



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

**SINGULARIDADES EN TIEMPO FINITO DE SOLUCIONES
DE LA ECUACIÓN DE EULER Y DE NAVIER - STOKES EN
TRES DIMENSIONES ESPACIALES**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

GIANMARCO SILVIO SPERONE MARTÍ

PROFESOR GUÍA:
MANUEL DEL PINO MANRESA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JUAN DÁVILA BONCZOS
JAIME ORTEGA PALMA

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto Fondecyt 1150066

SANTIAGO DE CHILE
2016

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR AL
TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: GIANMARCO SILVIO SPERONE MARTÍ
FECHA: JULIO 2016
PROF. GUÍA: MANUEL DEL PINO MANRESA

SINGULARIDADES EN TIEMPO FINITO DE SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN DE EULER Y DE NAVIER - STOKES EN TRES DIMENSIONES ESPACIALES

El objetivo de este trabajo es revisar la historia de un problema formulado hace ya más de 250 años, y que todavía no ha abandonado el terreno de la conjetura. De hecho, las ecuaciones de Euler y de Navier - Stokes en tres dimensiones espaciales constituyen hoy en día un desafío para matemáticos, físicos e ingenieros; aunque mucho se ha descubierto, la naturaleza de las soluciones sigue siendo un gran misterio. Precisamente, se ignora si las soluciones de la ecuación de Euler o de Navier - Stokes tridimensional (en el caso incompresible), partiendo desde condiciones iniciales regulares, mantienen esta propiedad en todo tiempo posterior, o bien desarrollan en tiempo finito una singularidad.

La investigación comienza con un repaso de aquellos conceptos esenciales de la mecánica de medios continuos que se consideran indispensables para un futuro estudio de la formación de singularidades en las soluciones de la ecuación de Euler o de Navier - Stokes tridimensional. Dentro de este repaso se otorga particular atención a la ecuación de evolución de la vorticidad, una de las herramientas fundamentales en el tratamiento matemático de los fluidos, ya sean ideales o viscosos. Posteriormente se revisan los resultados clásicos concernientes a la existencia, unicidad y regularidad de soluciones de la ecuación de Euler y Navier - Stokes incompresible (en los casos bidimensional y tridimensional). A partir de estos teoremas surge naturalmente el fenómeno del quiebre, en tiempo finito, de la regularidad de dichas soluciones. Este misterio ha sido parcialmente desvelado por el ya famoso criterio de Beale - Kato - Majda, que establece que si una solución inicialmente suave de la ecuación de Euler o de Navier - Stokes 3D desarrolla una singularidad en el instante $T^* > 0$, entonces su campo de vorticidad $\omega(t)$ se acumula tan rápidamente en el tiempo de modo tal que:

$$\lim_{t \nearrow T^*} \int_0^t \|\omega(s)\|_{L^\infty} ds = \infty.$$

Luego de elaborar un recuento histórico sobre algunos de los intentos que han sido llevados a cabo con la intención de poner fin a esta polémica (en el caso de la ecuación de Euler 3D), en el capítulo N°6 se describe detalladamente un experimento numérico del año 2014, diseñado por Thomas Hou y Guo Luo con el propósito de hallar potenciales soluciones singulares y axisimétricas de la ecuación de Euler 3D. La principal novedad de este trabajo de memoria está en el estudio del *ansatz* auto - similar propuesto por Hou y Luo para formalizar sus observaciones numéricas: se demuestra analíticamente que dicho *ansatz* no conduce hacia una solución singular de la ecuación de Euler incompresible y tridimensional.

El trabajo de memoria concluye con la exposición de algunos resultados que son aplicables únicamente a la ecuación de Navier - Stokes incompresible y tridimensional, tales como la estimación de Caffarelli - Kohn - Nirenberg de la medida de Hausdorff del conjunto de puntos singulares, o bien, diversos teoremas del tipo Liouville en este contexto.

AGRADECIMIENTOS

En el ámbito personal, quisiera agradecer a toda mi familia, no sólo por haberme apoyado, guiado y acompañado durante todos estos años como estudiante de ingeniería (particularmente en el período de realización de este trabajo), sino también por todas aquellas enseñanzas que me han permitido crecer como ser humano, tanto en el plano profesional como en el emocional. Mi más profunda gratitud va hacia mis padres, quienes siempre me han impulsado a seguir mis convicciones y a fijar metas altas en la vida, indicándome el camino correcto para alcanzarlas.

En este mismo contexto, no puedo dejar de mencionar a mis amigos más íntimos (Lucas, Fernando, Tomás, Juan Pablo, Santiago, Héctor y Trinidad), cuya invaluable e incondicional amistad me ha dado la fuerza necesaria para superar los tiempos de adversidad y la alegría para disfrutar los innumerables momentos de diversión. En estos años de separación que nos tocará vivir, nunca olvidaré las experiencias que hemos compartido y toda la felicidad que ustedes han traído a mi vida.

En el plano académico, quiero agradecer a todos los profesores, compañeros y funcionarios del Departamento de Ingeniería Matemática. Un agradecimiento especial va dirigido a los profesores Manuel del Pino y Juan Dávila, cuya enorme sabiduría, experiencia y calidad docente han sido fuente de inspiración para mí. Asimismo, a ellos dos agradezco la excelente disposición mostrada durante el período de elaboración de este trabajo, el cual jamás habría podido completar sin sus incontables consejos, siempre precisos y oportunos.

Por supuesto, imposible olvidar la lealtad y camaradería exhibida por mis compañeros de carrera, así como la infinita paciencia que siempre tuvieron para ayudarme a sobrepasar los obstáculos que surgieron en este recorrido. Ojalá pueda, en el futuro, volver a contar con compañeros como ustedes.

Finalmente, agradezco a Conicyt, que a través del proyecto Fondecyt 1150066 financió este trabajo.

Tabla de contenido

1. Introducción	1
1.1. Los fluidos perfectos y la ecuación de Euler	1
1.2. Fluidos perfectos incompresibles	2
1.3. El concepto de solución	4
1.4. La presión como función del campo de velocidad	5
2. Análisis local del campo de velocidad	7
2.1. El concepto de vorticidad	7
2.2. Una fórmula para la evolución de la vorticidad	9
3. La ecuación de Euler incompresible en el caso bidimensional	12
3.1. Formulación en términos de la vorticidad y la función de corriente.	13
3.2. Resultados clásicos de existencia, unicidad y regularidad.	15
4. La ecuación de Euler incompresible y tridimensional	18
4.1. Flujos tridimensionales axisimétricos	18
4.2. Resultados clásicos de existencia, unicidad y regularidad	21
4.3. Sobre la formación de singularidades y la pérdida de regularidad	23
5. La búsqueda de soluciones singulares de la ecuación de Euler tridimensional	30
5.1. Eventos destacados en la búsqueda de potenciales soluciones singulares . . .	32
5.2. Modelos unidimensionales para la ecuación de vorticidad tridimensional . . .	38
5.2.1. Integración del modelo unidimensional y quiebre explícito de la regularidad de sus soluciones	41
5.2.2. Falencias del modelo unidimensional de Constantin - Lax - Majda y nuevas propuestas	45
6. Experimento numérico de Luo y Hou	49
6.1. Descripción del problema	50
6.2. Existencia de una singularidad en tiempo finito	52
6.3. Estructura auto - similar de la solución singular	55
7. Análisis del <i>ansatz</i> auto - similar de Luo y Hou	61
7.1. El <i>ansatz</i> de Luo y Hou genera dos familias de soluciones	62
7.2. Análisis de las soluciones obtenidas y la existencia de <i>blow - up</i>	68
7.3. Discusión sobre el valor del parámetro γ	75

8. La ecuación de Navier - Stokes incompresible	79
8.1. El concepto de solución (formulación débil)	81
8.2. La evolución de la vorticidad y formulaciones alternativas de la ecuación de Navier - Stokes	83
8.3. Existencia, unicidad y regularidad de soluciones de la ecuación de Navier - Stokes incompresible	86
8.3.1. Unicidad y regularidad en el caso bidimensional	86
8.3.2. Unicidad y regularidad en el caso tridimensional	87
8.4. Singularidades en tiempo finito de soluciones de la ecuación de Navier - Stokes incompresible y tridimensional	89
8.4.1. Acumulación de la vorticidad y existencia de soluciones globalmente regulares de la ecuación de Navier - Stokes 3D	90
8.5. Medida de Hausdorff del conjunto de puntos singulares	91
8.6. Soluciones auto - similares de la ecuación de Navier - Stokes incompresible y tridimensional	94
8.7. Teoremas del tipo Liouville para la ecuación de Navier - Stokes incompresible y aplicaciones	96
9. Conclusiones finales	99
A. Transformada de Hilbert	102
A.1. Introducción y definiciones básicas	102
A.2. Propiedades fundamentales de la transformada de Hilbert	104
Bibliografía	107

Índice de tablas

5.1. Hitos en la búsqueda de soluciones singulares de la ecuación de Euler 3D. . .	38
5.2. Modelos unidimensionales para la evolución de la vorticidad tridimensional. .	48
6.1. Coeficientes de escalamiento del ansatz auto - similar (6.15).	60

Índice de ilustraciones

2.1.	Esquema representativo de la función de trayectorias del fluido.	9
2.2.	Esquema representativo de la evolución del campo de vorticidad.	10
5.1.	Simulación espectral del vórtice de Taylor - Green.	36
5.2.	Simulación de la formación de capas de vorticidad.	37
5.3.	Gráfico de la función $ \omega(x, 2t) $ en torno al punto de explosión	43
6.1.	Gráfico de $\ \omega(\cdot, \tau)\ $ en el plano (r, z)	52
6.2.	Gráfico de dos curvas de $\log(\log(\ \omega(\cdot, t)\ _\infty))$	53
6.3.	Gráfico del inverso de la derivada temporal de $\log(\ \omega(\cdot, t)\ _\infty)$	54
6.4.	Norma infinito de la vorticidad y su ley de potencia inversa.	55
6.5.	Curvas de nivel de la función ω_1 en torno al punto de máxima vorticidad. . .	59
7.1.	Componente axial del campo de vorticidad para $r \approx 1$	70

Capítulo 1

Introducción

El objetivo de este capítulo es repasar brevemente aquellos conceptos esenciales de la mecánica de medios continuos que se consideran indispensables para un futuro estudio de la formación de singularidades en las soluciones de la ecuación de Euler tridimensional. Asimismo, se describe una completa y adecuada formulación matemática de la ecuación de Euler, dando a conocer las condiciones de borde más comunes y especificando la noción de *solución débil*. Finalmente, se realiza un sencillo cálculo que explica por qué el campo de presiones puede ser *eliminado* en la mayoría de las formulaciones alternativas de la ecuación de Euler.

1.1. Los fluidos perfectos y la ecuación de Euler

Desde el punto de vista matemático y euleriano, el movimiento de un medio continuo clásico viene descrito por un campo de velocidades \mathbf{u} y una función de densidad ρ , los cuales varían en función del tiempo t y de los puntos espaciales \mathbf{x} pertenecientes a un dominio móvil $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$. Si el medio en cuestión se encuentra libre de la acción de fuerzas externas, estas cuatro funciones están sujetas al siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineal:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \text{div}(S), \end{cases} \quad (1.1)$$

en donde S es el tensor de esfuerzos del medio (matriz de 3×3), que varía según el tiempo $t \geq 0$ y el espacio $\mathbf{x} \in \Omega_t$. Como es bien sabido, la primera ecuación del sistema (1.1) corresponde a la conservación de masa (ecuación de continuidad), mientras que la segunda representa la conservación de la cantidad de movimiento. Por su parte, la ley de conservación del momento angular permite concluir que la matriz $S(\mathbf{x}, t)$ es simétrica, para todo $t \geq 0$ y $\mathbf{x} \in \Omega_t$. Para una deducción más detallada de estas propiedades, se recomienda consultar [77] (capítulo N°5) y [25] (capítulo N°1).

Claramente, el sistema (1.1) no está bien determinado, pues se tienen más incógnitas que ecuaciones. De acuerdo al esquema empleado en [77], el siguiente paso en la modelización matemática consiste en introducir nuevas relaciones, llamadas **leyes constitutivas**, que permitan obtener un sistema de tantas ecuaciones como incógnitas. En el caso particular de los fluidos, las leyes constitutivas se denominan **leyes reológicas**, una de las cuales permitirá ex-

presar el tensor S en función de todas o de algunas de las variables fundamentales (velocidad, densidad y temperatura). A través de la estructura de S se introducen en el planteamiento matemático las características que permiten modelar las propiedades concretas que constituyen un **fluido**, y que lo separan de otros tipos de medios continuos. En un fluido cualquiera, el tensor S puede depender de las variables fundamentales ya nombradas, con la particularidad que la dependencia con respecto al campo de velocidad se realiza como función de la matriz jacobiana $\nabla \mathbf{u}$, llamada *matriz de velocidad de deformación*. Este es un hecho fundamental que refleja la intrínseca *deformabilidad* de un fluido.

Se considerará principalmente la situación en la que el fluido se mueve en un dominio fijo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Más aún, la atención estará puesta en los **fluidos perfectos**, vale decir, en aquellos fluidos que poseen un tensor de esfuerzos en la forma más simple, excluyendo los *esfuerzos cortantes*; sobre las superficies de separación de dos elementos contiguos de fluido sólo aparecen esfuerzos perpendiculares a la superficie, lo que impide totalmente la fricción y el arrastre mutuo. En virtud del teorema de Cauchy¹, la ausencia de esfuerzos cortantes se traduce en la existencia de un campo escalar $p(\mathbf{x}, t)$ (para $t \geq 0$ y $\mathbf{x} \in \Omega_t$) tal que:

$$S(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)I_3, \quad \forall t \geq 0 \text{ y } \mathbf{x} \in \Omega_t.$$

La función escalar p es la denominada **presión interna** del fluido, que constituye otra variable fundamental de la mecánica de fluidos. Por consiguiente, para un fluido perfecto y libre de la acción de fuerzas externas, la ecuación de conservación de cantidad de movimiento adopta la siguiente forma:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p, \quad \text{en } \Omega \times (0, \infty). \quad (1.2)$$

Esta es la famosa **ecuación de Euler**, publicada por el matemático suizo en 1757. Estrictamente hablando, se trata sólo de una situación idealizada, pues en realidad la fricción siempre existe, con consecuencias no desdeñables. Sin embargo, en numerosos casos prácticos, constituye una aproximación suficiente y aceptable.

1.2. Fluidos perfectos incompresibles

Tradicionalmente, el estudio de los fluidos perfectos se divide en dos grandes clases: fluidos perfectos **compresibles** y fluidos perfectos **incompresibles**. La diferencia en ambos casos se observa en la expresión que adopta la ecuación de continuidad (primera ecuación del sistema (1.1)). En el caso compresible, la ley de conservación de masa mantiene la forma general siguiente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad \text{en } \Omega \times (0, \infty).$$

Por su parte, en un fluido incompresible, la ecuación de continuidad se reduce a una expresión más sencilla:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{en } \Omega \times [0, \infty). \quad (1.3)$$

¹Acá se hace referencia al célebre *teorema de los esfuerzos de Cauchy*, que establece que la densidad superficial de fuerza del medio depende linealmente del vector normal unitario, a través del tensor de esfuerzos S (consultar [77], capítulo N°3).

Además, en el caso de los fluidos perfectos incompresibles, es natural establecer la hipótesis de que la *densidad sea constante*², e incluso fijar $\rho(\mathbf{x}, t) = 1$, para todo $t \geq 0$ y $\mathbf{x} \in \Omega_t$. En consecuencia, se tendrán cuatro ecuaciones hidrodinámicas: la ecuación vectorial de la conservación de la cantidad de movimiento (1.2) y la ecuación escalar de incompresibilidad (1.3). Dichas ecuaciones conforman el siguiente sistema, con el cual se trabajará durante el resto del presente trabajo:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

para todo tiempo $t > 0$ y punto $\mathbf{x} \in \Omega$.

Ahora, con la finalidad de obtener un problema bien propuesto (en el sentido matemático), y como es habitual en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales, es necesario imponer condiciones iniciales y de borde. Con respecto a las condiciones iniciales, y siguiendo las ideas expuestas en [56], se establecerá que:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.5)$$

donde la función $\mathbf{u}_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un dato del problema, y satisface una condición de incompresibilidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0, \quad \text{en } \Omega. \quad (1.6)$$

En cuanto a las condiciones de contorno, en el caso que Ω sea un conjunto abierto, acotado, conexo y de frontera regular, se impondrán condiciones del tipo Dirichlet, esto es:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{en } \partial\Omega \times [0, \infty), \quad (1.7)$$

siendo \mathbf{n} la normal exterior (unitaria) a la frontera $\partial\Omega$. La condición de borde (1.7), que refleja físicamente la existencia de una pared impermeable, es también verificada por la función inicial \mathbf{u}_0 :

$$\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{en } \partial\Omega. \quad (1.8)$$

En diversas situaciones también se considerarán flujos de fluidos incompresibles que son espacialmente periódicos, vale decir, cuando $\Omega \doteq (0, L_1) \times (0, L_2) \times (0, L_3)$, para tres números fijos $L_1, L_2, L_3 > 0$, y el campo de velocidad satisface:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + L_i \mathbf{e}_i, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, \infty),$$

para todo $i \in \{1, 2, 3\}$, siendo $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canónica de \mathbb{R}^3 . En particular, en el caso periódico se tiene que el campo de velocidad está definido en todo $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$, y por ello no se hará mayor distinción entre el caso periódico y el caso $\Omega = \mathbb{R}^3$, a menos que se indique lo contrario. A pesar de lo anterior, la importancia de los flujos periódicos radica en que ellos constituyen prototipos de flujos de fluidos que circulan por regiones acotadas de \mathbb{R}^3 , siendo el rectángulo $(0, L_1) \times (0, L_2) \times (0, L_3)$ el dominio acotado que se considera, por lo general, en el caso periódico.

²Un fluido *homogéneo* es aquel cuya densidad es constante en el espacio. Un fluido perfecto, incompresible y homogéneo se denomina *fluido ideal*.

Si bien en el caso $\Omega = \mathbb{R}^3$ o en el caso espacial - periódico no siempre se especifican condiciones de borde, es común plantear la ecuación de Euler (1.4) junto a condiciones mixtas; por ejemplo, si Ω es un cilindro, se puede imponer una condición de borde del tipo Dirichlet o Neumann en el manto del cilindro y una condición de periodicidad en el eje de simetría del cilindro. Para averiguar sobre otros tipos de condiciones que son usualmente consideradas en la literatura (por ejemplo, un control de la energía de las soluciones), se recomienda revisar [32].

Al hablar de *la ecuación de Euler incompresible y tridimensional* se estará haciendo referencia al sistema de ecuaciones (1.4), junto a las condiciones adicionales (1.5) a (1.8).

1.3. El concepto de solución

Una vez formulada con precisión la ecuación de Euler incompresible y tridimensional, y antes de exponer los teoremas de existencia y unicidad de soluciones, es importante aclarar lo que se entiende por *solución* de (1.4), junto a las condiciones adicionales (1.5) - (1.8), según corresponda. Como es habitual en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales, se hará uso del concepto de *solución débil*, adaptándolo a estas ecuaciones de acuerdo a las siguientes definiciones:

Definición 1.1. *En el caso que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sea un conjunto abierto, acotado, conexo y de frontera regular, se dirá que una función $\mathbf{u} \in L^\infty([0, \infty); L^2(\Omega; \mathbb{R}^3))$ es **solución** de (1.4), junto a las condiciones adicionales (1.5) - (1.8), si satisface:*

$$\begin{cases} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{en } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, & \text{en } \mathcal{D}'(\Omega \times (0, \infty)), \\ \int_{\Omega} \int_0^{\infty} \mathbf{u} \cdot \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbb{P}(\psi) \right\} dt \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{u}_0 \cdot \psi(\mathbf{x}, 0) \, d\mathbf{x} = 0, \end{cases} \quad (1.9)$$

para cualquier función $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega} \times [0, \infty); \mathbb{R}^3)$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(\mathbf{x}, t) = \vec{0}$, para todo $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$. En este caso, se denota por $\mathbb{P} : L^2(\Omega; \mathbb{R}^3) \longrightarrow \Psi_{\operatorname{div}}(\Omega)$ a la proyección sobre el siguiente espacio:

$$\Psi_{\operatorname{div}}(\Omega) \doteq \{ \sigma \in H_{\operatorname{div}}(\Omega) \mid \operatorname{div}(\sigma) = 0 \text{ en } \Omega, \sigma \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ en } \partial\Omega \}.$$

Definición 1.2. *En el caso que $\Omega = \mathbb{R}^3$, se dirá que una función $\mathbf{u} \in L^\infty([0, \infty); L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3))$ es **solución** de (1.4), junto a la condición inicial (1.5), si satisface:*

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, & \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)), \\ \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^{\infty} \mathbf{u} \cdot \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \psi \right\} dt \, d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u}_0 \cdot \psi(\mathbf{x}, 0) \, d\mathbf{x} = 0, \end{cases} \quad (1.10)$$

para cualquier función $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty); \mathbb{R}^3)$ tal que $\operatorname{div}(\psi) = 0$ en $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$.

Para mayores detalles, se recomienda consultar [56], capítulo N° 4. Obsérvese que la presión interna no es considerada en las definiciones anteriores; como se estudiará más adelante,

este fenómeno ocurre usualmente cuando se plantean formulaciones alternativas de las ecuaciones de Euler y de Navier - Stokes, ya sea una formulación variacional o una formulación en términos de la vorticidad y la función de corriente.

1.4. La presión como función del campo de velocidad

En el espíritu del último comentario de la sección anterior, se concluirá este capítulo mostrando que, en el caso general de un flujo incompresible que satisface la ecuación de Euler, la presión y el campo de velocidad están relacionados mediante una ecuación de Poisson. En efecto, considérese nuevamente el campo de velocidad (lo suficientemente diferenciable) de un fluido que satisface la ecuación de Euler incompresible y tridimensional en $\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (1.11)$$

para todo $t > 0$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Nótese que este sistema de ecuaciones contiene la derivada temporal de tres de las cuatro incógnitas del problema, mientras que sólo contempla derivadas espaciales de la presión. Luego, resulta natural querer hallar alguna fórmula que exprese la presión en términos de la velocidad, y así *eliminar* la presión de (1.11). Para ello, tómesese la divergencia de ambos lados de la primera ecuación de (1.11), lo cual permite obtener que:

$$-\Delta p = \operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + \operatorname{div}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}), \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty).$$

La condición de incompresibilidad y la linealidad de los operadores diferenciales involucrados permiten deducir que:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) = 0 \\ \operatorname{div}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \operatorname{tr}((\nabla \mathbf{u})^2), \end{cases}$$

para todo $t > 0$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Es decir, se tiene que:

$$-\Delta p(\mathbf{x}, t) = \operatorname{tr}((\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))^2), \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty). \quad (1.12)$$

Con respecto a la solución de la ecuación (1.12), es oportuno citar el siguiente resultado clásico sobre una propiedad elemental de la ecuación de Poisson (para mayores detalles, consultar [34], capítulo N°2):

Lema 1.0.1. *Supóngase que $f \in L^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ (y, adicionalmente, que se cumple $\int_{\|\mathbf{x}\| \geq 1} |f(\mathbf{x})| \log(\|\mathbf{x}\|) d\mathbf{x} < \infty$ cuando $N = 2$). Entonces, existe una solución $v \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ de la ecuación de Poisson:*

$$-\Delta v(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N,$$

dada por la siguiente convolución:

$$v(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N. \quad (1.13)$$

Acá $\Gamma : \mathbb{R}^N \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$ denota el potencial newtoniano (o solución fundamental), definido por:

$$\Gamma(\mathbf{x}) \doteq \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log(\|\mathbf{x}\|), & \text{si } N = 2 \\ \frac{\|\mathbf{x}\|^{2-N}}{(N-2)S_N}, & \text{si } N \geq 3, \end{cases} \quad (1.14)$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\vec{0}\}$, siendo S_N el área de la esfera unitaria N -dimensional. La solución (1.13) puede ser derivada bajo el signo integral, de modo tal que:

$$\nabla v(\mathbf{x}) = \frac{1}{S_N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^N} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N. \quad (1.15)$$

Si se asume que la velocidad satisface ciertas condiciones de regularidad y decaimiento, es posible aplicar el resultado del lema anterior a la ecuación (1.12) para obtener la fórmula explícita:

$$\nabla p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{S_3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \text{tr}((\nabla \mathbf{u}(\mathbf{y}, t))^2) d\mathbf{y}, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty). \quad (1.16)$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación de Euler (1.11) se obtiene una ecuación de evolución cerrada, vale decir, donde la única incógnita es el campo de velocidad:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{S_3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \text{tr}((\nabla \mathbf{u}(\mathbf{y}, t))^2) d\mathbf{y}, \quad (1.17)$$

para todo $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$. De hecho, es posible demostrar que si un campo vectorial \mathbf{u} satisface la igualdad (1.17), entonces automáticamente verifica la condición de incompresibilidad; este planteamiento constituye la *formulación de Leray para la ecuación de Euler* (ver [10], sección 1.8). Ahora bien, el lado izquierdo de (1.17) es cuadráticamente no-lineal, mientras que el lado derecho contiene un operador no-local y también cuadráticamente no-lineal; estas características convierten a la ecuación de Euler (o de Navier - Stokes) en un objeto muy difícil de estudiar desde el punto de vista analítico. Por lo demás, la formulación de Leray no será considerada de ahora en adelante, dado que oculta muchas otras propiedades físicas de los fluidos ideales que serán estudiadas en el próximo capítulo.

Capítulo 2

Análisis local del campo de velocidad

Como ya se ha indicado, el estudio de los fluidos perfectos e incompresibles implica resolver un sistema de ecuaciones en derivadas parciales no - lineales. Con el objetivo de simplificar la tarea, es común analizar la componente rotacional en el campo de velocidad \mathbf{u} , que constituye uno de los conceptos fundamentales de la mecánica de fluidos, y probablemente, la faceta más importante de los flujos turbulentos.

El objetivo de este capítulo es dar una descripción local del flujo de un fluido ideal, que puede interpretarse como una superposición de otros movimientos más sencillos. Esta noción permitirá construir una familia de soluciones exactas de la ecuación de Euler incompresible, y posteriormente, introducir una ecuación de evolución de la vorticidad que será de gran utilidad para futuros análisis.

2.1. El concepto de vorticidad

Cualquier campo de velocidad diferenciable \mathbf{u} posee una expansión en serie de Taylor en torno a un punto fijo $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega \times [0, \infty)$:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}, t_0) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0) + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0) \mathbf{h} + \mathcal{O}(\|\mathbf{h}\|^2), \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^3. \quad (2.1)$$

Obsérvese que, en cada punto de $\Omega \times [0, \infty)$, la matriz jacobiana del campo de velocidad admite una descomposición en una parte simétrica y otra parte anti - simétrica. Más precisamente, si se escribe:

$$\mathcal{D} \doteq \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \quad \mathcal{A} \doteq \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T), \quad (2.2)$$

entonces resulta claro que la matriz \mathcal{D} es simétrica, que la matriz \mathcal{A} es anti - simétrica y que:

$$\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{D}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{A}(\mathbf{x}, t), \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, \infty). \quad (2.3)$$

En este contexto, se llamará a \mathcal{D} la *matriz de deformación* y a \mathcal{A} la *matriz de rotación*. Estos nombres hacen sentido al recordar que la matriz de deformación \mathcal{D} juega un rol importante en el estudio de la energía (revisar [77], capítulo N°4). Nótese, además, que si se define el **campo de vorticidad** del fluido como:

$$\omega(\mathbf{x}, t) \doteq \text{rot}(\mathbf{u})(\mathbf{x}, t), \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, \infty), \quad (2.4)$$

entonces es fácil verificar que: $\forall(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, \infty)$,

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}, t)\mathbf{h} = \frac{1}{2}\omega(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{h}, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^3, \quad (2.5)$$

de donde surge en forma natural el nombre otorgado a la matriz \mathcal{A} . Todo lo anterior puede ser expresado mediante el siguiente lema:

Lema 2.0.2. *Para cualquier punto espacio - temporal del fluido $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega \times [0, \infty)$ se tiene que:*

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0) + \mathcal{D}(\mathbf{x}_0, t_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}\omega(\mathbf{x}_0, t_0) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathcal{O}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2). \quad (2.6)$$

Vale decir, en una pequeña vecindad en torno a cualquier punto del fluido, el campo de velocidad es igual a la suma de una traslación rígida, una deformación y una rotación (cuyo eje viene dado por el campo de vorticidad ω evaluado en ese punto).

Este último resultado es, en realidad, bastante general, pues se aplica a cualquier fluido que pueda describirse mediante un campo de velocidad lo suficientemente diferenciable. En el caso particular de un fluido ideal, la condición de incompresibilidad se traduce en que $\text{tr}(\mathcal{D}(\mathbf{x}_0, t_0)) = 0$, para todo $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega \times [0, \infty)$. Como la matriz $\mathcal{D}(\mathbf{x}_0, t_0)$ es simétrica, existe una matriz ortogonal $\mathcal{Q}(\mathbf{x}_0, t_0)$ tal que:

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}_0, t_0)\mathcal{D}(\mathbf{x}_0, t_0)\mathcal{Q}(\mathbf{x}_0, t_0)^T = \text{diag}[\lambda_1(\mathbf{x}_0, t_0), \lambda_2(\mathbf{x}_0, t_0), \lambda_3(\mathbf{x}_0, t_0)], \quad (2.7)$$

siendo $\{\lambda_i(\mathbf{x}_0, t_0)\}_{i=1}^3 \subset \mathbb{R}$ los valores propios de la matriz $\mathcal{D}(\mathbf{x}_0, t_0)$, para cualquier punto $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega \times [0, \infty)$. Dado que la aplicación traza es invariante bajo transformaciones de semejanza, se concluye que, en el caso incompresible:

$$\lambda_1(\mathbf{x}_0, t_0) + \lambda_2(\mathbf{x}_0, t_0) + \lambda_3(\mathbf{x}_0, t_0) = 0, \quad \forall(\mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega \times [0, \infty). \quad (2.8)$$

Por lo demás, una gran parte del presente trabajo buscará analizar la interacción y el impacto con que estos tres elementos (traslación rígida, deformación y rotación) contribuyen al movimiento del fluido a través del campo de velocidad. El siguiente resultado, cuya demostración se realiza mediante una directa sustitución, permite ilustrar la relación entre vorticidad y deformación, a la vez que genera una amplia clase de soluciones exactas de las ecuaciones de Euler y de Navier - Stokes en tres dimensiones:

Proposición 2.1. *Para $t \geq 0$, sea $\mathcal{D}(t)$ una matriz de 3×3 a coeficientes reales, simétrica y con traza nula. Dado $\omega_0 \in \mathbb{R}^3$, determine la vorticidad $\omega(t) \in \mathbb{R}^3$ a partir de la siguiente ecuación diferencial ordinaria:*

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt}(t) = \mathcal{D}(t)\omega(t), & \forall t > 0, \\ \omega(0) = \omega_0, \end{cases} \quad (2.9)$$

y determine la matriz anti - simétrica $\mathcal{A}(t)$, para $t \geq 0$, mediante la relación:

$$\mathcal{A}(t)\mathbf{h} = \frac{1}{2}\omega(t) \times \mathbf{h}, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^3. \quad (2.10)$$

En consecuencia, si se definen la velocidad y la presión mediante las expresiones siguientes:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \doteq \frac{1}{2}\omega(t) \times \mathbf{x} + \mathcal{D}(t)\mathbf{x} \\ p(\mathbf{x}, t) \doteq -\frac{1}{2} \left[\frac{d\mathcal{D}}{dt}(t) + (\mathcal{D}(t))^2 + (\mathcal{A}(t))^2 \right] \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty), \end{cases} \quad (2.11)$$

se obtiene una solución exacta de la ecuación de Euler y de Navier - Stokes en $\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$.

La proposición anterior también constituye una primera formulación de la ecuación de Euler en términos del campo de vorticidad, a partir del cual se define la velocidad. Por su parte, el campo de presiones definido en (2.11) presenta un comportamiento cuadrático en \mathbf{x} , y en consecuencia, estas soluciones exactas poseen una interpretación física que es válida sólo localmente en espacio y tiempo. No obstante, ellas permiten modelar adecuadamente el comportamiento local típico que se observa en los flujos de fluidos incompresibles.

2.2. Una fórmula para la evolución de la vorticidad

Se cerrará este capítulo mostrando que, en el caso que el fluido esté libre de la acción de fuerzas externas (o bien, sometido al trabajo de un campo de fuerzas conservativo), la *vorticidad es propagada por el fluido*.

Para hacer esto más claro, considérese un instante de tiempo fijo $T > 0$, y denótese por $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ a la **función de trayectorias del fluido**; si una partícula suspendida en el fluido se encuentra en el punto $\mathbf{x} \in \Omega$ al instante inicial $t = 0$, su posición en cualquier instante posterior $t > 0$ será exactamente $\varphi(\mathbf{x}, t)$. Dicho de otro modo, para $\mathbf{x} \in \Omega$ fijo, la aplicación $\varphi(\mathbf{x}, \cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ describe la trayectoria de la partícula que se ubicaba en el punto \mathbf{x} al instante $t = 0$. Se asume que la función φ es lo suficientemente regular como para hacer legítimas las manipulaciones posteriores, y además, que para un tiempo fijo $t \in [0, T]$, la aplicación $\varphi(\cdot, t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un difeomorfismo (que será denotado por φ_t). Si $W \subset \mathbb{R}^3$ es una región contenida en Ω , entonces $\varphi_t(W) = W_t$, para $t \in [0, T]$, es el volumen W moviéndose con el fluido, como se ilustra a continuación:

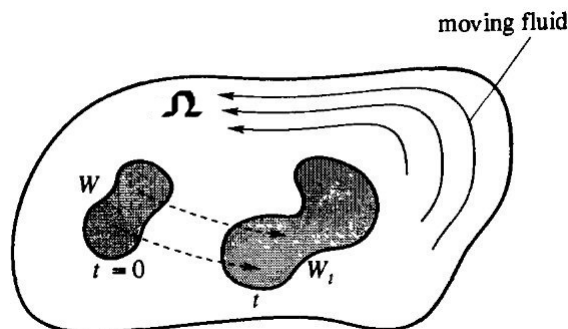


Figura 2.1: W_t es la imagen del volumen W a medida que las partículas de fluido contenidas en W se mueven por un tiempo t .

Una característica notable del flujo de un fluido ideal se expresa en el siguiente teorema:

Teorema 2.1. Si el fluido está sometido a la acción de un campo de fuerzas conservativo, entonces se tiene que:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \omega \cdot \nabla \mathbf{u}, \quad \text{en } \Omega \times (0, \infty), \quad (2.12)$$

donde se ha hecho uso de la clásica notación para la derivada material:

$$\frac{D}{Dt} \doteq \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla.$$

Además se tiene que:

$$\omega(\varphi(\mathbf{x}, t), t) = \nabla \varphi_t(\mathbf{x}) \omega(\mathbf{x}, 0), \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, \infty). \quad (2.13)$$

El teorema anterior (cuya demostración puede ser revisada en [25] ó [10]) indica justamente que el campo de vorticidad es transportado a lo largo de las líneas de trayectoria del fluido por la matriz jacobiana de la función φ_t . Esto se ilustra en la siguiente figura:

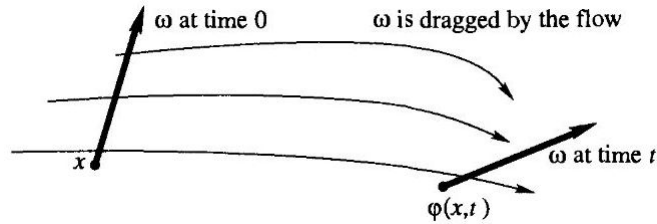


Figura 2.2: Esquema representativo de la evolución del campo de vorticidad.

Además, observando el lado derecho de (2.12) y usando la ecuación (2.5), se puede concluir que:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \mathcal{D}\omega, \quad \text{en } \Omega \times (0, \infty), \quad (2.14)$$

esto es, a lo largo de las trayectorias del fluido, el campo de vorticidad se *dilata* o se *contrae* gracias a la acción del tensor de deformación \mathcal{D} . Más precisamente, la vorticidad *aumenta* (o *disminuye*) cuando ω es paralelo a algún vector propio asociado a un valor propio positivo (negativo) de la matriz \mathcal{D} . En este contexto, si se analizan las ecuaciones (2.8) y (2.14), la restricción (2.8) indica que los cambios repentinos de tamaño y signo de alguno de los valores propios $\lambda_i(\mathbf{x}_0, t_0)$ pueden dilatar o comprimir violentamente el campo de vorticidad en varias direcciones. De acuerdo a lo planteado en [38], dicha restricción es fundamental a la hora de producir las estructuras vorticiales a pequeña escala, tan útiles en el desarrollo gráfico de los cálculos numéricos asociados a la ecuación de Euler tridimensional.

Antes de concluir este capítulo, se mostrará una aplicación clásica de la igualdad (2.13) que establece que *las líneas de vorticidad son transportadas en un fluido ideal*. Más precisamente, considérese una curva regular (no necesariamente cerrada) $\Gamma \subset \Omega$, parametrizada mediante la función $\vec{r}: [0, 1] \rightarrow \Omega$. Se dice que Γ es una **línea de vorticidad** al instante $t \geq 0$ si su vector tangente es paralelo al campo de vorticidad en cada punto de ella, es decir, si existe una función escalar $\lambda: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que:

$$\frac{d\vec{r}}{ds}(s) = \lambda(s)\omega(\vec{r}(s), t), \quad \forall s \in (0, 1).$$

Entonces, si $\Gamma = \{\vec{r}(s) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq s \leq 1\}$ es una línea de vorticidad (al instante inicial $t = 0$) que se mueve con el fluido, su evolución en el tiempo se describe mediante la curva móvil $\Gamma(t) \doteq \{\varphi(\vec{r}(s), t) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq s \leq 1\}$, para todo $t > 0$. Lo que se desea verificar es que, para todo $t > 0$, la curva $\Gamma(t)$ también es una línea de vorticidad, vale decir, que existe $\lambda : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que:

$$\frac{d\varphi}{ds}(\vec{r}(s), t) = \lambda(s)\omega(\varphi(\vec{r}(s), t), t), \quad \forall s \in (0, 1). \quad (2.15)$$

En efecto, dado $t > 0$, la definición de $\Gamma(t)$ implica que:

$$\frac{d\varphi}{ds}(\vec{r}(s), t) = \nabla\varphi(\vec{r}(s), t)\frac{d\vec{r}}{ds}(s) = \lambda(s)\nabla\varphi(\vec{r}(s), t)\omega(\vec{r}(s), 0), \quad \forall s \in (0, 1),$$

dado que Γ es una línea de vorticidad en $t = 0$. La identidad (2.13) implica que:

$$\nabla\varphi(\vec{r}(s), t)\omega(\vec{r}(s), 0) = \omega(\varphi(\vec{r}(s), t), t), \quad \forall s \in (0, 1),$$

de donde se obtiene inmediatamente la relación (2.15). Todo esto se resume en la siguiente proposición:

Proposición 2.2. *Las líneas de vorticidad son transportadas por un fluido ideal que se describa mediante un campo de velocidad diferenciable.*

Capítulo 3

La ecuación de Euler incompresible en el caso bidimensional

Aunque parezca extraño, el análisis de la ecuación de Euler bidimensional difiere notablemente del caso tridimensional. El concepto *bidimensional* da a entender que en esta sección se considerará el campo de velocidad de un fluido que se mueve dentro de un dominio fijo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, esto es:

$$\mathbf{u}(x, y, t) = (u(x, y, t), v(x, y, t), 0), \quad \forall((x, y), t) \in \Omega \times [0, \infty). \quad (3.1)$$

Por lo tanto, un flujo bidimensional puede ser interpretado como un caso particular del problema tridimensional, en donde el fluido circula por una determinada región de \mathbb{R}^2 de acuerdo a un campo de velocidad que no depende la variable z y cuya componente vertical es constantemente nula. Si se supone que el campo de velocidad es lo suficientemente diferenciable, entonces es posible calcular su matriz de velocidad de deformación:

$$\nabla \mathbf{u}(x, y, t) = \begin{pmatrix} u_x(x, y, t) & u_y(x, y, t) & 0 \\ v_x(x, y, t) & v_y(x, y, t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall((x, y), t) \in \Omega \times [0, \infty),$$

así como su campo de vorticidad:

$$\omega(\mathbf{x}, t) = \left(0, 0, \frac{\partial v}{\partial x}(x, y, t) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, t)\right), \quad \forall((x, y), t) \in \Omega \times [0, \infty). \quad (3.2)$$

Por ende, aplicando la igualdad dada en (2.12), se obtiene inmediatamente que:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \vec{0}, \quad \text{en } \Omega \times (0, \infty). \quad (3.3)$$

Este pequeño cálculo tiene dos grandes consecuencias. En primer lugar, la identidad (3.3) implica que la vorticidad se *conserva* a lo largo de las trayectorias del fluido. En un segundo lugar, el hecho que el término de dilatación o contracción vorticial¹ (vale decir, el término $\omega \cdot \nabla \mathbf{u}$) sea constantemente nulo en $\Omega \times (0, \infty)$ sugiere que los casos bidimensional y tri-

¹En inglés, *vortex stretching term*.

dimensional son esencialmente distintos, en donde las ecuaciones que los describen poseen propiedades significativamente diversas. Dicho de otro modo, las consideraciones sobre la evolución de la vorticidad descritas en la sección anterior carecen de sentido en el caso bidimensional, y de la misma forma, un resultado de existencia de la ecuación de Euler 2D no necesariamente arroja conclusiones que puedan utilizarse en el análisis del caso tridimensional. Por este motivo, se tratará en forma separada una formulación de la ecuación de Euler bidimensional en términos del campo de vorticidad y la función de corriente, que resulta ser más sencilla que la construcción equivalente en el caso tridimensional.

3.1. Formulación en términos de la vorticidad y la función de corriente.

Como ya se dijo, la identidad (3.3) captura una característica esencial de los flujos bidimensionales, y en consecuencia, resulta natural que a partir de dicha relación se obtenga una formulación alternativa de la ecuación de Euler bidimensional. Sin embargo, para que esto sea posible, es necesario aislar la vorticidad del campo de velocidad, la cual se presente en (3.3) a través de la derivada material. Es en este aspecto donde adquiere mayor relevancia la **función de corriente**.

Con este propósito en mente, se supondrá que el campo de velocidad definido en (3.1) satisface la ecuación de Euler incompresible en $\Omega = \mathbb{R}^2$. Por su parte, en vista de (3.2), se considerará a la vorticidad como un campo escalar:

$$\omega(x, y, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y, t) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, t), \quad \forall((x, y), t) \in \Omega \times [0, \infty).$$

Bajo la condición de incompresibilidad se tiene que el siguiente campo vectorial:

$$\mathbf{F}(x, y, t) \doteq (v(x, y, t), -u(x, y, t)), \quad \forall((x, y), t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty), \quad (3.4)$$

es irrotacional, verificando que:

$$\text{rot}(\mathbf{F})(x, y, t) = -\text{div}(\mathbf{u})(x, y, t)\hat{k} = \vec{0}, \quad \forall((x, y), t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty).$$

Es decir, para cada $t \geq 0$, el campo $\mathbf{F}(\cdot, t)$ es *conservativo* en \mathbb{R}^2 . Tomando un punto fijo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, se define la **función de corriente** ϕ asociada al campo de velocidad \mathbf{u} mediante la fórmula:

$$\phi(x, y, t) \doteq \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \mathbf{F} \cdot d\vec{r}, \quad \forall((x, y), t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty), \quad (3.5)$$

esto es, para cualquier $((x, y), t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$, $\phi(x, y, t)$ es igual al trabajo realizado por el campo \mathbf{F} al recorrer cualquier curva plana y suave que una los puntos (x_0, y_0) y (x, y) . Como el campo $\mathbf{F}(\cdot, t)$ es conservativo en \mathbb{R}^2 , para todo $t \geq 0$, se deduce que la función $\phi(\cdot, t)$ está bien definida y es diferenciable en \mathbb{R}^2 , para todo $t \geq 0$. Es más, se tiene que:

$$\nabla\phi(x, y, t) = \mathbf{F}(x, y, t), \quad \forall((x, y), t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty), \quad (3.6)$$

o bien:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y, t) = v(x, y, t) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y, t) = -u(x, y, t), \end{cases} \quad (3.7)$$

para todo $((x, y), t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$. Se observa que la función de corriente es única salvo una constante aditiva, pero de todos modos es común adoptar la siguiente notación:

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \nabla^\perp \phi(x, y, t), \quad \forall ((x, y), t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty). \quad (3.8)$$

Además, si el campo de velocidad \mathbf{u} está definido a partir de una función de corriente como en (3.8), la condición de incompresibilidad se satisface en forma automática. Al calcular el rotor de ambos lados de la igualdad (3.8), se obtiene la siguiente ecuación de Poisson para la función de corriente:

$$\Delta \phi(x, y, t) = \omega(x, y, t), \quad \forall ((x, y), t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty). \quad (3.9)$$

Como ya se ha indicado, una solución de esta última ecuación se obtiene a partir de una convolución entre el potencial newtoniano bidimensional y el campo de vorticidad:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \log(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) \omega(\mathbf{y}, t) d\mathbf{x}, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty). \quad (3.10)$$

Dado que es posible calcular el gradiente de ϕ derivando bajo el signo integral, se puede igualmente aplicar el operador ∇^\perp para obtener el campo de velocidad \mathbf{u} a partir de la función de corriente:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^2} K_2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \omega(\mathbf{y}, t) d\mathbf{x}, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty), \quad (3.11)$$

donde el kernel $K_2 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ se define como:

$$K_2(x, y) \doteq \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad (3.12)$$

que es una función homogénea de grado -1 en \mathbb{R}^2 , esto es, verifica que para todo $\lambda > 0$:

$$K_2(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^{-1} K_2(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

La identidad (3.11) es una forma análoga de la famosa *ley de Biot - Savart*, que permite determinar el campo magnético inducido por una corriente eléctrica en un cable. Esta terminología será adoptada y utilizada frecuentemente en el presente trabajo. Ahora bien, que el campo de velocidad pueda ser recuperado a partir de la vorticidad ya no es una sorpresa, según se estudió en la proposición (2.1). Sin embargo, la novedad ahora es que en (3.11) se aplica un operador integral no - local para recuperar el campo de velocidad a partir de la vorticidad. Es importante destacar que se ha hecho uso del lema (1.0.1) para dar una fórmula explícita de la solución de la ecuación de Poisson (3.9), lo cual obliga a suponer ciertas condiciones de regularidad y decaimiento.

Al reemplazar la igualdad (3.11) en la ecuación de la vorticidad (3.3), se obtiene una

nueva identidad que involucra únicamente a la vorticidad. Todo lo anterior se resume en la siguiente proposición:

Proposición 3.1. *(Formulación en forma vorticidad - corriente de la ecuación de Euler en $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$). Considérese un flujo bidimensional definido en todo $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$, cuyos campos de velocidad y vorticidad decaen lo suficientemente rápido cuando $\|(x, y)\| \rightarrow \infty$. Entonces, la ecuación de Euler incompresible (1.4) (con $\Omega = \mathbb{R}^2$) es equivalente a la siguiente formulación en términos de la vorticidad y función de corriente:*

$$\begin{cases} \frac{D\omega}{Dt} = 0 \\ \omega|_{t=0} = \omega_0, \text{ en } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty), \end{cases} \quad (3.13)$$

donde $\omega_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función conocida. El campo de velocidad se obtiene a partir de la vorticidad mediante la ley de Biot - Savart:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^2} K_2(\mathbf{x} - \mathbf{y})\omega(\mathbf{y}, t) d\mathbf{x}, \quad \forall(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty), \quad (3.14)$$

mientras que la presión puede ser calculada al resolver la siguiente ecuación de Poisson:

$$-\Delta p(\mathbf{x}, t) = \text{tr}((\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))^2), \quad \forall(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty). \quad (3.15)$$

3.2. Resultados clásicos de existencia, unicidad y regularidad.

El problema de Cauchy asociado a la ecuación de Euler incompresible y bidimensional ha sido exitosamente analizado hasta el día de hoy, permitiendo una comprensión bastante profunda de la naturaleza de sus soluciones. Se muestran acá algunos de los resultados típicos disponibles sólo para la ecuación de Euler incompresible y bidimensional, cuyas demostraciones pueden revisarse en [56], capítulo N°4):

Teorema 3.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto, acotado, conexo y de frontera regular. Sea $\mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ una función que satisface (1.6) y (1.8), y tal que $\text{rot}(\mathbf{u}_0) \in L^r(\Omega; \mathbb{R})$, para algún $r \in (1, \infty]$. Entonces, existe una solución $\mathbf{u} \in \mathcal{C}([0, \infty); W^{1,r}(\Omega; \mathbb{R}^2))$ de la ecuación de Euler incompresible y bidimensional, según lo escrito en la definición (1.1). En particular, si $r = +\infty$, entonces la solución es única, se tiene que $\text{rot}(\mathbf{u}) \in L^\infty(\Omega \times (0, \infty); \mathbb{R})$ y que $\mathbf{u} \in \mathcal{C}([0, \infty); L^2(\Omega; \mathbb{R}^2) \cap W^{1,s}(\Omega; \mathbb{R}^2))$, para todo $s \in (1, \infty)$.*

Es más, si $\mathbf{u}_0 \in W^{k,b}(\Omega; \mathbb{R}^2)$, para ciertos números $k \in \mathbb{N}$, $1 < b < \infty$, $k > 1 + \frac{2}{b}$, entonces $\mathbf{u} \in \mathcal{C}([0, \infty); W^{k,b}(\Omega; \mathbb{R}^2))$ y $\mathbf{u}_t \in \mathcal{C}([0, \infty); W^{k-1,b}(\Omega; \mathbb{R}^2))$. Por último, si $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^2)$, para ciertos números $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, $\alpha \in (0, 1)$, entonces $\mathbf{u} \in \mathcal{C}([0, \infty); \mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega; \mathbb{R}^2))$ y además $\mathbf{u}_t \in \mathcal{C}([0, \infty); \mathcal{C}^{k-1,\alpha}(\Omega; \mathbb{R}^2))$.

Si bien ya se ha explicado el motivo por el cual la presión interna no es siempre considerada en los resultados clásicos concernientes a la ecuación de Euler, se presenta a continuación un corolario que involucra la presencia de aquella magnitud física:

Corolario 3.1.1. *Bajo las hipótesis del teorema anterior, y suponiendo que $b < \infty$ para cualquier solución satisfaciendo las propiedades indicadas en el teorema (3.1), se tiene que existe una función $p \in \mathcal{C}([0, \infty); L^q(\Omega; \mathbb{R}))$ que hace válida la igualdad (1.4) en el sentido de las distribuciones. En este caso, se tiene que:*

- $1 < q \leq \frac{r}{2-r}$, si $r < 2$
- $1 < q < \infty$, si $r = 2$
- $1 < q \leq \infty$, si $r > 2$, reemplazando $L^\infty(\Omega \times (0, \infty); \mathbb{R})$ por $\mathcal{C}_0(\Omega \times (0, \infty); \mathbb{R})$ cuando $r = +\infty$.

En este contexto se tendrá que $\mathbf{u}_t \in \mathcal{C}([0, \infty); L^q(\Omega; \mathbb{R}^2))$ y $p \in \mathcal{C}([0, \infty); W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}))$, en donde:

- $q = \frac{2r}{4-r}$, si $\frac{4}{3} \leq r < 2$
- $1 \leq q < r$, si $r = 2$
- $q = r$, si $r > 2$.

Los dos resultados anteriores cubren adecuadamente el caso en que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto abierto, acotado, conexo y de frontera regular. Siguiendo con la metodología que distingue el problema según se considere un dominio acotado o no, cuando $\Omega = \mathbb{R}^2$ se cuenta con las siguientes formas equivalentes del teorema y corolario anteriores:

Teorema 3.2. *Sea $\mathbf{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ una función que satisface (1.6), verificando además que $\text{rot}(\mathbf{u}_0) \in L^r(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, para algún $r \in (1, \infty]$. En consecuencia, existe una solución $\mathbf{u} \in \mathbf{u}_0 + \mathcal{C}([0, \infty); L^q(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2) \cap W^{1,r}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2))$, con $q = \max\left\{1, \frac{2r}{r+2}\right\}$, de la ecuación de Euler incompresible y bidimensional, según lo escrito en la definición (1.2). En particular, si $r = +\infty$, entonces la solución es única, se tiene que $\text{rot}(\mathbf{u}) \in L^\infty(\mathbb{R}^2 \times (0, \infty); \mathbb{R})$ y $\mathbf{u} \in \mathcal{C}([0, \infty); L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2) \cap W_{\text{loc}}^{1,s}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2))$, para todo $s \in (1, \infty)$.*

Es más, si $\mathbf{u}_0 \in W^{k,b}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, para algunos números $k \in \mathbb{N}$, $1 < b < \infty$, $k > 1 + \frac{2}{b}$, entonces $\mathbf{u} \in \mathcal{C}([0, \infty); W^{k,b}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2))$ y $\mathbf{u}_t \in \mathcal{C}([0, \infty); W^{k-1,b}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2))$. Por último, si se tiene que $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, para ciertos números $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, $\alpha \in (0, 1)$, entonces $\mathbf{u} \in \mathcal{C}([0, \infty); \mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2))$ y $\mathbf{u}_t \in \mathcal{C}([0, \infty); \mathcal{C}^{k-1,\alpha}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2))$.

Corolario 3.2.1. *Bajo las hipótesis del teorema anterior, y suponiendo que $b < \infty$ para cualquier solución satisfaciendo las propiedades indicadas en el teorema (3.2), se tiene que existe una función $p \in \mathcal{C}([0, \infty); L^q(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}))$ que hace válida la igualdad (1.4) en el sentido de las distribuciones. En este caso, se tiene que:*

- $1 < q \leq \frac{r}{2-r}$, si $r < 2$
- $1 < q < \infty$, si $r = 2$
- $1 < q \leq \infty$, si $r > 2$, reemplazando $L^\infty(\mathbb{R}^2 \times (0, \infty); \mathbb{R})$ por $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^2 \times (0, \infty); \mathbb{R})$ cuando $r = +\infty$.

En este contexto se tendrá que $\mathbf{u}_t \in \mathcal{C}([0, \infty); L^q(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2))$ y $p \in \mathcal{C}([0, \infty); W^{1,q}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}))$, en donde:

- $1 \leq q \leq \frac{2r}{4-r}$, si $\frac{4}{3} \leq r < 2$
- $1 \leq q < r$, si $r = 2$
- $\frac{2r}{r+2} \leq q \leq r$, si $r > 2$.

Antes de concluir esta sección, es necesario realizar ciertas observaciones en relación a los teoremas recién expuestos:

- Dentro del espíritu de los dos corolarios anteriores, es posible especificar el grado de regularidad del campo de velocidad y del campo de presiones cuando $1 < r < \frac{4}{3}$. Esto requiere introducir ciertos duales de espacios de distribuciones, los cuales se alejan de los clásicos espacios funcionales indicados en ambos corolarios.
- Cuando $1 < r < \infty$, la unicidad de las soluciones entregada en los teoremas (3.1) y (3.2) es todavía un problema sin respuesta clara.
- En los resultados anteriores es posible agregar la conservación de la energía, vale decir, la siguiente propiedad:

$$(\forall t > 0) \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|^2 d\mathbf{x} = 0.$$

Asimismo, otras cantidades físicas que se conservan en el tiempo son: el flujo de velocidad, el flujo de vorticidad, la helicidad (que es constantemente nula), el impulso del fluido y el momento del impulso del fluido. Para mayores detalles sobre cantidades conservadas, se recomienda consultar [10], sección 1.7.

- La suavidad de la frontera del dominio sobre el cual se resuelve la ecuación de Euler bidimensional es una propiedad importante y necesaria para asegurar la regularidad global de las soluciones. De hecho, los autores de [51] consideran la ecuación de Euler 2D sobre un dominio plano cuya frontera no es suave sólo en dos puntos (que son cúspides internas), y posteriormente prueban que el campo de vorticidad de la solución deja de ser continuo en un instante finito de tiempo.
- El crecimiento de las cotas superiores de las soluciones cuando $t \rightarrow \infty$ es un interesante problema sin respuesta. Por ejemplo, si $\mathbf{u}_0 \in H^3(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, ¿cuál es el comportamiento de la cantidad $\|\mathbf{u}(t)\|_{H^3(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)}$ a medida que t diverge hacia $+\infty$? Por ahora sólo se conoce una cota superior del estilo $\exp(e^{Ct})$, con $C \in \mathbb{R}$. En esta materia, de gran interés es el resultado demostrado en [50], donde los autores construyen una condición inicial para la ecuación de Euler bidimensional (resuelta en el disco unitario) cuya solución correspondiente exhibe un crecimiento exponencial doble en el gradiente de la vorticidad. De acuerdo a lo establecido en [78], este régimen de crecimiento para el gradiente de la vorticidad es optimal.
- Pensando en los temas que se estudiarán en las secciones posteriores, la conclusión más importante que se puede extraer de los teoremas (3.1) y (3.2) es la siguiente: para un flujo incompresible y bidimensional en el cual se especifican condiciones iniciales suaves, las soluciones de la ecuación de Euler se mantienen regulares en **todo** tiempo posterior.

Capítulo 4

La ecuación de Euler incompresible y tridimensional

El presente capítulo tiene por objetivo dar a conocer los principales resultados concernientes a la ecuación de Euler incompresible y tridimensional. Se entregará una formulación alternativa de la ecuación de Euler tridimensional en el caso de un flujo axisimétrico, que será una de las herramientas más utilizadas de ahora en adelante. Posteriormente se revisarán los teoremas clásicos de existencia, unicidad y regularidad de soluciones del problema tridimensional, a partir de los cuales surge en forma natural el fenómeno de la formación de singularidades en tiempo finito de dichas soluciones, lo cual es el motivo de la última sección de este capítulo.

4.1. Flujos tridimensionales axisimétricos

Según se ha visto, la fórmula (2.14) de la evolución de la vorticidad constituye una identidad esencial de la mecánica de fluidos, a la vez que conduce hacia una formulación alternativa de la ecuación de Euler. Dicha construcción ya fue realizada, con relativa sencillez, en el caso bidimensional, en donde todo el análisis giraba en torno a la ecuación de Poisson (3.9) que relacionaba la vorticidad con la función de corriente. Una formulación equivalente en el caso general tridimensional requiere de técnicas de cálculo bastante más delicadas, que si bien son perfectamente abordables, no serán mayormente consideradas en este trabajo. Por ello, sólo se analizará en detalle una formulación alternativa de la ecuación de Euler tridimensional para un flujo axisimétrico, permitiendo que el lector interesado consulte en [10], sección 2.4, los detalles que permiten construir la formulación vorticidad - corriente de la ecuación de Euler tridimensional en el caso general (el correspondiente teorema principal se dará a conocer en el próximo capítulo).

Considérese un sistema de coordenadas cilíndricas $(r, \theta, z) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$, en el que un punto espacial $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ será denotado como $\xi = r\hat{r} + z\hat{k}$, siendo $r \geq 0$, $z \in \mathbb{R}$ y $\{\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{k}\}$ el triedro ortogonal propio de las coordenadas cilíndricas. Considérese un fluido ideal que circula por una región abierta y conexa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. El flujo del fluido se denomina **axisimétrico** cuando sus componentes son independientes de la variable angular $\theta \in [0, 2\pi]$; en particular, el campo de velocidad de un flujo axisimétrico posee simetría rotacional y

puede ser descrito mediante la siguiente descomposición:

$$\mathbf{u}(\xi, t) = u_r(r, z, t)\hat{r} + u_\theta(r, z, t)\hat{\theta} + u_z(r, z, t)\hat{k}, \quad (4.1)$$

para todo $(\xi, t) \in \Omega \times [0, \infty)$. El campo de vorticidad admite una escritura similar:

$$\omega(\xi, t) = \omega_r(r, z, t)\hat{r} + \omega_\theta(r, z, t)\hat{\theta} + \omega_z(r, z, t)\hat{k}, \quad (4.2)$$

en donde:

$$\begin{cases} \omega_r(r, z, t) = -\frac{\partial u_\theta}{\partial z}(r, z, t) \\ \omega_\theta(r, z, t) = \frac{\partial u_r}{\partial z}(r, z, t) - \frac{\partial u_z}{\partial r}(r, z, t) \\ \omega_z(r, z, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta)(r, z, t), \end{cases} \quad (4.3)$$

para todo $(\xi, t) \in \Omega \times [0, \infty)$, con $r > 0$. En este contexto, la expresión de la ecuación de Euler (primera identidad de (1.4)) en coordenadas cilíndricas, para un flujo axisimétrico, es la siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\widetilde{D}u_r}{Dt} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\widetilde{D}u_\theta}{Dt} + \frac{u_r u_\theta}{r} = 0 \\ \frac{\widetilde{D}u_z}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z}, \end{cases} \quad (4.4)$$

en todo $\Omega \times (0, \infty)$, con $r > 0$. En este caso, la derivada material actúa sólo sobre los planos axiales:

$$\frac{\widetilde{D}}{Dt} \doteq \frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial r} + u_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Por su parte, la forma de la ecuación de evolución de la vorticidad (2.14) en coordenadas cilíndricas, para un flujo axisimétrico, es la siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\widetilde{D}\omega_r}{Dt} = \omega_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \omega_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\widetilde{D}\omega_\theta}{Dt} = \frac{1}{r}(u_r \omega_\theta - u_\theta \omega_r) + \omega_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \omega_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\widetilde{D}\omega_z}{Dt} = \omega_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \omega_z \frac{\partial u_z}{\partial z}, \end{cases} \quad (4.5)$$

en todo $\Omega \times (0, \infty)$, con $r > 0$.

Considérese entonces el flujo de un fluido ideal y axisimétrico, cuyo campo de velocidad \mathbf{u} satisface las ecuaciones (4.4) y (4.5) en $\Omega \times (0, \infty)$, junto a la condición de incompresibilidad. Se puede verificar directamente que:

$$\frac{\widetilde{D}r}{Dt} = u_r, \quad \frac{\widetilde{D}}{Dt} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{u_r}{r^2},$$

en $\Omega \times (0, \infty)$, con $r > 0$. En consecuencia, la componente angular de (4.4) entrega que:

$$\frac{\widetilde{D}}{Dt}(ru_\theta) = 0, \quad \text{en } \Omega \times (0, \infty), \quad (4.6)$$

mientras que la componente angular de (4.5), junto a (4.3), permiten deducir que:

$$\frac{\widetilde{D}}{Dt} \left(\frac{\omega_\theta}{r} \right) = \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial z} [(ru_\theta)^2], \quad (4.7)$$

en $\Omega \times (0, \infty)$, con $r > 0$. Por otra parte, imitando el procedimiento utilizado en la sección (3.1), a partir de la condición de incompresibilidad es posible deducir que existe una función de corriente axisimétrica ψ , definida sobre $\Omega \times [0, \infty)$, tal que:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial r}(r, z, t) = -ru_z(r, z, t) \\ \frac{\partial \psi}{\partial z}(r, z, t) = ru_r(r, z, t), \end{cases} \quad (4.8)$$

para todo $(\xi, t) \in \Omega \times [0, \infty)$. Nótese que, si las componentes radial y axial de la velocidad se definen según (4.8), entonces la condición de incompresibilidad se satisface en forma automática:

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{\partial}{\partial z}(ru_z) = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r} = 0, \quad \text{en } \Omega \times [0, \infty).$$

Hasta el momento se tienen dos ecuaciones que involucran a las cantidades u_θ y ω_θ , y una función de corriente que permite definir las otras dos componentes de la velocidad (originando un campo solenoidal). Para generar un sistema de ecuaciones diferencial cerrado, es necesario relacionar la función de corriente con alguna de las componentes angulares ya indicadas. A partir de la segunda identidad en (4.3), junto a la igualdad (4.8), se puede demostrar fácilmente que:

$$\mathcal{L}(\psi) = \frac{\omega_\theta}{r}, \quad (4.9)$$

en $\Omega \times (0, \infty)$, con $r > 0$, siendo \mathcal{L} el siguiente operador diferencial elíptico:

$$\mathcal{L} \doteq \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (4.10)$$

En consecuencia, si se resuelve la ecuación elíptica (4.9) para la función de corriente ψ en términos de la componente angular de la vorticidad, posteriormente se pueden calcular las componentes radial y axial de la velocidad según (4.8), para luego reemplazarlas en (4.6) y (4.7), y así obtener un sistema completo de ecuaciones en derivadas parciales. Todo este análisis se resume en la siguiente proposición:

Proposición 4.1. *(Formulación en forma vorticidad - corriente de la ecuación de Euler tridimensional para flujos axisimétricos). Considérese un flujo tridimensional y axisimétrico definido en una región abierta y conexa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, para todo $t \geq 0$, cuyos campos de velocidad y vorticidad están definidos como en (4.1) y (4.2), respectivamente. Entonces, la ecuación de Euler incompresible (1.4) es equivalente a la siguiente formulación en términos de la*

vorticidad y función de corriente:

$$\begin{cases} \frac{\widetilde{D}}{Dt}(ru_\theta) = 0 \\ \frac{\widetilde{D}}{Dt}\left(\frac{\omega_\theta}{r}\right) = \frac{1}{r^4}\frac{\partial}{\partial z}[(ru_\theta)^2] \\ \mathcal{L}(\psi) = \frac{\omega_\theta}{r}, \end{cases}$$

en $\Omega \times (0, \infty)$, con $r > 0$, donde la derivada material actúa sólo sobre los planos axiales:

$$\frac{\widetilde{D}}{Dt} \doteq \frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial r} + u_z \frac{\partial}{\partial z},$$

mientras que \mathcal{L} es el siguiente operador elíptico:

$$\mathcal{L} \doteq \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

4.2. Resultados clásicos de existencia, unicidad y regularidad

A diferencia del caso bidimensional, muchos aspectos de la ecuación de Euler incompresible y tridimensional todavía no abandonan el terreno de la conjetura. Es más, si en la situación precedente se contaba con notables resultados de existencia, unicidad y regularidad, en el caso tridimensional habrá que contentarse con un resultado más débil: para un flujo incompresible y tridimensional (relativo a un dominio acotado o no), el problema con condición inicial y condición de frontera asociado a la ecuación de Euler posee una única solución regular definida en un intervalo de tiempo finito, siempre y cuando el dato inicial sea lo suficientemente regular. De hecho, este resultado fue obtenido varias décadas atrás¹, en donde la demostración se basaba en una desigualdad de Gronwall no - lineal de la siguiente forma:

$$y'(t) \leq Cy(t)^{3/2} \implies y(t) \leq \frac{y(0)}{(1 - 2tC\sqrt{y(0)})^2}. \quad (4.11)$$

Por ende, la cantidad $y(t)$, que representa una determinada norma de la solución, será finita sólo hasta un instante de tiempo T^* que depende del valor inicial $y(0)$, vale decir, de la condición inicial. Tal cual se indica en [4], dicha condición inicial debe ser escogida a partir de un espacio de funciones lo suficientemente regulares. En particular, si se considera la solución en $H^s(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, con $s \geq 3$, entonces se puede aplicar el producto escalar de $H^s(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ entre los términos la ecuación de Euler (1.4) y la solución \mathbf{u} , para deducir, en base al uso de ciertas desigualdades de Sobolev, lo siguiente:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\mathbf{u}\|_{H^s(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)}^2) \leq C \|\mathbf{u}\|_{H^s(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)}^3, \quad (4.12)$$

¹Aparentemente, la primera demostración fue publicada en 1925 por Leon Lichtenstein, en su obra titulada "Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik homogener, unzusammendrückbarer, reibungsloser Flüssigkeiten und die Helmholtzschen Wirbelsätze".

para una cierta constante $C > 0$. En consecuencia, a partir de (4.11) y (4.12) se puede obtener la existencia local (en tiempo) de soluciones suaves de la ecuación de Euler tridimensional.

El objetivo de esta sección es justamente dar a conocer el enunciado preciso de estos resultados, en donde se han usado las adaptaciones descritas en [33] y [5], ya sea si el fluido ocupa un dominio acotado de \mathbb{R}^3 o no, respectivamente.

Teorema 4.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto, acotado y de frontera regular. Para $s \geq 3$, sea $\mathbf{u}_0 \in H^s(\Omega; \mathbb{R}^3)$ una función que satisface (1.6) y (1.8). En consecuencia, existe un tiempo finito $T^* > 0$ y una constante $C > 0$, ambos dependiendo solamente de la cantidad $\|\mathbf{u}_0\|_{H^s(\Omega; \mathbb{R}^3)}$, para los cuales existe un único par de funciones $\mathbf{u} \in \mathcal{C}([0, T^*]; H^s(\Omega; \mathbb{R}^3))$ y $p \in \mathcal{C}([0, T^*]; H^{s+1}(\Omega; \mathbb{R}))$ que hacen válidas la igualdades (1.4) y (1.7), para todo $t \in [0, T^*]$ (en el sentido clásico), y tales que:*

$$\sup_{t \in [0, T^*]} \|\mathbf{u}(t)\|_{H^s(\Omega; \mathbb{R}^3)} \leq C \|\mathbf{u}_0\|_{H^s(\Omega; \mathbb{R}^3)}.$$

El enunciado del teorema (4.1) consiste en una adaptación del resultado presentado en [48], en donde los autores demuestran un teorema relacionado con las ecuaciones de evolución no - lineales en general, a partir del cual se obtiene, como simple aplicación, la existencia local (en tiempo) de soluciones regulares de la ecuación de Euler 3D en un dominio acotado. No obstante, para leer una demostración directa del teorema (4.1), se recomienda consultar [72]. Por su parte, el siguiente teorema constituye una adaptación del resultado expuesto en [47], en el que se demuestra la existencia local (en tiempo) de soluciones suaves de la ecuación de Euler y Navier - Stokes 3D aplicando métodos del tipo punto - fijo en un contexto de ecuaciones de evolución no - lineales en espacios de Hilbert.

Teorema 4.2. *Sea $\mathbf{u}_0 \in H^s(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, con $s \geq 3$, una función que satisface (1.6). En consecuencia, existe un tiempo finito $T^* > 0$, que depende solamente de la cantidad $\|\mathbf{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)}$, para el cual existen únicas funciones $\mathbf{u} \in \mathcal{C}([0, T^*]; H^s(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}^1([0, T^*]; H^{s-1}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3))$ y $p \in \mathcal{C}([0, T^*]; H^{s+1}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}))$ que hacen válidas la igualdades (1.4) y (1.7), para todo $t \in [0, T^*]$ (en el sentido clásico).*

Tal cual se realizó en el caso bidimensional, es necesario agregar algunas observaciones sobre los dos teoremas anteriores:

- En el teorema (4.1) se obtiene como solución un campo de velocidad que pertenece a la clase $\mathcal{C}([0, T^*]; H^s(\Omega; \mathbb{R}^3))$, con $s \geq 3$. Dado que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un conjunto abierto, acotado y de frontera regular, se tendrá entonces que $H^s(\Omega; \mathbb{R}^3) \hookrightarrow \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Esto justifica la parte del enunciado que establece que se satisface la ecuación de Euler incompresible y tridimensional en el *sentido clásico*. De hecho, esta conclusión sigue siendo válida si se supone que $s > \frac{5}{2}$.
- En el teorema (4.2) se obtiene como solución un campo de velocidad que pertenece a la clase $\mathcal{C}([0, T^*]; H^s(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3))$, con $s \geq 3$. Dado que $s > \frac{3}{2}$, se tendrá entonces que $H^s(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \hookrightarrow \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, con $k = \left[s - \frac{3}{2} \right]$. Esto justifica la parte del enunciado que establece que se satisface la ecuación de Euler incompresible y tridimensional en el *sentido clásico*.

- Existen versiones del teorema (4.1) para el caso hipotético de un fluido que ocupa una región $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, con $N \geq 3$. En este caso, es necesaria la hipótesis $s > 1 + \frac{N}{2}$.
- En los resultados anteriores es posible agregar la conservación de la energía, vale decir, la siguiente propiedad:

$$(\forall t > 0) \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|^2 d\mathbf{x} = 0.$$

Asimismo, otras cantidades físicas que se conservan en el tiempo son: el flujo de velocidad, el flujo de vorticidad, la helicidad, el impulso del fluido y el momento del impulso del fluido. Para mayores detalles sobre cantidades conservadas, se recomienda consultar [10], sección 1.7.

- Más allá de los aspectos técnicos mencionados, se insiste en el hecho fundamental de que los dos teoremas entregan soluciones (campos de velocidad y presión) que están definidas en un intervalo de tiempo **finito**. Los teoremas no indican si las soluciones dejan de ser regulares una vez transcurrido el tiempo crítico T^* , e incluso si ese fuera el caso, tampoco se especifica la manera en que las soluciones pierden su regularidad. Estos dos aspectos no han sido completamente aclarados hasta el día de hoy, constituyendo uno de los problemas abiertos más importantes de la mecánica de fluidos y de las matemáticas aplicadas en general. No obstante, el resultado existente es que, después del tiempo T^* , las soluciones *pueden* desarrollar singularidades debido a la formación de turbulencias en el flujo. Estos temas serán tratados con mayor detalle en la siguiente sección.

4.3. Sobre la formación de singularidades y la pérdida de regularidad

Como ya se ha visto, en el caso de un fluido bidimensional, las soluciones de la ecuación de Euler se mantienen regulares en todo instante de tiempo, bajo la presencia de una condición inicial suave. Sin embargo, diversas investigaciones numéricas sugieren un comportamiento distinto para un flujo que resuelve la ecuación de Euler incompresible y tridimensional. En particular, estos cálculos sugieren que las soluciones de (1.4), que inicialmente constituyen flujos descritos por un campo de velocidad suave, pueden desarrollar singularidades, y además, este quiebre se debe a la activación de un régimen turbulento caracterizado por un crecimiento no - acotado de la vorticidad. De hecho, sencillas consideraciones heurísticas permiten anticipar este hecho, y a la vez, enfatizar la diferencia existente entre el comportamiento de un flujo euleriano bidimensional y uno tridimensional. En efecto, ya se ha visto que, en dos dimensiones, el campo de vorticidad se mantiene constante a lo largo de las trayectorias del fluido. Por su parte, en el caso tridimensional, la ecuación (2.12) indica que el término $\omega \cdot \nabla \mathbf{u}$ provoca alteraciones en la vorticidad, a medida que ésta es transportada sobre las líneas de trayectoria. Es más, según se indica en [58], dicho término es el principal causante de las dificultades que surgen en la construcción de una solución regular global de la ecuación de Euler incompresible y tridimensional. Sin ir más lejos, recuérdese que la derivada material corresponde simplemente a la derivada temporal en los puntos de las trayectorias del fluido, de modo que la igualdad (2.14) no es otra cosa que:

$$\frac{d\omega}{dt}(\varphi(\mathbf{x}, t), t) = \mathcal{D}(\varphi(\mathbf{x}, t), t)\omega(\varphi(\mathbf{x}, t), t), \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty),$$

suponiendo que el fluido circula por todo \mathbb{R}^3 de acuerdo a un campo de velocidad y función de trayectorias diferenciables. Además, la identidad (2.5) indica que la vorticidad se asocia con la parte anti - simétrica de la matriz de velocidad de deformación $\nabla \mathbf{u}$. Por consiguiente, podría resultar natural conjeturar una estimación del tipo $\mathcal{D}(\varphi(\mathbf{x}, t), t)\omega(\varphi(\mathbf{x}, t), t) \approx \omega(\varphi(\mathbf{x}, t), t)^2$, $\forall(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$, componente a componente, lo cual conduciría hacia una ecuación diferencial ordinaria del siguiente estilo:

$$\begin{cases} \frac{df}{dt}(t) = (f(t))^2, & \forall t > 0, \\ f(0) = f_0, \end{cases}$$

con $f_0 \in \mathbb{R}$ dado, la cual posee soluciones que *explotan* en un instante de tiempo finito. En consecuencia, no es sencillo excluir, a priori, la posibilidad de que el campo de vorticidad presente una singularidad en un tiempo finito, en algún punto espacial.

En esta sección se darán a conocer los resultados formales que ligan el proceso de formación de singularidades con la acumulación de la vorticidad en conjuntos cada vez más pequeños, siempre en el caso tridimensional. En concreto, se verá que, si una solución es inicialmente suave y pierde su regularidad en un instante posterior, entonces la máxima vorticidad aumenta en forma no - acotada a medida que el tiempo crítico se aproxima. En consecuencia, no hay espacio para la formación de otros tipos de singularidades (por ejemplo, discontinuidades de salto o singularidades en el tensor de deformación) antes de que la vorticidad sea no - acotada; en definitiva, solamente la norma L^∞ de la vorticidad controla el quiebre de las soluciones regulares de la ecuación de Euler incompresible y tridimensional. Nuevamente se hará distinción entre los resultados, dependiendo si el fluido ocupa una región acotada de \mathbb{R}^3 (la referencia es [33] en este caso), o bien fluye en todo \mathbb{R}^3 (la referencia correspondiente es [5]).

Teorema 4.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto, acotado y de frontera regular. Para $s \geq 3$ y un tiempo finito $T > 0$, sea $\mathbf{u} \in \mathcal{C}([0, T]; H^s(\Omega; \mathbb{R}^3))$ una solución de la ecuación de Euler (1.4), que satisface la condición de borde (1.7). Si $\hat{T} > 0$ es el primer instante de tiempo en el que \mathbf{u} deja de pertenecer a la clase $\mathcal{C}([0, \hat{T}]; H^s(\Omega; \mathbb{R}^3))$, entonces se tendrá que:*

$$\int_0^{\hat{T}} \|\omega(t)\|_{L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)} dt = \infty,$$

y en particular, se tendrá que:

$$\sup_{t \in (0, \hat{T})} \|\omega(t)\|_{L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)} = \infty.$$

Sin entrar en mayor detalle, corresponde señalar que el teorema (4.3) se demuestra por contradicción; inicialmente se asume que existe $M > 0$ tal que:

$$\int_0^{\hat{T}} \|\omega(t)\|_{L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)} dt = M < \infty,$$

y el objetivo es después probar que $\mathbf{u}(\hat{T}) \in H^s(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Este trabajo se lleva a cabo en cuatro pasos, descritos brevemente a continuación:

1. Primero, se utiliza una función diferenciable cualquiera $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \times [0, \hat{T}] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y se obtiene la siguiente estimación para su energía:

$$\log(\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{H^s(\Omega; \mathbb{R}^3)}) \leq \log(\|\mathbf{u}_0\|_{H^s(\Omega; \mathbb{R}^3)}) + C \int_0^{\hat{T}} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^3)} dt, \quad (4.13)$$

para todo $t \in [0, \hat{T}]$ y para cierto número $C > 0$.

2. Se obtiene otra cota, esta vez del tipo elíptico, de la siguiente forma:

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^3)} \leq C\{(\log^+(\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{H^s(\Omega; \mathbb{R}^3)}) + 1)\|\omega(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)} + 1\}, \quad (4.14)$$

para todo $t \in [0, \hat{T}]$ y para cierto número $C > 0$.

3. Se aplica la desigualdad de Gronwall a una combinación de las desigualdades (4.13) y (4.14) para deducir que existe $K > 0$ tal que:

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{H^s(\Omega; \mathbb{R}^3)} \leq K, \quad \forall t \in [0, \hat{T}].$$

4. Ocupando un clásico argumento de densidad, se llega a concluir que $\mathbf{u}(\hat{T}) \in H^s(\Omega; \mathbb{R}^3)$, siendo $\mathbf{u} \in \mathcal{C}([0, T]; H^s(\Omega; \mathbb{R}^3))$ la solución descrita en el teorema (4.3).

Se pasa ahora a analizar la forma del teorema (4.3) cuando $\Omega = \mathbb{R}^3$.

Teorema 4.4. *Sea $\mathbf{u} \in \mathcal{C}([0, T]; H^s(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; H^{s-1}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3))$, con $s \geq 3$, una solución de la ecuación de Euler (1.4), para un cierto tiempo finito $T > 0$. Si $\hat{T} > 0$ es el primer instante de tiempo en el que \mathbf{u} deja de pertenecer a la clase $\mathcal{C}([0, \hat{T}]; H^s(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}^1([0, \hat{T}]; H^{s-1}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3))$, entonces se tendrá que:*

$$\int_0^{\hat{T}} \|\omega(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)} dt = \infty,$$

y en particular, se tendrá que:

$$\limsup_{t \nearrow \hat{T}} \|\omega(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)} = \infty.$$

Dado que el crecimiento no - acotado de la norma infinito del campo de vorticidad obliga a que la solución deje de pertenecer a una cierta familia de funciones regulares, es también natural pensar que la solución puede ser extendida (en el tiempo) dentro de aquella clase, siempre y cuando se tenga un control específico sobre la norma infinito del campo de vorticidad. En efecto, como consecuencia inmediata del teorema (4.4) se obtiene lo siguiente:

Corolario 4.4.1. *Para alguna solución de la ecuación de Euler (1.4), supóngase que existe una constante $M_0 > 0$ y un instante de tiempo $T^* > 0$ tales que, en cualquier intervalo $[0, T]$ de existencia de la solución en la clase $\mathcal{C}([0, T]; H^s(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; H^{s-1}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3))$, con $T < T^*$ y $s \geq 3$, la vorticidad satisface la siguiente desigualdad:*

$$\int_0^T \|\omega(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)} dt \leq M_0.$$

Entonces, la solución puede ser extendida en el tiempo, de modo que pertenezca a la clase $\mathcal{C}([0, T^*]; H^s(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}^1([0, T^*]; H^{s-1}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3))$.

Para demostrar el teorema (4.4), los autores de [5] comienzan verificando que:

$$\limsup_{t \nearrow \hat{T}} \|\mathbf{u}(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)} = \infty, \quad (4.15)$$

lo cual es relativamente sencillo si se trabaja por reducción al absurdo. En efecto, si (4.15) no se cumple, entonces existe $C_0 > 0$ tal que:

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)} \leq C_0, \quad \forall t \in [0, \hat{T}).$$

Haciendo uso del teorema de existencia local (4.2), es posible iniciar una solución de la ecuación de Euler 3D en cualquier instante de tiempo $t_1 \in [0, \hat{T})$, con condición inicial dada por $\mathbf{u}(t_1)$, y dicha solución será regular en el intervalo $[t_1, t_1 + T_0(C_0)]$, con $T_0(C_0) > 0$, que puede ser elegido en forma independiente de t_1 y tal que $\hat{T} > T_0(C_0)$. Si se escoge un instante t_1 tal que $t_1 > \hat{T} - T_0(C_0)$, entonces, gracias a la unicidad que entrega el teorema (4.2), la solución original habrá sido extendida más allá del tiempo crítico \hat{T} , contradiciendo la definición o elección de \hat{T} . Habiendo probado (4.15), posteriormente los autores asumen que existe $M > 0$ tal que:

$$\int_0^{\hat{T}} \|\omega(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)} dt = M < \infty,$$

con la intención final de concluir que:

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)} < \hat{T}, \quad \forall t \in [0, \hat{T}),$$

lo cual claramente contradice la afirmación (4.15). Bajo este propósito, los autores de [5] utilizan, entre otras cosas, técnicas como la transformada de Fourier y la ley de Biot - Savart. Claramente no es posible aplicar la transformada de Fourier cuando se trabaja con un campo de velocidad definido en un dominio acotado de \mathbb{R}^3 . Por su parte, la ley de Biot - Savart, como ya se ha visto, permite obtener la expresión de un campo vectorial diferenciable $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a partir del conocimiento de su rotor, según la siguiente fórmula:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \times \text{rot}(\mathbf{v})(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Ciertamente, esta identidad deja de ser útil en el caso del campo de velocidad de un fluido que se mueve en un dominio acotado de \mathbb{R}^3 . Este tipo de consideraciones permiten justificar la metodología empleada hasta ahora, en el sentido que se ha distinguido el problema de un fluido contenido en una parte acotada de \mathbb{R}^3 con respecto a la situación que está libre de tal restricción.

Si bien se ha puesto especial énfasis en el hecho de que basta controlar el máximo de la vorticidad para poder monitorizar la regularidad de las soluciones de la ecuación de Euler tridimensional, es útil e interesante disponer de algún resultado que dé cuenta del efecto que provoca el quiebre de regularidad sobre el campo de velocidad. Intuitivamente, lo más natural sería postular que la formación de singularidades, representada físicamente mediante

la aparición de turbulencias en el fluido, provoque un crecimiento no - acotado de la energía de la solución. El siguiente teorema, cuya demostración puede leerse en [10], sección 3.2.3, confirma esta intuición:

Teorema 4.5. *Considérese una condición inicial $\mathbf{u}_0 \in H^m(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, con $m \geq 3$, que verifica la condición de incompresibilidad, y una viscosidad cinemática $\nu \geq 0$. Entonces, existe un tiempo máximo de existencia $T^* > 0$ (el cual puede ser infinito o no) y una única solución $\mathbf{u}^\nu \in \mathcal{C}([0, T^*]; H^m(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}^1([0, T^*]; H^{m-2}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3))$ de la ecuación de Euler o de Navier - Stokes. Es más, si $T^* < \infty$, entonces necesariamente $\lim_{t \rightarrow T^*} \|\mathbf{u}^\nu(\cdot, t)\|_{H^m(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)} = \infty$.*

En consecuencia, si se conjetura que un instante de tiempo T^* es crítico para la existencia de una solución regular \mathbf{u} de la ecuación de Euler tridimensional, el límite $\lim_{t \rightarrow T^*} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{H^m(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)}$ puede ser utilizado para *descartar* dicha suposición.

Más en general, es sumamente práctico entregar diversas condiciones físicas que sean equivalentes a la acumulación de vorticidad representada en los teoremas (4.3) y (4.4), puesto que cada una de estas condiciones podría constituir un chequeo auto - consistente en cualquier cálculo numérico destinado a buscar posibles soluciones singulares de la ecuación de Euler 3D. Con este objetivo en mente, considérese una línea de vorticidad parametrizada (en el instante inicial $t = 0$) mediante la función $\vec{r}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$. En consecuencia, de acuerdo a la identidad (2.15), existirá otra función $\lambda: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que:

$$\frac{d\varphi}{ds}(\vec{r}(s), t) = \lambda(s)\omega(\varphi(\vec{r}(s), t), t), \quad \forall s \in (0, 1), \quad \forall t \in [0, T^*].$$

Luego, la longitud de una sección de esta línea de vorticidad varía en el tiempo según la siguiente función:

$$\mathcal{L}(t) \doteq \int_{s_0}^{s_1} |\lambda(s)| \|\omega(\varphi(\vec{r}(s), t), t)\| ds, \quad \forall t \in [0, T^*), \quad (4.16)$$

con $0 \leq s_0 \leq s_1 \leq 1$. En particular, se tendrá que:

$$\mathcal{L}'(t) = \int_{s_0}^{s_1} |\lambda(s)| \frac{d}{dt} \|\omega(\varphi(\vec{r}(s), t), t)\| ds, \quad \forall t \in [0, T^*). \quad (4.17)$$

Ahora bien, gracias a la igualdad (2.14), para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ y $t \in [0, T^*)$ se tendrá que:

$$\frac{d}{dt} \omega(\varphi(\mathbf{x}, t), t) = \frac{D\omega}{Dt}(\varphi(\mathbf{x}, t), t) = \mathcal{D}(\varphi(\mathbf{x}, t), t)\omega(\varphi(\mathbf{x}, t), t). \quad (4.18)$$

En este punto conviene introducir los siguientes conceptos:

- la **dirección de vorticidad**, definida para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ y $t \geq 0$ como:

$$\xi(\mathbf{x}, t) \doteq \begin{cases} \frac{\omega(\mathbf{x}, t)}{\|\omega(\mathbf{x}, t)\|} & \text{si } \omega(\mathbf{x}, t) \neq \vec{0} \\ \vec{0} & \text{si } \omega(\mathbf{x}, t) = \vec{0}. \end{cases}$$

- el **factor de estiramiento**, definido para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ y $t \geq 0$ como:

$$\mathcal{S}(\mathbf{x}, t) \doteq \begin{cases} \mathcal{D}(\mathbf{x}, t)\xi(\mathbf{x}, t) \cdot \xi(\mathbf{x}, t) & \text{si } \xi(\mathbf{x}, t) \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \xi(\mathbf{x}, t) = \vec{0}. \end{cases}$$

Entonces, cuando $\omega(\varphi(\mathbf{x}, t), t) \neq \vec{0}$, se puede establecer que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\omega(\varphi(\mathbf{x}, t), t)\| &= \frac{\omega(\varphi(\mathbf{x}, t), t)}{\|\omega(\varphi(\mathbf{x}, t), t)\|} \cdot \frac{d}{dt} \omega(\varphi(\mathbf{x}, t), t) \\ &= \xi(\varphi(\mathbf{x}, t), t) \cdot \mathcal{D}(\varphi(\mathbf{x}, t), t) \omega(\varphi(\mathbf{x}, t), t) \\ &= [\mathcal{D}(\varphi(\mathbf{x}, t), t) \xi(\varphi(\mathbf{x}, t), t) \cdot \xi(\varphi(\mathbf{x}, t), t)] \|\omega(\varphi(\mathbf{x}, t), t)\| \\ &= \mathcal{S}(\varphi(\mathbf{x}, t), t) \|\omega(\varphi(\mathbf{x}, t), t)\|, \end{aligned}$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ y $t \in [0, T^*)$. Esta igualdad implica que:

$$\|\omega(\varphi(\mathbf{x}, t), t)\| = \|\omega(\mathbf{x}, 0)\| \exp\left(\int_0^t \mathcal{S}(\varphi(\mathbf{x}, s), s) ds\right), \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T^*).$$

En definitiva, a medida que se aproxima el tiempo crítico $T^* < \infty$, el largo infinitesimal de las líneas de vorticidad se mantendrá acotado siempre y cuando se verifique que:

$$\int_0^{T^*} \|\mathcal{S}(\cdot, s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})} ds < \infty, \quad (4.19)$$

cumpléndose, en tal caso, la siguiente desigualdad: $\forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T^*)$,

$$\|\omega(\varphi(\mathbf{x}, t), t)\| \leq \|\omega(\mathbf{x}, 0)\| \exp\left(\int_0^{T^*} \|\mathcal{S}(\cdot, s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})} ds\right). \quad (4.20)$$

La desigualdad (4.20) es el punto de partida del siguiente teorema, cuya demostración completa puede hallarse en [10], sección 5.1:

Teorema 4.6. *(Condiciones físicas equivalentes a la pérdida de regularidad en soluciones de la ecuación de Euler 3D). Considérese un fluido que se mueve en todo \mathbb{R}^3 de acuerdo a un campo de velocidad diferenciable, el cual satisface la ecuación de Euler 3D. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *El intervalo de tiempo $[0, T^*)$, con $T^* < \infty$, es el intervalo maximal de existencia regular $H^s(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, con $s \geq 3$, de la solución de la ecuación de Euler 3D.*
2. *El campo de vorticidad se acumula tan rápidamente en el tiempo de modo tal que:*

$$\lim_{t \nearrow T^*} \int_0^t \|\omega(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)} ds = \infty.$$

3. *La matriz de deformación se acumula tan rápidamente en el tiempo de modo tal que:*

$$\lim_{t \nearrow T^*} \int_0^t \|\mathcal{D}(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} ds = \infty.$$

4. El factor de estiramiento se acumula tan rápidamente en el tiempo de modo tal que:

$$\lim_{t \nearrow T^*} \int_0^t \|\mathcal{S}(\tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})} d\tau = \infty.$$

Capítulo 5

La búsqueda de soluciones singulares de la ecuación de Euler tridimensional

El presente capítulo tiene por finalidad repasar algunos de los intentos que han sido llevados a cabo con la intención de responder la siguiente pregunta:

¿Existen soluciones regulares (y con energía finita) de la ecuación de Euler tridimensional que desarrollen una singularidad en tiempo finito? Más precisamente, ¿existen condiciones iniciales en el espacio de Sobolev H^s , con $s \geq 3$, ya sea en todo el espacio o en el caso periódico, que aseguren que el intervalo maximal de existencia $[0, T^*)$ de una solución suave de la ecuación de Euler 3D es finito, vale decir, con $T^* < \infty$?

El objetivo esencial del capítulo anterior era el de entregar una caracterización precisa del intervalo maximal de existencia de una solución suave de la ecuación de Euler 3D en términos de la acumulación de vorticidad: $[0, T^*)$, con $T^* < \infty$, es el intervalo maximal de existencia suave de una solución regular de la ecuación de Euler 3D (para una condición inicial dada que es regular y con energía finita) si y sólo si la vorticidad se acumula en forma tan rápida que:

$$\lim_{t \nearrow T^*} \int_0^t \|\omega(s)\|_{L^\infty} ds = \infty. \quad (5.1)$$

En consecuencia, teniendo en cuenta la ecuación de evolución de la vorticidad (2.14), se observa que la búsqueda de soluciones singulares de la ecuación de Euler tridimensional requiere de una comprensión cuantitativa del fenómeno de crecimiento no - acotado de la vorticidad, el cual se realiza a través de un proceso de amplificación no - lineal. Como ya se anunció en el capítulo anterior, la pregunta destacada más arriba encierra uno de los problemas irresueltos más importantes de la mecánica de fluidos; en torno a él, la opinión de la comunidad científica está notablemente dividida, presentando argumentos elaborados en cada una de las direcciones posibles.

Asimismo, la búsqueda de soluciones singulares de la ecuación de Euler 3D también ocupa un lugar especial en otras ramas de la ciencia. Desde el punto de vista de la física y la ingeniería, la formación de singularidades está íntimamente relacionada con el origen de turbulencias en un flujo laminar (caracterizado por un elevado número de Reynolds), y además, podría constituir un mecanismo de transferencia de energía a pequeña escala. Más precisamente, la dinámica a rango inercial de un flujo turbulento, así como el fenómeno de disipación anómala

en el límite invíscido, podrían estar gobernados por soluciones singulares de la ecuación de Euler 3D (para conocer mayores detalles sobre este tema, se recomienda consultar [31] y [27]). Por su parte, desde la perspectiva del análisis numérico, el estudio de soluciones singulares requiere de algoritmos bastante complejos, constituyendo un desafío para los expertos en esta área. Naturalmente, la simulación numérica es una estrategia primordial que permite adquirir un conocimiento más profundo sobre el problema de formación de singularidades; no obstante, dicha metodología debe ser ejecutada con extrema cautela e interpretada con mayor sutileza, puesto que un *blow - up* puede ocurrir en forma artificial como consecuencia de una inestabilidad numérica (vale decir, no como resultado de las propiedades analíticas de la solución que se está simulando). Equivalentemente, las técnicas que involucran la introducción de la *viscosidad numérica*¹ tienden a suavizar la solución que es procesada durante la simulación, y por consiguiente, obstaculizan la detección de una singularidad física. Más en general, sin ambigüedad se puede establecer que el crecimiento no - acotado de la vorticidad es un fenómeno ubicuo en el estudio de la ecuación de Euler tridimensional, el cual incluso se manifiesta en soluciones exactas que son globalmente regulares. El siguiente ejemplo ilustra claramente este hecho:

Ejemplo 5.1. (*Flujo de chorro rotacional*). En el contexto de la proposición (2.1), tómnese tres coeficientes $\alpha, \beta, \omega_0 > 0$ y defínase la matriz constante $\mathcal{D}(t) = \text{diag}(-\alpha, -\beta, \alpha + \beta)$, para todo $t \geq 0$, junto al vector $\vec{w}_0 = \omega_0 \hat{k}$. Luego, si se especifica el campo de vorticidad $\omega(t)$, para $t \geq 0$, como la solución de la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt}(t) = \mathcal{D}(t)\omega(t), & \forall t > 0, \\ \omega(0) = \vec{w}_0, \end{cases}$$

y se define el correspondiente campo de velocidad como $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \doteq \frac{1}{2}\omega(t) \times \mathbf{x} + \mathcal{D}(t)\mathbf{x}$, para todo $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$, entonces se obtiene una solución exacta de la ecuación de Euler en $\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$. En este caso particular, los campos de vorticidad y velocidad vendrán dados por:

$$\begin{cases} \omega(t) = \omega_0 e^{(\alpha+\beta)t} \hat{k} \\ \mathbf{u}(x, y, z, t) = -\left(\alpha x + \frac{y}{2}\omega_0 e^{(\alpha+\beta)t}\right) \hat{i} + \left(\frac{x}{2}\omega_0 e^{(\alpha+\beta)t} - \beta y\right) \hat{j} + (\alpha + \beta)z \hat{k}, \end{cases}$$

para todo $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$. En consecuencia, la norma del campo de vorticidad aumenta en forma exponencial a medida que $t \nearrow \infty$, y sin embargo, la solución es claramente regular en todo el intervalo de tiempo $[0, \infty)$. En particular, el criterio de Beale - Kato - Majda (5.1) no se satisface. \square

En definitiva, ante la presencia de una solución regular de la ecuación de Euler 3D que evoluciona en el tiempo de acuerdo a un proceso de amplificación no - lineal de la vorticidad, se deberá decidir si se trata de un simple crecimiento acelerado de la vorticidad, o bien, si el criterio (5.1) efectivamente se satisface (desarrollándose, en este caso, una singularidad en

¹Dichas técnicas agregan a la ecuación de Euler 3D un término de la forma $\varepsilon \Delta \mathbf{u}$, donde el parámetro $\varepsilon > 0$ (que posteriormente se hace tender a 0) juega el rol de la viscosidad cinemática presente en la ecuación de Navier - Stokes.

tiempo finito). A lo largo de este capítulo se describirán algunos de los intentos que se han llevado a cabo durante décadas para hallar potenciales soluciones singulares de la ecuación de Euler incompresible y tridimensional. Dentro de esta revisión histórica se nombrarán algunos modelos unidimensionales de la ecuación de Euler 3D que han sido propuestos para demostrar que, al menos en esa situación simplificada, existen soluciones regulares que desarrollan, en tiempo finito, singularidades.

5.1. Eventos destacados en la búsqueda de potenciales soluciones singulares

Históricamente, el primer candidato propuesto como una posible solución singular de la ecuación de Euler tridimensional (o bien, de la ecuación de Navier - Stokes 3D) fue el *vórtice de Taylor - Green*. En la clásica obra [41] del año 1937, G. I. Taylor y A. E. Green presentaron un prototipo del proceso fundamental que controla la estructura, evolución y energía de un flujo turbulento, tanto en el caso viscoso como en el invíscido. Según se indica en [11], la simetría y la relativa simplicidad del flujo descrito por el vórtice de Taylor - Green, así como su fácil adaptabilidad a diversos métodos numéricos, han permitido que dicho flujo fuera utilizado en el pasado para estudiar otros temas relevantes en mecánica de fluidos, tales como:

- amplificación de la vorticidad a través del alargamiento de las líneas de vorticidad (revisar [41]).
- isotropía de las turbulencias a pequeña escala (revisar [63]).
- disipación energética en presencia de un elevado número de Reynolds (revisar [63]).

Más precisamente, el vórtice de Taylor - Green es aquel flujo incompresible y tridimensional que se desarrolla a partir de la condición inicial $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = (u_1^0(\mathbf{x}), u_2^0(\mathbf{x}), u_3^0(\mathbf{x}))$, con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, dada por:

$$\begin{cases} u_1^0(x, y, z) = \sin(x) \cos(y) \cos(z) \\ u_2^0(x, y, z) = -\cos(x) \sin(y) \cos(z) \\ u_3^0(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (5.2)$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. En tal caso, el campo de vorticidad inicial $\omega_0(\mathbf{x}) = (\omega_1^0(\mathbf{x}), \omega_2^0(\mathbf{x}), \omega_3^0(\mathbf{x}))$, con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, será:

$$\begin{cases} \omega_1^0(x, y, z) = -\sin(x) \cos(y) \sin(z) \\ \omega_2^0(x, y, z) = -\cos(x) \sin(y) \sin(z) \\ \omega_3^0(x, y, z) = -2 \cos(x) \cos(y) \cos(z), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (5.3)$$

Los autores de [41] analizaron la evolución de este vórtice (en el contexto de la ecuación de Navier - Stokes tridimensional, considerando un número de Reynolds $R > 0$) en base al desarrollo de la solución como una serie de potencias en el tiempo $t \geq 0$. Más precisamente, Taylor y Green quisieron calcular la tasa promedio de disipación energética en este fluido viscoso (algunas veces denominada *enstrofia*), entendida como:

$$\Omega(t) = \langle \|\omega(t)\|^2 \rangle, \quad \forall t > 0, \quad (5.4)$$

donde el paréntesis $\langle \rangle$ denota el promedio de la cantidad $\|\omega(\mathbf{x}, t)\|^2$ calculado sobre un determinado cubo de periodicidad, para un instante de tiempo fijo $t > 0$. Tal cual se explica en [63], la relevancia física de $\Omega(t)$ es que, ante la presencia de condiciones de borde periódicas, $\Omega(t)$ se relaciona con la tasa de decaimiento de la energía cinética a través de la siguiente identidad:

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \|\mathbf{u}(t)\|^2 \rangle = \frac{1}{R} \Omega(t), \quad \forall t > 0. \quad (5.5)$$

En esta búsqueda, Taylor y Green lograron desarrollar la serie temporal hasta los términos de cuarto grado, hallando que: $\forall t \geq 0$,

$$\Omega(t) = \frac{3}{4} \left[1 - \frac{6t}{R} + \left(\frac{5}{48} + \frac{18}{R^2} \right) t^2 - \left(\frac{5}{3} + \frac{36}{R^2} \right) \frac{t^3}{R} + \left(\frac{50}{99,64} + \frac{1835}{9,16R^2} + \frac{54}{R^4} \right) t^4 + \dots \right].$$

Según se indica en [63], la serie es divergente en algunos casos, como cuando $t \geq 3$ y el número de Reynolds R es lo suficientemente grande (vale decir, en el límite invíscido). Sin embargo, el hecho de que su expansión haya sido realizada sólo hasta el cuarto grado impide extraer conclusiones relevantes sobre la formación de singularidades.

Muchos años después, en 1980, los autores de [36] se dedicaron a resolver la ecuación de Euler 3D, con condición inicial dada por el vórtice de Taylor - Green (5.2), mediante la representación de las soluciones en series de Fourier. Más precisamente, si $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, con $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$, es el campo de velocidad que evoluciona a partir de la condición inicial (5.2) de acuerdo a la ecuación de Euler 3D, el autor de [63] demostró que dicho campo de velocidad admite la siguiente representación en serie de Fourier:

$$\begin{cases} u_1(x, y, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} u_x(m, n, p, t) \sin(mx) \cos(ny) \cos(pz) \\ u_2(x, y, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} u_y(m, n, p, t) \cos(mx) \sin(ny) \cos(pz) \\ u_3(x, y, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} u_z(m, n, p, t) \cos(mx) \cos(ny) \sin(pz), \end{cases} \quad (5.6)$$

para todo $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$, en donde el vector $(u_x(m, n, p, t), u_y(m, n, p, t), u_z(m, n, p, t))$ es nulo a menos que los números enteros m, n, p sean todos pares, o bien todos impares. Con esta información en mano, los autores de [36] analizaron las series temporales de la *enstrofía generalizada*, definida como la raíz cuadrática media de la derivada espacial de orden $q \in \mathbb{N}$ del campo de velocidad:

$$\Omega_q(t) \doteq \frac{1}{2} \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^3} \|\vec{k}\|^{2q} \|\mathbf{u}(\vec{k}, t)\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} A_q^{(2n)} t^{2n}, \quad \forall t \geq 0, \quad (5.7)$$

y en este caso, los coeficientes $A_q^{(2n)} \in \mathbb{R}$, con $n \in \mathbb{N}$, se obtienen a partir de la representación (5.6) y del cálculo de derivadas temporales del campo de velocidad. Los autores de [36] expandieron la serie temporal (5.7) hasta el orden t^{44} , para $q \in \{1, 2, 3, 4\}$. Finalmente, haciendo uso de aproximaciones de Padé en el caso $q = 1$, sus cálculos sugirieron la posibilidad de una singularidad en $t \approx 5.2$, y revelaron el desarrollo de una complicada estructura

analítica asociada a la cantidad $\frac{d}{dt^2} \log(\Omega_1(t))$. En particular, dichos cálculos mostraron que el radio de convergencia de la serie para $\Omega_1(t)$ queda determinado por una singularidad detectada en el instante imaginario en $t^2 \approx -5$, dado que se observa lo siguiente:

$$\frac{A_1^{(2n)}}{A_1^{(2n+2)}} \approx -5, \quad \text{para } n \rightarrow \infty.$$

En consecuencia, fue necesario realizar una continuación analítica de la solución $\mathbf{u}(\mathbf{z}, t)$, con $(\mathbf{z}, t) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}$, para decidir si dicha singularidad en tiempo complejo podría *trasladarse* hasta convertirse en una singularidad a tiempo real. En este aspecto particular, el trabajo [36] no es muy concluyente, pues indica que probables errores de aproximación numérica podrían haber conducido hacia la detección de esta singularidad en tiempo complejo.

La obra [36] constituye una de las primeras simulaciones numéricas de la ecuación de Euler tridimensional en las que fue necesario considerar la existencia de singularidades *complejas* en las soluciones de dicha ecuación. Como es de esperar, dicha cuestión surge cuando se intenta buscar una solución de la ecuación de Euler d -dimensional que pueda ser extendida hacia el dominio complejo, cuando la condición inicial es una función real y analítica. Por lo general, dicho problema es enfrentado asumiendo condiciones de borde periódicas, y así, el espacio de configuración será $\tilde{\mathbb{C}}^d \doteq \mathbb{T}^d + i\mathbb{R}^d$, siendo \mathbb{T}^d el toro 2π -periódico d -dimensional. En tal caso, la continuación analítica de la solución de la ecuación de Euler se denota por $\mathbf{u}(\mathbf{z}, t)$, con $(\mathbf{z}, t) \in \tilde{\mathbb{C}}^d \times [0, \infty)$. Obsérvese que la variable temporal no es trasladada al plano complejo, a diferencia de lo realizado en [36]. Según se indica en [6], los primeros resultados concernientes a la existencia de soluciones analíticas de la ecuación de Euler fueron publicados en la década de 1970, y pueden ser resumidos de la siguiente forma:

Ante la presencia de una condición inicial analítica y de condiciones de borde periódicas, la solución de la ecuación de Euler 2D se mantiene analítica en todo tiempo posterior (la referencia original es [3]), mientras que la solución de la ecuación de Euler 3D se mantiene analítica al menos en un intervalo finito de tiempo (las referencias originales son [2] y [8]).

Ahora bien, en el caso tridimensional, la conexión entre las singularidades complejas y reales (vale decir, físicas) se ejecuta a través del concepto de *banda de analiticidad*. Para un instante de tiempo $t \geq 0$, se denota por $\delta(t) \geq 0$ al *ancho* de la banda de analiticidad de la solución extendida $\mathbf{u}(\mathbf{z}, t)$, esto es, a la distancia existente entre el dominio real y la más cercana de las singularidades complejas que posea la solución extendida al instante t . Luego, si existe un instante de tiempo crítico $t^* > 0$ tal que $\delta(t^*) = 0$, entonces la solución presentará una singularidad real en t^* , y en cierto sentido, la singularidad compleja se habrá *trasladado* hasta convertirse en una singularidad real. En consecuencia, la monitorización del ancho de banda $\delta(t)$ representa una estrategia útil a la hora de entregar evidencia a favor o en contra de la existencia de un posible *blow-up* en una simulación de la ecuación de Euler 3D².

²En este contexto, es interesante destacar el siguiente resultado reportado en [6]: si existe un *blow-up* que se desarrolla en tiempo finito, esto es, si existe un instante crítico $t^* > 0$ tal que $\delta(t^*) = 0$, entonces la contracción del ancho de banda $\delta(t)$ debe llevarse a cabo en forma continua.

Si se desea obtener mayor información sobre la versión analítica de la ecuación de Euler, así como sobre la naturaleza de las posibles singularidades complejas asociadas a sus soluciones, se recomienda igualmente consultar la obra [6].

Ahora bien, claramente los resultados reportados en [36] no constituyen una demostración rigurosa del surgimiento de singularidades en soluciones de la ecuación de Euler 3D, aunque ellos sí deben ser considerados entre los primeros datos cuantitativos que hayan sugerido la existencia de tales singularidades. Aún así, en 1983 y por primera vez en la historia³, los autores de [11] utilizaron métodos espectrales para estudiar la evolución de una solución numérica de la ecuación de Euler 3D, con condición inicial dada por el vórtice de Taylor - Green. Según lo comentado en [40] (sección 6), dado que la condición inicial definida por el vórtice de Taylor - Green es un producto de funciones trigonométricas, los métodos espectrales se adaptan en forma particularmente sencilla y precisa. Además, el rastreo de singularidades complejas puede ejecutarse en forma relativamente simple si se dispone de una buena resolución espacial que permita capturar los términos exponenciales presentes en la expresión de la transformada de Fourier. Los autores de [11] analizaron la evolución temporal de un promedio en banda del *espectro de energía* del campo de velocidad (5.6), o sea, la evolución de la siguiente cantidad:

$$E(k, t) \doteq \frac{1}{2\Delta s} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{C}(k)} \|\hat{u}(\vec{k}, t)\|^2, \quad \forall (k, t) \in [0, \infty)^2, \quad (5.8)$$

donde $\hat{u} : \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^3$ denota la transformada de Fourier del campo de velocidad (5.6) (calculada componente a componente sobre las variables espaciales) y, dados un número de onda $k \geq 0$ y un ancho de banda $\Delta s > 0$, la suma se ejecuta sobre el siguiente conjunto:

$$\mathcal{C}(k) \doteq \left\{ \vec{k} \in \mathbb{R}^3 \mid k - \frac{\Delta s}{2} \leq \|\vec{k}\| \leq k + \frac{\Delta s}{2} \right\}.$$

Según se demuestra en [35], el espectro de energía presenta un comportamiento asintótico cuando $k \rightarrow \infty$, el cual lo relaciona con el ancho de la banda de analiticidad mediante la siguiente expresión:

$$E(k, t) \propto e^{-2\delta(t)k}, \quad \forall t \geq 0,$$

relación que es efectivamente observada por los autores de [11], quienes, además, reportaron que el ancho de banda de analiticidad $\delta(t)$ decrecía en forma exponencial en el tiempo. Estas simulaciones se llevaron a cabo usando 256^3 modos de Fourier, y algunos gráficos relevantes se muestran en la figura (5.1). Este comportamiento fue monitorizado durante una ventana de tiempo en la que la cantidad $\delta(t)$ disminuía su valor en un factor de 10 (vale decir, en el sentido de la escala logarítmica, una década), sugiriendo, por primera vez, evidencia de que el vórtice de Taylor - Green podría no conducir hacia una explosión en tiempo finito. Algunos años después, los autores de [12] extendieron las simulaciones realizadas en [11], pasando de 256^3 a 864^3 modos de Fourier, corroborando el decaimiento exponencial de la cantidad $\delta(t)$. En esta línea, los autores de [12] también detectaron que la norma infinito del campo de vorticidad amplificaba en sólo cuatro veces su valor inicial, a pesar del desarrollo de

³No obstante, los autores de [11] indican que el análisis del ancho de banda de analiticidad ya había sido empleado para estudiar la existencia de singularidades reales en un problema de magnetohidrodinámica en dos dimensiones.

una intrincada estructura asociada a la solución en evolución, tal cual había sido observado anteriormente en [36].

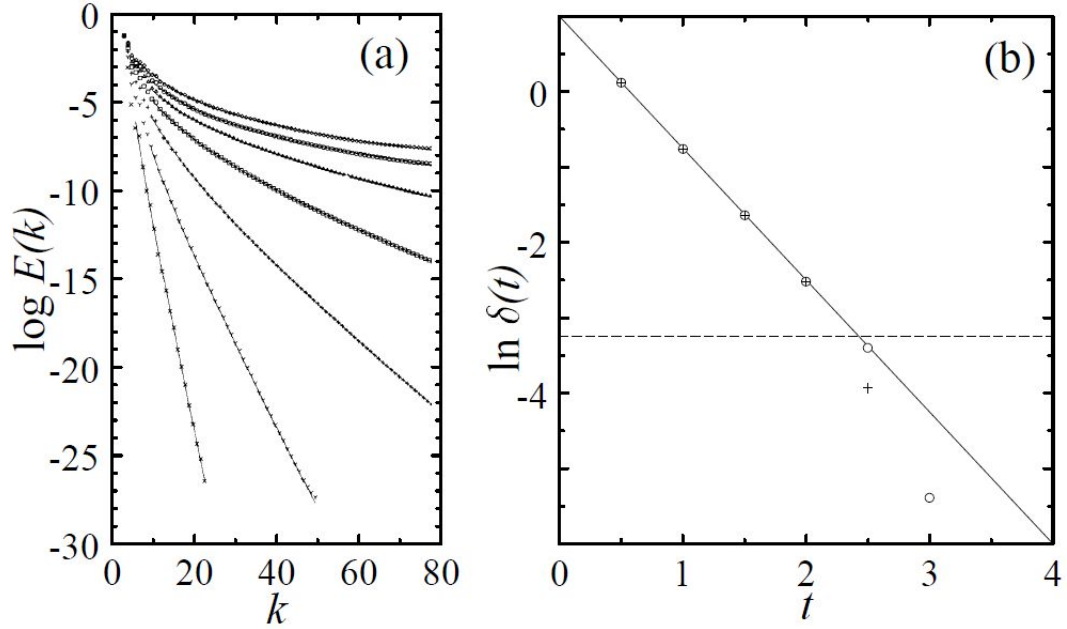


Figura 5.1: Simulación espectral del vórtice de Taylor - Green usando 256^3 modos de Fourier, con $\Delta s = 1$ (extraída de [11]). (a) Variación del espectro de energía según el número de onda $k \geq 0$, en coordenadas lin - log, para distintos instantes de tiempo equiespaciados (la curva en el extremo inferior corresponde a $t = 0.5$, y la curva en el extremo superior a $t = 3.5$). (b) Variación en el tiempo del ancho de banda de analiticidad en coordenadas lin - log; los círculos y cruces corresponden a 256^3 y 128^3 modos de Fourier, respectivamente.

Recuérdese que la enstrofía Ω_1 representa la tasa promedio de disipación energética en el fluido, según se explicó en (5.4) y (5.5). Entonces, ¿a qué se puede atribuir el hecho de que, por una parte, el flujo desarrolle una compleja estructura asociada a la enstrofía Ω_1 , y en forma simultánea, su campo de vorticidad apenas se amplifique? Una posible respuesta puede ser hallada en [12] (sección 4), donde los autores analizan el fenómeno de formación de *capas de vorticidad*. En sus propias palabras, el decaimiento exponencial del ancho de banda de analiticidad tiene una contraparte física caracterizada por la generación de estructuras a pequeña escala, llamadas *capas de vorticidad*, en las cuales se observan elevados valores de la vorticidad. La formación de dichas estructuras, cuyo espesor o diámetro disminuye conforme avanza el tiempo, ha sido detectada tanto en el vórtice de Taylor - Green como en flujos periódicos más generales. Una visualización de dichas capas de vorticidad se muestra en la figura (5.2) (extraída de [12]).

En este mismo contexto, es importante destacar el comentario realizado por los autores de [36] al comienzo de su obra, el cual aclara que la generación de estructuras complicadas en un flujo que resuelve la ecuación de Euler 3D no siempre conlleva hacia un crecimiento no - acotado de su campo de vorticidad. Más precisamente, se explica que “la restricción del flujo a un espacio bidimensional impide el estiramiento de las líneas de vorticidad, de donde se obtiene la regularidad global [en el tiempo] de las soluciones. Sin embargo, en tres dimensiones, las líneas de vorticidad pueden torcerse, enredarse, doblarse y estirarse. Es

concebible que el campo de velocidad del flujo permanezca acotado y que, aún así, después de un intervalo finito de tiempo, aparezca espontáneamente una singularidad en el interior del fluido. Los segmentos de las líneas de vorticidad pueden desarrollar una longitud infinita al ser notablemente serpenteadas y torcidas, pero sin que los extremos de dicho segmento estén necesariamente separados por una distancia infinita. Estas propiedades de los flujos invíscidos ya han sido motivo de especulación en el pasado”.

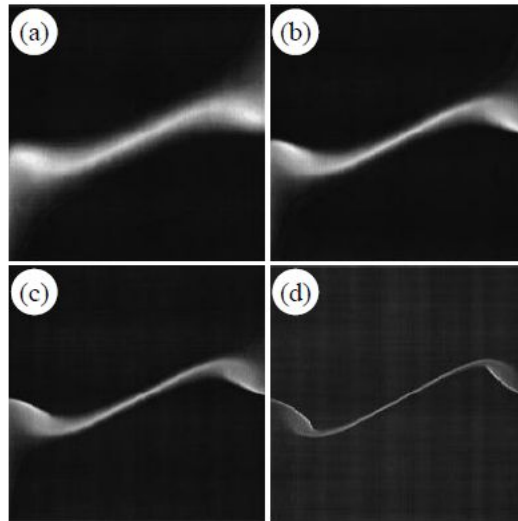


Figura 5.2: Visualización, en el espacio físico, de las capas de vorticidad (regiones caracterizadas por altos valores de vorticidad) para el vórtice de Taylor - Green en los siguientes instantes: (a) $t = 3$, (b) $t = 3.25$, (c) $t = 3.5$ y (d) $t = 4$. Obsérvese cómo el espesor de la capa disminuye en el tiempo.

Hasta ahora se han descrito, con relativa profundidad, ciertos experimentos numéricos que tenían por objetivo hallar soluciones de la ecuación de Euler 3D que presentaran una singularidad en un instante de tiempo finito, cuando la condición inicial venía dada por el vórtice de Taylor - Green. Según lo comentado, dichos intentos comenzaron en el año 1937, pero recién en 1983 se pudo reportar cierta evidencia numérica que sugería descartar al vórtice de Taylor - Green como condición inicial apta para producir soluciones singulares de la ecuación de Euler 3D. La prolongada vigencia del vórtice de Taylor - Green ilustra perfectamente, entre otras cosas, las siguientes consideraciones:

- la forma en la que ciertos criterios matemáticos (como aquellos presentados en el teorema (4.6)) pueden restringir la interpretación de potenciales soluciones singulares de la ecuación de Euler 3D que son obtenidas a través de métodos numéricos.
- la manera en que el desarrollo de nuevo *software* computacional (que ha permitido realizar cálculos numéricos más precisos), así como el perfeccionamiento de los algoritmos numéricos involucrados, han enriquecido la discusión sobre la búsqueda de posibles soluciones singulares de la ecuación de Euler 3D.

Naturalmente, a lo largo de los años, han sido innumerables las simulaciones numéricas que se han ejecutado con tal de hallar singularidades en soluciones de la ecuación de Euler 3D. No es posible nombrar ni describir cada uno de estos experimentos, y es por eso que en el

siguiente cuadro se resumen algunos de los eventos más connotados en esta búsqueda (para una lista más detallada se recomienda consultar [38], sección 3.2):

Autores, año y referencia	Método empleado	Condición inicial	Singularidad
A. J. Chorin, 1982, [24]	Métodos vorticiales que simulan las trayectorias del fluido	Vórtice perturbado	Sí
E. D. Siggia, 1984, [71]	Método de filamento vorticial	Filamento vorticial cuyo parámetro del tamaño del núcleo es variable	Sí
J. B. Bell y D. L. Marcus, 1992, [7]	Método de proyección en una malla de 128^3 puntos	Tubo de vorticidad perturbado	Sí; amplificación de la vorticidad en un factor 6
R. M. Kerr, 1993, [49]	Método pseudo - espectral	Par de vórtices anti - paralelos	Sí; amplificación de la vorticidad en un factor 18
P. Orlandi y G. Carnevale, 2007, [15]	Híbrido entre un método de diferencias finitas y uno de volúmenes finitos	Dipolos de Lamb ortogonales	Sí

Cuadro 5.1: Hitos en la búsqueda de soluciones singulares de la ecuación de Euler 3D.

En el próximo capítulo se destacarán algunos intentos por hallar soluciones singulares de la ecuación de Euler 3D mediante el uso de flujos axisimétricos.

5.2. Modelos unidimensionales para la ecuación de vorticidad tridimensional

En el capítulo anterior se dio a conocer una formulación de la ecuación de Euler tridimensional para flujos axisimétricos, la cual se expresaba en términos del campo de vorticidad y de la función de corriente. Tal cual se indicó, existe una formulación equivalente en el caso de un fluido incompresible cualquiera, pero esta construcción es notablemente más compleja. No obstante, para satisfacer los propósitos de esta sección, bastará con enunciar el resultado principal que describe aquella formulación general vorticidad - corriente de la ecuación de Euler 3D, cuya demostración puede ser leída en [10], sección 2.4.4:

Proposición 5.1. *(Formulación en forma vorticidad - corriente de la ecuación de Euler en $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$). Considérese un flujo tridimensional definido en todo $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$, cuyos campos de velocidad y vorticidad decaen lo suficientemente rápido cuando $\|(x, y, z)\| \rightarrow \infty$. Entonces, la ecuación de Euler incompresible (1.4) (con $\Omega = \mathbb{R}^3$) es equivalente a la siguiente formulación en términos de la vorticidad y función de corriente:*

$$\begin{cases} \frac{D\omega}{Dt} = \omega \cdot \nabla \mathbf{u} \\ \omega|_{t=0} = \omega_0 \end{cases} \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \quad (5.9)$$

donde $\omega_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una función conocida. El campo de velocidad se obtiene a partir de la vorticidad mediante la siguiente ley de Biot - Savart:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \times \omega(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y}, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty). \quad (5.10)$$

Por su parte, la matriz jacobiana del campo de velocidad puede ser calculada a partir de la vorticidad, mediante la siguiente fórmula (la integral debe ser interpretada como un valor principal de Cauchy):

$$\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)h = -(\text{PV}) \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \frac{1}{4\pi} \frac{\omega(\mathbf{y}, t) \times h}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} + \frac{3}{4\pi} \frac{[(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \times \omega(\mathbf{y}, t)](\mathbf{x} - \mathbf{y})^\top}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^5} h \right\} d\mathbf{y} + \frac{1}{3} \omega(\mathbf{x}, t) \times h,$$

para todo $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ y $h \in \mathbb{R}^3$.

Ahora bien, es posible demostrar (y la referencia nuevamente es [10], sección 2.4.4) que la ley de Biot - Savart (5.10) puede ser derivada con la finalidad de expresar la matriz de deformación \mathcal{D} , ya definida en (2.2), a través del siguiente operador integral singular:

$$\mathcal{D}(\mathbf{x}, t) = (\text{PV}) \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{P}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \omega(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y}, \quad (5.11)$$

para todo $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$, en donde se ha definido el *kernel*:

$$\mathcal{P}(\mathbf{x})h \doteq -\frac{3}{8\pi} \frac{(\mathbf{x} \times h)\mathbf{x}^\top + \mathbf{x}(\mathbf{x} \times h)^\top}{\|\mathbf{x}\|^5}, \quad (5.12)$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ y $h \in \mathbb{R}^3$. Por ende, teniendo en consideración la igualdad (2.14), es posible obtener una ecuación íntegro - diferencial para el campo de vorticidad que también será equivalente a la ecuación de Euler 3D:

$$\begin{cases} \frac{D\omega}{Dt} = \mathcal{D}\omega & \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \\ \omega|_{t=0} = \omega_0 \end{cases} \quad (5.13)$$

donde $\omega_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una función conocida. Esta nueva formulación alternativa de la ecuación de Euler 3D constituye el punto de partida de la obra [28], del año 1985, en la que los autores desarrollan uno de los primeros modelos matemáticos unidimensionales (en las variables espaciales) para la ecuación de vorticidad tridimensional (5.13). A pesar de su simplicidad, dicho modelo unidimensional retiene muchas de las principales propiedades estructurales de la ecuación de vorticidad 3D, a la vez que sus soluciones exhiben algunos de los fenómenos ya observados en las diversas simulaciones numéricas destinadas a hallar soluciones singulares de la ecuación de Euler 3D. Una de las grandes ventajas de este modelo simplificado se aprecia en el hecho de que puede ser integrado en forma exacta, lo que permite obtener explícitamente aquellas soluciones que pierden su regularidad en un instante finito de tiempo. Considerando las profundas consecuencias de este acontecimiento, principalmente en relación a la pregunta destacada al comienzo del capítulo, estos cálculos serán completamente realizados en el presente trabajo.

Según se observa en (5.11), la transformación que relaciona la matriz de deformación \mathcal{D} con el campo de vorticidad ω es un operador integral, singular y lineal que conmuta con la

traslación. Más precisamente, dicho operador se define mediante la convolución entre ω y un *kernel* (a saber, la función \mathcal{P} en (5.12)) que es homogéneo de grado -3 , y cuyo promedio sobre la esfera unitaria es igual a cero. En una dimensión espacial existe un único operador que verifica estas propiedades: la transformada de Hilbert. Tal cual se presenta en el apéndice (A), donde se define adecuadamente esta herramienta matemática y se dan a conocer sus propiedades más importantes, la transformada de Hilbert de una cierta función integrable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ corresponde a la función $H(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, definida c.t.p. mediante la siguiente expresión:

$$H(f)(x) \doteq \frac{1}{\pi} (\text{PV}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que el límite exista, pues la integral es en el sentido del valor principal de Cauchy. El término cuadrático $H(\omega)\omega$ es el análogo escalar unidimensional del factor de dilatación vorticial $\mathcal{D}(\omega)\omega$ que se aprecia en (5.13). En base a esto, y reemplazando la derivada material D/Dt por la derivada parcial $\partial/\partial t$, los autores de [28] obtuvieron la siguiente ecuación que modela la evolución temporal de la vorticidad:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} = H(\omega)\omega \\ \omega|_{t=0} = \omega_0 \end{cases} \quad \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty), \quad (5.14)$$

donde $\omega_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función conocida. De acuerdo a la proposición (5.1), el campo de velocidad se determina a partir de la vorticidad según la ley de Biot - Savart (5.10), en donde se realiza una convolución entre la vorticidad y el siguiente kernel:

$$K_3(\mathbf{x})h \doteq \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{x} \times h}{\|\mathbf{x}\|^3}, \quad \forall \mathbf{x}, h \in \mathbb{R}^3,$$

el cual es homogéneo de grado -2 . Para el modelo en cuestión, los autores de [28] consideraron que el análogo unidimensional de esta ley de Biot - Savart debía corresponder a la siguiente expresión:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^x \omega(y, t) dy, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty), \quad (5.15)$$

si bien, como se verá más adelante, la ley de Biot - Savart unidimensional puede ser definida de otras maneras.

Ahora bien, aplicando los teoremas (A.2) y (A.3), se deduce inmediatamente que la transformada de Hilbert es un operador anti - simétrico en $L^p(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, con $p > 1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(f)(x)f(x) dx = 0, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}; \mathbb{C}).$$

Por ende, luego de integrar la igualdad (5.14) con respecto a $y \in \mathbb{R}$, se deduce que todas las soluciones $\omega : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ de (5.14) que decaen rápidamente cuando $|y| \rightarrow \infty$ satisfacen lo siguiente:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \omega(y, t) dy = 0, \quad \forall t > 0.$$

En particular, si la condición inicial ω_0 corresponde a la derivada de una función que se anula en el límite $|x| \rightarrow \infty$, las soluciones regulares de (5.14) verificarán lo siguiente:

$$\int_{\mathbb{R}} \omega(x, t) dx = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Antes de presentar y demostrar el teorema principal de esta sección, es importante recordar que muchas investigaciones sobre la ecuación de Euler 3D se concentran en flujos periódicos, y en consecuencia, el modelo (5.14) debe ajustarse a esas exigencias. En este caso, se asume que la condición inicial $\omega_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será una función 2τ - periódica, con $\tau > 0$, mientras que la herramienta a utilizar en la ecuación (5.14) será la transformada de Hilbert de funciones periódicas, definida en el apéndice (A). Para un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ fijo, la correspondiente ley de Biot - Savart se expresará así:

$$u(x, t) = \int_{x_0}^x \omega(y, t) dy, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty), \quad (5.16)$$

siempre y cuando el promedio periódico de la condición inicial sea nulo, vale decir:

$$\int_{x_0}^{x_0+2\tau} \omega_0(y) dy = 0.$$

5.2.1. Integración del modelo unidimensional y quiebre explícito de la regularidad de sus soluciones

Según se indica en [28], la ecuación diferencial (5.14) constituye un problema bien puesto en muchos espacios de funciones clásicos, como es el caso de $H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. En particular, es posible aplicar los resultados clásicos de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales ordinarias no - lineales del tipo Lipschitz en espacios de Banach, debido a que se verifican los siguientes hechos:

- el espacio $H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ es un álgebra de Banach de funciones continuas.
- la transformada de Hilbert es un operador lineal continuo de $H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ sobre sí mismo.

De hecho, es posible entregar la forma explícita que debe tener la única solución de (5.14), como lo expresa el siguiente teorema:

Teorema 5.1. *Considérese una condición inicial $\omega_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que decae lo suficientemente rápido cuando $|x| \rightarrow \infty$ (por ejemplo, $\omega_0 \in H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$). Luego, la única solución del modelo unidimensional (5.14) para la evolución de la vorticidad adopta la siguiente expresión:*

$$\omega(x, t) = \frac{4\omega_0(x)}{[2 - tH(\omega_0)(x)]^2 + [t\omega_0(x)]^2}, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty). \quad (5.17)$$

Demostración. En base a los comentarios anteriores, dada una condición inicial $\omega_0 \in H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, se trabajará sabiendo que el problema (5.14) posee una única solución $\omega(\cdot, t) \in H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, para todo $t \geq 0$. Por otra parte, la presente demostración considerará únicamente la transformada de Hilbert en el eje real, puesto que los cálculos y resultados son exactamente los

mismos cuando se plantea la ecuación (5.14) en el caso periódico.

Según se demuestra en [57], el teorema (A.4) sigue siendo válido cuando los coeficientes $p, q \in (1, \infty)$ son tales que $p^{-1} + q^{-1} \leq 1$. Por ende, dada una función $f \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, se sabe que su transformada de Hilbert $H(f)$ también pertenecerá a $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, y además, se tendrá la siguiente igualdad c.t.p. en \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} H\{fH(f) + fH(f)\} &= H(f)^2 - f^2 \\ \Rightarrow H\{fH(f)\} &= \frac{1}{2}[H(f)^2 - f^2]. \end{aligned}$$

Para cada $t \geq 0$, la función $\omega(\cdot, t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será, en particular, un elemento de $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Por ende, es posible aplicar la transformada de Hilbert a la ecuación (5.14) y obtener, en base a la identidad recién construida, lo siguiente (la igualdad será para todo $x \in \mathbb{R}$ c.t.p.):

$$\frac{\partial}{\partial t} H(\omega)(x, t) = \frac{1}{2}[H(\omega)(x, t)^2 - \omega(x, t)^2], \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty). \quad (5.18)$$

Introduciendo la función $z : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$, definida x - c.t.p. como:

$$z(x, t) \doteq H(\omega)(x, t) + i\omega(x, t), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty),$$

se puede demostrar fácilmente (en base las identidades (5.14) y (5.18)) que la función z satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial z}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{2}z(x, t)^2, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty),$$

cuya solución explícita es (con $x \in \mathbb{R}$ c.t.p.):

$$z(x, t) = \frac{2z(x, 0)}{2 - tz(x, 0)}, \quad (5.19)$$

para todo $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$ tales que $tz(x, 0) \neq 2$. Finalmente, tomando la parte real e imaginaria de la solución (5.19), se deduce que:

$$\begin{cases} \omega(x, t) = \frac{4\omega_0(x)}{[2 - tH(\omega_0)(x)]^2 + [t\omega_0(x)]^2} \\ H(\omega)(x, t) = \frac{2H(\omega_0)(x)[2 - tH(\omega_0)(x)] - 2t\omega_0(x)^2}{[2 - tH(\omega_0)(x)]^2 + [t\omega_0(x)]^2}, \end{cases}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ c.t.p. y $t \geq 0$ tales que $[2 - tH(\omega_0)(x)]^2 + [t\omega_0(x)]^2 > 0$. Esto concluye la demostración. \square

El siguiente corolario se obtiene como consecuencia inmediata del teorema (5.1):

Corolario 5.1.1. (*Quiebre de regularidad en soluciones suaves del modelo unidimensional para la evolución de la vorticidad*). La solución regular (5.17) del modelo unidimensional (5.14) explota en un instante finito de tiempo si y sólo si el siguiente conjunto es no - vacío:

$$\mathcal{Z} \doteq \{x \in \mathbb{R} \mid \omega_0(x) = 0, \quad H(\omega_0)(x) > 0\}.$$

En tal caso, dado $x \in \mathcal{Z}$, si se definen $M \doteq \sup\{H(\omega_0)_+(x) \mid \omega_0(x) = 0\}$ y $T \doteq 2/M$, entonces se tendrá que:

$$\lim_{t \nearrow T} |\omega(x, t)| = \infty.$$

Con respecto al corolario (5.1.1), nótese que la definición del instante de explosión T está asociada a los puntos $x_0 \in \mathbb{R}$ tales que $H(\omega_0)(x_0) > 0$. Esta observación es claramente reminiscente de una propiedad conocida de la ecuación de vorticidad tridimensional: la vorticidad *aumenta* (o *disminuye*) cuando ω es paralelo a algún vector propio asociado a un valor propio positivo (negativo) de la matriz \mathcal{D} . Ahora bien, con la finalidad de ilustrar el quiebre de regularidad descrito en el corolario (5.1.1), considérese el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.2. Supóngase que $\omega_0(x) = \cos(x)$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$, de modo tal que su transformada de Hilbert será $H(\omega_0)(x) = \sin(x)$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$. En tal caso, la solución del modelo (5.14) viene dada por:

$$\omega(x, 2t) = \frac{\cos(x)}{1 + t^2 - 2t \sin(x)},$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$ y $t \geq 0$ tales que $1 + t^2 - 2t \sin(x) > 0$ (notar que $1 + t^2 - 2t \sin(x) \geq 0$, para todo $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$). Por su parte, la velocidad escalar puede ser recuperada a partir de la ley de Biot - Savart (5.16), con $x_0 = 0$:

$$u(x, 2t) = \int_0^x \omega(y, 2t) dy = \frac{1}{2t} \log(1 + t^2 - 2t \sin(x)),$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$ y $t \geq 0$ tales que $1 + t^2 - 2t \sin(x) > 0$.

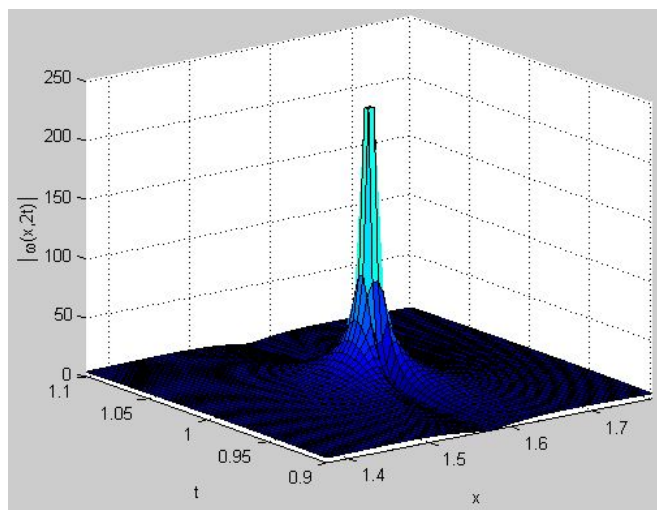


Figura 5.3: Gráfico de la función $|\omega(x, 2t)|$ en una vecindad del punto $(x, 2t) = \left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$, en torno al cual se desarrolla la singularidad.

En este ejemplo específico, la solución pierde su regularidad en el instante crítico $T = 2$; en torno al punto $x = \pi/2$, y a medida que $t \nearrow T$, la vorticidad $\omega(x, t)$ desarrolla una singularidad no - integrable que es comparable al crecimiento de la función $\frac{1}{x - \pi/2}$ (observar

la figura (5.3)). Tal cual se explica en [28], existen dos aspectos interesantes en este quiebre de la regularidad:

(a) Para cualquier $p \in [1, \infty)$ se tiene que:

$$\lim_{t \nearrow T} \int_{-\pi}^{\pi} |\omega(x, t)|^p dx = \infty.$$

(b) Dado $p \in [1, \infty)$, existe una constante finita $M_p > 0$ tal que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u(x, t)|^p dx \leq M_p, \quad \forall t \in [0, T).$$

En particular, cuando $p = 2$, se observa que la energía cinética de la solución se mantiene uniformemente acotada a medida que el tiempo t se aproxima al instante crítico T . \square

De hecho, el comportamiento asintótico observado en el ejemplo anterior es característico de todas las soluciones del modelo unidimensional propuesto por los autores de [28], tal cual se enuncia a continuación (la demostración consiste en trabajar directamente con la forma explícita de la solución en (5.17), aunque el cálculo es bastante tedioso):

Corolario 5.1.2. *Dada una condición inicial $\omega_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ para el modelo unidimensional (5.14), supóngase que los puntos $x_0 \in \mathbb{R}$ que definen al instante crítico $T > 0$, y tales que $\omega_0(x_0) = 0$, son raíces simples de ω_0 . Entonces, la vorticidad y velocidad correspondientes a la solución presentarán las siguientes propiedades:*

(a) Para cualquier $p \in [1, \infty)$ se tendrá que:

$$\lim_{t \nearrow T} \int_{-\pi}^{\pi} |\omega(x, t)|^p dx = \infty.$$

(b) Dado $p \in [1, \infty)$, existirá una constante finita $M_p > 0$ tal que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u(x, t)|^p dx \leq M_p, \quad \forall t \in [0, T).$$

En capítulos anteriores se ha indicado que, tanto en el caso bidimensional como en el tridimensional, las soluciones de la ecuación de Euler conservan la energía cinética, vale decir:

$$(\forall t > 0) \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|^2 d\mathbf{x} = 0.$$

Sin embargo, tal cual se indica en [28], no todas las soluciones del modelo unidimensional (5.14) satisfacen dicho principio de conservación de la energía.

5.2.2. Falencias del modelo unidimensional de Constantin - Lax - Majda y nuevas propuestas

Hasta ahora se han destacado las principales propiedades y fortalezas del modelo unidimensional (5.14), propuesto por los autores de [28] para describir aproximadamente la evolución temporal del campo de vorticidad en el contexto de la ecuación de Euler 3D. No obstante, es igualmente necesario examinar algunas de las falencias presentes en dicho modelo, así como las numerosas correcciones y modificaciones que han sido sugeridas a lo largo de los años con la intención de presentar un modelo unidimensional que refleje, en forma simplificada y adecuada, la dinámica de la ecuación de vorticidad tridimensional.

En el año 1986, S. Schochet utilizó el modelo unidimensional planteado por los autores de [28] para reproducir la evolución temporal del campo de vorticidad en el ámbito de la ecuación de Navier - Stokes 3D. Más precisamente, en la obra [69], S. Schochet completó el modelo ya existente, analizando la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} = H(\omega)\omega + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} & \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ \omega|_{t=0} = \omega_0 \end{cases} \quad (5.20)$$

donde $\omega_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función conocida y $\nu > 0$ representa la viscosidad cinemática del fluido en cuestión. Si bien S. Schochet logró entregar soluciones explícitas de (5.20) que explotaban en un instante finito de tiempo, también descubrió las siguientes anomalías:

1. La ecuación diferencial (5.20) posee una solución estacionaria que no es idénticamente nula, pero cuyos valores de frontera son iguales a cero.
2. La energía de las soluciones de (5.20) no se mantiene acotada a medida que el instante crítico se aproxima.
3. El tiempo de explosión $T > 0$ puede ser inferior a aquel observado en el caso invíscido, vale decir, con $\nu = 0$. La presencia del operador laplaciano en (5.20) debiese provocar un efecto regularizante en la solución, y por consiguiente, retrasar el correspondiente instante de explosión.

Esta situación indujo a S. de Gregorio a discutir el modelo unidimensional [28], con la finalidad de descubrir sus puntos débiles y, eventualmente, sugerir aquellos cambios que permitan formular un modelo más realista, vale decir, que restaure la cercanía con los flujos tridimensionales. En la obra [30], del año 1990, S. de Gregorio realizó el siguiente diagnóstico del modelo planteado por Constantin, Lax y Majda:

- En primer lugar, en la ecuación de vorticidad tridimensional (2.12) existen dos términos que provienen del cálculo de $\text{rot}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})$: $\mathbf{u} \cdot \nabla \omega$ y $\omega \cdot \nabla \mathbf{u}$. De estas expresiones, sólo la segunda de ellas es considerada en el modelo unidimensional (5.14), puesto que la derivada material D/Dt es simplemente reemplazada por la derivada parcial $\partial/\partial t$. Ahora bien, trabajando en una dimensión espacial, supóngase que la solución del modelo (5.14) decae lo suficientemente rápido cuando $|x| \rightarrow \infty$. En tal caso, lo más correcto sería incluir las dos cantidades $u \frac{\partial \omega}{\partial x}$ y $\omega \frac{\partial u}{\partial x}$ en la ecuación dinámica del modelo, puesto que el siguiente

cálculo (que consiste en una integración por partes) demuestra que ambos términos son igualmente importantes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\omega(x, t)^2}{2} \right) dx = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x, t)^2 \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx, \quad \forall t \geq 0.$$

- El segundo punto discutible del modelo unidimensional (5.14) está relacionado con la ley de Biot - Savart (5.15):

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^x \omega(y, t) dy, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty).$$

En el caso tridimensional general, la ley de Biot - Savart (5.10) permite recuperar el campo de velocidad a través de los valores de la vorticidad en *todo* el espacio \mathbb{R}^3 . Sin embargo, dado un punto $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$, la expresión (5.15) muestra que los valores de $\omega(y, t)$ para $y > x$ no afectan el correspondiente valor de $u(x, t)$.

- El tercer aspecto debatido por S. de Gregorio guarda relación con el siguiente resultado (demostrado en [47]): dada una viscosidad cinemática $\nu > 0$ y una condición inicial suficientemente regular, la ecuación de Navier - Stokes 3D posee una solución que existe en un intervalo de tiempo $[0, T_\nu]$ (con $T_\nu > 0$ dependiendo de la viscosidad), y en la medida que $\nu \rightarrow 0^+$, dicha solución converge uniformemente hacia una solución de la correspondiente ecuación de Euler 3D. Naturalmente, dicho teorema no es compatible con la situación presente en los modelos unidimensionales (5.14) y (5.20), pues mientras la energía de las soluciones del modelo invíscido (5.14) se mantiene uniformemente acotada, la energía de las soluciones del modelo de Schochet (5.20) aumenta en forma no - acotada a medida que el instante crítico se aproxima.

Teniendo en cuenta el diagnóstico anterior, S. de Gregorio propuso en [30] un nuevo modelo unidimensional para la evolución de la vorticidad tridimensional, el cual consideraba la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} = \omega \frac{\partial u}{\partial x} & \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ \omega|_{t=0} = \omega_0 \end{cases} \quad (5.21)$$

donde, como siempre, $\omega_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función conocida. En este caso, la ley de Biot - Savart postulada por de Gregorio fue:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} (\text{PV}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi(y, t)}{x - y} dy = H(\Psi)(x, t), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty), \quad (5.22)$$

donde la función $\Psi : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ se define así:

$$\Psi(x, t) \doteq \int_{-\infty}^x \omega(y, t) dy, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty).$$

Vale decir, la presente definición del campo de velocidad corresponde a la transformada de Hilbert de la antigua expresión para la velocidad (5.15). Por ende, la ecuación diferencial (5.21) puede también ser escrita de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} = \omega H(\omega) \\ \omega|_{t=0} = \omega_0 \end{cases} \quad \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty).$$

En relación al modelo (5.21), de Gregorio demostró, entre otras cosas, que:

- La solución de (5.21) también satisface la siguiente ley de conservación (propiedad ya observada en el modelo de Constantin, Lax y Majda):

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x, t) dx = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

- Si se introduce, como función desconocida, la siguiente cantidad:

$$\tau(x, t) \doteq \frac{1}{\omega(x, t)},$$

para todo $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$ tal que $\omega(x, t) \neq 0$, entonces la función τ satisface la siguiente ley de conservación escalar:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau u) = 0 \quad \text{en } \Omega,$$

donde $\Omega \doteq \{(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) \mid \omega(x, t) \neq 0\}$. Denótese por $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a la solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt}(t) = u(x(t), t), \quad \forall t > 0.$$

La ley de conservación establece, por ejemplo, que si la función τ es acotada en promedio y tal que $\tau(\cdot, 0)$ no es idénticamente nula, entonces τ no puede anularse (y por ende, ω ser igual a ∞) en la medida que exista una constante finita $M > 0$ tal que:

$$\left| \frac{\partial x(t)}{\partial x(0)} \right| \leq M, \quad \forall t > 0.$$

- Para una viscosidad $\nu > 0$, la adaptación del modelo (5.21) a la ecuación de Navier - Stokes 3D será:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} = \omega \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \\ \omega|_{t=0} = \omega_0 \end{cases} \quad \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty), \quad (5.23)$$

donde $\omega_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función conocida. La ecuación diferencial (5.23) *no* posee una solución estacionaria que no sea idénticamente nula y cuyos valores de frontera sean iguales a cero. Vale decir, el modelo (5.23) está libre de una de las anomalías observadas por Schochet en [69].

Naturalmente, a lo largo de los años, diversos autores han sugerido importantes modificaciones al modelo unidimensional planteado en 1985 por Constantin, Lax y Majda. Todas estas obras (muchas de las cuales son resumidas en el cuadro (5.2)) incluyen el modelamiento de dos características fundamentales de los flujos incompresibles:

1. El transporte de la vorticidad, cristalizado a través de la fórmula de evolución de la vorticidad (2.12).
2. La ley de Biot - Savart, que permite expresar el campo de velocidad (el cual transporta al campo de vorticidad) en términos de la vorticidad misma.

En todos los modelos unidimensionales descritos a continuación se considera a la vorticidad como una función escalar, definida en todo el eje real, o bien en el caso periódico. En algunos modelos se trabaja también con una variable adicional $\theta : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, que puede ser interpretada como el cuadrado de la componente angular del campo de velocidad de un flujo tridimensional axisimétrico.

Modelo (año y referencia)	Ecuaciones dinámicas	Ley de Biot - Savart	Regularidad de las soluciones obtenidas
Analogía con la ecuación cuasi - geostrófica superficial (2005, [29])	$\omega_t + u\omega_x = 0$	$u = H(\omega)$	Explosión en tiempo finito, a partir de condiciones iniciales regulares
Generalización del modelo de Constantin, Lax y Majda (2008, [62])	$\omega_t + \alpha u\omega_x = u_x\omega \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$u_x = H(\omega)$	Explosión en tiempo finito cuando $\alpha < 0$, a partir de condiciones iniciales regulares
Modelo HL, en analogía con la ecuación de Euler 3D axisimétrica (2013, [44])	$\begin{cases} \omega_t + u\omega_x = \theta_x \\ \theta_t + u\theta_x = 0 \end{cases}$	$u_x = H(\omega)$	Explosión en tiempo finito, a partir de condiciones iniciales regulares
Modelo HL simplificado (2014, [23])	$\begin{cases} \omega_t + u\omega_x = \theta_x \\ \theta_t + u\theta_x = 0 \end{cases}$	$u(x) = -x \int_x^\infty \frac{\omega(y)}{y} dy$	Explosión en tiempo finito, a partir de condiciones iniciales regulares
Analogía con la ecuación de Euler 2D (2014, [22])	$\omega_t + u\omega_x = 0$	$u_x = H(\omega)$	Soluciones globalmente regulares

Cuadro 5.2: Modelos unidimensionales para la evolución de la vorticidad tridimensional.

Capítulo 6

Experimento numérico de Luo y Hou

El presente capítulo tiene por finalidad presentar, analizar y discutir algunos de los resultados publicados en [45], en donde la cuestión del quiebre en tiempo finito de la regularidad de soluciones de la ecuación de Euler incompresible y tridimensional es investigada en un cilindro de radio acotado, axialmente periódico y con fronteras sólidas.

Más precisamente, concentrándose en flujos con simetría rotacional, los autores de [45] han logrado identificar una clase de posibles soluciones singulares de la ecuación de Euler incompresible, tridimensional y axisimétrica, dispuesta sobre el dominio ya descrito. Dichas soluciones satisfacen, además, una condición de borde periódica en la dirección axial y una condición de flujo nulo en el manto del cilindro. Aprovechando las simplificaciones computacionales que provoca la geometría cilíndrica del problema, las ecuaciones son discretizadas en el plano meridiano de acuerdo a un esquema numérico mixto (un método de Galerkin de sexto orden y un método de diferencias finitas de sexto orden), aplicado sobre mallas adaptativas y móviles especialmente diseñadas para ajustarse a la solución en evolución. Se observa que el campo de vorticidad desarrolla una singularidad del tipo *anular* en la frontera sólida, con un crecimiento proporcional a $(t_s - t)^{-2.46}$, siendo $t_s \approx 0.0035056$ [s] el tiempo estimado de ocurrencia de la singularidad. Cerca del punto de singularidad, o bien, próximos al tiempo crítico t_s , se incrementa en más de 3×10^8 veces el tamaño de la norma infinito de la vorticidad (controlada hasta ese instante con cuatro dígitos de precisión) y la resolución máxima en la malla supera el valor de $(3 \times 10^{12})^2$.

Específicamente, la singularidad se ubica en la intersección de la frontera sólida $r = 1$ con el plano de simetría $z = 0$, correspondiendo a un *punto de estagnación* del flujo, en el que la velocidad local de éste es nula. Desde el punto de vista físico, la singularidad representa un *punto silla* del campo de velocidad, donde el flujo axial a lo largo de la frontera sólida avanza hacia el plano de simetría $z = 0$, mientras que el flujo radial marcha hacia el eje de simetría $r = 0$. El flujo axial acumula las líneas de vorticidad cerca de la frontera sólida y destruye la regularidad geométrica del campo de vorticidad en torno al plano de simetría.

Con la finalidad de confirmar la validez de la singularidad, la información numérica es enfrentada contra los criterios de *explosión* descritos en capítulos anteriores. Por último, un análisis local en torno al punto de singularidad también sugiere que la naturaleza de ésta es del tipo auto - similar en el plano meridiano, lo cual obliga a los autores de [45] a proponer un *ansatz* auto - similar que permita formalizar sus observaciones numéricas.

6.1. Descripción del problema

Se hará uso de un sistema de coordenadas cilíndricas $(r, \theta, z) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$ para describir la geometría del problema, en el que un punto espacial $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ será denotado como $\xi = r\hat{r} + z\hat{k}$, siendo $r \geq 0$, $z \in \mathbb{R}$ y $\{\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{k}\} \subset \mathbb{R}^3$ el triedro ortogonal propio de las coordenadas cilíndricas. Dado un número fijo $L > 0$, se trabajará con el siguiente dominio:

$$\Sigma_L = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < r < 1, 0 < z < L\},$$

de modo tal que:

$$\partial\Sigma_L = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \mathcal{M}_L,$$

siendo Γ_1 la tapa superior del cilindro, Γ_2 la tapa inferior del cilindro y \mathcal{M}_L el manto del cilindro. Recuérdese que, al utilizar este sistema de coordenadas, un campo de velocidad que posea simetría rotacional puede ser descrito mediante la siguiente descomposición:

$$\mathbf{u}(\xi, t) = u_r(r, z, t)\hat{r} + u_\theta(r, z, t)\hat{\theta} + u_z(r, z, t)\hat{k},$$

para todo $(\xi, t) \in \overline{\Sigma}_L \times [0, \infty)$. El campo de vorticidad admite una escritura similar:

$$\omega(\xi, t) = \omega_r(r, z, t)\hat{r} + \omega_\theta(r, z, t)\hat{\theta} + \omega_z(r, z, t)\hat{k},$$

en donde:

$$\begin{cases} \omega_r(r, z, t) = -\frac{\partial u_\theta}{\partial z}(r, z, t) \\ \omega_\theta(r, z, t) = \frac{\partial u_r}{\partial z}(r, z, t) - \frac{\partial u_z}{\partial r}(r, z, t) \\ \omega_z(r, z, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_\theta)(r, z, t), \end{cases}$$

para todo $(\xi, t) \in \Sigma_L \times [0, \infty)$. Por su parte, la condición de incompresibilidad (1.3) implica la existencia de una función de corriente diferenciable y axisimétrica:

$$\psi(\xi, t) = \psi_r(r, z, t)\hat{r} + \psi_\theta(r, z, t)\hat{\theta} + \psi_z(r, z, t)\hat{k},$$

para la cual se satisface:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\xi, t) = \text{rot}(\psi)(\xi, t) \\ \omega(\xi, t) = -\Delta\psi(\xi, t), \end{cases}$$

para todo $(\xi, t) \in \Sigma_L \times [0, \infty)$.

Si se introducen las siguientes funciones:

$$\begin{cases} u_1(r, z, t) \doteq \frac{1}{r}u_\theta(r, z, t) \\ \omega_1(r, z, t) \doteq \frac{1}{r}\omega_\theta(r, z, t) \\ \psi_1(r, z, t) \doteq \frac{1}{r}\psi_\theta(r, z, t), \end{cases} \quad (6.1)$$

para todo $(\xi, t) \in \Sigma_L \times [0, \infty)$, entonces la formulación vorticidad - corriente de la ecuación

de Euler tridimensional para flujos axisimétricos (dada en la proposición (4.1)) adquiere la siguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_1}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_1}{\partial z} = 2u_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial t} + u_r \frac{\partial \omega_1}{\partial r} + u_z \frac{\partial \omega_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(u_1^2) \\ - \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \right] \psi_1 = \omega_1 \end{cases} \quad \text{en } \Sigma_L \times (0, \infty). \quad (6.2)$$

Las componentes radial y axial del campo de velocidad pueden ser recuperadas a partir de la función ψ_1 mediante las relaciones:

$$\begin{cases} u_r(r, z, t) = -r \frac{\partial \psi_1}{\partial z}(r, z, t) \\ u_z(r, z, t) = 2\psi_1(r, z, t) + r \frac{\partial \psi_1}{\partial r}(r, z, t), \end{cases} \quad (6.3)$$

para todo $(\xi, t) \in \Sigma_L \times [0, \infty)$. Teniendo (6.3), la condición de incompresibilidad se satisface automáticamente:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad \text{en } \Sigma_L \times [0, \infty). \quad (6.4)$$

Tal cual se indica en [45], las componentes angulares u_θ , ω_θ y ψ_θ se anulan en $r = 0$ cuando el campo de velocidad \mathbf{u} es lo suficientemente diferenciable. Por ello, suponiendo la existencia de tal campo de velocidad, las transformaciones (u_1, ω_1, ψ_1) están correctamente definidas en $\overline{\Sigma_L} \times [0, \infty)$. El motivo por el cual se introducen dichas transformaciones está en que las ecuaciones cumplidas por el trío $(u_\theta, \omega_\theta, \psi_\theta)$ presentan una singularidad formal en $r = 0$, lo cual es poco conveniente desde el punto de vista numérico.

A modo de condición inicial se fijará la función:

$$u_1^0(r, z) \doteq 100e^{-30(1-r^2)^4} \sin\left(\frac{2\pi}{L}z\right), \quad \forall \xi \in \overline{\Sigma_L}, \quad (6.5)$$

junto a:

$$\omega_1^0(r, z) = \psi_1^0(r, z) = 0, \quad \forall \xi \in \overline{\Sigma_L}. \quad (6.6)$$

La solución estará sujeta a una condición de borde periódica en z :

$$\begin{cases} u_1(r, 0, t) = u_1(r, L, t) \\ \omega_1(r, 0, t) = \omega_1(r, L, t) \\ \psi_1(r, 0, t) = \psi_1(r, L, t), \end{cases} \quad (6.7)$$

para todo $r \in (0, 1)$ y $t \geq 0$, junto a una condición de flujo nulo en el manto sólido \mathcal{M}_L , esto es, $\psi_1(1, z, t) = 0$, para todo $z \in (0, L)$ y $t \geq 0$. Por su parte, la condición de polo:

$$\frac{\partial u_1}{\partial r}(0, z, t) = \frac{\partial \omega_1}{\partial r}(0, z, t) = \frac{\partial \psi_1}{\partial r}(0, z, t) = 0, \quad (6.8)$$

para todo $z \in (0, L)$ y $t \geq 0$, es también forzada sobre el eje de rotación para asegurar la

regularidad de la solución.

La condición inicial (6.5), que geoméricamente describe un *remolino* que gira en el cilindro, satisface unas relaciones de simetría par/impar en los planos $z_i = \frac{i}{4}L$, con $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Es también interesante notar que, como consecuencia de las condiciones de borde ya descritas, el manto de la frontera $\partial\Sigma_L$ se comporta como una *pared impermeable*:

$$u_r = 0, \text{ en } \mathcal{M}_L \times [0, \infty).$$

6.2. Existencia de una singularidad en tiempo finito

Los autores de [45] resuelven numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales (6.2), junto a las condiciones iniciales y de borde ya especificadas, en el dominio Σ_L , con $L = 1/6$. Sus descubrimientos sugieren que la solución obtenida desarrolla una singularidad en tiempo finito, y el propósito de esta sección es justamente el de dar a conocer las principales evidencias numéricas y analíticas que permitieron a los autores llegar a esa conclusión.

Sin dar una descripción profunda del método numérico empleado por los autores de [45], corresponde señalar que las soluciones numéricas de las ecuaciones (6.2) - (6.3) fueron calculadas usando cinco resoluciones de malla, cuyo tamaño variaba desde 1024×1024 hasta 2048×2048 . En cada ejecución (dentro de cada resolución), la solución es avanzada indefinidamente en el tiempo hasta que se cumpla uno de los siguientes criterios de detención:

- El paso en tiempo es inferior a 10^{-12} .
- El mínimo espaciado de la malla en la dirección radial es inferior a 10^{-15} .
- El mínimo espaciado de la malla en la dirección vertical es inferior a $L \times 10^{-15}$.

En las cinco ejecuciones se observa que la operación finaliza al instante $t_e \approx 0.00350555$ [s] y que el campo de vorticidad desarrolla una estructura singular en tiempo finito. De hecho, la siguiente figura muestra el gráfico de la norma euclidiana de ω sobre el plano (r, z) al instante $\tau = 0.003505$ [s]:

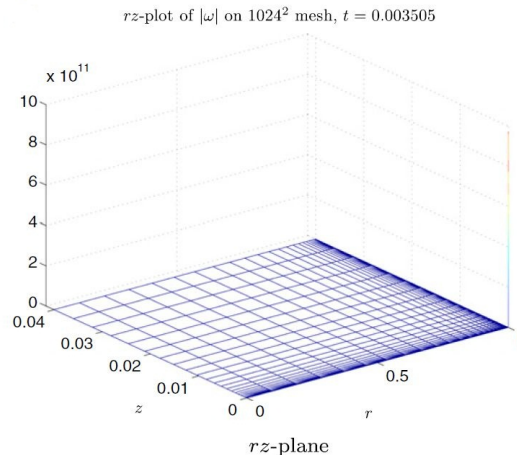


Figura 6.1: Gráfico de $\|\omega(\cdot, \tau)\|$ en el plano (r, z) , sobre la malla de 1024×1024 .

La figura (6.1) sugiere que la estructura singular antes nombrada podría ser un punto de singularidad en la esquina $q_0 = (1, 0)$, lo que corresponde a una singularidad anular en la frontera sólida debido a la simetría rotacional del flujo (esto pues cada punto de la circunferencia unitaria $\partial\Gamma_2$ sería una singularidad de la solución). De todos modos, todavía no hay suficiente evidencia como para hablar de un crecimiento no - acotado del campo de vorticidad.

El primer signo real que advierte sobre la formación de una singularidad se obtiene al estudiar la evolución temporal del doble logaritmo de la norma infinito de la vorticidad, y se puede apreciar que, en definitiva, dicha norma se incrementa con mayor rapidez que una doble exponencial. Más precisamente, se muestran los gráficos de la función $\log(\log(\|\omega(\cdot, t)\|_\infty))$ correspondientes a las mallas de 1024×1024 y de 2048×2048 , aunque dichas curvas se superponen y son prácticamente indistinguibles entre sí:

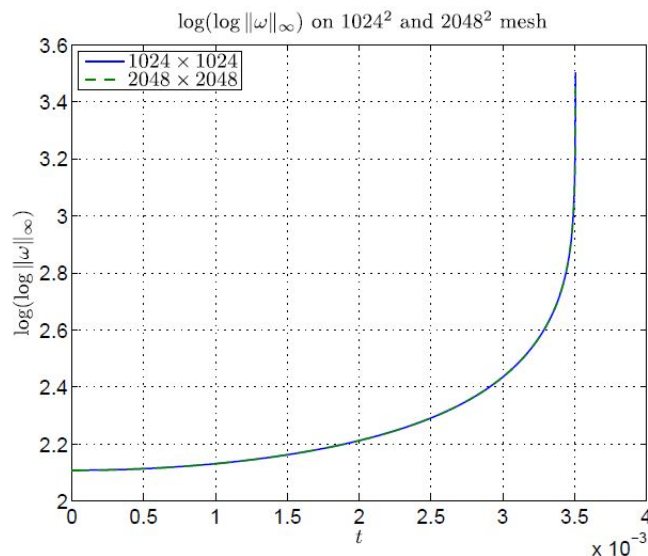


Figura 6.2: Gráfico de dos curvas de la cantidad $\log(\log(\|\omega(\cdot, t)\|_\infty))$, correspondientes a dos mallas.

Con esta información, los autores harían uso del criterio de Beale - Kato - Majda, vale decir, del teorema (4.3), para determinar si el crecimiento exponencial de la vorticidad antes observado corresponde efectivamente a una singularidad de la solución. Según se ha estudiado, dicho criterio establece que una solución suave de la ecuación de Euler 3D *explota* en el instante $t_s > 0$ si y sólo si:

$$\int_0^{t_s} \|\omega(\cdot, t)\|_\infty dt = \infty.$$

En vista de este criterio, un procedimiento clásico para detectar singularidades en soluciones numéricas de la ecuación de Euler 3D consiste en *asumir* algún régimen de crecimiento para la cantidad $\|\omega(\cdot, t)\|_\infty$, típicamente en la forma de una *ley de potencia inversa*:

$$\|\omega(\cdot, t)\|_\infty \approx c(t_s - t)^{-\gamma}, \quad \forall t \in [\tau_1, \tau_2], \quad (6.9)$$

para ciertas constantes $c, \gamma > 0$, siendo $t_s > 0$ el tiempo de ocurrencia de la singularidad y $[\tau_1, \tau_2]$ el intervalo de tiempo en el que la aproximación (6.9) se verifica (el cual ya ha sido previamente seleccionado). Posteriormente es necesario efectuar un ajuste de curvas para es-

timar el instante crítico t_s (hasta ahora desconocido) y los parámetros c y γ . Usualmente, el ajuste de curvas corresponde a un ajuste lineal que se realiza sobre el intervalo $[\tau_1, \tau_2]$, el cual antecede al instante t_s , y después se extrapolan estos resultados hacia tiempos posteriores para entregar las estimaciones deseadas.

Naturalmente, la propuesta del modelo (6.9) debe justificarse mediante otros argumentos, y es en este aspecto donde juega un rol importante la siguiente cantidad:

$$y(t) \doteq \left[\frac{d}{dt} \log(\|\omega(\cdot, t)\|_\infty) \right]^{-1}.$$

En la siguiente figura se puede apreciar un decaimiento aproximadamente lineal del inverso de la derivada temporal de la cantidad $\log(\|\omega(\cdot, t)\|_\infty)$, y además, se destaca en rojo el intervalo de tiempo $[\tau_1, \tau_2]$ utilizado para llevar a cabo el ajuste de curvas:

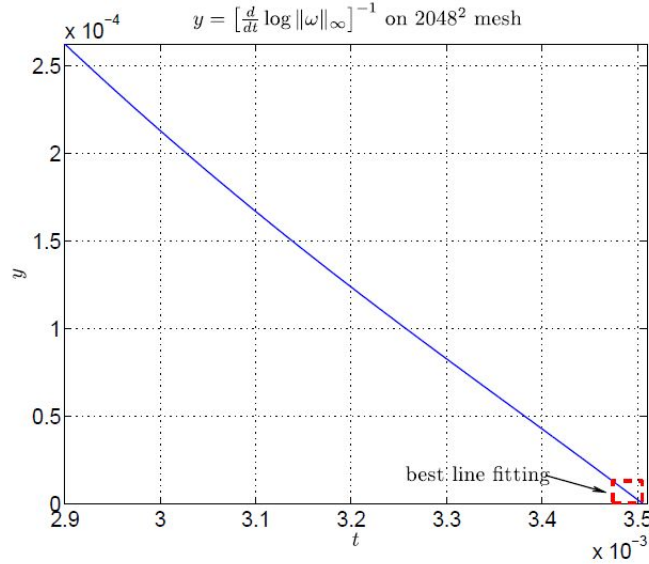


Figura 6.3: Gráfico del inverso de la derivada temporal de $\log(\|\omega(\cdot, t)\|_\infty)$, correspondiente a la malla de 2048×2048 .

Intuitivamente, la cantidad $y(t)$ aproxima a una recta de pendiente negativa después del instante $t \approx 0.0032$, lo cual permite suponer que existen constantes $a < 0$ y $b > 0$ tales que:

$$\left[\frac{d}{dt} \log(\|\omega(\cdot, t)\|_\infty) \right]^{-1} \approx at + b,$$

para $t > 0.0032$. De esta relación se obtiene que:

$$\|\omega(\cdot, t)\|_\infty \approx (at + b)^{1/a},$$

para $t > 0.0032$, aproximación que posteriormente es perfeccionada para que sea compatible con la ley de potencia inversa dada en (6.9). De hecho, el siguiente gráfico muestra el delicado ajuste de curva llevado a cabo para comprobar que el modelo (6.9) es efectivamente válido con $t_s \approx 0.0035056$ y $\gamma \approx 2.46$ (notar que las dos curvas son también indistinguibles):

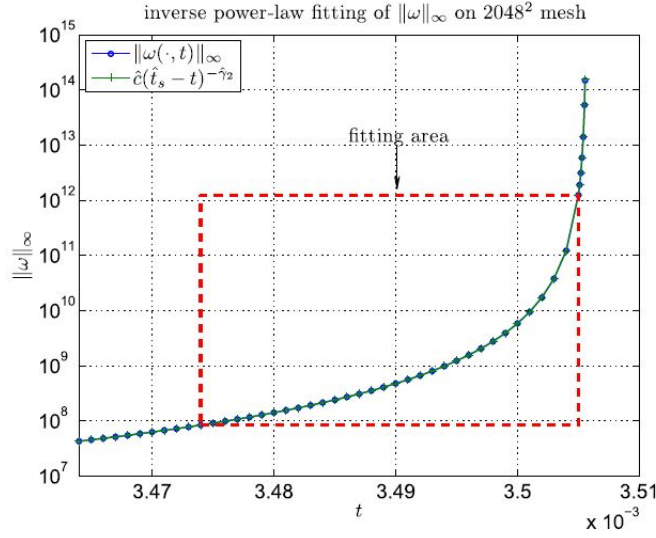


Figura 6.4: Norma infinito de la vorticidad $\|\omega(\cdot, t)\|_\infty$ y su ley de potencia inversa calculadas sobre la malla de 2048×2048 .

Con esta información se demuestra fácilmente que:

$$\int_0^{t_s} \|\omega(\cdot, t)\|_\infty dt = \infty,$$

y así, el criterio de Beale - Kato - Majda permite concluir que la solución obtenida pierde su regularidad en el instante t_s , momento en el que se activa un régimen turbulento. Es importante señalar que, con el objetivo de corroborar la existencia de este *blow-up*, los autores hacen uso de otros criterios, como el de Constantin - Fefferman - Majda (ver [45], secciones 4.6.1 y 4.6.2).

6.3. Estructura auto - similar de la solución singular

Es bien sabido (por ejemplo, ver [10], sección 1.2) que las soluciones de la ecuación de Euler 3D verifican la propiedad de *invarianza de escala*: si \mathbf{u} y p satisfacen la ecuación (1.4) en $\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$, entonces las funciones:

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}, t) \doteq \lambda^\alpha \mathbf{u}(\lambda \mathbf{x}, \lambda^{\alpha+1} t) \\ p^{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}, t) \doteq \lambda^{2\alpha} p(\lambda \mathbf{x}, \lambda^{\alpha+1} t), \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty), \end{cases} \quad (6.10)$$

también resuelven la ecuación (1.4), para todo $\lambda > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Por ende, con la finalidad de describir un posible escenario de *explosión* en un punto espacial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ y en un determinado instante de tiempo $T > 0$, es natural preguntar si la ecuación de Euler incompresible y tridimensional posee una solución auto - similar del siguiente estilo:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{[T-t]^\gamma} \mathbf{U} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{[T-t]^\beta} \right) \\ p(\mathbf{x}, t) = \frac{\alpha + 1}{[T-t]^{2\gamma}} P \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{[T-t]^\beta} \right), \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T), \end{cases} \quad (6.11)$$

siendo $\mathbf{U} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ el *perfil auto - similar* del campo de velocidad, $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ el perfil auto - similar del campo de presiones y $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ dos exponentes de escalamiento. Tal cual se demuestra en [18], al reemplazar la solución (6.11) en la ecuación de Euler (1.4) se deduce que:

$$\beta = \frac{1}{\alpha + 1}, \quad \gamma = \frac{\alpha}{\alpha + 1}, \quad \forall \alpha \neq -1.$$

Introduciendo la variable auto - similar $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{[T - t]^\beta}$, también se satisface el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha + 1} \mathbf{U}(\mathbf{y}) + \frac{1}{\alpha + 1} \nabla \mathbf{U}(\mathbf{y}) \mathbf{y} + \nabla \mathbf{U}(\mathbf{y}) \mathbf{U}(\mathbf{y}) = -\nabla P(\mathbf{y}) \\ \operatorname{div}(\mathbf{U})(\mathbf{y}) = 0, \end{cases} \quad (6.12)$$

para todo $t \in [0, T)$ y $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. En consecuencia, el problema de la existencia de una solución no - trivial del sistema (6.12) es equivalente a aquel de la existencia de solución auto - similar de la ecuación de Euler (1.4). Es importante destacar que hasta ahora se ha dado a conocer la noción de solución auto - similar *global*, vale decir, cuando la solución de la ecuación de Euler 3D es de la forma (6.11) para todo $t \in [0, T)$. Naturalmente, la auto - similaridad de la solución singular puede presentarse en forma *local*, esto es, si posee la forma (6.11) para todo $t \in [T - \delta, T)$, con $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño. Alternativamente, se puede considerar la posibilidad de singularidades auto - similares del tipo *asintótico*, vale decir, cuando la solución \mathbf{u} de la ecuación de Euler 3D iguala, en un determinado límite, a una cierta función de la forma (6.11). Más precisamente, dados $\alpha > -1$ y $0 < p \leq \infty$, se dice que la singularidad es α -*asintóticamente auto - similar en el sentido de L^p* si es que existe $\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{V}}_\alpha \in \dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ que verifica el siguiente límite:

$$\lim_{t \rightarrow T} (T - t) \left\| \nabla \mathbf{u}(\cdot, t) - \frac{1}{T - t} \nabla \bar{\mathbf{V}} \left(\frac{\cdot - \mathbf{x}_0}{[T - t]^\beta} \right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = 0, \quad (6.13)$$

cuando $p = \infty$, o bien:

$$\lim_{t \rightarrow T} (T - t)^{1 - \frac{3\beta}{p}} \left\| \omega(\cdot, t) - \frac{1}{T - t} \bar{\mathcal{W}} \left(\frac{\cdot - \mathbf{x}_0}{[T - t]^\beta} \right) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)} = 0, \quad (6.14)$$

cuando $0 < p < \infty$, donde $\bar{\mathcal{W}} \doteq \operatorname{rot}(\bar{\mathbf{V}})$ y $\beta = \frac{1}{\alpha + 1}$.

El problema de la búsqueda de soluciones auto - similares en mecánica de fluidos se inicia con los trabajos de Jean Leray, a mediados de la década de 1930, que estuvieron enfocados en la ecuación de Navier - Stokes. Dichos trabajos, así como diversas otras consideraciones aplicables únicamente a la ecuación de Navier - Stokes, serán discutidos en capítulos posteriores del presente trabajo. Por ahora se dirá que en la literatura existen numerosos resultados que excluyen la posibilidad de existencia de soluciones auto - similares de la ecuación de Euler incompresible y tridimensional, de entre los cuales conviene destacar los siguientes:

Teorema 6.1. (*Exclusión de soluciones auto - similares globales, en [17]*). *No puede existir una solución singular auto - similar de la ecuación de Euler 3D con la forma (6.11), para todo $t \in [0, T)$ y con $\alpha \neq -1$, si el campo de velocidad \mathbf{u} y el perfil de velocidad auto - similar*

\mathbf{U} satisfacen las siguientes condiciones:

- (a) Para todo $t \in [0, T)$, la función de trayectorias $\varphi(\cdot, t) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ generada por la solución clásica $\mathbf{u} \in \mathcal{C}([0, T]; \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3))$ es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$.
- (b) El perfil de vorticidad $\mathcal{W} \doteq \text{rot}(\mathbf{U})$ no es idénticamente nulo en \mathbb{R}^3 , y existe $p_1 > 0$ tal que $\mathcal{W} \in L^p(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, para todo $p \in (0, p_1)$.

Teorema 6.2. (Exclusión de soluciones auto - similares locales, en [19]). Considérese una solución clásica $\mathbf{u} \in \mathcal{C}([0, T]; H^m(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3))$, con $m > \frac{5}{2}$, de la ecuación de Euler (1.4). Supóngase que el siguiente límite existe, para cierto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mu \doteq \lim_{t \rightarrow T} \varphi(\mathbf{a}, t),$$

siendo $\varphi(\cdot, t) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la función de trayectorias generada por la solución clásica \mathbf{u} . Supóngase, además, que existe $\alpha > -1$ y un perfil auto - similar $\bar{\mathbf{V}} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ que verifican las siguientes condiciones:

- (a) $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} \|\bar{\mathbf{V}}(\mathbf{x})\| = 0$.
- (b) Existe $p_1 > 0$ tal que $\mathcal{W} \in L^p(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, para todo $p \in (0, p_1)$.
- (c) $\lim_{t \rightarrow T} (T-t) \sup_{t < s < T} \left\| \nabla \mathbf{u}(\cdot, s) - \frac{1}{T-s} \nabla \bar{\mathbf{V}} \left(\frac{\cdot}{[T-s]^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}} \right) \right\|_{L^\infty(B(\mu, (T-t)^{\frac{1}{\alpha+1}}))} = 0$.
- (d) $\lim_{t \rightarrow T} (T-t)^{\frac{\alpha p - 3}{p(\alpha+1)}} \sup_{t < s < T} \left\| \mathbf{u}(\cdot, s) - \frac{1}{(T-s)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}} \bar{\mathbf{V}} \left(\frac{\cdot}{[T-s]^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}} \right) \right\|_{L^p(B(\mu, (T-t)^{\frac{1}{\alpha+1}}); \mathbb{R}^3)} = 0$, para un cierto $p \in [1, \infty)$.

En consecuencia, se tendrá que $\bar{\mathbf{V}}$ es idénticamente nulo en \mathbb{R}^3 .

Teorema 6.3. (Exclusión de soluciones auto - similares asintóticas, en [18]).

- (a) Si $\alpha > -1$ y $\alpha \neq \frac{3}{2}$, entonces no puede existir una solución α -asintóticamente auto - similar en el sentido de L^∞ de la ecuación de Euler 3D cuyo perfil auto - similar $\bar{\mathbf{V}}$ pertenezca a $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$.
- (b) Si se asume que $\alpha > -1$ y $0 < p < \frac{3}{2(\alpha+1)}$, entonces no puede existir una solución α -asintóticamente auto - similar en el sentido de L^p de la ecuación de Euler 3D.

Ahora bien, si se trabaja con flujos axisimétricos, es natural considerar soluciones auto - similares que presenten la siguiente forma:

$$\begin{cases} u_1(\mathbf{x}, t) \approx (T-t)^{\gamma_u} U \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{[T-t]^\gamma} \right) \\ \omega_1(\mathbf{x}, t) \approx (T-t)^{\gamma_\omega} \Omega \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{[T-t]^\gamma} \right) \\ \psi_1(\mathbf{x}, t) \approx (T-t)^{\gamma_\psi} \Psi \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{[T-t]^\gamma} \right), \end{cases} \quad (6.15)$$

para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ cercano a \mathbf{x}_0 y cuando $t \nearrow T$, esto es, se trata una solución auto - similar local. En este caso, $\mathbf{x} = (r, z)$ es un punto del plano rz (con $r \geq 0$ y $z \in \mathbb{R}$), $\gamma_u, \gamma_\omega, \gamma_\psi, \gamma_l \in \mathbb{R}$ son factores de escalamiento y (U, Ω, Ψ) son los perfiles auto - similares. Al ser observado en todo \mathbb{R}^3 , el *ansatz* (6.15) no corresponde a la solución auto - similar tradicional dada en (6.11), puesto que los factores de escalamiento γ_u, γ_ω y γ_ψ no son necesariamente iguales; en cambio, la expresión (6.15) describe una especie de singularidad anular y anisotrópica, debido a la simetría rotacional del flujo. Según se verá más adelante, el *ansatz* (6.11) induce una ley de escalamiento de la siguiente forma:

$$\|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\|_\infty = \mathcal{O}(T - t)^{\min\{\gamma_u - \gamma_l, -1\}},$$

para $t \nearrow t_s$, la cual difiere bastante de la usual ley $\|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t)\|_\infty = \mathcal{O}(T - t)^{-1}$, que es asumida en la demostración de los teoremas (6.1), (6.2) y (6.3). Por ende, la gran importancia de este *ansatz* es que, a priori, mantiene abierta la posibilidad de existencia de una solución auto - similar (en el sentido dado en (6.15)) de la ecuación de Euler 3D. El resto de esta sub - sección se ocupará para describir cómo los autores de [45] determinaron que la solución de la ecuación de Euler hallada por ellos presenta una estructura auto - similar local.

Según se afirma en [45], sección 4.7.1, la identificación de una solución auto - similar de la ecuación de Euler incompresible y tridimensional requiere de tres ingredientes básicos:

- El centro de auto - similaridad \mathbf{x}_0 en torno al cual la estructura auto - similar se desarrolla.
- Una vecindad en torno al punto \mathbf{x}_0 en la cual el régimen auto - similar (6.11) es válido.
- Los perfiles de velocidad, vorticidad y función de corriente auto - similares que describen cómo se desarrolla la estructura auto - similar.

Claramente, el centro de auto - similaridad debe ser el punto $\mathbf{x}_0 = (1, 0)$ (en coordenadas cilíndricas, $r = 1$ y $z = 0$), que corresponde al punto donde se alcanza la máxima vorticidad, o bien, el punto en el que la solución explota cuando se aproxima el instante crítico t_s . Para identificar una *vecindad auto - similar*, los autores analizan la siguiente región en función del tiempo:

$$D_\infty(t) \doteq \left\{ (r, z) \in \Sigma_L \mid \|\omega(\xi, t)\| \geq \frac{1}{2} \|\omega(\cdot, t)\|_\infty \right\}, \quad \forall t \geq 0. \quad (6.16)$$

Más precisamente, los autores grafican, para nueve instantes de tiempo cercanos a t_s , la frontera de la región $D_\infty(t)$, dada por:

$$C_\infty(t) \doteq \left\{ (r, z) \in \Sigma_L \mid \|\omega(\xi, t)\| = \frac{1}{2} \|\omega(\cdot, t)\|_\infty \right\}, \quad \forall t \geq 0.$$

Lo que se observa es que, a medida que $t \nearrow t_s$, las curvas $C_\infty(t)$ colapsan casi perfectamente hacia el punto \mathbf{x}_0 , el cual representa una circunferencia de radio unitario, ubicada en el plano $z = 0$ y centrada en el origen de \mathbb{R}^3 . Este hecho confirma la existencia de una vecindad auto - similar en torno a \mathbf{x}_0 , según se da a entender en [49], donde el autor argumenta que las soluciones con *blow - up* de la ecuación de Euler 3D deben estar caracterizadas por un crecimiento acelerado de la vorticidad, y en muchos casos, aquella intensa amplificación de la vorticidad se desarrolla en regiones espaciales cuyo soporte *colapsa* rápidamente. Por último, la existencia de los perfiles auto - similares es confirmada luego de examinar la solución

obtenida (u_1, ω_1, ψ_1) en la vecindad auto - similar $D_\infty(t)$, cuando $t \nearrow t_s$. Con la finalidad de ilustrar este hecho, a continuación se muestran las curvas de nivel bidimensionales de la función ω_1 en torno al punto \mathbf{x}_0 , correspondientes a dos instantes de tiempo distintos y calculadas sobre la malla de 1024×1024 :

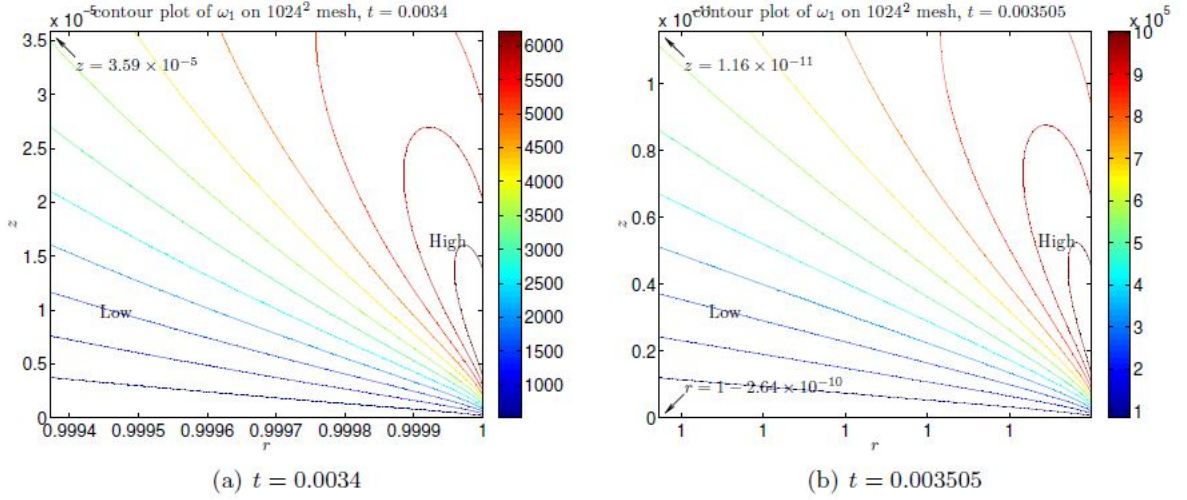


Figura 6.5: Curvas de nivel bidimensionales de la función ω_1 en torno al punto de máxima vorticidad, para (a) $t = 0.0034$ y (b) $t = 0.003505$, ambas correspondientes a la malla de 1024×1024 .

Todo este análisis permitió a los autores de [45] concluir que la solución (u_1, ω_1, ψ_1) desarrolla una singularidad de acuerdo a una estructura auto - similar local en una vecindad del punto de explosión \mathbf{x}_0 . A su vez, esta deducción motivó la proposición del ansatz local (6.15), para $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ y $t \nearrow t_s$. Al reemplazar el ansatz (6.15) en el sistema (6.2) se obtienen las siguientes relaciones para los factores de escalamiento:

$$\begin{cases} \gamma_u - 1 = \gamma_u + \gamma_\psi - 2\gamma_l \\ \gamma_\omega - 1 = \gamma_\omega + \gamma_\psi - 2\gamma_l \\ \gamma_\psi - 2\gamma_l = \gamma_\omega, \end{cases}$$

las cuales, luego de ciertas simplificaciones, indican que la familia de factores de escalamiento se puede parametrizar en función del coeficiente γ_l :

$$\gamma_u = -1 + \frac{1}{2}\gamma_l, \quad \gamma_\omega = -1, \quad \gamma_\psi = -1 + 2\gamma_l.$$

En este punto vale la pena dar a conocer dos importantes observaciones contenidas en [26]:

- Como consecuencia de la conservación de la energía, el coeficiente γ_l debe ser mayor o igual a $\frac{2}{5}$ para que ocurra un *blow - up*.
- Dado que los autores de [45] también observan que el campo de velocidad se mantiene uniformemente acotado, el coeficiente γ_l debe ser mayor o igual a 1 para que ocurra un *blow - up*.

La siguiente tabla expresa los valores estimados de estos factores de escalamiento, obtenidos a partir de los datos numéricos correspondientes, y muestra que las restricciones antes descritas para γ_l efectivamente se verifican:

Malla	$\hat{\gamma}_l$	$\hat{\gamma}_u$	$\hat{\gamma}_\omega$	$\hat{\gamma}_\psi$
1024×1024	2.7359	0.4614	-0.9478	4.7399
1280×1280	2.9059	0.4629	-0.9952	4.8683
1536×1536	2.9108	0.4600	-0.9964	4.8280
1792×1792	2.9116	0.4602	-0.9966	4.8294
2048×2048	2.9133	0.4604	-0.9972	4.8322

Cuadro 6.1: Coeficientes de escalamiento del ansatz auto - similar (6.15).

Finalmente, en base a los resultados mostrados en la tabla (6.1) y a un nuevo ajuste de curvas, los autores de [45] obtienen las siguientes tasas de crecimiento para las componentes de la vorticidad en torno al punto de explosión \mathbf{x}_0 :

$$\omega_r = \mathcal{O}(t_s - t)^{-2.45}, \quad \omega_\theta = \mathcal{O}(t_s - t)^{-1}, \quad \omega_z = \mathcal{O}(t_s - t)^{-2.45},$$

para $t \nearrow t_s$, tasas que confirman la ley de crecimiento presentada en la sección anterior:

$$\|\omega(\cdot, t)\|_\infty = \mathcal{O}(T - t)^{-2.45},$$

para $t \nearrow t_s$. En consecuencia, esto corrobora la existencia de una singularidad, desarrollada en tiempo finito, de la solución (u_1, ω_1, ψ_1) .

Capítulo 7

Análisis del *ansatz* auto - similar de Luo y Hou

En el capítulo anterior se presentó el *ansatz* auto - similar (6.15), el cual ha sido propuesto por los autores de [45] con la finalidad de describir un escenario de explosión en la solución de la ecuación de Euler incompresible y tridimensional, dispuesta en coordenadas cilíndricas para describir el movimiento de un flujo axisimétrico. Observaciones numéricas rigurosamente verificadas motivaron a Hou y Luo a proponer dicho *ansatz*, cuya robustez numérica es, a estas alturas, indiscutible.

En este capítulo se verá que, a la hora de reemplazar el *ansatz* (6.15) en la ecuación (6.2), se obtiene inicialmente el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\begin{cases} -\gamma_u U + \gamma_l(R, Z) \cdot \nabla U + \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial Z} \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial \Psi}{\partial R} \frac{\partial U}{\partial Z} \right) = 0 \\ -\gamma_\omega \Omega + \gamma_l(R, Z) \cdot \nabla \Omega + \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial Z} \frac{\partial \Omega}{\partial R} + \frac{\partial \Psi}{\partial R} \frac{\partial \Omega}{\partial Z} \right) = 2U \frac{\partial U}{\partial Z} \\ - \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} \right) = \Omega, \end{cases} \quad (7.1)$$

donde $(R, Z) \in \mathbb{R}^2$ son las coordenadas auxiliares, que serán introducidas posteriormente. En principio, debiese ser posible resolver el sistema de ecuaciones (7.1) y comparar las soluciones obtenidas con la forma numérica del *ansatz* (6.15), corroborando nuevamente el comportamiento auto - similar de la solución singular. Sin embargo, como se indica en [46] (sección 4.7.3), esta operación no ha sido realizada hasta la fecha.

A lo largo del presente capítulo se demostrará que el *ansatz* (6.15) genera, en realidad, un sistema sobre - determinado de ecuaciones en derivadas parciales que posee dos clases de soluciones:

- una familia de soluciones triviales, en la que el campo de vorticidad es idénticamente nulo en torno al punto singular.
- una familia de soluciones que explotan *instantáneamente*, en la que el campo de vorticidad es gobernado por un régimen estacionario.

En cualquier caso, las propiedades analíticas del sistema (7.1) no son consistentes con los resultados numéricos presentados en [45], sino que están en directa contradicción con ellos. La familia de soluciones triviales ya había sido descubierta por los autores de [20], pero haciendo uso de ciertas hipótesis adicionales (cuya validez es discutible) sobre el decaimiento de la solución. La novedad presentada en este capítulo radica en que es posible obtener ambas familias de soluciones asociadas al ansatz (6.15) sin recurrir a dichos supuestos.

7.1. El ansatz de Luo y Hou genera dos familias de soluciones

Dado que la solución de (6.2) está sujeta a una condición de borde periódica en el eje z , para el presente análisis se considerará el sistema (6.2) en el siguiente dominio espacio-temporal:

$$\left\{ (r, z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r < 1, -\infty < z < \infty \right\} \times [0, T),$$

siendo $T > 0$ un posible instante de *blow-up*, vale decir, el momento en el que la solución del sistema deja de ser regular. Como ya se ha indicado, con la finalidad de describir un escenario de *blow-up* en el borde de la tapa inferior del cilindro, Luo y Hou han propuesto el siguiente ansatz auto-similar local:

$$\begin{cases} u_1(r, z, t) = (T-t)^{-1+\frac{\gamma}{2}} U \left(\frac{r-1}{[T-t]^\gamma}, \frac{z}{[T-t]^\gamma} \right) \\ \omega_1(r, z, t) = (T-t)^{-1} \Omega \left(\frac{r-1}{[T-t]^\gamma}, \frac{z}{[T-t]^\gamma} \right) \\ \psi_1(r, z, t) = (T-t)^{-1+2\gamma} \Psi \left(\frac{r-1}{[T-t]^\gamma}, \frac{z}{[T-t]^\gamma} \right), \end{cases} \quad (7.2)$$

el cual es válido en una vecindad de la circunferencia $\partial\Gamma_2$, para todo instante de tiempo cercano a T . Para simplificar la notación, los autores de [20] han introducido el siguiente cambio de variable:

$$R \doteq \frac{r-1}{(T-t)^\gamma}, \quad Z \doteq \frac{z}{(T-t)^\gamma}, \quad (7.3)$$

para $0 < r < 1$ y $z \in \mathbb{R}$, con $\gamma = \gamma_l$. Por ahora, y para todos los cálculos presentados en esta sección, se supondrá que $\gamma \geq 0$.

Por su parte, se determinó que la región de validez de la estructura auto-similar (7.2) era la siguiente:

$$D_\infty(t) \doteq \left\{ (r, z) \in \Sigma_L \mid \|\omega(r, z, t)\| \geq \frac{1}{2} \|\omega(\cdot, t)\|_\infty \right\}, \quad \forall t \geq 0.$$

Además se observa que, conforme $t \nearrow T$, la región $D_\infty(t)$ colapsa hacia la circunferencia $\partial\Gamma_2$. Sin embargo, el ansatz (7.2) podría ser legítimo en un dominio espacio-temporal más amplio. De hecho, para futuros análisis, se asumirá que el ansatz auto-similar (7.2) es válido en la siguiente región espacio-temporal (tal cual se hace en [17]):

$$\mathcal{C}(\delta, T) \doteq \left\{ (r, z, t) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 - \delta < r < 1, -\delta < z < \delta, T - \delta < t < T \right\}, \quad (7.4)$$

para algún número $0 < \delta \ll 1$. En tal caso, los perfiles auto - similares (U, Ω, Ψ) estarán definidos sobre la adherencia de la siguiente región (fija en el tiempo):

$$\mathcal{D} \doteq \{(R, Z) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < R < 0, \quad -\infty < Z < \infty\}. \quad (7.5)$$

Se verificará que los perfiles (U, Ω, Ψ) satisfacen un sistema sobre - determinado de ecuaciones en derivadas parciales. Como consecuencia de esto, el ansatz descrito anteriormente genera dos familias de soluciones, una de las cuales se mantendrá regular durante todo el intervalo $[0, T]$, mientras que la otra desarrollará un *blow - up* en forma instantánea.

Considérese una solución clásica (u_1, ω_1, ψ_1) del sistema (6.2), la cual adopta la estructura auto - similar ya descrita dentro del dominio $\mathcal{C}(\delta, T)$. Lo primero que se debe hacer es expresar las componentes radial y axial del campo de velocidad según las variables auto - similares, utilizando las identidades contenidas en (6.3):

$$\begin{cases} u_r(r, z, t) = -[1 + R(T - t)^\gamma](T - t)^{-1+\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial Z}(R, Z), \\ u_z(r, z, t) = 2(T - t)^{-1+2\gamma} \Psi(R, Z) + [1 + R(T - t)^\gamma](T - t)^{-1+\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial R}(R, Z), \end{cases} \quad (7.6)$$

para todo $(r, z, t) \in \mathcal{C}(\delta, T)$. El paso siguiente es obtener el sistema de ecuaciones en derivadas parciales que satisface el trío (U, Ω, Ψ) . Será conveniente introducir la siguiente notación para los operadores diferenciales y vectores a utilizar:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial R}, \frac{\partial}{\partial Z} \right), \quad \nabla^\perp = \left(-\frac{\partial}{\partial Z}, \frac{\partial}{\partial R} \right), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}, \quad Y = (R, Z).$$

- Reemplazando (7.2) y (7.6) en la primera ecuación de (6.2) se obtiene que:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) (T - t)^{-2+\frac{\gamma}{2}} U + \gamma (T - t)^{-2+\frac{\gamma}{2}} \left(R \frac{\partial U}{\partial R} + Z \frac{\partial U}{\partial Z} \right) \\ & - [1 + R(T - t)^\gamma](T - t)^{-2+\frac{\gamma}{2}} \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \frac{\partial U}{\partial R} \\ & + \left\{ 2(T - t)^{-1+2\gamma} \Psi + [1 + R(T - t)^\gamma](T - t)^{-1+\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right\} (T - t)^{-1-\frac{\gamma}{2}} \frac{\partial U}{\partial Z} \\ & = 2(T - t)^{-2+\frac{3}{2}\gamma} U \frac{\partial \Psi}{\partial Z}, \end{aligned} \quad (7.7)$$

para todo $(R, Z) \in \mathcal{D}$ y $t \in [T - \delta, T)$. Al multiplicar (7.7) por $(T - t)^{2-\frac{\gamma}{2}}$ se obtiene que:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) U + \gamma Y \cdot \nabla U - [1 + R(T - t)^\gamma] \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \frac{\partial U}{\partial R} \\ & + 2(T - t)^\gamma \Psi \frac{\partial U}{\partial Z} + [1 + R(T - t)^\gamma] \frac{\partial \Psi}{\partial R} \frac{\partial U}{\partial Z} \\ & = 2(T - t)^\gamma U \frac{\partial \Psi}{\partial Z}, \end{aligned} \quad (7.8)$$

para todo $(R, Z) \in \mathcal{D}$ y $t \in [T - \delta, T)$.

- Reemplazando (7.2) y (7.6) en la segunda ecuación de (6.2) se obtiene que:

$$\begin{aligned}
& (T-t)^{-2}\Omega + \gamma(T-t)^{-2} \left(R \frac{\partial \Omega}{\partial R} + Z \frac{\partial \Omega}{\partial Z} \right) - [1 + R(T-t)^\gamma](T-t)^{-2} \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \frac{\partial \Omega}{\partial R} \\
& + \left\{ 2(T-t)^{-1+2\gamma}\Psi + [1 + R(T-t)^\gamma](T-t)^{-1+\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right\} (T-t)^{-1-\gamma} \frac{\partial \Omega}{\partial Z} \\
& = (T-t)^{-2} \frac{\partial}{\partial Z} (U^2),
\end{aligned} \tag{7.9}$$

para todo $(R, Z) \in \mathcal{D}$ y $t \in [T - \delta, T)$. Al multiplicar (7.9) por $(T-t)^2$ se obtiene que:

$$\Omega + \gamma Y \cdot \nabla \Omega - [1 + R(T-t)^\gamma] \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \frac{\partial \Omega}{\partial R} + 2(T-t)^\gamma \Psi \frac{\partial \Omega}{\partial Z} + [1 + R(T-t)^\gamma] \frac{\partial \Psi}{\partial R} \frac{\partial \Omega}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial Z} (U^2), \tag{7.10}$$

para todo $(R, Z) \in \mathcal{D}$ y $t \in [T - \delta, T)$.

- Reemplazando (7.2) en la tercera ecuación de (6.2) se obtiene que:

$$-(T-t)^{-1} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} \right) - \frac{3(T-t)^{-1+\gamma}}{1 + R(T-t)^\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial R} = (T-t)^{-1} \Omega, \tag{7.11}$$

para todo $(R, Z) \in \mathcal{D}$ y $t \in [T - \delta, T)$. Al multiplicar (7.11) por $(T-t)$ se obtiene que:

$$-\Delta \Psi - \frac{3(T-t)^\gamma}{1 + R(T-t)^\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial R} = \Omega, \tag{7.12}$$

para todo $(R, Z) \in \mathcal{D}$ y $t \in [T - \delta, T)$.

Finalmente, dado que $\gamma \geq 0$, es posible tomar el límite $t \nearrow T$ en las ecuaciones (7.8), (7.10) y (7.12) para concluir que:

$$\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) U + \gamma Y \cdot \nabla U + \nabla^\perp \Psi \cdot \nabla U = 0 \tag{7.13}$$

$$\Omega + \gamma Y \cdot \nabla \Omega + \nabla^\perp \Psi \cdot \nabla \Omega = \frac{\partial}{\partial Z} (U^2) \tag{7.14}$$

$$-\Delta \Psi = \Omega, \tag{7.15}$$

para todo $(R, Z) \in \mathcal{D}$. Ahora bien, teniendo en consideración las tres ecuaciones dominantes (7.13), (7.14) y (7.15), se procede de la siguiente forma:

- Se multiplica (7.7) por $(T-t)^{2-\frac{3}{2}\gamma}$ para deducir que:

$$\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) (T-t)^{-\gamma} U + \gamma (T-t)^{-\gamma} (Y \cdot \nabla U) + 2\Psi \frac{\partial U}{\partial Z} + [1 + R(T-t)^\gamma] (T-t)^{-\gamma} (\nabla^\perp \Psi \cdot \nabla U) = 2U \frac{\partial \Psi}{\partial Z}$$

$$\Leftrightarrow (T-t)^{-\gamma} \left\{ \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) U + \gamma (Y \cdot \nabla U) + \nabla^\perp \Psi \cdot \nabla U \right\} + 2\Psi \frac{\partial U}{\partial Z} + R (\nabla^\perp \Psi \cdot \nabla U) = 2U \frac{\partial \Psi}{\partial Z}$$

$$\Leftrightarrow R(\nabla^\perp \Psi \cdot \nabla U) + 2\Psi \frac{\partial U}{\partial Z} = 2U \frac{\partial \Psi}{\partial Z}, \quad (7.16)$$

para todo $(R, Z) \in \mathcal{D}$, en donde la última identidad se obtiene gracias a (7.13).

- Se multiplica (7.9) por $(T-t)^{2-\gamma}$ para deducir que:

$$\begin{aligned} (T-t)^{-\gamma} \Omega + \gamma (T-t)^{-\gamma} (Y \cdot \nabla \Omega) + 2\Psi \frac{\partial \Omega}{\partial Z} + [1 + R(T-t)^\gamma] (T-t)^{-\gamma} (\nabla^\perp \Psi \cdot \nabla \Omega) &= (T-t)^{-\gamma} \frac{\partial}{\partial Z} (U^2) \\ \Leftrightarrow (T-t)^{-\gamma} \left\{ \Omega + \gamma (Y \cdot \nabla U) + \nabla^\perp \Psi \cdot \nabla \Omega - \frac{\partial}{\partial Z} (U^2) \right\} + 2\Psi \frac{\partial \Omega}{\partial Z} + R(\nabla^\perp \Psi \cdot \nabla \Omega) &= 0 \\ \Leftrightarrow R(\nabla^\perp \Psi \cdot \nabla \Omega) + 2\Psi \frac{\partial \Omega}{\partial Z} &= 0, \end{aligned} \quad (7.17)$$

para todo $(R, Z) \in \mathcal{D}$, en donde la última identidad se obtiene gracias a (7.14).

- Se multiplica (7.11) por $(T-t)^{1-\gamma}$ para deducir que:

$$\begin{aligned} -(T-t)^{-\gamma} \Delta \Psi - \frac{3}{1 + R(T-t)^\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial R} &= (T-t)^{-\gamma} \Omega \\ \Leftrightarrow -\frac{3}{1 + R(T-t)^\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial R} &= (T-t)^{-\gamma} (\Delta \Psi + \Omega) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial R} &= 0, \end{aligned} \quad (7.18)$$

para todo $(R, Z) \in \mathcal{D}$, en donde la última identidad se obtiene gracias a (7.15).

En definitiva, los perfiles auto-similares (U, Ω, Ψ) satisfacen un sistema de seis ecuaciones en derivadas parciales, constituido por las identidades (7.13), (7.14), (7.15), (7.16), (7.17) y (7.18).

De la igualdad (7.18) se deduce inmediatamente que el perfil Ψ sólo depende de la variable $Z \in \mathbb{R}$. Al observar (7.15) se concluye igualmente que el perfil Ω sólo depende de Z , y además:

$$-\Psi''(Z) = \Omega(Z), \quad \forall Z \in \mathbb{R}. \quad (7.19)$$

Con esta información, la ecuación (7.17) se reduce a:

$$\Psi(Z)\Omega'(Z) = 0, \quad \forall Z \in \mathbb{R}. \quad (7.20)$$

Ahora bien, supóngase que $\Omega \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y que su derivada Ω' no es constantemente nula en \mathbb{R} . Luego, sin pérdida de generalidad, se puede tomar $Z_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\Omega'(Z_0) > 0$. Por continuidad, existirá $\eta > 0$ tal que $\Omega'(Z) > 0$, para todo $Z \in B(Z_0, \eta)$. Gracias a (7.20) se tendrá que $\Psi(Z) = 0$, $\forall Z \in B(Z_0, \eta)$, y a su vez, esto implica que $\Omega(Z) = 0$, para todo $Z \in B(Z_0, \eta)$, debido a (7.19). En particular, se tiene $\Omega'(Z) = 0$, $\forall Z \in B(Z_0, \eta)$, y esto contradice la hipótesis inicial. En consecuencia, Ω' debe ser idénticamente nula en \mathbb{R} , o bien, debe existir una constante $a \in \mathbb{R}$ tal que $\Omega(Z) = a$, $\forall Z \in \mathbb{R}$. Pero si el perfil Ω es constante en \mathbb{R} , la ecuación (7.19) permite concluir que el perfil Ψ debe ser una función cuadrática en

todo \mathbb{R} :

$$\Psi(Z) = -\frac{a}{2}Z^2 + bZ + c, \quad \forall Z \in \mathbb{R}, \quad (7.21)$$

para ciertas constantes $b, c \in \mathbb{R}$.

Supóngase que $a \neq 0$ (se verá que esto conduce a una contradicción, y así, necesariamente debe tenerse que $a = 0$). Todavía no se ha ocupado la información contenida en las ecuaciones (7.13), (7.14) y (7.16). Con todo lo anterior, (7.14) se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial Z}(U^2) = a, \quad \forall (R, Z) \in \mathcal{D}.$$

Esto indica que existe una función diferenciable $f : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$U(R, Z)^2 = f(R) + aZ, \quad \forall (R, Z) \in \mathcal{D}.$$

Derivando con respecto a $R < 0$ y $Z \in \mathbb{R}$ se obtiene que:

$$\begin{cases} 2U(R, Z) \frac{\partial U}{\partial R}(R, Z) = f'(R) \\ 2U(R, Z) \frac{\partial U}{\partial Z}(R, Z) = a, \end{cases} \quad (7.22)$$

para todo $(R, Z) \in \mathcal{D}$. Por su parte, (7.13) se simplifica a:

$$\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)U(R, Z) + \gamma R \frac{\partial U}{\partial R}(R, Z) + \gamma Z \frac{\partial U}{\partial Z}(R, Z) - \Psi'(Z) \frac{\partial U}{\partial R}(R, Z) = 0,$$

para todo $(R, Z) \in \mathcal{D}$. Multiplicando esta ecuación por $2U(R, Z)$, con $(R, Z) \in \mathcal{D}$, y luego ocupando (7.22), se deduce que:

$$(2 - \gamma)[f(R) + aZ] + [\gamma R + aZ - b]f'(R) + a\gamma Z = 0, \quad \forall (R, Z) \in \mathcal{D}. \quad (7.23)$$

Dividiendo ambos lados de la identidad (7.23) por $Z > 0$ y luego haciendo tender $Z \rightarrow +\infty$, se llega a concluir que:

$$(2 - \gamma)a + af'(R) + a\gamma = 0, \quad \forall (R, Z) \in \mathcal{D},$$

o bien, $f'(R) = -2$, $\forall R < 0$, puesto que $a \neq 0$. En consecuencia, existe una constante $\kappa \in \mathbb{R}$ tal que:

$$U(R, Z)^2 = -2R + aZ + \kappa, \quad \forall (R, Z) \in \mathcal{D}. \quad (7.24)$$

Con toda la información anterior, la ecuación (7.16) se simplifica así:

$$-R\Psi'(Z) \frac{\partial U}{\partial R}(R, Z) + 2\Psi(Z) \frac{\partial U}{\partial Z}(R, Z) = 2\Psi'(Z)U(R, Z), \quad \forall (R, Z) \in \mathcal{D}. \quad (7.25)$$

Al igual que antes, se multiplica esta identidad por $2U(R, Z)$, con $(R, Z) \in \mathcal{D}$, y luego se ocupa (7.22) y (7.24) para obtener lo siguiente:

$$2R\Psi'(Z) + 2a\Psi(Z) = 4\Psi'(Z)(-2R + aZ + \kappa), \quad \forall (R, Z) \in \mathcal{D}. \quad (7.26)$$

Dividiendo ambos lados de la identidad (7.26) por $R < 0$ y haciendo tender $R \rightarrow -\infty$, se concluye que $\Psi'(Z) = 0$, para todo $Z \in \mathbb{R}$. Dada la forma cuadrática del perfil Ψ , esto necesariamente implica que $a = b = 0$, contradiciendo así la hipótesis inicial.

Por consiguiente, debe cumplirse que $a = 0$, vale decir:

$$\begin{cases} \Omega(Z) = 0 \\ \Psi(Z) = bZ + c, \end{cases} \quad (7.27)$$

para todo $Z \in \mathbb{R}$. Todavía no se ha ocupado la información contenida en las ecuaciones (7.13), (7.14) y (7.16). Con todo lo anterior, (7.14) se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial Z}(U^2) = 0, \quad \forall (R, Z) \in \mathcal{D}.$$

Esto indica que U^2 no depende de Z , y en consecuencia, el perfil U sólo dependerá de la variable $R \leq 0$. Las identidades (7.13) y (7.16) se simplifican así:

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) U(R) + \gamma R U'(R) - \Psi'(Z) U'(R) = 0 \\ -R \Psi'(Z) U'(R) = 2U(R) \Psi'(Z), \end{cases} \quad (7.28)$$

para todo $R < 0$ y $Z \in \mathbb{R}$. Al reemplazar (7.27) en (7.28) se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales para el perfil U :

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) U(R) + (\gamma R - b) U'(R) = 0 \\ -b R U'(R) = 2b U(R), \end{cases} \quad (7.29)$$

para todo $R < 0$. Ahora el análisis debe distinguir los siguientes casos:

• **Caso (A):** si $b \neq 0$, entonces de la segunda ecuación de (7.29) es posible concluir que $U(R) = -\frac{R}{2} U'(R)$, para todo $R < 0$. Al reemplazar esto en la primera ecuación de (7.29) se concluye que:

$$(\gamma^* R - b) U'(R) = 0, \quad \forall R < 0,$$

con $\gamma^* \doteq \frac{5\gamma - 2}{4}$. Es decir, $U'(R) = 0$ para todo $R < 0$ tal que $R \neq \frac{b}{\gamma^*}$ (si $\gamma = 2/5$, se deduce directamente que $U'(R) = 0, \forall R < 0$). Si se supone, por ejemplo, que $U \in \mathcal{C}^1((-\infty, 0])$, se concluye inmediatamente que $U'(R) = 0, \forall R < 0$. Por continuidad se tendrá también que $U'(R) = 0, \forall R \leq 0$. Por ende, en el caso (A) se ha obtenido la siguiente familia de soluciones exactas para el trío (U, Ω, Ψ) :

$$\begin{cases} U(R, Z) = 0 \\ \Omega(R, Z) = 0 \\ \Psi(R, Z) = bZ + c, \end{cases}$$

para todo $(R, Z) \in \mathcal{D}$, con $b, c \in \mathbb{R}$. En particular, se observa que el perfil auto - similar del campo de vorticidad es idénticamente nulo en la región \mathcal{D} , situación inadmisibles cuando se pretende hallar una solución auto - similar de la ecuación de Euler 3D. En términos de las

variables originales, la solución hallada es:

$$\begin{cases} u_1(r, z, t) = 0 \\ \omega_1(r, z, t) = 0 \\ \psi_1(r, z, t) = b(T-t)^{-1+\gamma}z + c(T-t)^{-1+2\gamma}, \end{cases} \quad (7.30)$$

para todo $(r, z, t) \in \mathcal{C}(\delta, T)$, con $b, c \in \mathbb{R}$. Esta misma familia de soluciones fue la única hallada por los autores de [20], pero en aquel caso, el análisis requerido para obtener dicha familia se simplificaba bastante, debido al uso de hipótesis adicionales sobre el decaimiento de la solución. Contrariamente, dichas hipótesis impedían rescatar la otra clase de soluciones, descrita a continuación.

• **Caso (B):** si $b = 0$, entonces se obtiene una única ecuación diferencial ordinaria para el perfil U :

$$\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)U(R) + \gamma RU'(R) = 0, \quad \forall R < 0,$$

que es lineal, homogénea y de primer orden. Como es bien sabido, la solución general de este tipo de EDO viene dada mediante la siguiente fórmula:

$$U(R) = \kappa \exp\left(-\int \frac{1}{\gamma R} \left\{1 - \frac{\gamma}{2}\right\} dR\right), \quad \forall R \leq 0,$$

siendo $\kappa \in \mathbb{R}$ un parámetro. Después de una simple manipulación algebraica se deduce que $U(R) = \kappa(-R)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\gamma}}$, para $R \leq 0$ y $\kappa \in \mathbb{R}$. Por ende, en el caso (B) se ha obtenido la siguiente familia de soluciones exactas para el trío (U, Ω, Ψ) :

$$\begin{cases} U(R, Z) = \kappa(-R)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\gamma}} \\ \Omega(R, Z) = 0 \\ \Psi(R, Z) = c, \end{cases}$$

para todo $(R, Z) \in \mathcal{D}$, con $c, \kappa \in \mathbb{R}$. En términos de las variables originales, la solución hallada es:

$$\begin{cases} u_1(r, z, t) = \kappa(1-r)^{\frac{\gamma-2}{2\gamma}} \\ \omega_1(r, z, t) = 0 \\ \psi_1(r, z, t) = c(T-t)^{-1+2\gamma}, \end{cases} \quad (7.31)$$

para todo $(r, z, t) \in \mathcal{C}(\delta, T)$, con $c, \kappa \in \mathbb{R}$.

7.2. Análisis de las soluciones obtenidas y la existencia de *blow - up*

Recuérdese que el criterio de Beale - Kato - Majda establece que una solución suave de la ecuación de Euler tridimensional *explota* en el instante $T > 0$ si y sólo si:

$$\lim_{t \nearrow T} \int_0^t \|\omega(\cdot, s)\|_{L^\infty(\Phi; \mathbb{R}^3)} ds = \infty, \quad (7.32)$$

siendo $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ el dominio espacial (acotado o no) en el cual se está resolviendo la ecuación de Euler tridimensional. En el caso de las soluciones asociadas al ansatz auto - similar de Luo y Hou se tiene que $\Phi = \{(r, z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r < 1, -\infty < z < \infty\}$, si bien la atención estará puesta en la región de validez del ansatz auto - similar, cuya sección espacial será denotada por $\Lambda \doteq \{(r, z) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - \delta < r < 1, -\delta < z < \delta\}$.

El objetivo de esta sección es decidir si las dos familias de soluciones obtenidas anteriormente desarrollan una singularidad en tiempo finito. Para ello se supondrá que $\gamma > 2$, teniendo en consideración las estimaciones numéricas presentadas en la tabla (6.1), las cuales sugieren que $\gamma \approx 2.9133$.

• **Caso (A):** en (7.30) se tiene la expresión de la componente angular de los campos de velocidad y vorticidad. Para recuperar las componentes radial y axial de dichos campos se ocupan las fórmulas dadas en (4.3) y (6.3), obteniendo finalmente que:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\xi, t) = -b(T-t)^{-1+\gamma}r\hat{r} + 2(T-t)^{-1+\gamma}[bz + c(T-t)^\gamma]\hat{k} \\ \omega(\xi, t) = \vec{0}, \end{cases} \quad (7.33)$$

para todo $(\xi, t) \in \mathcal{C}(\delta, T)$, con $b, c \in \mathbb{R}$. Ahora bien, el ansatz propuesto tiene por finalidad describir un posible escenario de *blow - up* en el punto espacio - temporal $(r, z, t) = (1, 0, T)$. En consecuencia, la solución del problema (6.2) debe ser regular fuera del dominio $\mathcal{C}(\delta, T)$, lo cual asegura que:

$$\int_0^{T-\delta} \|\omega(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Phi; \mathbb{R}^3)} dt < \infty, \quad \int_{T-\delta}^T \|\omega(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Phi \setminus \Lambda; \mathbb{R}^3)} dt < \infty.$$

Como el campo de vorticidad es nulo en $\Lambda \times (T - \delta, T)$, se tendrá que:

$$\|\omega(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Phi; \mathbb{R}^3)} = \|\omega(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Phi \setminus \Lambda; \mathbb{R}^3)}, \quad \forall t \in (T - \delta, T),$$

y así:

$$\int_0^T \|\omega(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Phi; \mathbb{R}^3)} dt = \int_0^{T-\delta} \|\omega(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Phi; \mathbb{R}^3)} dt + \int_{T-\delta}^T \|\omega(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Phi \setminus \Lambda; \mathbb{R}^3)} dt < \infty.$$

Vale decir, el criterio BKM asegura que la solución del problema es regular en todo instante del intervalo $[0, T]$. En particular, no se admite la existencia de un *blow - up* al instante T .

• **Caso (B):** en (7.31) se tiene la expresión de la componente angular de los campos de velocidad y vorticidad. Es posible recuperar las componentes radial y axial de dichos campos ocupando las fórmulas dadas en (4.3) y (6.3), obteniendo finalmente que:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\xi, t) = \kappa r(1-r)^{\frac{\gamma-2}{2\gamma}}\hat{\theta} + 2c(T-t)^{-1+2\gamma}\hat{k} \\ \omega(\xi, t) = \kappa \frac{2 - (\alpha + 2)r}{(1-r)^\beta} \hat{k}, \end{cases} \quad (7.34)$$

para todo $(\xi, t) \in \mathcal{C}(\delta, T)$, con $\kappa, c \in \mathbb{R}$, $\alpha \doteq \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$ y $\beta \doteq \frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma}$. Luego, el campo de vorticidad

responde a un régimen estacionario en el dominio $\mathcal{C}(\delta, T)$, dependiendo únicamente de los valores de $r \in (1 - \delta, 1)$. Si se asume que $\kappa > 0$, es fácil verificar que la componente axial ω_z es decreciente en r , y tal que:

$$\lim_{r \nearrow 1} \omega_z(r) = -\infty.$$

La siguiente figura muestra el gráfico de ω_z en torno a $r = 1$, con $\kappa = 1$ y $\gamma = 2.9133$:

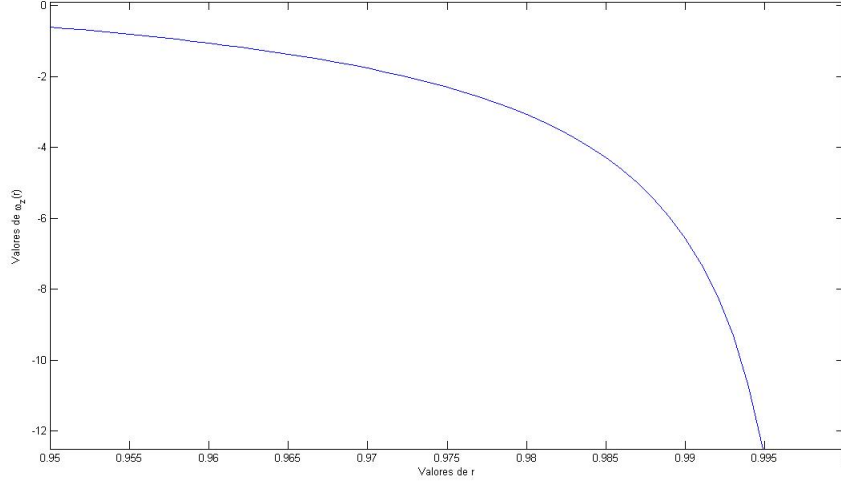


Figura 7.1: Componente axial del campo de vorticidad para valores de r cercanos a 1.

En particular, se puede concluir que, para todo $t \in (T - \delta, T)$:

$$\|\omega(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Phi; \mathbb{R}^3)} = \sup_{1-\delta < r < 1} |\omega_z(r)| = \infty,$$

y esto claramente implica que:

$$\int_{T-\delta}^T \|\omega(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Phi; \mathbb{R}^3)} dt = \infty.$$

Es decir, el criterio BKM aseguraría que la solución (7.34) efectivamente *explota* en el instante T . Por lo demás, la singularidad se presenta justamente en $r = 1$, y aunque en la expresión dada en (7.34) no se muestra explícitamente la existencia de una singularidad en $z = 0$, se debe recordar que el ansatz original que produjo esta solución fue construido con la intención de describir una singularidad en el punto $(r, z) = (1, 0)$.

A pesar de lo anterior, es curioso notar que el campo de velocidad en (7.34) se mantiene regular en todo el dominio $\mathcal{C}(\delta, T)$, puesto que $\gamma > 2$. Si se quisiera dar otro argumento a favor de la existencia de este *blow - up*, se podría hacer uso del teorema (4.5). Dado que el criterio BKM asegura que la presente solución de la ecuación de Euler presenta una singularidad al instante T , entonces debería tenerse que $\lim_{t \rightarrow T} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{H^m(\Phi; \mathbb{R}^3)} = \infty$, de acuerdo a lo establecido en el teorema (4.5). Como se indicó oportunamente, a diferencia del criterio BKM, el teorema (4.5) se concentra en el control del campo de velocidad, otorgando una consecuencia necesaria de la existencia de un *blow - up* en el instante crítico T . La expresión

del campo de velocidad (7.34) en coordenadas cartesianas es:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = -\kappa y \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^{\frac{\gamma-2}{2\gamma}} \hat{i} + \kappa x \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^{\frac{\gamma-2}{2\gamma}} \hat{j} + 2c(T-t)^{-1+2\gamma} \hat{k},$$

para todo $(x, y, z, t) \in \mathcal{C}(\delta, T)$, con $\kappa, c \in \mathbb{R}$. Como $m > 2$, entonces resulta claro que:

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{H^m(\Phi; \mathbb{R}^3)} \geq \left\| \frac{\partial u_2}{\partial y}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Phi; \mathbb{R})} \geq \left\| \frac{\partial u_2}{\partial y}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Lambda; \mathbb{R})}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (7.35)$$

Para $t \in (T - \delta, T)$ y $(x, y, z) \in \Lambda$ se tiene que:

$$\frac{\partial u_2}{\partial y}(x, y, z, t) = -\kappa \alpha \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^{-\beta},$$

de modo que, al trabajar en coordenadas cilíndricas, se obtiene lo siguiente: $\forall t \in (T - \delta, T)$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u_2}{\partial y}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Lambda; \mathbb{R}^3)}^2 &= \kappa^2 \alpha^2 \int_{-\delta}^{\delta} \int_0^{2\pi} \int_{1-\delta}^1 \left| \frac{r}{(1-r)^\beta} \sin(\theta) \cos(\theta) \right|^2 r \, dr \, d\theta \, dz \\ &= \frac{1}{4} \kappa^2 \alpha^2 \int_{-\delta}^{\delta} \int_0^{2\pi} \int_{1-\delta}^1 \frac{r^3}{(1-r)^{2\beta}} (\sin(2\theta))^2 \, dr \, d\theta \, dz \\ &= \frac{1}{2} \pi \kappa^2 \alpha^2 \delta \int_{1-\delta}^1 \frac{r^3}{(1-r)^{2\beta}} \, dr \\ &\geq \frac{1}{2} \pi \kappa^2 \alpha^2 \delta (1-\delta)^3 \int_{1-\delta}^1 (1-r)^{-2\beta} \, dr \\ &= +\infty, \end{aligned} \quad (7.36)$$

puesto que $\beta > \frac{1}{2}$. Por ende, gracias a lo calculado en (7.35) y (7.36), se puede concluir que:

$$\lim_{t \rightarrow T} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{H^m(\Phi; \mathbb{R}^3)} = \infty.$$

Hay otros aspectos interesantes de la solución (7.34) que pueden ser analizados, como aquellos relacionados con la naturaleza de la singularidad presente en $r = 1$. Antes que nada, dicha solución puede extenderse hacia el intervalo $r > 1$ si se la define de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(r, \theta, t) = \kappa r |1-r|^{\frac{\gamma-2}{2\gamma}} \hat{\theta} + 2c(T-t)^{-1+2\gamma} \hat{k} \\ \omega(r, \theta, t) = \kappa \frac{2 - (\alpha + 2)r}{|1-r|^\beta} \hat{k}, \end{cases} \quad (7.37)$$

para todo $r \in [0, 1) \cup (1, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ y $t \in [T - \delta, T)$. En este caso, las funciones dadas en (7.37) resuelven la formulación axisimétrica de la ecuación de Euler incompresible y tridimensional en el siguiente dominio espacio - temporal:

$$\mathcal{D}(T) \doteq \{(r, \theta, t) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in (0, 1) \cup (1, \infty), \theta \in [0, 2\pi], t \in (T - \delta, T)\}.$$

Luego, frente a este escenario, es natural querer determinar el tipo de singularidad que se presenta en $r = 1$. En especial, para dilucidar el posible surgimiento de una delta de Dirac en $r = 1$, conviene trabajar con la siguiente función de una variable real:

$$\rho(x) \doteq \frac{2 - ax}{|1 - x|^b}, \quad \forall x \in [0, 1) \cup (1, \infty), \quad (7.38)$$

donde $a > 2$ y $\frac{1}{2} < b < 1$ son constantes. La función ρ es continuamente diferenciable en el conjunto abierto $(0, 1) \cup (1, \infty)$, y además, para cualquier $\delta \in (0, 1)$ se tiene que:

$$\int_{1-\delta}^{1+\delta} |\rho(x)| dx = \int_{1-\delta}^{1+\delta} \frac{|2 - ax|}{|1 - x|^b} dx \leq |2 - a(1 + \delta)| \int_{1-\delta}^{1+\delta} |1 - x|^{-b} dx < \infty,$$

donde la última integral es finita puesto que $b < 1$. Este cálculo permite concluir que la función ρ es localmente integrable en $(0, \infty)$, vale decir, $\rho \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$. En consecuencia, dicha función permite definir la siguiente distribución sobre el conjunto $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ (funciones infinitamente diferenciables en el intervalo $(0, \infty)$, con soporte compacto contenido en \mathbb{R}^+):

$$\langle T_\rho, \phi \rangle \doteq \int_0^\infty \rho(x) \phi(x) dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+).$$

Ahora bien, para estudiar la derivada distribucional de ρ (eso es, la derivada de la distribución T_ρ), se debe analizar la siguiente integral:

$$J(\phi) \doteq - \int_0^\infty \rho(x) \phi'(x) dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+).$$

En efecto, dada $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, se tiene que:

$$J(\phi) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} - \left\{ \int_0^{1-\delta} \rho(x) \phi'(x) dx + \int_{1+\delta}^\infty \rho(x) \phi'(x) dx \right\}, \quad (7.39)$$

ya que $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{1-\delta}^{1+\delta} \rho(x) \phi'(x) dx = 0$, al tenerse que $\rho \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$. Además, puesto que la función ϕ tiene soporte compacto en \mathbb{R}^+ , es posible integrar por partes (para un $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño) y obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \int_0^{1-\delta} \rho(x) \phi'(x) dx = \rho(1 - \delta) \phi(1 - \delta) - \int_0^{1-\delta} \left[-\frac{a}{(1-x)^b} + \frac{b(2-ax)}{(1-x)^{b+1}} \right] \phi(x) dx \\ \text{(ii)} \quad & \int_{1+\delta}^\infty \rho(x) \phi'(x) dx = -\rho(1 + \delta) \phi(1 + \delta) - \int_{1+\delta}^\infty \left[-\frac{a}{(x-1)^b} - \frac{b(2-ax)}{(x-1)^{b+1}} \right] \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Nótese también que, para todo $\delta > 0$ pequeño, se tiene que:

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \{ \rho(1 - \delta)\phi(1 - \delta) - \rho(1 + \delta)\phi(1 + \delta) \} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{2 - a(1 - \delta)}{\delta^b} \phi(1 - \delta) - \frac{2 - a(1 + \delta)}{\delta^b} \phi(1 + \delta) \right\} \\ &\stackrel{\text{H}}{=} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{b\delta^{b-1}} \{ a\phi(1 - \delta) - [2 - a(1 - \delta)]\phi'(1 - \delta) + a\phi(1 + \delta) - [2 - a(1 + \delta)]\phi'(1 + \delta) \} \\ &= 0, \end{aligned}$$

puesto que $b - 1 < 0$. Por ende, volviendo a (7.39), se concluye que:

$$\begin{aligned} J(\phi) &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left\{ \int_0^{1-\delta} \left[-\frac{a}{(1-x)^b} + \frac{b(2-ax)}{(1-x)^{b+1}} \right] \phi(x) dx + \int_{1+\delta}^{\infty} \left[-\frac{a}{(x-1)^b} - \frac{b(2-ax)}{(x-1)^{b+1}} \right] \phi(x) dx \right\} \\ &= \int_0^{\infty} \left[-\frac{a}{|1-x|^b} + b \frac{(1-x)(2-ax)}{|1-x|^{b+2}} \right] \phi(x) dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^+). \end{aligned}$$

Es decir, se ha demostrado que:

$$-\langle T_{\rho}, \phi' \rangle = \int_0^{\infty} g(x)\phi(x) dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^+),$$

donde $g : [0, 1) \cup (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es la función definida por:

$$g(x) \doteq -\frac{a}{|1-x|^b} + b \frac{(1-x)(2-ax)}{|1-x|^{b+2}}, \quad \forall x \in [0, 1) \cup (1, \infty).$$

Esto demuestra que la aplicación lineal $G : \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$\langle G, \phi \rangle \doteq \int_0^{\infty} g(x)\phi(x) dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^+),$$

es una distribución sobre $\mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^+)$, y además, que G es la derivada de la distribución T_{ρ} . En un cierto sentido, se podría decir que la función g es la derivada distribucional de la función ρ , pero como $g \notin L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^+)$, se ha decidido omitir dicha interpretación. En cualquier caso, los cálculos recientemente realizados permiten concluir que la singularidad de la solución (7.37) presente en $r = 1$ no corresponde a una delta de Dirac, sino a la distribución asociada a una función que no es localmente integrable en \mathbb{R}^+ .

Si no se realizara un análisis cuidadoso, los argumentos que han sido presentados hasta ahora podrían llevar a concluir que la solución obtenida en el caso (B) entrega una respuesta afirmativa a la pregunta destacada del capítulo N°5, esto es, que la función en cuestión es una solución de la ecuación de Euler que es inicialmente regular, pero desarrolla una singularidad en tiempo finito. La realidad es que la solución del caso (B) no sólo no responde a la pregunta destacada, sino que además está en directa contradicción con los resultados numéricos mostrados en [45]. Por un lado, para cualquier $\kappa \in \mathbb{R}$ se tiene que $\lim_{r \nearrow 1} |\omega_z(r)| = \infty$,

lo cual implica que:

$$\int_{T-\delta}^{T-\delta+\varepsilon} \|\omega(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Phi; \mathbb{R}^3)} dt = \infty,$$

para cualquier $\varepsilon \in (0, \delta]$. Vale decir, el *blow-up* ocurre en el instante de tiempo $T - \delta + \varepsilon$, para cualquier $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño. Ahora bien, el dominio de validez de la solución (7.33) es supuestamente $\Lambda \times [T - \delta, T)$, pero, según se ha analizado, el régimen turbulento se activa inmediatamente al instante $T - \delta$, de modo que el verdadero instante crítico sería justamente $T - \delta$, y el ansatz no puede ser válido en todo el intervalo de tiempo $[T - \delta, T)$. Este es un primer signo claro de inconsistencia que puede apreciarse en [45], en donde, además, al final de la sección 4.7 se establece la siguiente tasa de crecimiento para la componente axial del campo de vorticidad (previo al instante crítico T):

$$\omega_z = \mathcal{O}(T - t)^{-2.45}.$$

Ciertamente, tal tasa de crecimiento no puede ser detectada en un campo de vorticidad estacionario. En consecuencia, las propiedades analíticas de la solución dada en el caso (B) tampoco son coherentes con las observaciones numéricas realizadas por Luo y Hou en [45].

No obstante, dado que la función (7.34) realmente presenta una singularidad en $r = 1$, resulta interesante estudiar si existe algún modo de ajustar dicha solución para que responda afirmativamente a la pregunta fundamental asociada a la ecuación de Euler 3D. Antes que nada, conviene notar que la solución correspondiente al caso (B) puede clasificarse dentro de la siguiente gran familia de soluciones triviales de la ecuación de Euler incompresible y tridimensional (precisamente, su formulación alternativa para flujos axisimétricos):

$$\mathbf{u}(\xi, t) = f(r)\hat{\theta} + g(t)\hat{k}, \quad \omega(\xi, t) = \frac{f(r) + rf'(r)}{r}\hat{k}, \quad \psi_\theta(\xi, t) = \frac{r}{2}g(t), \quad (7.40)$$

para todo $r > 0$ y $t \geq 0$, siendo $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones lo suficientemente diferenciables en el intervalo $(0, \infty)$. Luego, se trata de una familia de soluciones en la que el campo de vorticidad es gobernado por un régimen estacionario, de modo tal que, si existiese un determinado $r_0 \geq 0$ tal que:

$$\lim_{r \rightarrow r_0} \left| \frac{f(r) + rf'(r)}{r} \right| = \infty, \quad (7.41)$$

entonces se podría igualmente concluir que:

$$\int_0^\varepsilon \|\omega(\cdot, s)\|_{L^\infty(\Phi; \mathbb{R}^3)} ds = \infty, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

siendo $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ el dominio espacial (acotado o no) en el cual se está resolviendo la ecuación de Euler tridimensional. Vale decir, en los términos del criterio BKM, se podría establecer que la solución explota en el instante ε , para *cualquier* $\varepsilon > 0$. En particular, la solución dada por (7.40) no puede ser regular en ningún intervalo de tiempo $[0, \varepsilon]$, para cualquier $\varepsilon > 0$. Esto descarta inmediatamente la posibilidad de postular al trío (7.40) como una solución global de la ecuación de Euler 3D; tampoco podría presentarse a (7.40) como un ansatz local, puesto que la sección temporal de la región de validez del ansatz se reduciría a un único instante de

tiempo ε . Esto es precisamente lo que ocurre con la solución (7.34), en donde se da el límite (7.41) con $r_0 = 1$.

En conclusión, a pesar de que la solución obtenida en el caso (B) presenta una singularidad en el sentido del criterio BKM, es su aparición instantánea (debido al régimen estacionario que gobierna al campo de vorticidad) la que impide postular a dicha solución como candidato a resolver el problema de existencia de soluciones singulares, e inicialmente regulares, de la ecuación de Euler incompresible y tridimensional. Es importante señalar que las mismas conclusiones correspondientes a los casos (A) y (B) pueden obtenerse cuando el centro de auto - similaridad del ansatz (7.2) es un punto $(r_0, z_0) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ cualquiera. Más precisamente, si los autores de [45] hubiesen hallado evidencia numérica como para proponer el siguiente ansatz auto - similar:

$$\begin{cases} u_1(r, z, t) = (T - t)^{\gamma_u} U \left(\frac{r - r_0}{[T - t]^{\gamma_l}}, \frac{z - z_0}{[T - t]^{\gamma_l}} \right) \\ \omega_1(r, z, t) = (T - t)^{\gamma_\omega} \Omega \left(\frac{r - r_0}{[T - t]^{\gamma_l}}, \frac{z - z_0}{[T - t]^{\gamma_l}} \right) \\ \psi_1(r, z, t) = (T - t)^{\gamma_\psi} \Psi \left(\frac{r - r_0}{[T - t]^{\gamma_l}}, \frac{z - z_0}{[T - t]^{\gamma_l}} \right), \end{cases} \quad (7.42)$$

con $(r_0, z_0) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ y $\gamma_u, \gamma_\omega, \gamma_\psi, \gamma_l \in \mathbb{R}$, entonces, siguiendo exactamente el mismo procedimiento empleado en esta sección, se hubiese podido concluir que el ansatz (7.42) conduce hacia un sistema sobre - determinado de ecuaciones diferenciales que produce dos clases de soluciones: una familia de soluciones triviales y otra familia de soluciones en donde las turbulencias surgen instantáneamente.

Ahora bien, teniendo en cuenta los teoremas (6.1), (6.2) y (6.3) concernientes a la existencia o exclusión de ansatz auto - similares, resulta evidente que la forma del ansatz (7.42) es sumamente general. Esto da para pensar que, más allá de los errores de cálculo (ya sea por motivo de aproximación numérica, o por la inestabilidad de los algoritmos utilizados por Hou y Luo) que podrían explicar las contradicciones existentes entre las propiedades analíticas del ansatz (7.2) y los reportes entregados en [45], los flujos axisimétricos no son realmente útiles a la hora de buscar soluciones regulares de la ecuación de Euler 3D que desarrollen una singularidad en tiempo finito. En esta luz, es interesante citar el siguiente comentario contenido en [10], sección 5.4: “Los flujos tridimensionales y axisimétricos con componente angular [no idénticamente nula] son candidatos naturales para llevar a cabo esta investigación. Sin embargo, el lector debe ser advertido que el comportamiento no - lineal observado en estas soluciones de alta simetría puede no corresponder al comportamiento genérico de la intensificación no - lineal de la vorticidad en flujos de Euler tridimensionales; dichos flujos axisimétricos con componente angular son, por lo general, altamente inestables ante la presencia de perturbaciones que quiebren su simetría”.

7.3. Discusión sobre el valor del parámetro γ

Recuérdese que las familias (A) y (B) de soluciones fueron obtenidas suponiendo que el parámetro γ era mayor o igual a 0, mientras que el análisis de ellas se realizó bajo la hipó-

tesis de que $\gamma > 2$, en concordancia con las estimaciones numéricas presentadas en la tabla (6.1). Resulta natural e interesante averiguar si las propiedades analíticas de ambas clases de soluciones (en especial, las destacadas en la sección anterior) se ven alteradas si se relaja la condición $\gamma > 2$, permitiendo ahora que $\gamma \geq 0$.

Antes que nada, es importante aclarar por qué no tiene sentido evaluar valores negativos de los factores de escalamiento presentes en cualquier *ansatz* auto - similar. Considérese nuevamente la situación en que se quiere describir un escenario de *explosión* en un punto espacial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ y en un determinado instante de tiempo $T > 0$, mediante una solución auto - similar de la ecuación de Euler 3D:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{[T-t]^\eta} \mathbf{U} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{[T-t]^\gamma} \right) \\ p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{[T-t]^{2\eta}} P \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{[T-t]^\gamma} \right), \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T], \end{cases} \quad (7.43)$$

siendo $\mathbf{U} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ el perfil auto - similar del campo de velocidad, $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ el perfil auto - similar del campo de presiones y $\eta, \gamma \in \mathbb{R}$ dos exponentes de escalamiento. Al reemplazar la solución (7.43) en la ecuación de Euler (1.4) se obtenía que:

$$\gamma = \frac{1}{\alpha + 1}, \quad \eta = \frac{\alpha}{\alpha + 1}, \quad \forall \alpha \neq -1.$$

Ahora bien, en [42] se explica que, si $\eta < 0$, entonces es posible demostrar que la siguiente condición de decaimiento:

$$\|\mathbf{U}\| = \mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^{-k}), \quad \text{para } \|\mathbf{y}\| \rightarrow \infty,$$

con $k > 0$ y $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{[T-t]^\gamma}$, implica que $\lim_{t \rightarrow T} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \vec{0}$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$. Claramente, esto no corresponde a una transformación útil de la ecuación de Euler original, y así, sólo tiene sentido trabajar con $\eta \geq 0$. Por otra parte, ya ha sido citado el resultado contenido en [26] que establece que, como consecuencia del principio de conservación de la energía, una condición necesaria para la existencia de un *blow - up* es que $\gamma \geq \frac{2}{5}$.

Considérese nuevamente el *ansatz axisimétrico* (7.2), y supóngase que éste es válido en la región (7.4), para $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Ciertas consideraciones sobre la conservación de la energía y sobre el acotamiento del campo de velocidad permiten justificar la siguiente condición asintótica para los perfiles U y Ψ :

$$\begin{cases} |U(R, Z)| = o(1), \quad \text{para } 0 < \gamma < 2, \\ \|\nabla \Psi(R, Z)\| = o(\|(R, Z)\|), \quad \text{para } \gamma > 0, \end{cases} \quad (7.44)$$

cuando $\|(R, Z)\| \rightarrow \infty$, para ambos perfiles. Dichas consideraciones se presentan en [20], pero se ha decidido incluirlas igualmente en el presente trabajo, puesto que constituye la referencia más cercana y directa para los temas tratados en esta sección. En efecto, dado que los autores de [45] observan que el campo de velocidad en la solución de (6.2) se mantiene

uniformemente acotado en tiempo y para $r \approx 1$, entonces se puede establecer que existe una constante $C > 0$ tal que:

$$\int_{-\delta}^{\delta} \int_{1-\delta}^1 \{|u_r(r, z, t)|^2 + |u_\theta(r, z, t)|^2 + |u_z(r, z, t)|^2\} dr dz < C, \quad (7.45)$$

para todo $t \in (T - \delta, T)$. Se ocupa la identidad (7.6), junto al teorema del cambio de variable, para escribir la integral del lado izquierdo de la desigualdad (7.45) en términos de los perfiles auto-similares y de las variables $(R, Z) \in (-\infty, 0] \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} J(t) \doteq & \int_{-L}^L \int_{-L}^0 \left[\{1 + R(T-t)^\gamma\}^2 (T-t)^{-2+2\gamma} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial Z}(R, Z) \right|^2 \right. \\ & + \{1 + R(T-t)^\gamma\}^2 (T-t)^{-2+\gamma} |U(R, Z)|^2 \\ & + 4(T-t)^{-2+4\gamma} |\Psi(R, Z)|^2 + \{1 + R(T-t)^\gamma\}^2 (T-t)^{-2+2\gamma} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial R}(R, Z) \right|^2 \\ & \left. + 4(T-t)^{-2+3\gamma} \{1 + R(T-t)^\gamma\} \Psi(R, Z) \frac{\partial \Psi}{\partial R}(R, Z) \right] (T-t)^{2\gamma} dR dZ, \end{aligned}$$

donde $L \doteq \delta(T-t)^{-\gamma}$, para todo $t \in (T - \delta, T)$. Ahora bien, en la integral anterior, para todo $t \in (T - \delta, T)$ se tiene que $-L \leq R \leq 0$, de forma tal que:

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \delta \leq 1 + R(T-t)^\gamma \leq 1, \quad \forall t \in (T - \delta, T).$$

Por otra parte, la ecuación (7.18) indicaba que el perfil Ψ sólo dependía de la variable $Z \in \mathbb{R}$, de modo tal que:

$$\int_{-L}^L \int_{-L}^0 4(T-t)^{-2+5\gamma} \{1 + R(T-t)^\gamma\} \Psi(R, Z) \frac{\partial \Psi}{\partial R}(R, Z) dR dZ = 0,$$

para todo $t \in (T - \delta, T)$. Como, además, se tiene que:

$$\int_{-L}^L \int_{-L}^0 4(T-t)^{-2+6\gamma} |\Psi(R, Z)|^2 dR dZ \geq 0, \quad \forall t \in (T - \delta, T),$$

se puede igualmente escribir lo siguiente:

$$C > J(t) \geq \frac{1}{4} \int_{-L}^L \int_{-L}^0 \left[(T-t)^{-2+4\gamma} \|\nabla \Psi(R, Z)\|^2 + (T-t)^{-2+3\gamma} |U(R, Z)|^2 \right] dR dZ,$$

para todo $t \in (T - \delta, T)$. En otras palabras, se tiene que: $\forall t \in (T - \delta, T)$,

$$\frac{1}{L^2} \int_{-L}^L \int_{-L}^0 |U(R, Z)|^2 dR dZ < CL^{1-\frac{2}{\gamma}}, \quad \frac{1}{L^2} \int_{-L}^L \int_{-L}^0 \|\nabla \Psi(R, Z)\|^2 dR dZ < CL^{2-\frac{2}{\gamma}}.$$

Si se interpretan las integrales en estas dos últimas desigualdades como promedios calculados sobre el rectángulo $[-L, 0] \times [-L, L]$, entonces es posible justificar las siguientes cotas superiores para los perfiles auto - similares involucrados:

$$|U(R, Z)| \leq C\|(R, Z)\|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\gamma}}, \quad \|\nabla\Psi(R, Z)\| \leq C\|(R, Z)\|^{1-\frac{1}{\gamma}},$$

de donde se obtienen finalmente las condiciones asintóticas expresadas en (7.44). Tal cual se indica en (7.44), la primera condición asintótica es válida sólo para $0 < \gamma < 2$.

Ahora bien, los autores de [20] analizan el ansatz auto - similar de Hou y Luo haciendo uso de la siguiente hipótesis de decaimiento:

$$|U(R, Z)| + |\Omega(R, Z)| = o(1), \quad \text{para } |Z| \longrightarrow \infty, \quad (7.46)$$

a pesar de que los cálculos recientemente realizados no arrojan información sobre el comportamiento asintótico del perfil Ω . Aún así, los autores de [20] lograron demostrar que el ansatz de Hou y Luo conduce hacia un sistema sobre - determinado de ecuaciones diferenciales que posee una única solución: aquella correspondiente al caso (A) en (7.33). Naturalmente, la condición de decaimiento (7.46) permite llegar en forma más sencilla a esta conclusión, pero a la vez, impide visualizar la solución obtenida en (B). De todos modos, si no se desea recurrir a una condición asintótica injustificada (como aquella referente al perfil Ω en (7.46)), se pueden observar directamente las expresiones (7.33) y (7.34), que corresponden, respectivamente, a la solución los casos (A) y (B). En ambas situaciones, si se cambia la hipótesis $\gamma > 2$ por $\frac{2}{5} \leq \gamma \leq 2$, pueden surgir singularidades en el campo de velocidad, debido al cambio de signo del exponente en cuestión. No obstante, los respectivos campos de vorticidad no alteran su estructura (en el caso (B), el coeficiente β seguirá siendo estrictamente positivo), y así, el criterio BKM entregará los mismos resultados que fueron explicitados en aquella sección.

En conclusión, el hecho de trabajar con $\gamma < 2$ en vez de $\gamma > 2$ permite obtener ciertas condiciones asintóticas sobre los perfiles auto - similares, las cuales, si bien son interesantes desde el punto de vista matemático, no alteran profundamente las reflexiones que ya han sido expuestas sobre el ansatz de Hou y Luo, en el sentido que sus propiedades analíticas no concuerdan con las observaciones numéricas reportadas por ellos.

Capítulo 8

La ecuación de Navier - Stokes incompresible

Los capítulos anteriores del presente trabajo fueron destinados al estudio de la ecuación de Euler incompresible, la cual, en sus versiones bidimensional y tridimensional, rige la dinámica de los fluidos ideales. La introducción del concepto de **viscosidad** representa un paso fundamental en la modelización de los fluidos reales más usuales, como el agua, aceite o aire. En este mismo contexto, la derivación de la ecuación de Navier - Stokes, que gobierna el movimiento de los fluidos viscosos, constituye otro hito de la teoría matemática de la mecánica de fluidos, a la vez que conforma la columna vertebral de los modelos básicos utilizados en diversas ciencias aplicadas, tales como la hidráulica, la meteorología, la oceanografía y la aeronáutica.

A lo largo de todo este capítulo se considerará un dominio espacial $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, el cual puede ser acotado o no. Supóngase que dicha región es recorrida por un fluido incompresible y homogéneo, con densidad constante (en espacio y tiempo) e igual a 1. Si el fluido no es perfecto, entonces es admisible la aparición de *esfuerzos tangenciales* entre dos capas contiguas al interior del fluido. Para los intereses de esta obra, bastará con aseverar que la información referente a dichos esfuerzos tangenciales está contenida en un coeficiente $\nu > 0$, el cual se asumirá constante en espacio y tiempo, denominado **viscosidad cinemática** del fluido (para una definición más precisa del concepto de viscosidad, se recomienda consultar [61], sección 4.2.1). Si, además, el fluido en cuestión se encuentra bajo la acción de una fuerza externa $\mathbf{f} : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$, que es un dato del problema, entonces su campo de velocidad $\mathbf{u} : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ y su campo de presiones $p : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfacen la **ecuación de Navier - Stokes incompresible**:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad \text{en } \Omega \times (0, \infty). \quad (8.1)$$

Naturalmente, el problema (8.1) ha de resolverse junto a adecuadas condiciones iniciales y de borde. Con respecto a las condiciones iniciales, y siguiendo las ideas expuestas en [56], se establecerá que:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (8.2)$$

donde la función $\mathbf{u}_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un dato del problema, y satisface una condición de

incompresibilidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0, \quad \text{en } \Omega. \quad (8.3)$$

Con respecto a las condiciones de contorno, en el caso que Ω sea un conjunto abierto, acotado, conexo y de frontera Lipschitz, se impondrán condiciones del tipo Dirichlet, esto es:

$$\mathbf{u} = 0, \quad \text{en } \partial\Omega \times [0, \infty). \quad (8.4)$$

La condición de borde (8.4), que refleja físicamente una imposición de *no - deslizamiento* sobre las paredes del dominio en consideración, es también verificada por la función inicial \mathbf{u}_0 :

$$\mathbf{u}_0 = 0, \quad \text{en } \partial\Omega. \quad (8.5)$$

Obsérvese que la condición de borde acá establecida es distinta a aquella de *pared impermeable* fijada para un fluido perfecto que satisface la ecuación de Euler incompresible (1.4):

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{en } \partial\Omega \times [0, \infty),$$

siendo \mathbf{n} la normal exterior (unitaria) a la frontera $\partial\Omega$. Desde el punto de vista físico, el ajuste de la velocidad (8.4) en el borde $\partial\Omega$ es una consecuencia natural de la introducción de la viscosidad, pues se espera que un fluido viscoso mantenga una velocidad tangencial nula en la frontera del dominio, vale decir, que no deslice. Matemáticamente, la condición de no - deslizamiento se explica por la presencia del operador laplaciano, que involucra derivadas parciales espaciales de segundo orden, lo cual obliga a imponer condiciones de borde más exigentes. A cambio de la condición del tipo Dirichlet (8.4), y con la finalidad de evitar problemas en el decaimiento de la solución en el infinito, se podrían especificar condiciones de borde espacialmente periódicas sobre ciertos dominios particulares. Dichos casos no serán tratados en este trabajo, a pesar de que, según se indica en [77] (sección 6.3), ellos son particularmente interesantes en estudios analíticos y numéricos de la ecuación de Navier - Stokes, puesto que la periodicidad permite simplificar notablemente los argumentos a utilizar.

Un problema fundamental de las matemáticas aplicadas es aquel de decidir si existen soluciones globalmente regulares y físicamente razonables de la ecuación de Navier - Stokes incompresible y tridimensional, ya sea en el caso tradicional o en el periódico. De hecho, este desafío constituye uno de los *problemas del milenio*¹ anunciados por el *Clay Mathematics Institute* de Cambridge, Massachusetts, cuyo enunciado preciso puede ser leído en [32].

Habiendo ya expuesto adecuadamente la ecuación de Navier - Stokes, en este capítulo también se abordarán, en forma más compacta, algunos de los aspectos que fueron analizados anteriormente en relación a la ecuación de Euler incompresible:

- El concepto de solución, la evolución de la vorticidad en el caso de un fluido viscoso y formulaciones alternativas de la ecuación de Navier - Stokes.
- Existencia y unicidad de soluciones de la ecuación de Navier - Stokes incompresible (en los casos bidimensional y tridimensional).

¹Es importante aclarar que el problema de hallar soluciones suaves de la ecuación de Euler incompresible y tridimensional, cuya trascendencia ya fue destacada en los capítulos anteriores, no está incluido en la lista de problemas del milenio.

- Existencia de singularidades en tiempo finito de las soluciones de la ecuación de Navier - Stokes 3D, y la posible manifestación de estas singularidades a través de soluciones auto-similares.

8.1. El concepto de solución (formulación débil)

En su formulación clásica, el problema con condición inicial y condición de frontera asociado a la ecuación de Navier - Stokes incompresible y tridimensional puede ser enunciado de la siguiente manera:

Dado un instante de tiempo $T > 0$, una viscosidad cinemática $\nu > 0$, una fuerza externa $\mathbf{f} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ y una condición inicial $\mathbf{u}_0 : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisface (8.3) y (8.5), hallar un campo de velocidad $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ y un campo de presiones $p : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, ambos lo suficientemente diferenciables, que satisfagan:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \\ \mathbf{u} = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases} \quad (8.6)$$

Sin embargo, como ocurre usualmente en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales, no siempre es posible entregar estimaciones analíticas que permitan demostrar que los candidatos a solución son lo suficientemente regulares. Por ende, es necesario re-definir el concepto de solución, permitiendo que ésta pierda cierto grado de regularidad y que verifique la identidad (8.1) en un sentido *débil* a precisar. En este contexto, corresponde señalar que, según se indica en [14], existen muchas alternativas en cuanto al espacio de funciones que se puede utilizar para hallar soluciones débiles de la ecuación de Navier - Stokes 3D. En esta sección se expondrán las definiciones presentes en [73], que siguen la línea de la obra pionera [54] de J. Leray, del año 1934.

Sea $T > 0$ fijo, y sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto, acotado y con frontera Lipschitz (el caso en que Ω no es acotado será discutido cuando sea necesario). Los principales espacios de funciones que serán utilizados en las próximas definiciones serán:

$$\begin{cases} \mathcal{Q} \doteq \{ \mathbf{u} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3) \mid \operatorname{div}(\mathbf{u}) \equiv 0 \} \\ V \doteq \overline{\mathcal{Q}}^{H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3)} \\ H \doteq \overline{\mathcal{Q}}^{L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)} \end{cases}$$

El espacio \mathcal{Q} carece de una topología, mientras que el espacio H estará dotado del producto escalar inducido por $L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$, permitiendo que H sea un espacio de Hilbert. Por su parte, dado que el dominio Ω es acotado, la desigualdad de Poincaré permite deducir que el espacio V es un espacio de Hilbert cuando se dispone del siguiente producto escalar:

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_V \doteq \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{v}_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

En este caso, denotando por H' y V' a los espacios duales de H y V , respectivamente, se tiene la siguiente cadena de inclusiones:

$$V \subset H \simeq H' \subset V', \quad (8.7)$$

donde cada espacio de Hilbert es denso en el siguiente, y las correspondientes inyecciones canónicas son todas continuas. En (8.7) se han identificado los espacios H y H' , de acuerdo a lo establecido en el teorema de representación de Riesz, pero tal identificación no ha sido asignada a los espacios V y V' , tomando las precauciones indicadas en [13], sección 5.2. Como consecuencia de esto, el producto escalar interno de H entre un elemento $\mathbf{f} \in H$ y otro elemento $\mathbf{u} \in V$ debe ser igual al producto de dualidad entre $\mathbf{f} \in V'$ y $\mathbf{u} \in V$:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{V',V} = (\mathbf{f}, \mathbf{u})_H, \quad \forall \mathbf{f} \in H, \quad \forall \mathbf{u} \in V.$$

Por otra parte, para cada elemento $\mathbf{u} \in V$, la aplicación $\mathbf{v} \in V \longrightarrow ((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_V \in \mathbb{R}$ es lineal y continua. Por ende, existe un elemento $A(\mathbf{u}) \in V'$ tal que:

$$\langle A(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_{V',V} = ((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_V, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

La aplicación $\mathbf{u} \in V \longrightarrow A(\mathbf{u}) \in V'$ es lineal y continua; de hecho, es posible demostrar que constituye un isomorfismo de V en V' (ver [73], capítulo N°1, sección 2.2).

Cuando el dominio Ω no es acotado, el espacio V estará dotado del producto interno usual de $H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$, esto es:

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_V = \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{v}_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

por lo que V sigue siendo un espacio de Hilbert. En esta situación, las inclusiones (8.7) se mantienen válidas y la función $A : V \longrightarrow V'$ es todavía lineal y continua, aunque no siempre es un isomorfismo. En cambio, para cualquier $\varepsilon > 0$, el operador $A + \varepsilon \text{id}_V$ sí es un isomorfismo de V en V' (ver [73], capítulo N°3, sección 1.1).

La última herramienta que debe ser introducida antes de definir el concepto de solución débil de la ecuación de Navier - Stokes 3D es la forma trilineal $\beta : V \times V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\beta(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \doteq \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \mathbf{w}_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V. \quad (8.8)$$

Resulta que la función β es continua en $V \times V \times V$, y para cualquier elemento $\mathbf{u} \in V$ se tiene que $\beta(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0, \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, se denotará por $B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ al elemento de V' definido por:

$$\langle B(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle_{V',V} \doteq \beta(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{w} \in V.$$

y además, se escribirá $B(\mathbf{u}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{u})$, para todo $\mathbf{u} \in V$.

Ahora bien, supóngase que los campos $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $p : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ conforman una solución clásica de (8.6), con $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega} \times [0, T]; \mathbb{R}^3)$ y $p \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega} \times [0, T]; \mathbb{R})$, siendo $\mathbf{f} \in \mathcal{C}(\bar{\Omega} \times [0, T]; \mathbb{R}^3)$ un dato del problema. En tal caso, claramente se tiene que

$\mathbf{u} \in L^2([0, T]; V)$, y es fácil demostrar que se cumple la siguiente igualdad: $\forall t \in (0, T)$,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v})_H + \nu((\mathbf{u}(t), \mathbf{v}))_V + \beta(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} \rangle_{V', V}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{Q}.$$

Por continuidad, esta última identidad también será válida para cualquier $\mathbf{v} \in V$. Todo esto sugiere considerar la siguiente formulación débil de la ecuación de Navier - Stokes incompresible y tridimensional:

Definición 8.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto y conexo, que puede ser acotado o no (cuando pueda ser definida, se asumirá que su frontera $\partial\Omega$ es Lipschitz). Dadas dos funciones $\mathbf{f} \in L^2([0, T]; V')$ y $\mathbf{u}_0 \in H$, se dirá que una función $\mathbf{u} \in L^2([0, T]; V)$ es una **solución débil** de (8.6) si satisface: $\forall t \in (0, T)$,*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v})_H + \nu((\mathbf{u}(t), \mathbf{v}))_V + \beta(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} \rangle_{V', V}, & \forall \mathbf{v} \in V, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0. \end{cases} \quad (8.9)$$

En la definición anterior, nótese que la segunda condición de (8.9) puede carecer de sentido cuando $\mathbf{u} \in L^2([0, T]; V)$. No obstante, si $\mathbf{u} \in L^2([0, T]; V)$ y además satisface la primera igualdad de (8.9), entonces se puede demostrar (ver [73], capítulo N°3, sección 3.1) que u es igual, c.t.p. en $[0, T]$, a una función perteneciente a $\mathcal{C}([0, T]; V)$.

Una definición equivalente a (8.1) se enuncia a continuación:

Definición 8.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto y conexo, que puede ser acotado o no (cuando pueda ser definida, se asumirá que su frontera $\partial\Omega$ es Lipschitz). Dadas dos funciones $\mathbf{f} \in L^2([0, T]; V')$ y $\mathbf{u}_0 \in H$, se dirá que una función $\mathbf{u} \in L^2([0, T]; V)$ es una **solución débil** de (8.6) si satisface:*

$$\begin{cases} \mathbf{u}' \in L^1([0, T]; V'), \\ \mathbf{u}' + \nu A(\mathbf{u}) + B(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \text{ en } (0, T), \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0. \end{cases} \quad (8.10)$$

Las soluciones débiles de la ecuación de Navier - Stokes incompresible, tal cual fueron definidas en (8.1) y (8.2), fueron introducidas por J. Leray en [54], bajo el nombre de *soluciones turbulentas*. Por otra parte, obsérvese que la presión interna no es considerada en las definiciones anteriores; como se ha estudiado (y esto se justificará en la próxima sección), dicho fenómeno ocurre usualmente cuando se plantean formulaciones alternativas de las ecuaciones de Euler o de Navier - Stokes.

8.2. La evolución de la vorticidad y formulaciones alternativas de la ecuación de Navier - Stokes

Al igual que en el caso de la ecuación de Euler incompresible, existen algunas formulaciones alternativas de la ecuación de Navier - Stokes incompresible. Las formulaciones que se presentarán a continuación se basan fundamentalmente en la identidad que verifica el campo de vorticidad de un fluido viscoso cuando sus campos de velocidad y presión son lo suficientemente diferenciables. De hecho, tal cual se demuestra en [10], al tomar el rotor de la ecuación de Navier - Stokes (8.1) se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 8.1. (*Ecuación de evolución de la vorticidad en un fluido viscoso*). *Considérese un fluido incompresible, homogéneo y viscoso, caracterizado por un coeficiente de viscosidad cinemática $\nu > 0$. Si el fluido en cuestión se encuentra bajo la acción de un campo de fuerzas conservativo, entonces su vorticidad debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial:*

$$\frac{D\omega}{Dt} = \omega \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \Delta \omega, \quad \text{en } \Omega \times (0, \infty). \quad (8.11)$$

Además, observando el lado derecho de (2.3) y usando la ecuación (2.5), se puede concluir que:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \mathcal{D}\omega + \nu \Delta \omega, \quad \text{en } \Omega \times (0, \infty). \quad (8.12)$$

A diferencia de lo que ocurre en un fluido ideal, el campo de vorticidad de un fluido viscoso no es transportado a lo largo de las líneas de trayectoria del fluido. En cambio, la introducción de la viscosidad conlleva hacia una **difusión** de dicho campo de vorticidad, lo cual se expresa matemáticamente a través del término $\nu \Delta \omega$ presente en la ecuación (8.12). No obstante, en el caso bidimensional se sigue manteniendo la propiedad de que el término de dilatación o contracción vorticial $\omega \cdot \nabla \mathbf{u}$ es constantemente nulo en $\Omega \times (0, \infty)$.

Otra propiedad fundamental de los fluidos viscosos guarda relación con la **disipación de la energía** de una solución regular de la ecuación de Navier - Stokes incompresible (en los casos bidimensional y tridimensional). Si en el caso invíscido se contaba con el principio de conservación de la energía cinética, la incorporación de la viscosidad induce a que dicha cantidad satisfaga la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|^2 d\mathbf{x} = -\nu \int_{\mathbb{R}^3} \|\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|^2 d\mathbf{x}, \quad \forall t \in (0, T), \quad (8.13)$$

para cualquier solución regular $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ de la ecuación de Navier - Stokes incompresible que decaiga lo suficientemente rápido cuando $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ (ver [10], sección 1.7). Puesto que $\nu > 0$, la identidad (8.13) muestra explícitamente cómo disminuye, en el tiempo, la energía cinética de un flujo viscoso que es gobernado por la ecuación de Navier - Stokes incompresible. Además, dicha fórmula posee importantes aplicaciones teóricas en el estudio de las propiedades matemáticas de las soluciones de la ecuación de Navier - Stokes incompresible.

Por otra parte, según se verá, en la mayoría de las formulaciones alternativas de la ecuación de Navier - Stokes no se considera explícitamente al campo de presiones. Al igual que en el análisis de la ecuación de Euler, la razón de esto se encuentra en la *formulación de Leray para la ecuación de Navier - Stokes* (ver [10], sección 1.8), la cual indica que el campo de presiones puede ser recuperado a partir de la velocidad, mediante la resolución de la siguiente ecuación de Poisson (recordar el correspondiente lema (1.0.1)):

$$-\Delta p(\mathbf{x}, t) = \text{tr}((\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))^2), \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty).$$

Estas observaciones ya permiten entregar la formulación de la ecuación de Navier - Stokes 2D en términos de la vorticidad y de la función de corriente, cuya construcción formal puede ser completamente leída en [10], sección 2.1 (si bien los cálculos son prácticamente iguales a aquellos realizados en el caso de la ecuación de Euler bidimensional):

Proposición 8.1. (Formulación en forma vorticidad - corriente de la ecuación de Navier - Stokes en $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$). Considérese un flujo viscoso y bidimensional definido en todo $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$, cuyos campos de velocidad y vorticidad decaen lo suficientemente rápido cuando $\|(x, y)\| \rightarrow \infty$. Entonces, la ecuación de Navier - Stokes incompresible (8.1) (con $\Omega = \mathbb{R}^2$) es equivalente a la siguiente formulación en términos de la vorticidad y función de corriente:

$$\begin{cases} \frac{D\omega}{Dt} = \nu \Delta \omega \\ \omega|_{t=0} = \omega_0 \end{cases} \quad \text{en } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty), \quad (8.14)$$

donde $\omega_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función conocida y $\nu > 0$ es la viscosidad cinemática. El campo de velocidad se obtiene a partir de la vorticidad, mediante la ley de Biot - Savart:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^2} K_2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \omega(\mathbf{y}, t) d\mathbf{x}, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty), \quad (8.15)$$

involucrando al kernel $K_2 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definido como:

$$K_2(x, y) \doteq \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Por su parte, la presión puede ser calculada al resolver la siguiente ecuación de Poisson:

$$-\Delta p(\mathbf{x}, t) = \text{tr}((\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))^2), \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty).$$

Al igual que en el caso invíscido, los flujos incompresibles, viscosos y axisimétricos pueden ser modelados de acuerdo a una formulación vorticidad - corriente especial, la cual se presenta formalmente en [10], sección 2.3. La correspondiente formulación general de la ecuación de Navier - Stokes incompresible y tridimensional, en términos de la vorticidad y la función de corriente, se encuentra resumida en la siguiente proposición (cuya demostración puede ser consultada en [10], sección 2.4):

Proposición 8.2. (Formulación en forma vorticidad - corriente de la ecuación de Euler en $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$). Considérese un flujo viscoso y tridimensional definido en todo $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$, cuyos campos de velocidad y vorticidad decaen lo suficientemente rápido cuando $\|(x, y, z)\| \rightarrow \infty$. Entonces, la ecuación de Navier - Stokes incompresible (8.1) (con $\Omega = \mathbb{R}^3$) es equivalente a la siguiente formulación en términos de la vorticidad y función de corriente:

$$\begin{cases} \frac{D\omega}{Dt} = \omega \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \Delta \omega \\ \omega|_{t=0} = \omega_0 \end{cases} \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \quad (8.16)$$

donde $\omega_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una función conocida y $\nu > 0$ es la viscosidad cinemática. El campo de velocidad se obtiene a partir de la vorticidad, mediante la siguiente ley de Biot - Savart:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \times \omega(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y}, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty). \quad (8.17)$$

Por su parte, la matriz jacobiana del campo de velocidad puede ser calculada a partir de la

vorticidad, mediante la siguiente fórmula (la integral debe ser interpretada como un valor principal de Cauchy):

$$\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)h = -(\text{PV}) \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \frac{1}{4\pi} \frac{\omega(\mathbf{y}, t) \times h}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} + \frac{3}{4\pi} \frac{[(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \times \omega(\mathbf{y}, t)](\mathbf{x} - \mathbf{y})^\top}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^5} h \right\} d\mathbf{y} + \frac{1}{3} \omega(\mathbf{x}, t) \times h,$$

para todo $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ y $h \in \mathbb{R}^3$.

8.3. Existencia, unicidad y regularidad de soluciones de la ecuación de Navier - Stokes incompresible

En esta sección se presentarán formalmente todos aquellos resultados concernientes a la existencia, unicidad y regularidad de soluciones débiles de la ecuación de Navier - Stokes incompresible, tanto en el caso bidimensional como en el tridimensional. Si bien los teoremas serán expuestos de acuerdo a la forma utilizada en [72] (capítulo N°3, sección 3), en cada enunciado se indicará la correspondiente referencia original, para así dar cuenta de la antigüedad o modernidad del resultado en cuestión.

Históricamente, la primera demostración sobre la existencia de soluciones débiles de la ecuación de Navier - Stokes incompresible fue publicada por J. Leray en [54], si bien E. Hopf ([43], del año 1950) realizó importantes contribuciones en el caso del dominio acotado. Estos resultados pueden resumirse de la siguiente manera:

Teorema 8.2. *Sea $T > 0$ fijo, y sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con $n = 2$ ó $n = 3$, un conjunto abierto y conexo, que puede ser acotado o no (si es acotado, o cuando pueda ser definida, se asumirá que su frontera $\partial\Omega$ es Lipschitz). Si $\mathbf{f} \in L^2([0, T]; V')$ y $\mathbf{u}_0 \in H$, entonces existe al menos una función $\mathbf{u} \in L^2([0, T]; V)$ que satisface (8.9) ó (8.10). Además, se tendrá que $\mathbf{u} \in L^\infty([0, T]; H)$ y que $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow H$ es débilmente continua, esto es, la función escalar $t \in [0, T] \rightarrow (\mathbf{u}(t), \mathbf{v})_H$ es continua, para todo $\mathbf{v} \in H$.*

8.3.1. Unicidad y regularidad en el caso bidimensional

Si se resuelve la ecuación de Navier - Stokes incompresible sobre un dominio espacial bidimensional, entonces es posible garantizar la existencia y unicidad de una solución débil, a la vez que la regularidad de ésta puede ser mejorada. Todo esto se resume en el siguiente teorema, cuya referencia original corresponde a la obra de O. A. Ladyzhenskaya ([53], capítulo N°6, del año 1969), o bien a aquella de G. Prodi junto a J. L. Lions ([55], del año 1959):

Teorema 8.3. *Sea $T > 0$ fijo, y sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y conexo, que puede ser acotado o no (si es acotado, o cuando pueda ser definida, se asumirá que su frontera $\partial\Omega$ es Lipschitz). Si $\mathbf{f} \in L^2([0, T]; V')$ y $\mathbf{u}_0 \in H$, entonces existe una única función $\mathbf{u} \in L^2([0, T]; V)$ que satisface (8.9) ó (8.10). Además, la solución \mathbf{u} será igual, c.t.p. en $[0, T]$, a una función perteneciente a $\mathcal{C}([0, T]; H)$, verificando que:*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 \text{ en } H.$$

Con respecto al mejoramiento de la regularidad, se cuenta con los siguientes resultados:

- Si adicionalmente se asume que $\mathbf{f}' \in L^2([0, T]; V')$, que $\mathbf{f}(0) \in H$ y que $\mathbf{u}_0 \in H^2(\Omega; \mathbb{R}^2) \cap V$, entonces se tendrá también que $\mathbf{u}' \in L^2([0, T]; V) \cap L^\infty([0, T]; H)$.
- Si adicionalmente se asume que $\mathbf{f} \in L^\infty([0, T]; H)$, que $\mathbf{f}' \in L^2([0, T]; V')$, que $\mathbf{f}(0) \in H$, que $\mathbf{u}_0 \in H^2(\Omega; \mathbb{R}^2) \cap V$ y que el dominio Ω es acotado y con frontera de clase \mathcal{C}^2 , entonces se tendrá también que $\mathbf{u} \in L^\infty([0, T]; H^2(\Omega; \mathbb{R}^2))$.

Por completitud, es necesario agregar algunos comentarios interesantes en relación al teorema anterior:

- Bajo las hipótesis dispuestas en el segundo ítem del teorema (8.3), es posible demostrar que el campo de presiones pertenece a la clase $L^\infty([0, T]; H^1(\Omega; \mathbb{R}))$, satisfaciendo la ecuación (8.6) en el sentido de las distribuciones.
- Según se indica en [72] (capítulo N°3, sección 3.5.1), es posible obtener finalmente una solución clásica $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega} \times [0, T]; \mathbb{R}^2)$ de la ecuación de Navier - Stokes incompresible y bidimensional (8.6), suponiendo que $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega} \times [0, T]; \mathbb{R}^2)$, que $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ y que el dominio Ω posee frontera de clase \mathcal{C}^∞ (cuando es acotado o cuando es posible definir su frontera, pues el resultado también se cumple si $\Omega = \mathbb{R}^2$). Si $T = \infty$, todo lo anterior sigue siendo válido si, adicionalmente, se asume que las siguientes integrales son finitas:

$$\int_{\Omega} \left(\|\mathbf{u}_0(\mathbf{x})\|^2 + \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) \right\|^2 \right) d\mathbf{x}, \quad \int_0^\tau \int_{\Omega} \left(\|\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)\|^2 + \left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right\|^2 \right) d\mathbf{x} dt,$$

para todo $\tau > 0$.

8.3.2. Unicidad y regularidad en el caso tridimensional

Al igual que en el caso de la ecuación de Euler, la ecuación de Navier - Stokes incompresible y tridimensional debe ser analizada en forma independiente de su equivalente bidimensional. De hecho, el motivo que obliga a realizar esta separación es el mismo: en dos dimensiones espaciales, el término de dilatación o contracción vorticial $\omega \cdot \nabla \mathbf{u}$ es constantemente nulo en $\Omega \times (0, \infty)$. Luego, desde el punto de vista físico, ambos problemas son esencialmente distintos, lo cual posteriormente se traduce en resultados más débiles de existencia, unicidad y regularidad de soluciones de la ecuación de Navier - Stokes incompresible y tridimensional. Si bien los teoremas garantizan la existencia y unicidad de una solución clásica (infinitamente diferenciable), ésta podrá ser definida globalmente en el tiempo sólo bajo el supuesto de unas hipótesis bastante restrictivas sobre la condición inicial y el campo de fuerzas externas. Si no se asumen dichas hipótesis, sólo se puede asegurar la existencia y unicidad de una solución clásica en un intervalo *finito* de tiempo, tal cual ocurría en el caso de la ecuación de Euler 3D. En la descripción de estos resultados se hará presente un fenómeno bastante peculiar de las propiedades matemáticas de la ecuación de Navier - Stokes 3D: la existencia, sin unicidad garantizada, de ciertas soluciones débiles, y también la unicidad, sin existencia asegurada, de ciertas soluciones *fuertes*.

El primer resultado de unicidad y regularidad de una solución débil de la ecuación de Navier - Stokes incompresible y tridimensional se presenta a continuación (como referencia original puede tomarse [53], capítulo N°6, o bien [43] y [54]):

Teorema 8.4. *Sea $T > 0$ fijo, y sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto y conexo, que puede ser acotado o no (si es acotado, o cuando pueda ser definida, se asumirá que su frontera $\partial\Omega$ es Lipschitz). Si $\mathbf{f} \in L^2([0, T]; V')$ y $\mathbf{u}_0 \in H$, entonces existe una función (no necesariamente única) $\mathbf{u} \in L^2([0, T]; V)$ que satisface (8.9) ó (8.10), la cual verifica lo siguiente:*

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in L^{8/3}([0, T]; L^4(\Omega; \mathbb{R}^3)), \\ \mathbf{u}' \in L^{4/3}([0, T]; V'). \end{cases} \quad (8.18)$$

Por su parte, bajo las mismas hipótesis anteriores, se puede establecer que existe a lo más una única solución de (8.9) ó (8.10) que verifica lo siguiente:

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in L^2([0, T]; V) \cap L^\infty([0, T]; H), \\ \mathbf{u} \in L^8([0, T]; L^4(\Omega; \mathbb{R}^3)). \end{cases} \quad (8.19)$$

En caso de existir, esta última solución también pertenecería a la clase $\mathcal{C}([0, T]; H)$.

Con respecto al mejoramiento de la regularidad de las soluciones descritas en el teorema anterior, se cuenta con el siguiente resultado (la referencia original es nuevamente [53], capítulo N°6):

Teorema 8.5. *Sea $T > 0$ fijo, y sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto y conexo, que puede ser acotado o no (si es acotado, o cuando pueda ser definida, se asumirá que su frontera $\partial\Omega$ es Lipschitz). Supóngase que $\mathbf{f} \in L^\infty([0, T]; H)$, que $\mathbf{f}' \in L^1([0, T]; H)$, que $\mathbf{u}_0 \in H^2(\Omega; \mathbb{R}^3) \cap V$, y que se verifica una condición adicional (\mathcal{R}) , que será explicada posteriormente. Entonces, existe una única función $\mathbf{u} \in L^2([0, T]; V)$ que satisface (8.9) ó (8.10), la cual verifica que $\mathbf{u}' \in L^2([0, T]; V) \cap L^\infty([0, T]; H)$. Si adicionalmente se asume que el dominio Ω es acotado y con frontera de clase \mathcal{C}^∞ , entonces se tendrá también que $\mathbf{u} \in L^\infty([0, T]; H^2(\Omega; \mathbb{R}^3))$.*

Tal cual se hizo en el caso bidimensional, es importante puntualizar los siguientes aspectos en relación a los teoremas (8.4) y (8.5):

- En definitiva, el teorema (8.4) garantiza la existencia (pero no la unicidad) de la clase (8.18) de soluciones débiles de la ecuación de Navier - Stokes 3D. Por su parte, en la parte final del enunciado de dicho teorema se asegura la unicidad (pero no la existencia) de una solución fuerte de la ecuación de Navier - Stokes 3D que pertenecería a la clase (8.19). La familia de funciones que satisface (8.19) es más restrictiva, o más pequeña, que la clase descrita por (8.18), y por ello se habla de soluciones *fuertes*.
- La condición adicional (\mathcal{R}) nombrada en el teorema (8.5) se satisface cuando el coeficiente de viscosidad $\nu > 0$ es lo suficientemente grande, o bien, cuando se impone un control muy exigente sobre el *tamaño* del campo de fuerzas \mathbf{f} y de la condición inicial \mathbf{u}_0 . Por ejemplo, cuando $T > 0$ es finito, la condición (\mathcal{R}) requiere que existan ciertas constantes $a, b, c > 0$ (todas dependiendo de \mathbf{f} o de \mathbf{u}_0) tales que:

$$\frac{a}{\nu} + (1 + b^2) \sqrt{\|\mathbf{u}_0\|_V^2 + \frac{aT}{\nu}} \exp\left(\int_0^T \|\mathbf{f}'(s)\|_H ds\right) < \frac{\nu^3}{c^2}.$$

- Bajo las hipótesis dispuestas en la parte final del teorema (8.5), esto es, cuando el dominio Ω es acotado y con frontera de clase \mathcal{C}^∞ , es posible demostrar que el campo de presiones

pertenece a la clase $L^\infty([0, T]; H^1(\Omega; \mathbb{R}))$, satisfaciendo la ecuación (8.6) en el sentido de las distribuciones.

- Según se indica en [72] (capítulo N°3, sección 3.5.2), es posible obtener finalmente una solución clásica $\mathbf{u} \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0, T]; \mathbb{R}^3)$ de la ecuación de Navier - Stokes incompresible y tridimensional (8.6), asumiendo que $\mathbf{f} \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0, T]; \mathbb{R}^3)$, que $\mathbf{u}_0 \in C^\infty(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3)$, que el dominio Ω posee frontera de clase C^∞ (cuando es acotado o cuando es posible definir su frontera, pues el resultado también se cumple cuando $\Omega = \mathbb{R}^3$) y la condición adicional (\mathcal{R}) . Cuando $T = \infty$, la existencia y unicidad de tal solución clásica está garantizada sólo cuando se reemplaza la hipótesis (\mathcal{R}) por la siguiente imposición (que es todavía más exigente):

$$\begin{cases} \sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} (1 + \|\mathbf{x}\|) \|D^\alpha \mathbf{u}_0(\mathbf{x})\| < \varepsilon_0 \nu \\ \sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, \infty)} (1 + \|\mathbf{x}\|)^4 \|D^\alpha \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)\| < \varepsilon_0 \nu^2, \end{cases}$$

para una cierta constante fija $\varepsilon_0 > 0$. Si no se satisface esta última condición, entonces sólo es posible asegurar la existencia y unicidad de soluciones regulares de la ecuación de Navier - Stokes 3D en un intervalo finito de tiempo $[0, T]$, con $0 < T < \infty$. El tiempo final T , que depende de la condición inicial \mathbf{u}_0 , corresponde a un instante de singularidad o de *blow - up*, pues la energía del campo de velocidad aumenta en forma no - acotada en la medida que $t \nearrow T$. Estos temas serán tratados con mayor detalle en la próxima sección.

8.4. Singularidades en tiempo finito de soluciones de la ecuación de Navier - Stokes incompresible y tridimensional

Partiendo desde las obras pioneras de J. Leray, E. Hopf y O. Ladyzhenskaya, la comunidad científica ha dedicado mucho esfuerzo a la construcción de una teoría matemática concerniente a las ecuaciones que rigen la mecánica de fluidos. No obstante, incluso hasta la presente fecha, dicha teoría se mantiene fundamentalmente incompleta. En particular, se mantiene abierto el problema sobre la existencia de singularidades en tiempo finito de las soluciones de la ecuación de Navier - Stokes incompresible y tridimensional. Con respecto a esta cuestión trascendental, en las próximas secciones se discutirán los siguientes aspectos:

- La posibilidad de extender, en el tiempo, una solución de la ecuación de Navier - Stokes 3D que está inicialmente definida en el intervalo $[0, T]$, con $0 < T < \infty$. En caso contrario, si no es posible alargar el dominio temporal de la solución, describir cómo se manifiesta la correspondiente singularidad presente en el instante T .
- Dar a conocer el famoso resultado de L. Caffarelli, R. Kohn y L. Nirenberg ([14], del año 1982): el conjunto de puntos espacio - temporales en los cuales una solución de la ecuación de Navier - Stokes 3D presenta una singularidad posee medida de Hausdorff unidimensional nula. Vale decir, dicho conjunto de puntos no puede *completar* una curva en el espacio - tiempo.
- La existencia de soluciones auto - similares de la ecuación de Navier - Stokes 3D, analizada fundamentalmente en los trabajos de J. Nečas, M. Růžička, V. Šverák y D. Chae.

- Algunos teoremas más recientes del tipo Liouville que pueden ser aplicados a la formulación axisimétrica de la ecuación de Navier - Stokes 3D, y que establecen, entre otras cosas, que las soluciones axisimétricas y singulares de la ecuación de Navier - Stokes 3D poseen un *blow - up* caracterizado por una tasa de crecimiento pequeña.

8.4.1. Acumulación de la vorticidad y existencia de soluciones globalmente regulares de la ecuación de Navier - Stokes 3D

En esencia, el teorema (4.5) establece que la ecuación de Navier - Stokes 3D posee una única solución clásica $\mathbf{u} \in \mathcal{C}([0, T^*]; H^m(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}^1([0, T^*]; H^{m-2}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3))$, con $m \geq 3$, la cual puede ser extendida en el tiempo en la medida que la cantidad $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{H^m(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)}$ se mantenga acotada cuando $t \nearrow T^*$. De hecho, si el tiempo de existencia de la solución $T^* > 0$ es finito, entonces necesariamente debe tenerse que $\lim_{t \rightarrow T^*} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{H^m(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)} = \infty$. Vale decir, en concordancia con el último comentario de la sección anterior, la presencia de una singularidad en el instante crítico T^* provoca un crecimiento no - acotado de la energía² del campo de velocidad \mathbf{u} . Es más, si $T^* < \infty$, entonces es posible obtener la siguiente tasa de crecimiento para la energía de la solución:

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{H^m(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)} = \mathcal{O}(T^* - t)^{-m/3},$$

para $t \nearrow T^*$. En la obra [9] se dan a conocer las correspondientes tasas de crecimiento verificadas por otras normas del campo de velocidad, su matriz jacobiana y su transformada de Fourier.

Equivalentemente, si se asumen ciertas hipótesis de integrabilidad del campo de velocidad, es posible *extender* el dominio temporal en el cual está inicialmente definida la solución. En esta línea se puede destacar, por ejemplo, el siguiente resultado de Y. Giga (publicado en [39]): considérese, para un cierto $T > 0$ y $s > 5/2$, la única solución

$$\mathbf{u} \in \mathcal{C}([0, T]; H^s(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; H^s(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}([0, T]; H^{s+2}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)) \quad (8.20)$$

de la ecuación de Navier - Stokes 3D (8.6), con $\Omega = \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{f} \equiv \vec{0}$, cuya existencia está garantizada por el teorema presente en [37]. Si dicha solución satisface, además, que:

$$\mathbf{u} \in L^q([0, T]; L^p(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)),$$

para ciertos números $3 < p \leq \infty$ y $2 \leq q < \infty$ tales que $\frac{2}{q} + \frac{3}{p} = 1$, entonces ella puede ser extendida, como una solución perteneciente a la clase (8.20), hasta un cierto instante $T' > T$.

Ahora bien, al igual que en el caso de la ecuación de Euler 3D, el proceso de acumulación de la vorticidad (vale decir, el aumento de la norma infinito de la vorticidad) está íntimamente ligado al control de la regularidad, local o global, de las correspondientes soluciones de la ecuación de Navier - Stokes 3D. Más precisamente, otra consecuencia necesaria de que el tiempo máximo de existencia T^* sea finito puede ser apreciada en el siguiente teorema:

²En este caso, al hablar de la *energía* del campo de velocidad se está haciendo referencia a su norma en un determinado espacio de Sobolev.

Teorema 8.6. (Control de la norma L^∞ de la vorticidad y regularidad global; consultar [10], sección 3.3). Considérese una condición inicial $\mathbf{u}_0 \in H^m(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, con $m \geq 7/2$, que verifica la condición de incompresibilidad, de modo tal que existe un tiempo máximo de existencia $T > 0$ (posiblemente infinito) y una única solución $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \cap H^m(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3))$ de la ecuación de Navier - Stokes 3D (cuando el campo de fuerzas externas es nulo). Entonces:

1. Si para cualquier $\tau > 0$ existe una constante $M_0 > 0$ tal que:

$$\int_0^\tau \|\omega(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)} dt \leq M_0,$$

entonces la solución está globalmente definida en el tiempo, vale decir, puede extenderse hasta pertenecer a la clase $\mathcal{C}^1([0, \infty); \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \cap H^m(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3))$.

2. Si el tiempo máximo de existencia $T > 0$ es finito, entonces la vorticidad se acumula tan rápidamente en el tiempo de modo tal que:

$$\lim_{t \nearrow T} \int_0^t \|\omega(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)} ds = \infty.$$

Sin embargo, tanto el teorema (4.5) como el teorema (8.6) describen consecuencias necesarias de la aparición de tal singularidad, no el procedimiento físico - matemático que conlleva hacia la pérdida de regularidad. Siguiendo el tratamiento otorgado a la ecuación de Euler 3D, es fundamental contar con algún criterio que permita caracterizar el surgimiento de singularidades (en tiempo finito) en las soluciones de la ecuación de Navier - Stokes 3D. Afortunadamente, el criterio de Beale - Kato - Majda, descrito en los teoremas (4.3) y (4.4) sigue siendo válido en el caso de un fluido homogéneo, viscoso e incompresible; en definitiva, al igual que en la ecuación de Euler 3D, solamente la norma L^∞ de la vorticidad controla el quiebre de las soluciones regulares de la ecuación de Navier - Stokes incompresible y tridimensional.

8.5. Medida de Hausdorff del conjunto de puntos singulares

Partiendo desde la obra precursora de J. Leray de 1930, diversos matemáticos han decidido emplear ideas y técnicas provenientes de la teoría de la medida para obtener nuevos resultados concernientes a la *regularidad parcial* de las soluciones débiles de la ecuación de Navier - Stokes incompresible y tridimensional. Un teorema de *regularidad parcial* tiene por finalidad entregar una estimación de la dimensión del conjunto de puntos singulares de una solución débil de la ecuación de Navier - Stokes 3D. De hecho, en [54], el propio J. Leray demostró que si $\mathbf{u} \in L^2([0, T]; V)$ es una solución débil de la ecuación de Navier - Stokes 3D (en el sentido del teorema (8.4)) que está definida en todo \mathbb{R}^3 , entonces \mathbf{u} es suave o regular en $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{E}$, donde el conjunto $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$ posee las siguientes propiedades:

- La medida de Lebesgue de \mathcal{E} es cero.
- El complemento de \mathcal{E} es una unión de intervalos, y el último de éstos es semi - infinito.

Por ende, de acuerdo a lo demostrado por J. Leray, las soluciones débiles de la ecuación de Navier - Stokes 3D que estén definidas en todo \mathbb{R}^3 son esencialmente regulares.

Lamentablemente, aquel teorema demostrado por J. Leray no es válido en el caso de una solución débil cuyo dominio espacial es una región acotada de \mathbb{R}^3 . Décadas más tarde, a partir de 1970, los trabajos de V. Scheffer estuvieron dedicados a refinar y profundizar los resultados existentes en materia de regularidad parcial, esfuerzos que finalmente desembocarían en la obra cúlmine de L. Caffarelli, R. Kohn y L. Nirenberg. Sin embargo, antes de puntualizar los aspectos más relevantes de dichos resultados, es necesario definir la manera en que se medirá la dimensión del conjunto de puntos singulares.

La herramienta utilizada en [14] consiste en un análogo parabólico de la dimensión de Hausdorff, para lo cual se consideran *cilindros parabólicos*, esto es, conjuntos de la forma $Q_r \doteq B_r \times I_r \subset \mathbb{R}^3 \times \subset \mathbb{R}$, siendo $B_r \subset \mathbb{R}^3$ una bola de radio $r > 0$ y $I_r \subset \mathbb{R}$ un intervalo de largo r^2 . Más precisamente, para $\delta > 0$, $s \geq 0$ y $E \subset \mathbb{R}^3 \times \subset \mathbb{R}$ dados, defínase:

$$\mathcal{P}_\delta^s(E) \doteq \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} r_i^s \mid 0 < r_i < \delta, \forall i \in \mathbb{N} ; E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_{r_i} \right\},$$

y sea $\mathcal{P}^s(E) \doteq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{P}_\delta^s(E)$. Según se indica en [14], sección 2D, para todo $s \geq 0$ se tiene que \mathcal{P}^s es una medida exterior, para la cual todos los conjuntos de Borel son medibles (de hecho, \mathcal{P}^s es una medida regular en la σ -álgebra de los conjuntos borelianos, para todo $s \geq 0$). Con esta información, dado $s \geq 0$, la *medida de Hausdorff s - dimensional* \mathcal{H}^s se define al igual que \mathcal{P}^s , pero cambiando los cilindros parabólicos Q_{r_i} por cualquier sub - conjunto cerrado de $\mathbb{R}^3 \times \subset \mathbb{R}$ cuyo diámetro sea menor o igual a $r_i > 0$. En consecuencia, existirá una constante $c(s) > 0$ tal que:

$$\mathcal{H}^s(E) \leq c(s)\mathcal{P}^s(E), \quad \forall E \subset \mathbb{R}^3 \times \subset \mathbb{R}.$$

Por otra parte, dado $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y una solución (débil o clásica) $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ de la ecuación de Navier - Stokes 3D (8.6), se dirá que el punto $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T)$ es *singular* cuando \mathbf{u} es no - acotada c.t.p. en *cualquier* vecindad del punto (\mathbf{x}, t) , esto es:

$$\mathbf{u} \notin L_{loc}^\infty(\mathcal{V}_{(\mathbf{x}, t)}; \mathbb{R}^3),$$

para toda vecindad $\mathcal{V}_{(\mathbf{x}, t)} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ del punto (\mathbf{x}, t) . Se denotará por $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3 \times [0, T]$ al conjunto de todos los puntos singulares de dicha solución. En [68], V. Scheffer demostró el siguiente teorema de regularidad parcial:

Teorema 8.7. *Considérese el problema con condición inicial y condición de borde asociado a la ecuación de Navier - Stokes 3D (8.6) cuando $\nu = 1$, $\mathbf{f} \equiv \vec{0}$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un conjunto acotado cuya frontera $\partial\Omega$ tiene medida de Lebesgue nula. Entonces, el problema (8.6) posee una solución débil cuyo conjunto singular $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ satisface lo siguiente:*

$$\begin{cases} \mathcal{H}^{5/3}(\mathcal{S}) < \infty, \\ \sup_{t \geq 0} \mathcal{H}^1(\mathcal{S} \cap (\Omega \times \{t\})) < \infty. \end{cases}$$

La situación cuando $\nu = 1$, $\mathbf{f} \equiv \vec{0}$ y $\Omega = \mathbb{R}^3$ también fue estudiada por V. Scheffer en [67], llegando a concluir que $\mathcal{H}^2(\mathcal{S}) < \infty$. Adicionalmente, el conjunto de *instantes singulares*,

entendido como:

$$\Sigma \doteq \{t \geq 0 \mid (\exists \mathbf{x} \in \Omega) (\mathbf{x}, t) \in \mathcal{S}\},$$

fue analizado por el mismo autor en [66], logrando demostrar que $\mathcal{H}^{1/2}(\Sigma) = 0$ cuando $\nu = 1$, $\mathbf{f} \equiv \vec{0}$ y $\Omega = \mathbb{R}^3$. El teorema principal que demuestran L. Caffarelli, R. Kohn y L. Nirenberg en [14] consiste en un mejoramiento de los resultados publicados anteriormente por V. Scheffer, en cuanto:

- Es más de carácter local, vale decir, permite que el dominio Ω sea acotado.
- Entrega una estimación más fina de la dimensión de Hausdorff del conjunto de puntos singulares de la solución.
- Permite la incorporación de un campo de fuerzas no idénticamente nulo (y relativamente general en naturaleza).

En forma resumida, el gran teorema de L. Caffarelli, R. Kohn y L. Nirenberg puede ser enunciado así:

Teorema 8.8. *Sea $T > 0$ y supóngase que $\Omega = \mathbb{R}^3$, o bien que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto, acotado y con frontera suave. Adicionalmente, supóngase que existe $q > \frac{5}{2}$ tal que:*

$$\begin{cases} \mathbf{f} \in L^2(\Omega \times [0, T]; \mathbb{R}^3) \cap L^q_{\text{loc}}(\Omega \times [0, T]; \mathbb{R}^3), \\ \nabla \cdot \mathbf{f} = 0 \quad \text{en } \Omega \times [0, T], \\ \mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3), \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

siendo \mathbf{n} la normal exterior unitaria a la frontera $\partial\Omega$ (la última condición sólo se asume cuando Ω es acotado, y en este caso se debe agregar la hipótesis de que $\mathbf{u}_0 \in W^{2/5, 5/4}(\Omega; \mathbb{R}^3)$). Entonces, el problema con condición inicial \mathbf{u}_0 , viscosidad unitaria, campo de fuerzas externas \mathbf{f} y condición de borde asociado a la ecuación de Navier - Stokes 3D (8.6) posee una solución débil **apropiada**³, cuyo conjunto singular satisface que $\mathcal{P}^1(\mathcal{S}) = 0$.

En particular, de acuerdo al teorema (8.8), el conjunto singular de una solución débil de la ecuación de Navier - Stokes incompresible y tridimensional no puede contener una curva en el espacio - tiempo de la forma $\{(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T] \mid \mathbf{x} = \phi(t)\}$, para una determinada función $\phi : [0, T] \rightarrow \Omega$. En las propias palabras de C. Fefferman (en [32]): “Este [el de Caffarelli - Kohn - Nirenberg] es el mejor teorema de regularidad parcial conocido, hasta el momento, para la ecuación de Navier - Stokes. Parece muy difícil ir más allá en esta cuestión”.

Por otra parte, si bien estos resultados de regularidad parcial no necesariamente son válidos en el caso de la ecuación de Euler incompresible y tridimensional (puesto que en las hipótesis se asume que $\nu = 1$), ellos sí pueden ser utilizados para conjeturar que la solución numérica de la ecuación de Euler 3D hallada por T. Hou y G. Luo en [45] es, en este

³En [14], sección 2A, los autores introducen un concepto de solución débil similar al empleado en este capítulo, pero con ciertas restricciones adicionales. Por este motivo deciden hablar de soluciones débiles *apropiadas*.

contexto, inadmisibile. Recuérdese que en [45] se reporta la existencia de una singularidad del tipo *anular* en la frontera sólida del cilindro, al instante $t = t_s \approx 0.0035056$. Vale decir:

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\} \times \{t_s\}.$$

Luego, ciertamente se tiene que $\mathcal{P}^1(\mathcal{S}) > 0$, contradiciendo el teorema de regularidad parcial de Caffarelli - Kohn - Nirenberg.

8.6. Soluciones auto - similares de la ecuación de Navier - Stokes incompresible y tridimensional

Tal cual ocurre con la ecuación de Euler 3D, las soluciones de la ecuación de Navier - Stokes 3D verifican la propiedad de *invarianza de escala*: si \mathbf{u} y p satisfacen la ecuación (8.6) en $\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$ (cuando el campo de fuerzas externas es nulo), entonces las funciones:

$$\begin{cases} \mathbf{u}^\lambda(\mathbf{x}, t) \doteq \frac{1}{\lambda} \mathbf{u}\left(\frac{\mathbf{x}}{\lambda}, \frac{t}{\lambda^2}\right) \\ p^\lambda(\mathbf{x}, t) \doteq \frac{1}{\lambda^2} p\left(\frac{\mathbf{x}}{\lambda}, \frac{t}{\lambda^2}\right), \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty), \end{cases} \quad (8.21)$$

también resuelven la ecuación (8.6), para todo $\lambda > 0$ (ver [10], sección 1.2). De hecho, con la finalidad de describir un posible escenario de *explosión* en el origen de \mathbb{R}^3 y en un determinado instante de tiempo $T > 0$, J. Leray postuló en [54] la existencia de soluciones auto - similares de la ecuación de Navier - Stokes 3D, vale decir, soluciones que presenten la siguiente estructura:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2a(T-t)}} \mathbf{U}\left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{2a(T-t)}}\right) \\ p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2a(T-t)} P\left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{2a(T-t)}}\right), \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, T), \end{cases} \quad (8.22)$$

siendo $\mathbf{U} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ el *perfil auto - similar* del campo de velocidad, $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ el perfil auto - similar del campo de presiones y $a > 0$ una constante. En realidad, se puede simplemente considerar $T \in \mathbb{R}$, de modo tal que el campo de velocidad \mathbf{u} en (8.22) estará definido en $\mathbb{R}^3 \times (-\infty, T)$. Por lo general, también se exige que ciertas normas asociadas a la energía de \mathbf{u} sean finitas. Tal cual se demuestra en [60], al introducir la variable auto - similar $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{2a(T-t)}}$, la ecuación de Navier - Stokes 3D se transforma en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{U}(\mathbf{y}) + a \mathbf{U}(\mathbf{y}) + a \nabla \mathbf{U}(\mathbf{y}) \mathbf{y} + \nabla \mathbf{U}(\mathbf{y}) \mathbf{U}(\mathbf{y}) = -\nabla P(\mathbf{y}) \\ \operatorname{div}(\mathbf{U})(\mathbf{y}) = 0, \end{cases} \quad (8.23)$$

para todo $t \in (-\infty, T)$ y $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. Luego, la existencia de una solución del sistema (8.23) es equivalente a la existencia de una solución de la ecuación de Navier - Stokes 3D que desarrolla una singularidad en el punto $\mathbf{x} = \vec{0}$ y al instante T , resolviendo el misterio sobre

la pérdida de regularidad, en tiempo finito, de soluciones de la ecuación de Navier - Stokes 3D.

La pregunta planteada por J. Leray se mantuvo sin respuesta hasta 1995, cuando J. Nečas, M. Růžička y V. Šverák probaron que la única solución auto - similar de la ecuación de Navier - Stokes 3D cuya energía verifica ciertas estimaciones *globales* es idénticamente nula. Más precisamente, en la obra [60] se demuestra lo siguiente:

Teorema 8.9. (*Exclusión de una solución auto - similar que satisface una estimación global de su energía*). Si $\mathbf{U} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una solución débil del problema (8.23) que pertenece a $L^3(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, entonces \mathbf{U} es idénticamente nula en \mathbb{R}^3 .

En este contexto, los autores de [60] consideran que una *solución débil* del problema (8.23) es una función $\mathbf{U} \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ cuya divergencia es idénticamente nula en \mathbb{R}^3 y que, además, verifica lo siguiente:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \{ \nu \nabla \mathbf{U}(\mathbf{y}) \cdot \nabla \varphi(\mathbf{y}) + [a\mathbf{U}(\mathbf{y}) + a\nabla \mathbf{U}(\mathbf{y})\mathbf{y} + \nabla \mathbf{U}(\mathbf{y})\mathbf{U}(\mathbf{y})] \cdot \varphi(\mathbf{y}) \} d\mathbf{y} = 0, \quad (8.24)$$

para todo campo solenoidal $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$. Ahora bien, la condición de integrabilidad en $L^3(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ que se impone sobre el perfil auto - similar \mathbf{U} se cumple cuando la correspondiente solución $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \times (-\infty, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ de la ecuación de Navier - Stokes 3D satisface la siguiente desigualdad (que es una estimación *global* de su energía):

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|^2 d\mathbf{x} + \int_{t_1}^t \int_{\mathbb{R}^3} \nu \|\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|^2 d\mathbf{x} dt \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_1)\|^2 d\mathbf{x}, \quad (8.25)$$

para todo $t \in (t_1, t_2)$, con $t_1, t_2 \in (-\infty, T)$ dados. Por otra parte, supóngase que la solución verifica simplemente una estimación *local* de su energía, esto es, una desigualdad del siguiente estilo:

$$\text{ess sup}_{t_0 < t < T} \frac{1}{2} \int_{B_r} \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|^2 d\mathbf{x} + \int_{t_0}^T \int_{B_r} \nu \|\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|^2 d\mathbf{x} dt < \infty, \quad (8.26)$$

para alguna bola $B_r \subset \mathbb{R}^3$ de radio $r > 0$, y para cierto $t_0 < T$. En tal caso, no se puede asegurar que $\mathbf{U} \in L^3(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, y en efecto, la obra de J. Nečas, M. Růžička y V. Šverák no excluye la posible aparición de singularidades auto - similares a través de soluciones que satisfagan una estimación local de su energía. Según se indica en [75], esto no descarta, por ejemplo, un perfil auto - similar que decaiga de la siguiente forma:

$$\mathbf{U}(\mathbf{y}) = \frac{1}{\|\mathbf{y}\|} \mathbf{A} \left(\frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} \right) + o \left(\frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} \right), \quad \text{para } \|\mathbf{y}\| \rightarrow \infty,$$

siendo $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función diferenciable. Justamente el autor de la obra [75] excluye la posibilidad de que una singularidad auto - similar se manifieste a través de este tipo de perfil auto - similar. Precisamente, en [75] se demuestra lo siguiente:

Teorema 8.10. (*Exclusión de una solución auto - similar que satisface una estimación local de su energía*).

1. Si $\mathbf{U} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una solución débil del problema (8.23) (en el sentido de (8.24)) que pertenece a $L^q(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, para un cierto $q \in (3, \infty]$, entonces \mathbf{U} es constante en \mathbb{R}^3 .

2. Dado $T \in \mathbb{R}$, supóngase que la función $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \times (-\infty, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ resuelve la ecuación de Navier - Stokes incompresible y tridimensional en el sentido de las distribuciones, verificando la desigualdad (8.26) en el cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\} \times (T - 1, T)$. Si, además, \mathbf{u} es de la forma (8.22), entonces \mathbf{u} es idénticamente nula en $\mathbb{R}^3 \times (-\infty, T)$.

Finalmente, corresponde señalar que muchos otros trabajos han sido dedicados a la demostración de teoremas que excluyen la posibilidad de existencia de soluciones auto - similares, locales y asintóticas, de la ecuación de Navier - Stokes 3D. Para conocer mayores detalles, el lector interesado puede consultar las obras [16], [18] y [19].

8.7. Teoremas del tipo Liouville para la ecuación de Navier - Stokes incompresible y aplicaciones

Uno de los resultados fundamentales del análisis armónico es el *teorema de Liouville*, que establece que toda función armónica y acotada $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ debe ser **constante**, con $n \geq 1$ entero. Puesto que el operador laplaciano juega un rol especial en la ecuación de Navier - Stokes, es natural e interesante considerar el siguiente problema (que es el punto de partida de la obra [52]):

Caracterizar las soluciones de la ecuación de Navier - Stokes (8.6) en $\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0)$, con $n = 2$ ó $n = 3$, cuyo campo de velocidad sea globalmente acotado en \mathbb{R}^n .

Nótese que, dada una función diferenciable $b : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, cualquier par de campos de la forma:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(x, y, z, t) = (0, 0, b(t)) \\ p(x, y, z, t) = -b'(t)z, \quad \forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0), \end{cases}$$

resuelve la ecuación de Navier - Stokes (8.6) en $\mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0)$. En esta sección se verá que, en realidad, esta caracterización es efectivamente válida en el caso bidimensional y en el caso tridimensional axisimétrico (considerando, en ambas situaciones, soluciones débiles y globalmente acotadas en espacio y tiempo), conformando verdaderos *teoremas de Liouville* en el contexto de la teoría matemática de la mecánica de fluidos. Según se indica en [52], todavía no existe una caracterización satisfactoria en el caso tridimensional general, incluso cuando se plantea la ecuación de Navier - Stokes 3D en régimen estacionario.

Antes de enunciar estos teoremas, corresponde señalar que los autores de [52] trabajan con la ecuación de Navier - Stokes 3D (8.6) en $\mathbb{R}^3 \times (-\infty, T)$, para un tiempo fijo $T \in \mathbb{R}$, $\nu = 1$ y un campo de fuerzas nulo. En este contexto, ellos entienden por *solución débil* de dicha ecuación a toda función $\mathbf{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^3 \times (-\infty, T); \mathbb{R}^3)$ tal que $\operatorname{div}(\mathbf{u}) \equiv 0$ en $\mathbb{R}^3 \times (-\infty, T)$ (en el sentido de las distribuciones), y que, además, verifique lo siguiente:

$$\int_{-\infty}^T \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \Delta \varphi(\mathbf{x}, t) \right\} d\mathbf{x} dt + \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^T \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u}_k(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt = 0,$$

para cualquier campo vectorial $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3 \times (-\infty, T); \mathbb{R}^3)$ tal que $\operatorname{div}(\varphi) = 0$ en $\mathbb{R}^3 \times (-\infty, T)$.

El primer teorema del tipo Liouville que se demuestra en [52] es el siguiente:

Teorema 8.11. *Sea $\mathbf{u} : \mathbb{R}^2 \times (-\infty, 0) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una solución débil y globalmente acotada (en espacio y tiempo) de la ecuación de Navier - Stokes incompresible y bidimensional. Entonces, existe una función medible y acotada $b : (-\infty, 0) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = b(t)$, para todo $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^2 \times (-\infty, 0)$.*

Como se indicó anteriormente, hasta el día de hoy no se sabe si existe un teorema similar a (8.11) cuando se trabaja con tres dimensiones espaciales, ya sea en el caso estacionario o no. Sin embargo, bajo la hipótesis adicional de que el flujo posee simetría rotacional, es posible obtener interesantes resultados en esta dirección. Recuérdese que, al utilizar un sistema de coordenadas cilíndricas, un campo de velocidad axisimétrico puede ser descrito mediante la siguiente descomposición:

$$\mathbf{u}(\xi, t) = u_r(r, z, t)\hat{r} + u_\theta(r, z, t)\hat{\theta} + u_z(r, z, t)\hat{k},$$

para todo $(\xi, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$, con $\xi = r\hat{r} + z\hat{k}$, siendo $r \geq 0$, $z \in \mathbb{R}$ y $\{\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{k}\}$ el triedro ortogonal propio de las coordenadas cilíndricas. En este sistema de coordenadas, para el caso de un campo de velocidad axisimétrico $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y un campo de presiones axisimétrico $p : \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, la ecuación de Navier - Stokes incompresible y tridimensional (8.6) admite la siguiente escritura:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} = \Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} = \Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \Delta u_z \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \times (0, \infty),$$

donde Δ denota al operador laplaciano en coordenadas cilíndricas. Es sabido que, para un instante finito $T > 0$ cualquiera, la ecuación de Navier - Stokes incompresible y tridimensional posee soluciones axisimétricas y con componente angular nula que son regulares en todo $\mathbb{R}^3 \times [0, T]$ (consultar, por ejemplo, [76]). En el caso de soluciones débiles, axisimétricas y con componente angular nula, los autores de [52] demuestran el siguiente teorema del tipo Liouville:

Teorema 8.12. *Sea $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una solución débil y globalmente acotada (en espacio y tiempo) de la ecuación de Navier - Stokes incompresible y tridimensional. Supóngase que el campo de velocidad \mathbf{u} es axisimétrico y que su componente angular es constantemente nula. En consecuencia, existe una función medible y acotada $b : (-\infty, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (0, 0, b(t))$, $\forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0)$.*

Es un problema irresoluto determinar la validez del teorema (8.12) cuando el campo de velocidad posee una componente angular cualquiera. No obstante, el siguiente resultado (cuya demostración también puede leerse en [52]) constituye una conclusión parcial en aquella dirección:

Teorema 8.13. *Sea $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una solución débil y globalmente acotada (en espacio y tiempo) de la ecuación de Navier - Stokes incompresible y tridimensional. Supóngase*

que el campo de velocidad \mathbf{u} es axisimétrico y que, además, existe una constante $C > 0$ tal que:

$$\|\mathbf{u}(x, y, z, t)\| \leq \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0).$$

Entonces, \mathbf{u} es constantemente nula en $\mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0)$.

Por otra parte, inspirados en algunas interrogantes planteadas en [21], los autores de [52] aplicaron aquellos teoremas del tipo Liouville para obtener nuevos resultados concernientes a la naturaleza de las singularidades que pueden surgir en soluciones axisimétricas de la ecuación de Navier - Stokes 3D. Dado $T > 0$ y una solución $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ de la ecuación de Navier - Stokes 3D que presenta una singularidad al instante T , se dirá que esta singularidad es del *tipo I* si existe una constante $C > 0$ tal que:

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\| \leq \frac{C}{\sqrt{T-t}}, \quad \forall t \in [0, T).$$

Cualquier singularidad que no sea del tipo I será considerada del *tipo II*. En la literatura (como en [52]), las singularidades del tipo II son usualmente denominadas *explosiones lentas*. Una de las principales novedades de la obra [52] consiste en el teorema que, en forma resumida, establece que si una solución axisimétrica de la ecuación de Navier - Stokes 3D presenta una singularidad, ésta sólo puede corresponder a una explosión lenta. Precisamente, dicho resultado se enuncia así:

Teorema 8.14. *Dado $T > 0$, sea $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una solución débil de la ecuación de Navier - Stokes incompresible y tridimensional, tal que $\mathbf{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^3 \times (0, T'); \mathbb{R}^3)$, para todo $T' \in (0, T)$. Supóngase que el campo de velocidad \mathbf{u} es axisimétrico y que existe una constante $C > 0$ tal que:*

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\| \leq \frac{C}{\sqrt{T-t}}, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, T).$$

Adicionalmente, supóngase que existe un radio $R_0 > 0$ tal que:

$$\|\mathbf{u}(x, y, z, t)\| \leq \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

para todo $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, T)$ tal que $\sqrt{x^2 + y^2} \geq R_0$. Entonces, existe una constante $M > 0$ (que depende de C) tal que $\|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\| \leq M$, $\forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, T)$.

En otras palabras, el teorema (8.14) establece: si una solución débil de la ecuación de Navier - Stokes 3D es axisimétrica, esencialmente acotada en $\mathbb{R}^3 \times (0, T)$ y presenta una singularidad del tipo I en el instante T , entonces ella es globalmente acotada en $\mathbb{R}^3 \times (0, T)$. Vale decir, la formulación axisimétrica de la ecuación de Navier - Stokes 3D sólo podría admitir soluciones singulares del tipo II. Compárese este resultado con la siguiente estimación:

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\| \geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{T-t}}, \quad \forall t \in (0, T),$$

para un cierto $\varepsilon > 0$, obtenida por J. Leray en [54], para el caso de una solución cualquiera de la ecuación de Navier - Stokes 3D que desarrolla una singularidad en el instante T .

Capítulo 9

Conclusiones finales

Luego de haber repasado muchos de los trabajos clásicos y modernos que han sido destinados al estudio de las ecuaciones de Euler y de Navier - Stokes en tres dimensiones espaciales, no cabe más que preguntarse: ¿por qué es tan difícil obtener la regularidad global (en el tiempo) de las soluciones de dichas ecuaciones? Equivalentemente, ¿qué ha impedido, en última instancia, el descubrimiento de soluciones singulares de aquellas ecuaciones?

Como ya se ha indicado, el correspondiente problema en dos dimensiones espaciales ha sido exitosamente resuelto hasta el día de hoy, permitiendo una comprensión bastante profunda de la naturaleza de sus soluciones. Igualmente, se ha puesto particular énfasis en que el término de dilatación o contracción vorticial $\omega \cdot \nabla \mathbf{u}$ es, desde el punto de vista físico, el principal causante de las dificultades que surgen en la construcción de una solución globalmente regular de la ecuación de Euler o de Navier - Stokes incompresible y tridimensional. Sin embargo, desde una perspectiva netamente matemática, ¿qué otros obstáculos pueden complicar la resolución de este problema?

En primer lugar, supóngase que se opta por la estrategia de resolver *positivamente* el problema, vale decir, demostrar la existencia de soluciones globalmente regulares de la ecuación de Euler o de Navier - Stokes 3D. De acuerdo a lo planteado por Terence Tao¹, dicha metodología puede ser adoptada a través de diversas alternativas, tales como:

1. Resolución de las ecuaciones de Euler o de Navier - Stokes 3D en forma exacta y explícita. Ciertamente, este camino se muestra poco esperanzador, puesto que la experiencia indica que la gran mayoría de las ecuaciones diferenciales parciales no - lineales (salvo contadas excepciones) carecen de una fórmula explícita para sus soluciones.
2. Uso de soluciones débiles, como aquellas presentadas en los capítulos anteriores, o bien proponer alguna otra noción de solución aproximada (en la literatura pueden hallarse, por ejemplo, los conceptos de solución viscosa, solución penalizada, sub - solución, super - solución, solución *ligera* etc.). En esta misma línea, ya sea porque se trabaje con algunas de estas nociones de solución, o porque se enfatice la parte lineal de las ecuaciones, o porque se debilite la porción no - lineal de éstas, es posible obtener soluciones globalmente suaves de una ecuación que *aproxima*, en forma regularizada, a la de Euler o de Navier - Stokes

¹Las opiniones de Terence Tao que acá se recopilan pueden ser consultadas con mayor detalle en la página <https://terrytao.wordpress.com/2007/03/18/why-global-regularity-for-navier-stokes-is-hard/>

3D. Posteriormente, la idea es tomar un límite que permita recuperar un solución local o globalmente regular. No obstante, para asegurar la regularidad de la solución en el límite, esta convergencia debe ocurrir en una topología fuerte. Es en este procedimiento asintótico donde la solución se ve *obligada* a ser regular sólo en un intervalo finito de tiempo, puesto que no es posible aplicar alguno de los teoremas que permiten extenderla, en el tiempo, como solución de una determinada ecuación diferencial en un espacio de Banach.

3. Análisis asintótico en torno al punto de *blow - up*. Teniendo en cuenta la propiedad de invarianza de escala verificada por las soluciones de la ecuación de Euler o de Navier - Stokes, una buena táctica podría consistir en un re - escalamiento de la solución en torno a la singularidad (asumiendo, de antemano, que tal solución singular efectivamente existe), para luego trabajar con alguna forma de límite hasta dar con una contradicción. No obstante, con la finalidad de extraer un límite que sea útil, vale decir, uno que todavía resuelva las ecuaciones en un sentido *fuerte*, será necesario controlar uniformemente todos los re - escalamientos de la solución singular. Por supuesto, otra dificultad que surge al lidiar con esta metodología radica en el hecho de que puede existir un conjunto de puntos singulares, impidiendo un re - escalamiento adecuado de la solución.

Entonces, en vista de los numerosos obstáculos que pueden aparecer al optar por aquella estrategia *positiva*, es natural querer seguir una táctica *negativa*, vale decir, destinada a encontrar soluciones singulares de la ecuación de Euler o de Navier - Stokes en tres dimensiones espaciales. Naturalmente, en este camino también está la posibilidad de hallar explícitamente una solución singular, vale decir, que exprese exactamente el punto espacial y el instante de tiempo en los que ocurre el *blow - up*. Sin embargo, como ya se ha indicado, la obtención de soluciones con fórmulas concretas es prácticamente una utopía en el análisis no - lineal, de modo que la comunidad científica se ha visto *forzada* a recurrir a los métodos numéricos, con la esperanza de que la moderna maquinaria computacional (que permite la utilización de algoritmos cada vez más complejos y precisos) sea capaz de hallar o sugerir potenciales soluciones singulares de la ecuación de Euler o de Navier - Stokes 3D.

Los invaluable aportes que el análisis numérico ha entregado a la comprensión de la dinámica de los fluidos ideales y viscosos fueron ampliamente destacados en el capítulo N°5; no obstante, existe una muralla que hasta hoy en día se mantiene inexpugnable: ¿cómo avanzar desde una observación numérica hacia una demostración rigurosa sobre la existencia de tal solución singular? En vista de la propiedad de invarianza de escala que satisfacen las soluciones de la ecuación de Euler o de Navier - Stokes, los autores usualmente apelan a la postulación de *ansatz* auto - similares, los cuales, desde el punto de vista teórico, son sumamente aptos para describir un posible escenario de explosión en la solución. Sin embargo, como ya se ha estudiado, en la literatura abundan los resultados que prohíben la existencia de tales *ansatz* auto - similares en una amplia gama de casos. Equivalentemente, el *ansatz* auto - similar puede conducir hacia el planteamiento de un sistema sobre - determinado de ecuaciones en derivadas parciales, en el que las propiedades analíticas de sus soluciones pueden contradecir las observaciones numéricas utilizadas para formular el *ansatz* (tal cual se demostró en el capítulo N°7). Examinada desde esta perspectiva, aquella estrategia *negativa* también se muestra estéril.

Un área de la teoría matemática de la mecánica de fluidos que comenzó a desarrollarse a inicios de la década de 1970, y que merece una mención especial, es la denominada *hidrodi-*

námica topológica. Inspirado en consideraciones basadas en la conservación de la helicidad, H. K. Moffatt analizó la ecuación de Euler, y otras ecuaciones de la magnetohidrodinámica ideal, desde la perspectiva del enredamiento y anudamiento de las líneas de vorticidad y de las líneas de un campo magnético, respectivamente. Según Moffatt, la hidrodinámica topológica se concentra primordialmente en el estudio de aquellas estructuras inherentes al campo de velocidad que mantienen cierta *coherencia* durante un período de tiempo significativo, o bien, en la descripción de la deformación continua (en el tiempo) que sufren los campos escalares y vectoriales que son transportados por el flujo. En [59], H. K. Moffatt enuncia una serie de problemas que constituyen, al menos en esencia, los principales desafíos de la hidrodinámica topológica. El último de estos retos corresponde justamente al surgimiento, en tiempo finito, de singularidades en soluciones de la ecuación de Euler o de Navier - Stokes en tres dimensiones espaciales². Vale decir, las técnicas de la hidrodinámica topológica deben incluirse dentro de las alternativas que permitirían resolver positivamente o negativamente el problema fundamental asociado a la ecuación de Euler y de Navier - Stokes 3D. El lector interesado en estos temas puede hallar en las obras [1] y [65] dos excelentes puntos de partida, en donde los autores, además, exponen los incontables aspectos de la hidrodinámica topológica que todavía deben ser perfeccionados.

En la opinión del autor de este trabajo de memoria, el problema de la existencia o ausencia de singularidades en tiempo finito de soluciones de las ecuaciones de Euler y de Navier - Stokes (en el caso incompresible y tridimensional) debe ser enfrentado mediante una combinación de los métodos anteriormente mencionados. Muchas de las modernas investigaciones en mecánica de medios continuos (como [1] y [38]) enfatizan que aquellas ecuaciones poseen inmanentes propiedades geométricas que no han sido debidamente aprovechadas. Por ejemplo, el enfoque tradicional en mecánica de fluidos considera que la presión interna debe ser tratada como una variable auxiliar. Según se indica en [38], la ecuación elíptica que permite recuperar el campo de presiones a partir de la velocidad:

$$-\Delta p(\mathbf{x}, t) = -\text{tr}(\nabla^2 p(\mathbf{x}, t)) = \text{tr}((\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))^2), \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty),$$

está lejos de ser plenamente comprendida, a pesar de que, a través del signo de $\text{tr}(\nabla^2 p)$, puede entregar mucha información concerniente a la creación de estructuras vorticiales. Luego, dicha ecuación elíptica, que usualmente es vista como una simple restricción, puede esconder un conocimiento bastante profundo sobre los rasgos geométricos de las ecuaciones de Euler y de Navier - Stokes. En consecuencia, es posible que la pregunta fundamental asociada a estas dos ecuaciones, en su versión incompresible y tridimensional, pueda esclarecerse después de un uso apropiado y combinado de las técnicas provenientes del análisis funcional, del análisis numérico, del análisis no - lineal y de la hidrodinámica topológica (si bien no es claro qué tipo de teorema puede emerger a partir de estas consideraciones). Mientras eso no ocurra, el problema de las singularidades, en tiempo finito, de las soluciones de la ecuación de Euler y de Navier - Stokes en tres dimensiones espaciales permanecerá como uno de los mayores desafíos de las matemáticas aplicadas.

²En el contexto de la hidrodinámica topológica, las singularidades son entendidas como *colisiones* entre tubos de vorticidad.

Apéndice A

Transformada de Hilbert

En este apéndice se entregará una descripción sencilla de una herramienta que ya ha sido considerada en los capítulos anteriores: la transformada de Hilbert. Se darán a conocer ciertos problemas de la física - matemática que han motivado su nacimiento y utilización, así como sus propiedades básicas y algunos de los teoremas más relevantes que pueden ser deducidos a partir de ellas.

A.1. Introducción y definiciones básicas

En su defensa de tesis doctoral¹ de 1851, Bernhard Riemann se enfrentó al problema de hallar una función de variable compleja $W_+(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, que sea analítica en el interior de la región delimitada por una determinada curva cerrada $\Gamma \subset \mathbb{C}$, y tal que sus partes real e imaginaria satisfagan la siguiente relación en cada punto de la frontera Γ :

$$\alpha(t)u(\vec{r}(t)) + \beta(t)v(\vec{r}(t)) = \gamma(t), \quad \forall t \in [0, 1], \quad (\text{A.1})$$

siendo $\vec{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ una parametrización de la curva y $\alpha, \beta, \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tres funciones dadas. En vista del Teorema de Representación Conforme de Riemann (consultar, por ejemplo, [70], capítulo N°8), no hay pérdida de generalidad en suponer que la curva cerrada Γ es simplemente la circunferencia unitaria. Luego, si se define la siguiente función en la región ubicada al exterior de la circunferencia unitaria:

$$W_-(z) \doteq \overline{W_+\left(\frac{1}{z}\right)}, \quad \text{para } |z| \geq 1, \quad (\text{A.2})$$

entonces se tendrá que:

$$W_-(\vec{r}(t)) = \overline{W_+(\vec{r}(t))}, \quad \forall t \in [0, 1],$$

puesto que $z\bar{z} = |z|^2 = 1$, para cualquier punto $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 1$. Vale decir,

$$W_-(\vec{r}(t)) = u(\vec{r}(t)) - iv(\vec{r}(t)), \quad \forall t \in [0, 1],$$

¹El documento original, titulado "Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse", puede ser consultado en el siguiente enlace:
<http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Grund/Grund.pdf>

y por consiguiente:

$$\begin{cases} u(\vec{r}(t)) = \frac{W_+(\vec{r}(t)) + W_-(\vec{r}(t))}{2} \\ v(\vec{r}(t)) = \frac{W_+(\vec{r}(t)) - W_-(\vec{r}(t))}{2i}, \quad \forall t \in [0, 1]. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Al reemplazar las igualdades de (A.3) en la ecuación (A.1), se observa que el problema de Riemann se reduce a hallar dos funciones W_+ y W_- que sean analíticas en el interior y exterior de la circunferencia unitaria, respectivamente, cuyos valores de frontera en dicha curva satisfagan la siguiente relación:

$$\frac{\alpha(t) - i\beta(t)}{2}W_+(\vec{r}(t)) + \frac{\alpha(t) + i\beta(t)}{2}W_-(\vec{r}(t)) = \gamma(t), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Por completitud, el comportamiento de la función W_- alrededor del punto ∞ también debe ser especificado; de hecho, a partir de la definición (A.2) se deduce que:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} W_-(z) = \overline{W_+}(0).$$

Años después, en 1905, David Hilbert generalizó el problema de Riemann ya enunciado, declarando que habría que determinar una función $W : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que fuese analítica en $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ y tal que:

$$W_+(\vec{r}(t)) = g(t)W_-(\vec{r}(t)) + f(t), \quad \forall t \in [0, 1],$$

siendo $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ dos funciones dadas (incluso, funciones generalizadas, tal cual se considera en [64], capítulo N°2) y en donde, para todo $t \in [0, 1]$:

$$\begin{cases} W_+(\vec{r}(t)) \doteq \lim_{\substack{z \rightarrow \vec{r}(t) \\ |z| < 1}} W(z) \\ W_-(\vec{r}(t)) \doteq \lim_{\substack{z \rightarrow \vec{r}(t) \\ |z| > 1}} W(z). \end{cases}$$

Además, Hilbert consideró la situación en que la curva Γ no es necesariamente cerrada o de longitud finita, generalizaciones que dieron origen a lo que hoy se conoce como el *problema de Riemann - Hilbert*. En el transcurso de estas investigaciones él introdujo la transformada de Hilbert de funciones periódicas (equivalentemente, funciones definidas en la circunferencia unitaria), si bien fueron G. H. Hardy y E. C. Titchmarsh, simultáneamente entre 1925 y 1930, los que descubrieron y desarrollaron las principales propiedades de esta nueva herramienta matemática. Las definiciones que ahora se entregan fueron extraídas de [64], capítulos N°2 y N°3:

Definición A.1. (*Transformada de Hilbert de funciones periódicas*). Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función 2τ - periódica e integrable, con $\tau > 0$. La transformada de Hilbert de f corresponde a la función $H(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida mediante la siguiente expresión:

$$H(f)(x) \doteq \frac{1}{2\tau} (\text{PV}) \int_{-\tau}^{\tau} f(x-t) \cot\left(\frac{\pi t}{2\tau}\right) dt, \quad (\text{A.4})$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que el límite exista, pues la integral en (A.4) es en el sentido del valor principal de Cauchy.

Definición A.2. (Transformada de Hilbert en el eje real). Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función integrable. La transformada de Hilbert de f corresponde a la función $H(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida c.t.p. mediante la siguiente expresión:

$$H(f)(x) \doteq \frac{1}{\pi} (\text{PV}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt, \quad (\text{A.5})$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que el límite exista, pues la integral en (A.5) es en el sentido del valor principal de Cauchy.

Ahora bien, en muchos problemas de la física es necesario hallar funciones diferenciables $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que sean armónicas en el semi - plano superior $y > 0$, pero cuyo límite cuando $y \rightarrow 0^+$ sólo existe en el sentido de las distribuciones. La teoría de la transformada de Hilbert puede extenderse hacia las funciones generalizadas para formular teoremas de existencia y unicidad de soluciones de aquellos problemas. Para mayores detalles, se recomienda igualmente consultar [64] y las otras referencias que ahí se indican.

A.2. Propiedades fundamentales de la transformada de Hilbert

El siguiente lema, cuya demostración puede leerse en [64], sección 7.1.1, permite que los resultados concernientes a la transformada de Hilbert sobre el eje real puedan hallar fácilmente su forma homóloga en el caso periódico:

Lema A.0.1. Para $\tau > 0$ y $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se tiene que :

$$\frac{\pi}{2\tau} \cot\left(\frac{\pi t}{2\tau}\right) = \frac{1}{t} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{t - 2k\tau}. \quad (\text{A.6})$$

En este caso, la convergencia de la serie (A.6) es uniforme en cualquier sub - conjunto compacto de \mathbb{R} que no contenga algún punto de la forma $2k\tau$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Por consiguiente, en vista del lema (A.6), sólo se entregarán las propiedades y teoremas fundamentales asociados a la transformada de Hilbert definida en el eje real. Las demostraciones de los siguientes teoremas pueden ser leídas en [64] (capítulo N°2), o bien, en [74] (sección 4.2):

Teorema A.1. Para $1 < p < \infty$, la transformada de Hilbert $H(\cdot) : L^p(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \rightarrow L^p(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ es un operador lineal continuo. En particular, si $p > 1$ y $f \in L^p(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, entonces $H(f)(x)$ está bien definida c.t.p. $x \in \mathbb{R}$ y es un elemento de $L^p(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Además, existe una constante $C_p > 0$ tal que:

$$\|H(g)\|_{L^p(\mathbb{R}; \mathbb{C})} \leq C_p \|g\|_{L^p(\mathbb{R}; \mathbb{C})}, \quad \forall g \in L^p(\mathbb{R}; \mathbb{C}).$$

Teorema A.2. (*Identidad de Parseval generalizada*). Sean $p, q \in (1, \infty)$ tales que:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Luego, si $f \in L^p(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ y $g \in L^q(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, entonces se tendrá que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)(x)H(g)(x) dx.$$

Teorema A.3. (*Reciprocidad*). Si $1 < p < \infty$, entonces:

$$H(H(f))(x) = -f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ c.t.p.}$$

En términos de operadores, la propiedad de reciprocidad de la transformada de Hilbert se expresa diciendo que, si $1 < p < \infty$, entonces:

$$H^2 = -\text{id}_{L^p(\mathbb{R}; \mathbb{C})}.$$

Teorema A.4. (*Transformada de Hilbert del producto de dos funciones*). Sean $p, q \in (1, \infty)$ tales que:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1.$$

Luego, si $f \in L^p(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ y $g \in L^q(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, entonces se tendrá la siguiente igualdad c.t.p. en \mathbb{R} :

$$H\{fH(g) + gH(f)\} = H(f)H(g) - fg.$$

Teorema A.5. (*Funciones conjugadas*). Sea $p \in (1, \infty)$ y $f \in L^p(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Defínase el conjunto $\Omega \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$ y las funciones $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mediante:

$$\begin{cases} u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)y}{(x-t)^2 + y^2} dt \\ v(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)(t-x)}{(x-t)^2 + y^2} dt, \end{cases}$$

para todo $(x, y) \in \Omega$. Entonces, para un $y \neq 0$ fijo, las funciones $u(\cdot, y)$ y $v(\cdot, y)$ pertenecen a $L^p(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Por último, las funciones u y v son armónicas conjugadas en la región Ω , cumpliendo, además, los siguientes límites:

$$\begin{cases} \lim_{y \rightarrow 0^+} u(x, y) = f(x) \\ \lim_{y \rightarrow 0^+} v(x, y) = -H(f)(x), \end{cases}$$

para $x \in \mathbb{R}$ c.t.p. y también en el sentido de $L^p(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.

Teorema A.6. (Teorema de Titchmarsh). Si $\Phi \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) Existe una función analítica $\Psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y una constante $K > 0$ tales que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x + iy)|^2 dx < K, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Además, $\lim_{y \rightarrow 0} \Psi(x + iy) = \Phi(x)$, para $x \in \mathbb{R}$ c.t.p. y también en el sentido de $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.

(ii) Existe una función $f \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ tal que $\Phi(x) = f(x) + iH(f)(x)$, para $x \in \mathbb{R}$ c.t.p.

(iii) La transformada de Fourier de la función Φ es nula para $x < 0$ c.t.p.

Antes de concluir este apéndice, y con la finalidad de ilustrar la gran utilidad de la transformada de Hilbert, consíderese la siguiente variante del problema de Riemann - Hilbert: dada una función $f \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, se pide hallar una función de variable compleja $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que sea analítica en $\Omega \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$, y tal que:

$$F_+(x) - F_-(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ c.t.p.},$$

en donde se ha definido, para todo $x \in \mathbb{R}$ c.t.p.:

$$\begin{cases} F_+(x) \doteq \lim_{y \rightarrow 0^+} F(x + iy) \\ F_-(x) \doteq \lim_{y \rightarrow 0^-} F(x + iy), \end{cases}$$

y el sentido de estos límites debe ser precisado (convergencia puntual c.t.p., convergencia en media, etc.). Este problema puede ser resuelto fácilmente recurriendo al teorema (A.5). En efecto, usando los conjuntos y funciones definidas en el enunciado de dicho teorema, consíderese la siguiente función:

$$F(x + iy) \doteq \frac{1}{2}(u(x, y) + iv(x, y)), \quad \forall (x, y) \in \Omega. \quad (\text{A.7})$$

Luego, dado que las funciones u y v son armónicas conjugadas en la región Ω , la función F será también analítica en Ω . Además, tanto en sentido puntual c.t.p. como en el sentido de $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, se tienen los siguientes límites:

$$\begin{cases} \lim_{y \rightarrow 0^+} F(x + iy) = \frac{1}{2}[f(x) - iH(f)(x)] \\ \lim_{y \rightarrow 0^-} F(x + iy) = \frac{1}{2}[-f(x) - iH(f)(x)], \end{cases}$$

para $x \in \mathbb{R}$ c.t.p., puesto que la función u es impar con respecto a la segunda variable, mientras que la función v es par con respecto a la segunda variable. Por consiguiente, la función F definida en (A.7) resuelve directamente esta versión del problema de Riemann - Hilbert.

Bibliografía

- [1] V. I. Arnold and B. A. Khesin. *Topological Methods in Hydrodynamics*, volume 125. Springer Science & Business Media, 1999.
- [2] M. S. Baouendi and C. Goulaouic. Cauchy problem for analytic pseudo - differential operators. *Communications in Partial Differential Equations*, 1(2):135–189, 1976.
- [3] C. Bardos, S. Benachour, and M. Zerner. Analyticité des solutions periodiques de l'équation d'Euler en deux dimensions. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 282:995–998, 1976.
- [4] C. Bardos and E. Titi. Euler equations for incompressible ideal fluids. *Russian Mathematical Surveys*, 62(3):409, 2007.
- [5] J. T. Beale, T. Kato, and A. Majda. Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3D Euler equations. *Communications in Mathematical Physics*, 94(1):61–66, 1984.
- [6] J. Bec, U. Frisch, and T. Matsumoto. Singularities of Euler flow? Not out of the blue! *Journal of Statistical Physics*, 113(5-6):761–781, 2003.
- [7] J. B. Bell and D. L. Marcus. Vorticity intensification and transition to turbulence in three - dimensional Euler equations. *Communications in Mathematical Physics*, 147(2):371–394, 1992.
- [8] S. Benachour. Analyticité des solutions de l'équation d'Euler en trois dimensions. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 283:107–110, 1976.
- [9] J. Benameur. On the blow - up criterion of 3D Navier - Stokes equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 371(2):719–727, 2010.
- [10] A. L. Bertozzi and A. J. Majda. *Vorticity and Incompressible Flow*. Cambridge University Press, 2002.
- [11] M. E. Brachet, U. Frisch, D. I. Meiron, R. H. Morf, B. G. Nickel, and S. A. Orszag. Small - scale structure of the Taylor - Green vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, 130:411–452, 1983.
- [12] M. E. Brachet, M. Meneguzzi, H. Politano, P. L. Sulem, and A. Vincent. Numerical evidence of smooth self - similar dynamics and possibility of subsequent collapse for three - dimensional ideal flows. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics (1989-1993)*, 4(12):2845–2854, 1992.

- [13] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [14] L. Caffarelli, R. Kohn, and L. Nirenberg. Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier - Stokes equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 35(6):771–831, 1982.
- [15] G. F. Carnevale and P. Orlandi. Nonlinear amplification of vorticity in inviscid interaction of orthogonal Lamb dipoles. *Physics of Fluids (1994 - present)*, 19(5):057106, 2007.
- [16] D. Chae. Nonexistence of asymptotically self - similar singularities in the Euler and the Navier - Stokes equations. *Mathematische Annalen*, 338(2):435–449, 2007.
- [17] D. Chae. Nonexistence of self - similar singularities for the 3D incompressible Euler equations. *Communications in Mathematical Physics*, 273(1):203–215, 2007.
- [18] D. Chae. On the generalized self - similar singularities for the Euler and the Navier - Stokes equations. *Journal of Functional Analysis*, 258(9):2865–2883, 2010.
- [19] D. Chae. On the self - similar solutions of the 3D Euler and the related equations. *Communications in Mathematical Physics*, 305(2):333–349, 2011.
- [20] D. Chae and T. P. Tsai. Remark on Luo - Hou’s ansatz for a self - similar solution to the 3D Euler equations. *Journal of Nonlinear Science*, 25(1):193–202, 2015.
- [21] C. C. Chen, R. M. Strain, T. P. Tsai, and H. T. Yau. Lower bound on the blow - up rate of the axisymmetric Navier - Stokes equations. *International Mathematics Research Notices*, 2008:rnn016, 2008.
- [22] K. Choi, T. Hou, A. Kiselev, G. Luo, V. Šverák, and Y. Yao. On the finite - time blowup of a 1D model for the 3D axisymmetric Euler equations. *arXiv preprint arXiv:1407.4776*, 2014.
- [23] K. Choi, A. Kiselev, and Y. Yao. Finite time blow up for a 1D model of 2D Boussinesq system. *Communications in Mathematical Physics*, 334(3):1667–1679, 2015.
- [24] A. J. Chorin. The evolution of a turbulent vortex. *Communications in Mathematical Physics*, 83(4):517–535, 1982.
- [25] A. J. Chorin and J. E. Marsden. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer - Verlag, 1993.
- [26] P. Constantin. Geometric statistics in turbulence. *Siam Review*, 36(1):73–98, 1994.
- [27] P. Constantin. On the Euler equations of incompressible fluids. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 44(4):603–621, 2007.
- [28] P. Constantin, P. D. Lax, and A. Majda. A simple one - dimensional model for the three - dimensional vorticity equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 38(6):715–724, 1985.

- [29] A. Córdoba, D. Córdoba, and M. A. Fontelos. Formation of singularities for a transport equation with nonlocal velocity. *Annals of Mathematics*, pages 1377–1389, 2005.
- [30] S. de Gregorio. On a one - dimensional model for the three - dimensional vorticity equation. *Journal of Statistical Physics*, 59(5-6):1251–1263, 1990.
- [31] G. L. Eyink. Dissipative anomalies in singular Euler flows. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 237(14):1956–1968, 2008.
- [32] C. L. Fefferman. Existence and smoothness of the Navier - Stokes equation. *The Millennium Prize Problems*, pages 57–67, 2006.
- [33] A. B. Ferrari. On the blow - up of solutions of the 3D Euler equations in a bounded domain. *Communications in Mathematical Physics*, 155(2):277–294, 1993.
- [34] G. B. Folland. *Introduction to Partial Differential Equations*. Princeton University Press, 1995.
- [35] U. Frisch. Lectures on turbulence and lattice gas hydrodynamics. *Lecture Notes on Turbulence*, page 219, 1989.
- [36] U. Frisch, R. H. Morf, and S. A. Orszag. Spontaneous singularity in three - dimensional inviscid, incompressible flow. *Physical Review Letters*, 44(9):572, 1980.
- [37] H. Fujita and T. Kato. On the Navier - Stokes initial value problem I. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 16(4):269–315, 1964.
- [38] J. D. Gibbon. The three-dimensional Euler equations: Where do we stand? *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 237(14):1894–1904, 2008.
- [39] Y. Giga. Solutions for semilinear parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier - Stokes system. *Journal of Differential Equations*, 62(2):186–212, 1986.
- [40] D. Gottlieb and S. A. Orszag. *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1977.
- [41] A. E. Green and G. I. Taylor. Mechanism of the production of small eddies from large ones. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 158(895):499–521, 1937.
- [42] X. He. Self - similar singularities of the 3D Euler equations. *Applied Mathematics Letters*, 13(5):41–46, 2000.
- [43] E. Hopf. Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen. *Mathematische Nachrichten*, 4(1-6):213–231, 1950.
- [44] T. Hou and G. Luo. On the finite - time blowup of a 1D model for the 3D incompressible Euler equations. *arXiv preprint arXiv:1311.2613*, 2013.
- [45] T. Hou and G. Luo. Potentially singular solutions of the 3D incompressible Euler equations. *arXiv preprint arXiv:1310.0497*, 2013.

- [46] T. Hou and G. Luo. Toward the finite - time blowup of the 3D axisymmetric Euler equations: a numerical investigation. *Multiscale Modeling and Simulation*, 12(4):1722–1776, 2014.
- [47] T. Kato. Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in \mathbb{R}^3 . *Journal of Functional Analysis*, 9(3):296–305, 1972.
- [48] T. Kato and C. Y. Lai. Nonlinear evolution equations and the Euler flow. *Journal of Functional Analysis*, 56(1):15–28, 1984.
- [49] R. M. Kerr. Evidence for a singularity of the three - dimensional, incompressible Euler equations. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics (1989-1993)*, 5(7):1725–1746, 1993.
- [50] A. Kiselev and V. Šverák. Small scale creation for solutions of the incompressible two dimensional Euler equation. *arXiv preprint arXiv:1310.4799*, 2013.
- [51] A. Kiselev and A. Zlatoš. Blow up for the 2D Euler equation on some bounded domains. *Journal of Differential Equations*, 259(7):3490–3494, 2015.
- [52] G. Koch, N. Nadirashvili, G. A. Seregin, and V. Šverák. Liouville theorems for the Navier - Stokes equations and applications. *Acta Mathematica*, 203(1):83–105, 2009.
- [53] O. A. Ladyzhenskaya. *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, volume 2. Gordon and Breach Science Publishers, 1969.
- [54] J. Leray. Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace. *Acta Mathematica*, 63(1):193–248, 1934.
- [55] J. L. Lions and G. Prodi. Un théorème d’existence et d’unicité dans les équations de Navier - Stokes en dimension 2. *Comptes rendus de l’Académie des Sciences de Paris*, 248(25):3519–3521, 1959.
- [56] P. L. Lions. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics: Volume 1: Incompressible Models*. Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [57] E. R. Love. Repeated singular integrals. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(1):99–102, 1977.
- [58] C. Marchioro and M. Pulvirenti. *Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids*. Springer - Verlag, 1994.
- [59] H. K. Moffatt. Some remarks on topological fluid mechanics. In *An Introduction to the Geometry and Topology of Fluid Flows*, pages 3–10. Springer, 2001.
- [60] J. Nečas, M. Růžička, and V. Šverák. On Leray’s self - similar solutions of the Navier - Stokes equations. *Acta Mathematica*, 176(2):283–294, 1996.
- [61] H. Oertel. *Prandtl’s Essentials of Fluid Mechanics*. Springer Science & Business Media, 2004.
- [62] H. Okamoto, T. Sakajo, and M. Wunsch. On a generalization of the Constantin - Lax - Majda equation. *Nonlinearity*, 21(10):2447, 2008.

- [63] S. A. Orszag. Numerical simulation of the Taylor - Green vortex. In *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering (Part 2)*, pages 50–64. Springer, 1974.
- [64] J. N. Pandey. *The Hilbert Transform of Schwartz Distributions and Applications*. John Wiley & Sons, 1996.
- [65] R. L. Ricca. *An Introduction to the Geometry and Topology of Fluid Flows*, volume 47. Springer Science & Business Media, 2012.
- [66] V. Scheffer. Turbulence and Hausdorff dimension. In *Turbulence and Navier - Stokes Equations*, pages 174–183. Springer, 1976.
- [67] V. Scheffer. Hausdorff measure and the Navier - Stokes equations. *Communications in Mathematical Physics*, 55(2):97–112, 1977.
- [68] V. Scheffer. The Navier - Stokes equations on a bounded domain. *Communications in Mathematical Physics*, 73(1):1–42, 1980.
- [69] S. Schochet. Explicit solutions of the viscous model vorticity equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 39(4):531–537, 1986.
- [70] R. Shakarchi and E. Stein. *Complex Analysis*, volume 2. Princeton University Press, 2010.
- [71] E. D. Siggia. Collapse and amplification of a vortex filament. *Physics of Fluids (1958-1988)*, 28(3):794–805, 1985.
- [72] R. Temam. On the Euler equations of incompressible perfect fluids. *Journal of Functional Analysis*, 20(1):32–43, 1975.
- [73] R. Temam. *Navier - Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*. North - Holland Publishing Company, 1979.
- [74] F. G. Tricomi. *Integral Equations*. Courier Corporation, 1957.
- [75] T. P. Tsai. On Leray’s self - similar solutions of the Navier - Stokes equations satisfying local energy estimates. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 143(1):29–51, 1998.
- [76] M. R. Ukhovskii and V. I. Yudovich. Axially symmetric flows of ideal and viscous fluids filling the whole space. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 32(1):52–62, 1968.
- [77] J. L. Vázquez. *Fundamentos Matemáticos de la Mecánica de Fluidos*. Apuntes del curso impartido en la Universidad Autónoma de Madrid, 2003.
- [78] V. I. Yudovich. The flow of a perfect, incompressible liquid through a given region. In *Soviet Physics Doklady*, volume 7, page 789, 1963.