline, J. D. (2013). Auctions with unique equilibria. En *Proceedings of the fourteenth ACM conference on Electronic commerce*, pp. 181–196. ACM.
- Correa, J., Montoya, R., y Thraves, C. (2013). Contingent preannounced pricing policies with strategic consumers. *Available at SSRN 2230605*.
- Einav, L., Farronato, C., Levin, J. D., y Sundaresan, N. (2013). Sales mechanisms in online markets: What happened to internet auctions? Technical report, National Bureau of Economic Research.
- Elmaghraby, W., Gülcü, A., y Keskinocak, P. (2008). Designing optimal preannounced mark-downs in the presence of rational customers with multiunit demands. *Manufacturing & Service Operations Management*, 10(1):126–148.
- Fudenberg, D. y Tirole, J. (1991). *Game Theory*. MIT Press.

- Gallager, R. G. (2013). *Stochastic processes: theory for applications*. Cambridge University Press.
- Gershkov, A., Moldovanu, B., y Strack, P. (2014). Revenue maximizing mechanisms with strategic customers and unknown demand: Name-your-own-price. *Available at SSRN*.
- Haviv, M. y Milchtaich, I. (2012). Auctions with a random number of identical bidders. *Economics Letters*, 114(2):143–146.
- Hendricks, K., Weiss, A., y Wilson, C. (1988). The war of attrition in continuous time with complete information. *International Economic Review*, 29(4):pp. 663–680.
- Kaplan, T. R. y Zamir, S. (2002). A note on revenue effects of asymmetry in private-value auctions. Technical report, The Center for the Study of Rationality, Hebrew University, Jerusalem.
- Kaplan, T. R. y Zamir, S. (2012). Asymmetric first-price auctions with uniform distributions: analytic solutions to the general case. *Economic Theory*, 50(2):269–302.
- Krishna, V. (2009). *Auction theory*. Academic press.
- Levin, D. y Ozdenoren, E. (2004). Auctions with uncertain numbers of bidders. *Journal of Economic Theory*, 118(2):229–251.
- Levin, D. y Smith, J. L. (1994). Equilibrium in auctions with entry. *The American Economic Review*, pp. 585–599.
- Maskin, E. y Riley, J. (2000a). Asymmetric auctions. *Review of Economic studies*, pp. 413–438.
- Maskin, E. y Riley, J. (2000b). Equilibrium in sealed high bid auctions. *Review of Economic Studies*, pp. 439–454.
- Maskin, E. y Riley, J. (2003). Uniqueness of equilibrium in sealed high-bid auctions. *Games and Economic Behavior*, 45(2):395–409.
- McAfee, R. P. y McMillan, J. (1987). Auctions with a stochastic number of bidders. *Journal of Economic Theory*, 43(1):1–19.
- Milgrom, P. R. (2004). *Putting auction theory to work*. Cambridge University Press.
- Milgrom, P. R. y Weber, R. J. (1985). Distributional strategies for games with incomplete information. *Mathematics of Operations Research*, 10(4):pp. 619–632.
- Mishra, D. y Parkes, D. C. (2009). Multi-item vickrey–dutch auctions. *Games and Economic Behavior*, 66(1):326–347.
- Myerson, R. B. (1981). Optimal auction design. *Mathematics of operations research*, 6(1):58–73.

- Pavan, A., Segal, I., y Toikka, J. (2014). Dynamic mechanism design: A myersonian approach. *Econometrica*, 82(2):601–653.
- Reny, P. J. (1999). On the existence of pure and mixed strategy nash equilibria in discontinuous games. *Econometrica*, 67(5):1029–1056.
- Reny, P. J. (2013). Nash equilibrium in discontinuous games. *University of Chicago*.
- Reny, P. J. y Zamir, S. (2004). On the existence of pure strategy monotone equilibria in asymmetric first-price auctions. *Econometrica*, 72(4):pp. 1105–1125.
- Skreta, V. (2006). Mechanism design for arbitrary type spaces. *Economics Letters*, 91(2):293–299.
- Su, X. (2007). Intertemporal pricing with strategic customer behavior. *Management Science*, 53(5):726–741.
- Van den Berg, G. J., Van Ours, J. C., y Pradhan, M. P. (2001). The declining price anomaly in dutch dutch rose auctions. *The American Economic Review*, pp. 1055–1062.
- Vickrey, W. (1961). Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders. *The Journal of finance*, 16(1):8–37.
- Wang, R. (1993). Auctions versus posted-price selling. *The American Economic Review*, pp. 838–851.

# Apéndice A

## Demostraciones Capítulo 3

DEMOSTRACIÓN PROPOSICIÓN 3.2. Hay que analizar la utilidad del jugador  $V$  en ambas situaciones. En el primer caso se tiene directamente que la utilidad del jugador  $V$  es  $(V - b^*)$ .

Por otro lado, su utilidad esperada en el sorteo contra jugadores con valoraciones  $v$  es

$$(V - v) \left( \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)} \frac{e^{-(1-q)\lambda t} ((1-q)\lambda T)^k}{k!} \right).$$

Luego  $b^*$  se obtiene igualando ambas utilidades, implicando

$$b^* = V - \frac{(V - v)(1 - e^{-(1-q)\lambda T})}{(1 - q)\lambda T}.$$

□

DEMOSTRACIÓN LEMA 3.4. El método de ironing nos dice que tenemos que definir  $H^\varepsilon(s) = \int_0^s c^\varepsilon(F^{\varepsilon-1}(z))dz$  y  $G^\varepsilon(s) = \text{co}H^\varepsilon(s)$ , la convexificación de  $H^\varepsilon$ . Con esto definimos  $\bar{c}^\varepsilon(x) = G'^\varepsilon(F^\varepsilon(x))$ . Sea  $\bar{n}(x)$  la cantidad de jugadores con tipo  $x_i$  tal que  $\bar{c}^\varepsilon(x_i)$  es mayor que el del resto de los clientes. Con esto, la asignación óptima para el jugador  $i$  cuando su tipo es  $x_i$  y el resto tiene tipo  $x_{-i}$  queda definida como

$$\bar{q}_i^\varepsilon(x_i, x_{-i}) = \begin{cases} \frac{1}{\bar{n}(x)} & \text{si } \bar{c}^\varepsilon(x_i) \geq 0 \text{ y } \bar{c}^\varepsilon(x_i) \geq \bar{c}^\varepsilon(x_j) \forall j \neq i \\ 0 & \text{sino} \end{cases}.$$

Y el pago asociado es

$$\bar{p}_i^\varepsilon(x_i) = \bar{q}(x_i)x_i - \int_0^{x_i} q_i^\varepsilon(z, x_i)dz.$$

Por simplificación de notación, obviaremos el subíndice  $\varepsilon$  en los casos que se sobreentienda su dependencia. Recordemos que tenemos

$$F(x) = \begin{cases} \left(\frac{1-q-\varepsilon}{\varepsilon} - 1\right)x & \text{si } x \in [v, v + \varepsilon] \\ \frac{\varepsilon}{V-v+2\varepsilon}(x - (V - \varepsilon)) + 1 - q & \text{si } x \in (v + \varepsilon, V - \varepsilon) \\ \frac{q}{\varepsilon}(x - V) + 1 & \text{si } x \in [V - \varepsilon, V] \end{cases},$$

implicando que

$$c(F^{-1}(x)) = \begin{cases} v + \frac{\varepsilon}{1-q-\varepsilon}(2x-1) & \text{si } x \in [0, 1-q-\varepsilon] \\ \frac{2(V-v-2\varepsilon)}{\varepsilon}x - \frac{2(V-v-2\varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{q(V-v-2\varepsilon)}{\varepsilon} + V - \varepsilon & \text{si } x \in (1-q-\varepsilon, 1-q) \\ \frac{2\varepsilon}{q}x - \frac{(V+1)\varepsilon}{q} + 1 & \text{si } x \in [1-q, 1] \end{cases} .$$

El lector podrá notar que  $c(F^{-1}(x))$  es discontinua tanto en  $1-q-\varepsilon$  como en  $1-q$ . En el primer caso, pasa de valer  $v + \varepsilon(2 - \frac{1}{1-q-\varepsilon})$  a valer  $-\frac{(V-v-2\varepsilon)(q+2\varepsilon)}{\varepsilon} + V - \varepsilon$ , implicando que la valoración virtual no es creciente (para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño). En  $1-q$  pasa de  $-\frac{(V-v-2\varepsilon)q}{\varepsilon} + V - \varepsilon$  a  $-\frac{\varepsilon(V-1)}{q} + 1 - 2\varepsilon$ .

Siguiendo con el planchado tenemos que

$$H(s) = \begin{cases} \left. \begin{aligned} &\frac{\varepsilon}{1-q-\varepsilon}(s^2 - s) + vs && \text{si } s \in [0, 1-q-\varepsilon] \\ &\left. \begin{aligned} &\frac{(V-v-2\varepsilon)}{\varepsilon}(s^2 - (1-q-\varepsilon)^2) \\ &+ (V-\varepsilon)s - (V-v)(1-q-\varepsilon) - \varepsilon \\ &+ \frac{(V-v-2\varepsilon)}{\varepsilon}(q-2)(s - (1-q-\varepsilon)) \end{aligned} \right\} && \text{si } s \in (1-q-\varepsilon, 1-q) \end{aligned} \right\} \\ \left. \begin{aligned} &\frac{\varepsilon}{q}(s^2 - (1-q)^2) \\ &+ (1 - \frac{(V+1)\varepsilon}{q})(s - (1-q)) \\ &+ \varepsilon(V - \varepsilon - \frac{(V-v-2\varepsilon)(q+\varepsilon)}{\varepsilon}) + (v-\varepsilon)(1-q-\varepsilon) - \varepsilon \end{aligned} \right\} && \text{si } s \in [1-q, 1] \end{cases} .$$

Se podrá notar que  $H$  comienza en 0 y crece en  $(1-q-\varepsilon)$  a  $(v-\varepsilon)(1-q-\varepsilon) - \varepsilon$ ; luego continuamente decrece hasta llegar a  $\varepsilon(V - \varepsilon - \frac{(V-v-2\varepsilon)(q+\varepsilon)}{\varepsilon}) + (v-\varepsilon)(1-q-\varepsilon) - \varepsilon$  en el punto  $(1-q)$ . Posteriormente crece como una cuadrática (de manera convexa) hasta el final.

Ahora la convexa más cerca que minora la función  $H$  es una recta que parte en  $(0,0)$  hasta  $(1-q, \varepsilon(V - \varepsilon - \frac{(V-v-2\varepsilon)(q+\varepsilon)}{\varepsilon}) + (v-\varepsilon)(1-q-\varepsilon) - \varepsilon)$  siempre y cuando dicha recta no sobrepase a  $H$ . O de manera equivalente, que la recta sólo toque a  $H$  en 0 y  $1-q$ .

Para ello notar que la pendiente de dicha función es

$$\frac{\varepsilon(V - \varepsilon - \frac{(V-v-2\varepsilon)(q+\varepsilon)}{\varepsilon}) + (v-\varepsilon)(1-q-\varepsilon) - \varepsilon}{1-q} ,$$

la que es menor que el valor de la derivada en 0 en  $H$  (cuando  $\varepsilon$  es suficientemente cerca), la cual vale,

$$\frac{v(1-q-\varepsilon) - \varepsilon}{1-q-\varepsilon} .$$

Como  $H$  es una convexa en  $[0, 1-q-\varepsilon]$ , tenemos que su derivada es creciente en dicho intervalo, así no se intersecta la lineal en dicha parte. Para continuar, como  $H$  es decreciente en  $(1-q-2\varepsilon, 1-q)$  y la recta intersecta a  $H$  en  $1-q$ , concluimos que la recta intersecta  $H$  recién en  $1-q$ .



En la Figura A.1 se esboza un esquema de  $H$ , clarificando que la recta entre  $[0, 1 - q]$  y luego proseguir con  $H$  es la mayor función convexa por debajo de  $H$ .

De esta forma concluimos que

$$G(s) = \begin{cases} \frac{\varepsilon(V - \varepsilon - \frac{(V - v - 2\varepsilon)(q + \varepsilon)}{\varepsilon}) + (v - \varepsilon)(1 - q - \varepsilon) - \varepsilon}{1 - q} s & \text{si } s \in [0, 1 - q] \\ H(s) & \text{si } s \in [1 - q, 1] \end{cases}.$$

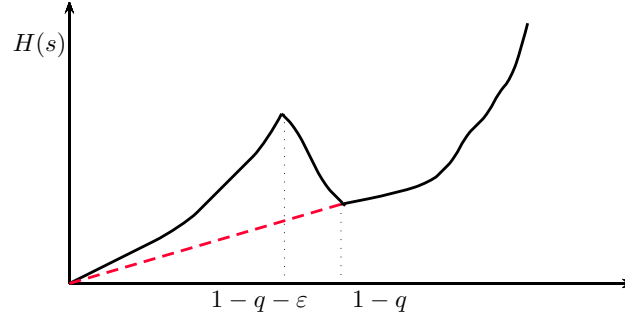


Figura A.1: En el bosquejo de la función  $H$  se aprecia en rojo que  $G$ , la convexificada de  $H$ , es distinta a  $H$  en  $(0, 1 - q)$ .

Así tenemos que

$$\bar{c}^\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon(V - \varepsilon - \frac{(V - v - 2\varepsilon)(q + \varepsilon)}{\varepsilon}) + (v - \varepsilon)(1 - q - \varepsilon) - \varepsilon}{1 - q} & \text{si } x \in [v, V - \varepsilon] \\ 1 + 2(x - V) + \frac{\varepsilon(1 - V)}{q} & \text{si } x \in (V - \varepsilon, V] \end{cases}.$$

Por lo señalado anteriormente, podemos tomar  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  concluyendo que

$$\bar{c}(x) = \begin{cases} \frac{v - Vq}{1 - q} & \text{si } x \in [v, V) \\ 1 & \text{si } x = V \end{cases}.$$

Con esto, estamos en condiciones de concluir el lema

- Si  $qV > v$ , entonces  $\bar{c}(v) < 0$ , por lo tanto el mecanismo óptimo sólo asigna a los jugadores que tienen un tipo  $V$ . Y se les cobra un precio  $V$  por la probabilidad de que el objeto se lo entregue a él (sorteo con el número de jugadores con tipo  $V$ ). Así, un mecanismo donde se cobra precio  $V$  y se asigna al azar entre los interesados es óptimo.
- Si  $qV \leq v$ , entonces un jugador de tipo  $v$  recibe con cierta probabilidad el objeto si y sólo si no hay jugadores con tipo  $V$ . En ese caso se sortea el ítem entre los jugadores de  $v$  cobrando un precio de  $v$ . Si hay dos o más jugadores con tipo  $V$ , tenemos que  $\bar{q}_i(z_i, x_{-i}) = 0$  para  $z_i < V$ , luego el diseñador le cobra a cada jugador  $V$  un precio de  $V$  dividido por la cantidad de jugadores con tipo  $V$ . El caso en que hay un único jugador  $i$  con valoración  $V$ , el análisis es un poco más delicado. A dicho jugador se le otorga con probabilidad uno el objeto; para calcular su cobro tenemos que si  $z_i < V$  entonces  $\bar{q}_i(z_i, x_{-i})$  es un sorteo entre los jugadores con tipo  $v$  lo que en valor esperado corresponde a  $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)} \frac{e^{-(1-q)\lambda t} ((1-q)\lambda T)^k}{k!}$ . Luego  $\bar{p}_i = V - \int_v^V \frac{(1 - e^{-(1-q)\lambda T})}{(1-q)\lambda T} dz$ . Concluimos que el mecanismo señalado en el enunciado del lema, otorga el máximo beneficio posible al diseñador.

□

DEMOSTRACIÓN LEMA 3.7. Como  $p(t)$  y  $m(t)$  son continuos, y  $[0, T]$  es compacto se tiene que el conjunto de los máximos de la función  $t \mapsto (V - p(t))e^{-(\mu t + m(t))}$  es compacto, luego  $t_*$  esta bien definido. Obviamente si  $t_* = 0$  entonces  $t_0 = 0$ . Por otro lado, si  $t_* > 0$  entonces  $0 \notin \arg \max_{s \in [0, T]} (V - p(s))e^{-(\mu s + m(s))}$ , lo que implica  $(V - p(0)) < (V - p(t_*))e^{-(\mu t_* + m(t_*))}$ . Más aún, como  $m(t_*) > 0$ , se tiene que  $(V - p(t_*))e^{-\mu t_*} > (V - p(t_*))e^{-(\mu t_* + m(t_*))}$ . Juntando lo anterior con la continuidad de  $t \mapsto (V - p(t))e^{-\mu t}$ , permite concluir la existencia de  $t_0$  como así también que  $t_* = 0$  si y sólo si  $t_0 = 0$ . □

DEMOSTRACIÓN LEMA 3.8. Sea  $h$  la densidad asociada a la ley  $H$ . De esta manera, la densidad condicional en  $[t, t_2]$  es

$$h_t(s) = \frac{h(s)}{\int_t^{t_2} h(\tau) d\tau}, \text{ para todo } t \in (t_1, t_2) \text{ y } s \in [t, t_2]$$

por lo que la distribución condicional es

$$H_t(s) = \frac{H(s) - H(t)}{1 - H(t)}, \text{ para todo } t \in (t_1, t_2) \text{ y } s \in [t, t_2]. \quad (\text{A.1})$$

En segundo lugar, para poder calcular  $\alpha(t)$  es necesario conocer la densidad de los tiempos de llegadas de los jugadores entre  $(t_1, t)$ . Así, para  $t \in (t_1, t_2)$  tenemos que la densidad de los tiempos de llegadas en un proceso de Poisson no homogéneo entre  $(t_1, t)$  esta dado por  $dF_t(x) = \frac{q\lambda(x)}{m(t) - m(t_1)} dx$ . Además, para todo  $k \in \mathbb{N}$  tenemos que la probabilidad de que arriben otros  $k$  clientes a la tienda es  $Q_k(t) = e^{-m(t) + m(t_1)} (m(t) - m(t_1))^k / k!$ . Por lo tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= e^{-m(t_1)} \mathbb{P}(\text{ítem esta disponible en } t \mid \text{esta disponible en } t_1) \\ &= e^{-m(t_1)} \sum_{k \geq 0} Q_k(t) \int_{t_1}^t \cdots \int_{t_1}^t \prod_{i=1}^k \frac{1 - H(t)}{1 - H(x_i)} dF_t(x_1) \cdots dF_t(x_k) \\ &= e^{-m(t_1)} \sum_{k \geq 0} Q_k(t) (1 - H(t))^k \left( \int_{t_1}^t \frac{1}{1 - H(x)} dF_t(x) \right)^k \\ &= e^{-m(t_1)} \sum_{k \geq 0} Q_k(t) \left( (1 - H(t)) \int_{t_1}^t \frac{1}{1 - H(x)} dF_t(x) \right)^k \\ &= e^{-m(t_1)} \sum_{k \geq 0} e^{-(m(t) - m(t_1))} \frac{\left( (m(t) - m(t_1)) (1 - H(t)) \int_{t_1}^t \frac{1}{1 - H(x)} dF_t(x) \right)^k}{k!} \\ &= e^{-m(t_1)} \exp \left[ (m(t) - m(t_1)) \left( -1 + (1 - H(t)) \int_{t_1}^t \frac{1}{1 - H(x)} dF_t(x) \right) \right] \\ &= \exp \left( -m(t) + (1 - H(t)) \int_{t_1}^t \frac{q\lambda(x)}{1 - H(x)} dx \right). \end{aligned}$$

□

DEMOSTRACIÓN LEMA 3.9. Procederemos de manera inversa, imponiendo en primer lugar que la utilidad debe ser constante en todo el intervalo y luego analizaremos las implicancias de dicha condición. Como nadie ha comprado antes de  $t_1$ , tenemos que  $\alpha(t_1) = e^{-m(t_1)}$  y luego la condición  $U(t) = U(t_1)$  equivale a  $(V - p(t))e^{-\mu t}\alpha(t) = (V - p(t_1))e^{-\mu t_1}\alpha(t_1)$ , lo que conlleva

$$e^{m(t_1)}\alpha(t) = \frac{(V - p(t_1))e^{-\mu t_1}}{(V - p(t))e^{-\mu t}} = \frac{g_p(t_1)}{g_p(t)} \quad \text{for all } t \in (t_1, t_2].$$

Remarcamos que el hecho de suponer que  $g_p(t)$  es creciente es consistente con que  $\alpha(t)$ , la probabilidad de que el objeto este disponible en  $t$ , sea decreciente.

Siguiendo con la demostración, a partir del Lema 3.8 obtenemos la siguiente ecuación

$$\frac{g_p(t_1)}{g_p(t)} = \exp\left(-m(t) + m(t_1) + (1 - H(t)) \int_{t_1}^t \frac{q\lambda(x)dx}{1 - H(x)}\right),$$

donde la variable desconocida es  $H$ . Lo último se puede reescribir como

$$\ln\left(\frac{g_p(t_1)}{g_p(t)}\right) + m(t) - m(t_1) = (1 - H(t)) \int_{t_1}^t \frac{q\lambda(x)dx}{1 - H(x)} \quad \text{para todo } t \in (t_1, t_2].$$

Usando el cambio de variables  $u: t \mapsto \int_{t_1}^t \frac{q\lambda(x)dx}{1 - H(x)}$ , tenemos que  $u'(t) = q\lambda(t)/(1 - H(t))$  lo que transforma la última ecuación integral en la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{q\lambda(t)}{\ln\left(\frac{g_p(t_1)}{g_p(t)}\right) + m(t) - m(t_1)} = \frac{u'(t)}{u(t)}.$$

Lo último se resuelve integrando de  $(t_1 + t_2)/2$  a  $t$ , lo que entrega

$$\ln(u(t)) - \ln(u((t_1 + t_2)/2)) = \int_{(t_1+t_2)/2}^t \frac{q\lambda(x)dx}{\ln\left(\frac{g_p(t_1)}{g_p(x)}\right) + m(x) - m(t_1)}.$$

Así, definiendo  $K = u((t_1 + t_2)/2) = \int_{t_1}^{(t_1+t_2)/2} \frac{q\lambda(x)dx}{1 - H(x)} > 0$ , se llega a que

$$u(t) = K \exp\left(\int_{(t_1+t_2)/2}^t \frac{q\lambda(x)dx}{\ln\left(\frac{g_p(t_1)}{g_p(x)}\right) + m(x) - m(t_1)}\right),$$

y por lo tanto,

$$(\forall t \in (t_1, t_2)) \quad \frac{q\lambda(t)}{1 - H(t)} = u'(t) = \frac{Kq\lambda(t) \exp\left(\int_{(t_1+t_2)/2}^t \frac{q\lambda(x)dx}{\ln\left(\frac{g_p(t_1)}{g_p(x)}\right) + m(x) - m(t_1)}\right)}{\ln\left(\frac{g_p(t_1)}{g_p(t)}\right) + m(t) - m(t_1)}, \quad (\text{A.2})$$

obteniendo (3.6).

Como (3.5) implica  $g_p(t_1)e^{-m(t_1)} = g_p(t_2)e^{-m(t_2)}$ , es claro apreciar que el término a la derecha de (A.2) converge a infinito cuando  $t \rightarrow t_2$  por lo que tenemos  $H(t_2) = 1$ . Además

como  $p(t)$  es continua se tiene que  $g_p(t)$  es continua, implicando que  $H(t)$  es continua en  $(t_1, t_2]$ .

Respecto a la monotonía de  $H$ , supongamos por un instante que  $p(t)$  es derivable. En este escenario, llegamos a que

$$H'(t) = \frac{g_p'(t)}{g_p(t)K \exp\left(-\int_t^{(t_1+t_2)/2} \frac{q\lambda(x)dx}{\ln\left(\frac{g_p(t_1)}{g_p(x)}\right) + m(x) - m(t_1)}\right)} \geq 0.$$

Para el caso general, basta simplemente considerar una sucesión  $(g_p^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^\infty([0, T])$  crecientes tal que  $g_p^n \rightarrow g_p$  converge uniformemente en  $[0, T]$ .

Para terminar, resta probar que la familia definida en (3.7) realmente son distribuciones. Para esto, dado que  $H$  es continua, creciente en  $(t_1, t_2]$ , tenemos que  $H_t$  es continua y creciente en  $[t, t_2]$  satisfaciendo que  $H_t(t) = 0$  y, dado que  $H(t_2) = 1$ ,  $H_t(t_2) = 1$ ; concluyendo así que para todo  $t \in (t_1, t_2)$   $H_t$  genera una medida de probabilidad en  $[t, t_2]$ .  $\square$

DEMOSTRACIÓN LEMA 3.12. Para comenzar, veamos que el conjunto  $I$  es compacto, o equivalentemente, que  $I$  es cerrado. En efecto, sea una sucesión  $x_n$  en  $I$  tal que converge a  $x$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , gracias a la continuidad de  $T(s) = (V - p(s))e^{-(\mu s + m(s))}$  existe  $M > 0$  tal que

$$\max_{s \geq x_n} T(s) + \varepsilon \geq \max_{s \geq x} T(s) \quad \text{para todo } n \geq M.$$

Como  $x_n \in I$  tenemos que  $T(x_n) + \varepsilon \geq \max_{s \geq x} T(s)$  para cualquier  $n \geq M$ . Tomando  $n \rightarrow \infty$  concluimos que  $x \in \arg \max_{s \geq x} T(s)$ , implicando  $x \in I$ .

A partir de la compacidad se desprende directamente el lema. Sea  $t \in [0, T]$  y definimos  $\bar{t} = \min\{s \geq t : s \in I\}$ . Claramente si  $t = \bar{t}$ , entonces  $t \in I$ . Así, asumamos que  $t < \bar{t}$ . En este caso, si  $\bar{t} = t_*$  entonces  $t \in [0, t_*]$ . De otra forma, tiene que ocurrir que existe  $s \in I$  tal que  $s < t$ . Así definiendo,  $t_1 = \max\{s \leq t \mid s \in I\}$  y  $t_2 = \bar{t}$ , estos puntos satisfacen, respectivamente, (3.5) y (3.4) por lo tanto  $t \in (t_1, t_2)$ .  $\square$

# Apéndice B

## Demostraciones Capítulo 4

DEMOSTRACIÓN LEMA 4.2. El lector podrá apreciar que, en caso de existir  $u^* \in [0, \nu]$  que este indiferente entre apostar el remate a primer precio o competir en  $p_t$  contra los tipos mayores o iguales a él, el resto de la demostración será análoga que en el caso de valoraciones distribuidas de manera uniforme en  $[0, 1]$ . Por lo tanto lo único que falta para garantizar es la existencia de un  $u^*$  que cumpla lo anterior.

Dada la estrategia a partir de un cierto  $u^*$ , tenemos que la utilidad de un jugador con tipo  $u^*$  cuando apuesta según el equilibrio en un remate primer precio es:

$$\left( u^* - \frac{\int_v^{u^*} z f(z) dz}{F(u^*)} \right) \frac{F(u^*)}{F(\nu)}.$$

Por otro lado ir a competir a precio  $p_t$  otorga una utilidad esperada de

$$(u^* - p_t) \left( \frac{F(u^*)}{F(\nu)} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{F(u^*)}{F(\nu)} \right) \right).$$

Luego la diferencia entre ambas utilidades es

$$u^* F(u^*) - 2 \int_0^{u^*} z f(z) dz - u^* F(\nu) + p_t F(u^*) + p_t F(\nu)$$

Si la función  $g(u^*) = u^* F(u^*) - 2 \int_v^{u^*} z f(z) dz - u^* F(\nu) + p_t F(u^*) + p_t F(\nu)$  es tal que para  $u^* \in [0, \nu]$  se tiene que  $g(u^*) > 0$ , entonces todo jugador preferirá seguir la estrategia de remate que el comprar en  $p_t$ , incluso cuando en la probabilidad de obtención es mayor que el que se tiene en un remate primer precio. Así, seguir la estrategia del remate primer precio es equilibrio y por lo tanto podemos tomar  $u^* = \nu + 1$ .

En el caso que  $g$  posea algún cero (notar que  $g$  es continua) entonces, tomando  $u^*$  y razonando como para el caso de la uniforme concluimos que la estrategia definida en el lema es equilibrio.  $\square$

DEMOSTRACIÓN PROPOSICIÓN 4.3. Veamos que si  $u' < u$ , entonces para todo  $z' \in \text{supp}(b(u'))$  y  $z \in \text{supp}(b(u))$  se tiene que  $z' < z$ . Razonemos por contradicción: Sea  $x(z)$  la probabilidad

de que el jugador se adjudique el ítem (notar que sólo depende de la apuesta). Ahora, sea  $U_i(u, z)$  la utilidad esperada del jugador  $i$  en el subjuego si espera hasta  $z$  y valora el objeto en  $u$ , i.e.,  $U_i(u, z) = (u - z)x(z)$ . Ahora notemos que:

$$\begin{aligned} U_i(u, z) &= U_i(u', z) + (u - u')x(z) \\ U_i(u, z') &= U_i(u', z') + (u - u')x(z') . \end{aligned}$$

Como  $z \in \text{supp}(b(u))$  entonces por definición tenemos que  $U_i(u, z') \leq U_i(u, z)$ . Análogamente, como  $z' \in \text{supp}(b(u'))$  tenemos que  $U_i(u', z) \leq U_i(u', z')$ . Ahora como por contradicción tenemos el supuesto que  $z' < z$ , entonces  $x(z) \leq x(z')$ . Con esto vemos que el único caso posible que se cumplan las dos ecuaciones anteriores es que  $U(u, z) = U(u, z')$  y  $U_i(u', z) = U_i(u', z')$  y  $x(z) = x(z')$ . Ahora esto implica que  $z = z'$  (contradicción).  $\square$

DEMOSTRACIÓN TEOREMA 4.6. La demostración utilizará la misma técnica que para el caso de valoraciones  $U[0, 1]$ .

Recordemos que la utilidad esperada en la primera etapa para un jugador  $u$  que compra en  $z$ , aprende bayesianamente la valoración de su compañero (en caso de perder) y juega en el subjuego con la estrategia definida en la Proposición 4.2 es:

$$\begin{aligned} U_1(u, z) &= (u - z)F(b^{-1}(z))^2 \\ &+ \int_z^V \mathbf{1}_{\{u \leq u^*(b^{-1}(q), q)\}} \left( u - \frac{\int_v^u z f(z) dz}{F(u)} \right) \mathbb{P}(u \geq v_{-i} \mid b(v_{-i}) \leq q) dG(q) \\ &+ \int_z^V \mathbf{1}_{\{u \geq u^*(b^{-1}(q), q)\}} (v - q) \mathbb{P}(v_{-i} \leq u^*(b^{-1}(q), q) \mid b(v_{-i}) \leq q) dG(q) \\ &+ \int_z^V \frac{1}{2} \mathbb{P}(v_{-i} \geq u^*(b^{-1}(q), q) \mid b(v_{-i}) \leq q) dG(q) , \\ \text{con } G(q) &= F(b^{-1}(q))^2 . \end{aligned}$$

Como suponemos que  $b$  es estrictamente creciente, entonces tenemos que

$$\mathbb{P}(u \geq v_{-i} \mid b(v_{-i}) \leq q) = \frac{\mathbb{P}(u \geq v_{-i}, v_{-i} \leq b^{-1}(q))}{\mathbb{P}(v_{-i} \leq b^{-1}(q))} = \frac{\mathbb{P}(u \geq v_{-i})}{\mathbb{P}(v_{-i} \leq b^{-1}(q))} ,$$

donde la segunda igualdad se debe al supuesto que  $b(u) \leq u$ .

Con la ecuación anterior y este último análisis, bajo el supuesto de que la función es diferenciable, imponiendo condiciones de primer orden ( $z^* = b(u)$ ) llegamos a:

$$0 = -F(u)^2 b'(u) + 2(u - b(u))F(u)f(u) - 2F(u)f(u) \begin{cases} u - \frac{\int_0^u z f(z) dz}{F(u)} & \text{si } u < u^*(u, b(u)) \\ \frac{(u - b(u))(F(u^*) + F(u))}{2F(u)} & \text{si } u \geq u^*(u, b(u)) \end{cases} .$$

Si  $u < u^*(u, b(u))$  entonces

$$b'(u) = \frac{2f(u)}{F(u)^2} [-b(u)F(u) + \int_0^u z f(z) dz] ;$$

por el hecho de que  $u^* \leq u^*(u, b(u))$  y el supuesto de  $F$  es convexa, tenemos que la función  $g$  definida en (4.3) es tal que  $g(u) > 0$  cuando  $\nu = u$  y  $p_t = b(u)$ . Lo anterior tiene como consecuencia que  $-b(u)F(u) + \int_0^u z f(z) dz < 0$ . Así,  $b' < 0$ , contradiciendo nuestro supuesto.

Ahora para el caso contrario tenemos que  $b'(u) = h(u, b(u))$  donde  $h$  esta definida en el Supuesto 4.5. Imponiendo que  $b(0) = 0$ , dicha ecuación posee una solución creciente. Veamos que la solución satisface todas nuestras hipótesis para concluir la existencia de equilibrio. Como  $b'(u) > 0$ , tenemos que

$$2(u - b(u))F(u)f(u) \left[ 1 - \frac{F(u^*) + F(u)}{2F(u)} \right] \geq 0$$

Lo anterior implica que  $F(u) \geq F(u^*)$  y gracias a la monotonía de  $F$  se concluye que  $u \geq u^*(u, b(u))$ . Más aún,  $b' > 0$  si y sólo si  $u > u^*(u, b(u))$ .

Como  $b$  es creciente y parte en 0, es claro ver que el problema de optimización (en  $z$ )  $U_1(u, z)$  posee un máximo interior en  $[0, V]$ . Y como el único punto de la derivada se anula es en  $b(u)$ , concluimos que dicho punto es máximo. De esta forma la mejor respuesta de todo jugador  $u$  es seguir  $b(u)$ .

Lo anterior nos permite concluir que

$$\sigma^*(u, h_t) = \begin{cases} b(u) & \text{si } h_t = \emptyset \\ p_t & \text{si } h_t = p_t \text{ y } u > u^*(b^{-1}(p_t), p_t) \\ \frac{\int_0^u z f(z) dz}{F(u)} & \text{si } h_t = p_t \text{ y } u \leq u^*(b^{-1}(p_t), p_t) \end{cases} ,$$

y creencias sobre las valoraciones  $\alpha(h_t) = F(\cdot | b(v_i) \leq z)$  (donde  $z = p_t$  si  $h_t \neq \emptyset$  y  $z = V$  en el caso contrario), es un EBP del juego.

Para terminar notemos que al ser  $b$  creciente tendremos que  $b' > 0$  (pues la función es diferenciable), luego para  $u > 0$  tendremos que  $u > u^*(u, b(u))$ . De esta forma, la función  $g$  definida en (4.3) es tal que  $g(u) < 0$  cuando  $\nu = u$  y  $p_t = b(u)$ . Esto tiene como consecuencia que  $b(u) < \frac{\int_0^u z f(z) dz}{F(u)}$  y por lo tanto existirán eventos de probabilidad positiva tales que las apuestas del subjuego de los tres jugadores son mayores que el precio de venta del primer ítem. Por lo tanto, el juego no será eficiente.  $\square$