UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

TASA DE CONVERGENCIA DE LA VELOCIDAD ASINTÓTICA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS DE TIPO BRUNET-DERRIDA

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

CAMILO ALFONSO ITURRA CISTERNAS

PROFESOR GUÍA:
DANIEL REMENIK ZISIS

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JOAQUÍN FONTBONA TORRES
JAIME SAN MARTÍN ARISTEGUI

SANTIAGO DE CHILE
2016

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO Y
GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,
MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS
POR: CAMILO ALFONSO ITURRA CISTERNAS
FECHA: 2016
PROF. GUÍA: SR. DANIEL REMENIK ZISIS

TASA DE CONVERGENCIA DE LA VELOCIDAD ASINTÓTICA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS DE TIPO BRUNET-DERRIDA

En este trabajo se estudia un sistema de partículas cuya dinámica está determinada por mecanismos de ramificación y selección. Cada una de las $N \in \mathbb{N}$ partículas del sistema espera un tiempo exponencial de tasa $\tau > 0$ para generar un nuevo individuo posicionado, relativo al padre, según una medida de probabilidad μ en $\mathbb{R}$. Inmediatamente después de un evento de ramificación se elimina la partícula que está más a la izquierda dejando la cantidad de individuos constate. Si $\max x^N(t)$ es la posición de la partícula de más a la derecha a tiempo $t \geq 0$ entonces bajo ciertas hipótesis sobre μ se prueba que $\frac{\max x^N(t)}{t} \xrightarrow{t\to\infty} v_N$ c.s., donde v_N es una constante determinista, y que $v_N \nearrow v < \infty$, donde v es la velocidad de la partícula de más a la derecha del sistema anterior pero sin el mecanismo de selección. El resultado principal de esta tesis determina una cota para la velocidad de convergencia de v_N a v. Específicamente se prueba que $\liminf_{N\to\infty}(v - v_N)(\log N)^2 \geq C$ donde C es una constante explícita dependiente de la transformada de Laplace de μ. Finalmente se estudia un sistema similar a tiempo discreto y se exploran extensiones para el caso en que entre tiempos de ramificación las partículas se mueven según un proceso de Lévy.

A mi familia y amigos

Tabla de Contenido

Introducción

Las ecuaciones de reacción-difusión permiten modelar distintos sistemas físicos, químicos, biológicos y ecológicos en donde la concentración o densidad de algún agente es transformada mediante mecanismos de interacción interna de sus partes (reacción) y propagación en el espacio (difusión). Un ejemplo clásico de este tipo de modelo es la ecuación F-KPP (por Fisher, Kolmogorov-Petrovskii-Piskounov):

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + f(u), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0\\ &u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}\end{aligned} \tag{1}$$

Esta ecuación fue introducida en 1937 por Fisher [10] y Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov [1] con el propósito de modelar la evolución de un rasgo genético de una población que habita un espacio unidimensional. Desde los trabajos seminales mencionados anteriormente las ecuaciones del tipo 1 han recibido gran atención dado que, bajo hipótesis razonables, admiten un continuo de soluciones del tipo onda viajera que pueden ser parametrizadas por la velocidad del frente v. Específicamente, es posible probar que para cierta clase de funciones f existe v^* tal que para todo $v \geq v^*$ existe una función w_v para la cual $u(x,t) = w_v(x - vt)$ es solución de 1 [15]. Este hecho es desconcertante desde el punto de vista del modelamiento dado que solo una de estas velocidades debería tener sentido en el contexto del sistema a modelar. Una explicación que dio Fisher para este fenómeno es que en 1 u representa una densidad “límite” o de escala macroscópica en donde se asume una infinidad de agentes, perdiendo así, los efectos del ruido producido por un modelo de escala microscópica. Siguiendo esta idea los físicos teóricos Brunet y Derrida con su trabajo de 1997 [6] comenzaron a estudiar los efectos microscópicos en la propagación de ondas de la ecuación 1 cuando $f(u) = u - u^3$. Para ello siguieron el siguiente esquema: Si la cantidad de partículas fuese realmente un entero N entonces el efecto de f en la ecuación solo estaría presente cuando hay al menos un agente, es decir, cuando la concentración o densidad es $u \geq \frac{1}{N}$. Con esto, los autores modificaron la ecuación 1 introduciendo lo que ellos llaman un cutoff:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + (u - u^3)\mathbf{1}_{\{u \geq \frac{1}{N}\}}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0\\ &u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}\end{aligned} \tag{2}$$

Mediante argumentos heurísticos y simulaciones computacionales (de versiones discretizadas de 2) los autores prueban que esta ecuación admite una única solución de onda viajera con velocidad v_N que cumple

$$v_N \approx v^* - \frac{\text{Const}}{(\log N)^2} \tag{3}$$

donde v^* es la velocidad minimal de la solución de onda viajera de la ecuación sin cutoff. Dado el lento orden de convergencia de v_N a v^* Brunet y Derrida evidencian cuantitativamente la importancia de el efecto microscópico en la propagación del frente. Posterior a este trabajo se han estudiado distintas ecuaciones y sistemas de partículas ([4],[7],[5]) que exhiben la misma tasa de convergencia 3. Con esto se muestra cierta universalidad de este comportamiento.

Dado el contexto anterior Durrett y Remenik estudiaron en [9] un sistema de N partículas en $\mathbb{R}$ que evoluciona mediante los siguientes mecanismos de ramificación y selección: Cada una de las N partículas de manera independiente espera un tiempo exponencial de parámetro 1 para generar un nuevo individuo posicionado, relativo al padre, según una medida de probabilidad μ en $\mathbb{R}$. Inmediatamente después de un evento de ramificación se elimina la partícula que está más a la izquierda dejando la cantidad de individuos constate. Para este sistema prueban, bajo hipótesis de decaimiento exponencial de μ, que asintóticamente en el tiempo las partículas se mueven a una única velocidad v_N, que $v_N \to v^*$ donde v^* es la velocidad asintótica de la partícula de más a la derecha del sistema anterior pero sin el mecanismo de selección y que la medida empírica converge cuando $N \to \infty$ a la solución de una ecuación integro diferencial de frontera libre que admite soluciones del tipo onda viajera si y solo si la velocidad del frente es $v \geq v^*$.

En este trabajo se demuestra que para el sistema descrito en el párrafo anterior se tiene un comportamiento del tipo 3. A groso modo se prueba el siguiente teorema:

Teorema $\forall \alpha \in (0, \chi^*)$ se tiene que para N suficientemente grande

$$v^* - v_N \geq \frac{\alpha}{(\log N)^2}$$

donde χ^* es una constante explícita y depende de la transformada de Laplace de la medida de traslación.

La presente memoria se organiza como sigue. En el Capítulo 1 se presentan las herramientas básicas para el correcto desarrollo de los resultados posteriores. En particular, se presenta una breve introducción a los procesos de Lévy, procesos de Galton-Watson, paseos aleatorios con ramificación y procesos de Markov con ramificación. Seguidamente, en el Capítulo 2 se presenta la definición y propiedades básicas de los sistemas a estudiar. Luego, en el Capítulo 3 se presentan los resultados principales de este trabajo junto a algunos ejemplos simples y en el Capítulo 4 se desarrollan las demostraciones. Finalmente, en el Capítulo 5 se exploran extensiones de los resultados obtenidos cuando a las partículas del sistema se les permite moverse como un proceso de Lévy entre tiempos de ramificación.

Capítulo 1

Preliminares

Esta sección esta basada en los primeros dos capítulos de [13]

1.1. Procesos de Lévy

Definición 1.1 *Un proceso estocástico* $(X(t))_{t\geq 0}$ *en* $\mathbb{R}$ *definido en un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *se dirá* ***proceso de Lévy*** *si cumple las siguientes propiedades:*

(a) Las trayectorias de X *son càdlàg* $\mathbb{P}$*-c.s.*

(b) $\forall 0 \leq s \leq t$, $X(t) - X(s)$ *es igual en distribución a* $X(t-s)$*. Esta propiedad se conoce como* ***incrementos estacionarios****.*

(c) $\forall 0 \leq s \leq t$, $X(t) - X(s)$ *es independiente de* $(X(r))_{r\in[0,s]}$*. Esta propiedad se conoce como* ***incrementos independientes****.*

El siguiente teorema caracteriza la distribución de $X(t)$ para todo $t \geq 0$ cuando X es un proceso de Lévy.

Teorema 1.2 ***(Formula de Lévy Khintchine)*** *(teorema 1.6 de [13]) Si* X *es un proceso de Lévy entonces existe una única tripleta* (a, σ, ν), $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ *y* ν *una medida concentrada en* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *con* $\int (1 \wedge x^2)\nu(\mathrm{d}x) < \infty$*, tal que*

$$\mathbb{E}(e^{i\theta X(t)}) = e^{-t\phi(\theta)}$$

donde

$$\phi(\theta) := ia\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int (1 - e^{i\theta x} + i\theta x \mathbf{1}_{|x|<1})\nu(\mathrm{d}x)$$

El siguiente teorema caracteriza trayectorialmente a un proceso de Lévy.

Teorema 1.3 ***(Descomposición de Lévy-Itô)*** *(teorema 2.1 de [13]) Si* X *es un proceso de Lévy de caracteristicas* (a, σ, ν) *entonces se puede escribir como la suma de tres procesos* *independientes* $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ *y* $X^{(3)}$ *donde* $X^{(1)}(t) = \sigma B(t) + at$ *con* B *movimiento Browniano,* $X^{(2)}$ *es una martingala de cuadrado integrable y* $X^{(3)}$ *es una proceso de Poisson compuesto de intensidad* $\lambda = \nu(\mathbb{R} \setminus [-1,1])$ *y ley de saltos* $\frac{\nu}{\lambda}|_{\{x:\,|x|\geq 1\}}$.

A continuación se presentan algunas propiedades útiles que son consecuencia de los teoremas anteriores.

Proposición 1.4 *Sea* X *un proceso de Lévy de caracteristicas* (a, σ, ν) *entonces:*

(a) $X \in L^p$, $p \geq 1$ *si y solo si*

$$\int_{|x|\geq 1} |x|^p \nu(\mathrm{d}x) < \infty$$

Además, en este caso, el proceso $M(t) = X(t) - \mathbb{E}(X(t))$ *es una martingala* L^p *para todo* $p \geq 1$ *donde*

$$\mathbb{E}(X(t)) = \left(a + \int_{|x|\geq 1} x\nu(\mathrm{d}x)\right) t$$

(b) X *es un proceso de Markov con generador*

$$Af(x) = \frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) - af'(x) + \int (f(x+y) - f(x) - yf'(x)\mathbf{1}_{|y|<1})\nu(\mathrm{d}x), \quad f \in C_0^2(\mathbb{R})$$

Más aún, de esto y el Teorema 1.3 se deduce que la suma de dos procesos de Lévy independientes de generadores A *y* B *es un proceso de Lévy de generador* $A + B$.

(b) Si existe $x < 0 < y$ *tal que* $\forall\theta \in (x, y)$

$$\int_{|z|\geq 1} e^{\theta z} \nu(\mathrm{d}z) < \infty$$

entonces en (x, y) *la transformada de Laplace* $\theta \mapsto \mathbb{E}(e^{\theta X(t)})$ *es finita y se tiene que*

$$\mathbb{E}(e^{\theta X(t)}) = e^{t\psi(\theta)}$$

donde

$$\psi(\theta) = -a\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int (e^{\theta x} - 1 - \theta x\mathbf{1}_{|x|<1})\nu(\mathrm{d}x)$$

La función ψ *se conoce como el* ***coeficiente de Laplace*** *del proceso.*

1.2. Árboles

En esta sección se definirá el espacio de árboles y los árboles aleatorios a tiempo discreto y continuo que se utilizarán como el elemento genealógico de los procesos de ramificación a estudiar.

1.2.1. Espacio de Árboles

Se define el conjunto de **etiquetas** por

$$\mathcal{U} = \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathbb{N}^m$$

con la convención $\mathbb{N}^0 = \{\varnothing\}$. Para un elemento $u \in \mathbb{N}^m$ se define $|u| = m$ como la generación de u. Si $u = u_1 \cdots u_p$ y $v = v_1 \cdots v_q$ se define la concatenación $uv = u_1 \cdots u_p v_1 \cdots v_q$ y se identifica $\varnothing u = u\varnothing = u$. Además se introduce la relación de orden parcial dada por

$$u \leq v \iff \exists\, w \in \mathcal{U} \text{ tal que } v = uw$$

si $w \neq \varnothing$ entonces se anotará $u < v$ y si v es un hijo directo de u se denotara por $u \prec v$.

Definición 1.5 *Un* ***árbol enraizado*** $\mathcal{T}$ *es un subconjunto de* $\mathcal{U}$ *tal que:*

- $\varnothing \in \mathcal{T}$,
- *si* $v \in \mathcal{T}$ *entonces* $u \leq v$ *implica* $u \in \mathcal{T}$,
- *para todo elemento* $u \in \mathcal{T}$ *existe un número* $D(u) \in \mathbb{N}$ *tal que si* $D(u) = 0$ *entonces* $v > u$ *implica* $v \notin \mathcal{T}$, *y si no* $uj \in \mathcal{T}$ *si y solo si* $1 \leq j \leq D(u)$.

Se define el conjunto de los individuos de la generación n *como* $\mathcal{T}(n) := \{u \in \mathcal{U} \colon u \in \mathcal{T},\ |u| = n\}$. *Finalmente, para un individuo* $u \in \mathcal{T}$ *con* $|u| = n$ *se define* u_i, $i \leq n$, *como el ancestro de* u *en la generación* i.

Observación

- Notar que un árbol está completamente definido por la colección $(D(u))_{u\in\mathcal{U}}$ que representa la cantidad de descendientes de cada individuo.
- Un árbol de este tipo se puede pensar como un árbol a tiempo discreto donde la generación $n \in \mathbb{N}$ de un individuo es el tiempo en que este está vivo.

Para obtener un árbol a tiempo continuo simplemente hay que agregar el tiempo de vida de cada uno de los individuos. Para una secuencia $(l(u))_{u\in\mathcal{U}}$ de números reales no negativos se define

$$\forall u \in \mathcal{U} \quad \alpha(u) := \sum_{v<u} l(u) \text{ y } \beta(u) := \sum_{v\leq u} l(v) = \alpha(u) + l(u)$$

con la convención $\alpha(\varnothing) = 0$. $l(u)$ representa el tiempo de vida del individuo u mientras que $\alpha(u)$ y $\beta(u)$ son los tiempos de nacimiento y muerte respectivamente. Sea

$$\mathbb{U} := \mathcal{U} \times \mathbb{R}_+$$

Definición 1.6 *Un* ***árbol enraizado a tiempo continuo*** *es un un subconjunto* $\mathbb{T}$ *de* $\mathbb{U}$ *tal que:*

- $(\varnothing, 0) \in \mathbb{T}$,

- *la proyección $\mathcal{T}$ de $\mathbb{T}$ en $\mathcal{U}$ es un árbol enraizado,*
- *existe una secuencia de reales no negativos $(l(u))_{u\in\mathcal{U}}$ tal que para todo $u \in \mathcal{T}$, $(u,t) \in \mathbb{T}$ si y solo si $\alpha(u) \leq t < \beta(u)$.*

Al igual que en el caso discreto se define el conjunto de los individuos vivos a tiempo $t \geq 0$ como $V(t) := \{u \in \mathcal{U} \colon (u,t) \in \mathbb{T}\} = \{u \in \mathcal{T} \colon \alpha(u) \leq t < \beta(u)\}$. Para $(u,t) \in \mathbb{T}$ y $s \leq t$ se define $u(s) \in \mathcal{T}$ como el ancestro de u vivo a tiempo s y se denota por $\theta_{(u,t)}\mathbb{T} = \{(v,s) \in \mathbb{U} \colon (uv, t+s) \in \mathbb{T}\}$ al árbol enraizado a tiempo continuo shifteado por (u,t) o enraizado en (u,t).

1.2.2. Árboles de Galton-Watson

Definición 1.7 *Un* ***árbol de Galton-Watson a tiempo discreto*** *con ley de reproducción $p = (p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es un elemento aleatorio del espacio de los árboles enraizados tal que $(D(u))_{u\in\mathcal{U}} \overset{i.i.d.}{\sim} p$.*

Definición 1.8 *Un* ***árbol de Galton-Watson a tiempo continuo*** *con ley de reproducción $p = (p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y tasa de ramificación $\tau > 0$ es un elemento aleatorio del espacio de árboles a tiempo continuo tal que*

- $(D(u))_{u\in\mathcal{U}} \overset{i.i.d.}{\sim} \nu$,
- $(l(u))_{u\in\mathcal{U}} \overset{i.i.d.}{\sim} exp\ (\tau)$,
- $(D(u))_{u\in\mathcal{U}}$ *y* $(l(u))_{u\in\mathcal{U}}$ *son independientes.*

Observación Notar que la proyección de un árbol de Galton-Watson a tiempo continuo en $\mathcal{U}$ es un árbol de Galton-Watson a tiempo discreto.

Definición 1.9 *Sea $m := \sum_{k=0}^{\infty} kp_k$ la cantidad promedio de descendientes de cada individuo. Se dice que la distribución p es* ***crítica*** *(resp.* ***supercrítica****, resp.* ***subcrítica****) si $m = 1$ (resp. $m > 1$, resp. $m < 1$).*

Proposición 1.10 *(Lema A.5.1 de [2]) Tanto para un árbol de Galton-Watson discreto como continuo se define el conjunto de extinción por*

$$A = \{\exists t\colon \ \textit{la cantidad de individuos a tiempo } t \textit{ es } 0\}$$

Se tiene que:

- *Si $m < 1$ entonces $\mathbb{P}(A) = 1$.*
- *Si $m > 1$ entonces $\mathbb{P}(A) < 1$.*

El siguiente teorema se puede encontrar en [2] Capitulo 1 (teorema B.8.2) y Capitulo 3 (teorema 7.1)

Teorema 1.11 ***(Convergencia Galton-Watson)***

(a) Sea W_n la cantidad de individuos de la n-ésima generación de un Galton-Watson discreto. Entonces

$$\frac{W_n}{m^n} \xrightarrow{n\to\infty} W \text{ c.s.}$$

Además $\mathbb{P}(W=0)$ es la probabilidad de extinción.

(b) Análogamente, si W_t es la cantidad de individuos vivos a tiempo t de un Galton-Watson a tiempo continuo de tasa τ entonces

$$\frac{W_t}{e^{\tau(m-1)t}} \xrightarrow{t\to\infty} W \text{ c.s.}$$

Además $\mathbb{P}(W=0)$ es la probabilidad de extinción.

1.3. Paseos aleatorios con ramificación

Definición 1.12 *Un **proceso puntual** en un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ es una colección de puntos aleatorios $x_1,\dots,x_N \in E$ (N también puede ser aleatorio). Para formalizar está noción se considera el conjunto $N(E)$ de todas las medidas en $\mathcal{E}$ de la forma $\eta = \sum_{i=1}^N \delta_{x_i}$ y se le induce la σ-álgebra $\mathcal{N}$ que hace medible a las funciones $\Phi_A\colon N(E)\to\mathbb{N},\ \eta\mapsto\eta(A)$ donde $A\in\mathcal{E}$. Con esto, un proceso puntual es un elemento aleatorio de $(N(E),\mathcal{N})$. Si η es un proceso puntual entonces la función $\mathcal{E}\ni A\mapsto\gamma(A):=\mathbb{E}(\eta(A))$ es una medida y se conoce como **medida de intensidad** de η.*

Definición 1.13 *Para un proceso puntual η en $\mathbb{R}$ con medida de intensidad γ se define su **transformada de Laplace** por:*

$$\phi(\theta) := \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\theta x}\eta(\mathrm{d}x)\right) = \int e^{\theta x}\gamma(\mathrm{d}x) \in [0,\infty]$$

Definición 1.14 *Un **paseo aleatorio con ramificación** unidimensional o BRW gobernado por el proceso puntual $\eta=\sum_{i=1}^N \delta_{x_i}$ en $\mathbb{R}$ se define recursivamente como sigue:*

(a) La generación $n=0$ consta de un individuo ubicado en el origen.

(b) Sean $z_1,\dots,z_M$ las posiciones de los individuos de la generación n (si estos no existen el proceso se extingue). Cada individuo $k=1,\dots,M$ se reproduce posicionando a sus descendientes según el proceso puntual shifteado $z_k+\eta^{(k)}$ donde los $(\eta^{(k)})_k$ son copias independientes de η.

Para hacer una definición más formal se considera una colección i.i.d. de procesos puntuales $(\eta(u),\ u\in\mathcal{U})$ donde $\mathcal{U}$ es el espacio de etiquetas. La cantidad de individuos en el proceso puntual $\eta(u)$ dice cuantos descendientes tiene la partícula u, de esta manera se obtiene un árbol de Galton-Watson $\mathcal{T}$ con un etiquetado $X\colon\mathcal{T}\to\mathbb{R}$ donde $X(u)$ es la posición del individuo u.

Teorema 1.15 ***(Many to One)****(teorema 1.1 de [14]) Sea X un BRW cuyo proceso puntual*

η tiene transformada de Laplace ϕ finita en algún $\theta > 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ medible.

$$\mathbb{E}\left(\sum_{|u|=n} g(X(u_1), \ldots, X(u_n))\right) = (\phi(\theta))^n \mathbb{E}(e^{-\theta S_n} g(S_1, \ldots, S_n))$$

donde (S_i) es un paseo aleatorio con ley de saltos dada por la siguiente formula:

$$\forall h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \text{ medible} \quad \mathbb{E}(h(S_1)) = \frac{1}{\phi(\theta)} \mathbb{E}\left(\int h(x) e^{\theta x} \eta(\mathrm{d}x)\right)$$

Teorema 1.16 *(teorema 1.3 de [14]) Sea X un BRW con trasnformada de Laplace ϕ finita en algún $\theta > 0$. Si además $\phi(0) > e$ (el árbol de Galton-Watson asociado es supercrítico) entonces condicional a no extinción*

$$\frac{1}{n} \max_{|u|=n} X(u) \xrightarrow{n\to\infty} \inf_{\theta>0} \frac{\log \phi(\theta)}{\theta} \in \mathbb{R} \qquad \text{c.s. y en } L^1$$

Definición 1.17 *Sea X un BRW como el del teorema anterior y $v = \inf_{\theta>0} \frac{\log \phi(\theta)}{\theta}$ la velocidad asintótica de la partícula de más a la derecha. Para todo $v > \varepsilon > 0$ se define $\rho_X(\varepsilon)$ como la probabilidad de que exista un rayo infinito $\{\varnothing =: u_0 \prec u_1 \prec \cdots\} \subseteq \mathcal{T}$ tal que $X(u_j) \geq (v - \varepsilon)j$ para todo $j \geq 1$*

Observación Si se considera un modelo de BRW con selección en el cual una partícula u se elimina si cae por debajo de $(v - \varepsilon)|u|$ entonces $\rho_X(\varepsilon)$ es la probabilidad de no extinción de este proceso.

Teorema 1.18 *(teorema 1.2 de [11]) Sea X un BRW con transformada de Laplace ϕ y número de individuos de la primera generación Z_1. Si se hacen las siguientes suposiciones*

(1) $\mathbb{E}(Z_1) > 1$ (supercriticalidad) y existe $\delta > 0$ tal que $\mathbb{E}(Z_1^{1+\delta}) < \infty$.
(2) Para la función $\Phi = \log \phi$ existe $\theta^* > 0$ tal que

$$\Phi(\theta^*) = \theta^* \Phi(\theta^*)$$

entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{1/2} \log \rho_X(\varepsilon) = \pi \left(\frac{\theta^* \Phi''(\theta^*)}{2}\right)^{1/2}$$

Observación En el teorema anterior, si se define $\chi := \frac{\pi^2}{2}\theta^* \Phi''(\theta^*)$ y $E(\varepsilon) := \varepsilon(\log \rho_X(\varepsilon))^2 - \chi$ entonces

$$\rho_X(\varepsilon) = \exp\left(-\left[\frac{\chi + E(\varepsilon)}{\varepsilon}\right]^{\frac{1}{2}}\right)$$

como $E(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$ entonces lo anterior se traduce en

$$\rho_X(\varepsilon) = \exp\left(-\left[\frac{\chi + o(1)}{\varepsilon}\right]^{\frac{1}{2}}\right) \qquad \text{cuando } \varepsilon \to 0$$

1.4. Procesos de Markov con ramificación

En esta sección se presenta un tipo de proceso de ramificación espacial cuya genealogía está dada por un árbol de Galton-Watson a tiempo continuo.

Definición 1.19 *Sea E espacio polaco, $X = (X(t))_{t\geq 0}$ un proceso de Markov fuerte y càdlàg a valores en E, $\mathcal{F} = (F_j^{(k)},\ 1 \leq j \leq k, k \in \mathbb{N})$ una familia de funciones medibles de $E \times [0,1]$ a E. El **proceso de Markov con ramificación** $X_{\mathbb{T}} = (X^u(t))_{(u,t)\in\mathbb{T}}$ con distribución de descendientes p, tasa de ramificación $\tau > 0$, distribución espacial de descendientes $\mathcal{F}$, movimiento subyacente X y distribución inicial $\mu \in \mathcal{P}(E)$ se define recursivamente como sigue:*

(a) $\mathbb{T}$ es un árbol enraizado de Galton-Watson a tiempo continuo con distribución de descendientes p y tasa de ramificación τ.

(b) Condicional en $\mathbb{T}$, $X^{\varnothing} = (X^{\varnothing}(t))_{t\in[0,\beta(\varnothing))}$ distribuye como $(X(t))_{t\in[0,\beta(\varnothing))}$ con $X_0 \sim \mu$.

(c) Condicional a $\mathbb{T}$ y $X^{\varnothing}$, las posiciones iniciales de la primera generación de descendientes $(X^u(\alpha(u)))_{1\leq u\leq D(\varnothing)}$ están dadas por $(F_u^{(D(u))}(X^{\varnothing}_{\beta(\varnothing)^-}, \Theta))_{1\leq u\leq D(u)}$ donde $\Theta \sim$ Unif $([0,1])$.

(d) Condicional a $X^{\varnothing}, D(\varnothing), \beta(\varnothing)$ y $(X^u(\alpha(u)))_{1\leq u\leq D(u)}$, los procesos $(X^{uv}(\alpha(u)+t))_{(v,t)\in\theta_{(u,\alpha(u))}\mathbb{T}}$ para $1 \leq u \leq D(\varnothing)$ son independientes y, respectivamente, distribuidos como $X_{\mathbb{T}}$ con distribuciones iniciales $\delta_{X^u_{\alpha(u)}}$ $1 \leq u \leq D(\varnothing)$.

Para $u \in \mathcal{T}$ se extiende la definición de $X^u(t)$ cuando $t \in [0,\alpha(u))$ por $X_t^u = X_t^{u(t)}$, es decir, la posición del ancestro de u vivo a tiempo $t \leq \alpha(u)$.

Observación La familia de funciones $\mathcal{F}$ se puede pensar como una familia de procesos puntuales $(\eta^{(x)})_{x\in E}$ donde $\eta^{(x)} \overset{(d)}{=} \sum_{k=1}^{D} \delta_{F_k^{(D)}(x,\Theta)}$, $D \sim \nu$, $\Theta \sim$ Unif $([0,1])$ y $\Theta \amalg D$. El proceso puntual $\eta^{(x)}$ representa las posiciones de los descendientes de un individuo que muere en $x \in E$. Es decir, un proceso de Markov con ramificación está totalmente determinado por un proceso de Markov X, una tasa de ramificación $\tau > 0$ y una familia de procesos puntuales $(\eta^{(x)})_{x\in E}$ con la propiedad de que la distribución de $\eta^{(x)}(E)$ no dependa de x. Esta última condición asegura que la genealogía del proceso sea un Galton-Watson de tasa $\tau > 0$ y ley de reproducción igual a la distribución de $\eta^{(x)}(E)$ para cualquier $x \in E$.

A continuación se dará la definición de un proceso de Markov auxiliar en E que representará el movimiento de una partícula del proceso de Markov con ramificación escogida uniformemente dentro del conjunto de las partículas vivas.

Definición 1.20 *Sea $X_{\mathbb{T}}$ un proceso de Markov con ramificación. El **proceso de Markov auxiliar** Y se mueve como el proceso de Markov subyacente X pero con saltos adicionales que dan cuanta del nacimiento de nuevas partículas. Y se define mediante su generador infinitesimal que tiene la forma*

$$Af(x) := Lf(x) + \tau \int (f(z) - f(x))\gamma^{(x)}(\mathrm{d}z)$$

donde L es el generador infinitesimal de X y $\gamma^{(x)}$ es la medida de intensidad de $\eta^{(x)}$.

En lo que sigue $\mathbb{D}([a,b],E)$ denotará al conjunto de funciones càdlàg de $[a,b]$ en E al cual se le induce la topología de Skorohod. Para hacer la notación más compacta se escribirá $X^u_{[0,t]}$ en vez de $(X^u(s))_{s\in[0,t]} \in \mathbb{D}([0,t],E)$ para hablar de las trayectorias de una partícula.

Teorema 1.21 ***(Many to One)****(teorema de 3.3 de [3]) Sea $t \geq 0$ entonces para toda $F\colon \mathbb{D}([0,t],E) \to \mathbb{R}_+$ medible se tiene que:*

$$\mathbb{E}_\mu\left(\sum_{u\in V(t)} F\left(X^u_{[0,t]}\right)\right) = e^{\tau(m-1)t}\mathbb{E}_\mu(F(Y_{[0,t]}))$$

1.4.1. Proceso de Lévy con ramificación lineal

Definición 1.22 *Un* ***Proceso de Lévy con ramificación lineal*** *o BLP es un proceso de Markov con ramificación en $\mathbb{R}$ cuyo proceso de Markov subyacente es un proceso de Lévy y la familia de procesos puntuales $(\eta^{(x)})_{x\in E}$ es de la forma $\eta^{(x)} = x + \eta$ con η proceso puntual fijo.*

Observación

(a) Gracias a la propiedad 1.4 el proceso de Markov auxiliar Y de un BLP es un proceso de Lévy con generador

$$Af(x) = Lf(x) + \tau\int_{\mathbb{R}}(f(x+z) - f(x))\gamma(\mathrm{d}z)$$

donde γ es la medida de intensidad de η y L es el generador infinitesimal del proceso de Lévy subyacente. Es decir, $Y = X + S$, $X \amalg S$, donde X es un L-proceso de Lévy y S es un proceso de Poisson compuesto con tasa τm y distribución de saltos $\frac{\gamma}{m}$ con $m = \mathbb{E}(\eta(\mathbb{R}))$.

(b) Sea $\delta > 0$. Gracias a la propiedad de Markov y los incrementos independientes y estacionarios un BLP visto en los tiempo de la forma $n\delta$, $n \in \mathbb{N}$ es un BRW.

Proposición 1.23 *Sea $X_{\mathbb{T}}$ un BLP con proceso de Levy de coeficiente de Laplace ψ, tasa de ramificación $\tau > 0$ y proceso puntual con transformada de Laplace ϕ. Si ψ y ϕ son finitas en una vecindad del 0 entonces el proceso puntual de los de los individuos vivos a tiempo $t \geq 0$ i.e. $\sum_{u\in V(t)} \delta_{X^u(t)}$ posee transformada de Laplace en una vecindad del 0 de la forma $e^{t\Phi(\theta)}$ con $\Phi(\theta) := \tau(\phi(\theta)-1) + \psi(\theta)$. A la función Φ se le llamará* ***coeficiente de Laplace del BLP****.*

Demostración. Usando el teorema many to one y la observación anterior se obtiene que para

$\Pi = \sum_{u \in V(t)} \delta_{X^u(t)}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\int e^{\theta x}\Pi(\mathrm{d}x)\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{u\in V(t)} e^{\theta X^u(t)}\right) \\ &= e^{\tau(m-1)t}\mathbb{E}(e^{\theta X(t)})\mathbb{E}(e^{\theta S(t)}) \\ &= e^{\tau(m-1)t}e^{t\psi(\theta)}\exp\left(\tau m t\left(\frac{1}{m}\phi(\theta)-1\right)\right) \\ &= \exp(t(\tau(\phi(\theta)-1)+\psi(\theta))) \\ &= e^{t\Phi(\theta)}\end{aligned}$$

□

Teorema 1.24 *Sea $X_{\mathbb{T}}$ un BLP con coeficiente de Laplace Φ. Si Φ es finita en una vecindad del 0 y si η, el proceso puntual subyacente, cumple que $m := \mathbb{E}(\eta(\mathbb{R})) > 1$ y $\eta(\mathbb{R}) \geq 1$ c.s. entonces*

$$\frac{1}{t}\max_{u\in V(t)} X^u(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} v \in \mathbb{R} \quad \textit{c.s. y en } L^1$$

con

$$v := \inf_{\theta>0}\frac{\Phi(\theta)}{\theta} \quad \textit{y} \quad \Phi(\theta) := \tau(\phi(\theta)-1)+\psi(\theta)$$

Demostración. Sea $\delta > 0$ y X_δ el BRW que se obtiene al ver $X_{\mathbb{T}}$ en los tiempo de la forma $n\delta$, $n \in \mathbb{N}$. Es claro de la proposición anterior que el proceso puntual asociado a X_δ tiene transformada de Laplace $e^{\delta\Phi}$. Luego del teorema 1.16 se obtiene que

$$\forall\delta>0, \quad \frac{1}{n\delta}\max_{u\in V(n\delta)} X^u(n\delta) = \frac{1}{n\delta}\max_{|w|=n} X_\delta(w) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} v \quad \text{c.s. y en } L^1$$

Para obtener la convergencia en L^1 se considera la función

$$(0,\infty) \ni t \mapsto f(t) := \mathbb{E}\left(\left|\frac{1}{t}\max_{u\in V(t)} X^u(t) - v\right|\right)$$

Como $f(n\delta) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $\delta > 0$ solo basta probar que f es càdlàg. Por convergencia dominada y del hecho que $t \mapsto \max_{u\in V(t)} X^u(t)$ es càdlàg, solo basta probar que para todo $0 < s < r$

$$Z := \sup_{t\in[s,r]}\left|\frac{1}{t}\max_{u\in V(t)} X^u(t) - v\right| \in L^1$$

$$Z \leq |v| + \frac{1}{s}\underbrace{\sup_{t\in[s,r]}\max_{u\in V(t)}|X^u(t)|}_{=:W}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}W &\leq \sup_{t\in[s,r]}\sum_{u\in V(t)}|X^u(t)| \\ &\leq \sum_{u\in V(r)}\sup_{t\in[0,r]}|X^u(t)|\end{aligned}$$

Tomando esperanza se obtiene que

$$\mathbb{E}(W) \leq e^{\tau(m-1)r}\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,r]}|Y(t)|\right)$$

Como Φ es finita en una vecindad del 0 entonces $M(t) = Y(t) - \mathbb{E}(Y(t))$ una martingala en L^p para todo $p \geq 1$. Sea $K = \sup_{t\in[0,r]}|\mathbb{E}(Y(t))| < \infty$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,r]}|Y(t)|\right) &\leq \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,r]}|M(t)|\right) + K \\
&\leq \left(\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,r]}|M(t)|^2\right)\right)^{1/2} + K \\
&\leq 2\mathbb{E}(|M(r)|^2)^{1/2} + K \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Para la convergencia casi segura basta ver que $V(t) = \frac{1}{t}\max_{u\in V(t)} X^u(t)$ es un proceso càdlàg y que para todo $\delta > 0$ $V(n\delta) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} v$ c.s. Tomando δ en un denso numerable se concluye. $\square$

Ejemplo Sea $X_{\mathbb{T}}$ un BLP de caracteristicas (X, τ, η).

- Si $X = 0$ y $\eta = \delta_0 + \delta_D$ con $D \sim \mu$ donde μ es una medida con transformada de Lapalce ϕ_μ entonces $\Phi = \tau\phi_\mu$ y por lo tanto la velocidad de la partícula de más a la derecha es

$$v^* = \tau \inf_{\theta>0}\frac{\phi_\mu(\theta)}{\theta}$$

- Si $\eta = 2\delta_0$ y X es un proceso de Poisson compuesto de tasa τ y saltos μ entonces $\Phi = \tau\phi_\mu$ es igual al caso anterior y por lo tanto se tiene la misma velocidad.
- Si $X(t) = \sigma B(t) + at$ donde B es un movimiento Browniano y $\eta = N\delta_0$, $N \in \mathbb{N}$ entonces

$$\Phi(\theta) = (N-1)\tau + a\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2$$

  por lo tanto la velocidad de la partícula de más a la derecha es $v^* = \inf_{\theta>0}\frac{\Phi(\theta)}{\theta}$. Derivando se encuentra que el ínfimo anterior se alcanza en $\theta^* = \frac{\sqrt{2(N-1)\tau}}{\sigma}$ y por lo tanto

$$v^* = a + \sigma\sqrt{2(N-1)\tau}$$

Capítulo 2

El Sistema

En este trabajo se estudian dos sistemas de partículas con ramificación y selección, un sistema a tiempo continuo **(S1)** y un sistema a tiempo discreto **(S2)**. El sistema (S2) es una suerte de discretización de (S1) que lo domina estocásticamente.

2.1. El sistema (S1)

A cada tiempo $t \geq 0$ hay $N \in \mathbb{N}$ partículas con posiciones $x_1^N(t) \geq \cdots \geq x_N^N(t)$. Cada una de estas partículas de manera independiente espera un tiempo exponencial de parámetro $\tau > 0$ para generar un nuevo individuo posicionado, relativo a la posición del padre, según una medida de probabilidad μ en $\mathbb{R}$. Inmediatamente después de un evento de ramificación se elimina la partícula que está más a la izquierda dejando la cantidad de individuos constate.

Se denotará por $x^N(t) = \sum_{i=1}^N \delta_{x_n^N(t)}$ a la configuración de las N partículas a tiempo $t \geq 0$. Además se define $\max x^N(t)$ y $\min x^N(t)$ como la partícula de más a la derecha y más a la izquierda a tiempo t respectivamente.

Sea $\phi(\theta) := \int e^{\theta x}\mu(\mathrm{d}x)$ la transformada de Laplace de μ. Se harán los siguientes hipótesis sobre μ:

(H1) $a^* := \sup\{\theta > 0 \colon \phi(\theta) < \infty\} > 0$ y $a_* := \inf\{\theta < 0 \colon \phi(\theta) < \infty\} < 0$.

(H2) $\lim_{\theta \to (a^*)^-} \frac{\phi(\theta)}{\theta} = \infty$.

(H3) $\mu((0, \infty)) > 0$

Observación

(a) Si $a^* = \infty$ entonces (H2) siempre se cumple. En efecto, sean $0 < l_1 < l_2$ tales que

$\mu([l_1,l_2])>0$ entonces

$$\frac{\phi(\theta)}{\theta} \geq \frac{1}{\theta}\int_{l_1}^{l_2} e^{\theta x}\mu(\mathrm{d}x)$$
$$\geq \mu([l_1,l_2])\frac{e^{\theta l_1}}{\theta}$$
$$\overset{\theta\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

(b) Si se considera el sistema (S1) sin el mecanismo de selección entonces se obtiene un BLP donde el proceso de Lévy es nulo, la tasa de ramificación es τ y el proceso puntual es $\eta=\delta_0+\delta_X$ con $X\sim\mu$. De (H1), (H2) y el teorema 1.24 se obtiene que la velocidad asintótica de la partícula de más a la derecha de este sistema sin selección es

$$v^* := \tau \inf_{\theta>0}\frac{\phi(\theta)}{\theta} \tag{2.1}$$

por otro lado, si se define

$$(0,a^*)\ni\theta\mapsto f(\theta):=\frac{\phi(\theta)}{\theta}$$

entonces (H1) y (H2) implican que f es C^∞ y que $f(0^+)=f((a^*)^-)=\infty$. Además f es estrictamente convexa dado que $f''(\theta)=\theta^{-3}\int((\theta x-1)^2+1)e^{\theta x}\mu(\mathrm{d}x)>0$. De esto se deduce que existe $\theta^*>0$ que alcanza el ínfimo que define v^* y en particular se tiene que $v^*=\phi'(\theta^*)$.

A continuación se listan las propiedades básicas del sistema (S1). Las demostraciones de estos hechos se encuentran en [9] y [8]. Además en el anexo se prueba el teorema (2,1) para un proceso general.

Teorema 2.1 *Existe $v_N>0$ tal que*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\min x^N(t)}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{\max x^N(t)}{t} = v_N \quad \text{c.s. y en } L^1$$

Más aún, $(v_N)_N$ es no decreciente.

Teorema 2.2

$$\lim_{N\to\infty} v_N = v^*$$

donde v^* es como en 2.1.

2.2. El sistema (S2)

Sea $k\in\mathbb{N}$ y $N\in\mathbb{N}$. (S2) consiste en un sistema de N partículas que a cada tiempo $n\in\mathbb{N}$ tienen descendientes posicionados, relativo al padre, según el proceso puntual

$$\eta^k := \sum_{u\in V(2^{-k})}\delta_{X^u(2^{-k})} \tag{2.2}$$

donde $X_{\mathbb{T}}$ es un BLP que describe el movimiento de (S1) pero sin el mecanismo de selección, es decir, su proceso de Lévy es nulo, posee tasa de ramificación $\tau > 0$ y proceso puntual $\delta_0 + \delta_X$ con $X \sim \mu$. Luego de que los descendientes de la generación n nacen se seleccionan los N individuos que están más a la derecha y el resto se elimina. Se denotará por $x_n^{N,k} = \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_n^{N,k}(i)}$ a la configuración de las N partículas a tiempo n. Además se define $\max x^{N,k}(n)$ y $\min x^{N,k}(n)$ como la partícula de más a la derecha y de más a la izquierda a tiempo n respectivamente.

2.2.1. Construcción de (S2) via coupling

Sean $(X_{k,i})_{i=1}^{N}$ con $X_{k,i} = (X_{k,i}(u))_{u \in \mathcal{T}_i}$ N copias independientes de un BRW con proceso puntual η^k como en 2.2. Para cada $i = 1, \ldots, N$ y $n \geq 0$ se define $\mathcal{T}_i(n) := \{u \in \mathcal{T}_i \colon |u| = n\}$ y $G^N(n) \subseteq \cup_{i=1}^{N} \mathcal{T}_i(n)$, el conjunto de las partículas de (S2) vivas a tiempo n, como sigue: $G^N(0) = \cup_{i=1}^{N} \mathcal{T}_i(0)$ y si $G^N(n)$ está definido y $H^N(n+1) \subseteq \cup_{i=1}^{N} \mathcal{T}_i(n+1)$ es el conjunto de los hijos de $G^N(n)$ entonces $G^N(n+1) \subseteq H^N(n+1)$ se obtiene extrayendo las N partículas cuyas posiciones están más a la derecha.

2.2.2. Propiedades básicas de (S2)

Teorema 2.3 *Para todo $N \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N}$ existe $v_{N,k}$ tal que*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\max x_n^{N,k}}{n 2^{-k}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\min x_n^{N,k}}{n 2^{-k}} = v_{N,k} \quad \textit{c.s. y en } L^1$$

Proposición 2.4 *Para todo $N \in \mathbb{N}$ y $k \geq 1$ se tiene que*

$$v_N \leq v_{N,k} \leq v_{N,k-1}$$

Las demostraciones de estos teoremas se omitirán ya que son análogas a la demostraciones que se encuentran en el anexo sobre el N-BLP general.

Capítulo 3

Resultados

El objetivo original de esta memoria consistía en probar que la tasa de convergencia de la velocidad asíntota del sistema (S1) es $(\log N)^{-2}$. Evidencias de esto son las simulaciones computacionales hechas en [8] y el resultado de Berard y Gouere [5] en el cual se prueba esta tasa de convergencia para un sistema discreto similar a (S1). Para lograr este objetivo se optó por adaptar las técnicas utilizadas por Berard y Gouere al sistema (S1). Un problema que surge con este procedimiento es que uno de los ingredientes principales utilizados por Berard y Gouere es el resultado de Gantert, Hu y Shi [11] que no se traduce bien a un sistema a tiempo continuo como (S1). Es por esto que se optó por hacer una suerte de discretización del sistema (S1) (el sistema (S2)) para el cual las técnicas de Berard y Gouere aplican. Finalmente se probó que para el sistema (S2) se tiene la tasa de convergencia esperada y que esta no depende del paso de la discretización utilizado. Gracias a que (S2) domina estocásticamente a (S1) se obtiene como corolario una cota inferior para la tasa de convergencia del sistema (S1) probando así que esta velocidad es lenta. Se espera que al tomar límite en el paso de la discretización de (S2) se obtenga la tasa de convergencia exacta para el sistema (S1).

Los resultados a presentar conciernen las velocidades v_N y $v_{N,k}$ de los sistemas (S1) y (S2) con paso de discretización k respectivamente.

Teorema 3.1 *Para todo $k \in \mathbb{N}$:*

$$\lim_{N\to\infty} (v^* - v_{N,k})(\log N)^2 = \chi^*$$

o escrito en notación asintótica

$$(v^* - v_{N,k}) \sim \frac{\chi^*}{(\log N)^2} \qquad N \to \infty$$

donde $\chi^* = \frac{\pi^2}{2}\theta^*\tau\phi''(\theta^*)$.

Gracias a la propiedad de comparación 2.4 se obtiene el siguiente corolario que da una noción de la lentitud de la velocidad de convergencia de v_N a v^*:

Corolario 3.2

$$\liminf_{N\to\infty}(v^* - v_N)(\log N)^2 \geq \chi^*$$

o equivalentemente: $\forall \alpha \in (0, \chi^*),\ \exists k \in \mathbb{N},\ \forall N \geq k$

$$v^* - v_N \geq \frac{\alpha}{(\log N)^2}$$

Ejemplo 1 Si la tasa de ramificación es $\tau = 1$ y la medida de traslación es una distribución normal estandar entonces $\phi(\theta) = \exp\left(\frac{\theta^2}{2}\right)$, luego $\theta^* = 1$ y por lo tanto $v^* = e^{1/2}$ y $\chi^* = \pi^2 e^{1/2}$.

Ejemplo 2 Si la tasa de ramificación es $\tau = 1$ y la medida de traslación es una distribución exponencial de parámetro λ entonces $\phi_\lambda(\theta) = \frac{\lambda}{\lambda - \theta}$ para $\theta < \lambda$, luego $\theta^* = \frac{\lambda}{2}$ y por lo tanto $v^* = \frac{4}{\lambda}$ y $\chi^* = \pi^2 \frac{8}{\lambda}$.

Capítulo 4

Demostración del teorema principal

En esta sección se prueba teorema 3.1 enunciado en el capítulo anterior. Por simplicidad de notación se asumirá que la tasa de ramificación es $\tau = 1$.

La demostración se divide en probar las siguientes desigualdades:

$$\forall k \in \mathbb{N}\colon \liminf_{N\to\infty} (v^* - v_{N,k})(\log N)^2 \geq \chi^* \tag{4.1}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}\colon \limsup_{N\to\infty} (v^* - v_{N,k})(\log N)^2 \leq \chi^* \tag{4.2}$$

Para probar 4.1 basta hacerlo hacerlo para $k = 0$ ya que por la propiedad de comparación 2.4 $\forall k \in \mathbb{N}$ $\bar{v}_N := v_{N,0} \geq v_{N,k}$.

En lo que sigue del capítulo se usará la siguiente noción que tiene fuerte conexión con el teorema de Gantert, Hu y Shi (teorema 1.18):

Definición 4.1 *Sea X_k un BRW con proceso puntual η^k como en 2.2 y sea $v \in \mathbb{R}$. $u \in \mathcal{T}$ se dice (n, v)-**bueno** si existe $u =: u_0 \prec u_1 \cdots \prec u_n$ tal que*

$$X_k(u_i) - X_k(u_0) \geq iv2^{-k} \quad \forall i \leq n$$

Análogamente se define la noción de ser (∞, v)-bueno. Para $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ se define $p_k(n, \varepsilon)$ como la probabilidad de que en X_k $\varnothing$ sea $(n, v^* - \varepsilon)$-bueno.

Observación Notar que por el teorema de Gantert, Hu y Shi (teorema 1.18) y del hecho que la transformada de Laplace de η^k es $\exp(2^{-k}\phi)$, se tiene que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$p_k(\infty, \varepsilon) = \rho_{X_k}(\varepsilon 2^{-k}) = \exp\left(-\left[\frac{\chi^* + o(1)}{\varepsilon}\right]^{\frac{1}{2}}\right) \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0$$

en este caso $o(1) = \varepsilon(\log \rho_{X_k}(\varepsilon 2^{-k}))^2 - \chi^*$ depende de k.

Para la demostración de la cota inferior 4.1 se necesita la siguiente estimación de $p_0(n, \varepsilon)$:

Teorema 4.2 *Si $p(n,\varepsilon) = p_0(n,\varepsilon)$ entonces para todo $0 < \alpha < 1$ y $0 < \beta < \chi^*$ existe $s = s(\beta) > 0$ y $L = L(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq L$:*

$$p(n,\varepsilon) \leq \exp\left(-\alpha\left[\frac{\chi^* - \beta}{\varepsilon}\right]^{1/2}\right) \quad \textit{para } \varepsilon = \frac{s}{n^{2/3}}$$

A su vez, la demostración de este hecho requiere el siguiente teorema de grandes desvíos para un paseo aleatorio:

Teorema 4.3 ***(Mogulskii)****(lema 2.1 de [11]) Sea (S_i) un paseo aleatorio con $\mathbb{E}(|S_1|^{2+\delta}) < \infty$ para algún $\delta > 0$. Sea c y σ^2 la media y varianza de los incrementos del paseo. Sean $g_1 < g_2$ dos funciones continuas de $[0,1]$ a $\mathbb{R}$ tales que $g_1(0) < 0 < g_2(0)$ y $a_n \to \infty$ tal que $\frac{a_n^2}{n} \to 0$. Se define*

$$E_n = \left\{g_1\left(\frac{i}{n}\right) \leq \frac{S_i - ci}{a_n} \leq g_1\left(\frac{i}{n}\right) \quad \forall 1 \leq i \leq n\right\}$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{n} \log \mathbb{P}(E_n) = -\frac{\pi^2\sigma^2}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(g_2(t) - g_1(t))^2}$$

Demostración de 4.2.

Sea $M \in \mathbb{N}$ que se elegirá posteriormente, entonces

$$p(M,\varepsilon) = \mathbb{P}\left(\exists |u| = M\colon X(u_i) \geq (v^* - \varepsilon)i \ \forall i \leq M\right)$$

Sea (b_i) una sucesión que se elegirá posteriormente y
$H(u) = \inf\{1 \leq i \leq |u|\colon X(u_i) \geq (v^* - \varepsilon)i + b_i\}$. Luego

$$p(M,\varepsilon) \leq p_1(M,\varepsilon) + p_2(M,\varepsilon)$$

donde

$$\begin{aligned}
p_1(M,\varepsilon) &:= \mathbb{P}\left(\exists |u| = M\colon H(u) = \infty, X(u_i) \geq (v^* - \varepsilon)i \ \forall i \leq M\right)\\
p_2(M,\varepsilon) &:= \mathbb{P}\left(\exists |u| = M\colon H(u) \leq M, X(u_i) \geq (v^* - \varepsilon)i \ \forall i \leq M\right)
\end{aligned}$$

Ahora se estimaran p_1 y p_2 por separado.
Por definición se tiene que

$$\begin{aligned}
p_1(M,\varepsilon) &= \mathbb{P}\left(\exists |u| = M\colon (v^* - \varepsilon)i + b_i > X(u_i) \geq (v^* - \varepsilon)i \ \forall i \leq M\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{|u|=M} \mathbf{1}_{\{(v^*-\varepsilon)i + b_i > X(u_i) \geq (v^*-\varepsilon)i \ \forall i \leq M\}} \geq 1\right)\\
&\leq \mathbb{E}\left(\sum_{|u|=M} \mathbf{1}_{\{(v^*-\varepsilon)i + b_i > X(u_i) \geq (v^*-\varepsilon)i \ \forall i \leq M\}}\right)
\end{aligned}$$

Usando la formula Many to One (teorema 1.15) con $\theta = \theta^*$ y el hecho que $\phi(\theta^*) = v^*\theta^*$ se obtiene que

$$\begin{aligned} p_1(M, \varepsilon) &\leq \mathbb{E}\left(e^{M\phi(\theta^*) - \theta^* Z_M} \mathbf{1}_{\{(v^*-\varepsilon)i + b_i > Z_i \geq (v^*-\varepsilon)i \ \forall i \leq M\}}\right) \\ &\leq e^{M\phi(\theta^*) - \theta^*(v^*-\varepsilon)M} \mathbb{P}\left((v^*-\varepsilon)i + b_i > Z_i \geq (v^*-\varepsilon)i \ \forall i \leq M\right) \\ &= e^{\varepsilon\theta^* M} \mathbb{P}\left((v^*-\varepsilon)i + b_i > Z_i \geq (v^*-\varepsilon)i \ \forall i \leq M\right) \end{aligned}$$

donde $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es un paseo aleatorio con incrementos cuya distribución está dada por la siguiente formula:

$$\forall h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \text{ medible} \quad \mathbb{E}(h(Z_1)) = e^{-\phi(\theta^*)} \mathbb{E}\left(\int h(x) e^{\theta^* x} \eta^0(\mathrm{d}x)\right)$$

en particular, la transformada de Laplace de Z_1 es

$$\phi_{Z_1}(\theta) = \exp(\phi(\theta + \theta^*) - \phi(\theta^*))$$

y por lo tanto la media de Z_1 es

$$\begin{aligned} \phi'_{Z_1}(0) &= e^{\phi(\theta+\theta^*) - \phi(\theta^*)} \phi'(\theta + \theta^*)\Big|_{\theta=0} \\ &= v^* \end{aligned}$$

y la varianza es

$$\begin{aligned} \phi''_{Z_1}(0) - (v^*)^2 &= e^{\phi(\theta+\theta^*) - \phi(\theta^*)} \left((\phi'(\theta+\theta^*))^2 + \phi''(\theta+\theta^*)\right)\Big|_{\theta=0} - (v^*)^2 \\ &= \phi''(\theta^*) \end{aligned}$$

Ahora se estima p_2:

$$\begin{aligned} p_2(M, \varepsilon) &\leq \sum_{j=1}^{M} \mathbb{P}\left(\exists |u| = M\colon H(u) = j, X(u_i) \geq (v^*-\varepsilon)i \forall i \leq M\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{M} \mathbb{P}\left(\exists |u| = j\colon H(u) = j, X(u_i) \geq (v^*-\varepsilon)i \forall i \leq j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{M} \mathbb{P}\left(\exists |u| = j\colon X(u_j) \geq (v^*-\varepsilon)j + b_j,\ (v^*-\varepsilon)i + b_i > X(u_i) \geq (v^*-\varepsilon)i \ \forall i < j\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{M} \mathbb{E}\left(\sum_{|u|=j} \mathbf{1}_{\{X(u_j) \geq (v^*-\varepsilon)j + b_j,\ (v^*-\varepsilon)i + b_i > X(u_i) \geq (v^*-\varepsilon)i \ \forall i < j\}}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{M} \mathbb{E}\left(e^{j\phi(\theta^*) - \theta^* Z_j} \mathbf{1}_{\{Z_j \geq (v^*-\varepsilon)j + b_j,\ (v^*-\varepsilon)i + b_i > Z_i \geq (v^*-\varepsilon)i \ \forall i < j\}}\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{M} e^{\theta^*(\varepsilon j - b_j)} \mathbb{P}\left((v^*-\varepsilon)i + b_i > Z_i \geq (v^*-\varepsilon)i \ \forall i < j\right) \end{aligned}$$

En resumen se tiene que para todo $M \in \mathbb{N}$

$$p(M,\varepsilon) \leq e^{\theta^*\varepsilon M} I(M) + \sum_{j=0}^{M-1} e^{\theta^*(\varepsilon(i+1)-b_{i+1})} I(j)$$

donde

$$\begin{aligned}
&I(0) = 1\\
&I(j) = \mathbb{P}\left(\forall i \leq j \colon (v^*-\varepsilon)i \leq Z_i \leq (v^*-\varepsilon)i + b_i\right)
\end{aligned}$$

La idea ahora es aplicar Mogulskii a través de una subsecuencia.

Eligiendo $M = kN,\ k \geq 1,\ N \geq 2$ y b no creciente entonces

$$\begin{aligned}
p(kN,\varepsilon) &\leq e^{\theta^*\varepsilon kN} I(kN) + \sum_{j=0}^{k-1} e^{\theta^*(\varepsilon(i+1)-b_{i+1})} I(j) + \sum_{l=1}^{N-1}\sum_{j=lk}^{(l+1)k-1} e^{\theta^*(\varepsilon(i+1)-b_{i+1})} I(j)\\
&\leq e^{\theta^*\varepsilon kN} I(kN) + k e^{\theta^*(\varepsilon k - b(k))} + k\sum_{l=1}^{N-1} e^{\theta^*(\varepsilon(l+1)k - b_{(l+1)k})} I(lk)
\end{aligned}$$

Eligiendo $b(t) = b(M-t)^{1/3} = b(kN-t)^{1/3}$, $b > 0$ y $\varepsilon := \frac{s}{M^{2/3}} = \frac{s}{(kN)^{2/3}}$ para algún $s > 0$ que se escogerá después se obtiene que

$$I(lk) = \mathbb{P}\left(\forall i \leq lk \colon -s\left(\frac{l}{N}\right)^{2/3}\frac{i}{lk} \leq \frac{Z_i - v^* i}{(lk)^{1/3}} \leq -s\left(\frac{l}{N}\right)^{2/3}\frac{i}{lk} + b\left(\frac{N}{l} - \frac{i}{lk}\right)^{1/3}\right)$$

Sea $\delta > 0$ y se definen las funciones

$$\begin{aligned}
g_1^{(l)}(t) &= -s\left(\frac{l}{N}\right)^{2/3} t - \delta\\
g_2^{(l)}(t) &= -s\left(\frac{l}{N}\right)^{2/3} t + b\left(\frac{N}{l} - t\right)^{1/3}
\end{aligned}$$

Luego

$$I(lk) \leq \mathbb{P}\left(\forall i \leq lk \colon g_1^{(l)}\left(\frac{i}{lk}\right) \leq \frac{Z_i - v^* i}{(lk)^{1/3}} \leq g_2^{(l)}\left(\frac{i}{lk}\right)\right)$$

Entonces por Mogoulskii

$$\begin{aligned}
\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{(lk)^{1/3}} \log I(lk) &\leq -\frac{\pi^2\phi''(\theta^*)}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(g_2^{(l)}(t) - g_1^{(l)}(t)\right)^2}\\
&= -\frac{\pi^2\phi''(\theta^*)}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(b\left(\frac{N}{l} - t\right)^{1/3} + \delta\right)^2}
\end{aligned}$$

Tendiendo δ a 0 y usando convergencia monótona se obtienen que

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{(lk)^{1/3}} \log I(lk) &\leq -\frac{\pi^2\phi''(\theta^*)}{2b^2} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{N}{l}-t\right)^{2/3}} \\ &= \frac{-3\pi\phi''(\theta^*)}{2b^2} \left(\frac{N^{1/3}-(N-l)^{1/3}}{l^{1/3}}\right)\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{s^{1/2}}{(Nk)^{1/3}} \log p\left(Nk, \frac{s}{(Nk)^{2/3}}\right) \leq s^{1/2}\alpha_{N,b}$$

donde $\alpha_{N,b}$ se define por

$$\max_{1\leq l\leq N-1} \left\{ s\theta^* - \frac{3\pi^2\phi''(\theta^*)}{2b^2}, \theta^*\left(\frac{s}{N} - b\left(1-\frac{1}{N}\right)^{1/3}\right), \theta^*\left(\frac{s(l+1)}{N} - b\left(1-\frac{l+1}{N}\right)^{1/3}\right) - \frac{3\pi^2\phi''(\theta^*)}{2b^2}\frac{N^{1/3}-(N-l)^{1/3}}{N^{1/3}} \right\}$$

Luego como $n \mapsto p\left(n, \frac{s}{n^{2/3}}\right)$ es no creciente se obtiene que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{s^{1/2}}{n^{1/3}} \log p\left(n, \frac{s}{n^{2/3}}\right) \leq s^{1/2}\alpha_{N,b}$$

Ahora tendiendo $N \to \infty$ se llega a

$$\limsup_{N\to\infty} \alpha_{N,b} \leq \max\left\{ s\theta^* - \frac{3\pi^2\phi''(\theta^*)}{2b^2}, -\theta^* b, f(s,b)\right\}$$

con $f(s,b) := \sup_{t\in(0,1]} \left\{\theta^*(st - b(1-t)^{1/3}) - \frac{3\pi^2\phi''(\theta^*)}{2b^2}(1-(1-t)^{1/3})\right\}$. Derivando se obtiene que para $b < \frac{3\pi^2\phi''(\theta^*)}{2b^2\theta^*} \leq 3s + b$, $f(s,b) = s\theta^* - \frac{3\pi^2\phi''(\theta^*)}{2b^2} + \frac{2}{3(3s\theta^*)^{1/2}}\left(\frac{3\pi^2\phi''(\theta^*)}{2b^2} - b\theta^*\right)^{3/2}$. Por lo tanto en este caso $\max\left\{s\theta^* - \frac{3\pi^2\phi''(\theta^*)}{2b^2}, -\theta^* b, f(s,b)\right\} = \max\left\{-\theta^* b, f(s,b)\right\}$. Eligiendo $s = \frac{\pi^2\phi''(\theta^*)}{2b^2\theta^*} - \frac{b}{3}$ se obtiene que $\max\left\{-\theta^* b, f(s,b)\right\} = -\theta^* b$ y por lo tanto para todo $0 < b < \frac{3\pi^2\phi''(\theta^*)}{2b^2\theta^*}$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{s^{1/2}}{n^{1/3}} \log p\left(n, \frac{s}{n^{2/3}}\right) \leq -\theta^* b\left(\frac{\pi^2\phi''(\theta^*)}{2b^2\theta^*} - \frac{b}{3}\right)^{1/2} = -\left(\chi^* - \frac{b^3\theta^{*2}}{3}\right)^{1/2}$$

Interpretando $\frac{b^3\theta^{*2}}{3}$ como el β del enunciado del teorema se obtiene que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{s^{1/2}}{n^{1/3}} \log p\left(n, \frac{s}{n^{2/3}}\right) \leq -\left(\chi^* - \beta\right)^{1/2}$$

Se concluye usando la definición de limsup. $\square$

4.1. La cota inferior

Para simplificar notación el proceso $(x_n^{N,0})$ se denotará (y_n^N).

Sea $0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < \chi^*,\ s = s(\beta) > 0$ del teorema anterior. Sea $\lambda > 0$ arbitrario y se definen

$$m := \left\lceil s^{3/2}\left(\frac{(1+\lambda)\log N}{\alpha(\chi^*-\beta)^{1/2}}\right)^3\right\rceil \quad \text{y} \quad \varepsilon := \frac{s}{m^{2/3}}$$

Por teorema anterior se obtiene que para N suficientemente grande $p(m,\varepsilon) \leq N^{-(1+\lambda)}$. Sean $0 < \sigma < 1$ y $0 < \xi < \lambda$ arbitrarios. Se definen $v_1 := v^* - \varepsilon$, $v_2 := v^* - (1-\sigma)\varepsilon$ y $n = \lfloor N^{\xi} \rfloor$.

La idea es estimar $\mathbb{E}\left(\frac{\max y_n^N}{n}\right)$ ya que $\bar{v}_N = \inf_i \mathbb{E}\left(\frac{\max y_i^N}{i}\right) \leq \mathbb{E}\left(\frac{\max y_n^N}{n}\right)$ (esto es gracias a que el límite que define $\bar{v}_N$ se obtiene del teorema subaditivo de Kingman). Para estimar $\mathbb{E}\left(\frac{\max y_n^N}{n}\right)$ se estimará $\mathbb{P}(\max y_n^N \geq v_2 n)$ en términos de la cantidad de partículas de y^N entre los tiempos 0 y n que son (m, v_1)-buenos. Para esto se necesitan dos lemas. El primero es un lema combinatorial que permitirá contar la cantidad de partículas buenas en término de los desplazamientos realizados entre los tiempos 0 y n mientras que el segundo permite acotar la probabilidad de que estos desplazamientos sean grandes.

Lema 4.4 *(Lemma 2 [5]) Sean $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ tal que $v_1 < v_2$, $n \geq 1$, $m \in \{1, \ldots, n\}$, $K > 0$ y sea $0 =: x_0, \ldots, x_n$ una secuencia de números reales tales que $x_{i+1} - x_i \leq K$ para todo $i = 0, \ldots, n-1$. Sea*

$$I := \{i \in \{0\ldots, n-m\} \colon x_j - x_i \geq v_1(j-i)\ \forall j = i, \ldots, i+m\}.$$

Si $x_n \geq v_2 n$, entonces

$$|I| \geq \frac{v_2 - v_1}{K - v_1}\frac{n}{m} - \frac{K}{K - v_1} \tag{4.3}$$

Lema 4.5 *Sea D_n^N el máximo desplazamiento realizado por el sistema hasta tiempo n. Entonces existe $\kappa > 0$ suficientemente grande tal que para $K = \kappa \log(Nn)$ se tiene que*

$$\mathbb{P}(D_n^N \geq K) \leq \frac{1}{Nn}$$

Demostración. Sean $(\eta_{i,k})$, $i = 1, \ldots, N$, $k = 1, \ldots, n$ los nN procesos puntual e independientes con ley común η^0 que se utilizan para la evolución del sistema entre tiempo 0 y n. Sea $\theta > 0$ tal que $\phi(\theta) < \infty$ entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D_n^N \geq K) &\leq (Nn)^{-\kappa\theta}\mathbb{E}(e^{\theta D_n^N}) \\
&\leq (Nn)^{-\kappa\theta}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\int e^{\theta x}\eta_{i,k}(\mathrm{d}x)\right) \\
&= (Nn)^{-\kappa\theta+1}e^{\phi(\theta)}
\end{aligned}$$

$\square$

Continuando con la estimación de $\mathbb{P}(\max y_n^N \geq v_2 n)$ se define

$$B_n = \left|\left\{u \in G^N(0) \cup \cdots \cup G^N(n) \colon u \text{ es } (m, v_1)\text{-bueno } \right\}\right|$$

Sea $u \in \mathcal{U}$ la partícula que representa a $\max y_n^N$ y para $i \leq n$ se define $x_i = X(u_i)$ como la posición del ancestro de u vivo a tiempo i (notar que $u_i \in G^N(i)$ pues es parte de la genealogía de $u \in G^N(n)$). Sea $K = \kappa \log(Nn)$ como en el Lema 4.5. De las definiciones de n, m, v_1, v_2 y K se tiene el lado derecho de 4.3 tiende a ∞ cuando $N \to \infty$, por lo tanto gracias al lema combinatorial se tiene que para N suficientemente grande

$$\{\max y_n^N \geq v_2 n\} \cap \{D_n^N \leq K\} \subseteq \{B_n \geq 1\}$$

Juntando lo anterior con el Lema 4.5 se obtiene que para κ suficientemente grande

$$\mathbb{P}(\max y_n^N \geq v_2 n) \leq \mathbb{P}(B_n \geq 1) + \frac{1}{Nn}$$

Por otro lado se tiene que

$$B_n = \sum_{u \in \mathcal{T}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{T}_N} \mathbf{1}_{\{u \in G^N(0) \cup \cdots \cup G^N(n)\}} \mathbf{1}_{\{u \text{ es } (m, v_1)\text{-bueno}\}}$$

Notar que los eventos $\{u \in G^N(0) \cup \cdots \cup G^N(n)\}$ y $\{u \text{ es } (m, v_1)\text{-bueno}\}$ son independientes puesto que el primero solo depende de las traslaciones ocurridas antes del tiempo $|u|$ mientras que el segundo depende de las traslaciones ocurridas en los tiempos posteriores a $|u|$. Con esto se obtiene que

$$\mathbb{E}(B_n) = (n+1) N^{-\lambda}$$

Utilizando la desigualdad de Markov se llega a que

$$\mathbb{P}(\max y_n^N \geq v_2 n) \leq (n+1) N^{-\lambda} + \frac{1}{Nn}$$

Notar ahora que

$$\max y_n^N \leq \max_{i=1,\ldots,N} \max_{u \in \mathcal{T}_i(n)} X_i(u)$$

Sea $t > 0$ entonces

$$\exp(t \max y_n^N) \leq \sum_{i=1}^{N} \sum_{u \in \mathcal{T}_i(n)} \exp(t X_i(u))$$

Tomando esperanza y usando la formula Many to One 1.15 con $\theta = \theta^*$ se obtiene que

$$\mathbb{E} \exp(t \max y_n^N) \leq N e^{n \theta^* v^*}$$

por lo tanto

$$\mathbb{E} \exp(\theta^* (\max y_n^N - v^* n)) \leq N \tag{4.4}$$

Sea ahora $M = \max y_n^N - v^* n$ y $b > 0$. Como para x suficientemente grande $x \leq e^{\theta^* \frac{x}{2}}$ entonces para N grande

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M \mathbf{1}_{\{M \geq bn\}}) &\leq \mathbb{E}\left(\exp\left(\theta^* \frac{M}{2}\right) \mathbf{1}_{\{M \geq bn\}}\right) \\
&\leq \mathbb{E}\left(\exp\left(\theta^* \frac{M}{2}\right) \exp\left(\theta^* \left(M - \frac{1}{2} bn\right)\right)\right) \\
&= \mathbb{E} \exp\left(\theta^* \left(M - \frac{1}{2} bn\right)\right)
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(v^*n\mathbf{1}_{\{M\geq bn\}}) &\leq v^*n\mathbb{E}\exp\left(\theta^*\left(M-bn\right)\right)\\ &\leq v^*nNe^{-\theta^*bn}\end{aligned}$$

donde la última desigualdad es gracias a 4.4. Sumando las dos desigualdades anteriores se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\max y_n^N\mathbf{1}_{\max y_n^N\geq(v^*+b)n}\right) &\leq v^*nNe^{-\theta^*bn}+\mathbb{E}\exp(\theta^*(\max y_n^N-v^*n))e^{-\theta^*\frac{bn}{2}}\\ &\leq Ne^{-\theta^*\frac{bn}{2}}(1+v^*n)\end{aligned}$$

donde nuevamente se utilizo 4.4. Juntando lo anterior se obtiene que para N suficientemente grande:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{\max y_n^N}{n}\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{\max y_n^N}{n}\mathbf{1}_{\max y_n^N\geq v_2 n}\right)+\mathbb{E}\left(\frac{\max y_n^N}{n}\mathbf{1}_{\max y_n^N< v_2 n}\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\frac{\max y_n^N}{n}\mathbf{1}_{\max y_n^N\geq v_2 n}\mathbf{1}_{\max y_n^N\geq(v^*+b)n}\right)\\ &\quad\cdots+\mathbb{E}\left(\frac{\max y_n^N}{n}\mathbf{1}_{\max y_n^N\geq v_2 n}\mathbf{1}_{\max y_n^N<(v^*+b)n}\right)+v_2\\ &\leq \frac{1}{n}Ne^{-\theta^*\frac{bn}{2}}(1+v^*n)+(v^*+b)\mathbb{P}(\max y_n^N\geq v_2 n)+v_2\\ &\leq \frac{1}{n}Ne^{-\theta^*\frac{bn}{2}}(1+v^*n)+(v^*+b)(\frac{1}{Nn}+(n+1)N^{-\lambda})+v^*-(1-\sigma)\varepsilon\end{aligned}$$

Usando la definición de n y escogiendo un $b>0$ cualquiera se obtiene que los primeros dos sumandos de la desigualdad anterior son $o((\log N)^{-2})$. Finalmente usando que $\bar{v}_N\leq\mathbb{E}\left(\frac{\max y_n^N}{n}\right)$ se obtiene que

$$\bar{v}_N\leq v^*-(1-\sigma)\varepsilon+o((\log N)^{-2})$$

multiplicando la desigualdad anterior por $(\log N)^2$ y tomando $\liminf_{N\to\infty}$ se obtiene que

$$(1-\sigma)\alpha\frac{(\chi^*-\beta)}{(1+\lambda)^2}\leq\liminf_{N\to\infty}(\log N)^2(v^*-\bar{v}_N)$$

Usando que σ, α, β y λ son arbitrarios se concluye.

4.2. La cota superior

Para simplificar notación se definirá $h:=2^{-k}$.

La siguiente proposición permitirá dar un esquema para la demostración de la cota superior. Sean n y $0<\delta<v^*$ (ambos dependientes de N) que se escogerán a posteriori.

Proposición 4.6 *Sea $D_{n,k}$ el mínimo de las traslaciones realizadas por el sistema entre los tiempos* 1 *y* n, *y*

$$B := \{\forall 1 \le i \le n\colon\ \text{mín}\, x_i^{N,k} < (v-\delta)ih\}$$

entonces

$$\delta \ge n\mathbb{P}(B)(\delta - v^*) - \frac{n}{h}\mathbb{E}(|D_{n,k}|\mathbf{1}_B) + (v^* - v_{N,k})$$

Demostración. Sea $(W_{i,n})_{i\le n}$ coupling subaditivo definido como sigue: Para $i \le n$, $W_{i,n}$ consiste en la configuración de (S2) a tiempo $n-i$ cuando este se define usando los N BRW i.i.d. dados por

$$(X_k(u) - X_k(w))_{u \succcurlyeq w} \quad \text{con } w \in G^N(i)$$

es decir, $W_{i,n}$ consiste en hacer evolucionar el sistema $n-i$ unidades de tiempo con las aleatoriedades shifteadas en i unidades de tiempo.

Sean $\Gamma_0 := 0$ y $J_0 := 0$. Dado $i \ge 0$, Γ_i y J_i se define

$$L_{i+1} := \text{ínf}\{1 \le j \le n\colon\ \text{mín}\, W_{\Gamma_i, j+\Gamma_i} \ge (v-\delta)jh\}$$

con la convención $\text{ínf}\,\emptyset = n$. Luego se define

$$\Gamma_{i+1} = \Gamma_i + L_{i+1} \quad \text{ y } \quad J_{i+1} = J_i + \text{mín}\, W_{\Gamma_i, \Gamma_i + L_{i+1}}$$

Es fácil ver que

$$\forall i \ge 0 \quad \text{mín}\, W_{0,\Gamma_i} \ge J_i$$

Notar que $(L_i)_i$ es una secuencia i.i.d. con distribución común

$$L := \text{ínf}\{1 \le j \le n\colon\ \text{mín}\, x_j^{N,k} \ge (v^* - \delta)jh\}$$

Similarmente $(J_{i+1} - J_i)_i$ es una secuencia i.i.d. con distribución común

$$\text{mín}\, x_L^{N,k}$$

Por la ley de los grandes números se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}\,\text{mín}\, x_{\Gamma_i}^{N,k} &= \left(\frac{1}{\sum_{l=1}^i L_l}\,\text{mín}\, x^{N,k}_{\sum_{l=1}^i L_l}\right)\frac{\sum_{l=1}^i L_l}{i} \\ &\xrightarrow{i\to\infty} hv_{N,k}\mathbb{E}(L)\end{aligned}$$

Por otro lado $\frac{1}{i}\,\text{mín}\, x_{\Gamma_i}^{N,k} \ge \frac{J_i}{i}$ entonces $v_{N,k} \ge \frac{\mathbb{E}(\text{mín}\, x_L^{N,k})}{h\mathbb{E}(L)}$. Luego

$$\text{mín}\, x_L^{N,k} \ge (v^* - \delta)Lh\mathbf{1}_{B^c} + LD_{n,k}\mathbf{1}_B$$

Tomando esperanza y dividiendo por $\mathbb{E}(L)$ se obtiene que

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}(\text{mín}\, x_L^{N,k})}{\mathbb{E}(L)} &\ge (v^* - \delta)h\left(1 - \frac{\mathbb{E}(L\mathbf{1}_B)}{\mathbb{E}(L)}\right) + \frac{\mathbb{E}(LD_{n,k}\mathbf{1}_B)}{\mathbb{E}(L)} \\ &\ge (v^* - \delta)h\left(1 - \frac{\mathbb{E}(L\mathbf{1}_B)}{\mathbb{E}(L)}\right) - \frac{\mathbb{E}(L|D_{n,k}|\mathbf{1}_B)}{\mathbb{E}(L)} \\ &\ge (v^* - \delta)h(1 - n\mathbb{P}(B)) - n\mathbb{E}(|D_{n,k}|\mathbf{1}_B)\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se utilizó que $1 \le \mathbb{E}(L) \le n$. Dividiendo por h y reordenando los terminos se concluye el resultado. □

La idea ahora es escoger δ y n de manera que al multiplicar la desigualdad de la proposición anterior por $(\log N)^2$ y tomar $\limsup$ se obtenga el resultado.

Para definir n se necesita el siguiente lema que permite decir que con probabilidad positiva los individuos de la generación i del BRW X_k cuyos ancestros siempre se han trasladado más de una cantidad fija (que se escoge adecuadamente) crece exponencialmente en i.

Lema 4.7 *Sea $R > 0$ y $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un árbol de Galton-Watson con distribución de descendientes*

$$D := \sum_{|u|=1} \mathbf{1}_{\{X_k(u)\geq -hR\}}$$

Entonces existe R suficientemente grande, $a > 1$ y $r > 0$ tal que para todo i suficientemente grande

$$\mathbb{P}(M_i \geq a^i) \geq r$$

Demostración. Del Teorema many to one 1.21 $m_R := \mathbb{E}(D) = e^h\mathbb{P}(Y_h \geq -hR)$ donde Y es un proceso de Poisson compuesto de tasa 2 y saltos $\frac{1}{2}(\delta_0 + \mu)$. Como $m_R \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} e^h > 1$ entonces existe R tal que $m_R > 1$ y por lo tanto para esta elección (M_i) es un Galton-Watson supercrítico. Luego por teorema 1.11 se tiene que $m_R^{-i}M_i \to W$ c.s. donde $\mathbb{P}(W > 0) > 0$. Sea $1 < a < m_R$, $x > 0$ tal que $\mathbb{P}(W > x) = 2r > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left(\frac{a}{m_R}\right)^i \leq x\ \forall i \geq n_0$. Finalmente

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_i \geq a^i) &= \mathbb{P}\left(\frac{M_i}{m_R^i} \geq \left(\frac{a}{m_R}\right)^i\right) \\
&\geq \mathbb{P}\left(\frac{M_i}{m_R^i} \geq x\right) \qquad \forall i \geq n_0 \\
&\overset{i\to\infty}{\longrightarrow} 2r
\end{aligned}$$

con lo que se concluye. $\square$

Notar que en el lema anterior M_i se puede escribir como

$$M_i = \sum_{|u|=i} \mathbf{1}_{\{\forall j\leq i:\ X_k(u_j)-X_k(u_{j-1})\geq -hR\}}$$

es decir, M_i cuenta los individuos de la generación i que siempre se han desplazado más de $-hR$.

Se definen las siguientes cantidades:

1. $0 < \lambda < 1$ y $\varepsilon = \frac{\chi^*}{((1-\lambda)\log N)^2}$.
2. a, R y r como en el Lema 4.7.
3. $0 < b < 1$, $S_N = \lceil \log_a N \rceil$, $m = \left\lfloor \frac{(v-R)S_N}{\varepsilon b} \right\rfloor$ y $n = m + S_N$

Del teorema 1.18 se tiene que $p_k(\infty,\varepsilon) = N^{-(1-\lambda)(1+o(1))^{1/2}}$ y haciendo una expansión de Taylor de $x \mapsto (1+x)^{1/2}$ se obtiene que $p_k(\infty,\varepsilon) = N^{-(1-\lambda)+o(1)}$.

Sea u con $|u| = m$ y $\mathcal{F}_m$ la σ-álgebra que contiene la información hasta tiempo m. La probabilidad condicional a $\mathcal{F}_m$ que existan al menos a^{S_N} descendientes w de u en la generación n tal que $X_k(w_{i+1}) - X_k(w_i) \geq -hR \ \forall i = m,\dots,n-1$ es $\geq r$ gracias al Lema 4.7 (si N es suficientemente grande). Si además $X_k(w) \geq (v-\varepsilon)mh$ entonces se tiene que $\forall i = m,\dots,n \ X_k(w_i) \geq (v-\varepsilon(1+b))ih$. En efecto, sea $x_i = X_k(w_i)$. Se desea demostrar que $x_{m+j} \geq (v-\varepsilon(1+b))(m+j)h \ \forall j = 0,\dots,S_N\}$. Notar primero que $x_{m+j} \geq x_m + jRh \geq (v-\varepsilon)mh + jRh$ por lo tanto solo basta demostrar que $(v-\varepsilon)mh + jRh \geq (v-\varepsilon(1+b))(m+j)h \ \forall j = 0,\dots,S_N$:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(1+b)jh \geq (v-R)(j-S_N)h \quad \text{pues } j \leq S_N \\
&\Rightarrow jRh \geq (v-\varepsilon)jh - \varepsilon bjh - (v-R)S_N h \\
&\Rightarrow jRh \geq (v-\varepsilon)jh - \varepsilon bjh - \varepsilon b \underbrace{\left\lfloor \frac{(v-R)S_N}{\varepsilon b} \right\rfloor}_{=m} h \\
&\Rightarrow jRh \geq (v-\varepsilon)jh - \varepsilon b(j+m)h \\
&\Rightarrow (v-\varepsilon)mh + jRh \geq (v-\varepsilon(1+b))(m+j)h
\end{aligned}$$

Con lo anterior se obtiene que la probabilidad de que existan al menos a^{S_N} w con $|w| = n$ que cumplan $X_k(w_i) \geq (v-\varepsilon(1+b))ih \quad \forall i = 0,\dots,n$ es $\geq p_k(m,\varepsilon)r \geq p_k(\infty,\varepsilon)r$.

Sea ahora A el evento en que ninguna de las N copias que consituyen el coupling contenga más de a^{S_N} w con $|w| = n$ tal que $X_k(w_i) \geq (v-\varepsilon(1+b))ih \quad \forall i = 0,\dots,n$. Por independencia

$$\mathbb{P}(A) \leq (1 - p_k(\infty,\varepsilon)r)^N \leq \exp(-Np_k(\infty,\varepsilon)r) \leq \exp(-N^{\lambda+o(1)})$$

donde en la segunda desigualdad se utilizo que $1 - x \leq e^{-x}$.

Finalmente se define $\delta = (1+b)\varepsilon$ y del mecanismo de selección se obtiene que $B \subseteq A$ (B como en 4.6) puesto que en $B \cap A^c$ existen más de $a^{S_N} > N$ partículas a tiempo n cuyos ancestros siempre se mantuvieron a la derecha de la partícula $\min x^{N,k}$ y por lo tanto son parte del sistema con selección. De esto se deduce que

$$\mathbb{P}(B) \leq \exp(-N^{\lambda+o(1)})$$

Ahora ya se tienen todos los ingredientes necesarios para concluir. Es fácil ver de la definición de n que $n\mathbb{P}(B)$ es $o((\log N)^{-2})$ y por lo tanto el primer termino del lado derecho de la desigualdad en 4.6 lo es.

Para acotar el termino restante se acota superiormente $\mathbb{E}(|D_{n,k}|\mathbf{1}_B)$ utilizando que $\mathbb{E}(|D_{n,k}|\mathbf{1}_B) \leq \mathbb{E}(|D_{n,k}|^2)^{1/2}\mathbb{P}(B)^{1/2}$ y que $\mathbb{E}(|D_{n,k}|^2)$ está acotado por la suma de los cuadrados de todas las traslaciones entre 1 y n, es decir:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|D_{n,k}|^2) &\leq nN\mathbb{E}\left(\sum_{u \in V(h)} |X^u(h)|^2\right) \\
&= nNe^h \mathbb{E}\left(|Y(h)|^2\right) \\
&= nNe^h(Ah^2 + hC)
\end{aligned}$$

donde Y es un proceso de Poisson compuesto de tasa 2 y saltos $\frac{1}{2}(\delta_0 + \mu)$, $A = (\int x\mu(\mathrm{d}x))^2$ y $C = \int x^2\mu(\mathrm{d}x)$. Con lo anterior se obtiene que el término $\frac{n}{h}\mathbb{E}(|D_{n,k}|\mathbf{1}_B)$ en la desigualdad de 4.6 también es $o((\log N)^{-2})$ y por lo tanto

$$\frac{(1+b)}{(1-\lambda)^2}\frac{\chi^*}{(\log N)^2} \geq v^* - v_{N,k} + o((\log N)^{-2})$$

multiplicando por $(\log N)^2$, tomando limsup y usando que b y λ son arbitrarios se concluye.

Capítulo 5

Extensión

En esta sección se define el N-BLP general y su versión discretizada para el cual se extienden varios de los resultados obtenidos para el sistema simple. Una de las propiedades claves para la cual no se tiene demostración es que la velocidad asintótica v_N del N-BLP converge a la velocidad de la partícula de más a la derecha del BLP sin selección. La demostración de esto en el caso simple se encuentra en [8] (sección 5.1) y utiliza un coupling que para el caso general aparecen complicaciones técnicas tanto por el hecho de que la cantidad de hijos es aleatoria como que las partículas se mueven entre los tiempos de ramificación.

Al igual que en el caso simple se definen dos sistemas, uno a tiempo continuo (S1') y otro a tiempo discreto (S2'). El sistema (S1') consiste en N partículas que evolucionan según un proceso de Lévy X y luego de un tiempo exponencial de parámetro τ mueren dejando descendientes distribuidos, relativo a la posición de muerte del padre, según un proceso puntual η. Inmediatamente después de un evento de reproducción se seleccionan los N individuos que están más a la derecha y el resto se elimina dejando la cantidad de partículas constante. Para $k \in \mathbb{N}$ (S2') consiste en un sistema de N partículas que a cada tiempo $n \in \mathbb{N}$ tienen descendientes posicionados, relativo al padre, según el proceso puntual

$$\eta^k := \sum_{u \in V(2^{-k})} \delta_{X^u(2^{-k})}$$

donde $X_{\mathbb{T}}$ es el BLP de características (X, τ, η) que define a (S1'). Luego de que los descendientes de la generación $n+1$ nacen se seleccionan los N individuos que están más a la derecha y el resto se elimina.

Se denotará por $z^N(t) = \sum_{n=1}^{N} \delta_{z_n^N(t)}$ a la configuración de las N partículas del sistema (S1') a tiempo $t \geq 0$ y por $z_n^{N,k}$ a la configuración del sistema (S2') a tiempo $n \in \mathbb{N}$.

En lo que sigue se considerará una tasa de ramificación $\tau > 0$, un proceso de Lévy X de características (a, σ, ν) y coeficiente de Laplace ψ, y un proceso puntual η con medida de intensidad γ y transformada de Laplace ϕ. Además se define la función $\Phi := \tau(\phi - 1) + \psi$ que gracias a la proposición 1.23 se puede pensar como el coeficiente de Laplace del BLP (en el caso simple está función coincide con la trasformada de Laplace de la medida de traslación μ multiplicada por la tasa de ramificación). Al igual que en el caso simple es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el BLP:

(H1') $\mathbb{P}(\eta(\mathbb{R}) = 0) = 0$, $m := \mathbb{E}(\eta(\mathbb{R})) > 1$ y existe $\delta > 0$ tal que $\mathbb{E}(\eta(\mathbb{R})^{1+\delta}) < \infty$.

(H2') $a^* := \sup\{\theta > 0 \colon \Phi(\theta) < \infty\} > 0$, $a_* := \text{ínf}\{\theta < 0 \colon \Phi(\theta) < \infty\} < 0$ y $\text{lím}_{\theta \to (a^*)^-} \frac{\Phi(\theta)}{\theta} = \infty$.

(H3') El ínfimo

$$v^* := \text{ínf}_{\theta > 0} \frac{\Phi(\theta)}{\theta}$$

se alcanza en $\theta^* > 0$. Notar que por (H2) Φ es C^∞ y por lo tanto

$$\Phi'(\theta^*) = \frac{\Phi(\theta^*)}{\theta^*} = v*$$

(H4') Sea $\gamma_{\text{máx}}$ la distribución del máximo átomo de η entonces

$$a + \int_{|x| \geq 1} x\nu(\mathrm{d}x) + \int x\gamma_{\text{máx}}(\mathrm{d}x) > 0$$

Observación

(1) En (H1') la propiedad de que existe $\delta > 0$ tal que $\mathbb{E}(\eta(\mathbb{R})^{1+\delta}) < \infty$ es necesaria para usar el resultado de Gantert, Hu y Shi 1.18.

(2) (H2') equivale a que tanto ϕ como ψ sean finitas en una vecindad del 0. Gracias a la propiedad 1.4 lo segundo se tiene si y solo si la función $\theta \mapsto \int_{|x| \geq 1} e^{\theta x} \nu(\mathrm{d}x)$ es finita en una vecindad del cero. En particular, tanto $(X(t) - \mathbb{E}(X(t)))_t$ como $(Y(t) - \mathbb{E}(Y(t)))_t$ son martingalas en L^p para todo $p \geq 1$.

(3) Gracias al teorema 1.24 asumiendo solo (H1') y (H2') la constante v^* es siempre finita y corresponde a la velocidad de la partícula de más a la derecha del BLP.

(4) Si $(0, a^*) \ni \theta \mapsto f(\theta) := \frac{\Phi(\theta)}{\theta}$ entonces de (H1') y (H2') f es C^∞ y $f(0^+) = f((a^*)^-) = \infty$. Por lo tanto si f es estrictamente convexa o equivalentemente $f'' > 0$ se obtiene la existencia del minimizador en (H3'). Derivando f se obtiene que

$$\begin{aligned} f''(\theta) &= \frac{1}{\theta^3} \left(\theta^2 \psi''(\theta) - 2\theta\psi'(\theta) + 2\psi(\theta) + \tau \left(\theta^2 \phi''(\theta) - 2\theta\phi'(\theta) + 2(\phi(\theta) - 1) \right) \right) \\ &= \frac{1}{\theta^3} \left(\int \left\{ ((\theta x - 1)^2 + 1)e^{\theta x} - 2 \right\} \nu(\mathrm{d}x) + \tau \left(\int ((\theta x - 1)^2 + 1)e^{\theta x} \gamma(\mathrm{d}x) - 2 \right) \right) \end{aligned}$$

esto permite encontrar que, por ejemplo, si η y ν concentran en $\mathbb{R}_+$ y $\mathbb{E}(\eta(\mathbb{R})) \geq 2$ entonces se cumple (H3').

(5) Si $N = 1$ entonces $z^1(t) = X(t) + S_{\text{máx}}(t)$ donde $S_{\text{máx}}$ es un proceso de Poisson compuesto de tasa τ y distribución de saltos $\gamma_{\text{máx}}$. Con esto se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\frac{\text{máx}\, z^1(t)}{t} \right) &= \mathbb{E}\left(\frac{X(t) + S_{\text{máx}}(t)}{t} \right) \\ &= a + \int_{|x| \geq 1} x\nu(\mathrm{d}x) + \int x\gamma_{\text{máx}}(\mathrm{d}x) \\ &> 0 \end{aligned}$$

es decir, el sistema z^1 se mueve con velocidad estrictamente positiva.

Con estas hipótesis se tienen los siguientes propiedades sobre z^N y $z^{N,k}$ cuyas demostraciones están en el anexo:

Teorema 5.1 *Existe $v_N > 0$ tal que*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\min z^N(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\max z^N(t)}{t} = v_N \quad c.s. \ y \ en \ L^1$$

Más aún, $(v_N)_N$ es no decreciente.

Teorema 5.2 *Para todo $N \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N}$ existe $v_{N,k} > 0$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max z_n^{N,k}}{n2^{-k}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\min z_n^{N,k}}{n2^{-k}} = v_{N,k} \quad c.s. \ y \ en \ L^1$$

Más aún, para todo $k \in \mathbb{N}$ $(v_{N,k})_N$ es no decreciente.

Proposición 5.3 *Para todo $N \in \mathbb{N}$ y $k \geq 1$ se tiene que*

$$v_N \leq v_{N,k} \leq v_{N,k-1}$$

Finalmente la demostración del teorema principal de este trabajo se extiende fácilmente al caso general debido a que en el contexto de la discretización el proceso (S2) y (S2') tienen la misma estructura salvo que la transformada de Laplace del proceso puntual que los define son distintas. En resumen, se tienen los siguientes resultados:

Teorema 5.4 *Para todo $k \in \mathbb{N}$*

$$\lim_{N\to\infty} (v^* - v_{N,k})(\log N)^2 = \chi^*$$

con $\chi^* = \frac{\pi^2}{2}\theta^*\Phi''(\theta^*)$.

y gracias a la propiedad de comparación 5.3 se obtiene el siguiente corolario:

Corolario 5.5

$$\liminf_{N\to\infty} (v^* - v_N)(\log N)^2 \geq \chi^*$$

o equivalentemente: $\forall \alpha \in (0, \chi^*),\ \exists k \in \mathbb{N},\ \forall N \geq k$

$$v^* - v_N \geq \frac{\alpha}{(\log N)^2}$$

Capítulo 6

Discusión

6.1. Cota superior para (S1)

El resultado principal de este trabajo (teorema 3.1) dice que sin importar el paso de la discretización k la tasa de convergencia de $v_{N,k}$ a v^* es siempre la misma. Esto sugiere que para (S1) se debe tener el mismo resultado que para (S2), es decir

Conjetura

$$\lim_{N\to\infty}(v^* - v_N)(\log N)^2 = \chi^*$$

Para probar lo anterior es necesario demostrar que $\limsup_{N\to\infty}(v^* - v_N)(\log N)^2 \leq \chi^*$. Esta cota en el caso de (S2) se obtiene gracias al siguiente resultado intermedio que se encuentra en la sección 4.2:

Proposición 6.1 $\forall 0 < \lambda < 1$, $\forall 0 < b < 1$ *existe* M_k *tal que para todo* $N \geq M_k$

$$v^* - v_{N,k} + F_k(N) \leq \frac{1+b}{(1-\lambda)^2}\frac{\chi^*}{(\log N)^2}$$

donde $F_k(N)(\log N)^2 \stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Es posible que de lo anterior se pueda obtener la cota superior para (S1). En primer lugar habría que probar que

$$v_{N,k} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} v_N$$

Notar que gracias al lema de comparación 2.4 $(v_{N,k})_k$ posee límite que es mayor o igual a v_N.

El siguiente paso sería controlar la dependencia en k de F_k y M_k en la proposición anterior. Lamentablemente esta dependencia es poco explicita y requiere un control sobre, por ejemplo, las velocidades de convergencia de $\mathbb{P}(M_n m^{-n} \geq x) \to \mathbb{P}(W \geq x)$, $\mathbb{P}(W \geq x) \stackrel{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ en el lema 4.7 y la velocidad convergencia en el teorema de Gantert, Hu y Shi para los BRW X_k.

6.2. Convergencia de v_N en (S1')

Para la convergencia de $v_N \to v^*$ en (S1) Durrett y Mayberry [8] construyen un coupling entre los procesos con y sin selección que les permite probar

$$v_N \geq \frac{\mathbb{E}\left(\max_{u \in V(T_N)} X^u(t)\right)}{\mathbb{E}(T_N)}$$

donde $T_N = \inf\{t > 0\colon |V(t)| > N\}$. Luego usando que $\frac{1}{T_N} \max_{u \in V(T_N)} X^u(t) \to v^*$ y un argumento de convergencia dominada concluyen. Para (S1') este argumento de convergencia dominada presenta complicaciones técnicas debido a que el proceso $t \to \max_{u \in V(t)} X^u(t)$ no es necesariamente creciente y los tiempos de parada T_N no tiene una representación explicita como en (S1).

Capítulo 7

Conclusiones

El principal resultado probado en este trabajo, el Teorema 3.1, provee un tasa de convergencia exacta para la velocidad asintótica de la discretización (sistema (S2)) del modelo a tiempo continuo (sistema (S1)) que originalmente motivó esta memoria. Como subproducto de este teorema, se prueba que efectivamente la tasa de convergencia para el sistema a tiempo continuo es al menos de orden $(\log N)^{-2}$. Esto permite evidenciar cuantitativamente el efecto de una cantidad finita de partículas en la velocidad del frente de propagación para el sistema (S1).

Además del estudio del sistema (S1) se propuso un modelo más general en el cual a las partículas se les permite moverse según un proceso de Lévy entre los tiempos de ramificación. Para este sistema se prueban varias de las propiedades que cumple el sistema simple y, en partícular, gracias a que en el contexto de la discretización el sistema simple y el sistema general poseen la misma estructura, la demostración del teorema principal se extiende fácilmente.

Quedan entonces abiertos dos problemas. El primero es el de demostrar la cota que falta para obtener una tasa de convergencia exacta para la velocidad asintótica del sistema a tiempo continuo. Evidencia obvia de que esta cota es cierta es que la tasa de convergencia para el sistema discreto no depende del paso de la discretización. Este último hecho da a entender que uno de los caminos a tomar para demostrar la cota que falta es intentar tomar límite cuando el paso de la discretización tiende a 0 lo cual tiene asociado varias complicaciones técnicas. El segundo problema abierto es demostrar que para el modelo general la velocidad asintótica converge a la velocidad del sistema sin selección. Al igual que antes, una evidencia importante de que este hecho es cierto es que para el sistema discreto se tiene la convergencia mencionada independiente del paso de la discretización.

En resumen, esta tesis da una serie de resultados que pone en evidencia la universalidad del comportamiento de Brunet-Derrida al extender los resultados de Berard y Gouere a una clase de de sistemas a tiempo continuo.

Bibliografía

[1] I Petrovsky A, Kolmogorov and Piscounov N. *Etude de l'equation de la diffusion avec croissance de la quantite de matiere et son application a un probleme biologique.* Bull. Univ. Etat Moscou, 1937.

[2] Krishna B. Athreya and Peter Ney. *Branching processes.* Springer-Verlag, 1972.

[3] Vincent Bansaye, Jean-François Delmas, Laurence Marsalle, and Viet Chi Tran. Limit theorems for Markov processes indexed by continuous time galton–watson trees. *Ann. Appl. Probab.*, 21(6):2263–2314, 12 2011.

[4] R. D. Benguria and M. C. Depassier. Speed of pulled fronts with a cutoff. *Phys. Rev. E*, 75:051106, May 2007.

[5] Jean Bérard and Jean-Baptiste Gouéré. Brunet-derrida behavior of branching-selection particle systems on the line. *Communications in Mathematical Physics*, 298(2):323–342, 2010.

[6] Eric Brunet and Bernard Derrida. Shift in the velocity of a front due to a cutoff. *Phys. Rev. E*, 56:2597–2604, Sep 1997.

[7] Freddy Dumortier, Nikola Popović, and Tasso J Kaper. The critical wave speed for the fisher–kolmogorov–petrowskii–piscounov equation with cut-off. *Nonlinearity*, 20(4):855, 2007.

[8] Rick Durrett and John Mayberry. Evolution in predator–prey systems. 120(7):1364—-1392, 7 2010.

[9] Rick Durrett and Daniel Remenik. Brunet–Derrida particle systems, free boundary problems and Wiener–Hopf equations. *Ann. Probab.*, 39(6):2043–2078, 11 2011.

[10] RA Fisher. *The wave of advance of advantageous genes.* Ann. Eugenics, 1937.

[11] Nina Gantert, Yueyun Hu, and Zhan Shi. Asymptotics for the survival probability in a killed branching random walk. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 47(1):111–129, 02 2011.

[12] J. F. C. Kingman. Subadditive ergodic theory. *Ann. Probab.*, 1(6):883–899, 12 1973.

[13] Andreas E. Kyprianou. *Fluctuations of Levy processes with applications: introductory lectures*. Springer, 2014.

[14] Zhan Shi. *Branching random walks: Ecole d'Ete de Probabilites de Saint-Flour XLII – 2012*. Springer, 2015.

[15] K. Uchiyama. *The behavior of solutions of some non-linear diffusion equations for large time*. J. Math. Kyoto Univ., 1978.

Capítulo 8

Anexo

En este anexo se prueban las propiedades básicas del sistema general (S1') descrito en el capítulo 5. Las demostraciones del sistema discreto (S2') son análogas y por lo tanto se excluyen.

8.1. Construcción de (S1')

Sea $\mathcal{X} := (X_{\mathbb{T}_i})_{i=1}^N$, $X_{\mathbb{T}_i} := (X_i^u(t))_{(u,t)\in\mathbb{T}_i}$ N copias independientes de el BLP que define a (S1'). Se define $G^N \subseteq \bigcup_{i=1}^N \mathbb{T}_i$ inductivamente como sigue: Si T es el tiempo de la primera ramificación en $\mathcal{X}$ entonces para todo $t < T$, $i = 1, \dots, N$ y $(u,t) \in \mathbb{T}_i$ se tiene que $(u,t) \in G^N$. Luego, de las partículas vivas a tiempo T, se escogen las N que están más a la derecha y se repite el procedimiento anterior, es decir, se incluyen en G^N hasta la próxima ramificación (sin considerar las ramificaciones de las partículas que ya fueron eliminadas) y luego se seleccionan las N de más a la derecha y se continua con el procedimiento. Si $(u,t) \in G^N \cap \mathbb{T}_i$ entonces la posición de (u,t) se denotará $X^u(t)$ en vez de $X_i^u(t)$ y el árbol enraizado en (u,t) se denotará $\theta_{(u,t)}\mathbb{T}$ en vez de $\theta_{(u,t)}\mathbb{T}_i$.

8.2. Propiedades básicas de (S1')

En esta sección se demuestra el teorema 5.1 sobre la velocidad asintótica del sistema (S1').

Teorema 8.1 *Para todo $N \geq 1$ existen constantes v_N y $\tilde{v}_N$ tales que*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\max z^N(t)}{t} = v_N \quad y \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\min z^N(t)}{t} = \tilde{v}_N \quad c.s.\ y\ en\ L^1$$

Demostración. Solo se hará la demostración para $\max z^N(t)$ puesto que la otra es análoga. Para esto es necesario invocar el teorema ergódico subaditivo de Kingman (teorema 4 de [12]) que requiere definir un proceso $(m(s,t))_{s\leq t}$ que cumpla las siguientes propiedades:

(1) $m(0,t) \overset{(d)}{=} \max z^N(t)$.
(2) $\forall s \leq r \leq t$, $m(s,t) \leq m(s,r) + m(r,t)$.
(3) La distribución de $m(s,t)$ solo depende de $t-s$.
(4) $\forall t \geq 0$, $\mathbb{E}(m(0,t)) < \infty$.
(5) $\exists A \in \mathbb{R}$ tal que para todo t suficientemente grande $\mathbb{E}(m(0,t)) \geq At$.
(6) Para todo intervalo compacto I, $\Lambda(I) := \sup_{\substack{s,t\in I \\ s\leq t}} |m(s,t)| \in L^1$.

Sea $s \geq 0$. $(z^N(s,t))_{t\geq s}$ se define como sigue: Si $\mathcal{X}$ y G^N son como en la construcción de (S1') entonces $z^N(s,t)$ es la configuración a tiempo $t-s$ de (S1') cuando este se define usando los N BLP independientes

$$(X^u(r) - X^u(s))_{(u,r)\in\theta_{(w,s)}\mathbb{T}} \text{ con } (w,s) \in G_N$$

Notar que de la definición se obtiene que la distribución de $z^N(s,t)$ solo depende de $t-s$. Sea ahora $m(s,t) = \max z^N(s,t)$, $s \leq t$. La condición (2) se obtiene directamente debido a que el lado derecho es el máximo de (S1') a tiempo $t-r$ con condición inicial $N\delta_{m(s,r)}$ mientras que el lado izquierdo es el máximo de (S1') a tiempo $t-r$ con condición inicial $z^N(s,r)$. Para concluir solo basta verificar (5) y (6). Sea $\theta > 0$ tal que $C := \Phi(\theta) \vee \Phi(-\theta) < \infty$ entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|\max x^N(t)|) &= \frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left(\log\exp\left(\theta|\max x^N(t)|\right)\right) \\
&\leq \frac{1}{\theta}\log\mathbb{E}\left(\exp\left(\theta|\max x^N(t)|\right)\right) \\
&\leq \frac{1}{\theta}\log\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{u\in V_i(t)}\exp\left(\theta|X_i^u(t)|\right)\right) \\
&= \frac{1}{\theta}\log\left(N\mathbb{E}\left(\sum_{u\in V_1(t)}\exp\left(\theta|X_1^u(t)|\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{\theta}\log\left(Ne^{\tau(m-1)t}\mathbb{E}\left(\exp\left(\theta|Y(t)|\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{\theta}\log\left(2Ne^{\tau(m-1)t}e^{Ct}\right) \\
&= \left(\frac{1}{\theta}\log(2N)\right) + \left(\frac{1}{\theta}(\tau(m-1)+C)\right)t
\end{aligned}$$

Con lo que se concluye (5). Para (6) sea $I = [a,b]$ entonces

$$\begin{aligned}
\Lambda(I) &= \sup_{s\in[a,b]}\sup_{s\leq t\leq b}|m(s,t)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{N}\sup_{s\in[a,b]}\sup_{s\leq t\leq b}\sum_{u\in V_i(t)}|X_i^u(t) - X_i^u(s)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{N}\sup_{s\in[a,b]}\sup_{s\leq t\leq b}\sum_{u\in V_i(t)}\left(|X_i^u(t)| + |X_i^u(s)|\right) \\
&\leq 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{u\in V_i(b)}\sup_{r\in[0,b]}|X_i^u(r)|
\end{aligned}$$

tomando esperanza se obtiene que

$$\mathbb{E}(\Lambda(I)) \leq 2Ne^{\tau(m-1)b}\mathbb{E}\left(\sup_{r\in[0,b]}|Y(r)|\right)$$

considerando la martingala $M(r) = Y(r) - \mathbb{E}(Y(r))$ y $K(b) = \sup_{r\in[0,b]}|\mathbb{E}(Y(r))|$ se obtiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_{r\in[0,b]}|Y(r)|\right) &\leq \mathbb{E}\left(\sup_{r\in[0,b]}|M(r)|\right) + K(b) \\
&\leq \left(\mathbb{E}\left(\sup_{r\in[0,b]}|M(r)|^2\right)\right)^{1/2} + K(b) \\
&\leq 2\mathbb{E}(|M(b)|^2)^{1/2} + K(b) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

□

Teorema 8.2 *Las constantes v_N y $\tilde{v}_N$ del teorema anterior son iguales.*

Demostración. Como las convergencias del teorema anterior son c.s. y a constantes deterministas solo basta probar que $\frac{\max z^N(t)-\min z^N(t)}{t}$ converge a 0 en probabilidad.
Sea $T > 0$ que se escogerá a posteriori, $t \geq T$ y sean $x := x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_N$ las posiciones de las N partículas vivas a tiempo $t-T$. Sean $(X_{\mathbb{T}_i})_{i=1}^N$ N BLP independientes y partiendo de 0 que determinan las descendencias de $x_1, \ldots, x_N$, es decir, las posiciones de los descendientes de x_i a tiempo $s \geq t-T$ sin hacer selección están dadas por

$$x_i + \sum_{u\in V_i(s-t+T)} \delta_{X_i^u(s-t+T)}$$

Se define

$$D_1 := \max_{i=1,\ldots,N}\max_{u\in V_i(T)} X_i^u(T)$$

es claro que $\max x^N(t) \leq x + D_1$. Sea ahora

$$D_2 := \min_{i=1,\ldots,N}\min_{u\in V_i(T)}\inf_{s\in[0,T]} X_i^u(s) \quad \text{y} \quad A := \{\forall s\in[t-T,t]\colon \min z^N(s) < x + D_2\}$$

En A todos los descendientes de x a tiempo t sobreviven a la selección y por lo tanto si $N(s)$ es la cantidad de hijos de x vivos a tiempo $s+t-T$ entonces $A \subseteq \{N(T) \leq N\}$. Por otro lado si se define

$$D_3(s) := \min_{i=1,\ldots,N}\min_{u\in V_i(T)} X_i^u(T) - \max_{i=1,\ldots,N}\max_{u\in V_i(s)} X_i^u(s) \quad \text{y} \quad D_3 = \min_{s\in[0,T]} D_3(s)$$

entonces $\min z^N(t) - \min z^N(s) \geq D_3(s) \geq D_3$ y por lo tanto en A^c $\min z^N(t) \geq x + D_2 + D_3$.
Sea $\delta > 0$ entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{\max z^N(t) - \min z^N(t)}{t} \geq \delta\right) &\leq \mathbb{P}(N(T) \leq N) + \mathbb{P}\left(\frac{D_1 - D_2 - D_3}{t} \geq \delta\right) \\
&\leq \mathbb{P}(N(T) \leq N) + \sum_{i=1}^{3}\mathbb{P}\left(|D_i| \geq \delta t\right)
\end{aligned}$$

Primero es necesario verificar que $\mathbb{P}(N(T) \leq N) \stackrel{T\to\infty}{\longrightarrow} 0$. En efecto, del Teorema 1.11 y (H1') se obtiene que para $c := e^{\tau(m-1)} > 1$ $N(T)c^{-T} \to W$ c.s. donde $W > 0$ c.s. Sea $\varepsilon > 0$ entonces existe $T_0 > 0$ tal que $\forall T \geq T_0$, $Nc^{-T} \leq \varepsilon$, luego

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(T) \leq N) &= \mathbb{P}(N(T)c^{-T} \leq Nc^{-T}) \\
&\leq \mathbb{P}(N(T)c^{-T} \leq \varepsilon) \quad \forall T \geq T_0 \\
&\stackrel{T\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(W \leq \varepsilon)
\end{aligned}$$

como ε es arbitrario y $\mathbb{P}(W \leq \varepsilon) \stackrel{\varepsilon\to 0}{\to} 0$ se concluye que $\mathbb{P}(N(T) \leq N) \stackrel{T\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Ahora para todo $\varepsilon > 0$ se puede fijar $T > 0$ tal que $\mathbb{P}(N(T) \leq N) \leq \varepsilon$ y por lo tanto solo basta probar que $\mathbb{P}(|D_i| \geq \delta t) \stackrel{t\to\infty}{\to} 0$ para $i = 1, 2, 3$. Solo se probara para $i = 2$ ya que el resto es análogo.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|D_2| \geq \delta t) &\leq \mathbb{P}\left(\max_{i=1,\dots,N} \max_{u \in V_i(T)} \sup_{s\in[0,T]} |X_i^u(s)| \geq \delta t \right) \\
&= 1 - \left(\mathbb{P}\left(\max_{u\in V(T)} \sup_{s\in[0,T]} |X^u(s)| \geq \delta t \right) \right)^N
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\max_{u\in V(T)} \sup_{s\in[0,T]} |X^u(s)| \geq \delta t \right) &\leq \mathbb{E}\left(\sum_{u\in V(T)} \mathbf{1}_{\{\sup_{s\in[0,T]} |X^u(s)| \geq \delta t\}} \right) \\
&= e^{\tau(m-1)T} \mathbb{P}\left(\sup_{s\in[0,T]} |Y(s)| \geq \delta t \right)
\end{aligned}$$

Sea $K(T) = \sup_{s\in[0,T]} |\mathbb{E}(Y(s))| < \infty$. Luego usando la martingala $M(s) := Y(s) - \mathbb{E}(Y(s))$ se obtiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sup_{s\in[0,T]} |Y(s)| \geq \delta t \right) &\leq \mathbb{P}\left(\sup_{s\in[0,T]} |M(s)| \geq \delta t - K(T) \right) \\
&\leq \frac{1}{\delta t - K(T)} \mathbb{E}(|M(T)|) \qquad \text{(desigualdad de Doob)} \\
&\stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Se concluye. □

Para las siguientes demostraciones se utilizará la siguiente noción:

Definición 8.3 *Sean λ y ζ dos medidas puntuales en $\mathbb{R}$. Se dirá que ζ domina a λ lo cual se denotará $\lambda \preccurlyeq \zeta$ si para todo $x \in \mathbb{R}$ $\lambda([x,\infty)) \leq \zeta([x,\infty))$. Notar que si $\lambda = \sum_{i=1}^{N_1} \delta_{x_i}$ con $x_1 \geq \dots \geq x_{N_1}$ y $\zeta = \sum_{i=1}^{N_2} \delta_{y_i}$ con $y_1 \geq \dots \geq y_{N_2}$ entonces $\lambda \preccurlyeq \zeta$ si y solo si $N_1 \leq N_2$ y $x_i \leq y_i$ para todo $i = 1, \dots, N_1$.*

Teorema 8.4 *Para todo $N \in \mathbb{N}$, $v_N > 0$ y $(v_N)_N$ es no decreciente.*

Demostración. Gracias a la hipótesis (H4') $v_1 > 0$ luego solo es necesario probar la monotonía de $(v_N)_N$. Para esto se acoplará (S1') con N y $N+1$ partículas de manera que $z^N(t) \preccurlyeq z^{N+1}(t)$ para todo $t \geq 0$.

Sean $(X_n)_{n=1}^{N+1}$ $N+1$ copias independientes del proceso de Lévy subyacente, $\eta_{n,i}$, $n = 1, \dots, N+1$, $i \in \mathbb{N}$ una colección i.i.d. de copias de η y $\tau_{i,n}$, $n = 1, \dots, N+1$, $i \in \mathbb{N}$ una colección i.i.d. de variables exponenciales de parámetro τ. Para $M \in \{N, N+1\}$ se define

$$
\begin{aligned}
T_0^M &= 0 \\
T_{i+1}^M &= T_i^M + \min_{n=1,\dots,M} \tau_{i+1,n}
\end{aligned}
$$

$$
U_i^M = \operatorname*{argmín}_{n=1,\dots,M} \tau_{i,n}
$$

(T_i^M) son los tiempos de salto de un proceso de Poisson de parámetro $M\tau$ y (U_i^M) es una familia i.i.d. con distribución común Unif $(\{1, \dots, M\})$. Se define el sistema con M partículas inductivamente como sigue: Si el proceso está definido hasta tiempo T_i^M con

$$
z_1^M(T_i^M) \geq \cdots \geq z_M^M(T_i^M)
$$

entonces se define

$$
z_n^M(t) = z_n^M(T_i^M) + X_n(t) - X_n(T_i^M) \quad \text{para } t \in [T_i^M, T_{i+1}^M) \text{ y } n = 1, \dots, M
$$

A tiempo T_{i+1}^M se elimina la partícula $m = U_{i+1}^M$ siendo reemplazada por $z_m^M(T_{i+1}^M) + \eta_{m,i+1}$ y luego se eliminan las partículas de más a la izquierda para dejar las M de más a la derecha. Finalmente se reordenan las M partículas de manera que $z_1^M(T_{i+1}^M) \geq \cdots \geq z_M^M(T_{i+1}^M)$. No es difícil ver que este coupling cumple que para todo $t \geq 0$, $z^N(t) \preccurlyeq z^{N+1}(t)$. En efecto, basta notar que en cualquier instante de ramificación, ya sea de z^N o z^{N+1} la dominación se tiene y luego al usar los mismos procesos de Lévy para ambos se obtiene la dominación en todo tiempo $t \geq 0$. Con esto se obtiene que $\max z^N(t) \leq \max z^{N+1}(t)$ y por lo tanto $v_N \leq v_{N+1}$. □

Finalmente se da la demostración del teorema de comparación 5.3.

Demostración. La idea es acoplar z^N, $z^{N,k}$ y $z^{N,k+1}$ manteniendo cierta dominación. Sean $(X_{\mathbb{T}_{i,n}})$ $i \in \mathbb{N}$ y $n = 1, \dots, N$ una colección i.i.d. de copias del BLP que define a (S1'). La colección $(X_{\mathbb{T}_{i,n}})_{n=1}^N$ se utilizará para definir z^N para $t \in [(i-1)2^{-k}, i2^{-k})$, $z^{N,k}$ a tiempo i y $z^{N,k+1}$ a tiempos $2i-1$ y $2i$. Por claridad de notación se hara la definición de los procesos solo para $i = 1$: Se define z^N hasta tiempo 2^{-k} igual que en la construcción original pero usando los BLP $(X_{\mathbb{T}_{1,n}})_{n=1}^N$. Usando los procesos puntuales

$$
\sum_{u \in V_{1,n}(2^{-k})} \delta_{X_{1,n}^u(2^{-k})} \qquad n = 1, \dots, N
$$

se define $z^{N,k}$ hasta tiempo $n = 1$. Finalmente usando los procesos puntuales

$$
\sum_{u \in V_{1,n}(2^{-(k+1)})} \delta_{X_{1,n}^u(2^{-(k+1)})} \qquad n = 1, \dots, N
$$

se define $z^{N,k+1}$ hasta tiempo $n=1$ y usando los procesos puntuales

$$\sum_{\substack{u \in V_{1,n(w)}(2^{-k}) \\ u \geq w}} \delta_{X^u_{1,n(w)}(2^{-k}) - X^w(2^{-(k+1)})} \qquad w \in z_1^{N,k+1}$$

donde $n(w) \in \{1,\ldots,N\}$ es la copia del coupling al cual pertenece la partícula asociada a $w \in z_1^{N,k+1}$.

De la definición del mecanismo de selección es fácil ver que en este coupling

$$\forall i \in \mathbb{N}\colon\, z^N(i2^{-k}) \preccurlyeq z_{2i}^{N,k+1} \preccurlyeq z_i^{N,k}$$

en particular se tiene que

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon\, \text{máx}\, z^N(i2^{-k}) \leq \text{máx}\, z_{2i}^{N,k+1} \leq \text{máx}\, z_i^{N,k}$$

Dividiendo por $i2^{-k}$ y tendiendo $i \to \infty$ se obtiene el resultado. $\square$