



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

EXTENSIONES DE UN TEOREMA LÍMITE PARA UN MODELO BASADO EN
AGENTES

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

FELIPE ANDRÉS MUÑOZ HERNÁNDEZ

PROFESOR GUÍA:
DANIEL REMENIK ZISIS

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JOAQUÍN FONTBONA TORRES
JAIME SAN MARTÍN ARISTEGUI

SANTIAGO DE CHILE
2016

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR
AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,
MENCION MATEMÁTICAS APLICADAS
RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: FELIPE ANDRÉS MUÑOZ HERNÁNDEZ
FECHA: 2016
PROF. GUÍA: SR. DANIEL REMENIK ZISIS

EXTENSIONES DE UN TEOREMA LÍMITE PARA UN MODELO BASADO EN AGENTES

En el presente trabajo se busca extender un resultado del tipo ley de grandes números para la medida empírica reescalada asociada a un modelo estocástico basado en agentes, previamente introducido en la literatura, a una clase de modelo más general. Específicamente la extensión considerada toma en cuenta dos nuevos mecanismos de evolución aparte de los ya considerados anteriormente. De esta forma los agentes, quienes están caracterizados por su *tipo*, aleatoriamente pueden interactuar, cambiar su tipo, morir y producir nuevos agentes.

Se comienza construyendo el proceso de medida empírica a partir de su generador infinitesimal, lo cual permite obtener un proceso de Markov con saltos a valores en medidas. Posteriormente se obtienen algunas propiedades sobre él, en particular, se obtiene una representación trayectorial del proceso mediante medidas puntuales de Poisson. Esta representación trayectorial permite obtener una propiedad de martingala asociada, la cual nos entrega una idea sobre cómo luce cierto sistema de ecuaciones que debería satisfacer la medida límite. Una vez hecho esto se procede de acuerdo a un esquema clásico para probar este tipo de resultados. Se comienza probando que el sistema propuesto tiene una única solución, luego se muestra que la secuencia de leyes asociada a la secuencia de procesos de medidas empíricas reescaladas es una familia tensa de medidas, para posteriormente probar que cada punto límite de las leyes satisface el sistema. Como consecuencia, gracias a la unicidad de este último, se concluye la convergencia en distribución, al tomar límite en el reescalamiento, del proceso de medida empírica reescalada a un proceso determinista solución del sistema.

Por último se muestran aplicaciones del resultado obtenido sobre tres modelos propuestos y se concluye discutiendo la posibilidad de tener un teorema central del límite para este tipo de modelo.

Tabla de Contenido

Tabla de Contenido	iii
Introducción	1
1. Preliminares	3
1.1. Notación	3
1.2. Convergencia de medidas	4
1.3. Procesos estocásticos	6
1.3.1. Procesos de Markov	8
1.3.2. Medidas aleatorias	12
1.4. Sistemas de partículas	14
2. Modelo	17
2.1. Descripción del modelo	17
2.2. Construcción trayectorial	20
2.3. Simulación	25
3. Resultados	28
4. Ejemplos	30
4.1. Modelo de ecosistema	30
4.2. Modelo epidemiológico	33
4.3. Modelo de bacterias	35
5. Demostraciones	39
6. Sobre un teorema central	55
6.1. Contexto general	55
6.2. Ecuación límite	58
Conclusión	60
A. Apéndice	62
A.1. Resultados generales	62
A.2. Sobre tensión	63
A.3. Demostraciones	64
Bibliografía	66

Introducción

Durante las últimas décadas el modelamiento de variados fenómenos y procesos se ha vuelto esencial tanto en la ingeniería misma como en la más básica de las ciencias. Es aquí donde la matemática ha actuado con un rol fundamental al proporcionar un lenguaje con el cual describir y formalizar versiones simplificadas de la realidad, esto con el fin de poder utilizar las herramientas inherentes a esta para establecer propiedades y así obtener una mejor comprensión de los fenómenos observados.

Dentro de este contexto es natural el rápido interés que surgió por intentar describir fenómenos naturales a partir de la matemática. Particularmente en el área de la física estadística existía la motivación por describir modelos estocásticos que representaran la evolución temporal de sistemas para de esta forma intentar comprender de mejor forma los estados de equilibrio junto con los cambios de fase. Es así como a finales de los años sesenta surge el campo de los sistemas de partículas como área dentro de las probabilidades y desde ese entonces se ha desarrollado rápidamente estableciendo conexiones con disciplinas como la biología y las finanzas, además de la física. Específicamente, y desde un punto de vista matemático, los sistemas de partículas representan una extensión natural de la teoría de procesos de Markov en el sentido de que un sistema típico corresponde a infinitas (o finitas) partículas que, en ausencia de interacción, evolucionarían de acuerdo a una cadena de Markov. Como resultado tendremos que si consideramos interacciones entre partículas, la evolución individual de estas deja de ser Markoviana pero ahora la dinámica del sistema considerado como un todo lo es.

El presente trabajo se encuentra enmarcado bajo las líneas antes mencionadas y surge a partir de la motivación existente por estudiar un modelo que busca mezclar al propuesto por D. Remenik en [12] con el propuesto por N. Fournier y S. Méléard en [5]. El primero de estos modelos considera un sistema con N agentes, caracterizados por su *tipo*, los cuales poseen dos mecanismos de evolución: a cierta tasa, que depende de su propio tipo y de la distribución actual del sistema, un agente muta su tipo a otro, escogido de acuerdo a cierta medida de probabilidad con el mismo tipo de dependencia, y por otra parte un tipo de agente interactúa con otro a una tasa que depende de ambos tipos y de la distribución del sistema, para luego ambos agentes escoger un nuevo par de tipos con una medida de probabilidad con el mismo tipo de dependencia. El segundo modelo busca describir un sistema ecológico espacial que consiste en plantas, en donde estas están caracterizadas por su posición y evolucionan de acuerdo a la siguiente dinámica: cada planta produce una semilla a una tasa que depende de su posición, una vez producida la semilla esta es inmediatamente dispersada de acuerdo a una medida que también depende de la posición, además cada planta puede morir de acuerdo a una tasa que depende de su posición y también por una tasa de competencia local

que depende de la posición y la distribución del sistema.

Ambos modelos son estudiados desde el punto de vista de una medida empírica, siendo para el primer modelo la distribución como medida puntal de los N agentes sobre el espacio de tipos y para el segundo la normalización por N del proceso puntal que siguen las posiciones de las plantas en el espacio. Sobre estos objetos se obtienen en [12] y [5] resultados del tipo ley de los grandes números que logran caracterizar la medida límite como la solución de un sistema de ecuaciones integro-diferenciales determinista. Más aún, en [12] se obtiene un resultado adicional del tipo teorema central del límite y que nos entrega información sobre las fluctuaciones de la medida empírica en torno a la medida límite.

El modelo planteado en este trabajo toma en cuenta el modelo propuesto por D. Remenik en [12] y a la dinámica ya definida por las mutaciones e interacciones entre agentes se añaden dos nuevas reglas de evolución: a cierta tasa cada agente produce un nuevo agente en el sistema, cuyo tipo es escogido de acuerdo a una medida de probabilidad, y también a una tasa dada los agentes abandonan el sistema. Nuevamente consideramos que tanto las tasas como las medidas involucradas dependen de los tipos de los agentes involucrados en la transición como también de la distribución completa del sistema. De esta forma el objetivo es probar que si tomamos el proceso puntal que siguen los agentes en el espacio de tipos y lo normalizamos por N , bajo ciertas hipótesis, este converge a un límite determinista solución de un sistema de ecuaciones, de la misma forma como se obtuvo para los otros modelos mencionados anteriormente.

Es con el fin antes mencionado que el presente trabajo se organiza como detallaremos a continuación. En el primer capítulo se comienza entregando las nociones básicas sobre los objetos y herramientas utilizadas a lo largo del presente trabajo. En el segundo capítulo se construye el proceso a estudiar además de entregar una representación trayectorial de él a partir de medidas puntuales de Poisson y algunas propiedades de propagación de momentos. Le sigue el tercer capítulo en donde se exponen los resultados obtenidos a raíz del estudio. En el cuarto capítulo se busca aplicar el resultado obtenido a distintos modelos. A continuación, en el quinto capítulo, se incluyen las demostraciones necesarias para probar el resultado principal, las cuales están basadas en propiedades de martingala junto con argumentos de tensión y unicidad. Por último se incluye un capítulo en donde se discute la posibilidad de tener un teorema similar al obtenido en [12] acerca de las fluctuaciones de la secuencia de procesos en torno a la medida límite.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se exponen las nociones básicas que se utilizarán a lo largo de este trabajo con el fin de mantener un marco teórico explícito, sin embargo la totalidad de los resultados se presentan sin demostración puesto que corresponden a resultados conocidos. En la sección 1.1 se presenta la notación usada a lo largo del texto para luego comenzar en 1.2 estableciendo los principios sobre la convergencia de medidas. A continuación en la sección 1.3 se presentan los procesos estocásticos desde un punto de vista general para luego dar énfasis a los procesos de Markov en 1.3.1 y a las medidas aleatorias en 1.3.2. Finalmente en 1.4 se realiza una introducción a la familia de objetos principales a estudiar.

1.1. Notación

Diremos que un espacio topológico $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ es polaco si es separable y si existe una métrica completa que induce la topología \mathcal{S} . Por otra parte el espacio se dirá localmente compacto si es que cada punto tiene una vecindad compacta, y σ -compacto si es que el espacio lo podemos escribir como una unión numerable de conjuntos compactos. Un espacio que cumpla las dos propiedades anteriores lo llamaremos σ -localmente compacto.

Dado un espacio métrico (\mathcal{X}, ρ) denotaremos por $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ a su σ -álgebra boreliana. A partir de esto consideraremos el espacio medible $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}})$ y definiremos el espacio $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ de medidas de Radon sobre él, es decir, medidas σ -finitas, regulares interiores y localmente finitas. Más aún, denotaremos por $\mathcal{M}_f(\mathcal{X})$ al espacio de las medidas finitas sobre él y de la misma forma definiremos $\mathcal{M}_s(\mathcal{X})$ como el espacio de las medidas con signo finitas. De estos espacios distinguiremos un subconjunto especial, llámese

$$\mathcal{M}_p(\mathcal{X}) = \left\{ \sum_{i=1}^n \delta_{x_i} \mid n \in \mathbb{N}^*, x_i \in \mathcal{X} \right\}, \quad (1.1)$$

el espacio de las medidas puntuales. Más aun, consideraremos un conjunto asociado a este espacio definido por $\mathcal{M}_p^N(\mathcal{X}) = \left\{ \frac{1}{N} \nu \mid \nu \in \mathcal{M}_p(\mathcal{X}) \right\}$, para $N \in \mathbb{N}$. Otro subconjunto a mencionar es el de las medidas de probabilidad sobre (\mathcal{X}, ρ) que denotaremos por $\mathcal{P}(\mathcal{X})$. Por

otra parte denotaremos por $B(\mathcal{X})$ al espacio de funciones a valores reales que son $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} - \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ medibles y acotadas, además definiremos el espacio $C(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ de funciones continuas sobre \mathcal{X} a valores en \mathcal{Y} , de la misma forma estableceremos $C_b(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ como el espacio de funciones continuas y acotadas, $C_c(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ el espacio de las funciones continuas a soporte compacto, $C_0(\mathcal{X})$ el espacio de funciones continuas que se anulan en infinito y $D([0, T], \mathcal{X})$ el espacio de funciones continuas a la derecha con límite por la izquierda (càdlàg) a valores en \mathcal{X} . Cuando $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$ simplemente omitiremos el espacio de llegada en la notación. Cabe mencionar que para una función f medible y $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ denotamos $\langle \mu, f \rangle = \int_{\mathcal{X}} f d\mu$, y recordamos también que para $\mu \in \mathcal{M}_s(\mathcal{X})$ su norma de variación total es definida por $\|\mu\|_{\text{TV}} = \sup_{\|\varphi\|_{\infty} \leq 1} |\langle \mu, \varphi \rangle|$.

Por último, dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y un espacio medible $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$, llamaremos variables aleatorias a las funciones $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{S})$ que son $\mathcal{F} - \mathcal{S}$ medibles. Cada variable aleatoria induce una medida de probabilidad que denotaremos por $\mathcal{L}_X \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ y que viene dada por la relación $\mathcal{L}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$. Esta medida la conoceremos como la ley de X .

1.2. Convergencia de medidas

A continuación definiremos los conceptos básicos y enunciaremos resultados claves para estudiar los distintos tipos de convergencias de medidas sobre los espacios antes mencionados. Comenzaremos enunciado un resultado clásico sobre medidas regulares, es decir, medidas que son regulares interiores y exteriores.

Teorema 1.1 *Sea \mathcal{X} un espacio polaco y $\mu \in \mathcal{M}_f(\mathcal{X})$, entonces μ es regular. En particular se tiene en este caso que $\mathcal{M}_f(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{X})$.*

En lo que sigue (\mathcal{X}, ρ) será un espacio métrico y buscaremos dotar de topologías adecuadas a los espacios $\mathcal{M}_f(\mathcal{X})$ y $\mathcal{M}(\mathcal{X})$. Comenzamos con el siguiente concepto

Definición 1.2 (Convergencia débil) *Diremos que $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_f(\mathcal{X})$ converge débilmente a μ , y lo denotaremos por $\mu_n \Rightarrow \mu$, si $\forall f \in C_b(\mathcal{X})$*

$$\int_{\mathcal{X}} f d\mu_n \rightarrow \int_{\mathcal{X}} f d\mu, \quad n \rightarrow \infty.$$

Observamos que cuando el espacio \mathcal{X} es polaco este límite es único. Este tipo de convergencia induce en $\mathcal{M}_f(\mathcal{X})$ la topología débil, que es la topología más gruesa tal que para toda $f \in C_b(\mathcal{X})$ la función $\mu \mapsto \int_{\mathcal{X}} f d\mu$ es continua. De ahora en adelante cuando consideremos el espacio $\mathcal{M}_f(\mathcal{X})$ dotado de esta topología lo denotaremos por $(\mathcal{M}_f(\mathcal{X}), w)$. Por otra parte, si además exigimos que el espacio \mathcal{X} sea separable, se puede probar que $(\mathcal{M}_f(\mathcal{X}), w)$ resulta ser metrizable (por la métrica de Prohorov). Más aún tenemos el siguiente resultado

Proposición 1.3 *Si \mathcal{X} es un espacio polaco y además es localmente compacto, entonces $(\mathcal{M}_f(\mathcal{X}), w)$ es un espacio polaco.*

Si ahora tomamos la definición de la convergencia débil y la utilizamos en el contexto de variables aleatorias podemos definir el siguiente concepto

Definición 1.4 (Convergencia en distribución) *Diremos que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en distribución a X , y lo denotaremos por $X_n \Rightarrow X$, si la secuencia de leyes de X_n converge débilmente a la ley de X .*

A continuación listaremos dos resultados para estos tipos de convergencia recién mencionados y que serán de gran utilidad

Teorema 1.5 (Teorema 2.7 en [1]) *Sea $h : (\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}) \rightarrow (\mathcal{X}', \mathcal{B}_{\mathcal{X}'})$ medible, $D_h \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ el conjunto de sus discontinuidades y $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{X})$. Entonces si $\mu_n \Rightarrow \mu$ y $\mu(D_h) = 0$, se tiene que $\mu_n h^{-1} \Rightarrow \mu h^{-1}$.*

Teorema 1.6 (Teorema 3.5 en [1]) *Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son uniformemente integrables y $X_n \Rightarrow X$, entonces X es integrable y se tiene que $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow \mathbb{E}(X)$.*

Por otra parte, recordando que $C_c(\mathcal{X}) \subseteq C_0(\mathcal{X}) \subseteq C_b(\mathcal{X})$, podemos definir una noción de convergencia más relajada

Definición 1.7 (Convergencia vaga) *Diremos que $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{X})$ converge vagamente a μ si se cumple que $\forall f \in C_c(\mathcal{X})$*

$$\int_{\mathcal{X}} f d\mu_n \rightarrow \int_{\mathcal{X}} f d\mu, \quad n \rightarrow \infty.$$

De la misma forma que para la convergencia débil, tenemos que el límite de la convergencia vaga será único cuando el espacio \mathcal{X} sea localmente compacto. De manera similar, este tipo de convergencia genera la topología más gruesa tal que para toda $f \in C_c(\mathcal{X})$ la función $\mu \mapsto \int_{\mathcal{X}} f d\mu$ es continua. Igualmente, de ahora en adelante, cuando consideremos el espacio $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ dotado de la topología vaga lo denotaremos por $(\mathcal{M}(\mathcal{X}), \nu)$. Cabe agregar que si además requerimos que el espacio \mathcal{X} sea localmente compacto, entonces $(\mathcal{M}(\mathcal{X}), \nu)$ resulta ser un espacio de Hausdorff. Más aún se tiene lo siguiente

Proposición 1.8 *Si \mathcal{X} es un espacio polaco localmente compacto, entonces $(\mathcal{M}(\mathcal{X}), \nu)$ es un espacio polaco.*

Un concepto clave que nos ayudará más adelante a probar la convergencia de ciertas secuencias de medidas en $\mathcal{M}_f(\mathcal{X})$ es el siguiente

Definición 1.9 (Tensión) *Diremos que un conjunto $\Pi \subseteq \mathcal{M}_f(\mathcal{X})$ de medidas es tenso si para cada $\varepsilon > 0$ existe un compacto K tal que*

$$\sup_{\mu \in \Pi} \mu(X \setminus K) \leq \varepsilon.$$

Observamos que para medidas de probabilidad la condición anterior la podemos escribir de la forma $\inf_{\mu \in \Pi} \mu(K) > 1 - \varepsilon$.

El concepto de tensión tiene un rol fundamental en el estudio sobre la convergencia de medidas pues nos entrega una noción de compacidad, la cual queda reflejada a partir de los siguientes resultados

Definición 1.10 *Una familia Π de medidas finitas se dirá relativamente compacta si cada secuencia de elementos de Π tiene una subsucesión débil convergente.*

Teorema 1.11 (Teorema 5.1 en [1]) *Si $\Pi \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{X})$ es tensa, entonces es relativamente compacta.*

Corolario 1.12 *Si $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es tensa y si cada subsucesión que converge débilmente lo hace a μ , entonces $\mu_n \Rightarrow \mu$.*

El siguiente resultado junto con el teorema 1.11 es lo que se conoce como el teorema de Prokhorov y es el que nos permite entender la tensión en términos de compacidad

Teorema 1.13 (Teorema 5.2 en [1]) *Supongamos que \mathcal{X} es polaco. Si Π es relativamente compacta, entonces es tensa.*

Por último, si buscamos relacionar los dos tipos de convergencia definidos anteriormente sobre el espacio $\mathcal{M}_f(\mathcal{X})$ tenemos el siguiente resultado que nos entrega una respuesta

Teorema 1.14 *Sea \mathcal{X} un espacio polaco localmente compacto y $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_f(\mathcal{X})$. Entonces las siguientes son equivalentes*

- (i) $\mu_n \Rightarrow \mu$.
- (ii) $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vagamente a μ y $\mu(\mathcal{X}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\mathcal{X})$.
- (iii) $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vagamente a μ y $\mu(\mathcal{X}) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\mathcal{X})$.
- (iv) $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vagamente a μ y $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia tensa.

1.3. Procesos estocásticos

Los objetos principales a estudiar a lo largo de este trabajo son los que definiremos a continuación

Consideraremos un proceso estocástico como una función $X : \Omega \rightarrow \mathcal{E}^T$ que es \mathcal{F} - \mathcal{E}^T medible sobre un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$ que satisface las hipótesis usuales (completa y continua a la derecha). Comúnmente entenderemos un proceso estocástico como el resultado de un experimento a lo largo del tiempo. A raíz de esto, una idea importante es querer poder predecir el valor de nuestro experimento en cierto tiempo conociendo toda la información previa. Para esto consideraremos lo siguiente

Definición 1.15 *La σ -álgebra predecible (o previsible) \mathcal{P} en $\Omega \times (0, \infty)$ es la σ -álgebra*

generada por los conjuntos de la forma $E \times (s, t]$ donde $E \in \mathcal{F}_s$ y $s < t$. Diremos que H es un proceso predecible si H es \mathcal{P} -medible.

Otra forma de caracterizar la σ -álgebra previsible es considerarla como la generada por todos los procesos que son adaptados y continuos a la izquierda. Por otra parte tenemos

Definición 1.16 Diremos que un proceso estocástico $(X_t)_{t \geq 0}$ es progresivo si para cada $t > 0$ la función $X : [0, t] \times \Omega \rightarrow \mathcal{E}$ es $\mathcal{B}_{[0, t]} \otimes \mathcal{F}_t - \mathcal{E}$ medible.

En la práctica tendremos que la mayoría de los procesos que nos interesan resultan ser progresivos, esto porque podemos probar que todo proceso adaptado con trayectorias càdlàg resulta ser progresivo. Más aún todo proceso medible y adaptado tiene una modificación progresiva.

Otra propiedad que resulta fundamental en el estudio de procesos estocásticos tiene que ver con la mejor estimación que podemos hacer del proceso dada la información del pasado. Esto queda reflejado en la siguiente definición

Definición 1.17 Un proceso estocástico $(M_t)_{t \geq 0}$ se dice (sub, super) martingala si es adaptado, $M_t \in L^1(\Omega) \forall t \geq 0$ y $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s \forall s < t$ (\geq, \leq respectivamente).

Definición 1.18 Diremos que un proceso X cumple una propiedad de manera local si es que existe una secuencia $(T_n)_{n \geq 1}$ de tiempos de parada creciendo a ∞ casi seguramente tal que X^{T_n} cumple la propiedad para cada $n \geq 1$.

En lo que respecta a las propiedades trayectoriales de los procesos tenemos los siguientes conceptos que clasifican los distintos comportamientos

Definición 1.19 Un proceso càdlàg y adaptado $(A_t)_{t \in T}$ es un proceso de variación finita si casi seguramente sus trayectorias, $t \mapsto A_t$, son de variación finita en cada intervalo compacto de $[0, \infty)$.

Definición 1.20 Un proceso $(A_t)_{t \in T}$ de variación finita con $A_0 = 0$ se dice de variación integrable si la esperanza de su variación total es finita.

Definición 1.21 Sea A un proceso de variación finita con $A_0 = 0$ y variación localmente integrable. El único proceso predecible de variación finita \tilde{A} tal que $A - \tilde{A}$ es una martingala local lo llamaremos el compensador de A .

Definición 1.22 Un proceso càdlàg adaptado X es una semimartingala si existen procesos M y A con $M_0 = A_0 = 0$ tal que

$$X_t = X_0 + M_t + A_t,$$

donde M es una martingala local y A un proceso de variación finita.

La idea central detrás de las semimartingalas es que son buenos integradores en el sentido de que podemos desarrollar una teoría de integración con respecto a este tipo de proce-

sos. Básicamente se tiene que para una semimartingala X y procesos simples de la forma $H_t = H_0 \mathbf{1}_{\{0\}} + \sum_{i=1}^n H_i \mathbf{1}_{(T_i, T_{i+1}]}(t)$, con $T_i < \infty$ una secuencia finita de t.d.p., H_{T_i} siendo \mathcal{F}_{T_i} -medible con $|H_i| < \infty$ casi seguramente, podemos definir el operador $I_X(H) = H_0 X_0 + \sum_{i=1}^n H_i (X^{T_{i+1}} - X^{T_i})$ y este resulta ser continuo en los espacios adecuados, para finalmente ser extendido a una clase mas grande de procesos predecibles con ciertas propiedades de finitud. A esta extensión la llamamos la integral estocástica y será un proceso que denotaremos por $\int H_s dX_s$. A partir de esto podemos definir el siguiente proceso asociado a una semimartingala

Definición 1.23 *Dada una semimartingala X definiremos su proceso de variación cuadrática $([X, X])_{t \geq 0}$ como*

$$[X, X]_t = X_t^2 - 2 \int_0^t X_{s-} dX_s. \quad (1.2)$$

En este caso tenemos que el proceso definido de esta forma resulta ser càdlàg, adaptado y creciente. Resulta conveniente definir otro proceso asociado a este último

Definición 1.24 *Sea X una semimartingala tal que su proceso de variación cuadrática es localmente integrable. Entonces definiremos la variación cuadrática predecible como el compensador de $[X, X]$, es decir, el único proceso predecible de variación finita tal que*

$$[X, X]_t - \langle X, X \rangle_t, \quad (1.3)$$

es una martingala local.

1.3.1. Procesos de Markov

Un proceso de Markov es un proceso estocástico que cumple una propiedad particular. Pueden ser usados para modelar sistemas que son aleatorios y que su evolución es dada de acuerdo a una regla de transición que solo depende del estado actual del sistema. En esta sección introduciremos este tipo de procesos y sus caracterizaciones tanto por núcleos de transición como por semigrupos y generadores infinitesimales sobre un espacio de funciones adecuado.

Definición 1.25 (Función de transición) *Una función de transición homogénea en el tiempo sobre $(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ es una familia $\{P_t\}_{t \geq 0}$ de núcleos de transición en $(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ tal que*

- (i) $P_t(x, \cdot) \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$, para cada $t \geq 0$ y $x \in \mathcal{E}$.
- (ii) $P_0(x, \cdot) = \delta_x$ para cada $x \in \mathcal{E}$.
- (iii) $P(\cdot, A) \in B([0, \infty) \times \mathcal{E})$, para cada $A \in \mathcal{E}$.
- (iv) $P_{t+s}(x, A) = \int P_s(y, A) P_t(x, dy)$, $\forall x \in \mathcal{E}, \forall A \in \mathcal{E}$.

Pasamos ahora a definir el tipo de proceso que queremos describir a partir de estos objetos.

Definición 1.26 Diremos que un proceso estocástico $(X_t)_{t \geq 0}$ definido en un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a valores en el espacio medible $(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ es un proceso de Markov si es adaptado a $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ y cumple que

$$\mathbb{E}(f(X_{t+s}) | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(f(X_{t+s}) | X_s).$$

Llamaremos distribución inicial del proceso a la medida definida por $\mu(A) = \mathbb{P}(X_0 \in A)$.

Nos interesa relacionar este tipo de procesos con los objetos introducidos en el comienzo. Esto lo hacemos de la siguiente manera

Definición 1.27 Diremos que una función de transición homogénea $\{P_t\}_{t \geq 0}$ es una función de transición para el proceso X si

$$\mathbb{E}(f(X_{t+s}) | \mathcal{F}_s) = \int f(x) P_t(X_s, dx). \quad (1.4)$$

En otras palabras la definición nos dice que $\mathbb{E}(f(X_{t+s}) | \mathcal{F}_s) = P_t f(X_s)$ y notamos que como consecuencia de esto, para $A \in \mathcal{E}$, $x \in \mathcal{E}$ y $t \geq 0$, tenemos que $P_t(x, A) = \mathbb{P}(X_t \in A | X_0 = x)$, es decir, la función de transición asociada nos entrega la ley del proceso condicional a que $X_0 = x$.

Ahora que podemos identificar este tipo de proceso nos preocupamos sobre asegurar su existencia bajo ciertas condiciones sobre la función de transición.

Teorema 1.28 (Teorema 4.1.1 en [3]) Dada una función de transición homogénea en el tiempo $\{P_t\}_{t \geq 0}$ y una medida de probabilidad μ sobre $(\mathcal{E}, \mathcal{E})$. Si para cada $t \geq 0$ la media de probabilidad $\int P_t(x, \cdot) \mu(dx)$ es tensa, entonces existe un proceso de Markov X definido en el espacio de probabilidad $(\mathcal{E}^{\mathbb{R}_+}, \mathcal{B}(\mathcal{E}^{\mathbb{R}_+}), \mathbb{P}_\mu)$ tal que $\{P_t\}_{t \geq 0}$ es una función de transición para el proceso y μ su distribución inicial.

El resultado que nos entrega este teorema es lo que conocemos como la realización canónica de un proceso de Markov, donde el proceso en este caso corresponde a la función coordenada $X(t) = w(t)$. Denotamos por \mathbb{P}_x a la medida que obtenemos cuando la distribución inicial es $\mu = \delta_x$. También cabe destacar que la condición de que la medida $\int P_t(x, \cdot) \mu(dx)$ sea tensa no es muy restrictiva, en el sentido de que en la mayoría de las aplicaciones se trabaja sobre espacios métricos polacos y basta con que el espacio se completo y separable para que la condición se cumpla.

Si bien resulta ser intuitivo construir un proceso de Markov dada una función de transición y una distribución inicial, en la práctica no resulta ser tan simple encontrar la función de transición salvo para algunos ejemplos, es por esto que buscamos un nuevo enfoque para poder construir un proceso de Markov. En lo que sigue definiremos algunos conceptos sobre operadores actuando en un espacio de Banach lo cual nos permitirá desarrollar la teoría que buscamos.

Definición 1.29 (Clausura) Dado un operador $A : \text{Dom}(A) \rightarrow \text{Im}(A)$, diremos que es cerrado si su grafo es cerrado. En caso que no sea cerrado definiremos su cerradura (cuando

se pueda) como el operador \bar{A} con $\text{Dom}(A) \subseteq \text{Dom}(\bar{A})$ que sea una extensión minimal de A y que tenga grafo cerrado.

Cabe que recalcar que no cualquier operador lineal tiene cerradura, ya que puede ser que la clausura de su grafo no corresponda al grafo de un operador lineal, en tal caso puede corresponder a un operador multivaluado.

Definición 1.30 Diremos que una secuencia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B(\mathcal{E})$ converge acotada y puntualmente (bp o bounded pointwise) a $f \in B(\mathcal{E})$ si $\sup_n \|f_n\| < \infty$ y hay convergencia puntual. Diremos que un conjunto es bp-cerrado si cuando $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C$, $f \in B(\mathcal{E})$ y f_n converge bp tenemos que $f \in C$.

Definición 1.31 (Conservativo) Diremos que un operador A sobre $B(\mathcal{E})$ es conservativo si $(1, 0)$ está en la bp-cerradura de su grafo.

Ahora definiremos uno de los conceptos básicos para el estudio de los procesos de Markov

Definición 1.32 (Semigrupo) Una familia de operadores $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ sobre un espacio de Banach \mathcal{Y} se dice semigrupo si cumple con que

- (i) $T(0) = I$,
- (ii) $T(s + t) = T(s)T(t)$.

Diremos que el semigrupo es fuertemente continuo si $\lim_{t \rightarrow 0} \|T(t)f - f\| = 0$ para cada $f \in \mathcal{Y}$. Por otra parte, si $\|T(t)\| \leq 1$ para cada $t \geq 0$, entonces diremos que es un semigrupo de contracciones. Finalmente diremos que es positivo si $f \geq 0$ implica que $T(t)f \geq 0$.

Definición 1.33 Un semigrupo de contracciones fuertemente continuo y positivo, cuyo generador es conservativo se dirá de Feller.

Definición 1.34 (Generador Infinitesimal) Dado un semigrupo definimos su generador infinitesimal A , cuando tenga sentido, por

$$Af = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)f - f}{t}. \quad (1.5)$$

El conjunto de $f \in \mathcal{Y}$ tal que el límite anterior tiene sentido lo llamaremos el dominio de A y lo denotaremos por $\text{Dom}(A)$.

Observemos que en el caso homogéneo es posible construir a partir de $\{P_t\}_{t \geq 0}$ un semigrupo de contracciones $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ en $B(\mathcal{E})$ mediante la asignación

$$T(t)f(y) = \int_{\mathcal{X}} f(x)P_t(y, dx). \quad (1.6)$$

De manera recíproca podemos construir una función de transición a partir de un semigrupo de contracciones positivo cuyo generador sea conservativo, esto como consecuencia del teorema de Riesz.

De manera análoga a como lo hicimos con la función de transición, dado un semigrupo $T(t)$ sobre un subespacio cerrado $\mathcal{S} \subset B(\mathcal{E})$ diremos que este *corresponde* al proceso de Markov X si

$$\mathbb{E}(f(X_{t+s})|\mathcal{F}_s) = T(t)f(X_s), \quad \forall t, s \geq 0 \text{ y } f \in \mathcal{S}. \quad (1.7)$$

A partir de esto tenemos la siguiente caracterización

Proposición 1.35 (Proposición 4.1.6 en [3]) *Sea \mathcal{E} separable y X un proceso de Markov a valores en \mathcal{E} con distribución inicial μ y que le corresponde un semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ en un subespacio cerrado $\mathcal{S} \subset B(\mathcal{E})$. Si \mathcal{S} es separante, entonces $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ y μ determinan las leyes finito dimensionales de X .*

La correspondencia entre un proceso de Markov y un semigrupo nos puede entregar además una caracterización del generador bajo ciertas hipótesis como se enuncia a continuación

Proposición 1.36 *Sea X un proceso de Markov a valores en \mathcal{E} que corresponde a un semigrupo de Feller $T(t)$, el que está definido en un subespacio cerrado $\mathcal{S} \subset B(\mathcal{E})$ y cuya distribución inicial es δ_x para $x \in \mathcal{E}$. Entonces*

$$T(t)f(x) = \mathbb{E}_x(f(X_t)). \quad (1.8)$$

En este caso podemos escribir el generador como

$$Af(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}_x(f(X_t)) - f(x)}{t}. \quad (1.9)$$

En lo que sigue buscaremos caracterizar un proceso de Markov a partir de su generador infinitesimal y su semigrupo asociado. En lo que sigue consideraremos \mathcal{E} localmente compacto

Definición 1.37 *Diremos que un operador A en $C_0(\mathcal{E})$ satisface el principio del máximo positivo si cuando $f \in \text{Dom}(A)$ y $x_0 \in \mathcal{E}$ es tal que $\sup_{x \in \mathcal{E}} f(x) = f(x_0)$, entonces ocurre que $Af(x_0) \leq 0$.*

A continuación enunciamos una versión del teorema Hille-Yosida para este contexto que resultará ser una pieza fundamental

Teorema 1.38 (Hille-Yosida, teorema 4.2.2 en [3]) *Sea \mathcal{E} localmente compacto. La clausura \bar{A} de A en $C_0(\mathcal{E})$ está bien definido y genera un semigrupo de contracciones fuertemente continuo y positivo si y solamente si*

- (i) $\text{Dom}(A)$ es denso en $C_0(\mathcal{E})$.
- (ii) A satisface el principio del máximo positivo.
- (iii) $\text{Im}(\lambda - A)$ es denso en $C_0(\mathcal{E})$ para algún $\lambda > 0$.

Cuando decimos que la clausura queda bien definida nos referimos a que resulta ser un operador lineal y que no es multivaluado.

Ahora podemos enunciar el resultado principal

Teorema 1.39 (Corolario 4.2.8 en [3]) *Sea \mathcal{E} localmente compacto y separable. Sea A un operador lineal sobre $C_0(\mathcal{E})$ que satisface las condiciones del teorema 1.38, y sea $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo de contracciones fuertemente continuo y positivo en $C_0(\mathcal{E})$ generado por \bar{A} . Entonces para cada $x \in \mathcal{E}$ existe un proceso de Markov que corresponde a $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ con distribución inicial δ_x y con trayectorias en $D(\mathbb{R}_+, \mathcal{E})$ si y solo si A es conservativo.*

Con esto concluimos la introducción a las formas que hay de caracterizar un proceso de Markov. A continuación enunciaremos una propiedad que será de gran utilidad más adelante

Proposición 1.40 *Si X_t es un proceso de Markov progresivo con generador A , entonces $\forall f \in \text{Dom}(A)$ el proceso definido por*

$$M_t = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Af(X_s)ds, \quad (1.10)$$

es una \mathcal{F}_t^X -martingala.

1.3.2. Medidas aleatorias

Cuando buscamos modelar la ocurrencia de eventos aleatorios en un intervalo de tiempo, asociados a objetos que son independientes entre sí, y además los intervalos entre cada par de ocurrencias no tienen memoria y son independientes entre sí, es que resulta natural escoger el clásico proceso de Poisson. En esta sección buscaremos generalizar la definición del proceso de Poisson en \mathbb{R}_+ a espacios mucho más generales.

Comenzaremos definiendo la familia de variables aleatorias que utilizaremos en este contexto.

Definición 1.41 *Una medida aleatoria μ en $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ es una función medible desde cierto espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ al espacio medible $(\mathcal{M}(\mathcal{X}), \mathcal{M})$ de las medidas localmente finitas, donde \mathcal{M} es la σ -álgebra más pequeña que hace a las evaluaciones medibles*

$$\begin{aligned} \Phi_A : \mathcal{M}(\mathcal{X}) &\rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ \mu &\mapsto \mu(A), \end{aligned}$$

para cada $A \in \mathcal{S}$.

Definición 1.42 (Medida puntual) *Dado un espacio medible $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$, suponiendo que los singletons son medibles, diremos que $N : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ es una medida puntual si es una medida sobre $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ de la forma*

$$N = \sum_{i \in I} \delta_{x_i}, \quad (1.11)$$

donde $I \subset \mathbb{N}$ y $(x_i)_{i \in I} \subset \mathcal{X}$.

Ahora podemos pasar a la definición que buscamos para la descripción del proceso.

Definición 1.43 (Medida puntual de Poisson) *Sea un espacio medible $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ y μ una medida σ -finita en este espacio. Una medida puntual de Poisson N en \mathcal{X} con intensidad μ es una medida puntual aleatoria definida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que satisface las siguientes propiedades*

- (i) *Para cada $w \in \Omega$, $N(w, \cdot)$ es una medida puntual sobre $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$.*
- (ii) $\forall A \in \mathcal{S}, \mathbb{E}(N(A)) = \mu(A)$.
- (iii) $\forall A \in \mathcal{S}$, *la variable aleatoria $N(\cdot, A)$ distribuye como Poisson de parámetro $\mu(A)$.*
- (iv) *Para cada familia finita $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{S}$ de conjuntos disjuntos con $\mu(A_i) < \infty, \forall i \leq n$, se tiene que las variables $\{N(\cdot, A_i)\}_{i=1}^n$ son independientes.*

Definición 1.44 (Proceso puntual de Poisson) *Definiremos por proceso puntual de Poisson con intensidad μ simplemente a una medida puntual de Poisson N en $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{X}$ con intensidad $dt\mu(dx)$.*

Observamos que de esta forma para cada $A \in \mathcal{S}$ con $\mu(A) < \infty$ el proceso que resulta al definir $N_t = N((0, t] \times A)$ es un proceso de Poisson de tasa $\mu(A)$. En este contexto definiremos la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ generada por N como

$$\mathcal{F}_t = (N_s(A) : \forall s \leq t, \forall A \in \mathcal{S}). \quad (1.12)$$

De esta forma obtenemos además que si $\tilde{A} \subset (s, t] \times \mathcal{S}$ y $\int_{\tilde{A}} dt\mu(dx) < \infty$, entonces $N(\tilde{A})$ es independiente de \mathcal{F}_s . Por otra parte, se puede probar que definir el proceso de esta forma nos permite considerar un subconjunto aleatorio numerable $p(N) \subseteq [0, \infty) \times \mathcal{X}$ que distingue los átomos del proceso N .

Ahora enunciaremos uno de los resultados fundamentales acerca de integrar con respecto a una medida aleatoria.

Teorema 1.45 (Teorema 3.5 en [4]) *Sea $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible y N una medida puntual de Poisson. Entonces la suma $\langle N, f \rangle$ es absolutamente convergente casi seguramente si y sólo si*

$$\int_{\mathcal{X}} \min\{1, |f(x)|\} \nu(dx) < \infty. \quad (1.13)$$

Dada una función $f : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, diremos que es un proceso predecible si resulta ser $\mathcal{P} \otimes \mathcal{S}$ medible, con \mathcal{P} dado por la definición 1.15. A continuación resumiremos en un teorema los resultados discutidos en la sección 2.3 de [6] sobre la integración de procesos predecibles con respecto a medidas de Poisson

Teorema 1.46 *Consideremos un proceso predecible $f(s, x)$, N un proceso puntual de Poisson en \mathcal{X} con intensidad μ , donde μ es σ -finita, y asumamos que para cada $t > 0$*

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t \int_{\mathcal{X}} |f(s, x)| \mu(dx) ds \right) < +\infty. \quad (1.14)$$

- (i) La variable aleatoria $\int_0^t \int_{\mathcal{X}} f(s, x) N(ds, dx)$ está bien definida casi seguramente y es igual a la suma absolutamente convergente $\sum_{(s,x) \in p(N), s \leq t} f(s, x)$, además es un proceso creciente si f es no negativa. Más aún tenemos que

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t \int_{\mathcal{X}} |f(s, x)| N(ds, dx) \right) = \mathbb{E} \left(\int_0^t \int_{\mathcal{X}} |f(s, x)| \mu(dx) ds \right). \quad (1.15)$$

- (ii) El proceso $M_t = \int_0^t \int_{\mathcal{X}} f(s, x) N(ds, dx) - \int_0^t \int_{\mathcal{X}} f(s, x) \mu(dx) ds$ es una $(\mathcal{F}_t)_t$ -martingala. Si además asumimos que para cada $t > 0$

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t \int_{\mathcal{X}} |f(s, x)|^2 \mu(dx) ds \right) < +\infty, \quad (1.16)$$

entonces M_t resulta ser una martingala cuadrado integrable con variación cuadrática dada por

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t \int_{\mathcal{X}} f(s, x)^2 \mu(dx) ds. \quad (1.17)$$

1.4. Sistemas de partículas

Concluiremos el primer capítulo con una breve introducción a un área de las probabilidades que tiene una estrecha relación con el trabajo desarrollado. Los conceptos que serán introducidos tienen como referencia a [8].

Los sistemas de partículas interactuantes son una rama que se ha desarrollado rápidamente desde que surgieron las primeras motivaciones a partir de la mecánica estadística, donde se buscaba una mejor comprensión de ciertos fenómenos observados en la evolución temporal de sistemas físicos. Desde el punto de vista matemático, los sistemas de partículas resultan ser una noción fundamental para entender tanto formal como intuitivamente el tipo de proceso estudiado en este trabajo. El objetivo en esta última sección será entregar una noción básica sobre su dinámica y construcción, además de entenderlos como una herramienta para modelar.

Los tipos de objetos estudiados en esta área son básicamente procesos de Markov a saltos que describen el comportamiento de un sistema cuyas componentes interactúan de manera aleatoria bajo ciertas reglas. Típicamente tendremos un conjunto numerable o un grafo S , que representará sitios o posiciones, junto con un espacio métrico \mathcal{E} , usualmente compacto, que cumplirá el rol de espacio de fase para cada sitio. Dado esto, el proceso que estudiaremos tendrá entonces por espacio de estados a \mathcal{E}^S , el espacio que representa las posibles configuraciones del sistema dotado de la topología producto. De esta forma motivamos la siguiente definición general de un sistema de partículas

Definición 1.47 (Sistema de partículas) *Dado un conjunto (o grafo) numerable S y un espacio métrico \mathcal{E} , llamaremos sistema de partículas interactuante sobre \mathcal{E} a un proceso estocástico $\eta = (\eta_t)_{t \geq 0}$ a valores en el espacio \mathcal{E}^S .*

La dinámica del proceso es descrita de forma local, esto se hace a partir de una colección de medidas de transición $c_T(\eta, d\zeta)$, donde para cada $\eta \in \mathcal{E}^S$ y cada subconjunto finito $T \subseteq S$, $c_T(\eta, d\zeta)$ representa una medida finita en \mathcal{E}^T . Esto lo interpretaremos de la siguiente manera, si η es la configuración actual del sistema entonces $c_T(\eta, \mathcal{E}^T)$ representa la tasa a la que ocurren transiciones que involucran a las coordenadas en T . De la misma forma, si consideramos la cantidad $c_T(\eta, d\zeta)/c_T(\eta, \mathcal{E}^T)$, esta representa la distribución de la restricción a T de la nueva configuración una vez que la transición ha ocurrido. A partir de esto es como podemos describir completamente el proceso que nos interesa estudiar, para finalmente poder construir un proceso estocástico que refleje esta dinámica utilizando la teoría que hemos presentado sobre procesos de Markov.

Por lo general la forma de construir un sistema de partículas interactuante de manera formal se basa en la construcción infinitesimal de un proceso de Markov, es decir, dadas las tasas infinitesimales a las que ocurren las transiciones e interacciones escribiremos un operador cuya clausura será finalmente el generador del proceso que representa al sistema que queremos describir. El teorema de Hille-Yosida 1.38 y el teorema 1.39 nos permite obtener un semigrupo a partir de este operador luego de verificar ciertas condiciones, que por lo general recaen en las tasas, obteniendo así el proceso buscado.

Para la construcción del generador que buscamos en el caso en que \mathcal{E} es compacto, básicamente se propone una combinación lineal positiva de generadores de procesos más elementales. Para esto consideraremos el proceso de saltos que espera con tiempo exponencial de parámetro uno entre saltos y con probabilidad de transición $p(\eta, d\zeta)$, que bien sabemos tiene por generador sobre $B(\mathcal{E})$ al operador $Of(\eta) = \int [f(\zeta) - f(\eta)]p(\eta, d\zeta)$. Con esto en mente es que resulta natural definir el siguiente operador como candidato a generador para el proceso que representa al sistema de partículas

$$Lf(\eta) = \sum_T \int_{\mathcal{E}^T} [f(\eta^\zeta) - f(\eta)] c_T(\eta, d\zeta), \quad (1.18)$$

esto pues pensaremos el proceso como una superposición de los procesos que siguen cada componente, o bien cada partícula.

Para que el operador que acabamos de definir resulte ser efectivamente un generador de un semigrupo de Markov es que se requieren hipótesis adicionales sobre las medidas de transición $c_T(\eta, d\zeta)$. Una condición simple que asegura que esto es pedir que $\sum_T c_T < \infty$, donde $c_T = \sup\{c_T(\eta, \mathcal{E}^T) | \eta \in \mathcal{E}^S\}$, de esta forma el operador puede ser extendido a un operador acotado que genera un semigrupo que resulta ser Markoviano.

La condición anterior si bien es muy útil resulta ser muy restrictiva, por lo que puede ser relajada un poco y requerir que se cumplan las siguientes dos condiciones

$$\sup_{x \in S} \sum_{T \ni x} c_T < \infty \quad \text{y} \quad \sup_{x \in S} \sum_{T \ni x} \sum_{u \neq x} c_T(u) < \infty, \quad (1.19)$$

donde $c_T(u) = \sup\{\|c_T(\eta_1, d\zeta) - c_T(\eta_2, d\zeta)\|_{TV} | \eta_1(y) = \eta_2(y), \forall y \neq u\}$. Cumpliéndose esto se puede probar que la clausura del operador antes definido genera un semigrupo de Markov.

Para finalizar esta sección introduciremos un objeto asociado a las configuraciones de un

sistema de partículas y que nos permite estudiar la dinámica en \mathcal{E} observando la fracción de partículas en algún subconjunto del espacio.

Definición 1.48 (Medida empírica) *Considerando un sistema de partículas $(\eta_t)_{t \geq 0}$ sobre \mathcal{E}^S , definimos el proceso de medida empírica como*

$$\nu_t = \frac{1}{|S|} \sum_{u \in S} \delta_{\eta_t(u)}. \quad (1.20)$$

Dada esta definición debemos destacar que muchas veces podemos realizar la construcción del proceso que representa al sistema de partículas a partir de la medida empírica de una forma análoga a como se presentó anteriormente para $(\eta_t)_{t \geq 0}$. Como ejemplo de esto último consideraremos uno de los sistemas de partículas interactuante más simple que podemos describir, en donde las partículas no interactúan entre si pero evolucionan de acuerdo a cierta regla. Para este caso describiremos un sistema de N partículas donde cada una sigue un paseo aleatorio gaussiano. Formalmente lo definiremos como el proceso ν_t a valores en $\mathcal{M}_p(\mathcal{X})$, donde el generador será el siguiente operador sobre $B(\mathcal{X})$

$$Uf(\nu) = \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{X}} [f(\nu - \delta_x + \delta_{x+y}) - f(\nu)] g(y) dy \nu(dx), \quad (1.21)$$

donde $g(y)$ es la densidad de una normal.

Capítulo 2

Modelo

Como se mencionó anteriormente en 1.4 existe un interés en utilizar ideas de la física estadística con el fin de modelar ciertos problemas de diversas áreas ya sea en economía, finanzas o ecología. Es bajo este contexto en el que se propone el estudio de un proceso particular cuya motivación surge a partir de dos publicaciones dentro de este ámbito, una hecha por N. Fournier y S. Méléard [5] y otra por D. Remenik [12].

El objetivo en este capítulo es introducir el objeto principal a estudiar en este trabajo de memoria. Se comienza por una descripción más detallada de la motivación en 2.1 para luego pasar de una forma natural a describir el proceso a estudiar. Luego se introduce una representación trayectorial a partir de medidas puntuales de Poisson en 2.2, y es a partir de esta representación que se deduce una propiedad de martingala que resulta crucial en el estudio. Finalmente en 2.3 se entrega un algoritmo para poder simular el tipo de proceso presentado, herramienta que resulta importante para poder entender de forma intuitiva la dinámica del proceso.

2.1. Descripción del modelo

En el primer artículo mencionado [5] se considera un modelo ecológico espacial que consiste en individuos sin movimiento (plantas) que están caracterizados por su posición. Estos individuos producen hijos (o semillas) a cierta tasa y cuando estos son engendrados se dispersan de acuerdo a cierta ley. Además los individuos están sujetos a una mortalidad que depende directamente de la densidad local de población. Por otra parte, el modelo descrito en [12] presenta un sistema con una cantidad constante de individuos, cada uno con un tipo dado, donde estos interactúan entre sí y además tienen la capacidad de mutar. Más precisamente, cada individuo decide cambiar su tipo a cierta tasa y escoger uno nuevo de acuerdo a una medida de probabilidad, por otra parte cada individuo contacta a otro a cierta tasa para luego ambos cambiar su tipo de acuerdo a una ley dada.

Una primera generalización a partir de estos dos procesos es considerar una dinámica de poblaciones compuesta por múltiples tipos y donde existen interacciones, mutaciones,

nacimientos y muertes. Junto con esto, las tasas asociadas a cada tipo de evento las podemos considerar como dependientes tanto del tipo de individuo que estamos observando como de la distribución completa del sistema.

Dentro de este contexto consideraremos una población o sistema donde a cada individuo le corresponde un cierto tipo que va cambiando a lo largo del tiempo. Específicamente, a tiempo 0 la población está caracterizada por una medida puntual $\nu \in \mathcal{M}_p$ y cada individuo tendrá asociados cuatro relojes exponencialmente distribuidos que los hará evolucionar de acuerdo a ciertos mecanismos. El primero de ellos es la mutación de un tipo a otro a cierta tasa. El segundo corresponde a la producción de un nuevo individuo a cierta tasa, donde el tipo del nuevo individuo es escogido de acuerdo a cierta ley. El tercero corresponde a la interacción entre pares de individuos a a cierta tasa, una vez hecho el encuentro ambos cambian su tipo escogiendo de acuerdo a una ley dada. Por último, cada individuo tiene asociada una tasa a la que deja de formar parte del sistema.

Formalmente, para el proceso descrito en el párrafo anterior, el espacio de estados asociado al tipo de cada individuo será un espacio polaco σ -localmente compacto \mathcal{W} . En este caso el proceso de Markov que nos interesa estudiar, denotado por $(\nu_t^N)_{t \geq 0}$, toma valores en $\mathcal{M}_p^N(\mathcal{W}, \mathcal{B}_{\mathcal{W}})$ y busca describir la distribución de los individuos sobre el espacio de tipos cuando en el instante inicial el sistema esta compuesto por N individuos. Dicho esto, definimos el proceso por

$$\nu_t^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_t} \delta_{(\eta_t^N)^i}, \quad (2.1)$$

donde $N_t = \langle \nu_t^N, 1 \rangle \in \mathbb{N}$ es la cantidad de individuos vivos a tiempo t , y $(\eta_t^N)^1, \dots, (\eta_t^N)^{N_t}$ describe el tipo de cada individuo, es decir, el vector η_t^N nos entrega la configuración de los tipos de individuos a tiempo t . Por otra parte, la dinámica del proceso está gobernada por las siguientes tasas

- (i) Cada agente cambia su tipo a tasa $\gamma(w, \nu_t^N)$ y lo escoge con medida de probabilidad $a(w, \nu_t^N, dw')$ en \mathcal{W} .
- (ii) Cada agente contacta a cada otro agente a una cierta tasa que depende de sus tipos y la distribución actual del sistema. La tasa total a la que un agente de tipo w_1 contacta a los de tipo w_2 está dada por $N\lambda(w_1, w_2, \nu_t^N)\nu_t^N(\{w_2\})$. Una vez reunidos el par de agentes, estos escogen un nuevo tipo dado por la medida de probabilidad $b(w_1, w_2, \nu_t^N, dw'_1 \otimes dw'_2)$ en $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$.
- (iii) Cada agente atrae a un nuevo agente al sistema a tasa $\beta(w, \nu_t^N)$. El nuevo agente en el sistema escoge su tipo de acuerdo a la medida de probabilidad $c(w, \nu_t^N, dw')$ en \mathcal{W} .
- (iv) Cada agente deja el sistema a tasa $d(w, \nu_t^N)$.

De esta manera queda determinada la dinámica que sigue nuestro modelo. Aparte de esto asumiremos las siguientes suposiciones sobre las tasas a lo largo del trabajo.

Hipótesis A.

(A1) Las funciones que representan a las tasas $\gamma(w, \nu), \beta(w, \nu), d(w, \nu), \lambda(w, w', \nu)$ están definidas $\forall \nu \in \mathcal{M}_f(\mathcal{W})$. Estas funciones son no negativas, medibles en w y w' , acotadas por $\bar{\gamma}, \bar{\beta}, \bar{d}$ y $\bar{\lambda}$ respectivamente, además de continuas en ν con respecto a la topología de la convergencia débil.

(A2) $a(w, \nu, \cdot), b(w, w', \nu, \cdot)$ y $c(w, \nu, \cdot)$ son medibles en w y w' .

(A3) Para cada φ medible y acotada las funciones

$$\nu \mapsto \int_{\mathcal{W}} \varphi(w) \gamma(w, \nu) a(w, \nu, \cdot) \nu(dw),$$

$$\nu \mapsto \int_{\mathcal{W}} \varphi(w) \beta(w, \nu) c(w, \nu, \cdot) \nu(dw) \text{ y}$$

$$\nu \mapsto \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \varphi(w_1, w_2) \lambda(w_1, w_2, \nu) b(w_1, w_2, \nu, \cdot) \nu(dw_1) \nu(dw_2),$$

las cuales asignan para cada $\nu \in \mathcal{M}_f(\mathcal{W})$ medidas finitas en \mathcal{W} y $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$ respectivamente, son continuas con respecto a la topología de la convergencia débil y Lipschitz con respecto a la norma de variación total. Por otra parte la función

$$\nu \mapsto \int_{\mathcal{W}} \varphi(w) d(w, \nu) \nu(dw)$$

es Lipschitz con respecto a la norma de variación total.

(A4) Para cada $\nu \in \mathcal{M}_f(\mathcal{W})$, $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ y $\bar{A} \in \mathcal{B}_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}}$ se tienen las siguientes estimaciones

$$\int_{\mathcal{W}} \beta(w, \nu) c(w, \nu, A) \nu(dw) \leq \mu_c(A) \nu(\mathcal{W}),$$

$$\int_{\mathcal{W}} \gamma(w, \nu) a(w, \nu, A) \nu(dw) \leq \mu_a(A) \nu(\mathcal{W}) \text{ y}$$

$$\int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \lambda(w_1, w_2, \nu) b(w_1, w_2, \nu, \bar{A}) \nu(dw_1) \nu(dw_2) \leq \mu_b(\bar{A}) \nu(\mathcal{W})^2$$

para ciertas medidas $\mu_a, \mu_c \in \mathcal{M}_f(\mathcal{W})$ y $\mu_b \in \mathcal{M}_f(\mathcal{W} \times \mathcal{W})$.

Estas hipótesis básicamente nos entregan propiedades de continuidad, cotas para la elección de tipo cada vez que existe un salto y además aseguran que las tasas permanecen acotadas. Esto último nos permitirá afirmar que la tasa total de eventos también se mantiene acotada, lo cual se traducirá en buenas propiedades para el proceso.

A causa de esta elección de hipótesis veremos más adelante que no resulta directo encontrar tasas explícitas no triviales que las satisfagan. En particular, notaremos lo restrictivo que resulta exigir que las tasas estén acotadas y que además presenten una continuidad tipo Lipschitz con respecto a la distribución como exige (A3).

2.2. Construcción trayectorial

Dada la descripción del proceso hecha en la sección anterior y siguiendo las ideas de la sección 1.4, más específicamente basándonos en (1.18), es que proponemos que el proceso que buscamos describir tiene por generador infinitesimal al siguiente operador

$$\begin{aligned}
\Omega_N f(\nu) &= N \int_{\mathcal{W}} \gamma(w, \nu) \int_{\mathcal{W}} \Delta_N f(\nu; w; w') a(w, \nu, dw') \nu(dw) \\
&+ N \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \lambda(w_1, w_2, \nu) \int_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}} \Delta_N f(\nu; w_1, w_2; w'_1, w'_2) \\
&\times b(w_1, w_2, \nu, dw'_1 \otimes dw'_2) \nu(dw_1) \nu(dw_2) \\
&+ N \int_{\mathcal{W}} \beta(w, \nu) \int_{\mathcal{W}} \left[f\left(\nu + \frac{\delta_w}{N}\right) - f(\nu) \right] c(w, \nu, dw') \nu(dw) \\
&+ N \int_{\mathcal{W}} \left[f\left(\nu - \frac{\delta_w}{N}\right) - f(\nu) \right] d(w, \nu) \nu(dw), \tag{2.2}
\end{aligned}$$

definido para cualquier función f en $B(\mathcal{M}_p^N(\mathcal{W}))$, donde

$$\begin{aligned}
\Delta_N f(\nu; w; w') &= f(\nu + N^{-1}(\delta_{w'} - \delta_w)) - f(\nu) \text{ y} \\
\Delta_N f(\nu; w_1, w_2; w'_1, w'_2) &= f(\nu + N^{-1}(\delta_{w'_1} + \delta_{w'_2} - \delta_{w_1} - \delta_{w_2})) - f(\nu).
\end{aligned}$$

En esta sección tendremos por objetivo el justificar la existencia de un proceso de Markov que admita a Ω_N como generador infinitesimal y además entregar una representación explícita de su trayectoria. Esta construcción además nos proporcionará un simple algoritmo para simulaciones numéricas y en general nos servirá como una herramienta para obtener un límite cuando consideremos poblaciones suficientemente grandes.

A continuación introduciremos los siguientes objetos para realizar la construcción.

Definición 2.1 *Definimos la función $\eta : \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_p^N \rightarrow \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \mathcal{W}^N$ por*

$$\eta \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \delta_{w_i} \right) = (w_{\sigma(1)}, \dots, w_{\sigma(n)}), \tag{2.3}$$

donde σ es una permutación tal que $w_{\sigma(1)} \preceq \dots \preceq w_{\sigma(n)}$ para algún orden arbitrario en \mathcal{W} .

La función η definida de esta forma nos permite manejar de mejor forma a los individuos de la población, es decir, si queremos escoger un individuo de cierto tipo de manera uniforme sobre todos los tipos de una población $\nu \in \mathcal{M}_p^N(\mathcal{W})$, basta escoger un índice i de manera uniforme en $\{1, \dots, N\langle \nu, 1 \rangle\}$ y luego escoger al individuo número i considerando el orden arbitrario que le otorgamos a \mathcal{W} . De esta forma el tipo del individuo que escogimos mediante este procedimiento estará dado por $(\eta(\nu))^i$.

Definición 2.2 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. En este espacio consideraremos los siguientes objetos, una variable aleatoria ν_0^N a valores en \mathcal{M}_p^N (la distribución inicial) y*

las siguientes medidas puntuales de Poisson independientes entre sí y con la variable antes mencionada

- (i) $R(ds, di, du, d\theta)$ en $[0, T] \times \mathbb{N}^* \times [0, 1] \times [0, 1]$ con medida de intensidad $\bar{\gamma} ds di du d\theta$.
- (ii) $Q(ds, di, dj, du, d\theta)$ en $[0, T] \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times [0, 1] \times [0, 1]$ con medida de intensidad dada por $\bar{\lambda} ds di dj du d\theta$.
- (iii) $S(ds, di, du, d\theta)$ en $[0, T] \times \mathbb{N}^* \times [0, 1] \times [0, 1]$ con medida de intensidad $\bar{\beta} ds di du d\theta$.
- (iv) $M(ds, di, d\theta)$ en $[0, T] \times \mathbb{N}^* \times [0, 1]$ con medida de intensidad $\bar{d} ds di d\theta$.

Además consideraremos $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtración generada por estas variables tal como en (1.12).

Hecha esta definición consideraremos ahora las representaciones de Blackwell-Dubins A.3 κ y ρ de $\mathcal{P}(\mathcal{W} \times \mathcal{W})$ y $\mathcal{P}(\mathcal{W})$ respectivamente. Estas representaciones nos permiten la construcción de una variable que distribuya de la forma que necesitamos. Por ejemplo, dado el espacio de probabilidad estándar $([0, 1], \lambda)$, con λ la medida de Lebesgue, la representación de $\mathcal{P}(\mathcal{W})$ es la función $\rho : \mathcal{P}(\mathcal{W}) \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{W}$, que cumple con que $\rho(\mu, \cdot)$ tiene distribución μ con respecto a λ en $[0, 1]$ y además $\rho(\cdot, u)$ es continua para cada $u \in [0, 1]$.

Dado esto último podemos pasar a la definición trayectorial del proceso

Definición 2.3 *Supóngase que se cumple la hipótesis A. Definimos el siguiente proceso estocástico $(\mathcal{F}_t^N)_{t \geq 0}$ -adaptado $\nu^N = (\nu_t^N)_{t \geq 0}$ a valores en $D([0, T], \mathcal{M}(\mathcal{W}))$, $\forall t \geq 0$ por*

$$\begin{aligned}
\nu_t^N &= \nu_0^N + \frac{1}{N} \int_0^t \int_{\mathbb{N}^*} \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{1}_{\{i \leq N \langle \nu_{s-}^N, 1 \rangle\}} \left[\delta_{\rho(a(\eta^i(\nu_{s-}^N), \nu_{s-}^N, \cdot), u) - \delta_{\eta^i(\nu_{s-}^N)} \right] \\
&\quad \times \mathbf{1}_{\left\{ \theta \leq \frac{\gamma(\eta^i(\nu_{s-}^N), \nu_{s-}^N)}{\bar{\gamma}} \right\}} R(ds, di, du, d\theta) \\
&+ \frac{1}{N} \int_0^t \int_{\mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{N}^*} \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{1}_{\{i \leq N \langle \nu_{s-}^N, 1 \rangle\}} \mathbf{1}_{\{j \leq N \langle \nu_{s-}^N, 1 \rangle\}} \left[\delta_{\kappa^1(b(\eta^i(\nu_{s-}^N), \eta^j(\nu_{s-}^N), \nu_{s-}^N, \cdot), u) \right. \\
&\quad \left. + \delta_{\kappa^2(b(\eta^i(\nu_{s-}^N), \eta^j(\nu_{s-}^N), \nu_{s-}^N, \cdot), u) - \delta_{\eta^i(\nu_{s-}^N)} - \delta_{\eta^j(\nu_{s-}^N)} \right] \\
&\quad \times \mathbf{1}_{\left\{ \theta \leq \frac{\lambda(\eta^i(\nu_{s-}^N), \eta^j(\nu_{s-}^N), \nu_{s-}^N)}{\bar{\lambda}} \right\}} Q(ds, di, dj, du, d\theta) \\
&+ \frac{1}{N} \int_0^t \int_{\mathbb{N}^*} \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{1}_{\{i \leq N \langle \nu_{s-}^N, 1 \rangle\}} \delta_{\rho(c(\eta^i(\nu_{s-}^N), \nu_{s-}^N, \cdot), u)} \\
&\quad \times \mathbf{1}_{\left\{ \theta \leq \frac{\beta(\eta^i(\nu_{s-}^N), \nu_{s-}^N)}{\bar{\beta}} \right\}} S(ds, di, du, d\theta) \\
&- \frac{1}{N} \int_0^t \int_{\mathbb{N}^*} \int_0^1 \mathbf{1}_{\{i \leq N \langle \nu_{s-}^N, 1 \rangle\}} \delta_{\eta^i(\nu_{s-}^N)} \mathbf{1}_{\left\{ \theta \leq \frac{d(\eta^i(\nu_{s-}^N), \nu_{s-}^N)}{\bar{d}} \right\}} M(ds, di, d\theta). \tag{2.4}
\end{aligned}$$

Observamos que de esta manera, dada la ley inicial ν_0^N y los procesos puntuales de Poisson,

podemos decir que el proceso así definido es único, esto debido a la forma inductiva en como es construido. De esta forma es como podemos concluir que es único en ley y además esta no depende del orden.

A continuación formalizaremos la relación entre el proceso definido de esta manera y el generador (2.2) que habíamos propuesto.

Proposición 2.4 *Supóngase que se cumple la hipótesis A y consideremos $(\nu_t^N)_{t \geq 0}$ definido como antes. Entonces $(\nu_t^N)_{t \geq 0}$ es un proceso de Markov. Su generador infinitesimal está definido para toda $f \in B(\mathcal{M}_p^N(\mathcal{W}))$ y $\nu \in \mathcal{M}_p^N(\mathcal{W})$ por (2.2).*

DEMOSTRACIÓN. Para ver que el proceso definido en 2.3 es el generado por el operador Ω_N , realizamos el siguiente cálculo. Recordando que $\Omega f(\nu_0^N) = \partial_t \mathbb{E}(f(\nu_t^N))|_{t=0}$ y usando el hecho de que casi seguramente $f(\nu_t^N) = f(\nu_0^N) + \sum_{s \leq t} [f(\nu_{s-}^N + \{\nu_s^N - \nu_{s-}^N\}) - f(\nu_{s-}^N)]$, tenemos que

$$\begin{aligned}
f(\nu_t^N) &= f(\nu_0^N) + \int_0^t \int_{\mathbb{N}^*} \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{1}_{\{i \leq N \langle \nu_{s-}^N, 1 \rangle\}} \left[f\left(\nu_{s-}^N + \frac{1}{N} \delta_\rho(a(\eta^i(\nu_{s-}^N), \nu_{s-}^N, \cdot), u) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{N} \delta_{\eta^i(\nu_{s-}^N)}\right) - f(\nu_{s-}^N) \right] \mathbf{1}_{\left\{ \theta \leq \frac{\gamma(\eta^i(\nu_{s-}^N), \nu_{s-}^N)}{\bar{\gamma}} \right\}} R(ds, di, du, d\theta) \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{N}^*} \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{1}_{\{i \leq N \langle \nu_{s-}^N, 1 \rangle\}} \mathbf{1}_{\{j \leq N \langle \nu_{s-}^N, 1 \rangle\}} \left[f\left(\nu_{s-}^N - \frac{1}{N} \delta_{\eta^i(\nu_{s-}^N)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{N} \delta_{\eta^j(\nu_{s-}^N)} + \frac{1}{N} \delta_{\kappa^1(b(\eta^i(\nu_{s-}^N), \eta^j(\nu_{s-}^N), \nu_{s-}^N, \cdot), u)} + \frac{1}{N} \delta_{\kappa^2(b(\eta^i(\nu_{s-}^N), \eta^j(\nu_{s-}^N), \nu_{s-}^N, \cdot), u)} \right) \right. \\
&\quad \left. - f(\nu_{s-}^N) \right] \mathbf{1}_{\left\{ \theta \leq \frac{\lambda(\eta^i(\nu_{s-}^N), \eta^j(\nu_{s-}^N), \nu_{s-}^N)}{\bar{\lambda}} \right\}} Q(ds, di, dj, du, d\theta) \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{N}^*} \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{1}_{\{i \leq N \langle \nu_{s-}^N, 1 \rangle\}} \left[f\left(\nu_{s-}^N + \frac{1}{N} \delta_\rho(c(\eta^i(\nu_{s-}^N), \nu_{s-}^N, \cdot), u) \right) - f(\nu_{s-}^N) \right] \\
&\quad \times \mathbf{1}_{\left\{ \theta \leq \frac{\beta(\eta^i(\nu_{s-}^N), \nu_{s-}^N)}{\bar{\beta}} \right\}} S(ds, di, du, d\theta) \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{N}^*} \int_0^1 \mathbf{1}_{\{i \leq N \langle \nu_{s-}^N, 1 \rangle\}} \left[f\left(\nu_{s-}^N - \frac{1}{N} \delta_{\eta^i(\nu_{s-}^N)}\right) - f(\nu_{s-}^N) \right] \\
&\quad \times \mathbf{1}_{\left\{ \theta \leq \frac{d(\eta^i(\nu_{s-}^N), \nu_{s-}^N)}{\bar{d}} \right\}} M(ds, di, d\theta). \tag{2.5}
\end{aligned}$$

Tomando esperanza y utilizando el teorema 1.46, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(\nu_t^N)) &= \mathbb{E}(f(\nu_0^N)) + \int_0^t \mathbb{E} \left(N\bar{\gamma} \int_{\mathcal{W}} \frac{\gamma(w, \nu_{s-}^N)}{\bar{\gamma}} \right. \\
&\quad \times \int_0^1 \left[f \left(\nu_{s-}^N + \frac{1}{N} \delta_{\rho(a(w, \nu_{s-}^N, \cdot), u)} - \frac{1}{N} \delta_w \right) - f(\nu_{s-}^N) \right] d\nu_{s-}^N(dw) \Big) ds \\
&+ \int_0^t \mathbb{E} \left(N\bar{\lambda} \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \frac{\lambda(w_1, w_2, \nu_{s-}^N)}{\bar{\lambda}} \right. \\
&\quad \times \int_0^1 \left[f \left(\nu_{s-}^N + \frac{1}{N} \delta_{\kappa^1(b(w_1, w_2, \nu_{s-}^N, \cdot), u)} + \frac{1}{N} \delta_{\kappa^2(b(w_1, w_2, \nu_{s-}^N, \cdot), u)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{N} \delta_{w_1} - \frac{1}{N} \delta_{w_2} \right) - f(\nu_{s-}^N) \right] d\nu_{s-}^N(dw_1) \nu_{s-}^N(dw_2) \Big) ds \\
&+ \int_0^t \mathbb{E} \left(N\bar{\beta} \int_{\mathcal{W}} \frac{\beta(w, \nu_{s-}^N)}{\bar{\beta}} \right. \\
&\quad \times \int_0^1 \left[f \left(\nu_{s-}^N + \frac{1}{N} \delta_{\rho(c(w, \nu_{s-}^N, \cdot), u)} \right) - f(\nu_{s-}^N) \right] d\nu_{s-}^N(dw) \Big) ds \\
&+ \int_0^t \mathbb{E} \left(N\bar{d} \int_{\mathcal{W}} \frac{d(w, \nu_{s-}^N)}{\bar{d}} \left[f \left(\nu_{s-}^N - \frac{1}{N} \delta_w \right) - f(\nu_{s-}^N) \right] \nu_{s-}^N(dw) \right) ds.
\end{aligned}$$

Usando ahora que $\rho(a(\eta^i(\nu_{s-}^N), \nu_{s-}^N, \cdot), u)$ distribuye como $a(\eta^i(\nu_{s-}^N), \nu_{s-}^N, \cdot)$ y $\kappa(b(\eta^i(\nu_{s-}^N), \eta^j(\nu_{s-}^N), \nu_{s-}^N, \cdot), u)$ como $b(\eta^i(\nu_{s-}^N), \eta^j(\nu_{s-}^N), \nu_{s-}^N, \cdot)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(\nu_t^N)) &= \mathbb{E}(f(\nu_0^N)) + \int_0^t \mathbb{E} \left(N \int_{\mathcal{W}} \gamma(w, \nu_{s-}^N) \int_{\mathcal{W}} \left[f \left(\nu_{s-}^N + \frac{1}{N} \delta_{w'} - \frac{1}{N} \delta_w \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - f(\nu_{s-}^N) \right] a(w, \nu_{s-}^N, dw') \nu_{s-}^N(dw) \right) ds \\
&+ \int_0^t \mathbb{E} \left(N \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \lambda(w_1, w_2, \nu_{s-}^N) \int_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}} \left[f \left(\nu_{s-}^N + \frac{1}{N} \delta_{w'_1} + \frac{1}{N} \delta_{w'_2} - \frac{1}{N} \delta_{w_1} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{N} \delta_{w_2} \right) - f(\nu_{s-}^N) \right] b(w_1, w_2, \nu_{s-}^N, dw'_1 \otimes dw'_2) \nu_{s-}^N(dw_1) \nu_{s-}^N(dw_2) \Big) ds \\
&+ \int_0^t \mathbb{E} \left(N \int_{\mathcal{W}} \beta(w, \nu_{s-}^N) \int_{\mathcal{W}} \left[f \left(\nu_{s-}^N + \frac{1}{N} \delta_{w'} \right) - f(\nu_{s-}^N) \right] \right. \\
&\quad \left. \times c(w, \nu_{s-}^N, dw') \nu_{s-}^N(dw) \right) ds \\
&+ \int_0^t \mathbb{E} \left(N \int_{\mathcal{W}} d(w, \nu_{s-}^N) \left[f \left(\nu_{s-}^N - \frac{1}{N} \delta_w \right) - f(\nu_{s-}^N) \right] \nu_{s-}^N(dw) \right) ds. \tag{2.6}
\end{aligned}$$

Finalmente derivando con respecto a t y evaluando en 0 obtenemos la expresi3n para el generador que coincide con (2.2) \square

Por último mostraremos que el proceso está bien definido y además estableceremos una propiedad de conservación de momentos.

Teorema 2.5 *Asumiendo la hipótesis A y que $\mathbb{E}(\langle \nu_0^N, 1 \rangle) < \infty$, obtenemos que el proceso $(\nu_t^N)_{t \geq 0}$ está bien definido en \mathbb{R}_+ para N fijo. Si además para algún $p \in \mathbb{N}^*$ ocurre que $\sup_N \mathbb{E}(\langle \nu_0^N, 1 \rangle^p) < \infty$, entonces para cualquier $T < \infty$ se tiene*

$$\sup_{N \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t^N, 1 \rangle^p \right) < \infty. \quad (2.7)$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos para cada n el tiempo de parada $\tau_n = \inf\{t \geq 0 : \langle \nu_t^N, 1 \rangle \geq n\}$. Luego si tomamos en cuenta solo el término de ν_t^N relacionado a los nacimientos en el sistema podemos acotar descartando las demás interacciones, debido a que estas no aportan al crecimiento de la cantidad total de individuos. Explícitamente

$$\begin{aligned} \sup_{s \in [0, t \wedge \tau_n]} \langle \nu_s^N, 1 \rangle^p &\leq \langle \nu_0^N, 1 \rangle^p + \int_0^{t \wedge \tau_n} \int_{\mathbb{N}^*} \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{1}_{\{i \leq N \langle \nu_{s-}, 1 \rangle\}} \left[\left(\langle \nu_{s-}, 1 \rangle + \frac{1}{N} \right)^p - \langle \nu_{s-}, 1 \rangle^p \right] \\ &\quad \times \mathbf{1}_{\left\{ \theta \leq \frac{\beta(\eta^i(\nu_{s-}^N), \nu_{s-}^N)}{\bar{\beta}} \right\}} S(ds, di, du, d\theta), \end{aligned}$$

como $(1+x)^p - x^p \leq C_p(1+x^{p-1})$, tenemos que

$$\begin{aligned} \sup_{s \in [0, t \wedge \tau_n]} \langle \nu_s^N, 1 \rangle^p &\leq \langle \nu_0^N, 1 \rangle^p + C_p \int_0^{t \wedge \tau_n} \int_{\mathbb{N}^*} \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{1}_{\{i \leq N \langle \nu_{s-}, 1 \rangle\}} \left[\frac{1}{N^p} + \frac{1}{N} \langle \nu_{s-}, 1 \rangle^{p-1} \right] \\ &\quad \times S(ds, di, du, d\theta). \end{aligned}$$

Tomando esperanza

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sup_{s \in [0, t \wedge \tau_n]} \langle \nu_s^N, 1 \rangle^p \right) &\leq \mathbb{E}(\langle \nu_0^N, 1 \rangle^p) + C_p \bar{\beta} \mathbb{E} \left(\int_0^{t \wedge \tau_n} N \langle \nu_{s-}, 1 \rangle \left[\frac{1}{N^p} + \frac{1}{N} \langle \nu_{s-}, 1 \rangle^{p-1} \right] ds \right) \\ &\leq \mathbb{E}(\langle \nu_0^N, 1 \rangle^p) + C_p \bar{\beta} \int_0^t \mathbb{E}(\langle \nu_{s-\wedge \tau_n}^N, 1 \rangle + \langle \nu_{s-\wedge \tau_n}^N, 1 \rangle^p) ds, \quad (2.8) \end{aligned}$$

por Fubini. Además como $\mathbb{E}(\langle \nu_{s-\wedge \tau_n}^N, 1 \rangle + \langle \nu_{s-\wedge \tau_n}^N, 1 \rangle^p) \leq 2\mathbb{E}(1 + \langle \nu_{s-\wedge \tau_n}^N, 1 \rangle^p)$, obtenemos finalmente que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sup_{s \in [0, t \wedge \tau_n]} \langle \nu_s^N, 1 \rangle^p \right) &\leq \mathbb{E}(\langle \nu_0^N, 1 \rangle^p) + 2C_p \bar{\beta} \int_0^t \mathbb{E}(1 + \langle \nu_{s-\wedge \tau_n}^N, 1 \rangle^p) ds \\ &\leq \mathbb{E}(\langle \nu_0^N, 1 \rangle^p) + 2C_p \bar{\beta} T + 2C_p \bar{\beta} \int_0^t \mathbb{E} \left(\sup_{u \in [0, s \wedge \tau_n]} \langle \nu_u^N, 1 \rangle^p \right) ds. \end{aligned}$$

Notamos que si definimos $f(t) = \mathbb{E}(\sup_{s \in [t, \tau_n]} \langle \nu_s^N, 1 \rangle)$ obtenemos que esta función es acotada sobre intervalos acotados. De esta forma, utilizando el lema de Gronwall A.1 concluimos para

$T < \infty$ que

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T \wedge \tau_n]} \langle \nu_t^N, 1 \rangle^p \right) \leq (\mathbb{E} \langle \nu_0^N, 1 \rangle^p) + 2C_p \bar{\beta} T \exp(2C_p \bar{\beta} T) = C_{p,T} \quad (2.9)$$

Ahora notemos que $\tau_n \rightarrow \infty$ casi seguramente. Si no fuese así, como τ_n es no decreciente, podemos encontrar $\bar{T} < \infty$ tal que $\mathbb{P}(\sup_{n \in \mathbb{N}} \tau_n < \bar{T}) > 0$, lo cual implicaría que

$$\mathbb{P} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \tau_n < \bar{T} \right) \leq \mathbb{P} \left(\sup_{s \in [T \wedge \tau_n]} \langle \nu_s^N, 1 \rangle \geq n \right) \leq \frac{\mathbb{E}(\sup_{s \in [T \wedge \tau_n]} \langle \nu_s^N, 1 \rangle)}{n},$$

contradiciendo así (2.9). Finalmente podemos tomar $n \rightarrow \infty$ en (2.9) y gracias al lema de Fatou podemos concluir lo que queríamos probar.

Por último notamos que como consecuencia de esto obtenemos que el proceso queda bien definido, esto pues ν_t^N se va construyendo inductivamente y lo único que hay que probar es que los instantes de salto del proceso se van a infinito a medida que n se va a infinito. Esto último se sigue de (2.7) con $p = 1$. \square

De esta última demostración podemos desprender además el siguiente resultado.

Corolario 2.6 *Para $N \geq 1$, si $\mathbb{E}(\langle \nu_0^N, 1 \rangle^p) < \infty$ entonces*

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t^N, 1 \rangle^p \right) < \infty$$

2.3. Simulación

Como se mencionó antes, la definición 2.3 del proceso $(\nu_t^N)_{t \geq 0}$ nos entrega un algoritmo simple para simulaciones numéricas del proceso. En esta última sección se explicará brevemente cómo llevar a cabo este algoritmo.

La descripción trayectorial del proceso nos permite simular las siguientes variables

$$\mu_t = N \nu_t^N = \sum_{i=1}^{N_t} \delta_{\eta_t(i)}. \quad (2.10)$$

A continuación se detallan los pasos a seguir.

Paso 1. Simular la distribución inicial μ_0 y fijar $T_0 = 0$.

Paso 2. Calcular la tasa total de eventos, dada por

$$m(0) = m_1(0) + m_2(0) + m_3(0) + m_4(0),$$

donde en este caso

$$\begin{aligned} m_1(0) &= \bar{\gamma}\langle\mu_0, 1\rangle, & m_2(0) &= \bar{\lambda}\langle\mu_0, 1\rangle^2, \\ m_3(0) &= \bar{\beta}\langle\mu_0, 1\rangle, & m_4(0) &= \bar{d}\langle\mu_0, 1\rangle. \end{aligned}$$

Luego simulamos S_1 variable aleatoria exponencial de parámetro $m(0)$, y fijamos $T_1 = T_0 + S_1$. Fijamos $\mu_t = \mu_0$ para todo $t < T_1$. Finalmente escogemos con probabilidad $m_i(0)/m(0)$ ir al Paso 2.i.

Paso 2.1. Escoger i uniforme de $\{1, \dots, \langle\mu_0, 1\rangle\}$. Tomar $w \in \mathcal{W}$ con ley $a(\eta^i(\mu_0), \mu_0, dw)$. Luego con probabilidad

$$1 - \frac{\gamma(\eta^i(\mu_0), \mu_0)}{\bar{\gamma}},$$

hacemos nada (es decir, $\mu_{T_1} = \mu_0$), si no, realizamos la mutación

$$\mu_{T_1} = \mu_0 + \delta_w - \delta_{\eta^i(\mu_0)}.$$

Paso 2.2. Escoger i y j uniformes en $\{1, \dots, \langle\mu_0, 1\rangle\}^2$. Luego tomar (w, w') en $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$ con ley $b(\eta^i(\mu_0), \eta^j(\mu_0), \mu_0, dw \otimes dw')$. Por último con probabilidad

$$1 - \frac{\lambda(\eta^i(\mu_0), \eta^j(\mu_0), \mu_0)}{\bar{\lambda}}$$

hacemos nada (es decir, $\mu_{T_1} = \mu_0$), si no, realizamos la interacción

$$\mu_{T_1} = \mu_0 + \delta_w + \delta_{w'} - \delta_{\eta^i(\mu_0)} - \delta_{\eta^j(\mu_0)}.$$

Paso 2.3. Escoger i uniforme de $\{1, \dots, \langle\mu_0, 1\rangle\}$. Tomar $w \in \mathcal{W}$ con ley $c(\eta^i(\mu_0), \mu_0, dw)$. Luego con probabilidad

$$1 - \frac{\beta(\eta^i(\mu_0), \mu_0)}{\bar{\beta}},$$

hacemos nada (es decir, $\mu_{T_1} = \mu_0$), si no, realizamos el nacimiento

$$\mu_{T_1} = \mu_0 + \delta_w$$

Paso 2.4. Escoger i uniforme de $\{1, \dots, \langle\mu_0, 1\rangle\}$. Luego con probabilidad

$$1 - \frac{d(\eta^i(\mu_0), \nu_0)}{\bar{d}}$$

hacemos nada (es decir, $\mu_{T_1} = \mu_0$), si no, quitamos al tipo del sistema

$$\mu_{T_1} = \mu_0 - \delta_{\eta^i(\mu_0)}.$$

Paso 3. Calcular la tasa total de eventos dada por

$$m(T_1) = m_1(T_1) + m_2(T_1) + m_3(T_1) + m_4(T_1),$$

donde

$$\begin{aligned} m_1(T_1) &= \bar{\gamma}\langle\mu_{T_1}, 1\rangle, & m_2(T_1) &= \bar{\lambda}\langle\mu_{T_1}, 1\rangle^2, \\ m_3(T_1) &= \bar{\beta}\langle\mu_{T_1}, 1\rangle, & m_4(T_1) &= \bar{d}\langle\mu_{T_1}, 1\rangle. \end{aligned}$$

Simular S_2 exponencialmente distribuida con parámetro $m(T_1)$, y fijar $T_2 = T_1 + S_2$.
Fijamos $\mu_t = \mu_{T_1}$ para cada $t \in [T_1, T_2)$ y así sucesivamente.

Capítulo 3

Resultados

En este capítulo describiremos el resultado principal del trabajo realizado, el cual da cuenta del efecto que ocurre cuando normalizamos el proceso de medidas puntuales por una cantidad que crece a infinito. Esto a modo de obtener una ley de grandes números, mostrando así un límite determinista caracterizado por un sistema de ecuaciones escrito en su forma débil.

A continuación enunciamos el resultado junto con algunas observaciones y una consecuencia de este.

Teorema 3.1 *Suponga que se cumple la hipótesis A. Para cada $T > 0$, considere la secuencia de procesos $(\nu^N)_{N>0}$ sobre $[0, T]$ a valores en $\mathcal{M}_f(\mathcal{W})$, y asuma que la secuencia de distribuciones iniciales $(\nu_0^N)_{N>0}$ converge en distribución a cierta $\nu_0 \in \mathcal{M}_f(\mathcal{W})$ fija y cumple con $\sup_{N \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E}(\langle \nu_0^N, 1 \rangle^3) < \infty$. Entonces la secuencia de procesos $(\nu^N)_{N>0}$ converge en distribución en $D([0, T], \mathcal{M}_f(\mathcal{W}))$ a $\nu \in C([0, T], \mathcal{M}_f(\mathcal{W}))$ determinista, la única solución, que satisface $\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t, 1 \rangle < \infty$, del siguiente sistema de ecuaciones integro-diferencial. Para cada $\varphi \in B(\mathcal{W})$ y $t \in [0, T]$,*

$$\begin{aligned}
 \langle \nu_t, \varphi \rangle &= \langle \nu_0, \varphi \rangle + \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \gamma(w, \nu_s) \int_{\mathcal{W}} [\varphi(w') - \varphi(w)] a(w, \nu_s, dw') \nu_s(dw) ds \\
 &+ \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \lambda(w_1, w_2, \nu_s) \int_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}} [\varphi(w'_1) + \varphi(w'_2) - \varphi(w_1) - \varphi(w_2)] \\
 &\quad \times b(w_1, w_2, \nu_s, dw'_1 \otimes dw'_2) \nu_s(dw_2) \nu_s(dw_1) ds \\
 &+ \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \beta(w, \nu_s) \int_{\mathcal{W}} \varphi(w') c(w, \nu_s, dw') \nu_s(dw) ds \\
 &- \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \varphi(w) d(w, \nu_s) \nu_s(dw) ds.
 \end{aligned} \tag{S1}$$

Por ejemplo si tomamos $\nu_0^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X^i}$, donde las variables aleatorias X_i son independientes e idénticamente distribuidas con ley ν_0 en $\overline{\mathcal{W}}$, entonces tenemos que esta secuencia converge y las hipótesis requeridas por el teorema se cumplen fácilmente.

Por otra parte podemos observar que el sistema (S1) implica que para cualquier $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ y casi todo $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \frac{d\nu_t(A)}{dt} = & - \int_A \left(\gamma(w, \nu_t) + \int_{\mathcal{W}} (\lambda(w, w', \nu_t) + \lambda(w', w, \nu_t)) \nu_t(dw') \right) \nu_t(dw) \\ & + \int_{\mathcal{W}} \gamma(w, \nu_t) a(w, \nu_t, A) \nu_t(dw) + \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \lambda(w, w', \nu_t) \\ & \quad \times (b(w, w', \nu_t, A \times \mathcal{W}) + b(w, w', \nu_t, \mathcal{W} \times A)) \nu_t(dw') \nu_t(dw) \\ & + \int_{\mathcal{W}} \beta(w, \nu_t) c(w, \nu_t, A) \nu_t(dw) - \int_A d(w, \nu_t) \nu_t(dw). \end{aligned} \quad (\text{S1}')$$

Cabe mencionar que a partir de esta forma de escribir el sistema que resuelve $(\nu_t)_{t \geq 0}$ podemos encontrar una interpretación más intuitiva del resultado. El lado izquierdo lo podemos entender como la velocidad a la que evoluciona la cantidad de individuos cuyo tipo está en el conjunto A . Por otra parte el lado derecho lo podemos interpretar de acuerdo a los términos que lo componen, siendo el primero la tasa total a la que los individuos dejan el conjunto de tipos A a causa de las mutaciones e interacciones que ocurren, el segundo corresponde a la tasa a la que los individuos que mutan escogen un tipo en A , el tercero reúne la tasa a la que individuos adquieren un tipo en A luego de haber interactuado entre ellos, el cuarto término corresponde a la tasa a la que los individuos que nacen escogen un tipo incluido en A y por último, el término que indica la tasa a la que desaparecen los individuos cuyo tipo pertenece al conjunto A .

Otro punto a destacar es que el sistema (S1') caracteriza las soluciones de (S1). Esto se puede probar mediante la aproximación de las funciones φ por funciones simples.

Tenemos también que a partir del resultado anterior se desprende el siguiente corolario

Corolario 3.2 *En el contexto del teorema anterior, asuma que ν_0 es absolutamente continua con respecto a cierta medida μ sobre \mathcal{W} y que las medidas*

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{W}} \varphi(w) \gamma(w, \nu_0) a(w, \nu_0, \cdot) \nu_0(dw), \\ & \int_{\mathcal{W}} \varphi(w) \beta(w, \nu_0) c(w, \nu_0, \cdot) \nu_0(dw) \text{ y} \\ & \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \varphi(w_1, w_2) \lambda(w_1, w_2, \nu_0) b(w_1, w_2, \nu_0, \cdot) \nu_0(dw_1) \nu_0(dw_2) \end{aligned}$$

son absolutamente continuas con respecto a μ , $\mu \otimes \mu$ y $\mu \otimes \mu$ respectivamente. Entonces para el proceso límite, ν_t es absolutamente continua con respecto a μ para cada $t \in [0, T]$.

Capítulo 4

Ejemplos

En este capítulo aplicaremos los resultados obtenidos para el proceso límite dentro de distintos contextos. Primero se mostrará en 4.1 que el proceso estudiado puede ser visto como una extensión, bajo cierta simplificación en las muertes, del modelo ecológico espacial propuesto por N. Fournier y S. Méléard en [5]. Luego en 4.2 se introducirá un modelo epidemiológico y se presentará el resultado que se obtiene al considerar el límite para grandes poblaciones. Por último, en 4.3, se mostrará un resultado análogo para un modelo bacteriológico.

4.1. Modelo de ecosistema

A partir del modelo ecológico espacial planteado en [5] consideraremos una versión simplificada de este para así corresponder con el modelo planteado en este trabajo. A diferencia del modelo propuesto por N. Fournier y S. Méléard, daremos una interpretación un poco más amplia al considerar no solo individuos sin movimiento (plantas) si no que también consideraremos que los individuos pueden cambiar su tipo aleatoriamente lo cual en este contexto se entenderá como traslaciones en el espacio. Específicamente, con la extensión que se propondrá, buscaremos describir un ecosistema, es decir, un sistema formado por organismos (como animales) y un medio en el cual estos tendrán una evolución temporal interdependiente. Más aún, la dependencia espacial de los parámetros del modelo nos permitirá tomar en cuenta distintos efectos propios del medio donde coexisten los individuos, ya sean propiedades sobre el terreno o la distribución de los recursos.

En el sistema que consideraremos los individuos estarán caracterizados por sus posiciones en el espacio, por lo que en este caso el espacio de tipos será la clausura de un subconjunto abierto y conexo $\overline{\mathcal{W}} \subseteq \mathbb{R}^d$ con medida de Lebesgue finita. Además, para cada $x \in \overline{\mathcal{W}}$, introduciremos las siguientes cantidades

- (i) $\gamma(x)$ es la tasa de producción de individuos para un organismo ubicado en x . Asociada a esta tasa tenemos una ley de dispersión $D_n(x, dz)$.
- (ii) $\varsigma(x)$ es la tasa de traslación para los organismos ubicados en x . Asociada a esta tasa

tenemos una ley de dispersión $D_m(x, dz)$.

- (iii) $\mu(x)$ es la tasa de muerte de los individuos ubicados en x .
- (iv) $v(x, y)$ es la tasa de interacción entre organismos ubicados en x y en y . Asociada a esta tasa tenemos una ley de dispersión conjunta $D_i(x, y, dz, dw)$.

A partir de esto consideraremos el proceso $(\nu_t^N)_{t \geq 0}$ de medidas sobre el espacio de tipos $\overline{\mathcal{W}}$ definido como en (2.1). La dinámica que seguirá la población asociada al proceso consiste en que a tiempo 0 contamos con una distribución inicial de organismos en el espacio, donde cada uno de ellos tiene cuatro relojes exponenciales asociados: uno de producción de individuos de parámetro $\gamma(x)$, uno de traslación con parámetro $\varsigma(x)$, uno de interacción con los organismos ubicados en y de parámetro $Nv(x, y)\nu_t^N(\{y\})$ y uno de muerte intrínseca de parámetro $\mu(x)$. Si el reloj exponencial de producción de individuos suena entonces se añade un organismo al sistema y su posición queda determinada por $y = x + z$ donde z se escoge de acuerdo a la ley $D_n(x, dz)$. De manera análoga si el reloj de traslación suena el organismo se traslada una cantidad z desde su posición original de acuerdo a $D_m(x, dz)$. Con el reloj de interacción sucede algo similar, una vez que este suena los individuos en y y en x cambian su posición a $u = x + z$ y $v = y + w$, con z y w escogidos de acuerdo a $D_i(x, y, dz, dw)$. Finalmente si el reloj de mortalidad suena el individuo muere.

Es sobre este proceso que buscaremos aplicar el resultado obtenido en el teorema 3.1, aunque no sin antes asumir algunas hipótesis que detallaremos a continuación sobre los parámetros que determinan al modelo.

Hipótesis B.

- (B1) Las tasas γ , μ , ς y v son funciones continuas sobre $\overline{\mathcal{W}}$ no negativas y acotadas por $\overline{\gamma}$, $\overline{\mu}$, $\overline{\varsigma}$ y \overline{v} respectivamente.
- (B2) La medida de dispersión $D_n(x, dz)$ cumple las siguientes condiciones

$$\int_{z \in \mathbb{R}^d, x+z \in \overline{\mathcal{W}}} D_n(x, dz) = 1 \quad \text{y} \quad \int_{z \in \mathbb{R}^d, x+z \notin \overline{\mathcal{W}}} D_n(x, dz) = 0.$$

Por otra parte la medida $D_m(x, dz)$ cumple el mismo tipo de condición y de manera análoga $D_i(x, y, dz, dw)$ satisface

$$\int_{z \in \mathbb{R}^d, x+z \in \overline{\mathcal{W}}} \int_{w \in \mathbb{R}^d, y+w \in \overline{\mathcal{W}}} D_i(x, y, dz, dw) = 1 \quad \text{y}$$

$$\int_{z \in \mathbb{R}^d, x+z \notin \overline{\mathcal{W}}} \int_{w \in \mathbb{R}^d, y+w \notin \overline{\mathcal{W}}} D_i(x, y, dz, dw) = 0.$$

- (B3) $\exists C_n > 0$ en \mathbb{R} y una densidad de probabilidad $\tilde{D}_n \in B(\mathbb{R}^d)$ tal que para todo $x \in \overline{\mathcal{W}}$

$$D_n(x, dz) = D_n(x, z)dz \quad \text{con} \quad D_n(x, z) \leq C_n \tilde{D}_n(z).$$

Además D_n es una función continua no negativa sobre $\overline{\mathcal{W}} \times \mathbb{R}^d$.

- (B4) $\exists C_m > 0$ en \mathbb{R} y una densidad de probabilidad $\tilde{D}_m \in B(\mathbb{R}^d)$ tal que para todo $x \in \overline{\mathcal{W}}$

$$D_m(x, dz) = D_m(x, z)dz \quad \text{con} \quad D_m(x, z) \leq C_m \tilde{D}_m(z).$$

Además D_m es una función continua no negativa sobre $\overline{\mathcal{W}} \times \mathbb{R}^d$.

(B5) $\exists C_i > 0$ en \mathbb{R} y una densidad de probabilidad $\tilde{D}_i \in B(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ sobre $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ tal que para todo $x \in \overline{\mathcal{W}}$

$$D_i(x, y, dz, dw) = D_i(x, y, z, w)dzdw \text{ con } D_i(x, y, z, w) \leq C_i \tilde{D}_i(z, w).$$

Además D_i es una función continua no negativa sobre $\overline{\mathcal{W}} \times \overline{\mathcal{W}} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Observamos además que las hipótesis (B2), (B3) y (B4) nos aseguran que las medidas con las que elegimos al nuevo tipo luego de que suena alguno de los relojes exponenciales resultan ser medidas de probabilidad sobre $\overline{\mathcal{W}}$. Gracias a esto, con el fin de aplicar el teorema, podemos definir las siguientes medidas sobre $\overline{\mathcal{W}}$ (y $\overline{\mathcal{W}} \times \overline{\mathcal{W}}$)

(i) $a(x, du)$ la medida tal que $\int_{\mathbb{R}^d} f(x+z)D_m(x, dz) = \int_{\overline{\mathcal{W}}} f(u)a(x, du)$ para cada $f \in B(\mathbb{R}^d)$,

(ii) $b(x, y, du, dv)$ la medida tal que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x+z, y+w)D_i(x, y, dz, dw) = \int_{\overline{\mathcal{W}}} \int_{\overline{\mathcal{W}}} f(u, v)b(x, y, du, dv)$$

para cada $f \in B(\mathbb{R}^d)$,

(iii) $c(x, du)$ la medida tal que $\int_{\mathbb{R}^d} f(x+z)D_n(x, dz) = \int_{\overline{\mathcal{W}}} f(u)c(x, du)$ para cada $f \in B(\mathbb{R}^d)$.

Estas medidas resultan ser de probabilidad gracias a (B2) y son las que utilizaremos para describir las transiciones del proceso de la misma forma que como se hizo en el capítulo 2.

Hechas estas hipótesis pasamos a verificar que el proceso que proponemos satisface la hipótesis A.

Primero notamos que (A1) se cumple gracias a que (B1) nos garantiza exactamente lo pedido y que por otra parte las tasas no dependen de la distribución. De la misma forma podemos deducir que se cumple (A2) a partir de las suposiciones de continuidad sobre las medidas de dispersión hechas en (B3), (B4) y (B5). Para chequear (A3) basta notar que tanto las medidas de dispersión como las tasas no dependen de la distribución. Finalmente para verificar (A4) observamos que se tiene la siguiente estimación

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\mathcal{W}}} \gamma(x) \left\{ \int_A a(x, du) \right\} \nu(dx) &= \int_{\overline{\mathcal{W}}} \gamma(x) \left\{ \int_{x+z \in A} D_n(x, dz) \right\} \nu(dx) \\ &\leq \int_{\overline{\mathcal{W}}} \gamma(x) \left\{ \int_{z \in A-x} \tilde{D}_n(z) dz \right\} \nu(dx) \\ &\leq C \int_{\overline{\mathcal{W}}} \gamma(x) \mu(A-x) \nu(dx) \\ &\leq \bar{\gamma} C \mu(A) \nu(\overline{\mathcal{W}}), \end{aligned}$$

donde μ es la medida de Lebesgue restringida a $\overline{\mathcal{W}}$.

Ahora, estando en condiciones para poder utilizar el teorema, consideraremos una secuencia de distribuciones iniciales $(\nu_0^N)_{N>0}$ sobre $\overline{\mathcal{W}}$ que converjan en distribución a cierta ν_0 fija y

cumpliendo con $\sup_{N \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E}(\langle \nu_0^N, 1 \rangle^3) < \infty$. En virtud del teorema 3.1 tenemos que la secuencia de procesos $(\nu^N)_{N>0}$ converge en distribución en $D([0, T], \mathcal{M}_f(\overline{\mathcal{W}}))$ a $\nu \in C([0, T], \mathcal{M}_f(\overline{\mathcal{W}}))$ determinista, la única solución, que satisface $\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t, 1 \rangle < \infty$, del siguiente sistema de ecuaciones integro-diferencial. Para cada $\varphi \in B(\overline{\mathcal{W}})$ y $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \langle \nu_t, \varphi \rangle &= \langle \nu_0, \varphi \rangle + \int_0^t \int_{\overline{\mathcal{W}}} \gamma(x) \int_{\overline{\mathcal{W}}} \varphi(u) c(x, du) \nu_s(dx) ds \\ &+ \int_0^t \int_{\overline{\mathcal{W}}} \varsigma(x) \int_{\overline{\mathcal{W}}} [\varphi(u) - \varphi(x)] a(x, du) \nu_s(dx) ds \\ &+ \int_0^t \int_{\overline{\mathcal{W}}} \int_{\overline{\mathcal{W}}} v(x, y) \int_{\overline{\mathcal{W}}} \int_{\overline{\mathcal{W}}} [\varphi(u) + \varphi(v) - \varphi(x) - \varphi(y)] b(x, y, du, dv) \\ &\times \nu_s(dx) \nu_s(dy) ds - \int_0^t \int_{\overline{\mathcal{W}}} \mu(x) \varphi(x) \nu_s(dx) ds. \end{aligned}$$

Escribiendo esto en terminos de las medidas de distribución originales obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \langle \nu_t, \varphi \rangle &= \langle \nu_0, \varphi \rangle + \int_0^t \int_{\overline{\mathcal{W}}} \gamma(x) \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x+z) D_n(x, z) dz \nu_s(dx) ds \\ &+ \int_0^t \int_{\overline{\mathcal{W}}} \varsigma(x) \int_{\mathbb{R}^d} [\varphi(x+z) - \varphi(x)] D_m(x, z) dz \nu_s(dx) ds \\ &+ \int_0^t \int_{\overline{\mathcal{W}}} \int_{\overline{\mathcal{W}}} v(x, y) \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} [\varphi(x+z) + \varphi(y+w) - \varphi(x) - \varphi(y)] \\ &\times D_i(x, y, z, w) dz dw \nu_s(dx) \nu_s(dy) ds - \int_0^t \int_{\overline{\mathcal{W}}} \mu(x) \varphi(x) \nu_s(dx) ds. \quad (S2) \end{aligned}$$

Notamos que tiene una forma similar al resultado obtenido en [5] si es que a este le agregamos los términos correspondientes a las nuevas interacciones consideradas.

4.2. Modelo epidemiológico

Un modelo epidemiológico es un modelo que busca describir la transmisión de enfermedades a través de individuos. Dentro de este contexto el SIR es un modelo que considera una población con tres estados: Susceptible, Recuperados e Infectados. La dinámica de este modelo se basa en que a cierta tasa los individuos que están infectados se recuperan, como también a cierta tasa estos mueren. Por otra parte también existe contagio a una tasa de interacción dada cuando interactúan individuos infectados con individuos susceptibles. Por último existe la posibilidad de que los individuos se reproduzcan de acuerdo a una tasa dada, siendo los hijos del mismo tipo que el padre salvo en el caso en que los individuos recuperados tienen hijos, estos pasan a ser susceptibles.

Para formalizar lo dicho anteriormente consideraremos en este caso que para nuestro modelo epidemiológico el espacio de tipos para cada individuo estará dado por $\mathcal{W} = \{S, I, R\}$

y la dinámica del proceso es definida como sigue: a tasa $\gamma \in \mathbb{R}$ existe una mutación y una vez que ocurre este evento, inmediatamente el nuevo tipo es escogido de acuerdo a la distribución dada por

$$a(S, \cdot) = \delta_S, \quad a(I, \cdot) = \delta_R, \quad a(R, \cdot) = \delta_R.$$

A tasa $\lambda(w, w')$ ocurre una interacción entre individuos, la cual definiremos para $\theta \in \mathbb{R}$ como

$$\lambda(I, S) = \lambda(S, I) = \theta$$

y para el resto $\lambda(w, w') = 0$. En este caso la distribución luego de la interacción es

$$b(I, S, \cdot) = \delta_{(S,I)}, \quad b(S, I, \cdot) = \delta_{(I,S)}.$$

Por otra parte, a tasa $\beta \in \mathbb{R}$ cada individuo tiene un hijo, el cual es escogido de acuerdo a la distribución

$$c(S, \cdot) = \delta_S, \quad c(I, \cdot) = \delta_I, \quad c(R, \cdot) = \delta_S.$$

Por último a tasa $d(w)$ los individuos infectados mueren, por lo que esta tasa la podemos definir para cada tipo por

$$d(S) = d(R) = 0, \quad d(I) = d,$$

para $d \in \mathbb{R}$.

Una vez que tenemos definidos los parámetros y las reglas de evolución del modelo, con el fin de aplicar el teorema verificamos que este satisface la hipótesis A. Para esto basta notar que las tasas no dependen de la distribución ν . De esta forma podemos asegurar que se cumple (A1), (A2) y (A3). Por último, para probar que (A4) se cumple basta notar que

$$\int_{\mathcal{W}} \beta c(w, A) \nu(dw) \leq \beta(2\delta_S + \delta_I)(A) \nu(\mathcal{W}),$$

donde de manera análoga se prueba el mismo tipo de propiedad para las demás tasas.

Tomando ahora una secuencia de distribuciones iniciales que satisfaga las condiciones del teorema 3.1 estamos en condiciones de poder aplicar el resultado a este proceso. Si a continuación definimos $v_w(t) = \nu_t(\{w\})$, con ν_t el proceso límite obtenido a partir del teorema 3.1, podemos utilizar (S1') con $A = \{w\}$ para cada $w \in \mathcal{W}$, con el fin de obtener un sistema de ecuaciones diferenciales que caracterice la dinámica en el límite. Con esto último obtenemos que en el límite, la evolución de las fracciones de individuos de cada tipo converge a un objeto determinista que está dado como la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{dv_S(t)}{dt} &= -2\theta v_S(t)v_I(t) + \beta(v_S(t) + v_R(t)), \\ \frac{dv_I(t)}{dt} &= -\gamma v_I(t) + 2\theta v_S(t)v_I(t) + (\beta - d)v_I(t), \\ \frac{dv_R(t)}{dt} &= \gamma v_I(t). \end{aligned} \tag{4.1}$$

En particular, podemos resolver numéricamente este sistema de ecuaciones para una cierta elección de parámetros. Para esto primero escogemos una secuencia de medidas iniciales $\nu_0^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_i^N}$ con X_i^N variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según ν_0 , donde esta última es la medida de probabilidad sobre \mathcal{W} que asigna peso $\frac{3}{4}$ al tipo S y $\frac{1}{4}$ al tipo I . Es directo ver que esta elección satisface las hipótesis del teorema 3.1, por lo que en este caso consideramos el sistema anterior con condición inicial $v_S(0) = \frac{3}{4}$, $v_I(0) = \frac{1}{4}$ y $v_R(0) = 0$. La solución es presentada en la siguiente figura.

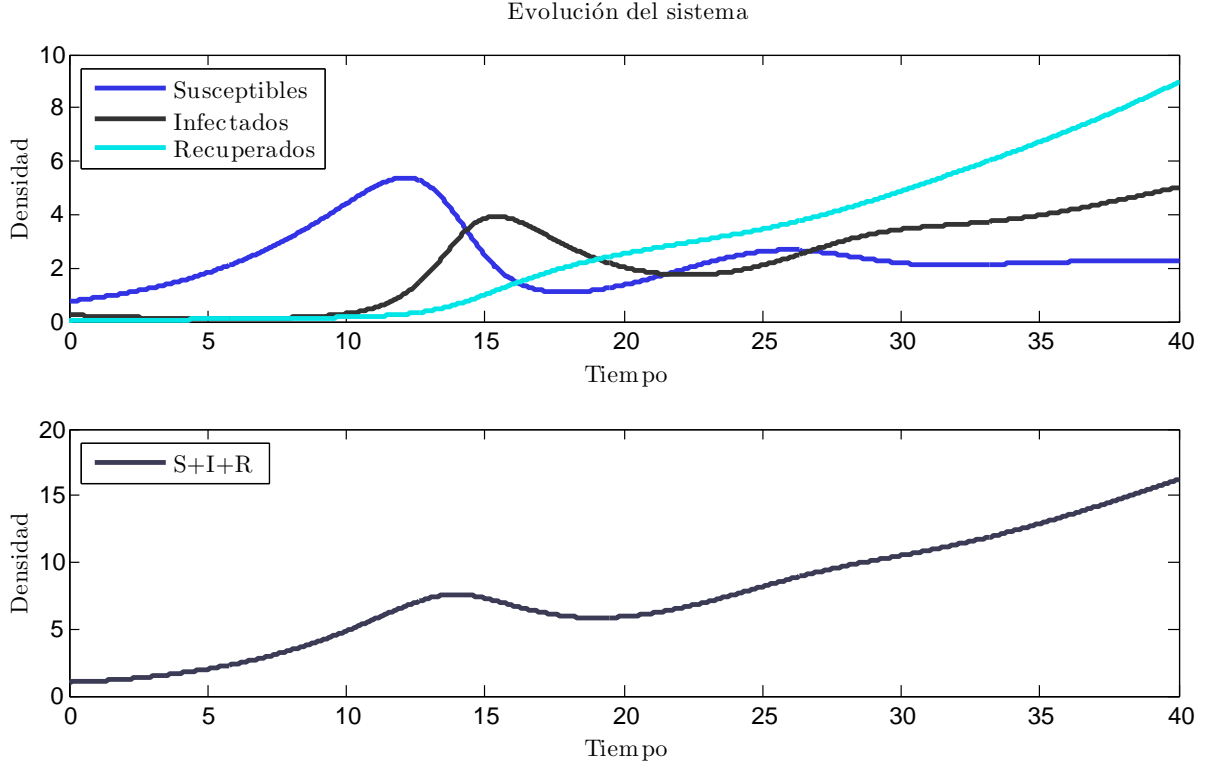


Figura 4.1: Solución del sistema (4.1) para $\gamma = 0.1$, $\beta = 0.2$, $\theta = 0.1$ y $d = 0.5$.

4.3. Modelo de bacterias

Para terminar el capítulo buscaremos modelar de manera simple una colonia de bacterias en donde ellas compiten entre sí. Estas estarán caracterizadas por su tamaño, el que además será acotado, por lo que para este fin consideraremos el espacio de tipos como el conjunto $\mathcal{K} = \{0, 1, \dots, K\}$.

El proceso que propondremos evoluciona de acuerdo a las siguientes reglas: a tasa $\beta(m) = \frac{m}{m+1}$ con $m \in \mathcal{K}$, las bacterias producen un descendiente de tamaño 1, es decir, la distribución con la que escogeremos el tamaño del hijo está dada por

$$c(m, \cdot) = \delta_1, \quad \text{para cada } m \in \mathcal{K}.$$

Dado $\gamma \in \mathbb{R}$, a tasa $\gamma(m) = \gamma$ para $m \in \mathcal{K} \setminus \{K\}$ y $\gamma(K) = 0$, buscaremos mutar aleatoriamente creciendo en una unidad, por lo que en este caso la distribución con la que elegimos

el nuevo tamaño es

$$a(m, \cdot) = \delta_{m+1} \text{ para cada } m \in \mathcal{K} \setminus \{K\} \text{ y } a(K, \cdot) = \delta_K.$$

Por otra parte a tasa $\lambda(m, n) = \frac{|m-n|}{|m-n|+1} \mathbf{1}_{K>m>0} \mathbf{1}_{K>n>0}$ una bacteria de tamaño m interactuará con otra de tamaño n , como resultado la bacteria más grande se comerá a la otra obteniendo así su tamaño a no ser que sean iguales, vale decir, la distribución estará dada por

$$b(m, n, \cdot) = \begin{cases} \delta_{((m+n) \wedge K, 0)}, & \text{si } m > n \\ \delta_{(m, n)}, & \text{si } m = n \\ \delta_{(0, (m+n) \wedge K)}, & \text{si } m < n. \end{cases}$$

Por último a tasa $d(m) = \frac{1}{1+m}$ las bacterias abandonarán el sistema.

Notamos que con esta construcción el estado $0 \in \mathcal{K}$ corresponde a un tamaño donde las bacterias no pueden interactuar ni producir descendencia, solo crecer o morir. Por otra parte las bacterias que llegan a tamaño K no pueden seguir creciendo ni tampoco interactuar, solo morir. Ambas reglas evitan las interacciones triviales.

Una vez formalizado el modelo podemos pasar verificar que se cumple la hipótesis [A](#) sin antes justificar que la elección de las tasas no constantes en este caso es justamente con este fin, debido a lo restrictivas que resultan ser las hipótesis. En particular y dado lo que se busca modelar, resulta necesario considerar como tasas funciones que sean crecientes (o decrecientes) y además acotadas.

Comenzamos notando que las tasas no dependen de la distribución ν y son acotadas, por lo que podemos deducir rápidamente que se satisface [\(A1\)](#) y [\(A3\)](#). La condición [\(A2\)](#) se satisface pues las distribuciones resultan ser continuas en su primer parámetro. Por último, para ver que [\(A4\)](#) se cumple, basta ver que

$$\int_{\mathcal{K}} \beta(n) c(n, A) \nu(dn) \leq \left(\sum_{i=0}^K \delta_i(A) \right) \nu(\mathcal{K}),$$

donde además de manera análoga se tiene para la tasa de crecimiento. Junto a esto también se tiene que

$$\int_{\mathcal{K}} \int_{\mathcal{K}} \lambda(n, m) b(n, m, A) \nu(dn) \nu(dm) \leq \left(\sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K \delta_{(i,j)}(A) \right) \nu(\mathcal{K})^2,$$

por lo que podemos concluir que se cumple la hipótesis [A](#).

Si ahora consideramos una secuencia de distribuciones iniciales adecuada, como ya lo hemos hecho, podemos aplicar el teorema [3.1](#) y gracias a este, en particular a partir de [\(S1'\)](#),

podemos obtener para $0 < i < K$ que

$$\begin{aligned} \frac{d\nu_t(\{i\})}{dt} = & - \left(\gamma + \sum_{j=1}^{K-1} 2 \frac{|j-i|}{|j-i|+1} \nu_t(\{j\}) \right) \nu_t(\{i\}) + \gamma \nu_t(\{i-1\}) \\ & + \sum_{j=1}^{K-1} \sum_{l=1}^{K-1} \frac{|j-l|}{|j-l|+1} \delta_{(0,(j+l)\wedge K)}(\mathcal{K} \times \{i\}) \nu_t(\{j\}) \nu_t(\{l\}) \\ & + \delta_1(\{i\}) \sum_{j=1}^K \frac{j}{j+1} \nu_t(\{j\}) - \frac{\nu_t(\{i\})}{i+1}. \end{aligned}$$

De aquí podemos identificar el primer término del lado derecho como la tasa a la que las bacterias dejan el tamaño i debido a un crecimiento aleatorio o a alguna interacción con otra bacteria, el segundo término como la tasa a la que las bacterias provienen desde el tamaño $i-1$, el tercero como la tasa a la que las interacciones generan a alguien de tamaño i y el último término representa la tasa de muerte de bacterias de tamaño i . En caso de que estemos observando el tamaño 1, consideramos la tasa de nacimientos. Por último, para 0 y K tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\nu_t(\{0\})}{dt} &= -\gamma \nu_t(\{0\}) + \sum_{j=1}^{K-1} \sum_{l=1}^{K-1} \frac{|j-l|}{|j-l|+1} \nu_t(\{j\}) \nu_t(\{l\}) - \nu_t(\{0\}) \quad y \\ \frac{d\nu_t(\{K\})}{dt} &= \gamma \nu_t(\{K-1\}) + \sum_{j=1}^{K-1} \sum_{l=1}^{K-1} \frac{|j-l|}{|j-l|+1} \delta_{((j+l)\wedge K,0)}(\{K\} \times \mathcal{K}) \nu_t(\{j\}) \nu_t(\{l\}) - \frac{\nu_t(\{K\})}{K+1}. \end{aligned}$$

Un ejemplo que resulta simple de estudiar es el caso cuando $K=2$, debido a que no hay interacciones entre las bacterias. Específicamente se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d\nu_t(\{0\})}{dt} &= -(\gamma+1)\nu_t(\{0\}) \\ \frac{d\nu_t(\{1\})}{dt} &= \gamma(\nu_t(\{0\}) - \nu_t(\{1\})) + \frac{2}{3}\nu_t(\{2\}) \\ \frac{d\nu_t(\{2\})}{dt} &= \gamma\nu_t(\{1\}) - \frac{\nu_t(\{2\})}{3}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Resolviendo numéricamente este sistema y escogiendo una condición inicial tal como se hizo para el sistema (4.1), usando $\nu_0(\{0\}) = 0,9$, $\nu_0(\{1\}) = 0$ y $\nu_0(\{2\}) = 0,1$ tenemos la siguiente solución

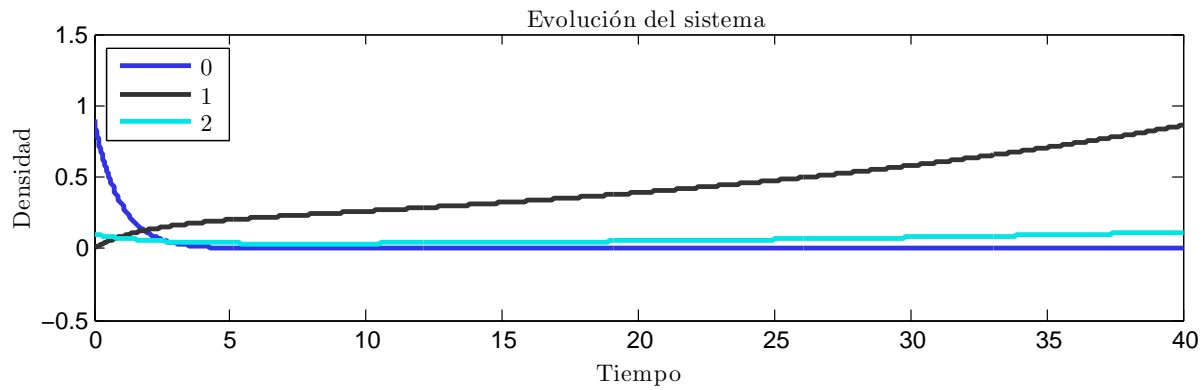


Figura 4.2: Solución del sistema (4.2) para $\gamma = 0.05$.

A partir de esto notamos que las bacterias de tamaño 0 desaparecerán eventualmente debido a la inexistencia de interacciones. Por otra parte, debido a que la tasa de nacimiento es mayor que la de muerte, la cantidad de bacterias irá en aumento. Finalmente lo único que resta es notar que las bacterias de tamaños 1 y 2 solo aumentan, donde la velocidad a la que ocurre esto depende de la tasa de nacimiento y crecimiento respectivamente.

Capítulo 5

Demostraciones

En este apartado nos centraremos en probar los resultados presentados en el capítulo 3. Para este fin consideraremos los objetos introducidos en el capítulo 2 junto con las propiedades que obtuvimos de ellos.

Comenzaremos probando el teorema 3.1 utilizando un esquema clásico para resultados de este tipo. Específicamente estableceremos una propiedad de martingala asociada al proceso $(\nu_t^N)_{t \geq 0}$ que nos dará una idea de como debe lucir el sistema (S1) y una noción heurística de como deducir el resultado. Luego probaremos que el sistema tiene una única solución dadas las condiciones del teorema. Hecho esto se verificará que la secuencia de leyes de $(\nu^N)_{N > 0}$ es tensa cuando consideramos la topología vaga en el espacio de las medidas. Más aún chequearemos que cualquier punto límite de esta secuencia satisface el sistema lo cual nos permitirá concluir, gracias a la unicidad que obtuvimos, que la secuencia de leyes converge a la solución del sistema. Para terminar se verifica que el resultado sigue siendo cierto si consideramos la topología débil en vez de la vaga en el espacio de las medidas.

Por último concluiremos demostrando el corolario 3.2. Para esto verificaremos la propagación de la propiedad de absoluta continuidad de ν_0^N a lo largo del tiempo principalmente gracias a la propiedad de martingala asociada al proceso, la distinción de los tiempos de salto y la propiedad de Markov.

A lo largo de este capítulo consideraremos para cada $N > 1$ el proceso $(\nu_t^N)_{t \geq 0}$ definido en 2.3 y asumiremos que se satisface la hipótesis A. Comenzaremos enunciado una propiedad de martingala relacionada con el generador Ω_N (2.2) y que nos permitirá obtener más información sobre el proceso.

Teorema 5.1 *Dado N fijo consideramos $(\nu_t^N)_{t \geq 0}$ y asumimos que para algún $p \geq 2$ se cumple que $\mathbb{E}(\langle \nu_0^N, 1 \rangle^p) < \infty$. Entonces se tienen las siguientes propiedades*

- (i) *Para toda función medible ϕ de \mathcal{M}_p^N a \mathbb{R} tal que para alguna constante C y para toda*

$\nu \in \mathcal{M}_p^N$, $|\phi(\nu)| + |\Omega_N \phi(\nu)| \leq C(1 + \langle \nu, 1 \rangle^p)$, el proceso

$$\phi(\nu_t) - \phi(\nu_0) - \int_0^t \Omega_N \phi(\nu_s) ds, \quad (5.1)$$

es una $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -martingala càdlàg que parte en 0.

(ii) Lo anterior aplica a cualquier función $\phi(\nu) = \langle \nu, \varphi \rangle^q$, con $0 \leq q \leq p - 1, \varphi \in B(\mathcal{W})$.

DEMOSTRACIÓN. Gracias a que $\mathbb{E}(\langle \nu_0^N, 1 \rangle^p) < \infty$ el corolario 2.6 nos permite asegurar que $\mathbb{E}(\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t^N, 1 \rangle^p) < \infty$, de manera que si realizamos la siguiente estimación

$$\left| \phi(\nu_t^N) - \phi(\nu_0^N) - \int_0^t \Omega_N \phi(\nu_s^N) ds \right| \leq C_1 + \langle \nu_t^N, 1 \rangle^p + \langle \nu_0^N, 1 \rangle^p + C_2 T + C_2 T \sup_{s \in [0, T]} \langle \nu_s^N, 1 \rangle^p,$$

observamos que el lado derecho tiene esperanza finita, por lo que podemos concluir directamente que el proceso $\phi(\nu_t^N) - \phi(\nu_0^N) - \int_0^t \Omega_N \phi(\nu_s^N) ds$ resulta ser una martingala, obteniendo así el punto (i). Por otra parte, para obtener el punto (ii) basta realizar cálculos con (2.2) y verificar que para $0 \leq q \leq p - 1$ se cumple

$$|\langle \nu, \varphi \rangle^q| + |\Omega_N(\langle \nu, \varphi \rangle^q)| \leq C(1 + \langle \nu, 1 \rangle^p).$$

□

Proposición 5.2 Para N fijo asumamos que $\mathbb{E}(\langle \nu_0^N, 1 \rangle^3) < \infty$. Tomando $\varphi \in B(\mathcal{W})$ tenemos que

$$\begin{aligned} M_t^{N, \varphi} &= \langle \nu_t^N, \varphi \rangle - \langle \nu_0^N, \varphi \rangle \\ &\quad - \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \gamma(w, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W}} [\varphi(w') - \varphi(w)] a(w, \nu_s^N, dw') \nu_s^N(dw) ds \\ &\quad - \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \lambda(w_1, w_2, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}} [\varphi(w'_1) + \varphi(w'_2) - \varphi(w_1) - \varphi(w_2)] \\ &\quad \quad \times b(w_1, w_2, \nu_s^N, dw'_1 \otimes dw'_2) \nu_s^N(dw_2) \nu_s^N(dw_1) ds \\ &\quad - \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \beta(w, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W}} \varphi(w') c(w, \nu_s^N, dw') \nu_s^N(dw) ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \varphi(w) d(w, \nu_s^N) \nu_s^N(dw) ds. \end{aligned} \quad (5.2)$$

es una martingala càdlàg en L^2 que parte de 0 y con variación cuadrática dada por

$$\begin{aligned}
\langle M^{N,\varphi} \rangle_t &= \frac{1}{N} \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \gamma(w, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W}} [\varphi(w') - \varphi(w)]^2 a(w, \nu_s^N, dw') \nu_s^N(dw) ds \\
&+ \frac{1}{N} \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \lambda(w_1, w_2, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}} [\varphi(w'_1) + \varphi(w'_2) - \varphi(w_1) - \varphi(w_2)]^2 \\
&\quad \times b(w_1, w_2, \nu_s^N, dw'_1 \otimes dw'_2) \nu_s^N(dw_2) \nu_s^N(dw_1) ds \\
&+ \frac{1}{N} \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \beta(w, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W}} \varphi(w')^2 c(w, \nu_s^N, dw') \nu_s^N(dw) ds \\
&+ \frac{1}{N} \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \varphi(w)^2 d(w, \nu_s^N) \nu_s^N(dw) ds. \tag{5.3}
\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Gracias a (ii) del teorema 5.1, usando $\phi(\nu) = \langle \nu, \varphi \rangle$ para $\varphi \in B(\mathcal{W})$, obtenemos que $\langle \nu_t^N, \varphi \rangle - \langle \nu_0^N, \varphi \rangle - \int_0^t \Omega_N \langle \nu_s^N, \varphi \rangle ds$ es una martingala. Más aún

$$\begin{aligned}
M_t^{N,\varphi} &= \langle \nu_t^N, \varphi \rangle - \langle \nu_0^N, \varphi \rangle \\
&- \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \gamma(w, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W}} [\varphi(w') - \varphi(w)] a(w, \nu_s^N, dw') \nu_s^N(dw) ds \\
&- \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \lambda(w_1, w_2, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}} [\varphi(w'_1) + \varphi(w'_2) - \varphi(w_1) - \varphi(w_2)] \\
&\quad \times b(w_1, w_2, \nu_s^N, dw'_1 \otimes dw'_2) \nu_s^N(dw_2) \nu_s^N(dw_1) ds \\
&- \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \beta(w, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W}} \varphi(w') c(w, \nu_s^N, dw') \nu_s^N(dw) ds \\
&+ \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \varphi(w) d(w, \nu_s^N) \nu_s^N(dw) ds,
\end{aligned}$$

es una martingala. Ahora, nuevamente por el teorema 5.1, si hacemos lo mismo con $\phi(\nu) = \langle \nu, \varphi \rangle^2$ obtenemos la siguiente martingala

$$\tilde{M}_t^{N,\varphi} = \langle \nu_t^N, \varphi \rangle^2 - \langle \nu_0^N, \varphi \rangle^2 - \int_0^t \Omega \langle \nu_s^N, \varphi \rangle^2 ds.$$

Desarrollando el último término

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_t^{N,\varphi} = & \langle \nu_t^N, \varphi \rangle^2 - \langle \nu_0^N, \varphi \rangle^2 - \int_0^t N \int_{\mathcal{W}} \gamma(w, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W}} \left[\left\langle \nu_s^N + \frac{(\delta_{w'} - \delta_w)}{N}, \varphi \right\rangle^2 - \langle \nu_s^N, \varphi \rangle^2 \right] \\
& \times a(w, \nu_s^N, dw') \nu_s^N(dw) ds \\
& - \int_0^t N \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \lambda(w_1, w_2, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}} \left[\left\langle \nu_s^N + \frac{(\delta_{w'_1} + \delta_{w'_2} - \delta_{w_1} - \delta_{w_2})}{N}, \varphi \right\rangle^2 - \langle \nu_s^N, \varphi \rangle^2 \right] \\
& \times b(w_1, w_2, \nu_s^N, dw'_1 \otimes dw'_2) \nu_s^N(dw_2) \nu_s^N(dw_1) ds \\
& - \int_0^t N \int_{\mathcal{W}} \beta(w, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W}} \left[\left\langle \nu_s^N + \frac{\delta_{w'}}{N}, \varphi \right\rangle^2 - \langle \nu_s^N, \varphi \rangle^2 \right] c(w, \nu_s^N, dw') \nu_s^N(dw) ds \\
& - \int_0^t N \int_{\mathcal{W}} \left[\left\langle \nu_s^N - \frac{\delta_w}{N}, \varphi \right\rangle^2 - \langle \nu_s^N, \varphi \rangle^2 \right] d(w, \nu_s^N) \nu_s^N(dw) ds.
\end{aligned}$$

Por otra parte, consideremos la semimartingala $X_t^N = \langle \nu_t^N, \varphi \rangle$ y $f(x) = x^2$. Usando la fórmula de Itô A.4 obtenemos la siguiente expresión

$$f(X_t^N) = f(X_0^N) + \int_0^t 2X_s dX_s + \langle X \rangle_t,$$

A partir de la cual concluimos usando (5.7) que

$$\langle \nu_t^N, \varphi \rangle^2 = \langle \nu_0^N, \varphi \rangle^2 + \int_0^t 2\langle \nu_s^N, \varphi \rangle d\langle \nu_s^N, \varphi \rangle + \langle M^{N,\varphi} \rangle_t.$$

Desarrollando y reordenando términos

$$\begin{aligned}
\int_0^t 2\langle \nu_s^N, \varphi \rangle dM_s^{N,\varphi} = & \langle \nu_t^N, \varphi \rangle^2 - \langle \nu_0^N, \varphi \rangle^2 - \left\{ \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \gamma(w, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W}} [\varphi(w') - \varphi(w)] \right. \\
& \times 2\langle \nu_s^N, \varphi \rangle a(w, \nu_s^N, dw') \nu_s^N(dw) ds \\
& + \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \lambda(w_1, w_2, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}} [\varphi(w'_1) + \varphi(w'_2) - \varphi(w_1) - \varphi(w_2)] \\
& \times 2\langle \nu_s^N, \varphi \rangle b(w_1, w_2, \nu_s^N, dw'_1 \otimes dw'_2) \nu_s^N(dw_2) \nu_s^N(dw_1) ds \\
& + \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \beta(w, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W}} \varphi(w') 2\langle \nu_s^N, \varphi \rangle c(w, \nu_s^N, dw') \nu_s^N(dw) ds \\
& \left. - \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \varphi(w) 2\langle \nu_s^N, \varphi \rangle d(w, \nu_s^N) \nu_s^N(dw) ds \right\} - \langle M^{N,\varphi} \rangle_t, \tag{5.4}
\end{aligned}$$

de donde obtenemos que el lado derecho es un martingala local. Comparando esto con $\tilde{M}_t^{N,\varphi}$

y utilizando la unicidad de la variación cuadrática obtenemos que

$$\begin{aligned}
\langle M^{N,\varphi} \rangle_t &= \frac{1}{N} \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \gamma(w, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W}} [\varphi(w') - \varphi(w)]^2 a(w, \nu_s^N, dw') \nu_s^N(dw) ds \\
&\quad + \frac{1}{N} \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \lambda(w_1, w_2, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}} [\varphi(w'_1) + \varphi(w'_2) - \varphi(w_1) - \varphi(w_2)]^2 \\
&\quad \quad \times b(w_1, w_2, \nu_s^N, dw'_1 \otimes dw'_2) \nu_s^N(dw_2) \nu_s^N(dw_1) ds \\
&\quad + \frac{1}{N} \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \beta(w, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W}} \varphi(w')^2 c(w, \nu_s^N, dw') \nu_s^N(dw) ds \\
&\quad + \frac{1}{N} \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \varphi(w)^2 d(w, \nu_s^N) \nu_s^N(dw) ds, \tag{5.5}
\end{aligned}$$

concluyendo así lo que queríamos probar. \square

Analizando un poco más el proceso $\langle M^{N,\varphi} \rangle_t$ que obtuvimos podemos concluir lo siguiente

Lema 5.3 *Para N fijo, asumiendo que se cumple $\mathbb{E}(\langle \nu_0^N, 1 \rangle^3) < \infty$, se tiene la siguiente cota para la esperanza de la variación cuadrática de $M^{N,\varphi}$*

$$\mathbb{E}(\langle M^{N,\varphi} \rangle_t) \leq \frac{C^\varphi}{N}, \tag{5.6}$$

para cierta constante $C^\varphi > 0$.

DEMOSTRACIÓN. Observando la expresión para $\langle M^{N,\varphi} \rangle_t$ dada por (5.3) tenemos la siguiente estimación

$$\begin{aligned}
\langle M^{N,\varphi} \rangle_t &\leq \frac{C \|\varphi\|^2}{N} \int_0^t [\langle \nu_s^N, 1 \rangle + \langle \nu_s^N, 1 \rangle^2] ds \\
&\leq \frac{TC \|\varphi\|^2}{N} \left[\sup_{s \in [0, T]} \langle \nu_s^N, 1 \rangle + \sup_{s \in [0, T]} \langle \nu_s^N, 1 \rangle^2 \right],
\end{aligned}$$

para cierta constante $C > 0$. Tomando esperanza y utilizando el corolario 2.6 obtenemos

$$\mathbb{E}(\langle M^{N,\varphi} \rangle_t) \leq \frac{C^\varphi}{N},$$

con $C^\varphi > 0$, que es lo que buscábamos probar. \square

Notemos ahora que reescribiendo el resultado entregado por la proposición 5.2 obtenemos

la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}
\langle \nu_t^N, \varphi \rangle &= \langle \nu_0^N, \varphi \rangle + M_t^{N, \varphi} \\
&+ \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \gamma(w, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W}} [\varphi(w') - \varphi(w)] a(w, \nu_s^N, dw') \nu_s^N(dw) ds \\
&+ \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \lambda(w_1, w_2, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}} [\varphi(w'_1) + \varphi(w'_2) - \varphi(w_1) - \varphi(w_2)] \\
&\quad \times b(w_1, w_2, \nu_s^N, dw'_1 \otimes dw'_2) \nu_s^N(dw_2) \nu_s^N(dw_1) ds \\
&+ \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \beta(w, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W}} \varphi(w') c(w, \nu_s^N, dw') \nu_s^N(dw) ds \\
&- \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \varphi(w) d(w, \nu_s^N) \nu_s^N(dw) ds,
\end{aligned} \tag{5.7}$$

a partir de la cual podemos extraer la idea heurística para probar el teorema 3.1, esto debido a que basta observar que gracias al lema 5.3 tenemos que $M_t^{N, \varphi} \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \infty$, obteniendo así el sistema (S1) si pudiésemos pasar al límite en ν^N y los términos relacionados. En lo que sigue buscaremos formalizar esta observación.

En lo que resta del capítulo consideraremos que se satisface la hipótesis A junto con las demás condiciones enunciadas en el teorema 3.1. En particular asumiremos que se cumple $\sup_{N \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E}(\langle \nu_0^N, 1 \rangle^3) < \infty$ con el fin de aplicar las propiedades antes mencionadas de manera uniforme en N .

Lema 5.4 *El sistema (S1) tiene una única solución.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos dos soluciones del sistema, ν y $\bar{\nu} \in D([0, T], \mathcal{M}_f(\mathcal{W}))$, que satisfacen $\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t + \bar{\nu}_t, 1 \rangle < \infty$, y $\varphi \in B(\mathcal{W})$ con $\|\varphi\|_{\infty} \leq 1$. Observando (S1) tenemos la siguiente estimación para el primer término de $|\langle \nu_t - \bar{\nu}_t, \varphi \rangle|$

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \gamma(w, \nu_s) \int_{\mathcal{W}} [\varphi(w') - \varphi(w)] a(w, \nu_s, dw') \nu_s(dw) ds \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \gamma(w, \bar{\nu}_s) \int_{\mathcal{W}} [\varphi(w') - \varphi(w)] a(w, \bar{\nu}_s, dw') \bar{\nu}_s(dw) ds \right| \\
&\leq \left| \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \gamma(w, \nu_s) \int_{\mathcal{W}} \varphi(w') a(w, \nu_s, dw') \nu_s(dw) ds \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \gamma(w, \bar{\nu}_s) \int_{\mathcal{W}} \varphi(w') a(w, \bar{\nu}_s, dw') \bar{\nu}_s(dw) ds \right| \\
&\quad + \left| \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \gamma(w, \nu_s) \int_{\mathcal{W}} \varphi(w) a(w, \nu_s, dw') \nu_s(dw) ds \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \gamma(w, \bar{\nu}_s) \int_{\mathcal{W}} \varphi(w) a(w, \bar{\nu}_s, dw') \bar{\nu}_s(dw) ds \right|.
\end{aligned}$$

De aquí obtenemos usando (A3) que ambos términos del lado derecho pueden ser acotados superiormente por una expresión de la forma $C \int_0^t \|\nu_s - \bar{\nu}_s\|_{TV} ds$. Realizando las mismas

estimaciones sobre los tres términos restantes de $|\langle \nu_t - \bar{\nu}_t, \varphi \rangle|$, nuevamente gracias a (A3), obtenemos que cada uno de ellos puede ser acotado por expresiones idénticas a la antes mencionada. Concluimos que tomando supremo sobre φ con $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ se tiene que para cierta constante $C \in \mathbb{R}$

$$\|\nu_t - \bar{\nu}_t\|_{\text{TV}} \leq C \int_0^t \|\nu_s - \bar{\nu}_s\|_{\text{TV}} ds.$$

Por último, utilizando el lema de Gronwall A.1, obtenemos que $\forall t \leq T$, $\|\nu_t - \bar{\nu}_t\|_{\text{TV}} = 0$ y de esta forma la solución del sistema es única. \square

A continuación consideraremos el espacio de las medidas finitas dotado de la topología vaga y probaremos que la secuencia de leyes asociada a la secuencia de procesos $(\nu^N)_{N>0}$ forma una familia tensa sobre este espacio.

Proposición 5.5 *Las leyes de los procesos $(\nu^N)_{N>0}$ forman una familia tensa sobre el espacio $D([0, T], (\mathcal{M}(\mathcal{W}), \nu))$.*

DEMOSTRACIÓN. En virtud del teorema A.5, para probar que la secuencia de leyes es tensa, verificaremos que para cada $\varphi \in C_b(\mathcal{W})$ la secuencia de leyes asociada a $X^N = \langle \nu^N, \varphi \rangle$ es tensa sobre el espacio $D([0, T], \mathbb{R})$. Esto último a su vez lo haremos basándonos en la proposición A.7 que nos entrega dos condiciones, [T1] y [T2], que la secuencia de procesos $(X^N)_{N>0}$ debe cumplir para que su secuencia de leyes resulte ser tensa.

Primero verifiquemos que el proceso X^N cumple [T1], es decir, veremos que $\forall t \in \mathbb{R}^+$ las leyes de $(X_t^N)_{N \in \mathbb{N}}$ forman una familia tensa de medidas en \mathbb{R} . Para esto notemos que por la desigualdad de Markov

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X_t^N| \geq K) &\leq \frac{\mathbb{E}(|X_t^N|)}{K} \\ &\leq \frac{\mathbb{E}(\sup_{s \in [0, T]} |X_t^N|)}{K} \end{aligned}$$

tomando supremo sobre $N \in \mathbb{N}$ y utilizando el teorema 2.5 obtenemos que para cierta constante $C \in \mathbb{R}$

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_t^N| \geq K) \leq \frac{C}{K}$$

por lo que si tomamos $\varepsilon > 0$ y luego escogemos K de forma tal que $\frac{C}{K} \leq \varepsilon$ obtenemos que $\sup_{N \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_t^N| \geq K) \leq \varepsilon$ lo cual nos dice que

$$\inf_{N \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X_t^N \in (-K, K)) \geq 1 - \varepsilon$$

de donde notamos que basta tomar el compacto $[-K, K]$ y obtenemos así la propiedad que queríamos verificar.

Resta probar que X^N satisface [T2]. En este caso utilizaremos el teorema A.9 que afirma que basta probar que X^N satisface la propiedad [A] ya que esta implica la condición [T2].

Para este fin consideraremos la descomposición de semimartingala $X_t^N = \langle \nu_t^N, \varphi \rangle = M_t^{N,\varphi} + A_t^{N,\varphi}$ dada por (5.7), donde $M_t^{N,\varphi}$ es una martingala y $A_t^{N,\varphi}$ un proceso de variación finita. Es claro, además, que a su vez basta probar que los procesos $M^{N,\varphi}$ y $A^{N,\varphi}$ satisfacen la propiedad [A] por separado, ya que por la desigualdad triangular podemos concluir a partir de esto que X^N también la cumple. Para ver que $A^{N,\varphi}$ satisface la propiedad [A] estaremos $\mathbb{E}\left(\left|A_{\tau_N}^{N,\varphi} - A_{\tau_N+\theta}^{N,\varphi}\right|\right)$ con $(\tau_N)_{N \in \mathbb{N}}$ una colección de tiempos de parada tales que $\tau_N \leq T$ casi seguramente. Notemos que

$$\begin{aligned} \left|A_{\tau_N}^{N,\varphi} - A_{\tau_N+\theta}^{N,\varphi}\right| &= \left| \int_{\tau_N}^{\tau_N+\theta} \int_{\mathcal{W}} \gamma(w, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W}} [\varphi(w') - \varphi(w)] a(w, \nu_s^N, dw') \nu_s^N(dw) ds \right. \\ &\quad + \int_{\tau_N}^{\tau_N+\theta} \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \lambda(w_1, w_2, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}} [\varphi(w'_1) + \varphi(w'_2) - \varphi(w_1) - \varphi(w_2)] \\ &\quad \times b(w_1, w_2, \nu_s^N, dw'_1 \otimes dw'_2) \nu_s^N(dw_2) \nu_s^N(dw_1) ds \\ &\quad + \int_{\tau_N}^{\tau_N+\theta} \int_{\mathcal{W}} \beta(w, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W}} \varphi(w') c(w, \nu_s^N, dw') \nu_s^N(dw) ds \\ &\quad \left. - \int_{\tau_N}^{\tau_N+\theta} \int_{\mathcal{W}} \varphi(w) d(w, \nu_s^N) \nu_s^N(dw) ds \right| \\ &\leq \int_{\tau_N}^{\tau_N+\theta} 2\bar{\gamma} \|\varphi\|_{\infty} \langle \nu_s^N, 1 \rangle ds + \int_{\tau_N}^{\tau_N+\theta} 4\bar{\lambda} \|\varphi\|_{\infty} \langle \nu_s^N, 1 \rangle^2 ds \\ &\quad + \int_{\tau_N}^{\tau_N+\theta} \bar{\beta} \|\varphi\|_{\infty} \langle \nu_s^N, 1 \rangle ds + \int_{\tau_N}^{\tau_N+\theta} \bar{d} \|\varphi\|_{\infty} \langle \nu_s^N, 1 \rangle ds. \end{aligned}$$

de donde podemos concluir

$$\begin{aligned} \left|A_{\tau_N}^{N,\varphi} - A_{\tau_N+\theta}^{N,\varphi}\right| &\leq C \int_{\tau_N}^{\tau_N+\theta} \left[\langle \nu_s^N, 1 \rangle + \langle \nu_s^N, 1 \rangle^2 \right] ds \\ &\leq \theta C \left[\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_s^N, 1 \rangle + \sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_s^N, 1 \rangle^2 \right], \end{aligned}$$

donde $C \in \mathbb{R}$. Finalmente, en virtud del teorema 2.5, tomando esperanza obtenemos que $\mathbb{E}\left(\left|A_{\tau_N}^{N,\varphi} - A_{\tau_N+\theta}^{N,\varphi}\right|\right) \leq \theta \bar{C}$. De esta forma, dados $\varepsilon > 0$ y $\eta > 0$, por la desigualdad de Markov

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left|A_{\tau_N}^{N,\varphi} - A_{\tau_N+\theta}^{N,\varphi}\right| \geq \eta\right) &\leq \frac{\mathbb{E}\left(\left|A_{\tau_N}^{N,\varphi} - A_{\tau_N+\theta}^{N,\varphi}\right|\right)}{\eta} \\ &\leq \frac{\theta \bar{C}}{\eta}, \end{aligned}$$

con $\bar{C} \in \mathbb{R}$. Tomando $\delta = \frac{\eta \varepsilon}{\bar{C}}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ concluimos que

$$\sup_{N \geq n_0} \sup_{\theta \leq \delta} \mathbb{P}\left(\left|A_{\tau_N}^{N,\varphi} - A_{\tau_N+\theta}^{N,\varphi}\right| \geq \eta\right) \leq \varepsilon,$$

es decir, el proceso $A^{N,\varphi}$ satisface la condición [A]. Por otra parte, para verificar que $M^{N,\varphi}$ cumple [A], mediante el teorema A.10, tenemos que basta verificar que el proceso $\langle M^{N,\varphi} \rangle$ cumple [A]. Para esto, de la misma manera que antes, estimaremos la siguiente cantidad $\mathbb{E}\left(\left|\langle M^{N,\varphi} \rangle_{\tau_N} - \langle M^{N,\varphi} \rangle_{\tau_N+\theta}\right|\right)$ con $(\tau_N)_{N \in \mathbb{N}}$ una colección de tiempos de parada tales que $\tau_N \leq T$ casi seguramente. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\left|\langle M^{N,\varphi} \rangle_{\tau_N} - \langle M^{N,\varphi} \rangle_{\tau_N+\theta}\right| &= \left| \frac{1}{N} \int_{\tau_n}^{\tau_n+\theta} \int_{\mathcal{W}} \gamma(w, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W}} [\varphi(w') - \varphi(w)]^2 a(w, \nu_s^N, dw') \nu_s^N(dw) ds \right. \\
&\quad + \frac{1}{N} \int_{\tau_n}^{\tau_n+\theta} \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \lambda(w_1, w_2, \nu_s^N) \\
&\quad \times \int_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}} [\varphi(w'_1) + \varphi(w'_2) - \varphi(w_1) - \varphi(w_2)]^2 \\
&\quad \times b(w_1, w_2, \nu_s^N, dw'_1 \otimes dw'_2) \nu_s^N(dw_2) \nu_s^N(dw_1) ds \\
&\quad + \frac{1}{N} \int_{\tau_n}^{\tau_n+\theta} \int_{\mathcal{W}} \beta(w, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W}} \varphi(w')^2 c(w, \nu_s^N, dw') \nu_s^N(dw) ds \\
&\quad \left. + \frac{1}{N} \int_{\tau_n}^{\tau_n+\theta} \int_{\mathcal{W}} \varphi(w)^2 d(w, \nu_s^N) \nu_s^N(dw) ds \right| \\
&\leq \frac{1}{N} \int_{\tau_n}^{\tau_n+\theta} 4\bar{\gamma} \|\varphi\|_\infty^2 \langle \nu_s^N, 1 \rangle ds + \frac{1}{N} \int_{\tau_n}^{\tau_n+\theta} 16\bar{\lambda} \|\varphi\|_\infty^2 \langle \nu_s^N, 1 \rangle^2 ds \\
&\quad + \frac{1}{N} \int_{\tau_n}^{\tau_n+\theta} \bar{\beta} \|\varphi\|_\infty^2 \langle \nu_s^N, 1 \rangle ds + \frac{1}{N} \int_{\tau_n}^{\tau_n+\theta} \bar{d} \|\varphi\|_\infty^2 \langle \nu_s^N, 1 \rangle ds,
\end{aligned}$$

de esta forma obtenemos que

$$\left|\langle M^{N,\varphi} \rangle_{\tau_N} - \langle M^{N,\varphi} \rangle_{\tau_N+\theta}\right| \leq \frac{C}{N} \int_{\tau_n}^{\tau_n+\theta} \left[\langle \nu_s^N, 1 \rangle + \langle \nu_s^N, 1 \rangle^2 \right] ds.$$

Finalmente de la misma manera que como se hizo con $A_t^{N,\varphi}$, se concluye que $\langle M^{N,\varphi} \rangle_t$ cumple la propiedad.

Afirmamos de esta forma que el proceso X^N satisface tanto [T1] como [A], por lo que finalmente concluimos que su secuencia de leyes asociadas es tensa. Como esto es válido para cada $\varphi \in C_b(\mathcal{W})$, como se mencionó en un principio, esto implica que la secuencia de leyes de los proceso $(\nu^N)_{N>0}$ forman una familia tensa. \square

A continuación probaremos dos resultados que nos serán de utilidad más adelante y que tienen que ver con que la colección de medidas estudiadas no carga masa en el “infinito”. Más aún probaremos que cualquier punto límite cumple con una propiedad de este estilo.

Como \mathcal{W} es σ -compacto podemos tomar una familia de compactos $(\bar{\mathcal{W}}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tales que $\mathcal{W} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bar{\mathcal{W}}_i$, más aún podemos definir $\mathcal{W}_k = \bigcup_{i=1}^k \bar{\mathcal{W}}_i$, de donde cada \mathcal{W}_k resulta ser compacto y además $\mathcal{W}_k \nearrow \mathcal{W}$, cuando $k \rightarrow \infty$. Por otra parte consideraremos una familia

de funciones $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$, con $f_0 = 0$, continuas y acotadas tales que valen 0 en \mathcal{W}_k y 1 en $\mathcal{W} \setminus B(\mathcal{W}_k, \delta)$, donde $B(\mathcal{W}_k, \delta) = \{w \in \mathcal{W} : d(w, \mathcal{W}_k) < \delta\}$ y δ es un parámetro fijo. Como podemos notar \mathcal{W}_k y $\mathcal{W} \setminus B(\mathcal{W}_k, \delta)$ son en particular cerrados disjuntos, por lo que la existencia de esta familia de funciones se obtiene a partir del lema de Urysohn y además cumplen que $0 \leq f_k \leq \mathbf{1}_{\mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_k}$. Utilizando esta familia podemos probar que

Lema 5.6

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t^N, f_k \rangle \right) = 0 \quad (5.8)$$

DEMOSTRACIÓN. Primero notemos que

$$\begin{aligned} \langle \nu_t^N, f_k \rangle &\leq \langle \nu_0^N, f_k \rangle + M_t^{N, f_k} + \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \gamma(w, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W}} f_k(w') a(w, \nu_s^N, dw') \nu_s^N(dw) ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \lambda(w_1, w_2, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}} [f_k(w'_1) + f_k(w'_2)] b(w_1, w_2, \nu_s^N, dw'_1 \otimes dw'_2) \\ &\quad \times \nu_s^N(dw_2) \nu_s^N(dw_1) ds + \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \beta(w, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W}} f_k(w') c(w, \nu_s^N, dw') \nu_s^N(dw) ds \\ &\leq \langle \nu_0^N, f_k \rangle + M_t^{N, f_k} + \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \gamma(w, \nu_s^N) a(w, \nu_s^N, \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_k) \nu_s^N(dw) ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \lambda(w_1, w_2, \nu_s^N) b(w_1, w_2, \nu_s^N, \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_k \times \mathcal{W}) \nu_s^N(dw_2) \nu_s^N(dw_1) ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \lambda(w_1, w_2, \nu_s^N) b(w_1, w_2, \nu_s^N, \mathcal{W} \times \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_k) \nu_s^N(dw_2) \nu_s^N(dw_1) ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \beta(w, \nu_s^N) c(w, \nu_s^N, \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_k) \nu_s^N(dw) ds \\ &\leq \langle \nu_0^N, f_k \rangle + M_t^{N, f_k} + t\mu_a(\mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_k) \sup_{s \in [0, t]} \langle \nu_s^N, 1 \rangle + t\mu_b(\mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_k \times \mathcal{W}) \sup_{s \in [0, t]} \langle \nu_s^N, 1 \rangle \\ &\quad + t\mu_b(\mathcal{W} \times \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_k) \sup_{s \in [0, t]} \langle \nu_s^N, 1 \rangle + t\mu_c(\mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_k) \sup_{s \in [0, t]} \langle \nu_s^N, 1 \rangle \end{aligned}$$

luego tomando supremo y esperanza obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t^N, f_k \rangle \right) &\leq \mathbb{E}(\langle \nu_0^N, f_k \rangle) + \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} M_t^{N, f_k} \right) + T\mu_a(\mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_k) \mathbb{E} \left(\sup_{s \in [0, T]} \langle \nu_s^N, 1 \rangle \right) \\ &\quad + T\mu_b(\mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_k \times \mathcal{W}) \mathbb{E} \left(\sup_{s \in [0, T]} \langle \nu_s^N, 1 \rangle \right) + T\mu_c(\mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_k) \mathbb{E} \left(\sup_{s \in [0, T]} \langle \nu_s^N, 1 \rangle \right) \\ &\quad + T\mu_b(\mathcal{W} \times \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_k) \mathbb{E} \left(\sup_{s \in [0, T]} \langle \nu_s^N, 1 \rangle \right). \end{aligned}$$

luego tomando $\limsup_{N \rightarrow \infty}$ y recordando que $\sup_{N \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E}(\sup_{s \in [0, t]} \langle \nu_s^N, 1 \rangle) < \infty$, gracias al teorema 2.5 obtenemos

$$\begin{aligned} \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t^N, f_k \rangle \right) &\leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\langle \nu_0^N, f_k \rangle) + \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} M_t^{N, f_k} \right) \\ &\quad + C_T(\mu_a(\mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_k) + \mu_b(\mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_k \times \mathcal{W})) \\ &\quad + \mu_b(\mathcal{W} \times \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_k) + \mu_c(\mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_k). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Por otra parte tenemos la siguiente estimación

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} |M_t^{N, f_k}| \right) &= \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} |M_t^{N, f_k}| \right)^{2\frac{1}{2}} \\ &\leq \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} |M_t^{N, f_k}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\mathbb{E} \left((M_T^{N, f_k})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\mathbb{E}(\langle M^{N, f_k} \rangle_T)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

donde este último término converge a 0 cuando $N \rightarrow \infty$ gracias al lema 5.3. Es por esto que tomando $\lim_{k \rightarrow \infty}$ en (5.9) obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t^N, f_k \rangle \right) &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\langle \nu_0^N, f_k \rangle) + C_T \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu_a(\mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_k) \\ &\quad + \mu_b(\mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_k \times \mathcal{W}) + \mu_b(\mathcal{W} \times \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_k) + \mu_c(\mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_k)). \end{aligned}$$

Como $\mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_k \searrow \emptyset$ cuando $k \rightarrow \infty$ (de la misma manera $\mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_k \times \mathcal{W}$ y $\mathcal{W} \times \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_k$), por la continuidad de las medidas μ_a, μ_b y μ_c , se sigue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t^N, f_k \rangle \right) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\langle \nu_0^N, f_k \rangle).$$

Finalmente para verificar que $\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\langle \nu_0^N, f_k \rangle) = 0$ utilizamos que como ν_0^N converge en ley a cierta ν_0 determinista, al ser $\langle \cdot, f_k \rangle : (\mathcal{M}_f(\mathcal{W}), w) \rightarrow \mathbb{R}$ continua, tenemos que $\langle \nu_0^N, f_k \rangle$ converge en ley a $\langle \nu_0, f_k \rangle$. Además como $\sup_{N \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E}(\langle \nu_0^N, f_k \rangle^2) < \infty$, esto nos dice que la secuencia $(\langle \nu_0^N, f_k \rangle)_{N > 0}$ es uniformemente integrable, por lo que usando la convergencia en ley más la uniforme integrabilidad, en particular obtenemos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\langle \nu_0^N, f_k \rangle) = \mathbb{E}(\langle \nu_0, f_k \rangle) = \langle \nu_0, f_k \rangle.$$

Por último tomando límite en k se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\langle \nu_0^N, f_k \rangle) = 0.$$

De esta manera podemos concluir que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t^N, f_k \rangle \right) = 0.$$

□

Consideremos ahora la secuencia de leyes $\mathcal{Q}_N = \mathcal{L}_{\nu^N}$ sobre $D([0, T], (\mathcal{M}(\mathcal{W}), \nu))$ y tomemos una subsucesión convergente a \mathcal{Q} , la cual seguiremos denotando por $(\mathcal{Q}_N)_{N > 0}$ y cuya existencia está garantizada por la tensión de las leyes. Sea ν un proceso con ley \mathcal{Q} . En este caso tenemos los siguientes resultados

Corolario 5.7

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t, f_k \rangle \right) = 0. \quad (5.10)$$

DEMOSTRACIÓN. Para $k \in \mathbb{N}$ definamos $f_{k,l} = f_k(1 - f_l)$. Notamos a partir de la definición que $f_{k,l} \nearrow f_k$ cuando $l \rightarrow \infty$ y además tiene soporte compacto, por lo que a partir de esto podemos deducir que la aplicación $\nu \mapsto \sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t, f_{k,l} \rangle$ es continua sobre $D([0, T], (\mathcal{M}(\mathcal{W}), \nu))$. Usando que ν^N converge en ley a ν en $D([0, T], (\mathcal{M}(\mathcal{W}), \nu))$ obtenemos que

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t, f_{k,l} \rangle \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t^N, f_{k,l} \rangle \right) \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t^N, f_k \rangle \right) < \infty.$$

Tomando ahora $l \rightarrow \infty$ y usando convergencia monótona obtenemos

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t, f_k \rangle \right) \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t^N, f_k \rangle \right). \quad (5.11)$$

En particular observamos que para $k = 0$ obtenemos que

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t, 1 \rangle \right) < \infty. \quad (5.12)$$

Finalmente podemos tomar límite en (5.11) cuando $k \rightarrow \infty$ y concluimos gracias a 5.6. □

Más aún tenemos el siguiente resultado.

Lema 5.8 *El proceso ν es una solución del sistema (S1). Más aún, es la única.*

DEMOSTRACIÓN. Primero notemos que gracias a (5.12) el proceso satisface que $\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t, 1 \rangle < \infty$. Luego por argumentos de densidad basta chequear que ν resuelve (S1) para cada $\varphi \in$

$C_b(\mathcal{W})$ y todo $t \geq 0$. Sea entonces $\varphi \in C_b(\mathcal{W})$ y $t \geq 0$. Para $\nu \in C([0, \infty), \mathcal{M}_f(\mathcal{W}))$ definimos

$$\begin{aligned}
\Psi_t(\nu) = & \langle \nu_t, \varphi \rangle - \langle \nu_0, \varphi \rangle - \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \gamma(w, \nu_s) \int_{\mathcal{W}} [\varphi(w') - \varphi(w)] a(w, \nu_s, dw') \nu_s(dw) ds \\
& - \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \lambda(w_1, w_2, \nu_s) \int_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}} [\varphi(w'_1) + \varphi(w'_2) - \varphi(w_1) - \varphi(w_2)] \\
& \quad \times b(w_1, w_2, \nu_s, dw'_1 \otimes dw'_2) \nu_s(dw_2) \nu_s(dw_1) ds \\
& - \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \beta(w, \nu_s) \int_{\mathcal{W}} \varphi(w') c(w, \nu_s, dw') \nu_s(dw) ds \\
& + \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \varphi(w) d(w, \nu_s) \nu_s(dw) ds.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Debemos probar que bajo la ley límite $\mathbb{E}(|\Psi_t(\nu)|) = 0$. Para esto notemos primero que gracias a la proposición 5.2, $\forall N$ tenemos que $M_t^{N, \varphi} = \Psi_t(\nu^N)$. Ahora, en virtud del lema 5.3

$$\mathbb{E} \left(\left| M_t^{N, \varphi} \right|^2 \right) = \mathbb{E}(\langle M^{N, \varphi} \rangle_t) \leq \frac{C^{\varphi, t}}{N}, \tag{5.14}$$

lo cual se va a 0 cuando $N \rightarrow \infty$. Además, como ν es fuertemente continuo casi seguramente y φ es continua, tenemos que Ψ_t es continua en ν casi seguramente. Más aún para $\nu \in D([0, T], \mathcal{M}_f(\mathcal{W}))$,

$$|\Psi_t(\nu)| \leq C^{\varphi, t} \sup_{s \in [0, T]} (\langle \nu_s, 1 \rangle + \langle \nu_s, 1 \rangle^2). \tag{5.15}$$

De donde concluimos usando el teorema 2.5 que la secuencia $(\Psi_t(\nu^N))_{N \in \mathbb{N}}$ es uniformemente integrable, por lo que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|\Psi_t(\nu^N)|) = \mathbb{E}(|\Psi_t(\nu)|).$$

De esta forma usando (5.14) concluimos que $\mathbb{E}(|\Psi_t(\nu)|) = 0$.

Para concluir, gracias a la proposición 5.4, tenemos que ν es la única solución de (S1). \square

Utilizando este resultado es como concluimos que cada subsecuencia convergente de leyes converge al mismo límite ν , obteniendo así la convergencia de la totalidad de la secuencia. Por otra parte obtenemos que ν es determinista al ser la única solución de (S1). Además, gracias a esto y al corolario 5.7, se tiene que $\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t, 1 \rangle < \infty$.

Como acabamos de mencionar, los pasos anteriores implican que la secuencia $(\nu^N)_{N > 0}$ converge en ley a ν , la única solución de (S1), en $D([0, T], (\mathcal{M}(\mathcal{W}), v))$ por lo que para obtener el resultado que buscamos se hace necesario extender este resultado a $\mathcal{M}_f(\mathcal{W})$ dotado de la topología débil, lo cual probamos en lo que sigue. Para esto primero verificaremos que ν tiene trayectorias continuas cuando dotamos a $\mathcal{M}_f(\mathcal{W})$ de la topología débil.

Proposición 5.9 $\nu \in C([0, T], (\mathcal{M}_f(\mathcal{W}), w))$.

DEMOSTRACIÓN. Primero notemos que por construcción la amplitud de los saltos es de $\frac{1}{N}$, por lo que casi seguramente ocurre que

$$\sup_{t \in [0, T]} \sup_{\substack{f \in L^\infty(\mathcal{W}), \\ \|f\|_\infty \leq 1}} |\langle \nu_t^N, f \rangle - \langle \nu_{t-}^N, f \rangle| \leq \frac{1}{N}. \quad (5.16)$$

Fijando ahora $f \in C_c(\mathcal{W})$ y definiendo el operador $T^f(\nu) : D([0, T], (\mathcal{M}(\mathcal{W}), \nu)) \rightarrow \mathbb{R}$ por $T^f(\nu) = \sup_{t \in [0, T]} |\langle \nu_t, f \rangle - \langle \nu_{t-}, f \rangle|$, tenemos que resulta ser continuo al ser una composición de funciones continuas. Como $\nu^N \rightarrow \nu$ podemos deducir que $T^f(\nu^N) \Rightarrow T^f(\nu)$, pero observando (5.16) también tenemos que $T^f(\nu^N) \rightarrow 0$ casi seguramente, por lo que concluimos que $T^f(\nu) = 0$. Como $C_c(\mathcal{W})$ resulta ser separable, podemos repetir este razonamiento para cada función f en un conjunto denso y numerable, por lo que podemos concluir que $\nu_t = \nu_{t-}$, es decir, obtenemos que $\nu \in C([0, T], (\mathcal{M}(\mathcal{W}), \nu))$. Para extender esto a $C([0, T], (\mathcal{M}_f(\mathcal{W}), \mathbf{w}))$ notamos que, gracias al corolario 5.7, podemos extraer una subsucesión $(k_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tal que $\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t, f_{k_m} \rangle \searrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$ casi seguramente y esto nos permite probar que el conjunto de medidas $(\nu_t)_{t \in [0, T]}$ es tenso. En efecto basta notar que dado $\varepsilon > 0$, como $\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t, f_{k_m} \rangle$ converge a 0, $\exists m_\varepsilon$ tal que $\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t, f_{k_{m_\varepsilon}} \rangle \leq \varepsilon$ y recordando que $f_{k_{m_\varepsilon}}$ vale 1 en $\mathcal{W} \setminus B(\mathcal{W}_{k_{m_\varepsilon}}, \delta)$ junto con que $\mathcal{W}_k \nearrow \mathcal{W}$, podemos tomar \bar{k}_{m_ε} de manera tal que $B(\mathcal{W}_{k_{m_\varepsilon}}, \delta) \subseteq \mathcal{W}_{\bar{k}_{m_\varepsilon}}$ y así tener que $\mathbf{1}_{\mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_{\bar{k}_{m_\varepsilon}}} \leq f_{k_{m_\varepsilon}}$, para que de esta forma

$$\sup_{t \in [0, T]} \nu_t(\mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_{\bar{k}_{m_\varepsilon}}) \leq \varepsilon, \quad (5.17)$$

probando así la tensión que buscábamos. Finalmente, para concluir, tomamos una secuencia $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergiendo a t y debemos probar que $\nu_{t_n} \rightarrow \nu_t$ en $(\mathcal{M}_f(\mathcal{W}), \mathbf{w})$, pero por una parte ya sabemos que esta convergencia ocurre en $(\mathcal{M}(\mathcal{W}), \nu)$ y por otro lado tenemos que $(\nu_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia tensa, por lo que deducimos que se tiene la convergencia débil probando así lo que buscábamos. □

Proposición 5.10 $(\nu^N)_{N > 0}$ converge en ley a ν en $D([0, T], (\mathcal{M}_f(\mathcal{W}), \mathbf{w}))$.

DEMOSTRACIÓN. Para esto utilizaremos criterio dado por el teorema A.12. Por una parte ya tenemos que ν^N converge a ν en ley en $D([0, T], (\mathcal{M}(\mathcal{W}), \nu))$, por lo que basta probar que $\langle \nu^N, 1 \rangle$ converge a $\langle \nu, 1 \rangle$ en ley en $D([0, T], \mathbb{R})$ para finalizar la demostración. Con este fin consideraremos $F : D([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz continua y acotada, tenemos que

$$\begin{aligned} \limsup_{N \rightarrow \infty} |\mathbb{E}(F(\langle \nu^N, 1 \rangle)) - F(\langle \nu, 1 \rangle)| &\leq \limsup_{N \rightarrow \infty} (|\mathbb{E}(F(\langle \nu^N, 1 \rangle)) - F(\langle \nu^N, 1 - f_k \rangle)| + \\ &\quad |\mathbb{E}(F(\langle \nu^N, 1 - f_k \rangle)) - F(\langle \nu, 1 - f_k \rangle)| + \\ &\quad |\mathbb{E}(F(\langle \nu, 1 - f_k \rangle)) - F(\langle \nu, 1 \rangle)|). \end{aligned}$$

Dado que $|F(\langle \nu, 1 - f_k \rangle) - F(\langle \nu, 1 \rangle)| \leq C_F \sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t, f_k \rangle$, si ahora tomamos $\limsup_{k \rightarrow \infty}$

obtenemos

$$\begin{aligned}
& \limsup_{N \rightarrow \infty} |\mathbb{E}(F(\langle \nu^N, 1 \rangle) - F(\langle \nu, 1 \rangle))| \\
& \leq C_F \limsup_{k \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t^N, f_k \rangle \right) + \\
& \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} |\mathbb{E}(F(\langle \nu^N, 1 - f_k \rangle) - F(\langle \nu, 1 - f_k \rangle))| + \\
& \quad C_F \limsup_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t, f_k \rangle \right),
\end{aligned}$$

de donde podemos deducir que el primer y tercer término son nulos gracias al lema 5.6 y el corolario 5.7 respectivamente. Por último el segundo término es nulo debido a que la aplicación $\nu \mapsto \langle \nu, 1 - f_k \rangle$ es continua de $D([0, T], (\mathcal{M}(\mathcal{W}), \nu))$ a $D([0, T], \mathbb{R})$. Es decir, probamos que

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} |\mathbb{E}(F(\langle \nu^N, 1 \rangle) - F(\langle \nu, 1 \rangle))| = 0.$$

Esto implica que $\langle \nu^N, 1 \rangle$ converge a $\langle \nu, 1 \rangle$ en ley. Hecho esto concluimos el resultado directamente a partir del teorema A.12. \square

Para concluir este capítulo, y a modo de resumen, podemos agrupar todos los resultados previamente mencionados y construir la siguiente demostración para el resultado principal

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3.1. Gracias a la proposición 5.5 tenemos que las leyes asociadas a la secuencia de procesos $(\nu^N)_{N > 0}$ conforman una familia tensa sobre el espacio càdlàg $D([0, T], (\mathcal{M}(\mathcal{W}), \nu))$. Con esto en mente se verifica a partir del lema 5.8 que cada punto límite de la secuencia de leyes converge a la solución del sistema (S1). Mas aún, en virtud de la proposición 5.4, tenemos que cada subsecuencia convergente de las leyes converge al mismo valor, concluyendo de esta forma la convergencia de la secuencia completa, aunque con esto último aún siendo en el espacio $D([0, T], (\mathcal{M}(\mathcal{W}), \nu))$. A partir de esto también podemos deducir que ν es determinista y gracias al corolario 5.7, satisface $\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t, 1 \rangle < \infty$. Finalmente gracias a la proposición 5.9 se prueba que el proceso límite ν tiene trayectorias continuas y por último, en virtud de la proposición 5.10, se levanta la convergencia al espacio $D([0, T], (\mathcal{M}_f(\mathcal{W}), \mathbb{w}))$ concluyendo así el resultado. \square

Con esto finalizamos la demostración del teorema 3.1. Por último probaremos el corolario que le sigue.

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO 3.2. Consideremos $(\tau_i^N)_{i > 0}$ la secuencia de tiempos de parada que corresponden a los saltos del proceso ν_t^N . Tomemos $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ tal que $\mu(A) = 0$ y sea φ una función positiva cualquiera en $B(\mathcal{W})$ tal que su soporte esté contenido en A . Usando

(5.7), para cada $t \in [0, T]$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left\langle \nu_{t \wedge \tau_1^N}^N, \varphi \right\rangle\right) &= \mathbb{E}\left(\left\langle \nu_0^N, \varphi \right\rangle\right) + \mathbb{E}\left(M_{t \wedge \tau_1^N}^{N, \varphi}\right) \\
&+ \mathbb{E}\left(\int_0^{t \wedge \tau_1^N} \int_{\mathcal{W}} \gamma(w, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W}} [\varphi(w') - \varphi(w)] a(w, \nu_s^N, dw') \nu_s^N(dw) ds\right) \\
&+ \mathbb{E}\left(\int_0^{t \wedge \tau_1^N} \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \lambda(w_1, w_2, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}} [\varphi(w'_1) + \varphi(w'_2) - \varphi(w_1) - \varphi(w_2)] \right. \\
&\quad \left. \times b(w_1, w_2, \nu_s^N, dw'_1 \otimes dw'_2) \nu_s^N(dw_2) \nu_s^N(dw_1) ds\right) \\
&+ \mathbb{E}\left(\int_0^{t \wedge \tau_1^N} \int_{\mathcal{W}} \beta(w, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W}} \varphi(w') c(w, \nu_s^N, dw') \nu_s^N(dw) ds\right) \\
&- \mathbb{E}\left(\int_0^{t \wedge \tau_1^N} \int_{\mathcal{W}} \varphi(w) d(w, \nu_s^N) \nu_s^N(dw) ds\right),
\end{aligned}$$

de donde podemos observar que el primer término de la derecha es 0 pues φ está soportada en A y $\nu_0(A) = 0$. Para el segundo término podemos usar el teorema de muestreo opcional de Doob y concluir que también es 0. Por otra parte, para el tercer término, nos fijamos que para $s < \tau_1^N$ tenemos que $\nu_s^N = \nu_0$, de esta manera como

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left|\int_0^{t \wedge \tau_1^N} \int_{\mathcal{W}} \gamma(w, \nu_s^N) \int_{\mathcal{W}} [\varphi(w') - \varphi(w)] a(w, \nu_s^N, dw') \nu_s^N(dw) ds\right|\right) \\
&\leq \bar{\gamma} \mathbb{E}\left(\int_0^{t \wedge \tau_1^N} \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} |\varphi(w') - \varphi(w)| a(w, \nu_0^N, dw') \nu_0^N(dw) ds\right),
\end{aligned}$$

tendremos que es 0, nuevamente porque el soporte de φ está contenido en A y la medida $\int_{\mathcal{W}} a(w, \nu_0, \cdot) \nu_0(dw)$ es absolutamente continua con respecto a μ . Análogamente, para el cuarto y quinto término, concluimos de la misma manera que con 0. Finalmente, para el último, basta notar que

$$\mathbb{E}\left(\left|\int_0^{t \wedge \tau_1^N} \int_{\mathcal{W}} \varphi(w) d(w, \nu_s^N) \nu_s^N(dw) ds\right|\right) \leq \bar{d} \mathbb{E}((t \wedge \tau_1^N) \langle \nu_0, \varphi \rangle) = 0.$$

De esta forma obtenemos que la esperanza del lado izquierdo es 0, y como φ es positiva concluimos que $\langle \nu_{t \wedge \tau_1^N}^N, \varphi \rangle = 0$ casi seguramente. En particular concluimos que ν_t^N es absolutamente continua con respecto a μ para cada $t \in [0, \tau_1^N]$. Usando ahora la propiedad de Markov fuerte podemos obtener inductivamente que $\langle \nu_{t \wedge \tau_i^N}^N, \varphi \rangle = 0$ para cada $i > 0$ y $t \in [0, T]$ con probabilidad 1. Como hay finitos saltos antes de T con probabilidad 1, podemos concluir que $\langle \nu_t^N, \varphi \rangle = 0$ casi seguramente para cada t en $[0, T]$. Por último, en virtud del teorema 3.1, si ν_t es el límite en distribución de ν_t^N y $\varphi \in C_b(\mathcal{W})$, tenemos que

$$\mathbb{E}(\langle \nu_t^N, \varphi \rangle) \rightarrow \langle \nu_t, \varphi \rangle, \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty.$$

De esta manera concluimos que $\langle \nu_t, \varphi \rangle = 0$ para todo $t \in [0, T]$ cuando φ tiene su soporte contenido en A , probando así el resultado. \square

Capítulo 6

Sobre un teorema central

El teorema 3.1 nos entrega una ley de grandes números para ν_t^N en el sentido que obtiene un límite determinístico para el proceso puntual a medida que reescalamos por $\frac{1}{N}$ y tomamos $N \rightarrow \infty$. Siguiendo las ideas planteadas en [12] nos gustaría probar que bajo hipótesis adicionales también podemos obtener un teorema central del límite para nuestro proceso, específicamente, nos gustaría decir que las fluctuaciones de ν_t^N cerca del límite ν_t son de orden $\frac{1}{\sqrt{N}}$ y asintóticamente son de naturaleza gaussiana.

En el presente capítulo buscaremos proponer hipótesis con el fin de tener un teorema central para el proceso de fluctuación definido por $\sigma_t^N = \sqrt{N}(\nu_t^N - \nu_t)$.

6.1. Contexto general

El estudio del proceso $(\sigma_t^N)_{t \in [0, T]}$ resulta ser más complicado que el realizado para $(\nu_t^N)_{t \in [0, T]}$, debido a que las fluctuaciones son medidas con signo, lo cual complica las cosas al momento de estudiar la convergencia en distribución puesto que el espacio de las medidas con signo no se comporta bien para la convergencia débil. Para superar esta dificultad se considera el proceso de fluctuaciones tomando valores en el dual de un espacio de Hilbert conveniente y se desea probar la convergencia en este espacio. Más aún, se espera que resulte necesario considerar una secuencia de inclusiones de espacios de Hilbert y Banach con el fin de controlar la norma de las fluctuaciones.

En lo que sigue consideraremos los mismos espacios utilizados en [12]

- (i) $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ y \mathcal{H}_4 son espacios de Hilbert de funciones medibles sobre \mathcal{W} .
- (ii) $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_2$ y \mathcal{C}_3 son espacios Banach de funciones continuas sobre \mathcal{W} .
- (iii) $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4 : \mathcal{W} \rightarrow [1, \infty)$ son funciones continuas que cumplen con $\rho_i \leq \rho_{i+1}$ para $i = 0, 1, 2, 3$, $\rho_i \in \mathcal{C}_i$ para $i = 0, 2, 3$ y además existe $C > 0$ y $p > 1$ tal que $\rho_1^p \leq C\rho_4$.

(iv) Se tiene la siguiente cadena de inclusiones continuas

$$\mathcal{C}_0 \hookrightarrow \mathcal{H}_1 \xrightarrow{c} \mathcal{H}_2 \hookrightarrow \mathcal{C}_2 \hookrightarrow \mathcal{H}_3 \hookrightarrow \mathcal{C}_3 \hookrightarrow \mathcal{H}_4. \quad (\text{C1})$$

Particularmente la inclusión de \mathcal{H}_1 en \mathcal{H}_2 es compacta.

(v) Para $i = 1, 2, 3, 4$, si $\varphi \in \mathcal{H}_i$ tenemos

$$|\varphi(w)| \leq C \|\varphi\|_{\mathcal{H}_i} \rho_i(w), \quad (\text{C2})$$

para cada $w \in \mathcal{W}$ y cierta constante $C > 0$.

(vi) Para $i = 0, 2, 3$, si $\varphi \in \mathcal{C}_i$ tenemos

$$|\varphi(w)| \leq C \|\varphi\|_{\mathcal{C}_i} \rho_i(w) \quad (\text{C3})$$

para cada $w \in \mathcal{W}$ y cierta constante $C > 0$.

Denotaremos por \mathcal{H}'_i y \mathcal{C}'_i a los duales de los espacios \mathcal{H}_i y \mathcal{C}_i respectivamente, dotados con sus respectivas normas de operadores (en particular \mathcal{H}'_i y \mathcal{C}'_i son espacios de Hilbert y Banach). Observamos que (C1) implica la siguiente inclusión continua de los duales

$$\mathcal{H}'_4 \hookrightarrow \mathcal{C}'_3 \hookrightarrow \mathcal{H}'_3 \hookrightarrow \mathcal{C}'_2 \hookrightarrow \mathcal{H}'_2 \xrightarrow{c} \mathcal{H}'_1 \hookrightarrow \mathcal{C}'_0. \quad (\text{C1}')$$

A continuación buscaremos extender las hipótesis sobre las tasas presentadas en [12] añadiendo condiciones sobre las tasas de nacimiento y muerte. Además con las siguientes hipótesis se busca linealizar la dependencia de la distribución en las tasas para así poder obtener más adelante una expresión para σ_t^N .

Hipótesis D.

(D1) Existe una familia de medidas finitas $\{\Gamma(w, z, \cdot)\}_{w, z \in \mathcal{W}}$ en \mathcal{W} cuyas masas totales están acotadas por $\bar{\gamma}$ y tal que $\forall w \in \mathcal{W}$ y cada $\nu \in \mathcal{M}_f(\mathcal{W})$

$$\gamma(w, \nu) a(w, \nu, dw') = \int_{\mathcal{W}} \Gamma(w, z, dw') \nu(dz).$$

$\Gamma(w, z, \cdot)$ es medible en w y continua en z .

(D2) Existe una familia de medidas finitas $\{\Lambda(w_1, w_2, z, \cdot)\}_{w_1, w_2, z \in \mathcal{W}}$ en $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$ cuyas masas totales están acotadas por $\bar{\lambda}$ y tal que $\forall w_1, w_2 \in \mathcal{W}$ y cada $\nu \in \mathcal{M}_f(\mathcal{W})$

$$\lambda(w_1, w_2, \nu) b(w_1, w_2, \nu, dw'_1 \otimes dw'_2) = \int_{\mathcal{W}} \Lambda(w_1, w_2, z, dw'_1 \otimes dw'_2) \nu(dz).$$

$\Lambda(w_1, w_2, z, \cdot)$ es medible en w_1, w_2 y continua en z .

(D3) Existe una familia de medidas finitas $\{B(w, z, \cdot)\}_{w, z \in \mathcal{W}}$ en \mathcal{W} cuyas masas totales están acotadas por $\bar{\beta}$ y tal que $\forall w \in \mathcal{W}$ y cada $\nu \in \mathcal{M}_f(\mathcal{W})$

$$\beta(w, \nu) c(w, \nu, dw') = \int_{\mathcal{W}} B(w, z, dw') \nu(dz).$$

$B(w, z, \cdot)$ es medible en w y continua en z .

(D4) Existe una familia de funciones $\{\Delta(w, \cdot)\}_{w \in \mathcal{W}}$ sobre \mathcal{W} acotadas por \bar{d} y tal que $\forall w \in \mathcal{W}$ y cada $\nu \in \mathcal{M}_f(\mathcal{W})$

$$d(w, \nu) = \int_{\mathcal{W}} \Delta(w, z) \nu(dz).$$

Introduciremos la siguiente notación: dada una función medible φ sobre \mathcal{W} , sean

$$\Gamma\varphi(w; z) = \int_{\mathcal{W}} [\varphi(w') - \varphi(w)] \Gamma(w, z, dw'),$$

$$\Lambda\varphi(w_1, w_2; z) = \int_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}} [\varphi(w'_1) + \varphi(w'_2) - \varphi(w_1) - \varphi(w_2)] \Lambda(w_1, w_2, z, dw'_1 \otimes dw'_2),$$

$$B\varphi(w; z) = \int_{\mathcal{W}} \varphi(w') B(w, z, dw') \quad \text{y}$$

$$\Delta\varphi(w; z) = \varphi(w) \Delta(w, z).$$

Estas cantidades se pueden pensar como los kernels de salto del proceso asociado con el efecto de un individuo de tipo z en las tasas de transición. Promediando estas tasas con respecto a $\nu_t^N(dz)$ nos entrega el kernel total de salto para el proceso.

A continuación fijaremos hipótesis de finitud entre las tasas y las funciones ρ_i , lo cual nos permitirá más adelante verificar que σ_t^N toma valores en el espacio que necesitamos.

Hipótesis E.

(E1) Existe una constante $C > 0$ tal que para todo $w, z \in \mathcal{W}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$

$$\int_{\mathcal{W}} \rho_i^2(w') \Gamma(w, z, dw') < C(\rho_i^2(w) + \rho_i^2(z)).$$

(E2) Existe una constante $C > 0$ tal que para todo $w_1, w_2, z \in \mathcal{W}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$

$$\int_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}} [\rho_i^2(w'_1) + \rho_i^2(w'_2)] \Lambda(w_1, w_2, z, dw'_1 \otimes dw'_2) < C(\rho_i^2(w_1) + \rho_i^2(w_2) + \rho_i^2(z)).$$

(E3) Existe una constante $C > 0$ tal que para todo $w, z \in \mathcal{W}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$

$$\int_{\mathcal{W}} \rho_i^2(w') B(w, z, dw') < C(\rho_i^2(w) + \rho_i^2(z)).$$

(E4) Existe una constante $C > 0$ tal que para todo $w, z \in \mathcal{W}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$

$$\rho_i^2(w) \Delta(w, z) < C(\rho_i^2(w) + \rho_i^2(z)).$$

(E5) Sean $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_f(\mathcal{W})$ tales que $\langle \mu_i, \rho_4^2 \rangle < \infty$ y definiendo el siguiente operador actuando sobre funciones medibles φ sobre \mathcal{W}

$$\begin{aligned} J_{\mu_1, \mu_2} \varphi(z) &= \int_{\mathcal{W}} \Gamma \varphi(w; z) \mu_1(dw) + \int_{\mathcal{W}} \Gamma \varphi(z; x) \mu_1(dx) \\ &+ \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \Lambda \varphi(w_1, w_2; z) \mu_1(dw_2) \mu_1(dw_1) + \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \Lambda \varphi(w, z; x) \mu_1(dw) \mu_2(dx) \\ &+ \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \Lambda \varphi(z, w; x) \mu_2(dw) \mu_2(dx) + \int_{\mathcal{W}} B \varphi(w; z) \mu_1(dw) \\ &+ \int_{\mathcal{W}} B \varphi(z; x) \mu_2(dx) - \int_{\mathcal{W}} \Delta \varphi(w; z) \mu_1(dw) - \int_{\mathcal{W}} \Delta \varphi(z; x) \mu_2(dx), \end{aligned}$$

entonces tenemos que

- (i) J_{μ_1, μ_2} es un operador acotado en \mathcal{C}_i para $i = 0, 2, 3$. Más aún, su norma puede ser acotada de manera uniforme en μ_1 y μ_2 .
- (ii) Existe una constante $C > 0$ tal que para cada $\varphi \in \mathcal{C}_0$ y cada $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \in \mathcal{M}_f(\mathcal{W})$ que cumplan con $\langle \mu_i, \rho_4^2 \rangle < \infty$ se tiene que

$$\|(J_{\mu_1, \mu_2} - J_{\mu_3, \mu_4})\varphi\|_{\mathcal{C}_0} \leq C \|\varphi\|_{\mathcal{C}_0} \left(\|\mu_1 - \mu_3\|_{\mathcal{C}'_2} + \|\mu_2 - \mu_4\|_{\mathcal{C}'_2} \right).$$

6.2. Ecuación límite

Asumiendo las hipótesis definidas anteriormente podemos probar la siguiente propiedad que muestra la necesidad de estas hipótesis si es que buscamos obtener un resultado límite para σ^N .

Proposición 6.1 *Asumiendo que $\sup_{N>0} \mathbb{E}(\langle \nu_0^N, \rho_4^2 \rangle) < \infty$ y $\mathbb{E}(\langle \nu_0, \rho_4^2 \rangle) < \infty$, se tienen las siguientes propiedades*

$$\sup_{N>0} \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t^N, \rho_4^2 \rangle \right) < \infty \quad y \quad (6.1)$$

$$\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t, \rho_4^2 \rangle < \infty. \quad (6.2)$$

La demostración la podemos encontrar en el apéndice A.13. Esta proposición hace uso de las hipótesis D y E y su importancia radica en la necesidad de esta propiedad para probar que los mapeos $\varphi \in \mathcal{H}_4 \mapsto \langle \nu_t^N, \varphi \rangle$ y $\varphi \in \mathcal{H}_4 \mapsto \langle \nu_t, \varphi \rangle$ están en \mathcal{H}'_4 (casi seguramente y para cada $N > 0$) para cada $t \in [0, T]$. Hecho esto, se espera que no se necesiten hipótesis adicionales.

Suponiendo lo anterior, se describe a continuación un esquema que podría llevar a probar el resultado de convergencia para σ^N .

Una vez que se logra extender $\langle \nu_t^N, \cdot \rangle$ y $\langle \nu_t, \cdot \rangle$ a \mathcal{H}'_4 obtendríamos que el proceso de fluctuación σ_t^N está bien definido como un proceso tomando valores en \mathcal{H}'_4 . Ahora veamos que reescribiendo (5.7) de acuerdo a la hipótesis D obtendríamos

$$\begin{aligned} \langle \nu_t^N, \varphi \rangle &= \langle \nu_0^N, \varphi \rangle + M_t^{N,\varphi} + \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \Gamma \varphi(w; z) \nu_s^N(dz) \nu_s^N(dw) ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \Gamma \varphi(w_1, w_2; z) \nu_s^N(dz) \nu_s^N(dw_2) \nu_s^N(dw_1) ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} B \varphi(w; z) \nu_s^N(dz) \nu_s^N(dw) ds - \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \Delta \varphi(w; z) \nu_s^N(dw) \nu_s^N(dz) ds. \end{aligned}$$

Si ahora restamos $\langle \nu_t, \varphi \rangle$ y luego multiplicamos por \sqrt{N} obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \sigma_t^N, \varphi \rangle &= \langle \sigma_0^N, \varphi \rangle + \sqrt{N} M_t^{N,\varphi} + \sqrt{N} \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \Gamma \varphi(w; z) [\nu_s^N(dz) \nu_s^N(dw) - \nu_s(dz) \nu_s(dw)] ds \\ &\quad + \sqrt{N} \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \Lambda \varphi(w_1, w_2; z) [\nu_s^N(dz) \nu_s^N(dw_2) \nu_s^N(dw_1) - \nu_s(dz) \nu_s(dw_2) \nu_s(dw_1)] ds \\ &\quad + \sqrt{N} \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} B \varphi(w; z) [\nu_s^N(dz) \nu_s^N(dw) - \nu_s(dz) \nu_s(dw)] ds \\ &\quad - \sqrt{N} \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \Delta \varphi(w; z) [\nu_s^N(dw) \nu_s^N(dz) - \nu_s(dw) \nu_s(dz)] ds. \end{aligned}$$

Reescribiendo esto de la forma

$$\begin{aligned} \langle \sigma_t^N, \varphi \rangle &= \langle \sigma_0^N, \varphi \rangle + \sqrt{N} M_t^{N,\varphi} + \sqrt{N} \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \Gamma \varphi(w; z) [\nu_s(dz) \sigma_s^N(dw) + \sigma_s^N(dz) \nu_s^N(dw)] ds \\ &\quad + \sqrt{N} \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \Lambda \varphi(w_1, w_2; z) [\sigma_s^N(dz) \nu_s^N(dw_2) \nu_s^N(dw_1) \\ &\quad + \nu_s(dz) \sigma_s^N(dw_2) \nu_s^N(dw_1) + \nu_s(dz) \nu_s(dw_2) \sigma_s^N(dw_1)] ds \\ &\quad + \sqrt{N} \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} B \varphi(w; z) [\nu_s(dz) \sigma_s^N(dw) + \sigma_s^N(dz) \nu_s^N(dw)] ds \\ &\quad - \sqrt{N} \int_0^t \int_{\mathcal{W}} \Delta \varphi(w; z) [\nu_s(dz) \sigma_s^N(dw) + \sigma_s^N(dz) \nu_s^N(dw)] ds, \end{aligned}$$

podemos observar que se tiene lo siguiente

$$\langle \sigma_t^N, \varphi \rangle = \langle \sigma_0^N, \varphi \rangle + \sqrt{N} M_t^{N,\varphi} + \int_0^t \langle \sigma_s^N, J_s^N \varphi \rangle ds, \quad (6.3)$$

para $\varphi \in \mathcal{H}_4$, donde

$$\begin{aligned}
J_s^N \varphi(z) &= \int_{\mathcal{W}} \Gamma \varphi(w; z) \nu_s^N(dw) + \int_{\mathcal{W}} \Gamma \varphi(z; x) \nu_s(dx) + \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \Lambda \varphi(w_1, w_2; z) \nu_s^N(dw_2) \nu_s^N(dw_1) \\
&+ \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \Lambda \varphi(w, z; x) \nu_s^N(dw) \nu_s(dx) + \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \Lambda \varphi(z, w; x) \nu_s(dw) \nu_s(dx) \\
&+ \int_{\mathcal{W}} B \varphi(w; z) \nu_s^N(dw) + \int_{\mathcal{W}} B \varphi(z; x) \nu_s(dx) \\
&- \int_{\mathcal{W}} \Delta \varphi(w; z) \nu_s^N(dw) - \int_{\mathcal{W}} \Delta \varphi(z; x) \nu_s(dx),
\end{aligned}$$

Gracias a esto obtenemos una idea heurística, a partir de (6.3), sobre cómo debería lucir el límite.

Siguiendo más allá de esto, a continuación se deberían probar dos cotas en \mathcal{H}'_4 , con el fin de lograr darle sentido a la ecuación

$$\sigma_t^N = \sigma_0^N + \sqrt{N} M_t^N + \int_0^t (J_s^N)^* \sigma_s^N ds,$$

en \mathcal{H}'_3 . Finalmente, luego de probar una cota uniforme para σ_t^N en \mathcal{C}'_2 , se podría pasar a probar el teorema central utilizando un esquema similar a como se hizo para el teorema 3.1. Se comienza probando tensión de σ_t^N en $D([0, T], \mathcal{H}'_1)$ utilizando los mismos resultados auxiliares de Aldous y Rebolledo junto con la inclusión compacta de \mathcal{H}'_2 en \mathcal{H}'_1 , luego se probaría que cada punto límite de σ_t^N está en $C([0, T], \mathcal{H}'_1)$. Por otra parte se prueba gracias al teorema central de martingalas que $\sqrt{N} M_t^N$ converge en distribución en $D([0, T], \mathcal{H}'_1)$ a un proceso gaussiano centrado Z_t . Finalmente se pasa a \mathcal{C}'_0 gracias a la inclusión de \mathcal{H}'_1 en este espacio y se prueba que cada punto límite σ_t satisface para cada $\varphi \in \mathcal{C}_0$ un sistema de ecuaciones. Se concluye probando unicidad trayectorial y en ley para el sistema recién mencionado.

Concluimos enfatizando que si se lograra realizar lo recién descrito, en virtud de (6.3) se obtendría que la secuencia de procesos σ_t^N converge en distribución en $D([0, T], \mathcal{H}'_1)$ a un proceso $\sigma_t \in C([0, T], \mathcal{H}'_1)$, que es la única solución en distribución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas sobre \mathcal{C}'_0

$$\sigma_t = \sigma_0 + \int_0^t J_s^* \sigma_s ds + Z_t,$$

donde $J_s = J_{\nu_s, \nu_s}$.

Conclusión

En el presente trabajo se logró modelar una simplificación de un fenómeno que ocurre en la realidad y a partir de esto se logró obtener más información de este utilizando diversas herramientas. Específicamente se consiguió formalizar el modelo propuesto a partir del modelo enunciado por D. Remenik en [12], entregando su representación trayectorial como proceso puntual y también probando un resultado, dado por el teorema 3.1, que nos permite identificar el proceso límite que obtenemos al considerar $N \rightarrow \infty$ como la solución de un sistema de ecuaciones determinista.

Contrastando con [12] en este caso se tuvo que añadir la hipótesis de σ -compacidad al espacio \mathcal{W} , además de considerar una hipótesis extra sobre las medidas de distribución, para poder concluir que tanto el proceso puntual normalizado como la medida límite no cargan masa en el infinito y así poder concluir la convergencia en $D([0, T], (\mathcal{M}_f(\mathcal{W}), w))$. Junto a esto cabe mencionar que el esquema utilizado para probar este tipo de resultados al considerar propiedades de martingala, argumentos de tensión y unicidad, prueba ser efectivo.

Por otra parte, al momento de aplicar el resultado principal obtenido, se obtuvieron resultados teóricos que se condicen con la intuición para los distintos ejemplos. Sin embargo no se logró aplicar el resultado al modelo presentado en [5] debido a que este no cumplía todas las hipótesis necesarias, lo que llevó a considerar una simplificación del modelo. A raíz de esto último se descubrió que al momento de definir los parámetros que determinan a los modelos, la dificultad recae finalmente en hacer que las tasas y las medidas con las que escogemos un nuevo tipo dependan de la distribución del sistema y a la vez satisfagan las hipótesis establecidas. Esto motiva dejar planteada la tarea de relajar las condiciones sobre las tasas y así poder ampliar aún más el espectro de modelos a estudiar.

Por último, al plantear las hipótesis que se creen necesarias para probar el teorema central del límite, queda abierta la pregunta de si se puede probar un resultado de este tipo para el modelo estudiado en este trabajo. De todos modos considerando el esquema de demostración expuesto, las expectativas resultan ser favorables.

En resumen este trabajo presenta un resultado que logra explicar el comportamiento límite de un reescalamiento del proceso puntual asociado al nuevo modelo, esto para una amplia colección de parámetros. Se presentan además las ideas a seguir para poder probar un resultado del tipo teorema central junto con abrir la interrogante sobre nuevas generalizaciones en relación a las tasas para este tipo de procesos.

Apéndice A

Apéndice

En este apartado reunimos algunos resultados que son de utilidad en el texto principal para una fácil referencia. Omitimos la mayoría de las demostraciones y se adjuntan las referencias en la literatura según sea el caso.

A.1. Resultados generales

Lema A.1 (Gronwall) *Sea μ una medida en $([0, \infty), \mathcal{B}_{[0, \infty)})$, sea $\varepsilon \geq 0$, y sea f una función medible que es acotada en intervalos acotados y satisface*

$$0 \leq f(t) \leq \varepsilon + \int_0^t f(s)\mu(ds), \quad \forall t \geq 0.$$

Entonces se cumple que

$$f(t) \leq \varepsilon e^{\mu([0, t])}, \quad \forall t \geq 0.$$

Definición A.2 *Sea (U, λ) un espacio de probabilidad estándar, sea \mathcal{X} un espacio polaco y consideremos el espacio $(\mathcal{P}(\mathcal{X}), d)$. Diremos que una función medible $\rho : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \times U \rightarrow \mathcal{X}$ es una representación de $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ si para cada $m \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ la función $\rho_m : U \rightarrow \mathcal{X}$, definida por $\rho_m(u) = \rho(m, u)$ tiene distribución m (con respecto a λ en U). La representación ρ es continua en m si, salvo por un conjunto λ negligible, $\rho(\cdot, u)$ es continua en m .*

Teorema A.3 (Blackwell, Dubins [2]) *$\mathcal{P}(\mathcal{X})$ tiene una representación ρ que es continua en todas partes.*

Teorema A.4 (Fórmula de Itô) *Sea X una semimartingala y f una función real de clase C^2 . Entonces $f(X)$ es una semimartingala, además se tiene la siguiente fórmula:*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_{s-})dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_{s-})d[X, X]_s^c + \sum_{0 < s \leq t} \{f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})\Delta X_s\}.$$

A.2. Sobre tensión

Teorema A.5 (Teorema 2.1 en [14]) *Sea \mathcal{E} un espacio métrico localmente compacto y $(\mathcal{M}(\mathcal{E}), \nu)$. Consideremos además una secuencia $(\mathcal{Q}^N)_{N \in \mathbb{N}}$ de medidas de probabilidad en $D([0, T], (\mathcal{M}(\mathcal{E}), \nu))$, $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una secuencia densa en $C_0(\mathcal{E})$ y la función $\pi_\varphi : \mathcal{M}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\pi_\varphi(\nu) = \langle \nu, \varphi \rangle$. Si para cada $k \in \mathbb{N}$, $(\pi_{\varphi_k} \mathcal{Q}^N)_{N \in \mathbb{N}}$ es una secuencia tensa de probabilidades en $D([0, T], \mathbb{R})$, entonces $(\mathcal{Q}^N)_{N \in \mathbb{N}}$ es tensa en $D([0, T], (\mathcal{M}(\mathcal{E}), \nu))$.*

Definición A.6 ([7]) *Sea \mathcal{E} un espacio métrico completo y separable con métrica d . Para $x \in D(\mathbb{R}^+, \mathcal{E})$ definimos para cada $N > 0$ y $\delta > 0$*

$$w^N(x, \delta) := \inf_{\Pi_\delta} \max_{t_i \in \Pi} \sup_{t_i \leq s < t < t_{i+1}} d(x(t), x(s)),$$

donde Π_δ es el conjunto de todas las secuencias crecientes $t = t_0 < t_1 < \dots < t_n < N$ en \mathbb{R}_+ con la propiedad de que $\inf_{t_i \in \mathbb{N}} |t_{i+1} - t_i| \geq \delta$.

Proposición A.7 ([7]) *Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia de procesos definidos en sus respectivos espacios de probabilidad $(\Omega^n, \mathcal{A}, \mathbb{P}^n)$ a valores en un espacio métrico completo y separable \mathcal{E} . La secuencia $\bar{\mathbb{P}}^n = \mathcal{L}_{X^n}$ es tensa si y solo si se satisfacen*

[T1] $\forall t \in \mathcal{T} \subset \mathbb{R}^+$ denso, las leyes de las variables aleatorias $(X_t^n)_{n \in \mathbb{N}}$ forman una secuencia tensa de leyes en \mathcal{E} .

[T2] $\forall N > 0, \eta > 0, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$$\limsup_N \sup_n \mathbb{P}^n(\{\omega \in \Omega^n : w^N(X^n(\cdot, \omega), \delta) > \eta\}) \leq \varepsilon.$$

Definición A.8 (Definición 2.2.1 en [7]) *Diremos que la secuencia $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisface la condición de Aldous [A] ó [A'], si*

[A] $\forall N > 0, \varepsilon > 0, \eta > 0, \exists \delta > 0$ y n_0 tal que para cualquier familia de tiempos de parada $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (τ_n es \mathcal{F}^n -t.d.p.) con $\tau_n \leq N$

$$\sup_{n \geq n_0} \sup_{\theta \leq \delta} \mathbb{P}^n(d(X_{\tau_n}^n, X_{\tau_n + \theta}^n) \geq \eta) \leq \varepsilon.$$

[A'] $\forall N > 0, \varepsilon > 0, \eta > 0, \exists \delta > 0$ y n_0 tal que para cualquier secuencia de tiempos de parada $(\sigma_n, \tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (σ, τ_n \mathcal{F}^n -t.d.p.) con $\sigma_n \leq \tau_n \leq N$

$$\sup_{n \geq n_0} \mathbb{P}^n(d(X_{\sigma_n}^n, X_{\tau_n}^n) \geq \eta, \tau_n \leq \sigma_n + \delta) \leq \varepsilon.$$

Teorema A.9 (Teorema 2.2.2 en [7]) *Las condiciones [A] y [A'] son equivalentes e implican la condición de tensión [T2].*

Teorema A.10 (Teorema 2.3.2 en [7]. Rebolledo) *Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert separable y $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia de procesos a valores en \mathcal{H} que son martingalas localmente cuadrado integrable y continuas a la derecha definidas en sus propios espacios de probabilidad*

$(\Omega^n, (\mathcal{F}_t^n), \mathbb{P}^n)$. Sea $\langle M^n \rangle$ ($[M^n]$) el proceso creciente de Meyer asociado (variación cuadrática). Entonces si el proceso $(\langle M^n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ satisface la condición [A], la misma condición se mantiene para $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $([M^n])_{n \in \mathbb{N}}$. Si \mathcal{H} es finito dimensional y si los procesos $(\langle M^n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfacen la condición [T1], entonces la misma condición se mantiene para $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $([M^n])_{n \in \mathbb{N}}$.

Corolario A.11 (Corolario 2.3.3 en [7]) Si $(X^N)_{N \geq 0}$ es una secuencia de semimartingalas finito dimensionales de la forma $X^N = A^N + M^N$ con A^N un proceso de variación finita y M^N una martingala localmente cuadrado integrable, y si las secuencias (A^N) y $(\langle M^N \rangle)$ satisfacen las condiciones [T1] y [A], las leyes de la secuencia $(X^N)_{N \geq 0}$ forman una familia tensa.

Teorema A.12 (Teorema 3 en [10]) Sea $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $D([0, T], (\mathcal{M}(\mathcal{E}), w))$ una secuencia de procesos y μ en $C([0, T], (\mathcal{M}(\mathcal{E}), w))$, donde \mathcal{E} es un espacio localmente compacto con base numerable. Entonces tenemos que μ_n converge en ley a μ en $D([0, T], (\mathcal{M}(\mathcal{E}), w))$ si y solamente si μ_n converge a μ en ley en $D([0, T], (\mathcal{M}(\mathcal{E}), v))$ y $\langle \mu_n, 1 \rangle$ converge en ley a $\langle \mu, 1 \rangle$ en $D([0, T], \mathbb{R})$.

A.3. Demostraciones

Proposición A.13 Asumiendo que $\sup_{N > 0} \mathbb{E}(\langle \nu_0^N, \rho_4^2 \rangle) < \infty$ y $\mathbb{E}(\langle \nu_0, \rho_4^2 \rangle) < \infty$, se tienen las siguientes propiedades

$$\sup_{N > 0} \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t^N, \rho_4^2 \rangle \right) < \infty \quad y \quad (A.1)$$

$$\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t, \rho_4^2 \rangle < \infty. \quad (A.2)$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos que utilizando (2.6) con la función $\nu \mapsto \sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t, \rho_4^2 \rangle$ obtenemos la siguiente cota si despreciamos los terminos negativos y luego tomamos supremo

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t^N, \rho_4^2 \rangle \right) &\leq \mathbb{E}(\langle \nu_0^N, \rho_4^2 \rangle) + \int_0^T \mathbb{E} \left(\int_{\mathcal{W}} \gamma(w, \nu_{s-}^N) \int_{\mathcal{W}} \rho_4^2(w') a(w, \nu_{s-}^N, dw') \nu_{s-}^N(dw) \right) ds \\ &\quad + \int_0^T \mathbb{E} \left(\int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \lambda(w_1, w_2, \nu_{s-}^N) \int_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}} (\rho_4^2(w'_1) + \rho_4^2(w'_2)) \right. \\ &\quad \left. \times b(w_1, w_2, \nu_{s-}^N, dw'_1 \otimes dw'_2) \nu_{s-}^N(dw_1) \nu_{s-}^N(dw_2) \right) ds \\ &\quad + \int_0^T \mathbb{E} \left(\int_{\mathcal{W}} \beta(w, \nu_{s-}^N) \int_{\mathcal{W}} \rho_4^2(w') c(w, \nu_{s-}^N, dw') \nu_{s-}^N(dw) \right) ds. \end{aligned}$$

Observando ahora la hipótesis (D1) tenemos que

$$\int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \gamma(w, \nu_{s-}^N) \rho_4^2(w') a(w, \nu_{s-}^N, dw') \nu_{s-}^N(dw) = \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \rho_4^2(w') \Gamma(w, z, dw') \nu_{s-}^N(dz) \nu_{s-}^N(dw),$$

por otra parte, gracias a (D2) y (D3), tenemos una expresión análoga para los demás términos. Si ahora además usamos (E1), (E2) y (E3) para cada termino respectivamente, obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t^N, \rho_4^2 \rangle \right) &\leq \mathbb{E}(\langle \nu_0^N, \rho_4^2 \rangle) + 2C \int_0^T \mathbb{E} \left(\int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} (\rho_4^2(w) + \rho_4^2(z)) \nu_{s-}^N(dw) \nu_{s-}^N(dz) \right) ds \\ &\quad + C \int_0^T \mathbb{E} \left(\int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} (\rho_4^2(w_1) + \rho_4^2(w_2) + \rho_4^2(z)) \nu_{s-}^N(dz) \nu_{s-}^N(dw_2) \nu_{s-}^N(dw_1) \right) ds \\ &\leq \mathbb{E}(\langle \nu_0^N, \rho_4^2 \rangle) + 2C \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t^N, 1 \rangle \right) \int_0^T \mathbb{E} \left(\sup_{u \in [0, s]} \langle \nu_u^N, \rho_4^2 \rangle \right) ds. \end{aligned}$$

Gracias a que $\mathbb{E}(\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t^N, 1 \rangle) < \infty$ y que $\mathbb{E}(\langle \nu_0^N, \rho_4^2 \rangle)$ está acotado uniforme en N , por el lema de Gronwall concluimos que

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t^N, \rho_4^2 \rangle \right) \leq Ae^{BT},$$

con $A, B > 0$. Para verificar que se tiene (A.2), debemos considerar la función ρ truncada, es decir, $(\rho_4^2 \wedge M)(w) \in C_b(\mathcal{W})$ y notar que gracias al teorema 3.1 y que la secuencia $(\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t^N, \rho_4^2 \wedge M \rangle)_{N > 0}$ es uniformemente integrable, tenemos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t^N, \rho_4^2 \wedge M \rangle \right) = \sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t, \rho_4^2 \wedge M \rangle,$$

por lo que usando lo recién probado

$$\sup_{t \in [0, T]} \langle \nu_t, \rho_4^2 \wedge M \rangle \leq Ae^{BT},$$

finalmente utilizando el teorema de convergencia monótona tomamos $M \rightarrow \infty$ y concluimos. \square

Bibliografía

- [1] Patrick Billingsley. *Convergence of Probability Measures*. John Wiley & Sons, 1999.
- [2] David Blackwell and Lester E. Dubins. An extension of Skorohod's almost sure representation theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 89(4):691–692, 1983.
- [3] Stewart N. Ethier and Thomas G. Kurtz. *Markov processes: Characterization and Convergence*. John Wiley & Sons, 1986.
- [4] Joaquín Fontbona. *Procesos Puntuales de Poisson y Aplicaciones*. DIM, 2006.
- [5] Nicolas Fournier and Sylvie Méléard. A microscopic probabilistic description of a locally regulated population and macroscopic approximations. *Annals of applied probability*, 14(4):1880–1919, 2004.
- [6] Nobuyuki Ikeda and Shinzo Watanabe. *Stochastic differential equations and diffusion processes*. North-Holland Pub. Co., 1989.
- [7] A. Joffe and M. Metivier. Weak convergence of sequences of semimartingales with applications to multitype branching processes. *Advances in Applied Probability*, 18(1):20–65, 1986.
- [8] Thomas M. Liggett. *Interacting particle systems*. Springer, 1985.
- [9] Sylvie Méléard. Convergence of the fluctuations for interacting diffusions with jumps associated with Boltzmann equations. *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 63(3-4):195–225, 1998.
- [10] Sylvie Méléard and Sylvie Roelly. Sur les convergences étroite ou vague de processus à valeurs mesures. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, 317(8):785–788, 1993.
- [11] Philip Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer, 1990.
- [12] Daniel Remenik. Limit theorems for individual-based models in economics and finance. *Stochastic Processes and their Applications*, 119(8):2401–2435, 2009.
- [13] Daniel Revuz and Marc Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*. Springer,

1999.

- [14] Sylvie Roelly-Coppoletta. A criterion of convergence of measure-valued processes: application to measure branching processes. *Stochastics*, 17(1-2):43–65, 1986.