UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

MODELOS DE COMPETENCIA EN ESPECIES QUE ADMITEN UNA DISTRIBUCIÓN IDEAL FREE.

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCAS DE LA INGENIERÍA,
MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

NICOLÁS ESTEBAN TORRES ESCORZA

PROFESOR GUÍA:
SALOMÉ MARTÍNEZ SALAZAR

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JUAN DÁVILA BONCZOS
CARMEN CORTÁZAR SANZ

SANTIAGO DE CHILE
2016

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR AL
TÍTULO DE INGENIERIO CIVIL MATEMÁTICO
POR: NICOLÁS ESTEBAN TORRES ESCORZA
FECHA: 24/11/2016
PROF. GUÍA: SRA. SALOMÉ MARTÍNEZ SALAZAR

MODELOS DE COMPETENCIA EN ESPECIES QUE ADMITEN UNA DISTRIBUCIÓN IDEAL FREE.

En el presente trabajo se estudiará un sistema de reacción-difusión que modela la interacción de dos especies habitando una región, las cuales siguen ciertas estrategias de movimiento y compiten por una distribución de recursos común. Este sistema corresponde a una variante del modelo Lotka-Volterra competitivo y con difusión.

En ecología se dice que una especie admite distribución ideal free, si en cada ubicación la densidad de la especie es proporcional a la cantidad de recursos disponibles. Cosner, Cantrell y Lou, entre otros autores, han estudiado sistemas de reacción-difusión que admiten distribuciones ideal free. En particular, probaron que bajo ciertas condiciones, este tipo de estrategia resulta óptima, en el sentido que una especie adoptando esta estrategia no podrá ser invadida por una pequeña población que use una estrategia diferente.

En esta memoria, se extiende el trabajo de los autores mencionados, incluyendo términos de competencia interespecífica. El objetivo es estudiar las relaciones entre la estrategia de movimiento y los términos de competencia, en el comportamiento asintótico de las soluciones, en particular la convergencia a equilibrios y existencia de estados de coexistencia.

Dentro de los resultados obtenidos, se describirá el caso donde ambas especies siguen la estrategia ideal free, para diferentes valores de los parámetros del sistema. Por otro lado, se demostrará un resultado de no coexistencia, en el caso general de estrategias de movimiento. Además, se analizará un resultado de múltiple coexistencia, en el caso que solamente una especie admite la estrategia ideal free.

Para obtener dichos resultados, se utilizará la teoría de los sistemas dinámicos monótonos, que será fundamental para determinar convergencia a los equilibrios. Además será importante la teoría de ecuaciones elípticas y parabólicas, donde destaca las técnicas basadas en sub/supersoluciones y los resultados espectrales de operadores elípticos. Para los resultados de múltiple coexistencia, se utilizará la teoría de bifurcaciones y argumentos relaciones con perturbaciones singulares para estudiar casos límite.

*" Cal carregar la guitarra a l'esquena i tornar a fer el camí
que un vespre gris remuntant la carena em va dur fins ací."*

Agradecimientos

Quisiera comenzar agradeciendo a mi familia por su disposición y apoyo brindado todos estos años.

A mi profesora guía, por ser una de las personas que motivó mi interés por las ecuaciones en derivadas parciales.

A la comisión, por aceptar ser parte del proceso de mi titulación.

A mis amigos Birlera y Mariscal, por su compañía durante este camino por la universidad.

A mis amigos Sebastián y Javiera.

A Rafael, mi amigo de la infancia.

A mis compañeros del DIM.

A los profesores y funcionarios.

A mis amigos en el $(\mathrm{DIM})^c$.

Por último, agradecimientos al proyecto FONDECYT 1130602 por financiar este trabajo de tesis.

Tabla de Contenido

Introducción

En el ámbito de la ecología, los modelos que describen la dinámica de poblaciones interactuando en un medio han sido ampliamente estudiados utilizando diversas herramientas matemáticas. Entre aquellos modelos destacan los sistemas de reacción-difusión, los cuales permiten modelar fenómenos como migraciones, mortalidad y reproducción de determinadas especies habitando una región.

En este contexto surge la motivación de estudiar cómo influyen en la dinámica de poblaciones los parámetros relacionados con las especies y el medioambiente, siendo interesantes los fenómenos de difusión y competencia entre especies. La difusión está relacionada con el movimiento de las especies en su hábitat, el cual puede ser influenciado por factores como la búsqueda de recursos y migraciones a lugares más favorables. Por otro lado, en los fenómenos de competencia ambas especies se nutren de una distribución de recursos común y se contraponen sus habilidades para obtener dichos recursos.

El modelo a estudiar en este trabajo corresponde a una versión competitiva del modelo Lotka-Volterra difusivo en el cual participan 2 especies habitando una región. Dicho modelo está dado por el siguiente sistema parabólico:

$$\begin{aligned} u_t = \mu\nabla\cdot[\nabla u - u\nabla P] + u(m(x) - u - av) &\quad \text{en}\,\Omega\times(0,\infty)\\ v_t = \nu\nabla\cdot[\nabla v - v\nabla Q] + v(m(x) - bu - v) &\quad \text{en}\,\Omega\times(0,\infty)\\ [\nabla u - u\nabla P]\cdot n = [\nabla v - v\nabla Q]\cdot n = 0 &\quad \text{en}\,\partial\Omega\times(0,\infty)\\ u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x) &\quad \text{en}\,\overline{\Omega} \end{aligned} \tag{1}$$

donde $u(x,t), v(x,t)$ representan las densidades de especies, las cuales son no negativas, y $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ es un abierto acotado con $\partial\Omega$ de clase $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ para $\alpha\in(0,1)$.

Los términos $\mu,\nu>0$ son los **coeficientes de difusión** y las funciones $P,Q\in\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ serán llamadas **estrategias de movimiento**. Para la primera especie, el término $\mu\nabla\cdot[\nabla u - u\nabla P]$ representa la difusión aleatoria más un efecto de transporte, en donde el movimiento está guiado por el gradiente de P. Igualmente, para la segunda especie ocurre el mismo fenómeno con el gradiente de Q.

Por otro lado, la función $m\in\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ con $m>0$ en $\overline{\Omega}$, corresponde a la **capacidad de sustentación del ambiente**, la cual está relacionada con la distribución de recursos en $\overline{\Omega}$. Los términos $a,b>0$ son los **coeficientes de competencia interespecífica** que representan la habilidad de las especies en obtener los recursos, como en el modelo de Lotka-Volterra clásico.

La normal unitaria exterior en $\partial\Omega$ es denotada por n y las condiciones de borde establecen que no hay flujo a través de $\partial\Omega$, con lo cual el comportamiento del sistema será estudiado en ausencia de influencias externas. Por último, u_0, v_0 son las respectivas densidades iniciales, las cuales son funciones continuas y no negativas en $\overline{\Omega}$.

Un aspecto importante del sistema es estudiar los equilibrios de (1), los cuales corresponden a soluciones del siguiente sistema elíptico:

$$\begin{aligned} \mu\nabla\cdot[\nabla u - u\nabla P] + u(m(x) - u - av) &= 0 \quad \text{en}\,\Omega \\ \nu\nabla\cdot[\nabla v - v\nabla Q] + v(m(x) - bu - v) &= 0 \quad \text{en}\,\Omega \\ [\nabla u - u\nabla P]\cdot n = [\nabla v - v\nabla Q]\cdot n &= 0 \quad \text{en}\,\partial\Omega \end{aligned} \tag{2}$$

Un **equilibrio de coexistencia** es una solución (u, v) de (2), tal que u, v son estrictamente positivas. Determinar la existencia y estabilidad de los equilibrios será fundamental para estudiar el sistema (1).

Para motivar la discusión, considere un equilibrio donde solo habita la primera especie, es decir, el problema elíptico:

$$\begin{aligned} \mu\nabla\cdot[\nabla u - u\nabla P] + u(m(x) - u) &= 0 \quad \text{en}\,\Omega \\ [\nabla u - u\nabla P]\cdot n &= 0 \quad \text{en}\,\partial\Omega \end{aligned} \tag{3}$$

Es sabido que esta ecuación admite una única solución u^* que es positiva. Análogamente, suponiendo que solo habita la segunda especie, se obtiene v^* que es la única solución positiva de la ecuación anterior, poniendo Q en vez de P. Esto determina en (1) los equilibrios $(u^*, 0), (0, v^*)$ que serán llamados **equilibrios semitriviales**, los cuales jugarán un rol importante en determinar en la dinámica del sistema.

Una pregunta relevante es bajo qué condiciones hay una concordancia entre la densidad de la especie y la capacidad de sustentación del ambiente, es decir $u^* = m$. Cantrell et al. en [5] notaron que esta situación ocurre si y solamente si $P - \ln m$ es constante, implicando en particular que el movimiento neto de la especie será nulo. Se dirá entonces que P es una estrategia de movimiento **ideal free** o simplemente que la especie es ideal free, si $P - \ln m$ es constante. Sin perder generalidad se puede considerar $P = \ln m$.

La estrategia ideal free ha sido estudiada anteriormente por autores como Cosner, Cantrell, Lou et al. en [25, 4, 5, 8]. Además, modelos similares han sido estudiados por Korobenko & Braverman en [15, 14]. En particular Averill, Lou & Munther en [2] demostraron el siguiente resultado:

Teorema 0.1 *Considere $\mu, \nu > 0$ cualesquiera. Suponga que $a = b = 1$, $P = \ln m$ y que $Q - \ln m$ no es constante. Entonces para todo u_0, v_0 continuas y no negativas con $u_0 \not\equiv 0$, la solución (u, v) de* (1) *satisface que:*

$$\lim_{t\to\infty}(u(x,t), v(x,t)) = (m(x), 0) \text{ en } \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega})$$

Este resultado indica que si u es ideal free y ambas especies compiten en igualdad de condiciones, entonces u sobrevivirá ante cualquier estrategia distinta de movimiento que adopte la especie v. Además u irá convergiendo a la capacidad de sustentación y v se irá extinguiendo. La estrategia ideal free es óptima en el sentido que asegura la supervivencia y se aprovechan todos los recursos del medioambiente.

En este trabajo se demostrarán resultados sobre el comportamiento del sistema (1), cuando al menos una de las especies sigue la estrategia ideal free y varían los coeficientes de competencia.

En el capítulo 2, se estudiará el caso donde ambas especies tienen estrategias ideal free, considerando como los distintos valores de los coeficientes de competencia regulan el comportamiento del sistema (1). Se recuperará en cierto sentido el conocido caso donde ambas especies siguen difusión aleatoria y m es constante, el cual fue estudiado por Pao en [21].

En la sección 3.1, se demostrarán resultados de no coexistencia en el sistema (1) , para cualquier par de estrategias de movimiento $P, Q \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. En particular, se estudiará el caso donde uno de los coeficientes de competencia es grande y también el caso donde es pequeño. Además se probará que en tales casos, uno de los equilibrios semitriviales atraerá a todas las soluciones con condiciones iniciales no negativas y no triviales.

Finalmente en la sección 3.2, se demostrará que en el caso donde solo una de las especies es ideal free, será posible obtener múltiples equilibrios de coexistencia bajo cierta elección conveniente de los parámetros. De esta forma, se logrará contrastar el caso anterior donde no era posible la coexistencia de las especies.

En este trabajo se aplicarán diferentes teorías que son la piedra angular de los trabajos anteriores respecto al sistema (1). Destaca principalmente la teoría de los sistemas dinámicos monótonos desarrollada por autores como Hirsch y Smith en [11, 23] respectivamente. Esta teoría será fundamental en determinar posibles convergencias a equilibrios.

Entre otras técnicas importantes, se encuentra el método de sub/supersoluciones para ecuaciones elípticas y parabólicas, los cuales aportarán argumentos de comparación y existencia. Además se utilizará la teoría de los funcionales de Lyapunov en dimensión infinita, destacando el principio de invarianza de LaSalle, que permitirá determinar conjuntos atractores en ciertos casos. Por último, del análisis funcional se utilizará la teoría de bifurcaciones, que aportará significativos resultados de existencia.

Capítulo 1

Resultados preliminares

En este capítulo se presentarán los principales conceptos y resultados teóricos que serán necesarios para estudiar el sistema (1), indicando referencias y entregando las demostraciones en caso que sea necesario.

1.1. Existencia, unicidad y positividad

1.1.1. Dinámica del sistema para una especie

Para empezar considere el caso del sistema (1) donde solo habita la primera especie:

$$\begin{aligned} u_t = \mu\nabla\cdot[\nabla u - u\nabla P] + u(m(x) - u) &\quad \text{en}\,\Omega\times(0,\infty) \\ [\nabla u - u\nabla P]\cdot n = 0 &\quad \text{en}\,\partial\Omega\times(0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) &\quad \text{en}\,\overline{\Omega} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Como se desea estudiar soluciones positivas, se trabajará en el espacio

$$\mathcal{C}_+(\overline{\Omega}) \coloneqq \{u\in\mathcal{C}(\overline{\Omega})\colon u(x)\geq 0\,\forall x\in\overline{\Omega}\}$$

con la usual topología de la norma del supremo.

Para estudiar (1.1) usando resultados conocidos, resultará útil realizar el cambio de variables $U = e^{-P}u$, el que será usado a lo largo de este trabajo. Así (1.1) es reescrito como:

$$\begin{aligned} U_t = \mu e^{-P}\nabla\cdot[e^P\nabla U] + U(m(x) - e^P U) &\quad \text{en}\,\Omega\times(0,\infty) \\ \nabla U\cdot n = 0 &\quad \text{en}\,\partial\Omega\times(0,\infty) \\ U(x,0) = U_0(x) &\quad \text{en}\,\overline{\Omega} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Respecto a este sistema, se cumple lo siguiente:

Teorema 1.1 *Para cada condición inicial $U_0\in\mathcal{C}_+(\overline{\Omega})$, el sistema* (1.2) *tiene una única solución U, la cual está en $\mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\times[0,\infty)\right)$. Tal solución es no negativa y si $U_0\not\equiv 0$, entonces $U>0$ en $\overline{\Omega}\times(0,\infty)$.*

Para una demostración, ver la sección 2.4 en [22].

En el estudio del sistema (1.2) es importante determinar sus equilibrios, i.e. soluciones del siguiente problema elíptico:

$$\begin{aligned} \mu\nabla \cdot [e^P \nabla U] + e^P U(m(x) - e^P U) = 0 \quad &\text{en}\, \Omega \\ \nabla U \cdot n = 0 \quad &\text{en}\, \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.3}$$

De este modo, el comportamiento de (1.2) está expresado en el resultado siguiente:

Teorema 1.2 *La ecuación* (1.3) *tiene una única solución U^* tal que $U^* > 0$ en $\overline{\Omega}$.*
Además, para todo $U_0 \in \mathcal{C}_+(\overline{\Omega})$ con $U_0 \not\equiv 0$, se tiene que la solución de (1.2) *satisface que:*

$$\lim_{t\to\infty} U(x,t) = U^*(x) \text{ en } \mathcal{C}(\overline{\Omega})$$

La demostración de este resultado está contenida en los teoremas 3.2 y 3.3 en [3].

En términos de la ecuación (1.1), toda solución u con condición inicial $u_0 \not\equiv 0$ convergerá uniformemente al único equilibrio positivo $u^* = e^P U^*$. Se concluye entonces que la dinámica para una especie es simple.

Observación En el caso que $P = \ln m$ se tiene que $U^* = 1$, es decir $u^* = m$.

Análogamente, para el problema donde solo habita la segunda especie:

$$\begin{aligned} v_t = \nu\nabla \cdot [\nabla v - v\nabla Q] + v(m(x) - v) \quad &\text{en}\, \Omega \times (0, \infty) \\ [\nabla v - v\nabla Q] \cdot n = 0 \quad &\text{en}\, \partial\Omega \times (0, \infty) \\ v(x, 0) = v_0(x) \quad &\text{en}\, \overline{\Omega} \end{aligned} \tag{1.4}$$

se obtiene un equilibrio v^*, que es la única solución positiva de:

$$\begin{aligned} \nu\nabla \cdot [\nabla v - v\nabla Q] + v(m(x) - v) = 0 \quad &\text{en}\, \Omega \\ [\nabla v - v\nabla Q] \cdot n = 0 \quad &\text{en}\, \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.5}$$

donde toda solución v de (1.4) con $v_0 \not\equiv 0$, convergerá uniformemente a v^*.

Como se mencionó en la introducción, las soluciones $(u^*, 0)$ y $(0, v^*)$ en el sistema (1) serán llamadas **equilibrios semitriviales**. Estos equilibrios serán importantes en la dinámica para dos especies.

1.1.2. Dinámica del sistema para dos especies

Para estudiar el sistema (1), se utilizará a lo largo de este trabajo el cambio de variables $U = e^{-P}u, V = e^{-Q}v$. De este modo, el sistema queda reescrito como:

$$\begin{aligned} U_t = \mu e^{-P}\nabla \cdot [e^P \nabla U] + U(m(x) - e^P U - a e^Q V) \quad &\text{en}\, \Omega \times (0, \infty) \\ V_t = \nu e^{-Q}\nabla \cdot [e^Q \nabla V] + V(m(x) - b e^P U - e^Q V) \quad &\text{en}\, \Omega \times (0, \infty) \\ \nabla U \cdot n = \nabla V \cdot n = 0 \quad &\text{en}\, \partial\Omega \times (0, \infty) \\ U(x, 0) = U_0(x), V(x, 0) = V_0(x) \quad &\text{en}\, \overline{\Omega} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Respecto de (1.6), se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1.3 *Para cada condición inicial $U_0, V_0 \in \mathcal{C}_+(\overline{\Omega})$, el sistema* (1.6) *tiene una única solución (U, V), donde ambas funciones están en $\mathcal{C}\left(\overline{\Omega} \times [0, \infty)\right)$. Además U, V son no negativas y si $U_0, V_0 \not\equiv 0$, entonces $U, V > 0$ en $\overline{\Omega} \times (0, \infty)$.*

Para una demostración de este resultado, ver el teorema 7.2 del capítulo 8 en [22].

Además el sistema (1.6) satisface la siguiente propiedad de invarianza, que es consecuencia del principio de comparación descrito por la proposición 1.31.

Proposición 1.4 *Sean $\rho_1, \rho_2 > 0$ constantes tal que $m - e^P \rho_1 \leq 0$ y $m - e^Q \rho_2 \leq 0$ en $\overline{\Omega}$. Si (U_0, V_0) es tal que $0 \leq U_0 \leq \rho_1$, $0 \leq V_0 \leq \rho_2$ en $\overline{\Omega}$, entonces $0 \leq U \leq \rho_1$, $0 \leq V \leq \rho_2$ en $\overline{\Omega} \times [0, \infty)$.*

Una consecuencia de la propiedad de invarianza es que todas las soluciones serán acotadas.

Observación Si alguna de las condiciones iniciales U_0, V_0 es nula entonces el sistema se reduce simplemente al caso de una especie, obteniendo la correspondiente convergencia a uno de los equilibrios semitriviales. Por lo tanto, el estudio se centrará para condiciones iniciales tal que $U_0, V_0 \not\equiv 0$.

De ahora en adelante se denominará X al espacio $\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, dotado de la norma $||(f, g)|| = \max\{||f||_\infty, ||g||_\infty\}$. Además se define $X_+ := \mathcal{C}_+(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_+(\overline{\Omega})$, cuyo interior es $\operatorname{Int} X_+ = \{(U, V) \in X_+ \colon U > 0, V > 0 \text{ en } \overline{\Omega}\}$.

Una propiedad importante de (1.6) es que determina un semiflujo en X_+ (ver definición 1.32).

Teorema 1.5 *Las soluciones de* (1.6) *son expresadas por un semiflujo $\{T_t : X_+ \to X_+\}_{t \geq 0}$ en donde:*

$$T_t(U_0, V_0) := (U(\cdot, t), V(\cdot, t))$$

y se cumplen las siguientes propiedades:

- *Para cada $(U_0, V_0) \in X_+$, la aplicación $t \mapsto T_t(U_0, V_0)$ es continua para $t \geq 0$ y de clase $\mathcal{C}^1$ para $t > 0$.*
- *Para cada $t > 0$, la aplicación $(U_0, V_0) \mapsto T_t(U_0, V_0)$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en X_+. Además, ambas componentes de T_t estarán en $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$.*
- *Para cada $(U_0, V_0) \in X_+$, su órbita dada por el conjunto $\{T_t(U_0, V_0) \colon t \geq 0\}$, es relativamente compacta X_+.*
- *Para $t > 0$, si $B \subset X_+$ es cerrado y acotado, entonces $T_t(B)$ es relativamente compacto en X_+.*

Para una demostración vea el teorema 3.1 capítulo 7 en [23], el teorema 4.1 en [19] y utilice la propiedad de invarianza.

Del cambio de variables considerado, se obtiene que las propiedades de existencia, unicidad, positividad, semiflujo y compacidad; se cumplen también para el sistema (1).

1.2. Estabilidad de los equilibrios

En esta sección se verán resultados sobre la estabilidad de los equilibrios de (1). Mediante el cambio de variables indicado anteriormente, los resultados se obtendrán aplicando la teoría clásica al sistema (1.6) en el espacio X_+.

De igual forma que en el sistema (1), se dirá que (U, V) es un equilibrio de (1.6) si es solución de:

$$\begin{aligned} \mu e^{-P}\nabla \cdot [e^P \nabla U] + U(m(x) - e^P U - ae^Q V) = 0 \quad &\text{en}\,\Omega \\ \nu e^{-Q}\nabla \cdot [e^Q \nabla V] + V(m(x) - be^P U - e^Q V) = 0 \quad &\text{en}\,\Omega \\ \nabla U \cdot n = \nabla V \cdot n = 0 \quad &\text{en}\,\partial\Omega \end{aligned} \tag{1.7}$$

Si además $U, V > 0$ en $\overline{\Omega}$, se dirá que (U, V) es un equilibrio de coexistencia.

Respecto a los equilibrios de (1.6), se tienen las siguientes estimaciones:

Proposición 1.6 *Sea (U, V) una solución de* (1.7) *con U, V no negativas. Entonces se cumple que:*

$$||U||_\infty \leq ||e^{-P}m||_\infty,\ ||V||_\infty \leq ||e^{-Q}m||_\infty$$

.

Demostración. Suponga $||U||_\infty > ||e^{-P}m||_\infty$ y considere $x^* \in \overline{\Omega}$ tal que $U(x^*) = ||U||_\infty$.

Si $x^* \in \Omega$, entonces $e^{-P}\mu\nabla \cdot [e^P \nabla U](x^*) \leq 0$, pues x^* es un máximo. Además, se tiene que $U(x^*) > me^{-P}(x^*)$ y por ende:

$$0 \geq e^{-P}\mu\nabla \cdot [e^P \nabla U](x^*) = -U(m - e^P U - ae^Q V)(x^*) > 0$$

lo que es una contradicción. De esta forma, se concluye que $x^* \in \partial\Omega$.

Sea B una esfera interior tal que $x^* \in \partial B$. Por continuidad suponga que $U > me^{-P}$ en B, lo cual implica que:

$$e^{-P}\mu\nabla \cdot [e^P \nabla U] = -U(m - e^P U - ae^Q V) > 0 \text{ en } B$$

Note que para todo $x \in B$ se cumple que $U(x^*) > U(x)$. Así, del lema de Hopf se concluye que $[\nabla U \cdot n](x^*) > 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $||U||_\infty \leq ||e^{-P}m||_\infty$ y la otra desigualdad es demostrada análogamente. □

A continuación, se recordarán las siguientes definiciones de estabilidad para un equilibrio.

Definición 1.7 *Un equilibrio (U, V) se dirá* ***estable*** *si $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$, tal que $||(U_0, V_0) - (U, V)|| < \delta$ implica que*

$$||T_t(U_0, V_0) - (U, V)|| < \varepsilon,\ \forall t \geq 0$$

Además, (U, V) se dirá ***asintóticamente estable*** *si es estable y $\exists\delta > 0$ tal que $||(U_0, V_0) - (U, V)|| < \delta$ implica que*

$$\lim_{t\to\infty} ||T_t(U_0, V_0) - (U, V)|| = 0$$

Por último, si (U, V) no es estable, se dirá simplemente que es ***inestable****.*

Observación La estabilidad de (U, V) en el sistema (1.6) se hereda al correspondiente equilibrio (u, v) en (1).

Considere el problema de valores propios correspondiente a la linealización en torno a (U, V), es decir:

$$\begin{aligned} \mu e^{-P}\nabla\cdot[e^P\nabla\varphi]+(m-2e^PU-ae^QV)\varphi-ae^QU\psi=\lambda\varphi \quad &\text{en}\,\Omega \\ \nu e^{-Q}\nabla\cdot[e^Q\nabla\psi]+(m-be^PU-2e^QV)\psi-be^PV\varphi=\lambda\psi \quad &\text{en}\,\Omega \\ \nabla\varphi\cdot n=\nabla\psi\cdot n=0 \quad &\text{en}\,\partial\Omega \end{aligned} \tag{1.8}$$

donde (φ, ψ) es la función propia y λ es el valor propio. Respecto del problema (1.8), se tiene la siguiente proposición:

Proposición 1.8 *Sea (U, V) un equilibrio de coexistencia. Entonces para el problema* (1.8) *existe un valor propio λ_0 que satisface las siguientes propiedades:*

- *Tiene multiplicidad algebraica uno y una función propia (φ_0, ψ_0) tal que $\varphi_0 > 0, \psi_0 < 0$ en $\overline{\Omega}$.*
- *Si λ es otro valor propio, entonces $\Re(\lambda) < \lambda_0$.*
- *Si (φ, ψ) es función propia asociada a algún λ tal que $\varphi > 0, \psi < 0$ en $\overline{\Omega}$, entonces debe ser un múltiplo de (φ_0, ψ_0) y $\lambda = \lambda_0$.*

Se dirá que λ_0 es el **valor propio principal** de (1.8), similar al caso de una sola ecuación elíptica. Cabe destacar que este resultado corresponde a una aplicación del teorema de Krein-Rutman en sistemas competitivos. Para una demostración de este resultado, vea el teorema 6.1 del capítulo 7 en [23].

Sobre la estabilidad de un equilibrio de coexistencia se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.9 *Sea (U, V) un equilibrio de coexistencia y λ_0 el valor propio principal de* (1.8)*. Si $\lambda_0 < 0$, entonces (U, V) es asintóticamente estable. Si $\lambda_0 > 0$, entonces (U, V) es inestable y en tal caso se dirá que es **linealmente inestable**.*

Para una demostración de los dos resultados anteriores, vea respectivamente los teoremas 6.1 y 6.2 del capítulo 7 en [23].

1.2.1. Estabilidad de los equilibrios semitriviales

Considere ahora $(U^*, 0)$ y $(0, V^*)$ los equilibrios semitriviales de (1.6), asociados respectivamente a $(u^*, 0)$ y $(0, v^*)$ mediante el cambio de variables $U^* = e^{-P}u^*$, $V^* = e^{-Q}v^*$, indicando anteriormente. Para $(U^*, 0)$, el problema (1.8) está dado por:

$$\begin{aligned} \mu\nabla\cdot[e^P\nabla\varphi]+(m-2e^PU^*)e^P\varphi-ae^{P+Q}U^*\psi=\lambda e^P\varphi \quad &\text{en}\,\Omega \\ \nu\nabla\cdot[e^Q\nabla\psi]+(m-be^PU^*)e^Q\psi=\lambda e^Q\psi \quad &\text{en}\,\Omega \\ \nabla\varphi\cdot n=\nabla\psi\cdot n=0 \quad &\text{en}\,\partial\Omega \end{aligned} \tag{1.9}$$

Sobre la estabilidad del equilibrio semitrivial $(U^*, 0)$, se establece el siguiente resultado:

Proposición 1.10 *Sea λ_0 el valor propio principal del problema:*

$$\begin{aligned} \nu\nabla\cdot[e^Q\nabla\psi]+(m-be^PU^*)e^Q\psi &= \lambda e^Q\psi \quad \text{en } \Omega \\ \nabla\psi\cdot n &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.10}$$

Si $\lambda_0 < 0$, entonces $(U^*, 0)$ es asintóticamente estable. Si $\lambda_0 > 0$, entonces $(U^*, 0)$ es linealmente inestable.

Para una demostración, consulte el lema 5.5 en [6]. El resultado anterior indica que para estudiar la estabilidad de $(U^*, 0)$, el problema de valores propios se reduce a una sola ecuación. Además, se tiene el mismo resultado de estabilidad para el equilibrio $(0, V^*)$, aplicado al problema:

$$\begin{aligned} \mu\nabla\cdot[e^P\nabla\varphi]+(m-ae^QV^*)e^P\varphi &= \lambda e^P\varphi \quad \text{en } \Omega \\ \nabla\varphi\cdot n &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.11}$$

En otras palabras, estos sistemas cumplen el principio de estabilidad linealizada.

El siguiente teorema establece la forma en que cambia la estabilidad de los equilibrios semitriviales, en función de los coeficientes competencia.

Teorema 1.11 *Existe $\widetilde{b} > 0$ tal que $(U^*, 0)$ es linealmente inestable si $b < \widetilde{b}$ y asintóticamente estable si $b > \widetilde{b}$. De igual forma, existe $\widetilde{a} > 0$ tal que $(0, V^*)$ es linealmente inestable si $a < \widetilde{a}$ y asintóticamente estable si $a > \widetilde{a}$.*

Demostración. Sea λ_0 el valor propio principal del problema (1.10) y φ_0 una función propia tal que $\varphi_0 > 0$ en $\overline{\Omega}$. Se sabe λ_0 es caracterizado variacionalmente como

$$\lambda_0(b) = \sup_{\varphi\in W^{1,2}(\Omega)\setminus\{0\}} \left\{ \frac{-\nu\int_\Omega e^Q|\nabla\varphi|^2 + \int_\Omega (m-be^PU^*)e^Q\varphi^2}{\int_\Omega e^Q\varphi^2} \right\}$$

donde el supremo es alcanzado en φ_0. Además, λ_0 es continua y estrictamente decreciente como función de b.

Se afirma que $\lim\limits_{b\to\infty} \lambda_0(b) = -\infty$. Si $b > 0$, entonces para todo $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)\setminus\{0\}$ se tiene que:

$$\lambda_0(b) \leq \lambda_0(0) - b \min_{\overline{\Omega}} e^PU^*$$

Como $\min\limits_{\overline{\Omega}} e^PU^* > 0$, al tomar $b \to \infty$ se tiene lo afirmado. Por otro lado, $\lambda_0(0) > 0$ pues:

$$\lambda_0(0) \geq \frac{\int_\Omega me^Q}{\int_\Omega e^Q} > 0$$

De la continuidad y monotonía estricta de $\lambda_0(b)$, existe un único $\widetilde{b} > 0$ tal que $\lambda_0(\widetilde{b}) = 0$, donde además $\lambda_0(b) > 0$ si $b < \widetilde{b}$ y $\lambda_0(b) < 0$ si $b > \widetilde{b}$. Finalmente, de la proposición anterior se concluye la estabilidad de $(U^*, 0)$ en cada caso. La demostración para el equilibrio $(0, V^*)$ es análoga, aplicando el argumento anterior al problema (1.11). □

Los números $\widetilde{a}$ y $\widetilde{b}$, donde ocurre el cambio de estabilidad en los equilibrios semitriviales, serán llamados **valores críticos de estabilidad**. De la demostración del teorema anterior, es posible caracterizar variacionalmente dichos valores, como indica el siguiente resultado:

Corolario 1.12 *El valor crítico $\widetilde{b}$ está dado por:*

$$\widetilde{b} = \sup_{\varphi \in W^{1,2}(\Omega)\setminus\{0\}} \left\{ \frac{-\nu \int_\Omega e^Q |\nabla\varphi|^2 + \int_\Omega m e^Q \varphi^2}{\int_\Omega U^* e^{P+Q} \varphi^2} \right\}$$

Además, es el único valor de b tal que el siguiente problema elíptico:

$$\begin{aligned} \nu\nabla\cdot[e^Q\nabla\psi] + (m - be^P U^*)e^Q\psi = 0 \quad & \textit{en } \Omega \\ \nabla\psi\cdot n = 0 \quad & \textit{en } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.12}$$

admite una solución $\psi > 0$ en $\overline{\Omega}$. Igualmente, el valor crítico $\widetilde{a}$ está dado por:

$$\widetilde{a} = \sup_{\varphi \in W^{1,2}(\Omega)\setminus\{0\}} \left\{ \frac{-\mu \int_\Omega e^P |\nabla\varphi|^2 + \int_\Omega m e^P \varphi^2}{\int_\Omega V^* e^{P+Q} \varphi^2} \right\}$$

y es el único valor de a tal que el problema elíptico:

$$\begin{aligned} \mu\nabla\cdot[e^P\nabla\varphi] + (m - ae^Q V^*)e^P\varphi = 0 \quad & \textit{en } \Omega \\ \nabla\varphi\cdot n = 0 \quad & \textit{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

admite una solución $\varphi > 0$ en $\overline{\Omega}$.

Demostración. En la demostración del teorema anterior se vio que $\lambda_0(\widetilde{b}) = 0$ en el problema (1.10), esto implica que existe $\psi_0 > 0$ en $\overline{\Omega}$ tal que:

$$\begin{aligned} \nu\nabla\cdot[e^Q\nabla\psi_0] + me^Q\psi_0 = \widetilde{b}e^{P+Q}U^*\psi_0 \quad & \text{en } \Omega \\ \nabla\psi_0\cdot n = 0 \quad & \text{en } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.13}$$

Por lo tanto, $\widetilde{b}$ puede ser visto como el valor propio principal de un problema con peso, de lo cual se obtiene la caracterización variacional. Además, al ser $\widetilde{b}$ un valor propio principal, se concluye que es el único valor de b tal que el problema (1.12) admite una solución $\psi > 0$ en $\overline{\Omega}$. La demostración para el valor crítico $\widetilde{a}$ es análoga. □

En el caso ideal free, los valores críticos de estabilidad cumplen lo siguiente:

Teorema 1.13 *Si $P - \ln m$ es constante, entonces $\widetilde{b} = 1$. Además $\widetilde{a} \geq 1$, alcanzando la igualdad si y solo si $Q - \ln m$ es constante.*

Demostración. Sin perder generalidad suponga $P = \ln m$. En tal caso se tiene $U^* = 1$ y que

$$\widetilde{b} = \sup_{\varphi \in W^{1,2}(\Omega)\setminus\{0\}} \left\{ \frac{-\nu \int_\Omega e^Q |\nabla\varphi|^2}{\int_\Omega m e^Q \varphi^2} \right\} + 1$$

Notando que el supremo se alcanza cuando φ es una constante no nula, se concluye entonces que $\widetilde{b} = 1$. Análogamente, cuando $Q - \ln m$ es constante se obtiene que $\widetilde{a} = 1$.

Por otro lado, como $v^* = e^Q V^*$, el correspondiente problema de valores propios de $\widetilde{a}$ está dado por:

$$\begin{aligned} \mu\nabla\cdot[m\nabla\varphi_0] + (m - \widetilde{a}v^*)m\varphi_0 = 0 \quad & \text{en } \Omega \\ \nabla\varphi_0\cdot n = 0 \quad & \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

con $\varphi_0 > 0$ en $\overline{\Omega}$. Dividiendo esta ecuación por φ_0 e integrando por partes, se obtiene que:

$$\mu \int_\Omega m \frac{|\nabla \varphi_0|^2}{(\varphi_0)^2} + \int_\Omega (m - \widetilde{a} v^*) m = 0$$

Además, integrando la ecuación (1.5), se concluye que $\int_\Omega v^*(m - v^*) = 0$ y por lo tanto:

$$\mu \int_\Omega m \frac{|\nabla \varphi_0|^2}{(\varphi_0)^2} + \int_\Omega (m - \widetilde{a} v^*)^2 = \widetilde{a}(\widetilde{a} - 1) \int_\Omega (v^*)^2$$

Como el lado izquierdo es no negativo, necesariamente $\widetilde{a} \geq 1$. Además si $\widetilde{a} = 1$ entonces $v^* = m$ y de la ecuación (1.5) se deduce que:

$$\begin{aligned} \nu \nabla \cdot \left[e^Q \nabla \left(\frac{v^*}{e^Q} \right) \right] &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ \nabla \left(\frac{v^*}{e^Q} \right) \cdot n &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

lo cual implica que $Q - \ln m$ es constante. □

Una propiedad importante es que los equilibrios semitriviales son en general aislados.

Teorema 1.14 *Si $b \neq \widetilde{b}$, entonces el equilibrio $(U^*, 0)$ es aislado, i.e. existe un abierto de $(U^*, 0)$ en X_+, donde $(U^*, 0)$ es el único equilibrio. Igualmente, si $a \neq \widetilde{a}$, entonces $(0, V^*)$ es aislado.*

DEMOSTRACIÓN. Suponga que existe una sucesión de equilibrios de coexistencia $(U_k, V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k \to \infty} (U_k, V_k) = (U^*, 0)$ en X, donde (U_k, V_k) es solución de:

$$\begin{aligned} \mu \nabla \cdot [e^P \nabla U_k] + e^P U_k (m(x) - e^P U_k - a e^Q V_k) &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ \nu \nabla \cdot [e^Q \nabla V_k] + e^Q V_k (m(x) - b e^P U_k - e^Q V_k) &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ \nabla U_k \cdot n = \nabla V_k \cdot n &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

Por teoría de regularidad en espacios de Sobolev, $(U_k, V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es acotada en $W^{2,p}(\Omega)$ con $p > N$, de modo que tiene una subsucesión convergente en $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para cierto $\alpha \in (0,1)$. Luego por teoría de regularidad en espacios de Hölder, se obtiene una subsucesión convergente en $C^2(\overline{\Omega})$.

Sea $w_k = \frac{V_k}{||V_k||_\infty}$. Por el mismo argumento anterior, (w_k) tiene una subsucesión convergente en $C^2(\overline{\Omega})$ a cierta función w que es solución de:

$$\begin{aligned} \nu \nabla \cdot [e^Q \nabla w] + w e^Q (m(x) - b e^P U^*) &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ \nabla w \cdot n &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

Como $w \geq 0$ y $w \not\equiv 0$, por principio del máximo se tiene que $w > 0$ en $\overline{\Omega}$. De esta forma, el problema (1.10) tiene como valor propio principal $\lambda_0 = 0$ y función propia w, lo cual implica que $b = \widetilde{b}$ por corolario 1.12. La demostración para el otro equilibrio semitrivial es análoga. □

Por último, con respecto al equilibrio trivial se tiene lo siguiente:

Proposición 1.15 *El equilibrio* $(0,0)$ *es repulsor, i.e. existe una vecindad* $\mathcal{V}$ *de* $(0,0)$ *en* X_+ *tal que para todo* $(U_0,V_0) \in \mathcal{V}\backslash\{(0,0)\}$*, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $T_{t_0}(U_0,V_0) \notin \mathcal{V}$*.*

Demostración. Sea B una bola de $(0,0)$ en X_+ y $T > 0$ tal que para $(U_0,V_0) \in B\backslash\{(0,0)\}$, se tiene que $T_t(U_0,V_0) \in \overline{B}$ cuando $t \in (0,T]$. Si B es lo suficientemente pequeña, se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} U_t &\geq \mu e^{-P}\nabla \cdot [e^P \nabla U] + U\frac{\rho}{2} \quad &\text{en } \Omega \times (0,T] \\ V_t &\geq \nu e^{-Q}\nabla \cdot [e^Q \nabla V] + V\frac{\rho}{2} \quad &\text{en } \Omega \times (0,T] \end{aligned}$$

con $\rho = \min\limits_{\overline{\Omega}} m > 0$. Por positividad es posible asumir sin perder generalidad que $U_0 > 0$ en $\overline{\Omega}$ y por ende existe $\varepsilon > 0$ tal que $U_0 > \varepsilon$ en $\overline{\Omega}$. De esta forma, U es supersolución (ver definición 1.24) del problema:

$$\begin{aligned} w_t = \mu e^{-P}\nabla \cdot [e^P \nabla w] + w\frac{\rho}{2} \quad &\text{en } \Omega \times (0,T] \\ \nabla w \cdot n = 0 \quad &\text{en } \partial\Omega \times (0,T] \\ w(x,0) = \varepsilon \quad &\text{en } \overline{\Omega} \end{aligned}$$

el cual tiene como solución a $w(x,t) = \varepsilon \exp\left(\frac{\rho}{2}t\right)$. Por principio de comparación (ver teorema 1.25), se concluye que:

$$U(x,t) \geq \varepsilon \exp\left(\frac{\rho}{2}t\right) \ \forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,T]$$

Como las soluciones de (1.6) son acotadas, debe existir $t_0 > T$ tal que $T_t(U_0,V_0) \notin B$. $\square$

Este comportamiento también es cierto para el sistema (1).

1.3. Propiedades de monotonía

En esta subsección se describirán resultados de la teoría de los sistemas dinámicos monótonos, los cuales serán aplicados al sistema (1.6). Esto incluye resultados de convergencia y existencia de equilibrios.

Para $f, g \in X$ con $f = (f_1, f_2), g = (g_1, g_2)$, se define la siguiente relación de orden:

$$f \leq_K g \iff \forall x \in \overline{\Omega}\colon\ f_1(x) \leq g_1(x),\ f_2(x) \geq g_2(x)$$

y las siguientes notaciones:

$$\begin{aligned} f <_K g &\iff f \leq_K g,\ f \not\equiv g \\ f \ll_K g &\iff \forall x \in \overline{\Omega}\colon\ f_1(x) < g_1(x),\ f_2(x) > g_2(x) \end{aligned}$$

Además se definen los intervalos:

$$\begin{aligned} [f,g]_K &= \{h \in X\colon f \leq_K h \leq_K g\} \\ [[f,g]]_K &= \{h \in X\colon f \ll_K h \ll_K g\} \end{aligned}$$

Observación Para el espacio X, la topología del orden que es generada por los intervalos $[[f,g]]_K$, coincide con la topología usual. Algunas de las referencias establecen resultados de estabilidad con respecto a la topología del orden, siendo en este caso las nociones equivalentes.

Una propiedad importante del sistema (1.6) y también de (1), es que preserva la relación de orden $\leq_K$.

Proposición 1.16 *Sean $(u_1,v_1),(u_2,v_2) \in X_+$ tal que $(u_1,v_1) <_K (u_2,v_2)$. Entonces se cumple que:*

$$T_t(u_1,v_1) <_K T_t(u_2,v_2) \quad \forall t > 0$$

Además, si algún $(u_i,v_i) \in \mathrm{Int}(X_+)$, entonces:

$$T_t(u_1,v_1) \ll_K T_t(u_2,v_2) \quad \forall t > 0$$

Para una demostración, ver del capítulo 7 en [23], el corolario 3.5 y el teorema 4.1.

El siguiente resultado de la teoría de los sistemas dinámicos monótonos permite establecer los posibles comportamientos del sistema (1.6).

Teorema 1.17 *Sea $I = [(0,V^*),(U^*,0)]_K = \{(u,v) \in X_+ \colon u \leq U^*, v \leq V^*\}$. Entonces el conjunto omega límite (ver definición 1.33) de todo punto en X_+ está contenido en I y se cumple exactamente una de las siguientes opciones:*

(a) Existe un equilibrio de coexistencia en I.

(b) $\lim\limits_{t\to\infty} T_t(U_0,V_0) = (U^*,0)$ en X, para todo $(U_0,V_0) \in I$ con $U_0, V_0 \not\equiv 0$.

(c) $\lim\limits_{t\to\infty} T_t(U_0,V_0) = (0,V^*)$ en X, para todo $(U_0,V_0) \in I$ con $U_0, V_0 \not\equiv 0$.

Si ocurre (b) o (c) y $(U_0,V_0) \in X_+ \backslash I$, entonces $\lim\limits_{t\to\infty} T_t(U_0,V_0) \in \{(U^*,0),(0,V^*)\}$.

Para la demostración de este resultado, ver el teorema B en [12].

Observación Como toda órbita tiene clausura compacta, el conjunto omega límite será no vacío. Además, el teorema anterior indica que todo equilibrio de coexistencia debe estar en $[[(0,V^*),(U^*,0)]]_K$.

Tal como se menciona en la referencia indicada, la conclusión de convergencia para una condición inicial en $X_+\backslash I$ es algo insatisfactoria. Para clarificar esta situación, es necesario incluir algunos resultados adicionales desarrollados recientemente por Lam y Munther en [16].

Considere el problema de valores propios (1.11), el cual determina el tipo de estabilidad de $(0,V^*)$. En base a dicho problema, se define el operador $\widetilde{\mathcal{L}} \colon W^{2,p}_n(\Omega) \to L^p(\Omega)$ como:

$$\widetilde{\mathcal{L}}\varphi = \mu e^{-P}\nabla \cdot [e^P \nabla\varphi] + (m - ae^Q V^*)\varphi$$

donde $W^{2,p}_n(\Omega) = \{u \in W^{2,p}(\Omega) \colon \nabla u \cdot n = 0 \text{ en } \partial\Omega\}$ y $p > N$. Con respecto a este operador se tiene lo siguiente:

Proposición 1.18 *Suponga que valor propio principal* λ_0 *del problema* (1.11) *es tal que* $\lambda_0 \geq 0$. *Sea* $\mathcal{L}\colon W_n^{2,p}(\Omega) \times W_n^{2,p}(\Omega) \to L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$, *el operador de la linealización en torno a* $(0, V^*)$, *es decir:*

$$\mathcal{L}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu e^{-P}\nabla\cdot[e^P\nabla\varphi] + (m - ae^Q V^*)\varphi\\ \nu e^{-Q}\nabla\cdot[e^Q\nabla\psi] + (m - 2e^Q V^*)\psi - be^P V^*\varphi\end{pmatrix}$$

Entonces $\sigma(\mathcal{L}) = \sigma(\widetilde{\mathcal{L}})$. *En particular,* λ_0 *es el valor propio principal de* $\mathcal{L}$ *con función propia* (φ_0, ψ_0), *tal que* $\varphi_0 > 0, \psi_0 < 0$ *en* $\overline{\Omega}$.

Para una referencia, ver la observación 1.5 en [16].

Por argumentos de comparación de valores propios principales, las hipótesis mencionadas en la proposición anterior se tienen cuando $a \leq \widetilde{a}$. Esto será necesario para aplicar los siguientes teoremas:

Teorema 1.19 *Suponga que el sistema* (1.6) *no tiene estados de coexistencia y que el operador* $\mathcal{L}$ *definido anteriormente tiene un valor propio* $\lambda > 0$ *con función propia* (φ, ψ), *tal que* $\varphi > 0, \psi < 0$ *en* $\overline{\Omega}$. *Entonces, para todo* $(U_0, V_0) \in X_+$ *con* $U_0 \not\equiv 0$, *se tiene que:*

$$\lim_{t\to\infty} T_t(U_0, V_0) = (U^*, 0) \text{ en } X$$

Teorema 1.20 *Suponga que el sistema* (1.6) *no tiene estados de coexistencia y que existe* $\beta > 0$ *tal que:*

$$\sigma(\mathcal{L}) \subset \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C}\colon \Re(z) < -\beta\}$$

y donde 0 *es un valor propio simple con función propia* (φ, ψ), *tal que* $\varphi > 0, \psi < 0$ *en* $\overline{\Omega}$. *Suponga además que existe* $(U, V) \in \operatorname{Int} I$, *tal que* $T_t(U, V)$ *no converge a* $(0, V^*)$ *cuando* $t \to \infty$. *Entonces para todo* $(U_0, V_0) \in X_+$ *con* $U_0 \not\equiv 0$, *se tiene que:*

$$\lim_{t\to\infty} T_t(U_0, V_0) = (U^*, 0) \text{ en } X$$

Para una demostración de estos dos resultados, ver los teoremas 1.3 y 1.4 en [16].

1.3.1. Existencia de equilibrios de coexistencia

Para $i \in \{1, 2\}$, sean $(U_i, V_i) \in X_+$ equilibrios de (1.6) tal que $(U_1, V_1) <_K (U_2, V_2)$. De los resultados anteriores, se obtiene que $(U_1, V_1) \ll_K (U_2, V_2)$ y que $T_t[(U_1, V_1), (U_2, V_2)]_K$ es relativamente compacto para todo $t > 0$. Establecido lo anterior, del teorema 4 en [7] se concluye lo siguiente:

Teorema 1.21 *Suponga que los equilibrios* (U_i, V_i) *son estables y aislados. Entonces para el sistema* (1.6), *existe un equilibrio inestable* $(U, V) \in [[(U_1, V_1), (U_2, V_2)]]_K$.

Considere $(\widetilde{U}, \widetilde{V}) \in X_+$ un equilibrio linealmente inestable. Como se vio anteriormente, tal valor propio es simple con función propia (φ_0, ψ_0) tal que $\varphi_0 > 0, \psi_0 < 0$ en $\overline{\Omega}$. En este caso, la inestabilidad puede ser comprendida en el siguiente resultado:

Proposición 1.22 *Sea $\varepsilon > 0$ pequeño, con $(U_0, V_0) = (\widetilde{U} + \varepsilon\varphi_0, \widetilde{V} - \varepsilon\psi_0) \in X_+$. Entonces para $0 \leq t_1 < t_2$ se tiene que:*

$$T_{t_1}(U_0, V_0) \ll_K T_{t_2}(U_0, V_0)$$

Además, existe un equilibrio $(\overline{U}, \overline{V}) \in X_+$ tal que $\lim_{t\to\infty} T_t(U_0, V_0) = (\overline{U}, \overline{V})$ y en particular $(\widetilde{U}, \widetilde{V}) \ll_K (\overline{U}, \overline{V})$. Igualmente, si $(U_0, V_0) = (\widetilde{U} - \varepsilon\varphi_0, \widetilde{V} + \varepsilon\psi_0) \in X_+$ se tienen los mismos resultados con las desigualdades $\ll_K$ revertidas.

Para una demostración, consulte la observación 6.2 y el corolario 3.6 del capítulo 7 en [23].

Teorema 1.23 *Suponga que los equilibrios (U_i, V_i) son linealmente inestables. Entonces para el sistema* (1.6)*, existe un equilibrio estable $(U, V) \in [(U_1, V_1), (U_2, V_2)]_K$.*

Demostración. Para los equilibrios (U_i, V_i), sean (φ_i, ψ_i) las funciones propias asociadas a los respectivos valores propios principales, con $\varphi_i > 0, \psi_i < 0$ en $\overline{\Omega}$. Para $\varepsilon > 0$ pequeño, considere las perturbaciones:

$$\begin{aligned}(U_1', V_1') &= (U_1 + \varepsilon\varphi_1, V_1 - \varepsilon\psi_1)\\ (U_2', V_2') &= (U_2 - \varepsilon\varphi_2, V_2 + \varepsilon\psi_2)\end{aligned}$$

De la proposición anterior y la propiedad 1.16, para $t \geq t_0 > 0$ se obtiene que:

$$T_t[(U_1', V_1'), (U_2', V_2')]_K \subset [T_{t_0}(U_1', V_1'), T_{t_0}(U_2', V_2')]_K \subsetneq [[(U_1', V_1'), (U_2', V_2')]]_K$$

De esta forma, toda órbita en $[[(U_1', V_1'), (U_2', V_2')]]_K$ tiene clausura compacta que permanece en este abierto. Luego por el corolario 7.6 y el teorema 10.2, demostrados por Hirsch en [11], se concluye que existe un equilibrio estable en $[[(U_1', V_1'), (U_2', V_2')]]_K \subset [(U_1, V_1), (U_2, V_2)]_K$.
$\square$

1.4. Propiedades de comparación

En esta sección se recordarán algunos resultados particulares sobre el método de sub/-supersoluciones y una desigualdad de Harnack, presentando propiedades para el caso elíptico y parabólico.

Sea L un operador elíptico dado por:

$$Lw = \sum_{j,k=1}^{N} a_{j,k}(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} b_j(x)\frac{\partial w}{\partial x_j}$$

donde los coeficientes son de clase $\mathcal{C}^\alpha(\overline{\Omega})$, con $[a_{j,k}(x)]$ una matriz simétrica definida positiva en $\overline{\Omega}$. Suponga además que L es uniformemente elíptico, i.e. existen constantes $d_1, d_2 > 0$ tal que para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$:

$$d_1||\xi||^2 \leq \sum_{j,k=1}^{N} a_{j,k}(x)\xi_j\xi_k \leq d_2||\xi||^2 \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

Considere el siguiente caso de una ecuación parabólica:

$$\begin{aligned} w_t = Lw + f(x,w) &\quad \text{en}\, \Omega \times (0,T] \\ \nabla w \cdot n = 0 &\quad \text{en}\, \partial\Omega \times (0,T] \\ w(x,0) = w_0(x) &\quad \text{en}\, \overline{\Omega} \end{aligned} \tag{1.14}$$

donde $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^1$, $w_0 \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ y $T > 0$.

Definición 1.24 *Una función $\overline{w} \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times [0,T]) \cap \mathcal{C}^{2_x,1_t}(\Omega \times (0,T])$ se dice una supersolución de* (1.14) *si:*

$$\begin{aligned} \overline{w}_t \geq L\overline{w} + f(x,\overline{w}) &\quad \textit{en}\, \Omega \times (0,T] \\ \nabla \overline{w} \cdot n \geq 0 &\quad \textit{en}\, \partial\Omega \times (0,T] \\ \overline{w}(x,0) \geq w_0(x) &\quad \textit{en}\, \overline{\Omega} \end{aligned}$$

Similarmente, $\underline{w}$ se dice una subsolución si cumple todas las desigualdades anteriores revertidas.

Del método de sub/supersoluciones se concluye lo siguiente:

Proposición 1.25 *Sean $\underline{w}, \overline{w}$ una subsolución y una supersolución de* (1.14)*. Entonces el problema* (1.14) *tiene una única solución y esta cumple que $\underline{w} \leq w \leq \overline{w}$ en $\overline{\Omega} \times [0,T]$.*

Para una demostración, consulte el capítulo 2 en [22].

Otro resultado importante es la siguiente desigualdad de Harnack:

Proposición 1.26 *Sea $t_0 > 0$ y $w \geq 0$ una solución de:*

$$\begin{aligned} w_t = Lw + c(x,t)w &\quad \textit{en}\, \Omega \times (0,\infty) \\ \nabla w \cdot n = 0 &\quad \textit{en}\, \partial\Omega \times (0,\infty) \\ w(x,0) = w_0(x) &\quad \textit{en}\, \Omega \end{aligned}$$

donde $c(x,t)$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$ y acotada. Entonces existe una constante $C > 0$, tal que para todo $t \geq t_0$ se tiene que:

$$\sup_{x\in\Omega} w(x,t) \leq C \inf_{x\in\Omega} w(x,t)$$

Para una demostración, ver el teorema 2.5 en [13].

Considere ahora la versión estacionaria de (1.14), i.e. el problema elíptico dado por:

$$\begin{aligned} -Lw = f(x,w) &\quad \text{en}\, \Omega \\ \nabla w \cdot n = 0 &\quad \text{en}\, \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.15}$$

Al igual que el caso anterior, se definen los conceptos de sub/supersolución:

Definición 1.27 *Una función $\overline{w} \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ se dice una supersolución de* (1.15) *si:*

$$\begin{aligned} -L\overline{w} \geq f(x,\overline{w}) &\quad \textit{en}\, \Omega \\ \nabla \overline{w} \cdot n \geq 0 &\quad \textit{en}\, \partial\Omega \end{aligned}$$

Similarmente, $\underline{w}$ se dice una subsolución de (1.15) *si cumple todas las desigualdades anteriores revertidas.*

El resultado análogo de existencia es el siguiente:

Proposición 1.28 *Sean $\underline{w}, \overline{w}$ una subsolución y una supersolución de* (1.15)*, tal que $\underline{w} \leq \overline{w}$ en $\overline{\Omega}$. Entonces el problema* (1.15) *tiene una solución w tal que $\underline{w} \leq w \leq \overline{w}$ en $\overline{\Omega}$.*

Para una demostración, consulte el capítulo 3 en [22].

El siguiente resultado conecta el caso elíptico con el parabólico:

Proposición 1.29 *Suponga que f en el problema* (1.14) *es de clase $\mathcal{C}^2$ en $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$. Considere $\underline{w}, \overline{w}$ una subsolución y una supersolución de* (1.15) *tal que $\underline{w} \leq \overline{w}$ en $\overline{\Omega}$.*

Si w_1 es la solución del problema:

$$\begin{aligned} w_t = Lw + f(x,w) \quad & \text{en } \Omega \times (0,\infty) \\ \nabla w \cdot n = 0 \quad & \text{en } \partial\Omega \times (0,\infty) \\ w(x,0) = \underline{w}(x) \quad & \text{en } \overline{\Omega} \end{aligned}$$

entonces $w_1(x,t)$ es creciente con respecto a t y $\lim\limits_{t\to\infty} w(x,t) = w^*$, donde w^* es solución de (1.15) *y es un equilibrio minimal que satisface $\underline{w} \leq w^* \leq \overline{w}$ en $\overline{\Omega}$.*

Similarmente, si w_2 es la solución del problema anterior con $w(x,0) = \overline{w}(x)$, entonces $w_2(x,t)$ es decreciente con respecto a t y $\lim\limits_{t\to\infty} w(x,t) = w^{**}$, donde w^{**} es solución de (1.15) *y es un equilibrio maximal que satisface $\underline{w} \leq w^{**} \leq \overline{w}$ en $\overline{\Omega}$.*

Para una demostración, ver el teorema 1.22 en [3] y la posterior observación.

Finalmente, de la teoría de los sistemas competitivos, se enunciará una propiedad comparación para el sistema (1.6).

Definición 1.30 *Un par de funciones no negativas $(U_1(x,t), V_1(x,t))$ se dirá una supersolución de* (1.6)*, si cumple con las siguientes desigualdades:*

$$\begin{aligned} U_t \geq \mu e^{-P}\nabla \cdot [e^P \nabla U] + U(m(x) - e^P U - ae^Q V) \quad & \text{en } \Omega \times (0,\infty) \\ V_t \leq \nu e^{-Q}\nabla \cdot [e^Q \nabla V] + V(m(x) - be^P U - e^Q V) \quad & \text{en } \Omega \times (0,\infty) \\ \nabla U \cdot n \geq 0 \geq \nabla V \cdot n \quad & \text{en } \partial\Omega \times (0,\infty) \\ U(x,0) \geq U_0(x), V(x,0) \leq V_0(x) \quad & \text{en } \overline{\Omega} \end{aligned}$$

Similarmente, un par de funciones no negativas $(U_2(x,t), V_2(x,t))$ se dirá una subsolución de (1.6)*, si cumple todas las desigualdades anteriores revertidas.*

Teorema 1.31 *Sea $(U_1, V_1), (U_2, V_2)$ una supersolución y una subsolución de* (1.6)*, entonces:*

$$(U_2(x,t), V_2(x,t)) \leq_K (U_1(x,t), V_2(x,t)) \quad \forall t \geq 0$$

Para una referencia de este resultado, vea el teorema 1.20 en [3] y las correspondientes observaciones.

1.5. Otros resultados importantes

En esta sección se enunciarán otros resultados referidos a sistemas dinámicos y a la teoría de bifurcaciones, que serán útiles en el estudio del sistema en cuestión.

1.5.1. Propiedades sobre sistemas dinámicos

En esta sección considere (Y, d) un espacio métrico completo. Para comenzar, se recordará la definición de semiflujo.

Definición 1.32 *Una función continua $S : Y \times [0, \infty) \to Y$ se dirá un semiflujo si para todo $y \in Y$ y $t, t' \in [0, \infty)$, se cumple que:*

$$S(y, 0) = y$$
$$S(y, t + t') = S(S(y, t), t')$$

En esta subsección, se utilizará la notación $S_t y = S(y, t)$.

Como es usual en este contexto, la órbita de $y \in Y$ corresponde al conjunto $\{S_t y \colon t \geq 0\}$. Además, un conjunto A se dirá invariante, si $S_t(A) \subset A$ para todo $t \geq 0$. A continuación, se recordará la definición de conjunto omega límite.

Definición 1.33 *El conjunto omega límite está definido como:*

$$\omega(y) = \bigcap_{s>0} \overline{\{S_t(y) \colon t > s\}}$$

Es decir, es el conjunto de puntos w donde existe una secuencia $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} S_{t_n} y = w$$

El conjunto omega límite es siempre cerrado e invariante. Si además la órbita de y está contenida en un compacto, entonces el conjunto omega límite será no vacío, compacto y conexo.

Un punto $q \in Y$ se dirá un equilibrio si $S_t q = q$, $\forall t \geq 0$. Un concepto importante es la estabilidad de un equilibrio.

Definición 1.34 *Un equilibrio q se dirá estable si para toda vecindad $\mathcal{V}$ de q existe $\mathcal{U}$, también vecindad de q, tal que $y \in \mathcal{U}$ implica $S_t y \in \mathcal{V}$, $\forall t \geq 0$.*

Con respecto al conjunto omega límite y un equilibrio estable se cumple lo siguiente:

Proposición 1.35 *Considere q un equilibrio estable. Si para $y \in Y$ se tiene $q \in \omega(y)$, entonces $\omega(y) = \{q\}$.*

Demostración. Sea $w \in \omega(y)$ con $w \neq q$. Sean $\mathcal{V}_q, \mathcal{V}_w$ vecindades de q y w respectivamente tal que $\mathcal{V}_q \cap \mathcal{V}_w = \emptyset$. Dado que q es estable, existe una vecindad $\mathcal{U}$ de q tal que la órbita de todo punto en $\mathcal{U}$ permanece en $\mathcal{V}_q$. Como $q \in \omega(y)$, existe en particular $t_0 \geq 0$ tal que $S_{t_0} y \in \mathcal{U}$, lo cual implica que $S_t y \in \mathcal{V}_q$ para todo $t \geq t_0$. Como $\mathcal{V}_q \cap \mathcal{V}_w = \emptyset$ se tiene que $w \notin \omega(y)$. □

Definición 1.36 *Una función escalar E es un funcional de Lyapunov en un conjunto $A \subset Y$, si es continuo en $\overline{A}$ y para cada $y \in A$ se cumple que:*

$$E'(y) = \limsup_{t \to 0} \frac{E(S_t y) - E(y)}{t} \leq 0$$

Usualmente los funcionales de Lyapunov son definidos en una vecindad de un equilibrio q, donde se exige también que $E(q) = 0$ y $E(y) > 0$ para $y \neq q$.

Establecido lo anterior, el principio de invarianza de LaSalle afirma lo siguiente:

Teorema 1.37 *Considere E un funcional de Lyapunov en $A \subset Y$. Sea $\mathcal{M} = \{y \in \overline{A} \colon E'(y) = 0\}$ y $\mathcal{M}'$ la unión de todos subconjuntos invariantes de $\mathcal{M}$. Si la órbita de y permanece en A y está contenida en un conjunto compacto, entonces $\omega(y) \subset \mathcal{M}'$.*

Para una referencia, puede consultar [10].

1.5.2. Resultados de Bifurcaciones

En esta sección se recordará el teorema de Crandall y Rabinowitz para bifurcaciones simples.

Teorema 1.38 *Sea Y, Z espacios de Banach y $F : Y \times \mathbb{R} \to Z$ una función de clase $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 2$. Considere un punto (y_0, α_0) tal que cumpla las siguientes condiciones:*

(a) $F(y_0, \alpha) = 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(b) $\ker D_y F(y_0, \alpha_0)$ *es de dimensión 1, generado por ϕ_0.*

(c) $\operatorname{ran} D_y F(y_0, \alpha_0)$ *es de codimensión 1.*

(d) $[D_\alpha D_y F(y_0, \alpha_0)]\phi_0 \notin \operatorname{ran} D_y F(y_0, \alpha_0)$.

Entonces el conjunto de soluciones de $F(y, \alpha) = 0$ en cierta vecindad $\mathcal{V}$ de (y_0, α_0), consiste en dos curvas que se intersectan solo en (y_0, α_0). Además para cierto $\varepsilon > 0$, una de estas curvas corresponde a

$$\Gamma_1 = \{(y_0, \alpha) \colon |\alpha - \alpha_0| \leq \varepsilon\}$$

y la otra es una curva de clase $\mathcal{C}^{k-2}$, parametrizada como

$$\Gamma_2 = \{(y(s), \alpha(s)) \colon |s| \leq \varepsilon\}$$

en donde $y(s) = y_0 + s\phi_0 + s^2\eta(s)$ con $\alpha(0) = \alpha_0$ y $\eta(s)$ de clase $\mathcal{C}^{k-2}$.

Para una demostración, ver el teorema 3.2.2 en [20].

Para el siguiente teorema suponga $k \geq 3$ y que $Y \subset Z$ con inclusión continua. Respecto de las curvas del teorema anterior, se tiene lo siguiente:

Teorema 1.39 *En la curva* Γ_1*, para todo* α *con* $|\alpha - \alpha_0| \leq \varepsilon$*, existe* $(\widehat{\lambda}(\alpha), \widehat{\phi}(\alpha)) \in \mathbb{R} \times Y$ *de clase* $\mathcal{C}^\infty$ *con* $(\widehat{\lambda}(\alpha_0), \widehat{\phi}(\alpha_0)) = (0, \phi_0)$*, tal que* $\widehat{\lambda}(\alpha)$ *es valor propio de* $D_yF(y_0, \alpha)$ *con multiplicidad 1 y vector propio* $\widehat{\phi}(\alpha)$*.*

Igualmente en Γ_2*, para todo* $|s| \leq \varepsilon$ *existe* $(\lambda(s), \phi(s))$ *de clase* $\mathcal{C}^{k-2}$ *con* $(\lambda(0), \phi(0)) = (0, \phi_0)$*, tal que* $\lambda(s)$ *es un valor propio de* $D_yF(y(s), \alpha(s))$ *con multiplicidad 1 y vector propio* $\phi(s)$*.*

Además si $\dfrac{d}{d\alpha}\widehat{\lambda}(\alpha_0) \neq 0$*, entonces* $s \cdot \dfrac{d\alpha}{ds}(s) \cdot \dfrac{d\widehat{\lambda}}{d\alpha}(\alpha_0)$ *y* $\lambda(s)$ *tienen signos opuestos y se anulan simultáneamente.*

Para una demostración, consulte el lema 3.6.1 y el teorema 3.6.2 en [20].

Capítulo 2

Comportamiento del sistema (1) para cuando ambas especies son ideal free

En este sección se estudiará el sistema (1) cuando $P = Q = \ln m$. En este caso los equilibrios semitriviales de (1) son $(m, 0), (0, m)$ y valores críticos de estabilidad son $\widetilde{b} = \widetilde{a} = 1$, por el teorema 1.13.

Realizando el correspondiente cambio de variables, el sistema (1) queda escrito como:

$$\begin{aligned} U_t = \mu \frac{1}{m} \nabla \cdot [m \nabla U] + mU(1 - U - aV) \quad & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ V_t = \nu \frac{1}{m} \nabla \cdot [m \nabla V] + mV(1 - bU - V) \quad & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ \nabla U \cdot n = \nabla V \cdot n = 0 \quad & \text{en } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ U(x, 0) = U_0(x), V(x, 0) = V_0(x) \quad & \text{en } \overline{\Omega} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Se estudiarán los equilibrios de (2.1), es decir:

$$\begin{aligned} \mu \nabla \cdot [m \nabla U] + m^2 U(1 - U - aV) = 0 \quad & \text{en } \Omega \\ \nu \nabla \cdot [m \nabla V] + m^2 V(1 - bU - V) = 0 \quad & \text{en } \Omega \\ \nabla U \cdot n = \nabla V \cdot n = 0 \quad & \text{en } \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde los correspondientes equilibrios semitriviales son $(U^*, 0), (0, V^*)$, con $U^* = V^* = 1$.

2.1. Caso $a \leq 1, b \geq 1$ con $(a, b) \neq (1, 1)$

Por comparación, si $a \leq 1$ entonces el valor propio principal λ_0 del problema (1.11) es no negativo y por lo tanto es posible aplicar los resultados de 1.18. Para comenzar, se estudiará el siguiente caso:

Lema 2.1 *Suponga que $a < 1, b = 1$. Entonces para todo $(U_0, V_0) \in X_+$ con $U_0 \not\equiv 0$, la solución (U, V) de* (2.1) *satisface que:*

$$\lim_{t \to \infty} (U(x, t), V(x, t)) = (1, 0) \text{ en } X$$

Demostración. Primero se probará que (2.1) no tiene equilibrios de coexistencia. En efecto, suponga que (U, V) es un equilibrio de coexistencia. Dividiendo la primera ecuación de (2.2) por U e integrando por partes, se obtiene que:

$$\mu \int_{\Omega} m \frac{|\nabla U|^2}{U^2} + \int_{\Omega} m^2(1 - U - aV) = 0$$

Además, integrando ambas ecuaciones de (2.2) se deduce que:

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} m^2 U(1 - U - aV) &= 0 \\ -a \int_{\Omega} m^2 V(1 - U - V) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando las tres igualdades, se concluye lo siguiente:

$$0 \leq \mu \int_{\Omega} m \frac{|\nabla U|^2}{U^2} + \int_{\Omega} m^2(1 - U - aV)^2 = a(a-1) \int_{\Omega} m^2 V^2 < 0$$

que es una contradicción y por ende no hay estados de coexistencia. Como $a < 1$, el valor propio principal λ_0 en (1.11) es tal que $\lambda_0 > 0$ y por teorema 1.19 se concluye la convergencia. □

El resultado anterior se extiende para cuando $a < 1, b \geq 1$.

Teorema 2.2 *Suponga $a < 1, b \geq 1$. Entonces para todo $(U_0, V_0) \in X_+$ con $U_0 \not\equiv 0$, la solución (U, V) de* (2.1) *satisface que:*

$$\lim_{t \to \infty} (U(x,t), V(x,t)) = (1, 0) \text{ en } X$$

Demostración. Sea (U, V) la solución de (2.1) cuando $a < 1, b \geq 1$ con condición inicial (U_0, V_0). Entonces se tienen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} U_t &\geq \mu \frac{1}{m} \nabla \cdot [m \nabla U] + mU(1 - U - aV) &&\text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ V_t &\leq \nu \frac{1}{m} \nabla \cdot [m \nabla V] + mV(1 - U - V) &&\text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ \nabla U \cdot n &= \nabla V \cdot n = 0 &&\text{en } \partial\Omega \times (0, \infty) \end{aligned}$$

Considere (U', V') la solución de (2.1) cuando $a < 1, b = 1$, con condición inicial (U_0, V_0). Por teorema de comparación 1.31, se concluye que:

$$(U'(x,t), V'(x,t)) \leq_K (U(x,t), V(x,t)) \; \forall t \geq 0$$

Sea $(\widetilde{U}, \widetilde{V}) \in \omega(U_0, V_0)$ respecto del sistema (2.1), cuando $a < 1, b \geq 1$. Entonces, al tomar el correspondiente límite se obtiene que:

$$(1, 0) \leq_K (\widetilde{U}, \widetilde{V})$$

El teorema 1.17 indica que $\omega(U_0, V_0) \subset [(0,1), (1,0)]_K$ y por lo tanto:

$$\lim_{t \to \infty} (U(x,t), V(x,t)) = (1, 0) \text{ en } X$$

□

Ahora solo resta estudiar el caso $a = 1, b > 1$.

Teorema 2.3 *Suponga que $a = 1, b > 1$. Entonces para todo $(U_0, V_0) \in X_+$ con $U_0 \not\equiv 0$, la solución (U, V) de* (2.1) *satisface que:*

$$\lim_{t\to\infty} (U(x,t), V(x,t)) = (1, 0) \text{ en } X$$

Demostración. Primero se probará que no hay equilibrios de coexistencia. En efecto, suponga que (U, V) es un equilibrio de coexistencia.

Por teorema 1.17 $(U, V) \in [[(0, V^*), (U^*, 0)]]_K$, i.e. $0 < U(x) < 1, 0 < V(x) < 1\ \forall x \in \overline{\Omega}$. Sea $s \in (0, 1)$ tal que $U \geq s, V \leq (1 - s)$ en $\overline{\Omega}$, se probará inducción que:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad U \geq b^n s, V \leq 1 - b^n s \text{ en } \overline{\Omega}$$

El caso base se tiene por la elección de s. Suponga que el resultado es válido para n. Integrando la segunda ecuación de (2.2) se tiene que:

$$0 = \int_\Omega m^2 V(1 - bU - V) \leq \int_\Omega m^2 V(1 - b^{n+1}s - V)$$

Si $1 - b^{n+1}s < 0$ entonces la última integral es negativa, lo que es una contradicción. Se concluye entonces que $1 - b^{n+1}s \geq 0$ y por ende:

$$0 = \nu\nabla \cdot [m\nabla V] + m^2 V(1 - bU - V) \leq \nu\nabla \cdot [m\nabla V] + m^2 V(1 - b^{n+1}s - V)$$

Así V es subsolución del problema:

$$\begin{aligned} \nu\nabla \cdot [m\nabla w] + m^2 w(1 - b^{n+1}s - w) &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ \nabla w \cdot n &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

cuya única solución positiva es $w \equiv 1 - b^{n+1}s$, lo cual se obtiene de aplicar el teorema 1.2 con $P = \ln m$ y cambiando m por $1 - b^{n+1}s$, en la ecuación (1.3). Además $1 - b^n s$ es supersolución, pues $b > 1$. Luego como $V \leq 1 - b^n s$ en $\overline{\Omega}$, el teorema 1.28 indica en particular que $V \leq 1 - b^{n+1}s$ en $\overline{\Omega}$. De esta forma, de la primera ecuación se concluye que:

$$0 = \mu\nabla \cdot [m\nabla U] + m^2 U(1 - U - V) \geq \mu\nabla \cdot [m\nabla U] + m^2 U(b^{n+1}s - U)$$

Así U es supersolución del problema:

$$\begin{aligned} \mu\nabla \cdot [m\nabla w] + m^2 w(b^{n+1}s - w) &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ \nabla w \cdot n &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

cuya única solución positiva es $w \equiv b^{n+1}s$, lo que se obtiene de manera análoga al problema anterior. Además $b^n s$ es subsolución y como $b^n s \leq U$ en $\overline{\Omega}$, se concluye entonces que $b^{n+1}s \leq U$ en $\overline{\Omega}$, por el teorema 1.28. Con esto queda completada la inducción.

Como $b > 1$, tomando $n \to \infty$ se llega a una contradicción y por ende no hay estados de coexistencia.

Por otro lado, el valor propio principal λ_0 en (1.11) es nulo pues $a = 1$. Además, como $b > 1$, el equilibrio $(U^*, 0)$ es asintóticamente estable y por lo tanto existe una trayectoria partiendo en $[(0, V^*), (U^*, 0)]_K$ que no converge a $(0, V^*)$. Finalmente del teorema 1.20 se concluye la convergencia. □

En términos del sistema (1), cuando $a \leq 1, b \geq 1$ con $(a, b) \not\equiv (1, 1)$, todas las soluciones (u, v) con $u_0 \not\equiv 0$, convergerán uniformemente al equilibrio $(m, 0)$. Intercambiando los roles de a y b se obtiene el mismo resultado intercambiando los roles de u y v.

2.2. Caso $a = 1, b = 1$

En este caso se tiene que el sistema (2.1) posee un continuo de equilibrios dado por el conjunto $\{(s,(1-s)) \colon s \in [0,1]\}$. Se demostrará que este conjunto es el atractor global de todas las soluciones en $\operatorname{Int} X_+$, utilizando una técnica usada en [17].

Sea $s_0 \in (0,1)$, para $(U,V) \in \operatorname{Int} X_+$ se define:

$$E(U,V) = \int_\Omega m(U - s_0) - \int_\Omega s_0 m \ln\left(\frac{U}{s_0}\right) + \int_\Omega m(V - (1-s_0)) - \int_\Omega (1-s_0) m \ln\left(\frac{V}{1-s_0}\right)$$

Lema 2.4 *E es un funcional de Lyapunov en torno al equilibrio $(s_0, 1-s_0)$.*
Demostración. Note que para $c > 0$, la función definida en $\mathbb{R}^+$, dada por

$$f(y) = y - c - c\ln\frac{y}{c}$$

se anula en $y = c$ y es positiva cuando $y \neq c$. Esto permite concluir que $E(s_0, 1-s_0) = 0$ y que $E(U,V) > 0$ para $(U,V) \not\equiv (s_0, 1-s_0)$.

Para (U,V) una solución de (2.1) con $(U_0,V_0) \in \operatorname{Int} X_+$, se tiene que $\frac{d}{dt}E(U(\cdot,t),V(\cdot,t))$ está dado por:

$$E'(U,V) = -\int_\Omega m^2(1-U-V)^2 - s_0\mu\int_\Omega m|\nabla \ln U|^2 - (1-s_0)\nu\int_\Omega m|\nabla \ln V|^2 \tag{2.3}$$

expresión que es menor o igual a 0. Por lo tanto, E es un funcional de Lyapunov. □

Ahora se demostrará que para una solución positiva, existe una cota inferior uniforme.

Lema 2.5 *Considere $a = b = 1$ y sea (U,V) una solución de* (2.1) *con $U_0, V_0 \not\equiv 0$. Entonces para $t_0 > 0$, existe $C > 0$ tal que para todo $t \geq t_0$ se tiene que $\inf_\Omega U(x,t), \inf_\Omega V(x,t) > C$.*

Demostración. Note que U, V son positivas para $t > 0$ y son acotadas uniformemente en $\overline{\Omega} \times [0,\infty)$. Como $E(U(\cdot,t),V(\cdot,t)) \leq E(U(\cdot,0),V(\cdot,0))$, se concluye que existe una constante C_1 tal que:

$$\int_\Omega s_0 m \ln U(x,t) + \int_\Omega (1-s_0) m \ln V(x,t) \geq -C_1 \quad \forall t \geq 0$$

Como V es acotado superiormente de manera uniforme, existe una constante C_2 tal que:

$$\max_{\overline{\Omega}} U(x,t) \geq e^{-C_2} \quad \forall t \geq 0$$

Note que $c(x,t) = m(1 - U(x,t) - V(x,t))$ es de clase $\mathcal{C}^1$ y acotada. Aplicando la desigualdad de Harnack 1.26 a la ecuación de U en (2.1), se obtiene que existe $C_3 > 0$ tal que:

$$\min_{\overline{\Omega}} U(x,t) \geq C_3 \max_{\overline{\Omega}} U(x,t) \quad \forall t \geq t_0$$

Aplicando de manera análoga el mismo argumento para V, se concluye el resultado. □

Lema 2.6 *Considere* $E'(U,V)$ *definida en* (2.3) *y sea* $\mathcal{M} = \{(U,V) \in \operatorname{Int} X_+ \colon E'(U,V) = 0\}$. *Entonces el subconjunto maximal de* $\mathcal{M}$*, invariante para el semiflujo determinado por* (2.1)*, está dado por:*

$$\mathcal{M}' = \{(s, 1-s) \colon s \in (0,1)\}$$

Demostración. Para todo $s \in (0,1)$, se tiene que $(s, 1-s)$ es un equilibrio de (2.1) que verifica $E'(s,1-s) = 0$ y por lo tanto está en $\mathcal{M}'$. Solo resta probar la inclusión recíproca.

Sea (U,V) una solución de (2.1) con $(U_0, V_0) \in \operatorname{Int} X_+$, tal para algún t_0 se tiene que $E'(U(\cdot,t_0), V(\cdot,t_0)) = 0$. Esto implica que $U(x,t_0), V(x,t_0)$ son constantes en $\overline{\Omega}$ y que $U(x,t_0) + V(x,t_0) = 1$.

Considere ahora $(U_0,V_0) \in \mathcal{M}'$, lo cual implica que $(U(\cdot,t), V(\cdot,t)) \in \mathcal{M}$ para todo $t \geq 0$. Esto quiere decir que existe $r(t)$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $U(x,t) = r(t), V(x,t) = 1 - r(t)$, obteniendo del sistema (2.1) que $\dfrac{dr(t)}{dt} = 0$. Finalmente por positividad, existe $r_0 \in (0,1)$ tal que $U = r_0, V = 1 - r_0$. $\square$

Con los lemas anteriores, se demuestra el siguiente resultado que explica el comportamiento del sistema en este caso.

Teorema 2.7 *Para todo* $(U_0,V_0) \in X_+$ *con* $U_0, V_0 \not\equiv 0$*, existe* $s_0 \in (0,1)$ *tal que la solución* (U,V) *de* (2.1) *cumple que:*

$$\lim_{t\to\infty} (U(x,t), V(x,t)) = (s_0, 1-s_0) \text{ en } X$$

Demostración. Por positividad se puede suponer que $(U_0,V_0) \in \operatorname{Int} X_+$. Para $\delta > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ se definen los conjuntos:

$$A_{k,\delta} = \{(U,V) \in X_+ \colon U, V \geq \delta \text{ en } \overline{\Omega},\ E(U,V) \leq k\}$$

los cuales son cerrados en X_+.

Como toda órbita tiene clausura compacta en X_+, se tiene que $\omega(U_0,V_0) \neq \emptyset$ y por lema 2.5 existen k y δ tal que la órbita de (U_0,V_0) permanece en $A_{k,\delta}$. Luego por el lema 2.6 y el teorema de LaSalle 1.37 en $A_{k,\delta}$, se obtiene que:

$$\omega(U_0,V_0) \subset \{(s,1-s) \colon s \in (0,1)\}$$

Se afirma que para cada $s_0 \in (0,1)$, el equilibrio $(s_0, 1-s_0)$ es estable. En efecto, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño el conjunto:

$$[(s_0 - \varepsilon, 1 - s_0 + \varepsilon), (s_0 + \varepsilon, 1 - s_0 - \varepsilon)]_K$$

es una vecindad de $(s_0, 1-s_0)$ que es invariante para el semiflujo definido por la ecuación (2.1), debido a la propiedad del orden 1.16. Esto concluye la estabilidad.

Como $\omega(U_0,V_0)$ contiene un equilibrio estable, el resultado 1.35 indica que existe $s_0 \in (0,1)$ tal que $\omega(U_0,V_0) = \{(s_0, 1-s_0)\}$ y por lo tanto se tiene el resultado de convergencia. $\square$

En términos del sistema (1), cuando $a = b = 1$, toda solución (u,v) con condiciones iniciales $u_0, v_0 \not\equiv 0$ converge uniformemente a un elemento de $\{(sm, (1-s)m) \colon s \in (0,1)\}$. Respecto de la estabilidad de los equilibrios semitriviales se afirma lo siguiente:

Teorema 2.8 *Suponga $a = b = 1$. Entonces los equilibrios semitriviales $(U^*, 0), (0, V^*)$ son estables.*

Demostración. Se demostrará la estabilidad de $(U^*, 0) = (1, 0)$, siendo análoga la demostración para el equilibrio $(0, V^*) = (0, 1)$.

Note que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, el intervalo $[(1-\varepsilon, \varepsilon), (1+\varepsilon, 0)]_K$ es una vecindad de $(1, 0)$ en X_+, invariante para el semiflujo. En efecto, note que $1 + \varepsilon$ es una supersolución del problema elíptico:

$$\begin{aligned} \mu\nabla \cdot [m\nabla U] + m^2 U(1-U) = 0 \quad & \text{en } \Omega \\ \nabla U \cdot n = 0 \quad & \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

y por el resultado 1.29, se obtiene que la solución $w(x, t)$ del problema:

$$\begin{aligned} U_t = \mu\frac{1}{m}\nabla \cdot [m\nabla U] + mU(1-U) = 0 \quad & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ \nabla U \cdot n = 0 \quad & \text{en } \partial\Omega(0, \infty) \\ U(x, 0) = 1 + \varepsilon \quad & \text{en } \overline{\Omega} \end{aligned}$$

es decreciente en función de t y además $\lim\limits_{t\to\infty} w(x, t) = 1$. Luego por la propiedad del orden, para todo $t \geq 0$ se tiene que:

$$T_t[(1-\varepsilon, \varepsilon), (1+\varepsilon, 0)]_K \subset [T_t(1-\varepsilon, \varepsilon), T_t(1+\varepsilon, 0)]_K = [(1-\varepsilon, \varepsilon), (w, 0)]_K \subset [(1-\varepsilon, \varepsilon), (1+\varepsilon, 0)]_K$$

y por lo tanto $[(1-\varepsilon, \varepsilon), (1+\varepsilon, 0)]_K$ es invariante, lo cual implica la estabilidad de $(U^*, 0)$. $\square$

En términos del sistema (1), se tiene que los equilibrios semitriviales $(m, 0), (0, m)$ son estables. Esto significa que todo $(u_0, v_0) \in X_+$ cercano a $(m, 0)$, convergerá a un elemento de la recta $\{(sm, (1-s)m) \colon s \in [0, 1]\}$, que también será cercano a $(m, 0)$. Análogamente, se tiene el correspondiente resultado para $(0, m)$.

Observación El teorema anterior muestra que en la proposición 1.21, es necesario que los equilibrios estables considerados sean aislados.

2.3. Los casos $a < 1, b < 1$ y $a > 1, b > 1$

Para el caso $a < 1, b < 1$ se demostrará utilizando la misma técnica de la sección anterior, que las soluciones de (2.1) con $U_0, V_0 \not\equiv 0$ convergen al equilibrio:

$$(\widetilde{U}, \widetilde{V}) = \left(\frac{a-1}{ab-1}, \frac{b-1}{ab-1}\right)$$

Para $(U, V) \in \operatorname{Int} X_+$ se define el funcional:

$$E(U, V) = \int_\Omega m(U - \widetilde{U}) - \int_\Omega \widetilde{U} m \ln\left(\frac{U}{\widetilde{U}}\right) + \int_\Omega m(V - \widetilde{V}) - \int_\Omega \widetilde{V} m \ln\left(\frac{V}{\widetilde{V}}\right)$$

Lema 2.9 *E es un funcional de Lyapunov en torno al equilibrio $(\widetilde{U},\widetilde{V})$.*

Demostración. Al igual que el caso anterior, la positividad de la función $f(y) = y-c-c\ln\frac{y}{c}$ permite concluir que $E(\widetilde{U},\widetilde{V}) = 0$ y que $E(U,V) > 0$, para todo $(U,V) \not\equiv (\widetilde{U},\widetilde{V})$.

Para (U,V) una solución de (2.1) con $(U_0,V_0) \in \operatorname{Int} X_+$, se tiene que $\frac{d}{dt}E(U(\cdot,t),V(\cdot,t))$ está dado por:

$$\begin{aligned} E'(U,V) = \int_\Omega m^2(U-\widetilde{U})(1-U-aV) + \int_\Omega m^2(V-\widetilde{V})(1-bU-aV) \\ -\mu\widetilde{U}\int_\Omega m|\nabla\ln U|^2 - \nu\widetilde{V}\int_\Omega m|\nabla\ln V|^2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Note que la función $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(y,z) = (y-\widetilde{U})(1-y-az) + (y-\widetilde{V})(1-by-z)$$

es una forma cuadrática trasladada, que es estrictamente cóncava. En efecto, su Hessiano está dado por:

$$D^2g(y,z) = -\begin{bmatrix} 2 & a+b \\ a+b & 2 \end{bmatrix}$$

el cual es definido negativo pues $a<1, b<1$. Además $\nabla g(\widetilde{U},\widetilde{V}) = 0$, lo cual implica que $(\widetilde{U},\widetilde{V})$ es el único máximo de g y por lo tanto $g \leq 0$. Se concluye entonces que $E'(U,V) \leq 0$ y por ende E es un funcional de Lyapunov. $\square$

Al igual que el caso anterior, se tiene las soluciones positivas son acotadas inferiormente de manera uniforme:

Lema 2.10 *Considere $a<1, b<1$ y sea (U,V) una solución de* (2.1) *con $U_0,V_0 \not\equiv 0$. Entonces para $t_0>0$, existe $C>0$ tal que para todo $t \geq t_0$ se tiene que $\inf_\Omega U(x,t), \inf_\Omega V(x,t) > C$.*

La demostración de este resultado es análoga, utilizando el funcional de Lyapunov definido en esta sección.

Lema 2.11 *Considere $E'(U,V)$ definido en* (2.4) *y $\mathcal{M} = \{(U,V) \in \operatorname{Int} X_+ :\ E'(U,V) = 0\}$. Entonces el subconjunto maximal de $\mathcal{M}$, invariante para el semiflujo, está dado por $\mathcal{M}' = \{(\widetilde{U},\widetilde{V})\}$.*

Demostración. Como $(\widetilde{U},\widetilde{V})$ es un equilibrio y $E'(\widetilde{U},\widetilde{V}) = 0$, entonces $(\widetilde{U},\widetilde{V}) \in \mathcal{M}'$.

Por otro lado, sea (U,V) una solución de (2.1) con $(U_0,V_0) \in \operatorname{Int} X_+$, tal que para algún t_0 se tiene que $E'(U(\cdot,t_0),V(\cdot,t_0)) = 0$. De la forma cuadrática trasladada que aparece en la expresión (2.4), se concluye que $U(x,t_0) = \widetilde{U}, V(x,t_0) = \widetilde{V}$ en $\overline{\Omega}$.

Luego, la única posible órbita en $\mathcal{M}$ corresponde al equilibrio $(\widetilde{U},\widetilde{V})$ y por lo tanto $\mathcal{M}' = \{(\widetilde{U},\widetilde{V})\}$. $\square$

Establecidos los resultados previos, el comportamiento del sistema en este caso está dado por el siguiente resultado:

Teorema 2.12 *Suponga que $a<1, b<1$. Entonces para todo $(U_0,V_0) \in X_+$ con $U_0,V_0 \not\equiv 0$, la solución (U,V) de* (2.1) *satisface que:*

$$\lim_{t\to\infty}(U(x,t),V(x,t)) = (\widetilde{U},\widetilde{V}) \text{ en } X$$

Demostración. Por positividad basta suponer que $(U_0, V_0) \in \text{Int}\, X_+$. De igual forma que el caso anterior, para $\delta > 0, k \in \mathbb{N}$ se definen los conjuntos cerrados:

$$A_{k,\delta} = \{(U,V) \in X_+ \colon U, V \geq \delta \text{ en } \overline{\Omega},\ E(U,V) \leq k\}$$

Como toda órbita tiene clausura compacta en X_+, se tiene que $\omega(U_0, V_0) \neq \emptyset$ y por lema 2.10 existen k y δ tal que la órbita de (U_0, V_0) permanece en $A_{k,\delta}$. Finalmente por lema (2.4) y el teorema de LaSalle, se obtiene que $\omega(U_0, V_0) = \{(\widetilde{U}, \widetilde{V})\}$, lo cual concluye el resultado. $\square$

En términos del sistema (1), cuando $a < 1, b < 1$, todas las soluciones (u, v) con $u_0, v_0 \not\equiv 0$ convergen uniformemente al equilibrio $\left(\frac{a-1}{ab-1}m, \frac{b-1}{ab-1}m\right)$.

Ahora suponga que $a > 1, b > 1$. En este caso, se tiene que los equilibrios $(U^*, 0), (0, V^*)$ son asintóticamente estables. Con respecto al equilibrio $(\widetilde{U}, \widetilde{V})$ se afirma lo siguiente:

Teorema 2.13 *Suponga que $a > 1, b > 1$. Entonces el equilibrio $(\widetilde{U}, \widetilde{V})$ es inestable.*

Demostración. Para $(\widetilde{U}, \widetilde{V})$, sea λ_0 el valor propio principal del problema (1.8) con (φ_0, ψ_0) función propia, tal que $\varphi_0 > 0, \psi_0 < 0$ en $\overline{\Omega}$. En este caso se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mu\nabla \cdot [m\nabla\varphi_0] - \frac{a-1}{ab-1}m^2\varphi_0 - a\frac{a-1}{ab-1}m^2\psi_0 &= \lambda_0 m\varphi_0 \quad \text{en } \Omega \\
\nu\nabla \cdot [m\nabla\psi_0] - \frac{b-1}{ab-1}m^2\psi_0 - b\frac{b-1}{ab-1}m^2\varphi_0 &= \lambda_0 m\psi_0 \quad \text{en } \Omega \\
\nabla\varphi_0 \cdot n = \nabla\psi_0 \cdot n &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega
\end{aligned}$$

Integrando en ambas ecuaciones, multiplicando la primera ecuación por $(b-1)$ y luego la segunda por $a(a-1)$, se concluye al restar que:

$$(a-1)(b-1)\int_\Omega m^2\varphi_0 = \lambda_0\left((b-1)\int_\Omega m\varphi_0 - a(a-1)\int_\Omega m\psi_0\right)$$

Se obtiene entonces que $\lambda_0 > 0$ y por lo tanto $(\widetilde{U}, \widetilde{V})$ es linealmente inestable. $\square$

En términos del sistema (1), esto quiere decir que el equilibrio $\left(\frac{a-1}{ab-1}m, \frac{b-1}{ab-1}m\right)$ se vuelve inestable cuando $a > 1, b > 1$.

Observación Matano y Mimura mostraron en [18] un ejemplo de un dominio Ω no convexo, en donde para m constante y difusión aleatoria (i.e. $P = Q = 0$), existe un equilibrio de coexistencia estable. Esto indica que para cuando $a > 1, b > 1$, es posible que el sistema (1) posea otros equilibrios de coexistencia los cuales dependerán de la geometría del dominio Ω.

Capítulo 3

Existencia de equilibrios de coexistencia en el sistema (1)

3.1. Resultados de no coexistencia

En esta sección se establecerán casos en que el sistema (1.6) no admite equilibrios de coexistencia para el caso general de estrategias de movimiento $P, Q \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Además, se demostrarán algunos resultados de existencia.

3.1.1. Caso donde uno de los coeficientes de competencia tiende a cero

Se demostrará que cuando $b > \widetilde{b}$ y a es suficientemente pequeño, entonces el sistema no tiene estados de coexistencia.

Teorema 3.1 *Sea $P, Q \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ y suponga que $b > \widetilde{b}$. Entonces existe $\overline{a} > 0$ tal que para todo $a < \overline{a}$, el sistema* (1.6) *no tiene equilibrios de coexistencia.*

Demostración. Sea (a_k) una sucesión de reales positivos tal que $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. Suponga que existe una sucesión (U_k, V_k) de equilibrios de coexistencia, que son solución de:

$$\begin{aligned} \mu\nabla\cdot[e^P\nabla U_k] + e^P U_k(m - e^P U_k - a_k e^Q V_k) = 0 \quad & \text{en}\,\Omega \\ \nu\nabla\cdot[e^Q\nabla V_k] + e^Q V_k(m - be^P U_k - e^Q V_k) = 0 \quad & \text{en}\,\Omega \\ \nabla U_k\cdot n = \nabla V_k\cdot n = 0 \quad & \text{en}\,\partial\Omega \end{aligned} \tag{3.1}$$

Por la estimación en 1.6, la sucesión (U_k, V_k) es acotada en X. Por resultados de regularidad en espacios de Sobolev (U_k, V_k) es acotada en $[W^{2,p}(\Omega)]^2$, de modo que tiene una subsucesión convergente en $\left[C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})\right]^2$, para cierto $\alpha \in (0,1)$. Por resultados de regularidad en espacios Hölder, se obtiene una subsucesión convergente en $\left[\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})\right]^2$ a cierto $(\widetilde{U}, \widetilde{V})$, que es solución de:

$$\begin{aligned} \mu\nabla\cdot[e^P\nabla\widetilde{U}] + e^P\widetilde{U}(m - e^P\widetilde{U}) = 0 \quad & \text{en}\,\Omega \\ \nu\nabla\cdot[e^Q\nabla\widetilde{V}] + e^Q\widetilde{V}(m - be^P\widetilde{U} - e^Q\widetilde{V}) = 0 \quad & \text{en}\,\Omega \\ \nabla\widetilde{U}\cdot n = \nabla\widetilde{V}\cdot n = 0 \quad & \text{en}\,\partial\Omega \end{aligned} \tag{3.2}$$

Como $\widetilde{U}$ es no negativa, de la primera ecuación de (3.2) se tiene que $\widetilde{U} \in \{0, U^*\}$.

Suponga que $\widetilde{U} = 0$. Integrando la primera ecuación de (3.1), se deduce que:

$$\int_\Omega e^P U_k(m - e^P U_k - a_k e^Q V_k) = 0 \tag{3.3}$$

Por otro lado, de la convergencia se tiene que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_0$, se cumple que $m - e^P U_k - a_k e^Q V_k > 0$ en $\overline{\Omega}$. Esto último contradice 3.3 y por lo tanto $\widetilde{U} = U^*$.

Ahora se mostrará que $\widetilde{V} = 0$. Suponiendo lo contrario, por principio del máximo se tiene que $\widetilde{V} > 0$ en $\overline{\Omega}$. Para $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, se denota por $\lambda_0(f)$ el valor propio principal del problema:

$$\begin{aligned} \nu\nabla \cdot [e^Q \nabla\psi] + e^Q(m - f)\psi = \lambda e^Q \psi \quad & \text{en}\, \Omega \\ \nabla\psi \cdot n = 0 \quad & \text{en}\, \partial\Omega \end{aligned}$$

Luego $\widetilde{V}$ sería función propia de este problema para cuando $f = be^P U^* + e^Q \widetilde{V}$ y por lo tanto $\lambda_0(be^P U^* + e^Q \widetilde{V}) = 0$. Por otro lado, se tiene que $\lambda_0(\widetilde{b} e^P U^*) = 0$ por definición de $\widetilde{b}$. Como $be^P U^* + e^Q \widetilde{V} > \widetilde{b} e^P U^*$, por comparación de valores propios principales se tiene que $\lambda_0(be^P U^* + e^Q \widetilde{V}) < \lambda_0(\widetilde{b} e^P U^*)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $\widetilde{V} = 0$.

Sea $w_k = \frac{V_k}{||V_k||_\infty}$. Por el mismo argumento de regularidad, se concluye que (w_k) tiene una subsucesión convergente en $C^2(\overline{\Omega})$ a cierto w, el cual es solución de:

$$\begin{aligned} \nu\nabla \cdot [e^Q \nabla w] + e^Q(m - be^P U^*)w = 0 \quad & \text{en}\, \Omega \\ \nabla w \cdot n = 0 \quad & \text{en}\, \partial\Omega \end{aligned}$$

Como w es positiva y no nula, por principio del máximo se obtiene que $w > 0$ en $\overline{\Omega}$ y por lo tanto $\lambda_0(be^P U^*) = 0$. Como $b > \widetilde{b}$, se tiene que $\lambda_0(be^P U^*) < \lambda_0(\widetilde{b} e^P U^*)$, lo que es una contradicción.

Se concluye entonces que no hay equilibrios de coexistencia para cuando $b > \widetilde{b}$ y a es lo suficientemente pequeño. □

Corolario 3.2 *Para el valor $\overline{a}$ del teorema anterior, se cumple que $\overline{a} \leq \widetilde{a}$.*

Demostración. Suponga que $\overline{a} > \widetilde{a}$. Entonces para a, b tales que $\widetilde{a} < a < \overline{a}$ y $b > \widetilde{b}$, se tiene que los equilibrios semitriviales son asintóticamente estables por el teorema 1.11 . Luego por el teorema 1.21 existe un equilibrio de coexistencia, lo que contradice el teorema anterior. □

Corolario 3.3 *Considere $a < \overline{a}, b > \widetilde{b}$. Entonces para todo $(U_0, V_0) \in X_+$ con $U_0 \not\equiv 0$, la solución (U, V) de* (1.6) *satisface que:*

$$\lim_{t\to\infty} (U(x,t), V(x,t)) = (U^*, 0) \text{ en } X$$

Demostración. Si $a < \overline{a} \leq \widetilde{a}$, entonces el equilibrio $(0, V^*)$ es linealmente inestable. Como no hay estados de coexistencia, del teorema 1.19 se concluye la convergencia. □

En términos del sistema (1), para $a < \overline{a}, b > \widetilde{b}$, toda solución (u, v) con $u_0 \not\equiv 0$ convergerá uniformemente al equilibrio $(u^*, 0)$.

Por otro lado, se tiene el siguiente resultado de coexistencia:

Teorema 3.4 *Sea $P, Q \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Suponga que $a < \widetilde{a}$ y $b < \widetilde{b}$, entonces existe un estado de coexistencia estable en el sistema* (1.6).

Demostración. Si $a < \widetilde{a}$ y $b < \widetilde{b}$, entonces ambos equilibrios semitriviales son linealmente inestables, por el teorema 1.11. Por lo tanto, existe un equilibrio de coexistencia estable por el teorema 1.23. $\square$

3.1.2. Caso donde uno de los coeficientes de competencia tiende a infinito

Ahora se demostrará que cuando $a < \widetilde{a}$ y b es suficientemente grande, entonces el sistema no tiene equilibrios de coexistencia.

Teorema 3.5 *Sea $P, Q \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ y suponga que $a < \widetilde{a}$. Entonces existe $\overline{b} > 0$ tal que para todo $b > \overline{b}$, el sistema* (1.6) *no tiene equilibrios de coexistencia.*

Demostración. Sea (b_k) un sucesión de reales positivos tal que $\lim_{k\to\infty} b_k = \infty$. Suponga que existe una sucesión (U_k, V_k) de equilibrios de coexistencia, que son solución de:

$$\begin{aligned} \mu\nabla\cdot[e^P\nabla U_k] + e^P U_k(m - e^P U_k - ae^Q V_k) &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ \nu\nabla\cdot[e^Q\nabla V_k] + e^Q V_k(m - b_k e^P U_k - e^Q V_k) &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ \nabla U_k\cdot n = \nabla V_k \cdot n &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.4}$$

De igual manera que el caso anterior, la sucesión (U_k, V_k) es acotada en X. Luego por teoría de regularidad en espacios de Sobolev, se tiene que (U_k) es acotada en $W^{2,p}(\Omega)$ con $p > N$, de modo que tiene una subsucesión convergente en $\mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para cierto $\alpha \in (0,1)$. Se renombrará como (U_k) a tal subsucesión y $\widetilde{U}$ será el correspondiente límite.

Integrando en la segunda ecuación de (3.4), se obtiene que:

$$\int_\Omega e^{P+Q} U_k V_k = \frac{1}{b_k}\int_\Omega e^Q V_k(m - e^Q V_k) \tag{3.5}$$

Como (V_k) es acotada en $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$, se deduce que $\lim_{k\to\infty}\int_\Omega e^{P+Q}U_k V_k = 0$. Además, de la primera ecuación de (3.4) se tiene que:

$$\mu\int_\Omega e^Q\nabla U_k\cdot\nabla\varphi = \int_\Omega e^P U_k(m - e^P U_k - ae^Q V_k)\varphi \quad \forall\varphi\in\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$$

de modo que pasando al límite, se cumple lo siguiente:

$$\mu\int_\Omega e^Q\nabla\widetilde{U}\cdot\nabla\varphi = \int_\Omega e^P\widetilde{U}(m - e^P\widetilde{U})\varphi \quad \forall\varphi\in\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$$

Por lo tanto, $\widetilde{U}$ es solución débil del problema:

$$\begin{aligned} \mu\nabla\cdot[e^P\nabla\widetilde{U}] + e^P\widetilde{U}(m - e^P\widetilde{U}) &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ \nabla\widetilde{U}\cdot n &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.6}$$

Note que $e^P\widetilde{U}(m - e^P\widetilde{U}) \in W^{1,p}(\Omega)$ y por regularidad interior $\widetilde{U} \in W^{3,p}_{\text{loc}}(\Omega) \subset \mathcal{C}^2(\Omega)$. Se concluye entonces que $\widetilde{U}$ es una solución clásica de (3.6) y al ser no negativa se tiene que $\widetilde{U} \in \{0, U^*\}$.

Suponga que $\widetilde{U} = U^*$. Integrando la segunda ecuación de (3.4) se obtiene que:

$$\int_\Omega e^Q V_k(m - b_k e^P U_k - e^Q V_k) = 0 \tag{3.7}$$

Por otro lado, de la convergencia se tiene que $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, k \geq k_0$, se cumple que $m - b_k e^P U_k - e^Q V_k < 0$ en $\overline{\Omega}$. Esto contradice (3.7) y por lo tanto $\widetilde{U} = 0$.

Multiplicando la segunda ecuación de (3.4) por V_k e integrando por partes, se deduce que:

$$\nu \int_\Omega e^Q |\nabla V_k|^2 = \int_\Omega e^Q V_k^2(m - b_k e^P U_k - e^Q V_k) \leq \int_\Omega m e^Q V_k^2$$

lo cual implica que (V_k) es acotada en $W^{1,2}(\Omega)$ y por ende tiene una subsucesión convergente en $L^2(\Omega)$. Se renombrará como (V_k) a dicha subsucesión y $\widetilde{V}$ será el correspondiente límite.

Sea $w_k = \frac{U_k}{||U_k||_\infty}$, que es solución de:

$$\begin{aligned} \mu\nabla \cdot [e^P \nabla w_k] + e^P w_k(m - e^P U_k - a e^Q V_k) &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ \nabla w_k \cdot n &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.8}$$

Como (w_k) es acotada, por regularidad en espacios de Sobolev, tiene una subsucesión convergente en $\mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ a cierta función w que es no negativa y no nula. Integrando la ecuación de (3.8) y tomando límite se concluye que $a\int_\Omega e^{P+Q}\widetilde{V} w = \int_\Omega m e^P w > 0$ y de (3.5) se obtiene la igualdad:

$$b_k ||U_k||_\infty = \frac{\int_\Omega e^Q V_k(m - e^Q V_k)}{\int_\Omega e^{P+Q} V_k w_k}$$

Por lo tanto, la sucesión $(b_k||U_k||_\infty)$ es convergente. Luego aplicando resultados de regularidad a la segunda ecuación de (3.4), se obtiene que (V_k) es acotada en $W^{2,p}(\Omega)$ y por ende tiene una subsucesión convergente en $\mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Usando regularidad en espacios de Hölder en la ecuación (3.8), se tiene al tomar límite que w es solución de:

$$\begin{aligned} \mu\nabla \cdot [e^P \nabla w] + e^P w(m - a e^Q \widetilde{V}) &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ \nabla w \cdot n &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

Para $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, se denotará por $\lambda_0(f)$ el valor propio principal del problema:

$$\begin{aligned} \mu\nabla \cdot [e^P \nabla \varphi] + e^P(m - f)\varphi &= \lambda e^P \varphi \quad \text{en } \Omega \\ \nabla \varphi \cdot n &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

Por principio del máximo $w > 0$ en $\overline{\Omega}$ y por lo tanto $\lambda_0(a e^Q \widetilde{V}) = 0$. Por otro lado, por definición se tiene que $\lambda_0(\widetilde{a} e^Q V^*) = 0$. Además como $\widetilde{V} \leq V^*$, entonces $a e^Q \widetilde{V} < \widetilde{a} e^Q V^*$ en $\overline{\Omega}$, pues $a < \widetilde{a}$. Luego por comparación se obtiene que $\lambda_0(a e^Q \widetilde{V}) > \lambda_0(\widetilde{a} e^Q V^*)$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto no hay equilibrios de coexistencia para cuando $a < \widetilde{a}$ y b es lo suficientemente grande. $\square$

Corolario 3.6 *Para el valor $\overline{b}$ obtenido en el teorema anterior, se cumple que $\overline{b} \geq \widetilde{b}$.*

Demostración. Suponga que $\overline{b} < \widetilde{b}$. Entonces para a, b tales que $\overline{b} < b < \widetilde{b}$ y $a < \widetilde{a}$, se tiene que los equilibrios semitriviales son linealmente inestables, por el teorema 1.11. Luego por el teorema 1.23 existe un equilibrio de coexistencia, lo que contradice el teorema anterior. □

Corolario 3.7 *Considere $a < \widetilde{a}, b > \overline{b}$. Entonces para todo $(U_0, V_0) \in X_+$ con $U_0 \not\equiv 0$, la solución (U, V) de* (1.6) *satisface que:*

$$\lim_{t \to \infty} (U(x,t), V(x,t)) = (U^*, 0) \text{ en } X$$

Demostración. Al igual que en la demostración del corolario 3.3, se tiene que $(0, V^*)$ es linealmente inestable y se aplican los mismos resultados. □

En términos del sistema (1), para $a < \widetilde{a}, b > \overline{b}$, toda solución (u, v) con $u_0 \not\equiv 0$ convergerá uniformemente al equilibrio $(u^*, 0)$.

Por otro lado, se tiene el siguiente resultado de coexistencia:

Teorema 3.8 *Sea $P, Q \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Suponga que $a > \widetilde{a}$ y $b > \widetilde{b}$, entonces existe un estado de coexistencia inestable en el sistema* (1.6).

Demostración. Si $a > \widetilde{a}$ y $b > \widetilde{b}$, entonces ambos equilibrios semitriviales son asintóticamente estables, existiendo un equilibrio de coexistencia inestable por el teorema 1.21. □

3.2. Resultados de múltiple coexistencia

En esta sección se estudiará el caso cuando la primera especie es ideal free y la segunda admite cualquier estrategia de movimiento, la que se supondrá que no es ideal free. En otras palabras, se estudiará el sistema (1) suponiendo que $P = \ln m$ y $Q - \ln m$ no constante. Además, en el sistema se considerarán los coeficientes de difusión $\mu, \nu > 0$, para probar la existencia de múltiples estados de coexistencia.

Realizando el correspondiente cambio de variables, el sistema queda escrito como:

$$\begin{aligned} U_t = \mu \frac{1}{m} \nabla \cdot [m \nabla U] + U(m - mU - a e^Q V) \quad & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ V_t = \nu e^{-Q} \nabla \cdot [e^Q \nabla V] + V(m - bmU - e^Q V) \quad & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ \nabla U \cdot n = \nabla V \cdot n = 0 \quad & \text{en } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ U(x, 0) = U_0(x), V(x, 0) = V_0(x) \quad & \text{en } \overline{\Omega} \end{aligned} \tag{3.9}$$

y los equilibrios de (3.9) están dados por el problema:

$$\begin{aligned} \mu \nabla \cdot [m \nabla U] + mU(m - mU - a e^Q V) = 0 \quad & \text{en } \Omega \\ \nu \nabla \cdot [e^Q \nabla V] + e^Q V(m - bmU - e^Q V) = 0 \quad & \text{en } \Omega \\ \nabla U \cdot n = \nabla V \cdot n = 0 \quad & \text{en } \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.10}$$

En este caso, para el equilibrio semitrivial $(U^*, 0) = (1, 0)$ se tiene que su valor crítico de estabilidad es $\widetilde{b} = 1$. Para el equilibrio semitrivial $(0, V^*)$ se tiene que $\widetilde{a} > 1$, ya que la segunda especie no es ideal free, por el teorema 1.13.

Para comenzar se demostrará el siguiente resultado:

Teorema 3.9 *Suponga que $a \leq 1, b \geq 1$ y que $Q - \ln m$ no es constante. Entonces para todo $(U_0, V_0) \in X_+$ con $U_0 \not\equiv 0$, la solución (U, V) de* (3.9) *satisface que:*

$$\lim_{t \to \infty} (U(x,t), V(x,t)) = (U^*, 0)$$

Demostración. Sea (U, V) la solución de (3.9) cuando $a \leq 1, b \geq 1$ con condición inicial (U_0, V_0). Entonces se tiene las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} U_t &\geq \mu \frac{1}{m} \nabla \cdot [m \nabla U] + U(m - mU - e^Q V) \quad &\text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ V_t &\leq \nu e^{-Q} \nabla \cdot [e^Q \nabla V] + V(m - mU - e^Q V) \quad &\text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ &\nabla U \cdot n = \nabla V \cdot n = 0 \quad &\text{en } \partial\Omega \times (0, \infty) \end{aligned}$$

Considere (U', V') la solución de (3.9) cuando $a = 1, b = 1$, con condición inicial (U_0, V_0). Por teorema de comparación 1.31 se concluye que:

$$(U'(x,t), V'(x,t)) \leq_K (U(x,t), V(x,t)) \; \forall t \geq 0$$

Sea $(\widetilde{U}, \widetilde{V}) \in \omega(U_0, V_0)$ respecto del sistema (3.9) cuando $a \leq 1, b \geq 1$. Usando el teorema 0.1 con el cambio de variables realizado, se obtiene al tomar el correspondiente límite que:

$$(1, 0) \leq_K (\widetilde{U}, \widetilde{V})$$

El teorema 1.17 indica que $\omega(U_0, V_0) \subset [(0, 1), (1, 0)]_K$ y por lo tanto:

$$\lim_{t \to \infty} (U(x,t), V(x,t)) = (1, 0) \text{ en } X$$

$\square$

En términos del sistema (1), se concluye que resultado del teorema 0.1 se mantiene para cuando $a \leq 1, b \geq 1$. Además, para estos valores de los coeficientes de competencia, el equilibrio $(U^*, 0)$ es asintóticamente estable y $(0, V^*)$ es linealmente inestable.

En la sección anterior se demostró que cuando los equilibrios semitriviales poseen estabilidades distintas y alguno de ellos es muy grande o muy pequeño, entonces el sistema (1.6) no admite estados de coexistencia. Además, todas las soluciones con condiciones iniciales no negativas y no triviales, convergerán al equilibrio semitrivial estable. Surge naturalmente preguntarse si para el sistema (3.9), se mantiene este comportamiento asumiendo solamente que los equilibrios semitriviales poseen estabilidades distintas, es decir $a < \widetilde{a}, b > \widetilde{b}$.

Lo anterior es cierto cuando ambas especies son ideal free, como fue visto en el capítulo 2. Sin embargo, cuando solamente la primera especie es ideal free, se demostrará que para ciertos valores de los parámetros del sistema, existe más de un equilibrio de coexistencia.

Considere los espacios $Y = \mathcal{C}^{2,\alpha}_n(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^{2,\alpha}_n(\overline{\Omega}),\ Z = \mathcal{C}^{\alpha}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^{\alpha}(\overline{\Omega})$, en donde

$$C^{2,\alpha}_n(\overline{\Omega}) = \{u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})\colon \nabla u \cdot n = 0 \text{ en } \partial\Omega\}$$

Sea a fijo, se define la función $F\colon Y \times \mathbb{R} \to Z$ como:

$$F(y,z,b) = \begin{pmatrix} \mu\frac{1}{m}\nabla \cdot [m\nabla y] + y(m - my - ae^{Q}z) \\ \nu e^{-Q}\nabla \cdot \left[e^{Q}\nabla z\right] + z(m - bmy - e^{Q}z) \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

que es de clase $\mathcal{C}^{\infty}$.

Por teoría de regularidad en espacios de Hölder, todo equilibrio del sistema debe estar en Y, de modo que basta estudiar los ceros de F. El análisis se centrará en torno al equilibrio semitrivial $(U^*, 0) = (1, 0)$.

Observe que $F(U^*, 0, b) = 0$ para todo $b \in \mathbb{R}$, de manera que el conjunto $\{(U^*, 0, b)\colon b \in \mathbb{R}\}$ será llamado la recta trivial de soluciones. Aplicando la teoría de bifurcaciones, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.10 *Para cierto $\varepsilon > 0$, existe en $Y \times \mathbb{R}$ una curva suave y no trivial:*

$$\Gamma = \{(y(s), z(s), b(s))\colon |s| < \varepsilon,\ (y(0), z(0), b(0)) = (U^*, 0, 1)\}$$

tal que $F(y(s), z(s), b(s)) = 0$ para $|s| < \varepsilon$ y todos los ceros de F, en una vecindad del punto $(U^*, 0, 1)$, están en Γ o en la recta trivial. Además:

$$y(s) = 1 + sa\phi^* + s^2\eta_1(s),\ z(s) = s + s^2\eta_2(s)$$

para ciertas funciones η_1, η_2 suaves, con ϕ^* es la única solución de:

$$\begin{aligned} \mu\nabla \cdot [m\nabla\phi^*] - m^2\phi^* = me^{Q} &\quad \textit{en } \Omega \\ \nabla\phi^* \cdot n = 0 &\quad \textit{en } \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.12}$$

Demostración. La idea es aplicar el teorema 1.38 en torno al punto $(U^*, 0, 1)$. Para esto se requiere verificar las hipótesis:

(a) Se verifica directamente que $\forall\, b \in \mathbb{R}\colon\ F(U^*, 0, b) = 0$.

(b) $\mathcal{L} = D_{(y,z)}F(U^*, 0, 1)$ está dado por:

$$\mathcal{L}(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} \mu\frac{1}{m}\nabla \cdot [m\nabla\varphi] - m\varphi - ae^{Q}\psi \\ \nu e^{-Q}\nabla \cdot \left[e^{Q}\nabla\psi\right] \end{pmatrix}$$

Se tiene que $\ker\mathcal{L} = \langle(a\phi^*, 1)\rangle$ con ϕ^* solución de (3.12). Para esto, note que la inclusión $\langle(a\phi^*, 1)\rangle \subset \ker\mathcal{L}$, se tiene directamente por la definición de ϕ^*.

Para la otra inclusión considere $(\varphi, \psi) \in \ker\mathcal{L}$, lo que significa que (φ, ψ) es solución de:

$$\begin{aligned} \mu\nabla \cdot [m\nabla\varphi] - m^2\varphi - ame^{Q}\psi = 0 &\quad \text{en } \Omega \\ \nu\nabla \cdot \left[e^{Q}\nabla\psi\right] = 0 &\quad \text{en } \Omega \\ \nabla\varphi \cdot n = \nabla\psi \cdot n = 0 &\quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

De la segunda ecuación se obtiene que $\psi = c$, con c una constante. Luego para ϕ se tiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \mu\nabla \cdot [m\nabla\varphi] - m^2\varphi = acme^Q \quad & \text{en}\,\Omega \\ \nabla\varphi \cdot n = 0 \quad & \text{en}\,\partial\Omega \end{aligned}$$

que tiene una única solución y necesariamente $\varphi = ac\phi^*$.

(c) Se cumple que $\operatorname{ran}\mathcal{L} = \{(f,g)^\top \in Z\colon \int_\Omega e^Q g = 0\}$. En efecto, para $(f,g) \in Z$ considere el problema:

$$\begin{aligned} \mu\nabla \cdot [m\nabla\varphi] - m^2\varphi - ame^Q\psi = mf \quad & \text{en}\,\Omega \\ \nu\nabla \cdot \left[e^Q\nabla\psi\right] = e^Q g \quad & \text{en}\,\Omega \\ \nabla\varphi \cdot n = \nabla\psi \cdot n = 0 \quad & \text{en}\,\partial\Omega \end{aligned}$$

Note que la segunda ecuación tiene solución para ψ si y solo si $\int_\Omega e^Q g = 0$. Por otro lado, la primera ecuación siempre tiene solución en φ, para cualquier f y ψ. Por lo tanto $\operatorname{ran}\mathcal{L} = \{(f,g)^\top \in Z\colon \int_\Omega e^Q g = 0\}$, que es un subespacio de codimensión 1.

(d) Por último, $\mathcal{H} = D_b D_{(y,z)} F(U^*, 0, 1)$ está dado por $\mathcal{H}(\varphi,\psi) = (0, -m\psi)^\top$ y se cumple que $\mathcal{H}(a\phi^*, 1) \notin \operatorname{ran}\mathcal{L}$.

Por lo tanto, se cumplen las hipótesis necesarias, obteniéndose las conclusiones del teorema 1.38. □

Note que en la parametrización de Γ se tiene $z(s) = s(1 + s\eta_2(s))$, y como se está interesando solamente en soluciones positivas, solo se considerará la rama correspondiente a $s > 0$ en la curva Γ.

Lema 3.11 *Considere la expansión de $b(s)$ dada por $b(s) = 1 + sb'(0) + s^2\theta(s)$ con θ suave. Entonces $b'(0)$ está dado por:*

$$b_a'(0) = -\frac{a\int_\Omega me^Q\phi^* + \int_\Omega e^{2Q}}{\int_\Omega me^Q} \tag{3.13}$$

Demostración. De la segunda ecuación de $F = 0$, se obtiene que:

$$\nu\nabla \cdot [e^Q s^2\nabla\eta_2] + e^Q(s + s^2\eta_2)\left(m - m(1 + sa\phi^* + s^2\eta_1)(1 + sb'(0) + s^2\theta) - e^Q(s + s^2\eta_2)\right) = 0$$

Agrupando términos de potencia mayor en s:

$$\nu\nabla \cdot [e^Q s^2\nabla\eta_2] - e^Q(s + s^2\eta_2)\left(asm\phi^* + smb'(0) + se^Q + s^2\widetilde{\theta}(x,s)\right) = 0$$

Integrando esta igualdad y dividiendo por s^2:

$$\int_\Omega e^Q(1 + s\eta_2)\left(am\phi^* + mb'(0) + e^Q + s\widetilde{\theta}\right) = 0$$

Tomando límite cuando $s \to 0$, se concluye el resultado. □

De la ecuación (3.12), se concluye por principio del máximo que $\phi^* < 0$ en $\overline{\Omega}$. Esto implica que $b'_a(0)$ es una función lineal afín en a estrictamente creciente, de modo que para el valor de a dado por:

$$a^* = -\frac{\int_\Omega e^{2Q}}{\int_\Omega m e^Q \phi^*} \tag{3.14}$$

se tiene que $b'_a(0) = 0$, mientras que $b'_a(0) < 0$ si $a < a^*$ y $b'_a(0) > 0$ si $a > a^*$. Dicho $a^* > 0$ será llamado el **valor crítico de bifurcaciones** para el equilibrio semitrivial $(U^*, 0)$.

Con respecto a tal valor crítico, se afirma lo siguiente:

Lema 3.12 *Se cumple que $a^* \geq 1$. Además $a^* = 1$ si y solo si $Q - \ln m$ es constante.*

Demostración. Sea $R = Q - \ln m$. La ecuación para ϕ^* queda reescrita como:

$$\begin{aligned} \mu \nabla \cdot [m \nabla \phi^*] - m^2(\phi^* + e^R) = 0 \quad & \text{en } \Omega \\ \nabla \phi^* \cdot n = 0 \quad & \text{en } \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.15}$$

Multiplicando por ϕ^* e integrando por partes, se obtiene que:

$$0 \geq -\mu \int_\Omega m |\nabla \phi^*|^2 = \int_\Omega m^2 (\phi^* + e^R)$$

Notando que $m^2 \phi^*(\phi^* + e^R) = m^2(\phi^* + e^R)^2 - m^2 e^R(\phi^* + e^R)$, se concluye que:

$$\int_\Omega m^2 e^R (\phi^* + e^R) \geq \int_\Omega m^2 (\phi^* + e^R)^2 \geq 0$$

Luego $\int_\Omega m e^Q \phi^* + \int_\Omega e^{2Q} \geq 0$, lo que implica $b'_1(0) \leq 0$ y por lo tanto $a^* \geq 1$.

Si $a^* = 1$, entonces $\int_\Omega m^2 e^R(\phi^* + e^R) = 0$, lo cual implica $\int_\Omega m^2 (\phi^* + e^R)^2 = 0$ y por ende $\phi + e^R = 0$. De la ecuación (3.15), se concluye que ϕ debe ser constante y así $R = Q - \ln m$ debe ser constante.

Por último si R es constante, entonces de la ecuación (3.15) se obtiene $\phi^* = -e^R$ y por la fórmula de (3.14) se concluye que $a^* = 1$. □

Además para ϕ^*, la única solución de (3.12), se tiene la siguiente estimación:

Lema 3.13 *Para ϕ^* se cumple que $||\phi^*||_\infty \leq \left|\left|\frac{e^Q}{m}\right|\right|_\infty$.*

Demostración. Sea $R = Q - \ln m$ y suponga que $||\phi^*||_\infty > ||e^R||_\infty$. Como $\phi^* < 0$, considere $x^* \in \overline{\Omega}$ tal que $-\phi^*(x^*) = ||\phi^*||_\infty$. Si $x^* \in \Omega$ entonces $\mu \nabla \cdot [m \nabla \phi^*] (x^*) \geq 0$, pues x^* es un mínimo de ϕ^*. Por otro lado $-\phi^*(x^*) > e^{R(x^*)}$ y por lo tanto:

$$0 \leq \mu \nabla \cdot [m \nabla \phi^*] (x^*) = m^2(\phi^* + e^R)(x^*) < 0$$

lo que es una contradicción. Se concluye que $x^* \in \partial\Omega$.

Sea $B \subset \Omega$ una esfera interior tal que $x^* \in \partial B$. Por continuidad se puede suponer que $-\phi^* > e^R$ en B y entonces:

$$\mu \nabla \cdot [m \nabla \phi^*] = m^2 (\phi^* + e^R) < 0 \text{ en } B$$

Como para todo $x \in B$ se cumple que $\phi^*(x^*) < \phi^*(x)$, por lema de Hopf se tiene que $[\nabla \phi^* \cdot n](x^*) < 0$. Esto último es una contradicción y por lo tanto $||\phi^*||_\infty \leq ||e^R||_\infty$. □

Una pregunta interesante es cómo se compara el valor crítico de bifurcación a^* con el valor crítico de estabilidad $\widetilde{a}$. Para responder esta pregunta y encontrar múltiples equilibrios de coexistencia, se estudiará el comportamiento de los valores críticos al variar los coeficientes de difusión μ, ν.

Sea a_μ^*, el valor crítico de bifurcaciones, dado por:

$$a_\mu^* = -\frac{\int_\Omega e^{2Q}}{\int_\Omega m e^Q \phi_\mu^*} \tag{3.16}$$

y $\widetilde{a}_{\mu,\nu}$, el valor crítico de estabilidad, dado por:

$$\widetilde{a}_{\mu,\nu} = \sup_{\varphi \in W^{1,2}(\Omega)\setminus\{0\}} \left\{ \frac{-\mu \int_\Omega e^P |\nabla\varphi|^2 + \int_\Omega m e^P \varphi^2}{\int_\Omega V_\nu^* e^{P+Q} \varphi^2} \right\} \tag{3.17}$$

Se desea caracterizar los comportamientos límite de $a_\mu^*, \widetilde{a}_{\mu,\nu}$ cuando $\mu \to 0, \nu \to \infty$ y cuando $\mu \to \infty, \nu \to 0$. Para ello, será necesario estudiar los comportamientos de la función ϕ^* y el equilibrio semitrivial $(0, V^*)$ al variar μ, ν.

3.2.1. Caso $\mu \to 0, \nu \to \infty$

Primero se estudiará el comportamiento de ϕ^* cuando $\mu \to 0$.

Lema 3.14 *Sea ϕ_μ^* la única solución de:*

$$\begin{aligned} \mu \nabla \cdot [m \nabla \phi_\mu^*] - m^2 \phi_\mu^* &= m e^Q \quad \textit{en } \Omega \\ \nabla \phi_\mu^* \cdot n &= 0 \quad \textit{en } \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.18}$$

Entonces $\phi_0^* := \lim\limits_{\mu \to 0} \phi_\mu^* = -\dfrac{e^Q}{m}$ en $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Demostración. El objetivo es demostrar que $\forall\, \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\mu < \delta$ entonces $||\phi_\mu^* + \frac{e^Q}{m}||_\infty \leq \varepsilon$, i.e. $-\frac{e^Q}{m} - \varepsilon \leq \phi_\mu^* \leq -\frac{e^Q}{m} + \varepsilon$ en $\overline{\Omega}$.

Como $\mathcal{C}_n^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ es un subespacio denso en $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$, considere $\underline{\phi} \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que:

$$\begin{aligned} -\frac{e^Q}{m} - \varepsilon \leq \underline{\phi} \leq -\frac{e^Q}{m} - \frac{\varepsilon}{2} \quad &\text{en } \overline{\Omega} \\ \nabla \underline{\phi} \cdot n = 0 \quad &\text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

Luego para $\mu < \delta_1$ suficientemente pequeño, $\underline{\phi}$ es una subsolución de la ecuación (3.18). Además 0 es una supersolución y $\underline{\phi} \leq 0$ en $\overline{\Omega}$. Luego si $\mu < \delta_1$, entonces por proposición 1.28 se concluye que $\underline{\phi} \leq \phi_\mu^* \leq 0$ y por lo tanto $-\frac{e^Q}{m} - \varepsilon \leq \phi_\mu^*$ en $\overline{\Omega}$.

Por otro lado, considere ahora $\overline{\phi} \in \mathcal{C}^{2,\alpha}$ tal que:

$$\begin{aligned} -\frac{e^Q}{m} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \overline{\phi} \leq -\frac{e^Q}{m} + \varepsilon \quad &\text{en } \overline{\Omega} \\ \nabla \overline{\phi} \cdot n = 0 \quad &\text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

Si $\mu < \delta_2$ suficientemente pequeño, entonces $\overline{\phi}$ es una supersolución de la ecuación (3.18). Además sea $c < 0$ una constante tal que $c + \frac{e^Q}{m} \leq 0$ y $c \leq \overline{\phi}$ en $\overline{\Omega}$, de modo que c es una subsolución de (3.18). Luego si $\mu < \delta_2$, entonces por 1.28 se tiene que $c \leq \phi_\mu^* \leq \overline{\phi}$ y por lo tanto $\phi_\mu^* \leq -\frac{e^Q}{m} + \varepsilon$ en $\overline{\Omega}$.

Finalmente para $\delta < \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ se tiene que si $\mu < \delta$, entonces $||\phi_\mu^* + \frac{e^Q}{m}|| \leq \varepsilon$. $\square$

Como consecuencia del lema anterior, se obtiene el comportamiento límite de a^*.

Corolario 3.15 *Para* (3.16)*, se tiene que:*

$$a_0^* := \lim_{\mu \to 0} a_\mu^* = 1$$

A continuación, se estudiará el comportamiento del equilibrio semitrivial $(0, V^*)$ cuando $\nu \to \infty$.

Lema 3.16 *Sea V_ν^* la única solución positiva de:*

$$\begin{aligned} \nu \nabla \cdot [e^Q \nabla V_\nu^*] + e^Q V_\nu^*(m - e^Q V_\nu^*) &= 0 \quad \textit{en}\, \Omega \\ \nabla V_\nu^* \cdot n &= 0 \quad \textit{en}\, \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.19}$$

Entonces $V_\infty^* := \lim_{\nu \to \infty} V_\nu^* = \dfrac{\int_\Omega m e^Q}{\int_\Omega e^{2Q}}$ *en* $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$.

Demostración. Por resultado 1.6, la secuencia (V_ν^*) es acotada en $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Dividiendo (3.19) por ν, se tiene por teoría de regularidad en espacios Sobolev que (V_ν^*) es acotada en $W^{2,p}(\Omega)$ con $p > N$, para $\nu \geq 1$. Luego (V_ν^*) tiene una subsucesión convergente en $\mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ para cierto $\alpha \in (0,1)$ y usando regularidad en espacios de Hölder, se obtiene convergencia en $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Se renombrará como (V_ν^*) a tal subsucesión y V_∞^* será el correspondiente límite.

Multiplicando la ecuación (3.19) por V_ν^* e integrando por partes, se tiene que:

$$\int_\Omega |\nabla V_\nu^*|^2 = \frac{1}{\nu} \int_\Omega e^Q (V_\nu^*)^2 (m - e^Q V_\nu^*)$$

por lo que al tomar límite se concluye que V_∞^* es constante. Integrando la ecuación (3.19), se obtiene que:

$$\int_\Omega e^Q V_\nu^*(m - e^Q V_\nu^*) = 0 \tag{3.20}$$

y pasando al límite se deduce que:

$$\int_\Omega e^Q V_\infty^*(m - e^Q V_\infty^*) = 0$$

Luego $V_\infty^* \in \left\{0, \frac{\int_\Omega m e^Q}{\int_\Omega e^{2Q}}\right\}$. De ocurrir $V_\infty^* = 0$, existe $\nu_0 > 0$ tal que para todo $\nu \geq \nu_0$ se cumple que $m - e^Q V_\nu^* > 0$ en $\overline{\Omega}$. Esto último contradice (3.20) y por lo tanto se concluye que $V_\infty^* = \frac{\int_\Omega m e^Q}{\int_\Omega e^{2Q}}$. $\square$

Para caracterizar el comportamiento de $\widetilde{a}_{\mu,\nu}$, también será útil el siguiente lema:

Lema 3.17 *Sea $f \in L^\infty(\Omega)$. Entonces:*

$$\sup_{\varphi \in L^2(\Omega)\setminus\{0\}} \left\{ \frac{\int_\Omega f\varphi^2}{\int_\Omega \varphi^2} \right\} = ||f||_\infty$$

Demostración. Es directo notar que $\forall\, \varphi \in L^2(\Omega)\setminus\{0\}$ se tiene que $\frac{\int_\Omega h\varphi^2}{\int_\Omega \varphi^2} \leq ||h||_\infty$. Por otro lado, para $\varepsilon > 0$ considere el conjunto:

$$A_\varepsilon = \{x \in \Omega \colon |f(x)| \geq ||f||_\infty - \varepsilon\}$$

Por definición de la norma infinito, el conjunto A_ε tiene medida no nula. Luego la función $\varphi = \mathbb{1}_{A_\varepsilon} \in L^2(\Omega)\setminus\{0\}$ y por lo tanto:

$$\frac{\int_\Omega f\varphi^2}{\int_\Omega \varphi^2} \geq ||f||_\infty - \varepsilon$$

lo que concluye la demostración. □

Establecido lo anterior, el comportamiento límite de $\widetilde{a}$ está dado por el siguiente resultado:

Teorema 3.18 *Para* (3.17)*, se tiene que:*

$$\widetilde{a}_{0,\infty} := \lim_{\substack{\mu\to 0\\ \nu\to\infty}} a_{\mu,\nu} = ||me^{-Q}||_\infty \frac{\int_\Omega e^{2Q}}{\int_\Omega me^Q}$$

Demostración. Sea la función $J_\mu \colon \operatorname{Int} \mathcal{C}_+(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}$, dada por:

$$J_\mu(V) = \sup_{\varphi \in W^{1,2}(\Omega)\setminus\{0\}} \left\{ \frac{-\mu \int_\Omega e^P|\nabla\varphi|^2 + \int_\Omega me^P\varphi^2}{\int_\Omega Ve^{P+Q}\varphi^2} \right\}$$

la cual está bien definida, pues corresponde al valor propio principal de un operador elíptico. Además para todo $\mu > 0$, J_μ es continua en $\operatorname{Int} C_+(\overline{\Omega})$.

Por otro lado, se define $J_0 \colon \operatorname{Int} \mathcal{C}_+(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}$ como:

$$J_0(V) = \left|\left| \frac{m}{e^Q V} \right|\right|_\infty$$

que es también una aplicación continua.

Sin perder generalidad, suponga que $\mu \to 0$ de manera decreciente. En tal caso, para V fijo se tiene que $J_\mu(V)$ es creciente cuando $\mu \to 0$, lo cual implica que:

$$\lim_{\mu\to 0} J_\mu(V) = \sup_{\varphi \in W^{1,2}(\Omega)\setminus\{0\}} \left\{ \frac{\int_\Omega me^P\varphi^2}{\int_\Omega Ve^{P+Q}\varphi^2} \right\}$$

Por densidad, en el supremo anterior es posible cambiar $W^{1,2}(\Omega)$ por $L^2(\Omega)$. Luego cambiando φ por $(Ve^{P+Q})^{-\frac{1}{2}}\varphi$ y usando el lema anterior, se concluye que:

$$\lim_{\mu\to 0} J_\mu(V) = \sup_{\varphi \in L^2(\Omega)\setminus\{0\}} \left\{ \frac{\int_\Omega \frac{m}{e^Q V}\varphi^2}{\int_\Omega \varphi^2} \right\} = \left|\left| \frac{m}{e^Q V} \right|\right|_\infty = J_0(V)$$

Sea $\mathcal{K}$ un compacto de $\operatorname{Int} C_+(\overline{\Omega})$. Por teorema de Dini, se tiene que J_μ converge a J_0 uniformemente en $\mathcal{K}$. Como $\lim_{\nu\to\infty} V_\nu^* = V_\infty^*$ en $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, por convergencia uniforme se concluye finalmente que:

$$\widetilde{a}_{0,\infty} = \lim_{\substack{\mu\to 0\\ \nu\to\infty}} J_\mu(V_\nu^*) = J_0(V_\infty^*) = ||me^{-Q}||_\infty \frac{\int_\Omega e^{2Q}}{\int_\Omega me^Q}$$

$\square$

Finalmente, se tiene el siguiente resultado de múltiple coexistencia para el sistema (3.9).

Teorema 3.19 *Suponga que $Q - \ln m$ no es constante. Entonces existen coeficientes de competencia a, b y coeficientes de difusión $\overline{\mu}, \overline{\nu}$ tal que para todo $\mu < \overline{\mu}, \nu > \overline{\nu}$, el sistema* (3.9) *cumple que:*

- *El equilibrio $(U^*, 0)$ es asintóticamente estable y $(0, V^*)$ es inestable.*
- *Existen al menos dos equilibrios de coexistencia, siendo uno estable y otro inestable.*

Demostración. Si $Q - \ln m$ no es constante, entonces $||me^{-Q}||_\infty \int_\Omega e^{2Q} > \int_\Omega me^Q$ y por ende $\widetilde{a}_{0,\infty} > a_0^*$. Esto permite escoger $\overline{\mu}, \overline{\nu}$ tal que para todo $\mu < \overline{\mu}, \nu > \overline{\nu}$ se tiene que $\widetilde{a}_{\mu,\nu} > a_\mu^*$.

Para a tal que $a_\mu^* < a < \widetilde{a}_{\mu,\nu}$ el equilibrio $(0, V^*)$ será linealmente inestable y en la curva Γ del teorema 3.10 se tiene que $b'(0) > 0$. Como $b(0) = 1$, es posible tomar $s_0 > 0$ pequeño en la parametrización de Γ tal que $b(s_0) > 1$ y $\dfrac{db}{ds}(s_0) > 0$. Esto que implica que $(U^*, 0)$ es estable para dicho valor $b(s_0)$, por proposición 1.9.

Luego para tales valores a y $b(s_0)$, se obtiene un equilibrio de coexistencia $(y(s_0), z(s_0))$ en el sistema (3.9), dado por la curva Γ. Se afirma que tal equilibrio es inestable. En efecto, considere $\mathcal{L}_b = D_{(y,z)}F(U^*, 0, b)$, el cual está dado por:

$$\mathcal{L}_b(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} \mu\frac{1}{m}\nabla\cdot[m\nabla\varphi] - m\varphi - ae^Q\psi \\ \nu e^{-Q}\nabla\cdot\left[e^Q\nabla\psi\right] + (1-b)m\psi \end{pmatrix}$$

Sea $\widehat{\lambda}(b)$ el valor propio principal de $\mathcal{L}_b$, el cual es una función suave por teorema 1.39. Note que para b cercano a 1, $\widehat{\lambda}(b)$ es pequeño y por lo tanto el problema de valores propios $\mathcal{L}_b(\varphi, \psi) = \widehat{\lambda}(b)(\varphi, \psi)^\top$, se reduce simplemente al problema:

$$\begin{aligned} \nu e^{-Q}\nabla\cdot[e^Q\nabla\psi] + (1-b)m\psi &= \widehat{\lambda}(b)\psi \quad \text{en } \Omega \\ \nabla\psi\cdot n &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

Luego por comparación de valores propios principales, se concluye que $\dfrac{d}{db}\widehat{\lambda}(1) < 0$.

Por otro lado, note que el problema elíptico de valores propios:

$$D_{(y,z)}F(y(s_0), z(s_0), b(s_0))(\varphi, \psi) = \lambda\,(\varphi, \psi)^\top$$

corresponde al problema (1.8), que se obtiene de linealizar en torno al equilibrio de coexistencia $(y(s_0), z(s_0))$. La estabilidad dependerá entonces del valor propio principal $\lambda_0(s_0)$, el cual es suave en la variable s por el teorema 1.39.

Nuevamente por 1.39, se tiene que $s_0 \cdot \dfrac{db}{ds}(s_0) \cdot \dfrac{d}{db}\widehat{\lambda}(1)$ y $\lambda_0(s_0)$ tienen signos opuestos. Luego por 1.9, el equilibrio $(y(s_0), z(s_0))$ es linealmente inestable para el sistema (3.9), con los valores de a y b escogidos.

Como $(0, V^*)$ y $(y(s_0), z(s_0))$ son linealmente inestables, el teorema 1.23 implica la existencia de otro equilibrio que será estable y estará en $[[(0, V^*), (y(s_0), z(s_0))]]_K$. $\square$

3.2.2. Caso $\mu \to \infty, \nu \to 0$

Primero se estudiará el comportamiento de ϕ^* cuando $\mu \to \infty$.

Lema 3.20 *Sea nuevamente ϕ^*_μ la única solución de:*

$$\begin{aligned} \mu\nabla \cdot [m\nabla\phi^*_\mu] - m^2\phi^*_\mu = me^Q \quad & en\,\Omega \\ \nabla\phi^*_\mu \cdot n = 0 \quad & en\,\partial\Omega \end{aligned} \tag{3.21}$$

Entonces $\phi^*_\infty := \lim\limits_{\mu\to\infty} \phi^*_\mu = -\dfrac{\int_\Omega me^Q}{\int_\Omega m^2}$ *en* $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$.

Demostración. Por lema 3.13, se tiene que (ϕ^*_k) es acotada en $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Dividiendo (3.21) por μ, se tiene por teoría de regularidad en espacios de Sobolev que (ϕ^*_k) es acotada en $W^{2,p}(\Omega)$ con $p > N$, para $\mu \geq 1$. Luego (ϕ^*_k) tiene una subsucesión convergente en $\mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ para cierto $\alpha \in (0,1)$ y usando regularidad en espacios de Hölder, se obtiene convergencia en $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Se renombrará como (ϕ^*_k) a tal subsucesión y ϕ^*_∞ será el correspondiente límite.

Multiplicando (3.21) por ϕ^*_k e integrando por partes, se tiene que:

$$-\int_\Omega |\nabla\phi^*_k|^2 = \frac{1}{\mu}\int_\Omega \phi^*_k(m^2\phi^*_k + me^Q)$$

por lo que al tomar límite se concluye que ϕ^*_∞ es constante. Integrando (3.21) y pasando al límite se obtiene que $-\int_\Omega m^2\phi^*_\infty = \int_\Omega me^Q$, lo cual concluye el resultado. $\square$

Como consecuencia del lema anterior, se obtiene el comportamiento límite de (3.16).

Corolario 3.21 *Para* (3.16), *se tiene que:*

$$a^*_\infty = \lim_{\mu\to\infty} a^*_\mu = \frac{\int_\Omega m^2 \int_\Omega e^{2Q}}{\left(\int_\Omega e^Q m\right)^2}$$

A continuación se estudiará el comportamiento del equilibrio semitrivial $(0, V^*)$ cuando $\nu \to 0$.

Lema 3.22 *Sea V^*_ν la única solución positiva de:*

$$\begin{aligned} \nu\nabla \cdot [e^Q\nabla V^*_\nu] + e^Q V^*_\nu(m - e^Q V^*_\nu) = 0 \quad & en\,\Omega \\ \nabla V^*_\nu \cdot n = 0 \quad & en\,\partial\Omega \end{aligned} \tag{3.22}$$

Entonces $V^*_0 := \lim\limits_{\nu\to 0} V^*_\nu = me^{-Q}$ *en* $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Demostración. El objetivo es demostrar que $\forall\,\varepsilon > 0$ pequeño existe $\delta > 0$ tal que si $\nu < \delta$ entonces $||V^*_\nu - me^{-Q}||_\infty \leq \varepsilon$, i.e. $me^{-Q} - \varepsilon \leq V^*_\nu \leq me^{-Q} + \varepsilon$ en $\overline{\Omega}$.

Como $\mathcal{C}_n^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ es un subespacio denso en $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$, considere $\underline{\phi} \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que:

$$\begin{aligned} me^{-Q} - \varepsilon \leq \underline{\phi} \leq me^{-Q} - \frac{\varepsilon}{2} \quad & \text{en } \overline{\Omega} \\ \nabla \underline{\phi} \cdot n = 0 \quad & \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

Luego para $\varepsilon > 0$ y $\nu < \delta_1$ pequeños, $\underline{\phi}$ es una subsolución de la ecuación (3.22). Además sea $c_1 > 0$ una constante tal que $m - e^Q c_1 \leq 0$ y $\underline{\phi} \leq c_1$ en $\overline{\Omega}$, de modo que c_1 es una supersolución de (3.22). Luego si $\mu < \delta_1$, entonces por proposición 1.28 se concluye que $\underline{\phi} \leq V_\nu^* \leq c_1$ y por lo tanto $me^{-Q} - \varepsilon \leq V_\nu^*$ en $\overline{\Omega}$.

Por otro lado, considere ahora $\overline{\phi} \in \mathcal{C}^{2,\alpha}$ tal que:

$$\begin{aligned} me^{-Q} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \overline{\phi} \leq me^{-Q} + \varepsilon \quad & \text{en } \overline{\Omega} \\ \nabla \overline{\phi} \cdot n = 0 \quad & \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

Si $\varepsilon > 0$ y $\mu < \delta_2$ son pequeños, entonces $\overline{\phi}$ es una supersolución de la ecuación (3.19). Además sea $c_2 > 0$ una constante tal que $m - e^Q c_2 \geq 0$ y $c_2 \leq \overline{\phi}$ en $\overline{\Omega}$, de modo que c_2 es una subsolución de (3.19). Luego si $\mu < \delta_2$, entonces por 1.28 se tiene que $c_2 \leq V_\nu^* \leq \overline{\phi}$ y por lo tanto $V_\nu^* \leq me^{-Q} + \varepsilon$ en $\overline{\Omega}$.

Finalmente para $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ se tiene que si $\nu < \delta$, entonces $||V_\nu^* - me^{-Q}||_\infty \leq \varepsilon$. □

El comportamiento límite de $\widetilde{a}$ está dado por el siguiente resultado:

Teorema 3.23 *Para* (3.17) *se tiene que:*

$$\widetilde{a}_{\infty,0} := \lim_{\substack{\mu\to\infty \\ \nu\to 0}} a_{\mu,\nu} = 1$$

.

Demostración. Para (3.17) considere el problema elíptico asociado:

$$\begin{aligned} \mu\nabla \cdot [e^P \nabla\varphi_{\mu,\nu}] + (me^P - \widetilde{a}_{\mu,\nu} e^{P+Q} V_\nu^*)\varphi_{\mu,\nu} = 0 \quad & \text{en } \Omega \\ \nabla\varphi_{\mu,\nu} \cdot n = 0 \quad & \text{en } \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.23}$$

donde $\varphi_{\mu,\nu} > 0$ en $\overline{\Omega}$ y se puede suponer que $||\varphi_{\mu,\nu}||_\infty = 1$.

Note que $\widetilde{a}_{\mu,\nu}$ es acotada uniformemente en μ, ν. En efecto, de la expresión (3.17) se tiene que:

$$0 < \widetilde{a}_{\mu,\nu} \leq \sup_{\varphi \in W^{1,2}(\Omega)\setminus\{0\}} \left\{ \frac{\int_\Omega me^P \varphi^2}{\int_\Omega V_\nu^* e^{P+Q}\varphi^2} \right\} = \left|\left| \frac{m}{e^Q V_\nu^*} \right|\right|_\infty$$

donde el último término es acotado uniformemente para ν, pues la secuencia V_ν^* es convergente en $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ a una función estrictamente positiva.

Dividiendo (3.23) por μ, se tiene por teoría de regularidad en espacios de Sobolev, que la secuencia $(\varphi_{\mu,\nu})$ es acotada en $W^{2,p}(\Omega)$ con $p > N$, para $\mu \geq 1$. Luego $(\varphi_{\mu,\nu})$ tiene una subsucesión convergente en $\mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ para cierto $\alpha \in (0,1)$ cuando $\mu \to \infty, \nu \to 0$. Se renombrará como $(\varphi_{\mu,\nu})$ a tal subsucesión y $\varphi_{\infty,0}$ será el correspondiente límite.

Multiplicando la ecuación (3.23) por $\varphi_{\mu\nu}$ e integrando por partes, se tiene que:

$$\int_\Omega e^P |\nabla \varphi_{\mu,\nu}|^2 = \frac{1}{\mu}\int_\Omega (me^P - \widetilde{a}_{\mu,\nu} e^{P+Q} V_\nu^*)\varphi_{\mu,\nu}^2$$

por lo que tomar límite se concluye que $\varphi_{\infty,0} \equiv 1$. Integrando la ecuación (3.23), se obtiene que:

$$\widetilde{a}_{\mu,\nu} = \frac{\int_\Omega me^P \varphi_{\mu,\nu}}{\int_\Omega e^{P+Q} V_\nu^* \varphi_{\mu,\nu}}$$

Como V_ν^* converge uniformemente a me^{-Q}, pasando al límite en esta igualdad se concluye el resultado. □

Finalmente, se tiene el correspondiente resultado de múltiple coexistencia para el sistema (3.9).

Teorema 3.24 *Suponga que $Q - \ln m$ no es constante. Entonces existen coeficientes de competencia a, b y coeficientes de difusión $\overline{\mu}, \overline{\nu}$ tal que para todo $\mu > \overline{\mu}, \nu < \overline{\nu}$, el sistema* (3.9) *cumple que:*

- *El equilibrio $(U^*, 0)$ es inestable y $(0, V^*)$ es asintóticamente estable.*
- *Existen al menos dos equilibrios de coexistencia, siendo uno estable y otro inestable.*

Demostración. Si $Q - \ln m$ no es constante, entonces por desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que: $\int_\Omega m^2 \int_\Omega e^{2Q} > \left(\int_\Omega e^Q m\right)^2$ y por ende $a_\infty^* > \widetilde{a}_{\infty,0}$. Esto permite escoger $\overline{\mu}, \overline{\nu}$ tal que para todo $\mu > \overline{\mu}, \nu < \overline{\nu}$ se tiene que $a_\mu^* > \widetilde{a}_{\mu,\nu}$.

Para a tal que $\widetilde{a}_{\mu,\nu} < a < a_\mu^*$ el equilibrio $(0, V^*)$ será asintóticamente estable y en la curva Γ del teorema 3.10 se tiene que $b'(0) < 0$. Como $b(0) = 1$, es posible tomar $s_0 > 0$ pequeño en la parametrización de Γ tal que $b(s_0) < 1$ y $\dfrac{db}{ds}(s_0) < 0$. Esto que implica que $(U^*, 0)$ es inestable para dicho valor $b(s_0)$.

Luego para tales valores a y $b(s_0)$, se obtiene un equilibrio de coexistencia $(y(s_0), z(s_0))$ en el sistema (3.9), dado por la curva Γ.

Se afirma que tal equilibrio es estable. En efecto, para $\mathcal{L}_b = D_{(y,z)}F(U^*, 0, b)$, se vio en la demostración del teorema 3.19 que su valor propio principal $\widehat{\lambda}(b)$ es una función suave y que $\dfrac{d}{db}\widehat{\lambda}(1) < 0$.

Además, el problema elíptico de valores propios:

$$D_{(y,z)}F(y(s_0), z(s_0), b(s_0))(\varphi, \psi) = \lambda\,(\varphi, \psi)^\top$$

corresponde al problema (1.8), que se obtiene de linealizar en torno al equilibrio de coexistencia $(y(s_0), z(s_0))$. La estabilidad dependerá del valor propio principal $\lambda_0(s_0)$, el cual es suave en la variable s.

Por el teorema 1.39, se tiene que $s_0 \cdot \dfrac{db}{ds}(s_0) \cdot \dfrac{d}{db}\widehat{\lambda}(1)$ y $\lambda_0(s_0)$ tienen signos opuestos. Luego por 1.9, el equilibrio $(y(s_0), z(s_0))$ es asintóticamente estable para el sistema (3.9), con los valores de a y b escogidos.

Como $(0, V^*)$ y $(y(s_0), z(s_0))$ son asintóticamente estables, el teorema 1.21 garantiza la existencia de otro equilibrio que será estable y estará en $[[(0, V^*), (y(s_0), z(s_0))]]_K$. □

Los teoremas 3.19 y 3.24, muestran que son posibles ambos ordenamientos para los valores críticos. Además para el sistema (3.9), es posible la múltiple existencia de estados de coexistencia, a pesar de que los equilibrios semitrivales posean estabilidades distintas.

Cabe destacar que para el sistema (3.9), usando los mismos argumentos de convergencia, es posible demostrar los siguientes límites:

$$\widetilde{a}_{0,0} := \lim_{\mu\to 0,\nu\to 0} \widetilde{a}_{\mu,\nu} = 1\,, \quad \widetilde{a}_{\infty,\infty} := \lim_{\mu\to\infty,\nu\to\infty} \widetilde{a}_{\mu,\nu} = \frac{\int_\Omega m^2 \int_\Omega e^{2Q}}{\left(\int_\Omega e^Q m\right)^2}$$

lo que no permiten concluir un ordenamiento entre a^* y $\widetilde{a}$.

Igualmente, en el caso donde ambas especies son ideal free, los valores críticos de estabilidad y bifurcación son iguales a 1, con lo cual no es posible argumentar como en los teoremas 3.19 y 3.24.

Conclusión

En esta tesis se estudiaron distintos tipos de comportamiento del sistema considerado, pero quedan abiertos varios problemas.

En el caso donde ambas especies siguen la distribución ideal free, se caracterizó la dinámica en distintos casos, quedando abierto el problema de determinar el comportamiento de las soluciones cuando $a > 1, b > 1$. Es una pregunta interesante determinar si existen otros equilibrios de coexistencia, aparte de los ya conocidos. Estudiar el comportamiento cualitativo de los equilibrios de coexistencia obtenidos, cuando los coeficientes de competencia son grandes, es un problema relevante para entender fenómenos de segregación espacial en este tipo de sistemas.

Por otro lado, los ejemplos de coexistencia múltiple desarrollados en la sección 3.2, muestran que la condiciíon de los equilibrios teniendo estabilidades distintas, no es suficiente para determinar la no coexistencia, en contraste con el caso donde ambas especies son ideal free. Esto muestra en general que determinar la dinámica del sistema (1), variando los coeficientes de competencia, es un problema díficil. Estudiar las propiedades de estabilidad y bifurcaciones de los equilibrios semitriviales, es un elemento importante en el estudio del sistema. En este trabajo se mostraron ciertos coeficientes que rigen estos comportamientos locales, los cuales se caracterizaron en casos límites. Un problema a estudiar, es caracterizar las relaciones entre estos coeficientes en casos intermedios.

Por último, sería interesante determinar el comportamiento del sistema (1) en el caso de que las estrategias de difusión son una perturbación de la estrategia ideal free, es decir cuando $P = \ln m + \varepsilon R_1(x)$, $Q = \ln + \varepsilon R_2(x)$. En este contexto, es deseable comprender la manera en que las estrategias de movimiento y la competencia, median en la coexistencia.

Bibliografía

[1] SB Angenent. Uniqueness of the solution of a semilinear boundary value problem. *Mathematische Annalen*, 272(1):129–138, 1985.

[2] Isabel Averill, Yuan Lou, and Dan Munther. On several conjectures from evolution of dispersal. *Journal of biological dynamics*, 6(2):117–130, 2012.

[3] Robert Stephen Cantrell and Chris Cosner. *Spatial ecology via reaction-diffusion equations*. John Wiley & Sons, 2003.

[4] Robert Stephen Cantrell, Chris Cosner, and Yuan Lou. Approximating the ideal free distribution via reaction–diffusion–advection equations. *Journal of Differential Equations*, 245(12):3687–3703, 2008.

[5] Robert Stephen Cantrell, Chris Cosner, and Yuan Lou. Evolution of dispersal and the ideal free distribution. *Mathematical biosciences and engineering: MBE*, 7(1):17–36, 2010.

[6] Xinfu Chen, Richard Hambrock, and Yuan Lou. Evolution of conditional dispersal: a reaction–diffusion–advection model. *Journal of mathematical biology*, 57(3):361–386, 2008.

[7] EN Dancer and P Hess. Stability of fixed points for order-preserving discrete-time dynamical systems. *J. reine angew. Math*, 419:125–139, 1991.

[8] Richard Gejji, Yuan Lou, Daniel Munther, and Justin Peyton. Evolutionary convergence to ideal free dispersal strategies and coexistence. *Bulletin of mathematical biology*, 74(2):257–299, 2012.

[9] David Gilbarg and Neil S Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. springer, 1983.

[10] Jack K Hale. Dynamical systems and stability. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 26(1):39–59, 1969.

[11] Morris W Hirsch. Stability and convergence in strongly monotone dynamical systems. *J. reine angew. Math*, 383(1):53, 1988.

[12] S Hsu, Hal Smith, and Paul Waltman. Competitive exclusion and coexistence for competitive systems on ordered banach spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 348(10):4083–4094, 1996.

[13] Juraj Húska. Harnack inequality and exponential separation for oblique derivative problems on lipschitz domains. *Journal of Differential Equations*, 226(2):541–557, 2006.

[14] L Korobenko and E Braverman. On logistic models with a carrying capacity dependent diffusion: stability of equilibria and coexistence with a regularly diffusing population. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 13(6):2648–2658, 2012.

[15] L Korobenko and E Braverman. On evolutionary stability of carrying capacity driven dispersal in competition with regularly diffusing populations. *Journal of mathematical biology*, 69(5):1181–1206, 2014.

[16] King-Yeung Lam and Daniel Munther. A remark on the global dynamics of competitive systems on ordered banach spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 144(3):1153–1159, 2016.

[17] Yuan Lou and Daniel Munther. Dynamics of a three species competition model. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 32(9):3099–3131, 2012.

[18] Hiroshi Matano and Masayasu Mimura. Pattern formation in competition-diffusion systems in nonconvex domains. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 19(3):1049–1079, 1983.

[19] Xavier Mora. Semilinear parabolic problems define semiflows on ck spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 278(1):21–55, 1983.

[20] Louis Nirenberg. *Topics in nonlinear functional analysis*, volume 6. American Mathematical Soc., 1974.

[21] Chia-Ven Pao. Coexistence and stability of a competition-diffusion system in population dynamics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 83(1):54–76, 1981.

[22] Chia-Ven Pao. *Nonlinear parabolic and elliptic equations*. Springer Science & Business Media, 1992.

[23] Hal L Smith. *Monotone dynamical systems: an introduction to the theory of competitive and cooperative systems*. Number 41. American Mathematical Soc., 1995.

[24] HL Smith. Dynamics of competition. In *Mathematics Inspired by Biology*, pages 191–240. Springer, 1999.

[25] Robert Stephen Cantrell, Chris Cosner, Donald L Deangelis, and Victor Padron. The ideal free distribution as an evolutionarily stable strategy. *Journal of Biological Dynamics*, 1(3):249–271, 2007.