



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

MODELOS MATEMÁTICOS PARA EL SECUENCIAMIENTO EN
PLANIFICACIÓN MINERA

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

EMILIO JESÚS MOLINA OLIVARES

PROFESOR GUÍA:
JORGE GUILLERMO AMAYA ARRIAGADA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
NELSON VICTOR MORALES VARELA
HÉCTOR ARIEL RAMIREZ CABRERA
MAURICIO SAMUEL TELIAS HASSON

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por FONDECYT 1130816

SANTIAGO DE CHILE
2016

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO Y
GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,
MENCION MATEMÁTICAS APLICADAS
POR: EMILIO JESÚS MOLINA OLIVARES
FECHA: 2016
PROF. GUÍA: SR. JORGE GUILLERMO AMAYA ARRIAGADA

MODELOS MATEMÁTICOS PARA EL SECUENCIAMIENTO EN PLANIFICACIÓN MINERA

Un problema presente en la planificación minera es el de identificar cuál es el volumen y ubicación de material que maximice la operación de extracción dando forma a una mina a cielo abierto. El estudio matemático de este problema ha sido analizado desde los años 60's y lo usual es discretizar el terreno en forma de bloques, conociendo en cada bloque distintas características de él, como por ejemplo, sus coordenadas y su beneficio asociado. El problema anterior haciendo uso de la discretización por bloques, puede ser formulado como uno de optimización entera denominado Final Open Pit y cuando al problema anterior se le agrega una restricción de capacidad, se le denomina Capacitated Final Open Pit.

Otro problema importante, es el de planificar la operación en periodos de extracción, buscando siempre maximizar el beneficio de esta. Su formulación como problema de optimización entera utilizando el modelo de bloques se le denomina Capacitated Dynamic Open Pit. Se piensa que los bloques que son solución de este problema están contenidos en la solución del Final Open Pit. Probar esta conjetura es uno de los principales enfoques de este trabajo, y la forma para lograrlo es a través de la demostración de ciertas propiedades que cumplen los pits. Además se analizan posibles extensiones de esta conjetura al problema capacitado.

Varios han sido los esfuerzos por resolver numéricamente y de forma eficiente esta familia de problemas lo que ha llevado a buscar otras formulaciones de estos mismos. Es así como surge el trabajo de Alvarez et al de 2011, en el cual se plantean los problemas usando optimización en espacio de funciones. En esta tesis, bajo hipótesis de diferenciabilidad, se hace un estudio del problema en \mathbb{R}^2 enfocándose en caracterizar a la densidad de ganancia en el borde del pit y se formulan dos duales para este problema. Trabajando siempre con la hipótesis de diferenciabilidad se discretiza el problema en dos y tres dimensiones obteniendo algunas pruebas numéricas en casos pequeños. Finalmente, se adapta esta nueva discretización al caso del modelo de bloques y se presentan algunos resultados numéricos de éste.

*A mis padres, Javier y Patricia.
A mi eterna compañera, Catita.
A toda mi familia.*

Agradecimientos

Quiero partir agradeciendo a mis padres, Javier y Patricia, quienes con su esfuerzo, preocupación, cuidado y amor que nos dan a mi y mis hermanos, son los principales artífices de que yo haya obtenido este título. Pocas veces les digo cuánto los quiero, así que dejo escrito aquí y para que nunca olviden, que los amo mucho.

Agradezco también al amor de mi vida, Catalina, quien estuvo a mi lado toda la enseñanza universitaria disfrutando conmigo esta hermosa etapa. Juntos partimos con la ilusión de obtener nuestro título, orgullosos de la universidad que compartimos. Ahora, ya más maduros y luego de haber pasado por momentos felices y otros muy tristes en el camino, esta ilusión está a punto de volverse realidad para ambos. Espero que sigamos juntos y felices por el resto de las etapas que nos quedan.

Doy las gracias a mis abuelos, Rosalía y Juan, o mejor dicho abuelita Chocha y Mono, por todo lo bueno que hacen por mi y mis hermanos a diario. Sus historias de niños viviendo en tan deplorables condiciones a la orilla del Zanjón de la Aguada me han motivado desde pequeño a salir adelante por medio de la educación. Agradezco a mi tía Vero, mi tía favorita, por todas su ayuda y preocupación mostrada desde que era un niño, gran parte de esto que he logrado es gracias a ella. A mi tía Isa y mi tía Sonia, las cuales con sus historias y datos interesantes han aportado en mi gusto por las ciencias y las matemáticas, y también a mi tía Bea por todos los momentos en que nos ha ayudado a la familia.

Agradezco a mis amigos de la carrera, Bob, Chapa, Hasson, Seba, por los buenos ratos pasados y en especial al Bustos, quien me ha ayudado en varias ocasiones a resolver dudas o problemáticas que se me han presentado. Doy las gracias a todos los demás compañeros de carrera que han hecho que el DIM fuera el mejor lugar para estudiar. Doy las gracias a mis amigos de atletismo y Beauchef runners, Bender, Camilo, Pancho, Escobedo, entre tantos otros, por haber compartido conmigo esta pasión que nació en la u y que prometo nunca dejar, y también al profe Mario por su paciencia y porque gracias a él mi vida como estudiante de Beauchef la disfruté el doble.

Finalmente agradezco a mi profesor guía, Jorge Amaya, por toda su enseñanza en este período y toda su ayuda brindada, a los profesores de la comisión, a todos los profesores que he tenido en mi vida y una mención especial a Bernardo Galaz, quien por allá por el 2007, con el hecho de incentivar me a participar en las olimpiadas de matemáticas, destinó mi vida a que yo estudiara esta carrera.

Agradezco a FONDECYT 1130816 por haber financiado parcialmente este trabajo.

Tabla de Contenido

Introducción	1
1. Propiedades problema discreto	3
1.1. Propiedades de los Pits	6
1.2. Otros Resultados	18
2. Versión operacional modelo continuo caso \mathbb{R}^2	23
2.1. Preliminares	23
2.2. Motivación	26
2.3. Condiciones de optimalidad en problemas variacionales con restricciones aplicadas al problema del open pit	29
2.3.1. Problema FOP y CFOP	30
2.3.2. Problema CDOP	35
2.4. Dualidad	40
2.5. Punto de vista desde el control óptimo	42
3. Discretización de la versión operacional del problema continuo	48
3.1. Discretización para minas en \mathbb{R}^2	48
3.1.1. Puntos de discretización libre	48
3.1.2. Puntos de discretización fijos	51
3.1.3. Adaptación al modelo de bloques	53
3.2. Discretización de mina en \mathbb{R}^3	56
3.2.1. Adaptación al modelo de bloques	59
Conclusión	61
Bibliografía	65

Índice de Tablas

Índice de Ilustraciones

1.1. Dos soluciones a un mismo problema del tipo FOP	5
1.2. Dos soluciones de FOP(azul y rojo) y una de CDOP(verde) para un mismo modelo de bloques.	15
1.3. Pit en rojo solución de CFOP y pit en verde solución CDOP.	20
1.4. Solución de CFOP en rojo	21
2.1. Perfiles que convergen al supremo en color rojo y en color verde el supremo.	28
2.2. Función densidad de ganancia con dos valores y el pit óptimo en este caso .	33
3.1. Mina de 1×1 con función de ganancia $g = 1$ y tres zonas de valores para w .	52
3.2. Mina de 1×1 con función $w = \sqrt{2}$ y cinco zonas de valores para g	53
3.3. Mina de 1×1	53
3.4. Identificación de cada bloque según sus coordenadas	54
3.5. Pequeño modelo de bloques	56
3.6. Gráfico vector \bar{z}	58
3.7. Coordenadas del bloque (i, j, k)	59
3.8. Solución ficticia colores.	60
3.9. Solución ficticia transparente.	61
3.10. Solución ficticia desde arriba.	61
3.11. Solución marvin colores.	62
3.12. Solución marvin desde arriba.	62

Introducción

Un problema relevante estudiado en minería es identificar el volumen y la zona de extracción del material tal que maximiza el beneficio de la operación, el cual va estar dado esencialmente por la riqueza de minerales presente en este volumen extraído, esta determinación da lugar a la construcción de una mina a cielo abierto. A partir de lo anterior, se hace la extensión a otros dos tipos problemas, uno en donde se tiene una capacidad total de extracción que no puede ser superada y otro de tipo dinámico en el cual se desea planificar en periodos de extracción cada uno con una cierta capacidad y además el beneficio final se ve afectado por una tasa de descuento asociada al tiempo. Una introducción en detalle a estos problemas presentados en minería se puede revisar en [9] y [15].

Para intentar resolver los problemas anteriores, se hace un análisis de la región en donde se desea trabajar obteniendo una discretización en bloques de esta, con la información del beneficio de extraer cada bloque a tiempo presente. Lo siguiente es crear un grafo de precedencias que identifica qué bloques deben ser extraídos antes de extraer otro bloque y que va a depender de la pendiente máxima (ángulo de talud) con la que se puede cavar en cada punto del terreno y que está dada por propiedades estructurales. Luego de poseer esta información, una de las formas de resolución es formular los tres problemas enunciados anteriormente como problemas de optimización lineal entera, con variables de decisión binaria en cada bloque. La manera de resolver estos problemas de optimización discreta ha sido ampliamente estudiada. Algunas de estas son presentadas en [4] y [15]. A pesar de que existen otras formas en que estos problemas son abordados, esta tesis se enfocará en trabajar con la formulación de estos como problemas de optimización.

Una forma diferente de abordar el mismo problema es a través de la optimización continua. Uno de los trabajos que se considerará base para esta tesis es el realizado en [1]. En ese paper se modela el beneficio y el esfuerzo de extracción como dos funciones dependiendo del espacio, y el objetivo es encontrar una función de profundidad, o sea, una función que a cada punto del piso le asocie una profundidad, que sea continua y sobre la cual se impone la restricción de pendiente en forma de un \limsup que representa la constante de Lipschitz más pequeña para la función.

El trabajo de esta tesis se ordena como sigue. En un primer capítulo se trabaja la formulación como modelos de optimización lineal discreta de los tres problemas antes mencionados y se formaliza matemáticamente lo que es un *pit* asociado a un punto factible de esos problemas. Además se prueban propiedades básicas que estos conjuntos cumplen para luego obtener el resultado más importante del capítulo el cuál es probar la conjetura que postula que la

región obtenida como solución del problema discreto de planificación en periodos (también conocido como *Capacitated Dynamic Open Pit*) está contenida en la región que es solución del problema discreto que no involucra ni periodos ni capacidad (conocido como *Final Open Pit*). Finalmente se muestra que esta conjetura no se replica cuando se reemplaza el problema capacitado (*Capacitated Final Open Pit*) por el *Final Open Pit*.

En el capítulo 2 se trabaja el modelo continuo presentando en [1] para minas de \mathbb{R}^2 y bajo la suposición que las funciones que representan la profundidad de la mina, son diferenciables a trozo obteniendo así un modelo operacional en el cual la restricción de \limsup se cambia por una derivada, transformándose el problema en uno de tipo variacional escalar. Haciendo uso de las propiedades de tipo Fritz-John que cumplen los óptimos de estos problemas, y que son resumidas en [11], se prueba que bajo la suposición de que la densidad de ganancia g es continua, esta resulta ser no positiva en el borde del pit cuando la pendiente no es máxima, el cual es el objetivo principal del capítulo. Este resultado se extiende a los problemas capacitados y dinámicos. De acuerdo a lo expuesto en [11] y [14], se escriben los duales de los tres problemas y se dan condiciones sobre los cuales se cumplen los teoremas de dualidad débil, fuerte e inversa. Al final del capítulo, se trabaja el problema del *Final Open Pit* continuo desde el punto de vista del control óptimo. Este problema resulta ser de una familia de problemas llamados *state constraint* cuyo principio del Máximo de Pontryagin es presentando en [13]. Con esta herramienta es posible replicar el resultado obtenido anteriormente.

En el capítulo 3 se presenta la discretización del modelo en \mathbb{R}^2 con algunos resultados numéricos para minas ficticias, En el caso de \mathbb{R}^3 se prueba además que la propiedad obtenida en el capítulo 2 sobre la función de densidad de ganancia se replica en la discretización del problema. Por último, se presenta una forma de adaptar esta discretización cuando la función de ganancia es conocida por bloques y se muestra el resultado obtenido al programarlo en una mina ficticia de $25 \times 25 \times 10$ bloques y en la mina Marvin del repositorio presentado en [8].

Capítulo 1

Propiedades problema discreto

A continuación, se presenta la formulación como problema de optimización entera, a la situación de extraer una región discretizada en bloques que maximice el beneficio de extracción y que considere las máximas pendientes que puede haber entre cada bloque. Este modelo es presentado en [4], aquí se introducen las siguientes variables y notaciones.

Sea N el conjunto de bloques que corresponden al terreno en el que se desea hacer una extracción de mineral, este conjunto al ser discreto puede ser enumerado desde 1 hasta $|N|$ y así se puede considerar cada bloque como un número natural en este rango. Para estos bloques se conoce el beneficio de extraer cada uno, el cual depende de las características del mineral presente en cada bloque. Se denota por b_i al beneficio del bloque i , con $i = 1, \dots, |N|$.

Para cada bloque i se define una variable binaria que servirá para identificar si este bloque es o no extraído. Estas variables se presentan a continuación:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si el bloque } i \text{ es extraído} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Sea (N, A) un grafo dirigido construido con cada bloque como un nodo y cada arco (i, j) representa que para extraer el bloque i se debe sacar también el bloque j . Qué bloques son unidos por un arco depende de la pendiente máxima que puede existir entre ambos, la cual viene determinada por las características del terreno en donde se encuentra cada bloque.

Con las definiciones anteriores se presenta la formulación como problema lineal entero de la situación anterior, a la que se denominará *Final Open Pit* (FOP).

$$(FOP) \quad \text{máx} \sum_{i \in N} b_i x_i \tag{1.1}$$

$$s.a. \quad x_j - x_i \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A \tag{1.2}$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N \tag{1.3}$$

La matriz asociada al problema anterior es totalmente unimodular, ya que en cada fila hay un 1 y un -1 , así las soluciones del problema anterior coinciden con su relajación lineal,

o sea, cuando se considera $0 \leq x_i \leq 1$. Esto facilita la resolución numérica de FOP.

En caso de haber una capacidad de extracción C , la cual puede ser expresada en términos de toneladas o número de bloques, el problema se denomina *Capacitated Final Open Pit* (CFOP). Sean $p_i > 0$ las constantes asociadas al peso de cada bloque i (en caso de que C represente el número de bloques, basta tomar $p_i = 1 \forall i \in N$) la formulación de este problema se escribe como:

$$(CFOP) \quad \text{máx} \quad \sum_{i \in N} b_i x_i \quad (1.4)$$

$$s.a. \quad x_j - x_i \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A \quad (1.5)$$

$$\sum_{i \in N} p_i x_i \leq C \quad (1.6)$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N \quad (1.7)$$

En el caso de buscar una planificación en periodos de tiempos en $\{1, \dots, T\}$, se define para cada bloque $i \in N$ y para cada tiempo $t \in \{1, \dots, T\}$ las siguientes variables :

$$x_i^t = \begin{cases} 1 & \text{si el bloque } i \text{ es extraído en tiempo } t \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Sea $\alpha \in (0, 1)$ una constante positiva que representa el factor de descuento del beneficio y C_t la capacidad máxima de extracción en el periodo t . Así el modelo dinámico que se denominará *Capacitated Dynamic Open Pit* (CDOP) es el siguiente:

$$(CDOP) \quad \text{máx} \quad \sum_{t=1}^T \sum_{i \in N} \frac{b_i}{(1 + \alpha)^{t-1}} x_i^t \quad (1.8)$$

$$s.a. \quad \sum_{t=1}^T x_i^t \leq 1 \quad \forall i \in N \quad (1.9)$$

$$\sum_{l=1}^t x_j^l - x_i^t \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A, \quad t = 1, \dots, T \quad (1.10)$$

$$\sum_{i \in N} p_i x_i^t \leq C_t \quad t = 1, \dots, T \quad (1.11)$$

$$x_i^t \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N, t = 1, \dots, T \quad (1.12)$$

En [15] se presenta el modelo con la leve diferencia que la restricción 1.11 tienen una capacidad inferior que en este caso se asumió 0. El beneficio afectado por el paso del tiempo no siempre es expresado como $\frac{b_i}{(1 + \alpha)^{t-1}}$, a veces tan solo se expresa por $b_{i,t}$ para hacer notar su dependencia del tiempo, sin embargo, este trabajo utilizará la expresión 1,8 como valor objetivo.

Definición 1.1 Sea x un punto factible de FOP, se define el pit asociado a x como el conjunto $P_x := \{i \in N \mid x_i = 1\}$. Cuando x sea una solución del problema, se lo denominará pit óptimo asociado a x .

Definición 1.2 Sea y punto factible de CDOP, se define el pit secuenciado asociado a y como el conjunto $Q_y := \{i \in N \mid \exists t \in \{1, \dots, T\} y_i^t = 1\}$. Para cada tiempo $t \in \{1, \dots, T\}$ el siguiente conjunto $Q_y^t := \{i \in N \mid y_i^t = 1\}$ se le denomina la fase t de Q_y y representa todos los bloques extraídos a tiempo t .

Observación Notar que claramente se cumple que:

$$Q_y = \bigcup_{t=1}^T Q_y^t$$

La solución de (FOP) puede no ser única, por ejemplo, en el siguiente caso, donde las precedencias están determinadas de tal manera que no haya un ángulo de talud de más de 45° :

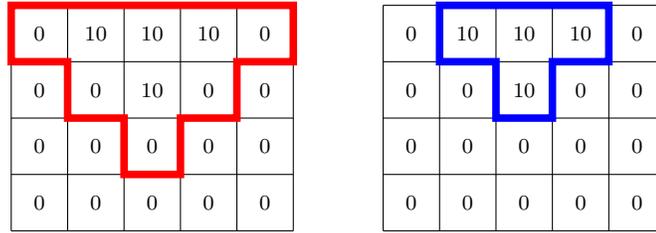


Figura 1.1: Dos soluciones a un mismo problema del tipo FOP

El pit con borde azul tiene el mismo beneficio que el de borde rojo, sin embargo, el de borde rojo tiene mayor cantidad de bloques. Aunque no resulte ser relevante seguir extrayendo luego de haber excavado todo el pit azul, el enunciado de la siguiente conjetura, considerará al pit óptimo de mayor tamaño, que en este caso corresponde al rojo.

Conjetura Sea \bar{x} la solución de FOP tal que $|P_{\bar{x}}|$ es máximo entre todas las soluciones de FOP y sea y una solución cualquiera de CDOP entonces se debe cumplir que:

$$Q_y \subseteq P_{\bar{x}}$$

Durante el capítulo se probará que el pit asociado a una solución de FOP que tiene el cardinal más grande entre todas las soluciones de FOP, contiene a todos los demás pit asociados a una solución de FOP. Además, es obvio que si un pit óptimo contiene a todos los demás, es de mayor cardinal, por lo que tener el mayor cardinal entre las soluciones de FOP y contener a todas las soluciones FOP resultan ser equivalentes, por lo tanto, la conjetura podría enunciarse como sigue.

Conjetura Sea \bar{x} la solución de FOP tal que, cualquier otro pit óptimo está contenido en el conjunto $P_{\bar{x}}$ y sea y una solución cualquiera de CDOP entonces se debe cumplir que:

$$Q_y \subseteq P_{\bar{x}}$$

La existencia de un pit óptimo de mayor cardinal viene del hecho de que el conjunto de puntos factible es finito y no vacío (el vector de puros 0 es factible, o sea, no hacer nada es siempre una opción).

1.1. Propiedades de los Pits

A continuación se prueban algunas propiedades que cumplen los pits definidos anteriormente las cuales servirán para demostrar la conjetura.

Proposición 1.3 *Si x^1 y x^2 son puntos factibles de (FOP) entonces existe z punto factible de (FOP) tal que:*

$$P_{x^1} \cup P_{x^2} = P_z$$

Demostración: Desarrollando un poco la unión se obtiene lo siguiente.

$$P_{x^1} \cup P_{x^2} = \{i \in N | x_i^1 = 1\} \cup \{i \in N | x_i^2 = 1\} = \{i \in N | x_i^1 = 1 \vee x_i^2 = 1\}$$

Luego lo que se desea probar es que existe un punto factible z de (FOP) tal que:

$$\{i \in N | x_i^1 = 1 \vee x_i^2 = 1\} = \{i \in N | z_i = 1\}$$

Entonces definiendo

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i^1 = 1 \vee x_i^2 = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

se observa claramente que los conjuntos son iguales, faltaría ver que z definido anteriormente es un punto factible de FOP.

Obviamente z cumple que $z_i \in \{0, 1\} \forall i \in N$. Para verificar la restricción (1.2) de FOP, llamada también restricción de precedencias, hay que considerar los dos casos siguientes

a) $z_i = 0$

En este caso $z_j - z_i = z_j \geq 0 \forall (i, j) \in A$ cumpliendo la restricción.

b) $z_i = 1$

Por definición de z esto significa que $x_i^1 = 1 \vee x_i^2 = 1$. Como estos dos vectores son puntos factibles de FOP, de la restricción de precedencias se tiene que:

$$x_j^1 = 1 \vee x_j^2 = 1 \forall (i, j) \in A$$

Lo que implica que $z_j = 1 \forall (i, j) \in A$, concluyendo entonces que $z_j - z_i \geq 0 \forall (i, j) \in A$.

□

Proposición 1.4 *Si x^1 y x^2 son puntos factibles de (FOP) entonces existe z punto factible de (FOP) tal que:*

$$P_{x^1} \cap P_{x^2} = P_z$$

Demostración: De forma similar que en la proposición anterior, la intersección de dos pits se escribe como:

$$P_{x^1} \cap P_{x^2} = \{i \in N | x_i^1 = 1 \wedge x_i^2 = 1\}$$

Luego si se define

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i^1 = 1 \wedge x_i^2 = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

se tiene que $P_z = P_{x^1} \cap P_{x^2}$. Nuevamente es claro que $z_i \in \{0, 1\} \forall i \in N$. Para la restricción de precedencias, el caso $z_i = 0$ es totalmente análogo a lo hecho en la proposición anterior, por lo que el caso interesante es cuando $z_i = 1$.

Si $z_i = 1$ entonces se cumple que $x_i^1 = 1$ y $x_i^2 = 1$. Luego como x^1 y x^2 son puntos factibles de FOP, entonces $x_j^1 = x_j^2 = 1 \forall (i, j) \in A$, con esto $z_j = 1 \forall (i, j) \in A$, por lo tanto, z definido como antes cumple que $P_{x^1} \cap P_{x^2} = P_z$ y es factible para FOP probando así la propiedad. □

Observación Dado un punto x factible para FOP, el valor de la función objetivo en este punto es:

$$\sum_{i \in N} b_i x_i = \sum_{i \in N: x_i=1} b_i = \sum_{i \in P_x} b_i$$

De aquí en adelante, la última expresión será la utilizada al momento de referirse a la función objetivo.

Proposición 1.5 Si x es una solución cualquiera de FOP, y \bar{x} una solución de FOP con $|P_{\bar{x}}|$ mayor entre las soluciones de FOP, entonces $P_x \subseteq P_{\bar{x}}$

Demostración: Por la proposición 1.3, $P_x \cup P_{\bar{x}}$ está definido por un punto factible de FOP por lo tanto:

$$\sum_{i \in P_{\bar{x}}} b_i \geq \sum_{i \in P_x \cup P_{\bar{x}}} b_i = \sum_{i \in P_x} b_i + \sum_{i \in P_x \setminus P_{\bar{x}}} b_i \quad (*)$$

La primera desigualdad es por la optimalidad de \bar{x} y la siguiente es separar la sumatoria en conjuntos disjuntos $P_{\bar{x}}$ y $P_x \setminus P_{\bar{x}}$ que unidos dan $P_x \cup P_{\bar{x}}$.

De la segunda desigualdad anterior se concluye que:

$$\sum_{i \in P_x \setminus P_{\bar{x}}} b_i \leq 0 \quad (**)$$

Además, se tiene que:

$$\sum_{i \in P_x} b_i = \sum_{i \in P_x \cap P_{\bar{x}}} b_i + \sum_{i \in P_x \setminus P_{\bar{x}}} b_i \leq \sum_{i \in P_x \cap P_{\bar{x}}} b_i + 0$$

La primera igualdad es separar P_x en una partición de dos conjuntos y la siguiente desigualdad se cumple gracias a (**).

Ahora como x y \bar{x} son puntos factibles de FOP, por la proposición 1.4 existe un punto factible de FOP tal que su pit asociado es $P_x \cap P_{\bar{x}}$, luego la desigualdad anterior debe ser igualdad ya que x es óptimo para FOP, por lo tanto:

$$\sum_{i \in P_x \setminus P_{\bar{x}}} b_i = 0$$

Reemplazando esto en la igualdad de (*) queda que:

$$\sum_{i \in P_x \cup P_{\bar{x}}} b_i = \sum_{i \in P_{\bar{x}}} b_i$$

Luego como existe z factible para FOP tal que $P_x \cup P_{\bar{x}} = P_z$, entonces este también es un óptimo para este problema.

Ahora como \bar{x} es una solución de FOP con $P_{\bar{x}}$ de mayor cardinal entre todas las soluciones se tiene que:

$$|P_x \cup P_{\bar{x}}| \leq |P_{\bar{x}}|$$

Pero como $P_{\bar{x}} \subseteq P_x \cup P_{\bar{x}}$, entonces $|P_x \cup P_{\bar{x}}| = |P_{\bar{x}}|$. Luego reescribiendo el primer cardinal se tiene que:

$$|P_{\bar{x}}| + |P_x \setminus P_{\bar{x}}| = |P_{\bar{x}}|$$

De esto se concluye que:

$$|P_x \setminus P_{\bar{x}}| = 0$$

O sea, $P_x \setminus P_{\bar{x}} = \emptyset$, lo que implica que $P_x \subseteq P_{\bar{x}}$, probando lo pedido.

□

Gracias a la propiedad anterior es posible enunciar el siguiente corolario.

Corolario 1.6 *Existe una única solución de FOP tal que el cardinal de su pit asociado es máximo entre todas las soluciones de FOP.*

Demostración: La existencia viene dada por la factibilidad del problema. Sean ahora x^1 y x^2 dos puntos máximos de FOP tal que su pit asociado es de cardinal máximo entre todas las soluciones de FOP. Por la proposición 1.5 se obtiene entonces que

$$P_{x^1} \subseteq P_{x^2} \wedge P_{x^2} \subseteq P_{x^1}$$

Por lo que $P_{x^1} = P_{x^2}$ concluyendo entonces que $x^1 = x^2$. De esta manera queda demostrada la unicidad.

Gracias a este corolario, en la conjetura es posible hablar de **la** solución de máximo cardinal entre las soluciones de FOP en vez de **alguna** solución de máximo cardinal entre las soluciones de FOP.

Proposición 1.7 Dado y un punto factible de CDOP existe z punto factible de FOP tal que:

$$Q_y = P_z$$

Demostración: Sea y un punto factible de CDOP, este vector está indexado por el tiempo $t = 1, \dots, T$ y por los bloques $i \in N$. Defínase z tal que $z_i = \sum_{t=1}^T y_i^t$. Se probará que este vector es un punto factible de FOP y que cumple la igualdad de los conjuntos.

Para que z sea punto factible debe cumplir los dos tipos de restricciones presentes en FOP. Esto se muestra a continuación.

(1) $z_i \in \{0, 1\}$

$z_i \geq 0$ ya que todos los términos de la suma son positivos, y por la restricción (1.9) se tiene que $z_i \leq 1$. Además, por la restricción (1.12), z tiene coordenadas enteras.

(2) $z_j - z_i \geq 0 \forall (i, j) \in A$

El caso cuando $z_i = 0$, al igual que en la demostración de las proposiciones anteriores, es trivial, por lo que el caso importante es $z_i = 1$.

En este caso se tiene que $z_i = \sum_{t=1}^T y_i^t = 1$. Como $y_i^t \in \{0, 1\}$ entonces existe un $\hat{t} \in \{1, \dots, T\}$ tal que $y_i^{\hat{t}} = 1$ y $y_i^t = 0 \forall t \in \{1, \dots, T\} \setminus \{\hat{t}\}$. Luego por la restricción (1.10) se tiene que:

$$1 = y_i^{\hat{t}} \leq \sum_{l=1}^{\hat{i}} y_j^l \leq \sum_{l=1}^T y_j^l = z_j \quad \forall (i, j) \in A$$

Esto dice que $z_j = 1 \forall (i, j) \in A$, probando así que z cumple esta restricción.

Con esto z es un punto factible de (FOP). Además es fácil notar que:

$$z_i = 1 \iff \sum_{t=1}^T y_i^t = 1 \iff \exists t \in \{1, \dots, T\} \ y_i^t = 1$$

La última equivalencia es debido que como y es un punto factible de CDOP, cada bloque i es extraído en a lo más un tiempo t , obteniendo así que la suma sobre todos los tiempos es exactamente 1, concluyendo así que $Q_y = P_z$

□

Las propiedades anteriores son resultados conocidos en el área y su demostración no es tan compleja. Los resultados que vienen a continuación son nuevos y propios de este trabajo de tesis, los cuales van en la línea de probar la conjetura.

Proposición 1.8 Sea \bar{y} una solución cualquiera de CDOP, \bar{x} la solución de máximo cardinal de FOP, entonces si

$$\sum_{i \in Q_{\bar{y}} \setminus P_{\bar{x}}} b_i = 0$$

se cumple que:

$$Q_{\bar{y}} \subseteq P_{\bar{x}}$$

Demostración: Sea \bar{z} dado por la proposición 1.7, tal que, $Q_{\bar{y}} = P_{\bar{z}}$. Por la proposición 1.3, $P_{\bar{z}} \cup P_{\bar{x}}$ admite un punto factible para FOP. Además:

$$\sum_{i \in P_{\bar{z}} \cup P_{\bar{x}}} b_i = \sum_{i \in P_{\bar{x}}} b_i + \sum_{i \in P_{\bar{z}} \setminus P_{\bar{x}}} b_i = \sum_{i \in P_{\bar{x}}} b_i$$

Luego el vector que determina a $P_{\bar{z}} \cup P_{\bar{x}}$ es una solución de FOP. Por la proposición 1.5 se tiene que $P_{\bar{z}} \cup P_{\bar{x}} \subseteq P_{\bar{x}}$ lo que implica que $P_{\bar{z}} \subseteq P_{\bar{x}}$ que equivale a $Q_{\bar{y}} \subseteq P_{\bar{x}}$.

□

La proposición anterior da un equivalencia para que la conjetura se cumpla, ya que si $Q_{\bar{y}} \subseteq P_{\bar{x}}$, el conjunto $P_{\bar{z}} \setminus P_{\bar{x}}$ es vacío y la sumatoria de los b_i sobre ese conjunto da 0. Se demostrará más adelante que esta condición es siempre satisfecha y así estará probada la conjetura. Antes de mostrar la demostración de la conjetura, se probará una última proposición.

Proposición 1.9 *Sea y un punto factible de CDOP, x un punto factible de FOP y $\bar{t} \in \{1, \dots, T-1\}$. Entonces existe w punto factible de CDOP tal que:*

- (i) $Q_w^t = Q_y^t$ para $t \in \{1, \dots, \bar{t}\}$
- (ii) $Q_w^t = Q_y^t \cap P_x$ para $t \in \{\bar{t} + 1, \dots, T\}$

Además, cuando $\bar{t} = 0$ existe w punto factible de CDOP tal que:

$$Q_w^t = Q_y^t \cap P_x \text{ para } t \in \{1, \dots, T\}$$

Demostración: Sea $\bar{t} \geq 1$, se define w de la siguiente forma:

$$w_i^t = \begin{cases} y_i^t & \text{si } t \in \{1, \dots, \bar{t}\}, i \in N \\ 1 & \text{si } (y_i^t = 1 \wedge x_i = 1), t \in \{\bar{t} + 1, \dots, T\}, i \in N \\ 0 & \text{si } (y_i^t = 0 \vee x_i = 0), t \in \{\bar{t} + 1, \dots, T\}, i \in N \end{cases}$$

De esta forma se obtiene claramente que:

$$Q_w^t = Q_y^t \forall t \in \{1, \dots, \bar{t}\}$$

$$Q_w^t = Q_y^t \cap P_x \forall t \in \{\bar{t} + 1, \dots, T\}$$

Lo que se probará ahora es que el w definido anteriormente es un punto factible para CDOP. Notar que la definición de w se hizo de tal manera que $w_i^t \in \{0, 1\}$. Al ser x, y, w

variables binarias se puede reescribir este último como $w_i^t = y_i^t x_i$ para $t \in \{\bar{t} + 1, \dots, T\}$. De lo anterior es claro que $w_i^t \leq y_i^t \forall t \in \{1, \dots, T\}$, entonces.

$$\sum_{t=1}^T w_i^t \leq \sum_{t=1}^T y_i^t \leq 1 \quad \forall i \in N$$

$$\sum_{i \in N} p_i w_i^t \leq \sum_{i \in N} p_i y_i^t \leq C_t \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}$$

Con esto, se prueba las restricciones (1.9),(1.11) y (1.12) de CDOP.

Para la restricción de precedencias, como $y = w$ cuando $t \in \{1, \dots, \bar{t}\}$, entonces aquí w cumple de manera trivial la restricción (1.10), ya que al ser y un punto factible de CDOP, cumple (1.10) y estas restricciones solo involucran tiempos menores o iguales a \bar{t} . Sea ahora $t \in \{\bar{t} + 1, \dots, T\}$, el caso que falta por considerar.

Si $w_i^t = 0$ la restricción $\sum_{l=1}^t w_j^l - w_i^t = \sum_{l=1}^t w_j^l \geq 0$ se cumple $\forall (i, j) \in A$.

Sea entonces $w_i^t = 1$. Por la definición de w , tenemos entonces que $y_i^t = 1$ y $x_i = 1$. Considerar j tal que $(i, j) \in A$.

Como y es punto factible de (CDOP), entonces existe $l \in \{1, \dots, t\}$ tal que $y_j^l = 1$.

- Si $l \leq \bar{t}$ entonces $y_j^l = w_j^l = 1$ y se comprueba la restricción.
- Si $l > \bar{t}$ se tiene que $y_j^l = 1$ y además como x es un punto factible de (FOP), se tiene que $x_j = 1$, por lo tanto $w_j^l = 1$ comprobando así la restricción.

Con esto w también cumple la restricción (1.10).

Para el caso $\bar{t} = 0$, se tiene que $w_i^t = y_i^t x_i$, $t \in \{\bar{t} + 1, \dots, T\}$, $\forall i \in N$. La verificación de que este punto w cumple con 1.9,1.11,1.12 es análogo a lo anterior. Para 1.10, solo se está en el segundo punto mencionado en el párrafo anterior, por lo que esta restricción también se cumple para este w , concluyendo así la demostración. \square

Teorema 1.10 (Teorema fundamental de los Pits) *Sea \bar{x} la solución de FOP tal que el conjunto $P_{\bar{x}}$ es el con mayor cardinal entre las soluciones de FOP y sea y una solución cualquiera de CDOP. Entonces se cumple que:*

$$Q_y \subseteq P_{\bar{x}}$$

Demostración: Para demostrar el teorema, se probarán las hipótesis de la proposición 1.8. Esto se hará probando por doble desigualdad la igualdad $\sum_{i \in Q_y \setminus P_{\bar{x}}} b_i = 0$.

Por la proposición 1.3 y 1.7, se tiene que $P_{\bar{x}} \cup Q_y$ es un punto factible de (FOP), por lo

tanto, al ser \bar{x} el óptimo se tiene que:

$$\sum_{i \in P_{\bar{x}} \cup Q_y} b_i = \sum_{i \in P_{\bar{x}}} b_i + \sum_{i \in Q_y \setminus P_{\bar{x}}} b_i \leq \sum_{i \in P_{\bar{x}}} b_i$$

Así se tiene que $\sum_{i \in Q_y \setminus P_{\bar{x}}} b_i \leq 0$.

Para la otra desigualdad se probará el siguiente resultado: $\forall \bar{t} \in \{0, \dots, T-1\}$

$$\sum_{t=\bar{t}+1}^T \sum_{i \in Q_y^t \setminus P_x} b_i \geq \sum_{t=\bar{t}+1}^T \sum_{i \in Q_y^t \setminus P_x} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-(\bar{t}+1)}} \geq 0$$

Esto se probará con inducción reversa, partiendo desde $T-1$ e ir disminuyendo.

Caso base: $\bar{t} = T-1$.

Por la proposición 1.9, existe un vector w , punto factible de (CDOP) tal que:

$$Q_w^t = Q_y^t \text{ para } t \in \{1, \dots, T-1\}$$

$$Q_w^t = Q_y^t \cap P_x \text{ para } t = T$$

Luego como y es el óptimo de CDOP, se tiene que:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \sum_{i \in Q_y^t} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-1}} &= \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{i \in Q_y^t} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-1}} + \sum_{i \in Q_y^T \cap P_x} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{T-1}} + \sum_{i \in Q_y^T \setminus P_x} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{T-1}} \\ &\geq \sum_{t=1}^T \sum_{i \in Q_w^t} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-1}} \\ &= \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{i \in Q_y^t} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-1}} + \sum_{i \in Q_y^T \cap P_x} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{T-1}} \end{aligned}$$

De aquí se tiene que:

$$\sum_{i \in Q_y^T \setminus P_x} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{T-1}} \geq 0$$

Como $(1+\alpha)^{T-1} \geq 0$, entonces se puede multiplicar la expresión anterior sin cambiar el sentido de la desigualdad, quedando entonces:

$$\sum_{i \in Q_y^T \setminus P_x} b_i \geq 0$$

Además:

$$\sum_{t=T}^T \sum_{i \in Q_y^t \setminus P_x} b_i = \sum_{t=T}^T \sum_{i \in Q_y^t \setminus P_x} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-T}} \geq 0$$

Luego se cumplen las dos desigualdades propuestas, por lo que el caso base está listo.

Hipótesis inductiva: se cumple para $0 < \bar{t} < T - 1$

Se probará entonces que se cumple para $\bar{t} - 1$. Supóngase primero que $\bar{t} \geq 2$

Como $\bar{t} - 1 \in \{1, \dots, T\}$, entonces aplicando la proposición 1.9 a $\bar{t} - 1$, existe un punto factible w tal que:

$$\begin{aligned} Q_w^t &= Q_y^t \text{ para } t \in \{1, \dots, \bar{t} - 1\} \\ Q_w^t &= Q_y^t \cap P_x \text{ para } t \in \{\bar{t}, \dots, T\} \end{aligned}$$

Utilizando nuevamente el hecho que y es óptimo de CDOP, se tiene que:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \sum_{i \in Q_y^t} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-1}} &= \sum_{t=1}^{\bar{t}-1} \sum_{i \in Q_y^t} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-1}} + \sum_{t=\bar{t}}^T \sum_{i \in Q_y^t \cap P_x} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-1}} + \sum_{t=\bar{t}}^T \sum_{i \in Q_y^t \setminus P_x} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-1}} \\ &\geq \sum_{t=1}^{\bar{t}-1} \sum_{i \in Q_w^t} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-1}} \\ &= \sum_{t=1}^{\bar{t}-1} \sum_{i \in Q_y^t} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-1}} + \sum_{t=\bar{t}}^T \sum_{i \in Q_y^t \cap P_x} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-1}} \end{aligned}$$

De aquí se tiene que:

$$\sum_{t=\bar{t}}^T \sum_{i \in Q_y^t \setminus P_x} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-1}} \geq 0$$

Como $(1+\alpha)^{\bar{t}-1} \geq 0$, se multiplica esta expresión a la de arriba sin cambiar el sentido de la desigualdad, obteniendo así.

$$\sum_{t=\bar{t}}^T \sum_{i \in Q_y^t \setminus P_x} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-\bar{t}}} \geq 0$$

Probando así la primera desigualdad. Para la segunda, notar lo siguiente

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{t=\bar{t}}^T \sum_{i \in Q_y^t \setminus P_x} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-\bar{t}}} = \sum_{i \in Q_y^{\bar{t}} \setminus P_x} b_i + \sum_{t=\bar{t}+1}^T \sum_{i \in Q_y^t \setminus P_x} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-\bar{t}}} \\ &= \sum_{i \in Q_y^{\bar{t}} \setminus P_x} b_i + \frac{1}{(1+\alpha)} \sum_{t=\bar{t}+1}^T \sum_{i \in Q_y^t \setminus P_x} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-(\bar{t}+1)}} \end{aligned}$$

Usando la primera desigualdad de la hipótesis inductiva se tiene que:

$$0 \leq \sum_{t=\bar{t}+1}^T \sum_{i \in Q_y^t \setminus P_x} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-(\bar{t}+1)}}$$

Y como $\frac{1}{(1+\alpha)} \leq 1$, multiplicando por la expresión anterior que es positiva se tiene que:

$$\frac{1}{(1+\alpha)} \sum_{t=\bar{t}+1}^T \sum_{i \in Q_y^t \setminus P_x} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-(\bar{t}+1)}} \leq \sum_{t=\bar{t}+1}^T \sum_{i \in Q_y^t \setminus P_x} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-(\bar{t}+1)}}$$

Ocupando la segunda desigualdad de la hipótesis inductiva se tiene que:

$$\sum_{t=\bar{t}+1}^T \sum_{i \in Q_y^t \setminus P_x} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-(\bar{t}+1)}} \leq \sum_{t=\bar{t}+1}^T \sum_{i \in Q_y^t \setminus P_x} b_i$$

Juntando las dos expresiones se obtiene que:

$$\frac{1}{(1+\alpha)} \sum_{t=\bar{t}+1}^T \sum_{i \in Q_y^t \setminus P_x} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-(\bar{t}+1)}} \leq \sum_{t=\bar{t}+1}^T \sum_{i \in Q_y^t \setminus P_x} b_i$$

Entonces:

$$0 \leq \sum_{i \in Q_y^{\bar{t}} \setminus P_x} b_i + \frac{1}{(1+\alpha)} \sum_{t=\bar{t}+1}^T \sum_{i \in Q_y^t \setminus P_x} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-(\bar{t}+1)}} \leq \sum_{i \in Q_y^{\bar{t}} \setminus P_x} b_i + \sum_{t=\bar{t}+1}^T \sum_{i \in Q_y^t \setminus P_x} b_i = \sum_{t=\bar{t}}^T \sum_{i \in Q_y^t \setminus P_x} b_i$$

Probando la desigualdad que faltaba.

Para el caso $\bar{t} = 1$, se aplica la proposición 1.9 a 0, existiendo entonces w tal que:

$$Q_w^t = Q_y^t \cap P_x \text{ para } t \in \{1, \dots, T\}$$

Desarrollando entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \sum_{i \in Q_y^t} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-1}} &= \sum_{t=1}^T \sum_{i \in Q_y^t \cap P_x} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-1}} + \sum_{t=1}^T \sum_{i \in Q_y^t \setminus P_x} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-1}} \\ &\geq \sum_{t=1}^T \sum_{i \in Q_w^t} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-1}} \\ &= \sum_{t=1}^T \sum_{i \in Q_y^t \cap P_x} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-1}} \end{aligned}$$

Obteniendo luego.

$$\sum_{t=1}^T \sum_{i \in Q_y^t \setminus P_x} \frac{b_i}{(1 + \alpha)^{t-1}} \geq 0$$

La demostración para probar la desigualdad que falta es totalmente análoga a lo hecho anteriormente, por lo que en este caso se obtiene que:

$$0 \leq \sum_{t=1}^T \sum_{i \in Q_y^t \setminus P_x} b_i = \sum_{i \in Q_y \setminus P_x} b_i$$

Finalmente, por doble desigualdad se tiene que:

$$0 = \sum_{i \in Q_y \setminus P_x} b_i$$

Y por la proposición 1.8, se concluye que.

$$Q_y \subseteq P_{\bar{x}}$$

Finalizando así la prueba de este teorema. □

Observación En la hipótesis del teorema, se exige que \bar{x} sea la solución con el pit asociado de mayor cardinal. Esta hipótesis no puede ignorarse, ya que la propiedad no se cumple para una solución cualquiera de FOP. Por ejemplo, en la siguiente figura:

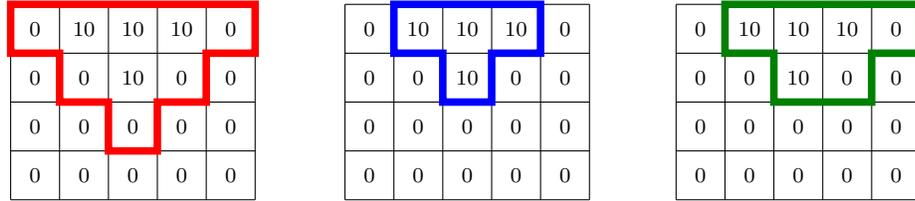


Figura 1.2: Dos soluciones de FOP (azul y rojo) y una de CDOP (verde) para un mismo modelo de bloques.

En 1.2 el pit rojo y el azul son soluciones de FOP. El pit verde es solución del problema dinámico con dos periodos de capacidad 3 cada uno y pesos de cada bloque igual a 1. Aquí se puede apreciar que el pit rojo es la solución de FOP con el pit de mayor cardinal y contiene al pit verde. Por otro lado, el pit azul es otra solución de FOP, pero no contiene el pit verde.

En el caso en que el problema (CDOP) presenta una capacidad inferior en la restricción (1.11), el teorema 1.10 no se cumple incluso considerando a la solución con el pit más grande de (FOP), basta considerar capacidades inferiores que sumen más que el cardinal de este pit máximo. Un buen estudio posterior sería encontrar bajo que condiciones sobre estas capacidades inferiores, el resultado se sigue manteniendo.

El modelo CDOP a veces se presenta de una forma alternativa, como lo hacen en [2] y que se presenta a continuación. Sea x definido de la siguiente forma:

$$x_i^t = \begin{cases} 1 & \text{si el bloque } i \text{ ya fue extraído en el tiempo } t \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Con los mismo beneficios y pesos de cada bloque el modelo se escribe de la siguiente forma:

$$(CDOP_2) \quad \text{máx} \sum_{t=1}^T \sum_{i \in N} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-1}} (x_i^t - x_i^{t-1}) \quad (1.13)$$

$$s.a. \quad x_i^{t-1} \leq x_i^t \quad \forall i \in N \quad \forall t \in 1, \dots, T \quad (1.14)$$

$$x_j^t - x_i^t \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A, \quad t = 0, \dots, T \quad (1.15)$$

$$\sum_{i \in N} p_i (x_i^t - x_i^{t-1}) \leq C_t \quad t = 1, \dots, T \quad (1.16)$$

$$x_i^t \in \{0, 1\}, \quad x_i^0 = 0 \quad \forall i \in N, \quad t = 1, \dots, T \quad (1.17)$$

Este problema es una formulación equivalente de CDOP, en el sentido que los pits obtenidos en ambos problemas están en biyección unos con otros. Esto se visualiza en la siguiente proposición.

Proposición 1.11 Sean $P(CDOP)$ y $P(CDOP_2)$ los conjuntos de puntos factible de $CDOP$ y $CDOP_2$ respectivamente, se tienen los dos siguientes resultados:

i) Sea $x \in P(CDOP_2)$, si se define $\bar{x}_i^t = x_i^t - x_i^{t-1}$, $\forall i \in N, t \in \{1, \dots, T\}$ entonces $\bar{x} \in P(CDOP)$ y además $P_x = P_{\bar{x}}$.

ii) Sea $\bar{x} \in P(CDOP)$, si se define $x_i^t = \sum_{l=1}^t \bar{x}_i^l$, $\forall i \in N, t \in \{1, \dots, T\}$, $x_i^0 = 0 \forall i \in N$ entonces $x \in P(CDOP_2)$ y además $P_x = P_{\bar{x}}$.

Más aún, sean $x \in P(CDOP_2)$ y $\bar{x} \in P(CDOP)$, entonces:

$$\bar{x}_i^t = x_i^t - x_i^{t-1}, \quad \forall i \in N, t \in \{1, \dots, T\} \iff x_i^t = \sum_{l=1}^t \bar{x}_i^l, \quad \forall i \in N, t \in \{1, \dots, T\}, \quad x_i^0 = 0 \forall i \in N$$

Demstración: Se probarán ambos resultados por separado. Primero sea $x \in P(CDOP_2)$ y \bar{x} definido como en el enunciado, se desea probar que este vector cumple con (1,9), ..., (1,12). La demostración de estas restricciones se presentan en la siguiente lista.

- **(1.12):** Por (1.17) se tiene que $\bar{x}_i^t = x_i^t - x_i^{t-1} \in \{-1, 0, 1\}$ y por (1,14) $\bar{x}_i^t \geq 0$, así $\bar{x}_i^t \in \{0, 1\}$ cumpliendo esta restricción.
- **(1.11):** De (1,16) se tiene que:

$$\sum_{i \in N} p_i \bar{x}_i^t = \sum_{i \in N} p_i (x_i^t - x_i^{t-1}) \leq C_t \quad \forall t = 1, \dots, T$$

Cumpliendo así esta restricción.

- **(1.9):**

$$\sum_{t=1}^T \bar{x}_i^t = \sum_{t=1}^T (x_i^t - x_i^{t-1}) = x_i^T - x_i^0 = x_i^T \leq 1$$

La última desigualdad se obtiene $\forall \in N$ por (1.17).

- **(1.10):** Sea $(i, j) \in A$ y $t \in \{1, \dots, T\}$.

$$\sum_{l=1}^t \bar{x}_j^l - \bar{x}_i^t = \sum_{l=1}^t (x_i^l - x_i^{l-1}) - (x_i^t - x_i^{t-1}) = x_j^t - x_j^0 - x_i^t + x_i^{t-1} = (x_j^t - x_i^t) + x_i^{t-1} \geq 0$$

La última desigualdad es debido a que $(x_j^t - x_i^t) \geq 0$ por (1.15) y que $x_i^{t-1} \geq 0$ por (1.17).

De esta forma $\bar{x} \in P(CDOP)$, falta verificar que $P_x = P_{\bar{x}}$. Por doble inclusión, sea $i \in P_x$, entonces existe t tal que $x_i^t = 1$, sea t el menor entre los que cumplen lo anterior. Como $x_i^0 = 0$, entonces $t \geq 1$, así $\bar{x}^t = x_i^t - x_i^{t-1} = 1$ lo que implica que $i \in P_{\bar{x}}$, probando que $P_x \subseteq P_{\bar{x}}$.

Para la otra inclusión, sea $i \in P_{\bar{x}}$, entonces existe $t \in \{1, \dots, T\}$ tal que $\bar{x}_i^t = 1$, lo que equivale a que $x_i^t - x_i^{t-1} = 1$ y como x es variable binaria, entonces $x_i^t = 1$ y $x_i^{t-1} = 0$, de esta forma $i \in P_x$, probando que $P_{\bar{x}} \subseteq P_x$ y con esto se concluye que $P_x = P_{\bar{x}}$, demostrando por completo el punto i).

Sea ahora $\bar{x} \in P(CDOP)$ y x definido como en el punto ii), se desea probar que este cumple con (1,14), ..., (1,17). A continuación se demuestra que cumple con cada una de estas restricciones.

- **(1.17):** Obviamente $x_i^t \geq 0$ ya que $\bar{x}_i^t \geq 0$. Además, debido a (1.9) se obtiene que

$$x_i^t = \sum_{l=1}^t \bar{x}_i^l \leq \sum_{l=1}^T \bar{x}_i^l \leq 1$$

y como $\bar{x}_i^t \in \{0, 1\}$ entonces $x_i^t \in \{0, 1\}$ cumpliendo con esta restricción.

- **(1.14):** Gracias a la positividad de \bar{x} se tiene que:

$$x_i^{t-1} = \sum_{l=1}^{t-1} \bar{x}_i^l \leq \sum_{l=1}^t \bar{x}_i^l = x_i^t$$

Cumpléndose así esta restricción.

- **(1.15):** Sea $(i, j) \in A$, si $x_i^t = 0$ esta restricción se cumple de forma trivial. Sea ahora $x_i^t = 1$, esto equivale a que $\sum_{l=1}^t \bar{x}_i^l = 1$. Como \bar{x} es una variable binaria, entonces existe $\bar{t} \in \{1, \dots, t\}$ tal que $\bar{x}_i^{\bar{t}} = 1$. Por la restricción (1.10) esto implica que

$$1 = \sum_{l=1}^{\bar{t}} \bar{x}_j^l \leq \sum_{l=1}^t \bar{x}_j^l = x_j^t$$

cumpliendo de esta manera la restricción.

- **(1.16):** Debido a (1.11) se tiene que:

$$\sum_{i \in N} p_i (x_i^t - x_i^{t-1}) = \sum_{i \in N} p_i \bar{x}_i^t \leq C_t$$

Por lo que esta restricción también se cumple.

Para probar nuevamente que $P_{\bar{x}} = P_x$, se hará por doble inclusión. Sea $i \in P_{\bar{x}}$, entonces existe t tal que $\bar{x}_i^t = 1$, por lo tanto

$$1 = \sum_{l=1}^t \bar{x}_i^l = x_i^t$$

y así $i \in P_x$ probando la primera inclusión.

Sea ahora $i \in P_x$, entonces existe t tal que $x_i^t = 1$, por lo tanto $\sum_{l=1}^t \bar{x}_i^l = 1$. Gracias a (1.9), existe $\bar{t} \in \{1, \dots, t\}$ tal que $\bar{x}_i^{\bar{t}} = 1$ y así $i \in P_{\bar{x}}$, probando la otra inclusión y concluyendo que $P_{\bar{x}} = P_x$.

Para finalizar se probará la equivalencia.

$$\begin{aligned} \bar{x}_i^t = x_i^t - x_i^{t-1}, \forall i \in N, t \in \{1, \dots, T\} &\implies \sum_{l=1}^t \bar{x}_i^l = \sum_{l=1}^t x_i^l - x_i^{l-1} = x_i^t - x_i^0 = x_i \\ x_i^t = \sum_{l=1}^t \bar{x}_i^l, \forall i \in N, t \in \{1, \dots, T\}, x_i^0 = 0 \forall i \in N &\implies x_i^t - x_i^{t-1} = \sum_{l=1}^t \bar{x}_i^l - \sum_{l=1}^{t-1} \bar{x}_i^l = \bar{x}_i^t \end{aligned}$$

□

Observación La proposición anterior, muestra que los conjuntos objetivos de ambas formulaciones del problema dinámico, generan exactamente los mismos pits. Además de la proposición anterior se desprende que si $\bar{x} \in P(\text{CDOP})$, $x \in P(\text{CDOP}_2)$ generan los mismos pits, entonces

$$\sum_{t=1}^T \sum_{i \in N} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-1}} \bar{x}_i^t = \sum_{t=1}^T \sum_{i \in N} \frac{b_i}{(1+\alpha)^{t-1}} (x_i^t - x_i^{t-1})$$

De esta manera CDOP y CDOP₂ son equivalentes y todas las propiedades demostradas anteriormente para CDOP también aplican para CDOP₂.

1.2. Otros Resultados

En esta sección se verá que la conjetura anterior no es posible extenderla al problema capacitado y se prueban ciertas propiedades de este mismo problema, para eso se introduce la siguiente notación.

Para cada punto z factible de CFOP se denotará por $PC_z = \{i \in N | z_i = 1\}$ y se le denominará el pit capacitado asociado a z .

Proposición 1.12 *Sea x un punto factible de CFOP, entonces también es un punto factible de FOP y por lo tanto:*

$$P_x = PC_x$$

Demostración: La demostración es trivial y viene del hecho que todos los puntos factibles de CFOP cumplen en particular las restricciones de FOP.

Proposición 1.13 *Sea x^1 un punto factible de FOP y x^2 un punto factible de CFOP. Entonces existe z punto factible de CFOP tal que:*

$$P_{x^1} \cap PC_{x^2} = PC_z$$

Demostración: Esta demostración sigue la misma línea de la demostración de la proposición 1.4. Escogiendo

$$z_i = \begin{cases} 1 & x_i^1 = 1 \wedge x_i^2 = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

se prueba la igualdad de conjuntos y z cumple las restricciones 1.5 y 1.7 de CFOP.

Como se vio en la proposición 1.4, dado la definición anterior de z se cumple que

$$z_i = x_i^1 x_i^2 \leq x_i^2 \quad \forall i \in N$$

Y así se tiene que $\sum_{i \in N} p_i z_i \leq \sum_{i \in N} p_i x_i^2 \leq C$ probando la restricción (2).

Proposición 1.14 *Si \bar{x} es la solución óptima de FOP con el pit final de mayor cardinal entre todas las soluciones, y sea x una solución óptima del problema CFOP, entonces:*

$$PC_x \subseteq P_{\bar{x}}$$

Demostración: La demostración es análoga a la de la proposición 1.5. Debido a las proposiciones 1.3 y 1.12, $P_{\bar{x}} \cup PC_x$ es el pit final de un punto factible de FOP y se tiene que:

$$\sum_{i \in P_{\bar{x}}} b_i \geq \sum_{i \in PC_x \cup P_{\bar{x}}} b_i = \sum_{i \in P_{\bar{x}}} b_i + \sum_{i \in PC_x \setminus P_{\bar{x}}} b_i$$

Y esto implica que:

$$\sum_{i \in PC_x \setminus P_{\bar{x}}} b_i \leq 0$$

Además se tiene que

$$\sum_{i \in PC_x} b_i = \sum_{i \in PC_x \cap P_{\bar{x}}} b_i + \sum_{i \in PC_x \setminus P_{\bar{x}}} b_i \leq \sum_{i \in PC_x \cap P_{\bar{x}}} b_i + 0$$

Luego por la proposición 1.13, $PC_x \cap P_{\bar{x}}$ es un pit capacitado asociado a un punto factible de CFOP, por lo que la desigualdad anterior en realidad es una igualdad, lo que implica que:

$$\sum_{i \in PC_x \setminus P_{\bar{x}}} b_i = 0$$

Con esto, $P_{\bar{x}} \cup PC_x$ es una solución óptima de FOP y gracias a la proposición 1.5 se tiene que:

$$P_{\bar{x}} \cup PC_x \subseteq P_{\bar{x}}$$

Lo que implica que

$$PC_x \subseteq P_{\bar{x}}$$

□

La conjetura de la sección anterior podría dar la idea que hay alguna inclusión entre los pits óptimos de CFOP y CDOP. A continuación se muestran contraejemplos para estas nuevas conjeturas que pueden surgir.

Conjetura 2 Sean C y $\{C_t\}_1^n$ las capacidades de los problemas CFOP y CDOP respectivamente. Si se denota por x e y las soluciones a los problemas CFOP y CDOP entonces:

$$C > \sum_{t=1}^n C_t \implies PC_x \subseteq Q_y \vee Q_y \subseteq PC_x$$

Contraejemplo: Considerar $C = 9$, $\alpha = 0,1$, $T = 4$ y $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1$. Se utilizará un ángulo de 45° para calcular las precedencias. El siguiente diagrama representa los valores de los beneficios en cada bloque y los pits óptimos para cada problema.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	10	0	0	0	0	0	0	0

Figura 1.3: Pit en rojo solución de CFOP y pit en verde solución CDOP.

El pit rojo es la solución para el problema CFOP y el verde la solución CDOP. Como se puede ver, no se tiene ninguna inclusión entre ambos, por lo que este es un contraejemplo para la conjetura.

Es natural pensar que si se tiene la desigualdad inversa de las capacidades, también pueda darse alguna de las dos inclusiones. Esto se enuncia en la siguiente conjetura.

Conjetura 3 Sean C y $\{C_t\}_1^n$ las capacidades de los problemas CFOP y CDOP respectivamente. Si se denota por x e y las soluciones a los problemas CFOP y CDOP entonces:

$$C < \sum_{t=1}^n C_t \implies PC_x \subseteq Q_y \vee Q_y \subseteq PC_x$$

Contraejemplo: Se utilizará el mismo cuadrículado anterior, con los mismos beneficios y precedencias. Definiendo ahora $C = 4$, $\alpha = 0,1$, $T = 9$ y $C_i = 1 \forall i \in \{1, \dots, 9\}$, la solución de CFOP ahora será $P2$ y la de CDOP será $P1$, ilustrados en la figura 1.2. En este caso al igual que el anterior, no hay ninguna inclusión entre pits, por lo que es un contraejemplo a esta nueva conjetura.

Por último, el caso en que hay igualdad en las capacidades podría implicar alguna inclusión. Esto se formula en la siguiente conjetura, la cual tampoco será válida.

Conjetura 4 Sean C y $\{C_i\}_1^n$ las capacidades de los problemas CFOP y CDOP respectivamente. Si se denota por x e y las soluciones a los problemas CFOP y CDOP entonces:

$$C = \sum_{t=1}^n C_t \implies PC_x \subseteq Q_y \vee Q_y \subseteq PC_x$$

Contraejemplo: Considerar $C = 4$, $\alpha = 0,1$, $n = 2$, $C_1 = 3$ y $C_2 = 1$ Se utilizará un ángulo de 45° para calcular las precedencias. El siguiente diagrama representa los valores de los beneficios en cada bloque y ayudará a visualizar los pits óptimos para cada problema.

0	-10	-10	-10	0	0	1	0
	0	32	0	0	0	0	

Figura 1.4: Solución de CFOP en rojo

Es claro de la imagen que la solución de CFOP para el problema es el pit encerrado en rojo y que entrega un función objetivo de valor 2.

Ahora, si algún pit secuenciado de CDOP considera extraer uno de los bloque con valor -10 , lo mejor que se puede hacer es extraer los otros dos bloques para alcanzar el bloque con valor 32. Este bloque en ningún caso puede ser sacado en el primer periodo por lo que el valor de este pit secuenciado sería:

$$-10 + -10 + -10 + \frac{32}{1,1} = \frac{-33 + 32}{1,1} = -\frac{10}{11}$$

Por otro lado, si no se extrae ningún bloque con valor -10 , lo mejor es extraer en el periodo 1 el bloque con valor 1 y el resto se puede decidir entre no extraer más bloques o extraer solo bloques con beneficio 0. Por lo tanto, la solución de CDOP para este problema no considera ningún bloque de valor -10 , no existiendo así ninguna inclusión entre las soluciones de CFOP y CDOP.

Conjetura 5: Sea $\alpha_1 \neq \alpha_2$, las constantes asociadas al factor de descuento de (CDOP), y sean y_1 e y_2 las soluciones de (CDOP) usando α_1, α_2 en el factor de descuento de la función objetivo respectivamente, entonces:

$$Q_{y_1} \subseteq Q_{y_2} \vee Q_{y_2} \subseteq Q_{y_1}$$

Contraejemplo: Utilizando la figura 1.4, se mostrará el contraejemplo. Considerar $\alpha_1 = 0,1, \alpha_2 = 0,01, T = 2, C_1 = 3$ y $C_2 = 1$. Se utilizará un ángulo de 45° para calcular las precedencias.

Del análisis hecho anteriormente, la solución utilizando α_1 es cualquier pit que contenga al bloque de beneficio 1 y cualquier otro bloque con beneficio 0.

Por otro lado, si se considera α_2 , el beneficio de extraer el pit rojo es:

$$-10 + -10 + -10 + \frac{32}{1,01} = \frac{170}{101}$$

Lo que es mayor que 1, así que el pit rojo resulta ser la solución en este caso, por lo que no existe ninguna inclusión entre ambos problemas.

Capítulo 2

Versión operacional modelo continuo caso \mathbb{R}^2

2.1. Preliminares

La formulación continua de los problemas estudiados en la sección anterior es una investigación más nueva del problema del pit óptimo. El paper que será base para los resultados de esta memoria es el de [1] y, cuyos aspectos más importantes serán mencionados a continuación.

Considérese primero el problema estacionario, es decir, se desea encontrar solo un pit de valor óptimo y no una secuencia en el tiempo de estos. Sea Ω la región plana donde se desea excavar, en el caso de una mina en \mathbb{R}^2 este representa un intervalo (a, b) y en el caso de \mathbb{R}^3 este representa un subconjunto de \mathbb{R}^2 abierto y conexo con borde Lipschitz.

Cada pit estará definido por una función $p : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ llamada perfil y donde $p(x)$ representa la profundidad del pit en el punto x . Estos perfiles se asumen pertenecientes al espacio de Banach de las funciones continuas a valores reales $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$, dotado de la norma del supremo. Se dirá que un perfil q es más profundo que un perfil p si ocurre que $p(x) \leq q(x) \forall x \in \bar{\Omega}$.

El estado natural del sitio, está modelado por un perfil inicial denotado $p_0 \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$. Así para que un perfil sea factible debe cumplir ser al menos más profundo que p_0 y no tener excavación en los bordes. Esto se representa en las siguientes dos condiciones:

$$p(x) - p_0(x) \geq 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

$$p(x) - p_0(x) = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega$$

Notar que cada perfil va a estar acotado inferiormente por $\underline{z} := \inf \{p_0(x) | x \in \bar{\Omega}\}$ y debido a condiciones físicas y operacionales se puede decir que todo perfil está acotado superiormente por \bar{z} . Definiendo entonces $Z = [\underline{z}, \bar{z}]$ se cumple que $p(x) \in Z, \quad \forall x \in \bar{\Omega}$. Esto último tiene que ver con la naturaleza del problema y no con una restricción extra.

Para modelar la pendiente local en cada punto se define

$$L_p(x) := \limsup_{\bar{x} \rightarrow x \leftarrow \hat{x}} \frac{|p(\bar{x}) - p(\hat{x})|}{\|\bar{x} - \hat{x}\|} \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

Esta función representa a la constante de Lipschitz local de p , más pequeña en torno a x . Así, si L es una constante de Lipschitz local de p en torno a x , se cumple que $L_p(x) \leq L$. Mientras más grande sea este valor, la pendiente en torno al punto x será mayor, por lo que esta expresión se busca controlar puntualmente. Con este objetivo, el valor máximo que puede alcanzar esta pendiente en cada punto va a estar controlado por una función $w : \bar{\Omega} \times Z \rightarrow [0, \infty)$ y esto se expresa como la restricción:

$$L_p(x) \leq w(x, p(x)), \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

Bajo ciertas hipótesis sobre w presentadas en el paper [1], se logra que cada perfil se restrinja a la región $\bar{\Omega} \times Z$ sin necesidad de imponer una desigualdad extra. Al conjunto de todos los perfiles factibles, esto es, a las funciones continuas que cumplen las tres restricciones anteriores se le denota por \mathcal{P} . Distintas propiedades estructurales de los perfiles pueden ser revisados en [1].

Se definen la densidad de ganancia y de esfuerzo como dos funciones a valores reales denotadas por:

$$e(x, z) \geq e_o > 0, \quad g(x, z) \in \mathbb{R}, \quad \forall (x, z) \in \Omega \times Z$$

Las cuales son uniformemente acotadas en su dominio. Así, dados dos perfiles $p \leq q$, donde q es más profundo que p , la ganancia y el esfuerzo entre ambos perfiles se define respectivamente como

$$G[p, q] := \int_{\Omega} \int_{p(x)}^{q(x)} g(x, z) dz dx, \quad E[p, q] := \int_{\Omega} \int_{p(x)}^{q(x)} e(x, z) dz dx$$

Cuando el perfil $p = p_0$ ambas funciones denotarán por $G[q] := G[p_0, q]$ y $E[q] := E[p_0, q]$.

El problema estático sin capacidad se escribe

$$\begin{aligned} (FOP) \quad & \text{máx } G[p] \\ \text{s.a.} \quad & p(x) - p_0(x) \geq 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega} \\ & p(x) - p_0(x) = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega \\ & L_p(x) \leq w(x, p(x)) \quad \forall x \in \bar{\Omega} \\ & p \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \end{aligned}$$

y el problema con capacidad se escribe

$$\begin{aligned} (CFOP) \quad & \text{máx } G[p] \\ & p(x) - p_0(x) \geq 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega} \\ & p(x) - p_0(x) = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega \\ & L_p(x) \leq w(x, p(x)) \quad \forall x \in \bar{\Omega} \\ & E[p] \leq C \\ & p \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \end{aligned}$$

Los siguientes resultados presentes en [1] entregan existencia de las soluciones de los dos problemas anteriores.

Proposición 2.1 Si w es semicontinua superior, entonces el conjunto de perfiles factible de (FOP) es compacto.

Proposición 2.2 Si $g, e \in L^\infty$ entonces, E y G son funciones Lipschitz continuas con constantes $\|e_0\|\|\Omega\|$ y $\|g_0\|\|\Omega\|$ respectivamente.

Proposición 2.3 Si w es semicontinua superior y $g, e \in L^\infty$ entonces.

- i) El problema FOP tiene solución y existen unos únicos perfiles $\underline{p}_g \leq \overline{p}_g$ tal que para cualquier solución p de FOP se cumple que $\underline{p}_g \leq p \leq \overline{p}_g$
- ii) Para cualquier capacidad $C > 0$, el problema CFOP tiene al menos una solución.

La última proposición es debido a las dos anteriores y asegura la existencia de soluciones para estos problemas.

Para el problema de planificación de los pits en periodos, en cada tiempo $t \in [0, T]$ se desea tener un pit factible, por esto la variables del problema tendrán dependencia temporal y espacial. Estas se denotan por $p(t, x)$ con $p(t, \cdot) \in \mathcal{P} \quad \forall t \in [0, T]$

Se introduce una densidad de capacidad $c \in L^\infty(0, T)$, $c(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T]$, y una función de capacidad definida por:

$$C(t) = \int_0^t c(\tau) d\tau$$

Esta función representa la capacidad de extracción entre el tiempo 0 y t . Además se define una función $\varphi \in \mathcal{C}^1$ monótona decreciente tal que $\varphi(0) = 1$ y $0 < \varphi(T) < 1$ que representa la valoración del beneficio a tiempo presente. Típicamente esta función es de la forma $\varphi(t) = e^{-\delta t}$ para algún $\delta > 0$.

Con esto el problema dinámico se expresa de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} (CDOP) \quad \text{máx } G[p] &:= \int_{\Omega} \int_0^T \varphi(t) g(x, p(t, x)) \frac{\partial p}{\partial t}(t, x) dt dx \\ p(t, x) &= p_0(x), \quad \forall x \in \partial\Omega \quad \forall t \in [0, T] \\ L_{p(t, \cdot)}(x) &\leq w(x, p(t, x)) \quad \forall x \in (a, b) \quad \forall t \in [0, T] \\ p_0 = p(0, \cdot) &\leq p(s, \cdot) \leq p(t, \cdot), \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T \\ \int_{\Omega} \int_{p(s, x)}^{p(t, x)} e(x, z) dz dx &\leq \int_s^t c(\tau) d\tau, \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T \\ p(t, \cdot) &\in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \end{aligned}$$

La función objetivo escrita de esa forma exige que los perfiles sean derivables con respecto al tiempo, para evadir este requisito, se hace una integración por partes quedando de la forma:

$$G[p] := \varphi(T) \int_{\Omega} \int_{p(0, x)}^{p(T, x)} g(x, z) dz dx + \int_{\Omega} \int_0^T -\varphi'(t) \int_{p(0, x)}^{p(t, x)} g(x, z) dz dt dx$$

Esta será la función objetivo que se considerará al momento de resolver el problema.

Una propiedad ocupada más adelante es la proposición 9 de [1]. Esta dice lo siguiente.

Proposición 2.4 Sea $p(t, x)$ un punto factible del problema anterior, entonces $\forall s, t \in [0, T]$ se tiene que

$$\|p(t, \cdot) - p(s, \cdot)\|_\infty \leq \left[\frac{\|c\|_\infty}{\pi e_0} + 2\bar{w} \right] (t - s)^{\frac{1}{3}}$$

Este resultado entrega continuidad de los perfiles de (CDOP) con respecto al tiempo.

2.2. Motivación

La restricción de pendiente de los tres problemas anteriores representa un problema al momento de obtener resultados, debido a las pocas herramientas que se poseen para tratar formulaciones con \limsup . En el cálculo de variaciones, existe mayor estudio a problemas en los cuales aparecen restricciones que involucran la derivada de la función. La intuición al momento de observar la restricción revela que bajo hipótesis de derivabilidad, L_p coincidiría con el gradiente de p . A continuación se muestra que bajo esta suposición se puede derivar una formulación análoga del problema *FOP* utilizando el gradiente en vez del \limsup .

Supóngase que $p \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, el hiperplano de apoyo en el punto $(\bar{x}, p(\bar{x}))$ es

$$y = p(\bar{x}) + \nabla p(\bar{x})^T (x - \bar{x})$$

siendo p el perfil y $x \in \mathbb{R}^2$

El vector normal de este hiperplano es $\vec{n} = \left(-\frac{\partial p(\bar{x})}{\partial x_1}, -\frac{\partial p(\bar{x})}{\partial x_2}, 1 \right)^T$.

Se desea que el ángulo de pendiente o talud con respecto al plano horizontal esté entre 0 y un cierto $\tau < \pi/2$. Esto es equivalente a decir que se acota el ángulo θ de \vec{n} con respecto al eje vertical $\vec{k} = (0, 0, 1)^T$ entre 0 y $\bar{\theta}$ (que es el complemento de τ):

$$0 \leq \theta \leq \bar{\theta} < \pi/2,$$

o bien

$$1 \geq \cos \theta \geq \cos \bar{\theta} > 0.$$

Despejando se obtiene,

$$\|\vec{n}\| \|\vec{k}\| \cos \theta \geq \|\vec{n}\| \|\vec{k}\| \cos \bar{\theta}$$

El término de la izquierda es igual al producto escalar de \vec{n} con \vec{k} , es decir, igual a 1.

Se obtiene entonces la desigualdad

$$\|\vec{n}\| \leq \frac{1}{\cos \bar{\theta}}.$$

De allí,

$$\left(\frac{\partial p(\bar{x})}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial p(\bar{x})}{\partial x_2}\right)^2 + 1 \leq \frac{1}{\cos^2 \bar{\theta}}.$$

La restricción es entonces

$$\|\nabla p(\bar{x})\| \leq w,$$

donde $w = \tan \bar{\theta} = \frac{1}{\tan \tau}$, siendo w una función del punto $(\bar{x}, p(\bar{x}))$.

Entonces, sobre esta base el problema se escribe de la forma:

$$\begin{aligned} (FOP_{C^1}) \quad & \text{máx} \int_{\Omega} \int_{p_0(x)}^{p(x)} g(x, z) dz dx \\ & p(x) \geq p_0(x) \quad \forall x \in \bar{\Omega} \\ & p(x) = p_0(x) \quad \forall x \in \partial \bar{\Omega} \\ & \|\nabla p(x)\| \leq w(x, p(x)) \quad \forall x \in \Omega \\ & p \in C^1(\Omega) \end{aligned}$$

Proposición 2.5 Sea $p \in C^1(\Omega)$ entonces $L_p(x) = \|\nabla p(x)\| \quad \forall x \in \Omega$.

Demostración: Sean $\bar{x}, \hat{x} \in \Omega$, como $p \in C^1(\Omega)$, el teorema del valor medio en \mathbb{R}^n dice que existe $\xi_{\bar{x}, \hat{x}} \in \text{co}\{\bar{x}, \hat{x}\}$ tal que:

$$|p(\bar{x}) - p(\hat{x})| \leq \|\nabla p(\xi_{\bar{x}, \hat{x}})\| \|\bar{x} - \hat{x}\|$$

Lo que es equivalente a

$$\frac{|p(\bar{x}) - p(\hat{x})|}{\|\bar{x} - \hat{x}\|} \leq \|\nabla p(\xi_{\bar{x}, \hat{x}})\|$$

Tomando el \limsup y considerando que $\limsup_{\substack{\bar{x} \rightarrow x \\ \hat{x} \leftarrow x}} \nabla p(\xi_{\bar{x}, \hat{x}}) = \nabla p(x)$ ya la función p es continuamente diferenciable y el hecho que la norma es continua se obtiene que

$$L_p(x) \leq \|\nabla p(x)\|$$

Ahora, notar que si se fija $\hat{x} = x$ y $\bar{x} \neq x$, $\bar{x} \rightarrow x$, el \limsup coincide con $\|\nabla p(x)\|$ alcanzándose de esta manera la cota, por lo tanto

$$L_p(x) = \|\nabla p(x)\|$$

□

Esta proposición permite cambiar la restricción de L_p por la del gradiente cuando se restrinja el espacio a C^1 . Si bien, con esta suposición se pierden varios perfiles que pueden ser admisibles, la ventaja que entrega es tener más herramientas para caracterizar el óptimo del problema.

Una de las complicaciones al trabajar con el problema de funciones en $\mathcal{C}^1(\Omega)$ es que no siempre existe solución, como ocurre en caso de (FOP) visto en la proposición 2.3. Un ejemplo de esto se muestra a continuación.

Sea el rectángulo $[-1, 1] \times [0, 1]$ con funciones $g = 1, w = 1$ constantes en esta región. El problema (FOP) en este caso tiene una única solución que resulta ser $p(x) = 1 - |x|$, si embargo $p \notin \mathcal{C}^1([-1, 1])$. Por otro lado, la sucesión de funciones de $[-1, 1]$ en $[0, 1]$ definidas como:

$$p_n(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x \leq -\frac{1}{2n} \\ 1 - nx^2 - \frac{1}{4n} & \text{si } -\frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 1 - x & \text{si } x \geq \frac{1}{2n} \end{cases}$$

son $\mathcal{C}^1([-1, 1])$ y más aún, puntos factibles de $(FOP_{\mathcal{C}^1})$. Estas funciones cumplen que $p_n \rightarrow p$ y $G[p_n] \nearrow G[p]$. Se observa entonces que $G[p]$ es el supremo de $(FOP_{\mathcal{C}^1})$, sin embargo, al no ser diferenciable en 0, p no es un punto factible de $(FOP_{\mathcal{C}^1})$ por lo que el supremo no se alcanza, así que este problema no tiene solución. Esta situación se visualiza en la figura 2.1.

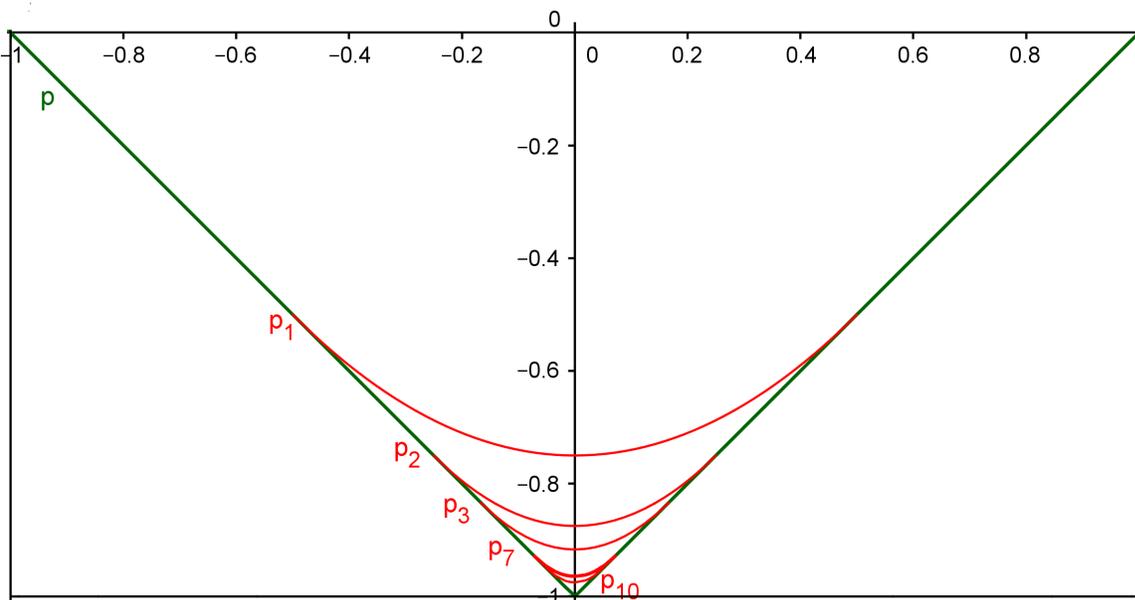


Figura 2.1: Perfiles que convergen al supremo en color rojo y en color verde el supremo.

Para tratar de lidiar con este problema, se trabajará sobre un espacio más general que el \mathcal{C}^1 , este es el de funciones diferenciables a trozos que se define en la sección siguiente, aprovechando también que la teoría que permitirá caracterizar al pit óptimo está hecha sobre las funciones diferenciables a trozos, las cuales pueden tener puntas. En el caso del ejemplo anterior, el perfil verde sería solución sobre este espacio de funciones.

A continuación se trabaja en el caso de una mina en \mathbb{R}^2 donde en caso de existir la derivada

se tiene que $L_p(x) = |p'(x)|$.

2.3. Condiciones de optimalidad en problemas variacionales con restricciones aplicadas al problema del open pit

Como se presenta en [11] se puede definir lo que es un punto crítico de Fritz-John para un problema variacional. Esto será de utilidad al momento de caracterizar el pit óptimo del problema anterior. Para esto se define el siguiente problema variacional con restricciones:

$$(CV) \quad \text{mín } F[y] = \int_a^b f(x, z(x), \dot{z}(x)) dx$$

$$z(a) = \alpha, \quad z(b) = \beta$$

$$q_j(x, z(x), \dot{z}(x)) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m$$

$$x \in [a, b]$$

La notación \dot{z} indica la derivada respecto de la variable real x .

Definición 2.6 *Se dice que una función $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua a trozos en $[a, b]$ si:*

- *y es acotada en $[a, b]$.*
- *Existen los límites de y, por la derecha en $[a, b)$ y por la izquierda en $(a, b]$.*
- *y es continua en $[a, b]$, excepto en a lo más un número finito de puntos.*

Definición 2.7 *Se dice que una función $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable a trozos en $[a, b]$, si existe una función v , continua a trozos en $[a, b]$ de manera que*

$$y(x) = v(a) + \int_a^x v(s) ds \quad \forall x \in [a, b]$$

Es decir, y es diferenciable a trozos si es continua en todo $[a, b]$ y su derivada es continua a trozos en $[a, b]$.

Se denotará por $X = C([a, b], \mathbb{R}^n)$ al espacio de las funciones $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciables a trozos dotado de la norma:

$$\|y\| = \|y\|_\infty + \|Dy\|_\infty$$

donde el operador D está definido por

$$u = Dy \iff y(t) = \alpha + \int_a^t u(s) ds$$

donde α es un valor acotado. Por tanto, $D = \frac{d}{dt}$ excepto en las discontinuidades.

Se denota por K al conjunto factible del problema (CV) sobre el espacio de funciones diferenciables a trozos. Este espacio es más general que el \mathcal{C}^1 y agrega a los perfiles que tienen una cantidad finita de puntas.

Definición 2.8 *Se dirá que $z \in K$ es un punto crítico de Fritz-John para el problema (CV) si existe el multiplicador de Lagrange $\tau \in \mathbb{R}$, $y = (y_1, \dots, y_m) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\forall x \in [a, b]$, excepto en las discontinuidades, se tiene:*

$$\tau f_z(x, z, \dot{z}) + y^T(x)q_z(x, z, \dot{z}) = \frac{d}{dx} \{ \tau f_{\dot{z}}(x, z, \dot{z}) + y^T(x)q_{\dot{z}}(x, z, \dot{z}) \} \quad (2.1)$$

$$y^T(x)q(x, z, \dot{z}) = 0 \quad (2.2)$$

$$(\tau, y(x)) \neq 0, \quad \tau \geq 0 \quad y_j(x) \geq 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (2.3)$$

Cuando $\tau > 0$ entonces se fija $\tau = 1$ y el punto pasa a llamarse de tipo Kuhn-Tucker. A continuación se enunciará el teorema presentado en [11] que será de utilidad para caracterizar el pit óptimo.

Teorema 2.9 *Sea $\bar{z} \in K$ una solución óptima del problema (CV), entonces \bar{z} es un punto crítico de Fritz-John.*

La demostración de este teorema puede ser encontrada en un caso más general en [7]. En la referencia se demuestra el caso que involucra además restricciones de igualdad y la integral de la función objetivo posee un componente extra del tipo $(z(x)^T B(x)z(x))^{\frac{1}{2}}$.

Un último resultado interesante también presentado en [11] es el siguiente.

Teorema 2.10 *Sea $z \in K$ y $f(\cdot, z(\cdot), \dot{z}(\cdot)), q(\cdot, z(\cdot), \dot{z}(\cdot))$ convexas en $[a, b]$. Si z es un punto crítico de Fritz-John entonces z es solución óptima.*

2.3.1. Problema FOP y CFOP

De aquí en adelante, se caracterizará lo que sucede con la densidad de ganancia en los contornos del pit cuando la solución del problema (FOP) resulta ser \mathcal{C}^1 . Estos perfiles al ser óptimos del problema original son en particular soluciones del problema con conjunto factible restringido a las funciones \mathcal{C}^1 . A este problema restringido se le llamará la versión operacional

del problema final open pit en \mathbb{R}^2 y se expresa como:

$$(FOP_o) \quad \max \int_a^b \int_{p_0(x)}^{p(x)} g(x, z) dz dx \quad (2.4)$$

$$p(a) = p_0(a), \quad p(b) = p_0(b) \quad (2.5)$$

$$p(x) \geq p_0(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad (2.6)$$

$$|\dot{p}(x)| \leq w(x, p(x)) \quad \forall x \in (a, b) \quad (2.7)$$

$$p \in C([a, b], \mathbb{R}) \quad (2.8)$$

Haciendo la identificación de este problema con la notación ocupada en la subsección anterior se tiene que:

$$f(x, p, \dot{p}) = - \int_{p_0(x)}^{p(x)} g(x, z) dz$$

$$q_1 = p_0(x) - p(x)$$

Además la restricción $|\dot{p}(x)| \leq w(x, p(x))$ se puede escribir como

$$-w(x, p(x)) \leq \dot{p}(x) \leq w(x, p(x))$$

lo cual determina las siguientes funciones de restricción adicionales:

$$q_2 = \dot{p}(x) - w(x, p(x))$$

$$q_3 = -\dot{p}(x) - w(x, p(x))$$

Aplicando el teorema 2.9 se obtiene el siguiente resultado:

Proposición 2.11 *Sea $p \in K$ un perfil óptimo. Si $g \in \mathcal{C}$ y además $w(x, z)$ es derivable con respecto a la variable z y existen \bar{a}, \bar{b} tales que $a < \bar{a} < \bar{b} < b$ y $|\dot{p}(x)| < w(x, p(x)) \quad \forall x \in (\bar{a}, \bar{b})$, entonces $\forall x \in (\bar{a}, \bar{b})$ se cumple:*

$$(i) \quad g(x, p(x)) \leq 0$$

$$(ii) \quad (p(x) - p_0(x))g(x, p(x)) = 0$$

Demostración: Por el teorema anterior, al ser p un perfil continuo óptimo, entonces es un punto crítico de Fritz-John de (FOP_o) .

Como g es continua, por el teorema fundamental del cálculo se tiene que $f_p(x, p, \dot{p}) = -g(x, p(x))$. Además se tiene que:

$$(q_1)_p = -1$$

$$(q_2)_p = (q_3)_p = -w_p(x, p(x))$$

Por otro lado, como f y g_1 no dependen de \dot{p} , se tiene que $f_{\dot{p}} = (q_1)_{\dot{p}} = 0$, $(q_2)_{\dot{p}} = 1$ y $(q_3)_{\dot{p}} = -1$.

Entonces como p es punto de Fritz-John existen $\tau \in \mathbb{R}$ y $y = (y_1, y_2, y_3) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, diferenciable a trozos, tal que:

$$-\tau g(x, p(x)) - y_1(x) - w_p(x, p(x))(y_2(x) + y_3(x)) = \frac{d}{dx} \{y_2(x) - y_3(x)\} \quad (*)$$

$$\begin{aligned}
y_1(x)(p_0(x) - p(x)) &= 0 \\
y_2(x)(\dot{p}(x) - w(x, p(x))) &= 0 \\
y_3(x)(-\dot{p}(x) - w(x, p(x))) &= 0 \\
(\tau, y(x)) &\neq 0 \quad \tau \geq 0 \\
y_j(x) &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 3
\end{aligned}$$

Ahora, como $|\dot{p}(x)| < w(x, p(x)) \quad \forall x \in (\bar{a}, \bar{b})$, por las ecuaciones de holgura, se tiene que $\forall x \in (\bar{a}, \bar{b})$ exceptuando las discontinuidades:

$$y_2(x) = y_3(x) = 0$$

lo que implica que

$$\frac{dy_2(x)}{dx} = \frac{dy_3(x)}{dx} = 0.$$

Reemplazando en (*) se obtiene que:

$$\tau g(x, p(x)) = -y_1(x)$$

Si $\tau = 0$ implica que $y_1(x) = 0$ y como ya se sabe que $y_2(x) = y_3(x) = 0$, entonces $(\tau, y(x)) = 0$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $\tau \neq 0$ y de ahí se tiene que:

$$g(x, p(x)) = -\frac{y_1(x)}{\tau}$$

Como $\tau, y_1 \geq 0$, se obtiene que $g(x, p(x)) \leq 0$.

Por otro lado, reemplazando y_1 en la primera ecuación de holgura, se tiene que:

$$-\tau g(x, p(x))(p_0(x) - p(x)) = 0,$$

y como ya se sabe que $\tau \neq 0$, entonces se tiene:

$$g(x, p(x))(p_0(x) - p(x)) = 0$$

O sea $\forall x \in (\bar{a}, \bar{b})$ excepto en las discontinuidades se cumple (i) y (ii), y por la continuidad de g, p, p_0 esto se extiende a todo el intervalo. \square

Observación Si bien la hipótesis de derivabilidad sobre w parece ser restrictiva, a menudo se le considera constante, por lo que se cumpliría la hipótesis abarcando varios casos.

Una interpretación de la propiedad anterior es que si el perfil óptimo no ocupa la pendiente máxima es debido a que la zona donde se encuentra no le entrega mayor beneficio por lo que aumentar su pendiente entregaría una función objetivo menor. Además, si la densidad de ganancia es negativa, conviene no excavar y mantenerse a nivel del piso.

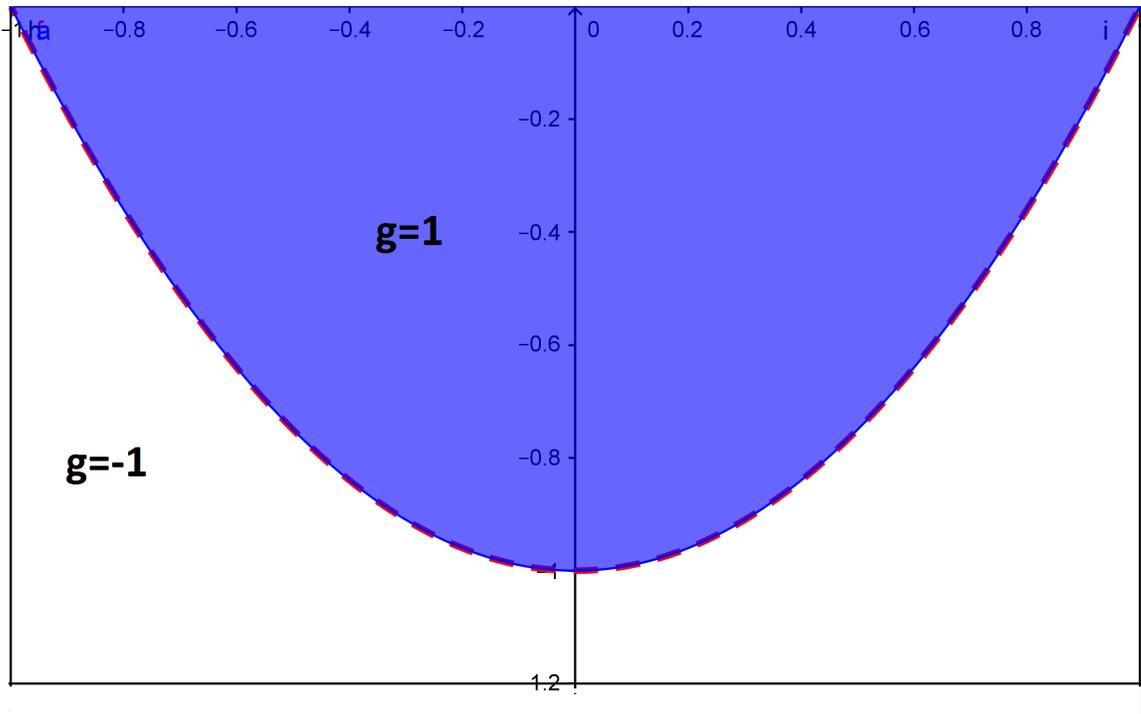


Figura 2.2: Función densidad de ganancia con dos valores y el pit óptimo en este caso

Observación El análisis anterior está hecho bajo el supuesto de la continuidad con respecto a la segunda variable de g . Una hipótesis que puede resultar muy fuerte para lo que sucede en realidad, sin embargo, al relajarla, se pierde el resultado anterior como se muestra la figura 2.2.

Se considera $[a, b] = [-1, 1]$, $p_0(x) = 0$, $w = 3$ y la función densidad de ganancia con dos posibles valores: $g(x, y) = \begin{cases} 1 & 1 - x^2 \geq y \\ -1 & 1 - x^2 \leq y \end{cases}$

En este caso se puede verificar que el perfil $p(x) = 1 - x^2$ graficado con línea segmentada roja es factible ya que cumple $p(-1) = 0 = p_0(-1)$, $p(1) = 0 = p_0(1)$, $p(x) \geq 0$, $\forall x \in [-1, 1]$ y como $\dot{p}(x) = -2x$, claramente $|-2x| \leq 3$, $\forall x \in [-1, 1]$. Además de la figura se verifica fácilmente que este perfil es el óptimo.

Ahora chequeando las hipótesis de la proposición 2.10, $p \in C([a, b], \mathbb{R})$, w al ser constante igual a 3 es derivable y además $\dot{p}(x) < w$, $\forall x \in (-1, 1)$, sin embargo, no se cumplen ni el punto (i), ni el (ii), ya que $g(x, p(x)) = 1 \geq 0$, por lo que la hipótesis de continuidad de g es relevante.

Si se considera ahora el problema capacitado (CFOP), lo único que cambia es que se agrega la restricción:

$$\int_a^b \int_{p_0(x)}^{p(x)} e(x, z) dz dx \leq \bar{E}$$

donde $e(x, z) \geq 0$ es la función de esfuerzo. Así, se define

$$q_4 = \int_a^b \int_{p_0(x)}^{p(x)} e(x, z) dz dx - \bar{E}$$

y los puntos de Fritz-John quedan dados por:

$$-\tau g(x, p(x)) - y_1(x) - w_p(x, p(x))(y_2(x) + y_3(x)) + y_4(x) \int_a^b e(x, p(x)) dx = \frac{d}{dx} \{y_2(x) - y_3(x)\} \quad (**)$$

$$y_1(x)(p_0(x) - p(x)) = 0$$

$$y_2(x)(\dot{p}(x) - w(x, p(x))) = 0$$

$$y_3(x)(-\dot{p}(x) - w(x, p(x))) = 0$$

$$y_4(x) \left(\int_a^b \int_{p_0(x)}^{p(x)} e(x, z) dz dz - \bar{E} \right) = 0$$

$$(\tau, y(x)) \neq 0 \quad \tau \geq 0$$

$$y_j(x) \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4$$

Con lo anterior, es posible enunciar el siguiente resultado en el caso (*CFOP*).

Proposición 2.12 *Sea $p \in K$ un perfil óptimo. Si se cumple*

- $g \in \mathcal{C}$,
- $w(x, z)$ es derivable con respecto a z
- existen \bar{a}, \bar{b} , tales que $a < \bar{a} < \bar{b} < b$ y $|\dot{p}(x)| < w(x, p(x)) \quad \forall x \in (\bar{a}, \bar{b})$

entonces $\forall x \in (\bar{a}, \bar{b})$:

$$(i) \left(\bar{E} - \int_a^b \int_{p_0(x)}^{p(x)} e(x, z) dz dz \right) g(x, p(x)) \leq 0$$

$$(ii) (p(x) - p_0(x))g(x, p(x)) \left(\int_a^b \int_{p_0(x)}^{p(x)} e(x, z) dz dz - \bar{E} \right) = 0$$

Demostración: Si $\int_a^b \int_{p_0(x)}^{p(x)} e(x, z) dz dz = \bar{E}$, entonces se cumplen trivialmente ambas expresiones. En el caso que la capacidad máxima no es alcanzada, se tiene que $y_4(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$ y los puntos de Fritz-John se reducen a los de la proposición 2.10, por lo tanto, también se cumplen las propiedades (i) y (ii). \square

Observación Si la capacidad máxima no se alcanza, entonces el óptimo del problema capacitado coincide con el no capacitado por esto es obvio que cumplan las mismas propiedades.

Una interpretación similar a la proposición se puede deducir de esta propiedad. Si el perfil óptimo no se mueve con máxima pendiente, se puede deber a que no conviene excavar más, porque la función de ganancia es de valor negativo en esa zona o es porque la capacidad de extracción se alcanzó y no se puede seguir excavando aún cuando la función de ganancia pueda ser positiva en esa porción de terreno.

2.3.2. Problema CDOP

Para el problema dinámico presentado en el paper de Alvarez et al, se considera un intervalo de tiempo continuo $[0, T]$ y para cada tiempo $t \in [0, T]$ se desea tener un perfil que sea factible para el problema (FOP) y que sea más profundo que los perfiles en tiempos menores a t . Para formular este problema se utilizan las variables $p(t, x)$ que representa la profundidad del punto x en el tiempo t , más aún $p(t, \cdot)$ es un perfil factible para (FOP).

Se vio anteriormente que este problema puede modelarse de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}
(CDOP) \quad \text{máx } G[p] &:= \varphi(T) \int_a^b \int_{p(0,x)}^{p(T,x)} g(x, z) dz dx + \int_a^b \int_0^T -\varphi'(t) \int_{p(0,x)}^{p(t,x)} g(x, z) dz dt dx \\
p(t, a) &= p_0(a), \quad p(t, b) = p_0(b) \quad \forall t \in [0, T] \\
|\dot{p}(t, x)| &\leq w(x, p(t, x)) \quad \forall x \in (a, b) \quad \forall t \in [0, T] \\
p_0 &= p(0, \cdot) \leq p(s, \cdot) \leq p(t, \cdot), \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T \\
\int_a^b \int_{p(s,x)}^{p(t,x)} e(x, z) dz dx &\leq \int_s^t c(\tau) d\tau, \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T \\
p(t, \cdot) &\in C([a, b], \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Una primer apronte para caracterizar la solución de este problema será discretizar el tiempo. Sea entonces $N \geq 1$, se define $t_0 = 0$ y $t_i = \frac{Ti}{N} \forall i \in \{1, \dots, N\}$. La idea es encontrar perfiles en cada uno de estos tiempos que sean factible para (FOP) y sean crecientes con respecto al tiempo. Las dos primeras restricciones se reescriben entonces de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
p(t_i, a) &= p_0(a), \quad p(t_i, b) = p_0(b) \quad \forall i \in \{0, \dots, N\} \\
|\dot{p}(t_i, x)| &\leq w(x, p(t_i, x)) \quad \forall x \in (a, b) \quad \forall i \in \{0, \dots, N\}
\end{aligned}$$

La cuarta y quinta restricción basta que se cumplan para pares de tiempos consecutivos gracias a transitividad de la desigualdad y el poder separar la integral en suma de integrales de intervalos de tiempos más pequeños respectivamente. Así estas restricciones serían:

$$\begin{aligned}
p_0 &= p(t_0, \cdot), \quad p(t_i, \cdot) \leq p(t_{i+1}, \cdot), \quad \forall i \in \{0, \dots, N-1\} \\
\int_a^b \int_{p(t_i,x)}^{p(t_{i+1},x)} e(x, z) dz dx &\leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} c(\tau) d\tau, \quad \forall i \in \{0, \dots, N-1\}
\end{aligned}$$

La primera integral de la función objetivo no cambia y la segunda se aproxima por una suma de Riemann, quedando:

$$\bar{G}[p] := \varphi(T) \int_a^b \int_{p(0,x)}^{p(T,x)} g(x,z) dz dx + \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \int_a^b -\varphi'(t_i) \int_{p(0,x)}^{p(t_i,x)} g(x,z) dz dx$$

Proposición 2.13 *Sea p^N la solución del problema anterior discretizando el tiempo en $N+1$ puntos. Entonces $p_N(T, \cdot)$ es solución del siguiente problema:*

$$(PA_N) \quad \text{máx} \int_a^b \int_{p^N(t_{N-1},x)}^{p(x)} \left(\varphi(T) - \frac{\varphi'(T)}{N} \right) g(x,z) dz dx$$

$$p(a) = p_0(a) = p^N(t_{N-1}, a), \quad p(b) = p_0(b) = p^N(t_{N-1}, b)$$

$$|\dot{p}(x)| \leq w(x, p(x)) \quad \forall x \in (a, b)$$

$$p^N(t_{N-1}, x) \leq p(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\int_a^b \int_{p^N(t_{N-1},x)}^{p(x)} e(x,z) dz dx \leq \int_{t_{N-1}}^T c(\tau) d\tau$$

$$p \in C([a, b], \mathbb{R})$$

Demostación: Claramente $p^N(T, \cdot)$ es un punto factible de este problema, ya que es punto factible del problema con tiempo discreto.

Supongamos que existe una solución \bar{p} de (PA_n) tal que:

$$\int_a^b \int_{p^N(t_{N-1},x)}^{p^N(T,x)} \left(\varphi(T) - \frac{\varphi'(T)}{N} \right) g(x,z) dz dx < \int_a^b \int_{p^N(t_{N-1},x)}^{\bar{p}(x)} \left(\varphi(T) - \frac{\varphi'(T)}{N} \right) g(x,z) dz dx (*)$$

Se define la secuencia de perfiles \hat{p} como $\hat{p}(t_i, \cdot) = p^N(t_i, \cdot) \forall i \in \{0, \dots, N\}$ y $\hat{p}(T, \cdot) = \bar{p}$. Esta secuencia resulta ser factible en el problema (CDOP) con tiempo discreto.

Ahora, sumando $\int_a^b \int_{p^N(0,x)}^{p^N(t_{n-1},x)} \left(\varphi(T) - \frac{\varphi'(T)}{N} \right) g(x,z) dz dx$ a ambos lados de (*) se obtiene.

$$\int_a^b \int_{p^N(0,x)}^{p^N(T,x)} \left(\varphi(T) - \frac{\varphi'(T)}{N} \right) g(x,z) dz dx < \int_a^b \int_{p^N(0,x)}^{\bar{p}(x)} \left(\varphi(T) - \frac{\varphi'(T)}{N} \right) g(x,z) dz dx$$

Finalmente sumando $\sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{N} \int_a^b -\varphi'(t_i) \int_{p(0,x)}^{p(t_i,x)} g(x,z) dz dx$ a ambos lados se obtiene:

$$\bar{G}[p^N] < \bar{G}[\hat{p}]$$

Lo que es una contradicción ya que p^N es solución del problema a tiempo discreto y \hat{p} es un punto factible de ese problema. De esta forma $p^N(T, \cdot)$ es solución a (PA_N) . \square

El problema anterior dice que una vez fijado los $N - 1$ perfiles iniciales, lo mejor que se puede hacer en el tiempo restante es excavar hasta el perfil $p^N(T, x)$.

Notar que el problema (PA_N) es un problema del tipo $(CFOP)$ por lo que la proposición 2.11 se cumple haciendo la identificación de cada término correspondiente .

Proposición 2.14 *Sea $p^N(T, \cdot) \in K$ el perfil en el tiempo T de la solución del problema $(CDOP)$ con tiempo discreto en $N + 1$ puntos. Si se cumple*

- $g \in \mathcal{C}$
- $w(x, z)$ es derivable con respecto a z
- existen \bar{a}, \bar{b} , tales que $a < \bar{a} < \bar{b} < b$ y $|\dot{p}(x)| < w(x, p(x)) \quad \forall x \in (\bar{a}, \bar{b})$

entonces $\forall x \in (\bar{a}, \bar{b})$:

$$(i) \left(\int_{t_{N-1}}^T c(\tau) d\tau - \int_a^b \int_{p^N(t_{N-1}, x)}^{p^N(T, x)} e(x, z) dz dz \right) g(x, p^N(T, x)) \leq 0$$

$$(ii) (p^N(T, x) - p^N(t_{N-1}, x)) g(x, p^N(T, x)) \left(\int_a^b \int_{p^N(t_{N-1}, x)}^{p^N(T, x)} e(x, z) dz dz - \int_{t_{N-1}}^T c(\tau) d\tau \right) = 0$$

Demostración: Notar que $p^N(T, \cdot)$ es solución de un problema del tipo $(CDOP)$, con densidad de ganancia $\hat{g}(x, z) = \left(\varphi(T) - \frac{\varphi'(T)}{N} \right) g(x, z)$ (la cual es continuamente diferenciable con respecto a z ya que g lo es), con perfil inicial $p^N(t_{N-1}, \cdot)$ y capacidad $\int_{t_{N-1}}^T c(\tau) d\tau$. Como se cumplen todas las hipótesis de la proposición 2.11, se tiene que $\forall x \in (\bar{a}, \bar{b})$:

- $\left(\int_{t_{N-1}}^T c(\tau) d\tau - \int_a^b \int_{p^N(t_{N-1}, x)}^{p^N(T, x)} e(x, z) dz dz \right) \left(\varphi(T) - \frac{\varphi'(T)}{N} \right) g(x, p^N(T, x)) \leq 0$
- $(p^N(T, x) - p^N(t_{N-1}, x)) \left(\varphi(T) - \frac{\varphi'(T)}{N} \right) g(x, p^N(T, x)) \left(\int_a^b \int_{p^N(t_{N-1}, x)}^{p^N(T, x)} e(x, z) dz dz - \int_{t_{N-1}}^T c(\tau) d\tau \right) = 0$

Pero notar que $\varphi(T) > 0$ y como esta función es monótona decreciente se tiene además que $-\frac{\varphi'(T)}{N} \geq 0$, así $\varphi(T) - \frac{\varphi'(T)}{N} > 0$, pudiendo eliminar este término en la igualdad y desigualdad anterior, probando así (i) y (ii). \square

En lo siguiente, se trata de replicar los resultados anteriores, pero al problema en tiempo y espacio continuo. De aquí en adelante $p(t, x)$ con $t \in [0, T]$, $x \in [a, b]$ representa una solución de $(CDOP)$, además se define la siguiente familia de problemas $\forall \varepsilon \in (0, T)$.

$$(P_\varepsilon) \quad \max \int_a^b \int_{p(T-\varepsilon, x)}^{p(x)} \varphi(T) g(x, z) dz dx$$

$$p(a) = p(T - \varepsilon, a), \quad p(b) = p(T - \varepsilon, b)$$

$$\begin{aligned}
|\dot{p}(x)| &\leq w(x, p(x)) \quad \forall x \in (a, b) \\
p(T - \varepsilon, x) &\leq p(x) \quad \forall x \in [a, b] \\
\int_a^b \int_{p(T-\varepsilon, x)}^{p(x)} e(x, z) dz dx &\leq \int_{T-\varepsilon}^T c(\tau) d\tau \\
p &\in C([a, b], \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Este problema es del tipo (CFOP), con perfil inicial $p(T - \varepsilon)$ y capacidad $\int_{T-\varepsilon}^T c(\tau) d\tau$. A la solución de este problema se le denotará por p_ε . La idea será replicar lo hecho en tiempo discreto, para esto se definen los problemas (P_ε) y se demuestra la siguiente proposición.

Proposición 2.15 *Sea $p(T, \cdot)$ el perfil a tiempo T de la solución de (CDOP). Si existe una sucesión $\varepsilon_k \in (0, T)$, $\varepsilon_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ tal que (P_{ε_k}) tiene solución entonces:*

$$p_{\varepsilon_k}(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} p(T, x) \text{ ctp}$$

Demostración: Considerar la sucesión de perfiles $p_{\frac{T}{n}} \forall n \geq 2$ soluciones a los problemas $(P_{\frac{T}{n}})$. Estas funciones cumplen que:

$$\int_a^b \int_{p(T-\frac{T}{n}, x)}^{p_{\frac{T}{n}}(x)} e(x, z) dz dx \leq \int_{T-\frac{T}{n}}^T c(\tau) d\tau \leq \|c\|_\infty \frac{T}{n}$$

Además la función $e(x, z)$ es acotada inferiormente por $e_0 > 0$ y se cumple que $p(T - \frac{T}{n}, x) \leq p_{\frac{T}{n}}(x) \forall x \in [a, b] \forall n \geq 2$ por lo que se obtiene que:

$$0 \leq \int_a^b e_0 \left[p_{\frac{T}{n}}(x) - p\left(T - \frac{T}{n}, x\right) \right] dx \leq \int_a^b \int_{p(T-\frac{T}{n}, x)}^{p_{\frac{T}{n}}(x)} e(x, z) dz dx$$

Juntando las expresiones se obtiene

$$0 \leq \int_a^b \left[p_{\frac{T}{n}}(x) - p\left(T - \frac{T}{n}, x\right) \right] dx \leq \|c\|_\infty \frac{T}{e_0 n}$$

Y Haciendo tender n a infinito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left[p_{\frac{T}{n}}(x) - p\left(T - \frac{T}{n}, x\right) \right] dx = 0$$

Para concluir se ocupa el siguiente resultado presente en [12] que da cierta recíproca al teorema de la convergencia dominada.

Teorema 2.16 *Sea $(f_n) \subseteq L^1$ y $f \in L^1$ tales que $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$. Entonces existe $g \in L^1$, y una subsucesión (f_{n_k}) tales que*

$$|f_{n_k}| \leq g \text{ ctp} \wedge f_{n_k} \rightarrow f \text{ ctp}$$

En este caso f corresponde a la función 0, por lo que este resultado entonces dice que existe una subsucesión que se denotará por $\frac{T}{n_k}$ tal que

$$p_{\frac{T}{n_k}}(x) - p\left(T - \frac{T}{n_k}, x\right) \rightarrow 0 \text{ ctp}$$

Y debido a la proposición 2.4, la cual entrega continuidad de los perfiles de (CDOP) con respecto al tiempo se concluye que

$$p_{\frac{T}{n_k}}(x) \rightarrow p(T, x) \text{ ctp}$$

□

Proposición 2.17 Sea $p(T, \cdot) \in K$ el perfil a tiempo T del problema (CDOP). Sea además $g \in \mathcal{C}$ y $w(x, z)$ derivable con respecto a z .

Si existe $(\varepsilon_k) \in (0, T)$ sucesión convergente a 0 tal que (P_{ε_k}) tiene solución y existe $\bar{k} \in \mathbb{N}$, \bar{a}, \bar{b} con $a < \bar{a} < \bar{b} < b$ tales que $\forall k \geq \bar{k}$:

- $|\dot{p}_{\varepsilon_k}| < w(x, p_{\varepsilon_k}(x)) \quad \forall x \in (\bar{a}, \bar{b})$
- $\int_a^b \int_{p(T-\varepsilon_k, x)}^{p_{\varepsilon_k}(x)} e(x, z) dz dx < \int_{T-\varepsilon_k}^T c(\tau) d\tau$

Entonces $\forall x \in (\bar{a}, \bar{b})$

$$g(x, p(T, x)) \leq 0 \text{ ctp.}$$

Y si además $p(T - \varepsilon_k, x) < p_{\varepsilon_k}(x)$, entonces $g(x, p(T, x)) = 0 \text{ ctp.}$

Demostración: Notar que como (P_{ε_k}) es un problema de capacidad, gracias a la proposición 2.11 se obtiene que $\forall x \in (\bar{a}, \bar{b})$

$$\left(\int_{T-\varepsilon_k}^T c(\tau) d\tau - \int_a^b \int_{p(T-\varepsilon_k, x)}^{p_{\varepsilon_k}(x)} e(x, z) dz dx \right) g(x, p_{\varepsilon_k}(x)) \leq 0$$

Y debido a que el primer término es siempre mayor estricto que 0 cuando $k \geq \bar{k}$, entonces

$$g(x, p_{\varepsilon_k}(x)) \leq 0 \quad \forall k \geq \bar{k}$$

Así tomando límite sobre k y gracias a la continuidad de g con respecto a la segunda coordenada se obtiene

$$g(x, p(T, x)) \leq 0 \text{ ctp}$$

Además, la proposición 2.11 dice que

$$p_{\varepsilon}(x) = p(T - \varepsilon, x) \vee g(x, p_{\varepsilon}(x)) = 0 \vee \int_a^b \int_{p(T-\varepsilon, x)}^{p_{\varepsilon}(x)} e(x, z) dz dx = \int_{T-\varepsilon}^T c(\tau) d\tau$$

Dado a la hipótesis extra la primera igualdad no se cumple y la tercera igualdad no se cumple por la hipótesis anterior ya vista, así se tiene que

$$g(x, p_{\varepsilon}(x)) = 0 \quad \forall \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$$

Considerando la sucesión de la proposición anterior y la continuidad de g se concluye que:

$$g(x, p(T, x)) = 0 \quad \text{ctp}$$

□

Los problemas (P_ε) se interpretan como maximizar la ganancia de extraer, estando en el tiempo $T - \varepsilon$, una porción de material, sin considerar la influencia del tiempo que esto tome hacerlo, dado que ya se ha extraído hasta $p(t - \varepsilon, \cdot)$ y se tiene una capacidad de $\int_{T-\varepsilon}^T c(\tau) d\tau$. Así la proposición anterior dice que si a partir de un tiempo crítico, lo mejor para estos problemas no es saturar la capacidad y en un intervalo los perfiles óptimos de estos problemas no ocupan la mayor pendiente, entonces en el tiempo final T , la función de ganancia resulta negativa en ese intervalo. Y si además a partir de cierto tiempo, siempre es bueno excavar un poco más en, entonces la función de ganancia en este intervalo es 0.

2.4. Dualidad

En esta sección se muestran dos formas de definir el dual del problema (CV) con sus respectivos teoremas de dualidad.

La primera forma presentada en [14] es la siguiente:

$$(DCV_1) \quad \text{mín} \int_a^b f(x, u, \dot{u}) + y^T(x)q(x, u, \dot{u})dx \quad (2.9)$$

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta \quad (2.10)$$

$$f_z(x, u, \dot{u}) + y^T(x)q_z(x, u, \dot{u}) = \frac{d}{dx} \{ f_{\dot{z}}(x, u, \dot{u}) + y^T(x)q_{\dot{z}}(x, u, \dot{u}) \} \quad (2.11)$$

$$y(x) \geq 0 \quad (2.12)$$

Los teoremas de dualidad demostrados en [14] dicen lo siguiente.

Teorema 2.18 (Dualidad débil) *Si f y q son convexas con respecto a z y \dot{z} entonces el ínfimo del problema (CV) es mayor o igual que el supremo del problema (DCV_1) .*

Teorema 2.19 (Dualidad fuerte) *Si la función $z^*(x)$ minimiza (CV), entonces existe $y^*(x)$ tal que $(z^*(x), y^*(x))$ minimizan el problema (DCV_1) y los valores extremos de ambos problemas son iguales.*

Teorema 2.20 (Dualidad inversa) *Sea $G(x, \dot{z}, \ddot{z}, y, \dot{y}) = 0$ la restricción (2.11) escrita de esta forma.*

Si $(z^(x), y^*(x))$ minimizan el problema (DCV_1) y son diferenciables a trozo y tal que la ecuación:*

$$\mu(x)G_z - \frac{d}{dx}[\mu(x)G_{\dot{z}}] - \frac{d^2}{dt^2}[\mu(x)G_{\ddot{z}}] = 0$$

tiene como única solución a $\mu = 0$, entonces z^* es una solución de (CV) y los valores extremos de ambos problemas son iguales.

Con esta formulación un primer dual de (FOP_o), al que se llamará (DFOP₁), es

$$\begin{aligned}
(DFOP_1) \text{ máx } & \int_a^b \int_{p_0(x)}^{u(x)} g(x, z) dz + y_1(x)(p_0(x) - u(x)) + \\
& y_2(x)(\dot{u}(x) - w(x, u(x))) + y_3(x)(-\dot{u}(x) - w(x, u(x))) dx \\
\text{s.a } & u(a) = p_0(a), \quad u(b) = p_0(b) \\
& -g(x, u(x)) - y_1(x) - w_p(x, u(x))(y_2(x) + y_3(x)) = \frac{d}{dx} \{y_2(x) - y_3(x)\} \\
& y(x) \geq 0
\end{aligned}$$

Una segunda forma algo similar a la anterior se presenta en [11], en donde se define el dual del problema (CV) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
(DCV_2) \text{ máx } & \int_a^b f(x, u, \dot{u}) dx \\
& u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta \\
\tau f_z(x, u, \dot{u}) + y^T(x) q_z(x, u, \dot{u}) &= \frac{d}{dx} \{ \tau f_z(x, u, \dot{u}) + y^T(x) q_z(x, u, \dot{u}) \} \\
y^T(x) q(x, u, \dot{u}) &= 0 \\
(\tau, y(x)) \neq 0, \quad \tau \geq 0, \quad y_j(x) \geq 0, \quad j = 1, \dots, m \quad &x \in [a, b]
\end{aligned}$$

Antes de enunciar los teoremas de dualidad débil y dualidad fuerte se deben introducir algunos conceptos.

Usando la siguiente notación $F(z) = \int_a^b f(x, u, \dot{u}) dx$ y $G(z) = \int_a^b g(x, u, \dot{u}) dx$ entonces se hace la siguiente definición.

Definición 2.21 Se dirá que el par (F, G) es *L-FJ-pseudoinvex* en $\bar{z} \in X$, si dados $z \in X$, $\bar{\tau} \in \mathbb{R}$, $\bar{y} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable a trozos con $(\bar{z}, \bar{\tau}, \bar{y})$ que verifica (2.2), (2.3), existe una función $\eta : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\eta(x, z, \bar{z}, \bar{\tau}, \bar{y})$ diferenciable, con $\eta(a, z, \bar{z}, \bar{\tau}, \bar{y}) = 0 = \eta(b, z, \bar{z}, \bar{\tau}, \bar{y})$, tal que:

$$\begin{aligned}
F(z) - F(\bar{z}) < 0 \implies & \int_a^b \{ (\bar{\tau} f_z(x, \bar{z}, \dot{\bar{z}}) + \bar{y}(x)^T g_z(x, \bar{z}, \dot{\bar{z}})) \eta(x, z, \bar{z}, \bar{\tau}, \bar{y}) \\
& + (\bar{\tau} f_z(x, \bar{z}, \dot{\bar{z}}) + \bar{y}(x)^T g_z(x, \bar{z}, \dot{\bar{z}})) \frac{d}{dx} \eta(x, z, \bar{z}, \bar{\tau}, \bar{y}) \} dx < 0
\end{aligned}$$

Definición 2.22 Se dirá que el problema (CV) es *L-FJ-pseudoinvex* si se verifica la definición anterior considerando como espacio el conjunto factible K , i.e., $z, \bar{z} \in K$.

Teorema 2.23 Si todo punto crítico de Fritz-Jhon es solución óptima de (CV), si y solo si (CV) es *L-FJ-pseudoinvex*.

Con estas definiciones es posible enunciar los teoremas de dualidad. Sea H el conjunto factible de (DCV).

Teorema 2.24 (Dualidad débil) *Sea $z \in K$, $(u, \tau, y) \in H$. Si (F, G) es L-FJ-pseudoinvex en u , entonces $\int_a^b f(x, z, \dot{z})dx \geq \int_a^b f(x, u, \dot{u})dx$.*

Como consecuencia del teorema se obtiene que si (F, G) fueran L-FJ-pseudoinvex, entonces

$$\int_a^b f(x, z, \dot{z})dx \geq \int_a^b f(x, u, \dot{u})dx, \quad \forall z \in K, \quad \forall (u, \tau, y) \in H$$

Teorema 2.25 (Dualidad fuerte) *Sea \bar{z} una solución óptima de (CV). Si (F, G) es L-FJ-pseudoinvex, entonces existe $\bar{\tau} \in \mathbb{R}$, $\bar{y} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable a trozos tal que $(\bar{z}, \bar{\tau}, \bar{y})$ es solución óptima de (DCV), y los correspondientes valores objetivos son iguales.*

Teorema 2.26 (Dualidad inversa) *Sea $(\bar{u}, \bar{\tau}, \bar{y})$ una solución óptima de (DCV). Si $\bar{u} \in K$ y (F, G) es L-FJ-pseudoinvex, entonces \bar{u} es solución óptima de (CV) y los valores objetivos de los problemas son iguales.*

Ahora es posible escribir el dual del problema (FOP_o) , al que se llamará $(DFOP_2)$.

$$\begin{aligned} (DFOP_2) \quad & \text{mín} \int_a^b \int_{p_0(x)}^{u(x)} g(x, z) dz dx \\ & u(a) = p_0(a), \quad u(b) = p_0(b) \\ & -\tau g(x, u(x)) - y_1(x) - w_p(x, u(x))(y_2(x) + y_3(x)) = \frac{d}{dx} \{y_2(x) - y_3(x)\} \\ & y_1(x)(p_0(x) - u(x)) = 0 \\ & y_2(x)(\dot{u}(x) - w(x, u(x))) = 0 \\ & y_3(x)(-\dot{u}(x) - w(x, u(x))) = 0 \\ & (\tau, y(x)) \neq 0 \quad \tau \geq 0, \quad y_j(x) \geq 0, \quad j = 1, \dots, 3 \end{aligned}$$

2.5. Punto de vista desde el control óptimo

En esta sección, se recuperará el resultado de la proposición 2.10 utilizando herramientas de control óptimo. Una introducción a este tipo de problemas puede ser consultada en [16],[6]. Es necesario introducir la siguiente notación.

Un problema de control óptimo tiene la siguiente forma.

$$\begin{aligned} & \text{mín}_u \int_{t_0}^{t_f} F(x, u, t) dt + \Phi(x(t_f)) \\ & \text{s.a.} \quad \dot{x}(t) = f(x, u, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x(t_0) &= x_0 \\ u &\in U\end{aligned}$$

Al valor u se le llama el control, x el estado y a la ecuación diferencial que cumplen se le denomina la dinámica del problema. Es usual que se diga que x y u dependen del tiempo y por eso se ocupa la letra t para denotar a la variable independiente. Al conjunto U se le llama el conjunto de los controles admisibles y depende de los valores que puede alcanzar u . A la solución de este problema se le denomina el control óptimo.

Al problema tal y como aparece escrito anteriormente se lo denomina como tipo Bolza. Si la función F es igual a cero, entonces se habla de problema de tipo Mayer y si la función Φ es igual a cero, entonces se habla de problema tipo Lagrange. En [6] se demuestra que estas tres formas de definir un problema de control óptimo son equivalentes, en el sentido que se puede ir de uno a otro utilizando ciertos cambios de variables o agregando más variables.

La principal herramienta utilizada para resolver este tipo de problemas es el Principio del Mínimo de Pontryagin (también se lo conoce como principio del Máximo), el cuál entrega condiciones necesarias sobre el control óptimo. Las diferentes versiones del Principio del Mínimo incluyen condiciones sobre el estado final de la dinámica, tiempo final libre y horizonte de tiempo infinito, estas pueden ser consultadas en [6].

El objetivo ahora será formular el problema (FOP) como uno de control óptimo para utilizar las herramientas que esta teoría tiene. En el problema (FOP) el tiempo se corresponderá con x y la dinámica con p . La restricción sobre la derivada de p dará la dinámica, para esto se introduce un control u tal que $|u(x)| \leq 1$ y que cumple que:

$$\dot{p}(x) = u(x)w(x, p(x))$$

Notar que como $|u(x)| \leq 1$ y $w \geq 0$ entonces la ecuación anterior equivale a que $|\dot{p}| \leq w(x, p(x))$, así, el problema de control óptimo se escribe como:

$$\begin{aligned}(\overline{FOP}) \quad & - \text{mín} \int_a^b \int_{p_0(x)}^{p(x)} -g(x, z) dz dx \\ & p(x) \geq p_0(x) \quad \forall x \in [a, b] \\ & p(a) = p_0(a), \quad p(b) = p_0(b) \\ & \dot{p}(x) = u(x)w(x, p(x)) \quad \forall x \in (a, b) \\ & |u(x)| \leq 1 \quad \forall x \in (a, b)\end{aligned}$$

Una vez identificado el problema, lo deseado sería aplicar el PMP para concluir propiedades sobre el control óptimo y el estado asociado a este control, sin embargo, el principio de Pontryagin clásico no aplica directamente sobre este problema, ya que se existe una restricción sobre los valores que puede tomar el estado. En la literatura a estos problemas se los conoce como problemas de control óptimo con restricciones de estado (o state constraint en la literatura en inglés). Por esto se introduce a continuación la materia que ayudará a darle propiedades al perfil óptimo.

En el problema anterior, el control aparece de forma lineal en la dinámica. Este es un caso particular de restricción de estado y es tratado en [13]. En esta referencia se presenta un problema de control óptimo escrito de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 (I) \quad & \text{mín } G(x(t_f)) \\
 & \text{s.a.} \\
 & \dot{x}(t) = f(x, u) = f_1(x, u) + f_2(x, u)u \\
 & x(t_0) = x_0, \quad \Psi(x(t_f)) = 0 \\
 & |u(t)| \leq K(t), \quad K(t) > 0, \quad t_0 \leq t \leq t_f \\
 & S(x) \leq \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

El vector de estado es $x \in \mathbb{R}^n$. De aquí en adelante las funciones $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ con $k < n$ son diferenciables, las funciones $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son analíticas y $K(t)$ es analítica en $[t_0, t_f]$. Estas suposiciones le dan validez a las condiciones necesarias que serán planteadas más adelante.

La i -ésima derivada de $S(x(t))$ con respecto al tiempo se denotará por S^i , $i \geq 0$ donde $S^0 = S$.

Definición 2.27 *Se define como el orden de S , al menor entero p tal que u aparece de forma explícita en S^p .*

En este caso, el control aparece de forma lineal en S^p ya que la dinámica es lineal. Así, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 S^i &= S(x) \quad i = 0, 1, \dots, p-1 \\
 S^p &= S(x, u) = a(x) + b(x)u
 \end{aligned}$$

Un intervalo $[t_1, t_2]$ donde $S(x(t)) < \alpha$ es llamado un arco interior, por otro lado, un intervalo $[t_1, t_2]$ donde $S(x(t)) = \alpha$ es llamado un arco de borde y a los puntos t_1 y t_2 se les llama punto de entrada y salida respectivamente. En un arco de borde el control siempre debe satisfacer que $S^p(x, u) = 0$, por lo que el control óptimo en este arco será de tipo feedback y de la forma:

$$u_b = -\frac{a(x)}{b(x)} \quad (*)$$

Suposición En un arco de borde $[t_1, t_2]$ se cumple que $b(x(t)) \neq 0 \forall t \in [t_1, t_2]$ y $|u_b(x(t))| < K(t)$, $\forall t \in (t_1, t_2)$

Dadas las consideraciones anteriores de cada función y la hipótesis anterior, se formulan las siguientes condiciones necesarias de optimalidad presentadas en [13].

Teorema 2.28 *Se define el Hamiltoniano por:*

$$H(x, u, \lambda, \eta) = \lambda^T f(x, u) + \eta S(x) = \lambda^T f_1(x) + \lambda^T f_2(x)u + \nu S(x)$$

Donde $\lambda \in \mathbb{R}^n$ y $\eta \in \mathbb{R}$. Dadas las suposiciones hechas anteriormente, las condiciones necesarias del principio del mínimo para el óptimo del problema (I) son las siguientes.

i) Existe una función escalar $\eta(t) \geq 0$, un número real $\eta_0 \geq 0$ y un vector $\sigma \in \mathbb{R}^k$ tal que el estado adjunto $\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$ satisface:

$$\dot{\lambda}^T = -H_x(x, u, \lambda, \eta) = -\lambda^T f_x - \eta S_x, \quad \lambda(t_f)^T = \eta_0 G_x(x(t_f)) + \sigma^T \Psi_x(x(t_f))$$

ii) La función $\eta(t)$ satisface $\eta(t)(S(x(t)) - \alpha) = 0, \forall t \in [t_0, t_f]$, y es continua en los arcos de borde.

iii) El control óptimo minimiza el Hamiltoniano, esto es:

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), \eta(t)) = \min_{|u| \leq K(t)} H(x(t), u, \lambda(t), \eta(t))$$

iv) Sea t_1 un punto que pasa de un arco interior a un arco de borde o vice versa. Entonces:

$$\lambda^T(t_1^+) = \lambda^T(t_1^-) - \nu_1 S_x(x(t_1)), \quad \nu_1 \geq 0$$

Notar que como la dinámica es lineal con respecto a u , el mínimo del Hamiltoniano dependerá de

$$\phi(t) = \lambda^T(t) f_2(x(t))$$

A esta función se le denomina la función de cambio. Recordar que en el caso de un arco de borde, el control está dado por la expresión (*), ahora en el caso de un arco interior pueden pasar dos cosas.

- Sea un intervalo $I \subseteq [t_0, t_f]$ donde ϕ se anula en puntos aislados de I , entonces se dice que el control óptimo es no singular en I y toma la forma:

$$u(t) = -K(t) \text{sgn}(\phi(t))$$

- Si $\phi(t) = 0$ en un intervalo $I \subseteq [t_0, t_f]$, entonces se dice que $u(t)$ es singular en I . El control aquí se obtiene de igualar a 0 la i -ésima derivada de $\phi(t)$ donde aparece por primera vez el control de forma explícita

Un teorema que será de utilidad y que se presenta en el paper [10] es el siguiente.

Teorema 2.29 *Sea p el orden de S y (x^*, u^*) el estado y control óptimo respectivamente. Si*

$$\frac{\partial}{\partial u} [S^p(x^*(t), u^*(t))] \neq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_f]$$

. Entonces $\eta_0 \neq 0$.

Ahora, se escribe el problema (\overline{FOP}), como uno de tipo Mayer para aplicar el teorema anterior y obtener propiedades sobre el perfil óptimo (Recordar que la variable que se trabajaba como tiempo, en este problema se trabaja como x). Para esto se introduce una variable auxiliar q que cumple lo siguiente.

$$\dot{q}(x) = \int_{p_0(x)}^{p(x)} g(x, z) dz, \quad q(a) = 0$$

Así, el problema se escribe como:

$$\begin{aligned} (\overline{FOP}) \quad & - \text{mín } G(p(b), q(b)) = -q(b) \\ & S(p, q) = p_0(x) - p(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b] \\ & (p(a), q(a)) = (p_0(a), 0), \quad \Psi(p(b), q(b)) = p(b) - p_0(b) = 0 \\ \begin{pmatrix} \dot{p}(x) \\ \dot{q}(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \int_{p_0(x)}^{p(x)} g(x, z) dz \end{pmatrix} + u(x) \begin{pmatrix} w(x, p(x)) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall x \in (a, b) \\ & |u(x)| \leq 1 \quad \forall x \in (a, b) \end{aligned}$$

De esta forma, es posible aplicar las condiciones necesarias de óptimalidad. Supongase que se cumplen las hipótesis $g(x, \cdot) \in \mathcal{C}([a, b]) \quad \forall x \in [a, b]$ y $w(x, z)$ es derivable con respecto a la variable z . Sea $(\lambda_1(x), \lambda_2(x))$ el estado adjunto, el Hamiltoniano de este problema es:

$$H = \lambda_1(x)w(x, p(x))u(x) + \lambda_2(x)\left(\int_{p_0(x)}^{p(x)} g(x, z) dz\right) + \eta(x)(p_0(x) - p(x))$$

El teorema anterior dice entonces que:

1. $\begin{pmatrix} \dot{\lambda}_1(x) \\ \dot{\lambda}_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1(x)w_z(x, p(x))u(x) - \lambda_2(x)g(x, p(x)) + \eta(x) \\ 0 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} \dot{\lambda}_1(b) \\ \dot{\lambda}_2(b) \end{pmatrix} = \eta_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \sigma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ -\eta_0 \end{pmatrix}, \quad \eta_0 \geq 0$
3. $\eta(x)(p_0(x) - p(x)) = 0 \quad \forall x \in [a, b], \quad \eta \geq 0$
4. En el caso de un arco de borde el control toma el valor:

$$u(x) = \frac{\dot{p}_0(x)}{w(x, p_0(x))}$$

5. En el caso de un arco interno, el control no singular toma el valor:

$$u(x) = -\text{sgn}(\lambda_1(x)w(x, p(x)))$$

Y por lo tanto, el perfil cumple que $|\dot{p}(x)| = w(x, p(x))$.

Lo anterior servirá para probar la propiedad análoga a la 2.10

Proposición 2.30 Sea (p, u) un de \overline{FOP} . Si $g(x, \cdot) \in \mathcal{C}([a, b]) \quad \forall x \in [a, b]$, si además $w(x, z)$ es derivable con respecto a la variable z y existen \bar{a}, \bar{b} tales que $a < \bar{a} < \bar{b} < b$ y $|\dot{p}(x)| < w(x, p(x)) \quad \forall x \in (\bar{a}, \bar{b})$, entonces $\forall x \in (\bar{a}, \bar{b})$ se cumple:

- (i) $g(x, p(x)) \leq 0$
- (ii) $(p(x) - p_0(x))g(x, p(x)) = 0$

Demostración: Notar que como $|\dot{p}(x)| < w(x, p(x))$, entonces el control no puede ser 1 ó -1 . Como el control minimiza el Hamiltoniano, entonces lo anterior solo ocurre cuando la función de cambio es nula en este intervalo. Para este caso se tiene que:

$$\lambda_1(x)w(x, p(x)) = 0 \quad \forall x \in (\bar{a}, \bar{b})$$

Como $|\dot{p}(x)| < w(x, p(x))$, entonces w no puede ser 0, así que se tiene:

$$\lambda_1(x) = 0 \quad \forall x \in (\bar{a}, \bar{b})$$

Esto último también implica que:

$$\dot{\lambda}_1(x) = 0 \quad \forall x \in (\bar{a}, \bar{b})$$

Por las ecuaciones de la dinámica adjunta asociadas a λ_2 se tiene que $\lambda_2(x) = -\eta_0, \quad \forall x \in [a, b]$. Reemplazando esto y lo anterior en la edo asociada a λ_1 se tiene que:

$$\eta_0 g(x, p(x)) + \eta(x) = 0$$

Notar que el orden de la restricción de estado en este caso es 1 ya que $S^1 = \dot{p}_0(x) - \dot{p}(x) = \dot{p}_0 - w(x, p(x))u(x)$. Derivando con respecto a u se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial u} (\dot{p}_0 - w(x, p(x))u(x)) = -w(x, p(x))$$

Como se había supuesto que w iba a ser distinto de 0 en todo punto, entonces el teorema 2.3 dice que $\eta_0 \neq 0$. Entonces es posible dividir por esta expresión y se obtiene:

$$g(x, p(x)) = -\frac{\eta(x)}{\eta_0}$$

Y como $\eta(x), \eta_0 \geq 0$, se tiene que $g(x, p) \leq 0$, probando así el punto (i). Además, multiplicando por $(p_0(x) - p(x))$ en la expresión anterior se obtiene.

$$g(x, p(x))(p_0(x) - p(x)) = -\frac{\eta(x)(p_0(x) - p(x))}{\eta_0} = 0$$

Donde la última igualdad es por lo expresando en el punto 3 de las conclusiones del teorema. Con esto, se prueba la parte (ii) de la proposición, concluyendo la demostración. \square

Capítulo 3

Discretización de la versión operacional del problema continuo

3.1. Discretización para minas en \mathbb{R}^2

Utilizando el hecho de que L_p coincide con el módulo de la derivada, se discretizará el problema (FOP_O) para así obtener resultados numéricos usando este resultado. A continuación se presentan 3 formas distintas de discretizar el problema.

3.1.1. Puntos de discretización libre

El intervalo (a, b) se discretizará en n puntos x_1, \dots, x_n tal que $x_1 = a$, $x_n = b$ y $x_i \leq x_{i+1} \forall i \in \{1, \dots, n-1\}$. El número de puntos, es decir n , estará fijo para el modelo, pero la ubicación de estos puntos es variable.

Se denotará como $z_i = p(x_i)$ a la profundidad de cada punto x_i en el óptimo, y para cualquier punto en el intervalo (x_i, x_{i+1}) su profundidad vendrá dada por la recta que une los puntos z_i y z_{i+1} . Esta recta tendrá ecuación:

$$p_i(x) = m_i(x - x_i) + z_i$$

donde $m_i = \frac{z_{i+1} - z_i}{x_{i+1} - x_i}$.

Así, conociendo los x_i y los z_i se conocerá un perfil. En esta sección se buscará solucionar el problema (FOP) restringiéndose a estos perfiles.

Las restricciones quedan reescritas de la siguiente forma:

(2.5) $z_1 = p_0(x_1)$, $z_n = p_0(x_n)$, ya que en este caso $\partial\Omega = \{x_1, x_n\}$.

(2.6) Se debe asegurar que la recta que une cada par de puntos z_i, z_{i+1} pase por debajo de la curva p_0 , cosa que se satisface si p_0 es cóncava (Para visualizar la profundidad se rota el eje de las ordenadas quedando las positivas hacia abajo). Se asumirá que p_0 representa una horizontal, algo que no es tan erróneo pensar ya que cuando se ocupa el modelo de bloques, la mayoría de las veces se está asumiendo un piso plano, además si p_0 no fuera horizontal se puede transformar en uno de esta forma agregándole ganancia 0 al espacio de aire que se agrega al modelo. Así se puede decir que $p_0(x) = c \forall x \in \Omega$, sin pérdida de la generalidad, se asume $c = 0$.

Por lo tanto, para asegurar que se cumpla la restricción (2.6), solo basta imponer que $z_i \geq 0 \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

(2.7) Para cada $x \in (x_i, x_{i+1})$ se tiene que:

$$L_p(x) = |p'_i(x)| = |m_i|$$

Luego este tipo de restricción equivale a imponer $|m_i| \leq w(x, p_i(x)) \forall x \in (x_i, x_{i+1})$ las cuales se pueden desacoplar en dos restricciones:

$$z_{i+1} - z_i \leq w(x, p_i(x))(x_{i+1} - x_i) \wedge z_i - z_{i+1} \leq w(x, p_i(x))(x_{i+1} - x_i)$$

En el caso en que w fuera constante en cada intervalo (x_i, x_{i+1}) solo se tendrían $2n - 2$ restricciones.

Solo resta ver como quedaría la función objetivo. A continuación se muestran dos formas en que puede ser estimada.

$$\begin{aligned} E[p] &= \int_a^b \int_{p_0(x)}^{p(x)} g(x, z) dz dx \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{p_0(x)}^{p_i(x)} g(x, z) dz dx \end{aligned}$$

Si se considera g solo dependiendo de los valores en el intervalo (a, b) y se toma constante en cada intervalo (x_i, x_{i+1}) , o sea, $g(x) = g_i \forall x \in (x_i, x_{i+1})$ el desarrollo continúa como:

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_0^{m_i(x-x_i)+z_i} g_i dz dx \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} m_i g_i (x - x_i) + z_i g_i dx \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{g_i}{2} m_i (x_{i+1} - x_i)^2 + g_i z_i (x_{i+1} - x_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{g_i}{2} \frac{z_{i+1} - z_i}{x_{i+1} - x_i} (x_{i+1} - x_i)^2 + g_i z_i (x_{i+1} - x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{g_i}{2} (z_{i+1} - z_i)(x_{i+1} - x_i) + g_i z_i (x_{i+1} - x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{g_i}{2} (z_{i+1} + z_i)(x_{i+1} - x_i)
\end{aligned}$$

En lo anterior, se hizo la simplificación de que el suelo era plano y estaba situado en el 0. De no ser así, habría que restar $\sum_{i=1}^{n-1} g_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_0(x)$ ya que para poder considerar p_0 como una línea horizontal se había completado con una función $g = 0$ en el espacio agregado.

La segunda forma de estimar la integral de la función objetivo es ocupar la regla del rectángulo o cuadratura numérica presentada en [3], que sirve para aproximar integrales en cada intervalo (x_{i+1}, x_i) . Entonces la función objetivo sería.

$$\begin{aligned}
E[p] &= \int_a^b \int_{p_0(x)}^{p(x)} g(x, z) dz dx \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{p_0(x)}^{p_i(x)} g(x, z) dz dx \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \int_{p_0(x)}^{p_i(x)} g(x_i, z) dz
\end{aligned}$$

Se podría volver a aplicar regla del rectángulo para estimar $\int_{p_0(x)}^{p_i(x)} g(x_i, z) dz$, sin embargo, la diferencia entre p_i y p_0 no es controlada como ocurre con x_{i+1} y x_i donde se puede achicar aumentando el valor de n , por lo que no conviene volver a aplicar esa regla ya que el error que produce no está controlado.

Si se hacen las mismas consideraciones sobre g (constante en cada intervalo), se obtiene.

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) z_i g_i$$

Notar que por la continuidad de los perfiles, a medida que n crezca, $z_i \approx z_{i+1}$ y por lo tanto $\frac{z_{i+1} + z_i}{2} \approx z_i$, así que para un n suficientemente grande, ambas funciones objetivos reportarían valores similares.

Un último punto a considerar es que la profundidad se considerará acotada, así que se puede imponer que $z_i \leq z_{max} \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Anteriormente se mencionó que bajo ciertas

hipótesis sobre la función w no era necesario imponer esta restricción, sin embargo, como al discretizar se están perdiendo muchos puntos, esta hipótesis pueden no lograr cumplir esta restricción y por eso podría ser necesario imponerlas. El problema discretizado se escribe entonces como

$$\begin{aligned}
& \text{máx} \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \int_{p_0(x)}^{p_i(x_i)} g(x_i, z) dz \\
& z_1 = p_0(x_1), \quad z_n = p_0(x_n) \\
& c \leq z_i \leq z_{max}, \quad x_i \leq x_{i+1} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\
& z_{i+1} - z_i \leq w(x, p_i(x))(x_{i+1} - x_i), \quad z_i - z_{i+1} \leq w(x, p_i(x))(x_{i+1} - x_i) \quad \forall x \in (x_i, x_{i+1}) \\
& x_1 = a, \quad x_n = b
\end{aligned}$$

Y bajo las hipótesis de g que simplifican el problema, este se escribe como:

$$\begin{aligned}
& \text{máx} \sum_{i=1}^{n-1} g_i z_i (x_{i+1} - x_i) \\
& z_1 = p_0(x_1), \quad z_n = p_0(x_n) \\
& c \leq z_i \leq z_{max}, \quad x_i \leq x_{i+1} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\
& z_{i+1} - z_i \leq w(x, p_i(x))(x_{i+1} - x_i), \quad z_i - z_{i+1} \leq w(x, p_i(x))(x_{i+1} - x_i) \quad \forall x \in (x_i, x_{i+1}) \\
& x_1 = a, \quad x_n = b
\end{aligned}$$

Observación En esta sección para programar, se necesita conocer el valor de la integral $\int_{p_0(x)}^{p_i(x_i)} g(x_i, z) dz \quad \forall x \in [a, b]$ ya que x_i no está fijo. Esto es una complicación que será resuelta en la siguiente sección.

Incluso al momento de hacer la simplificación de la función objetivo que simplifica la programación, donde se asumió que g solo dependía del intervalo (a, b) , más aún, que era constante en el intervalo (x_i, x_{i+1}) , es necesario conocer el valor de g en todo el intervalo (a, b) para poder programar.

3.1.2. Puntos de discretización fijos

La diferencia de esta discretización con la anterior, es que considera fijo los conjuntos que particionan el intervalo (a, b) , o sea el número de puntos y su ubicación son parámetros del problema. El resto de las restricciones, parámetros y variables se mantienen igual que la sección anterior.

Se considerará el caso particular cuando la discretización del intervalo (a, b) es la equies-

paciada, es decir $x_i = h(i - 1) + a$ con $h = \frac{b - a}{n - 1}$, entonces el modelo simplificado sería:

$$\text{máx} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{g_i z_i h}{2}$$

$$z_1 = p_0(x_1) \quad z_n = p_0(x_n)$$

$$c \leq z_i \leq z_{max} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$z_{i+1} - z_i \leq w(x, p_i(x))h \quad \forall x \in (x_i, x_{i+1})$$

$$z_i - z_{i+1} \leq w(x, p_i(x))h \quad \forall x \in (x_i, x_{i+1})$$

A continuación se presentan distintos casos y la solución que arrojó el modelo al ser programado en AMPL usando el solver Cplex. En todos estos se supone la mina incluida en un cuadrado de 1×1 .

En la figura (3.1), la función w que controla la pendiente toma tres valores distintos, según la zona en que se encuentre, y la función de ganancia g es constante igual a 1. En la figura

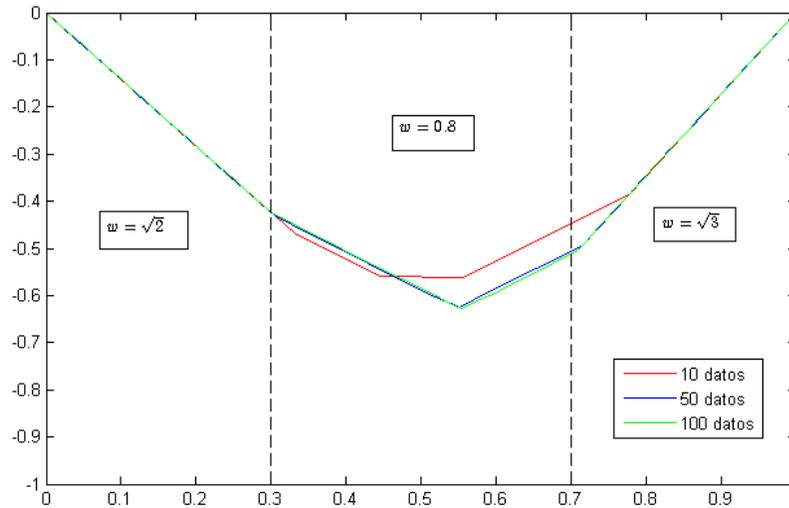


Figura 3.1: Mina de 1×1 con función de ganancia $g = 1$ y tres zonas de valores para w .

(3.2), la función de ganancia g varía en 5 valores distintos dependiendo de la zona en que se encuentre mientras que la función w es constante e igual a $\sqrt{2}$

Finalmente, lo que se presenta en la figura (3.3) combina los dos anteriores, o sea, se toma la función w del primer caso, y la función g del segundo caso, resultando lo siguiente.

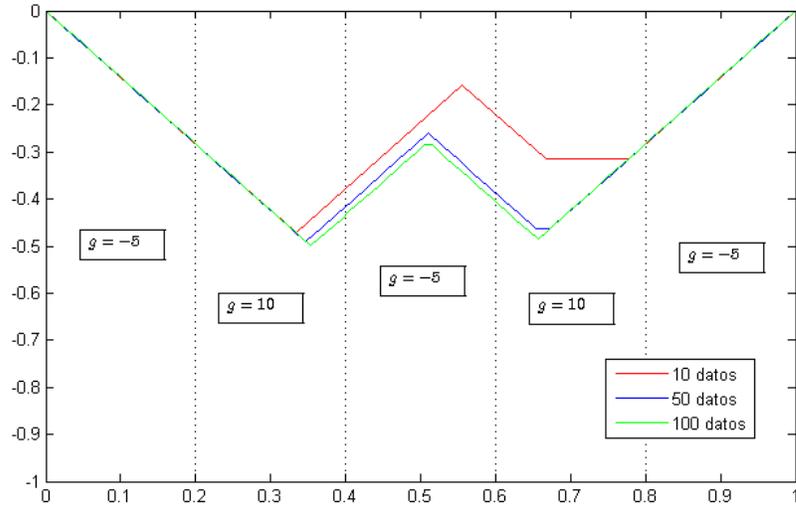


Figura 3.2: Mina de 1×1 con función $w = \sqrt{2}$ y cinco zonas de valores para g .

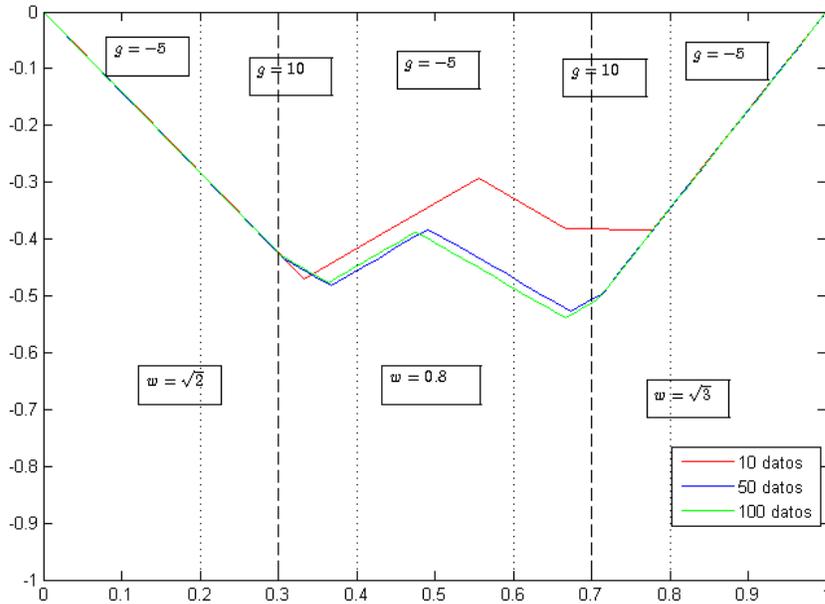


Figura 3.3: Mina de 1×1 .

3.1.3. Adaptación al modelo de bloques

En esta sección se adaptará la discretización anterior cuando la función g está dada por bloques de igual tamaño, tal y como se ocupa en los modelos clásicos para el calcular pit óptimo.

La discretización del intervalo (a, b) estará dada por el ancho de cada bloque y es un

parámetro del problema. Cada bloque medirá h metros de altura y c metros de base. Para identificar cada bloque, se hará con la coordenada correspondiente a la esquina inferior izquierda como aparece en 3.4.

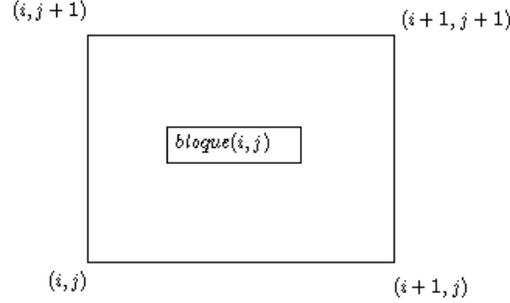


Figura 3.4: Identificación de cada bloque según sus coordenadas

Recordar que se está considerando el eje y positivo hacia abajo, así que gráficamente, mientras más abajo, mayor es su coordenada del eje y .

La profundidad en cada punto x_i estará restringida a una cantidad finita de valores que serán el número de bloques que hay en cada columna multiplicado por la altura del bloque más profundidad inicial. El número de bloques que dan la profundidad inicial o mínima y la profundidad máxima de cada columna i se denotarán por las variables $k_{min,i}$ y $k_{max,i}$ respectivamente.

Para representar la profundidad se introducen las variables binarias

$$z_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si el bloque } (i, j) \text{ es extraído} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Así, se introduce una variable k_i para la profundidad en el punto x_i y esta viene dada por:

$$k_i = \left(k_{min,i} + \sum_{j=k_{min,i}+1}^{k_{max,i}-1} (z_{i,j} - z_{i,j+1})(j - k_{min,i}) + z_{i,k_{max,i}}(k_{max,i} - k_{min,i}) \right) h$$

Y las restricciones para las pendientes se reinterpretan como:

$$k_{i+1} - k_i \leq w(x_i, k_i)c \wedge k_i - k_{i+1} \leq w(x_i, k_i)c \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Además, si un bloque (i, j) es extraído, todos los de su columna debieron extraerse antes para poder llegar a él, es por eso que se agrega la siguiente restricción:

$$z_{i,j+1} \leq z_{i,j} \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \forall j \in \{k_{min,i}+1, \dots, k_{max,i}-1\}$$

Esta restricción es la precedencias en el modelo clásico, pero restringido a bloques de una misma columna que están juntos.

Para finalizar, hay que ver que forma tendrá la función objetivo. Para esta parte, la integral de la función de ganancia es constante en cada bloque, pero varía al cambiarse de uno a otro. Para estimar la integral total, se ocupará algo similar método del rectángulo, donde en cada intervalo, (x_i, x_{i+1}) , esta integral tomará el valor correspondiente a sumar el beneficio todos los bloques encerrados por el rectángulo de coordenadas $(x_i, k_{min,i}), (x_{i+1}, k_{min,i}), (x_{i+1}, k_i), (x_i, k_i)$. Lo anterior queda expresado en la siguiente función objetivo:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=k_{min,i}+1}^{k_{max,i}} b_{i,j} z_{i,j}$$

Así, el modelo resultante es el siguiente:

$$\begin{aligned} & \text{máx} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=k_{min,i}+1}^{k_{max,i}} b_{i,j} z_{i,j} \\ k_i &= \left(k_{min,i} + \sum_{j=k_{min,i}+1}^{k_{max,i}-1} (z_{i,j} - z_{i,j+1})(j - k_{min,i}) + z_{i,k_{max,i}}(k_{max,i} - k_{min,i}) \right) h \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ z_{i,j+1} &\leq z_{i,j} \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \forall j \in \{k_{min,i}+1, \dots, k_{max,i}-1\} \\ k_{i+1} - k_i &\leq w(x_i, k_i)c \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ k_i - k_{i+1} &\leq w(x_i, k_i)c \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ k_1 &= k_{min,1} \quad \wedge \quad k_n = k_{min,n} \\ z_{i,j} &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

A continuación se muestra la solución obtenida en AMPL utilizando el solver Cplex, de programar el modelo anterior a una mina con pocos bloques.

Para que la función terminara en la otra esquina, se agregó una columna de solo ceros que omitida en la figura. Es posible observar que la solución obtenida numéricamente es de forma efectiva la solución óptima.

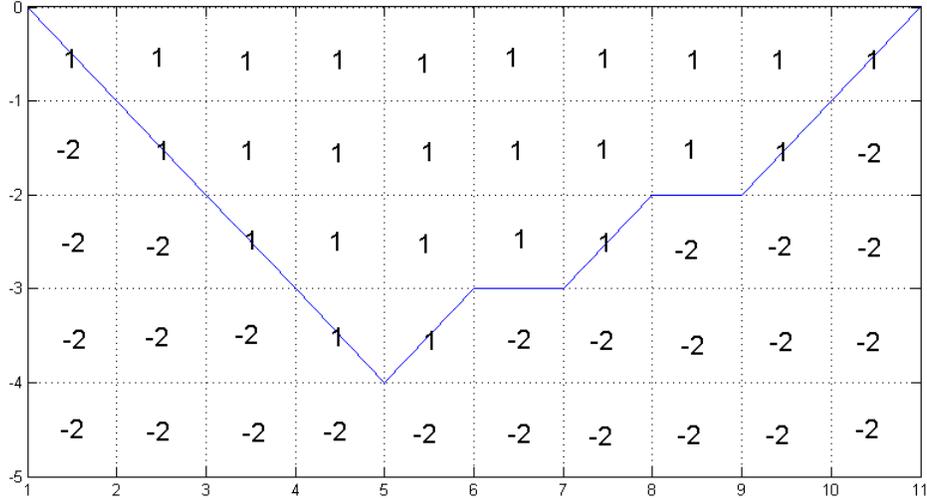


Figura 3.5: Pequeño modelo de bloques

3.2. Discretización de mina en \mathbb{R}^3

Se asumirá que el dominio es de la forma $(x, y) \in \Omega = [a, b] \times [c, d]$. Cada uno de estos intervalos se discretizará de forma equiespaciada, esto es

$$x_i = h_1(i - 1) + a, \quad y_j = h_2(j - 1 + c) \quad i, j \in \{1, \dots, n\}$$

donde $h_1 = \frac{b - a}{n - 1}$ y $h_2 = \frac{d - c}{n - 1}$. Además se denotará a la profundidad en cada punto por $z_{i,j} := p(x_i, y_j)$. La profundidad inicial se tomará como un plano, más preciso aún, $p_0(x) = 0$.

En \mathbb{R}^3 , la función objetivo en el caso continuo es $\int_a^b \int_c^d \int_{p_0(x)}^{p(x)} g(x_i, y_j, z) dz = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{p_0(x)}^{p(x)} g(x, y, z) dz dy dx$. Aproximando por el método del rectángulo las integrales con respecto a x e y se obtiene $\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} h_1 h_2 \int_{p_0(x)}^{p(x)} g(x, y, z) dz dy dx$, que será la función objetivo del problema discretizado.

Para la restricción de pendiente se estiman las derivadas con un método centrado que tiene un error más pequeño de aproximación como se muestra en [3], así la restricción de pendiente en cada punto interior del rectángulo es

$$\left(\frac{z_{i+1,j} - z_{i-1,j}}{2h_1} \right)^2 + \left(\frac{z_{i,j+1} - z_{i,j-1}}{2h_2} \right)^2 \leq w(x_i, y_j, z_{i,j})^2 \quad \forall i, j \in \{2, \dots, n-1\}$$

Finalmente la forma que adopta el modelo de optimización es:

$$\text{máx} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} h_1 h_2 \int_0^{z_{i,j}} g(x_i, y_j, z) dz \quad (3.1)$$

$$z_{1,j} = z_{n,j} = 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (3.2)$$

$$z_{i,1} = z_{i,n} = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (3.3)$$

$$z_{i,j} \geq 0 \quad \forall i, j \in \{2, \dots, n-1\} \quad (3.4)$$

$$\left(\frac{z_{i+1,j} - z_{i-1,j}}{2h_1} \right)^2 + \left(\frac{z_{i,j+1} - z_{i,j-1}}{2h_2} \right)^2 \leq w(x_i, y_j, z_{i,j})^2, \quad \forall i, j \in \{2, \dots, n-1\} \quad (3.5)$$

A continuación, se prueba un resultado análogo a la proposición 2.10 del capítulo 2.

Proposición 3.1 *Sea z una solución del problema anterior, con $n \geq 4$. Si $g(x, \cdot) \in \mathcal{C}([\underline{z}, \bar{z}])$, $w(x, y, z) = \bar{w} > 0$ constante y existe $(i, j) \in \{2, \dots, n-1\}$ tal que en él y sus 4 puntos más cercanos, $(i-1, j)$, $(i+1, j)$, $(i, j-1)$, $(i, j+1)$ la restricción de pendiente (3.5), no es activa entonces.*

$$(i) \quad g(x_i, y_j, z_{i,j}) \leq 0$$

$$(ii) \quad z_{i,j} = 0 \vee g(x_i, y_j, z_{i,j}) = 0$$

Demostración: Como z es una solución del problema anterior, para poder usar KKT se probará que se cumple la hipótesis de Slater.

Sea ahora el vector \bar{z} definido como:

$$\bar{z}_{1,j} = \bar{z}_{n,j} = 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$$\bar{z}_{i,1} = \bar{z}_{i,n} = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\bar{z}_{i,j} = c = \bar{w}' 2 \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \quad \forall i, j \in \{2, \dots, n-2\}$$

Como $\bar{w}, h_1, h_2 > 0$, entonces (3.4) se cumple de manera estricta.

Para $i, j \in \{3, \dots, n-3\}$ la restricción (3.5) se cumple de manera estricta ya que la suma de los cuadrados da 0. Ahora se considera la frontera del cuadrado de $\{2, \dots, n-2\} \times \{2, \dots, n-2\}$.

Si (i, j) están en una arista deben cumplir que $\left(\frac{c}{2h_r}\right)^2 < \bar{w}^2$ y si (i, j) es una de los cuatro vértices debe cumplir que $\left(\frac{c}{2h_1}\right)^2 + \left(\frac{c}{2h_2}\right)^2 < \bar{w}^2$. Como $\left(\frac{c}{2h_r}\right)^2 \leq \left(\frac{c}{2h_1}\right)^2 + \left(\frac{c}{2h_2}\right)^2$ basta corroborar que la última desigualdad se cumple de forma estricta. Haciendo reemplazo de c se obtiene:

$$\left(\frac{c}{2h_1}\right)^2 + \left(\frac{c}{2h_2}\right)^2 = \frac{\bar{w}^2 h_1^2 h_2^2}{4h_1^2} + \frac{\bar{w}^2 h_1^2 h_2^2}{4h_2^2} = \frac{\bar{w}^2}{4} < \bar{w}^2$$

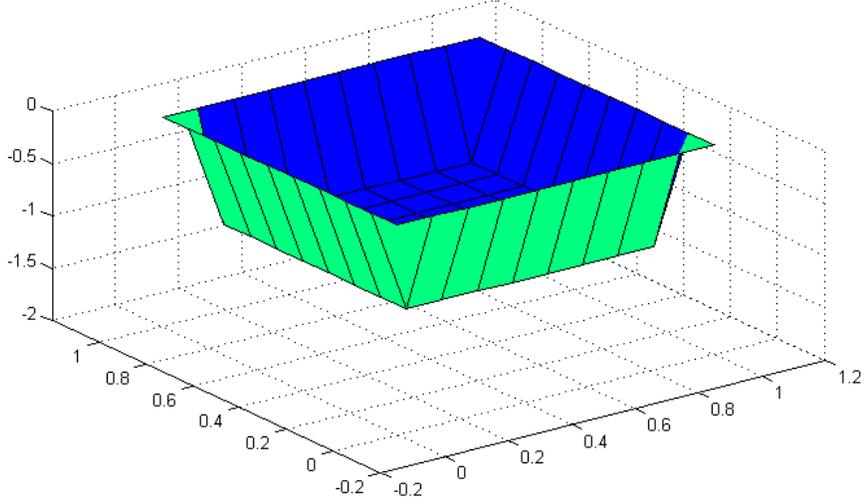


Figura 3.6: Gráfico vector \bar{z}

De este forma z cumple todas las restricciones (3,5) de forma estricta y además las dos restricciones de desigualdad son convexas, por lo que es un punto de Slater así que las ecuaciones de KKT son una condición necesaria para el óptimo del problema anterior. Sean $\mu_{i,j}$ los multiplicadores asociados a las desigualdades (3.4) y $\lambda_{i,j}$ los multiplicadores asociados a 3.5.

A los multiplicadores asociados a la restricción (3.4) se les denotará por μ y a los asociados a la restricción (3.5) se les denotará por λ . Supóngase que $i, j \in \{3, \dots, n-2\}$. Notar que $z_{i,j}$ aparece en las restricciones asociadas a $\mu_{i,j}, \lambda_{i,j}, \lambda_{i-1,j}, \lambda_{i+1,j}, \lambda_{i,j-1}, \lambda_{i,j+1}$, por lo que el gradiente de cada función de restricción en la fila correspondiente a $z_{i,j}$ será no nulo solo en esas funciones. Pero además como (3.5) no es activa en ninguno de los 5 puntos mencionados, por lo que se tiene que

$$\lambda_{i,j} = \lambda_{i-1,j} = \lambda_{i+1,j} = \lambda_{i,j-1} = \lambda_{i,j+1} = 0$$

Así la fila correspondiente a $z_{i,j}$ en la ecuación de KKT queda como:

$$-g(x_i, y_j, z_{i,j}) - \mu_{i,j} = 0$$

Lo que equivale a

$$g(x_i, y_j, z_{i,j}) = -\mu_{i,j}$$

Y como $\mu_{i,j} \geq 0$ se prueba (i). Ahora multiplicando por $z_{i,j}$, el lado derecho resulta igual a 0 por la ecuación de holgura que entrega KKT, quedando:

$$z_{i,j}g(x_i, y_j, z_{i,j}) = 0$$

Probando de esta forma (ii) terminando la demostración. □

3.2.1. Adaptación al modelo de bloques

Al igual que en el caso de \mathbb{R}^2 , la discretización del espacio $[a, b] \times [c, d]$ estará dada por el largo y el ancho de cada bloque. Si ponemos que esta discretización divide divide en n puntos el intervalo $[a, b]$ y en m el intervalo $[c, d]$ Los bloques son uniforme y miden c metros de ancho, l metros de largo y h metros de alto.

En este caso la profundidad depende de la posición (x_i, y_j) , por lo que a las profundidades se le denotará por $k_{i,j}$, que será una variable entera positiva que toma valores entre $k_{min,i,j}$ y $k_{max,i,j}$ que representan a la profundidad inicial y máxima de la columna (i, j) .

Cada bloque estará representado por la coordenada de la esquina inferior izquierda de la cara trasera como en 3.4.

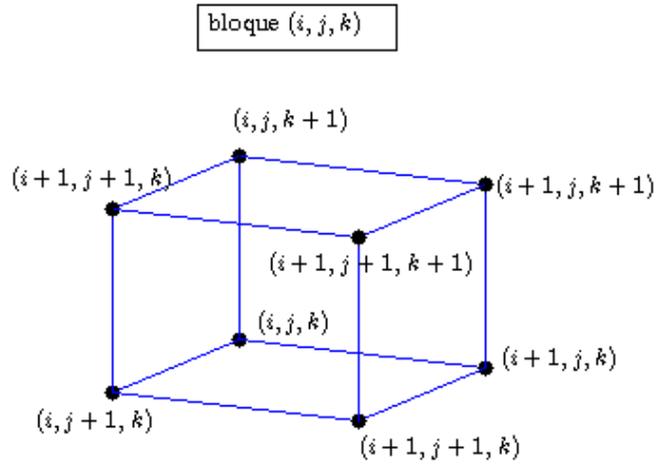


Figura 3.7: Coordenadas del bloque (i, j, k)

Así se definen la variables binarias $z_{i,j,k}$ que indican si el bloque (i, j, k) es o no extraído. La relación de las variables de profundidad con las de z es análogo al caso de \mathbb{R}^2 y se expresa a continuación.

$$k_{i,j} = \left(k_{min,i,j} + \sum_{k=k_{min,i}+1}^{k_{max,i}-1} (z_{i,j,k} - z_{i,j,k+1})(k - k_{min,i,j}) + z_{i,j,k_{max,i,j}}(k_{max,i,j} - k_{min,i,j}) \right) h$$

Las derivadas se estimará de forma progresiva siempre que sea posible y en el caso que no, se estimará de forma regresiva. Esto es, cuando un punto de tiene un bloque pegado a la

derecha y otro en frente, la expresión será de la forma.

$$\left(\frac{k_{i+1,j} - k_{i,j}}{c}\right)^2 + \left(\frac{k_{i,j+1} - k_{i,j}}{l}\right)^2 \leq w(x_i, y_j, k_{i,j})^2$$

Si por ejemplo, el bloque (i, j) no tiene un bloque delante de él, pero si uno atrás, la expresión será.

$$\left(\frac{k_{i+1,j} - k_{i,j}}{c}\right)^2 + \left(\frac{k_{i,j} - k_{i,j-1}}{l}\right)^2 \leq w(x_i, y_j, k_{i,j})^2$$

Otra restricción es que si un bloque (i, j, k) es extraído, todos los de su columna debieron extraerse antes para poder llegar a él, esto se refleja en la siguiente restricción:

$$z_{i,j,k+1} \leq z_{i,j,k} \quad \forall (i, j) \{1, \dots, n-1\} \times \{1, \dots, m-1\}, \forall k \in \{k_{min,i,j} + 1, \dots, k_{max,i,j} - 1\}$$

Además en el borde, los bloques deben ser igual al perfil inicial esto es:

$$z_{1,j,k} = z_{n,j,k} = z_{i,1,k} = z_{i,n,k} = 0, \quad \forall (i, j) \{1, \dots, n-1\} \times \{1, \dots, m-1\} \forall k \in \{k_{min,i,j} + 1, \dots, k_{max,i,j}\}$$

Finalmente, al igual que en el caso de \mathbb{R}^2 , la integral en el rectángulo de coordenadas $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ será la suma bloques de los beneficios de los bloques que quedan encerrados en el prisma de coordenadas $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times \{k_{min,i,j}\}$ en la base superior y $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times \{k_{i,j}\}$ en la base inferior. De esta manera, la función objetivo del problema será:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=k_{min,i,j}}^{k_{max,i,j}} b_{i,j,k} z_{i,j,k}$$

A continuación se presentan los resultados de una mina de dimensiones $25 \times 25 \times 10$ y cada bloque es de $1 \times 1 \times 1$. Con precedencias igual de 45° expresado con la función w constante en todo punto e igual a 2. Los bloques en rojo tienen valor positivo y el resto valor negativo a igual a -1000 . En las siguientes figuras se presenta la solución de resolver con Ampl y usando el solver Cplex.

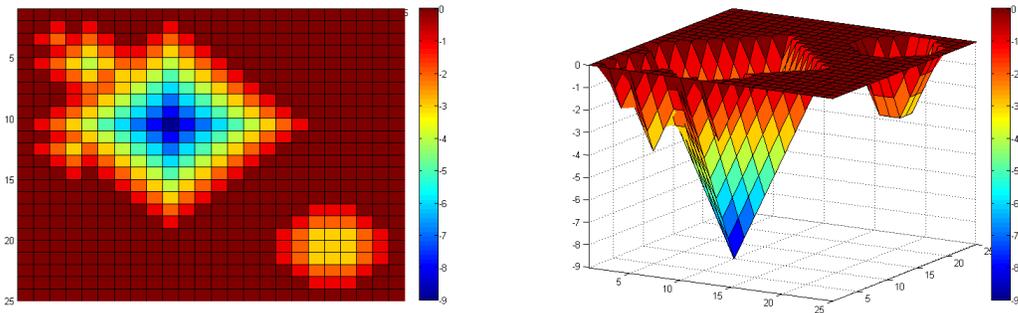


Figura 3.8: Solución ficticia colores.

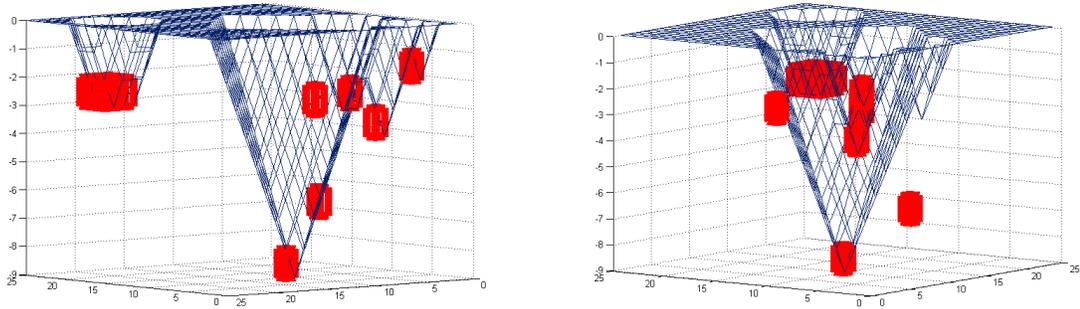


Figura 3.9: Solución ficticia transparente.

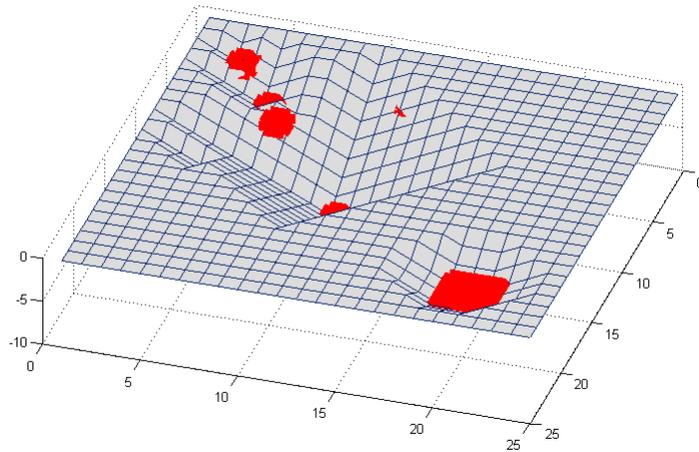


Figura 3.10: Solución ficticia desde arriba.

El valor de la función objetivo fue 557000 y el tiempo ocupado por Ampl para resolverlo fue de 0,046875 segundos. El poco tiempo empleado en resolver el problema da la idea de que podría ser de utilidad.

A continuación se aplicó la discretización a Marvin, una mina ficticia diseñada para testear estos tipos de problemas de un repositorio¹. Para mayor información de como viene los datos, consultar [8]. El prisma más pequeño que envuelve a la mina es de dimensiones $60 \times 61 \times 17$, cada bloque es de $1 \times 1 \times 1$ y se utiliza un ángulo de 45° para calcular las precedencias. El valor objetivo entregado por el programa es 1425769114,548499 y tardó 2531,703s, lo que equivale aproximadamente a 42 minutos. A continuación se muestra la solución al ser graficada en Matlab.

¹<http://mansci-web.uai.cl/minelib/>

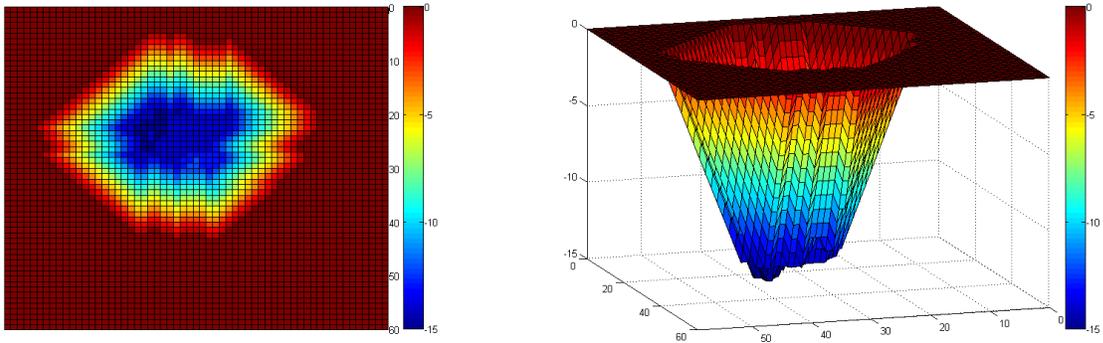


Figura 3.11: Solución marvin colores.

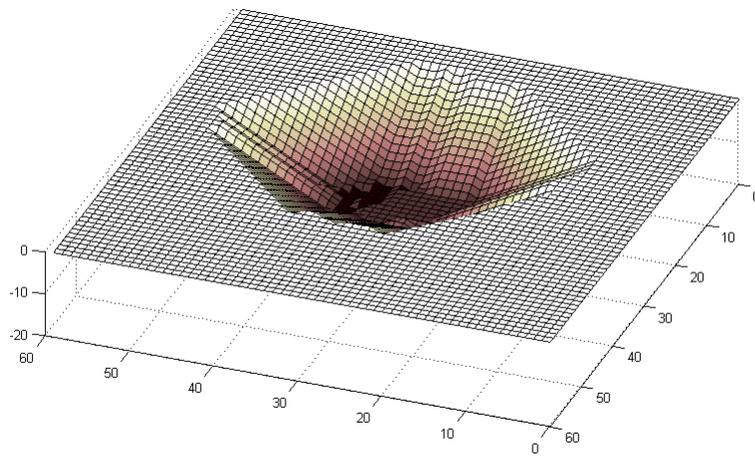


Figura 3.12: Solución marvin desde arriba.

Conclusión

En la presente tesis se demostraron propiedades estructurales de los pits a través de su formulación matemática y se mostraron resultados computacionales de la discretización del modelo continuo en 2 y 3 dimensiones. A continuación se describen por capítulo los principales resultados con sus implicancias y las posibles extensiones.

En el capítulo 1 se formalizó de manera matemática lo que se entiende por *pit* y se probaron propiedades que estos cumplen y como se relacionan los *pits* óptimos de un mismo problema. El resultado principal del capítulo es la demostración del teorema 1.10 que plantea que todos los *pits* asociados a una solución del problema (CDOP), están contenidos en el *pit* asociado a la solución de (FOP) que tiene la mayor cantidad de bloques entre todas las soluciones. Este resultado sustenta en cierta medida a los métodos numéricos que para resolver (CDOP) reducen la cantidad de bloques resolviendo primero (FOP) y luego resuelven (CDOP) sobre el *pit* obtenido como solución de (FOP). La consideración que se debe hacer acá es que para que esto sea válido, se debe obtener la solución de (FOP) con *pit* de mayor cardinal, cosa que es posible asegurar cuando por ejemplo, (FOP) tiene única solución.

En este capítulo se probó además que el teorema 1.10 no se replica en el caso de reemplazar el problema capacitado por el sin capacidad, lo que implica que resolver (CFOP) para encontrar una cota de (CDOP) no resultaría una buena estrategia al momento de encontrar una solución de (CDOP).

Una posible extensión que podría ser estudiada del teorema 1.10, es investigar bajo qué condiciones se mantiene este resultado cuando al problema (CDOP) se le agregan capacidades inferiores en la restricción (1.11) y estas suman menos que la cantidad de bloques presentes en la solución más grande de (FOP). Otra opción es ver si este teorema se sigue cumpliendo cuando se complejiza la formulación de (CDOP) como el modelo presentado en [5].

En el capítulo 2 se trabajó una formulación operacional del modelo continuo de los tres problemas antes mencionados. Aquí se probó que bajo hipótesis de diferenciabilidad, es posible reemplazar el \limsup que aparece en la restricción por el módulo de una derivada. Esto permite caracterizar las soluciones de estos problemas con herramientas del cálculo variacional y del control óptimo. El principal resultado de este capítulo fue probar que la función de densidad de ganancia g , resulta ser menor o igual a 0 en el borde del *pit*, suponiendo que esta es continua y la función que restringe la pendiente, o sea w , es diferenciable en una coordenada. Un estudio a futuro es indagar bajo qué relajaciones de las hipótesis hechas sobre g y w , este resultado se mantiene. En este capítulo ya se vio que la continuidad de g es importante para este resultado a través de un ejemplo, pero no se mencionó nada sobre w .

Además, gracias a la estructura que tienen estos problemas se logró plantear dos duales de (*FOP*₀) como aparecen en [7] y [14]. Queda pendiente un estudio que indique bajo qué condiciones del problema o sus parámetros los teoremas de dualidad de ambas formulaciones se cumplen.

Otro estudio pendiente, es tratar de replicar estas mismas propiedades en el caso \mathbb{R}^3 . Debido a la gran diferencia que hay en el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias con las ecuaciones diferenciales parciales, los resultados variacionales aplicados en el primer caso no son directos sobre el segundo y sumado a que la mayoría de la literatura está hecha en el caso de ecuaciones o inecuaciones diferenciales ordinarias, aumenta la dificultad de probar estas propiedades.

En el último capítulo, se discretizó el problema presentado en el capítulo 2, para el caso \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 , y se adaptó esta discretización al modelo de bloques. Se mostró un ejemplo de una mina con 6250 bloques en el que se resuelve (FOP) de forma muy rápida y certera. También se logró adaptar el modelo a la mina Marvin del repositorio presentando en [8]. Un análisis comparativo con los métodos comúnmente usados quedó pendiente. Finalmente se aprovechó la discretización hecha en \mathbb{R}^3 para probar que la propiedad del capítulo 2 que caracteriza a g en el borde del *pit* se cumple también en este caso.

Bibliografía

- [1] Felipe Alvarez, Jorge Amaya, Andreas Griewank, and Nikolai Strogies. A continuous framework for open pit mine planning. *Mathematical Methods of Operations Research*, 73(1):29–54, 2011.
- [2] Jorge Amaya, Daniel Espinoza, Marcos Goycoolea, Eduardo Moreno, Thomas Prevost, and Enrique Rubio. A scalable approach to optimal block scheduling. In *Proceedings of APCOM*, pages 567–575, 2009.
- [3] Richard L Burden Burden, Richard L Faires, J Douglas Richard L Burden, J Douglas Faires, John H Mathews, KURTIS D John H Mathews, Kurtis D Fink, Steven C CANALE Chapra, RAYMOND P Steven C Chapra, Raymond P Canale, et al. *Análisis numérico*. Number 519.63/. 65. Grupo Editorial Iberoamericana, 1985.
- [4] Louis Caccetta. Application of optimisation techniques in open pit mining. In *Handbook of operations research in natural resources*, pages 547–559. Springer, 2007.
- [5] Louis Caccetta and Stephen P Hill. An application of branch and cut to open pit mine scheduling. *Journal of global optimization*, 27(2-3):349–365, 2003.
- [6] Lamberto Cesari. *Optimization—theory and applications: problems with ordinary differential equations*, volume 17. Springer Science & Business Media, 2012.
- [7] Suresh Chandra, Bruce Desmond Craven, and Iqbal Husain. A class of nondifferentiable continuous programming problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 107(1):122–131, 1985.
- [8] Daniel Espinoza, Marcos Goycoolea, Eduardo Moreno, and Alexandra Newman. Minelib: a library of open pit mining problems. *Annals of Operations Research*, 206(1):93–114, 2013.
- [9] William A Hustrulid, Mark Kuchta, and Randall K Martin. *Open Pit Mine Planning and Design, Two Volume Set & CD-ROM Pack*. CRC Press, 2013.
- [10] David H Jacobson, MM Lele, and Jason L Speyer. New necessary conditions of optimality for control problems with state-variable inequality constraints. *Journal of mathematical analysis and applications*, 35(2):255–284, 1971.
- [11] Manuel Arana Jiménez. *Problema variacional múltiple*. PhD thesis, Universidad de

Sevilla, 2003.

- [12] Jaime San Martin. *Teoría de la medida, apunte del curso*. Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Chile, 2011.
- [13] H Maurer. On optimal control problems with bounded state variables and control appearing linearly. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 15(3):345–362, 1977.
- [14] Bertram Mond and Morgan A Hanson. Duality for variational problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 18(2):355–364, 1967.
- [15] Alexandra M Newman, Enrique Rubio, Rodrigo Caro, Andrés Weintraub, and Kelly Eurek. A review of operations research in mine planning. *Interfaces*, 40(3):222–245, 2010.
- [16] Emmanuel Trélat. *Contrôle optimal: théorie & applications*. Vuibert, 2008.