



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

# **ESTUDIO DE RIESGO PARA FISURA EN TRUNNION DE UN MOLINO**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MECÁNICO

IGNACIO LUIS BUSTOS VÁSQUEZ

PROFESOR GUÍA:  
ALEJANDRO FRANCISCO FONT FILAX

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
ROGER ABDÓN BUSTAMANTE PLAZA  
RODRIGO BENAVIDES SOTO

SANTIAGO DE CHILE  
2016

**RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR  
AL TÍTULO DE:** Ingeniero Civil Mecánico  
**POR:** Ignacio Luis Bustos Vásquez  
**FECHA:** 13/12/2016  
**PROFESOR GUÍA:** Alejandro Francisco Font Filax

## **ESTUDIO DE RIESGO PARA FISURA EN TRUNNION DE UN MOLINO**

La minería representa un gran porcentaje de la actividad económica del país. En este contexto, el estudio del proceso de obtención de mineral puro y los equipos utilizados toman gran relevancia, entre estos los molinos de bolas para el chancado del mineral.

Los molinos presentan estructuras de soporte llamados trunnions que se apoyan en una superficie alimentada por aceite a presión para evitar el desgaste. Eventualmente, se ha encontrado que un trunnion del molino presenta desgaste de la superficie interior y fisuras axiales en su superficie exterior.

El propósito de esta memoria es estudiar la respuesta de la resistencia mecánica del trunnion a medida que pierde espesor hasta alcanzar un estado con fisuras, cuando está sometido a las cargas de operación nominales.

El problema se aborda mediante la teoría de fatiga para el estudio de la aparición de grietas, y con la teoría de la mecánica de la fractura para el avance de grieta, siempre dentro del rango elástico lineal.

El estudio es de carácter teórico numérico en base a una modelación CAD del molino con sus principales componentes, que es sometido a simulaciones en elementos finitos para determinar el estado de esfuerzos del molino y en particular del trunnion.

El estudio comprende tres casos, que corresponden al molino con sus trunnion sin defectos, al molino con un trunnion desgastado en su superficie interior y finalmente al molino con el mismo trunnion desgastado y con la presencia de una fisura axial.

La evaluación de falla al primer ciclo para el trunnion en su estado normal y con desgaste de su superficie interior entrega factores de seguridad de 18,97 y 7,36 respectivamente, por lo que soporta perfectamente los esfuerzos máximos debido al estado de operación nominal.

La evaluación de la vida a la fatiga del trunnion en su estado normal entrega un factor de seguridad de 6,27, y en presencia del desgaste uno de 1,86, por lo que el trunnion presenta una vida infinita a la fatiga aun estando desgastado. Dado lo anterior, se cree que la fisura aparece por fallas en el sistema de lubricación que generarían un roce excesivo en el trunnion capaz de provocar la falla de la pieza.

Cuando el trunnion está desgastado y con una fisura de longitud menor en la superficie interior que la exterior, se concluye que la fisura avanza por la superficie interior por sus dos puntas.

Para detener el avance de la fisura, se propone un redondeo de los frentes de fisura y el relleno con un material adherente que soporte las cargas de operación nominales.

## **Agradecimientos**

Hasta que finalmente llegó el día.

Ha sido un largo camino el recorrido en esta etapa universitaria, donde he tenido el privilegio de conocer a grandes personas, pasando por compañeros, profesores, funcionarios y otras personas ligadas de alguna forma al mundo universitario.

En primer lugar, agradezco profundamente a mi familia, especialmente a mi madre, que gracias a su esfuerzo único nos ha dado a mi hermana y a mí la oportunidad de poder estudiar y desarrollarnos como personas. Estoy muy agradecido de los valores y la formación que nos han entregado, que nos han permitido desenvolvernos de manera óptima en el desarrollo de la vida. En el mismo contexto familiar, debo agradecer además a mi tío J, que junto con mi madre y mi hermana, han sido gran parte de inspiración para entender diferentes formas de lograr el éxito, siempre en base a esfuerzo.

No puedo dejar de agradecer a mi querido bachi, que me ha dado la oportunidad de poder entrar a esta linda institución como lo es la Universidad de Chile, y que me ha dado la posibilidad de conocer a grandes amistades, que han sido un pilar fundamental en este periodo universitario, en especial a mi amigo Mati y Pietro, el entre larrys, con los que hemos formado un gran lazo que espero se mantenga en el tiempo.

Luego, agradezco muy sinceramente al departamento de mecánica que tiene una calidad humana inigualable, con grandes docentes y con tradiciones tan gratas como los asados en el taller de Molina, entre varias. Dentro del departamento, debo mencionar muy afectuosamente a mis compañeros de generación que en general son personas muy gratas y agradables con las que ha sido muy comfortable compartir durante esta estadía universitaria, en especial a “los reynodls”, al Cristóbal, Sergiolo, Mirko, con los que he podido compartir más y que me han ayudado de gran forma en llegar a cumplir esta meta de terminar la carrera.

Finalmente debo agradecer a los profesores de mi comisión, en especial al profesor Alejandro Font, al cual conocí fortuitamente en un curso electivo y con quien me he sentido muy a gusto trabajando, partiendo por su buena disposición para buscar un tema de memoria según mis intereses, y por su buena disposición a recibirme cada vez que solicité su ayuda. Igualmente agradezco al profesor Roger, que si bien no lo visité mucho, cada vez que fui a su oficina por alguna duda, tuvo la gentileza de atenderme, escucharme y darme algún consejo según fuese el caso.

Bueno, se viene una nueva etapa llena de nuevos desafíos, pero con un abanico de herramientas obtenidas con las que espero poder desenvolverme de buena forma, siempre dispuesto a seguir aprendiendo en el camino.

# Tabla de Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Motivación y antecedentes generales	1
1.2	Objetivos	2
1.3	Alcances	3
<b>2</b>	<b>Metodología</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Antecedentes específicos</b>	<b>6</b>
3.1	Antecedentes de las teorías a utilizar	6
3.1.1	Enfoque de falla por fatiga	6
3.1.2	Mecánica de la fractura	13
3.2	Antecedentes de los molinos de bolas	19
3.2.1	Componentes de un molino de bolas	19
3.2.2	Volumen de carga	19
3.2.3	Altura de la carga	20
3.2.4	Ángulo de levantamiento de la carga	20
3.3	Características del molino de bolas a estudiar	21
3.3.1	Propiedades físicas y mecánicas de los materiales utilizados	21
3.3.2	Condiciones de operación del molino	21
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>22</b>
4.1	Modelos CAD de las piezas del molino y del ensamblaje	22
4.1.1	Cuerpo del molino	22
4.1.2	Trunnions	23
4.1.3	Trunnion con desgaste	24
4.1.4	Trunnion con desgaste y fisura	25
4.1.5	Corona	25
4.1.6	Liners del cuerpo del molino	27
4.1.7	Liners de la tapa	28
4.1.8	Cilindro con hélice interior	29
4.1.9	Modelo CAD del ensamble del molino	30
4.2	Cargas que actúan en el molino y determinación de las reacciones	31
4.2.1	Peso del molino vacío	31
4.2.2	Potencia de accionamiento del molino	32
4.2.3	Fuerza del material procesado	32
4.2.4	Presión en los trunnions	33
4.3	Construcción de los modelos en COMSOL	34
4.3.1	Importación del modelo CAD de Inventor a COMSOL	35
4.3.2	Sistemas de referencia auxiliares	35
4.3.3	Aplicación de cargas	36
4.3.4	Condiciones de borde	39
4.3.5	Mallado	40
4.4	Resultados de los estudios	41
4.4.1	Primer caso: Molino con el trunnion sin desgaste ni fisura	41
4.4.2	Segundo caso: Molino con trunnion con desgaste interior	46
4.4.3	Tercer caso: Molino con trunnion con desgaste interior y fisura	49

4.5 Evaluación de resistencia a la fatiga.....	55
4.5.1 Límite de resistencia a la fatiga modificado para el trunnion.....	55
4.5.2 Evaluación de la vida a la fatiga del primer caso .....	55
4.5.3 Evaluación de la vida a la fatiga del segundo caso.....	56
4.6 Evaluación del crecimiento de grieta.....	57
4.6.1 Punta de la fisura en la superficie interior del trunnion del lado molino IM.....	57
4.6.2 Punta de la fisura en la superficie interior del trunnion del lado salida IS .....	59
4.6.3 Punta de la fisura en la superficie exterior del trunnion del lado molino EM .....	60
4.6.4 Punta de la fisura en la superficie exterior del trunnion del lado molino ES .....	61
<b>5 Discusión.....</b>	<b>62</b>
5.1 Modelos CAD de las piezas y ensamblajes .....	62
5.2 Construcción del modelo .....	62
5.3 Evaluación de la vida a la fatiga con y sin desgaste del trunnion .....	63
5.4 Evaluación del crecimiento de grieta.....	65
5.5 Propuesta de solución .....	66
<b>6 Conclusiones.....</b>	<b>67</b>
<b>Bibliografía.....</b>	<b>69</b>
<b>Anexos.....</b>	<b>70</b>
<b>Anexo A : Planos e imagenes correspondientes a la geometría del molino.....</b>	<b>70</b>
Anexo A.1: Vista en corte del molino sin corona.....	70
Anexo A.2: Vista en corte de la mitad inferior del trunnion .....	71
Anexo A.3: Vista en corte del cilindro con hélice interior.....	72
<b>Anexo B: Determinación de las fuerzas sobre la corona.....</b>	<b>73</b>
<b>Anexo C: Modelación de presión de la carga del molino.....</b>	<b>75</b>
<b>Anexo D: Determinación de reacciones en los trunnions.....</b>	<b>79</b>
<b>Anexo E: Determinación de la presión en los trunnions.....</b>	<b>82</b>

# 1 Introducción

## 1.1 Motivación y antecedentes generales

En la economía chilena, uno de los pilares es el sector minero, que según indicadores económicos aporta con un 13,5% del PIB<sup>1</sup>.

Dentro de la cadena de procesos para la obtención del mineral puro, se menciona el de conminución, que consiste en la reducción de tamaño hasta obtener una granulometría adecuada que permita la lixiviación en pilas o depósitos de manera eficiente<sup>2</sup>. Dentro de los equipos utilizados en este proceso, se destacan los molinos de bolas, que son elementos rotatorios que elevan la mezcla de bolas y mineral hasta el punto que caen producto de la gravedad y mediante el impacto mutuo, se logra la disminución del tamaño de partículas del mineral debido a la menor dureza y tenacidad de este con respecto a las bolas de acero. En la Figura 1.1 muestra un molino de bolas típico, tomado del proveedor SK.



**Figura 1.1** Molino de bolas típico del proveedor SK<sup>3</sup>.

Los molinos cuentan con elementos de soporte, conocidos como “trunnions”, los cuales presentan una estructura cilíndrica de sección variable. El sector de soporte posee una estructura cilíndrica que descansa en una superficie cóncava alimentada por aceite a presión para evitar el desgaste. Un esquema del trunnion se puede ver en la Figura 1.2, en donde se aprecia que por el interior va un cilindro con hélice que ayuda en la evacuación del producto de molienda.

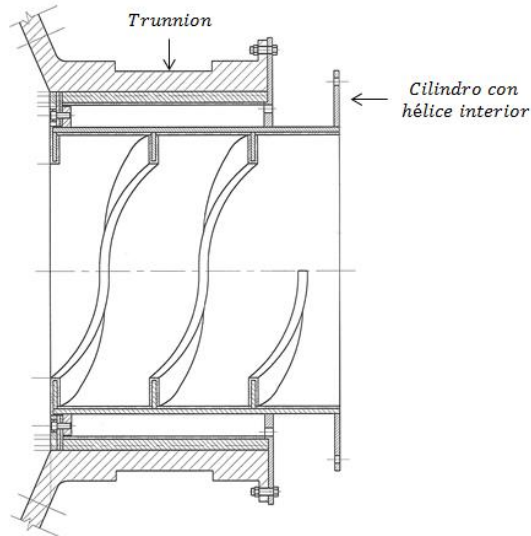
---

<sup>1</sup> Promedio de los últimos 7 años, obtenidos del sitio web Sociedad Nacional de Minería. Indicadores Económicos, PIB minería.. < [http://www.sonami.cl/index.php?option=com\\_content&view=article&id=221&Itemid=109](http://www.sonami.cl/index.php?option=com_content&view=article&id=221&Itemid=109)>. [Consulta: 25 de noviembre de 2015].

<sup>2</sup> Definición según se presenta en el sitio web Codelco educa. Proceso de chancado.. <[https://www.codelcoeduca.cl/procesos\\_productivos/tecnicos\\_lixivacion\\_procesochancado.asp](https://www.codelcoeduca.cl/procesos_productivos/tecnicos_lixivacion_procesochancado.asp)>. [Consulta: 25 de noviembre de 2015].

<sup>3</sup> Imagen obtenida del sitio web SK. Horizontal ball mill. . <<http://www.zkcomp.com/Grinding/588.html>>. [Consulta: 25 de noviembre de 2015].

Eventualmente se ha notado que el material evacuado del molino lleva rastros de aceite. Mediante inspección en las paradas de la máquina, se ha descubierto que el trunnion presenta fisuras axiales en la superficie de apoyo, y se ha determinado que el aceite se filtra por medio de éstas hacia su superficie interior, que en algunos casos presenta desgaste abrasivo resultando en una disminución irregular del espesor de la pieza a lo largo de su longitud.



**Figura 1.2** Esquema del trunnion de un molino.

Luego de la inspección de la pieza, se ha determinado que el desgaste interior se produce por filtración del producto de molienda hacia el espacio entre la superficie interior del trunnion, y la superficie exterior del cilindro de evacuación. La filtración se produce por el desgaste de los sellos del cilindro de evacuación.

## 1.2 Objetivos

El objetivo fundamental de esta memoria consiste en estudiar la resistencia mecánica del trunnion a medida que va perdiendo espesor hasta alcanzar un estado fisurado, cuando está sometido a las cargas de operación nominales.

Los objetivos específicos del trabajo comprenden:

- i. Realizar un modelo CAD simplificado del molino en base a las especificaciones técnicas del equipo.
- ii. Determinar el estado de esfuerzos del trunnion en base a las propiedades físicas y mecánicas de las piezas del molino y los parámetros de operación nominales.
- iii. Determinar los parámetros de intensidad de esfuerzos en base al estado de esfuerzos para el caso en que el trunnion presente grietas.
- iv. Aplicar modelos teóricos de fatiga de materiales como criterio de falla para el trunnion a medida que pierde espesor, y la teoría de la mecánica de la fractura para la evaluación de propagación de fisuras cuando se estudia el trunnion fisurado.
- v. Adicionalmente, se formula y/o identifica formas de reparar el trunnion cuando presenta fisuras.

### **1.3 Alcances**

El estudio realizado es de carácter teórico numérico en base a simulaciones, por lo que no realizan estudios de carácter experimental.

El estudio se aplica un molino con geometría específica, por lo que los resultados no son extrapolables propiamente tal. Por otra parte, la metodología de estudio propuesta es totalmente aplicable a otros tipos de molinos.

El nivel de cargas utilizada corresponde a las nominales de diseño del molino únicamente.

El estudio abarca tres posibles casos para el estado del trunnion de descarga, que corresponden a el trunnion sin la presencia de defectos, es decir, en condición normal; el trunnion con la presencia de desgaste interior bien definido y finalmente el trunnion con la presencia tanto de desgaste interior como de fisuras en la superficie exterior.

De los tipos de fisuras más comunes, se estudia una simétrica con avance plano.



## **2 Metodología**

Para cumplir con los objetivos de la memoria, se aplica la siguiente metodología de trabajo:

### **Recopilación de antecedentes específicos**

Se busca, sintetiza y presenta los temas necesarios luego de una revisión bibliográfica, correspondientes a la teoría de la fatiga y de la mecánica de la fractura.

Por otra parte, se busca y presenta información de los aspectos generales del molino de bolas, y se presentan las especificaciones técnicas del molino a estudiar en particular, con sus parámetros de operación.

### **Realización del modelo CAD del molino a estudiar**

En base a las especificaciones técnicas del molino, se realiza un modelo CAD simplificado de las principales piezas del molino, para luego generar un ensamblaje en el software Autodesk Inventor 2014.

Según los alcances que se presentan en la sección 1.3, se desarrollan tres tipos de trunnion de descarga, los que corresponden al trunnion por defecto; con desgaste de su superficie interior y finalmente con el desgaste del caso anterior más la presencia de una fisura axial en su superficie exterior. Tanto el desgaste interior como la fisura responden a una geometría única bien definida.

### **Determinación de las cargas que actúan en el molino**

Según las especificaciones técnicas del molino junto con los parámetros de operación nominal, se determinan las cargas que actúan en él.

Este proceso también involucra el determinar las reacciones en los descansos que actúan sobre los trunnions. Para esto, se realiza un análisis estático donde se estudia la posición del molino en funcionamiento donde se alcanza instantáneamente el equilibrio de las cargas.

### **Determinación del estado de esfuerzos del trunnion**

Con las cargas ya calculadas, se procede a realizar un análisis de elementos finitos en el software COMSOL multiphysics, para determinar el estado de esfuerzos del conjunto, y en específico del trunnion de descarga para los tres casos de estudio.

Se deben hacer tantas simulaciones como sean necesarias para los casos del trunnion de descarga con desgaste y con desgaste y fisura según la forma en que se aborda el problema.

### **Determinación de los factores de intensidad de esfuerzos**

Para el caso del modelo con el trunnion fisurado, con los resultados del estado de esfuerzos se determinan los factores de intensidad de esfuerzos correspondientes.

## Evaluación de la vida a la fatiga

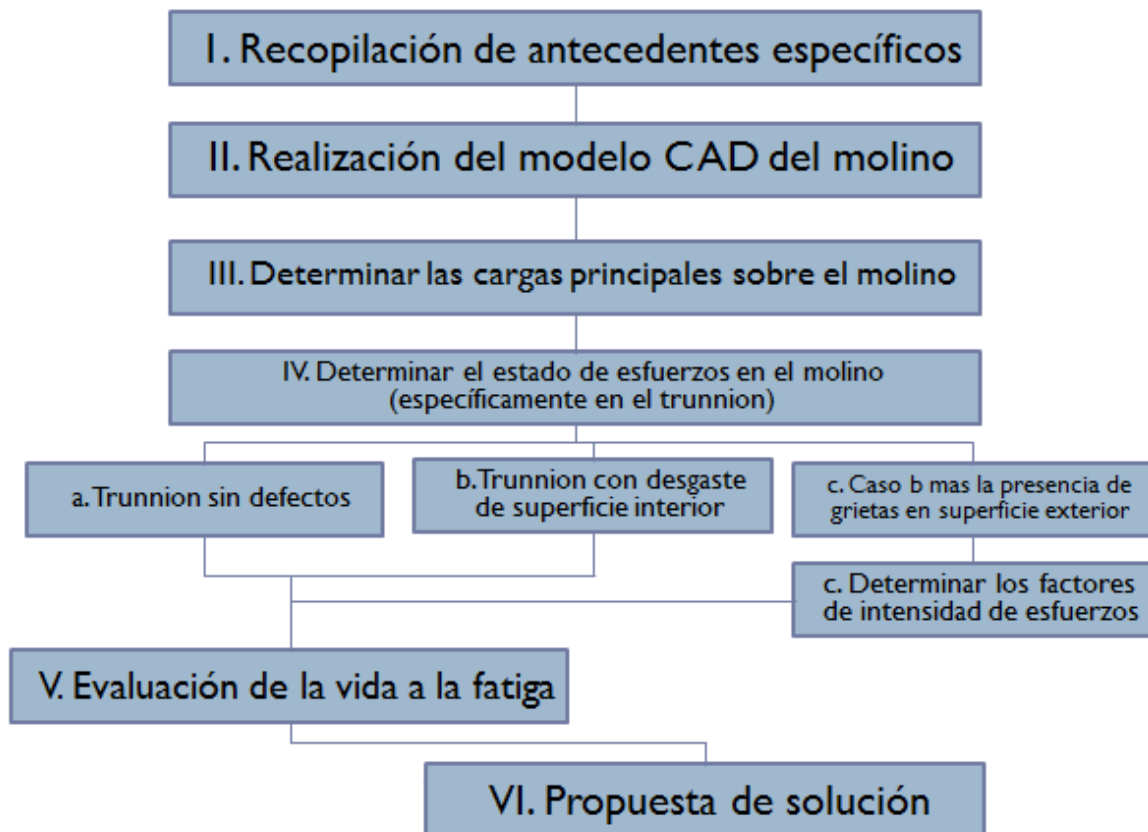
Para los dos primeros casos correspondientes al trunnion sin defectos y el con presencia de desgaste de su superficie interior, se evalúa la vida a la fatiga con el uso de los resultados del estado de esfuerzos y la aplicación de un criterio de falla por fatiga.

En el caso del trunnion fisurado, con los resultados de los factores de intensidad de esfuerzos se estudia si se propaga o no la fisura.

## Estudio y propuesta de reparación

Se procede a estudiar posibles reparaciones del trunnion de manera de alargar la vida útil de las determinadas en los pasos anteriores.

En la Figura 2.1 se muestra un diagrama de bloques de la secuencia de realización de los pasos descritos.



**Figura 2.1** Diagrama de bloques de la secuencia de pasos propuestos como metodología.

### 3 Antecedentes específicos

#### 3.1 Antecedentes de las teorías a utilizar

En esta sección se presentan los aspectos relevantes a utilizar de la teoría de la fatiga y de la mecánica de la fractura.

##### 3.1.1 Enfoque de falla por fatiga

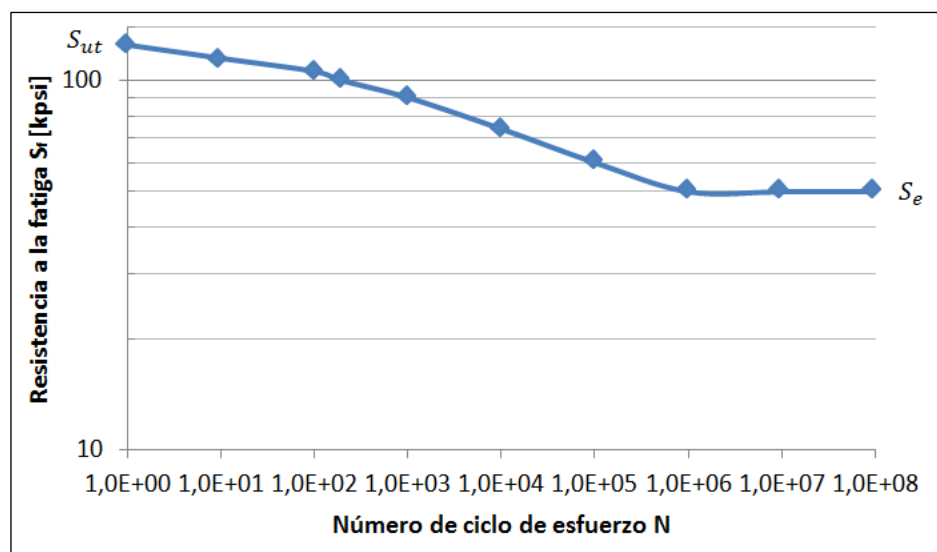
En esta sección se presenta los aspectos relevantes de la teoría de la fatiga presentada por Budynas en el texto Diseño en ingeniería mecánica de Shigley [1].

Por fatiga se entiende al fenómeno de falla por esfuerzos cíclicos menores a la resistencia última para un número de ciclos determinado.

La falla por fatiga se debe a la formación y propagación de grietas. Por lo general, una grieta se inicia en una discontinuidad del material donde el esfuerzo cíclico es máximo.

A medida que aumenta el número de ciclos a los que se somete una pieza, la experiencia muestra que la falla se da a esfuerzos cada vez menores. Por lo tanto, es muy recurrente que para cada material se genere un diagrama S-N, de resistencia a la fatiga  $S_f$  contra el ciclo de vida  $N$  del material.

En el caso del acero y del hierro, el diagrama S-N se vuelve horizontal desde un punto. La resistencia en este punto se llama límite de resistencia a la fatiga  $S_e'$ , con la prima en el símbolo  $S_e$  representado que este valor representa el límite de resistencia a la fatiga en una pieza de laboratorio. A modo de ejemplo, en la Figura 3.1 se presenta un diagrama S-N para un acero UNS G41300 tomada de [1].



**Figura 3.1** Diagrama S-N que se graficó a partir de los resultados de ensayo a la fatiga axial completamente invertidos. Material: acero UNS G41300, normalizado;  $S_{ut} = 116$  [kpsi];  $S_{ut}$  máxima = 125 [kpsi]. Adaptado de [1].

### 3.1.1.1 Límite de resistencia a la fatiga

En la literatura, se puede encontrar una gran cantidad de información acerca de ensayos con viga rotatoria o ensayos de tensión simple de muestras tomadas a la misma barra, con el fin de tener una relación entre la resistencia a la tensión y el límite de resistencia a la fatiga. Las conclusiones acerca de ellos permiten plantear una simplificación para el caso de los aceros en la estimación del límite de resistencia a la fatiga, que viene dado por

$$S_e' = \begin{cases} 0,5S_{ut} & S_{ut} \leq 1.400 \text{ [MPa]} \\ 700 \text{ [MPa]} & S_{ut} > 1.400 \text{ [MPa]} \end{cases} \quad (3.1)$$

donde  $S_{ut}$  representa la resistencia a la tensión mínima, y la  $'$  en  $S_e$  alude a que la resistencia a la fatiga es para una muestra de viga rotativa.

### 3.1.1.2 Resistencia a la fatiga

En esta sección se presenta una aproximación del diagrama S-N para la región de altos ciclos, que parte desde los  $10^3$  ciclos comúnmente.

La resistencia a la fatiga de una probeta con un número específico de ciclos,  $(S_F')_N$ , se puede expresar como

$$(S_F')_N = \sigma_F'(2N)^b \quad (3.2)$$

A los  $10^3$  ciclos

$$(S_F')_{10^3} = \sigma_F'(2 \cdot 10^3)^b = fS_{ut}$$

donde  $f$  es la fracción de  $S_{ut}$  representada por  $(S_f')_{10^3}$  ciclos y  $\sigma_F'$  es el coeficiente de resistencia a la fatiga<sup>4</sup>. Despejando  $f$  se obtiene

$$f = \frac{\sigma_F'(2 \cdot 10^3)^b}{S_{ut}} \quad (3.3)$$

Ahora bien, para el parámetro  $\sigma_F'$  se puede calcular mediante una aproximación SAE para aceros con  $H_B \leq 500$  dada por

$$\sigma_F' = S_{ut} + 345 \text{ [MPa]} \quad (3.4)$$

Para calcular  $b$ , se sustituye la resistencia a la fatiga  $S_e'$  y los ciclos correspondientes  $N_e$  en la ecuación 3.2, y se despeja  $b$

$$b = -\frac{\log(\sigma_F'/S_e')}{\log(2N_e)} \quad (3.5)$$

---

<sup>4</sup>El coeficiente de resistencia a la fatiga es el esfuerzo real correspondiente a la fractura en una inversión de esfuerzos [1].

Por otra parte, se puede estimar  $f$  mediante el gráfico de la figura 6-18 de [1], para cada valor de  $S_{ut}$ .

Para un componente real,  $S_e'$  pasa a ser  $S_e$ , que es menor que  $0,5S_{ut}$ , siendo la ecuación de la forma

$$S_f = aN^b \quad (3.6)$$

donde  $N$  son los ciclos hasta la falla y  $a$  y  $b$  están definidas por los puntos  $10^3$ ,  $(S_f')_{10^3}$  y  $10^6$ ,  $S_e$  con  $(S_f')_{10^3} = fS_{ut}$ . Al sustituir estos dos puntos en la ecuación (3.6), se obtiene

$$a = \frac{(fS_{ut})^2}{S_e} \quad (3.7)$$

$$b = -\frac{1}{3} \log \left( \frac{fS_{ut}}{S_e} \right) \quad (3.8)$$

### 3.1.1.3 Factores que modifican el límite de resistencia a la fatiga

Debido a que las condiciones de laboratorio son controladas y bien definidas, es claro que el límite de resistencia a la fatiga de una componente real difiere del obtenido en el laboratorio.

Según lo presentado en Shigley [1], fue Marín quien identificó factores que cuantifican efectos de la condición superficial, el tamaño, la carga, la temperatura y varios otros puntos. La ecuación propuesta por Marín es de la forma

$$S_e = k_a k_b k_c k_d k_e k_f S_e' \quad (3.9)$$

donde

- $k_a$  : factor de modificación de la condición superficial
- $k_b$  : factor de modificación del tamaño
- $k_c$  : factor de modificación de la carga
- $k_d$  : factor de modificación de la temperatura
- $k_e$  : factor de confiabilidad
- $k_f$  : factor de modificación de efectos varios
- $S_e'$  : límite de resistencia a la fatiga en viga rotatoria
- $S_e$  : Límite de resistencia a la fatiga en la ubicación crítica de una parte de máquina en la geometría y condición de uso

#### Factor de superficie $k_a$

El factor de modificación depende del acabado de la superficie de la parte y la resistencia a la tensión. Luego, el factor se rige por la expresión

$$k_a = aS_{ut}^b \quad (3.10)$$

donde  $S_{ut}$  es la resistencia mínima a la tensión y los valores de  $a$  y  $b$  se pueden encontrar en la Tabla 3.1

**Tabla 3.1** Parámetros en la condición superficial de Marín

Acabado superficial	Factor $a$ ( $S_{ut}$ [MPa])	Factor $b$
Esmerilado	1,58	-0,085
Maquinado o laminado en frío	4,51	-0,265
Laminado en caliente	57,7	-0,718
Como sale de la forja	272	-0,995

Fuente: [1].

### Factor de tamaño $k_b$

El factor para flexión y torsión se puede expresar como

$$k_b = \begin{cases} (d/7,62)^{-0,107} = 1,24d^{-0,107} & 2,79 \leq d \leq 51 [mm] \\ 1,51d^{-0,157} & 51 < d \leq 254 [mm] \end{cases} \quad (3.11)$$

Para carga axial no hay efecto de tamaño, por lo cual

$$k_b = 1 \quad (3.12)$$

En [1] también se presenta un método para obtener un diámetro efectivo para utilizarlo cuando el elemento rotativo no es cilíndrico, o bien cuando el elemento no está rotando.

### Factor de modificación de la carga $k_c$

Este factor puede tomar los siguientes valores dependiendo del modo de carga al que está sometido

$$k_c = \begin{cases} 1 & \text{flexión} \\ 0,85 & \text{axial} \\ 0,59 & \text{torsión} \end{cases} \quad (3.13)$$

### Factor de temperatura $k_d$

De la literatura, se tiene que para los aceros el límite de resistencia a la fatiga aumenta a medida que aumenta la temperatura y luego desde los 200°C a los 350°C comienza a disminuir.

Un ajuste del factor polinomial de cuarto orden para el rango de temperaturas  $70 \leq T_F \leq 1.000$  °F viene dado por la expresión

$$k_d = 0,975 + 0,432(10^{-3})T_F - 0,115(10^{-5})T_F^2 + 0,104(10^{-8})T_F^3 - 0,595(10^{-12})T_F^4 \quad (3.14)$$

Si se conoce el límite de resistencia a la fatiga de una viga rotativa a temperatura ambiente, entonces se emplea

$$k_d = \frac{S_T}{S_{RT}} \quad (3.15)$$

en donde  $S_T$  es la resistencia a la tensión a la temperatura de operación, y  $S_{RT}$  es la resistencia a la tensión a temperatura ambiente.

Si no se conoce el límite de resistencia a la fatiga de una viga rotativa, entonces se calcula con la ecuación 3.1 y la resistencia a la tensión corregida mediante el factor de la Tabla 3.2. Entonces se usa  $k_d=1$ .

**Tabla 3.2** Efecto de la temperatura en la resistencia a la tensión del acero.

Temperatura [°C]	$S_T/S_{RT}$
20	1,000
50	1,010
100	1,020
150	1,025
200	1,020
250	1,000
300	0,975
350	0,943
400	0,900
450	0,843
500	0,768
550	0,672
600	0,549

Fuente: [1].

### Factor de confiabilidad $k_e$

La mayoría de los datos de resistencia a la fatiga se presentan como valores medios. Considerando una desviación estándar de la resistencia a la fatiga de menos del 8%, el factor de modificación de la confiabilidad aplicable se puede escribir como

$$k_e = 1 - 0,08z_a \quad (3.16)$$

donde algunos valores de  $z_a$  para confiabilidades comúnmente utilizados se pueden encontrar en la Tabla 3.3 (ver página 11), considerando una normal 0,1.

### Factor de efectos varios $k_f$

Aunque el  $k_f$  tiene el propósito de tomar en cuenta la reducción del límite de resistencia a la fatiga debido a todos los otros efectos, en verdad significa un recordatorio que estos efectos se deben tomar en cuenta, porque los valores de  $k_f$  no siempre están disponibles.

En este modelo, por simplicidad, se omitirá este factor, por lo tanto

$$k_f = 1 \quad (3.17)$$

**Tabla 3.3** Factores de confiabilidad  $k_e$  correspondientes a 8 desviaciones estándar porcentuales del límite de resistencia a la fatiga.

Confiabilidad [%]	Variación de transformación $z_a$	Factor de confiabilidad $k_e$
50	0	1,000
90	1,288	0,897
95	1,645	0,868
99	2,326	0,814
99,9	3,091	0,753
99,99	3,719	0,702
99,999	4,265	0,659
99,9999	4,753	0,620

Fuente: [1].

### 3.1.1.4 Criterios de falla por fatiga ante esfuerzos variables

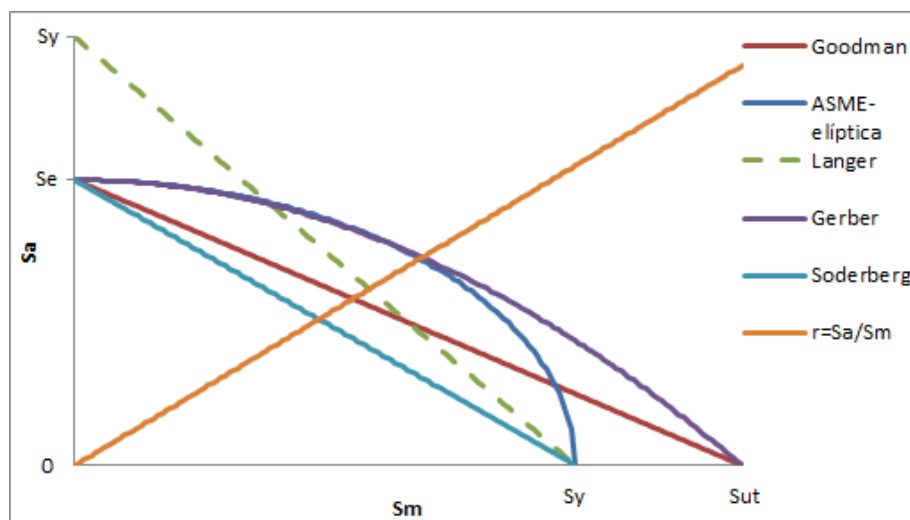
Estudian la resistencia a la fatiga de partes sometidas a esfuerzos variables. Frecuentemente, estos esfuerzos adoptan un patrón sinusoidal debido a la naturaleza rotatoria de las máquinas, los cuales presentan un máximo y mínimo único dentro del ciclo. Luego, si se denominan a estos esfuerzos  $\sigma_{máx}$  y  $\sigma_{mín}$  respectivamente, se construye una componente uniforme y alternante como

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{máx} + \sigma_{mín}}{2} \quad (3.18)$$

$$\sigma_a = \left| \frac{\sigma_{máx} - \sigma_{mín}}{2} \right| \quad (3.19)$$

donde  $\sigma_m$  es la componente de intervalo medio del esfuerzo y  $\sigma_a$  es la componente de la amplitud del esfuerzo.

Los criterios de falla por fatiga representan un lugar geométrico que separa dos regiones que se pueden catalogar de seguras y de falla. Los criterios típicamente utilizados se muestran en la Figura 3.2 los cuales están bien desarrollados y presentados en [1].



**Figura 3.2** Diagrama de fatiga donde se proporcionan varios criterios de falla. Adaptado de [1].



En los materiales frágiles, en especial para hierro fundido, a menudo el criterio de falla por fatiga del primer cuadrante sigue un lugar geométrico de Smith-Dolan [1], cóncavo y ascendente, representado por

$$\frac{S_a}{S_e} = \frac{1 - S_m/S_{ut}}{1 + S_m/S_{ut}} \quad (3.20)$$

o como ecuación de diseño

$$\frac{n\sigma_a}{S_e} = \frac{1 - n\sigma_m/S_{ut}}{1 + n\sigma_m/S_{ut}} \quad (3.21)$$

Para una línea de carga radial con pendiente  $r$ , se sustituye  $S_a/r$  por  $S_m$  en la ecuación anterior, y se despeja  $S_a$ , con lo que se obtiene

$$S_a = \frac{rS_{ut} + S_e}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{4rS_{ut}S_e}{(rS_{ut} + S_e)^2}} \right] \quad (3.22)$$

La parte del segundo cuadrante que se usa para el hierro fundido corresponde a una línea recta entre los puntos  $(-S_{ut}, S_{ut})$  y  $(0, S_e)$ , que tiene la ecuación [1]

$$S_a = S_e + \left( \frac{S_e}{S_{ut}} - 1 \right) S_m \quad \forall -S_{ut} \leq S_m \leq 0 \quad (3.23)$$

En la Tabla 3.4 se proporcionan las propiedades del hierro fundido gris. En particular, la columna correspondiente a la resistencia a la fatiga presenta el valor  $k_a k_b S_e'$  y por lo tanto para encontrar el límite de resistencia a la fatiga se deben considerar los factores de Marín restantes. El factor  $k_c$  promedio de cargas axial y de torsión es 0,9.

**Tabla 3.4** Propiedades mecánicas típicas del hierro fundido gris

Número ASTM	Resistencia a la tensión $S_{ut}$ [MPa]	Resistencia a la compresión $S_{uc}$ [MPa]	Módulo de ruptura por cortante $S_{su}$ [MPa]	Módulo de elasticidad [GPa]		Límite de resistencia a la fatiga* $S_e$ [MPa]
				Tensión <sup>†</sup>	Torsión	
20	151,68	572,27	179,26	66,19-96,52	26,89-38,61	68,95
25	179,26	668,79	220,63	79,29-102,04	31,72-41,37	79,29
30	213,74	751,53	275,79	89,63-113,07	35,85-45,51	96,53
35	251,66	854,95	334,40	99,97-118,59	39,99-47,53	110,32
40	293,03	965,27	393	110,32-137,90	44,13-53,78	127,55
50	361,97	1.130,74	503,32	129,62-157,20	49,64-55,16	148,24
60	430,92	1.292,77	610,19	140,63-162,03	53,78-58,61	168,92

\*Piezas pulidas o maquinadas.

†El módulo de elasticidad del hierro fundido en compresión corresponde de manera muy cercana al valor superior en el intervalo dado para tensión y es un valor más constante que el de tensión.

Fuente: [1]

### 3.1.1.5 Combinación de modos de carga

Cuando un elemento está sometido a una mezcla de cargas, digamos axial, de flexión y torsión, el problema de fatiga se puede tratar satisfactoriamente al igual que en el caso estático, con el método de energía de distorsión que conlleva al cálculo de un esfuerzo equivalente de von Mises [1].

El esfuerzo de von Mises para el caso general de un sistema de coordenadas cartesiano sigue la fórmula [1]

$$\sigma_{vm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]^{1/2} \quad (3.24)$$

Al igual que para cargas simples, se procede a calcular dos elementos de esfuerzo: uno para los esfuerzos alternantes y unos para los esfuerzos medios para cada tipo de esfuerzo, es decir, para esfuerzos axiales, esfuerzos por flexión y esfuerzos por torsión<sup>5</sup>. Luego, se selecciona uno de los criterios de falla expuestos en la sección 3.1.1.4 para realizar el análisis de fatiga.

La fluencia al primer ciclo puede ser tratada con el esfuerzo máximo de von Mises.

Para la modificación del límite de resistencia a la fatiga, se sugiere utilizar  $k_a$ ,  $k_b$  y  $k_c$  para flexión.

### 3.1.2 Mecánica de la fractura

En este capítulo se presentan la teoría relevante para el estudio de la mecánica de fractura desarrollados por Owen en Engineering Fracture Mechanics: Numerical Methods and Applications [2].

#### 3.1.2.1 Conceptos de la mecánica de fractura

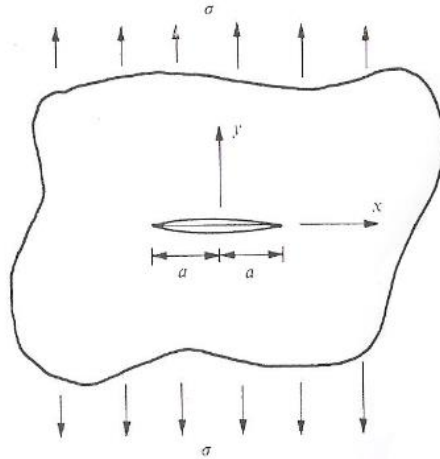
El estudio clásico de propagación de grietas parte basándose en una placa infinita con una grieta central, como la presentada en la Figura 3.3 (ver página 14). La teoría postula que una grieta se vuelve inestable solo cuando la energía elástica liberada ( $U$ ), debido a la extensión de la grieta, exceda la tasa de incremento en la energía superficial ( $W$ ) asociada con la nueva superficie de grieta formada, dado por un tamaño de grieta crítico  $a_c$ .

Por lo tanto, para  $0 \leq a \leq a_c$  la extensión de la grieta requiere de energía, mientras que para  $a \geq a_c$  la propagación de la grieta ocurre de manera inestable. El esfuerzo al cual la propagación ocurre de forma inestable para una longitud de grieta dada o alternativamente, la longitud de la grieta crítica que puede existir en presencia de un esfuerzo particular viene dada por la ecuación

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi a}} \quad (3.25)$$

---

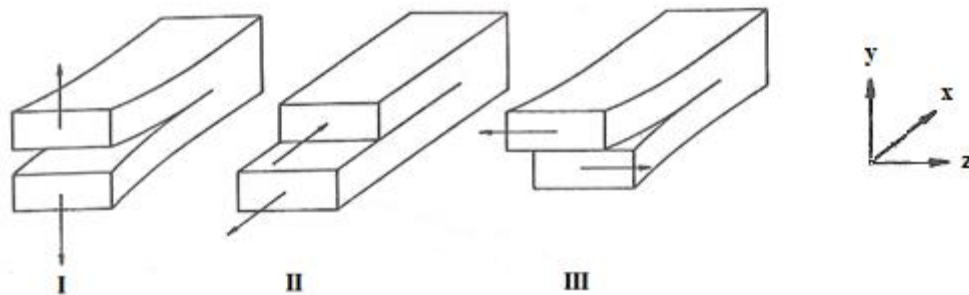
<sup>5</sup> En la bibliografía de Shigley [1] se presentan las ecuaciones correspondientes para el cálculo de esfuerzos medios y alternantes equivalentes de von Mises para el caso general donde se tienen las componentes del estado de esfuerzos por separado.



**Figura 3.3** Propagación de una grieta en una placa con grieta central [2].

donde  $\sigma$  es el esfuerzo aplicado,  $E$  representa el módulo de elasticidad,  $\gamma$  es la densidad de energía superficial o bien tensión superficial y  $a$  representa el tamaño de grieta.

Con respecto a la propagación de la grieta, el movimiento relativo de las paredes opuestas de la grieta se puede dar de tres formas distintas, que se presentan la Figura 3.4.



**Figura 3.4** Modos fundamentales de fractura: I, modo de apertura; II, modo de deslizamiento; III, modo de desgarro [3].

El modo I de apertura (opening mode) corresponde a una separación normal de las paredes de la grieta bajo la acción de esfuerzo de tracción; el modo II de deslizamiento (sliding mode) corresponde al deslizamiento mutuo de las paredes de la grieta en dirección normal al frente de la grieta; el modo III de desgarro (tearing mode) corresponde al deslizamiento mutuo de las paredes paralelo al frente de la grieta [3].

De los tres modos, el más predominante en sólidos frágiles es el modo I, pero una deformación de la grieta presenta una superposición de los tres modos. Adicionalmente, para cada modo de fractura, se tiene un campo de esfuerzos alrededor de la punta de la grieta, y estos pueden ser modelados como

$$\sigma_y = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} f(\theta), \quad \sigma_{xy} = \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} f(\theta), \quad \sigma_{yz} = \frac{K_{III}}{(2\pi r)^{1/2}} f(\theta) \quad (3.26)$$

En el set de ecuaciones presentadas en 3.19,  $r$  es la distancia radial desde la punta de la grieta y el término  $f(\theta)$  es función del ángulo polar  $\theta$  exclusivamente. Los parámetros  $K_I$ ,  $K_{II}$  y  $K_{III}$  son los factores de intensidad de esfuerzos correspondiente a los tres modos de propagación de la grieta y éstos caracterizan la magnitud del campo de esfuerzos alrededor de la grieta. Estos varían con la longitud de la grieta, la geometría de la muestra, el patrón de carga y la intensidad.

El avance de la grieta puede ser monitoreado por la obtención de un valor crítico,  $K_c$ , de factor de intensidad de esfuerzos. El parámetro  $K_c$  se considera como propiedad del material y se denomina tenacidad a la fractura.

Los factores de intensidad de esfuerzos se relacionan con la tasa de liberación de energía mediante el siguiente set de ecuaciones

$$G_I = \frac{(k+1)}{8\mu} K_I^2, \quad G_{II} = \frac{(k+1)}{8\mu} K_{II}^2, \quad G_{III} = \frac{1}{2\mu} K_{III}^2 \quad (3.27)$$

en donde  $\mu$  es el módulo de corte y  $k$  viene dado por

$$k = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{para deformación plana} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{para esfuerzos planos} \end{cases} \quad (3.21)$$

siendo  $\nu$  el módulo de Poisson.

### 3.1.2.2 Mecanismos de fractura elástica lineal (LEFM)

Para poder hacer una evaluación del estado de un defecto, en particular de una grieta, se debe calcular: el campo de esfuerzos en la zona agrietada, los valores de  $K$  resultantes del campo de esfuerzos dentro de la geometría específica de sus componentes y finalmente determinar la intensidad de esfuerzos crítica para el material de la componente,  $K_c$ . Dado que el modo I de apertura de propagación de la grieta en la Figura 3.4 es en general el modo dominante de falla en tracción,  $K_c$  toma preferentemente el valor de  $K_{Ic}$ .

Habiendo evaluado el campo de esfuerzos y obtenido el valor del  $K_{Ic}$ , se requiere el factor de intensidad de esfuerzos  $K_I$  de la geometría a la cual pertenece el defecto para evaluar la situación.

El modelo LEFM es aplicable cuando el esfuerzo total, incluyendo esfuerzos residuales y secundarios, no es superior al límite de fluencia. Luego, la validez de la aplicación del método LEFM depende de la zona plástica alrededor de la grieta, donde se sugiere la evaluación del siguiente parámetro adimensional para poder comprobar si es aplicable el modelo

$$\alpha = \left( \frac{K_c}{\sigma_y} \right)^2 / \beta \quad (3.28)$$

donde  $K_c$  es el factor de intensidad de esfuerzos crítico,  $\sigma_y$  es el límite de fluencia y  $\beta$  es la longitud de la grieta o el espesor de sección neta sin importar lo bajo que sea.

El modelo LEFM se aplica en los casos:

$$\alpha < 1 \quad \text{para deformación plana}$$

$$\alpha < 0,4 \quad \text{para esfuerzos planos}$$

La ecuación general para  $K_I$  es de la siguiente forma

$$K_I = \sigma Y \sqrt{a} \quad (3.29)$$

donde  $\sigma$  es el campo de esfuerzos aplicado,  $Y$  es la función de forma y  $a$  es el semieje menor de la grieta.

Una forma de estimar el parámetro  $K_I$  para cualquier geometría, siempre que el esfuerzo total sea menor que el de fluencia, es con la ecuación

$$K_I = \frac{\sqrt{a}}{Q_0} (\sigma_m M_m + \sigma_b M_b) \quad (3.30)$$

donde  $Q_0$  es el parámetro de forma del defecto,  $\sigma_m$  es la componente del esfuerzo de tracción,  $M_m$  es el factor de corrección de membrana,  $\sigma_b$  es la componente del esfuerzo de flexión y  $M_b$  es el factor de corrección de flexión. Los parámetros de forma y los factores de corrección se pueden sacar de las figuras presentes en [4]. Se debe tener en consideración que la ecuación 3.24 considera el peor caso, llevando un sesgo pesimista, y para situaciones límites es conveniente revisar un modelo más preciso.

### 3.1.2.3 Crecimiento de grieta bajo esfuerzos variables

En el crecimiento de grietas hasta la propagación catastrófica en la literatura se distinguen tres etapas. La etapa I, invisible para el observador, supone que el desplazamiento de cristal que se extiende a través de varios granos contiguos, inclusiones e imperfecciones superficiales desempeña un papel. La etapa II de extensión de la grieta produce evidencia que puede observarse en la micrografía de un microscopio electrónico, presenta un carácter de crecimiento ordenado. Finalmente en la etapa III de crecimiento ocurre la fractura.

Como bien se explicó en la sección 3.1.1, las grietas por fatiga surgen y crecen cuando existe una variación de esfuerzos  $\Delta\sigma$  en cada ciclo de esfuerzo. Como se ha visto en el presente capítulo, para materiales agrietados, un esfuerzo  $\sigma$  puede ser relacionado a un factor de intensidad de esfuerzos  $K_I$  en la cercanía de la punta de la grieta, y por lo tanto, al intervalo de esfuerzo  $\Delta\sigma$  se le puede asociar un intervalo de intensidad de esfuerzos  $\Delta K_I$  que puede tomar diversas formas según sea el caso de estudio.

Bajo el supuesto de una longitud de grieta inicial  $a_i$ , el crecimiento de la grieta como una función del número de ciclos de esfuerzo  $N$  dependerá de  $\Delta\sigma$ , por lo tanto, de  $\Delta K_I$ . Para  $\Delta K_I$  por debajo de algún valor umbral  $(\Delta K_I)_n$ , una grieta no crece [1].

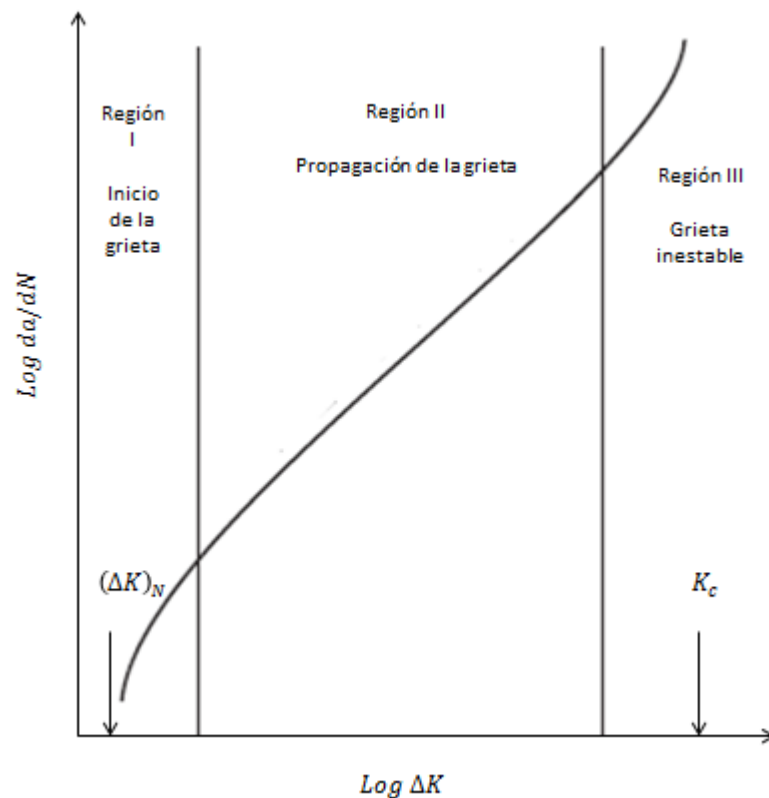
Cuando la velocidad de crecimiento de la grieta por ciclo  $da/dN$  se grafican en función del intervalo de intensidad de esfuerzos  $\Delta K_I$ , se pueden distinguir las tres etapas de crecimiento. Ahora bien, si se grafican los logaritmos de estos valores, la curva sigue una forma sigmoïdal, donde la etapa II de crecimiento presenta un comportamiento lineal, como se muestra en la Figura 3.5, siempre que se esté dentro del dominio del LEFM.

El crecimiento de la grieta en la región II de la Figura 3.5 puede aproximarse mediante la ecuación de Paris, la cual tiene la forma

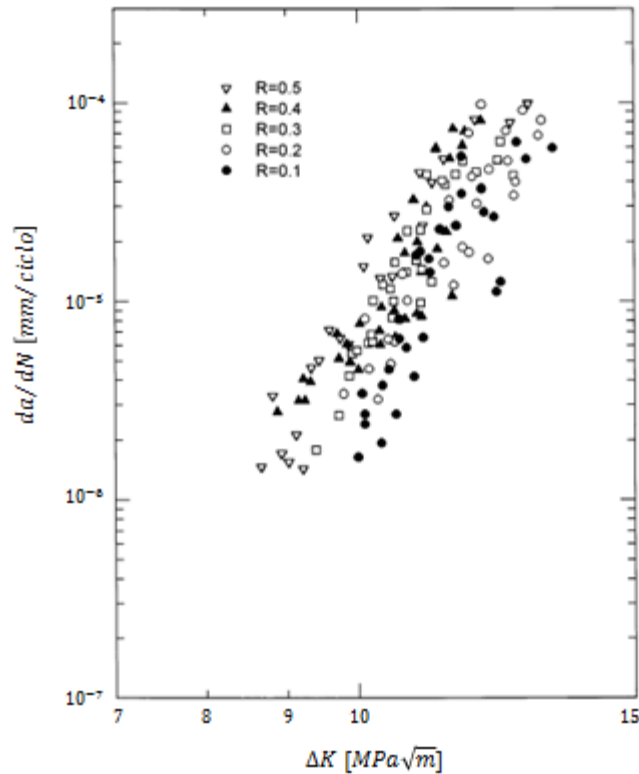
$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_I)^m \quad (3.31)$$

donde  $C$  y  $m$  son constantes empíricas del material.

Para la fundición gris, M.N. James y Li Wenfong [6] realizan un estudio experimental para encontrar los efectos de la razón de esfuerzos en el crecimiento de grietas de fatiga, y en ella presentan mediciones experimentales de la etapa II de crecimiento de grieta, que se muestran en la Figura 3.6.



**Figura 3.5** Esquema de la velocidad de crecimiento de la grieta en función de la variación de intensidad de esfuerzos en coordenadas log-log [1].



**Figura 3.6** Velocidad de crecimiento de grieta en función de  $\Delta K$  para la fundición gris [6].

Los autores destacan que el la variación del factor de intensidad esfuerzos límite  $\Delta K_{th}$  para la fundición gris corresponde a una velocidad de  $10^{-6}$  [mm/ciclo], que para las distintas razones de carga presentadas en la Figura 3.6 puede variar entre 8,5 a 10 [MPa√m] aproximadamente [6].

### 3.1.2.4 Crecimiento de grieta bajo modos mixtos

En la literatura se puede encontrar más de un parámetro para relacionar el crecimiento de grieta por fatiga bajo cargas que inducen modos mixtos, entre ellos se menciona factores de intensidad de esfuerzos equivalentes, factores de densidad de energía de deformación, factores de intensidad según la integral- $J$  y factores de intensidad de deformación equivalente [9].

Si bien se han encontrado buena correlación entre los parámetros mencionados en el párrafo anterior con la velocidad de crecimiento de grieta, cabe mencionar que no hay un único parámetro que de satisfactoriamente una correlación bajo todos los modos de carga.

Qian [9] en su revisión de la literatura para crecimiento de grietas por fatiga bajo modos mixtos presenta una forma relacionada a un factor de intensidad de esfuerzos equivalente  $\Delta K_{eff}$  desarrollado por Tanaka, que para una combinación de los modos I y II toma la forma

$$\Delta K_{eff} = (\Delta K_I^4 + 8\Delta K_{II}^4)^{0,25} \quad (3.32)$$

donde  $\Delta K_I$  y  $\Delta K_{II}$  representa la variación del factor de intensidad de esfuerzos correspondiente a los modos I y II respectivamente. El mismo autor propone que la ecuación puede ser extensible a los tres modos de crecimiento de grieta, donde la ecuación a utilizar es

$$\Delta K_{eff} = (\Delta K_I^4 + 8\Delta K_{II}^4 + 8\Delta K_{III}^4 / (1 - \nu))^{0,25} \quad (3.33)$$

siendo  $\nu$  el módulo de Poisson.

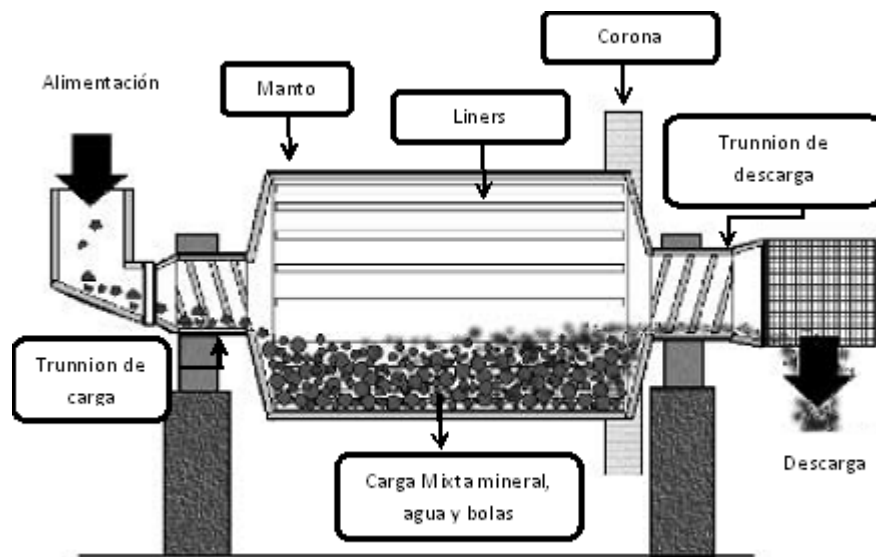
## 3.2 Antecedentes de los molinos de bolas

En esta sección se presentan antecedentes estructurales y las variables de operación relevantes para el estudio de los molinos de bolas.

### 3.2.1 Componentes de un molino de bolas

Las principales componentes de un molino de bolas se presentan en la Figura 3.7. Un molino de bolas típicamente cuenta de un manto o cuerpo, con un recubrimiento interior compuesto de unas piezas llamadas “liners” o corazas, que dan rigidez al molino y protegen del impacto que provocan la caída de la carga mixta de mineral y bolas con agua. También presenta los trunnions que sirven de soporte en la entrada y la salida del material, que se apoyan en los descansos que son alimentados por aceite a presión para evitar el desgaste de la pieza.

El movimiento rotatorio es transmitido desde un piñón a la corona que también es parte del molino.



**Figura 3.7** Esquema de un molino de bolas con sus componentes principales [5].

### 3.2.2 Volumen de carga

El volumen de carga es el volumen ocupado por la carga de las bolas y las rocas más el agua dentro del molino. Este valor se suele expresar en porcentaje o fracción del volumen total del molino. Como regla general, para molinos de bolas, la carga no debe sobrepasar el 45% del volumen total del molino [5].

Cuando se utiliza en forma de fracción, la parte ocupada por el material de molienda, las bolas en este caso, se designa con  $J_B$ , mientras que la fracción ocupada por las rocas y mineral se designa



con  $J_R$ . En la práctica, la relación preferentemente utilizada entre estas fracciones cumple la razón [5]:

$$\frac{J_R}{J_B} = 0,4 \quad (3.34)$$

### 3.2.3 Altura de la carga

La altura de la carga  $H_B$ , es la máxima altura que alcanza la carga medida desde el fondo del molino hasta el nivel de las bolas, cuando la carga no está en movimiento. Luego, la altura desde el nivel hasta los liners en el espacio que no está ocupado por el molino se denomina  $H_C$ . Estos conceptos se ilustran en la Figura 3.8, donde  $R$  representa el radio desde el centro del molino a los liners.

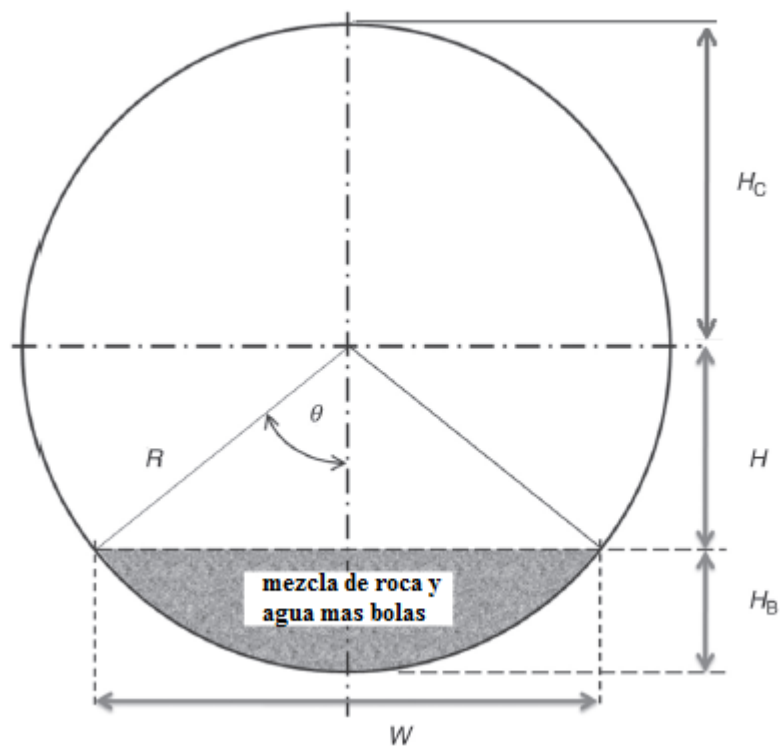
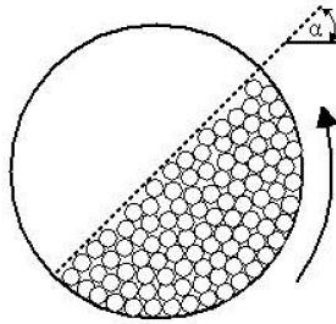


Figura 3.8 Altura de la carga [5].

### 3.2.4 Ángulo de levantamiento de la carga

El ángulo de levantamiento de la carga  $\alpha$ , es el ángulo dinámico que toma la carga en el estado de operación, como se puede ver en la Figura 3.9. Este ángulo está determinado por la densidad de la pulpa, la velocidad de rotación del molino, la distribución de tamaños de los medios de molienda y la geometría de los lifters de carga.



**Figura 3.9** Esquema del ángulo de levantamiento de carga [5].

### 3.3 Características del molino de bolas a estudiar

En esta sección se presentan las propiedades físicas y mecánicas de los materiales en los que se han sido fabricadas las componentes del molino y las condiciones de operación.

#### 3.3.1 Propiedades físicas y mecánicas de los materiales utilizados

Los materiales utilizados en las piezas del molino corresponden a acero ASTM A-36 para el manto y la corona, fundición gris ASTM clase 30 para los trunnions, y para el recubrimiento se considera una goma equivalente. Las propiedades físicas y mecánicas relevantes a temperatura ambiente se presentan en la Tabla 3.5

**Tabla 3.5** Propiedades mecánicas y físicas relevantes de los materiales de las piezas del molino.

Material	Módulo de elasticidad [MPa]	Módulo de corte [MPa]	Coefficiente de Poisson	Densidad [kg/m <sup>3</sup> ]
Acero A-36	199.950	77.221	0,29	7.855
Fundición gris	10.000	41.288	0,21	7.204
Goma equivalente	68,9	26,5	0,40	3.752

Fuente: Datos proporcionados por el doctor Alejandro Font en estudios previos realizados sobre el molino.

En cuanto a las dimensiones de las componentes, en el Anexo A.1 se presenta una imagen del cuerpo o manto del molino, en el Anexo A.2 se presenta un plano detallado con las dimensiones del trunnion, que es el mismo para carga y descarga, y en el Anexo A.3 se presenta una vista en corte del trunnion con el cilindro con hélice interior.

#### 3.3.2 Condiciones de operación del molino

Algunas de las características de operación importantes del molino se presentan a continuación:

- Velocidad de operación: 15,8 [RPM].
- Potencia del motor de accionamiento: 2.000 [HP].
- Porcentaje de llenado  $J_T$ : 45%.
- Densidad del material procesado: 1.800 [kg/m<sup>3</sup>].

- Densidad de las bolas de acero contenidas en un metro cúbico<sup>6</sup>: 4.650 [kg/m<sup>3</sup>] [5].

## 4 Resultados

### 4.1 Modelos CAD de las piezas del molino y del ensamblaje

Según lo planteado en la metodología, se desarrollan las piezas principales del molino de bolas para tener un modelo simplificado del molino. Estas piezas corresponden a las presentadas en la Figura 3.7, a excepción de los descansos, debido a que estos se modelan como reacciones en el análisis de elementos finitos. Luego se presentan vistas del ensamblaje del molino.

#### 4.1.1 Cuerpo del molino

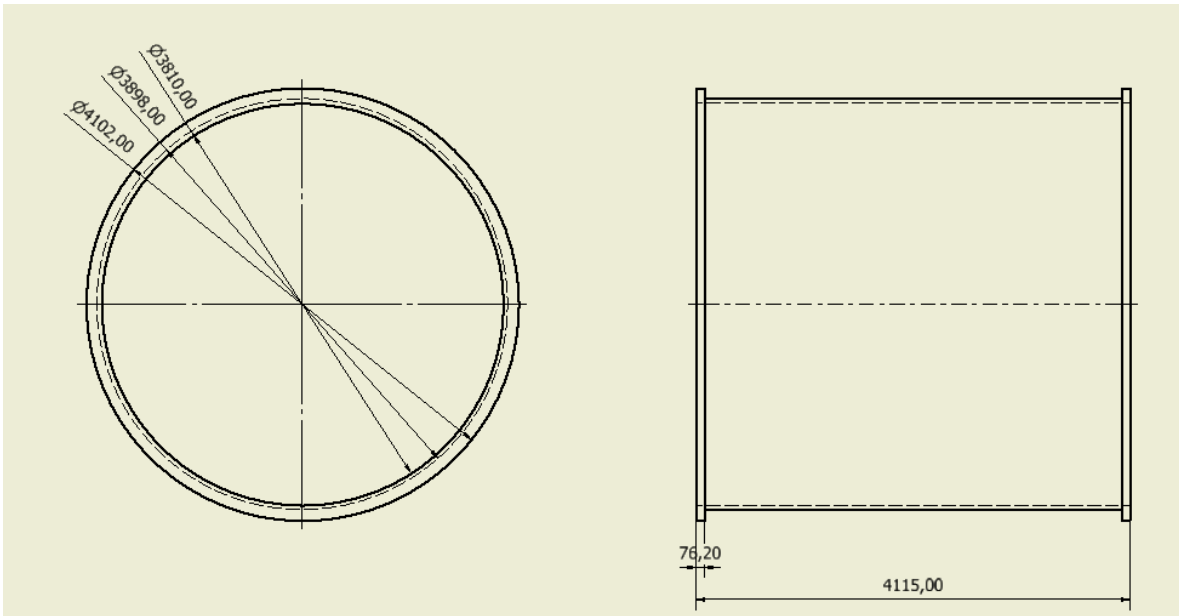
En primer lugar, se desarrolla el cuerpo del molino, que según la imagen presentada en el Anexo A.1, consta de dos partes cilíndricas idénticas con una longitud de 4,115 [m], con un diámetro interior de 3,81 [m], y de un espesor de 0,044 [m]. Una imagen isométrica de la pieza CAD modelada se puede ver en la Figura 4.1. Por otra parte, en la Figura 4.2 se muestra una vista frontal y lateral con las dimensiones descritas.



**Figura 4.1** Modelo CAD de medio cuerpo del molino.

---

<sup>6</sup> El valor presentado corresponde a la densidad de las bolas y los huecos que se generan al agrupar las bolas en un contenedor de 1 [m<sup>3</sup>].



**Figura 4.2** Vista frontal y lateral del cuerpo del molino.

#### 4.1.2 Trunnions

Los trunnions del molino se desarrollan en base al plano que se presenta en el Anexo A.2, ya que según lo planteado en la sección 3.3.1, los trunnion de carga y de descarga presentan la misma geometría. De los trunnions cabe destacar que el diámetro interior de la parte cilíndrica corresponde a 1,6 [m], y que el diámetro interior de la brida de unión concuerda con el diámetro interior del manto del cilindro de 3,81 [m].

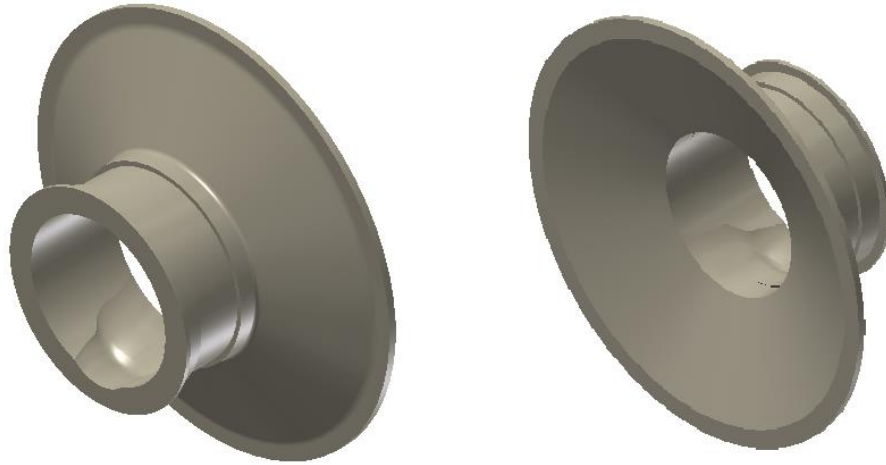
En la Figura 4.3 se puede observar una vista isométrica del modelo CAD desarrollado del trunnion sin desgaste ni fisura. En ella se puede apreciar que el trunnion no presenta los relieves que se muestran en el Anexo A.2, para poder simplificar la geometría a tratar en elementos finitos.



**Figura 4.3** Modelo CAD del trunnion del molino.

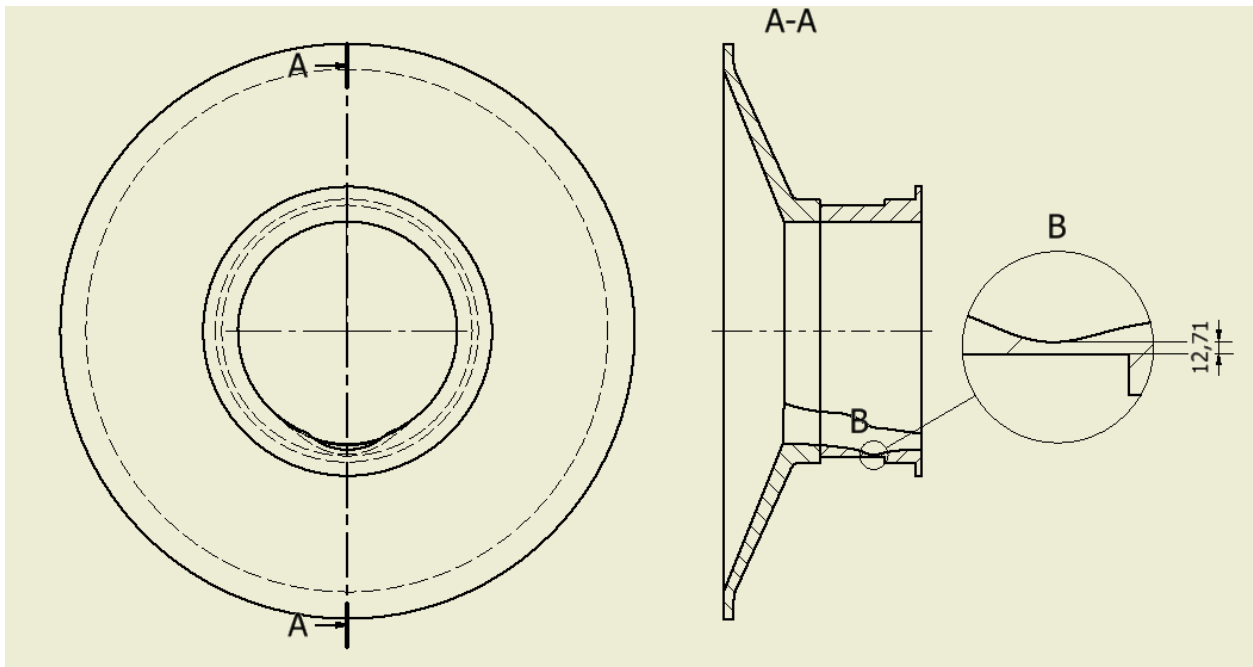
### 4.1.3 Trunnion con desgaste

En la Figura 4.4 se puede ver una vista isométrica anterior y posterior del modelo CAD del trunnion con desgaste de su superficie interior.



**Figura 4.4** Modelo CAD del trunnion de descarga con desgaste en su superficie interior.

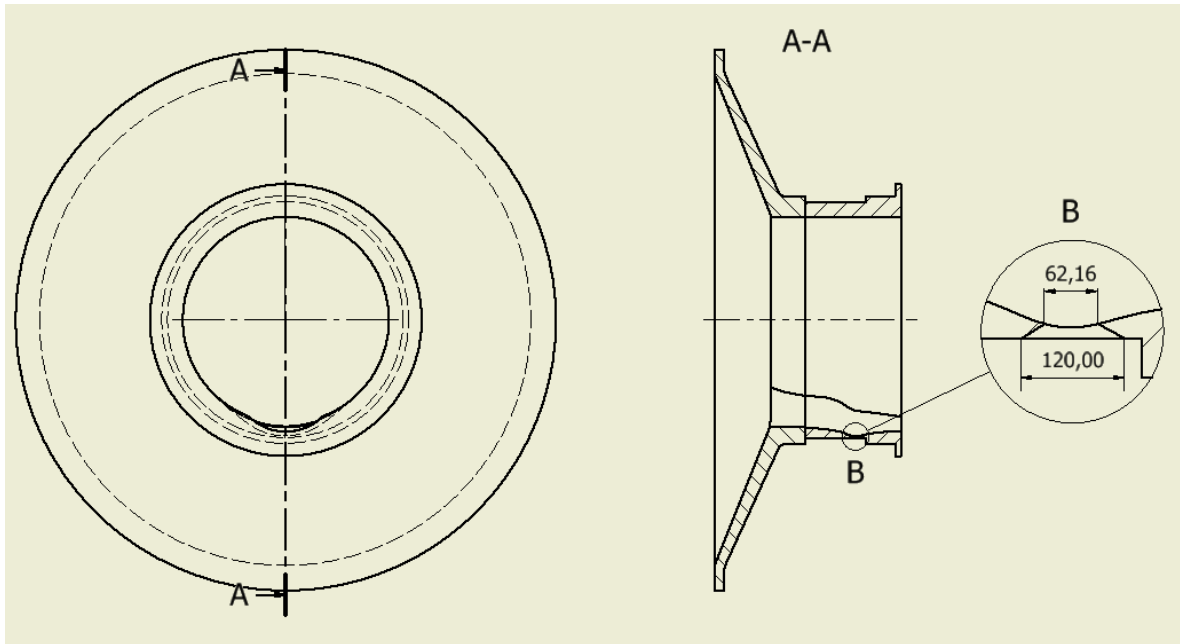
En la Figura 4.5 se muestra una vista frontal y una vista en corte en el plano de simetría del desgaste, con un acercamiento en el desgaste máximo presentado, donde el espesor remanente mínimo es de aproximadamente de 12,71 [mm].



**Figura 4.5** Vista frontal y en corte del trunnion con desgaste interior.

#### 4.1.4 Trunnion con desgaste y fisura

En la Figura 4.6 se puede ver una vista frontal y una vista en corte del trunnion con desgaste y fisura, con un acercamiento en la zona fisurada. En la figura se puede observar que la grieta inicial es más corta en la superficie interior del trunnion con respecto a la que se da en la superficie exterior, siendo esta última casi del doble de la extensión de fisura interior.



**Figura 4.6** Vista frontal y en corte del trunnion con desgaste y fisura con un acercamiento en la zona fisurada.

#### 4.1.5 Corona

La corona del molino se modela como una pieza única, y se le realiza solamente un diente, que es donde se aplica la carga transmitida por el piñon. Esta es una simplificación para evitar errores geométricos en el desarrollo del modelo en elementos finitos.

La corona posee un diámetro interior de 3,918 [m] y un diámetro exterior de 5,4 [m], y una geometría particular, que consta de un perfil reforzado con nervadura con distinta geometría para ambos lados del perfil.

Una vista isométrica y frontal del modelo CAD de la corona del molino se presenta en la Figura 4.7, por otra parte, una vista frontal y en corte del modelo de la corona se presenta en la Figura 4.8.

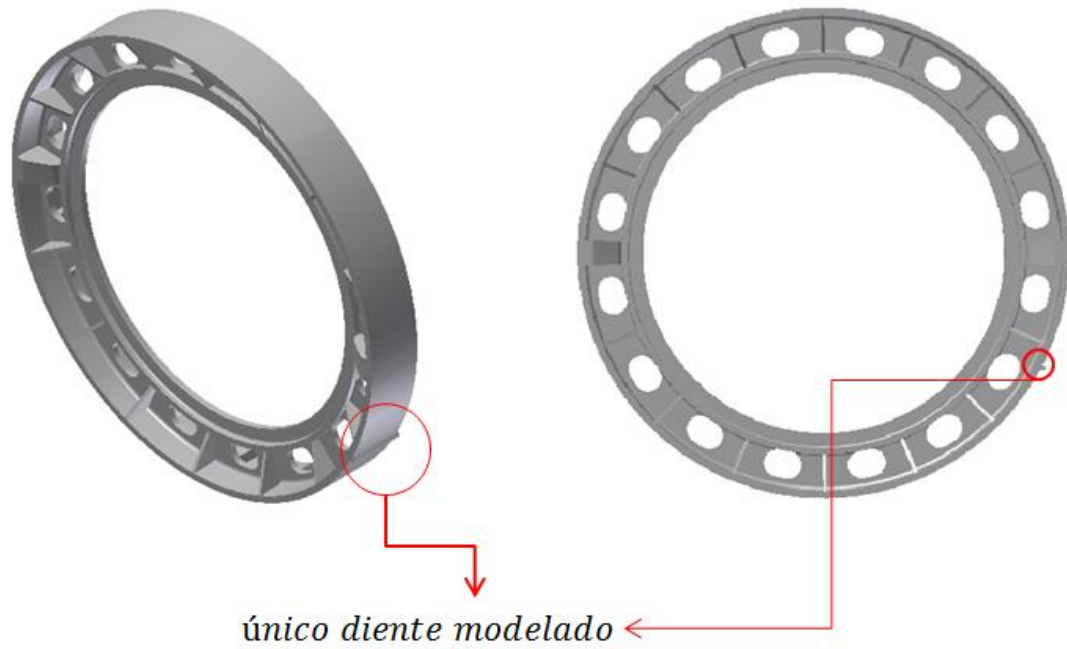


Figura 4.7 Vista del modelo CAD de la corona del molino.

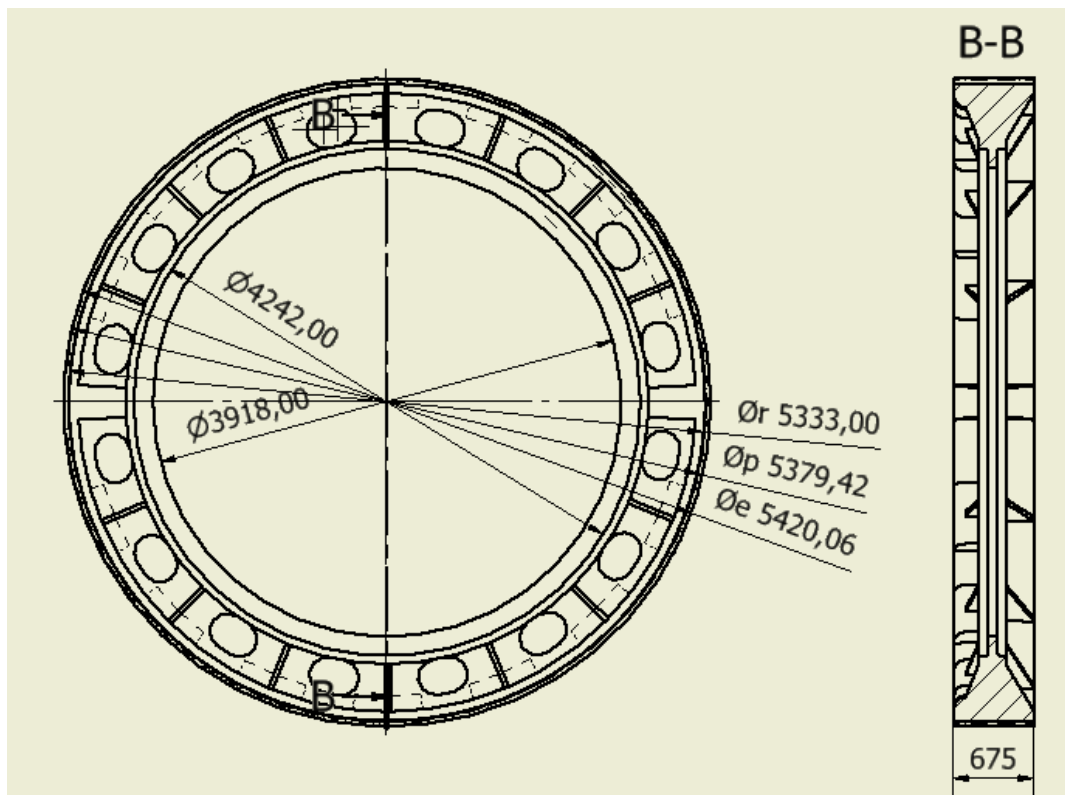


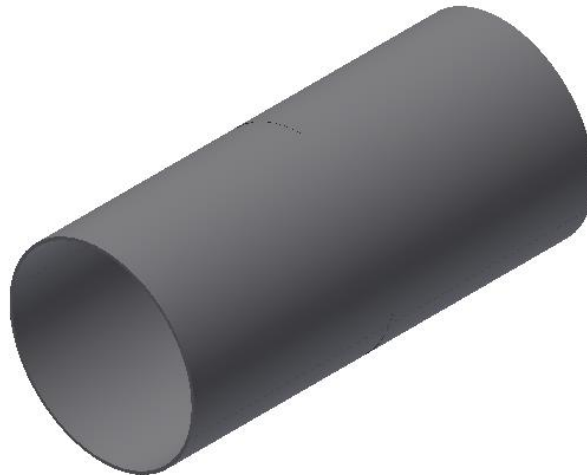
Figura 4.8 Vista frontal y en corte de la corona.

#### 4.1.6 Liners del cuerpo del molino

El conjunto de liners y lifters que presenta un molino real se modela como una pieza cilíndrica de un material equivalente que presenta propiedades físicas intermedias entre el acero y el caucho de los que están compuestas estas piezas. El espesor se selecciona de manera tal que la pieza proporcione el mismo peso que tendría el conjunto de liners y lifters mencionado.

En la Figura 4.9 se presenta una vista isométrica del modelo CAD de los liners del molino, que consta de un espesor de 59 [mm], y del largo completo del cuerpo del molino, correspondiente a los 8,23 [m], como se puede ver en la Figura 4.9.

En la Figura 4.9 se pueden ver líneas de contorno a la mitad de la extensión de la pieza. Esto se debe a que la pieza se modela como una pieza única de extensión 8,23 [m], y luego, con la herramienta dividir<sup>7</sup> que presenta Inventor se divide la pieza en dos justo a la mitad de la extensión, y luego se vuelve a dividir cada parte en dos más, división que respeta el hecho que el área interior de una de estas partes es donde se aplica la carga del material procesado en el molino, con el motivo de simplificar el ingreso de cargas en el modelo de elementos finitos.

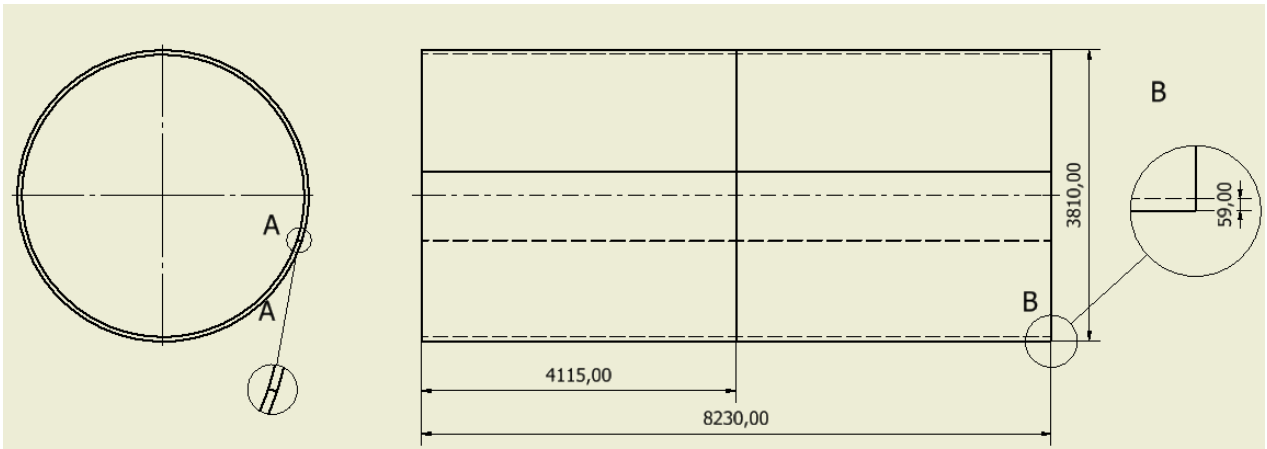


**Figura 4.9** Modelo CAD que representa los liners del molino.

---

<sup>7</sup> La herramienta dividir de Inventor permite reconocer a una pieza como un ensamblaje de una o más partes según la cantidad de divisiones realizadas. Así se puede tener partes de la pieza que se puede tratar como nuevas piezas en acciones posteriores, por ejemplo en su utilización en un programa de elementos finitos.





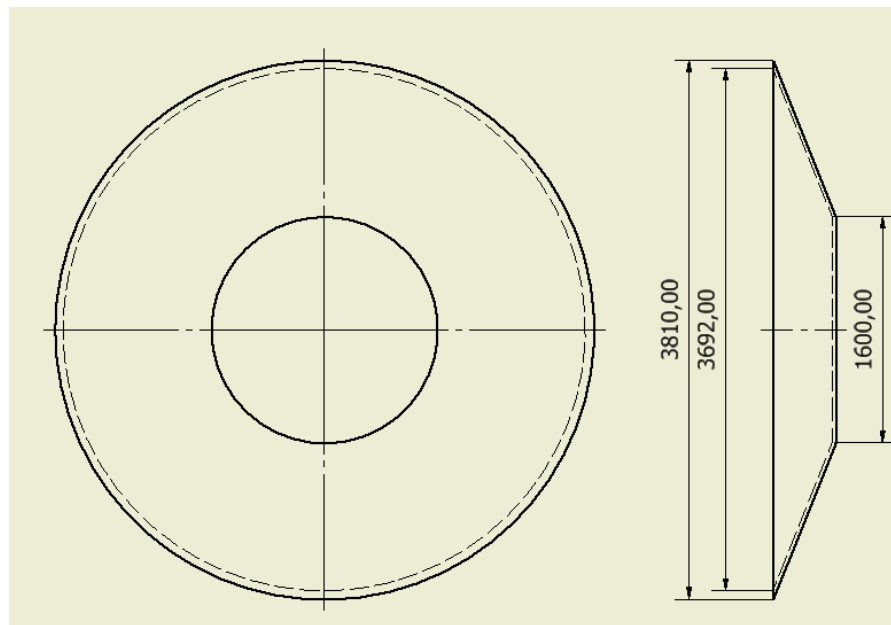
**Figura 4.10** Vista frontal y lateral del modelo CAD de los liners.

#### 4.1.7 Liners de la tapa

Los liners de cada trunnion se modelan como una porción cónica del mismo espesor del caso anterior. Una vista isométrica de la pieza se puede ver en la Figura 4.11. Por otra parte, en la Figura 4.12 se muestran las principales dimensiones de esta pieza.



**Figura 4.11** Vista isométrica del liner del trunnion.

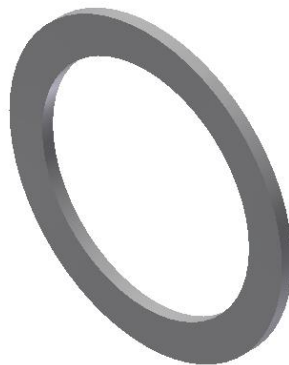


**Figura 4.12** Vista frontal y lateral del modelo CAD del liner del trunnion.

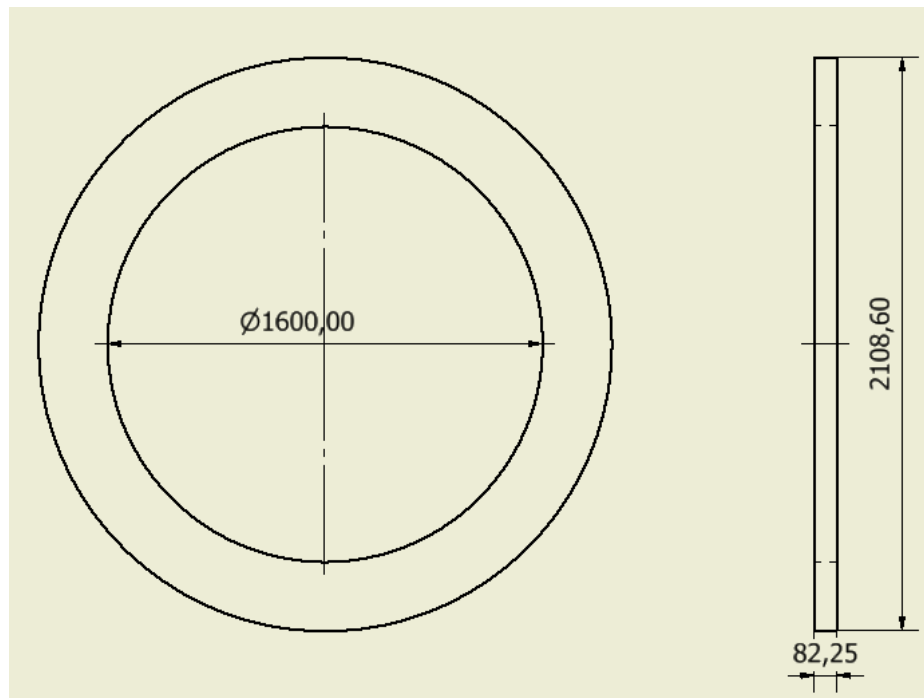
#### 4.1.8 Cilindro con hélice interior

La forma del cilindro con hélice interior se puede observar en el Anexo A.3. Se sabe que esta pieza no está fija a los liners del trunnion (es decir, en el interior del trunnion), y en la figura se puede ver que la pieza se fija en la brida exterior del trunnion. En base a esto, se decide modelar esta pieza sólo como un disco que se fija al trunnion en la brida en el ensamble, para aportar rigidez en este sector, y del resto de la pieza se calcula la masa correspondiente, que es de 1.565 [kg] aproximadamente, que luego se ingresa al modelo de elementos finitos como una presión en la superficie interior del trunnion.

En la Figura 4.13 se puede ver una vista isométrica del modelo CAD el disco descrito. El disco presenta un diámetro exterior de 2,108 [m], un diámetro interior de 1,6 [m] y un espesor igual a 82,247 [mm], como se puede ver en las vistas de la pieza presentadas en la Figura 4.14.



**Figura 4.13** Modelo CAD de la parte del cilindro con hélice interior que se realiza como pieza.



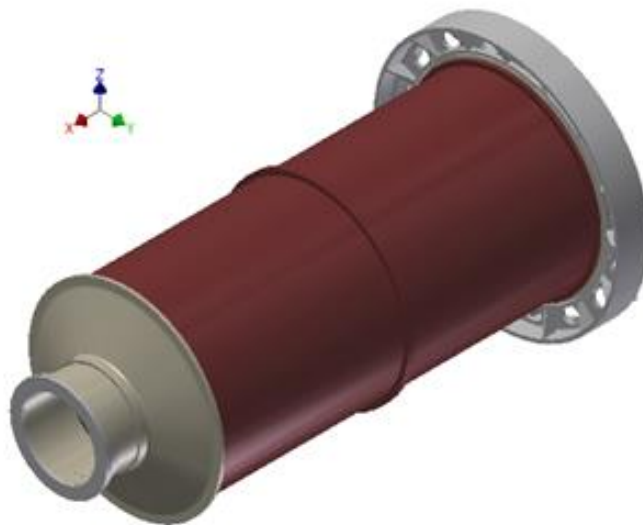
**Figura 4.14** Vista frontal y lateral de la parte del cilindro con hélice interior modelada.

#### 4.1.9 Modelo CAD del ensamble del molino

Con las piezas CAD ya realizadas que se presentan en las secciones anteriores, se procede a realizar el ensamble del molino, que en definitiva es el que se somete al análisis de elementos finitos. Una imagen isométrica del conjunto por el lado de ingreso del material se presenta en la Figura 4.15, mientras que en la Figura 4.16 se presenta la vista opuesta correspondiente al lado posterior del molino. En ambas figuras se muestra el sistema de referencia utilizado para ensamblar el molino, que al ser importado al programa COMSOL, se mantiene en esa orientación.



**Figura 4.15** Modelo CAD del ensamble del molino visto desde el lado de entrada del material.



**Figura 4.16** Modelo CAD del ensamble del molino visto desde el lado de descarga del material.

## 4.2 Cargas que actúan en el molino y determinación de las reacciones

### 4.2.1 Peso del molino vacío

Corresponde a la suma de los pesos de todas las partes del molino modeladas presentadas en la sección 4.1. En la Tabla 4.1 se muestra un detalle del peso de cada componente.

**Tabla 4.1** Pesos de las componentes del molino.

Pieza	Cantidad	Peso unitario [N]	Peso total [N]
Cuerpo del molino	2	183.925	367.850
Trunnion	2	137.482	275.460
Corona	1	159.574	159.574
Liner cuerpo	1	210.707	210.707
Liner trunnion	2	7.861	15.722
Disco del cilindro con hélice interior	2	9.386	18.772

Fuente: Biblioteca de materiales de Inventor para las masas.

La suma de los pesos totales más la de la parte del cilindro con hélice interior no modelada correspondiente a 15.356 [N] cada uno, se denominan fuerza de peso vacío  $F_{p,vacío}$ , parámetro utilizado para determinar las reacciones en los descansos con un valor correspondiente a:

$$F_{p,vacío} = 1.077.272 [N]$$

#### 4.2.2 Potencia de accionamiento del molino

La potencia de accionamiento del molino corresponde a la potencia transmitida por el motor al piñon para mover la corona, que para el molino estudiado corresponde a 2.000 [HP].

Esta carga se trata en sus componentes en fuerza según se calcula mediante la teoría de transmisión de potencia en engranajes, desarrollo que se presenta en el Anexo B, y que según el sistema de coordenadas cartesiano en el que se ha realizado el ensamblaje, toma valores en las coordenadas  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$ , teniendo los valores:

$$\begin{aligned}F_{c,y} &= -17.053 [N] \hat{j} \\F_{c,z} &= 303.119 [N] \hat{k}\end{aligned}$$

#### 4.2.3 Fuerza del material procesado

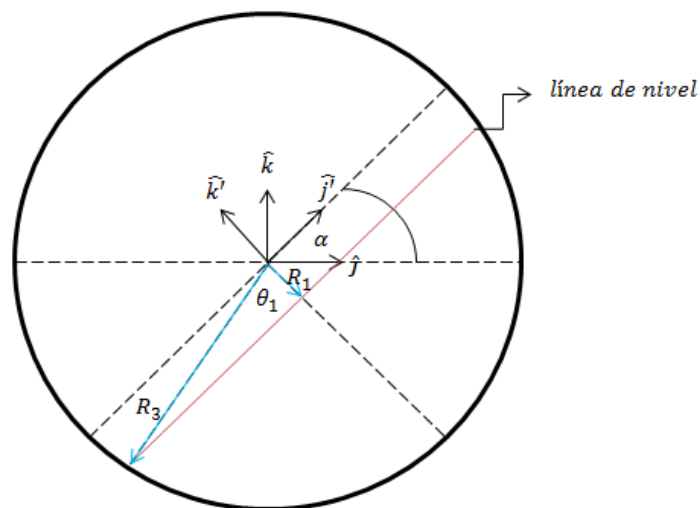
La fuerza del material procesado corresponde al peso de la mezcla de pulpa de mineral en conjunto con las bolas de acero que interactúan en el molino, digamos  $F_{p+b}$ .

Siguiendo las proporciones que propone el diseño de molinos, como se muestra en el Anexo C, se obtiene que la magnitud de esta fuerza corresponde a:

$$F_{p+b} = 1.704.000 [N]$$

La carga del material procesado es ingresada al modelo de elementos finitos como presión ejercida sobre los liners.

En la Figura 4.17, se muestra un esquema de la sección transversal del molino donde se aprecia el ángulo de levantamiento de la carga, y el sistema de referencia auxiliar utilizado para la parametrización de esta presión en los liners.



**Figura 4.17** Esquema de la posición de la pulpa más las bolas sobre la superficie interior de los liners del molino.

Se utiliza la presión de fluido dentro de un cuerpo rígido en movimiento [7]. Tomando un sistema de referencia inclinado en un ángulo  $\alpha$ , como se muestra en la Figura 4.17, la presión cumple la relación

$$P(z') = \rho_{p+b}(a_{z'} + g\cos(\alpha)) \cdot (z' + R_1) \quad (4.1)$$

donde  $\rho_{p+b}$  es la densidad de la pulpa equivalente,  $a_{z'}$  es la aceleración lineal en la dirección  $\hat{k}'$  que debería tener el molino para que la superficie del nivel de la pulpa tome el ángulo  $\alpha$  de levantamiento, y  $z'$  es el valor de la coordenada en la dirección  $\hat{k}'$  del sistema rotado de la Figura 4.17, que está en el rango  $[-R_1, -R_3]$ . El detalle de cómo se determina esta fórmula para la presión se presenta en el Anexo C.

En la ecuación 4.1, los parámetros utilizados corresponden a

$$\rho_{p+b} = 3.835,71 [kg/m^3]$$

$$a_{z'} = -1,64 [m/s^2]$$

$$\alpha = 13,89 [^\circ]$$

$$R_1 = 0,145 [m]$$

$$R_3 = 1,846 [m]$$

#### 4.2.4 Presión en los trunnions

Se agrega aceite a presión en los descansos para evitar el roce de los metales, siendo la fuerza resultante de esta presión igual a la reacción que impide los desplazamientos del molino (idealmente el molino solo rota).

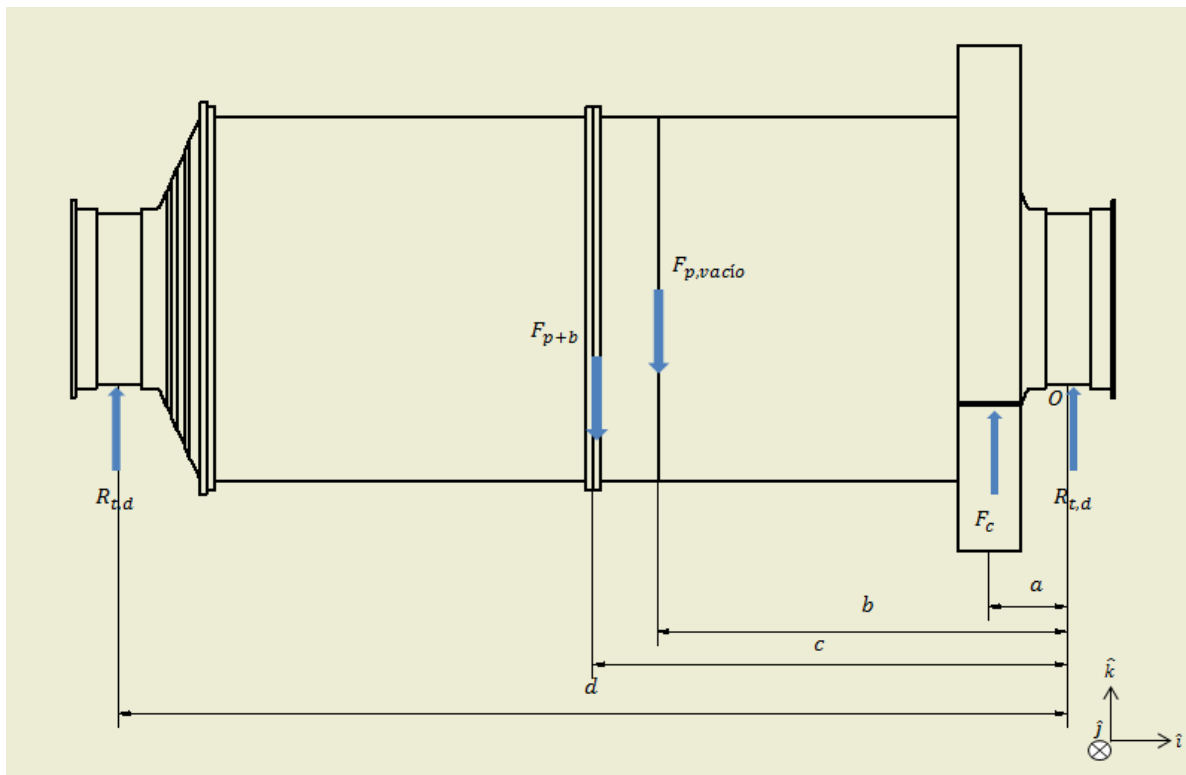
Primero se determinan las fuerzas de reacción en cada trunnion. En esta memoria se aborda el problema como un caso estático, donde se estudia la posición en la cual hay un equilibrio de torques entre el proporcionado por el motor y el ejercido por la carga cuando alcanza el estado estacionario, o sea cuando el material procesado alcanza el ángulo de elevación  $\alpha$ .

En el Anexo D se presenta el balance de fuerzas y momentos realizado para determinar las reacciones en cada trunnion. No obstante, en la Figura 4.18 se presenta un esquema del DCL según una vista del molino en el plano XZ para mostrar donde se sitúan las fuerzas mencionadas en este capítulo.

Una vez desarrollado el balance de fuerzas y momentos para cada dirección, se determina que las reacciones en los trunnions de carga y descarga para el modelo son:

$$R_{t,c} = 1.180.549 [N] \quad \delta = 0,761 [^\circ] \quad R_{t,d} = 1.297.709 [N] \quad \beta = 0,061 [^\circ]$$

donde  $R_{t,c}$  es la fuerza de reacción ejercida por la presión de aceite en el trunnion de carga,  $\delta$  es el ángulo que toma la reacción  $R_{t,c}$ , medido desde la dirección  $-\hat{k}$  según el sistema de referencia de la Figura 4.18 en contra de las manecillas del reloj, y  $R_{t,d}$  con  $\beta$  el análogo al caso anterior para el trunnion de descarga.



**Figura 4.18** DCL en el plano XZ del molino.

Análogamente al caso de la pulpa del material, las reacciones en los trunnions también se modelan como presiones para efectos de su utilización en elementos finitos, esta vez siguiendo una distribución parabólica, y que para un sistema de referencia polar toman la forma

$$P(\theta) = P_0 - \frac{P_0}{\pi^2} \cdot (\pi - 2\theta)^2 \quad (4.2)$$

donde  $P_0$  es el valor máximo de la presión alcanzado, y  $\theta$  es la coordenada en  $\hat{\theta}$  en el sistema de referencia polar o bien cilíndrico para el caso de tres dimensiones.

En el Anexo E se presenta la determinación de los parámetros  $P_0$  para los trunnions de carga y descarga,  $P_{0t,c}$  y  $P_{0t,d}$  respectivamente, que alcanzan los valores:

$$\begin{aligned} P_{0t,c} &= 1,679 \text{ [MPa]} \\ P_{0t,d} &= 1,843 \text{ [MPa]} \end{aligned}$$

### 4.3 Construcción de los modelos en COMSOL

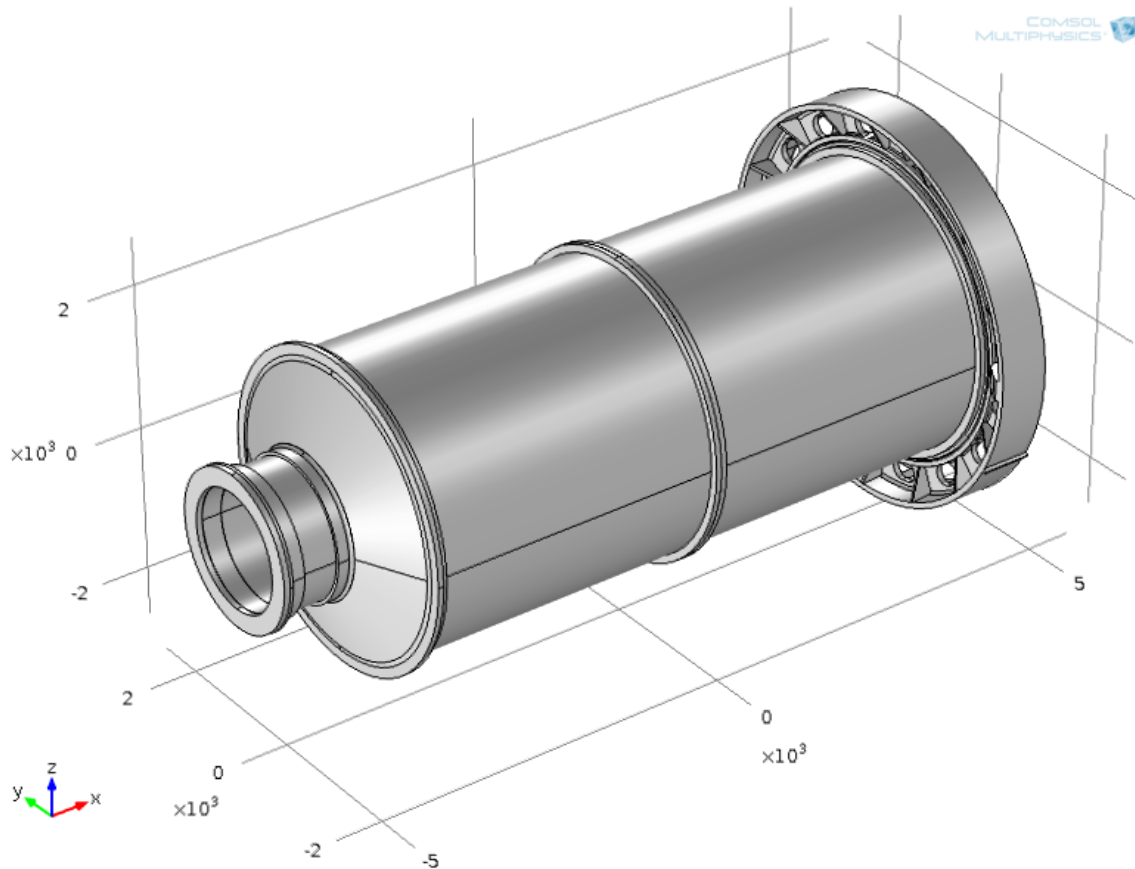
Dada la forma en que se aborda el estudio en esta memoria, todos los casos de estudio tienen en común la misma distribución de cargas, la diferencia está en el ángulo en que se gira el trunnion de descarga en el ensamble para poner el desgaste con o sin fisura en una posición determinada.

En esta sección se presentan los elementos relevantes en la construcción del modelo en COMSOL.

### 4.3.1 Importación del modelo CAD de Inventor a COMSOL

Una vez generado las piezas y el ensamblaje en Inventor, es posible importar el archivo para ser analizado en COMSOL. Existe más de una forma de hacer este procedimiento, siendo la más sencilla la herramienta LiveLink que presenta COMSOL, que permite sincronizar el programa con otro que sea compatible, entre ellos destacan Matlab, SolidWorks e Inventor.

En la Figura 4.19 se presenta una imagen del ensamble con trunnion de descarga sin desgaste ni fisura importado a COMSOL. En ella se puede observar qué orientación tiene el ensamblaje según el sistema cartesiano, destacando que la posición y la orientación son las mismas con las que se crea el ensamblaje en Inventor.



**Figura 4.19** Ensamblaje del molino completo importado desde Inventor a COMSOL.

### 4.3.2 Sistemas de referencia auxiliares

El sistema de referencia global utilizado en COMSOL es cartesiano por defecto y el ensamblaje se importa según las direcciones y las posiciones de construcción del archivo original, en este caso de Inventor.

Los modelos realizados sigue todos la misma orientación, y solo se cambia la posición angular del trunnion de descarga en el ensamblaje según el caso. La orientación del molino en el sistema global cartesiano se puede observar en la Figura 4.19. Adicionalmente, se destaca que el origen



del sistema de coordenadas cartesianas globales se da en los puntos medios de cada longitud principal del molino, es decir, en el punto medio del molino.

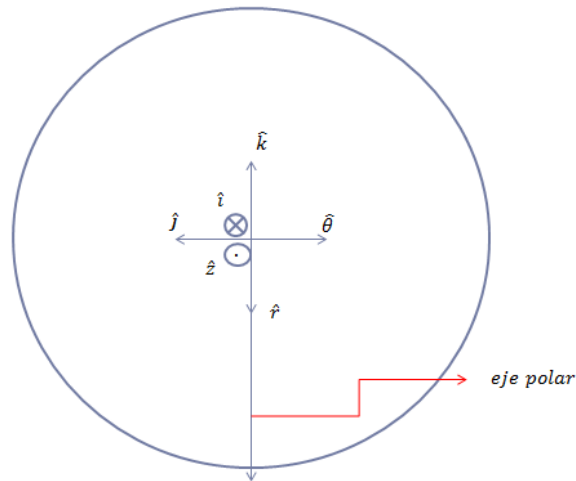
En los modelos se pueden utilizar tantos sistemas de coordenadas auxiliares como se deseen y convenga.

En este estudio, se utiliza un sistema de coordenadas auxiliar cilíndrico cuya orientación de sus ejes con respecto a los ejes cartesianos globales se muestra en la Tabla 4.2.

**Tabla 4.2** Dirección de los ejes del sistema de coordenadas cilíndrico auxiliar 2 con respecto a las direcciones del sistema cartesiano global.

Eje principal	Posición X global	Posición Y global	Posición Z global
Eje polar	0	0	-1
Eje longitudinal	-1	0	0

En la Figura 4.20 se muestra gráficamente la correspondencia entre ambos sistemas de coordenadas.



**Figura 4.20** Correspondencia entre la orientación de los ejes del sistema cilíndrico auxiliar con respecto al sistema cartesiano global.

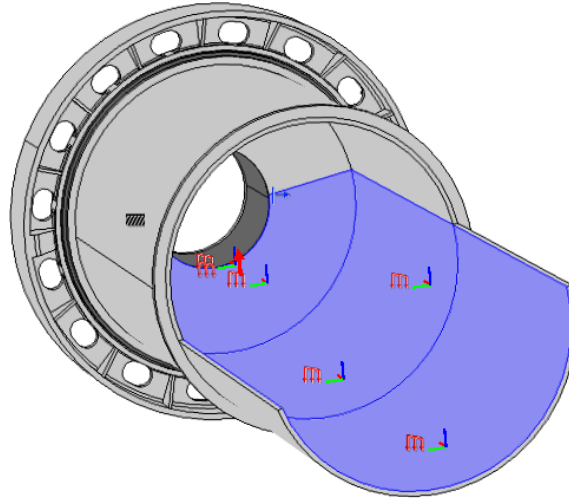
De aquí en adelante, cuando se mencione la utilización de un sistema de coordenadas cilíndrico, se hace mención a este sistema de coordenadas.

### 4.3.3 Aplicación de cargas

COMSOL permite el ingreso de cargas como fuerzas puntuales, fuerzas aplicadas en un área o como fuerzas de cuerpo o de volumen.

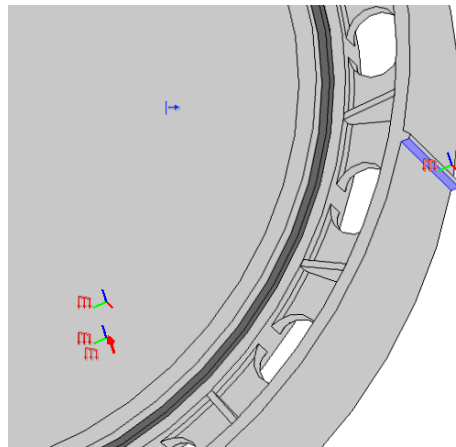
Para los pesos de las componentes, se utiliza la función de fuerzas de cuerpo y se ingresan en el formato de fuerzas por unidad de volumen. El valor de cada una de ellas corresponde a la densidad del material en cuestión multiplicado por la fuerza de gravedad, orientado en la dirección  $-\hat{k}$ .

La fuerza del material procesado se ingresa como fuerza distribuida en la dirección  $-\hat{k}$  según la ecuación 4.1 y se aplica en la superficie interior de los liners que cubre el material cuando está en funcionamiento el molino, respetando el ángulo  $\alpha$  de inclinación. Una imagen del área donde se aplica esta carga se muestra en la Figura 4.21 en color azul. En esta imagen se ha ocultado partes del molino para poder apreciar correctamente la superficie de aplicación.



**Figura 4.21** Superficie de aplicación de la fuerza ejercida por la carga del material procesado.

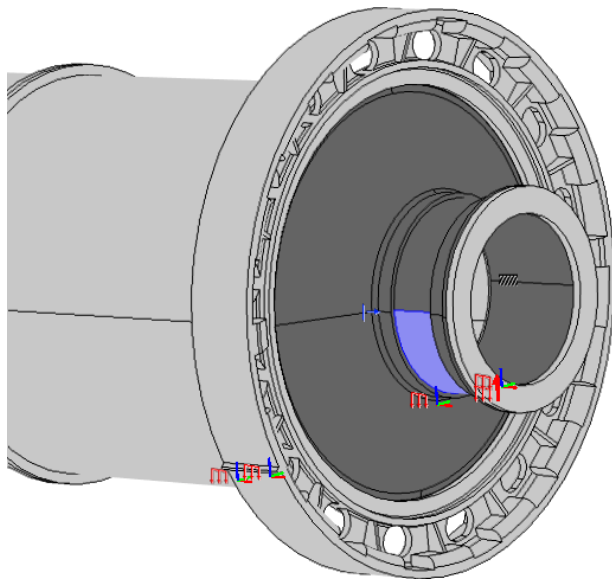
La fuerza sobre el engranaje se ingresa como una presión uniforme generada por las fuerzas sobre la corona  $F_c$  presentadas en la sección 4.2.2 en la superficie del diente de la corona que se muestra en la Figura 4.22 desde una vista inclinada desde la parte inferior, con el área en color azul.



**Figura 4.22** Superficie de aplicación de la fuerza sobre la corona.

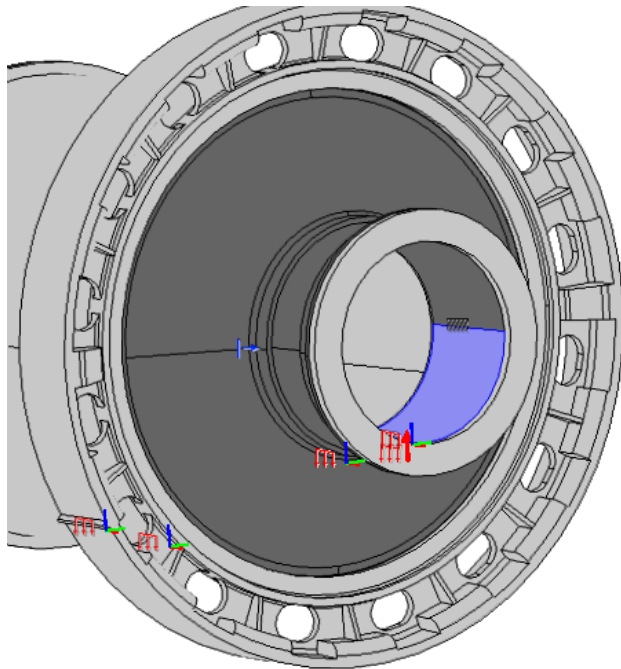
La fuerza en los trunnions se ingresa como presión dada por la ecuación 4.2 y se aplica en la mitad del área de apoyo del trunnion inclinada en el ángulo  $\beta$  o  $\delta$  según corresponda al trunnion de descarga o de carga respectivamente.

Una imagen de la superficie de aplicación de la carga en el trunnion de carga se muestra en la Figura 4.23 en color azul.



**Figura 4.23** Superficie de aplicación de la presión en los trunnions.

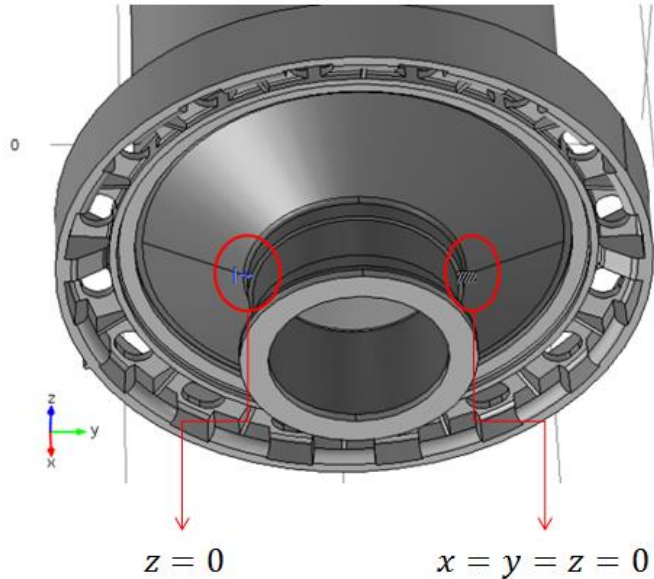
Finalmente, la última carga aplicada corresponde a la fuerza del peso que ejerce la parte del cilindro con hélice interior que no se modela como pieza. Esta fuerza se ingresa como una presión uniforme aplicada en la mitad inferior de la superficie interior del trunnion, como se muestra en la Figura 4.24 en color azul para el trunnion de carga.



**Figura 4.24** Superficie de aplicación de la fuerza correspondiente al peso de la parte no modelada como pieza del cilindro con hélice interior.

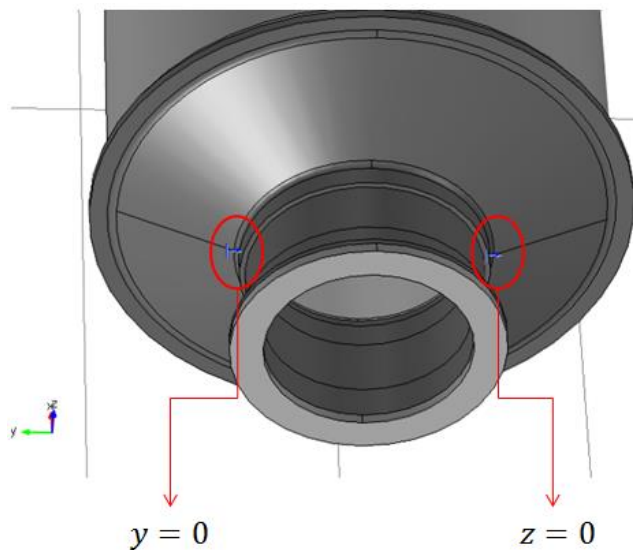
### 4.3.4 Condiciones de borde

En los modelos se utilizan condiciones de borde aplicadas en puntos para restringir todos los grados de libertad del molino. En la Figura 4.25 se muestran las condiciones de borde aplicadas en el trunnion de carga. Estas corresponden a un punto en el cual se restringe el movimiento en las tres direcciones (punto de la derecha en la figura) y al otro en que se restringe el movimiento solo en la dirección vertical  $\hat{k}$ .



**Figura 4.25** Condiciones de borde en el trunnion de carga.

En la Figura 4.26 se muestran las condiciones de borde aplicadas en el trunnion de descarga. Aquí se restringe el movimiento vertical correspondiente a la dirección  $\hat{k}$  en un punto (el de la derecha en la figura) y el movimiento horizontal según la dirección  $\hat{j}$  en el otro punto.



**Figura 4.26** Condiciones de borde en el trunnion de descarga.

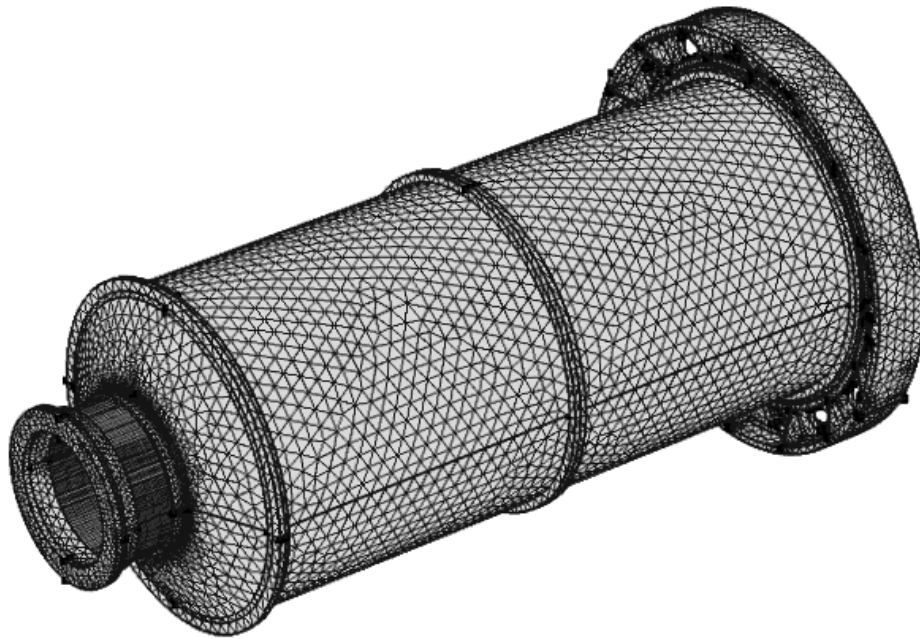
Finalmente, es fácil entender que la combinación de las condiciones de borde expuestas restringen todos los grados de libertad del molino.

#### 4.3.5 Mallado

El mallado se realiza pieza por pieza en base a tetraedros libres, con distintos tamaños de elementos según cada pieza.

Según las dimensiones de la parte a mallar, COMSOL propone tamaños de elementos que van en la siguiente escala decreciente: extremadamente grueso – extra grueso – más grueso – grueso – normal – fino – más fino – extra fino – extremadamente fino. Luego, para todas las piezas, a excepción del trunnion de descarga, se utiliza el grado de la escala normal. Sin embargo, para el trunnion de descarga se utiliza una disminución gradual del tamaño de elemento que va desde normal hasta llegar a extra fino en la superficie de apoyo del trunnion.

A modo de ejemplo, en la Figura 4.27 se muestra una imagen del mallado del molino para el primer caso donde el trunnion de descarga no presenta desgaste ni fisura. Este modelo cuenta con alrededor de 110.000 elementos, con una mayor densidad de elementos en la parte de apoyo del trunnion de descarga.



**Figura 4.27** Mallado del molino en el primer caso del trunnion de descarga sin desgaste ni fisura.

## 4.4 Resultados de los estudios

### 4.4.1 Primer caso: Molino con el trunnion sin desgaste ni fisura

El primer caso corresponde al estudio del molino con el trunnion sin desperfecto. La simulación presenta un mallado de tetraedros libres con alrededor de 110.000 elementos.

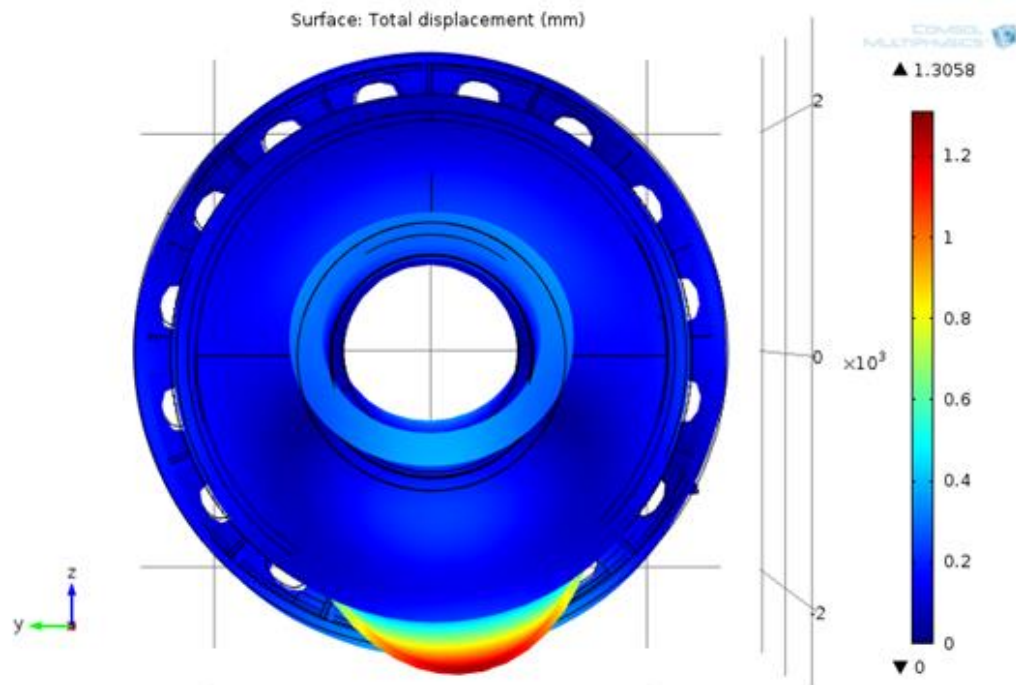
Las reacciones residuales debido a las condiciones de borde impuestas son:

$$R_x = 0,02 [N]$$

$$R_y = 0,04 [N]$$

$$R_z = -6.655 [N]$$

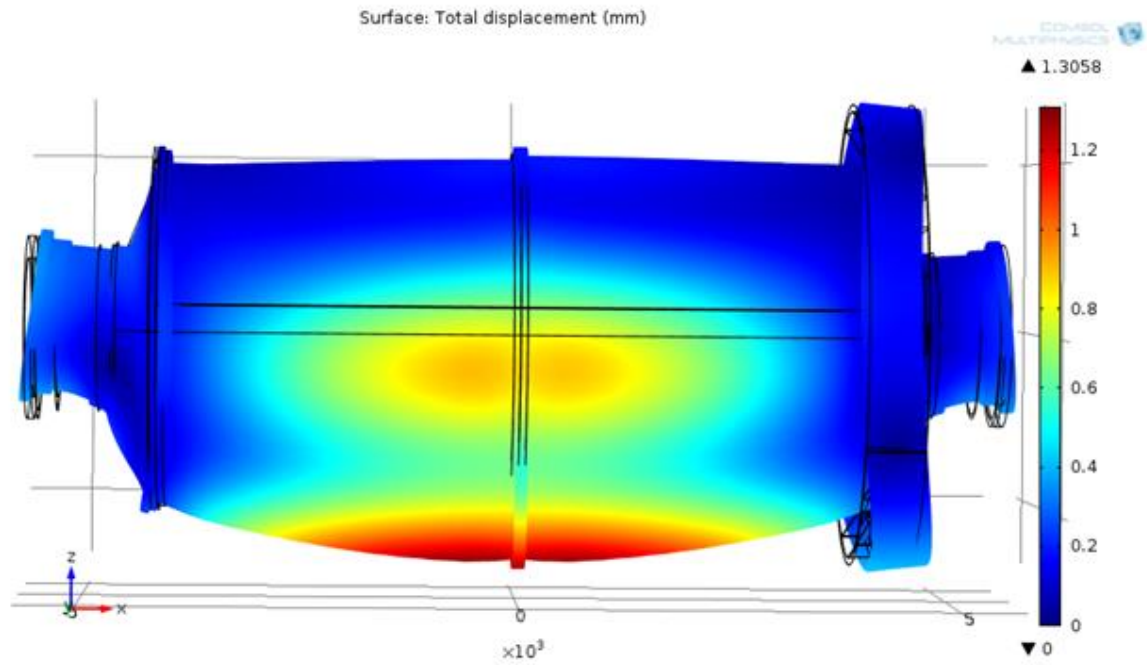
Como primer resultado, en la Figura 4.28 y la Figura 4.29 (página 42) se muestra una imagen de una vista lateral y frontal del molino en la posición instantánea de equilibrio estudiada respectivamente, donde se gráfica los desplazamientos totales superficiales y se agrega la deformación que sufre el molino con un factor de escala por defecto que propone COMSOL para este caso de 560,4 para tener una noción del estado de la estructura cuando está en funcionamiento.



**Figura 4.28** Vista frontal del molino deformado con un factor de escala de 560 en la posición de equilibrio teórica instantánea, donde se muestran los desplazamientos superficiales del molino para el caso en que el trunnion de descarga no presenta desgaste ni fisura.

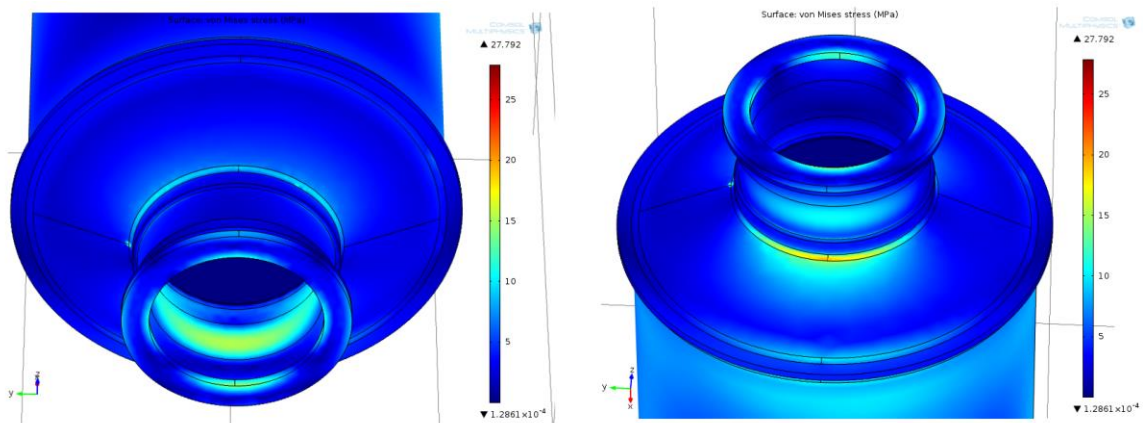
Como consideraciones generales de la Figura 4.28, se puede apreciar que el molino sufre una deformación en el manto acentuándose en el punto medio de su longitud en la dirección  $\hat{i}$  del molino, que es el lugar teórico de aplicación de la carga del material procesado.

En la Figura 4.28 y la Figura 4.29 también se puede apreciar que los trunnions se deforman por flexión en las direcciones  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$ , siendo esta contenida en parte por el disco del cilindro de hélice interior en la parte superior del trunnion.



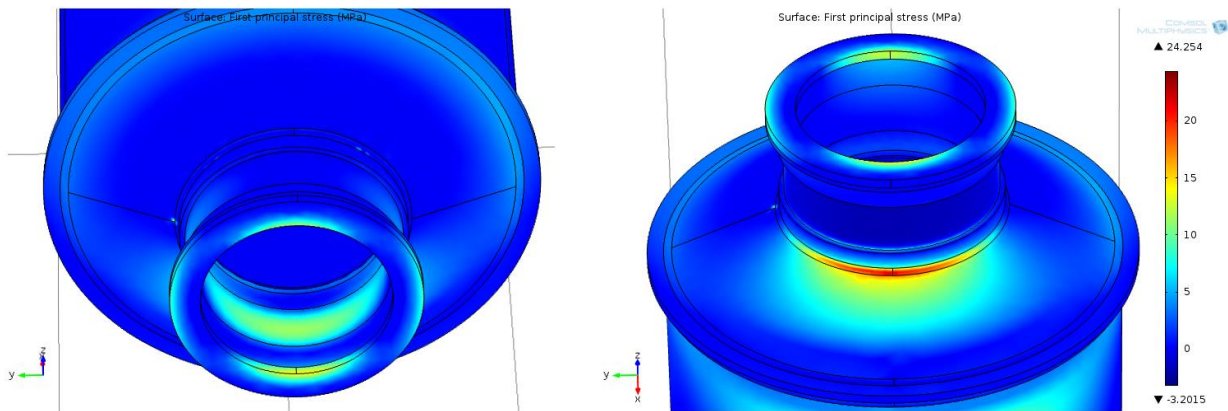
**Figura 4.29** Vista lateral del molino deformado con un factor de escala de 560 en la posición de equilibrio teórica instantánea, donde se muestran los desplazamientos superficiales del molino para el caso en que el trunnion de descarga no presenta desgaste ni fisura.

En la Figura 4.30 se muestra el esfuerzo de von Mises en el trunnion de descarga desde una vista superior e inferior, donde se cubre el rango visual de las superficies internas y externas del trunnion. En la figura se puede observar que el esfuerzo alcanza valores más altos en la superficie interior. El máximo en la superficie interior en el sistema de referencia cilíndrico se da en la posición (0,8 [m]; 354,15 [°]; 5,07955 [m]) y corresponde al valor 14,0 [MPa].



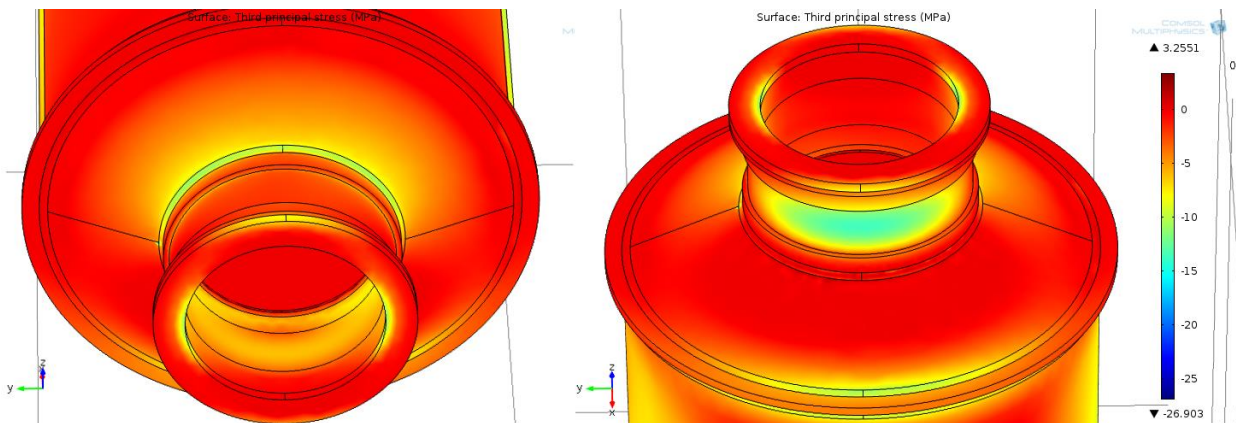
**Figura 4.30** Esfuerzos de von Mises desde una vista inclinada superior (izquierda) e inferior (derecha) del trunnion de descarga.

En la Figura 4.31 se muestra una imagen del primer esfuerzo principal que soporta el trunnion de descarga. En la figura se puede observar que el máximo se da en la superficie interior y el valor corresponde a 11,27 [MPa].



**Figura 4.31** Primer esfuerzo principal en el trunnion de descarga visto desde un ángulo superior (izquierda) y desde un ángulo inferior (derecha).

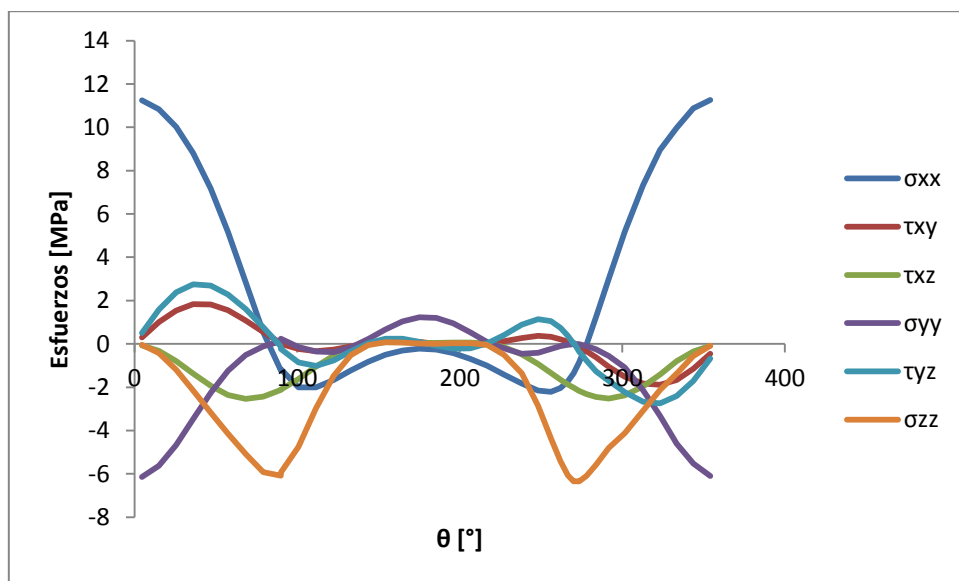
En la Figura 4.32 se muestra una imagen del tercer esfuerzo principal que se ejerce sobre el trunnion de descarga cuando el molino está en operación. En la figura se puede observar que el mínimo se da en la superficie exterior, y alcanza un valor de -13,67 [MPa].



**Figura 4.32** Tercer esfuerzo principal en el trunnion de descarga visto desde un ángulo superior (izquierda) y desde un ángulo inferior (derecha).

Ya que idealmente el molino solo presenta movimiento rotatorio, se desprende que para un punto superficial cualquiera, este varía idealmente solo su posición en la coordenada angular  $\theta$  en el tiempo debido a la geometría cilíndrica con respecto al eje de rotación. Si se le hace un seguimiento a un punto que presente las coordenadas  $r = 0,8$  [m] y  $z = 5,07955$  [m] en particular durante su trayectoria, este tendrá un ciclo en el que pasa por el máximo local en una revolución. Luego, se seleccionan los nodos que se ubican en las coordenadas  $r$  y  $z$  mencionadas y se importa el tensor de esfuerzos cartesiano para poder obtener un esfuerzo de von Mises equivalente con el cual evaluar la vida a la fatiga. En el Gráfico 4.1 se presenta la evolución del tensor cartesiano durante una revolución para un punto que tiene las coordenadas mencionadas.





**Gráfico 4.1** Componentes del tensor de esfuerzos en coordenadas cartesianas globales de la superficie interior del trunnion en función de  $\theta$  para  $r = 0,8$  [m] y  $z = 5,07955$  [m].

En la Tabla 4.3 se presentan los valores máximos y mínimos de cada componente del tensor de esfuerzos en el sistema cartesiano en la trayectoria presentada en el Gráfico 4.1

**Tabla 4.3** Valores máximos y mínimos del tensor de esfuerzos en coordenadas cartesianas globales para la trayectoria de un punto que pasa por el máximo esfuerzo de von Mises en el interior del trunnion.

Esfuerzos	Máximo [MPa]	$\theta$ para el máx. [°]	Mínimo [MPa]	$\theta$ para el mín. [°]
$\sigma_{xx}$	11,26	354,15	-2,21	256,09
$\tau_{xy}$	1,83	36,17	-1,88	323,11
$\sigma_{yy}$	1,23	175,28	-6,14	4,58
$\tau_{yz}$	2,76	36,17	-2,74	323,11
$\sigma_{zz}$	0,08	154,30	-6,36	273,40
$\tau_{xz}$	0,08	154,30	-2,54	68,28

Luego, para las componentes del tensor cartesiano presentadas en la Tabla 4.3, se calculan los esfuerzos medios y alternantes según las fórmulas 3.18 y 3.19, los que se presentan en la Tabla 4.4.

**Tabla 4.4** Esfuerzos medios y alternantes para el tensor de esfuerzos en coordenadas cartesianas globales.

Esfuerzos	Medio [MPa]	Alternante [MPa]
$\sigma_{xx}$	4,52	6,74
$\tau_{xy}$	-0,03	1,86
$\sigma_{yy}$	-2,46	3,68
$\tau_{yz}$	0,01	2,75
$\sigma_{zz}$	-3,14	3,22
$\tau_{xz}$	-1,23	1,31

Con los resultados de la Tabla 4.4, se calcula un esfuerzo de von Mises para el esfuerzo medio y alternante según la ecuación 3.24, con lo que se obtiene

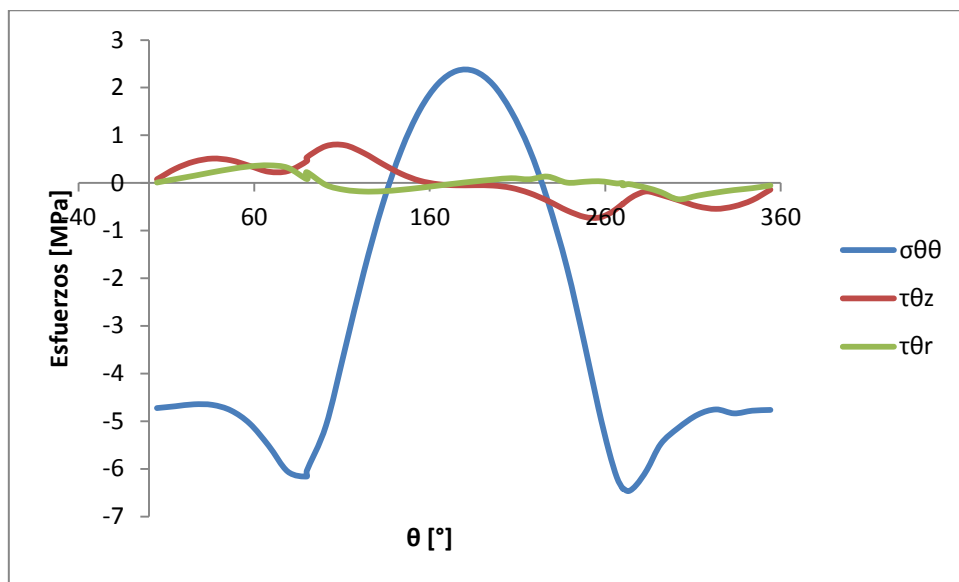
$$\sigma_{vm,m} = 7,64 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_{vm,a} = 7,01 \text{ [MPa]}$$

que permiten hacer la evaluación de la vida a la fatiga que se presenta en la sección 4.5.

Por otra parte, se sabe que el desgaste máximo se da en la superficie interior del trunnion en la posición longitudinal  $z = 5,222 \text{ [m]}$ . Luego, se importan los resultados del tensor de esfuerzos en coordenadas cilíndricas para esta posición en la superficie interior, ya que las componentes según esta orientación activarían los modos de apertura de grieta, en particular, los esfuerzos  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\tau_{\theta z}$  y  $\tau_{\theta r}$  activan los modos I, II y III de apertura de grieta para una grieta longitudinal en la dirección  $\hat{i}$ . Por lo tanto, al conocer las posiciones angulares donde se dan los máximos y mínimos de las componentes mencionadas, se tienen posiciones tentativas para ubicar el desgaste máximo correspondiente a los casos de estudio posteriores.

En el Gráfico 4.2 se muestra la evolución de los esfuerzos  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\tau_{\theta z}$  y  $\tau_{\theta r}$  en una revolución para la posición  $r=0,8 \text{ [m]}$  y  $z=5,222 \text{ [m]}$ .



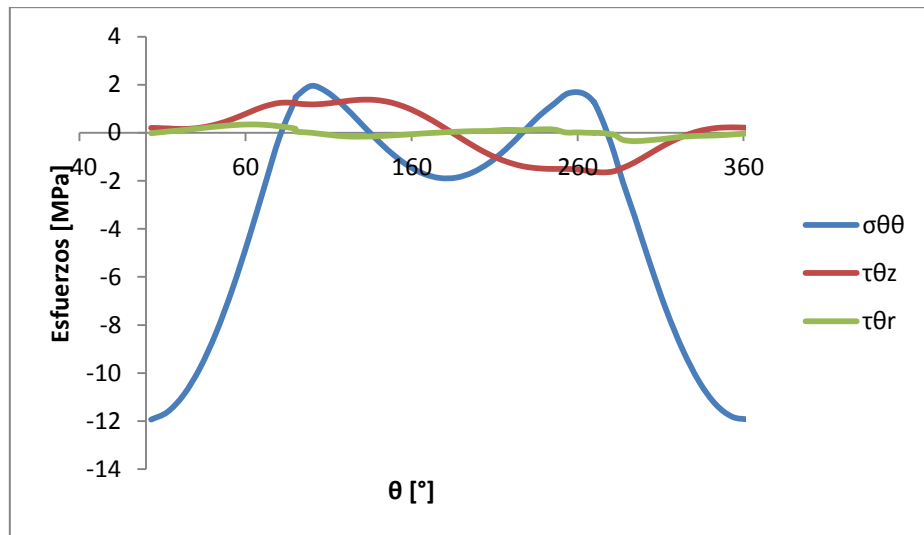
**Gráfico 4.2** Componentes del tensor de esfuerzos  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\tau_{\theta z}$  y  $\tau_{\theta r}$  de la superficie interior del trunnion en función de  $\theta$  para  $r=0,8 \text{ [m]}$  y  $z=5,222 \text{ [m]}$ .

La posición angular y el valor máximo y mínimo de cada componente del tensor de esfuerzos se presentan en la Tabla 4.5

**Tabla 4.5** Valores máximos y mínimos de los esfuerzos  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\tau_{\theta z}$  y  $\tau_{\theta r}$  en la trayectoria de punto en la superficie interior del trunnion que pasa por las coordenadas  $r=0,8 \text{ [m]}$  y  $z=5,07955 \text{ [m]}$  en una revolución.

Esfuerzos	Máximo [MPa]	$\theta$ para el máx. [°]	Mínimo [MPa]	$\theta$ para el mín. [°]
$\tau_{\theta r}$	0,37	68,28	-0,34	301,60
$\sigma_{\theta\theta}$	2,35	175,28	-6,47	273,39
$\tau_{\theta z}$	0,79	111,69	-0,73	256,09

De la misma forma, se importan los resultados del tensor de esfuerzos en coordenadas cilíndricas de la superficie exterior del trunnion para la posición longitudinal  $z = 5,222$  [m] con el mismo fin anterior, es decir, tener posiciones estratégicas para posicionar el desgaste máximo. La evolución de las componentes que importan se muestra en el Gráfico 4.3.



**Gráfico 4.3** Componentes del tensor de esfuerzos  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\tau_{\theta z}$  y  $\tau_{\theta r}$  de la superficie exterior del trunnion en función de  $\theta$  para  $r=0,9143$  [m] y  $z=5,07955$  [m].

La posición angular y el valor máximo y mínimo de cada componente del tensor de esfuerzos se presentan en la Tabla 4.6.

**Tabla 4.6** Valores máximos y mínimos de los esfuerzos  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\tau_{\theta z}$  y  $\tau_{\theta r}$  en la trayectoria de punto en la superficie exterior del trunnion que pasa por las coordenadas  $r=0,9143$  [m] y  $z=5,07955$  [m] en una revolución.

Esfuerzos	Máximo [MPa]	$\theta$ para el máx. [°]	Mínimo [MPa]	$\theta$ para el mín. [°]
$\tau_{\theta r}$	0,35	61,45	-0,35	294,35
$\sigma_{\theta\theta}$	1,95	99,57	-11,94	3,10
$\tau_{\theta z}$	1,37	128,28	-1,65	276,11

#### 4.4.2 Segundo caso: Molino con trunnion con desgaste interior

El segundo caso corresponde al estudio de la evolución del estado de esfuerzos del trunnion cuando este presenta desgaste de su superficie interior a medida que el molino realiza una revolución.

El estudio consiste en realizar una serie de simulaciones en donde se va variando la posición angular del desgaste del trunnion de descarga emulando lo que sería una revolución del molino. Las posiciones angulares elegidas corresponden a los ángulos donde se presentaron los máximos y mínimos de cada componente del tensor cartesiano del caso anterior según la Tabla 4.3, para poder obtener los nuevos máximos y mínimos que permitan obtener un esfuerzo de von Mises equivalente como en el caso anterior.

Cada simulación consta de un mallado de alrededor de 122.000 elementos.

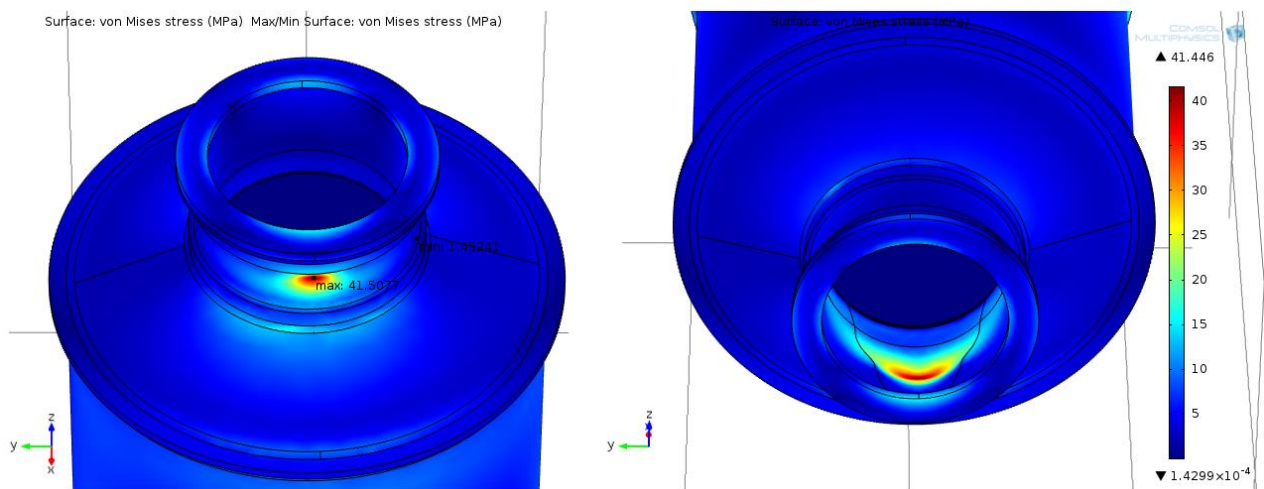
Una vez realizadas las simulaciones, estas presentan reacciones residuales debido a las condiciones de borde puntuales impuestas de orden de:

$$R_x = 0,70 [N]$$

$$R_y = 47 [N]$$

$$R_z = -11.000 [N]$$

Según los resultados presentados en la sección 4.4.1, para el trunnion sin defectos, el tercer esfuerzo principal en valor absoluto es mayor que el primer esfuerzo principal y se da en la parte donde la presión del aceite es máxima. Esta posición corresponde al ángulo  $\theta = 3,12 [^\circ]$  según los puntos del mallado realizado. En el presente caso con el trunnion desgastado, el máximo esfuerzo de von Mises se da en la superficie exterior del trunnion, en el sector del mínimo espesor remanente cuando este pasa por el ángulo  $\theta = 3,12 [^\circ]$  y alcanza un valor de 41,51 [MPa]. La ubicación específica según el sistema cilíndrico es en la posición ( $r = 0,9143 [m]$ ;  $\theta = 3,12 [^\circ]$ ;  $z = 5,194 [m]$ ). En la Figura 4.33 se puede observar una imagen de estos resultados.

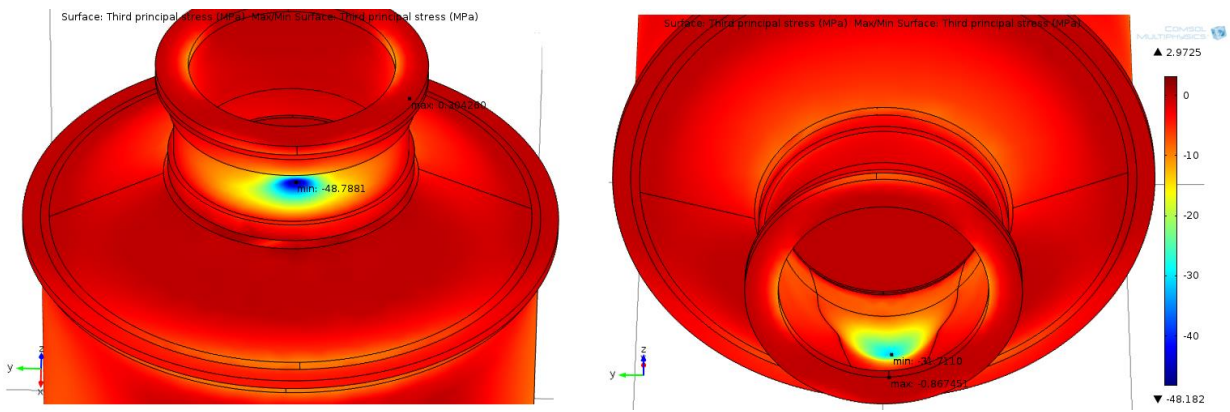


**Figura 4.33** Esfuerzo de von Mises para el molino con el trunnion con el desgaste máximo en una posición  $\theta_0 = 3,10 [^\circ]$  con respecto al sistema cilíndrico visto desde un ángulo inferior (izquierda) y superior (derecha).

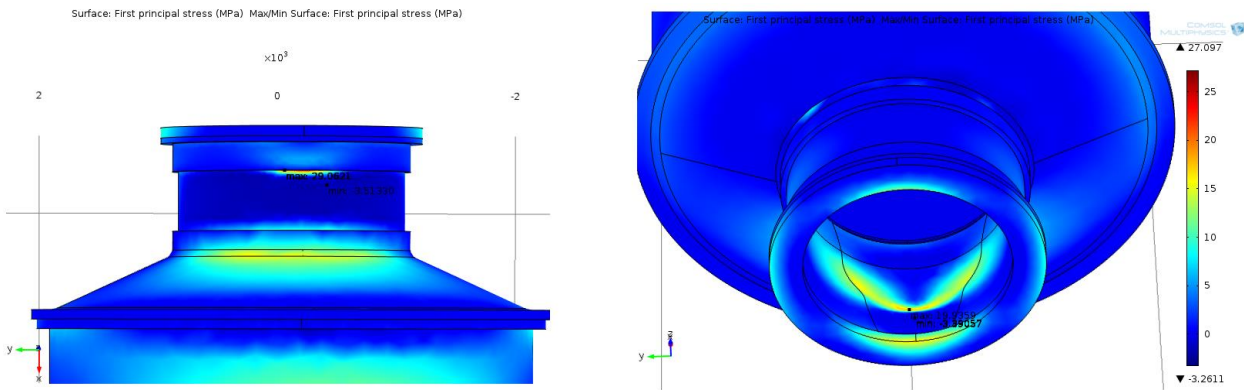
La componente del tensor de esfuerzos cilíndrico más influyente en el esfuerzo de von Mises corresponde al esfuerzo tangencial  $\sigma_{\theta\theta}$  que toma valores negativos cuando está en esa ubicación, lo que implica esfuerzos de compresión. Luego, al estudiar los esfuerzos principales que soporta el trunnion, se observa que el tercer esfuerzo principal es el más influyente tomando un valor de -48,79 [MPa] prácticamente en la dirección tangencial, como se puede ver en la Figura 4.34 (ver página 48).

Igualmente, para la posición del desgaste en cuestión se presenta el primer esfuerzo principal para la superficie interior y exterior del trunnion en la Figura 4.35 (ver página 48), donde se puede observar que el máximo valor se da en la superficie exterior con un magnitud de 29,06 [MPa].

Para hacer la evaluación de la vida a la fatiga, se hace un seguimiento del punto que está en la región del desgaste máximo en la superficie exterior del trunnion donde se alcanza el máximo esfuerzo de von Mises a medida que desarrolla una revolución. La evolución del punto se obtiene al estudiar la posición  $r = 0,9143 [m]$ ,  $z = 5,194 [m]$  y la coordenada angular  $\theta$  coincidente con el ángulo en el cual se establece el desgaste máximo en cada simulación.

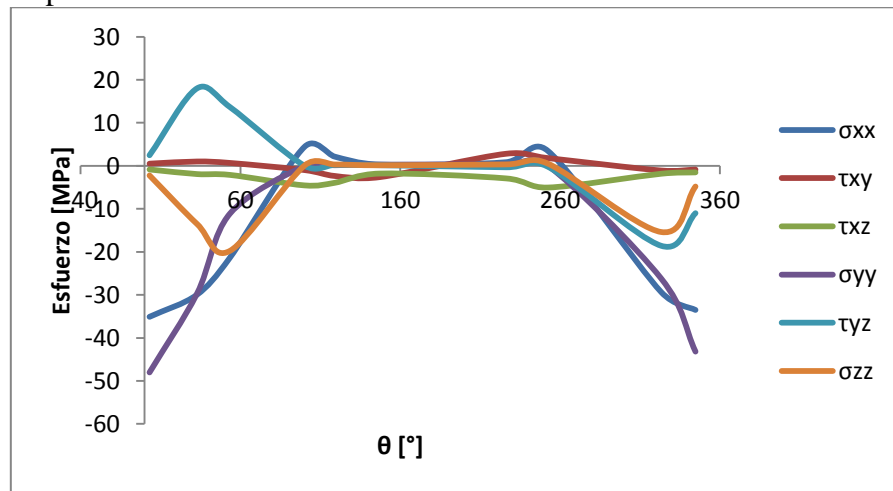


**Figura 4.34** Tercer esfuerzo principal para el molino con el trunnion con el desgaste máximo en una posición  $\theta_0 = 3,10 [^\circ]$  con respecto al sistema cilíndrico visto desde un ángulo inferior (izquierda) y superior (derecha).



**Figura 4.35** Primer esfuerzo principal para el molino con el trunnion con el desgaste máximo en una posición  $\theta_0 = 3,10 [^\circ]$  con respecto al sistema cilíndrico visto desde un ángulo inferior (izquierda) y superior (derecha).

En el Gráfico 4.4 se presenta la evolución de cada componente del tensor de esfuerzos cartesiano del punto al completar una revolución.



**Gráfico 4.4** Evolución de las componentes del tensor de esfuerzos cartesiano global en una revolución para el punto de desgaste máximo en la superficie exterior que presenta el mayor esfuerzo de von Mises.

En la Tabla 4.7 se presentan los valores máximos y mínimos de cada componente del tensor de esfuerzos en el sistema cartesiano del Gráfico 4.4.

Luego, para las componentes del tensor cartesiano presentadas en la Tabla 4.7, se calculan los esfuerzos medios y alternantes según las ecuaciones 3.18 y 3.19, los que se presentan en la Tabla 4.8.

**Tabla 4.7** Valores máximos y mínimos del tensor de esfuerzos en coordenadas cartesianas globales en una revolución para el punto de desgaste máximo en la superficie exterior que presenta el mayor esfuerzo de von Mises.

Esfuerzos	Máximo [MPa]	$\theta$ para el máx. [°]	Mínimo [MPa]	$\theta$ para el mín. [°]
$\sigma_{xx}$	4,41	100,12	-35,09	3,11
$\tau_{xy}$	2,80	226,25	-2,63	147,16
$\sigma_{yy}$	0,30	226,25	-48,03	3,11
$\tau_{yz}$	18,01	32,86	-18,58	323,30
$\sigma_{zz}$	0,52	252,42	-19,77	53,45
$\tau_{xz}$	-0,85	3,11	-5,05	252,42

**Tabla 4.8** Esfuerzos medios y alternantes para el tensor de esfuerzos en coordenadas cartesianas globales de la Tabla 4.7.

Esfuerzos	Medio [MPa]	Alternante [MPa]
$\sigma_{xx}$	-15,34	19,75
$\tau_{xy}$	0,09	2,72
$\sigma_{yy}$	-23,86	24,16
$\tau_{yz}$	-0,29	18,29
$\sigma_{zz}$	-9,63	10,14
$\tau_{xz}$	-2,95	2,10

Con los resultados de la Tabla 4.8, se calcula un esfuerzo de von Mises para el esfuerzo medio y alternante según la ecuación 3.24, con lo que se obtiene

$$\sigma_{vm,m} = 13,43 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_{vm,a} = 34,55 \text{ [MPa]}$$

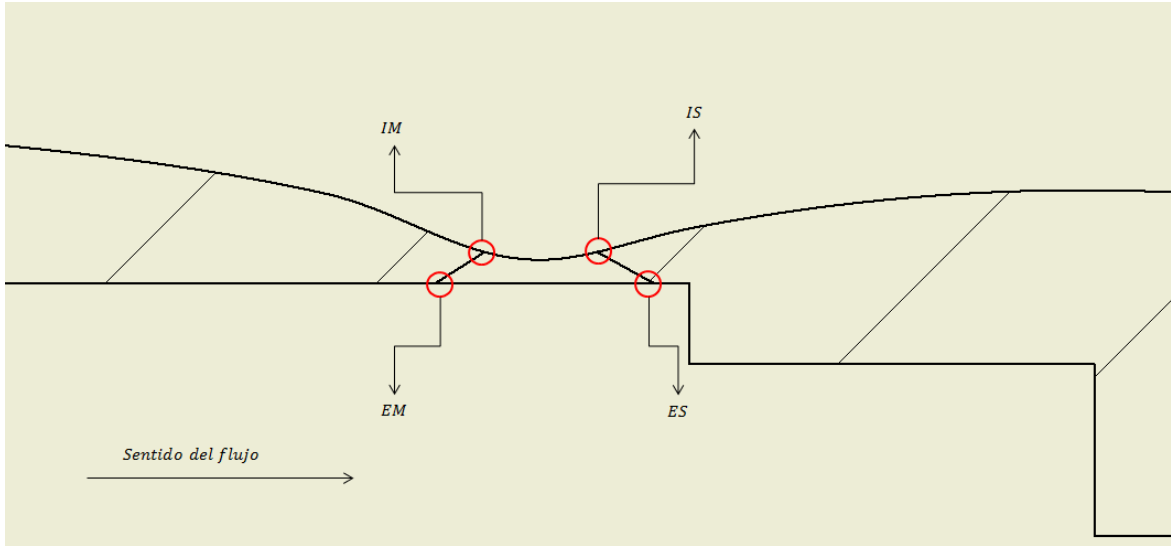
Con estos resultados se puede evaluar la vida a la fatiga según se presenta en la sección 4.5.3.

#### 4.4.3 Tercer caso: Molino con trunnion con desgaste interior y fisura

En la Figura 4.36 (ver página 50) se presenta una vista en corte en el plano de simetría de la fisura, donde se resaltan las cuatro puntas de la fisura. Se identifica cada una según en qué superficie se da, y hacia qué lado se encuentra, por ejemplo, la simbología IM en la figura implica que la punta en cuestión es la que está en la superficie interior del trunnion, y que da al interior del molino; por otra parte, la simbología ES corresponde a la punta que está en la superficie exterior del trunnion y en el lado de salida o evacuación del material.

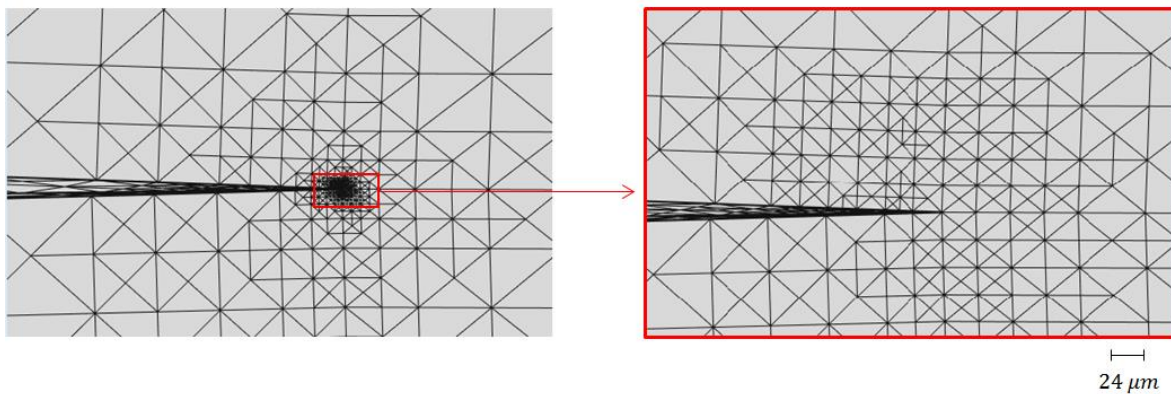
Debido a la asimetría que presenta cada punta con respecto a las otras y la distribución de las cargas aplicadas, se estudia el estado de esfuerzos en cada una de las puntas de la fisura.

El estudio se realiza análogo al caso anterior, es decir, se realiza una serie de simulaciones donde se selecciona una posición  $\theta_0$  para posicionar la fisura con respecto a la coordenada  $\hat{\theta}$ , en los ángulos tentativos extraídos de la Tabla 4.5 y en la Tabla 4.6



**Figura 4.36** Identificación de cada punta de la fisura según su ubicación.

Los modelos presentan un mallado que alcanza a los 164.500 elementos, con alrededor de 14 refinamientos sucesivos en las cercanías de la punta de la fisura sobre los elementos más finos por defecto que propone para la geometría COMSOL, llegando a tener un largo mínimo de alrededor de 20  $\mu\text{m}$ . En la Figura 4.37 se puede ver una imagen de la densidad del mallado en la cercanía de una punta de la fisura.



**Figura 4.37** Densidad de elementos en el mallado cercano a la punta de la fisura.

Una vez realizada la simulación, las fuerzas de reacción residuales de los modelos según las condiciones de bordes utilizadas son de:

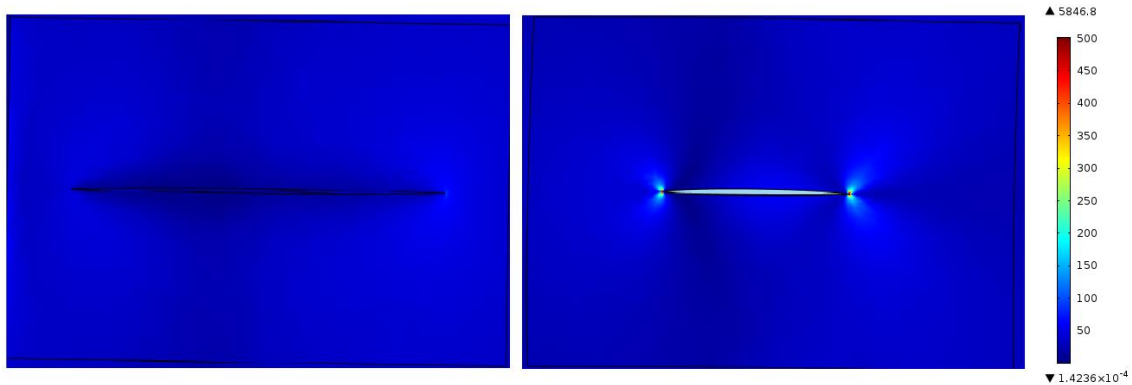
$$R_x = -0,43 \text{ [N]}$$

$$R_y = 3,17 \text{ [N]}$$

$$R_z = -10.672 \text{ [N]}$$

A modo de ejemplo del procedimiento utilizado en la obtención de los factores de intensidad de esfuerzos para cada punta de la fisura, se presenta el caso realizado con la ubicación de la fisura en un ángulo  $\theta_0 = 3,11$  [°].

En la Figura 4.38 se muestra el estado de esfuerzos de von Mises en la región fisurada en la superficie interior (imagen de la derecha) y la superficie exterior (imagen de la izquierda) para la fisura en  $\theta_0 = 3,11$  [°]. En la figura se respetan las proporciones de acercamiento, por lo que se aprecia que la fisura interior es de menor extensión según lo expuesto en la sección 4.1.4. En la figura también se puede apreciar que el estado de esfuerzos es mayor en la superficie interior que en la exterior, que es la tónica para todas las posiciones angulares estudiadas de la fisura.



**Figura 4.38** Esfuerzos de von Mises en la cercanía de la fisura para el caso  $\theta_0 = 3,11$  [°].

Una vez realizada la simulación, se importa el tensor de esfuerzos cilíndrico de la superficie que contiene la fisura interior y la exterior en un archivo .txt, que es analizado y tratado en Excel. A modo de ejemplo, se describe el procedimiento realizado para la obtención del factor de intensidad de esfuerzos en la punta interior que del lado del molino IM.

El proceso consiste en seleccionar los nodos más próximos a la fisura y respetando que estén en la misma coordenada angular del sistema cilíndrico. Los datos a evaluar corresponden a las componentes del tensor de esfuerzos en coordenadas cilíndricas que sean los que activen el modo I, II o III de apertura de grieta. Estos componentes del tensor en las coordenadas cilíndricas utilizado son el esfuerzo de tracción/compresión  $\sigma_{\theta\theta}$  y los esfuerzos de corte  $\tau_{\theta z}$  y  $\tau_{\theta r}$  que corresponden al modo II de deslizamiento y modo III de desgarro respectivamente.

Paralelamente, para la posición de los nodos exportados, se calcula el esfuerzo teórico alcanzado en el modelo elástico lineal según la fórmula 3.26 para cada una de las componentes del tensor cilíndrico mencionadas en el párrafo anterior, de forma tal que ambos resultados sean lo más similar posible, con el ajuste del factor de intensidad de esfuerzos  $K$  correspondiente.

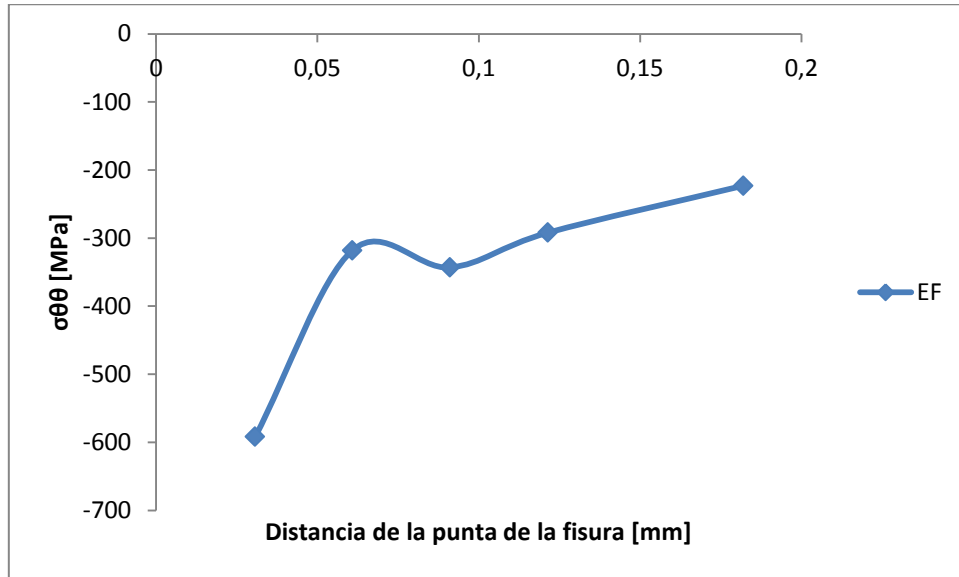
Para el presente caso de ejemplo con la fisura en  $\theta_0 = 3,11$  [°], se grafican los resultados del esfuerzo tangencial  $\sigma_{\theta\theta}$  en función de la distancia de la punta de la fisura en el Gráfico 4.5. Dado que los esfuerzos son de compresión, no se evalúa el esfuerzo teórico según la fórmula 3.26 porque esta fórmula corresponde para modo I cuando la fisura se encuentra en tracción.



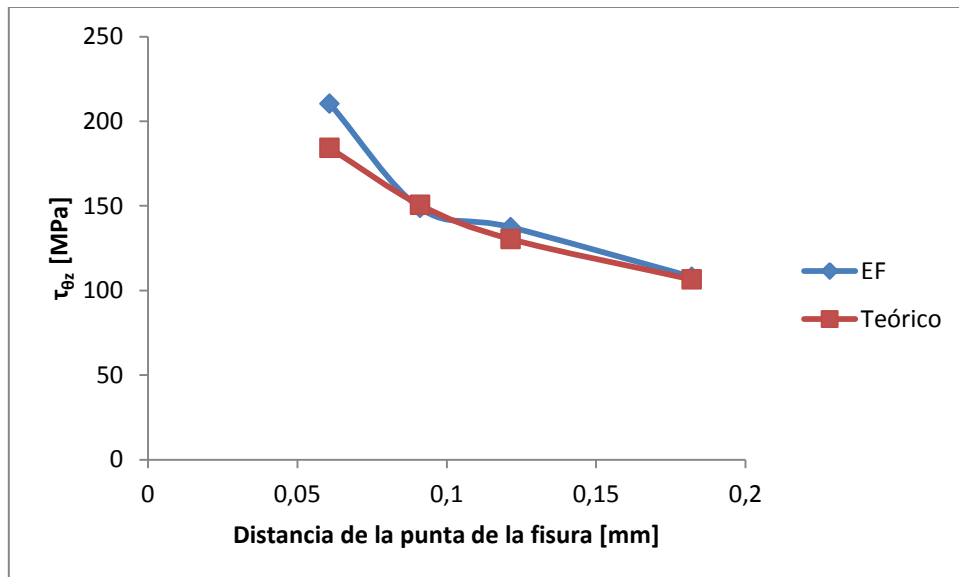
Para los modos II y III se presenta los gráficos comparativos para el esfuerzo obtenido de la simulación y el teórico de las componentes  $\tau_{\theta z}$  y  $\tau_{\theta r}$  en el Gráfico 4.6 y el Gráfico 4.7 respectivamente. El ajuste teórico calza para los siguientes factores de intensidad de esfuerzos:

$$K_{II}(\theta_0 = 3,11) = 3,6 [MPa\sqrt{m}]$$

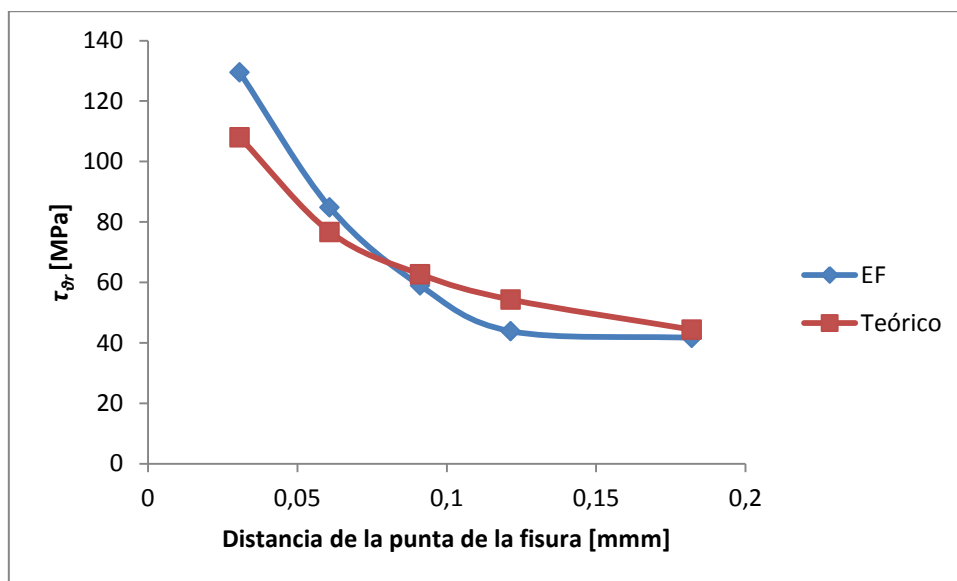
$$K_{III}(\theta_0 = 3,11) = 1,5 [MPa\sqrt{m}]$$



**Gráfico 4.5** Esfuerzos tangenciales  $\sigma_{\theta\theta}$  en función de la distancia a la punta de la fisura obtenidos del método de elementos finitos para el caso de  $\theta_0 = 3,11$  [°] en la punta de la fisura IM.



**Gráfico 4.6** Esfuerzos de corte  $\tau_{\theta z}$  en función de la distancia a la punta de la fisura obtenidos del método de elementos finitos y teóricos para el caso de  $\theta_0 = 3,11$  [°] en la punta de la fisura IM.



**Gráfico 4.7** Esfuerzos de corte  $\tau_{\theta r}$  en función de la distancia a la punta de la fisura obtenidos del método de elementos finitos y teóricos para el caso de  $\theta_0 = 3,11$  [°] en la punta de la fisura IM.

Este procedimiento se repite para siete posiciones de la fisura adicionales y para cada punta de la fisura.

En la Tabla 4.9, la Tabla 4.10, la Tabla 4.11 y la Tabla 4.12 se muestran los factores de intensidad de esfuerzos de los modos I, II y III teóricos coincidentes con los resultados de la simulación en elementos finitos para las puntas de fisura IM, IS, EM y ES respectivamente.

**Tabla 4.9** Factores de Intensidad de esfuerzos de los tres modos de apertura de grieta para la punta de fisura IM, según la posición angula de la fisura.

$\theta_0$ [°]	$K_I$ [MPa·√m]	$K_{II}$ [MPa·√m]	$K_{III}$ [MPa·√m]
3,11	-	3,6	1,5
68	-	2,7	0,8
111	-	2,2	0,65
128	-	2,9	0,6
175	0,01	0,35	0,11
245	-	-2,2	-0,7
256	-	-2,4	-0,8
294	-	-1,2	-0,1
301	-	1,1	1,1
363	-	3,6	1,5

**Tabla 4.10** Factores de Intensidad de esfuerzos de los tres modos de apertura de grieta para la punta de fisura IS, según la posición angula de la fisura.

$\theta_0$ [°]	$K_I$ [MPa·√m]	$K_{II}$ [MPa·√m]	$K_{III}$ [MPa·√m]
3,11	-	0,3	0,3
68	-	-0,5	0,7
111	-	3,4	-0,9
128	-	2,65	-0,65
175	-	0,55	-0,14
245	-	-3,4	0,95
256	-	-3,55	0,95
294	-	-1,2	0,3
301	-	0,65	-0,4
363	-	0,3	0,3

**Tabla 4.11** Factores de Intensidad de esfuerzos de los tres modos de apertura de grieta para la punta de fisura EM, según la posición angula de la fisura.

$\theta_0$ [°]	$K_I$ [MPa·√m]	$K_{II}$ [MPa·√m]	$K_{III}$ [MPa·√m]
3,11	0	0,025	0
68	0,02	0,15	0
111	0,05	0,21	0
128	0,026	0,19	0
175	0	0,028	0
245	0,062	-0,24	0
256	0,045	-0,2	0
294	0,021	-0,17	0
301	0	-0,16	0
363	0	0,025	0

**Tabla 4.12** Factores de Intensidad de esfuerzos de los tres modos de apertura de grieta para la punta de fisura ES, según la posición angula de la fisura.

$\theta_0$ [°]	$K_I$ [MPa·√m]	$K_{II}$ [MPa·√m]	$K_{III}$ [MPa·√m]
3,11	0	0,017	0
68	0,009	0,11	0
111	0,017	0,16	0
128	0,029	0,155	0
175	0	0,025	0
245	0,09	-0,15	0
256	0	-0,15	0
294	0	-0,127	0
301	0	-0,12	0
363	0	0,017	0

## 4.5 Evaluación de resistencia a la fatiga

### 4.5.1 Límite de resistencia a la fatiga modificado para el trunnion

Para una fundición gris de clase 30 como la del trunnion en estudio, el límite de resistencia a la fatiga para una viga rotatoria para piezas pulidas o maquinadas según la Tabla 3.5 corresponde a:

$$S'_e k_a k_b = 96,53 \text{ [MPa]}$$

Como se sugiere en la sección 3.1.1.5, se utiliza el factor de corrección de carga  $k_c$  para la flexión, por lo tanto

$$k_c = 1$$

La temperatura de operación al estar al aire libre y al ser evitado el roce por la capa de aceite es similar a la temperatura ambiente. Por otra parte, por la incerteza de la calidad de la fundición, se supone una confiabilidad del 99,9%. Estas consideraciones según las Tabla 3.2 y Tabla 3.3 corresponden a los siguientes factores respectivamente

$$\begin{aligned} k_d &= 1 \\ k_e &= 0,753 \end{aligned}$$

Finalmente, dado que no se tienen consideraciones especiales adicionales, el factor de efectos varios no se considera, por lo que toma el valor

$$k_f = 1$$

Una vez definidos los factores que modifican la vida a la fatiga, al utilizarlos en la ecuación 3.9 se obtiene que el límite de resistencia a la fatiga modificado corresponde a:

$$S_e = 72,69 \text{ [MPa]}$$

### 4.5.2 Evaluación de la vida a la fatiga del primer caso

La evaluación de la vida a la fatiga se realiza con el criterio de Smith-Dolan presentado en la sección 3.1.1.4, sugerido para materiales frágiles como la fundición gris. Este criterio sigue la fórmula de la ecuación 3.21.

En la búsqueda de despejar el factor de seguridad de la ecuación 3.21, resulta una ecuación cuadrática de la forma

$$n^2 \left( \frac{\sigma_a \sigma_m}{S_e S_{ut}} \right) + n \left( \frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}} \right) - 1 = 0 \quad (4.3)$$

Resolviendo la ecuación cuadrática y descartando el resultado negativo, se obtiene que el factor de seguridad para un esfuerzo medio  $\sigma_m$  y un esfuerzo alternante  $\sigma_a$  es de la forma

$$n = \frac{-\left(\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}}\right) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_a\sigma_m}{S_e S_{ut}}\right)}}{2\left(\frac{\sigma_a\sigma_m}{S_e S_{ut}}\right)} \quad (4.4)$$

Para este primer caso, en la sección 4.4.1 se presentan los esfuerzos medio y alternante  $\sigma_m$  y  $\sigma_a$  respectivamente, y en la sección 4.5.1 se presenta el límite de resistencia a la fatiga modificado  $S_e$ , que equivalen a:

$$\begin{aligned}\sigma_{vm,m} &= 7,64 \text{ [MPa]} \\ \sigma_{vm,a} &= 7,01 \text{ [MPa]} \\ S_e &= 72,69 \text{ [MPa]}\end{aligned}$$

Por otra parte, de la Tabla 3.4 se obtiene que la resistencia última a la tracción  $S_{ut}$  para la fundición gris de este caso corresponde a:

$$S_{ut} = 213,74 \text{ [MPa]}$$

Al ingresar los parámetros presentados en la ecuación 4.4, se obtiene que el factor de seguridad a la fatiga para el trunnion sin defectos corresponde a:

$$n = 6,27$$

lo que indica que el trunnion no debería fallar por fatiga según el criterio presentado.

Para la evaluación de falla en el primer ciclo se evalúa los esfuerzos principales con respecto a la resistencia última a la tracción o compresión según corresponda, ya que es el criterio de falla utilizado para materiales frágiles.

En la sección 4.4.1 se presentan el primer y tercer esfuerzo principal máximo y mínimo respectivamente que sufre el trunnion de descarga en una revolución. Por otra parte, en la Tabla 3.4 (ver página 12) se encuentra la resistencia última a la tracción y a la compresión para la fundición gris del trunnion, que corresponde a 213,74 [MPa] y 751,53 [MPa] respectivamente. Por lo tanto, al hacer una evaluación de la resistencia al primer ciclo, el factor de seguridad menor corresponde al del primer esfuerzo principal en la superficie interior alcanzando un valor de

$$n_{1,ciclo} = 18,97$$

donde el subíndice  $1,ciclo$  se utiliza para identificar que se trata de la evaluación al primer ciclo. Este resultado indica que el trunnion resiste con un gran margen de seguridad la posición donde se da el máximo esfuerzo en una revolución del molino.

#### 4.5.3 Evaluación de la vida a la fatiga del segundo caso

Se recuerda que el segundo caso corresponde al molino con el trunnion de descarga con desgaste de su superficie interior.

Análogamente al caso anterior, se evalúa el factor de seguridad de la vida a la fatiga que presenta este caso mediante la utilización de la ecuación 3.9. Para este caso, el esfuerzo medio y alternante se presentan en la sección 4.4.2, y tanto el límite de resistencia a la fatiga como la resistencia última a la tracción corresponden a los mismos presentados en la sección anterior 4.5.2, siendo este conjunto

$$\begin{aligned}\sigma_{vm,m} &= 13,43 \text{ [MPa]} \\ \sigma_{vm,a} &= 34,55 \text{ [MPa]} \\ S_e &= 72,69 \text{ [MPa]} \\ S_{ut} &= 213,74 \text{ [MPa]}\end{aligned}$$

Al evaluar estos parámetros en la ecuación 4.4 se tiene que el factor de seguridad de vida a la fatiga para el trunnion desgastado es de:

$$n = 1,86$$

Por lo tanto, según el criterio utilizado, aun cuando el trunnion presenta desgaste de su superficie interior, este no debería fallar por fatiga.

Para la evaluación de falla al primer ciclo, al igual que en el caso anterior, se utiliza el primer esfuerzo principal debido a la gran diferencia en magnitud que existe entre la resistencia a la tracción y a la compresión. El factor de seguridad en este caso corresponde a:

$$n_{1,ciclo} = 7,36$$

lo que nuevamente indica que el trunnion resiste con un buen margen de seguridad el esfuerzo máximo alcanzado en una revolución.

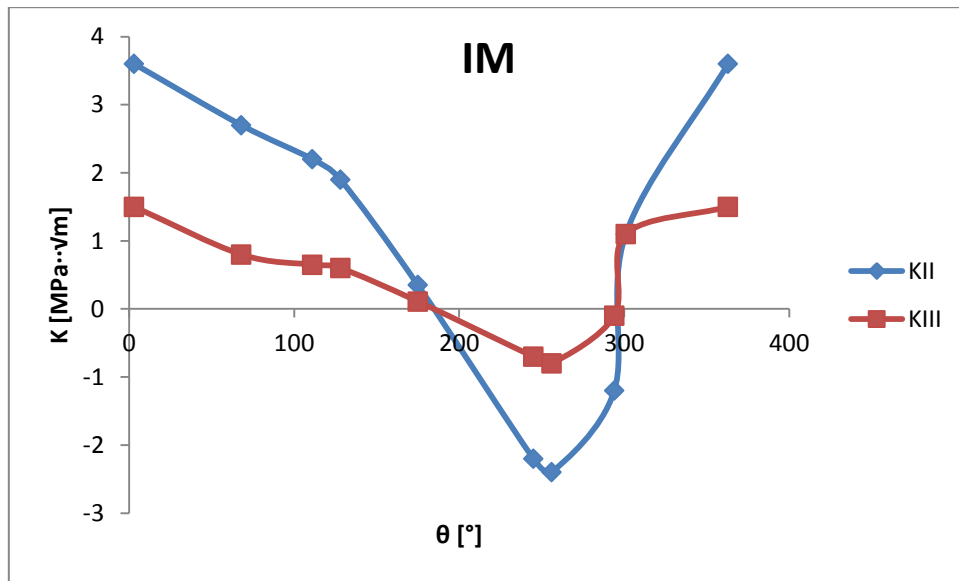
## **4.6 Evaluación del crecimiento de grieta**

Con los resultados presentados en la sección 4.4.3, se buscan los puntos que maximizan la ecuación 3.33 para cada punta de la fisura.

### **4.6.1 Punta de la fisura en la superficie interior del trunnion del lado molino IM**

En el Gráfico 4.8 (ver página 58) se presenta la evolución de los factores de intensidad de esfuerzos correspondientes a los modos II y III de apertura de grieta, de la punta de la fisura IM según los valores que se presentan en la Tabla 4.9.

En el Gráfico 4.8 se puede observar que ambos factores de intensidad de esfuerzos se encuentran en fase.



**Gráfico 4.8** Factores de intensidad de esfuerzos para los modos II y III para la punta de la fisura IM en función de la posición angular de la fisura.

Luego, se buscan las posiciones que maximizan la variación del factor de intensidad de esfuerzos equivalente  $\Delta K_{eff}$  de la ecuación 3.33. Los valores en función de la ubicación se presentan a continuación:

$$\begin{aligned}
 K_{II,m\acute{a}x} &= K_{II}(\theta = 3,01^\circ) = 3,6 \text{ [MPa}\sqrt{\text{m}}] \\
 K_{III,m\acute{a}x} &= K_{III}(\theta = 3,01^\circ) = 1,5 \text{ [MPa}\sqrt{\text{m}}] \\
 K_{II,m\acute{i}n} &= K_{II}(\theta = 256,09^\circ) = -2,4 \text{ [MPa}\sqrt{\text{m}}] \\
 K_{III,m\acute{i}n} &= K_{III}(\theta = 256,09^\circ) = -0,8 \text{ [MPa}\sqrt{\text{m}}]
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la variación del factor de intensidad de esfuerzos equivalente corresponde a:

$$\Delta K_{eff} = 10,16 \text{ [MPa}\sqrt{\text{m}}]$$

Al evaluar este valor en el gráfico de la Figura 3.6 (ver página 18) para una razón de carga  $R = 0,5^8$ , se observa que la grieta avanza por esta punta de la fisura con una velocidad de  $2 \cdot 10^{-5}$  [mm/ciclo] aproximadamente.

<sup>8</sup>  $R$  corresponde a la razón  $K_{m\acute{i}n}/K_{m\acute{a}x}$  [6], y si bien aquí se utiliza un  $\Delta K_{eff}$  que en primera instancia no permite utilizar esta relación directamente, se realiza un supuesto:

i. Llamando  $\Delta K_{eff,IM}$  al  $\Delta K$  calculado para el caso de la punta de la fisura IM, se tiene que este  $\Delta K$  sigue la fórmula

$$\Delta K_{eff,IM} = K_{m\acute{a}x} - K_{m\acute{i}n} \quad (*)$$

ii. Se calcula otra  $\Delta K_{eff}$ , digamos  $\Delta K_{eff,2}$  que utilice el valor  $K_{II,m\acute{i}n}$  y  $K_{III,m\acute{i}n}$  como los valores máximos, y 0 como los valores mínimos para ambos factores de intensidad de esfuerzos (es decir, para los modos II y III). Este valor corresponde a  $\Delta K_{eff,2} = 4,05$  [MPa√m]. Luego, al escribir este  $\Delta K_{eff,2}$  de la forma de la ecuación (\*), se obtiene la ecuación

$$\Delta K_{eff,2} = K_{m\acute{i}n} - 0 \quad (**)$$

iii. Con las ecuaciones (\*) y (\*\*) se tiene un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, por lo que se puede calcular este  $K_{m\acute{a}x}$  y  $K_{m\acute{i}n}$  auxiliares, que permiten tener un  $R$  de referencia, en este caso, del orden de 0,6.

#### 4.6.2 Punta de la fisura en la superficie interior del trunnion del lado salida IS

En el Gráfico 4.9 se presenta la evolución de los factores de intensidad de esfuerzos correspondientes a los modos II y III de apertura de grieta, de la punta de la fisura IS según los valores que se presentan en la Tabla 4.10.

En el Gráfico 4.9 se puede observar que ambos factores de intensidad de esfuerzos se encuentran alternados, es decir, cuando uno alcanza un máximo, el otro alcanza el mínimo y viceversa.

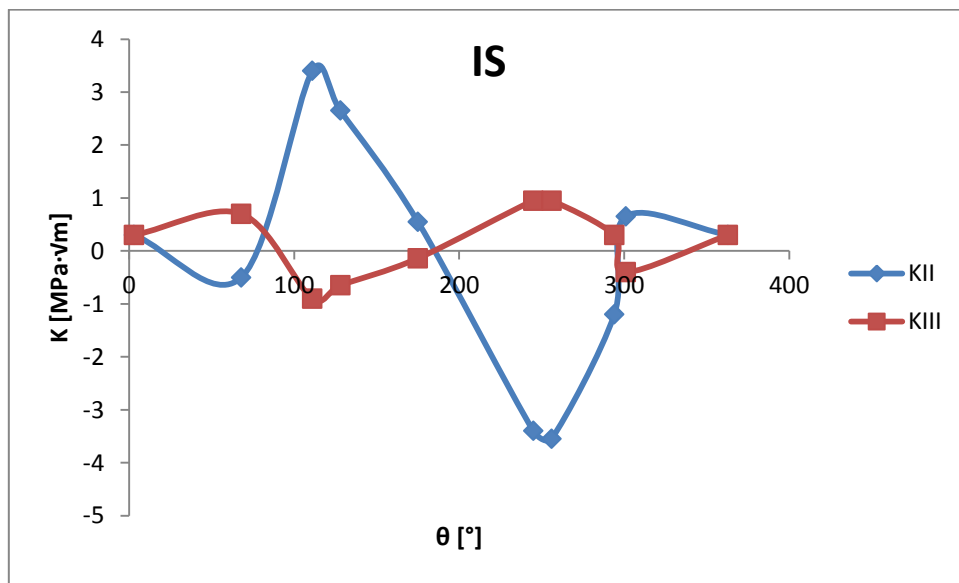
Luego, se buscan las posiciones que maximizan la variación del factor de intensidad de esfuerzos equivalente  $\Delta K_{eff}$  de la ecuación 3.33. Los valores en función de la ubicación se presentan a continuación:

$$K_{II,m\acute{a}x} = K_{II}(\theta = 111,69^\circ) = 3,4 \text{ [MPa}\sqrt{\text{m}}]$$

$$K_{III,m\acute{a}x} = K_{III}(\theta = 256,09^\circ) = 0,95 \text{ [MPa}\sqrt{\text{m}}]$$

$$K_{II,m\acute{i}n} = K_{II}(\theta = 256,09^\circ) = -3,55 \text{ [MPa}\sqrt{\text{m}}]$$

$$K_{III,m\acute{i}n} = K_{III}(\theta = 111,69^\circ) = -0,9 \text{ [MPa}\sqrt{\text{m}}]$$



**Gráfico 4.9** Factores de intensidad de esfuerzos para los modos II y III para la punta de la fisura IS en función de la posición angular de la fisura.

Por lo tanto, la variación del factor de intensidad de esfuerzos equivalente corresponde a:

$$\Delta K_{eff} = 11,71 \text{ [MPa}\sqrt{\text{m}}]$$

Al evaluar este valor en el gráfico de la Figura 3.6 (ver página 18) para una razón de carga  $R = 0,5$ , se observa que la grieta avanza por esta punta de la fisura con una velocidad de  $8 \cdot 10^{-5}$  [mm/ciclo] aproximadamente.



### 4.6.3 Punta de la fisura en la superficie exterior del trunnion del lado molino EM

En el Gráfico 4.10 se presenta la evolución de los factores de intensidad de esfuerzos correspondientes a los modos I y II de apertura de grieta, de la punta de la fisura EM según los valores que se presentan en la Tabla 4.11.

En el Gráfico 4.10 se puede observar que para el máximo y el mínimo global de  $K_{II}$ , se da un máximo local del factor  $K_I$ .

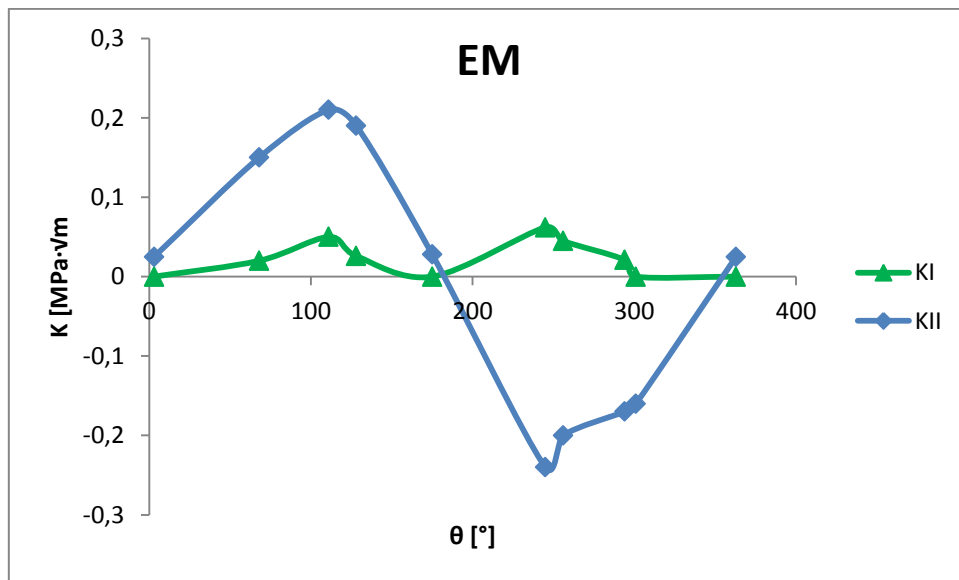
Luego, las posiciones que maximizan la variación del factor de intensidad de esfuerzos equivalente  $\Delta K_{eff}$  de la ecuación 3.33 corresponden a:

$$K_I(\theta = 111,69^\circ) = 0,05 \text{ [MPa}\sqrt{\text{m}}]$$

$$K_{II,m\acute{a}x} = K_{II}(\theta = 111,69^\circ) = 0,21 \text{ [MPa}\sqrt{\text{m}}]$$

$$K_I(\theta = 245,80^\circ) = 0,062 \text{ [MPa}\sqrt{\text{m}}]$$

$$K_{II,m\acute{i}n} = K_{II}(\theta = 245,80^\circ) = -0,24 \text{ [MPa}\sqrt{\text{m}}]$$



**Gráfico 4.10** Factores de intensidad de esfuerzos para los modos I y II para la punta de la fisura EM en función de la posición angular de la fisura.

Por lo tanto, la variación del factor de intensidad de esfuerzos equivalente corresponde a:

$$\Delta K_{eff} = 0,76 \text{ [MPa}\sqrt{\text{m}}]$$

Al evaluar este valor en el gráfico de la Figura 3.6 (ver página 18), se observa que este valor está fuera del rango cubierto, y según lo expuesto en la sección 3.1.2.3, la variación del factor de intensidad de esfuerzos límite  $\Delta K_{th}$  para la fundición gris se da para una velocidad de  $10^{-6}$  [mm/ciclo], que corresponde al valor  $\Delta K_{th} = 8,7 \text{ [MPa}\sqrt{\text{m}}]$ . Por lo tanto, no se propaga la grieta por la punta de la fisura EM.

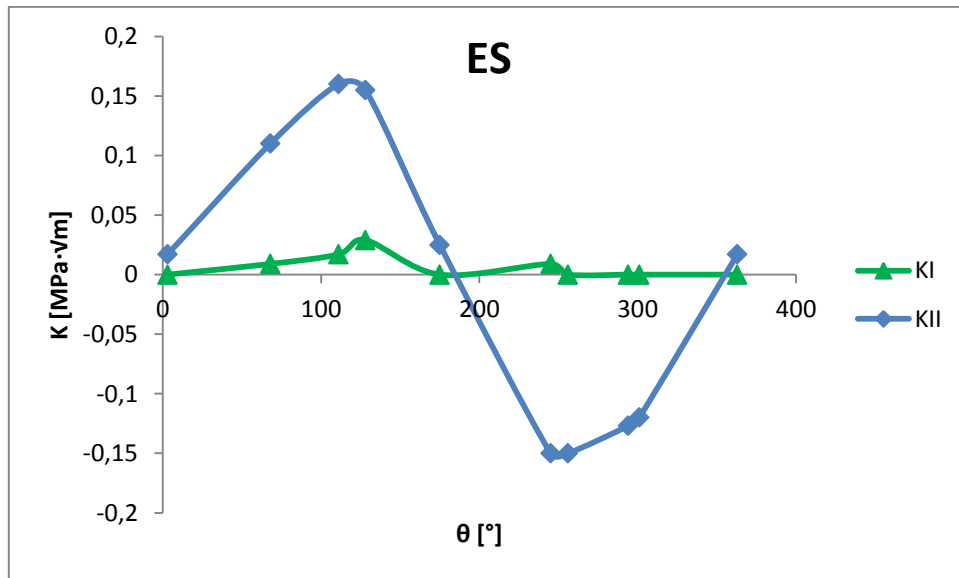
#### 4.6.4 Punta de la fisura en la superficie exterior del trunnion del lado molino ES

En el Gráfico 4.11 se presenta la evolución de los factores de intensidad de esfuerzos correspondientes a los modos I y II de apertura de grieta, de la punta de la fisura ES según los valores que se presentan en la Tabla 4.12.

En el Gráfico 4.11 se puede observar que para el máximo y el mínimo global de  $K_{II}$ , se da un máximo local del factor  $K_I$ .

Luego, las posiciones que maximizan la variación del factor de intensidad de esfuerzos equivalente  $\Delta K_{eff}$  de la ecuación 3.33 corresponden a:

$$\begin{aligned} K_I(\theta = 111,69^\circ) &= 0,017 \text{ [MPa}\sqrt{\text{m}}] \\ K_{II,m\acute{a}x} &= K_{II}(\theta = 111,69^\circ) = 0,16 \text{ [MPa}\sqrt{\text{m}}] \\ K_I(\theta = 256,09^\circ) &= 0 \text{ [MPa}\sqrt{\text{m}}] \\ K_{II,m\acute{i}n} &= K_{II}(\theta = 256,09^\circ) = -0,15 \text{ [MPa}\sqrt{\text{m}}] \end{aligned}$$



**Gráfico 4.11** Factores de intensidad de esfuerzos para los modos I y II para la punta de la fisura ES en función de la posición angular de la fisura.

Por lo tanto, la variación del factor de intensidad de esfuerzos equivalente corresponde a:

$$\Delta K_{eff} = 0,52 \text{ [MPa}\sqrt{\text{m}}]$$

Al evaluar este valor en el gráfico de la Figura 3.6 (ver página 18), se observa que este valor está fuera del rango cubierto, y según lo expuesto en la sección 3.1.2.3, la variación del factor de intensidad de esfuerzos límite  $\Delta K_{th}$  para la fundición gris se da para una velocidad de  $10^{-6}$  [mm/ciclo], que corresponde al valor  $\Delta K_{th} = 8,7 \text{ [MPa}\sqrt{\text{m}}]$ . Por lo tanto, no se propaga la grieta por la punta de la fisura ES.

## 5 Discusión

### 5.1 Modelos CAD de las piezas y ensamblajes

La realización de las piezas CAD se desarrolla pensando en evitar problemas en la generación del mallado en elementos finitos. Las consideraciones que se toman corresponde a evitar detalles geométricos que generen grandes gradientes en la longitud de los elementos en las zonas comprometidas, ya que generar un mallado correcto implicaría disminuir el tamaño de elementos en zonas que pueden resultar innecesarias, por ejemplo en los relieves del trunnion original si hubiesen sido modelados.

Otro aspecto tomado en cuenta tiene que ver con piezas que posean dimensiones muy desproporcionadas, por ejemplo los liners del cuerpo del molino que en primera instancia se modela como una única pieza. Si se trabaja solo con ella, al ser de un espesor tan pequeño en comparación con su extensión, se genera un mallado con elementos acorde al espesor de la pieza, lo que genera una densidad de elementos excesiva para la pieza que no la requiere. Por lo tanto, se utiliza la herramienta de Inventor “dividir” para que el programa de elementos finitos trate como piezas distintas las que resulten de la división, proceso que además es más ágil que realizar piezas por separado para luego unir las en el ensamblaje. Así se logran gradientes en la longitud de los elementos aceptables y se disminuye la densidad del mallado.

Con respecto al modelo del trunnion fisurado, al ser importado a COMSOL se genera el problema de que la fisura no es identificada por el programa e importa la pieza como si ella no existiese. Sin embargo, el problema se soluciona utilizando la herramienta “dividir” de Inventor sobre el trunnion para generar más de una pieza en términos de lectura del archivo. Este problema da a pensar que se pueden tener dificultades en piezas con detalles geométricos de uno a más órdenes de magnitud inferior en comparación a las dimensiones principales, ya que el problema se soluciona con la división de la pieza donde cada una de estas dimensiones principales se ven reducidas.

### 5.2 Construcción del modelo

La elección de un estudio estático instantáneo es una simplificación fundamentada en el hecho que el ángulo de levantamiento de carga  $\alpha$  implica un equilibrio de torques entre el ejercido por la carga y el transmitido a la corona, por lo que instantáneamente se alcanza una condición de equilibrio.

En la elección de la distribución de cargas, en primer lugar se decide modelar la carga de la pulpa y bolas como una presión para dar una mejor aproximación a la realidad que si se hiciera como una fuerza puntual en el centro de presión, en el sentido de cómo se transmiten las cargas a lo largo del molino. Luego, al ser la presión modelada como una de fluido en un cuerpo rígido en movimiento, se permite un crecimiento gradual de la presión normal a la línea de nivel, que se ajusta bien al hecho que la mayor presión se donde en la realidad se tiene una mayor acumulación de pulpa y bolas. Adicionalmente, la versatilidad del programa COMSOL permite ingresar cargas en forma de funciones en un sistema de referencia a definir, por lo que el usuario puede definir las variables que más le acomoden para el ingreso correcto de la función. En este caso se utiliza un sistema cilíndrico.

En cuanto a la presión de aceite en los trunnions, sabiendo que la presión de aceite sigue una distribución parabólica como se puede ver en la teoría presentada por Sachowiak y Batchelor [8], se decide utilizar una función parabólica simple dado que las ecuaciones presentadas para el modelamiento de presiones en la bibliografía citada son más bien de diseño y permiten seleccionar el lubricante correctamente para cada caso, que no forma parte del estudio de la presente memoria.

Con respecto a las cargas en los modelos, ya que las reacciones en los trunnions se calculan para equilibrar las cargas que actúan en el molino, con el ingreso de las presiones en los trunnions que generan fuerzas equivalentes a las reacciones calculadas se debería alcanzar la condición de equilibrio. Sin embargo, por muy preciso que sea el cálculo y el ingreso de los parámetros en el programa de elementos finitos, igualmente se requiere de condiciones de borde que garanticen que el modelo “no se desplace en el espacio” ya que el estudio se realiza como un caso estático. Por lo tanto, las condiciones de borde generan fuerzas residuales que equilibran completamente el modelo. No obstante, la magnitud de estas fuerzas residuales debe ser lo suficientemente baja para dar validez a los cálculos realizados.

Siguiendo el razonamiento anterior, se puede observar que la fuerza residual según la coordenada  $\hat{i}$  no es superior a 1 [N] en los modelos, resultado que da validez al modelo en esta dirección ya que teóricamente no se ingresan cargas en esta dirección. De la misma forma, la fuerza residual según la dirección  $\hat{j}$  alcanza valores máximos de 47 [N] en los modelos, que comparado con la magnitud de la carga a la que es sometida el modelo en esta dirección, correspondiente a 17.000 [N], la fuerza residual representa solo el 0,3% de error. Finalmente, para la dirección vertical  $\hat{k}$  donde actúa la gravedad, y donde se aplica la mayor proporción de la carga, las fuerzas residuales alcanzan valores de 11.000 [N], que nuevamente al ser comparados con el total ejercido en esta dirección, correspondiente a 2.150.000 [N] aproximadamente, la fuerza residual en cuestión genera una corrección del 0,5%. Por lo tanto, estos resultados validan el cálculo de las reacciones en los trunnions y validan los resultados posteriores derivados que dependen en gran medida de estos parámetros.

### **5.3 Evaluación de la vida a la fatiga con y sin desgaste del trunnion**

Como primera consideración, se establece que para el primer y segundo caso se propone un estudio de la situación más desfavorable, que implica que las componentes del tensor de esfuerzos estén en fase, que claramente no es el caso real. La lógica detrás de esta propuesta se centra en que si el modelo es capaz de soportar el peor caso, se tiene un mayor margen de certeza de que no fallará en el caso real.

El primer resultado a evaluar corresponde a si la pieza falla en el primer ciclo, lo que tiene que ver con que sí la pieza soporta el máximo esfuerzo que alcanza cuando está en operación en condiciones nominales. Para esta evaluación, se utiliza la resistencia última a la tracción debido a que la fundición gris se cataloga como material frágil. En la sección 4.5.2 se presenta el factor de seguridad de falla al primer ciclo para el trunnion sin defectos, que corresponde a 18,97, por lo que el trunnion resiste perfectamente las condiciones de operación nominales.

Cuando el trunnion presenta desgaste de su superficie interior, el factor de seguridad de falla al primer ciclo disminuye alcanzando un valor de 7,36, que de igual manera establece un gran margen de seguridad aun cuando se está en presencia de un desgaste pronunciado.

De los resultados anteriores cabe destacar que la evaluación se realiza con el primer esfuerzo principal, que si bien es menor en magnitud al tercer esfuerzo principal alcanzado en ambos casos, para materiales frágiles como la fundición gris se da un fenómeno de que la resistencia última a la compresión es varias veces mayor a la resistencia última a la tracción, que en este caso llega a ser cuatro veces superior, y según los resultados obtenidos, el tercer esfuerzo principal no es superior al doble del primer esfuerzo principal en magnitud, por lo tanto los factores de seguridad evaluados en compresión aumentarían.

Con respecto a la evaluación de la vida a la fatiga, según los resultados presentados en la sección 4.5.2 para el trunnion sin desgaste y en la sección 4.5.3 para el trunnion con desgaste de la superficie interior, los factores de seguridad de resistencia a la fatiga son 6,27 y 1,85 respectivamente, que en ambos casos se da un factor superior a la unidad. Esto implica que según el criterio de Smith-Dolan aplicado el trunnion no debería fallar por fatiga en ninguno de los dos casos.

La primera impresión que dan estos resultados es que el diseño de estas componentes obedece a un criterio bien conservador, de forma tal que las piezas no fallen y posean prácticamente una vida infinita a la fatiga. Esto tiene relación con la implicancia económica que conlleva el que fallen estos equipos, debido a que el costo de tener parada la faena por la falla de una de sus piezas debe ser varias veces mayor al de realizar una inversión inicial mayor por un diseño más robusto.

Con respecto al factor de seguridad de la vida a la fatiga para el caso con desgaste, que si bien es superior a la unidad, es solamente 1,85, lo que abre la posibilidad de que con muy poco desgaste adicional el trunnion tendería a fallar por fatiga, que podría desembocar en la aparición de grietas.

Por otra parte, suponiendo que los datos entregados del desgaste son correctos, todavía queda la interrogante del por qué aparecen efectivamente grietas en el trunnion, entendiendo que la falla por fatiga no aplica en este caso.

La primera hipótesis que surge es si el límite de resistencia a la fatiga calculado es confiable o no. Como primera consideración, se supone que la bibliografía utilizada es de alta aceptación con respecto a los parámetros entregados para los materiales, sacados principalmente de Shigley [1], que por lo demás es la bibliografía aceptada y utilizada en los cursos de la escuela<sup>9</sup>. Luego, se debe chequear la validez de los factores que modifican la vida a la fatiga.

Como se ha mencionado en la sección 4.5.1, el valor de la resistencia a la fatiga que proporciona la Tabla 3.4 corresponde al parámetro  $k_a k_b S_e$  para piezas pulidas o maquinadas. Según los datos del trunnion en cuestión, este presenta sus superficies pulidas, por lo que este valor se considera correcto, además, el factor de tamaño  $k_b$  es más cercano a la unidad para diámetros más grandes, estando fuera de rango por su magnitud según los rangos presentados en la sección 3.1.1.3. De forma similar, para cargas combinadas Shigley [1] recomienda utilizar un factor de carga  $k_c$ , por lo que también se considera correcto. Por otra parte, para el factor de temperatura, se entiende que el proceso del molino no requiere de una temperatura en especial para los materiales tratados en él, por lo que el proceso se lleva a cabo a temperatura ambiente. En específico para el trunnion, al estar lubricado con aceite se evita la fricción y por lo tanto los aumentos de

---

<sup>9</sup> Con cursos de la escuela se hace mención a los cursos dictados por el Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Chile.

temperatura, además de que el lubricante por ser un fluido con una capacidad calorífica importante, actúa como refrigerante impidiendo grandes aumentos de temperatura en la zona de descanso.

Luego, los factores que sugieren más incertidumbre recaen en el de confiabilidad  $k_e$  y el de efectos varios  $k_f$ . Con respecto al primero, se ha elegido una confiabilidad de un 99,9%, por lo que solamente no se está resguardando para el 0,1% de los valores más bajos posibles de la resistencia a la fatiga según la distribución gausseana de los valores presentados en [1]. Luego, se piensa que este valor está sobreprotegiendo en gran medida el límite de resistencia a la fatiga ya que lo “castiga” en gran medida al proponer un valor de  $k_e$  de 0,753, es decir, considerar solo un 75% del valor presentado. Luego, entendiendo que el factor  $k_e$  también está bien utilizado, se requeriría de un factor  $k_f$  inferior a 0,55 para que el factor de seguridad para el caso con el trunnion desgastado alcance valores de la unidad o menores, y entendiendo que las consideraciones especiales también pueden afectar de manera positiva el límite de resistencia a la fatiga, se cree que su influencia debe ser calculada con exactitud para casos en que con muy poca variación impliquen una consecuencia de consideración, por ejemplo que la utilización de un factor cercano a la unidad como uno de 0,95 sea influyente, que claramente no es el caso.

Por otra parte, se piensa en que una falla en el sistema de lubricación puede ser el causal de la aparición de las grietas en el trunnion, ya que la fuerza de roce que se generaría en la superficie del trunnion debido a la alta carga que soporta el descanso muy probablemente estaría en posición de generar una macrogrieta. Adicionalmente, en reportes adicionales en las inspecciones del trunnion fisurado, se ven ralladuras superficiales en la cercanía de la grieta, y en una vasta extensión angular, lo que aumenta la probabilidad de que la hipótesis sea correcta.

#### **5.4 Evaluación del crecimiento de grieta**

Según los resultados para la evaluación del crecimiento de grieta presentados en la sección 4.6, se puede observar que la teoría aplicada predice un avance de la fisura en la superficie interior del trunnion, que está gobernado por los modos II y III de crecimiento de grieta. Este resultado toma relevancia porque en primera instancia y en correspondencia con lo presentado en la sección 3.1.2.1, se cree que el crecimiento de grieta se puede dar principalmente por modo I. Luego, al analizar los resultados, se observa que los esfuerzos tangenciales que dominan el modo I de apertura para la orientación de la grieta, correspondiente a los esfuerzos  $\sigma_{\theta\theta}$ , son principalmente de compresión a medida que desarrolla una revolución el trunnion y se sabe que el modo I de crecimiento de grieta se activa para esfuerzos de tracción.

Con respecto a la velocidad de crecimiento de grieta, se observa que para las puntas interiores del lado molino y de evacuación los valores corresponden a  $2 \cdot 10^{-5}$  [mm/ciclo] y  $8 \cdot 10^{-5}$  [mm/ciclo] respectivamente. Estos valores deberían cambiar a medida que avanza la grieta debido a que los frentes de fisura van entrando en regiones de mayor espesor, lo que tendería a relajar el estado de tensiones debido a que los frentes de fisura tendrán mayor espesor para soportar las deformaciones sufridas. No obstante, utilizando estos valores como una referencia pesimista, la punta de la fisura interior del lado de salida tardaría dos meses en alinearse longitudinalmente con su correspondiente punta de la superficie exterior; y la punta interior que da al lado del molino tardaría cuatro veces más, es decir, 8 meses en alinearse con su correspondiente exterior, esto suponiendo que el molino trabaja todo el día y todos los días de la semana.

Sin embargo, el crecimiento de grieta interior puede cambiar el estado de tensiones en las puntas exteriores, en donde se podría alcanzar un punto de crecimiento de grieta exterior. Por lo tanto, según el método propuesto, se debería ir estudiando longitudes de grietas tentativas y razonables sucesivas para ir ajustando los valores si se desea tener una noción del tiempo remanente de vida de la pieza si la grieta se propagara indefinidamente.

Por otra parte, se cree más eficiente modelar fisuras de mayor extensión<sup>10</sup> y estudiar si igualmente se propagarían con la metodología propuesta, ya que se puede dar que desde una longitud en específico, la variación del factor de intensidad de esfuerzos equivalente no sea capaz de propagar la fisura, y por lo tanto, se podría tener la tranquilidad de que la pieza no debería fallar catastróficamente si se mantienen al menos las condiciones actuales de desgaste y de operación. De lo contrario, de tener resultados sucesivos que predigan un crecimiento de fisura, el método propuesto al menos daría una noción razonable de la vida remanente de la pieza, con lo que se podría planificar alguna estrategia de reparación o de operación para prevenir que el trunnion termine falle de manera catastrófica.

## **5.5 Propuesta de solución**

Los resultados obtenidos determinan que al menos la fisura debería propagarse en la superficie interior del trunnion, por lo que se enuncian algunas posibles soluciones para impedir que se dé un avance mayor.

Las propuestas tienen que ir en la dirección de relajar el estado de tensiones en la punta de la fisura, por lo que una solución sería cambiar el estado de tensiones de una singularidad por uno de concentrador de esfuerzos, como por ejemplo al redondear los frentes de la fisura, que implicaría al menos disminuir las tensiones máximas sufridas en los extremos de la fisura. Esta propuesta podría detener el avance de fisura, pero no solucionaría el problema adicional de pérdida de lubricante y de contaminación de la pulpa, por lo que se piensa que esta solución debe ir en conjunto con el relleno de la fisura con algún material que sea adherente a la fundición; que soporte las deformaciones que sufre el trunnion y la presión de aceite cuando la parte reparada pase por el descanso donde se inyecta el aceite a presión.

Una solución más general sería intentar fijar el cilindro con hélice interior a la tapa del trunnion en su parte interior, con sus respectivos sellos de forma tal de que esta pieza aporte rigidez al trunnion y que además impida el ingreso del material a la zona desgastada para detener un desgaste aún mayor.

---

<sup>10</sup> Suponiendo que el crecimiento no se detiene, eventualmente se alcanzaría la longitud modelada o bien una fisura de carácter similar.

## 6 Conclusiones

Una vez realizado el estudio, se concluye principalmente que el trunnion no debería fallar por el estado de esfuerzos máximo alcanzado ni por fatiga cuando el trunnion no presenta defectos y aun cuando presenta desgaste de su superficie interior mientras está en operaciones bajo condiciones nominales.

El primer caso de estudio donde el trunnion no presenta fisuras ni desgaste es prácticamente una comprobación del diseño de la pieza, y dada las condiciones de operación, el trunnion sufre principalmente esfuerzos de compresión por flexión llegando a soportar un máximo de von Mises de alrededor de 14 [MPa]. Según el primer esfuerzo principal máximo alcanzado, se obtiene un factor de seguridad de falla al primer ciclo de 18,97, que muestra que el trunnion resiste con un amplio margen de seguridad las cargas máximas sufridas en operación normal. Por otra parte, utilizando un criterio de evaluación de vida a la fatiga conservador en base a un esfuerzo de von Mises equivalente, se obtienen las componentes medio y alternante de 7,64 [MPa] y 7,01 [MPa] respectivamente, que al ser evaluados en el criterio de Smith-Dolan para materiales frágiles, se determina un factor de seguridad de vida a la fatiga de 6,27, prediciendo que la pieza no debería fallar por fatiga. Estos resultados en términos de magnitud pueden parecer sobredimensionados, pero para efectos de posibles pérdidas económicas producidas por detener el molino si falla esta componente, se tiene totalmente justificada una inversión inicial mayor para un diseño más robusto.

Para el segundo caso en donde el trunnion presenta un desgaste de su superficie interior con una forma específica, el estado de esfuerzos máximo soportado alcanza un esfuerzo de von Mises de alrededor de 42 [MPa] en el sector de menor espesor remanente, con un esfuerzo de von Mises equivalente medio y alternante de 13,43 [MPa] y 34,55 [MPa] respectivamente en una revolución, que al ser evaluados en el criterio de Smith-Dolan como en el caso anterior, se determina un factor de seguridad de vida a la fatiga de 1,86 que establece que el trunnion no debería fallar por fatiga. En cuanto a la falla al primer ciclo, el factor de seguridad obtenido con respecto al primer esfuerzo principal máximo alcanzado es de 7,36, lo que dice que también resiste con un amplio margen las cargas máximas alcanzadas en operación. Por lo tanto, aun cuando se esté en presencia de un desgaste pronunciado como en el presente caso, el trunnion no falla ni por los esfuerzos máximos alcanzados ni por fatiga.

Adicionalmente, se tiene la convicción de que el trunnion no falla por fatiga en los dos casos anteriores debido a que el método de evaluación utilizado en base a un esfuerzo de von Mises equivalente se hace sobre un caso más desfavorable que el real, en donde se hace un supuesto de que todas las componentes del tensor de esfuerzos están en fase, por lo que al no fallar en este caso, se tiene un mayor grado de certeza de que no falla la pieza en el caso real.

Con respecto a la aparición de grietas, una vez comprobado el hecho de que no se producen por fatiga, se cree fuertemente que su presencia se debe a fallas en el sistema de lubricación, que implicarían un deslizamiento de las superficies metálicas del trunnion y el descanso generando un roce excesivo capaz de provocar la falla parcial de la pieza, provocando la aparición de fisuras.

Luego, la segunda conclusión principal del estudio corresponde al caso en el que el trunnion de descarga presenta desgaste y fisura, específicamente una fisura pasante de extensión inicial de 120 [mm] en la superficie exterior del trunnion y de 60 [mm] en la superficie interior del trunnion



en la región de mayor desgaste. En este caso, la fisura se tendería a propagar por la superficie interior del trunnion cuando el molino se encuentra en operación bajo condiciones nominales.

La propagación está gobernada por los modos II y III de crecimiento de grieta, y la evaluación se realiza mediante un criterio de superposición de modos de crecimiento de grieta, que determina una variación de factor de intensidad de esfuerzos equivalente  $\Delta K_{eff}$ , siendo de 10,16 [MPa√m] para la punta en la superficie interior que da al lado interior del molino, y de 11,71 [MPa√m] para la punta en la superficie interior que da al lado de salida del material, ambos valores superiores al  $\Delta K_{th}$  de la fundición gris correspondiente a 8,5 [MPa√m] para este caso. Por otra parte, los resultados para el  $\Delta K_{eff}$  en las puntas de la superficie exterior del trunnion corresponden a 0,76 [MPa√m] y 0,52 [MPa√m] para las puntas de fisura del lado molino y del lado de salida de material respectivamente, valores muy alejados del límite de 8,5 [MPa√m] presentado.

Con respecto al método propuesto para el estudio de crecimiento de grieta, este hace una evaluación de la situación actual de la fisura, y dado la irregularidad en el desgaste del trunnion, se debe realizar evaluaciones de fisuras de mayores extensiones sucesivas para poder determinar la cantidad de tiempo necesaria para alcanzar estas fisuras de mayor extensión, pudiendo encontrarse con un tamaño de fisura específica en donde se detenga la propagación.

Por último se proponen soluciones para el caso del trunnion fisurado que van en la dirección de relajar el estado de esfuerzos en la punta de la fisura, como redondear los frentes de fisura para cambiarlas de singularidad a concentrador de esfuerzos y rellenar el espacio con algún material que se adapte a las condiciones físicas y de operación. Por otra parte, también se propone fijar de alguna manera el cilindro con hélice interior a la tapa del trunnion, pero este tema merece un estudio más profundo ya que se debe inspeccionar la interacción que se da entre estas dos piezas.

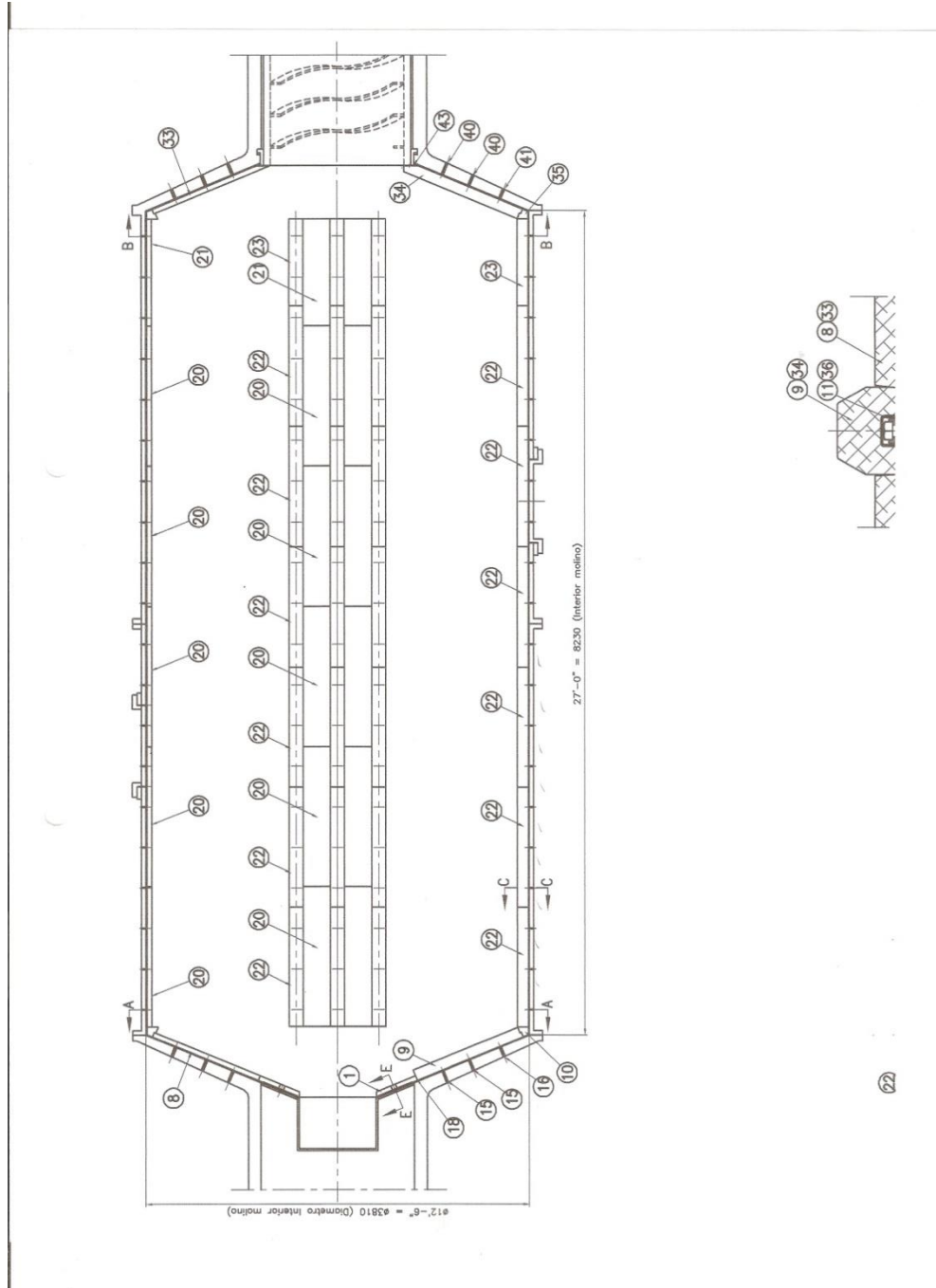
## **Bibliografía**

- [1] BUDYNAS, R. G. y Nisbett, J.K. Diseño en ingeniería mecánica de Shigley. 8<sup>a</sup> ed. México. D.F., McGraw-Hill, 2008.
- [2] OWEN, D. R. J. Engineering Fracture Mechanics: Numerical Methods and Applications. Swansea, Pineridge Press Limited, 1983.
- [3] LAWN, B. R. Fracture of brittle solids. 2<sup>nd</sup> edition. London, William Clowes & Sons Ltd. 1993.
- [4] ASME XI. Apéndice A.
- [5] GUPTA, A. y Yan, D. S. Mineral Processing Design and Operations, an Introduction. First edition, ELSEVIER, UK 2006.
- [6] JAMES, M.N. y Wenfong, L. Fatigue crack growth in austempered ductile and grey cast irons – stress ratio effects in air and mine water. Material science and engineering. 1998.
- [7] MUNSON, B. y Young, D. Fundamentals of Fluid Mechanics. Sixth Edition. USA. Jhon Wiley & Sons, Inc. 2009.
- [8] STACHOWIAK, G. y Batchelor, A. Engineering Tribology. 4ta ed. Australia. Butterworth Heinemann. 2014.
- [9] QIAN, J. y Fatemi, A. Mixed mode fatigue crack growth: a literature survey. Engineering Fracture Mechanics Vol. 55. ELSEVIER, UK 1996.

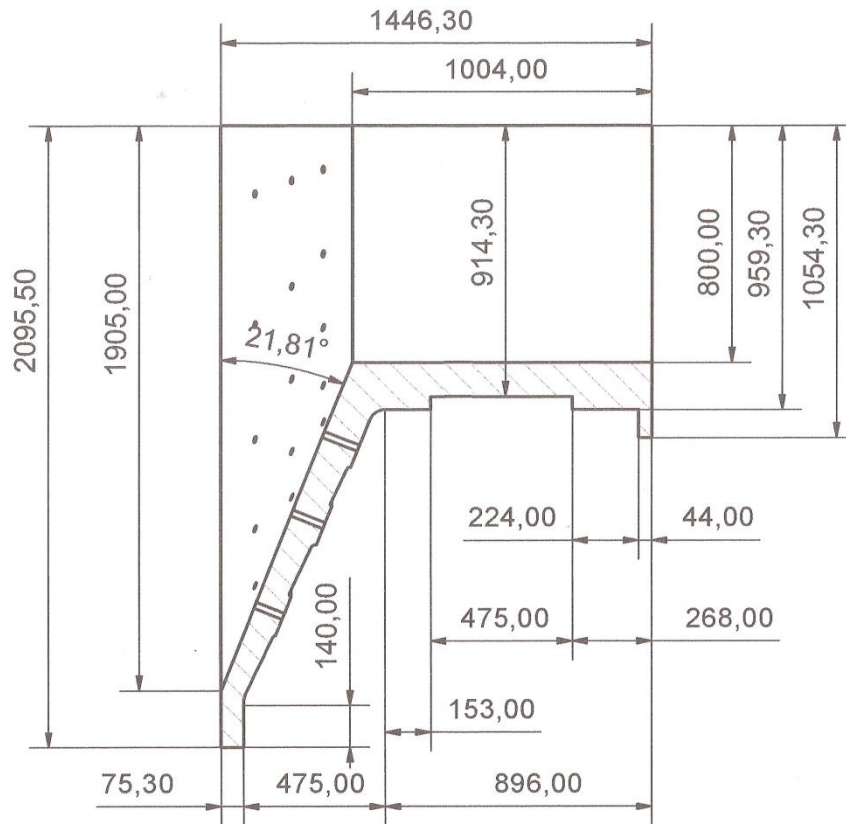
# Anexos

## Anexo A : Planos e imagenes correspondientes a la geometría del molino

### Anexo A.1: Vista en corte del molino sin corona

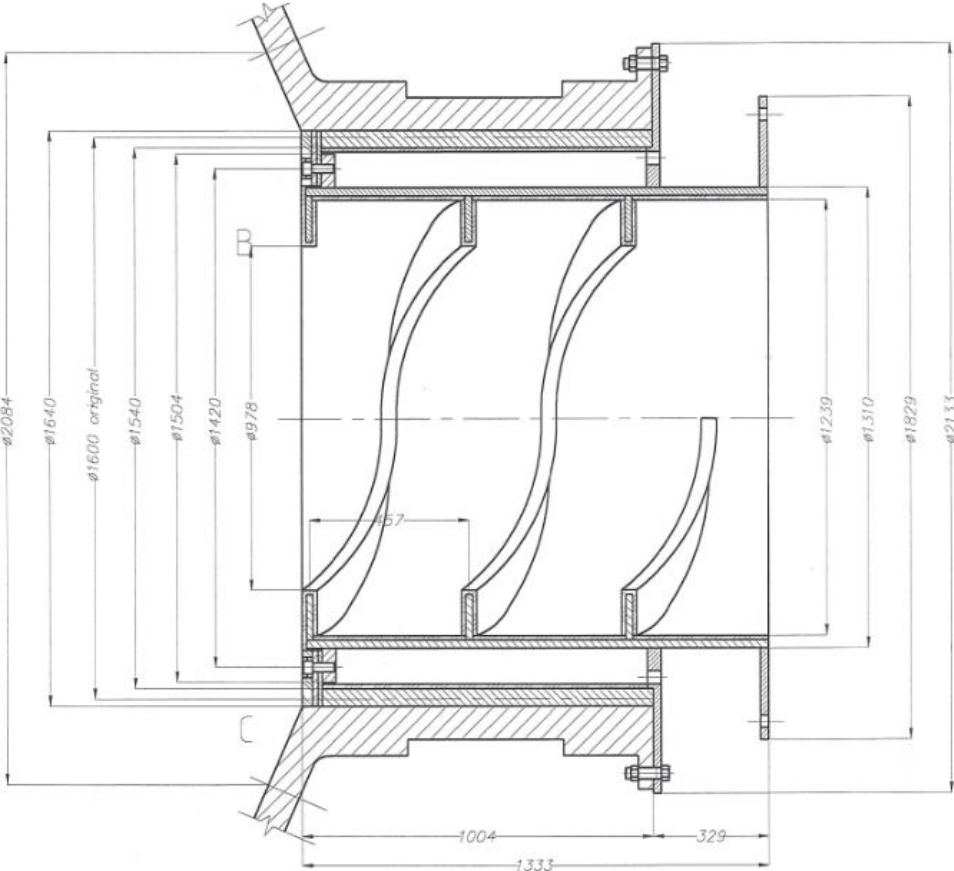


**Anexo A.2: Vista en corte de la mitad inferior del trunnion**



D-D ( 1 : 20 )

**Anexo A.3: Vista en corte del cilindro con hélice interior**



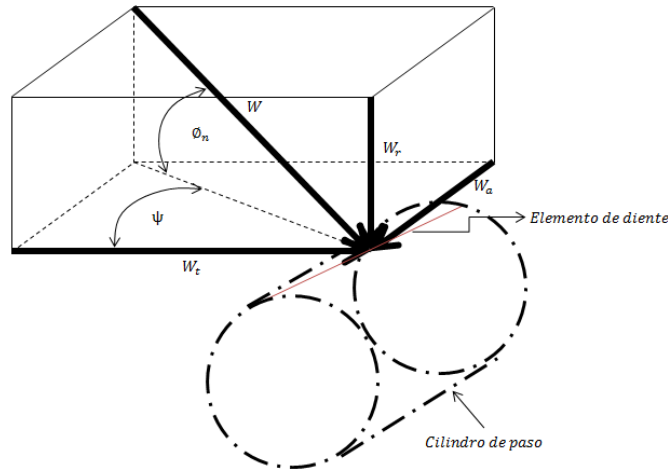
## Anexo B: Determinación de las fuerzas sobre la corona

Las fuerzas que actúan sobre la corona se determinan a partir de la potencia de transmisión, correspondiente a  $H = 2.000$  [HP], la velocidad de giro de la corona  $\omega$  de 15,8 [RPM], el diámetro de paso de la corona  $D_p$  correspondiente a 5,379 [m], y los ángulos de presión y de hélice de la corona, que corresponden a  $\phi_n = 25$  [°]  $\psi = 8$  [°] respectivamente.

En la Figura B1 se muestra un esquema tridimensional de las fuerzas que actúan contra un diente de un engrane helicoidal. A partir de la geometría de la figura, las tres componentes de la fuerza total (normal)  $W$  del diente corresponden a [1]:

$$\begin{aligned} W_r &= W \sin \phi_n \\ W_t &= W \cos \phi_n \cos \psi \\ W_a &= W \cos \phi_n \sin \psi \end{aligned} \quad (B.1)$$

donde  $W$  es la fuerza total,  $W_r$  la componente radial,  $W_t$  la componente tangencial,  $W_a$  la componente axial,  $\phi_n$  el ángulo de presión y  $\psi$  el ángulo de hélice.



**Figura B1** Fuerzas que actúan en los dientes de un engrane helicoidal con sentido hacia la derecha [1].

La fuerza tangencial transmitida a través de un engrane rotatorio se puede obtener a partir de la relación estándar de potencia transmitida que sigue la forma [1]:

$$H = T\omega = (W_t D_p / 2)\omega \quad (B.2)$$

donde  $H$  es la potencia transmitida,  $T$  es el par de torsión,  $W_t$  es la componente tangencial de la fuerza en el engrane,  $D_p$  el diámetro de paso del engrane y  $\omega$  es la velocidad angular del engrane.

Al despejar  $W_t$  de la ecuación B.2 y utilizando los valores presentados para la corona en el primer párrafo se obtiene que la fuerza tangencial corresponde a:

$$W_t = 272.476 \text{ [N]}$$

Luego, despejando la fuerza total  $W$  de la ecuación B.1 correspondiente a la fuerza tangencial  $W_t$ , se obtiene:

$$W = 303.599 \text{ [N]}$$

Una vez obtenida la fuerza total, se puede calcular la componente axial con la ecuación B.1 que da como resultado

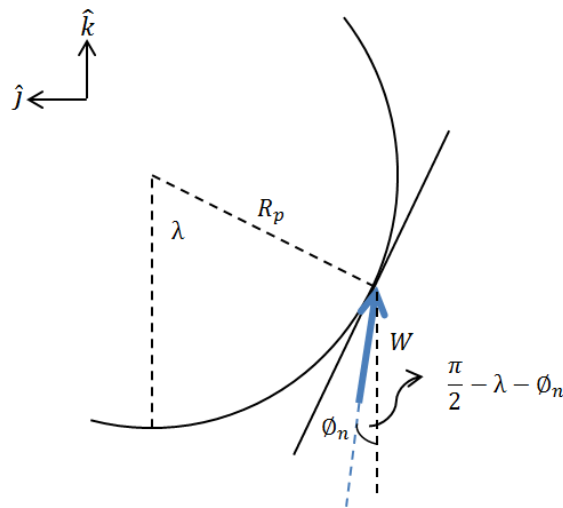
$$W_a = 38.294 \text{ [N]}$$

Analizando la magnitud de la fuerza axial, se puede observar que esta es del orden del 12% de la fuerza total. Esta fuerza hace que en los descansos aparezca una reacción en la dirección axial, y según el orden de magnitud de estas reacciones, que son de alrededor 1.297.000 [N] según se puede consultar en el Anexo D, este valor no corresponde a más de un 1,5 %, lo que implicaría que las reacciones deberían estar inclinadas en el sentido opuesto a la componente axial alrededor de 0,8 [°]. Por lo tanto, entendiendo que estas desviaciones no genera un alto impacto por el bajo porcentaje de las fuerzas totales en juego, se decide tratar el problema como un engranaje recto en donde la magnitud de la fuerza total se respeta.

El punto de contacto entre los dientes de la corona y el piñon se da en un ángulo  $\lambda = 61,78$  [°] según la vertical, como se muestra en la Figura B2. De esta se puede desprender que las componentes en las direcciones  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$  corresponden a:

$$F_{c,y} = W \text{sen}(\pi/2 - \lambda - \phi_n) = -17.053 \text{ [N]} \hat{j}$$

$$F_{c,z} = W \text{cos}(\pi/2 - \lambda - \phi_n) = 303.119 \text{ [N]} \hat{k}$$



**Figura B2** Esquema del lugar y dirección de la aplicación de la fuerza total en la corona.

## Anexo C: Modelación de presión de la carga del molino

La presión de la carga del molino se modela de forma tal que ejerza la misma fuerza que ejercería la pulpa de material al estar inclinada cuando está en operación.

El material procesado en el molino, es decir, la mezcla de pulpa de mineral más las bolas de acero, se tratan como un fluido equivalente con una densidad que respeta las proporciones de cada componente según los parámetros de operación del molino.

Siguiendo las proporciones establecidas en la sección 3.2.2, el porcentaje del volumen total del interior del molino ocupado por las bolas  $J_B$  es de 32,14%, y el porcentaje ocupado por la pulpa corresponde a 12,86%, obteniendo el 45% de llenado con el que opera el molino. Luego al respetar esta proporción y según las densidades de la pulpa y las bolas de acero presentadas en la sección 3.3.2, la densidad equivalente del fluido de pulpa más bolas es de:

$$\rho_{b+p} = 3.835,71 [kg/m^3]$$

Luego, el peso correspondiente a la mezcla de material procesado dentro del cuerpo del molino cilíndrico, digamos  $F_{b+p,cil}$ , sin contar los el remanente de material que descansa en la superficie interior cónica de los trunnions corresponde a:

$$F_{b+p,cil} = 1.492.597 [N]$$

De esta forma, la presión de la pulpa más bolas, considerándolas como un fluido equivalente, se modela como una presión de fluido dentro de un cuerpo rígido en movimiento [7]. Esta se basa en la ecuación general

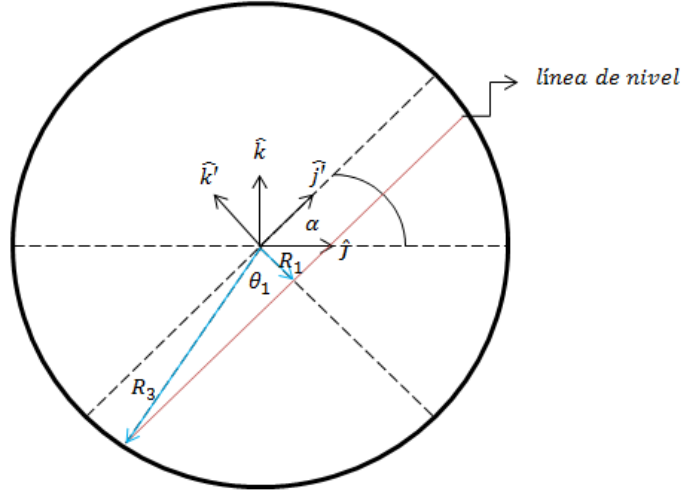
$$-\nabla P + \vec{g}\rho = \rho\vec{a} \quad (C.1)$$

siendo  $\nabla P$  el gradiente de presión,  $\vec{g}$  el vector de aceleración de gravedad,  $\rho$  la densidad del fluido y  $\vec{a}$  la aceleración que sufre el cuerpo rígido que contiene al fluido.

Luego, considerando entonces que el cuerpo cilíndrico sufre una aceleración lineal tal que la carga toma un ángulo de inclinación con respecto a la horizontal  $\alpha$ , como se muestra en la Figura C1, el set de ecuaciones con respecto al eje de coordenadas cartesiano girado que se presenta también en la figura es

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y'} &= -\rho(g\sin(\alpha) + a'_y) \\ \frac{\partial P}{\partial z'} &= -\rho(g\cos(\alpha) + a'_z) \end{aligned} \quad (C.2)$$





**Figura C1** Ángulo de inclinación de la carga  $\alpha$  y sistema de coordenadas cartesianas rotado en el ángulo  $\alpha$

Adicionalmente, un diferencial de presión en los ejes coordenados cartesianos rotados de la Figura C1 se expresa de la forma

$$dP = \frac{\partial P}{\partial y'} dy' + \frac{\partial P}{\partial z'} dz' \quad (C.3)$$

Luego, usando C.2 en C.3, se obtiene

$$dP = -\rho (a_{y'} + g \operatorname{sen}(\alpha)) dy' - \rho (a_{z'} + g \operatorname{cos}(\alpha)) dz' \quad (C.4)$$

que al ser integrada, aparece una constante independiente de las variables  $y'$  y  $z'$ , quedando de la forma

$$P = -\rho (a_{y'} + g \operatorname{sen}(\alpha)) y' - \rho (a_{z'} + g \operatorname{cos}(\alpha)) z' + C_1 \quad (C.5)$$

Luego, sabiendo que a lo largo de la línea de nivel no hay variación de presión, y entendiendo que la forma de plantear el sistema de coordenadas cartesianas rotadas hace coincidir la línea de presión con el eje  $j'$ , se tiene la condición

$$\frac{\partial P}{\partial y'} = 0 \quad (C.6)$$

Por lo tanto, al aplicar C.6 en C.5 se tiene

$$P = -\rho (a_{z'} + g \operatorname{cos}(\alpha)) z' + C_1 \quad (C.7)$$

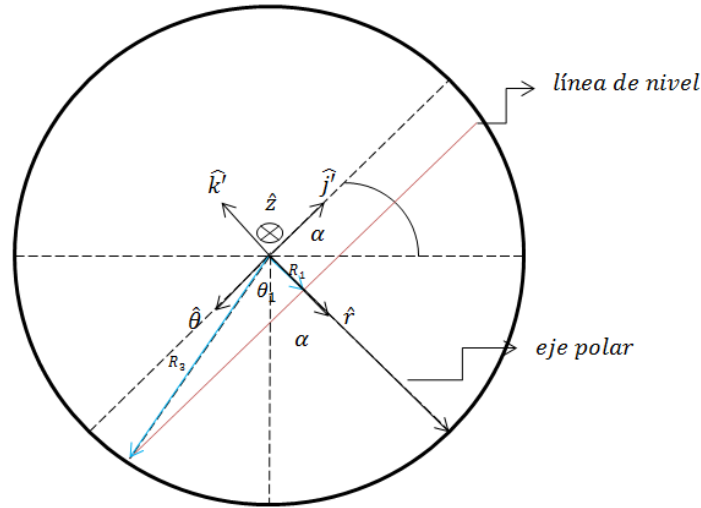
Si además se considera que el nivel del fluido está a una distancia  $R_1$  según  $\hat{k}'$  de la Figura C1, y que esta condición implica la relación  $P = 0$ , la ecuación que modela la presión en el sistema de coordenadas cartesianas rotado es

$$P = -\rho(a_{z'} + g\cos(\alpha))(z' + R_1) \quad (C.8)$$

Como se ha mencionado, se busca que dado un ángulo  $\alpha$ , la fuerza que ejerza la presión sea equivalente a la fuerza que ejerce el material al interior del molino, es decir, a  $F_{b+p,cil}$ . Por lo tanto, se debe cumplir la igualdad

$$F_{p+b,cil} = \int P dA \quad (C.9)$$

Para realizar esta integración se utiliza un sistema de coordenadas cilíndrico auxiliar que se muestra en la Figura C2.



**Figura C2** Esquema de sección transversal del cilindro del molino con la orientación del sistema de coordenadas cilíndrico auxiliar para la integración.

En la Figura C2 se puede ver que la extensión del espacio ocupado por la carga abarca la región angular de  $[-\theta_l, \theta_l]$  según  $\hat{\theta}$ .

Si ahora se escribe la ecuación B.8 en términos del sistema cilíndrico auxiliar, se tiene

$$P = \rho(a_{z'} + g\cos(\alpha))(r\cos(\theta) - R_1) \quad (C.10)$$

Por lo tanto, la integral a calcular en la superficie interior de los liners delimitada por el radio  $R_3$  según la ecuación C.9 es de la forma

$$F_{b+p,cil} = 2 \int_0^{\arccos(R_1/R_3)} \int_0^L \rho_{b+p}(a_{z'} + g\cos(\alpha))(R_3\cos(\theta) - R_1)R_3 dz d\theta \quad (C.11)$$

en donde se ha utilizado la paridad de la ecuación C.10 para hacer la integración sobre la mitad del recorrido angular y se multiplica por el doble el resultado. Adicionalmente, se ha escrito el ángulo  $\theta_l$  en términos de arccoseno según se puede desprender de la Figura C2.

Al realizar la integración de la ecuación C.11, se obtiene

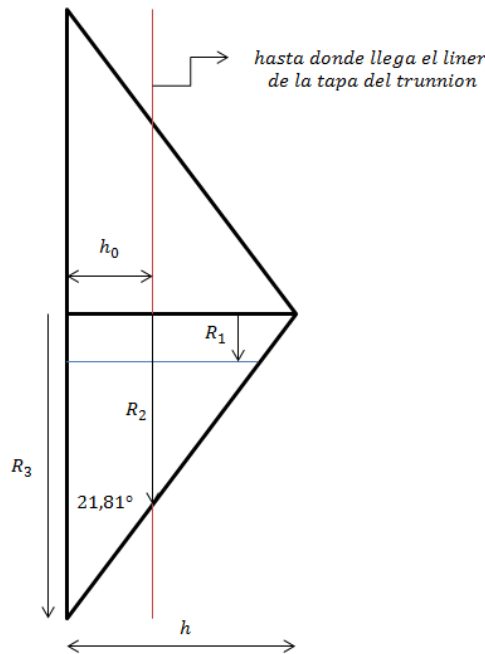
$$F_{b+p,cil} = 2 \cdot \rho_{b+p} \cdot L \cdot R_3 \cdot (a_z' + g \cos(\alpha)) \left( R_3 \cdot \text{sen}(\text{acos}\left(\frac{R_1}{R_3}\right)) - R_1 \cdot \text{acos}\left(\frac{R_1}{R_3}\right) \right) \quad (C.12)$$

que está función de  $a_z'$  y de  $\alpha$ .

La tapa del trunnion representa una sección cónica. En la Figura C3 se muestra el cono completo que contiene la sección del trunnion, que tiene una extensión  $h_0$  mostrada en la figura y que corresponde a 0,4423 [m], comprendida entre los radios  $R_3 = 1,905$  [m] y  $R_2 = 0,8$  [m]. Luego en la figura se muestra la altura  $h$  del cono teórico que corresponde a 0,739 [m]. Adicionalmente, se muestra el radio  $R_2 = 0,144$  [m] correspondiente a la distancia desde el centro hasta donde llega el nivel del fluido según el porcentaje de llenado.

Al aplicar la parametrización de la presión sobre el área del cono del liners del trunnion donde hace efecto se obtiene

$$F_{b+p,con} = \rho_{b+p} \cdot (a_z' + g \cos(\alpha)) \cdot \sqrt{1 - \frac{h^2}{R_3^2}} \cdot \left( \frac{2R_3}{3} \left( R_3 \sqrt{1 - \frac{R_1^2}{R_3^2}} (R_3^3 - R_1^3) - R_2 \sqrt{1 - \frac{R_1^2}{R_2^2}} (R_2^3 - R_1^3) \right) - R_1 \left( R_3^2 \text{acos}\left(\frac{R_1}{R_3}\right) - R_1 R_3 \sqrt{1 - \frac{R_1^2}{R_3^2}} - R_2^2 \text{acos}\left(\frac{R_2}{R_3}\right) + R_1 R_2 \sqrt{1 - \frac{R_1^2}{R_2^2}} \right) \right) \quad (C.13)$$

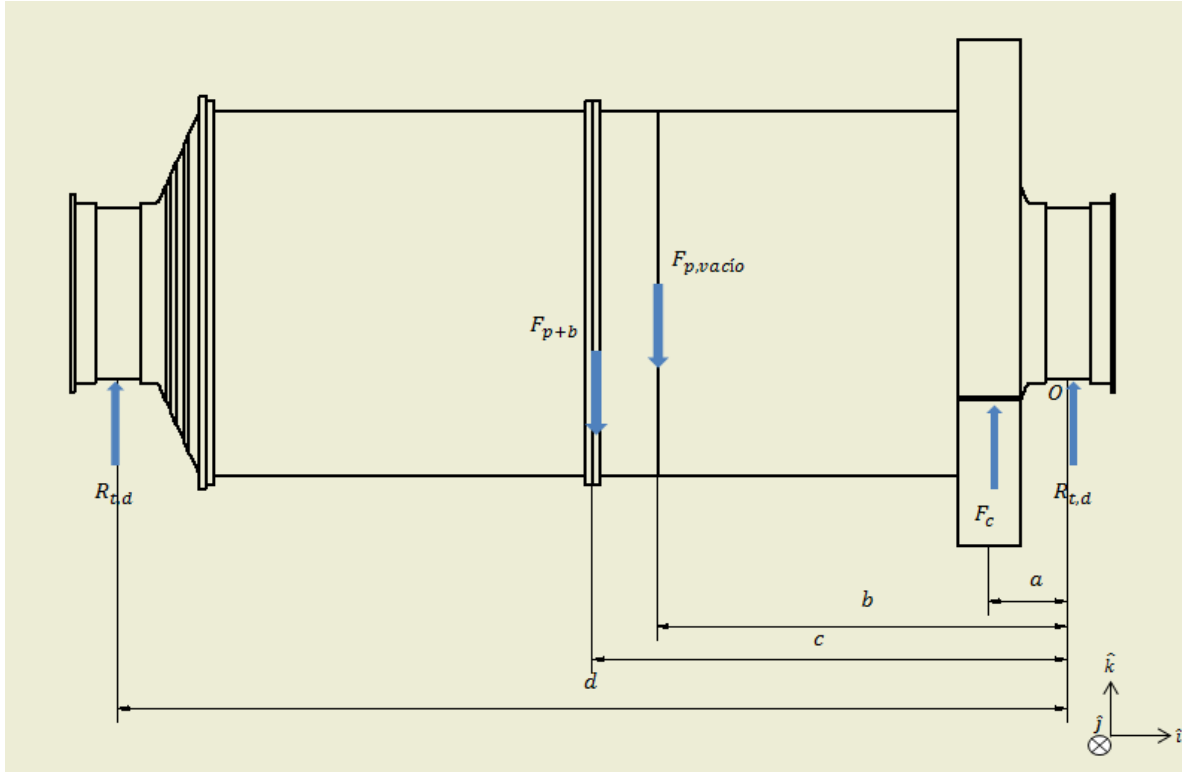


**Figura C3** Cono teórico completo que formaría el liner de la tapa del trunnion.

## Anexo D: Determinación de reacciones en los trunnions

En este apartado se realiza el balance de fuerzas y momentos para la determinación de las reacciones en los trunnions.

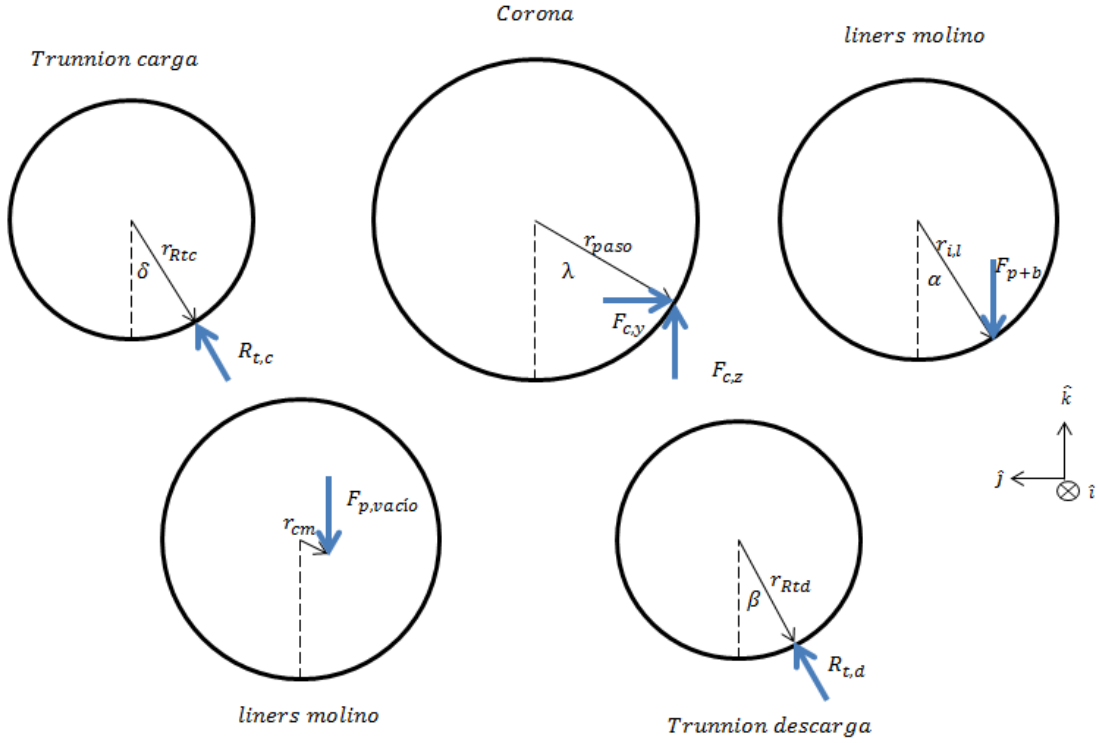
Se realiza un diagrama de cuerpo libre (DCL) del molino, que se muestra en la Figura D1.



**Figura D1** DCL del molino en una vista lateral en el plano XZ global.

En la Figura D1,  $R_{t,d}$  y  $R_{t,c}$  representan las reacciones en los trunnions de descarga y de carga respectivamente,  $F_{p+b}$  representa la fuerza que ejerce la carga de pulpa más bolas en el molino,  $F_{p,vacío}$  representa la fuerza de peso del molino cuando no tiene carga y  $F_c$  representa la fuerza que ejerce el piñón sobre la corona.

En la Figura D2 se muestra una vista en el plano XY mirado desde el lado de descarga al lado de carga de las fuerzas y la distancia desde el centro de las circunferencias de aplicación de las cargas presentadas en el DCL de la Figura D1. En esta figura se hace una descomposición de la fuerza ejercida sobre la corona  $F_c$  en sus componentes en  $\hat{k}$  y  $\hat{j}$  según el sistema de referencia que se muestra en la figura, que por lo demás es el sistema de referencia cartesiano global utilizado en la memoria.



**Figura D2** Esquema de los radios y fuerzas involucradas en el DCL, vista desde un plano XY global desde el lado de descarga al de carga.

En base a la Figura D1 y la Figura D2 se realizan los balances de fuerzas y momentos en X, Y y Z global. El balance de momentos se hace con respecto al punto O de la Figura D1, que es el punto medio de la longitud de apoyo del trunnion de carga y es donde se aplica teóricamente la componente total de la fuerza en este trunnion. Con esto las ecuaciones de equilibrio resultantes son:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_{t,c} \sin(\delta) - F_{c,y} + R_{t,d} \sin(\beta) = 0 \quad (D.1)$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow R_{t,c} \cos(\delta) + F_{c,z} - F_{p+b} - F_{p,vacio} + R_{t,d} \cos(\beta) = 0 \quad (D.2)$$

$$\sum_{c/r a o} M_x = 0 \rightarrow -r_{paso} \sin(\lambda) F_{c,z} - r_{paso} \cos(\lambda) F_{c,y} + r_{i,l} \sin(\alpha) F_{p+b} + r_{cmy} F_{p,vacio} = 0 \quad (D.3)$$

$$\sum_{c/r a o} M_y = 0 \rightarrow a R_{t,c} \cos(\delta) + b F_{c,z} - c F_{p+b} - d F_{p,vacio} + e R_{t,d} \cos(\beta) = 0 \quad (D.4)$$

$$\sum_{c/r a o} M_z = 0 \rightarrow -a R_{t,c} \sin(\delta) + b F_{c,y} - e R_{t,d} \sin(\beta) = 0 \quad (D.5)$$

Adicionalmente se tiene que el peso de la carga  $F_{p+b}$  corresponde a

$$F_{p+b} = F_{p+b,cil} + 2F_{p+b,con} \quad (D.6)$$

Del Anexo C, se tiene la ecuación para  $F_{p+b,cil}$  y  $F_{p+b,con}$  que son respectivamente

$$F_{b+p,cil} = 2 \cdot \rho_{b+p} \cdot L \cdot R_3 \cdot (a_{z'} + g \cos(\alpha)) \left( R_3 \cdot \text{sen}(\text{acos}\left(\frac{R_1}{R_3}\right)) - R_1 \cdot \text{acos}\left(\frac{R_1}{R_3}\right) \right) \quad (D.7)$$

$$F_{b+p,con} = \rho_{b+p} \cdot (a_{z'} + g \cos(\alpha)) \cdot \sqrt{1 - \frac{h^2}{R_3^2}} \cdot \left( \frac{2R_3}{3} \left( R_3 \sqrt{1 - \frac{R_1^2}{R_3^2}} (R_3^3 - R_1^3) - R_2 \sqrt{1 - \frac{R_1^2}{R_2^2}} (R_2^3 - R_1^3) \right) - R_1 \left( R_3^2 \text{acos}\left(\frac{R_1}{R_3}\right) - R_1 R_3 \sqrt{1 - \frac{R_1^2}{R_3^2}} - R_2^2 \text{acos}\left(\frac{R_2}{R_3}\right) + R_1 R_2 \sqrt{1 - \frac{R_1^2}{R_2^2}} \right) \right) \quad (D.8)$$

Los parámetros utilizados en este set de ecuaciones son:

$$\rho_{b+p} = 3.835,71 \text{ [kg/m}^3\text{]}$$

$$F_{c,y} = -17.053 \text{ [N]}$$

$$F_{c,z} = 303.119 \text{ [N]}$$

$$F_{p,vacio} = 1.077.272 \text{ [N]}$$

$$F_{b+p,cil} = 1.492.597 \text{ [N]}$$

$$R_1 = 0,145 \text{ [m]}$$

$$R_2 = 0,8 \text{ [m]}$$

$$R_3 = R_{i,l} = 1,846 \text{ [m]}$$

$$h = 0,739 \text{ [m]}$$

$$R_{t,c} = R_{t,d} = 0,9143 \text{ [m]}$$

$$R_{paso} = 2,689 \text{ [m]}$$

$$a = 0,816 \text{ [m]}$$

$$b = 4,413 \text{ [m]}$$

$$c = 5,056 \text{ [m]}$$

$$d = 10,112 \text{ [m]}$$

$$\lambda = 61,78 \text{ [}^\circ\text{]}$$

$$g = 9,81 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

Con esto se tiene un set de 8 ecuaciones y 8 incógnitas, por lo que el sistema tiene solución siendo esta

$$R_{t,c} = 1.180.549 \text{ [N]}$$

$$\delta = 0,761 \text{ [}^\circ\text{]}$$

$$R_{t,d} = 1.297.709 \text{ [N]}$$

$$\beta = 0,061 \text{ [}^\circ\text{]}$$

$$a_{z'} = -1,64 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

$$\alpha = 13,89 \text{ [}^\circ\text{]}$$

$$F_{p+b,con} = 105.701 \text{ [N]}$$

$$F_{p+b} = 1.704.000 \text{ [N]}$$

## Anexo E: Determinación de la presión en los trunnions

Las reacciones en los trunnions que equilibran las fuerzas del molino se modelan como presiones. Según la teoría presentada por Stachowiak [8], la presión para este tipo de cojinetes se puede modelar como presión parabólica dependiente de parámetros como la viscosidad del aceite, el espesor de la película de aceite, entre otras. En general, las ecuaciones presentadas en [8] son de diseño, y lo que buscan es encontrar los lubricantes idóneos para cumplir con los requerimientos de diseño.

Para efectos de esta memoria, solo se utiliza la información del tipo de distribución que siguen las presiones, o sea parabólicas, y se utiliza una ecuación que cumpla esta condición cuyos parámetros sean tales que se cumpla la magnitud de las reacciones a suplantar.

Una ecuación que se ajusta al modelo parabólico y que en definitiva es la que se utiliza en esta memoria es

$$P = P_0 - \frac{P_0}{\pi^2} \cdot (\pi - 2\theta)^2 \quad (E.1)$$

donde  $P_0$  es el valor máximo de la presión alcanzado, y  $\theta$  es la coordenada en  $\hat{\theta}$  en el sistema de referencia polar o bien cilíndrico para el caso de tres dimensiones.

Dada la forma de la ecuación E.1, se puede observar que la presión es cero para los ángulos  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ , por lo tanto, se observa que la presión actúa sobre la mitad del área exterior del trunnion, ajustándose al hecho de este tipo de cojinetes parciales.

En la Figura E1 (página 83) se puede ver un esquema de cómo actúa la presión en el trunnion, donde se muestra adicionalmente los ejes coordenadas globales y un sistema cilíndrico auxiliar, donde el eje polar coincide con el eje Y global, y el eje longitudinal va en sentido opuesto al eje X global.

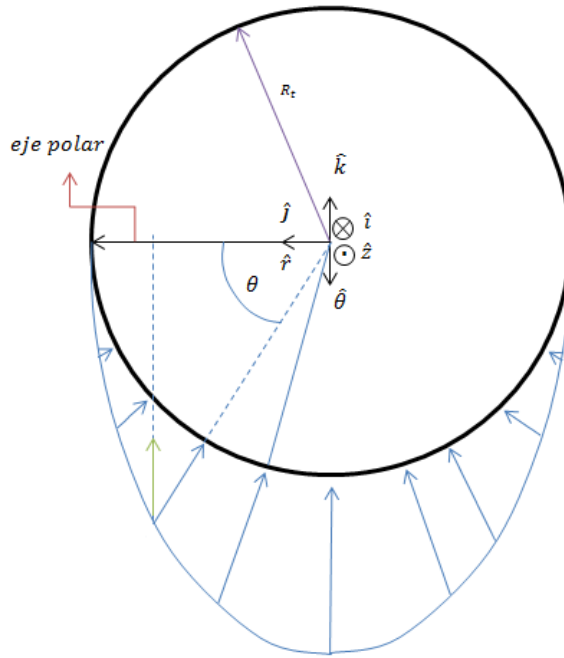
En la Figura E1, la flecha verde corresponde a la componente vertical coincidente con el eje Z global, y de la geometría que sigue se puede ver que la componente fuerza total en esta dirección sigue la forma

$$F_{P,z} = \int_0^\pi P \sin(\theta) L_t R_t d\theta \quad (E.2)$$

donde  $P$  es la distribución de presión de la fórmula E.1,  $L_t$  corresponde al largo del apoyo del trunnion en la dirección X global y  $R_t$  es el radio exterior del trunnion en su parte de apoyo.

Una vez realizada la integración, se obtiene que la componente total en la dirección vertical es de la forma

$$F_{P,z} = \frac{16L_t R_t P_0}{\pi^2} \quad (E.3)$$



**Figura E1** Esquema de la distribución de presiones sobre el radio exterior de apoyo del trunnion.

En el Anexo D se obtienen los valores de las reacciones en los trunnions al resolver el caso estático, los cuales son

$$\begin{aligned} R_{t,c} &= 1.180.549 [N] \\ R_{t,d} &= 1.297.709 [N] \end{aligned}$$

Luego, despejando  $P_0$  en la ecuación E.3, se obtiene la expresión

$$P_0 = \frac{F_{P,z}\pi^2}{16L_tR_tP_0} \quad (E.4)$$

Finalmente, de la geometría del trunnion presentada en el Anexo A.1, se tienen los siguientes parámetros geométricos:

$$\begin{aligned} R_{t,c} &= R_{t,d} = 0,9143 [m] \\ L_{t,c} &= L_{t,d} = 0,475 [m] \end{aligned}$$

Con estos parámetros más el valor de las reacciones, que corresponden en la fórmula E.4 al parámetro  $F_{P,z}$  se obtiene  $P_0$  para cada trunnion al utilizar la ecuación recién mencionada, siendo estos valores:

$$\begin{aligned} P_{0t,c} &= 1,679 [MPa] \\ P_{0t,d} &= 1,843 [MPa] \end{aligned}$$