



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

**EVALUACIÓN DE ESTRATEGIAS DE SINTONIZACIÓN DE  
CONTROLADORES FRACCIONARIOS PARA PLANTA NO LINEAL:  
SISTEMA DE ESTANQUES**

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,  
MENCION ELÉCTRICA

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL ELÉCTRICO

**CRISTIAN ANDRÉS JÁUREGUI SALINAS**

PROFESOR GUÍA:  
DR. MANUEL A. DUARTE MERMOUD

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
DR. MARCOS E. ORCHARD CONCHA  
DR. JOSÉ R. PÉREZ CORREA

SANTIAGO DE CHILE  
2016

RESUMEN DE TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA ING.,  
MENCIÓN ELÉCTRICA Y AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL ELÉCTRICO.

AUTOR: CRISTIAN ANDRÉS JÁUREGUI SALINAS

PROFESOR GUÍA: DR. MANUEL A. DUARTE MERMOUD

FECHA: 2016

## **Evaluación de Estrategias de Sintonización de Controladores Fraccionarios para Planta No Lineal: Sistema de Estanques**

El cálculo fraccionario presenta un nuevo escenario de aplicaciones para la Ingeniería de Control, a través de la extensión de los controladores de orden entero al caso de orden fraccionario; al respecto, se deben investigar sus ventajas y desventajas al enfrentarse a distintos problemas de control. En este contexto, el Sistema de Estanques del Laboratorio de Automática presenta una oportunidad para validar experimentalmente estrategias de control para un sistema de tipo No Lineal, tanto en el caso SISO de control de nivel en estanque cónico, como MIMO considerando la temperatura del líquido del sistema, ambas variables de gran importancia en múltiples aplicaciones industriales.

El objetivo de este trabajo es aplicar distintas estrategias de sintonización de parámetros de controladores de la familia PID, de orden entero y fraccionario, para compararlas entre sí en su aplicación en el Sistema de estanques; además, se busca definir caso a caso las posibles mejoras que se introducen al considerar integración y derivación fraccionaria a un sistema de control.

Para esto, se desarrolla una modelación fenomenológica del sistema en estudio, la cual, a través de las ecuaciones diferenciales determinadas, evidencia la no linealidad de los estados del sistema; a partir de esto, se realiza una implementación computacional en Simulink. Luego, se aplican diferentes métodos de sintonización de parámetros para los casos monovariante y multivariante, comparándose entre sí mediante simulaciones y realizando validación experimental de aquellos casos que presenten ventajas de control apreciables.

A partir de la introducción de índices de desempeño, se determina que la mejor estrategia de sintonización de parámetros es mediante optimización PSO con la implementación del modelo no lineal, en desmedro de los métodos LGR, Z&N y optimización en Frecuencia que hacen uso de linealizaciones del sistema en torno a puntos de operación. Además, en el caso de control SISO, considerando el comportamiento global de control  $IAE$  y la energía  $ISI$ , el mejor resultado corre por cuenta del control fraccionario tanto en simulación como experimentalmente; para el caso MIMO, considerando ambos índices mencionados junto al sobrepaso  $MOV$ , resulta que los controladores aplicados en un esquema centralizado obtienen mejor desempeño que sus pares descentralizados, y, tanto en simulación como en el sistema real, el mejor controlador es PIOF.

Como conclusión, se desprende que a través de ecuaciones fenomenológicas se puede caracterizar la dinámica de cualquier sistema, inclusive aquellas de tipo no lineal. Por otra parte, el procedimiento de optimización PSO presenta una ventaja sustancial para la determinación de parámetros, ya que hace uso de esta dinámica completa, sin recurrir a aproximaciones. Finalmente, los esquemas de control fraccionario presentan una nueva alternativa para mejorar el control de sistemas, lo que llevado a la industria puede significar mejoras sustanciales en los beneficios de un proceso.

*Dedicado a mis padres, hermanos y familia.  
A los Gordobeses.  
Y a todo aquel que, durante estos años,  
haya sabido sacarme una sonrisa.*

# Agradecimientos

En este punto de mi desarrollo personal, me resulta inevitable recordar ciertos momentos de mi vida que han marcado un precedente para llegar a esta etapa; mi primer día de clases en el Instituto La Salle, cuando quedé seleccionado para entrar al Nacional o cuando supe que podría estudiar Ingeniería en La Chile. Decir que recuerdo cada uno de los detalles sería faltar a la verdad, pero lo que sí me resulta inconfundible, en cada una de esas ocasiones, es ese hormigueo, los nervios de saber que era momento de enfrentar una nueva etapa y la ansiedad de hacerlo de la mejor forma posible. Es esa misma sensación la que me embarga en estos momentos, al escribir estas palabras.

Sin embargo, al observar el camino recorrido no me deja indiferente toda la gente que me acompañó en esta larga travesía, quienes son tan partícipes como yo de cada uno de mis éxitos y logros, ya que sin su apoyo y ayuda jamás hubiese logrado ser quien soy hoy en día, por lo que les debo mi eterno agradecimiento.

En primer lugar, quisiera agradecer a mis padres, Marta y Héctor, por ser siempre un apoyo fundamental en mi vida y por todo el esfuerzo que han dedicado a lo largo de estos años a pesar de todas las dificultades. También le doy las gracias a mis hermanos, Camila y Claudio, por haberme aguantado en los momentos de mayor estrés y haberme facilitado las cosas en innumerables ocasiones. A mis abuelos y tíos por su ayuda y consejos, y por ser muchas veces ejemplos a seguir, tanto académicamente como en la vida. Además, sería muy injusto de mi parte no mencionar a quienes indirectamente también han colaborado en este proceso, mis amigos, con quienes he compartido momentos muy buenos y han sido soporte en los malos; entre estos agradezco a los que conocí en la U y a los que me acompañan desde el colegio, pero muy especialmente a los Gordobeses, el mejor grupo de amigos que nadie hubiese podido tener, a quienes les debo muchas cosas, entre las que se cuenta que esta etapa haya sido más larga de lo esperado, pero sin duda absolutamente más llevadera. También debo agradecer a mis profesores; a los del Nacional, quienes además de entregarme conocimientos, me ayudaron a forjar el carácter que me ha permitido enfrentar los desafíos de la vida, y a los de la universidad, quienes me entregaron la motivación necesaria para cumplir con este ciclo.

Finalmente, quisiera agradecer a todas esas personas, que quizás se me quedan un poco en el tintero, pero que han sido parte importante de todo esto, con los que he compartido risas durante estos años y que supieron estar presentes en esta parte de mi vida, dejando su indeleble huella en mí.

# Tabla de contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	2
1.2. Estado del Arte . . . . .	3
1.3. Hipótesis y Objetivos . . . . .	6
1.4. Estructura de la Tesis . . . . .	7
<b>2. Fundamentos de Cálculo y Control Fraccionario</b>	<b>8</b>
2.1. Conceptos Básicos de Cálculo Fraccionario . . . . .	8
2.1.1. Definiciones Fundamentales . . . . .	9
2.1.2. Transformada de Laplace en Cálculo Fraccionario . . . . .	13
2.2. Control PID . . . . .	14
2.2.1. PID de Orden Entero . . . . .	15
2.2.2. PID de Orden Fraccionario . . . . .	17
2.3. Métodos de Sintonización de Controladores . . . . .	18
2.3.1. Lugar Geométrico de las Raíces . . . . .	18
2.3.2. Método Ziegler-Nichols para PID . . . . .	20
2.3.3. Método tipo Ziegler-Nichols para PIDOF . . . . .	22
2.3.4. Optimización por Enjambre de Partículas . . . . .	25
2.4. Desempeño de Controladores . . . . .	28
2.4.1. Especificaciones de Respuesta Transitoria . . . . .	29
2.4.2. Índices de Desempeño Global . . . . .	31
2.5. Linealización de Sistemas No Lineales . . . . .	32
<b>3. Modelación Fenomenológica Sistema de Estanques</b>	<b>35</b>
3.1. Descripción del Sistema . . . . .	35
3.2. Subsistema de Nivel . . . . .	38
3.2.1. Caracterización del volumen $V$ . . . . .	39
3.2.2. Flujo de entrada $F_{in}$ . . . . .	40
3.2.3. Flujo de salida $F_{out}$ . . . . .	41
3.2.4. Modelo Fenomenológico de Nivel . . . . .	42
3.3. Subsistema de Temperatura . . . . .	43
3.3.1. Modelo Fenomenológico de Temperatura . . . . .	43
3.3.2. Transferencia de Calor . . . . .	45
3.3.3. Variables del Subsistema de Temperatura . . . . .	47
3.3.4. Modelación de Temperaturas . . . . .	51
3.3.5. Parámetros del Modelo . . . . .	53

3.4.	Implementación de Modelo de Sistema de Estanques . . . . .	56
3.4.1.	Resumen del Modelo . . . . .	56
3.4.2.	Plantilla de Simulink . . . . .	58
3.4.3.	Resultados de Implementación . . . . .	62
3.5.	Linealización del Modelo . . . . .	67
<b>4.</b>	<b>Control de Nivel (SISO)</b>	<b>72</b>
4.1.	Sintonización LGR . . . . .	72
4.2.	Sintonización Ziegler & Nichols . . . . .	76
4.2.1.	Curva de Reacción . . . . .	76
4.2.2.	Límite de Estabilidad . . . . .	79
4.3.	Sintonización PSO . . . . .	81
4.4.	Resultados Experimentales . . . . .	85
<b>5.</b>	<b>Control de Nivel y Temperatura (MIMO)</b>	<b>88</b>
5.1.	Consideraciones Preliminares . . . . .	88
5.1.1.	Intervalo de Operación . . . . .	89
5.1.2.	Esquemas de Control MIMO . . . . .	90
5.2.	Modulación $q_{in}$ . . . . .	91
5.2.1.	Modulación On/Off . . . . .	93
5.2.2.	Modulación PWM . . . . .	94
5.3.	Sintonización en Frecuencia . . . . .	95
5.4.	Sintonización PSO . . . . .	103
5.5.	Resultados Experimentales . . . . .	115
<b>6.</b>	<b>Conclusiones y Trabajo Futuro</b>	<b>121</b>
6.1.	Conclusiones . . . . .	121
6.2.	Publicaciones Generadas . . . . .	124
6.3.	Trabajo Futuro . . . . .	124
	<b>Bibliografía</b>	<b>126</b>
<b>A.</b>	<b>Descripción de Instalaciones</b>	<b>133</b>
<b>B.</b>	<b>Experimentos para modelación de Sistema de Estanques</b>	<b>135</b>
B.1.	Resultado de experimentos Modelación Subsistema de Nivel . . . . .	135
B.2.	Procedimiento de Ajuste de Subsistema de Temperatura . . . . .	137
<b>C.</b>	<b>Control SISO</b>	<b>141</b>
C.1.	Sintonización mediante LGR . . . . .	141
C.2.	Sintonización mediante Z&N . . . . .	143
C.3.	Sintonización mediante optimización PSO . . . . .	144
C.4.	Resultados experimentales . . . . .	146
<b>D.</b>	<b>Control MIMO</b>	<b>149</b>
D.1.	Intervalo de Operación . . . . .	149
D.2.	Modulación $q_{in}$ . . . . .	150
D.3.	Sintonización en Frecuencia . . . . .	152

D.4. Sintonización mediante optimización PSO . . . . .	156
D.5. Resultados experimentales . . . . .	160

# Índice de figuras

2.1.	Representación gráfica de Derivada Fraccionaria según Riemman-Liouville. . . . .	11
2.2.	Representación gráfica de Derivada Fraccionaria según Caputo. . . . .	11
2.3.	Lazo de realimentación en un esquema de control. . . . .	14
2.4.	Esquema gráfico de aportes de PID de orden entero y PID de orden fraccionario [28]. . . . .	17
2.5.	Diagrama de sistema de control. . . . .	18
2.6.	Curva de Reacción de un sistema FOPDT para método ZN. . . . .	21
2.7.	Lazo cerrado con control proporcional para Límite de Estabilidad. . . . .	22
2.8.	Límite de Estabilidad de un sistema para método ZN. . . . .	22
2.9.	Especificaciones de respuesta transitoria frente a entrada escalón. . . . .	29
3.1.	Diagrama ilustrativo sistema de estanques. . . . .	36
3.2.	Simbología de instrumentación del sistema de estanques. . . . .	36
3.3.	Variables generales del sistema de estanques. . . . .	37
3.4.	Variables generlaes del Subsistema de Nivel. . . . .	38
3.5.	Curva de volumen $V$ como función del nivel de agua $h_c$ . . . . .	39
3.6.	Ajuste de parámetros $\alpha_1$ y $\alpha_2$ según datos experimentales. . . . .	41
3.7.	Esquema genérico para modelación de temperatura. . . . .	44
3.8.	Proceso de transferencia de calor por conducción. . . . .	45
3.9.	Proceso de transferencia de calor por convección. . . . .	47
3.10.	Variables asociadas al estanque cónico. . . . .	48
3.11.	Variables asociadas al estanque de recirculación. . . . .	49
3.12.	Resultados de ajuste paramétrico en pruebas de enfriamiento. . . . .	55
3.13.	Máscara de implementación de modelo en Simulink . . . . .	58
3.14.	Implementación general de sistema de estanques. . . . .	59
3.15.	Implementación de ajuste de volumen $V$ de modelo de sistema de estanques. . .	60
3.16.	Implementación de subsistema de nivel de sistema de estanques. . . . .	60
3.17.	Implementación de modelo de temperatura de estanque cónico de sistema de estanques. . . . .	61
3.18.	Implementación de modelo de temperatura de estanque de recirculación de sistema de estanques. . . . .	62
3.19.	Resultados de simulación de modelo de sistema de estanques - Prueba 1. . . . .	63
3.20.	Resultados de simulación de modelo de sistema de estanques - Prueba 2. . . . .	64
3.21.	Resultados de simulación de modelo de sistema de estanques - Prueba 3. . . . .	65
3.22.	Resultados de simulación de modelo de sistema de estanques - Prueba 4. . . . .	66



4.1. Resultados en simulación de controladores sintonizados con LGR. . . . .	75
4.2. Curva de Reacción para método Z&N. . . . .	77
4.3. Resultados en simulación de controladores sintonizados con Curva de Reacción Z&N. . . . .	78
4.4. Límite de Estabilidad para método Z&N. . . . .	79
4.5. Resultados en simulación de controladores sintonizados con Límite de Estabilidad Z&N. . . . .	80
4.6. Lazo de control SISO para optimización PSO. . . . .	81
4.7. Referencia de $h_c$ para optimización PSO. . . . .	82
4.8. Resultados en simulación de controladores sintonizados con PSO. . . . .	83
4.9. Resultados experimentales de controladores sintonizados con PSO. . . . .	86
5.1. Lazo de control MIMO centralizado. . . . .	91
5.2. Sección de lazo de control $T_c$ . . . . .	92
5.3. Resultados en simulación de modulación SM. . . . .	92
5.4. Resultados en simulación de modulación On/Off. . . . .	93
5.5. Resultados en simulación de modulación PWM. . . . .	94
5.6. Resultados en simulación de control MIMO $h_c$ sintonizado en frecuencia - Prueba 1. . . . .	99
5.7. Resultados en simulación de control MIMO $T_c$ sintonizado en frecuencia - Prueba 1. . . . .	100
5.8. Resultados en simulación de control MIMO $h_c$ sintonizado en frecuencia - Prueba 2. . . . .	101
5.9. Resultados en simulación de control MIMO $T_c$ sintonizado en frecuencia - Prueba 2. . . . .	102
5.10. Referencia de $h_c$ y $T_c$ para optimización PSO MIMO. . . . .	104
5.11. Resultados en simulación de control MIMO $h_c$ sintonizado con PSO descentralizado - Prueba 1. . . . .	107
5.12. Resultados en simulación de control MIMO $T_c$ sintonizado con PSO descentralizado - Prueba 1. . . . .	107
5.13. Resultados en simulación de control MIMO $h_c$ sintonizado con PSO centralizado - Prueba 1. . . . .	108
5.14. Resultados en simulación de control MIMO $T_c$ sintonizado con PSO centralizado - Prueba 1. . . . .	108
5.15. Resultados en simulación de control MIMO $h_c$ sintonizado con PSO descentralizado - Prueba 2. . . . .	111
5.16. Resultados en simulación de control MIMO $T_c$ sintonizado con PSO descentralizado - Prueba 2. . . . .	111
5.17. Resultados en simulación de control MIMO $h_c$ sintonizado con PSO centralizado - Prueba 2. . . . .	112
5.18. Resultados en simulación de control MIMO $T_c$ sintonizado con PSO centralizado - Prueba 2. . . . .	112
5.19. Resultados experimentales de control MIMO $h_c$ sintonizado con PSO descentralizado - Prueba 1. . . . .	116
5.20. Resultados experimentales de control MIMO $T_c$ sintonizado con PSO descentralizado - Prueba 1. . . . .	116

5.21. Resultados experimentales de control MIMO $h_c$ sintonizado con PSO centralizado	
- Prueba 1. . . . .	117
5.22. Resultados experimentales de control MIMO $T_c$ sintonizado con PSO centralizado	
- Prueba 1. . . . .	117
A.1. Sistema de Estanques Laboratorio de Automática. . . . .	133
A.2. Bomba y Variador de Frecuencia. . . . .	134
A.3. Válvula manual y Sensor de presión. . . . .	134
A.4. Controlador Opto 22 e interfaz computacional. . . . .	134
B.1. Pruebas experimentales de llenado para ajuste de $F_{in}$ . . . . .	138
B.2. Pruebas experimentales de vaciado para ajuste de $F_{out}$ . . . . .	139
B.3. Datos de pruebas de enfriamiento para ajuste de parámetros de subsistema de temperatura. . . . .	139
B.4. Convergencia paramétrica de subsistema de temperatura en optimización PSO. . . . .	140
C.1. Lugar Geométrico de las Raíces. . . . .	142
C.2. Ampliaciones de resultados en simulación de controladores sintonizados con PSO. . . . .	145
C.3. Ampliaciones de resultados en simulación de controladores sintonizados con PSO. . . . .	147
D.1. Modulaciones On/Off de $q_{in}$ . . . . .	150
D.2. Ejemplo de modulación PWM $q_{in}$ . . . . .	151
D.3. Modulaciones PWM de $q_{in}$ con muestreo $T = 2$ [s]. . . . .	152
D.4. Convergencia de algoritmo PSO MIMO en sintonización de controladores descentralizados. . . . .	156
D.5. Convergencia de algoritmo PSO MIMO en sintonización de controladores centralizados. . . . .	157

# Índice de tablas

2.1.	Reglas de sintonización ZN para Curva de Reacción. . . . .	21
2.2.	Reglas de sintonización ZN para Límite de Estabilidad. . . . .	22
2.3.	Especificaciones para método Curva de Reacción de sintonización PIDOF. . . . .	24
2.4.	Parámetros PIDOF para método Curva de Reacción para $0,1 \leq T \leq 5$ . . . . .	24
2.5.	Parámetros PIDOF para método Curva de Reacción para $5 \leq T \leq 50$ . . . . .	25
2.6.	Parámetros PIDOF para método Límite de Estabilidad para $K_c P_c \leq 64$ . . . . .	25
2.7.	Parámetros PIDOF para método Límite de Estabilidad para $64 \leq K_c P_c \leq 640$ . . . . .	25
3.1.	Ajuste de $\beta$ para cada prueba de vaciado. . . . .	42
3.2.	Resumen de parámetros para modelo fenomenológico del subsistema de nivel. . . . .	43
3.3.	Parámetros del líquido para modelo fenomenológico del subsistema de temperatura. . . . .	53
3.4.	Parámetros dimensionales de estanques para modelo fenomenológico del subsistema de temperatura. . . . .	53
3.5.	Condiciones de pruebas de enfriamiento para ajuste paramétrico. . . . .	55
3.6.	Parámetros de flujos calóricos por conducción y convección. . . . .	56
3.7.	Resumen de parámetros de modelo de sistema de estanques. . . . .	57
4.1.	Puntos de operación y parámetros de linealización del modelo de $h_c$ . . . . .	73
4.2.	Especificaciones de respuesta transitoria para sintonización LGR. . . . .	73
4.3.	Parámetros de controladores sintonizados con LGR. . . . .	74
4.4.	Señal de referencia para pruebas de Control SISO $h_c$ . . . . .	74
4.5.	Índices de desempeño para controladores sintonizados con LGR. . . . .	75
4.6.	Parámetros de Curva de Reacción Z&N. . . . .	77
4.7.	Parámetros de controladores sintonizados con Curva de Reacción Z&N. . . . .	77
4.8.	Índices de desempeño para controladores sintonizados con Curva de Reacción Z&N. . . . .	78
4.9.	Parámetros de Límite de Estabilidad Z&N. . . . .	79
4.10.	Parámetros de controladores sintonizados con Límite de Estabilidad Z&N. . . . .	79
4.11.	Índices de desempeño para controladores sintonizados con Límite de Estabilidad Z&N. . . . .	80
4.12.	Configuración de parámetros de algoritmo PSO. . . . .	82
4.13.	Parámetros de controladores sintonizados con PSO e índice IAE. . . . .	82
4.14.	Índices de desempeño para controladores sintonizados con PSO. . . . .	84
4.15.	Índices de desempeño para controladores sintonizados con PSO en prueba experimental. . . . .	85
4.16.	Índice de desempeño propuesto para resultados experimentales SISO. . . . .	87
5.1.	Intervalo de operación de salidas del sistema MIMO. . . . .	90

5.2.	Controlador descentralizado para pruebas de modulación $q_{in}$ .	91
5.3.	Índices de desempeño para esquemas de modulación $q_{in}$ .	95
5.4.	Punto de operación para linealización de modelo MIMO.	97
5.5.	Especificaciones para sintonización de controladores en frecuencia.	98
5.6.	Parámetros de controladores sintonizados en frecuencia.	98
5.7.	Señal de referencia Control MIMO - Prueba 1.	99
5.8.	Señal de referencia Control MIMO - Prueba 2.	99
5.9.	Índices de desempeño global para controladores sintonizados en Frecuencia - Prueba 1.	100
5.10.	Índices de desempeño de respuesta transitoria para controladores sintonizados en Frecuencia - Prueba 1.	101
5.11.	Índices de desempeño global para controladores sintonizados en Frecuencia - Prueba 2.	102
5.12.	Índices de desempeño de respuesta transitoria para controladores sintonizados en Frecuencia - Prueba 2.	103
5.13.	Configuración de parámetros de algoritmo PSO MIMO.	103
5.14.	Parámetros de controladores descentralizados sintonizados con PSO.	105
5.15.	Parámetros de controladores centralizados sintonizados con PSO.	105
5.16.	Índices de desempeño resultantes de optimización PSO MIMO.	106
5.17.	Índices de desempeño global para controladores sintonizados con PSO MIMO - Prueba 1.	109
5.18.	Índices de desempeño de respuesta transitoria para controladores sintonizados con PSO MIMO - Prueba 1.	110
5.19.	Índices de desempeño global para controladores sintonizados con PSO MIMO - Prueba 2.	113
5.20.	Índices de desempeño de respuesta transitoria para controladores sintonizados con PSO MIMO - Prueba 2.	114
5.21.	Índices de desempeño propuestos para controladores sintonizados con PSO MIMO.	115
5.22.	Índices de desempeño global para controladores sintonizados con PSO MIMO - Prueba 1 Experimental.	118
5.23.	Índices de desempeño de respuesta transitoria para controladores sintonizados con PSO MIMO - Prueba 1 Experimental.	119
5.24.	Índices de desempeño propuestos para controladores sintonizados con PSO MIMO.	120
B.1.	Resultados experimentales de volumen $V$ en función de nivel de agua $h_c$ en estanque cónico.	136
B.2.	Datos de pruebas experimentales de llenado para ajuste de $F_{in}$ .	137
B.3.	Datos de pruebas experimentales de vaciado para ajuste de $F_{out}$ .	137
C.1.	Especificaciones de respuesta transitoria para controladores sintonizados con LGR.	143
C.2.	Especificaciones de respuesta transitoria para controlador sintonizados con Curva de Reacción Z&N.	144
C.3.	Especificaciones de respuesta transitoria para controlador sintonizados con Límite de Estabilidad Z&N.	144
C.4.	Señal de referencia para optimización PSO SISO.	145
C.5.	Especificaciones de respuesta transitoria para controladores sintonizados con PSO.	146

C.6. Especificaciones de respuesta transitoria para controladores sintonizados con PSO en prueba experimental. . . . .	148
D.1. Cumplimiento de función objetivo y restricciones de controladores sintonizados en frecuencia. . . . .	154
D.2. Especificaciones de respuesta transitoria para controladores sintonizados en frecuencia - Prueba 1. . . . .	155
D.3. Especificaciones de respuesta transitoria para controladores descentralizados sintonizados con PSO MIMO - Prueba 1. . . . .	158
D.4. Especificaciones de respuesta transitoria para controladores centralizados sintonizados con PSO MIMO - Prueba 1. . . . .	159
D.5. Especificaciones de respuesta transitoria de resultados experimentales con PSO descentralizados - Prueba 1. . . . .	160
D.6. Especificaciones de respuesta transitoria de resultados experimentales con PSO centralizados - Prueba 1. . . . .	161

# Capítulo 1

## Introducción

A lo largo de la historia, la humanidad ha tenido la necesidad de controlar el mundo que los rodea para el propio beneficio; los grandes avances tecnológicos que han permitido evolucionar hasta hoy en día, han nacido a raíz de entender y controlar ciertos fenómenos físicos que presentan una ventaja al quehacer diario de cada individuo. Este hecho está tan intrínsecamente ligado con su desarrollo que basta considerar el hito más importante de la historia de la humanidad para caer en la cuenta: el descubrimiento del fuego; si hace 790.000 años no se hubiese podido controlar o manipular este fenómeno, la evolución hasta estos días y el desarrollo de la inteligencia no hubiese sido posible.

De ahí en más, existen innumerables ejemplos que aplicar a este contexto; la primeras nociones de control automático se remontan a la Grecia Antigua, en el siglo III a.C., cuando Ctesibios de Alejandría, destacado pensador de la época, comienza a desarrollar diversos proyectos tecnológicos entre los que se cuenta el reloj de agua, ejemplo histórico del primer sistema de control por retroalimentación en su funcionamiento. Contemporáneamente, se distinguen los desarrollos de Filón de Bizancio y su lámpara de aceite, o Herón de Alejandría y sus estudios en mecánica de sólidos. Posteriormente, existen registros de ingenieros árabes que en la Edad Media, siglo IX d.C., idean sistemas de regulación flotantes para relojes de agua, problema ya abordado por Ctesibios. Ahora, particularmente, ésta área de la ingeniería considera un punto de inflexión en la segunda mitad del siglo XVIII, con el inicio del período llamado Revolución Industrial, época en la que James Watt se hace partícipe de la historia con un regulador de velocidad para la turbina de vapor, hasta llegar a la actualidad siendo un área fundamental en cualquier proyecto de aplicación tecnológica.

Es en este marco de desarrollo industrial en el que se contextualiza el presente trabajo de tesis: existen muchos procesos industriales que plantean la necesidad de controlar infinidad de variables; la regulación de flujo, presión, nivel y temperatura, entre otros, es de vital importancia para el funcionamiento de muchos de estos procesos. El problema fundamental del control de éstas radica en las condiciones en que evoluciona su comportamiento, ya que están descritas por dinámicas de tipo no lineal, y, más aún, se encuentran relacionadas entre sí, produciendo que cambios en unas u otras afecten al resto debido al acoplamiento existente en cada uno de los sistemas. Luego, considerando que la gran mayoría de soluciones de control están desarrolladas para enfrentar problemas de control de dinámica lineal y monovariable, se deben plantear

soluciones que permitan realizar este proceso de manera satisfactoria.

Ahora bien, el control de nivel tiene gran presencia en aplicaciones industriales; en la industria química se utiliza en procesos asociados a los sumideros de residuos, tanques de neutralización de agua y almacenamiento de líquidos y gas licuado. En tanto, en la industria minera se encuentra presente el control de nivel en las etapas de molienda de mineral y en los circuito de flotación; e incluso, su alcance llega hasta procedimientos de esterilización en hospitales, procesos de la industria petrolera y en las centrales termoeléctricas, a través de la aplicación de esquemas de control de nivel en calderas. Es en este último caso en el que se desarrollan de manera conjunta estrategias de control multivariable que consideran tanto la regulación nivel como la de temperatura.

Bajo esta perspectiva, el sistema de estanques del Laboratorio de Automática en el edificio Electrotecnologías del Departamento de Ingeniería Eléctrica, se considera una oportunidad manifiesta de contextualizar un problema de gran importancia en la industria a un enfoque didáctico en el que se puedan investigar diversas estrategias de control, con los más variadas estrategias de sintonización de parámetros, y comparar resultados desde distintos enfoques. Tal es el caso de los controladores fraccionarios, que utilizan nociones de cálculo fraccionario, área de las matemáticas con exploraciones parciales de sus beneficios hasta estos momentos, y los métodos existentes para definir los parámetros que los caracterizan frente a cada problema de control.

## 1.1. Motivación

La motivación para el desarrollo del presente trabajo de tesis presenta dos grandes aristas: por una parte, se cuenta el desarrollo de estrategias de control fraccionario, aplicaciones que centran el foco de investigación hoy por hoy, para contextualizar estas soluciones respecto a sus ventajas y desventajas; mientras que por otro lado, se tiene la posibilidad de estudiar un sistema de estanques en las que se ven involucradas variables de gran relevancia en la industria, nivel y temperatura, en un contexto de dinámica de tipo no lineal, bajo una concepción de sistemas monovariable y multivariable.

El control fraccionario se entiende como una extensión de los esquemas de control que hacen uso de operadores de cálculo de orden entero al caso de orden fraccionario. Esto se enmarca dentro del desarrollo del cálculo fraccionario, área de las matemáticas que data desde el siglo XVII, cuando, a través de una serie de cartas, el matemático francés Guillaume de l'Hôpital le pregunta al erudito alemán Gottfried Leibniz que resultaría de considerar  $n = 1/2$  en la derivada n-ésima  $\frac{d^n f(x)}{dx}$ , a lo que éste responde: “...una aparente paradoja, de la cual algún día se extraerán útiles consecuencias”. Es en busca de estas “útiles consecuencias” que se propone evaluar como solución de control la familia de controladores PID de orden fraccionario, más conocidos como PIOF y PIDOF, y diversas estrategias de sintonización de sus parámetros, ya que al respecto no existe una metodología que garantice resultados satisfactorios, mucho menos frente a problemas de dinámica no lineal y/o de tipo multivariable.

El Sistema de Estanques del Laboratorio de Automática está compuesto por dos estanques:

uno de geometría rectangular, llamado de recirculación, donde se almacena el líquido, y otro de geometría cónica. A través de una bomba conectada al estanque de recirculación se puede impulsar agua hasta el estanque cónico, donde ésta se acumula y puede ser medido el nivel con un sensor de presión; a su vez, el estanque rectangular posee un calefactor trifásico que puede calentar el agua dentro del circuito cerrado, lo cual puede ser medido a través de sensores de temperatura, que se completa por una apertura en la base del cono que conduce de vuelta al líquido hasta el mencionado estanque. La utilización de estanques cónicos es bastante recurrente en la industria, ya que tienen la ventaja de favorecer el drenaje de los líquidos que contiene; sin embargo, presentan la desventaja de que, debido a su geometría, el nivel está regido por una dinámica de tipo no lineal. Ahora, si se considera la variable temperatura dentro del líquido en el estanque cónico, se da lugar a un sistema compuesto por dos variables a considerar y dos equipos actuadores para modificar sus comportamientos; es decir, se tiene un sistema multivariable. Con esto, se define un sistema novedoso, en el que plantear un problema de control presenta desafíos importantes que no han sido ampliamente desarrollados, pero que resultan ser de vital importancia en la industria.

Pues bien, de la coyuntura entre las dos aristas explicadas, surge la motivación específica que persigue este trabajo de tesis: enfrentar controladores fraccionarios a un problema de control de dinámica no lineal, tanto en los casos monovariable como multivariable, aplicando estrategias de sintonización de parámetros desarrolladas en la literatura. A través de la utilización del sistema de estanques se desean encontrar resultados en simulación, con un modelo detallado del sistema a realizar, que puedan ser validado mediante experimentación en las instalaciones del Laboratorio de Automática, para discriminar entre métodos de sintonización, tipos de controlador y esquemas de control que se desarrollen en este estudio.

## 1.2. Estado del Arte

En general, los esquemas de control adaptable provienen de la extensión de aquellas estrategias de control que hacen uso de los operadores integrador y derivada de orden entero, considerando en cada caso un orden de tipo fraccionario. El ejemplo clásico de esta situación se da por parte de los controladores tipo PI/PID, los que pasan de considerar integración y derivación de orden  $n = 1$  a  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; al respecto en [1] se desarrolla un esquema de control PIDOF para una planta de primer orden con retardo, cuyos parámetros son sintonizados mediante un proceso de optimización iterativo que busca minimizar una cierta función objetivos de carácter no lineal. Por otra parte, en [2] se desarrolla una estrategia de control PIOF aplicada al control de velocidad de un motor de inducción, en este caso los parámetros son escogidos heurísticamente y se comparan los resultados para distintos valores. Similar a la extensión recién planteada, también se han llevado al plano del control fraccionario los controladores en adelanto-atraso; en [3] se propone un método de sintonización de sus parámetros en base al cumplimiento de ciertas especificaciones en el dominio de la frecuencia y se ilustra el resultado con un ejemplo en que se considera una planta de segundo orden. Ahora, para el caso de controladores más complejos, se tienen trabajos que desarrollan control adaptable fraccionario, donde el ajuste de parámetros del controlador se realiza mediante integración ya no de orden entera, sino que de un orden fraccionario; en [4] se desarrolla un esquema de este estilo para un regulador de voltaje automático, donde el orden de integración se determina mediante optimización PSO y



los resultados se comparan con control adaptable clásico y controladores PID de orden entero y fraccionario. En el caso de estrategias de control no lineal, se tienen extensiones del esquema de control por modo deslizante al caso fraccionario, en [5] se desarrolla este tipo de controlador aplicado a sistema cuadruple de estanques y se comparan los resultados con la versión de orden entero.

Referente al tema de estudio que da pie al presente informe de tesis, existen muchos trabajos en los que se investiga el control de nivel en estanques de geometría cónica, aplicando las más diversas estrategias de control con distintos esquema de sintonización de parámetros. En [6] se presenta una modelación fenomenológica del nivel en un estanque cónico para, a partir de linealizaciones del sistema, sintonizar controladores PI con el método de Síntesis Directa y el método Skogestad; los resultados son presentados en simulación, las que evidencian que el segundo caso posee mejor resultado. Similar al caso recién planteado, en [7] se sintonizan una serie de controladores PI bajo distintos métodos utilizando linealizaciones del sistema; cada uno es probado mediante simulaciones y se determina que el mejor método corresponde al Chien-Hrones-Reswick. Por otra parte, se han desarrollado estrategias de Control por Modelo Interno (IMC): en [8] se compara este método con un controlador PID sintonizado mediante las reglas de Cohen-Coon, mientras que en [9] se presenta un esquema PID basado en IMC; en ambos casos el método propuesto presenta mejores resultados de control en simulación. También se ha llegado a la aplicación de estrategias de control avanzado, como Control Predictivo (MPC), en [10] se utiliza con la linealización de un modelo fenomenológico y se comparan los resultados en simulación con un controlador PID; en tanto, en [11] se hace una identificación de primer orden con retardo del sistema para dar con un modelo y se compara con una estrategia PI. En cuanto a la aplicación de estrategias de control no lineal, también existe documentación al respecto, en [12] se utiliza Control Basado en Pasividad (PBC) para, mediante simulación, mostrar que este esquema posee mejor comportamiento que estrategias PI sintonizadas con dos métodos distintos. respecto a la aplicación de Computación Evolutiva para la sintonización de parámetros, en [13] se usan Algoritmos Genéticos (GA) para determinar los parámetros de estrategias PID, Función de Transferencia e IMC; estos resultados se comparan con otras técnicas de sintonización en cada caso, para mostrar que mediante simulaciones el mejor resultado corre por cuenta de IMC.

Ahora bien, también existen casos de aplicación de control fraccionario para sistemas de estanque cónico; en [14] se propone una estrategia PIOF cuyos parámetros son sintonizados a través de reglas considerando una identificación de primer orden del sistema, mientras que en [15] se propone un PIDOF cuyos parámetros se obtienen a partir de un proceso de optimización en el espacio de la frecuencia considerando también una aproximación lineal de la planta; en ambos casos, se muestra que el esquema fraccionario presenta ventajas respecto a su par de orden entero.

Respecto a control multivariable que involucre nivel y temperatura no se encuentran muchas investigaciones, menos aún para un estanque de geometría cónica; sin embargo, lo más cercano al caso de estudio que aquí se plantea se estudia en [16], allí se estudia el caso MIMO para un sistema de estanques de geometría cúbica dispuestos en cascada, donde se desea controlar nivel y temperatura en el inferior. Para llevar a cabo esto se propone una estrategia de control por realimentación de estados, en el que se incluye un tercer estado correspondiente a la integral del error, de esta forma se obtiene un control PI Vectorial; los resultados se ilustran mediante simulación y experimentalmente. Otra aproximación del caso de estudio se da en [17], donde

se propone un esquema de Control Difuso tipo Mamdani para controlar temperatura en un estanque a partir de mediciones de nivel y temperatura dentro del mismo.

Si bien no existen gran cantidad de trabajos en la categoría recién mencionada, hay muchas publicaciones referentes a control MIMO aplicando estrategias de control fraccionario que involucran diversos esquemas. Por ejemplo, en [18] se propone controlar un sistema de  $3 \times 3$  mediante la utilización de controladores PIOF descentralizados, es decir, que forman una matriz diagonal de control, cuya implementación se realiza en un microcontrolador; la sintonización de parámetros se realiza mediante optimización en el espacio de la frecuencia considerando restricciones de margen de fase y frecuencia de corte del sistema de control. Complementando lo anterior, en [19], de los mismos autores, se extiende la aplicación del método para el control de una planta de separación de  $^{13}C$ ; se hace una identificación de primer orden con retardo para cada elemento de una matriz de funciones de transferencia de la misma magnitud mencionada, y se aplican estrategias de control PI/PIOF descentralizados en una estructura de Predictor de Smith para enfrentar el problema de los retardos. En ambos casos se obtienen buenos resultados de control, mientras que en el segundo se muestra que la versión fraccionaria presenta ventajas respecto a la versión de orden entera.

Siguiendo con estrategias de la familia de controladores PID, en [20] se proponen estrategias de control PIOF descentralizadas y centralizadas para un sistema de columnas de destilación binaria; el procedimiento consiste en hacer una linealización de un modelo de la planta de  $2 \times 2$ , con esto se utiliza el Método de Desigualdades (MoI) para la sintonización de parámetros, de lo que resulta, a través de simulaciones, que el caso centralizado presenta mejores resultados. En [21] se busca controlar un sistema de estanques comunicantes a través de una estrategia PIDOF centralizada, cuyos parámetros son sintonizados mediante el algoritmo de Búsqueda de Armonía (HS) haciendo uso de un modelo no lineal del sistema; el procedimiento se valida mediante simulaciones. Por su parte, en [22] se presentan estrategias PID/PIDOF centralizadas para el control de un sistema de  $2 \times 2$  con incertidumbre paramétrica; en este caso se realiza una identificación de primer orden con retardo de la matriz de funciones de transferencia del sistema, y se determinan los parámetros del controlador PIDOF mediante un problema de optimización de la norma  $H_\infty$ , con esto, se comparan con el esquema entero tomado de la literatura y se concluye que el esquema fraccionario presenta mayores ventajas. Ahora, en [23] también se propone controlar un sistema de estanques comunicantes a través de la aplicación de estrategias PI de orden entero y fraccionario en diversas estructuras que emulan un esquema centralizado, se comparan con distintos métodos de sintonización y se muestra, mediante simulaciones, que las versiones no enteras tienen mejores resultados.

Finalmente, también existe información respecto a la aplicación de otras alternativas de controladores; en [24, 25] se proponen estrategias de control CRONE para sistemas multivariables. En el primer caso, se sintonizan los parámetros mediante la solución de un problema algebraico establecido mediante la metodología MIMO “Quantitative Feedback Theory” (MIMO-QFT); en el segundo, cuyo foco es minimizar las vibraciones de un ala de avión, la sintonización se realiza estableciendo restricciones en el espacio de la frecuencia para este fenómeno. El alcance del estudio de este tipo de sistemas llega hasta la aplicación den un Control por Modo Deslizante (SMC) multivariable; en [26] se propone una extensión de resultados de un caso SISO para un sistema MIMO de orden fraccionario, se presenta la acción de control necesaria, se demuestra estabilidad del esquema, y se presenta un ejemplo de su aplicación para un sistema de  $2 \times 2$ .

## 1.3. Hipótesis y Objetivos

Considerando la motivación planteada en esta sección, y los desarrollos alrededor del mundo ilustrados a través del estudio del estado del arte, se genera la hipótesis que da marco al desarrollo de esta trabajo de tesis. Los desarrollos matemáticos de cálculo fraccionario ofrecen una nueva alternativa a la Ingeniería de Control a través de la introducción de operadores fraccionarios en las estrategias de control clásicas; en función de esto, el control fraccionario sugiere la posibilidad de encontrar mejores soluciones de control de sistemas frente a los esquemas típicos de orden entero, incluso para sistemas complejos de dinámica no lineal y de carácter multivariable. Sin embargo, para lograr esto, se debe determinar una herramienta de sintonización que permita determinar los parámetros de los esquemas de control en cuestión.

El objetivo general de este trabajo de tesis consiste en probar controladores fraccionarios de la familia PID en un problema de control no lineal, tanto en los casos monovariable como multivariable, aplicando para esto distintas estrategias de sintonización de parámetros, las que puedan ser analizadas a partir de resultados en simulación con un modelo dinámico del sistema, y experimentales a partir del sistema real. Para cumplir con esto, el trabajo se puede considerar subdividido en objetivos secundarios, los cuales se detallan a continuación:

- Estudio de los fundamentos de cálculo fraccionario y su extensión al control fraccionario, particularmente, a la familia de controladores PID de orden fraccionario (PIOF y PIDOF).
- Estudio de estrategias de sintonización de parámetros de controladores PIOF y PIDOF.
- Desarrollo de un modelo fenomenológico del sistema de estanques a través de ecuaciones dinámicas, capaz de emular el comportamiento no lineal al que están sometidas las distintas variables del proceso.
- Realizar un ajuste paramétrico que permita contextualizar las ecuaciones del modelo al caso particular de estudio.
- Planteamiento de un problema de control monovariable de nivel en estanque cónico y aplicación de estrategias de sintonización de controladores PI/PID de orden fraccionario, y de orden entero para comparación.
- Planteamiento de un problema de control multivariable de nivel y temperatura en estanque cónico y aplicación de estrategias de sintonización de controladores PI/PID de orden fraccionario, y de orden entero para comparación, en esquema de control descentralizado y centralizado.
- En cada caso, obtener resultados de las distintas estrategias de sintonización de parámetros para cada tipo de controlador a través de simulaciones del modelo fenomenológico no lineal desarrollado.
- Validación de los resultados de control en el sistema real, de aquellos controladores que presenten resultados satisfactorios, tanto en el problema monovariable como multivariable.
- Análisis de los resultados en cada caso para emisión de juicios de valor, en función del comportamiento de índices de desempeño de las estrategias de control.

## 1.4. Estructura de la Tesis

El presente informe de tesis posee una estructura secuencial que se explica a continuación. De partida, el Capítulo 2 describe conceptos fundamentales sobre cálculo fraccionario como base para presentar el esquema de control PID y sus derivaciones de orden fraccionario. Allí se pueden encontrar conceptos relacionados con la definición de los operadores integral y derivada en el caso fraccionario, su representación en el espacio de Laplace y la representación de los controladores fraccionarios, donde se destacan las diferencias que tienen con los casos de orden entero. Además, se incluyen las estrategias de sintonización de parámetros propuestas para enfrentar los problemas de control; pasando por el caso clásico Lugar Geométrico de las Raíces, hasta algoritmos de optimización meta-heurísticos como PSO. Para concluir, se presentan algunas herramientas que permiten evaluar el desempeño de los distintos sistemas de control de manera global como considerando su respuesta transitoria, y una metodología de linealización de sistemas no lineales basada en la aproximación de primer orden de Taylor.

En el capítulo 3 se muestra la modelación fenomenológica del sistema de estanques, partiendo por una descripción detallada del montaje. Luego, se caracterizan los subsistemas en que se puede considerar dividido el sistema: nivel y temperatura, mostrando los conceptos básicos que permiten dar con las ecuaciones dinámicas genéricas que rigen el comportamiento de las variables del sistema; en cada uno, se muestran los experimentos necesarios para determinar los parámetros que ajustan las ecuaciones genéricas al caso de estudio particular que se plantea. Para concluir, se ilustra la implementación en Simulink del modelo fenomenológico desarrollado, incluyendo un resumen de las ecuaciones que lo definen, y se determina la forma algebraica en que se representa una linealización en torno a puntos de operación de la planta.

Con respecto a los resultados de este trabajo de tesis, en el Capítulo 4 se desarrolla el problema de control monovariante de nivel en el estanque cónico; se aplican las estrategias de sintonización al caso, y se evalúan todas las soluciones paramétricas determinadas en simulación. Al respecto se realizan los correspondientes análisis de ventajas y desventajas en cada caso, para finalizar con una validación experimental de los controladores que entregan resultados satisfactorios en simulación, directamente sobre el sistema real.

La segunda versión del problema de control se plantea en el Capítulo 5; allí se aplican las estrategias de sintonización correspondientes al problema de control multivariante de nivel y temperatura en el estanque cónico, en algunos casos generando esquemas de control descentralizado y centralizado. En este capítulo, también se evalúan cada uno de los controladores determinado a través de simulación, se someten a análisis a través de los indicadores de desempeño, y se finaliza validando los mejores resultados en pruebas experimentales realizadas directamente sobre el sistema de estanques.

Finalmente, el Capítulo 6 contiene las conclusiones de este trabajo de tesis, las cuales se extraen del análisis particular de cada uno de los comentarios a raíz de los resultados de control de cada problema. Además, se plantean las propuestas de trabajo futuro que se pueden realizar en el contexto del desarrollo de las actividades descritas en el presente documento.

# Capítulo 2

## Fundamentos de Cálculo y Control Fraccionario

Es primordial para la aplicación de estrategias de control fraccionario tener ciertas nociones respecto a los conceptos básicos que involucra el cálculo fraccionario; de esta forma, se pueden entender las diferencias sustanciales de los operadores integral y derivada entre sus versiones de orden entero y fraccionario. Con esto, se genera un marco conceptual suficiente para presentar las estrategias de control de tipo fraccionario y distinguir con sus pares de orden entero.

En este capítulo se presentan los fundamentos básicos del cálculo fraccionario, tales como definiciones de integral y derivada, sus aplicaciones numéricas y representación en el espacio de Laplace, con el objetivo se caracterizar la forma de los controladores de la familia PID en el caso de orden entero y fraccionario; además, se presentan ciertas estrategias de sintonización de controladores que permiten enfrentar los distintos problemas de control que se plantean en este trabajo. A modo de herramientas complementarias, se presentan ciertas métricas de desempeño de sistemas de control, a través de índices de respuesta global y de respuesta transitoria; y para concluir, se repasa brevemente el concepto de linealización de sistemas no lineales, procedimiento necesario para cumplir con los requerimientos base de algunos de los métodos de sintonización de parámetros descritos.

### 2.1. Conceptos Básicos de Cálculo Fraccionario

Se entiende por conceptos básicos del cálculo fraccionario la definición, en sus distintas versiones, de todos los elementos de cálculo que sustentan esta rama de la teoría matemática. A su vez, conceptos establecidos en propiedades y la aplicación de la Transformada de Laplace sobre tales definiciones, generan un marco teórico sólido en el que se desarrollan las diversas aplicaciones del cálculo fraccionario.

A continuación, se muestran las diversas definiciones existentes de la integral y derivada fraccionarias, su desarrollo frente a la Transformada de Laplace y algunas propiedades elementales que permiten realizar una comparación a lo desarrollado en el cálculo de orden entero.

### 2.1.1. Definiciones Fundamentales

El concepto de cálculo fraccionario, y toda la base matemática que lo sustenta, es una derivación natural del cálculo de orden entero; de la misma forma en que se evolucionó de considerar la función exponencial de exponente entero a exponente de orden fraccionario, surgió la interrogante sobre qué sucedería en el caso de la integral y la derivada de funciones en el caso de orden no entero.

Considerando este hecho, a continuación se muestran las definiciones de integral y derivada de orden fraccionario, desde la perspectiva de la extensión natural de su concepción a partir de las definiciones establecidas para el caso de orden entero.

#### Integral Fraccionaria

Para efectos de definir la integral de orden fraccionario es necesario considerar la generalización, para el caso de orden entero, de la integración de orden  $n$ ; este enfoque es comúnmente conocido como el de Riemann-Liouville. En particular, utilizando inducción sobre las múltiples integrales, la integral de orden  $n$  desde  $a$  hasta  $t$  ( ${}_a I_t^n$ ) queda definida según la fórmula de Cauchy como [27, 28]

$${}_a I_t^n f(t) = \underbrace{\int_a^t \cdots \int_a^t}_{n \text{ veces}} f(\tau) d\tau = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

Sin embargo, la extensión de la fórmula mostrada en (2.1) para el caso de orden fraccionario no es directa, ya que existe una dificultad que radica en la función factorial, la cual no está definida para números que no sean enteros. Para esto, se considera la función Gamma  $\Gamma(\cdot)$  que resulta ser la extensión para el caso de argumento no necesariamente entero de la función factorial.

Luego, sabiendo que  $(n-1)! = \Gamma(n)$  y asumiendo un orden no entero  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , la integral fraccionaria según Riemman-Liouville es definida a continuación.

**Definición 2.1** (Integral Fraccionaria según Riemman-Liouville,[27, 28])

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+. \quad (2.2)$$

#### Derivada Fraccionaria

Respecto a la derivada de orden fraccionario, existen diversos enfoques que permiten dar con una definición; por una parte, existe un resultado obtenido de la extensión de la derivada en el caso entero, siguiendo un desarrollo similar al presentado para la definición (2.2), mientras que otros enfoques están basados en la utilización de la definición de integral fraccionaria previamente presentada.

Para presentar el resultado de derivada fraccionaria según Grünwald-Letnikov, enfoque que se obtiene de la extensión del caso entero, es necesario introducir al operador  $D$ , que hacer referencia a la derivada de cierta función  $f(\cdot)$ ; es decir

$$Df(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}. \quad (2.3)$$

Ahora bien, mediante un procedimiento inductivo se puede generalizar la fórmula de la derivada de orden  $n$  en el caso entero, la cual se denota por  $D^n$  y tiene por definición [27]

$$D^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} f(x - mh). \quad (2.4)$$

Sin embargo, para la extensión de (2.4) al caso no entero, nuevamente se tiene una dificultad, la cual radica en que la función de coeficiente binomial no admite argumentos que no sean enteros. Para esto, nuevamente se hecha mano a la función Gamma  $\Gamma(\cdot)$ , con lo cual la definición de la derivada fraccionaria según el enfoque de Grünwald-Letnikov queda como se expresa a continuación [27].

**Definición 2.2** (Derivada Fraccionaria según Grünwald-Letnikov)

$${}_a D_t^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)k!} f(x - kh), \quad \alpha \in \mathbb{R}^+. \quad (2.5)$$

Cabe mencionar que en la expresión (2.5) el límite superior de la sumatoria tiende a infinito considerando que  $h \rightarrow 0$ .

Por otra parte, dentro de las definiciones de derivada fraccionaria que se obtienen a partir de la integral fraccionaria, existen dos versiones; la primera de ellas corresponde a la establecida por Riemann-Liouville, la cual es expuesta a continuación [27, 28].

**Definición 2.3** (Derivada Fraccionaria según Riemman-Liouville)

$${}_a D_t^\alpha f(t) = D^n [{}_a I_t^{n-\alpha} f(t)] = \frac{d^n}{dt^n} \left[ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \right], \quad (2.6)$$

donde  $n = \min \{k \in \mathbb{N}/k > \alpha\}$  y  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ .

La particularidad de la definición (2.6) radica en que para determinar la derivada es necesario primero realizar un proceso de integración fraccionaria sobre la función a evaluar. La Figura 2.1 muestra la representación gráfica de la particularidad mencionada; en este caso se desea obtener  ${}_a D_t^{2,3} f(t)$ , para lo cual se realiza una integración fraccionaria  ${}_a I_t^{0,7}$  y luego una derivación usual de orden entero  $D^3$ .

Siguiendo en la línea de las definiciones de derivada fraccionaria a través de la definición de integral fraccionaria, existe el enfoque realizado por Michele Caputo, el cual se detalla a continuación [28].

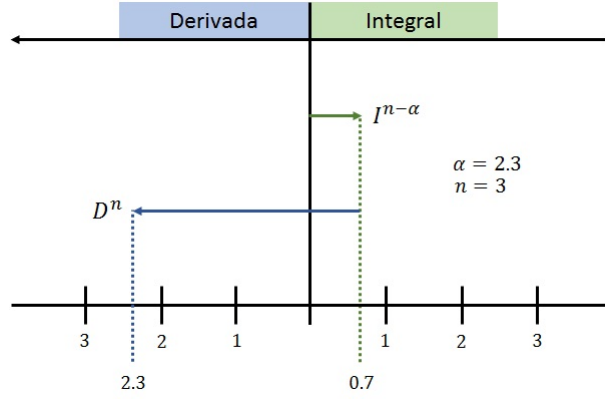


Figura 2.1: Representación gráfica de Derivada Fraccionaria según Riemman-Liouville.

**Definición 2.4** (Derivada Fraccionaria según Caputo)

$${}^C D_t^\alpha f(t) = {}_a I_t^{n-\alpha} [D^n f(t)] = \left[ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \right], \quad (2.7)$$

donde  $n = \min \{k \in \mathbb{N} / k > \alpha\}$  y  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ .

En contraste con la definición de Riemman-Liouville (2.6), la derivada fraccionaria según Caputo (2.7) consiste en realizar una derivación para luego obtener el resultado deseado a través de una integración fraccionaria.

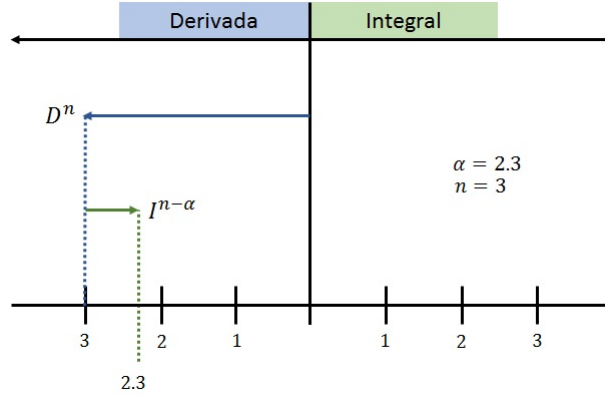


Figura 2.2: Representación gráfica de Derivada Fraccionaria según Caputo.

La Figura 2.2 muestra la representación gráfica de la definición de derivada fraccionaria según Caputo para obtener  ${}^C D_t^{2,3}$ ; para esto, se realiza una derivación usual de orden entero  $D^3$  y luego una integración fraccionaria  ${}_a I_t^{0,7}$ .

Respecto a las definiciones de derivada fraccionaria según Riemman-Liouville (2.6) y Caputo (2.7), se puede mencionar que, en general, se cumple que

$${}_a D_t^\alpha f(t) \triangleq D^n [{}_a I_t^{n-\alpha} f(t)] \neq {}_a I_t^{n-\alpha} [D^n f(t)] \triangleq {}^C D_t^\alpha f(t). \quad (2.8)$$



Estrictamente hablando se tiene que [29]

$${}_a D_t^\alpha f(t) = {}_a^C D_t^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a^+), \quad (2.9)$$

donde  $f^{(k)}(a^+)$  hace referencia a la condición inicial de la  $k$ -ésima derivada de la función  $f(t)$ . En consecuencia, se tendría la igualdad en la expresión (2.8) siempre que las condiciones iniciales mencionadas sean nulas.

Si bien tanto las definiciones de derivada fraccionaria de Riemman-Liouville como la de Caputo son ampliamente utilizadas, se suele preferir esta última ya que en su definición se consideran los valores iniciales de la función y sus derivadas de orden entero, lo que en la práctica se puede interpretar físicamente.

## Evaluación numérica de derivada fraccionaria

En la mayoría de los casos es bastante difícil encontrar una forma analítica de la derivada fraccionaria, ya que la complejidad de las definiciones (2.6) y (2.7) respecto a las integrales a resolver es alta. Sin embargo, existe una alternativa considerando la definición de derivada fraccionaria propuesta por Grünwald-Letnikov (2.5), puesto que su expresión permite encontrar aproximaciones si se escoge un  $h$  lo suficientemente pequeño, dependiendo de la función a evaluar.

No obstante, los esfuerzos computacionales para dar con un resultado muchas veces son importantes; por lo tanto, es necesaria una estrategia que haga más factible la implementación numérica de la derivada fraccionaria. Desde esta perspectiva surge el denominado Principio de la Memoria Corta, que permite aproximar la derivada fraccionaria a partir de la información más reciente de la función a evaluar. A continuación se presenta el mencionado principio [30, 31].

**Proposición 2.5** (Principio de la Memoria Corta) *Considerando la definición (2.5), para lograr la evaluación numérica de la derivada fraccionaria se puede establecer la aproximación*

$${}_a D_t^\alpha \approx {}_{t-L} D_t^\alpha f(t), \quad t > a + L, \alpha \in \mathbb{R}^+. \quad (2.10)$$

*Suponiendo que  $f(t) \leq M$ , con  $a \leq t \leq b$ , el error de la aproximación queda acotado por*

$$\varepsilon(t) = |{}_a D_t^\alpha f(t) - {}_{t-L} D_t^\alpha f(t)| \leq \frac{ML^{-\alpha}}{|\Gamma(1-\alpha)|}, \quad a + L \leq t \leq b. \quad (2.11)$$

*Luego, se puede determinar una ventana  $L$  que permita acotar por  $\varepsilon$  el error si se considera*

$$\varepsilon(t) \leq \varepsilon, \quad a + L \leq t \leq b, \quad \text{si } L \geq \left( \frac{M}{\varepsilon |\Gamma(1-\alpha)|} \right)^{1/\alpha}. \quad (2.12)$$

Este principio está fundamentado en el hecho de que los valores de los coeficientes para  $t$  cercano a  $c$  en la definición (2.5) son lo bastante pequeños comparativamente con los existentes

cuando  $t \gg c$ . Luego, con la aproximación (2.10) se reduce la cantidad de información al intervalo  $[t - L, t]$ , donde  $L$  es el largo de la memoria a considerar. En consecuencia, la cantidad de elementos de la sumatoria está dado por el cociente  $L/h$ .

Ahora bien, la utilización del presentado principio induce un error en el desarrollo de la derivada fraccionaria, el cual está acotado según se muestra en (2.11). Desde este punto, se puede determinar el largo de la memoria según una cota del error deseada  $\varepsilon$ , lo cual se presenta en (2.12).

## 2.1.2. Transformada de Laplace en Cálculo Fraccionario

En el estudio de sistemas dinámicos es de vital importancia las herramientas que permiten realizar análisis desde distintas perspectivas. Dentro de estas herramientas se cuenta con la Transformada de Laplace, la cual es una técnica ampliamente utilizada en el desarrollo del cálculo entero; es por esto que surge la necesidad de extender estos resultados para los casos que plantea el cálculo fraccionario.

Para contextualizar los resultados pertinentes al cálculo fraccionario, cabe recordar la definición realizada por el matemático francés Pierre-Simon Laplace. Considerando una función  $f(t)$  que cumple con  $f(t) = 0 \forall t < 0$ , la Transformada de Laplace se define como [32]

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \triangleq \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2.13)$$

Ahora bien, los resultados de cálculo fraccionario respecto a la Transformada de Laplace, no son más que la utilización de la definición (2.13) sobre las definiciones de integral y derivadas fraccionarias mostradas previamente. En [28] se muestran las expresiones más importantes de la aplicación de la transformada sobre el cálculo fraccionario; sin embargo, en [29, 30] se puede consultar la demostración de estos resultados. A continuación se resumen las Transformadas de Laplace sobre las definiciones de cálculo fraccionario realizadas hasta el momento.

- Transformada de Laplace de la Integral de Riemman-Liouville

$$\mathcal{L}\{{}_0I_t^\alpha f(t)\} = s^{-\alpha} F(s), \quad \alpha \geq 0. \quad (2.14)$$

- Transformada de Laplace de la Derivada de Grünwald-Letnikov

$$\mathcal{L}\{{}_0D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s). \quad (2.15)$$

- Transformada de Laplace de la Derivada de Riemman-Liouville

$$\mathcal{L}\{{}_0D_t^\alpha\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k ({}_0D_t^{\alpha-k-1} f(0)), \quad m-1 < \alpha \leq m, m \in \mathbb{N}, \alpha > 0, \quad (2.16)$$

donde  ${}_0D_t^{\alpha-k-1} f(0)$  refiere al valor en  $t = 0$  de la derivada de orden  $\alpha - k - 1$  de la función  $f(t)$ .

- Transformada de Laplace de la Derivada de Caputo

$$\mathcal{L} \{ {}_0^C D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} (D^{(k)} f(0)), \quad m-1 < \alpha \leq m, m \in \mathbb{N}, \alpha > 0, \quad (2.17)$$

donde  $D^{(k)} f(0)$  refiere al valor en  $t = 0$  de la derivada de orden  $k$  de la función  $f(t)$ .

Nuevamente, cabe destacar en este punto la ventaja existente entre la definición de derivada fraccionaria de Caputo frente a la realizada por Riemman-Liouville; la expresión (2.17) incluye condiciones iniciales que son físicamente interpretables (derivadas de orden entero evaluadas en el origen), mientras que lo mostrado en (2.16) incluye condiciones iniciales que no son interpretables de la misma forma (derivadas de orden fraccionario evaluadas en el origen).

## 2.2. Control PID

El control PID, acrónimo de “Proporcional, Integral y Derivativo”, es un esquema de control que reúne estos tres elementos para generar una señal de control en un lazo de realimentación. En general, es el esquema de control más utilizado en la industria debido a la sencillez de su construcción y alta fiabilidad en el proceso de control de los sistemas, cualquiera sea su tipo.

Si bien este esquema, considerado una técnica clásica de control, entrega resultados bastante aceptables al controlar un sistema, existen ciertas aplicaciones en las que es necesario una mayor precisión o cumplimiento de diversos requerimientos que esta familia de controladores no es capaz de cumplir en ciertas condiciones. Es por esto que se han buscado alternativas a esta implementación, enmarcando toda una rama conocida como control avanzado de sistemas. Sin embargo, esta técnica de control tiene mayor potencialidad si se consideran las nociones de cálculo fraccionario en su definición, lo que entrega una familia de soluciones aún mayor al esquema clásico, ítem en el que se han enfocado gran número de las investigaciones actuales de control fraccionario.

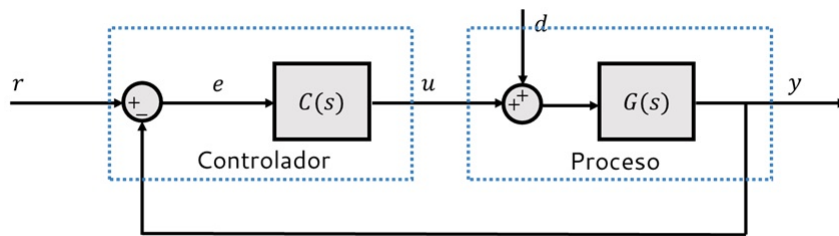


Figura 2.3: Lazo de realimentación en un esquema de control.

El control PID obedece a los esquema de control cuya implementación se realiza en lazos cerrados de control, donde el controlador es realimentado con la información medida a la salida de la planta del proceso a controlar. La Figura 2.3 ilustra un esquema general de control en un lazo de realimentación; allí se distinguen con claridad los distintos elementos que componen al controlador y al proceso. Por parte del controlador, se tiene una trayectoria de referencia  $r$  deseada para la salida de la planta  $y$ ; el error de control  $e$  se compone como la diferencia

entre los elementos previamente mencionados, y es procesado por el controlador para generar una acción de control  $u$ . En cuanto al proceso, puede o no poseer ciertas perturbaciones  $d$  que generen ruido sobre la señal de control, la cual actúa sobre la planta para obtener la salida del proceso.

A continuación, se introducen los conceptos básicos de control PID en sus versiones de orden entero y fraccionario, detallando ciertas particularidades que poseen los distintos elementos de su estructura.

### 2.2.1. PID de Orden Entero

El controlador PID de orden entero remonta su utilización hasta los inicios del control automático, y ha sabido perdurar a través de las décadas gracias a su simplicidad y las particulares características que le entregan sus tres componentes principales. En términos generales, la acción de control generada por un esquema de control PID puede ser descrita como una función del tiempo de la forma [44]

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt}, \quad (2.18)$$

donde  $e(t) = r(t) - y(t)$  corresponde al error de control, obtenido como la diferencia entre la señal de referencia y la salida de la planta; además,  $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$  son las ganancias de las componentes proporcional, integral y derivativa, respectivamente, que permiten sintonizar el funcionamiento del controlador en vistas de obtener un comportamiento dinámico específico.

Cada una de las componentes del controlador PID dota de características dinámicas particulares al lazo de control; muchas veces es necesario conocer estos efectos con el objetivo de determinar que configuración se adecua de mejor forma a los requerimientos que tenga un sistema a controlar.

#### **Acción Proporcional $K_p$**

La acción proporcional del controlador PID, representada por la ganancia  $K_p$  en la expresión (2.18), aporta a la acción de control un valor de salida que es proporcional al error de control actual del sistema; es decir, es una medida de acción respecto al estado presente de la planta para llevar a la salida del sistema sobre la referencia.

En general, la acción integral tiene efectos dinámicos bien definidos sobre el lazo de control, los cuales varían según la magnitud de la ganancia proporcional  $K_p$ . Al aumentar el valor de este parámetro, se obtiene una disminución del tiempo de subida, un incremento del sobrepaso y un menor error en estado estacionario<sup>1</sup>, mientras que al disminuir el valor de este parámetro, se producen los efectos contrarios. Un especial cuidado se debe tener al aumentar la ganancia a valores muy altos, ya que puede producir inestabilidad en el lazo cerrado de control [44].

---

<sup>1</sup>Los conceptos tiempo de subida, sobrepaso, error en estado estacionario y otros más utilizados en esta subsección, son explicados con detalle en la Sección 2.4.

## Acción Integral $K_i$

La acción integral corresponde al término que incluye a la ganancia integral  $K_i$  en la expresión (2.18); su aporte a la acción de control está relacionado con la acumulación del error pasado del sistema respecto a la trayectoria de referencia.

Su principal aporte al sistema de control es la eliminación del error en estado estacionario a entrada escalón; es decir, cuando la señal de referencia corresponde a una función escalonada. Además, al aumentar el valor de la ganancia integral, produce una disminución del tiempo de subida y un incremento de sobrepaso y tiempo de establecimiento; caso contrario, al disminuir esta ganancia, se producen efectos opuestos a lo recién mencionado [32, 44].

## Acción Derivativa $K_d$

La acción derivativa corresponde al término acompañado por la ganancia derivativa  $K_d$  en la expresión (2.18). Su aporte a la acción de control proviene de considerar la derivada en el instante actual del error de control, lo cual se puede entender como una predicción del futuro del comportamiento del sistema.

Su contribución dinámica al sistema pasa por la disminución del sobrepaso y tiempo de establecimiento al aumentar el valor de la ganancia. Sin embargo, su implementación requiere de consideraciones especiales debido a su comportamiento no causal, es por esto que se debe incluir un filtro pasabajos en este término. Por otra parte, su implementación en procesos reales sometidos a ruidos de medición puede traer inconvenientes por la determinación de la derivada entre dos muestras ruidosas consecutivas, por lo que la inclusión del filtro pasabajos puede ayudar en este aspecto limitando el ruido del proceso y disminuyendo los efectos de la ganancia de alta frecuencia del sistema a controlar [32, 44].

Si bien la expresión de acción de control de la estrategia PID descrita en (2.18) como función del tiempo es bastante explícita, se suele utilizar comúnmente su representación en el espacio de Laplace para caracterizarlo como controlador mediante función de transferencia, la cual tiene por forma

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s. \quad (2.19)$$

La expresión (2.19) muestra de forma general el controlador PID; sin embargo, existen múltiples versiones de este esquema de control, las cuales pasan por considerar diversas combinaciones de los elementos proporcional, integral y derivativo. En la industria de control es bastante utilizado el control PI, el cual sólo considera las acciones proporcional e integral; es decir, hace nula la ganancia derivativa  $K_d = 0$ , incluso en ciertos procesos se utiliza sólo un controlador P, el cual excluye las acciones integral y derivativa.

### 2.2.2. PID de Orden Fraccionario

Al igual que la gran mayoría de esquemas de control fraccionario, el controlador PID de orden fraccionario es una extensión del controlador PID de orden entero. En este caso particular, la extensión pasa por considerar las acciones integral y derivativa ya no de orden entero  $n = 1$ , sino que pueden de un orden fraccionario cualquiera.

En este sentido, la acción de control que produce un esquema de control fraccionario puede ser definida como una función del tiempo de la forma [42, 43]

$$u(t) = K_p e(t) + K_i I^\lambda e(t) + K_d D^\mu e(t), \quad (2.20)$$

donde  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$  son los órdenes de integración y derivación, respectivamente.

Ahora bien, la expresión (2.20) puede ser denotada como función de transferencia fraccionaria aplicando los conceptos de Transformada de Laplace y considerando condiciones iniciales nulas, de la forma

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} + K_d s^\mu. \quad (2.21)$$

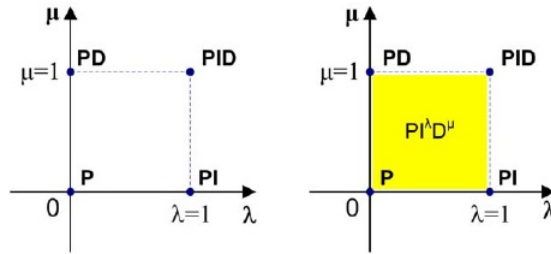


Figura 2.4: Esquema gráfico de aportes de PID de orden entero y PID de orden fraccionario [28].

Debido a la notación mostrada en las expresiones (2.20) y (2.21), muchas veces este esquema de control es nombrado como  $PI^\lambda D^\mu$ , o también como PIDOF, haciendo referencia a la distinción de orden fraccionario. Al igual que en el caso del controlador PID de orden entero, existen distintas versiones de este esquema de control, las cuales se distinguen por utilizar combinaciones de las acciones que componen esta estrategia; por ejemplo, al considerar sólo las acciones proporcional e integral de orden fraccionario se da lugar al controlador PIOF. Incluso se han documentado combinaciones entre los casos entero y fraccionario al utilizar acciones integral fraccionario, pero derivativa entera.

A modo de ilustración comparativa entre el esquema PID clásico y el fraccionario, en la Figura 2.4 se esquematizan gráficamente los aportes de cada enfoque de control; mientras el PID clásico (a la izquierda) sólo puede ofrecer soluciones que se contemplan en las aristas del cuadrado definido, el PID de orden fraccionario (a la derecha) permite acceder a dinámicas que se encuentran fuera del alcance del esquema anterior, considerándose posible cualquier combinación que incluya la región amarilla del cuadrado definido por el PID clásico.

## 2.3. Métodos de Sintonización de Controladores

### 2.3.1. Lugar Geométrico de las Raíces

El método de sintonización de controladores para sistemas SISO (una entrada una salida, en inglés “Single Input Single Output”) de tipo LTI denominado Lugar Geométrico de las Raíces, conocido como LGR o RL por el acrónimo en inglés de “Root Locus”, es un método gráfico que permite ubicar los polos de lazo cerrado de un sistema de control en un lugar definido según los requerimientos dinámicos establecidos por diseño para el sistema.

Para realizar la definición básica que explica el funcionamiento de esta técnica, es necesario considerar un sistema de control típico como el que se ilustra en la Figura 2.5; allí se explicitan con claridad los elementos del sistema de control:  $G(s)$  corresponde a la función de transferencia que forman en conjunto el controlador y la planta del proceso,  $H(s)$  representa la función de transferencia del dispositivo de medición de la señal de salida de la planta (en condiciones ideales de medición esta función de transferencia se representa por una ganancia unitaria), y las variables  $r, y$  y  $e$  son la trayectoria de referencia, la salida del sistema y el error de control, respectivamente.

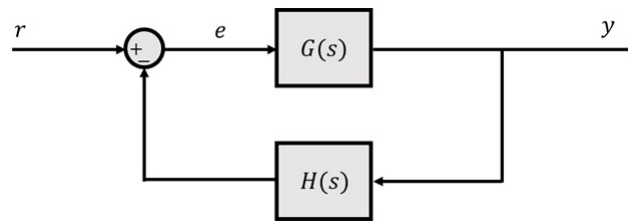


Figura 2.5: Diagrama de sistema de control.

La función de transferencia del lazo cerrado formado en el sistema de control de la Figura 2.5, puede ser descrito de la forma [47, 48]

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}; \quad (2.22)$$

según lo mencionado previamente, el método LGR permite encontrar la posición de los polos de (2.22) para establecer ciertas condiciones dinámicas en el sistema. A fin de cuentas, esto se traduce en encontrar las soluciones de la ecuación característica

$$1 + G(s)H(s) = 0. \quad (2.23)$$

Ahora bien, la función de transferencia de lazo abierto  $G(s)H(s)$  puede reescribirse como [48]

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^n \prod_{j=1}^l (s + p_j)}, \quad (2.24)$$

con  $l + n \geq m$ , donde  $p_j$  y  $z_i$  son los polos y ceros de lazo abierto, respectivamente. Con esto,

la ecuación característica (2.23) puede definirse por

$$\prod_{j=1}^l (s + p_j) + K \prod_{i=1}^m (s + z_i) = 0. \quad (2.25)$$

De esta última representación de la ecuación característica, se puede desprender que la posición de los polos de lazo cerrado del sistema dependen intrínsecamente del valor de la ganancia  $K$ . Al respecto, se pueden distinguir dos casos límites; cuando  $K \rightarrow 0$  se tiene que los polos de lazo cerrado coinciden con los polos de lazo abierto, mientras que cuando  $K \rightarrow \infty$  los polos de lazo cerrado se mueven hacia los ceros de lazo abierto.

Para encontrar las soluciones de la ecuación característica mencionada, el método LGR propone el cumplimiento de un par de condiciones, una de módulo y otra de ángulo [47]:

### Condición de módulo

$$|G(s)H(s)| = 1 \quad -\infty < K < \infty \quad (2.26)$$

### Condición de ángulo

$$\angle G(s)H(s) = (2i + 1)\pi \quad K \geq 0, i \in \mathbb{Z} \quad (2.27)$$

$$\angle G(s)H(s) = 2i\pi \quad K \leq 0, i \in \mathbb{Z} \quad (2.28)$$

Para un punto específico del plano  $s$  real-imaginario  $s = \sigma \pm j\omega$ , definido por los requerimientos de diseño del sistema de control, las condiciones mostradas toman una interpretación geométrica que dota de condición de método gráfico a LGR. Por parte de la condición de módulo, esta puede replantearse como [48]

$$|G(s)H(s)| = k \left| \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^n \prod_{j=1}^l (s + p_j)} \right|_{s=\sigma \pm j\omega} = 1, \quad (2.29)$$

lo que a fin de cuentas, para la determinación de la ganancia  $K$ , puede interpretarse como

$$K = \frac{\prod_{i=1}^l d_{p_i}}{\prod_{j=1}^m d_{z_j}}, \quad (2.30)$$

donde  $d_{p_i}$  y  $d_{z_j}$  son las distancias de los polos y los ceros al punto  $s = \sigma \pm j\omega$ , respectivamente. Mientras que en el caso de la condición de ángulo puede ser entendida como [48]

$$\sum_{i=1}^l \theta_{p_i} - \sum_{j=1}^m \theta_{z_j} = (2i + 1)\pi \quad K \leq 0, i \in \mathbb{Z}, \quad (2.31)$$

donde  $\theta_{p_i}$  y  $\theta_{z_j}$  son los ángulos los polos y ceros de lazo abierto respecto al punto  $s = \sigma \pm j\omega$ , respectivamente.

Respecto a las condiciones del método LGR, cabe mencionar que la condición de ángulo es la encargada de definir la trayectoria o posibles posiciones del lugar de las raíces de la ecuación



característica (2.23) desprendida de la función de transferencia del lazo cerrado (2.22); mientras que el valor de  $K$  permite mover las raíces a lo largo de la trayectoria definida para ubicar los polos del lazo cerrado en el lugar específico definido por el diseño del sistema de control.

Si bien el método LGR es un esquema aplicable en la práctica y posible de desarrollar analítica o gráficamente, se han extrapolado su utilización a herramientas computacionales que hacen más sencillo el proceso de sintonización mediante esta técnica. Este es el caso del software Matlab y su toolbox *rltool* [49], el cual permite aplicar el método LGR definiendo las características dinámicas deseadas para el lazo cerrado de control según los valores de frecuencia natural y coeficiente de amortiguamiento o máximo sobrepaso y tiempo de establecimiento con los que se desea que cumpla la salida del sistema.

### 2.3.2. Método Ziegler-Nichols para PID

Existen ciertos procesos a controlar que presentan una dificultad añadida al proceso de sintonización de parámetros de un controlador; esta dificultad subyace en el desconocimiento de un modelo matemático que caracterice la dinámica de la planta de forma idónea. Al respecto, se han desarrollado diversas técnicas de sintonización que permitan subsanar este problema conociendo información parcial de la planta o su comportamiento dinámico frente a ciertos casos particulares.

Es en este contexto que se plantea el método de sintonización de controladores PID Ziegler-Nichols, desarrollado en su versión original en 1942 por John G. Ziegler y Nathaniel B. Nichols [50], el cual se presenta como un método heurístico para la determinación de las ganancias proporcional, integral y derivativa de este tipo de controladores. A lo largo de los años han aparecido nuevos trabajos con modificaciones a las reglas originales para mejorar ciertos aspectos de la sintonización o para enfrentar problemas particulares desde un enfoque distinto [51, 52, 53], lo que mantiene vigente la base de los desarrollos del presente método de sintonización.

Una de las principales ventajas de este método, como fue mencionado anteriormente, es que no es necesario conocer un modelo matemático de la planta a controlar; por ser un método heurístico, su funcionamiento se basa en la interpretación de información de funcionamiento directamente obtenida desde el sistema, a través de pruebas experimentales bastante sencillas de realizar. Ahora bien, esto no excluye que se pueda utilizar en conocimiento de un modelo aproximado del sistema como punto de partida para la determinación paramétrica de un controlador PID.

El desarrollo de las reglas se realizan considerando que la planta responde a un comportamiento de primer orden con retardo, en inglés “First Order Plus Dead Time” (FOPDT), lo que implica que la función de transferencia del sistema es de la forma [32, 52]

$$G(s) = \frac{K}{1 + sT} e^{-Ls}; \quad (2.32)$$

sin embargo, hay gran cantidad de procesos, incluso de tipo no lineal, que se aproximan bastante al comportamiento dinámico de este tipo de sistemas, por lo que el espectro de utilización de este método es bastante amplio. Con la aplicación de las reglas heurísticas de esta técnica se pretende obtener un 25 % de sobrepaso máximo en la respuesta al escalón.

Existen dos variaciones del método Ziegler-Nichols, los cuales postulan dos experimentos distintos sobre la planta para la determinación de los parámetros que permiten identificar las ganancias de los controladores. A continuación, se muestran las bases para la aplicación de ambos esquemas de sintonización.

### Curva de Reacción

El método de curva de reacción consiste en analizar el comportamiento de la planta frente a una entrada escalón unitario; de esta forma, se espera que la salida del sistema obedezca a la dinámica de una planta FOPDT y su respuesta transitoria sea con forma de “S”, tal como se ilustra en la Figura 2.6. Luego, trazando la tangente al punto de inflexión del transiente de la curva de reacción e identificando el punto de estabilización de la salida, se puede determinar de forma gráfica el tiempo de retardo  $L$ , la constante de tiempo  $T$  y la ganancia de alta frecuencia  $K$  del sistema FOPDT como el caracterizado en (2.32); con estos parámetros se puede determinar los valores de las ganancias de un controlador tipo PID de orden entero [32].

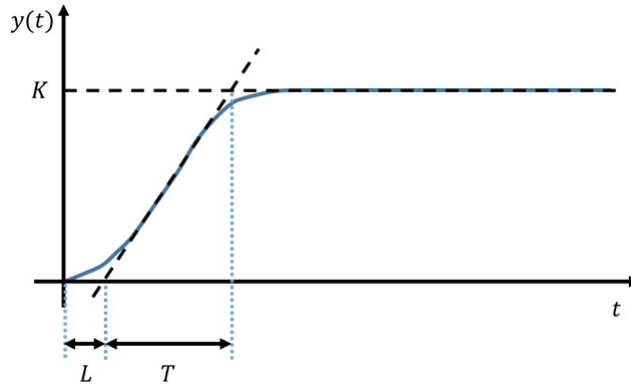


Figura 2.6: Curva de Reacción de un sistema FOPDT para método ZN.

La Tabla 2.1 muestra las reglas para determinar los parámetros de controladores P, PI y PID a partir de los valores de la constante de tiempo integral  $T_i$  y la constante de tiempo derivativo  $T_d$ , cuya caracterización general es de la forma [32]

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right). \quad (2.33)$$

Tabla 2.1: Reglas de sintonización ZN para Curva de Reacción.

Controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$\frac{T}{L}$	$\infty$	0
PI	$0,9\frac{T}{L}$	$\frac{L}{0,3}$	0
PID	$1,2\frac{T}{L}$	$2L$	$0,5L$

## Límite de Estabilidad

El método de Límite de Estabilidad supone la aplicación de un lazo cerrado de control sobre el sistema en el que sólo se utiliza una acción proporcional, como se ilustra en la Figura 2.7. La idea del experimento es comenzar con una ganancia proporcional pequeña e ir aumentando su valor hasta que la salida del sistema comience a oscilar de forma regular, como se observa en la Figura 2.8. Con esto, se registran el valor de ganancia crítica  $K_c$  del lazo de control y el período crítico de oscilación  $P_c$  que permiten identificar los parámetros del controlador [32].

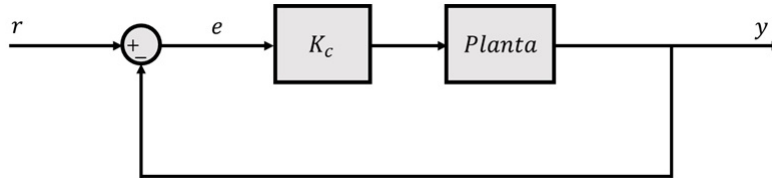


Figura 2.7: Lazo cerrado con control proporcional para Límite de Estabilidad.

Cabe mencionar que si la planta no logra tener un comportamiento oscilatorio regular como el de la Figura 2.8, entonces este método en particular no es posible de aplicar al caso en cuestión.

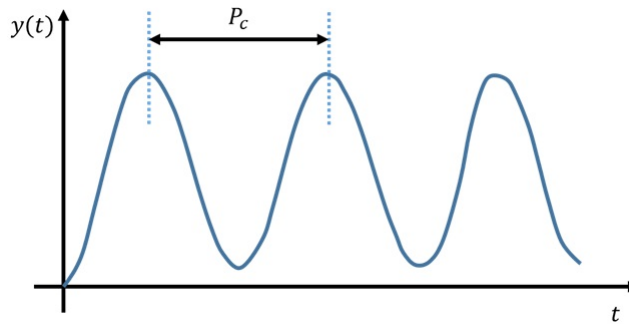


Figura 2.8: Límite de Estabilidad de un sistema para método ZN.

La Tabla 2.2 resume las reglas de sintonía para la determinación de las ganancias del controlador expresado de la forma (2.33), para los casos P, PI y PID.

Tabla 2.2: Reglas de sintonización ZN para Límite de Estabilidad.

Controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0,5K_c$	$\infty$	0
PI	$0,45K_c$	$\frac{1}{1,2}P_c$	0
PID	$0,6K_c$	$0,5P_c$	$0,125P_c$

### 2.3.3. Método tipo Ziegler-Nichols para PIDOF

Con la aparición del cálculo fraccionario en los sistemas de control, surge una nueva arista de investigación respecto al control fraccionario, la cual tiene que ver directamente con la elección

de los parámetros de los controladores que usan esta área de desarrollo matemático. El esquema PID de orden fraccionario no está ajeno a estos cuestionamientos, por lo que en los últimos años se han desarrollado diversas estrategias de sintonización para los cinco parámetros que presenta este esquema: ganancias proporcional, integral y derivativa ( $K_p, K_i, K_d$ ), y órdenes de integración y derivación ( $\lambda, \mu$ ).

Hasta estos días se han desarrollado diversas técnicas de sintonización basadas en métodos analíticos [54, 55, 56]; sin embargo, su complejidad varía caso a caso por lo que se han buscado nuevas alternativas. Es en este contexto que se han desarrollado estrategias más sencillas, basadas en métodos de sintonización conocidos para los casos de orden entero.

Dentro del último grupo de métodos mencionados se encuentra el desarrollado por Duarte Valério y José Sá Da Costa desde el año 2005 [57, 58]. Este esquema busca explorar la utilización de reglas tipo Ziegler-Nichols para la determinación de los cinco parámetros de ajuste del controlador PIDOF, a través de la utilización de los métodos de Curva de Reacción y Límite de estabilidad mostrados en la subsección anterior.

La determinación de las reglas del método de sintonización mencionado se basa en un problema de minimización desarrollado para determinar los parámetros óptimos de un controlador en función de un cierto grupo de requerimientos del sistema expresados en el espacio de la frecuencia. Considerando un sistema de control como el ilustrado en la Figura 2.3, las especificaciones para el problema de minimización se enumeran a continuación [59]

1. El lazo abierto del sistema debe tener una frecuencia de corte  $\omega_{cg}$ :

$$|C(\omega_{cg})G(\omega_{cg})| = 0 \text{ dB}. \quad (2.34)$$

2. El margen de fase debe tener un valor específico  $\varphi_m$ :

$$-\pi + \varphi_m = \arg[C(\omega_{cg})G(\omega_{cg})]. \quad (2.35)$$

3. El lazo cerrado debe ser robusto frente al ruido de alta frecuencia, por lo tanto su magnitud a una cierta alta frecuencia  $\omega_h$  debe ser menor que un valor establecido  $H$ :

$$\left| \frac{C(\omega_{cg})G(\omega_{cg})}{1 + C(\omega_{cg})G(\omega_{cg})} \right| < H. \quad (2.36)$$

4. La función de sensibilidad debe tener una magnitud pequeña a bajas frecuencias para eliminar perturbaciones a la salida y converger a la referencia, por lo que para una cierta baja frecuencia  $\omega_l$  su magnitud debe ser menor que cierto valor  $N$ :

$$\left| \frac{1}{1 + C(\omega_{cg})G(\omega_{cg})} \right| < N. \quad (2.37)$$

5. Para procurar robustez frente a variaciones paramétricas de la planta, la fase del lazo abierto del sistema debe ser aproximadamente constante en una vecindad de la frecuencia de corte  $\omega_{cg}$ :

$$\left. \frac{d}{d\omega} \arg[C(\omega)G(\omega)] \right|_{\omega=\omega_{cg}} = 0. \quad (2.38)$$

Estas cinco especificaciones llevan a formar un problema de optimización en que es posible determinar el valor de los cinco parámetros del controlador PIDOF. Sin embargo, el esfuerzo computacional de realizar la minimización es bastante, por lo que se buscan alternativas de aplicación más sencilla. La idea propuesta en [57, 58] corresponde a generar reglas que se adapten intrínsecamente a las especificaciones mostradas bajo el mismo contexto de las reglas de sintonización de Ziegler-Nichols en el caso entero. Para esto, se considera una planta de tipo FOPDT como en (2.32); luego, variando sus parámetros y con un set de requerimientos definido se encuentra cierta regularización de los valores de los parámetros del controlador PIDOF.

A continuación se muestran los métodos de determinación de los valores paramétricos de un controlador PIDOF en distintos casos de análisis.

### Curva de Reacción

En este caso, se espera que la planta a controlar tenga un comportamiento como el ilustrado en la Figura 2.6, de donde se pueden identificar los valores de  $K$ ,  $L$  y  $T$  gráficamente. Ahora bien, se define un set de especificaciones de comportamiento del sistema para resolver el problema de optimización, las cuales se ilustran en la Tabla 2.3.

Tabla 2.3: Especificaciones para método Curva de Reacción de sintonización PIDOF.

$\omega_{cg}$	0,5[rad/s]
$\varphi_m$	38°
$\omega_h$	10[rad/s]
$\omega_l$	0,01[rad/s]
$H$	-10 dB
$N$	-20 dB

Identificados los valores de la prueba de Curva de Reacción, se pueden determinar los parámetros del controlador PIDOF a partir de lo mostrado en las Tablas 2.4 y 2.5 según sea el caso de  $T$ , siempre que se cumpla con

$$0,1 \leq T \leq 50 \quad \wedge \quad L \leq 2. \quad (2.39)$$

Tabla 2.4: Parámetros PIDOF para método Curva de Reacción para  $0,1 \leq T \leq 5$ .

	$K_p$	$K_i$	$\lambda$	$K_d$	$\mu$
1	-0.0048	0.3254	1.5766	0.0662	0.8736
$L$	0.2664	0.2478	0.2098	-0.2528	0.2746
$T$	0.4982	0.1429	-0.1313	0.1081	0.1489
$L^2$	0.0232	-0.1330	0.0713	0.0702	-0.1557
$T^2$	-0.0720	0.0258	0.0016	0.0328	-0.0250
$LT$	-0.0348	-0.0171	0.0114	0.2202	0.0323

Para un cierto par de valores  $T, L$ , las reglas se deben interpretar de la siguiente forma: la ganancia proporcional  $K_p$  según lo mostrado en la Tabla 2.4 sería

$$K_p = -0,0048 + 0,2664L + 0,4982T + 0,0232L^2 - 0,0720T^2 - 0,0348LT. \quad (2.40)$$

Tabla 2.5: Parámetros PIDOF para método Curva de Reacción para  $5 \leq T \leq 50$ .

	$K_p$	$K_i$	$\lambda$	$K_d$	$\mu$
1	2.1187	-0.5201	1.0645	1.1421	1.2906
$L$	-3.5207	2.6643	-0.3268	-1.3707	-0.5371
$T$	-0.1563	0.3453	-0.0229	0.0357	-0.0381
$L^2$	1.5827	-1.0944	0.2018	0.5552	0.2208
$T^2$	0.0025	0.0002	0.0003	-0.0002	0.0007
$LT$	0.1824	-0.1054	0.0028	0.2630	-0.0014

### Límite de Estabilidad

Este caso de sintonización responde a la misma idea ilustrada en la subsección anterior para el caso entero. Se dispone de un lazo cerrado de control proporcional como el mostrado en la Figura 2.7 y se aumenta el valor de la ganancia hasta obtener oscilaciones regulares como se ilustra en la Figura 2.8.

Tabla 2.6: Parámetros PIDOF para método Límite de Estabilidad para  $K_c P_c \leq 64$ .

	$K_p$	$K_i$	$\lambda$	$K_d$	$\mu$
1	0.4139	0.1067	1.3240	0.2293	0.8804
$K_c$	0.0145	0.0101	-0.0081	0.0153	-0.0048
$P_c$	0.1548	-0.0049	-0.0163	0.0936	0.0061
$1/K_c$	-0.4384	-0.2951	0.1393	-0.5293	0.0749
$1/P_c$	-0.0855	-0.1001	0.0791	-0.0440	0.0810

Tabla 2.7: Parámetros PIDOF para método Límite de Estabilidad para  $64 \leq K_c P_c \leq 640$ .

	$K_p$	$K_i$	$\lambda$	$K_d$	$\mu$
1	-1.4405	5.7800	0.4712	1.3190	0.5425
$K_c$	0.0000	0.0238	-0.0003	-0.0024	-0.0023
$P_c$	0.4795	0.2783	-0.0029	2.6251	-0.0281
$1/K_c$	32.2516	-56.2373	7.0519	-138.9333	5.0073
$1/P_c$	0.6893	-2.5917	0.1355	0.1941	0.2873

La optimización de este método responde al mismo conjunto de especificaciones mostradas en la Tabla 2.3, y la determinación de parámetros se hace con las reglas establecidas en las Tablas 2.6 y 2.7 según sea el caso del producto  $K_c P_c$ , siempre que se cumpla con

$$P_c \leq 8 \quad \wedge \quad K_c P_c \leq 640. \quad (2.41)$$

### 2.3.4. Optimización por Enjambre de Partículas

En ciertos problemas de control resulta muy complejo aplicar alguna técnica de sintonización de parámetros como las expuestas en las subsecciones anteriores, ya sea por no linealidades de la

planta, retardos de transportes o dinámicas no modeladas. Es por esto que se han desarrollado aplicaciones en que a través de métodos de optimización se determinan los mejores parámetros para una estrategia de control con el objetivo de minimizar una cierta función de fitness u objetivo. Sin embargo, tampoco puede ser cualquier técnica de optimización ya que los problemas suelen ser de alta complejidad, por lo que determinar una solución analítica es muchas veces impracticable. En este contexto es que se han presentado desarrollos de computación evolutiva como solución a estos cuestionamientos, puesto que sus métodos de optimización iterativa son una alternativa viable para la solución de la problemática planteada.

La Optimización por Enjambre de Partículas, en inglés “Particle Swarm Optimization” (PSO), es un algoritmo de optimización metaheurístico que pertenece a la familia de desarrollos de Inteligencia de Enjambres, en inglés “Swarm Intelligence” (SI), rama de la Inteligencia Computacional. Este algoritmo está basado en el comportamiento de grupos sociales en la naturaleza, como por ejemplo bandadas de aves, enjambres de abejas, cardúmenes o incluso el comportamiento social humano, en su proceso de búsqueda de algún beneficio común [60, 62].

La lógica existente detrás del algoritmo de PSO es que la población de partículas, cada una posible solución del problema de optimización, evolucionan de manera iterativa siguiendo ciertas reglas que emulan movimiento en un espacio  $\lambda$ -dimensional, donde  $\lambda$  es el número de incógnitas en el problema de optimización, con el fin de determinar la mejor solución/posición considerando una cierta función objetivo. Cada una de las partículas se mueve acorde a la información pasada existente en el proceso de evolución; por una parte tienden a seguir a la partícula que haya obtenido la mejor solución, pero también consideran la información de la mejor solución que cada una haya encontrado. A diferencia de otras técnicas de computación evolutiva, PSO no considera en su algoritmo combinación o mutación entre las partículas del enjambre, como es el caso de Algoritmos Genéticos, sino que mantiene siempre lo mejor de su experiencia evolutiva [61].

Existen diversas versiones del algoritmo PSO; sin embargo, en este trabajo se presenta la versión original, que responde al nombre de modelo canónico PSO. En este algoritmo, las  $s$  partículas del enjambre, de dimensión  $\lambda$  y posible solución del problema de optimización, se mueven por el espacio de búsqueda guiadas por el objetivo de minimizar una función de fitness  $f$ . Cada una de las partículas tiene un vector de posición, que representa la posible solución del problema de optimización para la iteración actual, y velocidad; en el caso de la  $i$ -ésima partícula del enjambre,  $x_i$  representa su vector de posición y  $v_i$  de velocidad, que actualiza la posición de la partícula en cada etapa, con  $x_i, v_i \in \mathbb{R}^\lambda$ . La interacción social del algoritmo se da en que el proceso guarda la información respecto a la mejor posición que haya tenido cualquier partícula del enjambre durante todo el proceso iterativo en  $gbest$  (en inglés “global best”), a la vez que cada una de las partículas guarda la información respecto a su mejor posición durante la evolución en  $pbest_i$  (inglés “particle best”). De esta forma, para la dimensión  $j$ -ésima de la  $i$ -ésima partícula, se modifican su velocidad y posición en la  $k$ -ésima iteración según [60]

$$v_{ij}(k+1) = \omega v_{ij}(k) + c_1 \varphi_1(k) (pbest_{ij}(k) - x_{ij}(k)) + c_2 \varphi_2(k) (gbest_j(k) - x_{ij}(k)), \quad (2.42)$$

$$x_{ij}(k+1) = x_{ij}(k) + v_{ij}(k+1), \quad (2.43)$$

donde  $\omega$  es conocido como el factor de inercia,  $c_1$  como constante cognitiva y  $c_2$  como constante social, todos factores de sensibilidad del algoritmo que permiten modificar factores asociados a la convergencia del proceso. Además,  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son funciones aleatorias de distribución uniforme

tales que  $\varphi_1(k), \varphi_2(k) \in [0, 1]$ , las cuales permiten mantener un cierto grado de diversidad en el enjambre para evitar convergencia a mínimos locales y no a la solución global del problema de optimización. Para entender de forma global el funcionamiento del proceso de optimización, a continuación se detallan las etapas básicas del algoritmo:

1. **Inicialización.** Se definen los vectores de posición y velocidad inicial de cada partícula  $\{x_i(0), v_i(0)\}$  de forma aleatoria. Además, se definen los vectores de mejor posición individual ( $pbest_i$ ) y global ( $gbest$ ) según

$$\{pbest_i(0) = x_i(0)\}_{i=1}^s, \quad (2.44)$$

$$gbest(0) = \operatorname{argmin}\{f(pbest_i(0))\}_{i=1}^s. \quad (2.45)$$

2. **Búsqueda.** Se cumple con la  $k$ -ésima iteración siguiendo los pasos:

- Se determinan los valores aleatorios de  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  para actualizar las velocidades de las partículas según (2.42).
- Se actualizan los vectores posición según (2.43).
- Se actualizan los vectores de mejor posición de cada partícula de la forma

$$\{pbest_i(k+1) = \operatorname{argmin}\{f(x_i(k)), f(pbest_i(k))\}\}_{i=1}^s. \quad (2.46)$$

- Se actualiza el vector de mejor posición global

$$gbest(k+1) = \operatorname{argmin}\{f(pbest_i(k+1))\}_{i=1}^s. \quad (2.47)$$

3. **Finalización.** Se vuelve al paso 2. mientras no se cumpla un cierto criterio de término.

Respecto a los criterios de finalización del algoritmo, se sugieren dos enfoques; el primero es respecto a un número máximo de iteraciones, es decir, el proceso termina luego de un número fijo  $G$  de ciclos o generaciones, mientras que el segundo corresponde a un número máximo de iteraciones sin mejoras, es decir, el proceso se termina después de un número fijo de ciclos consecutivos en que no se encuentra una solución global mejor al problema de optimización.

En cuanto a los coeficientes de sensibilidad del algoritmo, se han desarrollado múltiples investigaciones sobre sus efectos en la convergencia a una solución del problema de optimización. El factor de inercia es una medida de ajuste del impacto de las velocidades previas en la etapa de búsqueda del algoritmo; según su valor, la búsqueda puede tender más hacia un sentido grupal o individual, es decir, con valores grandes la búsqueda se caracteriza por ser una exploración global, mientras que un valor pequeño acota la búsqueda a una exploración de tipo local. Debido a este fenómeno, algunas variantes del algoritmo sugieren modificar este valor a lo largo del proceso iterativo para, en principio, buscar todas las posibles soluciones globales del problema, para luego enfocarse en un espacio de búsqueda más acotado [61]. En general, en problemas que no presenten alta complejidad o múltiples soluciones locales, este valor suele ser tomado como  $\omega = 1$ .

Respecto a las constantes cognitiva  $c_1$  y social  $c_2$ , su impacto sobre la convergencia del algoritmo es menor, pero de todas formas pueden generar búsquedas inclinadas a una exploración global o local según sus valores. Por defecto, se suele utilizar  $c_1 = c_2 = 2$ , pero existen trabajos



en los que se pueden asumir valores distintos, siempre que se cumpla con  $c_1 + c_2 \leq 4$ . El número de partículas necesarias para un proceso de optimización con PSO también es un tema de discusión; si el problema no es de alta complejidad se considera apropiado un enjambre de entre 10 y 20 partículas, y si el problema es de mayor complejidad, entre 20 y 40 partículas. Existen ciertas reglas de decisión de este parámetro que obedecen a la dimensionalidad del problema; entre otras, en [62] se presenta como alternativa

$$s = 10 + 2\sqrt{\lambda}. \quad (2.48)$$

El número total de iteraciones es un factor que depende netamente de la dificultad del problema de optimización; para problemas complejos se han utilizado más de 500 iteraciones, pero en problemas de optimización en tiempo real, limitaciones en la capacidad de cómputo no permiten utilizar más de 20 iteraciones. Sin embargo, una alternativa a esto es verificar la evolución de las partículas hacia una solución; si se escoge un número insuficiente de iteraciones, las partículas no convergen todas directamente sobre la solución óptima global del problema.

La función de fitness u objetivo depende directamente del problema a resolver; en ocasiones es común ver la utilización de índices como *IAE* ó *ITAE*, pero según el caso también se utilizan funcionales en los que se involucran conceptos como máximo sobrepaso, tiempo de establecimiento y error en estado estacionario<sup>2</sup>. La implementación computacional básica del algoritmo de Optimización por Enjambre de Partículas es bastante sencilla; sin embargo, existen bastantes recursos en línea que tienen realizada la implementación básica y algunas utilidades extra que permiten un mejor uso de esta herramienta. En el presente trabajo se utiliza la toolbox “Another Particle Swarm Optimization” [68], uno de los tantos recursos computacionales relacionados con PSO en línea.

## 2.4. Desempeño de Controladores

Cada estrategia de control presenta ventajas y desventajas frente al resto, más aun, distintos ajustes paramétricos pueden entregar resultados diferentes para un mismo tipo de controlador, los cuales pueden ser más convenientes en una u otra aplicación. Es por esto que resulta necesario establecer medidas del desempeño o funcionamiento de las estrategias de control en función del resultado de seguimiento de referencia que cada esquema logra; con esto, para un problema en particular, se pueden establecer las necesidades dinámicas del sistema y establecer comparaciones entre tipos de controladores y esquemas de sintonización de parámetros.

Ahora bien, existen diversas formas de medir o cuantificar el desempeño de un sistema de control; algunas sólo consideran la dinámica transiente para emitir un criterio, mientras que otras toman en consideración toda la información existente del proceso de control. A continuación, se muestran algunas de las formas de medición de desempeño más utilizadas en investigación de sistemas de control.

---

<sup>2</sup>Los índices y conceptos mencionados son explicados en detalle, junto a otros, en la Sección 2.4.

### 2.4.1. Especificaciones de Respuesta Transitoria

En general, la señal de salida de un sistema dinámico sometido a un esquema de control posee un comportamiento bastante regular cuando se somete a cambios de referencia de tipo escalón; la señal, analizada en el espacio del tiempo, posee una respuesta transiente o transitoria y una respuesta en régimen permanente o estado estacionario. La respuesta transiente es momentánea, allí se producen oscilaciones de tipo amortiguadas y termina después de un lapso, el cual depende de las constantes de tiempo del sistema; la respuesta estacionaria viene una vez que los fenómenos de la respuesta transiente han desaparecido y es la que perdura en el tiempo mientras el sistema no sea nuevamente perturbado.

La especificaciones del comportamiento de un sistema de control en términos de la respuesta transitoria, se definen en el espacio del tiempo cuando el sistema es excitado con un escalón unitario desde el reposo. Sin embargo, sin perder generalidad, se puede utilizar una entrada escalón de cualquier otra magnitud y las condiciones iniciales pueden ser cualquier punto de operación del sistema; ahora bien, para que la cuantificación del comportamiento sea válida, todos los esquemas sometidos a comparación deben enfrentar los mismos escenarios de funcionamiento

La Figura 2.9 muestra una respuesta típica de un sistema de control sometido a una referencia escalón unitario desde condiciones iniciales nulas en el espacio del tiempo; la parte oscilatoria corresponde a la respuesta transitoria del sistema, y una vez la salida llega a un valor constante, se entiende como el estado estacionario de la señal.

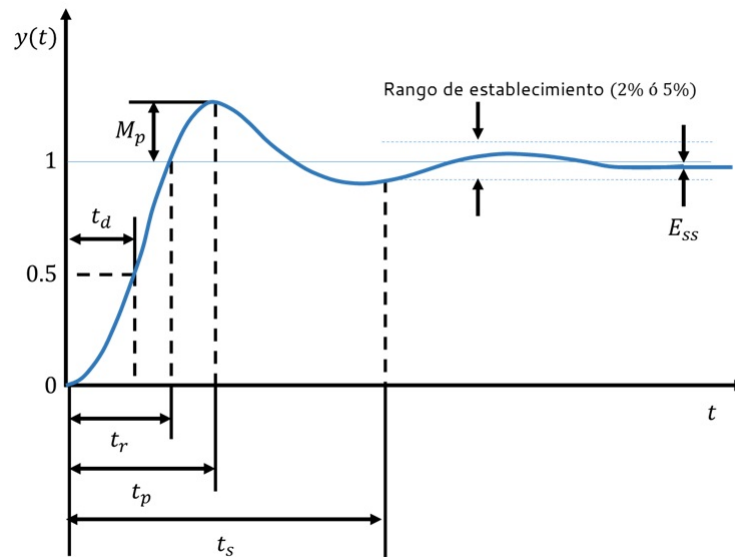


Figura 2.9: Especificaciones de respuesta transitoria frente a entrada escalón.

A partir de lo ilustrado en la Figura 2.9, se definen a continuación las especificaciones más típicas que caracterizan un sistema de control [32].

#### Tiempo de retardo $t_d$

El tiempo de retardo, en inglés “delay”, corresponde al lapso que demora la señal de salida del sistema en llegar al punto medio del escalón de entrada; es decir, cuando su magnitud es

equivalente al 50 % de la magnitud de la señal de referencia.

### **Tiempo de subida $t_r$**

El tiempo de subida, en inglés “rising time”, corresponde al tiempo que toma la señal de salida en ir desde el 10 % al 90 % del valor de la entrada escalón; en algunas variaciones, también se considera como el tiempo en ir desde el 5 % al 95 % o incluso desde el 0 % hasta el 100 % de la señal de referencia.

### **Tiempo pico $t_p$**

El tiempo pico o “peak time” en inglés, corresponde al tiempo que demora la señal de salida en llegar desde su condición inicial hasta su valor máximo de oscilación.

### **Porcentaje de máximo sobrepaso $M_p$ ó $MOV$**

El porcentaje de máximo sobrepaso, en inglés “maximum overshoot”, corresponde al valor máximo de elongación por sobre la señal de referencia que se mide desde ésta y se expresa de manera porcentual respecto a la magnitud de establecimiento de la señal de salida. De forma rigurosa se puede definir como

$$M_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100 \%. \quad (2.49)$$

### **Tiempo de establecimiento $t_s$**

El tiempo de establecimiento o “settling time” en inglés, corresponde al tiempo que demora la señal de salida del sistema en llegar a un rango en torno a la magnitud de la señal de referencia sin volver a abandonarlo; en general, el rango se considera como  $\pm 2\%$  ó  $\pm 5\%$  de la magnitud de la entrada escalón.

### **Error en estado estacionario $E_{ss}$**

El error en estado estacionario, en inglés “steady state error”, corresponde a la diferencia existente entre la referencia y la señal de salida cuando el sistema ha alcanzado el régimen permanente o estado estacionario; es decir, cuando el tiempo tiende a infinito. Si bien no es una especificación directa de la respuesta transiente del sistema, es un indicador de desempeño bastante importante y de múltiples aplicaciones en la cuantificación del comportamiento de un sistema de control.

Si bien las especificaciones descritas en esta sección pueden cuantificar el comportamiento de un sistema de control por sí solas, muchas veces se recurre a combinaciones de ellas para determinar un índice global del comportamiento de la respuesta dinámica. En base a esto, se generan funciones criterios en donde cada una de estas especificaciones aporta según la ponderación o importancia que tenga para el problema en cuestión uno u otro comportamiento definido por cada una.

## 2.4.2. Índices de Desempeño Global

Dentro de los desarrollos de sistemas de control, también se utilizan medidas de cuantificación del desempeño que están relacionadas con la evolución total de las señales del proceso. En particular, se considera de vital importancia estudiar el comportamiento del error de control  $e(t) = r(t) - y(t)$ , donde  $r(t)$  es la referencia a seguir e  $y(t)$  la salida del sistema, y la acción de control  $u(t)$  del sistema; en base a estas señales se generan distintos índices de desempeño que procuran cuantificar el comportamiento dinámico global del sistema.

Para que una función sea considerada un índice de desempeño debe cumplir con tres condiciones básicas [63]:

- Ser siempre positiva ó cero.
- Ser cero sólo si la variable que representa es cero.
- Ser un valor numérico.

A continuación se indican las medidas de desempeño más comúnmente utilizadas en la cuantificación del comportamiento de un sistema de control; sin embargo, cualquier función propuesta que cumpla con las condiciones anteriores puede ser considerada un indicador.

### IAE

La integral absoluta del error o “Integral Absolute Error” (*IAE*), es un índice de desempeño que considera de manera equivalente los errores de control para cuantificar el comportamiento del sistema, pero sólo en módulo. Su definición se establece como

$$IAE = \int_0^t |e(\tau)|d\tau. \quad (2.50)$$

### ISE

La integral del error cuadrático o “Integral Square Error” (*ISE*) corresponde a la integración de la señal de error, pero al cuadrado. De esta forma, a diferencia del índice *IAE*, los errores de gran magnitud tienen mayor incidencia en la cuantificación que los errores de menor magnitud. Su definición corresponde a

$$ISE = \int_0^t e(\tau)^2 d\tau \quad (2.51)$$

### ITAE

La integral absoluta del error ponderada por el tiempo o “Integral Time Absolute Error” (*ITAE*), cuantifica el desempeño del sistema de control ponderando por el tiempo el valor absoluto del error; es decir, mientras más avanza el tiempo, más importancia tienen las muestras de error para la medición del funcionamiento. Su definición es

$$ITAE = \int_0^t \tau |e(\tau)|d\tau. \quad (2.52)$$

## ITSE

La integral del error cuadrático ponderado por el tiempo o “Integral Time Square Error” (*ITSE*), es una especie de combinación entre los esquemas ISE e ITAE; en este caso, también se pondera por el tiempo, pero al error al cuadrado. Con esto, un error de gran magnitud cuando ha pasado un tiempo considerable, castiga en gran medida la indicación de funcionamiento. Su definición queda como

$$ITSE = \int_0^t \tau e(\tau)^2 d\tau. \quad (2.53)$$

Si bien aquí sólo se muestran cuatro índices asociados a la señal de error, existen diversas combinaciones que pretenden modificar en cierto sentido la importancia de las señales asociadas; por ejemplo, existen trabajos en donde se utiliza el tiempo al cuadrado en la definición de función para agregarle aún mayor importancia al error a medida que avanza el tiempo.

Igual de importante que cuantificar el desempeño en cuanto al error del sistema de control, es primordial en ciertas aplicaciones estudiar qué sucede con la acción de control. En algunos casos es necesario realizar control minimizando la energía gastada por el actuador, sacrificando funcionamiento en cuanto al seguimiento de referencia. Para estos casos, se han generado índices que permitan dimensionar aspectos asociados a la señal de control.

## ISI

La energía de control, en inglés “Integral Square Input” (*ISI*), es la cuantificación directa del comportamiento de la señal de control. Su definición está establecida como

$$ISI = \int_0^t u(\tau)^2 d\tau. \quad (2.54)$$

## 2.5. Linealización de Sistemas No Lineales

En muchas ocasiones, generar estrategias de control para sistemas de tipo no lineal resulta complejo, ya que su dinámica particular puede responder de múltiples formas y no existen métodos que cubran todo tipo de comportamiento no lineal. Es por esto que se busca realizar linealizaciones en torno a puntos de operación de los sistemas; de esta forma, se pueden aplicar las diversas estrategias y propiedades desarrolladas para sistemas lineales, las cuales tienen validez en cierta vecindad del punto de operación escogido.

Existen distintos enfoques para realizar linealizaciones de sistemas no lineales; sin embargo, el más utilizado corresponde al que utiliza series de Taylor para la determinación de su estructura. Para una cierta función  $f(x)$ , su desarrollo en series de Taylor alrededor del punto  $x_0$  está dado por

$$f(x_0 + \delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \delta x^n = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} \delta x + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_0} \delta x^2 + \dots \quad (2.55)$$

Ahora bien, en términos de obtener una aproximación lineal, se desprecian los términos de

orden mayor o igual a 2 ( $n \leq 2$ ). Además, se suele escoger un punto de operación que a la vez cumpla con las condición de ser punto de equilibrio del sistema, lo que se traduce en que  $f(x_0) = 0$ . En consecuencia, la aproximación lineal de la función  $f(x)$  en torno a  $x_0$  queda definida por

$$f(x_0 + \delta x) \approx \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} \delta x, \quad (2.56)$$

donde  $\delta x = x - x_0$ .

Para efectos de aplicar este resultado en un sistema dinámico no lineal, se considera una representación en variables de estado dada por

$$\dot{x} = g(x, u), \quad (2.57)$$

$$y = h(x, u), \quad (2.58)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  corresponde al vector de estados,  $u \in \mathbb{R}^m$  al vector de entradas e  $y \in \mathbb{R}^l$  el vector de salidas del sistema. En consecuencia, el sistema puede ser reescrito de forma más explícita como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x, u) \\ \vdots \\ g_n(x, u) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(x, u) \\ \vdots \\ h_l(x, u) \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

La linealización del sistema presentado en (2.59) en torno a un punto de operación  $(x_0, u_0, y_0)$  del sistema, queda entonces definida por

$$\dot{x} = A \cdot (x - x_0) + B \cdot (u - u_0), \quad (2.60)$$

$$y - y_0 = C \cdot (x - x_0) + D \cdot (u - u_0), \quad (2.61)$$

en donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son los jacobianos de los campos vectoriales  $g(x, u)$  y  $h(x, u)$ ; es decir,

$$A = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x_0, u_0)} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \cdots & \left. \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \right|_{(x_0, u_0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial g_n}{\partial x_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \cdots & \left. \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \right|_{(x_0, u_0)} \end{bmatrix}, \quad (2.62)$$

$$B = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{(x_0, u_0)} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial g_1}{\partial u_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \cdots & \left. \frac{\partial g_1}{\partial u_m} \right|_{(x_0, u_0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial g_n}{\partial u_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \cdots & \left. \frac{\partial g_n}{\partial u_m} \right|_{(x_0, u_0)} \end{bmatrix}, \quad (2.63)$$

$$C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{(x_0, u_0)} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial h_1}{\partial x_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \cdots & \left. \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \right|_{(x_0, u_0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial h_l}{\partial x_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \cdots & \left. \frac{\partial h_l}{\partial x_n} \right|_{(x_0, u_0)} \end{bmatrix}, \quad (2.64)$$

$$D = \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{(x_0, u_0)} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial h_1}{\partial u_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \cdots & \left. \frac{\partial h_1}{\partial u_m} \right|_{(x_0, u_0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial h_l}{\partial u_1} \right|_{(x_0, u_0)} & \cdots & \left. \frac{\partial h_l}{\partial u_m} \right|_{(x_0, u_0)} \end{bmatrix}. \quad (2.65)$$

De lo anterior se desprende que  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$  y  $D \in \mathbb{R}^{l \times m}$ . El punto de operación  $(x_0, u_0, y_0)$  se determina de relaciones algebraicas provenientes de considerar  $g(x_0, u_0) = h(x_0, u_0) = 0$ .

# Capítulo 3

## Modelación Fenomenológica Sistema de Estanques

Los sistemas multivariables de carácter no lineal presentan un gran desafío para la ingeniería de control, ya que el acoplamiento entre variables y los comportamientos dinámicos a consecuencia de las no linealidades son distintos en cada caso, y no existe un esquema de control que aplique de manera satisfactoria a todos. Por esto, muchas veces conviene realizar una modelación del sistema en estudio para conocer el comportamiento dinámico de las variables bajo ciertos escenarios. Una de las formas de realizar el proceso de modelación de estos sistemas consiste en basarse en la fenomenología física que los rige; entiéndanse consideraciones geométricas, leyes de conservación e incluso propiedades químicas, físicas o termodinámicas, entre otras muchas opciones que definen el comportamiento natural de una planta.

A lo largo de este capítulo, se pretende mostrar cada una de las consideraciones necesarias para desarrollar el modelo multivariable de tipo no lineal del sistema de estanques, partiendo por una descripción de las instalaciones, y continuando por las consideraciones generales del modelo hasta los detalles particulares que atañen al sistema en cuestión, siempre basando los desarrollos en la fenomenología característica de los elementos que componen el sistema, para finalmente ilustrar la implementación computacional de las ecuaciones del modelo que permitan realizar simulaciones de estudio para el control del sistema.

### 3.1. Descripción del Sistema

La modelación realizada en el presente trabajo está basada en el sistema de estanques del Laboratorio de Automática del Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Chile. La Figura 3.1 muestra un diagrama ilustrativo de las instalaciones mencionadas, en donde se distingue entre los dos estanques que componen el sistema: Estanque Cónico y Estanque de Recirculación; además, la Figura 3.2 muestra la descripción de la simbología de la instrumentación que compone el sistema.

El sistema de estanques funciona con una masa de agua constante, la cual, en principio,



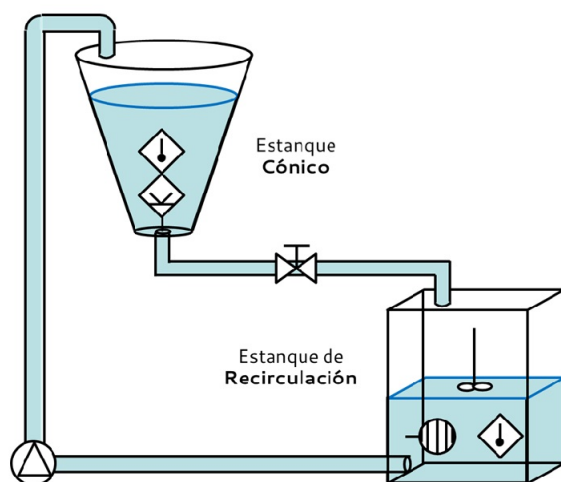


Figura 3.1: Diagrama ilustrativo sistema de estanques.

es almacenada en el estanque de recirculación. El agua es extraída desde la parte inferior de éste por la bomba centrífuga, que corresponde a un motor de inducción trifásico cuyo ciclo de trabajo se mide porcentualmente [0 % – 100 %] respecto a la frecuencia de la red eléctrica a la cual esté conectado. Luego, el líquido asciende hasta la parte superior del estanque cónico en donde comienza a acumularse; la medición del nivel de agua acumulada se realiza a través de un sensor de presión que se ubica en el fondo del estanque. El agua fluye desde el estanque cónico por una apertura en la base y es conducida por las tuberías de vuelta al estanque de recirculación para completar el circuito, procurando que la válvula manual de salida de agua se encuentre en apertura de 45° respecto a la tubería.

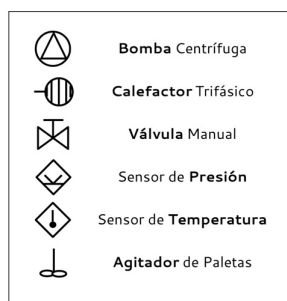


Figura 3.2: Simbología de instrumentación del sistema de estanques.

Por otra parte, existe un calefactor trifásico en el estanque de recirculación, el cual puede entregar energía térmica al sistema para elevar la temperatura del agua. Esta temperatura es medida a través de sensores de temperatura PT100 ubicados en la parte inferior de los estanques cónico y de recirculación. Además, existe un agitador electromecánico de paletas, el cual está encargado de mantener la temperatura homogénea dentro del estanque de recirculación.

Para consideraciones futuras a realizar sobre el sistema, cabe destacar que los estanques, construidos de una aleación metálica, están en directo contacto con el ambiente dentro del Laboratorio de Automática, el cual, en general, se encuentra a una temperatura ambiente regular, la cual varía en función de la hora del día y la estación del año sin la existencia de equipos

de calefacción o aire acondicionado. Un mayor detalle de las instalaciones correspondientes al Sistema de Estanques en el Laboratorio de Automática se puede consultar en la Sección A de Anexos; allí se presentan imágenes que ilustran los componentes del sistema y la estación de trabajo correspondiente.

De forma general, el sistema de estanques puede ser representado según lo ilustrado en la Figura 3.3, en donde se pueden apreciar las variables mas relevantes que componen el modelo fenomenológico del sistema de estanques a determinar. Este sistema puede ser entendido como una composición entre dos subsistemas: el subsistema de nivel, que caracteriza el nivel de agua en el estanque cónico, y el subsistema de temperatura, el cual caracteriza las temperaturas existentes en ambos estanques.

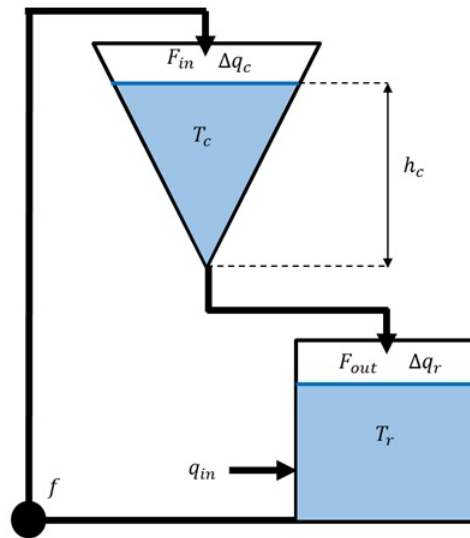


Figura 3.3: Variables generales del sistema de estanques.

Respecto al subsistema de nivel, es el que relaciona el flujo de agua entrante al estanque cónico  $F_{in}$  y el flujo de agua que sale  $F_{out}$  con el nivel de agua  $h_c$  existente dentro del mismo, a través del porcentaje de utilización de la bomba  $f$ , la que corresponde a una de las variables manipuladas del sistema. En cuanto al subsistema de temperatura, caracteriza las temperaturas del estanque cónico  $T_c$  y de recirculación  $T_r$  mediante los flujos calóricos del estanque cónico  $\Delta q_c$  y de recirculación  $\Delta q_r$ , producidos a consecuencia del intercambio de masas existente entre ambos y la disipación térmica hacia el ambiente, y el flujo calórico  $q_{in}$  inyectado al sistema por parte del calefactor trifásico, que resulta ser la segunda variable manipulada del sistema. Ambos subsistemas se relacionan a través de las mencionadas variables para constituir un sistema multivariable de características no lineales que modela de forma global el sistema de estanques descrito en esta sección.

En las siguientes secciones se muestra en detalle la forma en que se relacionan las variables ilustradas en la Figura 3.3, estableciendo las relaciones algebraicas y dinámicas que conforman el modelo fenomenológico del sistema de estanques.

## 3.2. Subsistema de Nivel

Para llevar a cabo la modelación fenomenológica del subsistema de nivel, es necesario considerar las variables generales involucradas que se pueden observar en la Figura 3.4. Los flujos de entrada  $F_{in}$  y de salida  $F_{out}$  modifican dinámicamente el volumen de agua acumulada dentro del estanque  $V$ , el cual está en directa relación con el nivel de agua  $h_c$ . Las dimensiones del estanque cónico pueden ser caracterizadas por su altura  $H$  y el radio en la parte superior  $R$ .

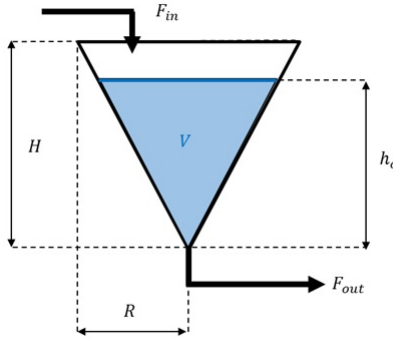


Figura 3.4: Variables generlaes del Subsistema de Nivel.

Para dar con una expresión matemática que permita realizar una modelación fenomenológica de este subsistema, es necesario considerar el balance de masas que se produce dentro del estanque cónico, el cual puede ser definido por [64]

$$\Delta M = M_{in} - M_{out}; \quad (3.1)$$

es decir, la diferencia de masas  $\Delta M$  que se produce dentro del estanque está en directa relación con las masas entrantes  $M_{in}$  y salientes  $M_{out}$  en él. Ahora, si se considera la relación física que establece que la densidad  $\rho$  del líquido es definida por  $\rho = M/V$ , donde  $V$  es el volumen dentro del estanque, la expresión (3.1) puede ser reescrita como

$$\rho \Delta V = \rho V_{in} - \rho V_{out}. \quad (3.2)$$

Considerando que la densidad es homogénea se puede simplificar desde la última expresión; además, tomando el equilibrio para un cierto lapso de tiempo  $\Delta t$ , se tiene

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_{in}}{\Delta t} - \frac{V_{out}}{\Delta t}. \quad (3.3)$$

Finalmente, al considerar el límite  $\Delta t \rightarrow 0$ , se tiene que  $V/\Delta t = F$ , donde  $F$  es el flujo instantáneo de líquido; por lo tanto, se puede dar con la expresión

$$\frac{dV}{dt} = F_{in} - F_{out}. \quad (3.4)$$

La expresión (3.4) es la que permite dar con la relación dinámica que involucra las variables mostradas en la Figura 3.4. En las próximas subsecciones se muestra como se definen cada uno de los elementos involucrados para determinar la ecuación diferencial que rige al comportamiento dinámico del nivel de líquido  $h_c$  dentro del estanque cónico.

### 3.2.1. Caracterización del volumen $V$

De forma general, el volumen de un cono se puede caracterizar por la expresión matemática

$$V = \frac{\pi}{3} \left( \frac{R}{H} \right)^2 h_c^3, \quad (3.5)$$

donde  $R$  corresponde al radio en la parte superior del cono y  $H$  a su altura máxima, según lo ilustrado en la Figura 3.4. Para el caso particular de estudio, se tiene que

$$\begin{aligned} R &= 34,5 \text{ [cm]}, \\ H &= 79,8 \text{ [cm]}. \end{aligned}$$

Sin embargo, la utilización de la fórmula (3.5) no es del todo precisa para la modelación real del sistema, ya que esta expresión no realiza ciertas consideraciones que se producen en la realidad y que afectan el desempeño de esta formulación. Dentro de las causales de error de la utilización de la fórmula (3.5) se cuenta:

- La expresión no considera el volumen de agua que llena las tuberías antes de comenzar a registrar un nivel efectivo dentro del estanque cónico.
- La ubicación del sensor de presión deja un margen de error de medición al haber un volumen de agua que no alcanza a entrar en contacto con él.
- Existe cierto volumen de líquido desplazado por el sensor de presión debido a su ubicación dentro del estanque cónico.
- Existe una inclinación respecto a la vertical del montaje físico del sistema que afecta la geometría del líquido acumulado dentro del estanque cónico.

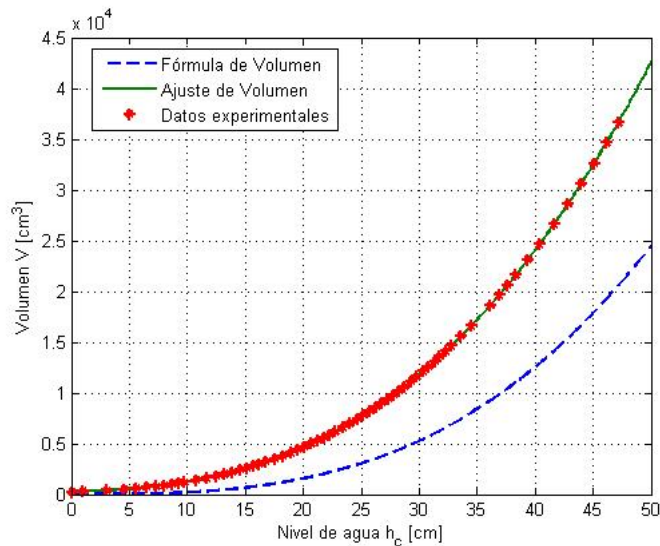


Figura 3.5: Curva de volumen  $V$  como función del nivel de agua  $h_c$ .

Debido a esta interferencia de la realidad con la expresión teórica del volumen de un cono, resulta necesario realizar un ajuste de esta expresión para determinar de forma fidedigna como

evoluciona el volumen del líquido dentro del estanque cónico como función del nivel de agua. Para esto, se diseña un experimento que consiste en llenar con volúmenes conocidos el estanque, dejando la válvula manual de salida cerrada, para registrar a través del sensor de presión las mediciones del nivel de líquido; la Tabla B.1 mostrada en B.1 de la sección Anexos, registra las mediciones realizadas en el experimento descrito.

La Figura 3.5 muestra el volumen  $V$  como función del nivel de agua  $h_c$  en distintas situaciones; de partida, ilustra como se comporta la fórmula (3.5) asumiendo las dimensiones establecidas del estanque cónico para  $R$  y  $H$ . Sin embargo, se muestran los datos obtenidos a partir del experimento diseñado, lo que dista de lo obtenido teóricamente; debido a esta diferencia, se realiza un ajuste de 3er orden de la curva de volumen que permita caracterizar de forma real la situación que se observa. El ajuste queda definido a partir de los datos experimentales por la expresión

$$V = 0,21h_c^3 + 5,7h_c^2 + 17,1h_c + 290,7. \quad (3.6)$$

La función (3.6), que entrega el valor del volumen en  $[cm^3]$  al evaluar el nivel en  $[cm]$ , resulta una alternativa más exacta que la fórmula (3.5) ya que considera intrínsecamente las causales de error mencionadas con anterioridad. Además, da cuenta del comportamiento no lineal del volumen  $V$  respecto a la variable nivel de líquido  $h_c$ .

### 3.2.2. Flujo de entrada $F_{in}$

El flujo de entrada  $F_{in}$  puede ser modelado en función del porcentaje de funcionamiento de la bomba  $f \in [0\% - 100\%]$  de la forma

$$F_{in} = \alpha_1 f + \alpha_2 \geq 0, \quad (3.7)$$

donde  $\alpha_1, \alpha_2$  son parámetros que dependen de las características del motor de inducción trifásico que funciona como bomba, y cuyos valores numéricos pueden ser determinados experimentalmente. El flujo de entrada debe incluir la restricción  $F_{in} \geq 0$  ya que la bomba no es capaz de extraer agua desde el interior del estanque cónico; es decir, no puede haber flujo de entrada  $F_{in}$  negativo.

Para determinar estos parámetros se diseña un experimento de llenado del estanque cónico, el cual consiste en introducir líquido a través de la utilización de la bomba a frecuencias  $f$  fijas por un lapso de tiempo y registrar las variaciones de nivel de agua, procurando mantener la válvula manual de salida cerrada. Al forzar el flujo de salida nulo  $F_{out} = 0$ , la expresión dinámica para el volumen (3.4) queda reducida a

$$\frac{dV}{dt} = F_{in}. \quad (3.8)$$

Ahora, considerando una integración sobre el tiempo en la última expresión y tomando lo mostrado en (3.7), se tiene que

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \alpha_1 f + \alpha_2; \quad (3.9)$$

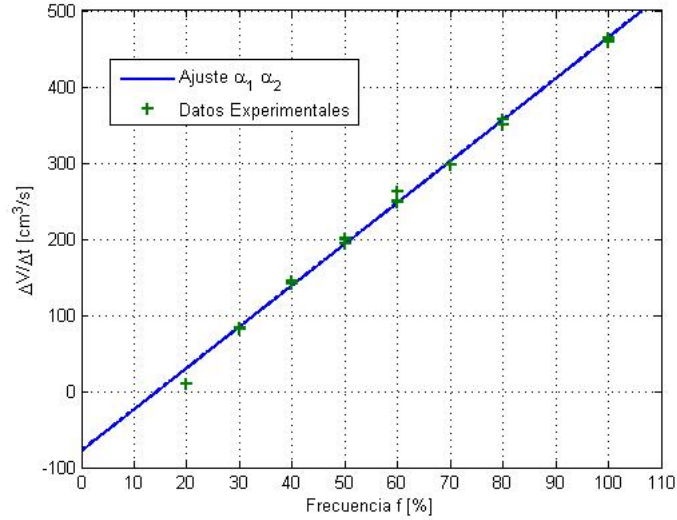


Figura 3.6: Ajuste de parámetros  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  según datos experimentales.

es decir, las diferencias de volúmenes en ciertos intervalos de tiempo tienen un comportamiento lineal afín respecto a la frecuencia de funcionamiento de la bomba, siempre que este parámetro sea constante en el intervalo.

Las pruebas realizadas se ilustran en la Figura B.1 incluida en la sección B.1 de Anexos; además, la información numérica se encuentra resumida en la Tabla B.2 en la misma sección. Considerando la información allí expuesta y la expresión definida en (3.9) se puede generar una regresión de datos que permita dar con los parámetros  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , tal como se observa en la Figura 3.6; los datos experimentales convenientemente extraídos de la Tabla B.2 se grafican como muestras discretas, y en línea continua se muestra el ajuste resultante de considerar los parámetros

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 5,43 [cm^3/s \%], \\ \alpha_2 &= -78,23 [cm^3/s].\end{aligned}$$

### 3.2.3. Flujo de salida $F_{out}$

Para llevar a cabo la definición de una expresión para el flujo de salida  $F_{out}$  es necesario tener en cuenta la diferencia de presiones que se produce entre la parte superior de la superficie de agua acumulada dentro del estanque cónico y la salida a la tubería en el fondo del cono. Luego, considerando la Ley de Torricelli que da cuenta del fenómeno mencionado, se puede proponer una expresión matemática de la forma [65]

$$F_{out} = \beta \sqrt{h_c}; \quad (3.10)$$

donde  $\beta$  corresponde a un parámetro devenido de la geometría del sistema y las propiedades intrínsecas de la fluidez de los líquidos que conformen el circuito del sistema.

Al igual que en la sección anterior, el parámetro  $\beta$  puede ser determinado a través de pruebas experimentales en las instalaciones del laboratorio. En este caso, la prueba consiste en no

introducir agua al estanque, es decir, forzar  $F_{in} = 0$ , y desde cierto nivel de agua comenzar a descargar el estanque manteniendo la válvula manual en su posición original ( $45^\circ$  con respecto a la tubería). Al considerar flujo de entrada nulo, la expresión (3.4) queda determinada por

$$\frac{dV}{dt} = -F_{out}. \quad (3.11)$$

Ahora, considerando una integración de esta expresión y reemplazando según lo mostrado en (3.10), se puede llegar a

$$\Delta V = \int_{t_i}^{t_f} -\beta\sqrt{h_c}dt, \quad (3.12)$$

donde  $t_i$  y  $t_f$  son los instantes de integración inicial y final, y que a la vez definen los instantes para la determinación de la diferencia de volumen  $\Delta V$  en el intervalo. De esta forma, se puede determinar  $\beta$  a través de pruebas de vaciado del estanque y teniendo en consideración la relación

$$\beta = -\frac{\Delta V}{\int_{t_i}^{t_f} \beta\sqrt{h_c}dt}. \quad (3.13)$$

La Figura B.2 en la sección B.1 de Anexos muestra las pruebas de vaciado realizadas para la determinación del parámetros, de cada una de ellas es extraída la información para llenar la Tabla B.3 presente en la misma sección; allí se ilustra la información necesaria para la determinación de los distintos parámetros  $\beta$ , uno para cada una de las pruebas consideradas. A modo de resumen, en la Tabla 3.1 se muestra el resultado de ajuste de  $\beta$  para cada una de las pruebas de vaciado realizadas (seis en total).

Tabla 3.1: Ajuste de  $\beta$  para cada prueba de vaciado.

$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$
21.72	20.34	19.36	20.24	22.07	20.09

Finalmente, para disminuir los posibles errores aleatorios de las mediciones en las pruebas de vaciado, se procede a tomar como parámetro  $\beta$  el promedio de cada uno de los resultados individuales mostrados en la Tabla 3.1. Con esto, queda establecido el ajuste

$$\beta = 20,21 [cm^{5/2}s].$$

### 3.2.4. Modelo Fenomenológico de Nivel

Considerando los elementos definidos hasta este punto y los ajustes paramétricos realizados, se puede proceder a definir de forma total la relación dinámica que muestra la evolución del nivel de agua  $h_c$  como función de la variable manipulada  $f$  y el tiempo, a través de la expresión (3.4) de balance de volumen definida con anterioridad.

Para la definición de volumen dentro del estanque cónico establecida en (3.6), se puede determinar una expresión para su derivada en función del tiempo utilizando regla de la cadena, con lo cual queda

$$\frac{dV}{dt} = \left( 0,63h_c^2 \frac{dh_c}{dt} + 11,4h_c \frac{dh_c}{dt} + 17,1 \frac{dh_c}{dt} \right). \quad (3.14)$$

De lo anterior, reemplazando en (3.4), se puede factorizar y despejar

$$\frac{dh_c}{dt} = \frac{F_{in} - F_{out}}{0,63h_c^2 + 11,4h_c + 17,1h_c}. \quad (3.15)$$

Finalmente, considerando la notación  $\frac{dh_c}{dt} = \dot{h}_c$  y las expresiones del flujo de entrada y de salida mostradas en (3.7) y (3.10), respectivamente, se puede expresar la ecuación diferencial que determina el comportamiento del nivel de líquido  $h_c$  dentro del estanque cónico

$$\dot{h}_c = \frac{\alpha_1 f + \alpha_2 - \beta\sqrt{h_c}}{0,63h_c^2 + 11,4h_c + 17,1}. \quad (3.16)$$

La Tabla 3.2 muestra el valor numérico de los parámetros de la última expresión y sus respectivas unidades de medida. Cabe destacar las evidentes no linealidades que posee el comportamiento dinámico del nivel de agua  $h_c$  definido en (3.16), tanto en el denominador de segundo orden como en la raíz que se encuentra en el numerador de la expresión.

Tabla 3.2: Resumen de parámetros para modelo fenomenológico del subsistema de nivel.

Parámetro	Valor	Unidad de medida
$\alpha_1$	5,43	$[cm^3/s \ %]$
$\alpha_2$	-78,23	$[cm^3/s]$
$\beta$	20,21	$[cm^{5/2}s]$

### 3.3. Subsistema de Temperatura

Para llevar a cabo la modelación completa del sistema de estanques es necesario considerar el subsistema de temperatura, el cual relaciona dinámicamente las temperaturas de los estanques y los intercambios de calor que existen con el ambiente.

Para contextualizar, según lo mostrado en la Figura 3.3, el subsistema de temperatura relaciona las temperaturas del estanque cónico  $T_c$  y de recirculación  $T_r$  con la transferencia de calor, representados por flujos, que se producen tanto en el estanque cónico  $\Delta q_c$  como en el estanque de recirculación  $\Delta q_r$ , siempre considerando que la masa de agua en cada estanque no es constante en el tiempo. Cabe mencionar que las transferencias de calor producidas en tuberías y la bomba son despreciados para la confección del modelo del subsistema.

A continuación, se muestra punto por punto el detalle de los desarrollos que permiten dar con una expresión diferencial que modela de forma fenomenológica el subsistema de temperatura recién definido.

#### 3.3.1. Modelo Fenomenológico de Temperatura

Tanto el caso del estanque cónico como el del estanque de recirculación responden a una situación similar: ambos son contenedores de masas de agua variables en el tiempo y que poseen



transferencias de calor con fuentes externas y/o con el ambiente. Por esto, es posible analizar una situación genérica para dar con una caracterización matemática que represente la dinámica del proceso en forma general.

La Figura 3.7 ilustra un estanque de cierta geometría definida que contiene una cierta masa de líquido  $m$  que puede variar en el tiempo y cuyas características físicas están definidas por un calor específico  $c_p$ . Además, debido a los procesos de transferencias de calor con fuentes externas y/o el ambiente caracterizados por el calor transferido  $q$ , el líquido posee una temperatura  $T$  dependiente del tiempo.

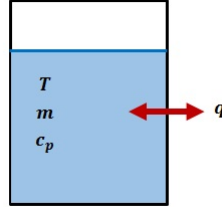


Figura 3.7: Esquema genérico para modelación de temperatura.

A presión constante, se puede definir el calor  $Q$  que está presente en un cuerpo por la expresión integral [66]

$$Q = \int C_p(T) dT, \quad (3.17)$$

donde  $C_p(T)$  corresponde a la capacidad calórica del cuerpo en cuestión, la cual depende directamente de la temperatura  $T$  a la que se realice la transferencia de calor. Para el caso del líquido contenido en un estanque es aceptable considerar que la capacidad calórica es aproximadamente constante en el rango de temperaturas de operación del sistema, por lo que se desprende la relación

$$C_p = mc_p, \quad (3.18)$$

en donde  $m$  y  $c_p$  corresponde a la masa de líquido y el calor específico del estanque genérico ilustrado en la Figura 3.7, respectivamente.

Ahora, tomando en cuenta la aproximación que permite dar con la expresión (3.18) y realizando una integración sencilla sobre lo mostrado en (3.17), se puede llegar a

$$Q = mc_p T. \quad (3.19)$$

Luego, realizando una derivación respecto al tiempo en la última expresión y utilizando la regla de la cadena, debido a que la masa  $m$  y la temperatura  $T$  son funciones de esta variable, se puede obtener un balance de entalpía, lo que resulta una aproximación del balance de energía para un líquido incompresible

$$\frac{dQ}{dt} = c_p \left[ \frac{dm}{dt} T + m \frac{dT}{dt} \right]. \quad (3.20)$$

Denominando al flujo calórico variable en el tiempo  $\frac{dQ}{dt} = \Delta q$  y reordenando la última expresión, se llega a

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\Delta q}{c_p m} - \frac{T}{m} \frac{dm}{dt} \quad (3.21)$$

La relación dinámica (3.21) es aplicable a cualquier tipo de estanque sometido a las condiciones previamente establecidas; en consecuencia, esta expresión es la base para desarrollar las ecuaciones dinámicas que gobiernen la temperatura de los estanques cónico y de recirculación.

### 3.3.2. Transferencia de Calor

Dentro del proceso de variación térmica es necesario conocer los intercambios de calor a los que se encuentran afectos ambos estanques. Los procesos de transferencia de calor son los intercambios calóricos que se producen entre dos cuerpos; uno típicamente caliente, denominado fuente, y otro típicamente frío, denominado receptor.

En general, la transferencia de calor se produce por tres fenómenos: conducción, convección y radiación. En la mayoría de los casos de estudio la transferencia total de calor se produce por combinación de dos de estos procesos, e incluso pueden coexistir los tres; para el sistema de estanques sólo se consideran los fenómenos de conducción y convección. Sin embargo, para el caso de estudio existe un tercer método de transferencia de calor a considerar, el que se produce a consecuencia de la transferencia de masa de líquido a distinta temperatura entre los estanques.

A continuación, se muestra la forma de conceptualizarlos matemáticamente para poder incluirlos en el modelo fenomenológico del subsistema de temperatura.

#### Conducción

El proceso de transferencia de calor denominado conducción es el que se produce cuando el intercambio calórico es a través de un material fijo, como por ejemplo una pared metálica rígida. A nivel microscópico, este proceso de traspaso energético se debe a la vibración de las moléculas que componen el material, comenzando desde la superficie que está a mayor temperatura hacia la que se encuentra a menor temperatura.

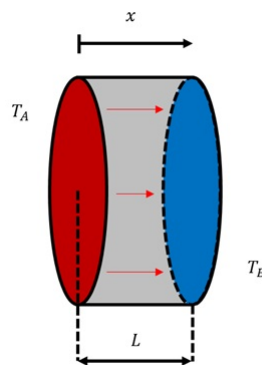


Figura 3.8: Proceso de transferencia de calor por conducción.

La Figura 3.8 ilustra un proceso de conducción típico en donde el flujo de calor va desde la pared a temperatura  $T_A$  hasta la pared a temperatura  $T_B$ ; es decir,  $T_A > T_B$ . Este flujo

de calor es en general perpendicular a la pared siempre que las superficies a ambos lados sean isotérmicas, y que el material posea características de homogeneidad e isotropismo.

El flujo de calor puede ser representado a través de la Ley de Conducción de Calor de Fourier por [67]

$$dQ = kA \left( -\frac{dT}{dx} \right), \quad (3.22)$$

donde  $dQ$  es la cantidad de flujo de calor,  $A$  el área de la sección transversal del material fijo y  $(-dT/dx)$  es el gradiente de temperatura que se considera para la coordenada  $x$  según lo ilustrado en la Figura 3.8, donde crece desde la pared a mayor hacia la de menor temperatura. Además, el factor  $k$ , conocido como conductividad térmica, es una característica intrínseca al material fijo por donde se produce la transferencia de calor; en general, existen tablas que muestran los valores de esta constante para diversos tipos de materiales, la que se determina de forma experimental por lo que puede sufrir variaciones caso a caso, ya que es, incluso, dependiente de la temperatura.

Sin embargo, la expresión diferencial (3.22) no es de gran utilidad para la determinación total del flujo calórico, por lo que se prefiere la versión integrada de la Ley de Conducción de Calor de Fourier, la que enmarcada en lo ilustrado en la Figura 3.8, queda establecida por [67]

$$\frac{dQ}{dt} = k \frac{A}{L} (T_A - T_B), \quad (3.23)$$

con  $L$  el grosor de la pared por donde se produce la transferencia.

## Convección

El proceso de transferencia de calor denominado convección tiene lugar cuando un fluido está en contacto con una superficie a una temperatura distinta. Un fluido frío a una temperatura  $T$  en contacto con una superficie caliente a temperatura  $T_A$  aumenta su cantidad de calor debido al proceso de convección que se produce, en donde las partículas en contacto con la superficie se calientan y ascienden provocando que las partículas del fluido a menor temperatura entren en contacto con la superficie caliente, de esta forma el fluido aumenta su temperatura al producirse una mezcla de las partículas que lo componen, como se ilustra en la Figura 3.9. Cuando el movimiento de las partículas dentro del fluido es libre se tiene un proceso de convección natural, en cambio, si las partículas son movidas por agitación mecánica, se entiende como un proceso de convección forzada.

La forma de expresar matemáticamente el flujo de calor que se produce por el proceso de transferencia por convección, es utilizando la Ley de Enfriamiento de Newton, la cual dicta que [67]

$$\frac{dQ}{dt} = hA (T_A - T), \quad (3.24)$$

en donde, según lo ilustrado en la Figura 3.9,  $A$  corresponde al área de la superficie en contacto con el fluido,  $T_A$  es la temperatura de la superficie y  $T$  la del fluido. Además, se incluye el coeficiente  $h$ , denominado coeficiente de convección, el cual depende de las características propias del fluido, de la geometría y del tipo de convección, distinguiendo entre natural y forzada.

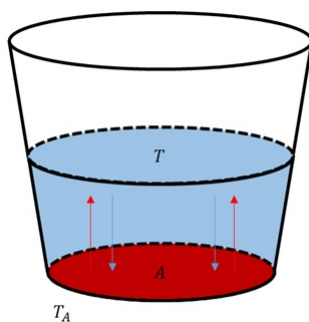


Figura 3.9: Proceso de transferencia de calor por convección.

Dependiendo las características particulares del fluido involucrado en la convección, se puede determinar el valor de  $h$  de forma empírica.

### Intercambio Másico

La transferencia de calor por intercambio másico tiene lugar cuando masas de fluidos a distintas temperaturas se ponen en contacto, como es el caso de estudio, ya que hay porciones de masa de agua a distinta temperatura que van desde el estanque de recirculación hacia el estanque cónico y viceversa.

Considerando un fluido de densidad  $\rho$  y calor específico  $c_p$ , su cantidad de calor está definida según la expresión (3.19). Ahora, considerando la diferencia de calor acumulado debido a un flujo másico invariante y de temperatura constante en un intervalo  $\Delta t$ , la expresión puede ser modificada a

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = c_p \frac{\Delta m}{\Delta t} T. \quad (3.25)$$

Recordando que  $\Delta m = \rho \Delta V$ , donde  $V$  es el volumen de masa acumulado en intervalo de tiempo, se tiene

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = c_p \rho \frac{\Delta V}{\Delta t} T. \quad (3.26)$$

Luego, tomado el límite  $\Delta t \rightarrow 0$ , se cumple que

$$\frac{dQ}{dt} = c_p \rho \frac{dV}{dt} T. \quad (3.27)$$

Finalmente, notando que  $\frac{dV}{dt} = F$ , con  $F$  el flujo volumétrico asociado al flujo másico, se encuentra una expresión genérica para este tipo de transferencia de calor, dado por

$$\frac{dQ}{dt} = c_p \rho F T. \quad (3.28)$$

### 3.3.3. Variables del Subsistema de Temperatura

En esta subsección se ilustran las variables relevantes tanto del estanque cónico como del estanque de recirculación para adaptar la información presentada en las subsecciones previas con motivo de definir las ecuaciones que gobiernan el subsistema de temperatura.

De partida, es necesario comentar que se dan por conocidas ciertas propiedades del líquido que es parte del sistema de estanques; en particular, se asumen los valores típicos tanto para densidad  $\rho$  y calor específico  $c_p$  del líquido, que en el desarrollo de este trabajo corresponde exclusivamente a agua. Además, se considera que en el circuito existe una cantidad constante de masa de agua  $M$ , y que, utilizando relaciones básicas, se puede determinar la masa de agua existente en el están que cónico  $m_c$  por

$$m_c = \rho V, \quad (3.29)$$

donde  $V$  corresponde al ajuste de volumen dentro del estanque cónico definido en (3.6). Por otra parte, se considera que la cantidad de agua en tuberías y bomba es despreciable con respecto a la masa total de agua, por lo que la masa de agua existente en el estanque de recirculación  $m_r$  puede ser descrita por

$$m_r = M - \rho V; \quad (3.30)$$

es decir, se asume  $M = m_c + m_r$ .

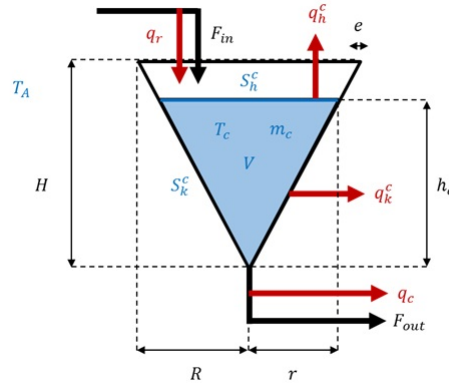


Figura 3.10: Variables asociadas al estanque cónico.

Las Figuras 3.10 y 3.11 ilustran todas las variables que intervienen en la modelación del subsistema de temperatura para el estanque cónico y de recirculación, respectivamente. Particularmente, en la Figura 3.10 se muestran las variables  $m_c$  y  $V$  mencionadas previamente, mientras que en la Figura 3.11 se señala la masa  $m_r$ . Además, se muestran algunas variables correspondientes al subsistema de nivel que son necesarias de ilustrar, ya que se involucran directamente en la modelación del subsistema de temperatura; en este caso se hace referencia a los flujos de agua de entrada  $F_{in}$  y salida  $F_{out}$  del estanque cónico en la Figura 3.10, que en contrapartida se ilustran como las salidas y entradas de agua al estanque de recirculación en la Figura 3.11, respectivamente.

Respecto a las geometrías de los estanques se pueden hacer ciertas definiciones. Tal como se señala en secciones anteriores, por parte del estanque cónico se pueden asumir ciertas dimensiones del contenedor como conocida; haciendo referencia a la Figura 3.10, estas corresponden a la altura total  $H$  del estanque y a su radio máximo  $R$ . Además, en la misma figura se ilustra uno de los estados del sistema correspondiente al nivel de agua  $h_c$ ; en conjunto, estas variables permiten definir el radio correspondiente a la sección de líquido en contacto con el ambiente  $r$ , el cual puede ser expresado por

$$r = \frac{R}{H} h_c, \quad (3.31)$$

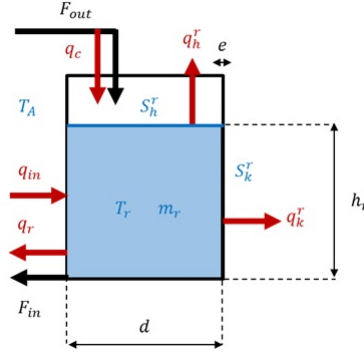


Figura 3.11: Variables asociadas al estanque de recirculación.

relación que se deduce de consideraciones geométricas básicas del estanque cónico.

En cuanto a la geometría del estanque de recirculación, cabe destacar que este corresponde a un paralelepípedo de base cuadrada de lado  $d$ , como se muestra en la Figura 3.11, y el nivel de agua existente dentro, representado por la variable  $h_r$ , puede ser determinado considerando que  $m_r = \rho d^2 h_r$  (notando que  $d^2 h_r$  corresponde al volumen de agua dentro del estanque de recirculación) y usando la expresión (3.30), a través de la formulación

$$h_r = \frac{M - \rho V}{\rho d^2}. \quad (3.32)$$

Con el propósito de determinar los flujos de calor a los que se encuentran afectos los estanques, es necesario realizar ciertas definiciones geométricas sobre áreas de secciones que se ven involucradas en este proceso. En este punto cabe recordar que los flujos de calor se consideran sólo existentes por los procesos de conducción y convección que se producen en los estanques, ya que los flujos producidos en tuberías y bomba se desprecian para la confección del modelo.

Para el caso del proceso de transferencia de calor por conducción, es necesario definir el área de la superficie de líquido que se encuentra en contacto directamente con las paredes metálicas de los estanques. Por parte del estanque cónico, esta variable está representada en la Figura 3.10 por  $S_k^c$ , la que corresponde a una porción del manto del cono que puede ser representada matemáticamente por

$$S_k^c = \pi r \sqrt{r^2 + h_c^2}; \quad (3.33)$$

mientras que por parte del estanque de recirculación está representada por  $S_k^r$  en la Figura 3.11, y corresponde a las superficies laterales del paralelepípedo y la base cuadrada, por lo que se puede caracterizar de la forma

$$S_k^r = 4d h_r + d^2. \quad (3.34)$$

Ahora, en el caso de transferencia de calor por convección, se debe definir el área de superficie de líquido que está directamente en contacto con el aire ambiente en cada estanque. Para el estanque cónico, esta sección se representa por  $S_h^c$  en la Figura 3.10, que corresponde al área de la circunferencia de radio  $r$  que forma la superficie de líquido, por lo que se puede expresar por

$$S_h^c = \pi r^2; \quad (3.35)$$

mientras que en el estanque de recirculación se ilustra en la Figura 3.11 por la variable  $S_h^r$ , la que corresponde al área del cuadrado base del paralelepípedo y se define por

$$S_h^r = d^2. \quad (3.36)$$

Ahora, una vez definidas las áreas que se ven involucradas en la transferencia de calor, se pueden determinar los flujos calóricos asociados utilizando la información presentada en la subsección anterior. Para el proceso de conducción se utiliza la versión de la Ley de Transferencia de Calor de Fourier mostrada en (3.23), por lo que es necesario definir el espesor de la pared metálica de los estanques  $e$ , como se puede ver en las Figuras 3.10 y 3.11. Además, se considera que la temperatura ambiente es conocida y se representa por  $T_A$ , mientras que las temperaturas de los estanques cónico y de recirculación están dadas por  $T_c$  y  $T_r$ , respectivamente. Con esto, el flujo calórico por conducción para el estanque cónico  $q_k^c$  está determinado por

$$q_k^c = k_m \frac{S_k^c}{e} (T_c - T_A), \quad (3.37)$$

y para el estanque de recirculación  $q_k^r$  por

$$q_k^r = k_m \frac{S_k^r}{e} (T_r - T_A), \quad (3.38)$$

donde  $k_m$  corresponde a la conductividad térmica de la aleación metálica en cuestión. En cuanto al proceso de convección, se utiliza la Ley de Enfriamiento de Newton mostrada en (3.24); por lo que el flujo calórico por convección en el estanque cónico  $q_h^c$  se define por

$$q_h^c = h_a S_h^c (T_c - T_A), \quad (3.39)$$

mientras que para el estanque de recirculación  $q_h^r$  según

$$q_h^r = h_a S_h^r (T_r - T_A), \quad (3.40)$$

donde  $h_a$  corresponde al coeficiente de convección del aire.

No obstante lo anterior, existe un par de flujos calóricos no considerados hasta el momento, los que corresponden a la transferencia de calor producida por los desplazamientos de masas de líquido a distintas temperaturas desde el estanque cónico hasta el de recirculación y viceversa. Estos flujos calóricos están representados por las variables  $q_c$  y  $q_r$  en las Figuras 3.10 y 3.11, y están asociados a los flujos volumétricos  $F_{out}$  y  $F_{in}$ , respectivamente. En consecuencia, utilizando la formulación desarrollada previamente y la expresión (3.28), se pueden definir ambas variables según las relaciones

$$q_c = \rho c_p F_{out} T_c, \quad (3.41)$$

$$q_r = \rho c_p F_{in} T_r. \quad (3.42)$$

Cabe mencionar que el aporte de flujo calórico entregado por el calefactor trifásico se encuentra ilustrado en la Figura 3.11 por la variable  $q_{in}$ .

Para finalizar, se pueden definir los flujos calóricos netos asociados a cada uno de los procesos de transferencia de calor tanto en el estanque cónico como en el de recirculación. En el caso del flujo calórico neto del estanque cónico  $\Delta q_c$ , éste está dado por

$$\Delta q_c = q_r - q_c - q_k^c - q_h^c, \quad (3.43)$$

cuya definición coincide con la dirección de los flujos según lo mostrado en la Figura 3.10. Para el caso del flujo calórico neto del estanque de recirculación, según lo ilustrado en la Figura 3.11, se define como

$$\Delta q_r = q_{in} + q_c - q_r - q_k^r - q_h^r. \quad (3.44)$$

### 3.3.4. Modelación de Temperaturas

A continuación, se usa la información presentada en las subsecciones precedentes para determinar las ecuaciones diferenciales que rigen los estados que componen el subsistema de temperatura: temperaturas de estanque cónico  $T_c$  y de recirculación  $T_r$ .

#### Temperatura de estanque cónico

Para determinar el modelo de la temperatura del estanque cónico es necesario tener en cuenta las variables asociadas al estanque que se ilustran en la Figura 3.10. De partida es necesario notar la variación de masa de agua  $m_c$  respecto al tiempo; por lo que, recordando lo establecido en (3.29), se tiene

$$\frac{dm_c}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho V) = \rho \frac{dV}{dt}. \quad (3.45)$$

Luego, usando lo señalado en (3.4) respecto al balance de masa a densidad constante dentro del estanque, resulta

$$\frac{dm_c}{dt} = \rho (F_{in} - F_{out}). \quad (3.46)$$

Ahora, lo desarrollado en la subsección 3.3.1 puede ser adaptado al caso del estanque cónico; en particular, la expresión (3.21) quedaría

$$\frac{dT_c}{dt} = \frac{\Delta q_c}{c_p m_c} - \frac{T_c}{m_c} \frac{dm_c}{dt}. \quad (3.47)$$

Reemplazando según lo mostrado en (3.46), la última expresión quedaría como balance de energía de la forma

$$\frac{dT_c}{dt} = \frac{\Delta q_c}{c_p \rho V} - (F_{in} - F_{out}) \frac{T_c}{V}. \quad (3.48)$$

Para finalizar, resta condensar lo mostrado respecto a los flujos calóricos en las expresiones (3.37), (3.39) y (3.41) en la expresión del flujo calórico neto (3.43) y reemplazar en el desarrollo previo, con lo que se tiene

$$\dot{T}_c = \frac{F_{in}}{V} T_r - \frac{F_{out}}{V} T_c - k_m \frac{S_k^c (T_c - T_A)}{e c_p \rho V} - h_a S_h^c \frac{(T_c - T_A)}{c_p \rho V} - (F_{in} - F_{out}) \frac{T_c}{V}; \quad (3.49)$$



reduciendo términos y factorizando se obtiene la ecuación diferencial final para la temperatura del estanque cónico

$$\dot{T}_c = \frac{F_{in}}{V} (T_r - T_c) - \left( k_m \frac{S_k^c}{e} + h_a S_h^c \right) \frac{(T_c - T_A)}{c_p \rho V}. \quad (3.50)$$

### Temperatura de estanque de recirculación

En el caso del estanque de recirculación las variables se ven ilustradas en la Figura 3.11. La masa de líquido en el interior de este estanque está dada por la expresión (3.30), por lo que su derivada respecto al tiempo sería

$$\frac{dm_r}{dt} = \frac{d}{dt} (M - \rho V) = -\rho \frac{dV}{dt}; \quad (3.51)$$

reemplazando según la expresión (3.4), quedaría

$$\frac{dm_r}{dt} = \rho (F_{out} - F_{in}). \quad (3.52)$$

Nuevamente, adaptando al caso del estanque cónico la expresión (3.21), se tiene

$$\frac{dT_r}{dt} = \frac{\Delta q_r}{c_p m_r} - \frac{T_r}{m_r} \frac{dm_r}{dt}; \quad (3.53)$$

y reemplazando por lo determinado en (3.30), se obtiene

$$\frac{dT_r}{dt} = \frac{\Delta q_r}{c_p (M - \rho V)} - \rho (F_{out} - F_{in}) \frac{T_r}{M - \rho V}. \quad (3.54)$$

Ahora, condensando los flujos calóricos determinados en (3.38), (3.40) y (3.42) en la expresión del flujo calórico neto (3.44), y reemplazando

$$\dot{T}_r = \frac{q_{in}}{c_p (M - \rho V)} + \frac{\rho F_{out}}{M - \rho V} T_c - \frac{\rho F_{in}}{M - \rho V} T_r - k_m \frac{S_k^r}{e} \frac{(T_r - T_A)}{c_p (M - \rho V)} \quad (3.55)$$

$$- h_a S_h^r \frac{(T_r - T_A)}{c_p (M - \rho V)} - \rho (F_{out} - F_{in}) \frac{T_r}{M - \rho V}. \quad (3.56)$$

Finalmente, reduciendo términos y factorizando se obtiene la ecuación dinámica que modela el comportamiento de la temperatura del estanque de recirculación

$$\dot{T}_r = \frac{\rho F_{out}}{M - \rho V} (T_c - T_r) + \left[ q_{in} - \left( k_m \frac{S_k^r}{e} + h_a S_h^r \right) (T_r - T_A) \right] \frac{1}{c_p (M - \rho V)}. \quad (3.57)$$

### 3.3.5. Parámetros del Modelo

Si bien las ecuaciones diferenciales (3.50) y (3.57) modelan el comportamiento dinámico de los estados del subsistema de temperatura, es necesario darle valores a los parámetros básicos que componen estos modelos. Respecto a las variables que ligan este subsistema con el subsistema de nivel, los parámetros básicos son definidos en la sección anterior; los flujos de entrada  $F_{in}$  y salida  $F_{out}$  se modelan utilizando los parámetros ilustrados en la Tabla 3.2, y el volumen dentro del estanque cónico  $V$  queda determinado por la relación (3.6).

En cuanto a las propiedades del líquido que se utiliza en el circuito que forma el sistema de estanques, se considera de forma general agua, por lo que sus propiedades generales son bien conocidas y se definen en la Tabla 3.3. En el caso de la masa total de agua  $M$ , es un parámetro que se escoge en función de las capacidades máximas de los estanques; en este caso, el valor asignado corresponde a considerar un nivel de agua máximo en el estanque de recirculación  $h_r$  de 55 [cm].

Tabla 3.3: Parámetros del líquido para modelo fenomenológico del subsistema de temperatura.

Parámetro	Valor	Unidad de medida
$\rho$	1	[g/cm <sup>3</sup> ]
$c_p$	4,186	[J/g °C]
M	137,5	[kg]

Por parte de los aspectos dimensionales del sistema, los estanques tienen geometrías definidas, las cuales pueden ser medidas directamente en las instalaciones. Estos parámetros se definen en la Tabla 3.4 con sus respectivas unidades de medida.

Tabla 3.4: Parámetros dimensionales de estanques para modelo fenomenológico del subistema de temperatura.

Parámetro	Valor	Unidad de medida
e	0,3	[cm]
H	79,8	[cm]
R	34,5	[cm]
d	50	[cm]

También es necesario acotar que la variable temperatura ambiente  $T_A$  es considerada conocida, y en general fluctúa entre los 15 y 25 [°C]. Respecto al calefactor trifásico su aporte de calor  $q_{in}$  corresponde a 2500[J/s] por fase; es decir, con las tres fases funcionando se tiene un flujo total de 7500[J/s].

Sin embargo, existen un par de parámetros que no resulta tan sencillo de caracterizar, los cuales corresponden a los coeficientes que definen los flujos calóricos de conducción y convección. Respecto a la conductividad térmica  $k_m$  de la aleación metálica de la que están hechos los estanques, existen tablas que entregan valores para ciertos materiales comunes; no obstante, se desconoce el tipo de aleación particular del metal en cuestión, por lo que asumir ciertas características generaría errores en el modelo. Algo similar ocurre con el coeficiente de convección

del aire  $h_a$ , existen ciertos valores tabulados para convección que tiene por fluido el aire, pero los valores varían en un rango muy amplio y dependen en gran medida de las condiciones del entorno en que se produzca este proceso, principalmente de la temperatura y geometría del sistema. Debido a estas dificultades se propone realizar un ajuste de ambos parámetros, de forma que representen de forma fiel la realidad del sistema de estanques en estudio.

## Ajuste paramétrico

Para realizar el ajuste de los parámetros  $k_m$  y  $h_a$ , se diseña un experimento a realizar con el sistema de estanques; entonces, con la información obtenida, se puede realizar un procedimiento de optimización para determinar el mejor valor de ambas constantes.

El experimento consiste en realizar pruebas de enfriamiento de una cierta masa de agua en los estanques cónico y de recirculación. Para esto, inicialmente, se calienta agua en el estanque de recirculación con el calefactor trifásico hasta temperaturas mayores que la ambiente. Luego, usando la bomba, se moviliza cierta masa de agua desde el estanque de recirculación hasta el estanque cónico, procurando tener la válvula de salida cerrada, lo que garantiza un nivel de agua constante en ambos estanques una vez que la bomba deja de impulsar líquido. Con esto, debido a la diferencia de temperaturas con el ambiente, el agua se comienza a enfriar debido a los procesos de conducción y convección, lo que entrega datos que permiten determinar el valor que mejor se adapta a la situación de estudio de los parámetros  $k_m$  y  $h_a$ .

Considerar en el sistema la válvula de salida cerrada y sin impulsión de agua por parte de la bomba, se traduce en el modelo a forzar  $F_{in} = F_{out} = 0$ ; además, sin aportes de calor por parte del calefactor se tiene que  $q_{in} = 0$ . En consecuencia, en el proceso de enfriamiento, según las expresiones diferenciales (3.50) y (3.57), se pueden modelar dinámicamente las temperaturas de ambos estanques de la forma

$$\dot{T}_c = - \left( k_m \frac{S_k^c}{e} + h_a S_h^c \right) \frac{(T_c - T_A)}{c_p \rho V}, \quad (3.58)$$

$$\dot{T}_r = - \left( k_m \frac{S_k^r}{e} + h_a S_h^r \right) \frac{(T_r - T_A)}{c_p (M - \rho V)}. \quad (3.59)$$

Las pruebas experimentales diseñadas contemplan enfriamiento de ambos estanques desde dos puntos de temperatura inicial y considerando dos niveles de líquido distinto; realizando todas las combinaciones de estos escenarios se definen cuatro pruebas en total, cuyas condiciones iniciales y los valores de las variables de las expresiones (3.58) y (3.59), se resumen en la Tabla 3.5. Al considerar todos estos escenarios, se busca determinar los parámetros que mejor se ajusten no sólo a una condición de funcionamiento del sistema de estanques, sino que representen el funcionamiento en cualquier escenario que se presente.

Una vez obtenidos los datos de las cuatro pruebas para cada estanque, se realiza un proceso de optimización metaheurística denominado Optimización por Enjambre de Partículas (por su sigla en inglés “Particle Swarm Optimization”, PSO)[60]. En este caso de utilización, en donde se tienen dos parámetros a optimizar, se escoge una población de 20 partículas que iteren durante 200 generaciones, ya que con esa cantidad se observa convergencia de los parámetros a

Tabla 3.5: Condiciones de pruebas de enfriamiento para ajuste paramétrico.

Prueba	$h_c$ [cm]	$T_c(0)$ [°C]	$h_r$ [cm]	$T_r(0)$ [°C]	$V$ [cm <sup>3</sup> ](·10 <sup>3</sup> )	$S_k^c$ [cm <sup>2</sup> ](·10 <sup>3</sup> )	$S_h^c$ [cm <sup>2</sup> ](·10 <sup>3</sup> )	$S_k^r$ [cm <sup>2</sup> ](·10 <sup>3</sup> )	$S_h^r$ [cm <sup>2</sup> ](·10 <sup>3</sup> )	$M$ [kg]	$T_A$ [°C]
1	40,86	33	36,50	33	24,83	2,44	0,96	10,67	2,5	137,5	16
2	48,34	34	37,50	33	38,16	3,43	1,35	12,17	2,5	137,5	20
3	40,60	43	36,00	43	24,44	2,42	0,95	10,62	2,5	137,5	19
4	47,80	44	34,00	42	37,07	3,35	1,32	12,06	2,5	137,5	21

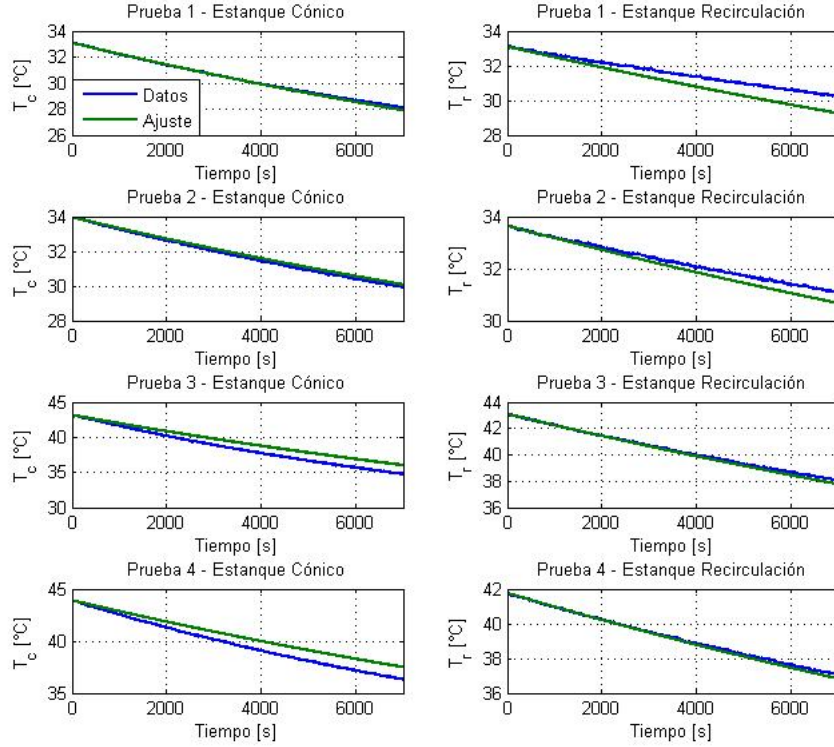


Figura 3.12: Resultados de ajuste paramétrico en pruebas de enfriamiento.

determinar. El procedimiento consiste en resolver las ecuaciones diferenciales (3.58) y (3.59) con los valores de cada una de las partículas que componen el enjambre bajo las mismas condiciones en que se obtienen los datos de cada una de las cuatro pruebas establecidas en la Tabla 3.5; de esta forma, se busca que en cada iteración se minimice el índice  $IAE$  (Integral Absoluta del Error) definido por

$$IAE = \int_0^T |e(t)| dt, \quad (3.60)$$

donde el error  $e(t)$  se obtiene de la diferencia entre los datos empíricos obtenidos y las soluciones de la ecuación diferencial para todas las muestras de tiempo en el intervalo  $[0, T]$  de cada una de las pruebas definidas. Este procedimiento se realiza utilizando la Toolbox “Another Particle Swarm Toolbox” [68]. En la sección B.2 de Anexos se muestran mayores detalles respecto al procedimiento de ajuste.

Como resultado del procedimiento descrito, el proceso de optimización determina los valores de conductividad térmica  $k_m$  y coeficiente de convección  $h_a$  que permiten que el modelo se ajuste lo mejor posible, según el índice  $IAE$ , a los datos obtenidos empíricamente. Los valores

Tabla 3.6: Parámetros de flujos calóricos por conducción y convección.

Parámetro	Valor	Unidad de medida
$k_m$	$2,7087 \cdot 10^{-12}$	$[J/scm^{\circ}C]$
$h_a$	0,0054035	$[J/scm^2^{\circ}C]$

determinados se presentan en la Tabla 3.6 con sus respectivas unidades de medida. Además, a modo de ilustrar los resultados del ajuste realizado, se presenta la Figura 3.12 en donde se muestran, para las cuatros pruebas, los datos originales y los resultados de considerar los valores mostrados en la Tabla 3.6 para resolver las ecuaciones diferenciales (3.58) y (3.59), considerando cada una de las condiciones que corresponden. Si bien, en general, se observa en cada una de las gráficas que el ajuste se ciñe a los datos reales, existen ciertas diferencias a medida que transcurre el tiempo. Esto se atribuye a que las condiciones de temperatura ambiente varían en cada una de las pruebas; sin embargo, el proceso de optimización se realiza considerando una temperatura ambiente constante equivalente a la medición realizada al inicio de la prueba según los valores mostrados en la Tabla 3.5.

## 3.4. Implementación de Modelo de Sistema de Estanques

Una vez definidas las ecuaciones que modelan el sistema de estanques, se procede a implementar las ecuaciones diferenciales para poder realizar simulaciones que permitan contrastar el modelo con la realidad. Para esto, se utiliza el entorno Simulink del software Matlab.

En esta sección se realiza un resumen de las ecuaciones que influyen directamente en el modelo y de los parámetros que lo definen, para después mostrar los detalles de la implementación e ilustrar los resultados de las expresiones matemáticas desarrolladas.

### 3.4.1. Resumen del Modelo

Los desarrollos mostrados en las secciones previas muestran con detalle la forma de deducir las ecuaciones que componen el modelo del sistema de estanques. Sin embargo, las ecuaciones que intervienen directamente pueden ser resumidas a un cierto grupo de relaciones.

Para dar contexto al modelo elaborado, es necesario enlistar ciertos supuestos de modelación que se realizan para simplificación y/o la exclusión de fenómenos que no afectan en gran medida el proceso. Entre los supuestos se puede enlistar:

- Capacidad calórica constante  $C_p$  ( $C_p = Mc_p$ , con  $c_p$  calor específico del líquido).
- Masa de líquido  $M$  constante a lo largo del proceso, se desprecian pérdidas por evaporación.
- Densidad del líquido  $\rho$  constante.
- No se considera la masa de agua que instantáneamente se encuentra en tuberías y bomba, es marginal respecto a la masa total de agua.
- Se desprecian las pérdidas de calor que se producen en tuberías y bomba.

- Se asume un modelo de parámetros concentrados; es decir, las temperaturas se consideran homogéneas para la masa de líquido dentro de cada estanque.

Tabla 3.7: Resumen de parámetros de modelo de sistema de estanques.

Parámetro	Valor	Unidad de medida
$\alpha_1$	5,43	$[cm^3/s\%]$
$\alpha_2$	-78,23	$[cm^3/s]$
$\beta$	20,21	$[cm^{5/2}s]$
$\rho$	1	$[g/cm^3]$
$c_p$	4,186	$[J/g\ ^\circ C]$
$M$	137,5	$[kg]$
$e$	0,3	$[cm]$
$H$	79,8	$[cm]$
$R$	34,5	$[cm]$
$d$	50	$[cm]$
$k_m$	$2,7087 \cdot 10^{-12}$	$[J/scm^\circ C]$
$h_a$	0,0054035	$[J/scm^2^\circ C]$

Por otra parte, existen una serie de parámetros a los que se les da valor según características físicas de los elementos o por ajustes realizados en función de datos obtenidos empíricamente en el sistema de estanques. La Tabla 3.7 muestra el resumen de los parámetros que definen las relaciones algebraicas y dinámicas que representan al modelo.

Respecto al modelo en sí, existen ciertas expresiones algebraicas que determinan ciertas variables involucradas en el proceso dinámico de evolución de los estados del sistema. Estas relaciones se resumen a continuación.

$$V = 0,21h_c^3 + 5,7h_c^2 + 17,1h_c + 290,7 \quad (3.61)$$

$$F_{in} = \alpha_1 f + \alpha_2 \geq 0 \quad (3.62)$$

$$F_{out} = \beta \sqrt{h_c} \quad (3.63)$$

$$S_k^c = \pi r \sqrt{r^2 + h_c^2} \quad (3.64)$$

$$S_k^r = 4dh_r + d^2 \quad (3.65)$$

$$S_h^c = \pi r^2 \quad (3.66)$$

$$S_h^r = d^2 \quad (3.67)$$

Cada uno de los parámetros y variables que se muestran en las expresiones anteriores pueden ser consultados en las Figuras 3.10 y 3.11 para notar a qué elemento hacen referencia en particular.

Respecto a los estados del sistema, se resumen en tres: nivel de agua en estanque cónico  $h_c$ , temperatura de estanque cónico  $T_c$  y temperatura de estanque de recirculación  $T_r$ . El modelo dinámico para estos elementos está dado por las ecuaciones diferenciales que se muestran a

continuación.

$$\dot{h}_c = \frac{F_{in} - F_{out}}{0,63h_c^2 + 11,4h_c + 17,1h_c} \quad (3.68)$$

$$\dot{T}_c = \frac{F_{in}}{V} (T_r - T_c) - \left( k_m \frac{S_k^c}{e} + h_a S_h \right) \frac{(T_c - T_A)}{c_p \rho V} \quad (3.69)$$

$$\dot{T}_r = \frac{\rho F_{out}}{M - \rho V} (T_c - T_r) + \left[ q_{in} - \left( k_m \frac{S_k^r}{e} + h_a S_h^r \right) (T_r - T_A) \right] \frac{1}{c_p (M - \rho V)} \quad (3.70)$$

Finalmente, cabe mencionar que las variables manipuladas del sistema corresponden al porcentaje de frecuencia de funcionamiento de la bomba  $f$  y al flujo calórico del calefactor trifásico  $q_{in}$ . El porcentaje de frecuencia es una variable continua que puede ser descrita por

$$f \in [0, 100] \text{ [%]}; \quad (3.71)$$

mientras que el flujo calórico del calefactor trifásico es una variable discreta que puede tomar cuatro valores distintos

$$q_{in} \in \{0, 2500, 5000, 7500\} \text{ [J/s]}, \quad (3.72)$$

en función de tener ninguna, una, dos o tres fases funcionando, respectivamente.

### 3.4.2. Plantilla de Simulink

La implementación se realiza en el entorno Simulink del software Matlab. Este entorno presenta ventajas en cuanto a realizar implementaciones en las que se incluya el sistema de estanques; además, permite resolver con una frecuencia de muestreo aceptable las ecuaciones diferenciales del modelo.

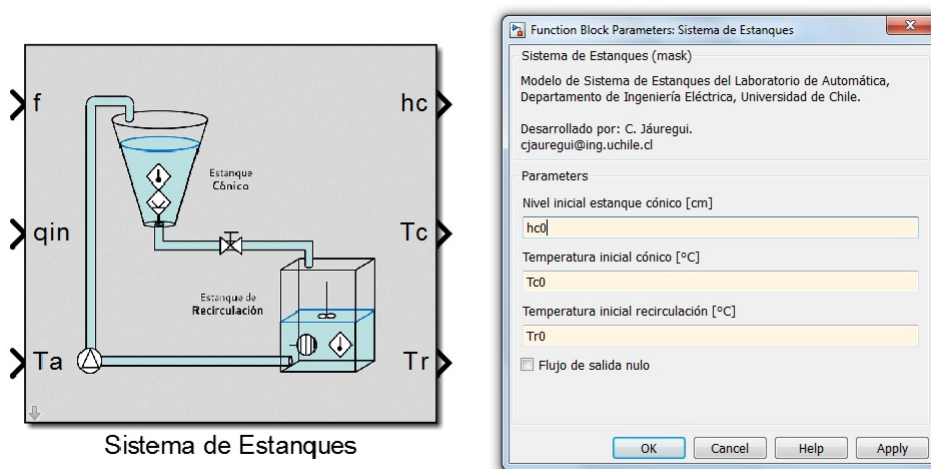


Figura 3.13: Máscara de implementación de modelo en Simulink

El modelo se encuentra implementado en el archivo Simulink “SistemaEstanques.slx”; en él se resumen todas las ecuaciones que se han presentado a lo largo de este trabajo y que se resumen

en la subsección anterior. En primera instancia, este archivo contiene una máscara como se ilustra en la parte izquierda de la Figura 3.13; en este bloque se tienen por señales de entrada las variables manipuladas del sistema ( $f, q_{in}$ ), además de la variable exógena correspondiente a la temperatura ambiente  $T_A$ . Las salidas corresponden a las señales que representan a los tres estados del sistema ( $h_c, T_c, T_r$ ). A la derecha se muestra desplegado el cuadro de diálogo correspondiente a la máscara del modelo; allí se pueden configurar las condiciones iniciales del sistema, que se encuentran representadas por  $hc0, Tc0$  y  $Tr0$  para nivel de estanque cónico, temperatura de estanque cónico y temperatura de estanque de recirculación, respectivamente. Además, se incluye un elemento “checkbox” Flujo de salida nulo, el cual, al marcarlo, realiza la función análoga de cerrar la válvula de salida en el sistema de estanques real.

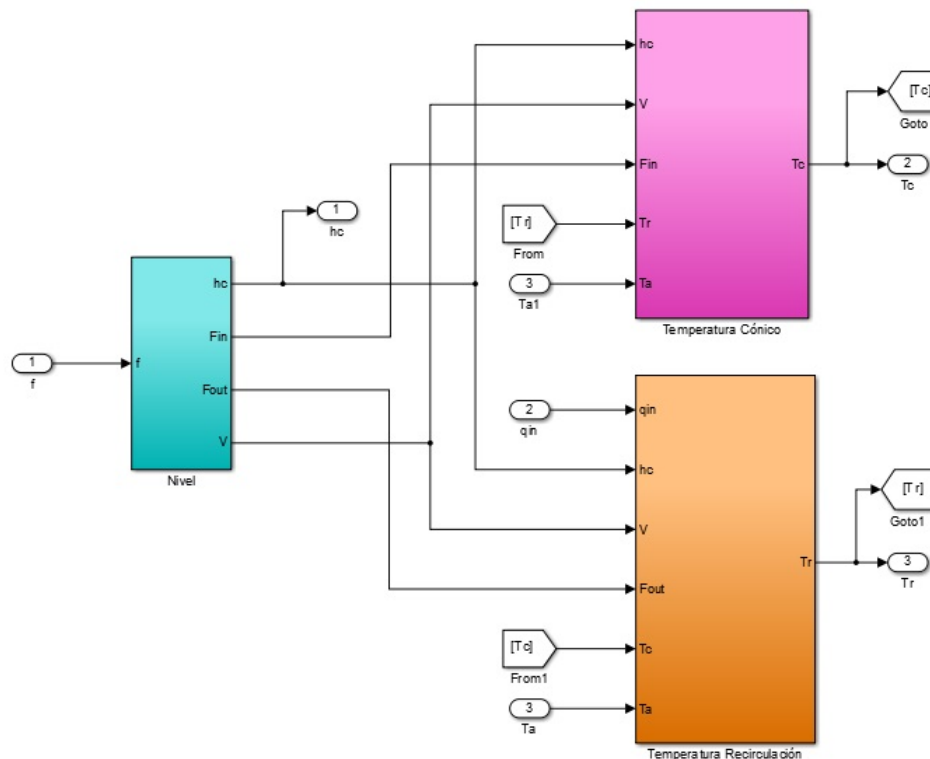


Figura 3.14: Implementación general de sistema de estanques.

La plantilla “SistemaEstanques.slx” se encuentra configurada con un período de muestreo de  $0,05[s]$ , equivalente al período de muestreo de la tarjeta de adquisición de datos del sistema real. Además, en la configuración de la máscara mostrada en la Figura 3.13 se encuentran inicializados todos los parámetros del modelo con los valores que corresponden según lo mostrado en la Tabla 3.7, respetando las unidades de medida allí establecidas.

Dentro de la máscara se encuentra la implementación por bloques del modelo deducido para el sistema de estanques. Allí, según lo ilustrado en la Figura 3.14, se encuentran interconectados los subsistemas de nivel y temperatura; por una parte se encuentra el subsistema de nivel en el bloque Nivel de color celeste, el cual determina variables que influyen en el proceso dinámico del subsistema de temperatura. La ecuación diferencial respecto a la temperatura del estanque cónico se resuelve en el bloque Temperatura Cónico de color magenta, mientras que la correspondiente a la del estanque de recirculación se resuelve en el bloque Temperatura recirculación de color



anaranjado.

En las próximas subsecciones se muestra con cierto grado de detalle las implementaciones de cada uno de los bloques que se muestran en la Figura 3.14, para de esta forma definir completamente la implementación del modelo del sistema de estanques.

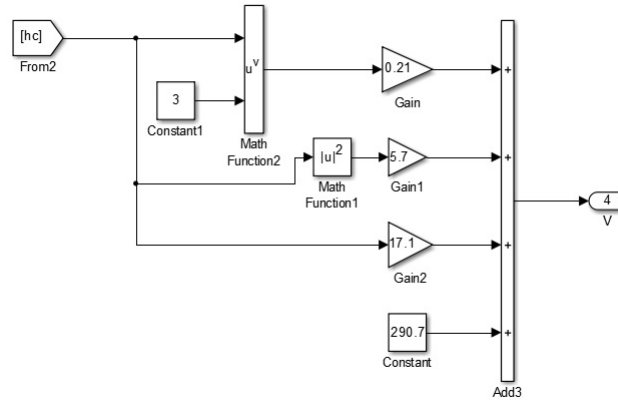


Figura 3.15: Implementación de ajuste de volumen  $V$  de modelo de sistema de estanques.

### Implementación de Subsistema de Nivel

La implementación del subsistema de nivel se realiza dentro del bloque Nivel de color celeste de la Figura 3.14. En primera instancia, dentro de este bloque se determina el volumen dentro del estanque cónico según lo establecido en la expresión (3.61), lo que se puede observar en la Figura 3.15.

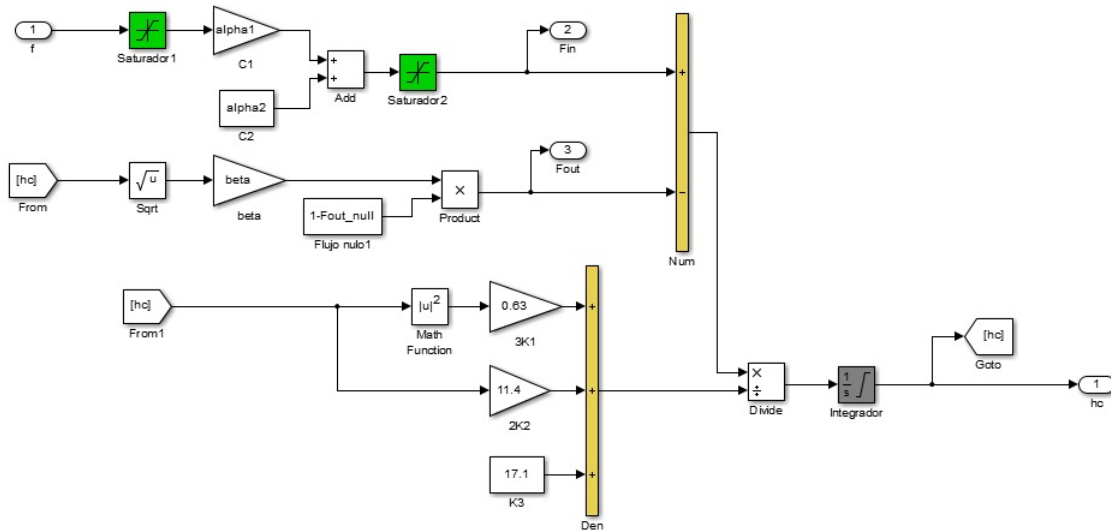


Figura 3.16: Implementación de subsistema de nivel de sistema de estanques.

Además, se implementa la ecuación diferencial (3.68), lo que se ilustra en la Figura 3.16. Cabe destacar la inclusión del bloque Saturador1, destacado en verde, el cual limita la variable

manipulada  $f$  según lo previamente establecido. Por su parte, el bloque Saturador2, también en verde, limita el flujo de salida sólo a valores mayores o iguales a cero. Los bloques de sumatoria, destacados en amarillo, Num y Den determinan el numerador y denominador, respectivamente, de la expresión (3.68); la rama superior del bloque Num determina el flujo de entrada  $F_{in}$  según (3.62), mientras que la inferior el flujo de salida  $F_{out}$  según (3.63).

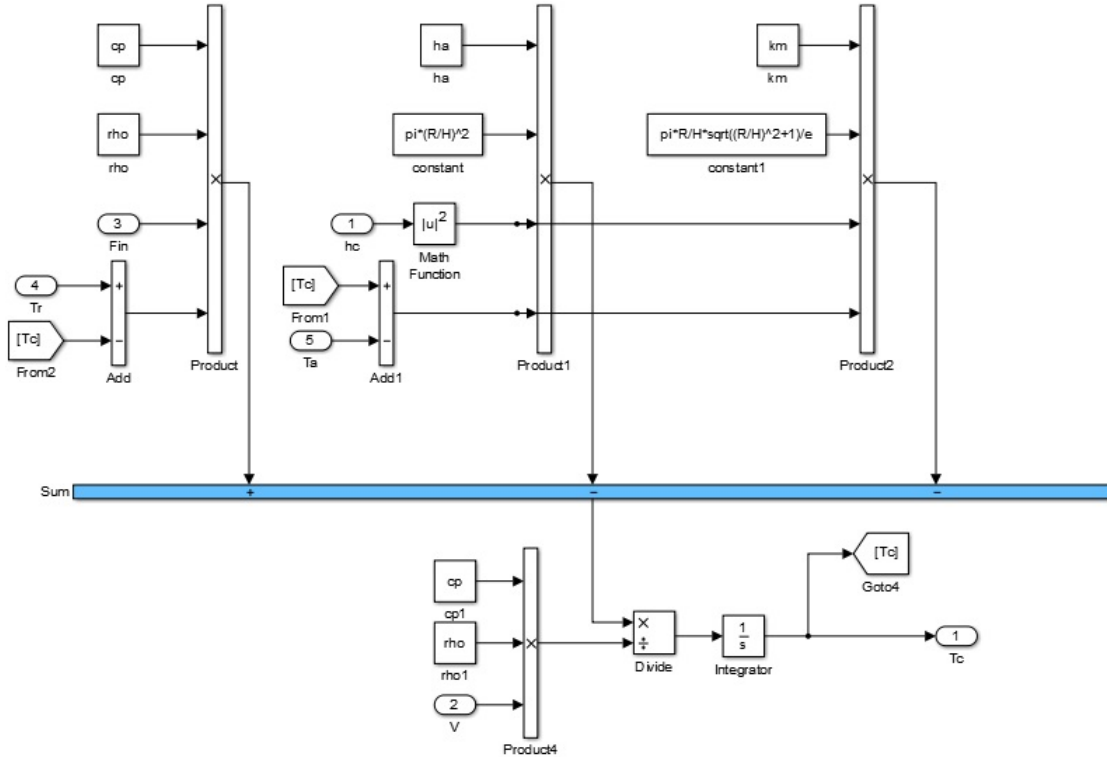


Figura 3.17: Implementación de modelo de temperatura de estanque cónico de sistema de estanques.

Finalmente, el bloque Integrador destacado en gris, que realiza la integración en cada iteración de una simulación, posee un límite inferior de la variable  $h_c$  correspondiente a  $10^{-6} + hc_0$  (con  $hc_0$  la condición inicial del nivel del estanque cónico), esto para que al evaluar el denominador de (3.68) con condición inicial nula, no se indetermina.

### Implementación de Temperatura de Estanque Cónico

Respecto a la ecuación diferencial (3.69) que modela el comportamiento de la temperatura del estanque cónico, su implementación se encuentra dentro del Temperatura Cónico destacado en color magenta en la Figura 3.14. El detalle del interior de este bloque se muestra en la Figura 3.17; a destacar, el bloque Sum de color celeste, reúne todos los aportes de flujo calórico involucrados con este estanque. De izquierda a derecha, la primera rama corresponde al flujo por intercambio másico, la segunda a flujo por convección, y la tercera a flujo por conducción.

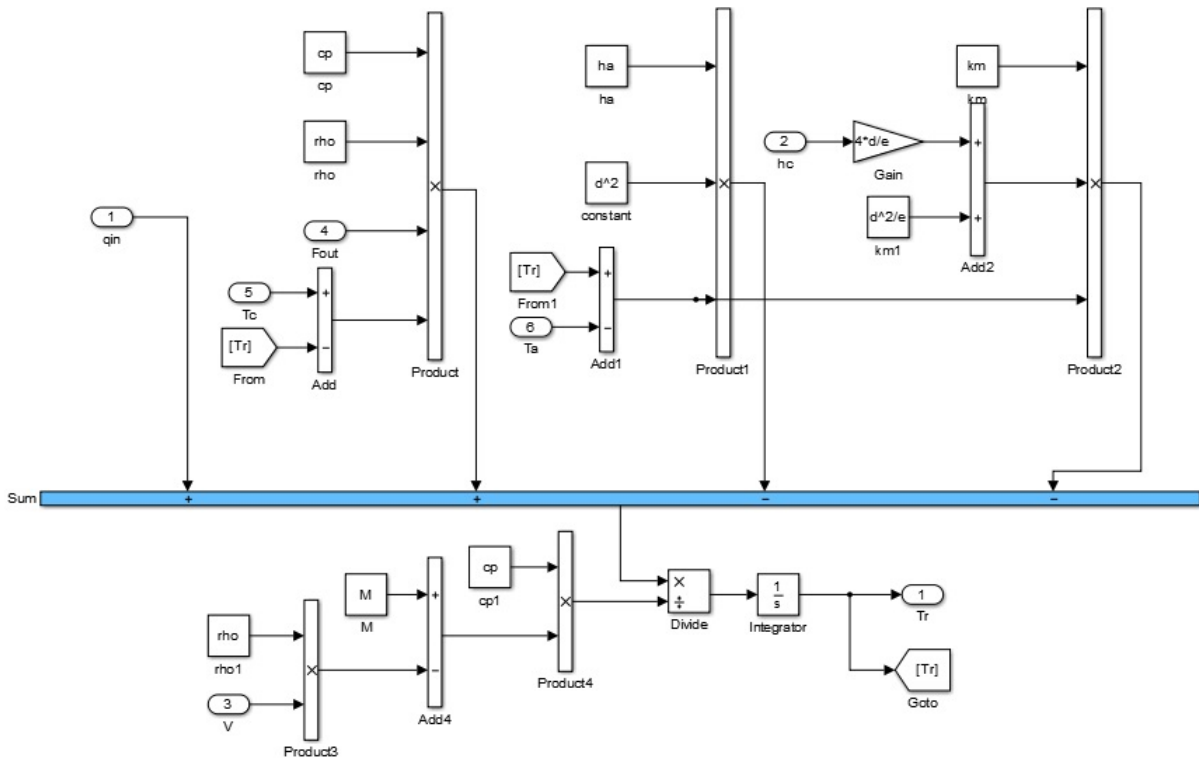


Figura 3.18: Implementación de modelo de temperatura de estanque de recirculación de sistema de estanques.

### Implementación de Temperatura de Estanque de Recirculación

En cuanto a la temperatura del estanque cónico, modelada dinámicamente según la expresión (3.70), su implementación se desarrolla dentro del bloque Temperatura Recirculación de color anaranjado en la Figura 3.14. El detalle se puede observar en la Figura 3.18, en donde el bloque Sum de color celeste agrupa los intercambios calóricos asociados a este estanque; nuevamente, de izquierda a derecha, se tiene el flujo por el calefactor, flujo por intercambio másico, flujo por convección y, finalmente, por conducción, en cada una de las ramas de entrada que se conectan a este elemento.

#### 3.4.3. Resultados de Implementación

Para probar el modelo deducido y el ajuste paramétrico realizado con el sistema de estanques, se diseñan un conjunto de pruebas que permitan, mediante simulación, contrastar el desempeño del modelo y la realidad del sistema. En total, se consideran cuatro pruebas, las cuales abarcan distintos escenarios de posibles funcionamientos de la planta, bajo condiciones conocidas, lo que propicia realizar análisis de los resultados y corroborar el buen funcionamiento del conjunto de ecuaciones en cuanto a la física del sistema.

La primera prueba consiste en realizar un calentamiento del agua en el estanque de recirculación para luego mover una cierta masa de agua hasta el estanque cónico, siempre considerando

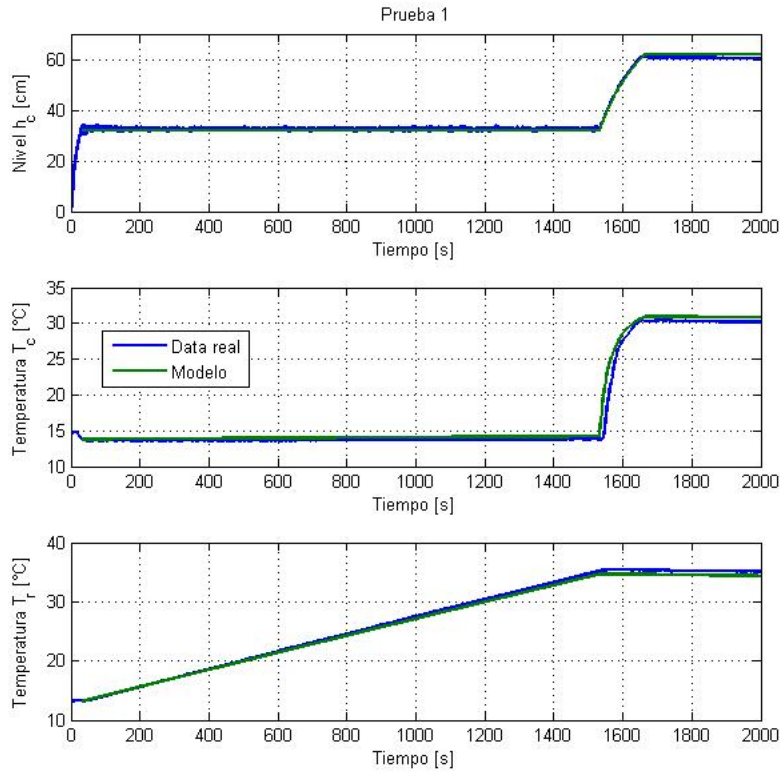


Figura 3.19: Resultados de simulación de modelo de sistema de estanques - Prueba 1.

flujo de salida nulo. La Figura 3.19 muestra el detalle de lo previamente mencionado; en principio, antes de calentar el agua, se mueve cierta masa de líquido hasta el estanque cónico, dejando el nivel en aproximadamente  $30[cm]$ , los cuales se mantienen constantes ya que la válvula manual de salida se encuentra cerrada. Una vez que se cumple esta etapa, se comienza a calentar el agua en el estanque de recirculación hasta los  $1550[s]$ ; en las gráficas se observa como aumenta la temperatura del agua en el estanque de recirculación, mientras que en el estanque cónico el agua comienza levemente a aumentar su temperatura debido a que la temperatura ambiente es mayor que la temperatura del agua recién salida del sistema de abastecimiento. Luego de esto, se deja fuera de funcionamiento el calefactor y se activa la bomba, por lo que el nivel de agua del estanque cónico comienza a subir; como consecuencia, el líquido dentro de este estanque se comienza a calentar puesto que las masas de agua que ingresan vienen a una temperatura mayor desde el estanque de recirculación. Finalmente, con los dos actuadores del sistema sin funcionamiento, se mantiene constante el nivel de agua en el estanque cónico, y ambas temperaturas comienzan a descender, ya que la temperatura ambiente es menor que la nueva temperatura en ambos estanques.

Para llevar a cabo la simulación de la primera de las pruebas se considera el mismo proceso anteriormente descrito; en la Figura 3.19 se observa que el modelo se ajusta a la realidad de los datos que se obtienen de realizar este experimento empíricamente sobre el sistema de estanques.

La segunda prueba consiste en dejar fluir agua desde el estanque cónico a una alta temperatura hacia el estanque de recirculación que contiene agua a temperatura del sistema de

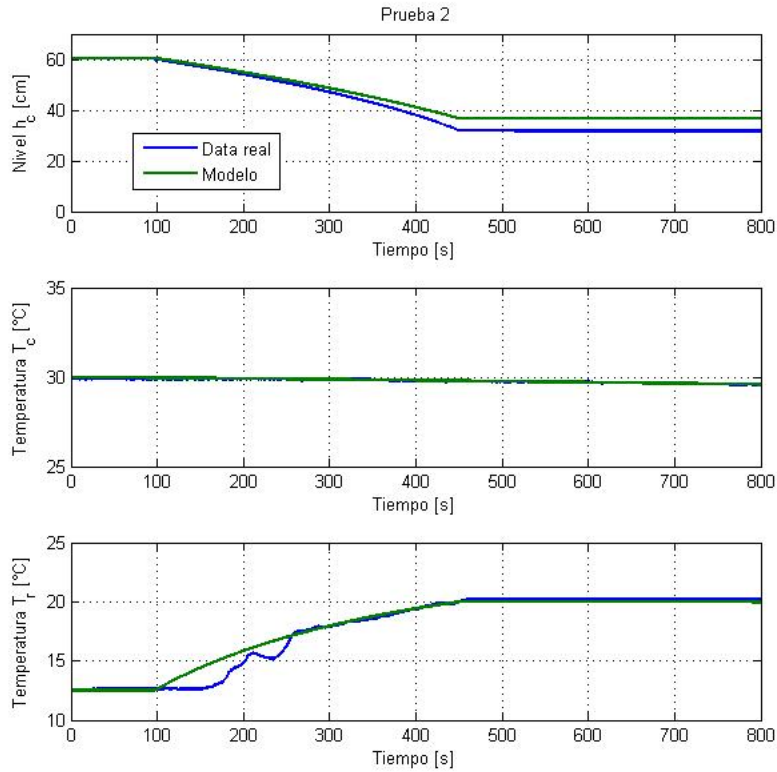


Figura 3.20: Resultados de simulación de modelo de sistema de estanques - Prueba 2.

abastecimiento. La Figura 3.20 muestra el resultado de esta operación; en principio, se tiene agua a  $30[^\circ C]$  en el estanque cónico con la válvula de salida cerrada, manteniendo constante un nivel de  $60[cm]$ . Luego, se abre la válvula hasta la posición correspondiente de  $45^\circ$ , por lo que el agua comienza a descender hasta el estanque de recirculación; debido a la diferencia de temperaturas, la temperatura del estanque de recirculación comienza a subir hasta establecerse en cierto punto, ya que la válvula manual vuelve a ser cerrada. En las gráficas correspondientes se ve que el modelo responde correctamente a la realidad del proceso; la temperatura del líquido en el estanque cónico sufre una disminución en su magnitud debido a los intercambios calóricos con el ambiente. Respecto a la gráfica de la variable  $T_c$  se observa que existe un cierto retardo por parte de la realidad respecto al modelo, esto se debe a que el agitador mecánico se encuentra apagado en este proceso, por lo que la homogenización de la temperatura del líquido se produce lentamente. En cuanto a la diferencia existente desde los  $400[s]$  entre la realidad y el modelo en la gráfica del estado  $h_c$ , una posible fuente de error corresponde a la colocación de la válvula manual en un grado de apertura distinto al correspondiente.

En la tercera prueba se intenta someter al modelo a la situación en que el estanque de recirculación recibe agua a una temperatura menor a la del agua que contiene. Para esto, en principio, se llena el estanque cónico con agua a temperatura del sistema de abastecimiento manteniendo la válvula de salida cerrada, como se puede observar en la parte inicial de las gráficas en la Figura 3.21. Luego, se comienza a calentar el agua en el estanque de recirculación hasta los 2000 segundos, llegando a una temperatura de  $50[^\circ C]$ . En ese instante se apaga el calefactor trifásico y se abre la válvula de salida, por lo que el agua a menor temperatura del

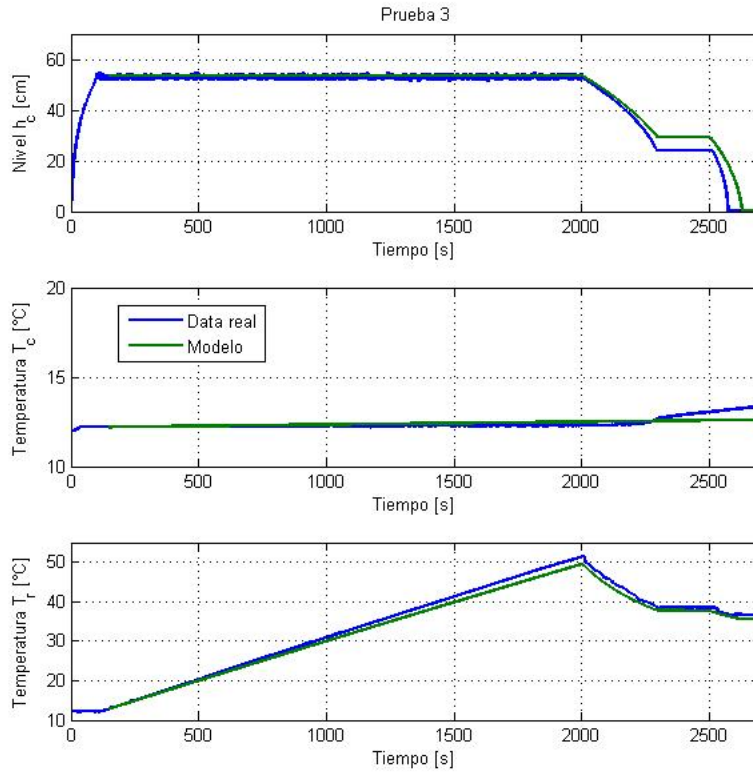


Figura 3.21: Resultados de simulación de modelo de sistema de estanques - Prueba 3.

estanque cónico se mezcla con el agua a mayor temperatura del estanque de recirculación; debido a esto, disminuye la temperatura del líquido en el estanque inferior. La válvula de salida vuelve a ser cerrada en los 2300 segundos aproximadamente, por lo que el nivel del estanque cónico y las temperaturas se estabilizan momentáneamente. Para terminar, la válvula es nuevamente abierta hasta que todo el contenido del estanque cónico cae hasta el estanque de recirculación.

Respecto a las gráficas de la Figura 3.21, es necesario destacar ciertos fenómenos. Aproximadamente en los 2300[s] de prueba, la temperatura del estanque cónico dada por el modelo se comienza a distanciar de la realidad, esto se debe a que este estanque posee el sensor de temperatura ubicado a 25[cm] de la base del cono, y desde ese momento el nivel de líquido se encuentra por debajo de ese punto; por lo tanto, al no estar en contacto con el líquido, el sensor realiza mediciones de la temperatura ambiente, situación que no es cubierta por la matemática desarrollada en el modelo, puesto que resulta ser un funcionamiento no contemplado para el sistema. A su vez, en la gráfica de nivel se produce cierta diferenciación entre lo que dicta el modelo y la realidad, lo que es nuevamente atribuible a la precisión al momento de ubicar la válvula manual en la posición de 45°.

Finalmente, en la cuarta prueba se intenta verificar el funcionamiento del modelo cuando una cierta masa de agua a alta temperatura desciende desde el estanque cónico hasta el estanque de recirculación, el cual posee agua a menor temperatura. Esta prueba se ilustra en las gráficas de la Figura 3.22; la válvula de salida se mantiene abierta hasta los 250[s] del experimento, lo que provoca que el líquido en el estanque de recirculación se caliente. Si bien las curvas coinciden

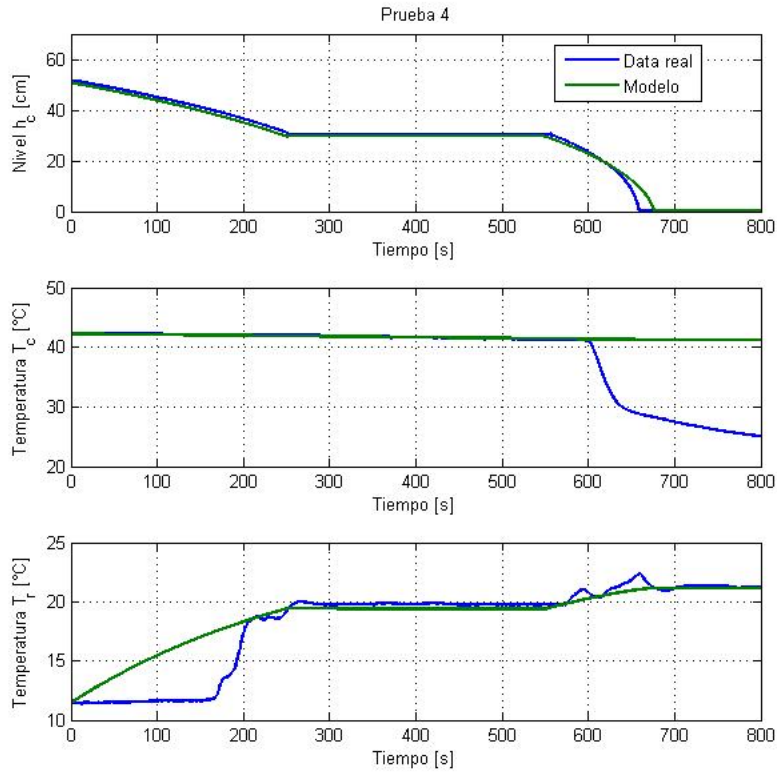


Figura 3.22: Resultados de simulación de modelo de sistema de estanques - Prueba 4.

en el momento de estabilización, existen diferencias en esta etapa de la última gráfica, las que se deben a que el agitador mecánico se mantiene apagado por seguridad para realizar estos experimentos preliminares. Para concluir, se vuelve a abrir la válvula de salida en los 550[s], provocando un nuevo aumento de la temperatura del agua en el estanque de recirculación. Al respecto, en la gráfica correspondiente a la temperatura del estanque cónico, se observa una gran diferencia entre el modelo y la realidad; esto se debe a que el nivel del estanque cónico desciende por debajo de los 25[cm], lo que provoca que el sensor de temperatura allí ubicado entregue mediciones de la temperatura ambiente.

Como conclusión, una vez contrastadas todas las pruebas con el modelo desarrollado en el presente trabajo, se puede observar que las ecuaciones diferenciales determinadas caracterizan en gran medida los fenómenos físicos que ocurren en el sistema de estanques, lo que valida empíricamente lo mostrado en las secciones anteriores. Además, el ajuste de las curvas obtenidas mediante simulación con los datos extraídos del sistema real, da cuenta de la precisión de los ajustes y la validez de los experimentos realizados para determinarlos. Sin ir mas lejos, se cuenta con un modelo matemático dinámico que satisface en gran medida todos los aspectos que se abarcan en el estudio del sistema de estanques que motiva el presente trabajo de investigación.

### 3.5. Linealización del Modelo

Gran cantidad de desarrollos de control de sistemas han sido realizados considerando sistemas de tipo lineal, los cuales cumplen propiedades bien definidas y tienen una representación matemática característica. Sin embargo, la mayoría de los sistemas en la realidad son de tipo no lineal, lo que genera grandes conflictos al momento de realizar análisis sobre ellos y proponer esquemas de control adecuados para los diversos tipos de dinámicas no lineales existentes. Debido a esto, generalmente se recurre a técnicas de linealización que permitan determinar un modelo de tipo lineal del sistema no lineal, el cual sea válido en cierto vecindario de un punto de operación definido; con esto, se pueden implementar estrategias de control desarrolladas para sistemas lineales, e incluso realizar sintonización con métodos para procesos de este tipo.

El sistema de estanques en estudio no es la excepción del marco de procesos reales que son de tipo no lineal; las ecuaciones (3.68), (3.69) y (3.70) evidencian este fenómeno. Por esto, es de gran ayuda determinar una linealización de este modelo que permita estudiar comportamientos en torno a ciertos puntos de operación de interés del sistema; para llevar a cabo la linealización del modelo, se utiliza el método de linealización basado en series de Taylor expuesto en la Sección 2.5.

El modelo del sistema de estanques puede ser entendido en su representación en variables de estado de la forma

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{h}_c \\ \dot{T}_c \\ \dot{T}_r \end{bmatrix} = g(x, u), \quad (3.73)$$

siendo  $g(x, u)$  el campo vectorial compuesto por las funciones descritas en las ecuaciones (3.68), (3.69) y (3.70), donde el vector de entradas del sistema corresponde a

$$u = \begin{bmatrix} f \\ q_{in} \end{bmatrix}. \quad (3.74)$$

Respecto a las salidas del sistema, es de principal interés observar la evolución de las variables nivel de estanque cónico  $h_c$  y temperatura de estanque cónico  $T_c$ , estados del sistema a controlar eventualmente, por lo que ésta se puede caracterizar de forma lineal respecto al vector de estados según

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_c \\ T_c \\ T_r \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

Debido a su representación lineal, la salida del sistema queda exenta de linealización.

Luego, en este caso particular, la linealización del modelo queda de la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_c \\ \dot{T}_c \\ \dot{T}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial h_c} & \frac{\partial g_1}{\partial T_c} & \frac{\partial g_1}{\partial T_r} \\ \frac{\partial g_2}{\partial h_c} & \frac{\partial g_2}{\partial T_c} & \frac{\partial g_2}{\partial T_r} \\ \frac{\partial g_3}{\partial h_c} & \frac{\partial g_3}{\partial T_c} & \frac{\partial g_3}{\partial T_r} \end{bmatrix}_{(x_o, u_o)} \cdot \begin{bmatrix} h_c - h_{c0} \\ T_c - T_{c0} \\ T_r - T_{r0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial f} & \frac{\partial g_1}{\partial q_{in}} \\ \frac{\partial g_2}{\partial f} & \frac{\partial g_2}{\partial q_{in}} \\ \frac{\partial g_3}{\partial f} & \frac{\partial g_3}{\partial q_{in}} \end{bmatrix}_{(x_o, u_o)} \cdot \begin{bmatrix} f - f_{op} \\ q_{in} - q_{op} \end{bmatrix}, \quad (3.76)$$



donde las derivadas parciales que conforman las matrices  $A$  y  $B$  se pueden calcular a partir del modelo. Para la función  $g_1(x, u)$  las derivadas están dadas por

$$\frac{\partial g_1}{\partial h_c} = -\frac{\beta}{2\sqrt{h_c}(0,63h_c^2 + 11,4h_c + 17,1)} - \frac{(F_{in} - F_{out})(1,3h_c + 11,4)}{(0,63h_c^2 + 11,4h_c + 17,1)^2} \quad (3.77)$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial T_c} = 0 \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial T_r} = 0 \quad (3.79)$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial f} = \frac{\alpha_1}{(0,63h_c^2 + 11,4h_c + 17,1)} \quad (3.80)$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial q_{in}} = 0 \quad (3.81)$$

Para la función  $g_2(x, u)$  las derivadas parciales quedan

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_2}{\partial h_c} = & \left( \frac{2}{h_c} - \frac{0,63h_c^2 + 11,4h_c + 17,1}{V} \right) \left( k_m \frac{S_k^c}{e} + h_a S_h^c \right) \frac{T_A - T_c}{c_p \rho V} \\ & + \frac{F_{in}(0,63h_c^2 + 11,4h_c + 17,1)(T_c - T_r)}{V^2} \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial T_c} = -\frac{F_{in}}{V} - \frac{k_m \frac{S_k^c}{e} + h_a S_h^c}{c_p \rho V} \quad (3.83)$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial T_r} = \frac{F_{in}}{V} \quad (3.84)$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial f} = \frac{\alpha_1}{V} (T_r - T_c) \quad (3.85)$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial q_{in}} = 0 \quad (3.86)$$

Finalmente, para la función  $g_3(x, u)$ , las derivadas son

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_3}{\partial h_c} = & \left[ \rho \left( h_a S_h^r + k_m \frac{S_k^r}{e} \right) (0,63h_c^2 + 11,4h_c + 17,1) + k_m \frac{4d}{e} \right] \frac{(T_A - T_r)}{c_p (M - \rho V)} \\ & + \frac{\rho q_{in}(0,63h_c^2 + 11,4h_c + 17,1)}{c_p (M - \rho V)} \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial T_c} = \frac{\rho F_{out}}{M - \rho V} \quad (3.88)$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial T_r} = -\frac{\rho F_{out}}{M - \rho V} - \frac{h_a S_h^r + k_m \frac{S_k^r}{e}}{c_p (M - \rho V)} \quad (3.89)$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial f} = 0 \quad (3.90)$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial q_{in}} = \frac{1}{c_p (M - \rho V)} \quad (3.91)$$

El punto de operación del sistema  $(x_0, u_0)$  en torno al cual se realiza la linealización, puede ser determinado a partir de resolver el set de ecuaciones algebraicas que resultan de considerar

$\dot{x} = g(x, u) = 0$ ; sin embargo, no resulta tan directo ya que con esto se obtienen 3 ecuaciones para determinar 5 incógnitas. La metodología definida para este caso consiste en fijar los valores de los estados  $h_c$  y  $T_c$  en el valor de operación que se desee estudiar, para de esta forma reducir la dimensionalidad del problema y determinar con el sistema de ecuaciones los valores de las tres variables restantes: el estado  $T_r$  y las entradas  $f$  y  $q_{in}$ . Así, se determina el par vectorial que define el punto de operación  $(x_0, u_0)$  según

$$x_0 = \begin{bmatrix} h_{c_{op}} \\ T_{c_{op}} \\ T_{r_{op}} \end{bmatrix}, \quad u_0 = \begin{bmatrix} f_{op} \\ q_{op} \end{bmatrix}. \quad (3.92)$$

Considerando los distintos valores de la matriz  $A$  correspondiente a la linealización de la forma

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right|_{(x_0, u_0)}, \quad (3.93)$$

y los de la matriz  $B$  como

$$b_{ij} = \left. \frac{\partial g_i}{\partial u_j} \right|_{(x_0, u_0)}, \quad (3.94)$$

se puede ilustrar una forma general de la linealización del modelo, asumiendo nulos aquellos valores en que las derivadas parciales enlistadas previamente resultan cero

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_c \\ \dot{T}_c \\ \dot{T}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_c - h_{c_{op}} \\ T_c - T_{c_{op}} \\ T_r - T_{r_{op}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & 0 \\ 0 & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f - f_{op} \\ q_{in} - q_{op} \end{bmatrix}. \quad (3.95)$$

Ahora bien, para realizar ciertos análisis sobre el sistema linealizado o aplicar algunas estrategias de sintonización de parámetros de esquemas de control, no basta con la representación en variables de estado, sino que es necesario definir el proceso a través de funciones de transferencia en el espacio de Laplace. Para esto, se puede utilizar una relación matricial explícita que permite determinar de forma directa una representación como función de transferencia de un sistema lineal (o linealizado en torno a un punto de operación) como el descrito en (2.60) y (2.61), la cual dicta que

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (3.96)$$

Considerando la relación recién mostrada, la linealización en variables de estado presentada en (3.95) y la definición de salidas del sistema descrita a través de (3.75), se puede encontrar la caracterización general de la linealización del modelo como función de transferencia, la cual queda

$$\begin{bmatrix} h_c - h_{c_{op}} \\ T_c - T_{c_{op}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} \frac{1}{s+n_{11}} & 0 \\ K_{21} \frac{s^2+p_{21}s+q_{21}}{s^3+l_{21}s^2+m_{21}s+n_{21}} & K_{22} \frac{1}{s^2+m_{22}s+n_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f - f_{op} \\ q_{in} - q_{op} \end{bmatrix}. \quad (3.97)$$

Mediante un tratamiento algebraico de las caracterizaciones lineales mostradas, se puede determinar la relación entre los parámetros de las linealizaciones en variables de estado (3.95)

y función de transferencia (3.97); para el caso de la función que relaciona la variable nivel de agua  $h_c$  con el porcentaje de frecuencia de la bomba  $f$  se tiene

$$K_{11} = b_{11}, \quad (3.98)$$

$$n_{11} = -a_{11}. \quad (3.99)$$

Para la función que relaciona la temperatura del estanque cónico  $T_c$  con la frecuencia de la bomba  $f$  se cumple

$$K_{21} = b_{21}, \quad (3.100)$$

$$p_{21} = \frac{a_{21}b_{11}}{b_{21}} - a_{11} - a_{33}, \quad (3.101)$$

$$q_{21} = a_{11}a_{33} - \frac{a_{21}a_{33}b_{11}}{b_{21}} + \frac{a_{23}a_{31}b_{11}}{b_{21}}, \quad (3.102)$$

$$l_{21} = -a_{11} - a_{22} - a_{33}, \quad (3.103)$$

$$m_{21} = a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, \quad (3.104)$$

$$n_{21} = a_{11}a_{23}a_{32} - a_{11}a_{22}a_{33}. \quad (3.105)$$

Finalmente, para la función que relaciona la temperatura del estanque cónico  $T_c$  con el flujo calórico de entrada al estanque de recirculación  $q_{in}$  se tiene que

$$K_{22} = a_{23}b_{32}, \quad (3.106)$$

$$m_{22} = -a_{22} - a_{33}, \quad (3.107)$$

$$n_{22} = a_{22}a_{32} - a_{23}a_{32}. \quad (3.108)$$

A partir de las linealizaciones mostradas tanto en variables de estado en (3.95) como en función de transferencia en (3.97) se puede realizar un análisis respecto al comportamiento dinámico del sistema MIMO en cuestión. De partida, se puede notar que la variable nivel de líquido se encuentra desacoplada del resto del sistema, evidencia de esto es el elemento nulo en la función de transferencia y la independencia de  $T_c$ ,  $T_r$  y  $q_{in}$  por parte de  $h_c$  al desarrollar algebraicamente la representación en variables de estado; lo contrario ocurre con los estados de temperatura del sistema, ya que ambos dependen del nivel de agua  $h_c$  y el porcentaje de frecuencia de la bomba  $f$  en la representación en variables de estado, y se confirma con que el elemento bajo la diagonal de la matriz de funciones de transferencia es no nulo. Esta condición del sistema puede ser físicamente interpretable: el nivel de agua no depende intrínsecamente de la temperatura del líquido, ya que, considerando que a bajas temperaturas no varía en gran medida su característica física de densidad y que el porcentaje de evaporación es despreciable, no se modifica el volumen del estanque cónico, ni las características del flujo de entrada  $F_{in}$  y salida  $F_{out}$  dependientes del porcentaje de frecuencia  $f$ ; sin embargo, la temperatura del líquido sí depende directamente del nivel de agua dentro del estanque cónico, porque a medida que disminuye la masa de agua dentro del estanque de recirculación, esta se calienta de forma más rápida debido a los efectos del calefactor trifásico.

Por otra parte, los elementos de la función de transferencia obtenida a partir de la linealización en variables de estado, dan cuenta del comportamiento dinámico de las variables de salida del sistema. El nivel de agua  $h_c$  tiene un comportamiento de primer orden respecto a su variable

manipulada  $f$ , mientras que la temperatura del estanque cónico  $T_c$  posee un comportamiento de sistema de segundo orden respecto a la variable que lo domina  $q_{in}$ . Sin embargo, el elemento bajo la diagonal corresponde a una dinámica más compleja que las mencionadas debido al orden de los polinomios en su numerador y denominador; esto puede dar lugar a retardos e incluso comportamientos oscilatorios por parte de la salida de temperatura frente a variaciones del sistema, lo cual también es entendible desde un punto de vista físico: la variación de temperatura del agua en el estanque cónico se obtiene a partir del calentamiento del agua en el estanque de recirculación, lo que se puede entender como un retardo del sistema en sí, lo que bajo regímenes de comportamiento particulares puede ocasionar oscilaciones debido al proceso de calentamiento por intercambio másico y enfriamiento por disipación de calor.

# Capítulo 4

## Control de Nivel (SISO)

En general, los problemas de control monovariantes suelen ser más fáciles de abordar que los problemas en que es necesario controlar más de una señal; el acoplamiento inducido entre las variables hace que el sistema se comporte con dinámicas complejas y que muchas veces no son posibles de controlar con esquemas tradicionales de control monovariante.

En este caso particular, el modelo desarrollado para el sistema de estanques ofrece una característica particular: el acoplamiento de las variables no es total, es decir, existe un estado que no depende de la dinámica de los otros dos. A través de las linealizaciones del sistema en torno a puntos de operación, desarrolladas de forma genérica como variables de estado en (3.95) y como matriz de funciones de transferencia en (3.97), se puede verificar que el nivel de agua  $h_c$  no se ve afectado por la evolución de las temperaturas de estanque cónico  $T_c$  y de recirculación  $T_r$ . Es por esto que, aprovechando esta característica del sistema, se pretende abordar el problema de control SISO de una entrada y una salida (en inglés “Single Input Single Output”), proponiendo diferentes estrategias de sintonización de parámetros de controladores PID, tanto de orden entero como fraccionario, para analizar los resultados en cada caso y establecer las comparaciones que resulten pertinentes. El análisis se realiza, en una primera aproximación, a través de simulaciones con el modelo matemático no lineal desarrollado, para luego validar los resultados más importantes en pruebas experimentales a realizar directamente con el sistema de estanques real.

### 4.1. Sintonización LGR

Como primera aproximación se pretende sintonizar controladores de tipo PI desde un enfoque clásico, utilizando el método de Lugar Geométrico de las Raíces. La idea fundamental de desarrollar esta estrategia de sintonización es generar un caso base de comparación contra los cuales contrastar otros métodos de sintonización para controladores más complejos, en versiones de orden entero como PID o de tipo fraccionario como PIOF o PIDOF.

El método de sintonización LGR está desarrollado para determinar los parámetros de controladores cuando el sistema a controlar es de tipo LTI, es decir, lineal y de parámetros constantes

(en inglés “Linear and Time Invariant”); sin embargo, el problema propuesto en esta sección es de tipo no lineal, por lo que, para subsanar esta dificultad, el método se aplica sobre linealizaciones del modelo no lineal desarrollado en el Capítulo 3.

A fin de que las linealizaciones del sistema no incurran en aproximaciones en exceso gruesas, se propone dividir el espacio de operación del nivel  $h_c$  por intervalos. De partida, se considera que el espacio de operación total del subsistema de nivel, de aquí en adelante mencionado como el intervalo Global, abarca desde los 15 [cm] hasta los 60 [cm]; a niveles más bajos del rango cuestión, la bomba tiene limitaciones físicas para mantener un punto de operación aproximadamente constante en un esquema de control, mientras que a niveles más altos del rango, se arriesgan posibles desbordamientos de agua de la estructura cónica. Luego, se consideran tres rangos de operación que dividen el intervalo Global por partes iguales: Bajo, Medio y Alto; cada uno de ellos pretende representar la dinámica del sistema para situaciones en que el nivel de líquido se encuentra en la parte inferior, intermedia o superior del estanque cónico, respectivamente.

Tabla 4.1: Puntos de operación y parámetros de linealización del modelo de  $h_c$ .

Nivel	Intervalo [cm]	$h_{c_{op}}$ [cm]	$f_{op}$ [%]	$a_{11}$	$b_{11}$	$K_{11}$	$n_{11}$
Global	[15-60]	40	37.95	-0.0054	0.0036	0.0036	0.0054
Bajo	[15-30]	22.5	32.06	-0.0210	0.0090	0.0090	0.0210
Medio	[30-45]	37.5	37.20	-0.0063	0.0040	0.0040	0.0063
Alto	[45-60]	52.5	41.37	-0.0027	0.0023	0.0023	0.0027

La Tabla 4.1 muestra la división mencionada con el intervalo considerado para cada uno de sus rangos; a su vez, se muestra el punto de operación en torno al cual se realiza la linealización del modelo no lineal: el nivel de operación  $h_{c_{op}}$  se determina como el punto medio de cada uno de los rangos (salvo en el intervalo Global, donde se escoge un punto levemente superior para evitar la coincidencia con el intervalo Medio), mientras la frecuencia de operación  $f_{op}$  se encuentra al resolver  $\dot{h}_c = g_1(h_c, f) = 0$ , como se menciona en la Sección 3.5. Siguiendo lo también allí señalado, se pueden determinar los parámetros  $a_{11}$  y  $b_{11}$ , que caracterizan la linealización en variables de estado según lo mostrado en (3.95), evaluando las derivadas parciales 3.77 y 3.80 en cada uno de los puntos de operación determinados; luego, a través de las relaciones algebraicas presentadas en 3.98 y 3.99, se pueden determinar los parámetros  $K_{11}$  y  $n_{11}$  que determinan las funciones de transferencia de las linealizaciones según lo ilustrado en (3.97). El resultado de este procedimiento para cada uno de los intervalos definidos se presenta también en la Tabla 4.1.

Tabla 4.2: Especificaciones de respuesta transitoria para sintonización LGR.

$t_s$ [s]	$MOV$ [%]
150	10

Para la sintonización de parámetros del controlador PI, que resulta de considerar  $K_d = 0$  en (2.19), se utiliza la toolbox de Matlab *rltool*; particularmente, se definen especificaciones de respuesta transitoria basadas en el tiempo de establecimiento  $t_s$  y máximo sobrepaso  $MOV$  que se desean obtener en el lazo cerrado de control a entrada escalón, para determinar las ganancias proporcional  $K_p$  e integral  $K_i$ . Para cada uno de los intervalos definidos se sintoniza en función de las especificaciones establecidas en 4.2. En la Sección C.1 de Anexos se describen mayores detalles del procedimiento de sintonización.

Como resultado de aplicación del método LGR sobre las linealizaciones de cada uno de los intervalos, se obtienen los parámetros de cada controlador PI, los cuales se resumen numéricamente en la Tabla 4.3. Ahora bien, el esquema de control a utilizar en cada caso varía en su concepción; el controlador determinado para el rango Global se utiliza a todo evento en el esquema de control propuesto, mientras que en el caso de los controladores determinados para la división del espacio de operación, se propone una estrategia de “Gain Scheduling”. Esta estrategia consiste en utilizar cada controlador determinado en el rango correspondiente cuando la variable nivel  $h_c$  se encuentre en el intervalo definido para cada uno de ellos; es decir, cuando  $h_c \in [0 - 30]$ <sup>1</sup> se utilizan los parámetros del controlador Bajo, cuando  $h_c \in [30 - 45]$  se utilizan los del Medio y cuando  $h_c \in [45 - 60]$  se utilizan los del Alto.

Tabla 4.3: Parámetros de controladores sintonizados con LGR.

Nivel	$K_p$	$K_i$
Global	13.06	0.54
Bajo	3.44	0.2149
Medio	11.44	0.49
Alto	21.36	0.84

Para poner a prueba los controladores, tanto los sintonizados en esta sección como en las restantes del presente capítulo, se propone una señal de referencia que sea capaz de abarcar distintos escenarios de funcionamiento del sistema; es decir, que se presenten tanto subidas de escalón como bajadas, pasando por cada uno de los intervalos de operación definidos del sistema. La Tabla 4.4 muestra el valor numérico de la señal de referencia diseñada para intervalos de tiempo idénticos en una prueba con un total de duración de 2400 [s].

Tabla 4.4: Señal de referencia para pruebas de Control SISO  $h_c$ .

$t$ [s]	[0-400]	[400-800]	[800-1200]	[1200-1600]	[1600-2000]	[2000-2400]
$r(t)$ [cm]	22.5	37.5	52.5	37.5	22.5	15

En una primera aproximación, los controladores obtenidos se prueban sobre el modelo fenomenológico del sistema en simulación para obtener resultados preliminares que permitan discriminar respecto a seguimiento de referencia de la solución propuesta. Los resultados de control en simulación con los esquemas desarrollados en esta sección frente a la señal de referencia descrita en la Tabla 4.4, se pueden observar gráficamente en la Figura 4.1; en la parte superior se observa el comportamiento de la salida del sistema  $h_c$ , tanto para el controlador PI Global como para el PI Niveles (que consiste en la estrategia “Gain Scheduling” descrita previamente), mientras que en la parte inferior se observa la acción de control  $f$  asociada a cada uno de los controladores propuestos.

Para medir el comportamiento del sistema bajo la acción de los controladores, tanto los del presente caso como los del resto de resultados a exponer, se introducen índices de desempeño que permitan medir numéricamente ciertos aspectos de la respuesta dinámica del sistema, tanto de forma global como en su respuesta transitoria. Respecto al comportamiento global, se determinan los índices  $IAE$  y  $ISI$ , descritos en la Sección 2.4.2, mientras que para la respuesta

<sup>1</sup>Se extiende el intervalo del rango Bajo hasta 0 para cubrir todo el espacio de operación del sistema.

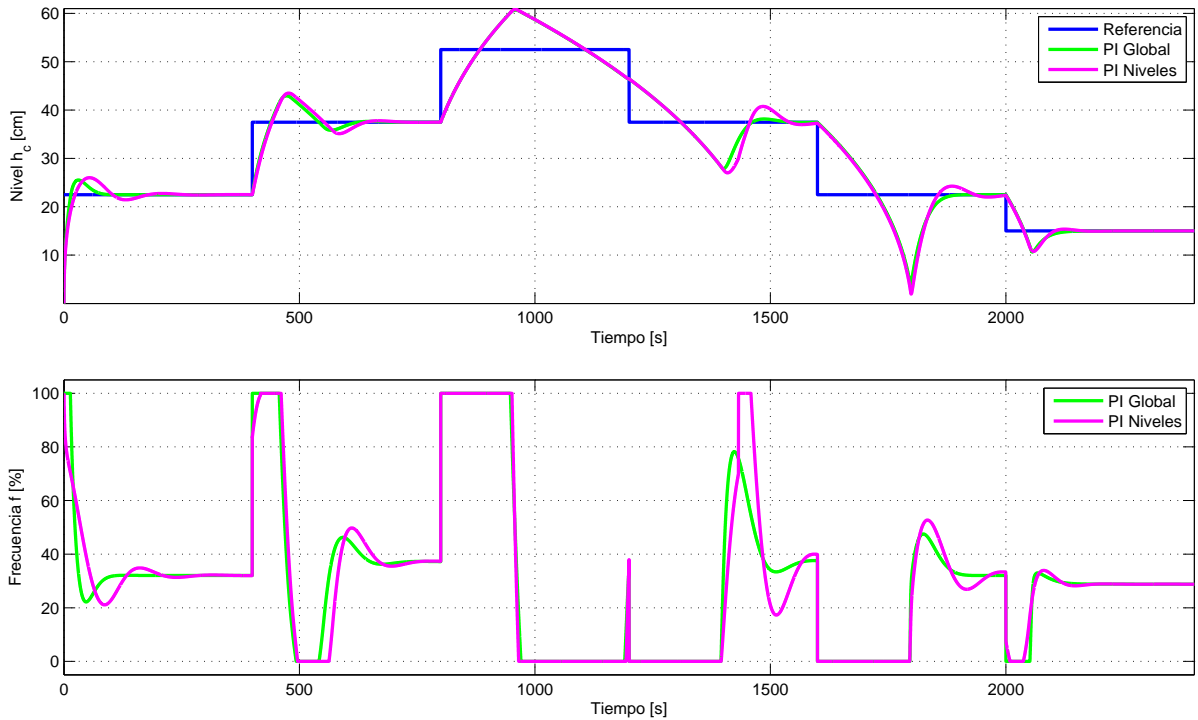


Figura 4.1: Resultados en simulación de controladores sintonizados con LGR.

transitoria se calculan las sumas de las especificaciones obtenidas para cada una de los escalones constituyentes de la prueba; el resumen de lo recién planteado se encuentra expresado numéricamente en la Tabla 4.5. En la Sección C.1 de Anexos se pueden consultar tablas con el detalle de las especificaciones de respuesta transitoria para cada uno de los escalones en cada caso de aplicación de controladores diseñados.

Tabla 4.5: Índices de desempeño para controladores sintonizados con LGR.

Controlador	$IAE(h_c)$	$ISI(f)$	$MOV$	$E_{ss}$	$t_d$	$t_r$	$t_p$	$t_s$
PI Global	6.28E+03	4.17E+06	351	6.08	165.95	412.20	717.15	1289.10
PI Niveles	6.99E+03	4.27E+06	374	6.38	165.75	420.40	757.20	1453.95

A partir de los resultados ilustrados gráfica y numéricamente, se puede apreciar que no existe una diferencia sustancial entre proponer un controlador único, como el caso del PI Global, y un esquema “Gain Scheduling”, como el PI Niveles; en la Figura 4.1 la salida  $h_c$  para ambos casos es bastante similar. Sin embargo, a través de los índices en la Tabla 4.5 se desprende que el controlador Global posee mejor comportamiento, ya que minimiza el índice  $IAE$ , la energía de control  $ISI$ , el sobrepaso y el tiempo de establecimiento. Lo anterior se constata gráficamente en los escalones de referencia de menor magnitud: la curva verde (PI Global) tiene mejor seguimiento de referencia que la curva magenta (PI Niveles).

Ahora bien, ninguno de los esquemas de control propuestos logra cumplir con las especificaciones definidas para la sintonización en la Tabla 4.2; más aún, contra toda lógica, la propuesta de un solo controlador resulta ser mejor que la propuesta de múltiples controladores sintonizados para distintos puntos de operación. Estos antecedentes dan pie a la conclusión de que el método



LGR no es suficiente para enfrentar un problema de control no lineal como el presentado en este capítulo.

## 4.2. Sintonización Ziegler & Nichols

En ciertos casos, el problema de sintonización de controladores para un sistema de tipo no lineal se puede resolver de manera gráfica a través de las reglas establecidas por Ziegler y Nichols; esto presenta particulares ventajas cuando no se conoce un modelo matemático acabado de la planta, y usando aproximaciones gráficas obtenidas a partir de experimentos sencillos, se pueden determinar los parámetros de controladores que cumplan con ciertos requisitos de control.

En general, gran cantidad de procesos dinámicos de tipo no lineal tienen un comportamiento similar a un sistema de tipo FOPDT; el presente caso de estudio no es la excepción, de hecho, esto se puede corroborar al observar el tipo de función de transferencia resultante de la linealización del sistema en (3.97), cualquiera sea el punto de operación. Luego, los sistemas que se aproximan a este tipo de comportamiento dinámico son susceptibles de generar curvas de reacción o de tener comportamientos de límite de estabilidad como los necesarios para aplicar las técnicas de sintonización Z&N. Con base en esto, se pretende encontrar controladores PID de orden entero y fraccionario según los procedimientos descritos en detalle en la Sección 2.3.

### 4.2.1. Curva de Reacción

Para llevar a cabo la sintonización de los controladores bajo los enfoques de Z&N, se debe determinar la curva de reacción del sistema en estudio para identificar los parámetros que definen su respuesta dinámica. Por simplicidad, se utiliza la implementación computacional del modelo fenomenológico del sistema para obtener la mencionada curva; para esto, se define un escalón como entrada al sistema en un lazo abierto de funcionamiento, con lo cual se busca emular la curva ilustrada en la Figura 2.6 que permite identificar los parámetros  $K$ ,  $L$  y  $T$ . Cabe señalar que se puede medir empíricamente el retardo típico de la señal de salida del subsistema de nivel frente a entradas escalón de frecuencia, el cual en promedio corresponde a 2[s].

El resultado del procedimiento recién señalado se ilustra en la Figura 4.2; allí se grafica la curva de reacción del sistema para la variable nivel de líquido  $h_c$ . A la izquierda se muestra la prueba total para la obtención de la curva, mientras que a la derecha se realiza una ampliación de la sección inicial, lo que permite verificar de forma más clara la identificación de parámetros; en azul se muestra la salida del sistema, en magenta el nivel de estabilización de la señal y en verde la tangente al punto de inflexión de la curva de reacción, o, en otras palabras, la tangente con máxima pendiente. A partir de un análisis gráfico, se pueden determinar los valores numéricos de los parámetros  $K$ ,  $L$  y  $T$ , los cuales se resumen en la Tabla 4.6.

La sintonización de las ganancias del controlador PID de orden entero se hace en base a la información presentada en la Sección 2.3.2; particularmente, el valor numérico se determina a partir de los valores presentados en la Tabla 4.6 y su correspondiente reemplazo en las relaciones matemáticas presentadas en la Tabla 2.1. El resultado se expresa en la Tabla 4.7.

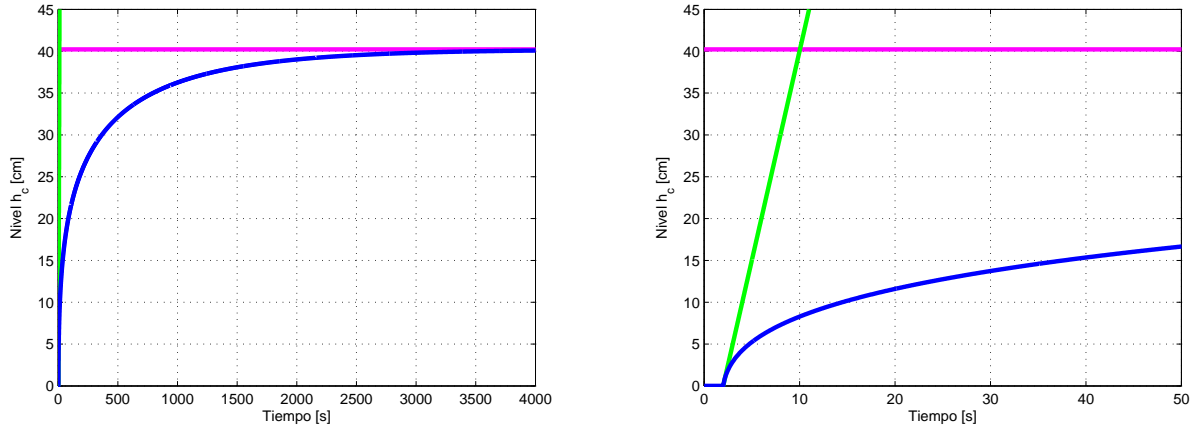


Figura 4.2: Curva de Reacción para método Z&N.

Tabla 4.6: Parámetros de Curva de Reacción Z&N.

$K$	$L$	$T$
40.22	2	7.02

Tabla 4.7: Parámetros de controladores sintonizados con Curva de Reacción Z&N.

Controlador	$K_p$	$K_i$	$\lambda$	$K_d$	$\mu$
PID	4.21	1.05	1	4.21	1
PIDOF	0.08	2.32	0.76	5.31	0.16

En cuanto al controlador PIDOF, se sintonizan sus parámetros en base a lo presentado en la Sección 2.3.3. En principio, considerando que el resultado de curva de reacción entrega como parámetro  $T \geq 5$ , se utilizan las reglas matemáticas descritas en la Tabla 2.4. Sin embargo, como resultado se obtiene un controlador infactible en su aplicación, ya que el índice de derivación  $\mu$  resulta negativo, lo que rompe con la lógica de obtener una acción derivativa en el controlador propuesto. Es por esto que se relajan en cierta medida las restricciones del método propuesto por los autores y se utilizan las relaciones matemáticas descritas en la Tabla 2.5 para el caso en que  $T \leq 5$ ; bajo esta nueva consideración, se obtiene un controlador factible en su aplicación, el cual se detalla paramétricamente en la Tabla 4.7.

Los resultados en simulación de la aplicación de los controladores sintonizados con el método Curva de Reacción de Z&N, bajo la señal de referencia descrita en la Tabla 4.4, se ilustran en la Figura 4.3; en la gráfica superior se tiene la evolución de la salida  $h_c$ , mientras que en la inferior la acción de control de frecuencia  $f$ . Al igual que en el caso de la sección anterior, se introducen índices de desempeño basados en la respuesta global y transitoria del sistema, cuyos valores numéricos se muestran en la Tabla 4.8 para cada caso desarrollado; el detalle de las especificaciones de respuesta transitoria para cada uno de los escalones de la señal de referencia se puede consultar en la Sección C.2 de Anexos.

Con los resultados obtenidos mediante simulación, se pueden desprender ciertas conclusiones de la aplicación del método Curva de Reacción de Z&N para el presente problema de estudio;

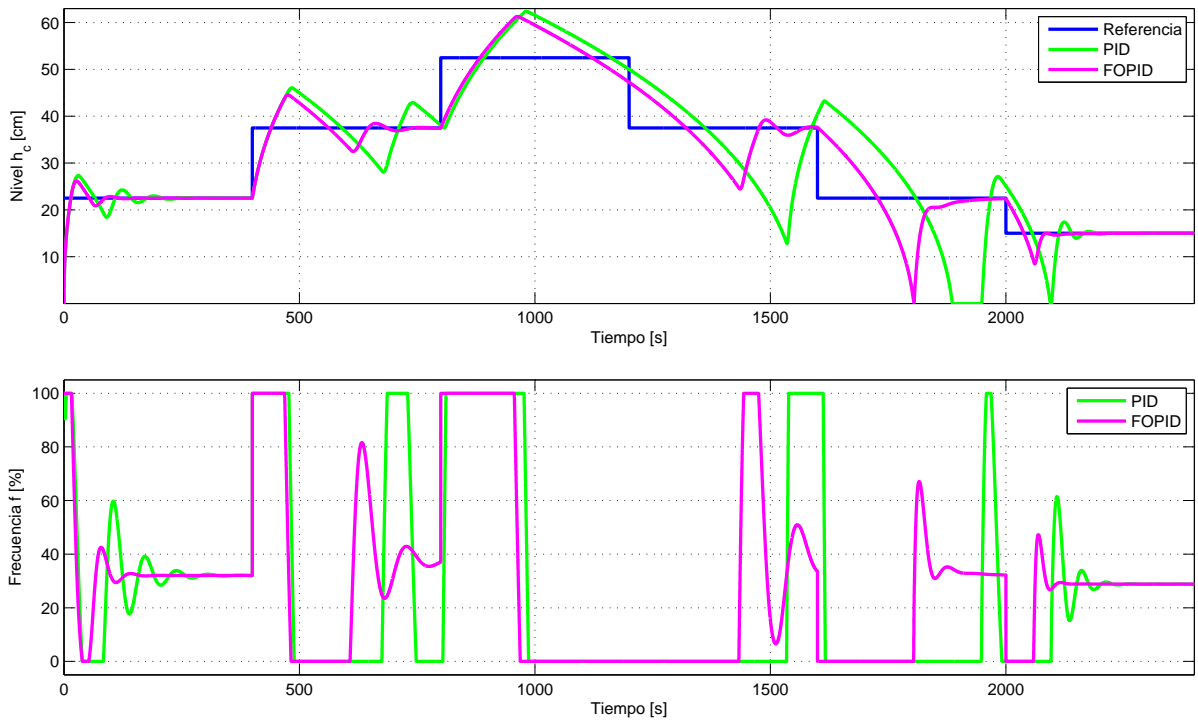


Figura 4.3: Resultados en simulación de controladores sintonizados con Curva de Reacción Z&N.

Tabla 4.8: Índices de desempeño para controladores sintonizados con Curva de Reacción Z&N.

Controlador	$IAE(h_c)$	$ISI(f)$	$MOV$	$E_{ss}$	$t_d$	$t_r$	$t_p$	$t_s$
PID	1.34E+04	4.94E+06	659	9	327	573	1015	1910
PIDOF	7.16E+03	4.44E+06	445	6	179	425	768	1516

principalmente, se puede constatar que los resultados del controlador PIDOF son mejores que los obtenidos PID mediante, esto se observa graficamente en la Figura 4.3 y numéricamente en la Tabla 4.8: PIDOF tiene menor índice  $IAE$ , menor energía de control  $ISI$  y mejores especificaciones de respuesta transitoria.

No obstante lo anterior, los resultados de ambos controladores son deficientes en comparación a lo obtenido mediante la aplicación de la técnica de sintonización LGR, lo que se evidencia al contrastar los índices de desempeño del presente caso en la Tabla 4.8 con los del caso LGR en la Tabla 4.5. La evidencia acumulada hasta este punto, permite afirmar que el método gráfico Curva de Reacción de Z&N no es una buena alternativa para el problema de control no lineal propuesto; sin embargo, en el caso del controlador PIDOF, los parámetros determinados pueden servir como punto de partida para realizar una sintonización heurística basada en las reglas expuestas en detalle en la Sección 2.2.

### 4.2.2. Límite de Estabilidad

En cuanto al método Límite de Estabilidad de Z&N, se propone un lazo de control por realimentación de ganancia crítica  $K_c$ , como el ilustrado en la Figura 2.7 para llevar a cabo el procedimiento señalado en la Sección 2.3. A partir de la aplicación del mencionado lazo en el modelo a través de simulaciones, en el cual se define un retardo de transporte de 2 [s] según lo observado experimentalmente, se obtiene la respuesta ilustrada en la Figura 4.4.

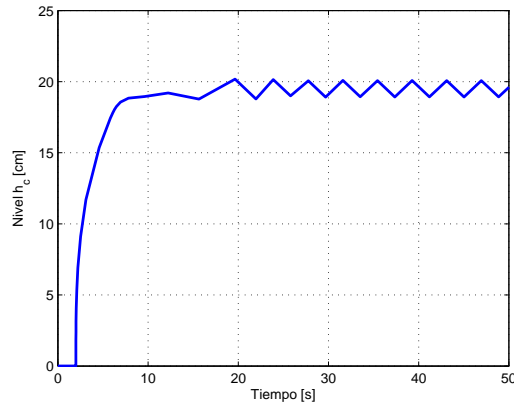


Figura 4.4: Límite de Estabilidad para método Z&N.

Considerando de la información gráfica presentada en la Figura 4.4, se puede determinar el período crítico  $P_c$  de la oscilación del sistema, la cual se obtiene a partir de una ganancia crítica  $K_c$  que se define numéricamente en la Tabla 4.9, donde también se especifica el mencionado período.

Tabla 4.9: Parámetros de Límite de Estabilidad Z&N.

$K_c$	$P_c$
42	1.92

Luego, siguiendo con el procedimiento señalado, se pueden determinar los parámetros de los controladores PID y PIDOF; para el caso de orden entero, se consideran las reglas presentadas a través de la Tabla 2.2, mientras que para el caso fraccionario, se usan las establecidas en la Tabla 2.7, puesto que este caso particular cumple que  $K_c \cdot P_c = 80,64$ . Los resultados de aplicación de ambos métodos entregan los controladores que se exponen en la Tabla 4.10, mediante la especificación de sus parámetros.

Tabla 4.10: Parámetros de controladores sintonizados con Límite de Estabilidad Z&N.

Controlador	$K_p$	$K_i$	$\lambda$	$K_d$	$\mu$
PID	25.20	26.25	1	6.05	1
PIDOF	0.61	4.63	0.69	3.05	0.66

Ahora bien, los controladores determinados mediante el método Límite de Estabilidad de Z&N, deben ser sometidos a prueba frente al sistema; para esto se utiliza la misma señal de

referencia descrita en la Tabla 4.4. Sin embargo, al momento de llevar a cabo las pruebas mediante simulación, el caso fraccionario, controlador PIDOF, presenta problemas puesto que los órdenes de integración y derivación hacen que el par de señales asociadas diverjan. Más aún, al relajar las condiciones y utilizar las reglas presentadas en la Tabla 2.6 para los casos en que  $K_c \cdot P_c \leq 64$ , también se obtiene por resultado un controlador que produce el mismo fenómeno de divergencia; por esto, se excluye del siguiente análisis el resultado de controlador fraccionario.

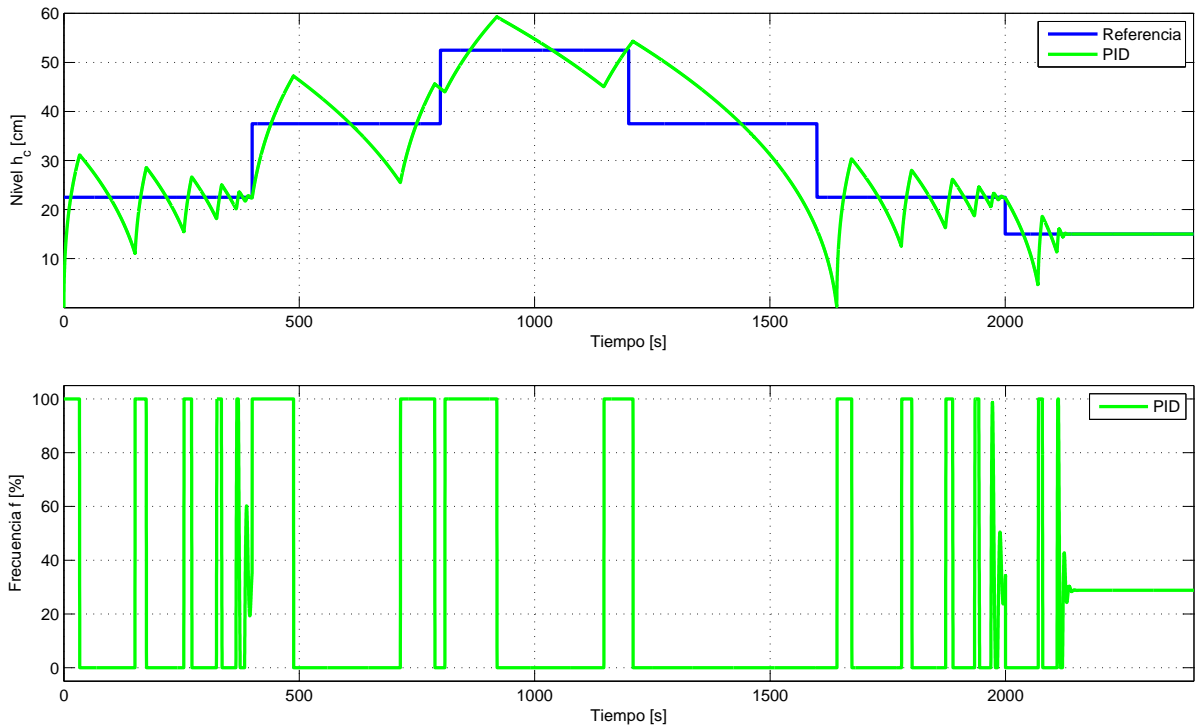


Figura 4.5: Resultados en simulación de controladores sintonizados con Límite de Estabilidad Z&N.

El resumen numérico del resultado del controlador PID, se puede estudiar en la Tabla 4.11, cuyo detalle, en cuanto a respuesta transitoria, se puede consultar en la Tabla C.3 de la Sección C.2 de Anexos. A modo de comentario, cabe señalar que el presente método, para el caso de orden entero, presenta ciertas ventajas con respecto al caso de Curva de Reacción, ya que tiene mejor comportamiento que su homólogo PID en cuanto a los índices  $IAE$  y  $MOV$ , pero peor considerando la energía de control  $ISI$ . Ahora, para el caso de orden fraccionario, foco del estudio, este método no resulta una alternativa válida ni siquiera para obtener una primera aproximación de parámetros que ajustar de forma fina mediante reglas heurísticas.

Tabla 4.11: Índices de desempeño para controladores sintonizados con Límite de Estabilidad Z&N.

Controlador	$IAE(h_c)$	$ISI(f)$	$MOV$	$E_{ss}$	$t_d$	$t_r$	$t_p$	$t_s$
PID	1.07E+04	5.42E+06	578	30	203	395	753	2059

### 4.3. Sintonización PSO

Hasta el momento se han aplicado técnicas de sintonización de controladores que consideran ciertas aproximaciones sobre el sistema no lineal, ya sea a través de linealizaciones en torno a puntos de operación o aproximaciones de respuesta dinámica del sistema; sin embargo, ninguno ha sido capaz de lidiar de forma eficiente frente a las no linealidades del problema de control presentado en este capítulo. Debido a esto, se propone una estrategia de sintonización basado en un método de optimización meta-heurístico denominado Optimización por Enjambre de Partículas (PSO por su acrónimo en inglés “Particle Swarm Optimization”); con esto, se busca determinar los parámetros de controladores de forma directa del modelo no lineal desarrollado, sin incurrir en aproximaciones que impidan obtener un resultado aceptable de control.

Dada la versatilidad de la aplicación de un método como PSO, explicado en detalle en la Sección 2.3.4, se propone estudiar los casos de sintonización de controladores PI y PID, tanto en sus versiones de orden entero como fraccionario; es decir, se presentan cuatro tipo de controladores: PI, PID, PIOF y PIDOF.

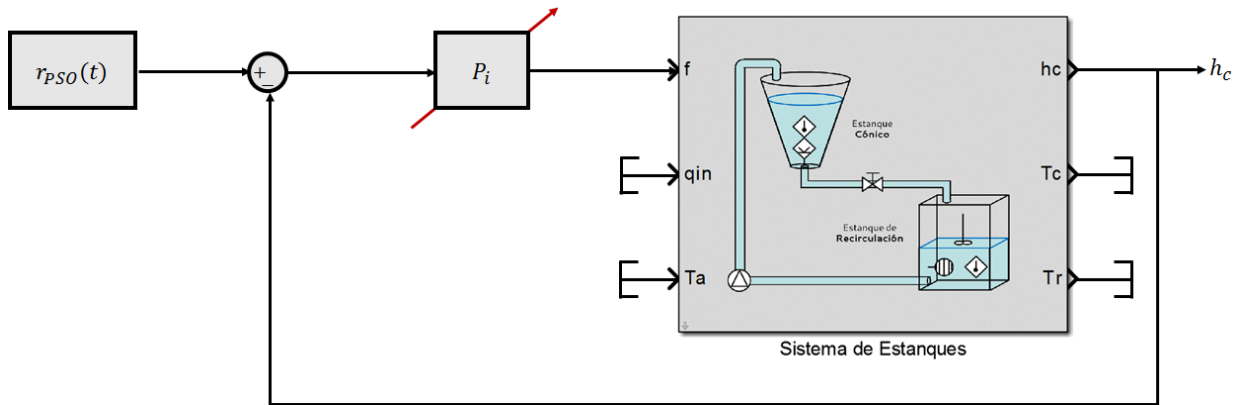


Figura 4.6: Lazo de control SISO para optimización PSO.

La idea de utilizar un método de optimización consiste en que cada uno de los controladores determinados sea capaz de minimizar un cierto índice de desempeño (o función objetivo) que sea representativo de un control de nivel  $h_c$  en cualquier condición de operación; es decir, para cualquier rango de nivel con escalones tanto de subida como de bajada. En función de lo anterior, se propone que la función objetivo del algoritmo esté definida de la forma

$$J = IAE(h_c); \quad (4.1)$$

con esto, se busca que el seguimiento de referencia sea lo más preciso posible según las características del sistema y las limitaciones dinámicas propias de cada esquema de control.

La metodología a emplear consiste en que cada partícula del enjambre represente una combinación de parámetros del controlador; dependiendo del caso la dimensionalidad de éstas varía: desde 2 en el caso del controlador PI hasta 5 en el caso del controlador PIDOF. Luego, cada una de las  $s_i$  partículas se prueba mediante simulación en un lazo cerrado de control como el ilustrado en la Figura 4.6, en donde se escoge una señal de referencia particular  $r_{PSO}(t)$  que permita garantizar un resultado de control preciso para cualquier punto de operación del sistema

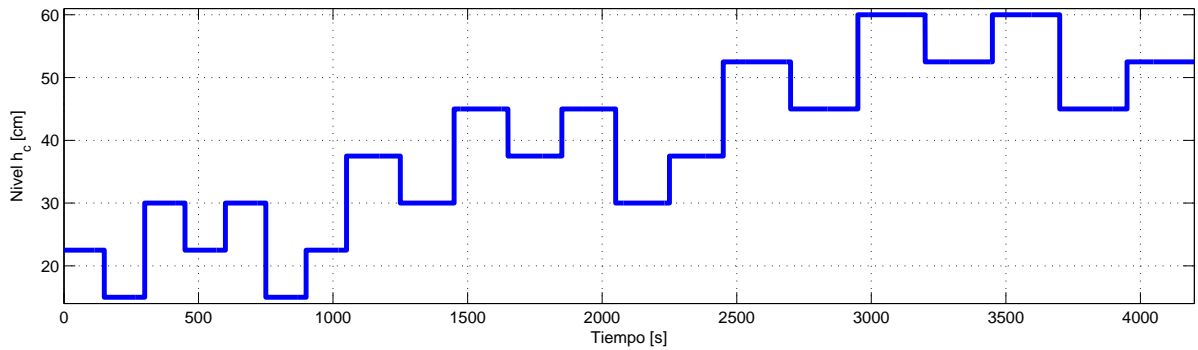


Figura 4.7: Referencia de  $h_c$  para optimización PSO.

no lineal. Una vez obtenida la respuesta del sistema asociada a los parámetros de la partícula, se puede obtener el índice de desempeño  $IAE$ , con lo cual el algoritmo modifica la posición de las partículas del enjambre hacia aquella partícula que haya obtenido el mejor resultado, pero siempre teniendo en cuenta el propio mejor resultado que cada una haya tenido. Este procedimiento se repite para cada una de las generaciones o iteraciones configuradas para el algoritmo, procurando que al final del proceso se obtengan los parámetros óptimos que minimicen la función objetivo (4.1).

Tabla 4.12: Configuración de parámetros de algoritmo PSO.

$s$	$G$	$K_p$	$K_i$	$\lambda$	$K_d$	$\mu$
30	50	[50-100]	[0-5]	[0.75-1]	[0-5]	[0-0.25]

La señal de referencia  $r_{PSO}(t)$  diseñada para el proceso de optimización PSO se ilustra en la Figura 4.7; su particularidad consiste en que posee escalones de subida y bajada en cada uno de los rangos de operación del sistema, por lo que cubre la mayor cantidad posible de casos de operación en que se desee controlar el nivel de líquido  $h_c$ ; la duración de cada escalón varía en cada rango según el tiempo de respuesta del sistema: a mayor nivel mayor tiempo de duración, ya que la respuesta del sistema es más lenta. El detalle de la señal construida para estos efectos se puede consultar en la Sección C.3 de Anexos.

Tabla 4.13: Parámetros de controladores sintonizados con PSO e índice IAE.

Controlador	$K_p$	$K_i$	$\lambda$	$K_d$	$\mu$	IAE
PI	197.31	3.52E-03	1	0	1	9.37E+03
PID	107.25	9.41E-05	1	4.44	1	9.65E+03
PIOF	276.97	1.66E-04	0.81	0	1	9.23E+03
PIDOF	122.46	1.02E-04	0.86	3.62	0.18	9.55E+03

La configuración de los parámetros del algoritmo PSO consiste en determinar la cantidad  $s$  de partículas y  $G$  de generaciones que se consideran para obtener una solución; en cuanto al primer parámetro se sigue lo presentado en (2.48), pero ligeramente modificado al considerar una cantidad mayor que lo que sugiere el cálculo, ya que el problema no es excesivamente costoso computacionalmente, mientras que para el segundo parámetro se sigue una estrategia de ensayo y error: se estudia la evolución de las partículas hasta que hayan convergido a una

solución global (o local) del problema y se escoge un número tal que garantice esta situación. Ambos parámetros se enuncian numéricamente en la Tabla 4.12; además, allí se muestra el rango inicial en qué las partículas definen los parámetros que las conforman (ganancias y orden de integración/derivación según corresponda). En el caso de las ganancias el rango no es estricto, la única limitante establecida corresponde a que  $K_p, K_i, K_d > 0$ ; luego, pueden tomar cualquier valor real positivo. Sin embargo, para el caso de los órdenes de integración y derivación de los esquemas fraccionarios, el intervalo sí se considera estricto; es decir, sólo se pueden considerar soluciones que contengan valores para  $\lambda$  y  $\mu$  dentro del rango establecido, esto se debe a que valores fuera del intervalo señalado provocan que ciertas señales del sistema diverjan, lo que genera errores tanto en simulación como en análisis experimental de los controladores.

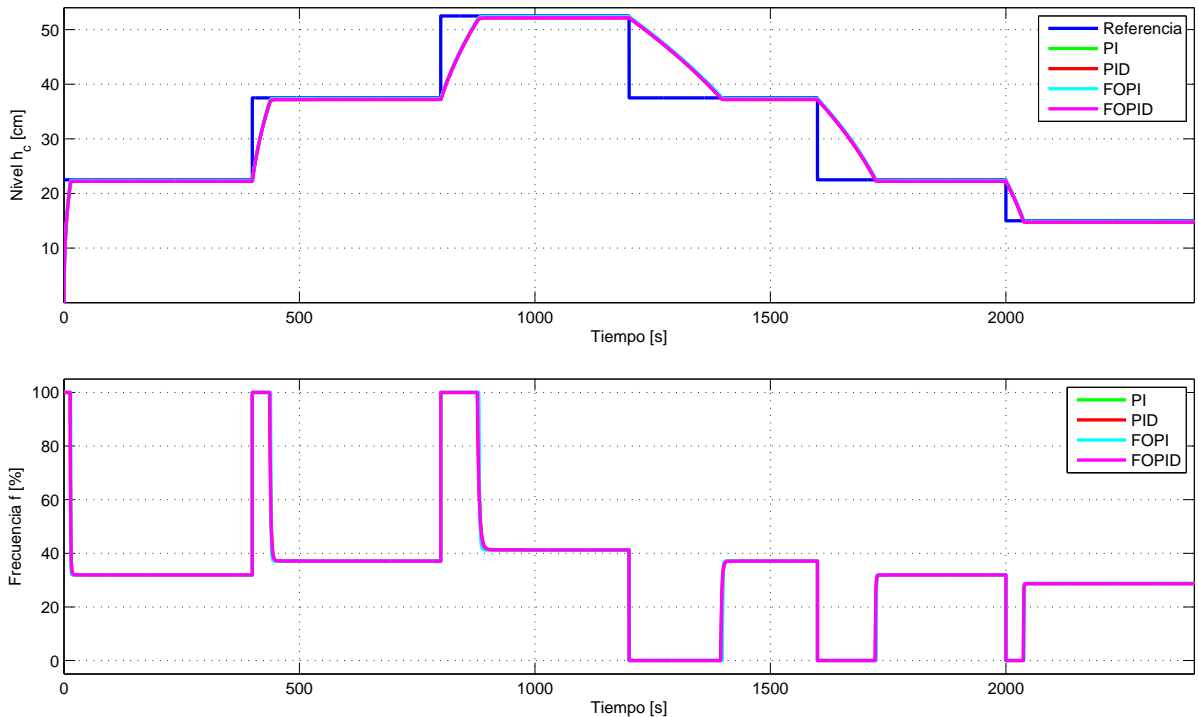


Figura 4.8: Resultados en simulación de controladores sintonizados con PSO.

A raíz de la aplicación de la metodología previamente descrita, bajo la configuración señalada, haciendo uso de la toolbox [60], se obtienen los mejores controladores que permite determinar la función objetivo definida para el estudio; el resumen del valor de cada uno de los parámetros de las distintas versiones de controladores optimizados se observa en 4.13; además, se ilustra el resultado en cuanto al índice  $IAE$  asociado a cada uno en la prueba de optimización descrita.

Finalmente, se someten cada uno de los controladores a simulación con la señal de referencia diseñada para comparación de los esquemas determinados en el presente capítulo, descrita en la Tabla 4.4, lo que lleva por resultado lo ilustrado gráficamente en la Figura 4.8, donde en la gráfica superior se muestra la evolución de la variable controlada  $h_c$  y en la inferior la acción de control o variable manipulada asociada. El resultado gráfico se complementa con los índices de desempeño ilustrados en la Tabla 4.14, en donde se establecen las diferencias numéricas entre cada uno de los casos estudiados.

Los resultados obtenidos mediante la técnica de optimización PSO permiten desprender cier-



Tabla 4.14: Índices de desempeño para controladores sintonizados con PSO.

Controlador	$IAE(h_c)$	$ISI(f)$	$MOV$	$E_{ss}$	$t_d$	$t_r$	$t_p$	$t_s$
PI	3.97E+03	3.646E+06	5	1.08	251	1559	1583	473
PID	4.18E+03	3.624E+06	8	1.94	247	1553	1614	469
PIOF	3.89E+03	3.652E+06	3	0.75	253	1561	1581	474
PIDOF	4.12E+03	3.629E+06	7	1.68	248	1555	2309	470

tas nociones respecto al problema de control no lineal del que es objeto de estudio el presente capítulo; en principio, a través de lo mostrado en la Tabla 4.13 se puede observar que la tendencia de todos los controladores es a tener una alta ganancia proporcional  $K_p$  y una baja ganancia integral  $K_i$ , mientras que en los casos que corresponde, la ganancia integral  $K_d$  es de valor intermedio respecto a las mencionadas previamente. Además, para los casos fraccionarios, el orden de integración  $\lambda$  tiende a estar en torno a 0.85. Como resultado del proceso de optimización, y frente a la señal de referencia diseñada para estos efectos, el mejor resultado de control, en términos del índice  $IAE$  presentado en la misma tabla, lo tiene el controlador PIOF.

Ahora bien, todos los controladores tienen un comportamiento bastante similar entre sí y con resultados de control más que aceptables, lo que se ve ilustrado en la Figura 4.8; de hecho, mejoran con creces los resultados obtenidos en los métodos de sintonización propuestos previamente en este capítulo. Según los índices de desempeño mostrados en la Tabla 4.14, obtenidos a partir de simulación con la señal de referencia de prueba diseñada para comparación de los controladores determinados, se mantiene la tendencia mencionada previamente, siendo el controlador PIOF el de menor  $IAE$ . Más aún, la ampliación de la gráfica correspondiente en la Figura C.2 en Anexos, muestra que el mencionado controlador es el que sigue la referencia de manera más cercana. En contrapartida, el controlador PID es el que minimiza la energía de control  $ISI$ , pero su seguimiento de referencia está por debajo del resto de las soluciones encontradas.

Respecto a las especificaciones de respuesta transitoria, se observa que los controladores no incurren en sobrepasos al enfrentarse a escalones de subida, lo que sí ocurre frente a escalones de bajada, esto se puede apreciar numéricamente en la Tabla C.5 de Anexos; en cuanto al desempeño comparativo, es nuevamente el controlador PIOF quien presenta mejor comportamiento en función de esta variable, al igual que en el caso del error en estado estacionario.

A modo de conclusión, cabe señalar que la sintonización utilizando optimización PSO resulta ser un mejor método que los anterior, ya que enfrenta de manera directa las no linealidades del sistema en cuestión, no a través de aproximaciones, y determina la mejor combinación de parámetros a través de inspección del espacio de soluciones posibles. Además, entrando en comparación entre los controladores, las propuestas que no poseen acción derivativa tienen mejores índices de desempeño que aquellas que sí lo incluyen; y quien presenta mayores ventajas, numéricamente hablando, corresponde al controlador PIOF.

Cabe aclarar que el comportamiento observado en la Figura C.2 de Anexos, en donde se observa que los controladores no logran converger completamente sobre la señal de referencia, no corresponde a un error en estado estacionario como tal, sino que resulta ser una convergencia muy lenta sobre cada valor respectivo como consecuencia de la magnitud pequeña de la acción integral de los controladores; evidencia de esto se observa al realizar simulaciones con un

horizonte de tiempo mucho mayor.

## 4.4. Resultados Experimentales

Para validar los resultados encontrados mediante simulación en los controladores determinados en este capítulo se propone repetir las pruebas, considerando la misma señal de referencia descrita en la Tabla 4.4, pero esta vez en el sistema real con el objetivo de obtener resultados experimentales. Sin embargo, se escogen los controladores que presentaron mejor comportamiento en simulación para llevar a cabo este procedimiento; los controladores que no lograron tener un funcionamiento aceptable, en cuanto a seguimiento de referencia, se descartan de esta parte del estudio, ya que su aplicación no entrega información adicional al análisis de la metodología seguida en este capítulo.

El problema de control abordado desde el enfoque experimental presenta nuevas dificultades que enfrentar; si bien el modelo ha mostrado ser bastante preciso en comparación con la realidad, según la información gráfica expuesta en la Sección 3.4.3, existen ciertos fenómenos que no son considerados dentro del desarrollo matemático realizado. Particularmente, el sensor de presión que indica el nivel de líquido dentro del estanque cónico está sometido a perturbaciones, ya que las fluctuaciones del agua al acumularse dentro del contenedor metálico y las vibraciones de la estructura generan ruido de medición; por otra parte, existen ciertas dinámicas de retardo en los actuadores, lo que las representaciones diferenciales del sistema no son capaces de emular completamente. Debido a estos factores, se debe evaluar el comportamiento de los controladores en este nuevo escenario de aplicación para emitir juicios que validen la metodología de sintonización presentada en cada caso.

Con base en lo explicado respecto a la elección para prueba de los controladores con mejor desempeño en simulación, se procede a controlar el sistema con cada uno de los controladores sintonizados mediante optimización PSO; es decir, se tienen cuatro casos de estudio, compuestos por controladores PI y PID en sus versiones de orden entero y fraccionario. El resultado gráfico de la aplicación experimental de cada uno se ilustra en la Figura 4.9; en la gráfica superior se observa la evolución del nivel de líquido en el estanque cónico  $h_c$  medido por el sensor de presión, mientras que en la gráfica inferior se presenta la frecuencia de funcionamiento indicada por el controlador al actuador, en este caso, el variador de frecuencia. De forma numérica, los resultados se pueden estudiar a través de los índices presentados en la Tabla 4.15.

Tabla 4.15: Índices de desempeño para controladores sintonizados con PSO en prueba experimental.

Controlador	$IAE(h_c)$	$ISI(f)$	$MOV$	$E_{ss}$	$t_d$	$t_r$	$t_p$	$t_s$
PI	3.89E+03	4.727E+06	35	1.10	234	447	1606	1491
PID	4.21E+03	4.242E+06	33	2.27	243	806	1154	1684
PIOF	4.13E+03	4.933E+06	47	1.74	249	472	1456	1773
PIDOF	4.15E+03	4.243E+06	36	2.03	245	556	1437	1775

Para atenuar en cierta medida el ruido proveniente del sensor de medición, tanto para beneficio del proceso de control como para la ilustración de los resultados, se pasa la señal de salida  $h_c$

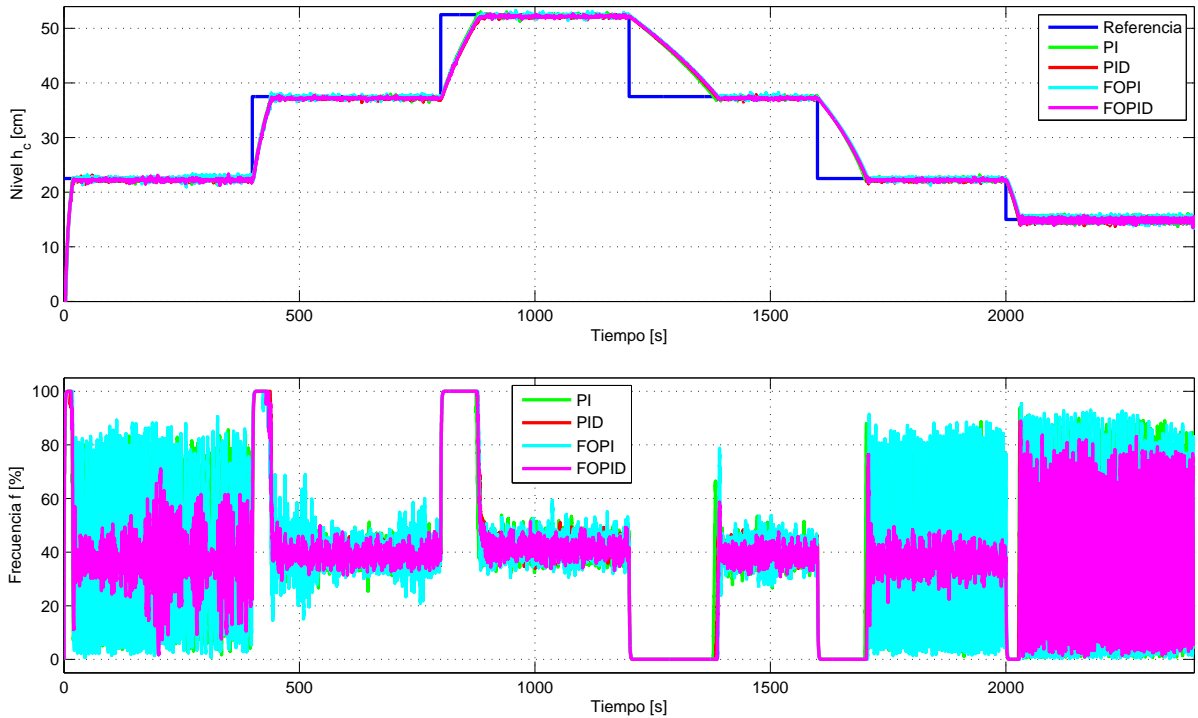


Figura 4.9: Resultados experimentales de controladores sintonizados con PSO.

por un filtro pasabajos con frecuencia de corte  $\omega_c = 1$  [rad/s]. Mayor detalle de los resultados, con acercamientos de las respuestas gráficas y especificaciones de respuesta transitoria para cada escalón, se puede consultar la Sección C.4 de Anexos.

En principio, los resultados experimentales validan lo obtenido a partir de las simulaciones para los controladores obtenidos mediante PSO; evidencia de esto es la similitud entre las respuestas ilustradas en la Figura 4.9 de resultados experimentales y la Figura 4.8 de simulaciones: las curvas que se ilustran son en gran medida parecidas. No obstante, la principal diferencia radica en que las gráficas correspondientes a resultados experimentales presentan ruido de medición, según lo mencionado previamente; debido a este fenómeno las acciones de control son también “ruidosas”, ya que las ganancias proporcionales en todos los casos (que multiplican el error, el cual es ruidoso como consecuencia de que  $h_c$  lo es) son de magnitud elevada en comparación a las otras ganancias. Como consecuencia de este comportamiento se tiene que la energía de control ISI es, en todos los casos, mayor que sus correspondientes en simulación, lo que se constata al contrastar sus valores entre la Tabla 4.15 y la Tabla 4.15, respectivamente; sin embargo, el índice IAE no presenta esta tendencia, ya que el ruido obtenido como resultado es más tenue.

Las ampliaciones de las respuestas para cada escalón de la prueba, mostradas en la Figura C.3 de Anexos, muestra un cierto error en estado estacionario, al igual que lo comentado a partir de las simulaciones, pero cabe recalcar que no es un error tal, sino que convergencia lenta por la magnitud pequeña de la acción integral. Por otra parte, con respecto al sistema, se puede observar que los ruidos de medición aumentan a niveles menores y disminuye a niveles mayores: esto se explica al considerar que mientras mayor sea el nivel, mayor es la masa de agua dentro del estanque cónico, por lo que resulta más complejo perturbar la superficie del líquido con

fluctuaciones que provocan el ruido de medición.

Finalmente, para un juicio de valor respecto al mejor resultado de control determinado de forma experimental, se propone introducir un índice que contemple tanto la calidad del seguimiento de referencia, a través del índice  $IAE$ , como el consumo energético de la solución, considerando el  $ISI$  en cada caso; con esto, se define

$$I = I\bar{A}E + I\bar{S}I, \quad (4.2)$$

donde  $I\bar{A}E$  e  $I\bar{S}I$  corresponden a los índices normalizados en magnitud; es decir, a partir de las columnas  $IAE$  e  $ISI$  de la Tabla 4.15, se dividen los valores por  $10^3$  y  $10^6$ , respectivamente, y se suman. La inclusión de los indicadores de respuesta transitoria en el índice propuesto no se justifica, ya que las respuestas dinámicas de cada uno de los resultados es bastante similar, por lo que no resultan ser un factor de discriminación importante al respecto. El resultado de esta operación se observa en la Tabla 4.16. A partir de un análisis simple, se observa que el mejor resultado corre por cuenta del controlador PIOF; con esto, se puede declarar que, asignando igual importancia al seguimiento de referencia y la energía asociada al proceso, el controlador que presenta mayores ventajas en el sistema real corresponde al PID de orden fraccionario.

Tabla 4.16: Índice de desempeño propuesto para resultados experimentales SISO.

Controlador	$I$
PI	8.62
PID	8.45
PIOF	9.06
PIDOF	8.39

# Capítulo 5

## Control de Nivel y Temperatura (MIMO)

Gran cantidad de procesos industriales conllevan el problema asociado de controlar múltiples variables del sistema para mantener ciclos de operación determinado; sin embargo, esto no resulta siempre sencillo, ya que cada una de estas variables dinámicas se encuentran involucradas con las demás, es decir, cada señal se ve afectada físicamente por los comportamientos de todas las señales que participan del proceso. Cuando se enfrentan este tipo de problemas, se habla de control MIMO (en inglés “Multiple Input Multiple Output”), el que resulta ser más complejo que el control SISO debido al acoplamiento dinámico entre las salidas del sistema; más aún, cuando las dinámicas que describen el comportamiento de la planta son de tipo no lineal aumenta la dificultad del control, y, en ciertas ocasiones, las alternativas de control lineal clásicas no son suficiente.

En el presente capítulo se desarrolla el problema de control multivariable para el sistema de estanques del que es objeto de estudio este informe; dadas las características del sistema, MIMO con dinámicas de tipo no lineal, se plantea controlar el nivel de líquido dentro del estanque cónico  $h_c$  y temperatura  $T_c$  dentro del mismo con distintos esquemas que consideran controladores tanto de orden entero como de orden fraccionario. A continuación, se muestra el desarrollo de las soluciones propuestas, pasando por conceptos preliminares que dan contexto al problema, para luego mostrar estrategias de modulación del uso del calefactor, y, finalmente, presentar estrategias de sintonización que permitan dar con los parámetros de los controladores del sistema. El análisis de resultados se realiza a través de simulaciones computacionales haciendo uso del modelo desarrollado, bajo distintos casos de funcionamiento, y su validación se obtiene a partir de la aplicación de los controladores experimentalmente en el sistema real.

### 5.1. Consideraciones Preliminares

La idea de realizar control de nivel y temperatura dentro del estanque cónico está motivada por ciertos casos de control multivariable industrial, donde, por requisito de los procesos en sí, es necesario mantener una temperatura adecuada para una cierta masa de agua. Sin embargo, el caso particular de estudio posee una dificultad añadida, producida por el hecho de que el actuador que permite elevar la temperatura del agua no se encuentra dentro del estanque

cónico, sino que está en el estanque de recirculación; luego, el agua dentro del estanque cónico se calienta por el agua que proviene del estanque inferior a una temperatura más elevada. Se entiende entonces que si no hay flujo desde el estanque de recirculación, resulta imposible elevar la temperatura del agua dentro del estanque cónico, y que, más aún, el sistema posee un retardo intrínseco debido al tiempo que se demoran en observar los efectos del calefactor en la temperatura del estanque cónico.

Ahora bien, el sistema posee limitaciones respecto al rango en que pueden variar las variables a controlar, ya que ciertos aspectos físicos del montaje, descritos en detalle en la Sección 3, imponen restricciones al rango de operación del sistema. Por otra parte, al ser un problema de control MIMO, se deben proponer esquemas que permitan solucionar los problemas de acoplamiento de las señales. A continuación, se abordan estas dos situaciones mencionadas y se proponen metodologías para enfrentar el problema.

### 5.1.1. Intervalo de Operación

El primer punto a definir para realizar control de nivel  $h_c$  y temperatura  $T_c$ , es establecer el intervalo de operación de estas variables, ya que las restricciones físicas que impone el montaje no permiten un rango libre de evolución. Respecto al nivel  $h_c$  se deben realizar las siguientes consideraciones:

- El nivel  $h_c$  debe estar por sobre el nivel en el que se ubica el sensor de temperatura PT100 dentro del estanque cónico; de lo contrario, el sensor no mediría la temperatura del agua, sino que la temperatura ambiente. El sensor se encuentra a una altura de 25 [cm] desde la base del cono, por lo que la restricción en este sentido se entiende como  $h_c \geq 30$ .
- El nivel dentro del estanque de recirculación  $h_r$  debe estar por sobre el agitador mecánico allí ubicado; de no ser así, la acción de este dispositivo generaría salpicaduras de agua fuera del sistema de estanques. El punto más alto de acción del agitador se encuentra a una altura de 30 [cm] medido desde la base del estanque, con lo que se establece la restricción  $h_r \geq 30$ .

A partir de estas consideraciones, y con cálculos sencillos que se presentan en la Sección D.1 de Anexos, se determina el intervalo de operación para la salida  $h_c$  del sistema según lo presentado en la Tabla 5.1.

En cuanto a la variable de temperatura del estanque cónico  $T_c$  se contemplan los siguientes comentarios:

- La mínima  $T_c$  debe estar por sobre la temperatura del agua que sale del sistema de abastecimiento; más aún, se debe estar por sobre la temperatura ambiente  $T_A$ , de lo contrario no se podría disminuir la temperatura del agua por convección y conducción. En general, la temperatura ambiente dentro del Laboratorio de Automática es de aproximadamente 20 [°C].
- El agua del sistema de estanques se ha calentado hasta los 50 [°C] sin observarse problemas físicos asociados, por lo que se asume una temperatura adecuada como máximo del intervalo de operación.

Tomando en cuenta lo anterior, se propone un intervalo de operación para  $T_c$  según lo ilustrado en la Tabla 5.1; en este caso la temperatura mínima se aumenta hasta los  $40[^\circ C]$  para favorecer la rapidez del enfriamiento del agua en las pruebas experimentales, ya que a mayor gradiente con respecto al ambiente, más rápido es el enfriamiento.

Tabla 5.1: Intervalo de operación de salidas del sistema MIMO.

Salida	Mínimo	Máximo
$h_c$ [cm]	30	50
$T_c$ [ $^\circ C$ ]	40	50

### 5.1.2. Esquemas de Control MIMO

Realizar control de un proceso multivariable resulta muchas veces un problema bastante complejo debido al acoplamiento existente entre las variables; la forma en que cada una evoluciona cambia la dinámica de las restantes, algo así como una perturbación sobre el sistema, por lo que se deben considerar estos efectos al enfrentar este problema. En el caso del control monovariable, un lazo de realimentación es suficiente para obtener un seguimiento de referencia adecuado; sin embargo, cuando se deben controlar más de una salida del sistema con diferentes acciones de control, esto no resulta tan sencillo. Debido a esto, se proponen esquemas de control que consideran toda la información disponible para definir una entrada al sistema, los cuales reciben el calificativo de centralizados.

En el caso de un control por realimentación de las salidas, para un sistema de  $2 \times 2$  (dos entradas, dos salidas), un controlador centralizado tiene una estructura del estilo

$$C(s) = \begin{bmatrix} C_{11}(s) & C_{12}(s) \\ C_{21}(s) & C_{22}(s) \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

donde cada elemento de la matriz corresponde a una cierta función de transferencia que representa al controlador. La aplicación de un controlador de este tipo sobre el sistema en estudio se entiende según lo ilustrado en la Figura 5.1<sup>1</sup>. Allí se observa que los controladores de la primera fila son los encargados de determinar la acción de control  $f$ :  $C_{11}$  considera la información respecto a la evolución de  $h_c$  y  $C_{12}$  respecto a la de  $T_c$ ; mientras que los controladores de la segunda fila son los encargados de calcular la acción de control  $q_{in}$ :  $C_{12}$  considera el comportamiento del nivel  $h_c$  y  $C_{22}$  el de la temperatura  $T_c$ .

En ciertos casos de control MIMO, el acoplamiento entre las señales no es tan evidente, ya sea porque los tiempos de respuesta sean de magnitudes distintas o porque las dinámicas se afectan minoritariamente unas a otras; en estos escenarios, es suficiente como solución al problema proponer un controlador descentralizado, cuya estructura se define por

$$C(s) = \begin{bmatrix} C_{11}(s) & 0 \\ 0 & C_{22}(s) \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

---

<sup>1</sup>El elemento caracterizado por una  $M$  a la entrada de  $q_{in}$  corresponde a una etapa de modulación de la señal; los detalles al respecto son desarrollados en la Sección 5.2.

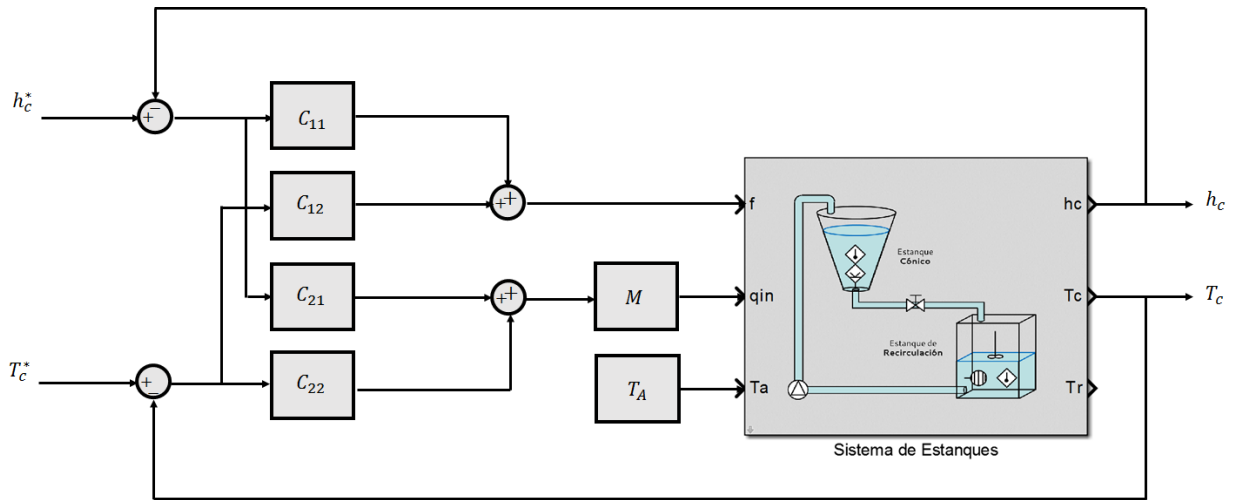


Figura 5.1: Lazo de control MIMO centralizado.

La aplicación de este esquema de control sobre el sistema en estudio genera dos lazos de control que no se comunican entre sí; es decir, a partir de la Figura 5.1, al considerar  $C_{12} = C_{21} = 0$ , se tiene que el problema se reduce a realizar control monovariable de cada una de las salidas por separado.

## 5.2. Modulación $q_{in}$

Uno de los aspectos primordiales a abordar respecto al control de temperatura del sistema, tiene que ver con la modulación de la entrada  $q_{in}$ , es decir, con la determinación de cuándo deben prenderse o apagarse las distintas fases del calefactor trifásico. En general, los controladores entregan señales continuas para dictar el funcionamiento de los actuadores; sin embargo, en este caso de estudio, el calefactor trifásico no puede seguir un comportamiento dictado por una señal continua, ya que sus únicas opciones de funcionamiento corresponden a prender o apagar cada una de sus fases.

Tabla 5.2: Controlador descentralizado para pruebas de modulación  $q_{in}$ .

Controlador	$K_p$	$K_i$
$C_{11}$	120	1
$C_{22}$	1500	1

Debido a esta dificultad se debe realizar un procedimiento de modulación de la acción de control del calefactor; esto es definir un ciclo de funcionamiento de prendido y apagado que, en promedio, iguale la energía calórica suministrada efectivamente con la que el controlador indica que se debe entregar.

La metodología empleada para determinar una modulación conveniente para el sistema consiste en proponer controladores descentralizados para las variables nivel  $h_c$  y temperatura  $T_c$ ; luego, se proceden a probar en simulación sin considerar modulación sobre la señal  $q_{in}$ , es decir,



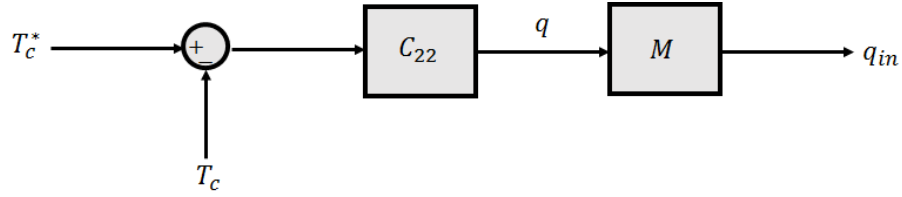


Figura 5.2: Sección de lazo de control  $T_c$ .

como si el calefactor fuese capaz de entregar potencias medias al proceso. Por último, se presentan distintas estrategias de modulación, las que se prueban de igual manera en simulación bajo las mismas condiciones que la prueba original, y se escoge aquella que caracterice una respuesta lo más parecida posible a lo determinado sin modulación.

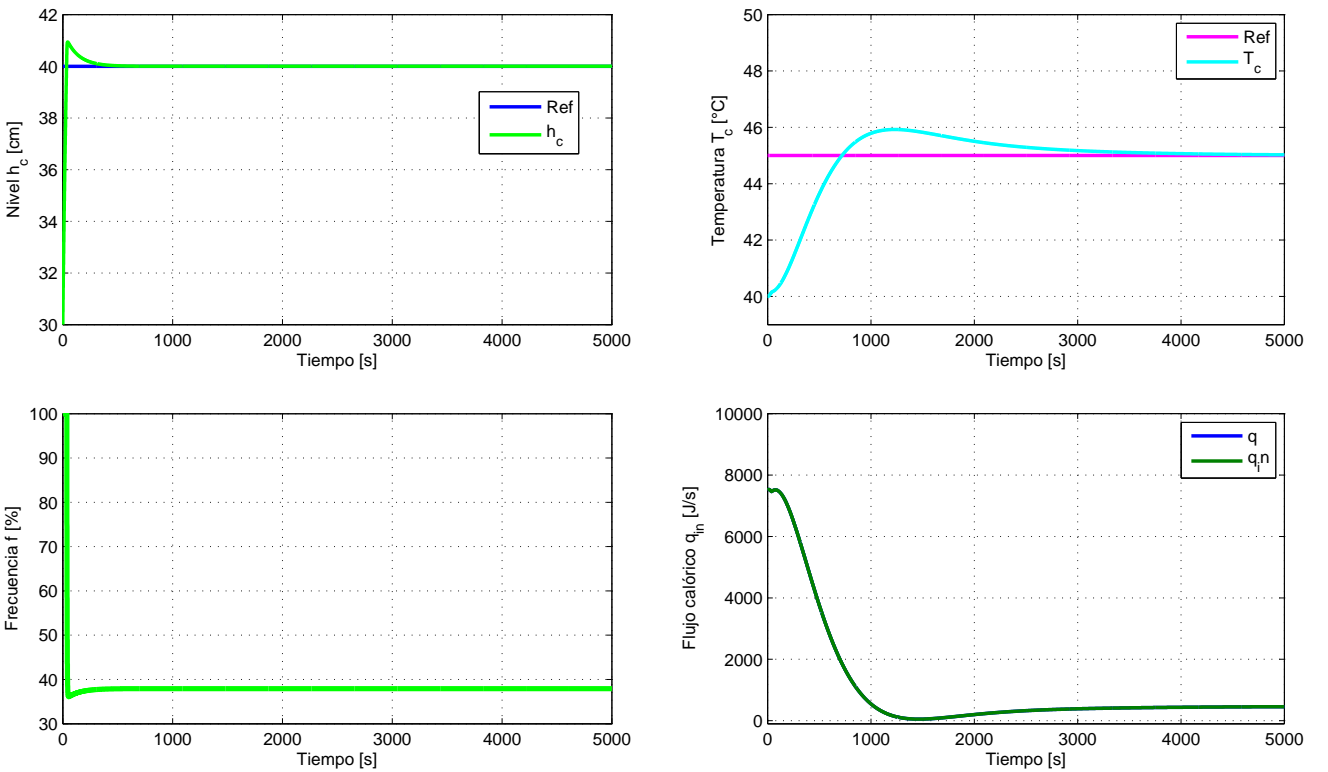


Figura 5.3: Resultados en simulación de modulación SM.

El controlador propuesto para la prueba mencionada sigue la estructura descentralizada mostrada en (5.2), por lo que el control consiste en considerar dos lazos de realimentación desacoplados. Ahora, por simplicidad, los elementos de la matriz  $C_{11}$  y  $C_{22}$  se asumen como controladores de tipo PI; luego, sus parámetros se ajustan heurísticamente a prueba y error en simulación. La Tabla 5.2 resume los valores de las ganancias convenientemente determinados.

La Figura 5.2 muestra una sección del lazo de control correspondiente a la temperatura  $T_c$  en un esquema descentralizado; allí se observa que el error pasa por el controlador  $C_{22}$ , para determinar una acción de control, la cual se lleva a la etapa de modulación  $M$ . En adelante, se llama  $q$  a la señal continua calculada por el controlador, mientras que  $q_{in}$  refiere a la señal  $q$  modulada, es decir, la que efectivamente es interpretada por el calefactor.

El resultado en simulación de la aplicación del controlador propuesto para el estudio de modulación, en el caso base sin modular (SM) la señal  $q_{in}$ , se ilustra en la Figura 5.3; a la izquierda se tiene las gráficas asociadas al nivel  $h_c$  y a la derecha las asociadas a la temperatura  $T_c$ , a su vez en las gráficas superiores se ilustra la evolución de las salidas con respecto a las referencias, mientras que en las inferiores las acciones de control de cada subsistema: cabe notar que en la gráfica correspondiente al flujo calórico las señales  $q$  y  $q_{in}$  se superponen, esto obedece a que el caso base no tiene modulación alguna sobre la señal  $q$ . El objetivo es encontrar una estrategia de modulación que permita emular el resultado de control para la variable  $T_c$  con ciclos de encendido y apagado de todas o algunas de las fases del calefactor trifásico.

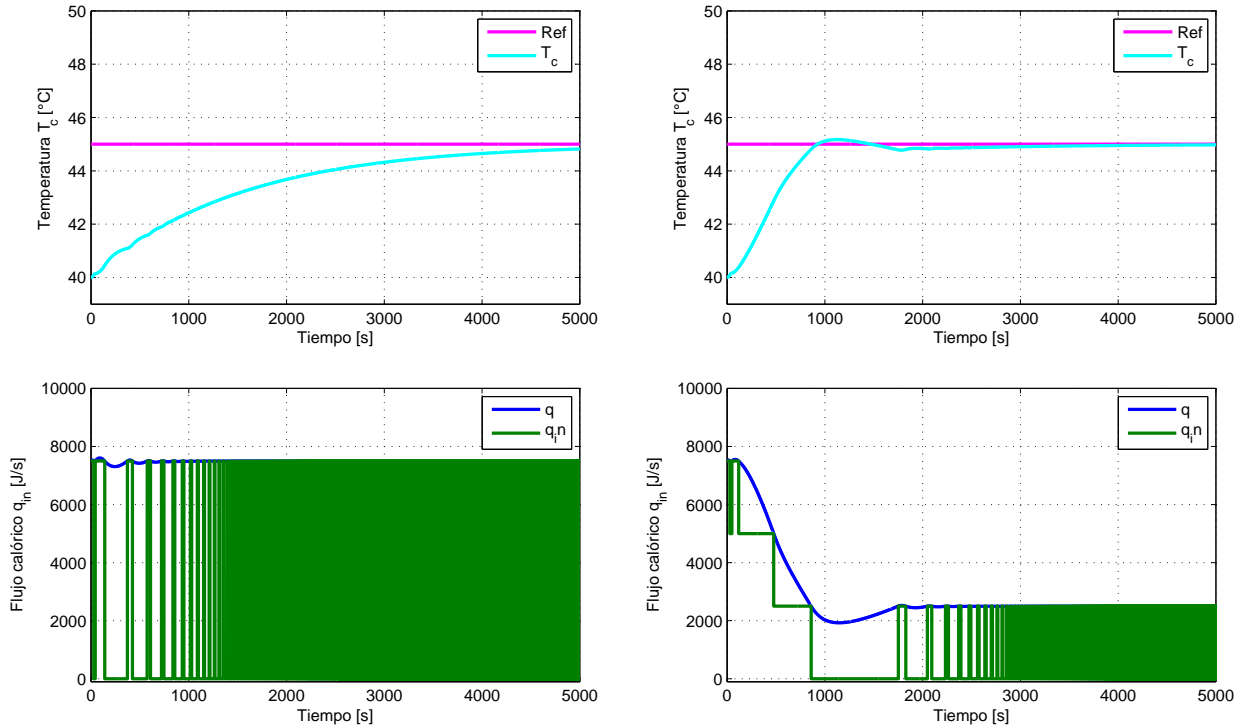


Figura 5.4: Resultados en simulación de modulación On/Off.

### 5.2.1. Modulación On/Off

Uno de los esquemas más sencillos de modulación de señales que se suele aplicar corresponde a la denominada modulación On/Off; esta consiste en comparar la señal a modular con cierto valor fijo, cuando se encuentra por sobre éste la señal modulada toma cierto valor, caso contrario, cuando se encuentra por debajo del valor fijo, la señal modulada es nula (o toma un valor distinto en algunos casos). En el contexto del problema planteado, se compara  $q$  con el valor efectivo de flujo calórico que puede entregar una o más fases al encenderse.

Al respecto, se plantean dos estrategias; la primera consiste en comparar la señal  $q$  con la cantidad total de flujo calórico que entrega el actuador con las tres fases encendidas (On/Off 3F), mientras que la segunda es realizar este procedimiento con cada una de las fases (On/Off 1F). Mayores detalles respecto a la lógica tras estos esquemas se pueden consultar en la Sección

## D.2 de Anexos.

El resultado en simulación de la aplicación de cada lógica de modulación On/Off se ilustra gráficamente en la Figura 5.4; en las gráficas superiores se observa el comportamiento de  $T_c$ , mientras que en las inferiores el de las señales  $q$  y  $q_{in}$ . Las gráficas de la izquierda corresponden al esquema de modulación On/Off 3F, donde se nota con claridad que se encienden y apagan las tres fases del calefactor juntas, en tanto a la derecha se ve el resultado del esquema On/Off 1F, en el cual se observa que cada fase se prende o apaga por separado al comparar con la señal sin modular  $q$ .

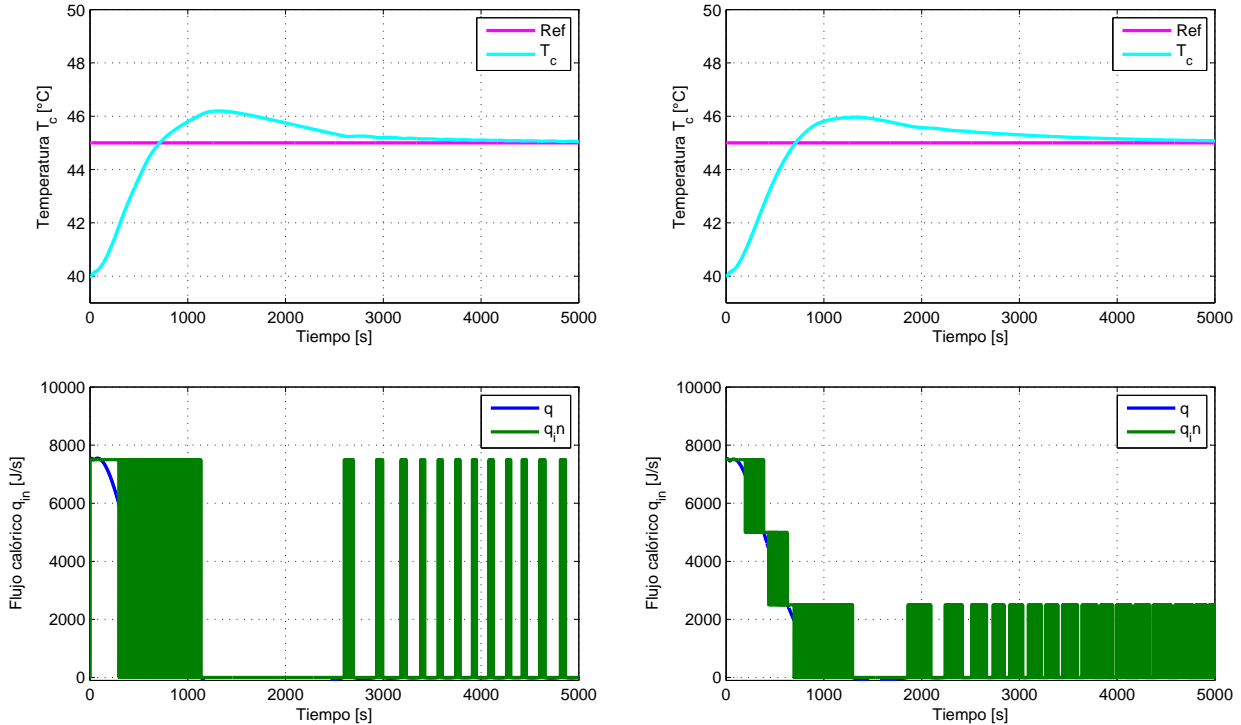


Figura 5.5: Resultados en simulación de modulación PWM.

### 5.2.2. Modulación PWM

Otro enfoque ampliamente utilizado para modulación de señales en esquemas de control corresponde a PWM (en inglés “Pulse Width Modulation”); esta técnica compara la señal a modular con una señal portadora de tipo periódica, cuando la primera es mayor que la segunda, se tiene que la señal modulada toma cierto valor, caso contrario, cuando la señal a modular es menor que la portadora, la señal modulada es nula (o toma otro valor según sea el caso). Para el presente caso de estudio, se escoge una señal portadora de tipo triangular y período  $T = 10$  [s]; ahora bien, dada la dinámica del sistema y ciertas restricciones físicas, un esquema PWM tradicional puede ser muy nocivo para el actuador del lazo de temperatura, ya que se pueden dar casos de picos de corrientes circulando por las fases del calefactor, lo que, eventualmente, puede afectar al dispositivo. Para estar al margen de este inconveniente, se modifica el estilo usual de usar una modulación PWM: ya no se muestrea de forma continua las señales,

sino que la comparación entre  $q$ , la señal a modular, y la portadora, se realiza cada 2 [s]; con esto se garantiza la inexistencias de picos de corrientes en una situación real de control experimental, ya que el período mínimo en que se puede encender cualquier fase del calefactor es el correspondiente al período de muestreo mencionado. Mayores detalles respecto a lo establecido se pueden consultar en la Sección D.2, allí se ilustra a través de gráficas la diferencia entre el esquema PWM tradicional y el aquí propuesto.

En cuanto a la aplicación de esta modulación, al igual que en el caso On/Off, se siguen dos estrategias, correspondientes a modular las tres fases del calefactor juntas (PWM 3F) o cada una por separado (PWM 1F). El resultado de aplicación de ambas en simulación se muestra en la Figura 5.5; nuevamente, las gráficas superiores ilustran la salida  $T_c$  y las inferiores la acción de control modulada  $q_{in}$ , mientras que se distinguen a la izquierda las gráficas correspondientes a la estrategia PWM 3F y a la derecha a la de PWM 1F.

Tabla 5.3: Índices de desempeño para esquemas de modulación  $q_{in}$ .

Modulación	$IAE(T_c)$	$ISI(q_{in})$	$MOV$	$E_{ss}$	$t_d$	$t_r$	$t_p$	$t_s$
SM	3.23E+03	2.26E+10	18.47	0.03	367.95	720.05	1229.05	2646.15
On/Off 3F	7.23E+03	3.84E+10	0.00	0.18	1043.15	5000.05	5000.05	4500.25
On/Off 1F	2.59E+03	2.16E+10	3.47	0.02	428.95	925.05	1124.05	845.30
PWM 3F	3.61E+03	4.01E+10	23.94	0.05	361.65	713.70	1315.10	2823.75
PWM 1F	3.58E+03	2.67E+10	19.29	0.08	367.00	711.40	1327.60	3282.20

Para tomar una decisión en cuanto a qué técnica de modulación utilizar, más allá del análisis gráfico de las imágenes presentadas, se recurre al cálculo de índice de desempeño para cada uno de los casos ilustrados. La Tabla 5.3 muestra el valor numérico de una serie de indicadores de comportamiento, tanto globales como de respuesta transitoria, para cada una de las simulaciones desarrolladas. Tal como fue mencionado en principio, se debe escoger aquel esquema no que minimice los índices y procure un mejor control, sino aquel que se parezca en mayor medida al caso sin modulación (SM); esto se debe a que con esta etapa no se busca mejorar los resultados de control, sino que determinar una forma de actuación por parte del calefactor que permita interpretar de la forma más correcta la señal continua emitida por cualquier controlador que se sintonice. Bajo estas condiciones, el esquema de modulación que presenta mejores ventajas es el correspondiente a PWM 1F.

### 5.3. Sintonización en Frecuencia

A partir de los resultados determinados en el Capítulo 4, se puede concluir que las estrategias de sintonización LGR y Z&N no determinan controladores que entreguen buenos resultados para el problema de control no lineal de tipo SISO, lo que ocurre sin discriminación tanto en los casos de estrategias de orden entero como de orden fraccionario. Debido a esto, es necesario buscar alternativas que permitan sintonizar los parámetros de controladores de forma más adecuada para el caso de estudio en cuestión.

Basado en los trabajos [18, 19], se pretenden usar las condiciones del método Z&N de la Sección 2.3.3, descritas en las ecuaciones (2.34) a (2.38), para encontrar una solución directa que se

adapte mejor a las condiciones y requerimientos del sistema al realizar un control multivariable. Proponer una estrategia de este estilo es factible ya que el controlador PID de orden fraccionario, de donde se pueden desprender todo el resto de controladores de esta familia, tiene una forma realizable en el espacio de la frecuencia; esto es, una descripción matemática factible que se puede operar de forma tradicional sin recurrir a aproximaciones para resolver las integrales o derivadas de orden fraccionario. Luego, considerando la forma del controlador PIDOF descrita en (2.21) y evaluando en  $j\omega$ , se puede obtener una representación en frecuencia, la cual está dada por

$$C(j\omega) = K_p + K_i\omega^{-\lambda} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) - j \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) \right] + K_d\omega^\mu \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2}\mu\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{2}\mu\right) \right]. \quad (5.3)$$

A partir de esta expresión se puede recuperar el caso PIOF considerando  $K_d = 0$ , y los casos PI y PID considerando órdenes enteros  $\lambda = \mu = 1$ .

Ahora bien, a partir de las ecuaciones que describen las restricciones mencionadas, si se consideran como igualdades se podría plantear un caso de sintonización de parámetros a través de la solución de un sistema de ecuaciones algebraicas; sin embargo, esto no es tan sencillo, ya que dependiendo de las dinámicas asociadas al controlador y la planta, pueden no existir soluciones para una cierta definición de especificaciones de control en el dominio de la frecuencia. Por esto, se plantean las condiciones para formar un problema de optimización que sí permita determinar una solución factible con el cumplimiento de éstas en forma de minimización de una función objetivo sujeta a restricciones.

La idea detrás de la aplicación de este método es que para cada parámetro a sintonizar de un cierto tipo de controlador se añade una restricción al problema; de esta forma, para el caso PI se tienen una función objetivo sujeta a una única restricción, mientras que para el caso PIDOF, el que posee más parámetros a determinar, se tienen todas las condiciones involucradas en el problema de optimización. Luego, el objetivo del proceso de optimización es cumplir lo más aproximadamente posible las restricciones algebraicas (2.34) a (2.38) propuestas para el método Z& N de orden fraccionario desarrollado en la Sección 2.3.3; de esta forma, se garantizan, en cierta medida, condiciones dinámicas específicas para el sistema en lazo cerrado.

Si se considera que la planta a controlar está descrita por  $G(s)$ , el problema de optimización para la sintonización de un control PI queda definido por

$$\begin{aligned} & \underset{[K_p, K_i]}{\text{minimizar}} \quad ||C(j\omega_{cg})G(j\omega_{cg})| - 1|; \\ & \text{sujeto a} \quad \arg [C(j\omega_{cg})G(j\omega_{cg})] + \pi - \varphi_m \leq \varepsilon_1. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Ahora, en el caso de la sintonización de controladores PID o PIOF, que constan de tres parámetros a determinar, al problema de optimización se le agrega una restricción extra; con esto, el problema de optimización se puede plantear como

$$\begin{aligned} & \underset{[K_p, K_i, K_d(\lambda)]}{\text{minimizar}} \quad ||C(j\omega_{cg})G(j\omega_{cg})| - 1|; \\ & \text{sujeto a} \quad \arg [C(j\omega_{cg})G(j\omega_{cg})] + \pi - \varphi_m \leq \varepsilon_1, \\ & \quad \quad \quad \left. \frac{d}{d\omega} \arg [C(j\omega)G(j\omega)] \right|_{\omega=\omega_{cg}} \leq \varepsilon_2. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Finalmente, para la sintonización de un controlador de tipo PIDOF, se incluyen las dos condiciones restantes y el problema de optimización queda caracterizado como

$$\begin{aligned}
& \underset{[K_p, K_i, \lambda, K_d, \mu]}{\text{minimizar}} && ||C(j\omega_{cg})G(j\omega_{cg})| - 1|; \\
& \text{sujeto a} && \arg [C(j\omega_{cg})G(j\omega_{cg})] + \pi - \varphi_m \leq \varepsilon_1, \\
& && \left. \frac{d}{d\omega} \arg [C(j\omega)G(j\omega)] \right|_{\omega=\omega_{cg}} \leq \varepsilon_2, \\
& && \left| \frac{C(j\omega_h)G(j\omega_h)}{1 + C(j\omega_h)G(j\omega_h)} \right| - H \leq \varepsilon_3, \\
& && \left| \frac{1}{1 + C(j\omega_l)G(j\omega_l)} \right| - N \leq \varepsilon_4.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

En cada uno de los problemas de optimización, los parámetros  $\varepsilon_i$  son parámetros de convergencia del problema para garantizar la determinación del mínimo global o al menos local.

Tabla 5.4: Punto de operación para linealización de modelo MIMO.

$h_{cop}$ [cm]	$T_{cop}$ [°C]	$T_{rop}$ [°C]	$f_{op}$ [%]	$q_{op}$ [J/s]
40.00	45.00	45.07	37.95	378.47

La aplicación del método propuesto exige dar con una representación lineal  $G(s)$  en forma de función de transferencia del sistema a controlar; para esto, se hace uso de la información expuesta en la Sección 3.5, de donde, a través del uso de las ecuaciones allí planteadas, se pueden determinar los parámetros que definen la linealización. Considerando la definición del intervalo de operación descrito en la Tabla 5.1, se establece como punto de operación lo mostrado en la Tabla 5.4, que proviene de escoger el punto medio de cada rango de la salida y resolver el sistema de ecuaciones algebraicas resultantes de considerar  $\dot{x} = g(x, u) = 0$ .

Considerando el punto de operación definido, la linealización del modelo en forma de variables de estado queda caracterizada por

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{h}_c \\ \dot{T}_c \\ \dot{T}_r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0,0054 & 0 & 0 \\ -2,0173 \cdot 10^{-5} & 0,0054 & -0,0054 \\ -1,0415 \cdot 10^{-6} & -0,0011 & 0,0011 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_c - 40 \\ T_c - 45 \\ T_r - 45,07 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0,0036 & 0 \\ 1,7139 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 1,0962 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f - 37,95 \\ q_{in} - 378,47 \end{bmatrix};
\end{aligned} \tag{5.7}$$

para este caso, la salida de la linealización se puede definir como

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_c - 40 \\ T_c - 45 \\ T_r - 45,07 \end{bmatrix}. \tag{5.8}$$

Luego, siguiendo con el procedimiento establecido en la Sección 3.5, se puede llegar a la expresión en forma de función de transferencia de la linealización

$$\begin{bmatrix} h_c - 40 \\ T_c - 45 \\ T_r - 45,07 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0,0036}{s+0,0054} & 0 \\ \frac{1,71 \cdot 10^{-5} s^2 + 7,42 \cdot 10^{-10} s - 2,03 \cdot 10^{-12}}{s^3 - 0,0012 s^2 - 3,55 \cdot 10^{-5} s - 9,29 \cdot 10^{-10}} & \frac{-1,14 \cdot 10^{-8}}{s^2 - 0,0066 s - 1,72 \cdot 10^{-7}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f - 37,95 \\ q_{in} - 378,47 \end{bmatrix}. \tag{5.9}$$

Para el uso de esta sintonización se propone un esquema de control descentralizado, es decir, el controlador tiene la representación mostrada en (5.2). Luego, para aplicar el método se consideran las funciones de transferencia en la diagonal de la linealización mostrada, y cada una se asume como el modelo del subsistema de nivel y temperatura, respectivamente.

Tabla 5.5: Especificaciones para sintonización de controladores en frecuencia.

Controlador	$\omega_{cg}$ [rad/s]	$\varphi_m$ [°]	$\omega_h$ [rad/s]	$H$ [dB]	$\omega_l$ [rad/s]	$N$ [dB]
$C_{11}$	0.72	90	10	-10	0.01	-20
$C_{22}$	0.04	100	10	-10	0.01	-20

Para llevar a cabo el proceso de sintonización se consideran las especificaciones en frecuencia mostradas en la Tabla 5.5 para cada controlador a determinar; la frecuencia de corte  $\omega_{cg}$  y margen de fase  $\varphi_m$  se escogen en función de los requerimientos de cada subsistema a controlar, mientras que el resto de especificaciones se definen según los requerimientos establecidos en [57, 58]. El problema de optimización para la determinación de parámetros de cada controlador se resuelve usando el algoritmo del Punto Interior (en inglés “Interior Point Algorithm”), a través de su aplicación en la función `fmincon` del software Matlab; además, se incluyen restricciones a los parámetros de la solución:  $K_p, K_i, K_d \geq 0$ ,  $\lambda \in [0,75, 1]$  y  $\mu \in [0 - 0,25]$ . Como resultado de este procedimiento, se obtienen los parámetros mostrados en la Tabla 5.6; mayor detalle del proceso se describe en la Sección D.3 de Anexos.

Tabla 5.6: Parámetros de controladores sintonizados en frecuencia.

Controlador	$K_p$	$K_i$	$\lambda$	$K_d$	$\mu$	
$C_{11}$	PI	102.03	124.37	1	0	1
	PID	157.32	101.15	1	22.21	1
	PIOF	138.09	90.61	0.87	0	1
	PIDOF	182.36	144.59	0.99	95.17	0.17
$C_{22}$	PI	999.03	5.68E+03	1	0	1
	PID	1.05E+03	10.00	1	0.24	1
	PIOF	1.21E+05	3.58E+03	0.79	0	1
	PIDOF	5.70E+04	4.88E+03	0.76	6.14E+04	0.03

Ahora, con el objetivo de poner a prueba a los controladores del problema de control MIMO, se definen 2 pruebas estándares a las que se someten todos los esquemas determinados en este capítulo, cada una con el objetivo de estudiar ciertos aspectos del sistema. En este caso, la señal de referencia  $r(t) = [r_1(t) \ r_2(t)]^\dagger$  consiste en un vector de dos dimensiones; el primer elemento corresponde a la referencia de la salida  $h_c$ , mientras que el segundo a la de la salida  $T_c$ . Las condiciones iniciales para todas las pruebas en simulación se consideran  $x_0 = [40 \ 40 \ 40]^\dagger$ .

La primera prueba a considerar (Prueba 1), consiste en señales que pretenden verificar el comportamiento de cada solución frente a cambios escalón que se producen al unísono; se consideran todas las posibles combinaciones de subida y bajada para cubrir distintos escenarios de operación del sistema. El detalle del valor numérico de cada escalón se puede consultar en la Tabla 5.7.

Tabla 5.7: Señal de referencia Control MIMO - Prueba 1.

$t$ [s]	[0-3000]	[3000-6000]	[6000-9000]	[9000-12000]
$r_1(t)$ [cm]	50	40	30	40
$r_2(t)$ [°C]	44	48	46	44

Por su parte, la segunda prueba (Prueba 2) intenta estudiar el comportamiento del sistema cuando se consideran los cambios de  $h_c$  como una perturbación sobre la dinámica del subsistema de temperatura; es decir, se varía la referencia de la salida mencionada, para estudiar, a referencia constante, la evolución dinámica y el proceso de control de la salida  $T_c$ . El caso contrario no resulta de particular interés, ya que el subsistema de nivel se encuentra desacoplado del subsistema de temperatura, por lo que se retomaría el caso de control SISO estudiado en el Capítulo 4. La Tabla 5.8 muestra las señales de referencia consideradas para este estudio; particularmente, se tiene que  $r_1 \sim \mathcal{U}(30, 50)$ , es decir, sigue una distribución uniforme con valores dentro del intervalo de operación de  $h_c$ , mientras que  $r_2$  se considera como el punto medio del intervalo de operación de  $T_c$ .

Tabla 5.8: Señal de referencia Control MIMO - Prueba 2.

$t$ [ks]	[0-1]	[1-2]	[2-3]	[3-4]	[4-5]	[5-6]	[6-7]	[7-8]	[8-9]	[9-10]
$r_1(t)$ [cm]	40	41.29	36.05	45.04	39.50	33.37	40.92	41.60	37.81	46.93
$r_2(t)$ [°C]	45									

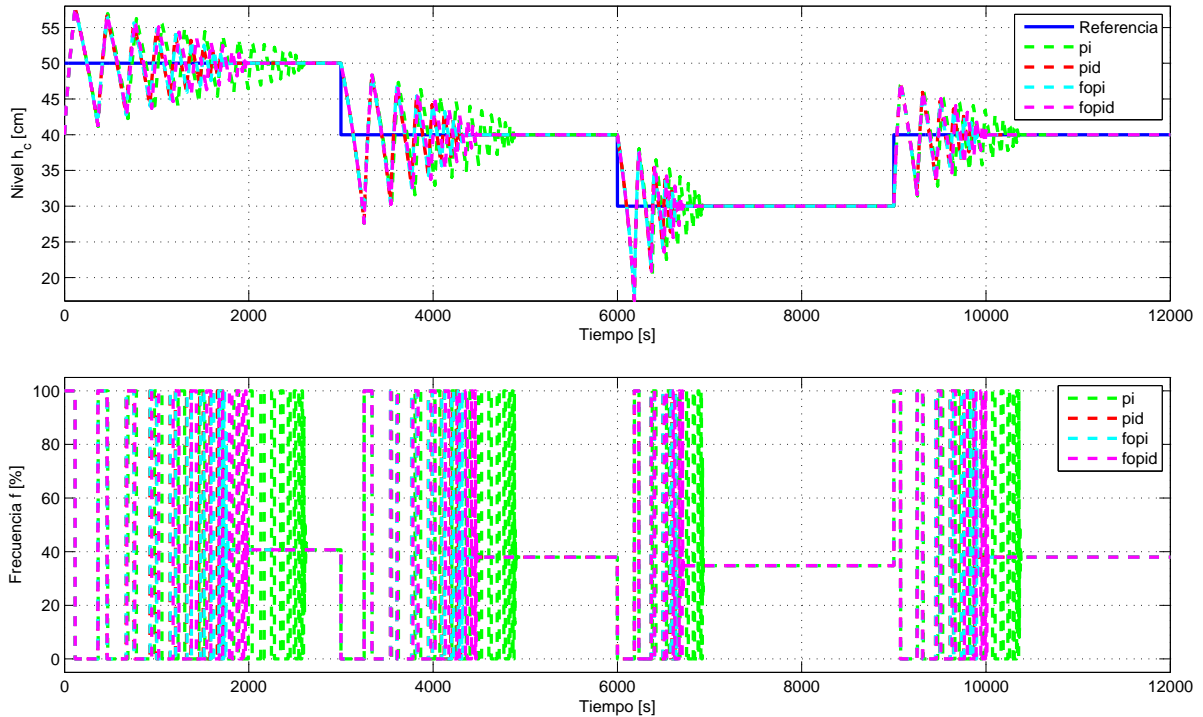


Figura 5.6: Resultados en simulación de control MIMO  $h_c$  sintonizado en frecuencia - Prueba 1.

Definido el marco comparativo al que se someten los controladores, se pueden obtener los resultados particulares de la aplicación de los sintonizados en frecuencia sobre cada una de las



pruebas. El resultado de control en simulación de los controladores mostrados en la Tabla 5.6 para la Prueba 1 se muestra en las Figuras 5.6 y 5.7; la primera muestra la evolución de la salida  $h_c$  y su correspondiente acción de control  $f$ , mientras que la segunda muestra el comportamiento de la salida  $T_c$  y la actuación del calefactor trifásico  $q_{in}$ .

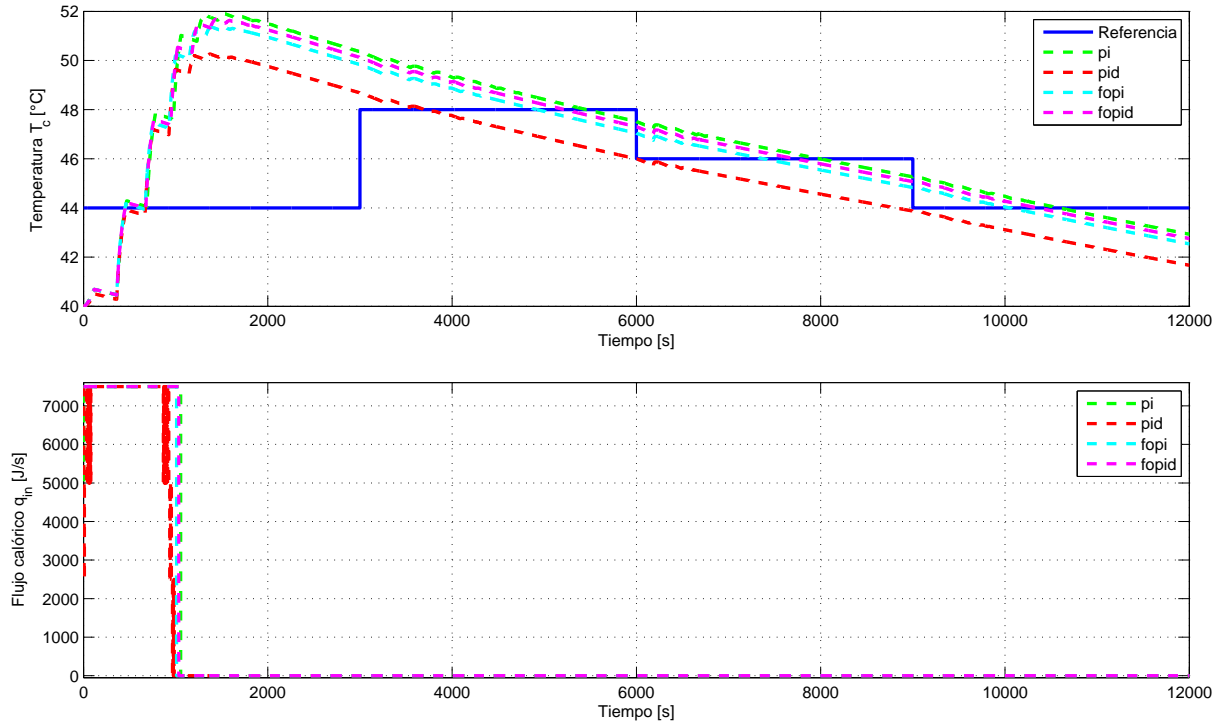


Figura 5.7: Resultados en simulación de control MIMO  $T_c$  sintonizado en frecuencia - Prueba 1.

Tabla 5.9: Índices de desempeño global para controladores sintonizados en Frecuencia - Prueba 1.

Controlador	$IAE(h_c)$	$IAE(T_c)$	$ISI(f)$	$ISI(q_{in})$
PI	1.977E+04	2.346E+04	2.619E+07	5.922E+10
PID	1.417E+04	2.326E+04	2.327E+07	4.966E+10
PIOF	1.433E+04	2.170E+04	2.335E+07	5.681E+10
PIDOF	1.579E+04	2.248E+04	2.407E+07	5.816E+10

Para un análisis exhaustivo de los resultados en simulación para la Prueba 1, se introducen índices de comportamiento al estudio del presente caso; en particular, la Tabla 5.9 resume numéricamente lo obtenido en la Prueba 1 a través de índices de comportamiento global, mientras que la Tabla 5.10 detalla la dinámica en cuanto a la respuesta transitoria del sistema, cuyo detalle se puede consultar en la Tabla D.2 de la Sección D.3 de Anexos.

A partir de la información presentada en forma gráfica en las Figuras 5.6 y 5.7, y en forma numérica en la Tablas 5.9 y 5.10, se puede desprender que el esquema de sintonización en frecuencia no entrega buenos resultados de control; por parte del subsistema de nivel, se observa que todos los controladores presentan oscilaciones importantes al llevar la salida  $h_c$  sobre la referencia, lo que comparativamente al caso MIMO, entrega resultados similares a las estrategias

Tabla 5.10: Índices de desempeño de respuesta transitoria para controladores sintonizados en Frecuencia - Prueba 1.

Salida	Controlador	$MOV$	$E_{ss}$	$t_d$	$t_r$	$t_p$	$t_s$
$h_c$	PI	409.22	0.00	164.65	322.60	626.45	6714.45
	PID	404.72	0.00	164.65	322.60	623.60	4518.90
	PIOF	404.89	0.00	164.65	322.60	623.70	4578.90
	PIDOF	406.50	0.00	164.65	322.60	624.75	5128.25
$T_c$	PI	347.08	8.64	1378.35	4037.40	7522.70	12000.00
	PID	396.58	11.14	388.90	672.70	7371.45	12000.00
	PIOF	361.90	9.42	415.80	2889.60	7377.90	12000.00
	PIDOF	353.63	8.99	851.15	3528.40	7430.55	12000.00

de sintonización LGR y Z&N, y peores que la sintonización por optimización PSO. En cuanto al subsistema de temperatura, la evolución de la salida  $T_c$  no obedece a un seguimiento de referencia característico; la alta ganancia proporcional, según se muestra en la Tabla 5.6, predomina en todas las soluciones, por lo que el sobrepaso en cada caso es importante, luego, la influencia de la acción integral impide un control más preciso. Este hecho puede confirmarse observando el resultado entregado por el controlador PID, el que posee una ganancia integral de menor magnitud, ya que incurre en menor sobrepaso en el escalón inicial de subida.

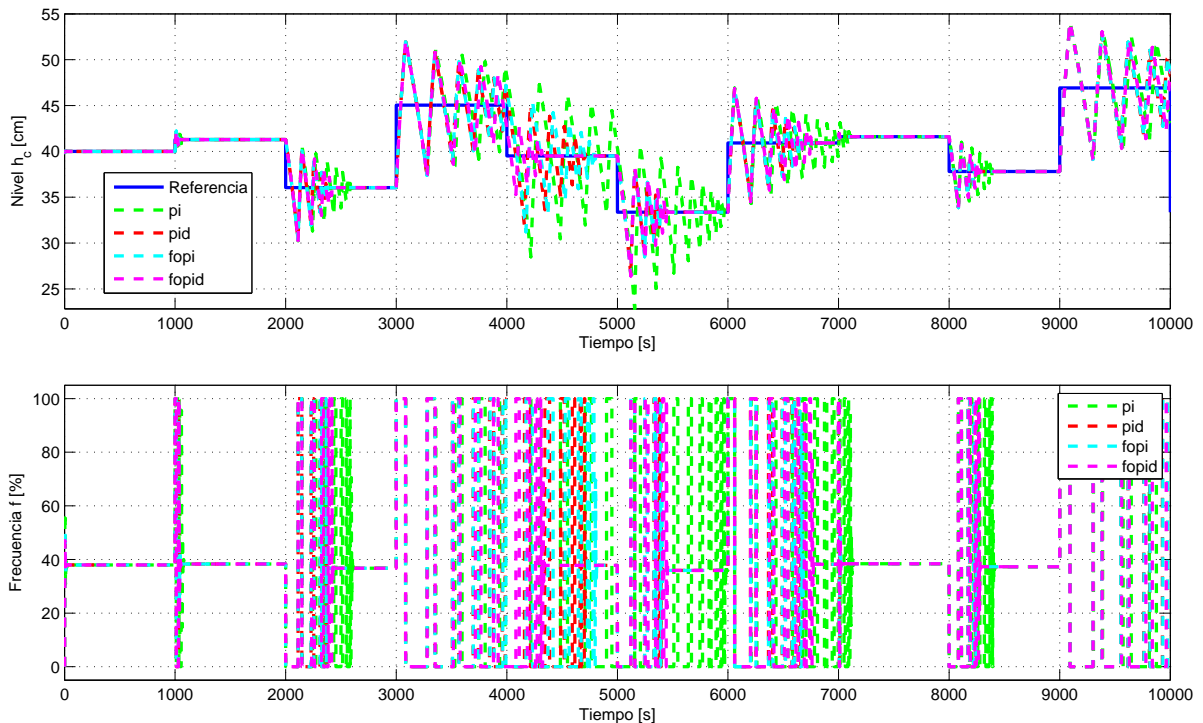


Figura 5.8: Resultados en simulación de control MIMO  $h_c$  sintonizado en frecuencia - Prueba 2.

La aplicación de los controladores determinados con sintonización en frecuencia en la Prueba 2 se puede observar en lo presentado en la Figura 5.8, donde se muestra en la gráfica superior la salida  $h_c$  y en la inferior la acción de control  $f$ , y en la Figura 5.9, que ilustra el comportamiento de  $T_c$  en la gráfica superior y de su correspondiente acción de control  $q_{in}$  en la inferior.

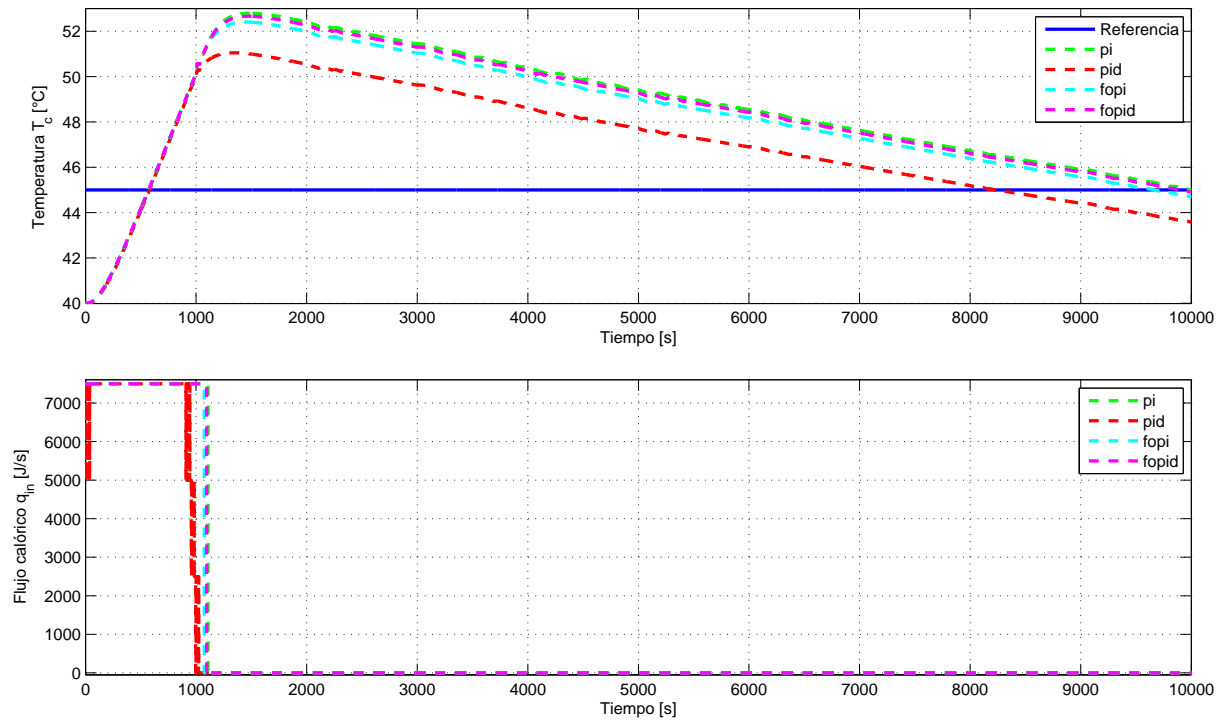


Figura 5.9: Resultados en simulación de control MIMO  $T_c$  sintonizado en frecuencia - Prueba 2.

La evaluación numérica del caso Prueba 2 con los controladores definidos en esta sección se puede realizar a partir de la información en las Tablas 5.11 y 5.12; en la primera se introducen índices de desempeño global de la situación, mientras que en la segunda se enmarcan las características de respuesta transitoria del control realizado.

Tabla 5.11: Índices de desempeño global para controladores sintonizados en Frecuencia - Prueba 2.

Controlador	$IAE(h_c)$	$IAE(T_c)$	$ISI(f)$	$ISI(q_{in})$
PI	1.70E+04	3.89E+04	2.25E+07	6.23E+10
PID	1.09E+04	2.66E+04	2.06E+07	5.26E+10
PIOF	1.13E+04	3.57E+04	2.07E+07	6.04E+10
PIDOF	1.03E+04	3.78E+04	2.04E+07	6.16E+10

Al igual que en el caso de la Prueba 1, los esquemas de control definidos no resultan satisfactorios; en el caso de  $h_c$  se tiene nuevamente respuestas con marcadas oscilaciones, mientras que para  $T_c$  los controladores no son capaces de llevar la salida sobre la referencia en la ventana de tiempo mostrada, lo que resulta excesivo para el tiempo de respuesta del sistema. Además, se presenta más evidencia respecto a la predominancia que ejerce sobre la solución los valores de la ganancia integral para el control de temperatura en cada caso; el controlador PID muestra menor sobrepaso debido al menor orden de magnitud de este parámetro.

A fin de cuentas, al igual que en los casos de sintonización  $Z\&N$  de control MIMO, se puede utilizar este método como una primera aproximación para la determinación de los parámetros de los controladores; luego, haciendo uso de las reglas heurísticas para la influencia de las ganancias

Tabla 5.12: Índices de desempeño de respuesta transitoria para controladores sintonizados en Frecuencia - Prueba 2.

Salida	Controlador	$MOV$	$E_{ss}$	$t_d$	$t_r$	$t_p$	$t_s$
$h_c$	PI	1128.19	8.58	234.95	414.95	836.35	6133.15
	PID	818.59	2.36	191.75	371.75	731.10	4414.60
	PIOF	829.47	3.28	199.50	379.50	744.70	4550.55
	PIDOF	765.29	4.33	146.50	326.50	654.90	4275.00
$T_c$	PI	155.87	0.00	353.15	570.95	1490.95	9735.75
	PID	120.95	1.42	359.45	577.25	1347.90	10000.00
	PIOF	148.10	0.30	352.45	570.20	1456.00	10000.00
	PIDOF	153.23	0.08	352.45	570.25	1478.70	9638.45

de cada controlador según lo explicado en 2.2, se puede ajustar de manera individual cada valor para obtener un comportamiento aceptable del problema de control MIMO, obedeciendo a las características deseadas del sistema.

## 5.4. Sintonización PSO

Considerando los buenos resultados mostrados en la Sección 4.3 para el problema de control SISO, se busca adaptar el esquema de sintonización PSO allí empleado al caso de control MIMO. En términos prácticos, se pretende encontrar bajo un esquema de optimización meta-heurística los parámetros de controladores que definan un comportamiento de control que minimice una cierta función objetivo, considerando las dos salidas involucradas en esta situación.

Para la aplicación de este método, se consideran esquemas de control descentralizado, como el empleado en el caso de sintonización en frecuencia de la Sección 5.3, y centralizado, los que se pueden entender a partir de la Figura 5.1 y lo explicado en la Sección 5.1.2. Ahora, como el caso de control es multivariable, la función objetivo a minimizar debe incluir información respecto a las dos salidas del sistema; siguiendo la lógica de lo presentado en la Sección 4.3, y aprovechando que el intervalo de operación de  $h_c$  y  $T_c$  es similar y del mismo orden de magnitud, se propone la función

$$J = IAE(h_c) + IAE(T_c). \quad (5.10)$$

En concreto, se busca encontrar controladores cuyo foco sea determinar la mejor respuesta global de control, sin dar mayor énfasis en la energía de control o el comportamiento de respuesta transitoria del sistema.

Tabla 5.13: Configuración de parámetros de algoritmo PSO MIMO.

Controlador	$s$	$G$	$K_p$	$K_i$	$\lambda$	$K_d$	$\mu$
$C_{11}$	30	100	[5-200]	[0-5]	[0.75-1]	[0-5]	[0-0.25]
$C_{22}$			[5-2000]	[0-5]	[0.75-1]	[0-5]	[0-0.25]
$C_{12}$			[0-5]	[0-1]	[0.75-1]	[0-1]	[0-0.25]
$C_{21}$			[0-5]	[0-1]	[0.75-1]	[0-1]	[0-0.25]

La configuración de parámetros para la aplicación del algoritmo en el caso MIMO se muestra en la Tabla 5.13; según la experiencia desarrollada para el caso SISO, se considera un universo de partículas  $s = 30$ , lo que está en concordancia con lo expuesto en [62] y definido a través de la expresión (2.48): el caso de menor cantidad de incógnitas es PI descentralizado, con un total de 4, mientras que el de mayor es PIDOF centralizado, con 20, y la elección de número de partículas cubre todo el espectro de situaciones, ambos inclusive. Respecto al número de iteraciones, se comprueba empíricamente que la elección  $G = 100$  cumple con ganatizar la convergencia del proceso. Además, la Tabla 5.13 muestra el rango inicial de los parámetros de los controladores; para el caso  $C_{11}$  se establece un rango similar a los mejores resultados obtenidos en el caso SISO, para  $C_{22}$  se aumenta el rango de la ganancia proporcional dados los valores obtenidos mediante el proceso de sintonización en frecuencia de la Sección 5.3, y para los casos  $C_{12}$  y  $C_{21}$  se escogen intervalos para magnitudes pequeñas. Sin embargo, salvo el caso de los órdenes de integración y derivación fraccionarios, los rangos no son estrictos, siendo la única restricción  $K_p, K_i, K_d \geq 0$  sólo para  $C_{11}$  y  $C_{22}$ .

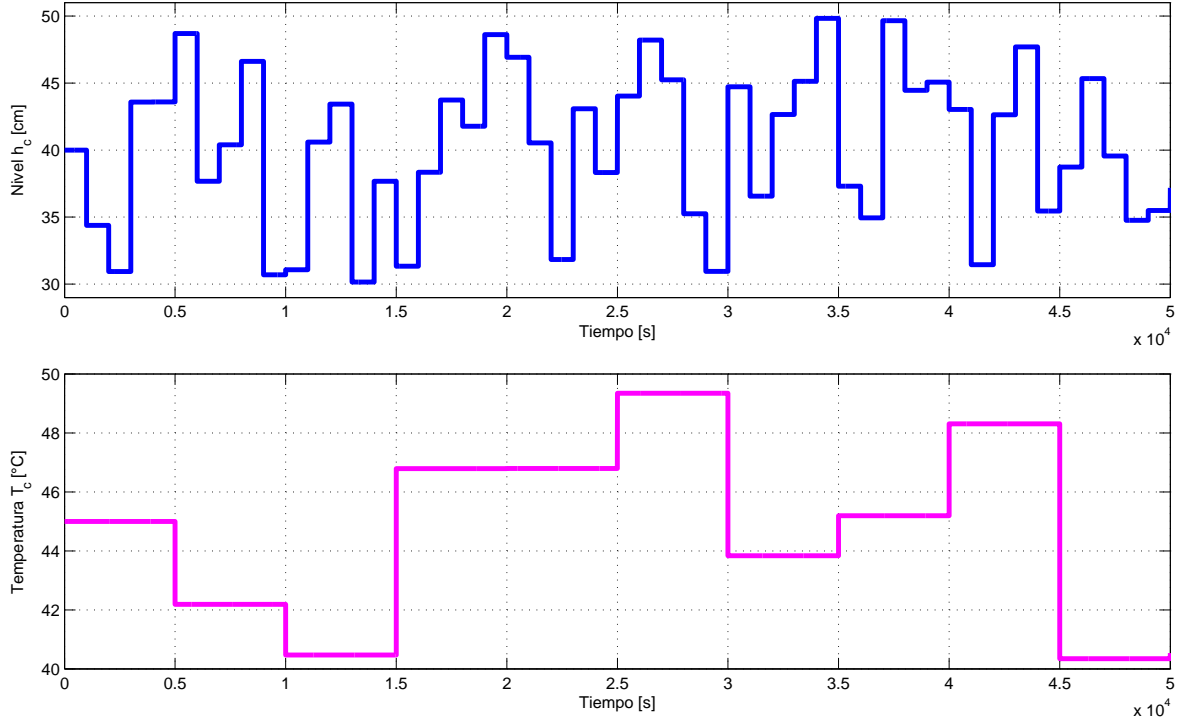


Figura 5.10: Referencia de  $h_c$  y  $T_c$  para optimización PSO MIMO.

En vista de obtener controladores que se adapten a cualquier escenario de operación dentro del rango de cada salida del sistema, se propone una señal de referencia  $r_{PSO}(t)$  que considere tanto subidas como bajadas de escalón. Para hacer el proceso lo más general posible, y darle el carácter de aleatorio, se propone que las señales de referencia cumplan con una distribución uniforme; de esta forma, la señal de referencia correspondiente al nivel  $h_c$  cumple con  $r_{PSO}^1 \sim \mathcal{U}(30, 50)$ , mientras que la asociada a  $T_c$  cumple con  $r_{PSO}^2 \sim \mathcal{U}(40, 50)$ . Ahora bien, dado que las dinámicas de respuesta de cada variable son distintas, se asumen escalones de distinta duración para cada una; a través de la medición del tiempo de respuesta de cada una se determina que la duración de cada escalón para  $h_c$  debe ser  $\Delta t_1 = 1000$  [s], en tanto para  $T_c$  se define  $\Delta t_2 = 5000$  [s]. Como resultado de estos antecedentes se obtienen las señales de referencia mostradas en la Figura 5.10;

en la gráfica superior para el caso de  $h_c$ , mientras que en la inferior para  $T_c$ .

Tabla 5.14: Parámetros de controladores descentralizados sintonizados con PSO.

Controlador	$K_p$	$K_i$	$\lambda$	$K_d$	$\mu$	
$C_{11}$	PI	500.90	1.99E-07	1	0	1
	PID	1427.30	5.04E-04	1	9.30	1
	PIOF	272.28	4.25E-02	0.97	0	1
	PIDOF	212.21	1.60E-01	0.78	4.52	0.19
$C_{22}$	PI	5697.80	3.44E-03	1	0	1
	PID	5009.40	2.77E-04	1	4.09	1
	PIOF	3678.20	4.11E-04	0.86	0	1
	PIDOF	5491.10	3.24E-03	0.77	1.99	0.06

La metodología a emplear para la sintonización es la misma que la desarrollada para el caso SISO en la Sección 4.3; se procede a someter a todo el universo de partículas a simulación, en una implementación según lo ilustrado en la Figura 5.1 y considerando condiciones iniciales dadas por  $x_0 = [40 \ 40 \ 40]^\dagger$ , a lo largo de todas las generaciones para buscar la combinación de parámetros que minimicen el índice  $J$ . Para los casos de esquema de control descentralizado se asume  $C_{12} = C_{21} = 0$ , mientras que para los casos centralizados se incluyen al proceso de optimización; todo esto se lleva a cabo mediante el uso de la toolbox citada en [60].

Tabla 5.15: Parámetros de controladores centralizados sintonizados con PSO.

Controlador	$K_p$	$K_i$	$\lambda$	$K_d$	$\mu$	
$C_{11}$	PI	843.91	3.29E-01	1	0	1
	PID	546.09	2.73E-05	1	0.73	1
	PIOF	113.50	1.23E-01	0.83	0	1
	PIDOF	240.03	3.25	0.95	4.29	0.02
$C_{12}$	PI	3.14	-7.17E-03	1	0	1
	PID	0.57	-2.58E-03	1	0.96	1
	PIOF	3.48	1.70E-06	0.81	0	1
	PIDOF	2.91	7.21E-02	0.82	17.74	0.18
$C_{21}$	PI	3.19	6.49E-01	1	0	1
	PID	2.88	3.18E-01	1	-0.60	1
	PIOF	2.34	1.12	0.90	0	1
	PIDOF	0.82	1.45	0.87	3.48	0.17
$C_{22}$	PI	2931.30	4.03E-04	1	0	1
	PID	4755.70	3.90E-04	1	8.48	1
	PIOF	2935.70	1.99E-03	0.81	0	1
	PIDOF	2642.00	7.52E-07	0.82	2.92	0.05

Resultante del proceso de optimización, bajo las condiciones planteadas a lo largo de la presente sección, se obtienen los parámetros de controladores mostrados en las Tablas 5.14 y 5.15, la primera presenta los valores asociados a esquemas de control descentralizado, mientras que la segunda lo hace para los casos centralizados. Además, a raíz del proceso de minimización de la función objetivo  $J$ , se compara el comportamiento de todos los controladores en cuanto a

este ítem en la Tabla 5.16. Evidencia de la convergencia de las partículas durante el desarrollo del algoritmo, se presenta en las Figuras D.4 y D.5 de la Sección D.4 de Anexos.

Tabla 5.16: Índices de desempeño resultantes de optimización PSO MIMO.

Esquema	Controlador	$IAE(h_c)$	$IAE(T_c)$	$J$
Descentralizado	PI	1.54	6.02	7.56
	PID	1.31	6.03	7.34
	PIOF	1.80	6.06	7.86
	PIDOF	1.83	6.02	7.84
Centralizado	PI	1.78	6.14	7.92
	PID	1.39	6.15	7.54
	PIOF	1.90	5.95	7.85
	PIDOF	2.40	6.03	8.43

En primera aproximación, a partir del análisis de los datos presentados en la Tabla 5.16, se puede desprender que no existe una tendencia clara respecto a qué esquema de control obtiene mejores resultados. Sin embargo, de forma global, el mejor resultado en cuanto al índice  $J$  se obtiene para el controlador PID descentralizado; a su vez, el mismo controlador es el que entrega un mejor índice para el control del subsistema de nivel, no así para el de temperatura, donde el controlador que se destaca corresponde al PIOF centralizado.

Para poner a prueba los controladores sintonizados mediante el algoritmo de optimización PSO, se somete cada esquema a simulación, considerando las referencias definidas para las Pruebas 1 y 2, señaladas en la Tablas 5.7 y 5.8; dependiendo cada caso se asumen las estructuras de controladores centralizados y descentralizados según corresponda, y se define una temperatura ambiente constante  $T_A = 20$  [°C].

A raíz de las simulaciones, se obtienen resultados que se proceden a ilustrar tanto gráfica como numéricamente. La Figura 5.11 muestra el comportamiento de las variables asociadas al subsistema de nivel como resultado de la Prueba 1, al utilizar los controladores de esquema descentralizado: la gráfica superior muestra la evolución dinámica de la salida  $h_c$ , mientras que la inferior la de la acción de control asociada  $f$ ; por otra parte, la Figura 5.12 muestra el resultado de control del subsistema de temperatura: la gráfica superior ilustra el comportamiento de la salida  $T_c$ , y la inferior la acción de control  $q_{in}$ .

Respecto a los controladores de esquema centralizado en la Prueba 1, las Figuras 5.13 y 5.14 muestran la situación obtenida: en cada caso, las gráficas superiores contienen el comportamiento de las salidas del sistema,  $h_c$  y  $T_c$ , mientras que en las inferiores se señalan las acciones de control asociadas,  $f$  y  $q_{in}$ , respectivamente.

Para una comparación exhaustiva de cada caso de control, se definen índices de desempeño asociados a cada resultado; la Tabla 5.17 muestra índices asociados al comportamiento global de los controladores determinados mediante PSO, donde se incluye la evaluación de la función objetivo  $J$  del proceso de optimización para comparación, mientras que el comportamiento de respuesta transitoria en cada caso se estudia a partir de lo mostrado en la Tabla 5.18, cuyo detalle puede ser consultado en las Tablas D.3 y D.4 de la Sección D.4 de Anexos.

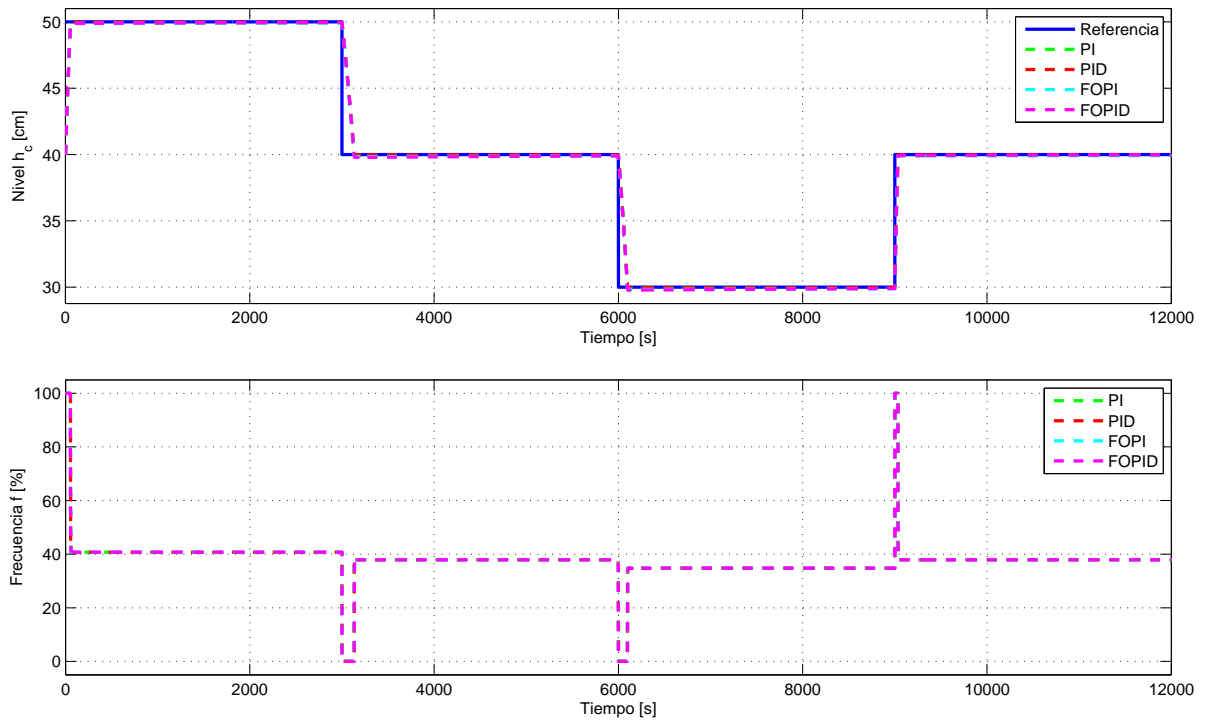


Figura 5.11: Resultados en simulación de control MIMO  $h_c$  sintonizado con PSO descentralizado - Prueba 1.

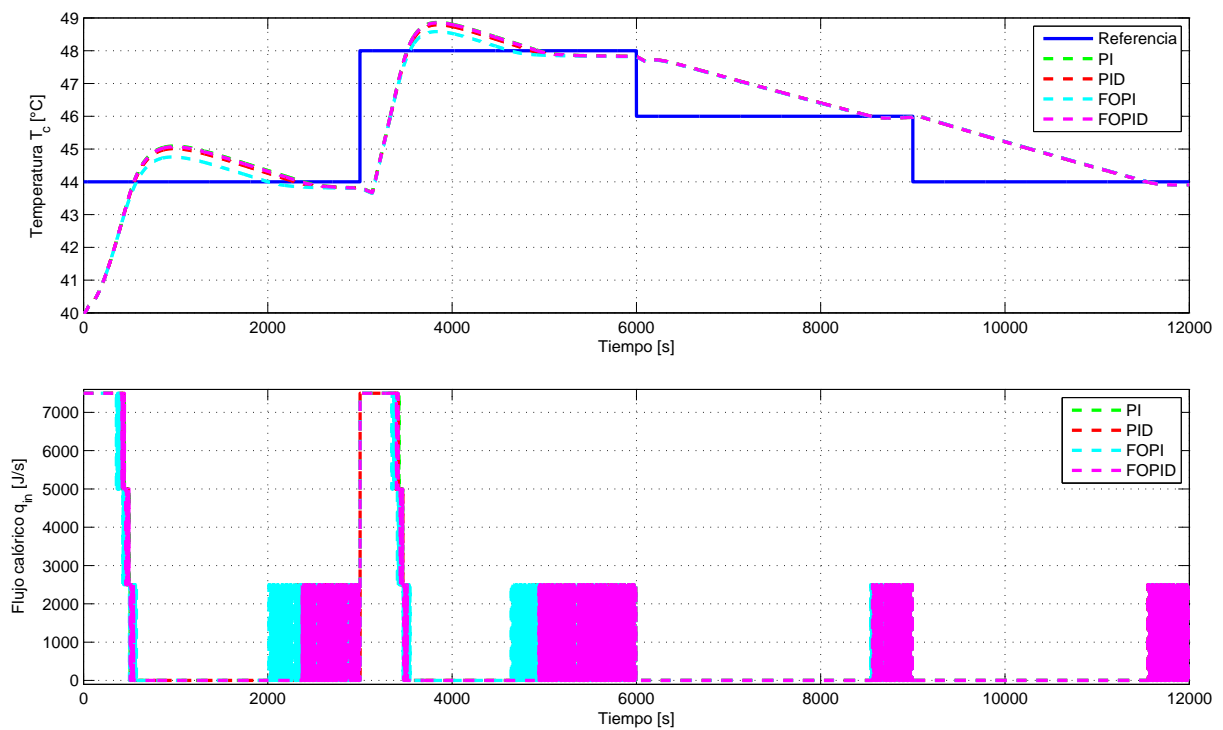


Figura 5.12: Resultados en simulación de control MIMO  $T_c$  sintonizado con PSO descentralizado - Prueba 1.



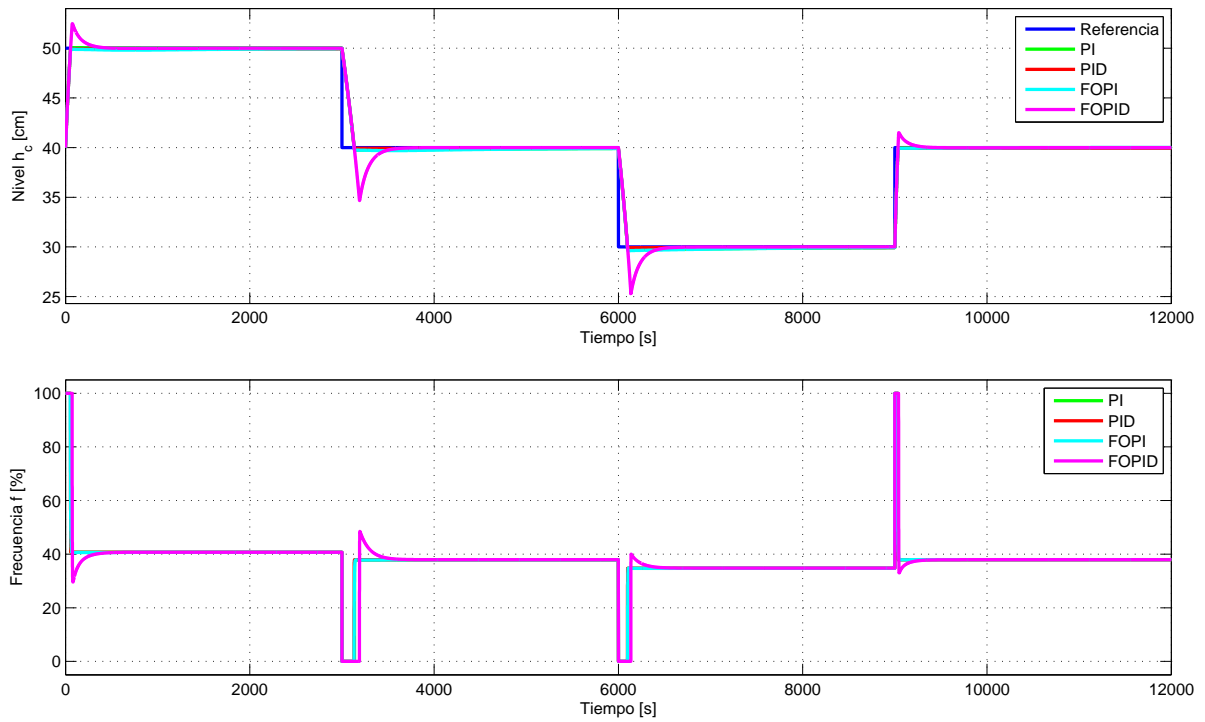


Figura 5.13: Resultados en simulación de control MIMO  $h_c$  sintonizado con PSO centralizado - Prueba 1.

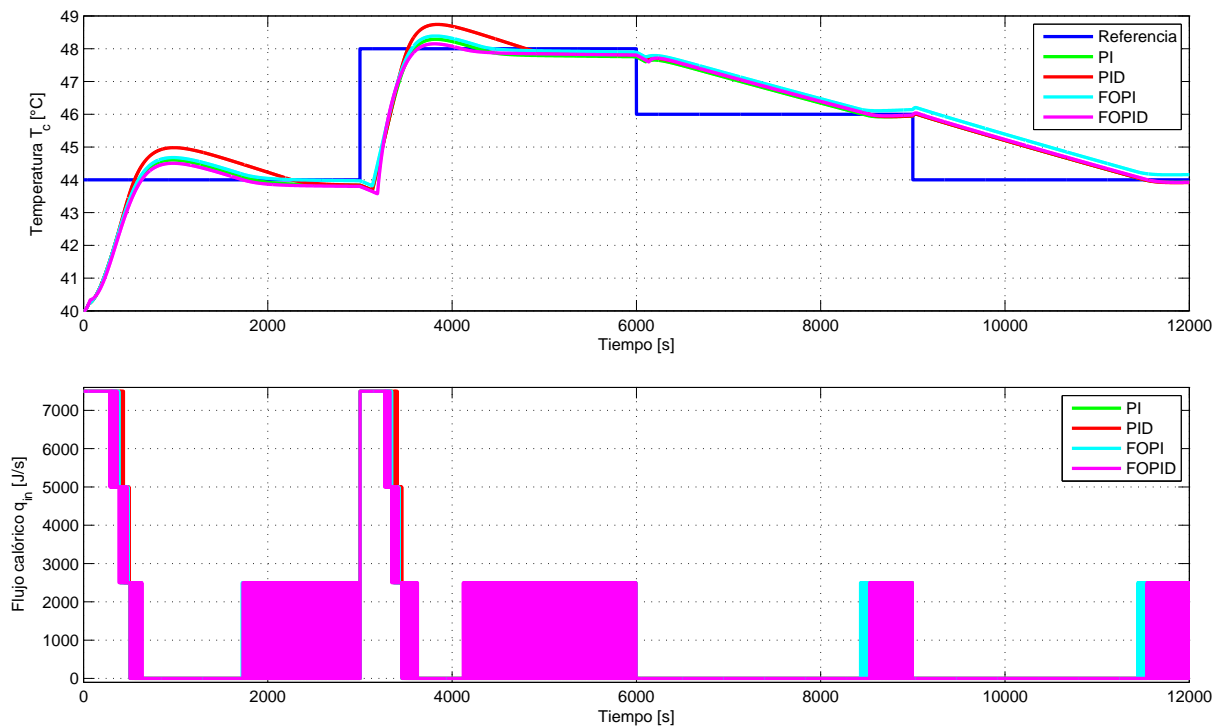


Figura 5.14: Resultados en simulación de control MIMO  $T_c$  sintonizado con PSO centralizado - Prueba 1.

Tabla 5.17: Índices de desempeño global para controladores sintonizados con PSO MIMO - Prueba 1.

Esquema	Controlador	$IAE(h_c)$	$IAE(T_c)$	$J$	$ISI(f)$	$ISI(q_{in})$
Descentralizado	PI	2.50E+03	9.86E+03	1.24E+04	1.77E+07	5.29E+10
	PID	1.94E+03	9.67E+03	1.16E+04	1.77E+07	5.22E+10
	PIOF	2.92E+03	9.14E+03	1.21E+04	1.76E+07	4.96E+10
	PIDOF	2.93E+03	9.81E+03	1.27E+04	1.76E+07	5.27E+10
Centralizado	PI	2.66E+03	8.64E+03	1.13E+04	1.77E+07	4.69E+10
	PID	2.41E+03	9.48E+03	1.19E+04	1.77E+07	5.17E+10
	PIOF	3.13E+03	9.27E+03	1.24E+04	1.76E+07	4.74E+10
	PIDOF	3.30E+03	8.69E+03	1.20E+04	1.78E+07	4.54E+10

A modo de interpretación de los resultados obtenidos para la Prueba 1, se pueden hacer ciertas afirmaciones; de partida, todos los esquema de control muestran una mejora sustancial respecto a los resultados obtenidos en la Sección 5.3 de sintonización en frecuencia, esto va en línea con lo obtenido en la Sección 4.3 de sintonización de controladores para el problema SISO mediante la aplicación de PSO: se igualan en gran medida los resultados para el subsistema de nivel, pero, además, se obtienen resultados satisfactorios en cuanto a control de temperatura. Con esto, se pueden reafirmar las ventajas que presenta un proceso de sintonización de parámetros mediante PSO, si bien la sintonización en frecuencia también conlleva un proceso de optimización, lo hace considerando aproximaciones del sistema a través de linealizaciones en torno a puntos de operación; sin embargo, la aplicación de la técnica PSO permite sintonizar los controladores directamente con el modelo no lineal desarrollado para el sistema, lo que, contrastando resultados, presenta una ventaja sustancial a la hora de definir el valor numérico de los parámetros que definen a las diferentes estrategias de control. De forma gráfica, se puede observar que las salidas del sistema presentan un cierto comportamiento con error en estado estacionario; sin embargo, este no es tal, sino que la situación corresponde a una convergencia lenta sobre el valor de referencia debido a la pequeña magnitud de las ganancias integrales que resultan del procedimiento de optimización, situación idéntica a la comentada para los resultados mostrados en la Sección 4.3 de control SISO. Al simular los distintos escalones de referencia con un horizonte de tiempo mayor, se constata la evidencia de convergencia: las salidas del sistema se acercan lentamente llevando el error de control a cero.

Ahora bien, respecto a los resultados individuales que cada controlador presenta, en función de los índices presentados en las Tablas 5.17 y 5.18, se puede señalar que, en cuanto al subsistema de nivel, el mejor controlador es el PID descentralizado, ya que minimiza los índices  $IAE(h_c)$  y  $MOV(h_c)$ , y tiene un comportamiento aceptable en cuanto a la energía de control asociada  $ISI(f)$ . Por otra parte, el controlador PI centralizado posee el mejor comportamiento de  $IAE(T_c)$ , pero tiene el peor resultado de error en estado estacionario  $E_{ss}(T_c)$ , por esto no es considerado el mejor para el control de temperatura; sin embargo, el controlador PIDOF centralizado minimiza el sobrepaso  $MOV(T_c)$ , la energía de control  $ISI(q_{in})$  y tiene un comportamiento bueno en cuanto a  $IAE(T_c)$  (siendo el segundo mejor de todas las soluciones), por lo que se puede considerar como el mejor controlador en lo que al subsistema de temperatura refiere, pero todo esto a costas de un pobre desempeño para el subsistema de nivel, ya que es el que peor resultado tiene de los índices  $IAE(h_c)$ ,  $ISI(f)$  y  $MOV(h_c)$ , asociados al control de

Tabla 5.18: Índices de desempeño de respuesta transitoria para controladores sintonizados con PSO MIMO - Prueba 1.

Salida	Esquema	Controlador	$MOV$	$E_{ss}$	$t_d$	$t_r$	$t_p$	$t_s$
$h_c$	Descentralizado	PI	1.45	0.30	162.75	6230.80	6250.60	305.10
		PID	0.51	0.11	164.00	6232.10	6255.55	306.40
		PIOF	3.26	0.37	162.55	6230.45	6244.45	304.90
		PIDOF	4.51	0.30	162.95	6230.80	6256.95	305.30
$h_c$	Centralizado	PI	6.03	0.19	164.00	1949.10	2862.35	306.40
		PID	1.49	0.26	162.75	6230.85	6746.50	305.10
		PIOF	7.07	0.22	163.00	5147.45	6255.85	305.50
		PIDOF	140.24	0.01	164.70	322.70	444.70	1152.00
$T_c$	Descentralizado	PI	56.16	0.46	3162.65	6148.30	7461.70	8716.15
		PID	51.95	0.47	3168.60	6163.65	7456.75	8546.35
		PIOF	40.50	0.49	3163.65	6206.45	7420.95	8015.00
		PIDOF	55.35	0.47	3161.45	6149.25	7468.35	8674.00
$T_c$	Centralizado	PI	30.06	0.52	3051.60	6174.80	7325.45	9322.35
		PID	50.99	0.48	3125.40	6127.55	7428.70	8411.10
		PIOF	26.78	0.44	3452.70	7156.10	7791.40	8860.75
		PIDOF	22.58	0.49	3152.60	6342.75	7377.50	8374.45

nivel.

Para el control de temperatura, el peor resultado obtenido es por parte del controlador PI descentralizado, ya que tiene los menores índices  $IAE(h_c)$ ,  $ISI(f)$  y  $MOV(h_c)$ ; sin embargo, tiene un comportamiento aceptable de control de nivel. Considerando la función objetivo  $J$  del proceso de optimización, los resultados cambian en comparación a lo mostrado en la Tabla 5.16, ya que en el caso de la Prueba 1 el mejor comportamiento se tiene por parte del controlador PI centralizado, mientras que el peor resulta ser el caso PIDOF descentralizado. No obstante, el índice  $J$ , si bien una buena función objetivo para la optimización según los resultados obtenidos, no es un buen cuantificador del comportamiento global de un esquema de control, puesto que deja afuera del criterio información respecto a la energía de control del proceso y la respuesta transitoria del sistema.

Con base en lo analizado, se puede desprender una cierta tendencia de los controladores: los esquemas centralizados mejoran el comportamiento de la respuesta transitoria del subsistema de temperatura respecto a los mismos esquemas descentralizados (entiéndase comparación entre PI centralizado y PI descentralizado, y así cada caso), pero empeoran el comportamiento del subsistema de nivel. Esto se puede entender bajo la lógica de que los esquemas centralizados toman información de la evolución de la temperatura para definir una acción de control de frecuencia, y viceversa; luego, en función de obtener un menor índice  $J$  en la sintonización, se determinan parámetros que sacrifiquen optimalidad en el comportamiento de  $h_c$  para entregar mejores resultados de control de  $T_c$ . En otras palabras, los esquemas centralizados manejan de mejor forma el “trade-off” entre los subsistemas de la planta debido al acoplamiento de las variables.

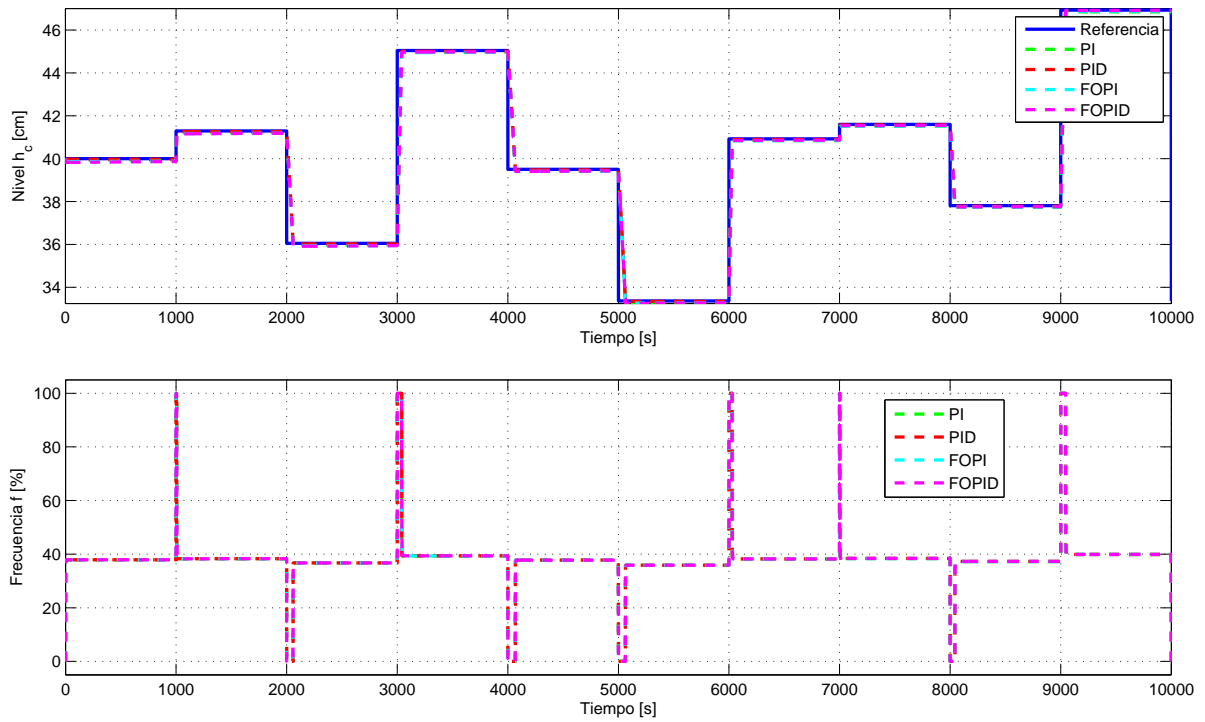


Figura 5.15: Resultados en simulación de control MIMO  $h_c$  sintonizado con PSO descentralizado - Prueba 2.

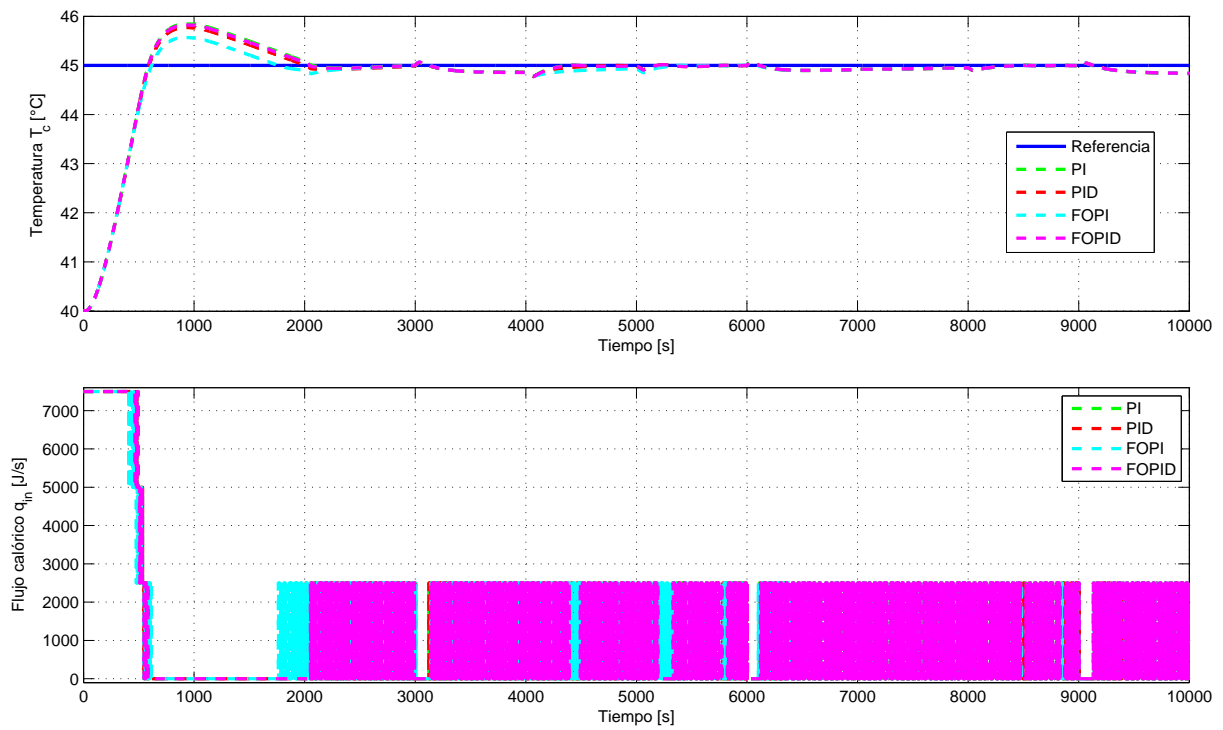


Figura 5.16: Resultados en simulación de control MIMO  $T_c$  sintonizado con PSO descentralizado - Prueba 2.

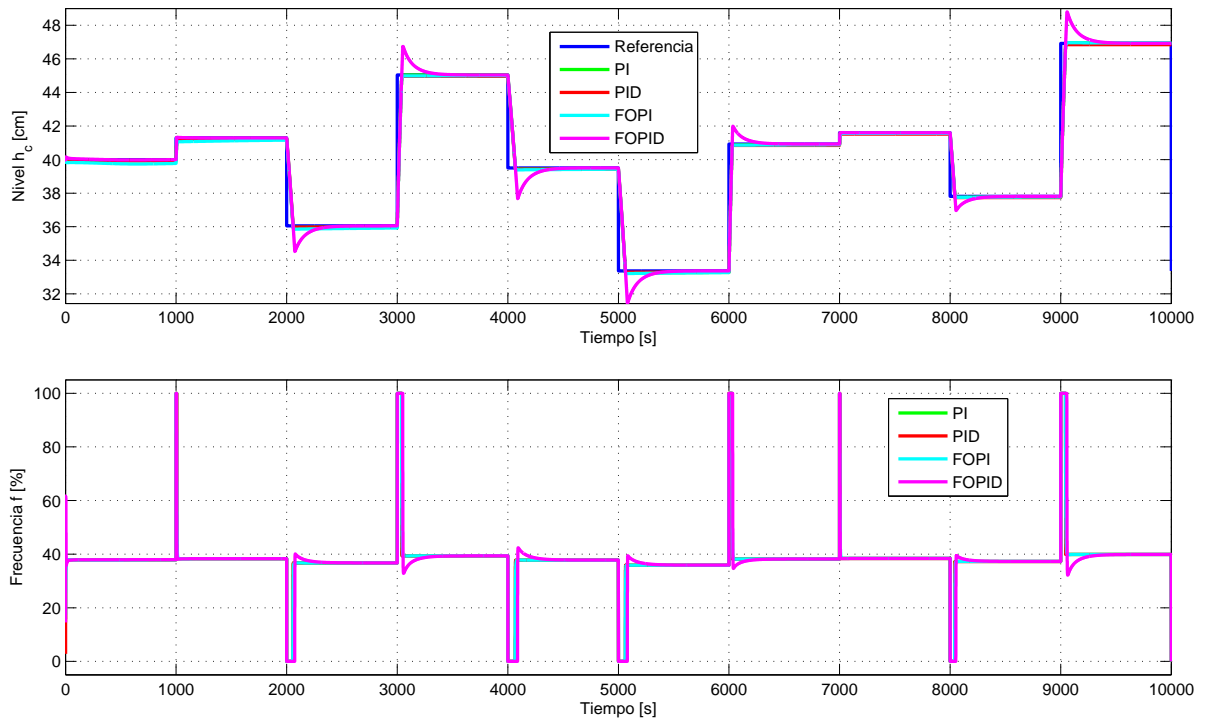


Figura 5.17: Resultados en simulación de control MIMO  $h_c$  sintonizado con PSO centralizado - Prueba 2.

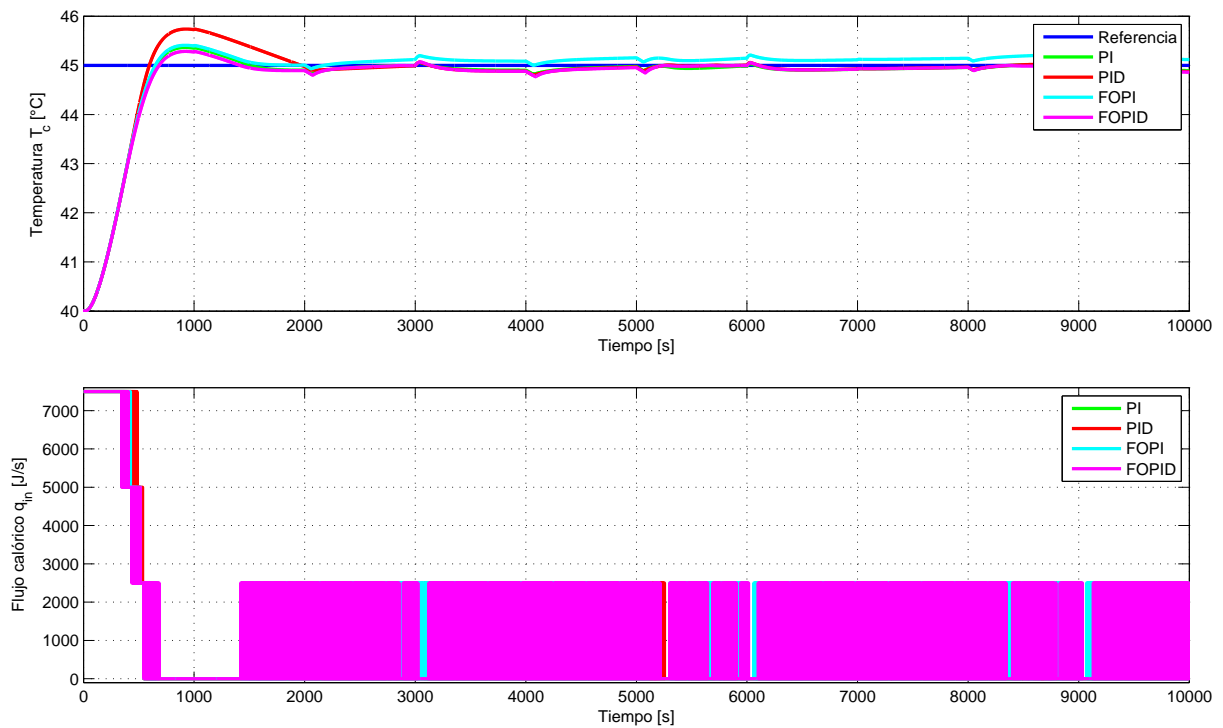


Figura 5.18: Resultados en simulación de control MIMO  $T_c$  sintonizado con PSO centralizado - Prueba 2.

Respecto a la aplicación en simulación de los controladores frente a la Prueba 2, se obtienen

Tabla 5.19: Índices de desempeño global para controladores sintonizados con PSO MIMO - Prueba 2.

Esquema	Controlador	$IAE(h_c)$	$IAE(T_c)$	$J$	$ISI(f)$	$ISI(q_{in})$
Descentralizado	PI	1.83E+03	2.96E+03	4.78E+03	1.51E+07	3.75E+10
	PID	1.36E+03	2.89E+03	4.25E+03	1.52E+07	3.71E+10
	PIOF	1.99E+03	2.74E+03	4.72E+03	1.51E+07	3.58E+10
	PIDOF	1.91E+03	2.93E+03	4.84E+03	1.51E+07	3.73E+10
Centralizado	PI	1.55E+03	2.45E+03	4.00E+03	1.52E+07	3.47E+10
	PID	1.83E+03	2.81E+03	4.64E+03	1.51E+07	3.70E+10
	PIOF	2.06E+03	2.99E+03	5.05E+03	1.51E+07	3.52E+10
	PIDOF	2.23E+03	2.47E+03	4.70E+03	1.53E+07	3.40E+10

los resultados gráficos mostrados en las Figuras 5.15 y 5.16, para el caso de los esquemas descentralizados, y las Figuras 5.17 y 5.18 para el caso de los esquemas centralizados; en las gráficas superiores se muestran las salidas del sistema, mientras que en las inferiores las acciones de control asociadas, es decir,  $h_c$  y  $f$ , y  $T_c$  y  $q_{in}$  para cada figura, respectivamente. En cuanto a la verificación numérica de los resultados, se introducen índices de desempeño: la Tabla 5.19 muestra los asociados al comportamiento global del sistema, mientras que la Tabla 5.20 a los que definen la respuesta transitoria de cada salida.

A modo de análisis de los resultados en la Prueba 2, que buscan medir el comportamiento de los controladores cuando los cambios del nivel  $h_c$  actúan a modo de perturbación sobre el subsistema de temperatura debido al acoplamiento del sistema, se pueden definir ciertas conclusiones; primeramente, se corrobora lo establecido en la Prueba 1 respecto al proceso de sintonización PSO, ya que se obtienen resultados claramente mejores que lo devenido en la sintonización en frecuencia, al contrastar gráficamente las soluciones de control entregadas por cada controlador en ambos casos.

En general, salvo por el caso del controlador PIOF, los esquemas centralizados mejoran el comportamiento del control de temperatura  $T_c$  frente a sus pares descentralizados. Esto confirma la hipótesis respecto al procesamiento de la información en los esquemas centralizados, que permiten un mejor manejo de la variable de nivel  $h_c$  en cuanto a definir una mejor respuesta de la salida temperatura, es decir, son susceptibles de aprovechar el “trade-off” por acoplamiento entre los estados del sistema.

Ahora bien, al realizar un análisis comparativo entre los resultados que cada controlador muestra para la Prueba 2, se pueden realizar ciertas acotaciones; respecto al mejor resultado de control, se tiene que el controlador PI centralizado muestra un buen comportamiento para la salida  $T_c$ , ya que minimiza el índice  $IAE(T_c)$ , además, posee un comportamiento aceptable para la salida  $h_c$ , por lo que resulta ser el de mejor índice  $J$ . Por otra parte, el mejor comportamiento transitorio de control de temperatura se da por parte del controlador PIDOF centralizado, ya que minimiza el sobrepaso  $MOV(T_c)$ ; además, y a consecuencia del menor sobrepaso, es el que menor energía de control  $ISI(q_{in})$  gasta en el proceso, y es el segundo mejor desempeño en cuanto a  $IAE(T_c)$ . No obstante lo anterior, el mencionado controlador posee el peor desempeño para los indicadores de control de nivel  $h_c$ , puesto que es el máximo en los índices  $IAE(h_c)$ ,  $ISI(h_c)$  y  $MOV(h_c)$ .

Tabla 5.20: Índices de desempeño de respuesta transitoria para controladores sintonizados con PSO MIMO - Prueba 2.

Salida	Esquema	Controlador	$MOV$	$E_{ss}$	$t_d$	$t_r$	$t_p$	$t_s$
$h_c$	Descentralizado	PI	5.89	0.68	175.75	5230.65	5272.95	2328.25
		PID	2.07	0.24	177.10	5233.00	5279.70	339.25
		PIOF	7.98	0.74	175.60	5230.10	5259.20	2327.95
		PIDOF	8.02	0.60	176.30	5231.10	5292.10	2328.70
$h_c$	Centralizado	PI	6.80	0.35	177.80	3319.90	3467.15	366.55
		PID	5.91	0.68	175.80	5230.65	8275.40	2328.35
		PIOF	10.63	0.60	177.30	4282.10	4338.80	1779.95
		PIDOF	174.27	0.01	178.00	361.50	469.55	1462.05
$T_c$	Descentralizado	PI	16.96	0.16	352.10	586.70	1006.20	1797.75
		PID	15.45	0.16	352.35	592.90	1005.95	1706.05
		PIOF	11.39	0.16	351.80	615.45	921.20	1452.60
		PIDOF	16.49	0.16	351.65	587.55	1006.65	1768.95
$T_c$	Centralizado	PI	7.32	0.11	352.35	656.50	919.45	1189.95
		PID	14.81	0.12	352.15	595.20	928.75	1666.60
		PIOF	8.20	0.12	351.80	648.80	921.50	9106.60
		PIDOF	5.72	0.14	352.90	683.55	923.95	1072.00

Pues bien, en términos prácticos, si se desea encontrar el mejor desempeño para controlar temperatura, cuando la variable nivel actúa como una perturbación y su control no es de alta preponderancia para el proceso, la mejor opción entre los esquemas de control sintonizados con optimización PSO, es el esquema PIDOF centralizado.

Hasta el momento, se ha considerado el análisis basado en los indicadores individuales presentados en las Tablas 5.17 y 5.18, para la Prueba 1, y las Tablas 5.19 y 5.20, para la Prueba 2. Sin embargo, cada uno por sí solo no resultan ser indicadores completamente válidos para analizar el comportamiento del control de un sistema, más aún si este es de tipo multivariable; si se considera el índice  $J$  del proceso de optimización, se deja fuera del estudio la energía de control  $ISI$  y la respuesta transitoria del sistema, lo que ocurre en cada caso de análisis individual.

Para reconsiderar esta situación, se propone generar índices que involucren más aspectos del sistema; en particular, se proponen el conjunto de índices dados por

$$I_1 = I\bar{A}E(h_c) + I\bar{S}I(h_c) + MOV(h_c), \quad (5.11)$$

$$I_2 = I\bar{A}E(T_c) + I\bar{S}I(T_c) + MOV(T_c), \quad (5.12)$$

$$I_3 = I_1 + I_2; \quad (5.13)$$

donde  $I\bar{A}E$  e  $I\bar{S}I$  hacen mención a los índices  $IAE$  e  $ISI$ , pero normalizados en cuanto a magnitud, de forma que numéricamente se reducen a la unidad<sup>2</sup>. Con esto, se reúnen los tres grandes aspectos a considerar en un sistema de control en un indicador: respuesta global de control  $IAE$ , energía de control asociada  $ISI$  y respuesta transitoria del sistema a través de

<sup>2</sup>Para lo presentado en las Tablas 5.17 y 5.19, esto se entiende como dividir el índice  $IAE$  en  $10^3$ , el índice  $ISI(f)$  en  $10^7$  y el índice  $ISI(q_{in})$  en  $10^{10}$ .

$MOV^3$ . En este caso, el índice  $I_1$  engloba el comportamiento de la salida  $h_c$  e  $I_2$  de la salida  $T_c$ , mientras que  $I_3$  da cuenta de todo el proceso del sistema multivariable.

Tabla 5.21: Índices de desempeño propuestos para controladores sintonizados con PSO MIMO.

Prueba	Esquema	Controlador	$I_1$	$I_2$	$I_3$
1	Descentralizado	PI	5.71	71.31	77.03
		PID	4.22	66.85	71.07
		PIOF	7.94	54.60	62.54
		PIDOF	9.21	70.43	79.64
1	Centralizado	PI	10.46	43.38	53.84
		PID	5.66	65.64	71.30
		PIOF	11.96	40.80	52.76
		PIDOF	145.31	35.81	181.12
2	Descentralizado	PI	9.23	23.66	32.90
		PID	4.95	22.05	27.00
		PIOF	11.48	17.71	29.19
		PIDOF	11.44	23.15	34.59
2	Centralizado	PI	9.87	13.24	23.11
		PID	9.24	21.32	30.56
		PIOF	14.21	14.71	28.92
		PIDOF	178.03	11.59	189.62

El resultado de determinar los índices propuestos se detalla en la Tabla 5.21; para la Prueba 1, que busca verificar el comportamiento del sistema antes una situación de control típica donde ambas salidas varían, se puede ver que el mejor comportamiento total lo tiene el controlador PIOF centralizado, ya que es el de menor índice  $I_3$ . Por parte de la Prueba 2, se observa que el mejor índice  $I_3$  lo tiene el controlador PI centralizado, seguido muy de cerca por el PIOF centralizado; sin embargo, el cuantificador que mejor representa el sentido de esta prueba, donde se busca medir el comportamiento del control de temperatura con  $h_c$  como perturbación debido al acoplamiento, es  $I_2$ , el cual presenta sus mejores resultados a través de la utilización del controlador PIDOF centralizado.

## 5.5. Resultados Experimentales

Para validar los resultados determinados a través de simulaciones, se someten los controladores a pruebas experimentales para analizar el comportamiento del sistema real. Particularmente, se prueban los controladores determinados a través de optimización PSO, tanto en sus versiones descentralizadas como centralizadas, ya que estos son lo que presentan un resultado de control satisfactorio. Por otra parte, se someten a la Prueba 1, ya que ésta estudia el comportamiento de una situación real de control que pudiese darse en la industria.

<sup>3</sup>Se excluyen del estudio los tiempos de respuesta, ya que no presentan grandes diferencias entre sí para cada caso.



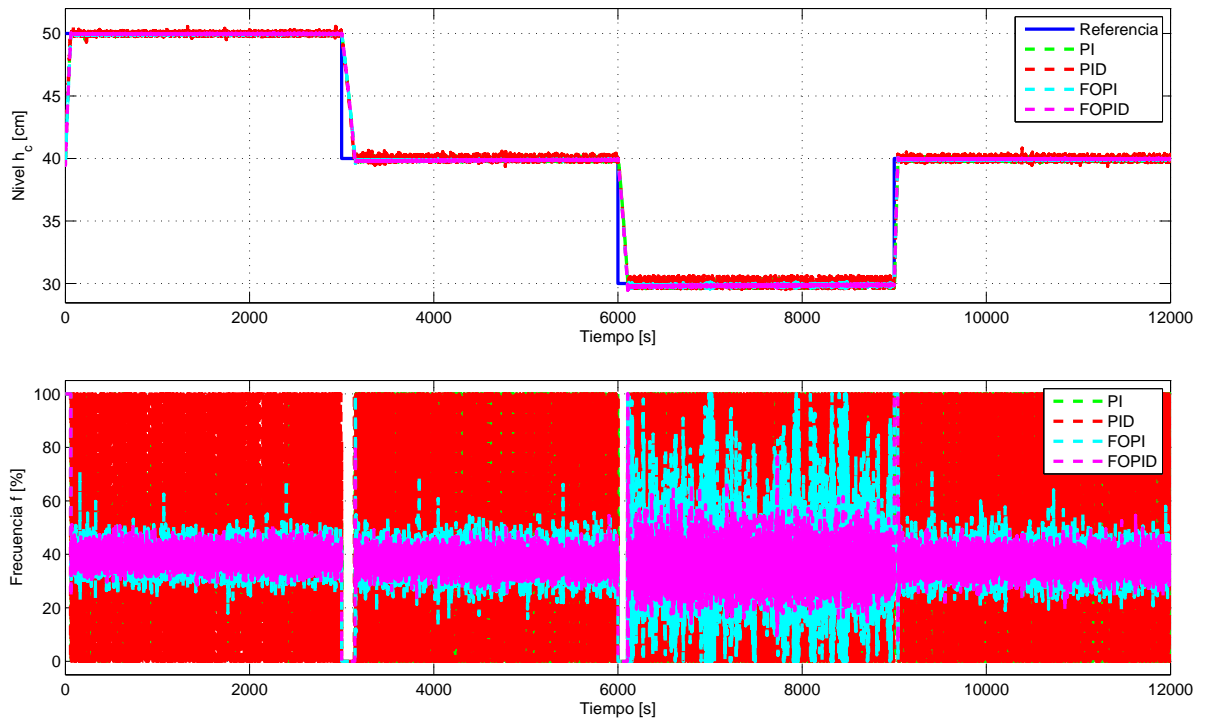


Figura 5.19: Resultados experimentales de control MIMO  $h_c$  sintonizado con PSO descentralizado - Prueba 1.

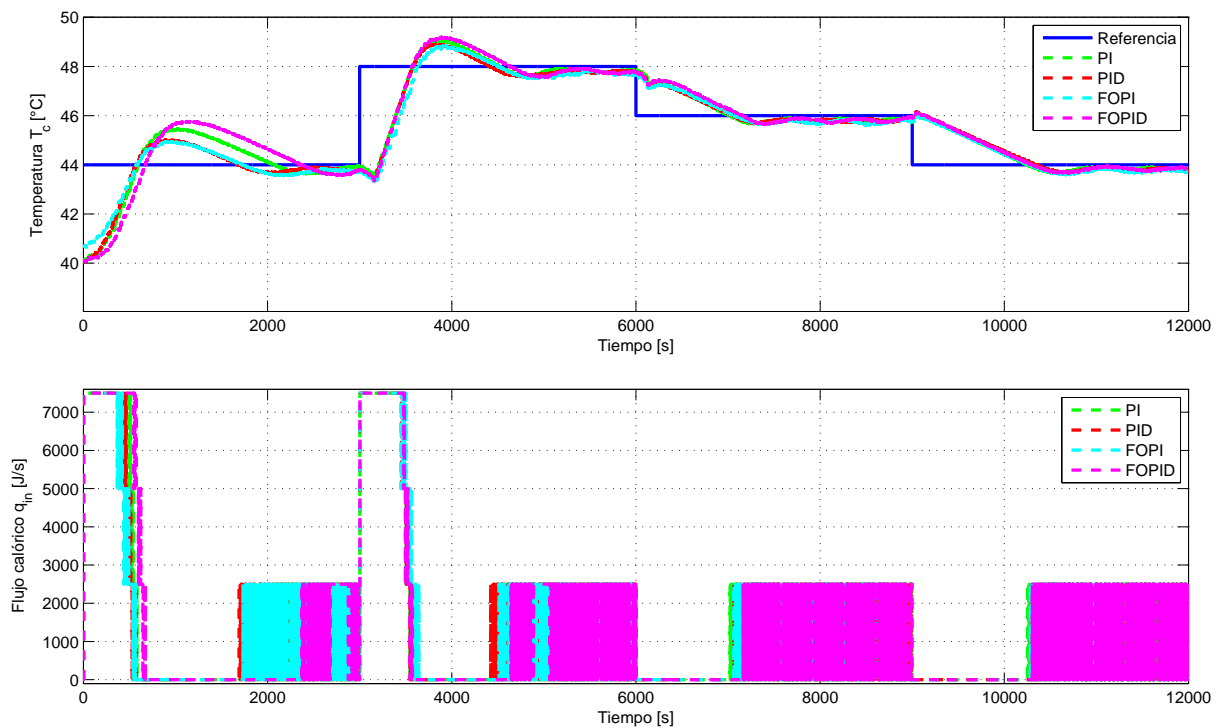


Figura 5.20: Resultados experimentales de control MIMO  $T_c$  sintonizado con PSO descentralizado - Prueba 1.

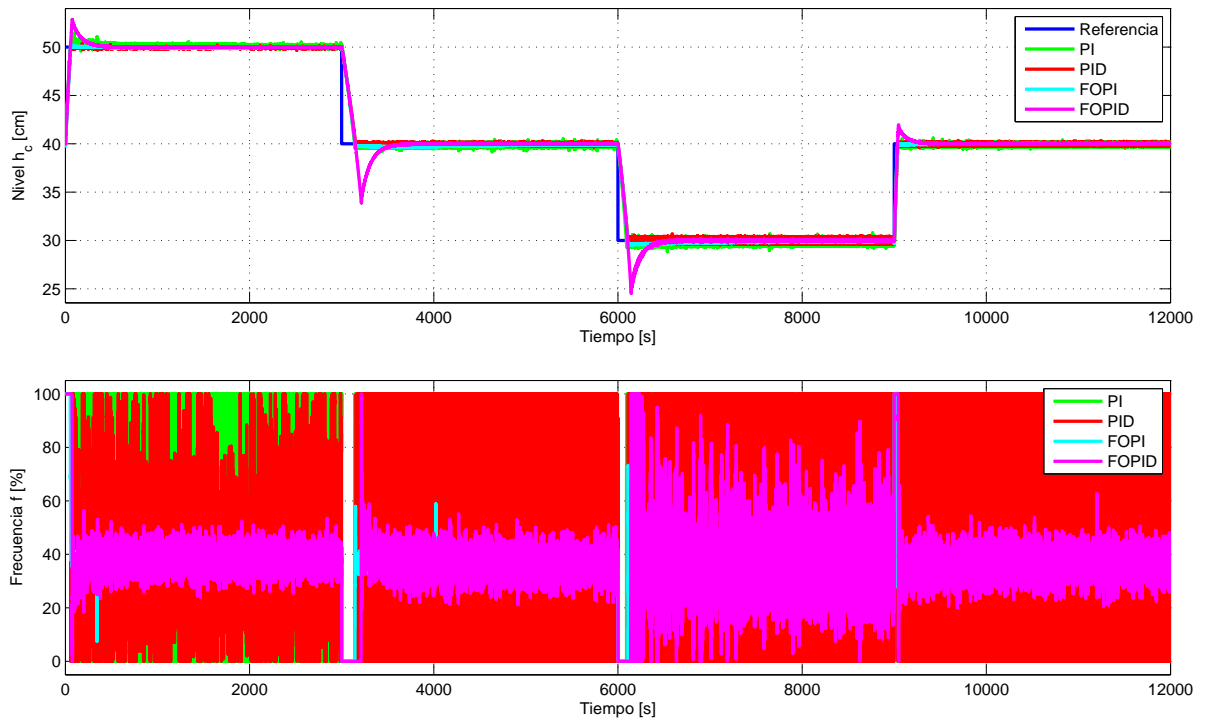


Figura 5.21: Resultados experimentales de control MIMO  $h_c$  sintonizado con PSO centralizado - Prueba 1.

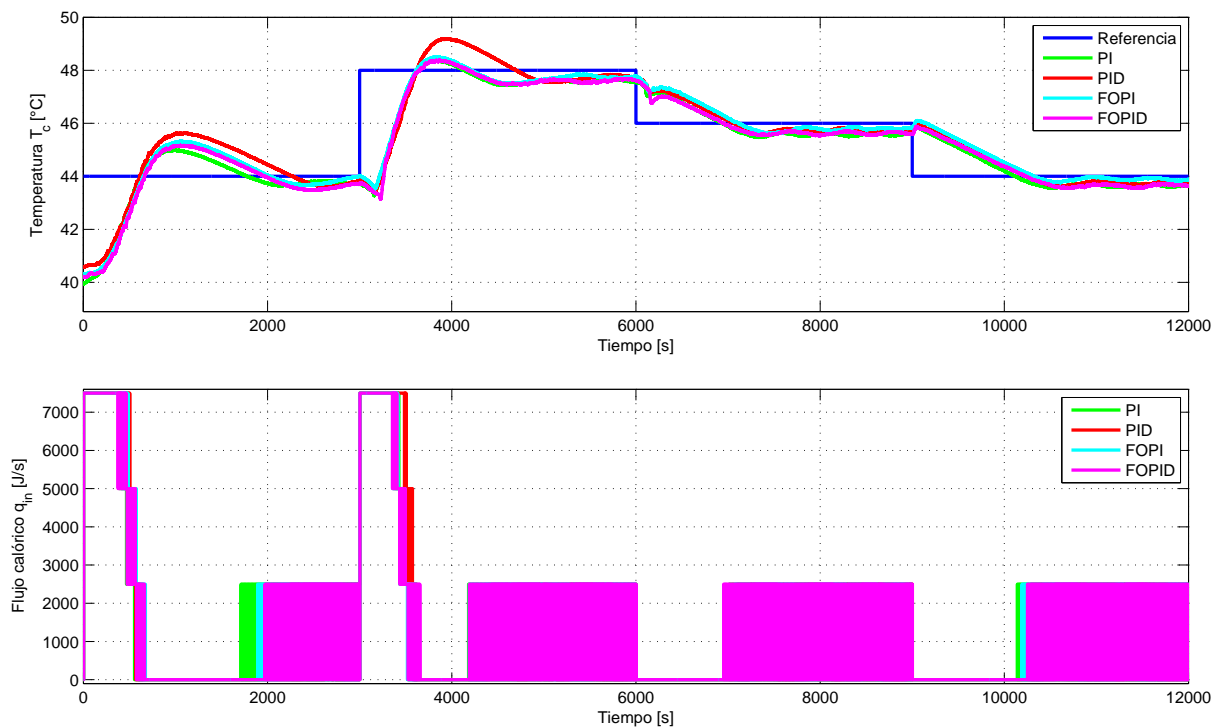


Figura 5.22: Resultados experimentales de control MIMO  $T_c$  sintonizado con PSO centralizado - Prueba 1.

Los resultados son presentados de forma gráfica en las Figuras 5.19 y 5.20, para los esquemas descentralizados, y en las Figuras 5.21 y 5.22, para los esquemas centralizados. Su presentación sigue la misma lógica que las figuras anteriores: en las gráficas superiores se muestran las evoluciones de las salidas del sistema, mientras que en las inferiores las correspondientes acciones de control.

Dado que el proceso experimental se encuentra sometido a perturbaciones de medición, se observan señales ruidosas; el caso más notorio es el sensor de presión que mide nivel, ya que a partir de las vibraciones de la estructura y las fluctuaciones de la superficie del agua, se presentan muestras perturbadas. Lo anterior trae por consecuencia que las acciones de control  $f$  sean también ruidosas, porque la predominancia de una acción proporcional alta en cada uno de los controladores amplifica las perturbaciones. En el caso del subsistema de temperatura no se observa tal condición, ya que el sensor PT100 no se ve afectado por perturbaciones en su medición a causa de las vibraciones o las fluctuaciones del nivel.

Tabla 5.22: Índices de desempeño global para controladores sintonizados con PSO MIMO - Prueba 1 Experimental.

Esquema	Controlador	$IAE(h_c)$	$IAE(T_c)$	$J$	$ISI(f)$	$ISI(q_{in})$
Descentralizado	PI	3.40E+03	8.86E+03	1.23E+04	3.32E+07	7.52E+10
	PID	4.14E+03	8.53E+03	1.27E+04	4.46E+07	7.09E+10
	PIOF	3.12E+03	8.91E+03	1.20E+04	1.97E+07	7.22E+10
	PIDOF	3.02E+03	1.01E+04	1.31E+04	1.89E+07	7.84E+10
Centralizado	PI	4.36E+03	8.74E+03	1.31E+04	4.36E+07	6.78E+10
	PID	3.51E+03	9.98E+03	1.35E+04	3.43E+07	7.36E+10
	PIOF	3.31E+03	8.83E+03	1.21E+04	1.75E+07	7.04E+10
	PIDOF	3.81E+03	9.24E+03	1.30E+04	1.86E+07	6.56E+10

En cuanto a la cuantificación de los resultados obtenidos, se introducen índices que permitan discriminar el comportamiento de los controladores; la Tabla 5.22 muestra los índices asociados al comportamiento global del sistema, incluyendo la función objetivo del proceso de optimización PSO desarrollado en este capítulo. Por otra parte, la Tabla 5.23 muestra los indicadores de comportamiento de respuesta transitoria del sistema, los que se detallan a partir de las Tablas D.5 y D.6 de la Sección D.5 de Anexos.

Antes de cualquier análisis es necesario destacar que las pruebas experimentales se realizan con el fin de validar los resultados determinados experimentalmente; sin embargo, se deben mencionar ciertos detalles. Las simulaciones son realizadas considerando que una temperatura ambiente constante  $T_A = 20$  [°C], lo que en la práctica es imposible de lograr: las instalaciones en el Laboratorio de Automática no presentan equipos de aire acondicionado que permitan mantener esta característica constante, por lo que la temperatura ambiente obedece efectivamente a las fluctuaciones que esta tiene durante el día; las pruebas realizadas tienen una duración de 12,000 [s] (aproximadamente 3 horas y 20 minutos), por lo que las condiciones climatológicas afectan directamente el desarrollo de los experimentos. Por otra parte, los experimentos son realizados en días distintos, por lo que tampoco mantienen condiciones idénticas entre sí, lo que puede afectar, para bien o para mal, el resultado de control de temperatura para unos u otros.

Ahora bien, más allá de lo señalado recién, se puede observar a partir de la evidencia gráfica

Tabla 5.23: Índices de desempeño de respuesta transitoria para controladores sintonizados con PSO MIMO - Prueba 1 Experimental.

Salida	Esquema	Controlador	$MOV$	$E_{ss}$	$t_d$	$t_r$	$t_p$	$t_s$
$h_c$	Descentralizado	PI	11.98	0.49	186.60	353.90	7870.45	337.90
		PID	25.63	0.80	176.65	332.75	7044.10	10361.05
		PIOF	9.65	0.37	182.85	2052.45	2061.55	332.55
		PIDOF	10.56	0.19	182.50	345.45	356.45	339.05
$h_c$	Centralizado	PI	39.56	0.19	171.85	323.20	2690.25	9990.50
		PID	14.86	0.54	187.90	359.10	2485.35	2725.40
		PIOF	15.76	0.16	181.70	347.00	2819.00	340.45
		PIDOF	163.86	0.09	181.35	343.80	481.45	1289.25
$T_c$	Descentralizado	PI	95.30	0.68	1922.30	3425.70	4745.50	11567.95
		PID	79.42	0.84	1957.85	3555.85	4689.05	12000.00
		PIOF	84.26	1.16	1931.25	3543.80	5940.05	12000.00
		PIDOF	108.07	0.69	2158.90	3698.05	4990.55	11924.50
$T_c$	Centralizado	PI	83.14	1.44	1713.00	3318.20	4631.90	12000.00
		PID	109.31	1.03	1936.10	3550.95	4879.50	11968.25
		PIOF	77.93	0.51	2096.05	3696.40	5001.20	11719.65
		PIDOF	85.50	1.44	1606.85	3499.15	5528.35	12000.00

que el comportamiento del sistema real guarda estrecha relación con lo dictado por el modelo a partir de las simulaciones, lo que valida los desarrollos que permiten determinar los controladores para el sistema MIMO mediante la técnica PSO. Algunas diferencias que se pueden resaltar están asociadas al comportamiento del control de  $T_c$  al comparar las Figuras 5.12 y 5.20, para los casos descentralizados, y las Figuras 5.14 y 5.22, para los casos descentralizados: en el sistema real el descenso de temperatura se produce de manera más rápida que en simulación, presumiblemente por un gradiente de temperatura con respecto al ambiente mayor que en la implementación computacional; además, la convergencia sobre el valor de referencia es oscilatoria, esto a raíz de los retardos de transporte del sistema que no considera la modelación fenomenológica desarrollada en el Capítulo 3.

Debido a las diferencias que arrastran las pruebas experimentales a raíz de las condiciones de la temperatura ambiente, no resulta conveniente realizar un análisis índice a índice del comportamiento del sistema, ya que en ciertos aspectos se puede incurrir en error al emitir una conclusión. Sin embargo, este riesgo disminuye al considerar la información global del sistema; es decir, considerar tanto la respuesta de control, como la energía para el mismo y el comportamiento transitorio. En vista de esto, se determinan los índices  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ , presentados en la sección anterior, contextualizados al caso experimental. El resultado de esto se muestra en la Tabla 5.24.

A partir de los índices calculados, se pueden establecer ciertas comparaciones respecto a lo determinado por simulación en la Tabla 5.21; en el caso del indicador del comportamiento del nivel  $I_1$  se cumple que, tanto en simulación como experimentalmente, el peor desempeño lo tiene el controlador PIDOF centralizado, mientras que en el indicador del comportamiento de la temperatura  $I_2$  se repite que el mejor resultado se da por parte del controlador PIOF centralizado. Ahora bien, el comportamiento global del sistema multivariable, caracterizado por

Tabla 5.24: Índices de desempeño propuestos para controladores sintonizados con PSO MIMO.

Prueba	Esquema	Controlador	$I_1$	$I_2$	$I_3$
1	Descentralizado	PI	18.71	111.68	130.39
		PID	34.23	95.04	129.26
		PIOF	14.74	100.39	115.14
		PIDOF	15.47	125.98	141.45
1	Centralizado	PI	48.27	98.66	146.93
		PID	21.80	126.66	148.47
		PIOF	20.81	93.80	114.61
		PIDOF	169.53	101.30	270.83

el índice  $I_3$  repite el comportamiento en cuanto a su peor desempeño, el cual tiene lugar al aplicar el controlador PIDOF centralizado; mientras que el mejor comportamiento lo vuelve a tener el caso PIOF centralizado. En conclusión, para el control multivariable de nivel  $h_c$  y temperatura  $T_c$  del sistema de estanque del cual es estudio el presente informe de tesis, el controlador que presenta mayores ventajas, en cuanto a la minimización del error global de control, la energía asociada a este proceso y el sobrepaso en la respuesta transitoria, es el PI de orden fraccionario aplicado en un esquema de control centralizado.

# Capítulo 6

## Conclusiones y Trabajo Futuro

Para concluir el presente informe de tesis, se incluyen las conclusiones más importantes a destacar como resultado de la investigación que da forma al trabajo desarrollado. A continuación se presentan los análisis más importantes de los resultados obtenidos, las publicaciones generadas a raíz de los mismos, y propuestas de trabajo futuro para mejorar o complementar ciertos aspectos de la investigación realizada.

### 6.1. Conclusiones

Las conclusiones incluidas en esta Sección son el resumen de las encontradas a raíz del análisis de resultados en cada uno de los capítulos de este trabajo, por lo que las distintas declaraciones se apoyan de manera directa en figuras o tablas presentadas previamente a lo largo del desarrollo del documento.

En principio, a partir de la motivación de estudiar el tema presentado, se plantea como objetivo la aplicación de conceptos de cálculo fraccionario al control de sistemas. Al respecto, este trabajo permite conceptualizar el hecho de que el cálculo fraccionario presenta alternativas viables para aplicar a proceso de ingeniería, particularmente, a la Ingeniería de Control, a través de la extensión de los esquemas de control que hacen uso de integración y derivación de orden entero al caso de orden fraccionario. Esto último, se enfoca en este trabajo en el contexto de la familia de controladores PID, los cuales en el caso fraccionario ofrecen soluciones dinámicas para los lazos de control que no se pueden alcanzar a través de la aplicación de estos mismos controladores, pero de orden entero.

En cuanto al segundo punto principal que motiva el estudio del presente trabajo, el desarrollo de un modelo para el Sistema de Estanques del Laboratorio de Automática, se pueden presentar ciertas declaraciones. A través de ecuaciones fenomenológicas se pueden caracterizar la dinámica de cualquier sistema físico; en particular, el Sistema de Estanques, el cual hace uso de balance de masa, balances de energía y conceptos de transferencia de calor para presentar las ecuaciones diferenciales de carácter no lineal que gobiernan a la planta. Ahora bien, las ecuaciones por sí solas no completan una herramienta de utilidad para el control de sistemas, sino que es

necesario contextualizarlas al caso individual de estudio a partir de experimentos que permitan determinar los parámetros del sistema real, según lo desarrollado a lo largo del Capítulo 3. Como consecuencia del trabajo que allí se presenta, se obtiene un modelo eficaz, el cual es capaz de emular con precisión al sistema real según la evidencia que se muestra a través de las Figuras 3.19 a 3.22 de la Sección 3.4.3, y los resultados experimentales de control de las Secciones 4.4 y 5.5, al contrastarlos con sus correspondientes comparaciones obtenidas mediante simulación.

Entrando a lo que respecta a la aplicación de controladores para el sistema, en el Capítulo 2 se presentan diversas estrategias de sintonización de parámetros para controladores PI/PID en sus versiones de orden entero y fraccionario. Si bien se plantean condiciones suficientes para garantizar el cumplimiento de ciertas especificaciones de control en cada uno de los métodos, esto puede ser completamente cierto para un sistema lineal que cumpla con las hipótesis de base de cada uno de los métodos; sin embargo, ninguno de ellos o algún otro encontrado en la literatura, presenta garantías para un problema de tipo no lineal como en el que se basa este estudio, mucho menos considerando el caso MIMO en que existen acoplamientos entre las variables. Pues bien, a modo general, y como resultado de la investigación realizada, se pueden extraer ciertas conclusiones: primero, y a modo de comparación, la técnica clásica de sintonización LGR, la cual sólo sirve para versiones enteras de controladores PI, no satisface las condiciones con las que se aplica el método, esto es respetar el tiempo de establecimiento y el máximo sobrepaso definidos para la sintonización; lo anterior se puede ver de forma clara con una simple inspección visual de los resultados mostrados en la Figura 4.1. Ahora bien, siguiendo con los desarrollos del caso SISO, la aplicación de los métodos de sintonización Z&N, basada en [57, 58], tampoco entrega resultados satisfactorios, tanto para los casos de orden entero como los de orden fraccionario; el método límite de estabilidad no entrega una solución factible de controlador PIDOF por temas de estabilidad del sistema, como se señala en la Sección 4.2.2, pero sí para el caso entero PID, aunque con resultados de control desfavorables según se observa en la Figura 4.5. Mientras tanto, sí es posible dar con un controlador PIDOF factible con el método Curva de Reacción, pero con resultados de control que se alejan de ser buenos, según se puede observar en la Figura 4.3 de la Sección 4.2.1, los que son levemente mejores que el caso PID del mismo método, según los indicadores de la Tabla 4.8. Luego, como conclusión, este método permite determinar un conjunto de parámetros base sobre los que realizar una sintonía fina a través de reglas heurísticas según la acción dinámica de cada ganancia del controlador, pero deja al debe cualquier consideración respecto a los órdenes de integración y derivación de los casos fraccionarios. Ahora, saltándose al caso MIMO de Sintonización en Frecuencia de la Sección 5.3, se plantean conclusiones similares, el método no logra entregar resultados aceptables de control para las salidas del sistema, particularmente para  $T_c$ , donde el seguimiento de referencia es prácticamente nulo, según se observa en la Figura 5.7; en el caso de  $h_c$ , los resultados son más favorables, ya que existe un seguimiento de la referencia, aunque oscilatorio, como se puede ver en la Figura 5.6. Considerando los índices presentados en la Tablas 5.9 y 5.10, no es posible realizar una aseveración clara de si las versiones fraccionarias son mejores o no, pero cada uno de los resultados puede ser considerado para realizar una sintonía fina de sus parámetros en búsqueda de mejores resultados de control. Finalmente, respecto a los métodos de sintonización, en el trabajo se presenta evidencia clara que la optimización mediante el algoritmo PSO es la estrategia que presenta mejores resultados, tanto en el caso SISO como MIMO. En el caso de control monovariable  $h_c$  esto se evidencia a través de una simple comparación entre los resultados gráficos de control en simulación presentados en la Figura 4.8 de la Sección 4.3, mientras que en el caso multivariable, se repiten los resultados en cuanto a control de nivel

y se mejora sustancialmente el control de  $T_c$  según se puede ver en las Figuras 5.12y 5.14 de la Sección 5.4. En consecuencia, se concluye que la optimización PSO es una herramienta mucho más eficiente para la sintonización de controladores para un problema de control no lineal como el presentado en este informe de tesis, ya que puede hacer uso del modelo no lineal completamente, no a través de linealizaciones como los métodos LGR, Z&N y en Frecuencia; en los casos fraccionarios presenta una ventaja considerable, ya que incluso puede hacer una sintonía precisa de los órdenes de integración y derivación de los controladores, en función de minimizar un cierto criterio. Más aún, en el caso de control MIMO, permite sintonizar controladores en un esquema centralizado para neutralizar los acoplamientos entre las variables y definir una lógica que garantice un comportamiento adecuado de ambas salidas, lo que es imposible de realizar con los otros métodos.

Por otra parte, se pueden establecer conclusiones respecto a los resultados de control entre controladores enteros y fraccionarios, las que se basan en los análisis planteados en cada capítulo, tanto para simulación como experimentalmente, de la aplicación de los controladores sintonizados mediante PSO, ya que estos presentan un mejor comportamiento. Partiendo por el caso SISO de control de nivel  $h_c$ , a través de las simulaciones presentadas en la Sección 4.3, se obtiene resultados en que la estrategia de control PIOF destaca, minimizando el índice  $IAE$  y el máximo sobrepaso total  $MOV$  presentados en la Tabla 4.14. Sin embargo, en los resultados experimentales de la Sección 4.4 cambian tales condiciones, siendo el mismo controlador el que presenta peores resultados en cuanto a  $ISI$  y  $MOV$  de la Tabla 4.15; esta situación se explica en que la sintonización de los controladores se hace a través de simulaciones, las que están libres del ruido de medición del sensor de presión, por lo que las amplificaciones de este para emitir una señal de control no se ven consideradas en el proceso. No obstante lo anterior, si se define un criterio  $I$  que considere tanto el seguimiento de referencia  $IAE$  como la energía de control  $ISI$ , el mejor comportamiento corre por cuenta de la versión PID de orden fraccionario, según los datos de la Tabla 4.16. Siguiendo con el caso MIMO, el análisis se divide en dos partes; una considerando el comportamiento de un sistema típico con cambios de referencia al mismo tiempo (Prueba 1), y otra que estudia el comportamiento del control de temperatura cuando el nivel varía a modo de perturbación en el sistema debido al acoplamiento de las señales (Prueba 2). Según los resultados obtenidos mediante simulación para la Prueba 1 en la Sección 5.4, se tiene que no son concluyentes al analizar cada índice por separado en la Tablas 5.17 y 5.18, ya que no hay una tendencia clara de cual controlador minimiza mayor cantidad y existe un “trade-off” entre los desempeños de nivel y temperatura. Lo que sí, para el caso de  $T_c$ , los esquemas centralizados mejoran los índices uno a uno respecto a las mismas versiones de controladores, pero de esquema descentralizado; esto se explica en la forma del acoplamiento del sistema, el que según los análisis respectivos indican que afecta exclusivamente a la mencionada salida y no al nivel  $h_c$ . Ahora, si se considera un índice  $I_3$  que englobe el comportamiento de las salidas tanto en seguimiento de referencia  $IAE$ , energía de control  $ISI$  y máximo sobrepaso  $MOV$ , este último necesario dadas las diferencias al respecto para el caso de la temperatura, se obtiene que el mejor controlador es el PI en su versión fraccionaria aplicado en un esquema centralizado, según los datos presentados en la Tabla 5.21. Lo anterior se confirma a través de los resultados experimentales para la Prueba 1 enunciados en la Sección 5.5; la Tabla 5.24, que contiene los mismos índices  $I$  de comportamiento total propuestos, indica que el mejor resultado está asociado a la aplicación del controlador PIOF centralizado. En cuanto a la Prueba 2, se constata mediante simulaciones que el mejor comportamiento corre por cuenta del controlador PIDOF, si se considera el índice  $I_2$  de la Tabla 5.21, el cual está asociado al comportamiento total de



$T_c$ , salida que es el foco de estudio de la mencionada prueba. Mención aparte en cuanto a las estrategias de modulación se lleva el esquema PWM, que según lo mostrado en la Sección 5.2, aplicado en cada una de las fases del calefactor trifásico y con un muestreo cada 2 [s], presenta ventajas respecto al resto de los esquemas, según los datos de la Tabla 5.3.

Finalmente, a modo de generalización, se puede concluir que los esquemas de control fraccionario presentan mejores resultados de control global para el problema no lineal propuesto, que si bien en ciertos casos pueden ser similares numéricamente considerando los índices de evaluación a los de orden entero, basta considerar que la aplicación particular de estudio es característica de varias industrias, las que operan 24 horas durante los 365 días del año, por lo que aquellas pequeñas mejoras, se traducen en grandes beneficios en un horizonte de tiempo amplio en su aplicación.

## 6.2. Publicaciones Generadas

A raíz de los resultados presentados en este trabajo de tesis, consecuencia de la investigación realizada, se generan dos trabajos presentados en importantes conferencias, los cuales se listan a continuación:

- [1 ] C. Jáuregui, M.A. Duarte-Mermoud, R. Oróstica, J.C. Travieso-Torres, O. Beytía, *Control de Nivel en Estanque Cónico usando PID Fraccionarios*, IEEE CHILECON, Santiago, Chile, 2015.
- [2 ] C. Jáuregui, M.A. Duarte-Mermoud, R. Oróstica, J.C. Travieso-Torres, O. Beytía, *Experimental Evaluation of Conical Tank Level Control using Fractional PID*, IEEE ICCA, Kathmandu, Nepal, 2016.

El primer trabajo incluye resultados correspondiente al Capítulo 4 de control de nivel, el caso SISO, considerando simulaciones; la correspondiente aceptación incluye una presentación realizada en el marco de la conferencia entre los días 28 a 30 de Octubre de 2015. Debido a la calidad de los desarrollos allí presentados, es seleccionado para ser incluido en uno de los números de 2016 de la revista IEEE Latin America Transactions.

El segundo trabajo incluye también desarrollos del mismo capítulo de control SISO, pero desde un enfoque de análisis experimental de los resultados. Su aceptación por parte del comité de ICCA 2016, exige una presentación en la conferencia, la cual se ha de realizar entre los días 01 a 03 de Junio de 2016.

## 6.3. Trabajo Futuro

Con el fin de complementar el presente trabajo de tesis, o desarrollar ideas afines para la consecución de los objetivos de esta investigación, se presentan algunas recomendaciones de trabajo futuro para extender las fronteras del conocimiento respecto al tema propuesto.

En cuanto a los desarrollos particulares del presente informe, se puede partir considerando un mejoramiento del modelo del Sistema de Estanques confeccionado, el cual incluya los retardos de transporte asociados a las variables de entrada y sus efectos sobre la planta; esto en vista de emular con mayor precisión los resultados experimentales de control MIMO ilustrados en las Figuras 5.20 y 5.22, particularmente, el comportamiento oscilatorio de convergencia de  $T_c$  sobre la referencia, debido al retardo de la acción de  $q_{in}$  sobre esta variable.

Ahora, respecto a los resultados de control, vale destacar posibles mejoras respecto al procedimiento de optimización PSO, ya que es el que mejor realiza control de las variables del sistema. De partida, para mejorar los resultados de control obtenidos experimentalmente, se puede realizar una sintonización que considere los ruidos de medición del sensor de presión en las simulaciones del algoritmo; de esta forma se incluye este fenómeno a cualquier función a minimizar. Por otra parte, esta misma función puede ser objeto de modificación en busca de obtener un resultado particular que contenga algún otro criterio de comportamiento; se puede incluir el concepto de energía a través del índice *ISI*, o evaluar el comportamiento de respuesta transitoria a través de la inclusión del *MOV*,  $E_{ss}$  u otro. También, se puede estudiar la influencia de escoger otro método de optimización de la familia de Computación Evolutiva, como por ejemplo Algoritmos Genéticos, el que pueda determinar un óptimo mejor para el problema de control.

De forma más general, se pueden probar las estrategias aquí desarrolladas en otro tipo de problemas; es decir, realizar sintonización de controladores PI/PID de orden fraccionario mediante optimización PSO en otros sistemas que presenten dinámica de tipo no lineal, en los casos monovariable y multivariable, haciendo uso de modelos dinámicos detallados de la planta, para evaluar las conclusiones aquí determinadas y verificar el comportamiento de los esquemas fraccionarios versus algún otro tradicional. En línea con lo anterior, se pueden aplicar al problema de control del Sistema de Estanques estrategias de control no lineal que puedan ser extendidas al caso fraccionario, como por ejemplo Passivity Based Control (PBC); de esta forma, se puede realizar un estudio similar al presente, en el que se comparen controladores de orden entero y de orden fraccionario.

# Bibliografía

- [1] C.A. Monje, B.M. Vinagre, Y. Chen, V. Feliu, P. Lanusse, J. Sabatier, *Optimal Tunings for Fractional  $PI^\lambda D^\mu$  Controllers*, Escuela de Ingenierías Industriales, Universidad de Extremadura, Badajoz, España.
- [2] M. Duarte, F. Mira, I. Pelissier, J. Travieso, *Evaluation of Fractional Order PI Controller Applied to Induction Motor Speed Control*, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Chile.
- [3] C.A. Monje, B.M. Vinagre, A.J. Calderón, V. Feliu, Y. Chen, *Auto-Tuning of Fractional Lead-Lag Compensators*, 16th International Federation of Automatic Control Congress, Vol. 38, Iss. 1, pp. 319-324, 2005.
- [4] N. Aguila, M. Duarte, *Fractional Adaptive Control for an Automatic Voltage Regulator*, ISA Transactions, Volume 52, pp. 807-815, 2013.
- [5] S. Sutha, P. Lakshmi, S. Sankaranarayanan, *Fractional-Order Sliding Mode Controller Design for a Modified Quadruple Tank Process via Multi-Level Switching*, Computer & Electrical Engineering, Vol. 45, pp. 10-21, July 2015.
- [6] P. Aravind, M. Valluvan, S. Ranganathan, *Modelling and Simulation of Non Linear Tank*, International Journal of Advanced Research in Electrical, Electronics and Instrumentation Engineering, vol. 2, issue 2, pp. 842-849, Feb. 2013.
- [7] N. Gireesh, G. Sreenivasulu, *Comparison of PI Controller Performances for a Conical Tank Process using different tuning methods*, International Conference on Advances in Electrical Engineering, Jan. 2014.
- [8] D. A. Vijula, K. Vivetha, K. Gandhimathi, T. Praveena, *Model based Controller Design for Conical Tank System*, International Journal of Computer Applications, vol. 85, no. 12, pp. 8-11, Jan. 2014.
- [9] T. Rajesh, S. Arun jayakar, S. G. Siddharth, *Design and Implementation Of IMC Based PID Controller for Conical Tank Level Control Process*, International Journal of Innovative Research in Electrical, Electronics, Instrumentation and Control Engineering, vol. 2, issue 9, Sep. 2014.
- [10] S. Warier, S. Venkatesh, *Design of Controllers based on MPC for a Conical Tank System*,

- International Conference On Advances In Engineering, Science and Managment, March 2012.
- [11] H. Kala, P. Aravind, M. Valluvan, *Comparative Analysis of Different Controller for Non-linear Level Control Process*, IEEE Conference on Information and Communication Technologies, 2013.
  - [12] P. Chandrasekar, L. Ponnusamy, *Passivity Based Level Controller Design applied to a Non-linear SISO System*.
  - [13] R. Valarmathi, P. R. Theerthagiri, S. Rakeshkumar, *Design and Analysis of Genetic Algorithm Based Controllers for Non Linear Liquid Tank System*, IEEE International Conference On Advances In Engineering, Science and Management, March 2013.
  - [14] D. Marshiana, P. Thirusakthimurugan, *Fractional Order PI Controller for Nonlinear Systems*, International Conference on Control, Instrumentation, Communication and Computational Technologies, 2014.
  - [15] S. Janarthanan, K.N. Thirukkuralakani, S. Vijayachitra, *Performance Analysis of Non-Integer Order PID Controller for Liquid Level Control of Conical Tank System*, International Conference on Information Communication and Embedded Systems, 2014.
  - [16] C. Higuera, C. Camacho, F. Soler, O. Rodriguez, F. Jiménez, *PI Vectorial Control of Level and Temperature for Cascading Tank System*, IEEE Chilean Conference on Electrical, Electronics Engineering, Information and Communication Technologies (CHILECON), pp. 67-72, 2015.
  - [17] A.J. Mahbob, M. Kamal, F. H. Yahaya, *Water Temperature Using Fuzzy Logic*, 5th IEEE International Colloquium on Signal Processin & Its Applications, pp. 372-374, 2009.
  - [18] C. Muresan, E. Dulf, R. Both, A. Palfi, M. Caprirou, *Microcontroller Implementation of a Multivariable Fractional Order PI Controller*, 19th IEEE International Conference on Control Systems and Computer Science, pp. 44-51, Bucharest, May 2013.
  - [19] C. Muresan, E. Dulf, C. Ionescu, R. Both, I. Nascu, *Improving performance for a  $^{13}\text{C}$  isotope separation plant using multivariable fractional order controllers*, 14th IEEE ICFDA, pp. 1-6, Catania, June 2014.
  - [20] V. Quang Nguyen, S. Arunsawatwong, *Fractional Controller Design for a Binary Distillation Column Using the Method of Inequalities*, IEEE SICE Annual Conference, pp. 800-805, Tokyo, Aug. 2008.
  - [21] U. Sabura Banu, S.K. Lakshmanaprabu, *Multivariable Centralized Fractional Order PID Controller tuned using Harmony search Algorithm for Two Interacting Conical Tank Process*, IEEE SAI Interlligent Systems Conference, pp. 320-327, London, Nov. 2015.
  - [22] S. Chenikher, S. Abdelmalek, M. Sedraoui, *Control of Uncertainly multi-variable system with fractional PID*, 16th IEEE Mediterranean Electrotechnical Conference, pp. 1079-1082, Hammamet, March 2012.

- [23] P. Roy, B. K. Roy, *Fractional order PI control applied to level control in coupled two tank MIMO system with experimental validation*, Control Engineering Practice, Vol. 48, pp. 119-135, March 2016.
- [24] N. Yousfi, P. Melchor, R. Jallouli-Khlif, P. Lanusse, N. Derbel, A. Oustaloup, *Input/Output Fractional Transfer Function in Path Tracking Design using multivariable crone controller*, 10th IEEE International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices, pp. 1-8, Hammamet, March 2013.
- [25] V. Pommier-Budinger, Y. Janat, D. Nelson-Gruel, P. Lanusse, A. Oustaloup, *CRONE control of a multivariable lightly damped plant*, 14th IEEE Mediterranean Electrotechnical Conference, pp. 54-60, Ajaccio, May 2008.
- [26] A. Pisano, M. Rapaic, E. Usai, Z. Jelcic, *Continuous finite-time stabilization for some classes of fractional order dynamics*, 12th IEEE International Workshop on Variable Structure Systems, pp. 16-21, Mumbai, Jan. 2102.
- [27] A. Loverro, *Fractional Calculus: History, Definitions and Applications for the Engineer*, Department of Aerospace and Mechanical Engineering, University of Notre Dame, Notre Dame, IN 46556, USA, May 8, 2004.
- [28] M. von Borries, *Estudio y Simulación de Sistemas Adaptables Fraccionarios*, M.S. thesis, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Santiago, Chile, Abril 2012.
- [29] B. M. Vinagre, *Modelado y Control de Sistemas Dinámicos caracterizados por Ecuaciones Íntegro-Diferenciales de Orden Fraccionario*, Ph.D. dissertation, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y de Control, Escuela Superior de Ingenieros Industriales, Universidad Nacional de Educación a Distancia, España, 2001.
- [30] D. Valério, *Fractional Robust System Control*, Ph.D. dissertation, Universidad Técnica de Lisboa, Instituto Superior Técnico, Octubre 2005.
- [31] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Technical University of Kosice, Slovak Republic.
- [32] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 4th Edition, Pearson Education International, Prentice Hall, 2002.
- [33] S. Lin, H. M. Srivastava, *Some Miscellaneous Properties and Applications of certain operators of Fractional Calculus*, Taiwanese Journal of Mathematics, Vol. 14, No. 6, Diciembre 2010.
- [34] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies 204, Elsevier, 2006.
- [35] C. A. Monje, Y. Chen, B. M. Vinagre, D. Xue, V. Feliu, *Frcitional-order Systems and Controls: Fundamentals and Applications*, Springer, 2010.

- [36] Y. Chen, I. Petráš, D. Xue, *Fractional Order Control - A Tutorial*, American Control Conference, pp. 1397 - 1411, 10-12 Junio, 2009.
- [37] Y. Li, Y. Chen, I. Podlubny, *Mittag-Leffler Stability of Fractional Order Nonlinear Dynamic Systems*, Automatica IFAC, Volume 45, Issue 8, pp. 1965-1969, Agosto 2009.
- [38] I. Petráš, *Stability of Fractional-Order Systems with Rational Orders*, Institute of Control and Informatization of Production Processes, BERG Faculty, Technical University of Košice, Slovak Republic, Diciembre 2008.
- [39] N. Aguila, M. Duarte, J. Gallegos, *Lyapunov Functions for Fractional Order Systems*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Volume 19, Issue 9, pp. 2951-2957, Septiembre 2014.
- [40] Y. Li, Y. Chen, I. Podlubny, *Stability of Fractional-Order Nonlinear Dynamic Systems: Lyapunov direct method and Generalized Mittag-Leffler stability*, Computers and Mathematics with Applications, Volume 59, Issue 5, pp. 1810-1821, Marzo 2010.
- [41] J. Sabatier, M. Moze, C. Farges, *LMI Stability Conditions for Fractional Order Systems*, Computer and Mathematics with Applications, Volume 59, Issue 5, pp. 1594-1609, Marzo 2010.
- [42] B. Vinagre, C. Monje, *Introducción al Control Fraccionario*, Departamento de Electrónica e Ingeniería Electromecánica, Escuela de Ingenierías Industriales, Universidad de Extremadura, Badajoz, España, Julio 2006.
- [43] I. Podlubny, *Fractional-Order Systems and Fractional-Order Controllers*, Department of Control Engineering, B.E.R.G Faculty, University of Technology B.Nemcovej 3, 04200 Košice, Slovakia, Noviembre 1994.
- [44] J. Zhong, *PID Controller Tuning: A Short Tutorial*, Mechanical Engineering, Purdue University.
- [45] M. Duarte, *Sistemas Adaptivos Simples*, EL7017 Control Adaptivo de Sistemas, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Chile, Primavera 2013.
- [46] B. Shi, J. Yuan, C. Dong, *On Fractional Model Reference Adaptive Control*, Institute of System Science and Mathematics, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai, China, Enero 2014.
- [47] F. Golnaraghi, B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, Wiley, 9th Edition, 2009.
- [48] R. Cárdenas D., *Conceptos Básicos de Errores y Lugar de la Raíz*, Apuntes del curso de Control Automático, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Magallanes.
- [49] MATLAB and Root Locus Desing Toolbox Release R2013a, The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, United States.

- [50] J. G. Ziegler, N. B. Nichols, *Optimum Settings for Automatic Controllers*, American Society of Mechanical Engineering Proceedings, New York, December 1941.
- [51] C. C. Hang, K. J. Astrom, W. K. Ho, *Refinements of the Ziegler-Nichols Tuning Formula*, IEE Proceedings D - Control Theory and Applications, Vol. 138, No. 2, pp. 111-118, March 1991.
- [52] P. M. Meshram, R. G. Kanojiya, *Tuning of PID Controller using Ziegler-Nichols Method for Speed Control of DC Motor*, IEEE International Conference On Advances In Engineering, Science and Managment, pp. 117-122, March 2012.
- [53] N. Yadaiah, S. Malladi, *An Optimized relation between  $T_i$  and  $T_d$  in Modified Ziegler Nichols PID controller Tuning*, IEEE International Conference on Control Applications, pp. 1275-1280, Aug. 2013.
- [54] R. Caponetto, L. Fortuna, D. Porto, *Parameter Tuning of a Non Integer Order PID Controller*, Electronic Proceedings of the 15th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, 2002.
- [55] R. Caponetto, L. Fortuna, D. Porto, *A new tuning strategy for a non integer order PID controller*, First IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications, Bordeaux, 2004.
- [56] K. Bettou, A. Charef, F. Mesquine, *A new Design Method for Fractional PID Controller*, International Journal of Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering, Vol. 2 No. 1, pp. 414-429, July 2008.
- [57] D. Valério, J.S. Costa, *Ziegler-Nichols type Tuning Rules for Fractional PID Controllers*, ASME 2005 Internaional Desing Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Long Beach, California, USA, September 2005.
- [58] D. Valério, J.S. Costa, *Tuning-Rules for Fractional PID Controllers*, 2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications, Vol. 2, pp. 28-33, 2006.
- [59] C. Monje, B. Vinagre, Y. Chen, V. Feliu, P. Lanusse, J. Sabatier, *Proposals for fractional PID Tuning*, 1st IFAC Symposium on Fractional Differentiation and its Applications, July 2004.
- [60] J. Kennedy, R. Eberhart, *Particle Swarm Optimization*, IEEE International Conference on Neural Networks, Vol. 4, pp. 1942-1948, 1995.
- [61] Y. Del Valle, G. Venayagamoorthy, S. Mohagheghi, J. Hernandez, R. Harley, *Particle Swarm Optimisation: Basic Concepts, Variants and Applications in Power Systems*, IEEE Transactions on Evolutionary Computation, Vol. 12, No. 2, pp. 171-195, April 2008.
- [62] R. H. Ordoñez-Hurtado, M. A. Duarte-Mermoud, *Finding Common Quadratic Lyapunov Functions for Switched Linear Systems using Particle Swarm Optimization*, International Journal of Control, Vol. 85, No. 1, pp. 12-15, January 2012.

- [63] W. C. Scgultz, V. C. Rideout, *Control System Performance Measures: Past, Present and Future*, IRE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-6, Issue 1, pp. 22-35, February 1961.
- [64] D. M. Himmelblau, J. B. Riggs, *Basic Principles and Calculations in Chemical Engineering*, 8th Ed., Prentice Hall, 2012.
- [65] T. Farmer, F. Gass, *Physical Demonstration in the Calculus Classroom*, The College Mathematics Journal, Vol. 23, No. 2, pp. 146-148, March 1992.
- [66] F. W. Sears, G. L. Salinger, *Termodinámica, Teoría Cinética y Termodinámica Estadística*, Editorial Reverté, España, 1978.
- [67] D. Q. Kern, *Procesos de Transferencia de Calor*, 31era Edición, Compañía Editorial Continental, México, 1999.
- [68] Sam, *Another Particle Swarm Toolbox*, Version 1.31, Abril 2014.



# Anexos

# Anexo A

## Descripción de Instalaciones

El Sistema de Estanques del Laboratorio de Automática, sistema en estudio en el presente trabajo de tesis, se presenta en la Figura A.1, fotografía tomada directamente en las instalaciones. En esta imagen se puede observar tanto el estanque de recirculación (esquina inferior derecha), como el cónico (esquina superior izquierda) en la estructura física que le da sustento a la instrumentación y elementos del circuito de líquido.

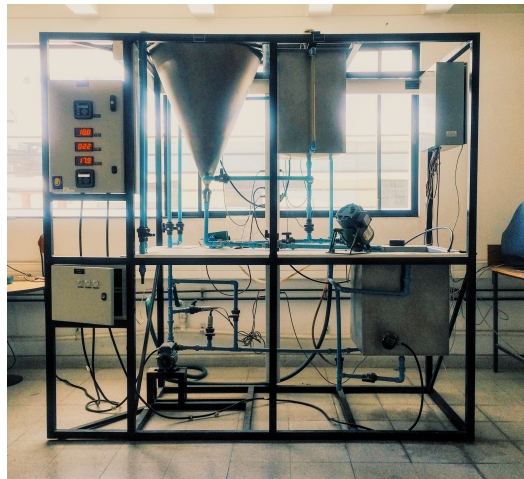


Figura A.1: Sistema de Estanques Laboratorio de Automática.

Para impulsar el agua desde el estanque de recirculación hasta el estanque cónico se utiliza una bomba, que corresponde a un motor de inducción trifásico, y un equipo variador de frecuencia; ambos se pueden observar en la Figura A.1 en la esquina inferior izquierda, mientras que una ampliación de cada elemento se ilustra en la Figura A.2: a la izquierda la bomba con sus conexiones de alimentación y salida de líquido, y suministro de energía eléctrica; mientras que a la derecha se observa el variador de frecuencia junto al tablero de fuerza, con los interruptores de energización principal de los elementos del sistema.

Para la medición del nivel de líquido dentro del estanque cónico se utiliza un sensor de presión, ilustrado en la imagen derecha de la Figura A.3; este dispositivo se ubica justo en el fondo del estanque en cuestión, por donde también sale el agua para completar el circuito a

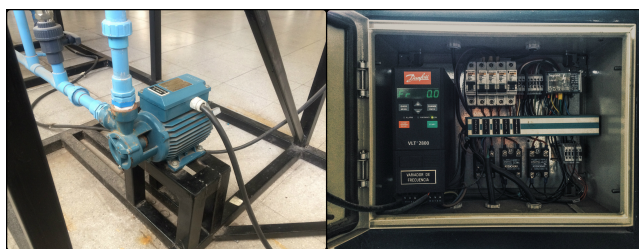


Figura A.2: Bomba y Variador de Frecuencia.

través de la válvula manual, que como se ilustra a la izquierda en la Figura A.3, se encuentra en apertura de 45 [°].



Figura A.3: Válvula manual y Sensor de presión.

Finalmente, todas las señales del sistema son procesadas por el dispositivo Opto 22 que se ilustra en la parte izquierda de la Figura A.4, donde también se observan los módulos de entrada y salida del circuito de control. Toda la información va a dar al computador especialmente dedicado para la utilización de la planta; allí, a través del software Matlab y su extensión Simulink, se pueden implementar distintas estrategias de control y visualizar en tiempo real la evolución de las señales del sistema, como se puede observar a la derecha en la Figura A.4.

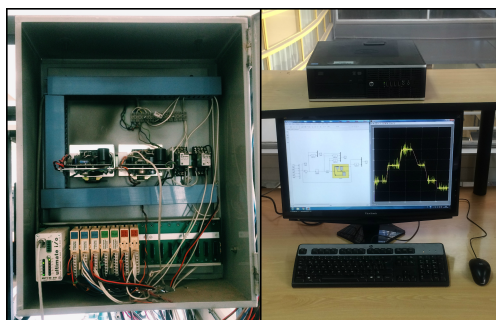


Figura A.4: Controlador Opto 22 e interfaz computacional.

## Anexo B

# Experimentos para modelación de Sistema de Estanques

### B.1. Resultado de experimentos Modelación Subsistema de Nivel

En este anexo se ilustran las pruebas experimentales realizadas para ajustar los parámetros que definen la relación dinámica del nivel dentro del estanque cónico. Para la determinación de los parámetros se muestra el resultado experimental de las pruebas realizadas a través de gráficas y/o tablas, según corresponda.

#### Caracterización del Volumen $V$

La Tabla B.1 muestra los resultados del experimento de caracterización de volumen. En él se llena el estanque cónico con volúmenes conocidos de agua, medidos en litros, y se registra la medición del sensor de presión que entrega el nivel de agua en centímetros; todo esto con la válvula manual de salida cerrada.

#### Flujo de entrada $F_{in}$

Para determinar los parámetros que determinan el flujo de entrada  $F_{in}$  en la expresión (3.7), se diseña un experimento el cual consiste en realizar pruebas sucesivas de llenado del estanque cónico utilizando distintas frecuencias en la bomba y manteniendo la válvula manual de salida cerrada, es decir, forzando  $F_{out} = 0$ .

La Figura B.1 muestra cinco pruebas realizadas bajo este esquema; a la izquierda se ilustra el comportamiento del nivel de agua medido por el sensor de presión en cada prueba, mientras que a la derecha se observa la frecuencia de funcionamiento de la bomba para cada lapso de

Tabla B.1: Resultados experimentales de volumen  $V$  en función de nivel de agua  $h_c$  en estanque cónico.

$V$ [l]	$h_c$ [cm]	$V$ [l]	$h_c$ [cm]	$V$ [l]	$h_c$ [cm]	$V$ [l]	$h_c$ [cm]
0.215	0.00	2.415	14.54	7.015	24.05	14.115	32.26
0.315	1.00	2.615	15.11	7.415	24.67	14.615	32.75
0.415	3.10	2.815	15.69	7.815	25.21	15.615	33.60
0.515	4.50	3.015	16.23	8.215	25.75	16.615	34.48
0.615	5.60	3.215	16.75	8.615	26.30	18.615	36.12
0.715	6.50	3.515	17.53	9.015	26.83	19.615	36.87
0.815	7.32	3.815	18.23	9.415	27.35	20.615	37.60
0.915	8.02	4.115	18.90	9.815	27.86	21.615	38.31
1.015	8.66	4.415	19.55	10.215	28.26	23.115	39.35
1.115	9.22	4.715	20.13	10.615	28.75	24.615	40.37
1.215	9.78	5.015	20.71	11.115	29.30	26.615	41.64
1.415	10.76	5.315	21.27	11.615	29.80	28.615	42.84
1.615	11.65	5.615	21.79	12.115	30.34	30.615	44.00
1.815	12.46	5.915	22.30	12.615	30.86	32.615	45.08
2.015	13.23	6.215	22.81	13.115	31.34	34.615	46.16
2.215	13.90	6.615	23.43	13.615	31.79	36.615	47.19

tiempo en las pruebas.

La información gráfica expuesta en la Figura B.1 se resume de forma numérica en la Tabla B.2; esta información permite realizar la regresión que especifica el valor de las constantes  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ .

## Flujo de salida $F_{out}$

Para la determinación del parámetro  $\beta$  de la modelación del flujo de salida definida en (3.10), se diseña un experimento que permita determinar datos empíricos para realizar el ajuste paramétrico correspondiente. El experimento consiste en pruebas de descarga o vaciado del estanque desde cierto nivel de agua inicial, sin nuevos ingresos de masas de agua, es decir, forzando  $F_{in} = 0$ . Con esto, debido a la diferencia de presiones dentro del estanque cónico, el agua fluye por gravedad por las tuberías hasta el estanque de recirculación pasando por la válvula manual operada en  $45^\circ$  respecto a la dirección de la tubería.

La Figura B.2 muestra los seis experimentos realizados bajo el escenario mencionado previamente; cada uno responde a un vaciado del estanque desde un nivel inicial hasta el nivel nulo. Los datos obtenidos de cada una de estas pruebas se muestran en la Tabla B.3 en donde, además, se incluyen los cálculos necesarios para determinar el parámetro  $\beta$  correspondiente a cada prueba realizada según la expresión determinada en (3.13).

Tabla B.2: Datos de pruebas experimentales de llenado para ajuste de  $F_{in}$ .

$f$ [%]	$t_i$ [s]	$t_f$ [s]	$h_i$ [cm]	$h_f$ [cm]	$\Delta t$ [s]	$V_i$ [l]	$V_f$ [l]	$\Delta V$ [l]	$\Delta V$ [cm <sup>3</sup> ]	$\Delta V/\Delta t$ [cm <sup>3</sup> /s]
30	10	99.95	0.82	25.25	89.95	0.31	7.87	7.56	7563.27	84.08
40	110	199.95	27.03	38.73	89.95	9.23	22.19	12.96	12959.02	144.07
60	210	299.95	40.31	51.90	89.95	24.54	47.06	22.51	22513.74	250.29
80	310	399.95	53.30	63.97	89.95	50.46	81.87	31.41	31412.06	349.22
50	10	99.95	8.64	36.49	89.95	1.01	19.11	18.11	18108.56	201.32
60	110	199.95	38.30	50.64	89.95	21.57	44.13	22.56	22555.60	250.76
70	210	299.95	51.92	61.56	89.95	47.11	73.89	26.78	26779.84	297.72
100	10	19.95	15.67	24.53	9.95	2.80	7.36	4.56	4564.53	458.75
60	30	39.95	28.39	31.17	9.95	10.37	12.97	2.61	2607.56	262.07
40	50	69.95	32.67	35.14	19.95	14.55	17.41	2.86	2857.78	143.25
50	80	99.95	36.69	39.53	19.95	19.38	23.36	3.99	3985.70	199.78
100	10	49.95	15.49	38.08	39.95	2.73	21.27	18.53	18530.23	463.84
20	60	99.95	38.92	39.18	39.95	22.46	22.84	0.38	379.91	9.51
30	110	149.95	39.65	41.72	39.95	23.54	26.78	3.24	3240.54	81.11
40	160	199.95	42.56	45.70	39.95	28.18	33.82	5.64	5640.89	141.20
100	10	49.95	15.40	38.01	39.95	2.70	21.17	18.46	18463.75	462.17
80	60	99.95	40.56	48.37	39.95	24.93	39.17	14.23	14233.83	356.29
60	110	149.95	49.55	53.75	39.95	41.70	51.59	9.89	9888.67	247.53
50	160	199.95	54.55	57.41	39.95	53.63	61.38	7.75	7746.55	193.91

Tabla B.3: Datos de pruebas experimentales de vaciado para ajuste de  $F_{out}$ .

$h_i$ [cm]	$h_f$ [cm]	$V_i$ [l]	$V_f$ [l]	$\Delta V$ [l]	$\Delta V$ [cm <sup>3</sup> ]	$\int \sqrt{h_c} [cm^{1/2}s]$	$\beta [cm^{5/2}s]$
47.47	4.14	37.30	0.47	-36.83	-36829.88	1695.8	21.72
57.29	3.78	61.04	0.45	-60.59	-60588.79	2979.5	20.34
52.05	5.28	47.41	0.57	-46.84	-46842.88	2419.2	19.36
45.02	4.91	32.53	0.54	-31.99	-31994.40	1580.7	20.24
39.66	3.08	23.55	0.40	-23.15	-23145.69	1048.7	22.07
52.20	4.61	47.78	0.51	-47.27	-47267.37	2352.2	20.09

## B.2. Procedimiento de Ajuste de Subsistema de Temperatura

En este anexo se muestran algunos detalles respecto al procedimiento de ajuste de los parámetros del subsistema de temperatura conductividad térmica  $k_m$  y coeficiente de convección  $h_a$ . En particular, se ilustran en mayor detalle los datos empíricos obtenidos y las evidencias de convergencia del procedimiento de optimización.

### Datos de pruebas de enfriamiento

Los datos obtenidos a partir de las pruebas de enfriamiento de los estanques del sistema tienen por objetivo verificar la dinámica del proceso en distintos puntos de operación. Por esto,

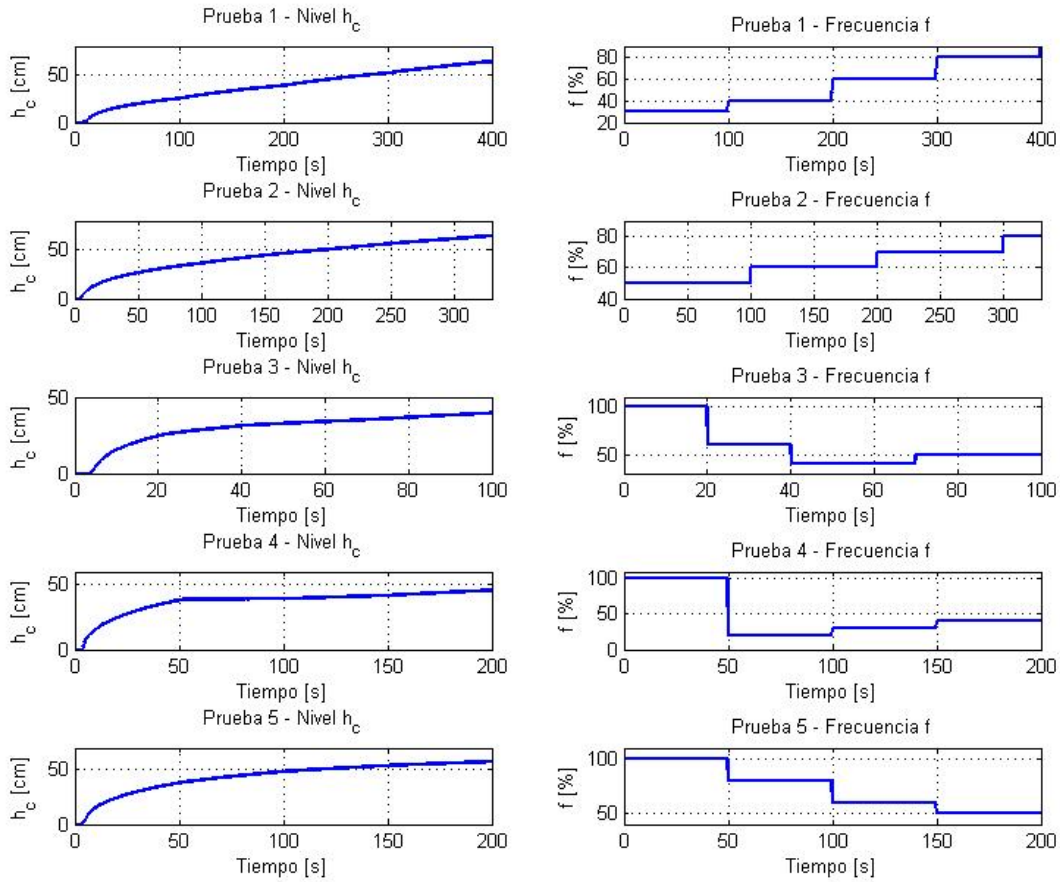


Figura B.1: Pruebas experimentales de llenado para ajuste de  $F_{in}$ .

se configuran dos niveles de temperatura a considerar como punto inicial del enfriamiento: uno en torno a los  $34[^\circ C]$  y otro en torno a los  $44[^\circ C]$ ; en cada uno se lleva inicialmente el total de masa de agua en el estanque de recirculación hasta los  $35$  y  $45[^\circ C]$ , respectivamente, pero al momento de comenzar a registrar los datos la temperatura disminuye parcialmente. Además, se consideran dos puntos de operación respecto al nivel de agua en cada uno de los estanques; en el estanque cónico los niveles son en torno a los  $40$  y  $50[cm]$ , lo que lleva por consecuencia que en el estanque de recirculación los niveles sean en torno a  $34$  y  $36[cm]$ , debido a que la masa de agua total en el circuito es constante.

De todo lo recién mencionado se puede dar cuenta en la Figura B.3, en donde se ilustran en detalle los datos originales obtenidos empíricamente en las pruebas de enfriamiento diseñadas, tanto para el estanque cónico como para el estanque de recirculación. A partir de esta información se realiza el proceso de optimización para el ajuste paramétrico.

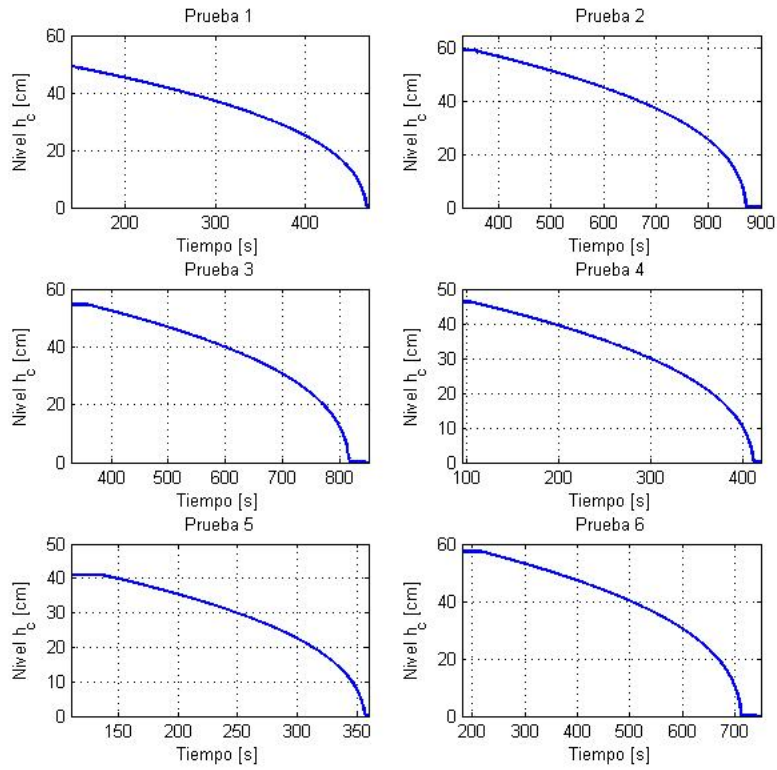


Figura B.2: Pruebas experimentales de vaciado para ajuste de  $F_{out}$ .

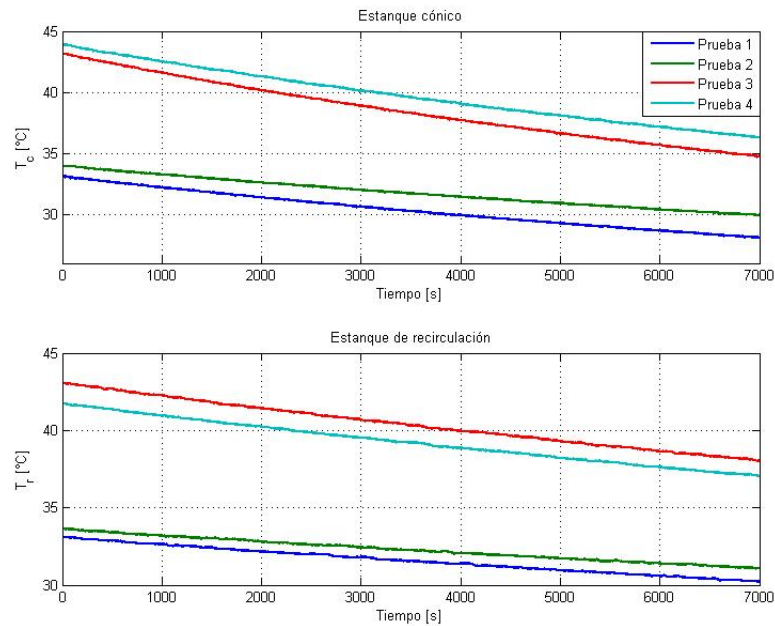


Figura B.3: Datos de pruebas de enfriamiento para ajuste de parámetros de subistema de temperatura.



## Optimización de ajuste de parámetros

El proceso de optimización se lleva a cabo utilizando el entorno Simulink del software Matlab en conjunto con el toolbox PSO [68]. Para cada una de las iteraciones del algoritmo, cada una de las partículas (que posee valores tentativos de  $k_m$  y  $h_a$ ) es evaluada en las ecuaciones diferenciales (3.58) y (3.59). Las ecuaciones se resuelven a través de una implementación en Simulink de las recién mencionadas expresiones dinámicas con un tiempo de muestreo de 0,05[s] (misma frecuencia de muestreo de los datos obtenidos empíricamente); luego, el resultado obtenido para cada uno de los cuatro escenarios de prueba tanto para estanque cónico como de recirculación, es contrastado con los datos reales obtenidos en las pruebas descritas previamente. De esta forma, se obtiene un índice  $IAE$  asociado a cada partícula del enjambre en cada iteración.

A medida que avanza la ejecución del algoritmo los valores de los parámetros se acercan hacia los que minimizan globalmente el índice  $IAE$ , obteniéndose al final del proceso los valores que mejor representan la realidad de los datos a través de las ecuaciones diferenciales en análisis. La Figura B.4 muestra el proceso de convergencia que resulta de la optimización; allí se muestra la evolución (respecto al índice  $IAE$ ) del mejor resultado en cada una de las generaciones (“Best Score”), el cual muestra una convergencia aproximadamente a las 100 iteraciones; además, se muestra la evolución de la media de los puntajes del índice  $IAE$  de todas las partículas que conforman el enjambre (“Mean Score”), la que eventualmente también converge sobre el mejor puntaje obtenido por una de las partículas, lo que garantiza de cierta forma la obtención de un mínimo global del proceso de optimización.

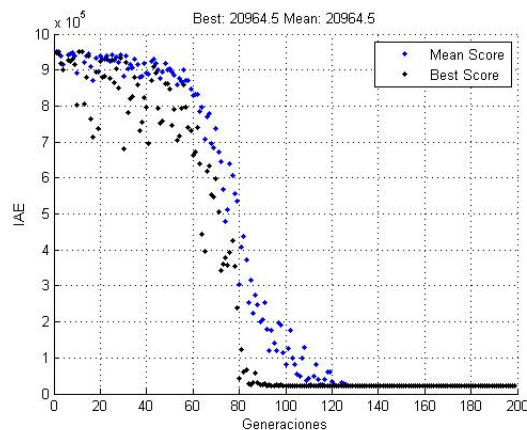


Figura B.4: Convergencia paramétrica de subsistema de temperatura en optimización PSO.

# Anexo C

## Control SISO

### C.1. Sintonización mediante LGR

En este anexo se muestran algunos detalles respecto a la sintonización de controladores PI utilizando el método de Lugar Geométrico de las Raíces y sus resultados de control, para el problema de control SISO en que la variable controlada es el nivel de líquido  $h_c$  dentro del estanque cónico del sistema de estanques.

#### Procedimiento de sintonización

Para la sintonización de controladores mediante el método LGR, se utilizan las linealizaciones del sistema en torno a puntos de operación en su forma de función de transferencia, haciendo uso de la toolbox `rltool` del programa Matlab. A modo de ejemplo, a continuación se muestra un pequeño código, sencillo y genérico, que ilustra la forma en que se utiliza esta herramienta.

```
1 K11 = xxx;  
2 n11 = yyy;  
3 G = tf(K11,[1 n11]);  
4 rltool(G)
```

Para el caso de estudio presente, **xxx** y **yyy** corresponden a los valores presentados en la Tabla 4.1, según sea el caso requerido para sintonizar. Como resultado, este código despliega una ventana de figura donde se representa el plano real-imaginario, y se identifica el polo del sistema; luego, haciendo clic derecho sobre la gráfica, se pueden incluir las especificaciones deseadas para sintonización, un elemento integrador y un cero real (los que definen al controlador) con los cuales se puede modificar el lugar de las raíces para completar el procedimiento de sintonización.

La Figura C.1 muestra el resultado de sintonización, en cuanto a lugar geométrico de las raíces, del procedimiento recién descrito para cada uno de los niveles definidos para el sistema. En cada gráfica, se ilustra con una cruz azul el polo del sistema, mientras que la cruz roja indica el integrador del controlador y el círculo rojo su cero; moviendo este último elemento se

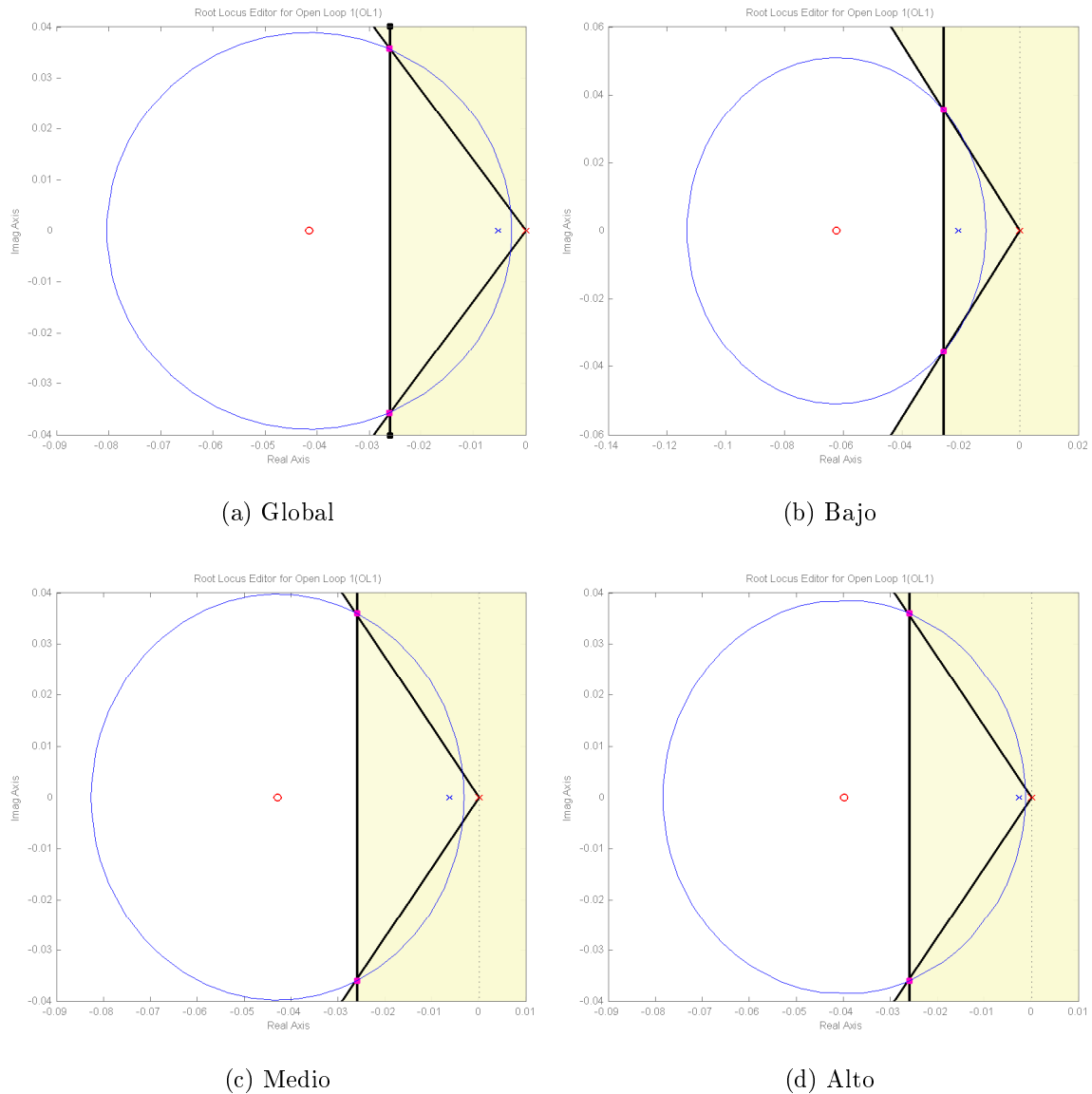


Figura C.1: Lugar Geométrico de las Raíces.

puede modificar el lugar geométrico de las raíces, representado por la circunferencia azul, para hacerlo calzar con la intersección de las rectas negras, lugar definido por las especificaciones de comportamiento deseadas para el sistema dinámico en lazo cerrado. Finalmente, se puede modificar la posición de los puntos rojos, las raíces del sistema, para que se ubiquen exactamente en la intersección señalada. Una vez que se cumple con este procedimiento, se pueden determinar las ganancias del controlador a través de la interfaz de usuario de la herramienta `rltool`.

## Resultados de control

La referencia diseñada para probar el desempeño de los controladores posee varios escalones tanto en subida como bajada de referencia, como se ve ilustrado en la Tabla 4.4 y los resultados

gráficos de control en la Figura 4.1; en consecuencia, las especificaciones de respuesta transitoria pueden ser medidas en cada uno de estos cambios de escalón. La Tabla C.1 muestra el detalle de las especificaciones de respuesta transitoria para cada uno de los escalones que componen la prueba; los elementos  $r_i$  hacen referencia al  $i$ -ésimo escalón de la señal de referencia.

Tabla C.1: Especificaciones de respuesta transitoria para controladores sintonizados con LGR.

Controlador	$r(t)$	$MOV$	$E_{ss}$	$t_d$	$t_r$	$t_p$	$t_s$
PI Global	$r_1$	13	7.23E-10	3.00	14.75	30.70	58.85
	$r_2$	36	1.42E-03	15.70	39.95	72.55	198.00
	$r_3$	55	6.05E+00	35.00	83.05	159.20	400.00
	$r_4$	64	3.10E-02	19.70	109.90	200.45	252.15
	$r_5$	125	4.68E-05	71.25	125.70	197.65	267.75
	$r_6$	58	1.10E-07	21.30	38.85	56.60	112.35
PI Niveles	$r_1$	16	4.39E-03	3.50	23.75	54.40	90.70
	$r_2$	40	4.34E-03	17.40	41.65	77.30	221.75
	$r_3$	56	6.04E+00	35.05	83.10	158.45	400.00
	$r_4$	70	2.06E-01	19.85	110.00	209.20	326.85
	$r_5$	137	1.23E-01	69.40	123.80	198.95	317.35
	$r_6$	56	5.04E-05	20.55	38.10	58.90	97.30

## C.2. Sintonización mediante Z&N

En este anexo se presentan los detalles en cuanto a resultados de control frente a la señal de referencia diseñada para el control SISO del nivel  $h_c$ ; particularmente, se muestran individualmente las especificaciones de respuesta transitoria para cada uno de los escalones de prueba en simulación.

### Curva de Reacción

Para el caso de los controladores sintonizados mediante el método de Curva de Reacción de Z&N, cuyos resultados gráficos se ilustran en la Figura 4.3, se tiene las especificaciones de respuesta transitoria mostradas en la Tabla C.2 para los controladores PID de orden entero y PID de orden fraccionario, o PIDOF.

### Límite de Estabilidad

En cuanto al método Límite de estabilidad de Z&N, según lo desarrollado en la Sección 4.2, sólo se cuenta con la solución del caso de orden entero, ya que la aplicación del procedimiento entrega índices de integración y derivación que hacen diverger ciertas señales del sistema, incluso cuando se relajan las restricciones. El detalle de las respuestas transitorias del controlador de la Figura 4.5 y que se define numéricamente en la Tabla 4.11, se muestra en la Tabla C.3.

Tabla C.2: Especificaciones de respuesta transitoria para controlador sintonizados con Curva de Reacción Z&N.

Controlador	$r(t)$	$MOV$	$E_{ss}$	$t_d$	$t_r$	$t_p$	$t_s$
PID	$r_1$	21	5.34E-03	3.20	15.00	30.70	134.20
	$r_2$	57	5.57E-01	15.70	39.95	84.15	397.85
	$r_3$	66	2.48E+00	44.10	92.15	182.30	400.00
	$r_4$	165	2.93E+00	71.45	161.60	335.40	400.00
	$r_5$	150	2.59E+00	154.55	208.95	287.05	400.00
	$r_6$	200	3.41E-05	38.20	55.80	95.05	178.00
PIDOF	$r_1$	16	7.27E-05	3.00	14.70	27.25	75.45
	$r_2$	47	7.85E-02	15.70	39.95	76.30	271.65
	$r_3$	59	5.23E+00	35.35	83.40	163.10	400.00
	$r_4$	87	1.37E-01	31.15	121.30	235.65	357.55
	$r_5$	148	1.05E-01	73.05	127.50	204.75	300.90
	$r_6$	87	8.50E-04	20.65	38.20	61.40	110.45

Tabla C.3: Especificaciones de respuesta transitoria para controlador sintonizados con Límite de Estabilidad Z&N.

Controlador	$r(t)$	$MOV$	$E_{ss}$	$t_d$	$t_r$	$t_p$	$t_s$
PID	$r_1$	38	1.35E-01	3.00	14.70	33.55	368.35
	$r_2$	65	7.20E+00	15.90	40.15	88.00	400.00
	$r_3$	45	6.58E-01	14.95	63.00	119.85	389.60
	$r_4$	144	2.16E+01	148.85	239.00	399.95	400.00
	$r_5$	148	9.00E-02	0.00	0.00	42.05	376.90
	$r_6$	137	0.00E+00	20.75	38.30	69.45	124.10

### C.3. Sintonización mediante optimización PSO

En este anexo se muestran algunos detalles y consideraciones respecto a temas atinentes al procedimiento de optimización de controladores mediante optimización PSO; en particular, se desarrollan algunas ideas concernientes al procedimiento de sintonización en sí, y se detallan de manera gráfica y numérica los resultados de control obtenidos mediante simulación.

#### Procedimiento de sintonización

EL procedimiento de sintonización mediante optimización PSO se realiza de manera iterativa realizando simulaciones con el modelo no lineal desarrollado para el subsistema de nivel. Cada una de las partículas del enjambre se evalúa en un lazo cerrado de control poniendo a prueba los parámetros de control que definen su posición en el espacio de soluciones posibles; al respecto, la idea es que la referencia de este procedimiento sea lo más general posible, abarcando cada uno de los rangos definidos para el sistema en subidas y bajadas de escalón de distintas magnitudes. Como resultado de este requerimiento se diseña una señal de referencia que cumpla con estas

consideraciones; gráficamente se ve ilustrada en la Figura 4.7, no obstante, el detalle de su composición y estructura se puede consultar en la Tabla C.4. Para el rango Bajo se tienen escalones de 150 [s] de duración, para el Medio de 200 [s] y para el alto 250 [s]; la razón de este aumento del tiempo de cada escalón se explica en la no linealidad del sistema, la que produce que el tiempo de respuesta del sistema sea mayor a medida que se aumenta el valor de la variable  $h_c$ , por lo que resulta necesario una mayor cantidad de tiempo para realizar control.

Tabla C.4: Señal de referencia para optimización PSO SISO.

Rango Bajo							
$t$ [s]	[0-150]	[150-300]	[300-450]	[450-600]	[600-750]	[750-900]	[900-1050]
$r_{PSO}(t)$ [cm]	22.5	15	30	22.5	30	15	22.5
Rango Medio							
$t$ [s]	[1050-1250]	[1250-1450]	[1450-1650]	[1650-1850]	[1850-2050]	[2050-2250]	[2250-2450]
$r_{PSO}(t)$ [cm]	37.5	30	45	37.5	45	30	37.5
Rango Alto							
$t$ [s]	[2450-2700]	[2700-2950]	[2950-3200]	[3200-3450]	[3450-3700]	[3700-3950]	[3950-4200]
$r_{PSO}(t)$ [cm]	52.5	45	60	52.5	60	45	52.5

## Resultados de control

Una vez obtenidos los controladores mediante el procedimiento de optimización, se someten a prueba con la señal de referencia diseñada para el control SISO de nivel  $h_c$  en simulación; los resultados se ilustran de forma general en la Figura 4.8. Sin embargo, debido al comportamiento similar entre ellos, no se distinguen gráficamente las diferencias entre unos y otros; por esto, en la Figura C.2, se presentan ampliaciones de cada uno de los escalones, lo que permite observar de forma directa el comportamiento particular de cada uno de ellos.

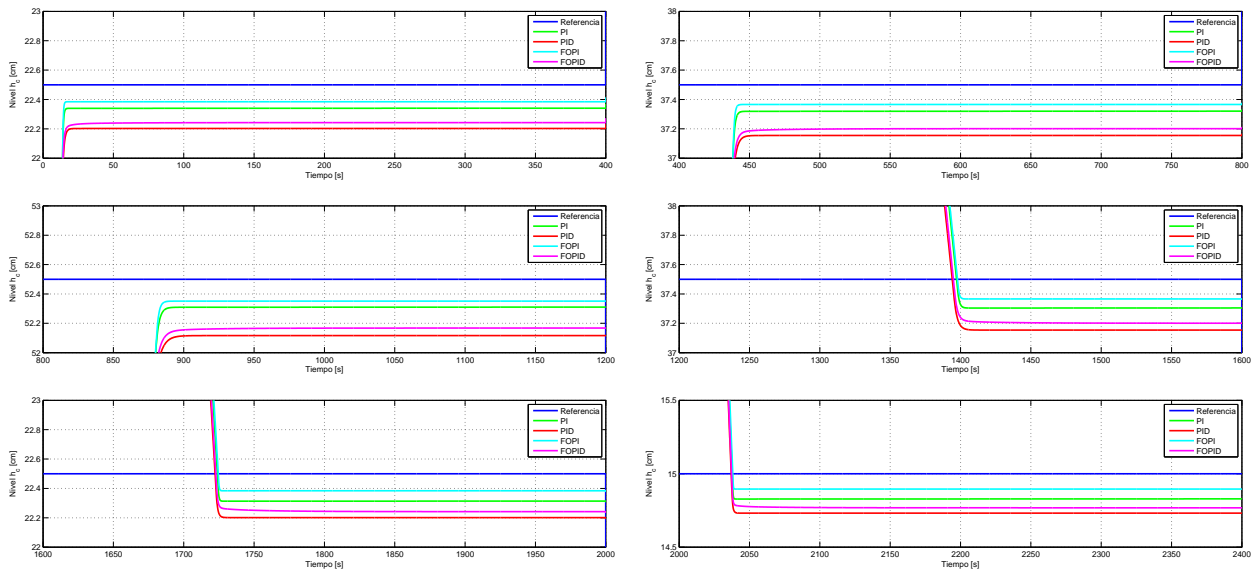


Figura C.2: Ampliaciones de resultados en simulación de controladores sintonizados con PSO.

En línea con la necesidad de detallar el comportamiento en simulación de los controladores sintonizados mediante PSO para poder distinguir sus respuestas, la Tabla C.5 resume las especificaciones de respuesta transitoria para cada una de los escalones de la señal de referencia de prueba, los cuales se detallan en las gráficas presentadas en la Figura C.2.

Tabla C.5: Especificaciones de respuesta transitoria para controladores sintonizados con PSO.

Controlador	$r(t)$	$MOV$	$E_{ss}$	$t_d$	$t_r$	$t_p$	$t_s$
PI	$r_1$	0	1.59E-01	3.00	400.00	400.00	12.95
	$r_2$	0	1.80E-01	15.95	400.00	400.00	37.30
	$r_3$	0	1.90E-01	35.70	400.00	400.00	78.30
	$r_4$	1	1.95E-01	107.05	197.20	210.60	189.05
	$r_5$	1	1.86E-01	69.50	123.90	130.40	119.20
	$r_6$	2	1.71E-01	20.15	37.70	41.50	36.10
PID	$r_1$	0	2.98E-01	3.00	400.00	400.00	12.95
	$r_2$	0	3.45E-01	16.15	400.00	400.00	37.70
	$r_3$	0	3.84E-01	36.35	400.00	400.00	79.25
	$r_4$	2	3.46E-01	103.95	194.10	224.75	185.95
	$r_5$	2	2.99E-01	67.90	122.30	138.65	117.60
	$r_6$	4	2.68E-01	19.45	37.05	50.45	35.45
PIOF	$r_1$	0	1.16E-01	3.00	400.00	400.00	12.95
	$r_2$	0	1.34E-01	15.85	400.00	400.00	37.25
	$r_3$	0	1.49E-01	35.55	400.00	400.00	78.15
	$r_4$	1	1.34E-01	107.70	197.85	209.70	189.70
	$r_5$	1	1.16E-01	70.15	124.60	129.90	119.85
	$r_6$	1	1.04E-01	20.55	38.15	41.25	36.55
PIDOF	$r_1$	0	2.58E-01	3.00	400.00	400.00	12.95
	$r_2$	0	2.99E-01	16.10	400.00	400.00	37.50
	$r_3$	0	3.32E-01	36.20	400.00	400.00	78.80
	$r_4$	2	2.99E-01	104.80	194.95	399.95	186.80
	$r_5$	2	2.58E-01	68.40	122.80	399.95	118.10
	$r_6$	3	2.32E-01	19.70	37.30	308.65	35.70

## C.4. Resultados experimentales

Para validar los controladores encontrados para el problema de control de nivel  $h_c$ , se someten a pruebas experimentales con el sistema real; en particular, se escogen los controladores sintonizados a través del método de optimización PSO, ya que son los que mejor desempeño muestran en simulación. Con esto, se busca verificar que el comportamiento dictado por simulaciones no dista de lo que se tiene en la realidad; bajo esta premisa, probar los controladores sintonizados con los otros métodos presentados no resulta un caso de análisis interesante, puesto que se tendría a disposición una mejor solución.

Los resultados gráficos de control ilustrados de forma general en la Figura 4.9, se detallan para cada uno de los escalones de la prueba en la Figura C.3; para una mejor exhibición de

la respuesta, la salida del sistema es sometida a un filtro pasabajos con frecuencia de corte  $\omega_c = 1$  [rad/s]. Las características de cada respuesta a los cambios de escalón se especifican en la Tabla C.6, a través de la visualización numérica de las especificaciones de respuesta transitoria asociadas.

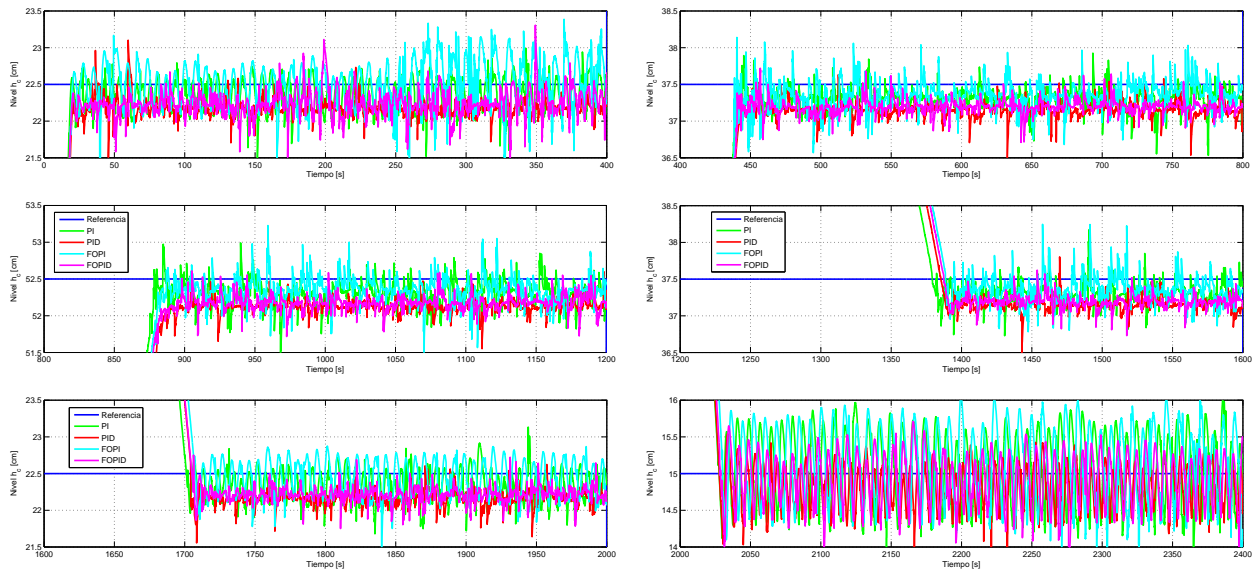


Figura C.3: Ampliaciones de resultados en simulación de controladores sintonizados con PSO.



Tabla C.6: Especificaciones de respuesta transitoria para controladores sintonizados con PSO en prueba experimental.

Controlador	$r(t)$	$MOV$	$E_{ss}$	$t_d$	$t_r$	$t_p$	$t_s$
PI	$r_1$	2	6.81E-02	7.75	19.20	342.60	17.15
	$r_2$	3	4.07E-01	17.30	41.60	293.40	375.55
	$r_3$	3	2.85E-01	35.00	78.25	139.85	168.85
	$r_4$	5	1.07E-01	98.85	179.20	230.65	230.70
	$r_5$	5	1.32E-01	59.55	101.20	235.20	300.20
	$r_6$	16	1.02E-01	15.30	27.80	364.75	398.30
PID	$r_1$	3	2.87E-01	7.95	34.15	59.80	18.60
	$r_2$	1	5.16E-01	18.50	55.90	112.45	363.40
	$r_3$	1	2.19E-01	38.35	398.15	398.15	311.90
	$r_4$	7	3.79E-01	101.55	185.40	242.95	243.40
	$r_5$	6	3.40E-01	60.95	104.25	108.45	347.15
	$r_6$	16	5.24E-01	15.75	27.80	232.20	400.00
PIOF	$r_1$	4	2.60E-01	8.15	20.25	369.65	327.80
	$r_2$	4	5.25E-02	17.45	38.65	40.30	314.65
	$r_3$	5	7.54E-02	36.50	87.05	159.20	308.55
	$r_4$	5	1.55E-01	105.35	188.55	247.40	181.90
	$r_5$	8	4.15E-01	63.20	107.35	239.95	240.40
	$r_6$	21	7.83E-01	18.35	30.05	399.15	400.00
PIDOF	$r_1$	4	1.56E-01	7.55	82.90	349.25	331.25
	$r_2$	1	3.00E-01	19.20	53.90	56.95	244.55
	$r_3$	1	3.55E-01	37.65	98.00	105.20	380.70
	$r_4$	5	3.63E-01	103.30	187.35	317.45	317.50
	$r_5$	5	3.57E-01	60.60	105.10	210.75	101.40
	$r_6$	20	4.95E-01	16.40	28.55	397.35	400.00

# Anexo D

## Control MIMO

### D.1. Intervalo de Operación

Para definir el intervalo de operación de la variable  $h_c$  en el problema de control MIMO, se recurre a restricciones que involucran los niveles mínimos de agua dentro de los estanques cónico y de recirculación. Según lo mencionado en la Sección 5.1.1, el valor mínimo de nivel de líquido en el estanque cónico está dado por la restricción respecto al sensor de temperatura PT100, lo que conlleva a que  $h_c \geq 30$  [cm]. Por su parte, el estanque de recirculación no puede operar con un nivel de agua por debajo de la acción del agitador mecánico, porque se tendrían salpicaduras de agua fuera de la estructura; por esto, se define la restricción  $h_r \geq 30$  [cm].

Ahora bien, el volumen de agua dentro del estanque de recirculación puede ser expresado por

$$V_r = d^2 h_r, \quad (\text{D.1})$$

donde  $d$  corresponde a la dimensión de la arista del cuadrado base del estanque. Luego, el máximo de volumen se tiene con la altura máxima posible dentro del estanque de recirculación  $h_r = 55$  [cm], lo que se traduce en  $V_r = 137500$  [cm<sup>3</sup>]; mientras que la restricción mínima planteada para no tener inconvenientes de salpicadura  $h_r = 30$  [cm], lleva a un volumen mínimo de  $V_r = 75000$  [cm<sup>3</sup>]. En consecuencia, se tiene un volumen de agua disponible para mover hacia el estanque cónico de  $\Delta V = 62500$  [cm<sup>3</sup>].

Para determinar la restricción máxima de nivel dentro del estanque cónico se asume que todo el volumen  $\Delta V$  es movilizado hacia su interior; luego, el nivel se puede obtener de resolver la ecuación  $V(h_c) = \Delta V$ , con  $V(h_c)$  la función de volumen dentro del estanque cónico presentada en (3.6). A fin de cuentas, se determina que esta condición se tiene cuando  $h_c = 58,38$  [cm]; sin embargo, para prevenir posibles sobrepasos en una prueba de control, se determina que el nivel de operación máximo dentro del estanque cónico sea  $h_c = 50$  [cm].

## D.2. Modulación $q_{in}$

En este anexo se muestra detalles respecto a las estrategias de modulación desarrolladas en la Sección 5.2, para determinar una acción de control  $q_{in}$  interpretable por el actuador del subsistema de temperatura: el calefactor trifásico.

A continuación, se detalla la interpretación de cada modulación junto a gráficas que permitan entender sus lógicas de funcionamiento; para esto, se asume una señal a modular  $q$  de tipo sinusoidal, ejemplo genérico de una posible acción de control generada por un controlador, a partir de la cual se obtiene  $q_{in}$ , como se señala en el diagrama de la Figura 5.2.

### Modulación On/Off

La modulación On/Off consiste en compara la señal  $q$  con distintos niveles fijos establecidos; en particular, en el caso de una acción de control para el calefactor, se tiene que los posibles flujos calóricos son los que cada una de las fases de este actuador puede entregar. Según la experimentación realizada en el Capítulo 3, se determina que cada fase es capaz de producir  $2500 [J/s]$ , por lo que la acción del calefactor se limita al conjunto de valores  $q_{in} \in \{0, 2500, 5000, 7500\} [J/s]$ .

El enfoque de modulación On/Off 3F, que prende o apaga las tres fases del calefactor al unísono, se puede definir matemáticamente de la forma

$$q_{in} = \begin{cases} 7500 & 7500 \leq q \\ 0 & q < 7500 \end{cases} ; \quad (D.2)$$

la interpretación de esta lógica se puede observar en la gráfica izquierda de la Figura D.1.

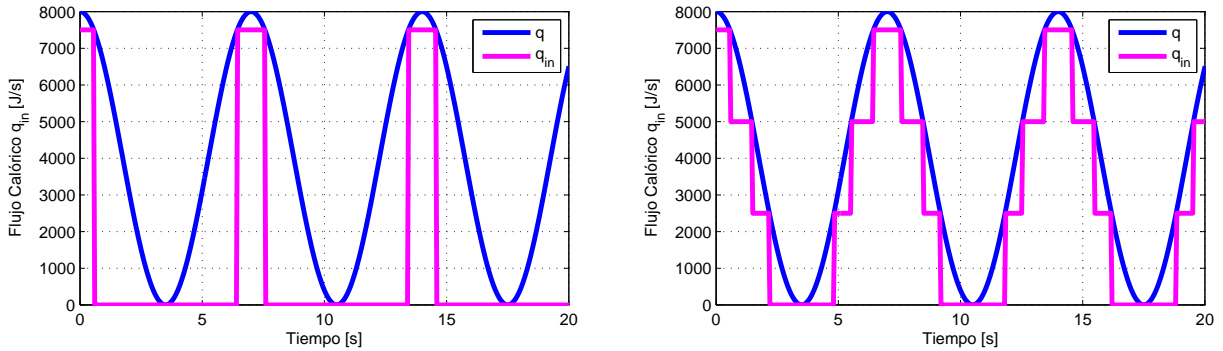


Figura D.1: Modulaciones On/Off de  $q_{in}$ .

Por su parte, el enfoque ON/Off 1F, que considera la acción de cada fase por separado, se puede entender como

$$q = \begin{cases} 7500 & 7500 \leq q \\ 5000 & 5000 \leq q < 7500 \\ 2500 & 2500 \leq q < 5000 \\ 0 & q < 2500 \end{cases} . \quad (D.3)$$

La interpretación de este esquema se muestra en la gráfica derecha de la Figura D.1. A partir de la comparación de ambas gráficas se puede observar que, para una misma acción de control  $q$ , la modulación entrega distintas interpretaciones de  $q_{in}$  como resultado; en consecuencia, esto afecta de forma significativa la aplicación de una u otra en un esquema de control.

## Modulación PWM

El esquema de modulación PWM consiste en comparar la señal a modular con una señal de tipo periódica denominada portadora, en palabras sencillas, cuando la primera es mayor que la segunda, se produce una acción, en caso contrario, no se produce. La señal portadora  $c(t)$  puede ser de diversas formas, como sinusoidal o punta de sierra, pero en este caso particular se considera una señal triangular. La Figura D.2 muestra un caso de ejemplo de aplicación de esta modulación, en donde la comparación se realiza de forma continua; sin embargo, esto puede ser nocivo para el calefactor, porque se pueden dar casos de picos de corriente circulando por las fases. Luego, se introduce una modificación a la lógica tradicional de PWM, la que consiste en realizar la comparación de señales cada 2 [s]; con esto, se garantiza que el menor lapso en que una fase se puede encontrar encendida es del tiempo mencionado.

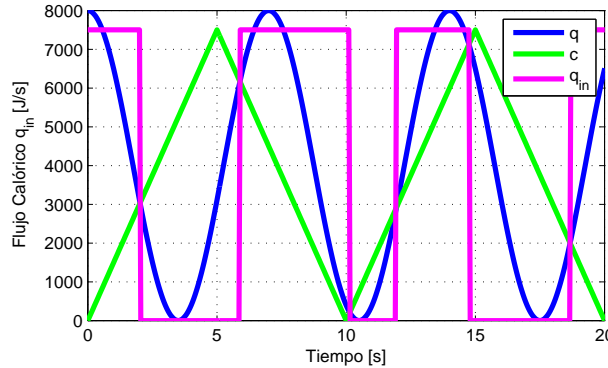


Figura D.2: Ejemplo de modulación PWM  $q_{in}$ .

En términos concretos, para la estrategia PWM 3F, en donde se consideran las tres fases actuando de manera conjunta, se tiene una única señal portadora  $c(t)$  de tipo triangular, con valor máximo 7500, mínimo 0 y de período  $T = 10$  [s]. En función de esto, la modulación se puede describir por

$$q = \begin{cases} 7500 & c \leq q \\ 0 & q < c \end{cases} ; \quad (\text{D.4})$$

la aplicación de esto se puede visualizar en la gráfica izquierda de la Figura D.3.

En tanto, el caso de la modulación PWM 1F, en la que cada fase puede actuar por separado, considera tres señales portadoras, una para cada una de las fases del calefactor. Todas las portadoras son idénticas entre sí, pero se encuentran desplazadas en función de cubrir el rango de acción de flujo calórico que cada fase puede aportar al sistema; es decir, se tiene una una señal portadora  $c_1$  (considerada para la fase 1, aunque estas no se encuentran en realidad numeradas), de tipo triangular, valor máximo 2500, mínimo 0 y período  $T = 10$  [s], una señal portadora  $c_2$  que corresponde a  $c_1$  desplazada de forma que cubra el rango de flujo [2500 – 5000] [J/s], y

una portadora  $c_3$  que se considera como  $c_1$  desplazada para cubrir el rango  $[5000 - 7500]$   $[J/s]$ . Luego, se puede expresar su acción de modulación de la forma

$$q = \begin{cases} 7500 & c_3 \leq q \\ 5000 & c_2 \leq q < c_3 \\ 2500 & c_1 \leq q < c_2 \\ 0 & q < c_1 \end{cases} . \quad (D.5)$$

La aplicación de lo recién explicado se puede observar en la gráfica derecha de la Figura D.3.

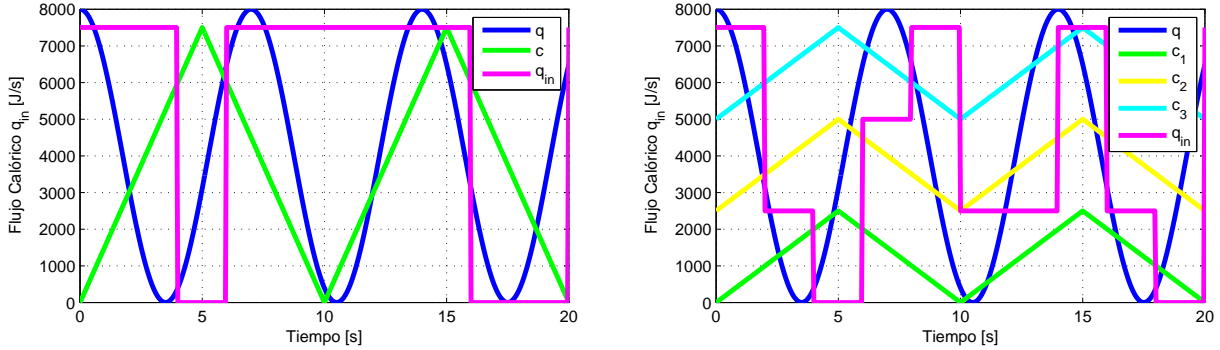


Figura D.3: Modulaciones PWM de  $q_{in}$  con muestreo  $T = 2$   $[s]$ .

### D.3. Sintonización en Frecuencia

En esta sección se presentan ciertos detalles, en cuanto a implementación y resultados, de la aplicación del esquema de sintonización de parámetros de controladores bajo consideraciones en el espacio de la frecuencia. Los códigos aquí mostrados son referenciales para explicar el desarrollo de las etapas que plantea este método.

#### Procedimiento de sintonización

Para llevar a cabo el procedimiento de sintonización de parámetros siguiendo las etapas de lo establecido en la Sección 5.3, se hace uso de la herramienta de optimización `fmincon` del software Matlab. Esta función permite resolver problemas de optimización de funciones no lineales con restricciones. La implementación del problema de optimización se muestra en el siguiente trozo de código.

```

1 % Funcion Objetivo
2 fun = @'FuncionObjetivo';
3 % Limites de parametros del controlador
4 lb = [0,0,0.75,0,0];
5 ub = [inf,inf,1,inf,0.25];
6 % Punto de partida busqueda de optimo
7 K0 = 'PuntoDePartida';
8 % Declaracion de restricciones

```

```

9  nonlcon = @constraints;
10 % Solucion del problema de optimizacion
11 options = optimoptions(@fmincon,'Algorithm','interior-point');
12 K = fmincon(fun,K0,[],[],[],[],lb,ub,nonlcon,options);

```

Se presenta el caso general para sintonización del controlador PIDOF, ya que a partir de este se pueden recuperar el resto de casos de controladores que resultan ser simplificaciones de este esquema; además, aplica tanto para el caso de nivel  $h_c$  como de temperatura  $T_c$ . En el código presentado se configuran los límites inferior `lb` y superior `ub` de los parámetros de los controladores, ordenados en vectores de la forma  $[K_p K_i \lambda K_d \mu]$ . También se considera el punto inicial '`PuntoDePartida`' desde el que se comienza el algoritmo de búsqueda; en cada caso este parámetro varía y se realizan una serie de iteraciones hasta que se encuentra una solución factible para el problema. De igual forma, se define en `options` el tipo de algoritmo a utilizar, en este caso el algoritmo del punto interno.

En cuanto a la función objetivo '`FuncionObjetivo`' se tienen dos casos, según la función de transferencia a considerar para la optimización; no obstante, responden a la misma declaración de lo mostrado en la ecuación (2.34). Para el caso de la salida  $h_c$  la función objetivo se declara según el siguiente código.

```

1  % Datos de la planta
2  K11 = 0.003589;
3  n11 = 0.005389;
4  % Funcion objetivo
5  fun = @(K) abs(abs((K(1)+K(2)/wcg^K(3))*(cos(pi*K(3)/2)-1j*sin(pi*K(3)/2))...
6  +K(4)*wcg^K(5)*(cos(pi*K(5)/2)+1j*sin(pi*K(5)/2)))*K11/(1j*wcg+n11))-1);

```

Por su parte, para el caso de la salida  $T_c$  la función objetivo se declara según lo ilustrado en el siguiente fragmento.

```

1  % Datos de la planta
2  K22 = -1.142e-08;
3  m22 = -0.006553;
4  n22 = -1.723e-07;
5  % Funcion objetivo
6  fun = @(K) abs(abs((K(1)+K(2)/wcg^K(3))*(cos(pi*K(3)/2)-1j*sin(pi*K(3)/2))...
7  +K(4)*wcg^K(5)*(cos(pi*K(5)/2)+1j*sin(pi*K(5)/2)))*K22/((1j*wcg)^2+m22*1j*wcg
  +n22))-1);

```

La diferencia fundamental entre ambos pasa por la definición de planta que se hace para la sintonización, las cuales se consideran como los elementos en la diagonal de la matriz función de transferencia en (5.9).

Ahora bien, las restricciones `nonlcon` del problema de optimización se definen en la función `constraints`, considerando según el caso de controlador las correspondientes expresiones. De forma general, las restricciones se implementan según la ejemplificación del siguiente código.

```

1  function [c,ceq] = fopid_constraints(K)
2  c = [ % Restriccion r1
3  abs(angle('Controlador(wcg)')*'Planta(wcg)')+phi-phm)-e1;
4  % Restriccion r2

```

```

5  abs('RestriccionRobustez(wcg)')-e2;
6  % Restriccion r3
7  abs('Controlador(wh) '* 'Planta(wh)')/(1+'Controlador(wh) '* 'Planta(wh)')-H-e3;
8  % Restriccion r4
9  abs(1/(1+'Controlador(wl) '* 'Planta(wl)'))-N-e4];
10 ceq = [];
11 end

```

Las restricciones **r1** a **r4** corresponden a lo enunciado en las ecuaciones (2.35) a (2.38); además, dependiendo del controlador a sintonizar, se consideran una, dos o las cuatro, según lo mencionado en la Sección 5.3. Ahora bien, la derivada de la restricción **r2** (en el código mostrado **RestriccionRobustez**), establecida en (2.38), depende de cada caso de sintonización; sin embargo, la forma de determinarla es equivalente para todos. Para llevar a cabo esto, se considera una notación rectangular del controlador y la planta evaluadas en  $j\omega$ ; es decir, se considera al controlador  $C(j\omega) = C_r + jC_i$ , mientras que a la planta  $G(j\omega) = G_r + jG_i$ . En función de esto, con las siguientes líneas de código, donde se presenta el caso PIDOF por incluirlos a todos, se puede dar forma a la derivada pedida.

```

1  Cr = Kp+Ki/w^lambda*cos(pi*lambda/2)+Kd*w^mu*cos(pi*mu/2);
2  Ci = Kd*w^mu*sin(pi*mu/2)-Ki/w^lambda*sin(pi*lambda/2);
3  RestriccionRobustez = simple(diff(atan((Cr*Gi+Ci*Gr)/(Cr*Gr-Ci*Gi)), 'w'));

```

En todos los casos presentados **wcg**, **phm**, **wh**, **H**, **wl** y **N**, corresponden a las especificaciones establecidas para la sintonización según lo que se muestra en la Tabla 5.5, descritas en el mismo orden allí presentado; mientras que **lambda** y **mu** hacen referencia a los órdenes de integración y derivación fraccionarios, respectivamente.

A partir de la aplicación de los códigos mostrados, se obtienen los controladores que figuran en la Tabla 5.6; para cada uno de ellos, en la Tabla D.1 se resumen los valores obtenidos del proceso de optimización en cuanto a la función objetivo  $f$  y las restricciones  $r_1$  a  $r_4$ .

Tabla D.1: Cumplimiento de función objetivo y restricciones de controladores sintonizados en frecuencia.

Salida	Controlador	$f$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$
$h_c$	PI	0.720	0.530	0.603	-0.080	-0.078
	PID	0.720	0.898	0.844	0.187	-0.072
	PIOF	0.720	0.936	0.487	-0.014	-0.046
	PIDOF	1.162	0.991	0.753	0.184	-0.080
$T_c$	PI	1.000	-0.330	4.163	-0.342	0.152
	PID	0.008	1.000	9.625	-0.343	0.894
	PIOF	1.000	0.924	9.105	0.111	0.340
	PIDOF	1.000	0.637	9.776	0.117	0.325

## Resultados de control

A partir de los parámetros de controladores determinados, mostrados en cada caso en la Tabla 5.6, se aplican mediante simulación al modelo del sistema de estanques. En cuanto al desarrollo de la Prueba 1, el detalle de las especificaciones de respuesta transitoria para cada uno de los escalones de la prueba, se pueden consultar en la Tabla D.2; los valores mostrados en la Tabla 5.10 son la suma de cada una de las columnas correspondientes a cada indicador.

Tabla D.2: Especificaciones de respuesta transitoria para controladores sintonizados en frecuencia - Prueba 1.

Salida	Controlador	$r(t)$	$MOV$	$E_{ss}$	$t_d$	$t_r$	$t_p$	$t_s$
$h_c$	PI	$r_1$	78.10	0.00	24.65	55.10	115.95	2577.30
		$r_2$	124.03	0.00	71.10	133.35	252.05	1868.15
		$r_3$	132.67	0.00	53.80	99.50	185.10	913.65
		$r_4$	74.41	0.00	15.10	34.65	73.35	1355.35
$h_c$	PID	$r_1$	77.27	0.00	24.65	55.10	115.25	1712.30
		$r_2$	123.10	0.00	71.10	133.35	251.35	1301.10
		$r_3$	131.12	0.00	53.80	99.50	184.35	629.05
		$r_4$	73.23	0.00	15.10	34.65	72.65	876.45
$h_c$	PIOF	$r_1$	77.30	0.00	24.65	55.10	115.25	1740.20
		$r_2$	123.12	0.00	71.10	133.35	251.35	1315.00
		$r_3$	131.21	0.00	53.80	99.50	184.40	636.35
		$r_4$	73.27	0.00	15.10	34.65	72.70	887.35
$h_c$	PIDOF	$r_1$	77.62	0.00	24.65	55.10	115.55	1964.35
		$r_2$	123.44	0.00	71.10	133.35	251.60	1456.95
		$r_3$	131.75	0.00	53.80	99.50	184.65	705.80
		$r_4$	73.69	0.00	15.10	34.65	72.95	1001.15
$T_c$	PI	$r_1$	198.05	6.36	388.65	453.55	1522.80	3000.00
		$r_2$	58.98	0.48	0.00	0.00	0.00	3000.00
		$r_3$	36.67	0.73	636.40	1993.45	2999.95	3000.00
		$r_4$	53.38	1.07	353.30	1590.40	2999.95	3000.00
$T_c$	PID	$r_1$	156.71	4.69	388.90	671.15	1371.55	3000.00
		$r_2$	17.15	2.00	0.00	0.00	0.00	3000.00
		$r_3$	106.22	2.12	0.00	1.55	2999.95	3000.00
		$r_4$	116.49	2.33	0.00	0.00	2999.95	3000.00
$T_c$	PIOF	$r_1$	184.58	5.84	384.45	451.10	1378.00	3000.00
		$r_2$	45.90	0.96	0.00	0.00	0.00	3000.00
		$r_3$	58.37	1.17	31.35	1383.75	2999.95	3000.00
		$r_4$	73.06	1.46	0.00	1054.75	2999.95	3000.00
$T_c$	PIDOF	$r_1$	192.02	6.13	386.00	451.90	1430.65	3000.00
		$r_2$	53.15	0.69	0.00	0.00	0.00	3000.00
		$r_3$	46.32	0.93	342.30	1723.40	2999.95	3000.00
		$r_4$	62.13	1.24	122.85	1353.10	2999.95	3000.00



## D.4. Sintonización mediante optimización PSO

A raíz del procedimiento de sintonización de controladores para el problema MIMO, desarrollado en la Sección 5.4, se utiliza el algoritmo PSO para encontrar una solución que minimice el índice propuesto en (5.10). Como resultado de este proceso, se obtienen los controladores mostrados en las Tablas 5.14 y 5.15 para los casos descentralizado y centralizado, respectivamente; a modo de evidencia de la convergencia del proceso se presentan las Figuras D.4 y D.5, para los controladores descentralizados y centralizados respectivamente, donde en cada caso se observa la evolución de las partículas respecto a la función de fitness, mostrándose el mejor resultado de cada generación y el promedio entre todas las partículas del enjambre. Se puede observar que a medida que avanzan las iteraciones del proceso, el mejor resultado comienza a converger a un valor fijo, mientras que el promedio de las partículas converge sobre el mejor resultado.

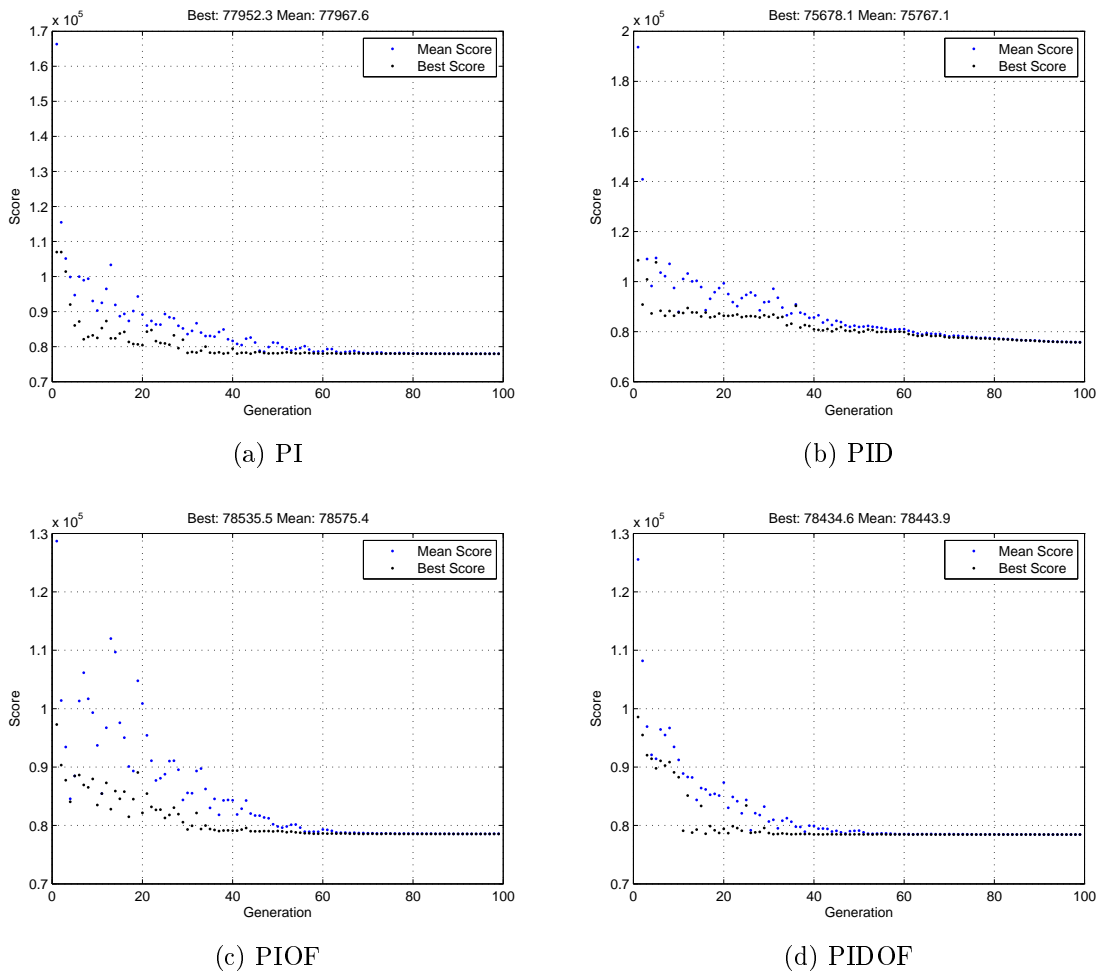


Figura D.4: Convergencia de algoritmo PSO MIMO en sintonización de controladores descentralizados.

En cuanto al análisis numérico de los resultados de control presentados en la Sección 5.4, particularmente los asociados a la Prueba 1, las Tablas D.3 y D.4 muestran el detalle de las especificaciones de respuesta transitoria de cada uno de los escalones que compone la prueba, para ambas salidas del proceso: la primera corresponde a los controladores de esquema descentralizado, mientras que la segunda a los de esquema centralizado. Respecto a la Prueba 2, se obvia el detalle de especificaciones de respuesta transitoria, ya que ese caso se busca evaluar el comportamiento de los controladores respecto a la salida  $T_c$  cuando  $h_c$  varía a modo de perturbación por el acoplamiento, y para la variable temperatura se detalla la respuesta transitoria en las tablas presentadas, puesto que su caso corresponde a un único escalón.

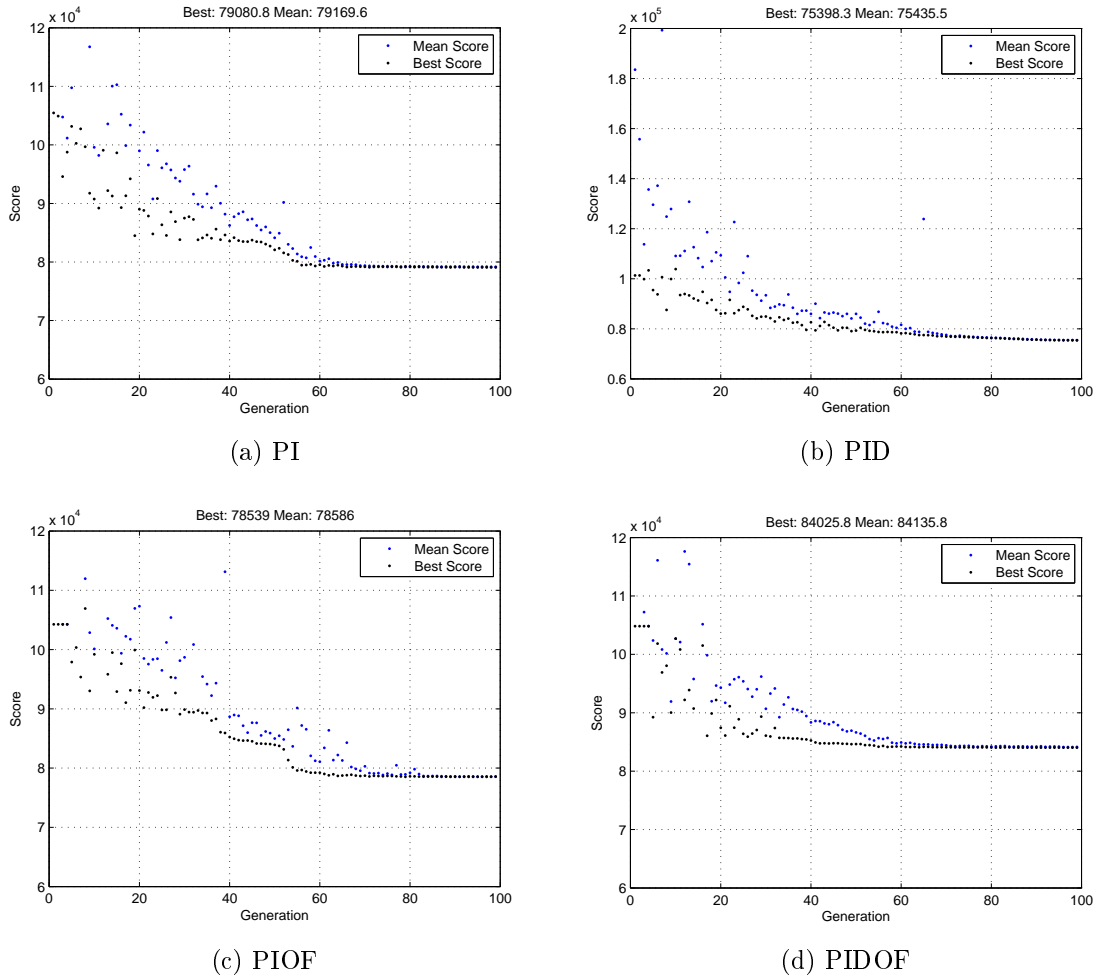


Figura D.5: Convergencia de algoritmo PSO MIMO en sintonización de controladores centralizados.

Tabla D.3: Especificaciones de respuesta transitoria para controladores descentralizados sintonizados con PSO MIMO - Prueba 1.

Salida	Controlador	$r(t)$	$MOV$	$E_{ss}$	$t_d$	$t_r$	$t_p$	$t_s$
$h_c$	PI	$r_1$	0.00	0.08	24.65	3000.00	3000.00	51.75
		$r_2$	0.76	0.08	69.90	132.15	144.25	126.30
		$r_3$	0.69	0.07	52.90	98.65	106.35	94.40
		$r_4$	0.00	0.08	15.30	3000.00	3000.00	32.65
$h_c$	PID	$r_1$	0.00	0.03	24.65	3000.00	3000.00	51.75
		$r_2$	0.27	0.03	70.70	132.90	144.55	127.10
		$r_3$	0.25	0.02	53.50	99.20	111.00	95.00
		$r_4$	0.00	0.03	15.15	3000.00	3000.00	32.55
$h_c$	PIOF	$r_1$	0.00	0.08	24.65	3000.00	3000.00	51.75
		$r_2$	1.60	0.11	69.95	132.20	140.60	126.35
		$r_3$	1.66	0.11	52.55	98.25	103.85	94.05
		$r_4$	0.00	0.07	15.40	3000.00	3000.00	32.75
$h_c$	PIDOF	$r_1$	0.00	0.06	24.65	3000.00	3000.00	51.75
		$r_2$	2.25	0.11	70.30	132.50	145.80	126.70
		$r_3$	2.26	0.10	52.60	98.30	111.15	94.10
		$r_4$	0.00	0.03	15.40	3000.00	3000.00	32.75
$T_c$	PI	$r_1$	27.35	0.17	337.20	545.85	987.70	2164.30
		$r_2$	21.66	0.17	327.70	509.80	848.00	1723.35
		$r_3$	2.62	0.03	1221.85	2550.75	2742.90	2415.55
		$r_4$	4.52	0.09	1275.90	2541.90	2883.10	2412.95
$T_c$	PID	$r_1$	25.34	0.19	337.25	551.40	982.85	2072.15
		$r_2$	19.84	0.17	331.30	518.90	848.10	1644.80
		$r_3$	2.41	0.03	1218.40	2546.60	2732.90	2411.50
		$r_4$	4.35	0.08	1281.65	2546.75	2892.90	2417.90
$T_c$	PIOF	$r_1$	18.98	0.20	337.10	575.15	967.30	1779.75
		$r_2$	14.68	0.18	331.50	540.45	837.70	1408.60
		$r_3$	2.32	0.02	1208.85	2538.60	2722.85	2403.35
		$r_4$	4.51	0.09	1286.20	2552.25	2893.10	2423.30
$T_c$	PIDOF	$r_1$	26.78	0.18	337.05	547.05	985.75	2137.50
		$r_2$	21.36	0.17	328.70	511.15	846.90	1709.55
		$r_3$	2.63	0.03	1220.30	2550.15	2742.85	2414.95
		$r_4$	4.58	0.09	1275.40	2540.90	2892.85	2412.00

Tabla D.4: Especificaciones de respuesta transitoria para controladores centralizados sintonizados con PSO MIMO - Prueba 1.

Salida	Controlador	$r(t)$	$MOV$	$E_{ss}$	$t_d$	$t_r$	$t_p$	$t_s$
$h_c$	PI	$r_1$	0.64	0.01	24.65	55.10	58.70	51.75
		$r_2$	2.44	0.09	71.30	133.55	138.85	127.70
		$r_3$	2.91	0.08	52.75	98.50	102.05	94.25
		$r_4$	0.04	0.00	15.30	1661.95	2562.75	32.70
$h_c$	PID	$r_1$	0.00	0.08	24.65	3000.00	3000.00	51.75
		$r_2$	0.78	0.08	69.95	132.20	643.60	126.35
		$r_3$	0.71	0.06	52.90	98.65	102.90	94.40
		$r_4$	0.00	0.05	15.25	3000.00	3000.00	32.60
$h_c$	PIOF	$r_1$	0.00	0.05	24.65	3000.00	3000.00	51.85
		$r_2$	3.10	0.09	70.30	132.55	534.45	126.70
		$r_3$	3.85	0.07	52.75	98.45	107.90	94.25
		$r_4$	0.12	0.01	15.30	1916.45	2613.50	32.70
$h_c$	PIDOF	$r_1$	24.83	0.00	24.65	55.10	74.45	227.15
		$r_2$	53.32	0.00	71.15	133.40	190.90	427.70
		$r_3$	46.95	0.00	53.80	99.55	135.90	357.05
		$r_4$	15.14	0.00	15.10	34.65	43.45	140.10
$T_c$	PI	$r_1$	15.14	0.16	338.05	604.55	968.05	1607.75
		$r_2$	7.28	0.24	329.35	590.50	821.65	3000.00
		$r_3$	3.98	0.05	1133.80	2463.55	2692.85	2328.35
		$r_4$	3.66	0.07	1250.40	2516.20	2842.90	2386.25
$T_c$	PID	$r_1$	24.56	0.16	337.25	553.75	980.75	2036.95
		$r_2$	18.59	0.18	328.65	519.95	841.95	1584.40
		$r_3$	3.54	0.05	1207.05	2535.75	2752.90	2400.60
		$r_4$	4.30	0.08	1252.45	2518.10	2853.10	2389.15
$T_c$	PIOF	$r_1$	16.99	0.03	337.65	595.25	973.30	1697.30
		$r_2$	9.79	0.10	318.00	560.85	818.10	1163.45
		$r_3$	0.00	0.15	1311.70	3000.00	3000.00	3000.00
		$r_4$	0.00	0.16	1485.35	3000.00	3000.00	3000.00
$T_c$	PIDOF	$r_1$	12.66	0.20	348.55	631.55	972.70	3000.00
		$r_2$	3.79	0.19	315.70	629.70	808.95	557.35
		$r_3$	2.28	0.02	1202.65	2530.50	2712.95	2395.45
		$r_4$	3.84	0.07	1285.70	2551.00	2882.90	2421.65

## D.5. Resultados experimentales

A partir de la aplicación de los controladores sintonizados mediante optimización PSO para el caso MIMO sobre el sistema real, se obtienen los resultados experimentales mostrados en la Sección 5.5. El detalle numérico de lo presentado en la Tabla 5.23, en cuanto especificaciones de respuesta transitoria, se presenta a través de la Tabla D.5, para los controladores de esquema descentralizado, y en la Tabla D.6, para los de esquema centralizado, ambos aplicados considerando la Prueba 1.

Tabla D.5: Especificaciones de respuesta transitoria de resultados experimentales con PSO descentralizados - Prueba 1.

Salida	Controlador	$r(t)$	$MOV$	$E_{ss}$	$t_d$	$t_r$	$t_p$	$t_s$
$h_c$	PI	$r_1$	1.82	0.05	27.00	59.10	1923.45	55.60
		$r_2$	3.19	0.05	77.95	144.90	2503.50	138.75
		$r_3$	4.33	0.15	60.90	107.90	1858.00	103.70
		$r_4$	2.65	0.23	20.75	42.00	1585.50	39.85
$h_c$	PID	$r_1$	6.18	0.06	25.35	55.05	2054.45	2937.30
		$r_2$	6.35	0.28	74.35	136.45	1777.10	2111.50
		$r_3$	4.85	0.22	58.70	103.90	1824.05	2994.30
		$r_4$	8.26	0.24	18.25	37.35	1388.50	2317.95
$h_c$	PIOF	$r_1$	0.13	0.06	28.75	1764.90	1764.90	57.45
		$r_2$	3.95	0.10	78.75	145.10	149.30	139.05
		$r_3$	4.81	0.13	56.75	102.65	106.30	98.35
		$r_4$	0.76	0.07	18.60	39.80	41.05	37.70
$h_c$	PIDOF	$r_1$	0.31	0.02	28.90	60.50	61.25	57.05
		$r_2$	4.05	0.05	78.25	142.60	147.55	136.85
		$r_3$	5.43	0.08	56.20	102.25	106.50	107.25
		$r_4$	0.76	0.03	19.15	40.10	41.15	37.90
$T_c$	PI	$r_1$	36.46	0.07	392.00	589.65	1023.60	2755.60
		$r_2$	26.52	0.16	392.95	577.55	851.30	2812.35
		$r_3$	16.41	0.22	465.85	1010.70	1302.55	3000.00
		$r_4$	15.90	0.22	671.50	1247.80	1568.05	3000.00
$T_c$	PID	$r_1$	25.29	0.22	364.80	575.30	892.75	3000.00
		$r_2$	22.55	0.23	395.70	577.40	824.25	3000.00
		$r_3$	16.17	0.14	468.60	1054.30	1317.75	3000.00
		$r_4$	15.41	0.24	728.75	1348.85	1654.30	3000.00
$T_c$	PIOF	$r_1$	23.56	0.31	328.65	575.35	891.25	3000.00
		$r_2$	21.19	0.32	438.25	646.85	912.45	3000.00
		$r_3$	18.90	0.23	502.35	1049.60	2504.35	3000.00
		$r_4$	20.62	0.30	662.00	1272.00	1632.00	3000.00
$T_c$	PIDOF	$r_1$	44.03	0.20	468.10	673.20	1094.60	3000.00
		$r_2$	29.75	0.23	395.95	572.40	886.70	3000.00
		$r_3$	17.41	0.08	593.00	1153.50	1388.90	2924.50
		$r_4$	16.90	0.17	701.85	1298.95	1620.35	3000.00

Tabla D.6: Especificaciones de respuesta transitoria de resultados experimentales con PSO centralizados - Prueba 1.

Salida	Controlador	$r(t)$	$MOV$	$E_{ss}$	$t_d$	$t_r$	$t_p$	$t_s$
$h_c$	PI	$r_1$	13.74	0.12	25.40	56.00	95.95	2560.60
		$r_2$	8.30	0.01	78.05	140.60	1634.30	2959.10
		$r_3$	11.56	0.07	50.65	91.55	536.70	2992.00
		$r_4$	5.96	0.00	17.75	35.05	423.30	1478.80
$h_c$	PID	$r_1$	3.57	0.05	26.80	57.65	180.90	54.20
		$r_2$	3.35	0.17	82.10	152.35	504.00	145.85
		$r_3$	4.57	0.18	59.80	109.15	1107.10	2487.45
		$r_4$	3.38	0.14	19.20	39.95	693.35	37.90
$h_c$	PIOF	$r_1$	2.91	0.00	27.00	57.90	343.75	52.75
		$r_2$	4.64	0.09	79.00	144.85	1022.50	138.75
		$r_3$	7.66	0.06	57.90	105.25	111.40	113.40
		$r_4$	0.55	0.01	17.80	39.00	1341.35	35.55
$h_c$	PIDOF	$r_1$	28.57	0.00	25.65	54.95	75.05	245.65
		$r_2$	61.07	0.01	80.50	147.25	214.80	460.15
		$r_3$	54.48	0.06	58.15	104.45	144.70	426.75
		$r_4$	19.74	0.02	17.05	37.15	46.90	156.70
$T_c$	PI	$r_1$	25.17	0.30	402.10	628.85	980.05	3000.00
		$r_2$	9.28	0.45	401.05	636.80	814.85	3000.00
		$r_3$	26.59	0.37	364.05	935.90	1333.90	3000.00
		$r_4$	22.11	0.32	545.80	1116.65	1503.10	3000.00
$T_c$	PID	$r_1$	40.92	0.16	390.05	611.75	1006.90	2968.25
		$r_2$	29.87	0.28	432.75	619.50	892.05	3000.00
		$r_3$	18.90	0.34	466.25	1064.35	1378.40	3000.00
		$r_4$	19.63	0.24	647.05	1255.35	1602.15	3000.00
$T_c$	PIOF	$r_1$	33.11	0.00	428.75	649.85	1048.90	2719.65
		$r_2$	12.50	0.23	392.60	613.70	864.25	3000.00
		$r_3$	20.38	0.15	553.45	1113.00	1482.75	3000.00
		$r_4$	11.93	0.12	721.25	1319.85	1605.30	3000.00
$T_c$	PIDOF	$r_1$	29.26	0.27	433.25	664.30	1049.95	3000.00
		$r_2$	9.77	0.39	401.95	654.10	865.10	3000.00
		$r_3$	23.61	0.41	154.45	947.85	1993.70	3000.00
		$r_4$	22.85	0.36	617.20	1232.90	1619.60	3000.00