



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

ESTUDIO DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN PARA LA REDUCCIÓN DE EMISIONES DE
DÍOXIDO DE CARBONO EN REFINERÍAS DE PETRÓLEO

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

PABLO ANDRÉS UGALDE SALAS

PROFESOR GUÍA:
HECTOR RAMIREZ CABRERA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
FELIPE DÍAZ ALVARADO
SALVADOR FLORES MARTINEZ
JOSÉ SOTO SAN MARTÍN

SANTIAGO DE CHILE
2017

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: PABLO ANDRÉS UGALDE SALAS
FECHA: ENERO 2017
PROF. GUÍA: SR. HECTOR RAMIREZ CABRERA

ESTUDIO DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN PARA LA REDUCCIÓN DE EMISIONES DE DÍOXIDO DE CARBONO EN REFINERÍAS DE PETRÓLEO

Este trabajo es una primera aproximación a la inclusión de costos asociados a la reducción de CO_2 en el subproceso de descarga y mezcla de crudos. En este subproceso la cantidad de CO_2 liberado a la atmósfera crece en función del volumen de crudo que se procesa en cada unidad de destilación.

El modelo matemático del subproceso de descarga y mezcla de crudos expuesto en esta memoria corresponde a un problema no lineal mixto (PNLM), donde la no linealidad proviene de restricciones asociadas a la composición de la mezcla de los crudos en los estanques.

Desde un punto de vista matemático el modelo presentado contiene considerables simetrías, lo que se traduce en grandes tiempos de ejecución. Lo anterior fue abordado introduciendo restricciones en la formulación para reducir el espacio de búsqueda. En este aspecto la técnica más interesante y de mejores resultados proviene del modelamiento del orden de las operaciones de una refinería como una palabra perteneciente a un lenguaje regular.

Existen tecnologías capaces de capturar alguna fracción del CO_2 liberado, pero el uso de éstas se traduce en costos económicos para la refinería. Se tiene como primera novedad una modificación del modelo anterior para que este incluya los costos asociados a la reducción de CO_2 .

Naturalmente existe un *tradeoff* entre las emisiones capturadas y las ganancias de la refinería. Esta memoria propone una manera de cuantificar este *tradeoff*. Para lo anterior se desarrolla un modelo multiperiodo del proceso de descarga y mezcla de crudos, el cual considera a la vez las ganancias de la refinería y las emisiones de CO_2 . Utilizando el concepto de pareto eficiencia se plantea un esquema numérico para encontrar las mejores decisiones de calendarización.

Dedicada a mamá y papá, mis primeros profesores.

En memoria del profesor Carlos Lackington.

Agradecimientos

Agradezco a Héctor Ramirez y Felipe Díaz por dirigir esta memoria. Gracias a Salvador Flores por darme siempre una mano, a Pablo Moisset por sus aportes en la programación, a José Soto por sus valiosas correcciones y a Martín Matamala por su ayuda con los quiebres de simetría.

Gracias a mi familia, su apoyo y cariño incondicional son mis cimientos.

Gracias a mis amigos, me mantienen el espíritu en alto.

Este trabajo ha sido financiado por el Centro de Modelamiento Matemático, Proyecto Basal PFB 03.

Tabla de Contenido

Introducción	1
1. Modelamiento de la Concentración de CO₂ en la Atmósfera	4
1.1. Preliminares	4
1.2. Interacción Economía y Concentración de CO ₂	5
1.3. Núcleo de Viabilidad de la Dinámica	7
1.4. Simulaciones Numéricas	9
2. Funcionamiento de una Refinería de Petróleo	11
2.1. Descarga y Mezcla de Crudos	12
2.2. Un Modelo a Tiempo Continuo de la Descarga y Mezcla de Crudos	14
3. Implementación de Planificación Óptima de Descarga y Mezcla de Crudos	22
3.1. Casos de Estudio	23
3.1.1. Problema 1	23
3.1.2. Problema 2	23
3.1.3. Problema 3	24
3.2. Relajaciones Lineales asociadas a Planificación Óptima de Descarga y Mezcla de Crudos	25
3.2.1. Relajación Simple	25
3.2.2. Relajación de McCormick	25
3.3. Problema No Lineal Asociado a la Relajación	27
3.4. Reducción del Espacio de Búsqueda	29
3.4.1. Definiciones Previas	30
3.4.2. Orden Lexicográfico	32
3.4.3. Secuencias Minimales	33
3.4.4. Asignaciones de Duración Nula	34
3.4.5. Modificación Función Objetivo	35
3.4.6. Restricción basada en un Lenguaje Regular	35
3.4.7. Incorporación del Automata Finito Determinista a Planificación Óptima de Descarga y Mezcla de Crudos	38
3.5. Simulaciones Numéricas	40
3.5.1. Calendarización de los problemas	40
3.5.2. Reducción del Espacio de Búsqueda	41
3.6. Comentarios Finales	42
4. Modelo Multiperiodo del Proceso de Descarga y Mezcla de Crudos	43

4.1.	Emisiones de CO ₂ asociadas a Quema de Combustibles	43
4.2.	Problema de Calendarización y Emisiones de CO ₂	44
4.3.	Modelo Multiperiodo	47
4.3.1.	Dinámica Asociada a Calendarizaciones Consecutivas	47
4.3.2.	Conjunto de Ganancias y Emisiones Alcanzables	49
4.3.3.	Discretización del Conjunto de Ganancias y Emisiones Alcanzables	52
4.3.4.	Cortes de Factibilidad del Modelo Multiperiodo	52
4.4.	Simulaciones Numéricas Modelo Multiperiodo Discretizado	55
4.5.	Comentarios Finales	55
5.	Conclusiones y Perspectivas	57
5.1.	Escalabilidad y Extensión de (PNLM)	57
5.2.	Factibilidad del Modelo Multiperiodo	58
5.3.	Reducción del Espacio de Búsqueda del Modelo Multiperiodo	58
5.4.	Extensiones	59
6.	Anexos	60
6.1.	Códigos Capítulo 1	60
6.2.	Códigos y Datos Capítulos 3 y 4	62
6.2.1.	Datos	62
6.2.2.	Códigos	67
	Bibliografía	76

Índice de Tablas

2.1. Conjuntos del problema	15
3.1. Comparación relajaciones para el Problema 1	28
3.2. Comparación relajaciones para el Problema 2	28
4.1. Resumen de la notación utilizada	46
6.1. Parámetros Problema 1	62
6.2. Parámetros Problema 2	63
6.3. Parámetros Problema 3	64
6.4. Parámetros Problema 2	65
6.5. Parámetros Externos Problema 2 $t = 1$	66
6.6. Parámetros Externos Problema 2 $t = 2$	66

Índice de Ilustraciones

1.	Emisiones CO ₂ v/s PIB Global	2
1.1.	Producto Interno Bruto y Ajuste Exponencial	6
1.2.	Emisiones CO ₂ v/s PIB Global	6
1.3.	Tasas de Reducción por año y su efecto en la Concentración de CO ₂	10
2.1.	Divisiones clásicas de una refinería	11
2.2.	Ejemplo de una configuración de una Refinería	13
2.3.	Calendarización Óptima para el Problema 1 (3.1) definido en el capítulo 2.	17
3.1.	Configuración del problema 1	23
3.2.	Configuración del problema 2	24
3.3.	Configuración del problema 3	24
3.4.	Gráfico representando relajación de McCormick	26
3.5.	Tiempos de ejecución total, usando la relajación de McCormick.	29
3.6.	Configuración del problema 1	33
3.7.	AFD del Problema 1	37
3.8.	AFD del Problema 2	39
3.9.	Problema 1	40
3.10.	Problema 2	40
3.11.	Problema 3	41
3.12.	Tiempos de Ejecución Problema 1	41
3.13.	Tiempos de Ejecución Problema 2	42
4.1.	Una configuración Posible de las Unidades de Producción	44
4.3.	Representación de las Emisiones de CO ₂ de las Unidades de Destilación	46
4.4.	Calendarización Problema 2 incluyendo los costos de reducción de CO ₂ (4.3)	47
4.5.	Representación del Modelo Multiperiodo	49
4.7.	Cuatro posibles calendarizaciones del Problema 2.	54
4.8.	Conjunto de Ganancias y Emisiones Alcanzables Discretizado	55

Introducción

La actividad industrial desde comienzos del siglo XIX ha estado ligada a la quema de combustibles fósiles como fuente energética. Lo anterior ha traído como consecuencia un aumento de las concentraciones atmosféricas de los gases emanados, entre ellos el CO₂ o dióxido de carbono. La evidencia científica indica que este aumento de las concentraciones son atribuibles a la actividad humana y que exceden los niveles históricos [11].

Uno de los principales efectos sobre la Tierra es un aumento de la temperatura media. Esto trae por consecuencia cambios en los ecosistemas, por ejemplo, sequías sobre regiones cercanas a la línea del ecuador. Existen también efectos sobre la acidificación de los océanos y ríos lo cual va en un detrimento de la biodiversidad. En vista de lo anterior, en las últimas décadas se han discutido acuerdos entre distintas naciones para reducir las emisiones de CO₂ y otros gases de efecto invernadero, los cuales serán resumidos en la próxima sección.

En general las industrias que utilicen combustibles fósiles como parte de su proceso productivo se verán afectadas por estos acuerdos, y las refinerías de petróleo entran en este paradigma.

Actualmente la concentración de CO₂ en la atmósfera ronda las 400 [ppm] (partículas por millón). Antes de la era de la industrialización estos niveles se acercaban a las 280 [ppm] [14]. El fuerte vínculo de la actividad económica con las emisiones de CO₂ (Ver Figura 1b) permite hacer proyecciones de la concentración atmosférica del gas.

Escenario Político Mundial

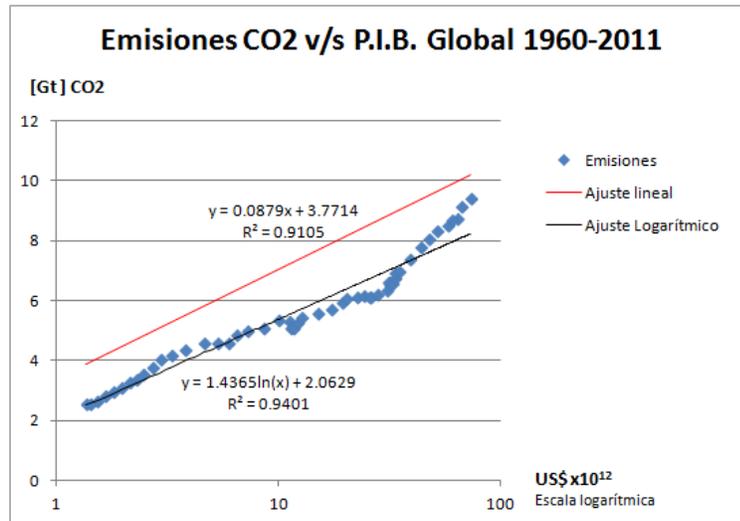
En 1992 se realizó la Convención Marco de las Naciones Unidas sobre el Cambio Climático [6] en un primer intento para definir una metodología para abordar este problema. Se destaca que desde esta época ya se tenía consenso científico sobre la existencia de causas antropogénicas en el calentamiento global.

En 1997 se firmó el Protocolo de Kyoto por 55 estados, un tratado que comprometió a los países firmantes a reducir sus emisiones de gases de invernadero en al menos un 5 % entre el año 2008 y 2012 con respecto a sus emisiones del año 1990. Este tratado comenzó su primer periodo de compromiso el año 2008 y finalizó el 2012. El segundo periodo de compromiso comenzó el 2012 y termina el año 2020.[5]

De manera independiente al protocolo de Kyoto, en diciembre del 2015 se firma el acuerdo

de París, que tiene por objetivo el compromiso de detener el aumento de la temperatura de la tierra por sobre los $2^{\circ}C$ con respecto a niveles de temperatura preindustriales; paralelamente el acuerdo busca aumentar la adaptabilidad de las economías y naciones a los impactos del cambio climático. Con solo 21 países ratificando el tratado, este aún no entra en vigencia.

Figura 1: Emisiones CO₂ v/s PIB Global



(a) Las emisiones de CO₂ contemplan emisiones por quema de combustibles fósiles y manufactura de cemento. Extraído de Carbon Dioxide Information Analysis Center, Oak Ridge National Laboratory.

(b) El PIB Global fue extraído de data.worldbank.org.

Refinerías de Petróleo y Emisiones de CO₂

De acuerdo a Elkamel *et al.* [10] el 90 % de las emisiones de CO₂ de una refinería provienen de la quema de combustibles en las unidades de producción. A su vez la cantidad de combustible utilizado en cada unidad de producción depende de la cantidad de volumen de crudo a tratar en ella.

Dentro de la literatura sobre las emisiones de dióxido de carbono en refinerías de petróleo se pueden encontrar aplicaciones de programación lineal para asociar las emisiones a los productos finales Babusiaux *et al.* [1] y Tehrani *et al.* [24]. En particular los autores concluyen que esta técnica contribuye al análisis del ciclo de vida de los productos.

En general el foco para reducir emisiones de CO₂ está en el proceso de planificación. No se encontraron artículos que hagan alusión a considerar las emisiones de CO₂ en el subproceso de descarga y mezcla de crudos.

Se destaca también un reporte muy completo del sector petrolero de Noruega [8], en el que señalan que el 29 % de las emisiones de CO₂ del país provienen de las Refinerías de Petróleo. Desde hace algunos años tienen políticas de disminución de emisiones y han implementado tecnologías como la inyección de CO₂ a yacimientos petrolíferos vacíos; el CO₂ queda encerrado en

los yacimientos subterráneos lo que evita que ese CO₂ emitido contribuya al efecto invernadero, ya que no retiene el calor del sol.

Estructura de los contenidos

El primer capítulo surge como una necesidad de justificar brevemente la reducción de emisiones de CO₂. Se presenta un modelo de ecuaciones de diferencias para describir la interacción de la actividad económica mundial y la concentración de CO₂ en la atmósfera. A partir de técnicas de control óptimo discreto (teoría de viabilidad) se calculan tasas de reducción que permiten mantener los niveles de CO₂ bajo algún umbral.

En el capítulo 2 se da cuenta a modo general del funcionamiento de una refinería y en específico se discute el subproceso de la descarga y mezclas de crudos. Se explica en detalle un modelo de calendarización a tiempo continuo propuesto por Mouret *et al.* [17]. Este modelo será utilizado en los capítulos posteriores.

En el capítulo 3 se encuentra la implementación del modelo matemático descrito en el capítulo 2. En primera instancia en este capítulo se describe un procedimiento para abordar la no linealidad del modelo. En segundo lugar se aplican técnicas para la reducción del espacio de búsqueda.

El capítulo 4 es el capítulo fundamental de esta memoria. En este se discuten los trabajos ya existentes sobre reducción de CO₂ en refinerías de petróleo. A partir de estas ideas se modela cómo integrar los costos de reducción de CO₂ en el subproceso de descarga y mezcla de crudos. Luego de esto se da paso a un modelo multiperiodo de descarga y mezcla de crudos en donde se modela la interacción de sucesivas calendarizaciones. Finalmente se realizan simulaciones numéricas del modelo multiperiodo que entregan los posibles escenarios en términos de ganancias y emisiones de CO₂.

Finalmente en el capítulo 5 se realizan conclusiones y proyecciones sobre la aplicabilidad de los métodos planteados y posibles líneas de investigación.

En la sección Anexos se encuentran los datos empleados en las distintas simulaciones y los códigos de los programas utilizados.

Capítulo 1

Modelamiento de la Concentración de CO₂ en la Atmósfera

A partir de datos disponibles públicamente (Producto Interno Bruto Mundial, y emisiones de CO₂) se simulan proyecciones para el largo plazo de la concentraciones atmosféricas de CO₂.

1.1. Preliminares

La forma en que el CO₂ se acumula en la atmósfera y aumenta la temperatura de la tierra comprende varios mecanismos complejos. En [11] se encuentra una breve reseña cualitativa de los procesos que afectan al sistema climático. Concluye que la variabilidad de ciertos fenómenos, y sus interdependencias hacen que la dificultad de generar modelos predictivos en el largo plazo sea un problema en sí mismo. También se argumenta que la rápida difusión de los gases en la atmósfera, transforman a esta en un bien común, luego, cualquier esfuerzo por reducir las emisiones de gases de invernadero debe ser en base a consensos planetarios.

En [21] se presenta un modelo de ecuaciones diferenciales acopladas que tiene como variables a la temperatura, la concentración de CO₂ atmosférico y las emisiones humanas. En dicho trabajo, a partir de técnicas de control óptimo, se calcula un techo para las emisiones humanas acumuladas de CO₂ dada una restricción sobre el aumento de temperatura. En esta misma línea, el informe emitido por la OCDE el año 2012 [14], indica que la concentración de CO₂ en la atmósfera no debe superar las 450 [ppm] para el fin del siglo XXI para que la temperatura media de la tierra no sobrepase los 2°C.

El modelo más simple que se encontró en la literatura corresponde a un modelo de ecuaciones de diferencias con dos variables, el estado de la economía y la concentración de CO₂ en la atmósfera. Este modelo es resuelto en [9] como un problema a costo mínimo, mientras que en [7] lo resuelven mediante el cálculo de su núcleo de viabilidad. Todo lo que se presenta en este capítulo corresponde a este último enfoque. Se escoge este modelo por la facilidad que presenta para su resolución numérica.

1.2. Interacción Economía y Concentración de CO₂

En lo que sigue, se presenta el modelo de ecuaciones de diferencias que describe el proceso de acumulación de CO₂ en la atmósfera y su relación con la actividad humana. Sea $\{t_0, \dots, T\}$ el conjunto de años en los que se desea estudiar la evolución de la concentración de CO₂.

A continuación hay una lista de los términos de las ecuaciones (1.1) y (1.2) descritos en detalle:

- M_t es la concentración atmosférica de CO₂ en [ppm].
- Q_t representa la producción de la economía en un periodo (Producto interno bruto), medida en $\$US \times 10^{12}$.
- u_t es el control del problema. Es el porcentaje de reducción de emisiones.
- $\mathcal{E}(\cdot)$ es la función de emisión basada en la producción Q , medida en unidades Gt (gigatoneladas de carbón). Se estima en base al ajuste descrito de la figura 1.2.
- $M_{-\infty}$ es la concentración de CO₂ en la atmósfera en niveles preindustriales, aproximadamente 280 [ppm] [11].
- α es un coeficiente que transforma las emisiones a concentración atmosférica. $\alpha = 0,471 \text{ ppmGtC}^{-1}$ extraído de [7].
- δ es la tasa natural de absorción de CO₂ a sumideros no especificados. $\delta \approx \frac{1}{120} \text{ año}^{-1}$ [7].
- $q \in (0, 1)$ es la tasa de crecimiento de la economía, extraída del ajuste de la figura 1.1.

Las siguientes ecuaciones son un modelo simplificado de la relación entre el estado de una economía siempre creciente y la concentración de CO₂ en la atmósfera. Estas ecuaciones definen la *dinámica* de la economía y la concentración de CO₂.

$$M_{t+1} = M_t + \alpha \mathcal{E}(Q_t)(1 - u_t) - \delta(M_t - M_{-\infty}) \quad (1.1)$$

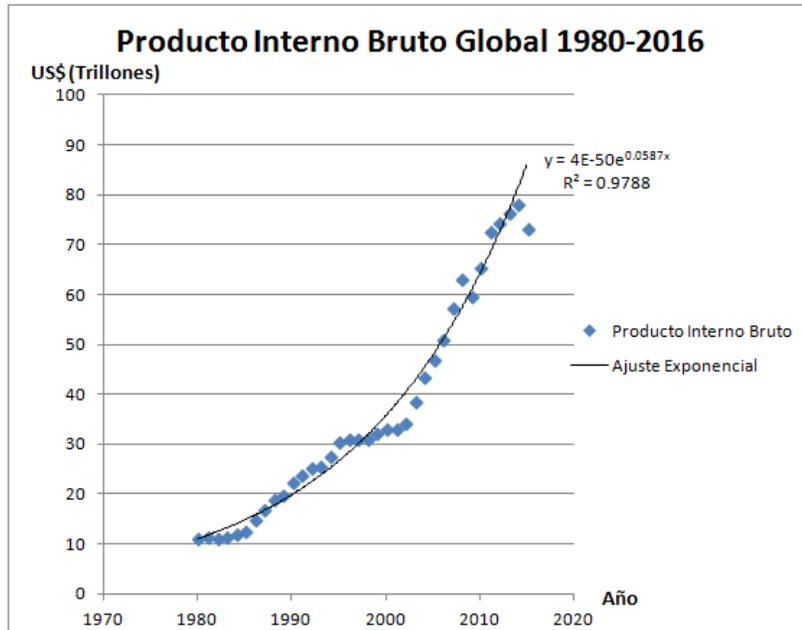
$$Q_{t+1} = (1 + q)Q_t \quad (1.2)$$

La ecuación (1.1) dice que las concentraciones en el periodo $t + 1$ son iguales a las concentraciones en el periodo t más la fracción de emisiones de CO₂ liberado producto de la actividad humana menos la cantidad absorbida por la Tierra.

La ecuación (1.2) caracteriza un crecimiento de la producción económica a una tasa constante.

Observación En la dinámica, la economía no es afectada por la tasa de reducción. Esto es una hipótesis discutible ya que la reducción trae costos asociados.

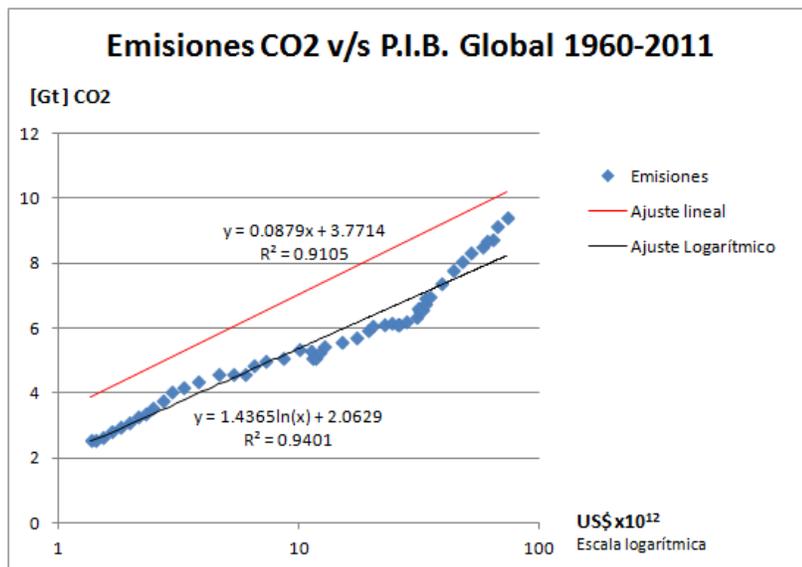
Figura 1.1: Producto Interno Bruto y Ajuste Exponencial



El PIB Global fue extraído de data.worldbank.org.

Figura 1.2: Emisiones CO₂ v/s PIB Global

En el gráfico se puede apreciar la relación entre las emisiones de CO₂ y el PIB global. Los ajustes corresponderán a la función de emisión $\mathcal{E}(\cdot)$. Los gráficos y ajustes fueron generados en Microsoft Excel 2007 (®).



Las emisiones de CO₂ contemplan emisiones por quema de combustibles fósiles y manufactura de cemento. Extraído de Carbon Dioxide Information Analysis Center, Oak Ridge National Laboratory.

El PIB Global fue extraído de data.worldbank.org.

1.3. Núcleo de Viabilidad de la Dinámica

En esta sección se definen formalmente los elementos que permitirán encontrar algún perfil de controles $(u_t)_{t \in \{t_0, \dots, T-1\}}$ de forma que los niveles de CO₂ permanezcan bajo un cierto umbral dado.

Sea $x \in \mathbb{R}_+^2$, sus componentes se denotan $x = (M, Q)$ para representar los niveles de CO₂ y el estado de la economía respectivamente. Sea $u \in [0, 1]$, este representa el porcentaje de mitigación de las emisiones.

Definición 1.1 Dada una función de emisión $\mathcal{E} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, y constantes $\alpha, \delta, q, M_{-\infty}$ se define la dinámica G .

$$G : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$$

$$\begin{pmatrix} M \\ Q \\ u \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} M + \alpha \mathcal{E}(Q)(1 - u) - \delta(M - M_{-\infty}) \\ (1 + q)Q \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Dada esta dinámica es interesante desarrollar la pregunta: ¿cuáles son las decisiones que permiten que el nivel de CO₂ al final del periodo estudiado no pase cierto umbral? Es decir ¿cuáles son los controles $(u_t)_{t \in \{t_0, \dots, T\}}$ tal que $M_T \leq \bar{M}$ con \bar{M} dado? Para lo anterior se definirán los conjuntos de estados admisibles y núcleo de viabilidad.

Se denota como el conjunto de estados admisibles en el tiempo t al conjunto $A(t) \subset \mathbb{R}_+^2$. Este conjunto representa los valores de M_t y Q_t que se consideran aceptables para la sociedad. Un ejemplo se puede ver en (1.7).

Las definiciones posteriores hasta la Proposición 1.5 son independientes de la forma explícita del conjunto $A(t)$.

Definición 1.2 Dado $s \in \{t_0, \dots, T\}$ se define el núcleo de viabilidad a tiempo s como:

$$\text{Viab}(s) := \left\{ (M, Q) \in \mathbb{R}_+^2 \left| \begin{array}{l} \exists \{u_t\}_{t=s}^{T-1} \subset [0, 1], \{(M_t, Q_t)\}_{t=s}^T \text{ tal que} \\ M_s = M, Q_s = Q, \forall t \in \{s, \dots, T-1\} \\ (M_{t+1}, Q_{t+1}) = G(M_t, Q_t, u_t), (M_t, Q_t) \in A(t) \end{array} \right. \right\}$$

Notar que al exhibir los elementos del núcleo de viabilidad se ven todos los niveles de CO₂ y estados de la economía tal que existe una manera de mantenerse dentro del conjunto de estados admisibles. Lo anterior motiva a definir el conjunto de controles viables.

Definición 1.3 Dados $(M, Q) \in \mathbb{R}_+^2$, y un tiempo $t \in \{t_0, \dots, T-1\}$ se define el conjunto de controles viables:

$$\mathcal{B}^{\text{viab}}(t, (M, Q)) := \{u \in [0, 1] \mid G(M, Q, u) \in \text{Viab}(t+1)\} \quad (1.4)$$

A cualquier elemento $u \in \mathcal{B}^{\text{viab}}(t, (M, Q))$ se le dirá un control viable. Además, cualquier función $u^* : \{t_0, \dots, T\} \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow [0, 1]$ tal que $u^*(t, M, Q) \in \mathcal{B}^{\text{viab}}(t, (M, Q))$ se le dirá una retroalimentación viable.

El objetivo de las definiciones anteriores es exhibir los controles viables, o aún mejor encontrar alguna retroalimentación viable. Para el caso de esta dinámica es posible calcular explícitamente el conjunto de controles viables a través del principio de programación dinámica. Para lo anterior se define la función característica.

Definición 1.4 Sea $K \subset \mathbb{R}_+^2$ se define la función característica del conjunto K , a la función $\Psi_K : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dada por

$$\Psi_K(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in K \\ \infty & \text{si } x \notin K \end{cases} \quad (1.5)$$

Con esta definición ya es posible enunciar el principio de programación dinámica.

Proposición 1.5 Se considera la función característica del núcleo de viabilidad a tiempo t es decir $V(t, x) := \Psi_{\mathcal{V}iab(t)}(x)$. Luego $\forall t \in \{t_0, \dots, T-1\}$, $\forall x = (M, U) \in \mathbb{R}_+^2$, $V(\cdot, \cdot)$ resuelve la ecuación de programación dinámica:

$$\begin{cases} V(T, x) = \Psi_{A(T)}(x) \\ V(t, x) = \inf_{u \in [0,1]} (\Psi_{A(t)} + V(t+1, G(x, u))) \end{cases} \quad (1.6)$$

Una demostración de esta proposición se encuentra en [7, , Apéndice A.2].

Utilizando la proposición anterior los autores de [7] describen explícitamente el núcleo de viabilidad y el conjunto de controles viables, para el caso en que se solo se restringe el nivel final de CO_2 . Lo anterior se puede explicitar en términos de los conjuntos admisibles.

$$\begin{cases} A(t) = \mathbb{R}_+^2, \forall t \in \{t_0, \dots, T-1\} \\ A(T) = [0, \bar{M}] \times \mathbb{R}_+ \end{cases} \quad (1.7)$$

Observación El caso en estudio refleja de alguna manera la política menos restrictiva, ya que permite que los niveles de CO_2 varíen libremente antes del tiempo final.

Definición 1.6 Dada una concentración \bar{M} , se definen los umbrales inducidos por \bar{M} como:

$$\bar{M}(t) := (\bar{M} - M_{-\infty})(1 - \delta)^{t-T} + M_{-\infty}, \quad \forall t \in \{t_0, \dots, T\} \quad (1.8)$$

Proposición 1.7 [7] Dados conjuntos admisibles de la forma (1.7), luego el núcleo de viabilidad queda descrito por

$$\mathcal{V}iab(t) = [0, \bar{M}(t)] \times \mathbb{R}_+, \quad \forall t \in \{t_0, \dots, T\}$$

mientras que el conjunto de controles admisibles se escribe como el intervalo:

$$\mathcal{B}^{viab}(t, (M, Q)) = \left[\max \left\{ 0, \frac{(1 - \delta)(M - \bar{M}(t)) + \alpha \mathcal{E}(Q)}{\alpha \mathcal{E}(Q)} \right\}, 1 \right]$$

1.4. Simulaciones Numéricas

En esta sección se muestran simulaciones de los niveles de CO_2 atmosféricos para distintos controles. Se exhiben tipos de retroalimentaciones viables (1.4), de tal manera de no superar un nivel de concentración $\bar{M} = 450$ [ppm] de CO_2 para el año 2114, partiendo desde el 2015.

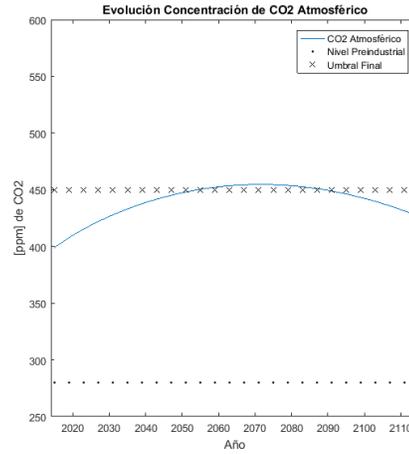
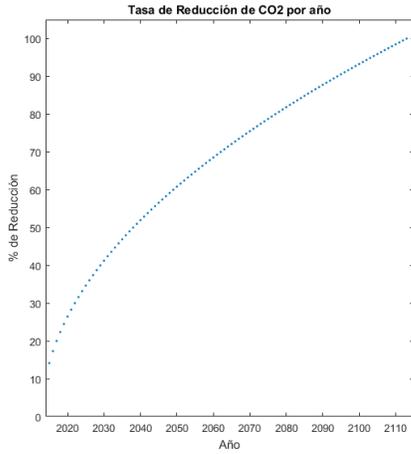
Notar que en la figura 1.3 (a) se sobrepasa levemente el umbral final, mientras que en (b) la concentración de CO_2 en la atmósfera llega aproximadamente a los 500 ppm. Para el caso en que solo se fija el umbral final, ambas políticas (a) y (b) son aceptables según (1.7), pero en el caso de (b) para poder llegar al umbral final se debe reducir en un 100 % las emisiones de CO_2 , lo cual es poco realista, representa en cierto sentido un gran cambio tecnológico. Se observa finalmente en (c) el caso extremo de que se dejara de emitir en su totalidad CO_2 desde el año 2015, notar que en 100 años no se llegaría a los niveles de concentración preindustriales.

Finalmente se remarca que si bien el modelo presentado es simple y obvia muchos mecanismos del sistema climático, está basado en trabajos científicos previos y utilizando datos reales y ajustes razonables para el parámetro q y la función de emisión $\varepsilon(\cdot)$ logra mostrar la necesidad de empezar a reducir considerablemente las emisiones de dióxido de carbono en el corto plazo dada la lenta absorción que tiene la Tierra.

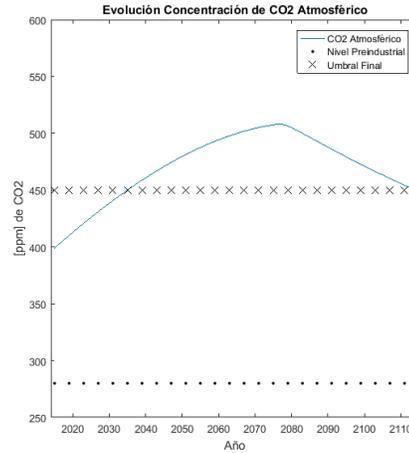
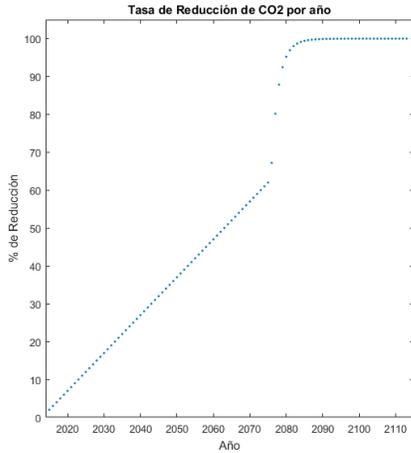
Tomando en cuenta la naciente voluntad política para enfrentar este problema, las industrias sustentadas por la quema de combustibles fósiles probablemente se vean enfrentadas a regulaciones cada vez más estrictas. En esa línea la motivación de esta memoria es incorporar los costos asociados a reducir las emisiones de dióxido de carbono en el subproceso de descarga y mezcla de crudos.

Figura 1.3: Tasas de Reducción por año y su efecto en la Concentración de CO₂.

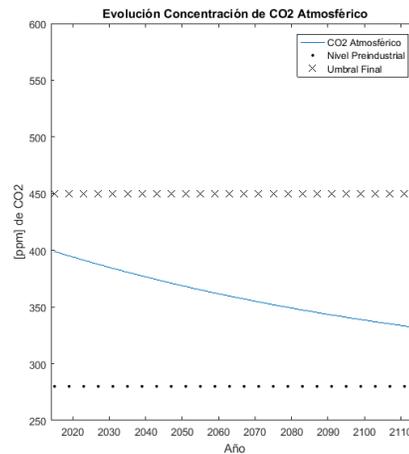
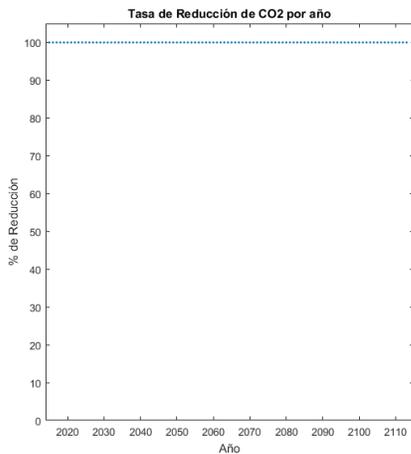
(a)



(b)



(c)



En el anexo se pueden encontrar los códigos utilizados para estas simulaciones. Los coeficientes δ y α fueron extraídos de [9]. El coeficiente q resulta del ajuste de la figura 1.1. Se utilizó el ajuste logarítmico de la figura 1.2 para la función $\varepsilon(\cdot)$.

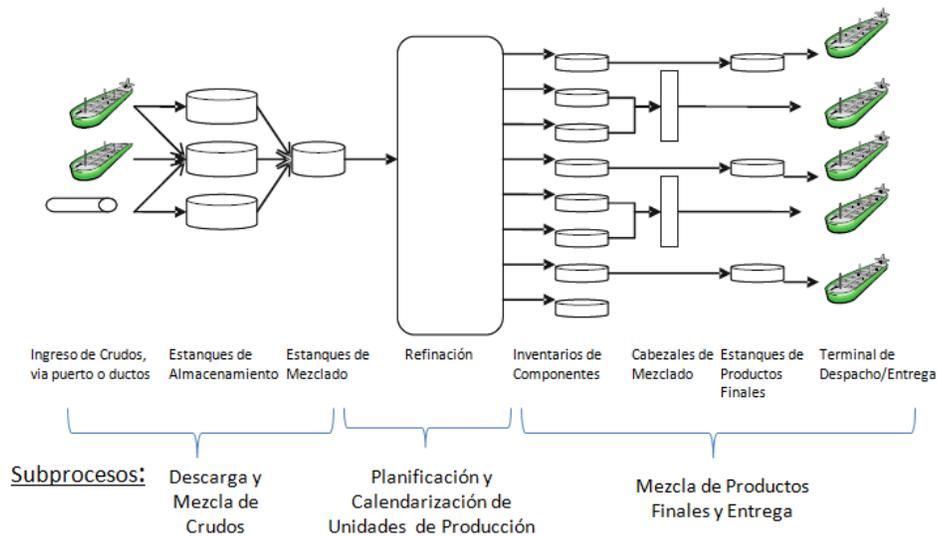
Capítulo 2

Funcionamiento de una Refinería de Petróleo

Una refinería puede ser vista como una gran estación industrial y química, donde se transmiten mezclas de hidrocarburos entre sus unidades. Su cadena productiva abarca desde la compra de crudos, su descarga y mezcla, hasta su refinación, mezcla de productos finales y despacho.

Unificar toda la cadena de producción en un solo modelo de optimización es muy complejo, es por eso que en la literatura [2] se divide todo el proceso productivo en tres subprocesos como se muestra en la Figura 2.1¹.

Figura 2.1: Divisiones clásicas de una refinería



El subproceso Descarga y Mezcla de Crudos tiene como objetivo maximizar las ganancias marginales al definir la circulación de crudos a través de los estanques de almacenamiento y mezclado. Esto se realiza respetando a la vez los volúmenes de crudo y sus concentraciones de propiedades

¹Imagen extraída del artículo [2].

químicas que deben ingresar a las unidades de destilación; estos volúmenes están determinados por la programación de la producción definidas en el proceso de Planificación de las Unidades de Producción.

La calendarización se intenta realizar para horizontes de tiempo de una a dos semanas. Las herramientas matemáticas a utilizar usualmente son Problemas no-Lineales Mixtos, donde la no linealidad proviene del cálculo de propiedades químicas al mezclar diferentes crudos. El modelo matemático presentado en este capítulo corresponde a este subproceso.

La Planificación de Unidades de Producción corresponde a la toma de decisiones sobre qué crudos comprar y qué producir para horizontes de dos a tres meses. De esta manera el planificador puede determinar el modo de operación de las distintas unidades de producción; un cambio en el modo de operación en una unidad de producción trae como consecuencias una reducción de la capacidad y calidad de refinación durante un periodo [10]. En esta línea se destaca a Neiro *et al.* [18] [19], en estos trabajos presentan una planificación de varias semanas para la producción de una refinería de Petrobras en Brasil donde integra aleatoriedad en la demanda de productos y precios de los crudos.

La Calendarización de Unidades de producción es definida posteriormente a la planificación. Corresponde a determinar los tiempos de ejecución específicos de las unidades para horizontes de tiempo de días. Nada asegura que la calendarización sea posible de realizar dada una planificación, por lo tanto es importante estudiar qué elementos de la calendarización deben considerarse al momento de la planificación [2].

El subproceso de Mezcla de Productos Finales y Entrega corresponde a encontrar la mejor forma de mezclar las componentes para satisfacer los requerimientos de los productos finales. Existen propiedades químicas que no satisfacen relaciones lineales al momento de combinar distintos componentes forzando a utilizar modelos no lineales de optimización. Se divide esta etapa en el largo plazo, donde se buscan recetas de mezclado que maximicen las ganancias dadas restricciones de cantidad y calidad. En el corto plazo se requiere asignar en detalle cómo realizar estas mezclas incluyendo restricciones operacionales y temporales.

Es en el subproceso de Planificación y Calendarización de Unidades de Producción donde se encuentra la mayor cantidad de artículos respecto a la incorporación de la reducción de CO₂ a costo mínimo. En el capítulo tres se realiza un resumen de la literatura al respecto. Inspirándose en este se incluirán los costos marginales asociados a la reducción de CO₂ en la etapa de descarga y mezcla de crudos.

2.1. Descarga y Mezcla de Crudos

El objetivo de la programación de la descarga y mezcla de crudos es maximizar las ganancias marginales satisfaciendo los volúmenes que deben ingresar a las unidades de destilación. Se asumen conocidos los tiempos de llegada de los barcos así como sus volúmenes y calidad de los crudos que traen. También se conocen los volúmenes y composición de los crudos en los estanques de almacenamiento y mezclado, sus capacidades máximas y mínimas, y los flujos máximos y mínimos

permitidos entre las operaciones.

La operación de una refinería es un proceso definido por una serie de tareas conectadas y dependientes entre sí. Entre estas tareas una parte proviene del transporte de grandes volúmenes de petróleo por el interior de la refinería a través de ductos. La cantidad de conexiones provoca una multiplicidad de opciones al momento de definir las tareas.

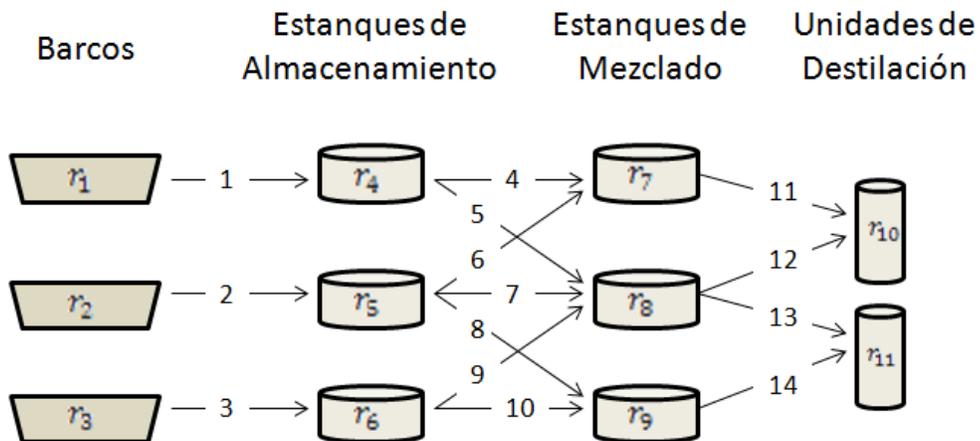
La complejidad del problema viene dada por un lado, por el número de combinaciones posibles de las diferentes tareas. Por otro lado existe una variedad de mezclas posibles para poder componer los productos finales requeridos por los clientes. Una tercera complicación proviene de los tiempos de llegada de los barcos (posibles retrasos) y las fechas comprometidas de entrega de los productos.

Como el mercado es variable la producción de una planta es bastante dinámica en términos de productos, esta es la principal razón de por qué los horizontes de planificación son del orden de días. Además en general una refinería conoce los tiempos de llegada y el contenido de los barcos con solo un par de semanas de anticipación.

Los estanques de mezclado cumplen la función de generar mezclas de crudos tal que algunas propiedades permanezcan en cierto rango especificado. En el caso más simple se pueden calcular estas propiedades a partir de un balance de masas de volúmenes que se mezclan. Lo anterior induce términos bilineales en cualquier formulación que quiera respetar estas propiedades. En la literatura no se encontraron planteamientos que intenten abordar propiedades que obedezcan a formas más complejas para su cálculo.

Figura 2.2: Ejemplo de una configuración de una Refinería

Esquema de las operaciones (flechas) y unidades en la descarga y mezcla de crudos.



Dadas las restricciones anteriores se quiere encontrar algún orden de las operaciones de transferencia entre las distintas unidades (barcos, estanques de almacenamiento, estanques de mezclado, y unidades de destilación), así como los volúmenes transferidos.

Para lo anterior en la literatura se distinguen planteamientos a tiempo discreto y tiempo continuo. Los planteamientos a tiempo discreto consisten en subdividir el horizonte operacional en varios subintervalos, y en cada subintervalo ver cuales operaciones realizar.

Entre los planteamientos a tiempo discreto, uno de los primeros modelos de calendarización de la descarga y mezcla de crudos fue presentado en 1996 por Lee *et al.* [12]. En la misma línea por ejemplo Wenkai *et al.* [25] mejoran el modelo de Lee *et al.* al reducir el número de variables binarias e incluir la posibilidad de que múltiples flujos puedan entrar a los estanques.

Por otro lado los planteamientos a tiempo continuo deben encontrar una secuencia de operaciones, así como sus tiempos de partida y finalización que permitan satisfacer las restricciones anteriores. La diferencia con los planteamientos a tiempo discreto es que no se subdivide el horizonte operacional para encontrar la calendarización, lo cual es conveniente en un proceso donde las operaciones pueden durar del orden de minutos a días. Los primeros modelos a tiempo continuo en la literatura se encuentran en el año 2004 y provienen de Reddy *et al.* [22] y de Pinto y Moro [16].

Sobre las dimensiones del problema real se observa que en [16] resuelven un ejemplo real que contiene cuatro unidades de destilación y 6 estanques en total. No obstante esto es un ejemplo pequeño, hoy en día existen refinerías medianas que poseen del orden de 40 estanques y otras 40 unidades de destilación.

En la próxima sección se da cuenta del modelo a tiempo continuo de Mouret *et al.* [17]. El cual va en la línea del modelo de Reddy *et al.* [22].

2.2. Un Modelo a Tiempo Continuo de la Descarga y Mezcla de Crudos

Basado en el planteamiento de Mouret *et al.* [17] se identifican los recursos de una refinería de la siguiente manera:

- Barcos.
- Estanques de almacenamiento para los crudos que llegan.
- Estanques de mezclado. Estos tienen la finalidad de crear mezclas de crudo definidas en el proceso Planificación de las Unidades de Producción.
- Unidades de Destilación. Aquí es donde las mezclas logradas en los estanques ingresan para ser procesadas y transformadas en productos finales.

El objetivo de una refinería es el de maximizar utilidades marginales en un horizonte de producción fijo.

Para lo anterior se deben determinar:

- El orden en que se realizan las operaciones.
- Tiempos de partida y duración de las operaciones.
- Volúmenes transferidos durante las operaciones.

Para definir el orden se utiliza una estructura conocida como cupos de prioridad. Se postula *a priori* un número n y luego para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ (cada i representa un cupo) se asigna alguna operación v . Así si existen restricciones sobre el funcionamiento al mismo tiempo de dos

operaciones v y w asignadas a los cupos i y j , respectivamente, se impone que la operación v comience primero que la operación w si $i < j$. Este mecanismo queda descrito matemáticamente en las restricciones tituladas **Operaciones no Solapadas**.

En lo que sigue se dará una descripción de cada uno de los conjuntos, variables, parámetros y restricciones que definen el modelo matemático de Mouret para el problema recién descrito.

Tabla 2.1: Conjuntos del problema

<u>Símbolo</u>	<u>Descripción</u>
T	Cupos de prioridad. Corresponde al conjunto $\{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$.
W_B	Operaciones de descarga de crudo de los barcos.
W_T	Operaciones de transferencia entre los estanques de almacenamiento y mezclado.
W_D	Operaciones de transferencia hacia las unidades de destilación.
W	Todas las operaciones. Notar que $W = W_B \cup W_T \cup W_D$.
$(R_B, <)$	Conjunto de barcos que llegan a la refinería. $<$ denota un orden del conjunto.
R_A	Conjunto de estanques de almacenamiento.
R_M	Conjunto de estanques de mezclado.
R_D	Conjunto de unidades de destilación.
R	Conjunto de todos los recursos. Notar que $R = R_B \cup R_A \cup R_M \cup R_D$.
I_r	Conjunto de operaciones que entran al recurso $r \in R$. Notar que $I_r \subset W$.
O_r	Conjunto de operaciones que salen del recurso $r \in R$. Notar que $O_r \subset W$.
C	Conjunto de tipos de crudos.
K	Conjunto de propiedades de los crudos.

Las variables para este problema son:

- **Variable de asignación:** $Z_{iv} \in \{0, 1\}$, $i \in T$, $v \in W$. Toma el valor 1 si al cupo i se le asignó la operación v , 0 en caso contrario. Se utilizará equivalentemente la matriz $Z \in \{0, 1\}^{|T| \times |W|}$ para referirse a las asignaciones. Estas variables definen la *secuencia de operaciones* (3.8).
- **Tiempo de partida:** $S_{iv} \in \mathbb{R}_+$, $i \in T$, $v \in W$. Instante cuando comienza la operación v si al cupo i le fue asignada la operación v , 0 en caso contrario. Se utilizará equivalentemente la matriz $S \in \mathbb{R}_+^{|T| \times |W|}$ para referirse a todos los tiempos de partida. Se utilizan días como unidad de medida.
- **Duración:** $D_{iv} \in \mathbb{R}_+$, $i \in T$, $v \in W$. Tiempo que demora la ejecución de la operación v si al cupo i le fue asignada la operación v , 0 en caso contrario. Se utilizará equivalentemente la matriz $D \in \mathbb{R}_+^{|T| \times |W|}$ para referirse a todas las duraciones. Se utilizan días como unidad de medida.
- **Volumen Total Transferido:** $V_{iv} \in \mathbb{R}_+$, $i \in T$, $v \in W$. Volumen total de crudo transferido en la operación v si al cupo i se le asignó la operación v , 0 en caso contrario. Se utilizará equivalentemente la matriz $V \in \mathbb{R}_+^{|T| \times |W|}$ para referirse a todos los volúmenes transferidos. Se utiliza *Miles de barriles* [Mbb] estadounidenses como unidad de volumen. Cada barril [bb] es aproximadamente equivalente a 159 litros.
- **Volumen Parcial Transferido:** $V_{ivc} \in \mathbb{R}_+$, $i \in T$, $v \in W$, $c \in C$. Volumen transferido de crudo tipo c en la operación v si al cupo i se le asignó la operación v , 0 en caso contrario. Se utilizará equivalentemente las matrices $V_c \in \mathbb{R}_+^{|T| \times |W|} \forall c \in C$, para referirse a todos los

volumenes parciales de tipo c transferidos. Se utilizará [Mbb] como unidad de volumen.

- **Volumen Total Estanque:** $L_{ir} \in \mathbb{R}_+$, $i \in T$, $r \in R_A \cup R_M$. Volumen total de crudo en el estanque r antes de la operación v asignada al cupo i . Se utilizará equivalentemente la matriz $L \in \mathbb{R}_+^{|I| \times (|R_A| + |R_B|)}$ para referirse a todos los volúmenes de los estanques. Se utilizará [Mbb] como unidad de volumen.
- **Volumen Parcial Estanque:** $L_{irc} \in \mathbb{R}_+$, $i \in T$, $r \in R_A \cup R_M$, $c \in C$. Volumen de crudo tipo c en el estanque r antes de que ocurra la operación v asignada al cupo i . Se utilizarán las matrices $L_c \in \mathbb{R}_+^{|I| \times (|R_A| + |R_B|)} \forall c \in C$ para referirse a todos los volúmenes parciales de tipo c en los estanques. Se utilizará [Mbb] como unidad de volumen.

Observación La mayoría de las variables del problema valdrán 0, en particular $Z_{iv} = S_{iv} = D_{iv} = V_{iv} = V_{ivc} = 0$ si al cupo i **no** se le asignó la operación v .

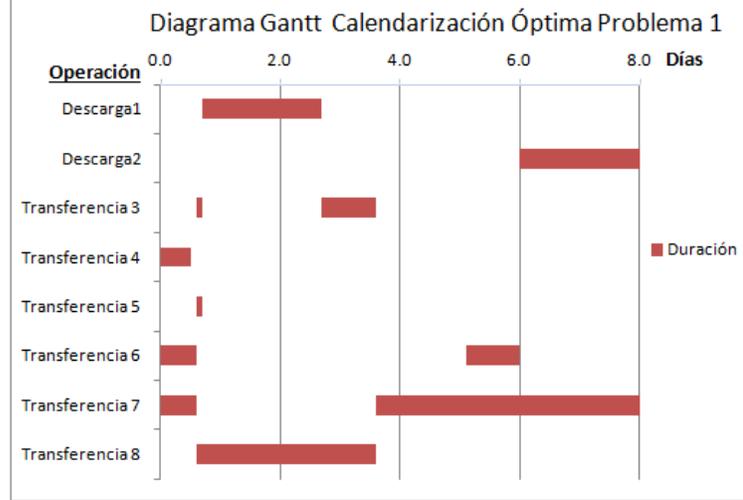
Los parámetros de este problema están dados por:

- **Número de cupos de prioridad:** $n \in \mathbb{N}$. El valor n representa cuantas operaciones son necesarias para resolver el problema y debe ser definido a priori. Se debe asignar para cada $i \in T$ una y solo una operación $v \in W$. Este mecanismo se detallará una vez que se definan las restricciones.
- **Horizonte de operación:** H . Tiempo en el cual se deben ejecutar las operaciones. Se utiliza días como unidad de tiempo.
- **Rango de volumen transferido:** $[V_v, \bar{V}_v]$, $v \in W$. Intervalo del volumen mínimo y máximo de transferencia permitido en la operación v . Se utilizará [Mbb] como unidad de volumen.
- **Demanda:** D_r , $r \in R_M$. Volumen de crudo demandado en el estanque r . Se utilizará [Mbb] como unidad de volumen.
- **Ganancias Marginales:** G_c , $c \in C$. Ganancias marginales por unidad de volumen del crudo tipo c . Se utiliza dolares por barril [US\$ / bbl] como unidad.
- **Número de operaciones de destilación:** $\{N_{\underline{D}}, \dots, \bar{N}_D\}$. Rango para la cantidad de operaciones de destilación.
- **Rango de flujos:** $[FR_v, \bar{FR}_v]$, $v \in W$. Intervalo de los flujos mínimos y máximos durante la operación v . Se utiliza miles de barriles por día [Mbb/día] como unidad.
- **Tiempos de llegada de los barcos:** $S_r \in [0, H]$, $r \in R_B$. Se utiliza días como unidad de tiempo.
- **Especificaciones de productos:** $[X_{vk}, \bar{X}_{vk}]$, $v \in W_D$, $k \in K$. Intervalo de la mínima y máxima concentración permitida de la propiedad k transferida durante la operación v . Los productos finales deben respetar niveles de concentración de las distintas propiedades, esta restricción se impone sobre las transferencias de salida de los estanques de mezclado.
- **Volumen inicial total:** L_{0r} , $r \in R_B \cup R_A \cup R_M$. Volumen inicial en el estanque r . Se utilizará [Mbb] como unidad de volumen.
- **Volumen inicial parcial:** L_{0rc} , $r \in R_B \cup R_A \cup R_M$, $c \in C$. Volumen inicial de crudo tipo c en el recurso r . **Obs:** $L_{0r} = \sum_{c \in C} L_{0rc}$.
- **Propiedades de los Crudos:** X_{ck} , $c \in C$, $k \in K$. Concentración de la propiedad k en el crudo tipo c . Medida como la fracción de masa.

- **Capacidad de Estanques:** $[L_r, \bar{L}_r]$ $r \in R$. Intervalo de niveles mínimos y máximos de volumen permitido en el recurso r . Se utilizará [Mbb] como unidad de volumen.

Figura 2.3: Calendarización Óptima para el Problema 1 (3.1) definido en el capítulo 2.

Notar que la duración de las operaciones van desde horas a días.



Con la notación ya introducida es posible definir las restricciones del modelo y su función objetivo.

- **Asignación:** Una y solo una operación es asignada a cada cupo de prioridad.

$$\sum_{v \in W} Z_{iv} = 1, \quad \forall i \in T \quad (2.1)$$

- **Cardinalidad:** Las siguientes restricciones limitan la cantidad de cupos de prioridad que se le pueden asignar a las operaciones de descarga (W_B) y de transferencia a las unidades de destilación (W_D).

1. Los barcos $r \in R_B$ deben descargar una y solo una vez. Esta restricción proviene de consideraciones operacionales.

$$\sum_{\substack{i \in T \\ v \in O_r}} Z_{iv} = 1, \quad \forall r \in R_B \quad (2.2)$$

2. El número de operaciones de destilación es acotado, esta restricción proviene de que existen costos asociados a aumentar el número operaciones de destilación.

$$N_D \leq \sum_{\substack{i \in T \\ v \in W_D}} Z_{iv} \leq \bar{N}_D \quad (2.3)$$

- **Descarga:** Existe un orden sobre R_B asociado a qué barco llega primero a la refinera. En conjunto con la ecuación (2.2), la restricción (2.4) deja infactible a asignaciones que ubiquen antes a una operación de descarga de un barco r_2 que llega después que r_1 .

Notar que la expresión de la izquierda es la suma sobre todos los cupos de prioridad anteriores al cupo i asignados a operaciones de descarga del barco r_2 , mientras que la expresión de la derecha es la suma sobre todos los cupos de prioridad iguales o superiores al cupo i asignados al barco r_1 .

$$\sum_{\substack{j < i \\ v \in O_{r_2}}} Z_{jv} + \sum_{\substack{j \geq i \\ v \in O_{r_1}}} Z_{jv} \leq 1, \quad \forall i \in T, \forall r_1, r_2 \in R_B, r_1 < r_2, \quad (2.4)$$

- **De Variables:** Las siguientes restricciones son imposiciones sobre los rangos que puede tener cada variable, notar que todas las variables resultan acotadas. Además si no se asigna el cupo i a la operación v entonces $S_{iv} = D_{iv} = V_{iv} = 0$.

1. El tiempo de partida más la duración de una operación no deben superar el horizonte de operaciones.

$$S_{iv} + D_{iv} \leq H \cdot Z_{iv}, \quad \forall i \in T, \forall v \in W \quad (2.5)$$

2. Máximo y mínimo volúmen permitido en la operación v .

$$V_{iv} \leq \bar{V}_v Z_{iv}, \quad \forall i \in T, \forall v \in W \quad (2.6)$$

$$V_{iv} \geq \underline{V}_v Z_{iv}, \quad \forall i \in T, \forall v \in W \quad (2.7)$$

3. La suma de los volúmenes sobre los tipos de crudos debe ser igual al volumen total.

$$\sum_{c \in C} V_{ivc} = V_{iv}, \quad \forall i \in T, \forall v \in W \quad (2.8)$$

4. El volumen total y parcial de crudo en cada estanque antes de la operación asignada al cupo i es igual a lo que ha entrado menos lo que ha salido.

$$L_{ir} = L_{0r} + \sum_{\substack{j < i \\ v \in I_r}} V_{jv} - \sum_{\substack{j < i \\ v \in O_r}} V_{jv}, \quad \forall i \in T, \forall r \in R \quad (2.9)$$

$$L_{irc} = L_{0rc} + \sum_{\substack{j < i \\ v \in I_r}} V_{jvc} - \sum_{\substack{j < i \\ v \in O_r}} V_{jvc}, \quad \forall i \in T, \forall r \in R, \forall c \in C \quad (2.10)$$

- **Destilación continua:** Las unidades de destilación deben funcionar durante todo el horizonte operacional.

$$\sum_{\substack{i \in T \\ v \in I_r}} D_{iv} = H, \quad \forall r \in R_D \quad (2.11)$$

- **Llegada de los barcos:** El tiempo de partida de las operaciones de los barcos debe ser posterior a su llegada S_r .

$$S_{iv} \geq S_r Z_{iv}, \quad \forall i \in T, \forall r \in R_B, \forall v \in O_r \quad (2.12)$$

- **Flujos:** Se deben respetar las capacidades de los flujos en cada operación.

$$\underline{F}R_v D_{iv} \leq V_{iv} \leq \bar{F}R_v D_{iv}, \quad \forall i \in T, \forall v \in W \quad (2.13)$$

- **Operaciones no solapadas:** Todas las restricciones de este ítem son similares en estructura, consisten en no permitir que ciertas operaciones funcionen al mismo tiempo al prohibir que el comienzo de una operación sea superior la suma de la partida y la duración de otra operación.

Notar que el lado derecho de cada desigualdad incluye dos términos, de los cuales uno y solo uno siempre se anula.

1. Solo puede descargar un barco a la vez.

$$\sum_{v \in W_B} (S_{iv} + D_{iv}) \leq \sum_{v \in W_B} S_{jv} + H(1 - \sum_{v \in W_B} Z_{jv}), \quad \forall i, j \in T, i < j \quad (2.14)$$

2. Las operaciones de entrada y salida sobre los estanques de almacenamiento y mezclado no pueden realizarse al mismo tiempo.

$$\sum_{v \in I_r} (S_{iv} + D_{iv}) \leq \sum_{v \in O_r} S_{jv} + H(1 - \sum_{v \in O_r} Z_{jv}), \quad \forall i, j \in T, i < j, \forall r \in R_A \cup R_M \quad (2.15)$$

$$\sum_{v \in O_r} (S_{iv} + D_{iv}) \leq \sum_{v \in I_r} S_{jv} + H(1 - \sum_{v \in I_r} Z_{jv}), \quad \forall i, j \in T, i < j, \forall r \in R_A \cup R_M \quad (2.16)$$

3. Los estanques de mezclado solo pueden cargar una unidad de destilación a la vez.

$$\sum_{v \in O_r} (S_{iv} + D_{iv}) \leq \sum_{v \in O_r} S_{jv} + H(1 - \sum_{v \in O_r} Z_{jv}), \quad \forall i, j \in T, i < j, \forall r \in R_M \quad (2.17)$$

4. Cada unidad de destilación solo puede ser cargada por un estanque de mezclado a la vez.

$$\sum_{v \in I_r} (S_{iv} + D_{iv}) \leq \sum_{v \in I_r} S_{jv} + H(1 - \sum_{v \in I_r} Z_{jv}), \quad \forall i, j \in T, i < j, \forall r \in R_D \quad (2.18)$$

5. Esta desigualdad evita que sea posible que una misma operación ocurra dos veces al mismo tiempo. En caso contrario se podría asignar al cupo i y al cupo $i + 1$ la misma operación, con los mismos tiempos de partida y duración.

$$(S_{iv} + D_{iv}) \leq S_{jv} + H(1 - Z_{jv}), \quad \forall i, j \in T, i < j, \forall v \in W \quad (2.19)$$

- **Umbral para propiedades:** En ciertas operaciones, como las que salen de las unidades de mezclado, es deseable que los volúmenes de crudo transferido cumplan restricciones en cuanto a la concentración de algunas propiedades.

Notar que el término central corresponde a la suma de cada volumen parcial de crudo multiplicado por la concentración de la propiedad k asociada a ese crudo. Mientras que los términos extremos corresponden al volumen total transferido multiplicado por los umbrales deseados.

$$X_{vk} V_{iv} \leq \sum_{c \in C} X_{ck} V_{ivc} \leq \bar{X}_{vk} V_{iv}, \quad \forall i \in T, \forall k \in K, \forall v \in W \quad (2.20)$$

- **Composición:** Se asume que los estanques están mezclados de manera homogénea. Luego la proporción del volumen de crudo tipo c sobre el volumen total en una transferencia (V_{ivc}/V_{iv}) debe ser igual a la proporción de volumen parcial de crudo tipo c sobre el total del estanque de salida (L_{irc}/L_{ir}).

$$V_{ivc}L_{ir} = L_{irc}V_{iv}, \quad \forall i \in T, \forall r \in R, \forall v \in O_r, \forall c \in C \quad (2.21)$$

Notar que si $V_{iv} = V_{ivc} = 0$ (2.21) sigue siendo válida. Esta es la razón para escribir la restricción sin división.

- **Capacidad del estanque:**

1. Se deben respetar los límites del estanque en todo tiempo.

$$L_r \leq L_{ir} \leq \bar{L}_r, \quad \forall i \in T, \forall r \in R \quad (2.22)$$

2. El nivel final del estanque debe respetar los límites.

$$L_r \leq L_{0r} + \sum_{\substack{i \in T \\ v \in I_r}} V_{iv} - \sum_{\substack{i \in T \\ v \in O_r}} V_{iv} \leq \bar{L}_r, \quad \forall r \in R_A \cup R_M \quad (2.23)$$

3. El nivel final de volumen de crudo tipo c en el estanque r debe respetar los límites.

$$0 \leq L_{0rc} + \sum_{\substack{i \in T \\ v \in I_r}} V_{ivc} - \sum_{\substack{i \in T \\ v \in O_r}} V_{ivc} \leq \bar{L}_r, \quad \forall r \in R_A \cup R_M, \forall c \in C \quad (2.24)$$

- **Demanda:** De cada estanque de mezclado debe salir \bar{D}_r , la demanda programada del proceso de planificación.

$$\sum_{\substack{i \in T \\ v \in O_r}} V_{iv} = \bar{D}_r, \quad r \in R_M \quad (2.25)$$

- **Función Objetivo:** Representa la suma de las ganancias marginales percibidas por unidad de volumen tratado en las Unidades de Destilación.

$$\sum_{\substack{i \in T \\ r \in R_D}} \sum_{\substack{v \in I_r \\ c \in C}} G_c V_{ivc} \quad (2.26)$$

Definición 2.1 *Dados los conjuntos y parámetros definidos previamente se denotará por Planificación Óptima de la Descarga y Mezcla de crudos (PODM) al siguiente problema de optimización:*

$$(PODM) \quad \begin{aligned} & \text{máx} && \sum_{\substack{i \in T \\ r \in R_D}} \sum_{\substack{v \in I_r \\ c \in C}} G_c V_{ivc} \\ & \text{s.a.} && (2.1) - (2.25) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Se utiliza la notación $(Z, S, D, V, (V_c), L, (L_c))$ introducida previamente para referirse a todas las variables del problema. Para simplificar la notación (V_c) y (L_c) representan a las matrices de los conjuntos $\{V_c\}_{c \in C}$ y $\{L_c\}_{c \in C}$.

Observación La restricción (2.21) es bilineal, por lo tanto no convexa. Esto permite la aparición de múltiples óptimos locales, lo cual dificulta la resolución numérica de (*PODM*).

Observación En este capítulo el modelo presentado no considera los costos de reducción de CO_2 . Esto se realiza en el capítulo 4.

Capítulo 3

Implementación de Planificación Óptima de Descarga y Mezcla de Crudos

El modelo presentado en el capítulo anterior corresponde a un problema no-lineal mixto no convexo. En este capítulo se dará cuenta de los problemas asociados a la no-linealidad y a las variables binarias.

Para enfrentar el problema de la no-linealidad producto de (2.21), se propone una descomposición en dos etapas de (*PODM*) como la sugerida por Mouret *et al.* [17]. Esto quiere decir que en primera instancia se resuelve un problema lineal mixto que llamaremos relajación de (*PODM*), y en segunda instancia un problema no lineal con solo variables continuas al fijar las variables binarias obtenidas del problema lineal mixto. En caso de existir una solución al problema no lineal, esta será factible para el problema original.

Se utilizó el solver CPLEX [®] para resolver los problemas lineales mixtos asociados. Por otro lado se utilizó el solver MINOS [®] para resolver los problemas no lineales asociados. Todos los programas fueron ejecutados en un procesador Intel I7 2.40 GHz. Se resume el mecanismo descrito anteriormente a continuación:

1. Resolver un problema lineal mixto ignorando (2.21) mediante solver CPLEX [®].
2. Fijar variables de asignación Z_{iv} y reincorporar restricción (2.21).
3. Resolver un problema no lineal con solo variables continuas mediante solver MINOS [®].

Por otro lado las variables binarias presentan considerables tipos de simetrías generando que los tiempos de ejecución crezcan super-exponencialmente en el número de cupos de prioridad (ver Figura 3.5). Esto será remediado mediante el uso de distintas técnicas para romper simetría.

A lo largo de la sección se trabajará con tres casos de estudio para mostrar las distintas herramientas utilizadas para la resolución numérica del modelo.

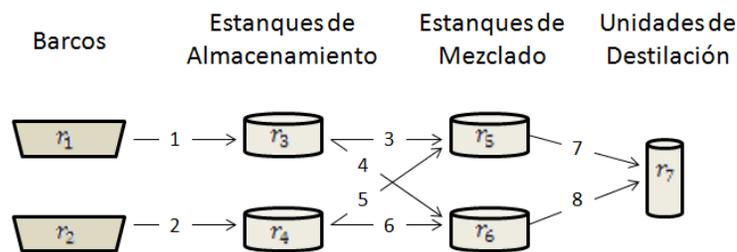
3.1. Casos de Estudio

Se presentan los siguientes casos de estudio extraídos de [17]. Corresponden a tres configuraciones distintas de una refinería y con datos extraídos del mismo artículo. Todos los parámetros utilizados están incluidos en el anexo. Los números i en las flechas son los subíndices de las operaciones v_i que los representan.

3.1.1. Problema 1

Para el problema 1 la configuración consiste en dos barcos, dos estanques de almacenamiento, dos estanques de mezclado y una sola unidad de destilación. Se utiliza un horizonte de diez días.

Figura 3.1: Configuración del problema 1



Los conjuntos de operaciones resultan:

$$W_B = \{v_1, v_2\}$$

$$W_T = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

$$W_D = \{v_7, v_8\}$$

Los datos se pueden encontrar en la Tabla 6.1.

3.1.2. Problema 2

Para el problema 2 la configuración consiste en tres barcos, tres estanques de almacenamiento, tres estanques de mezclado y dos unidades de destilación. Se utiliza un horizonte de tiempo de doce días.

Los conjuntos de operaciones quedan como:

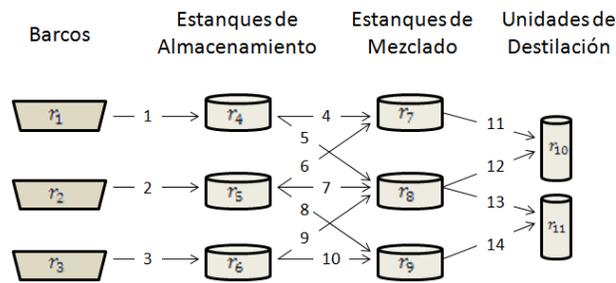
$$W_B = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$W_T = \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$$

$$W_D = \{v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}\}$$

Los datos se pueden encontrar en la Tabla 6.2.

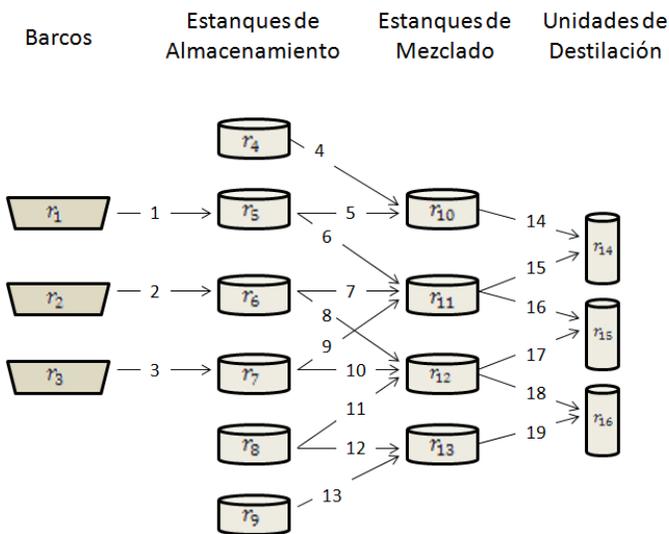
Figura 3.2: Configuración del problema 2



3.1.3. Problema 3

Para el problema 3 la configuración consiste en tres barcos, seis estancos de almacenamiento, cuatro estancos de mezclado y tres unidades de destilación. Se utiliza un horizonte de tiempo de doce días.

Figura 3.3: Configuración del problema 3



Los conjuntos de operaciones quedan como:

$$W_B = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$W_T = \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}\}$$

$$W_D = \{v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}\}$$

En este problema si llegan barcos a los recursos r_4 , r_8 y r_9 , la solución obtenida podría no ser la misma que el original: Por ejemplo si llegara un barco a descargar en r_8 , las operaciones 11 y 12 no se podrían realizar durante ese tiempo, alterando la calendarización. Otro argumento proviene de que la descarga dejaría con un contenido distinto (tanto en volumen como en composición) a los estancos r_4 , r_8 y r_9 .

Los datos se pueden encontrar en la Tabla 6.3.

3.2. Relaciones Lineales asociadas a Planificación Óptima de Descarga y Mezcla de Crudos

En esta sección se presentan dos relajaciones de la restricción de composición (2.21), la cual se recuerda que es no lineal.

$$V_{ivc}L_{ir} = L_{irc}V_{iv}, \quad \forall r \in R, \forall v \in O_r, \forall c \in C$$

3.2.1. Relajación Simple

La primera relajación consiste en ignorar a las restricciones bilineales.

Definición 3.1 Se llamará *Relajación Simple de (PODM)*, o $(PLM)_1$ al siguiente problema de optimización.

$$(PLM)_1 \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & \sum_{\substack{i \in T \\ r \in R_D}} \sum_{\substack{v \in I_r \\ c \in C}} G_c V_{ivc} \\ \text{s.a.} & (2.1) - (2.20) \\ & (2.22) - (2.25) \end{array}$$

3.2.2. Relajación de McCormick

La relajación de McCormick consiste en introducir una nueva variable por cada producto bilineal y acotar esta variable por cuatro restricciones lineales. El objetivo de esta restricción es encontrar una solución cercana a la restricción bilineal.

Por cada producto bilineal se introducirá una variable auxiliar.

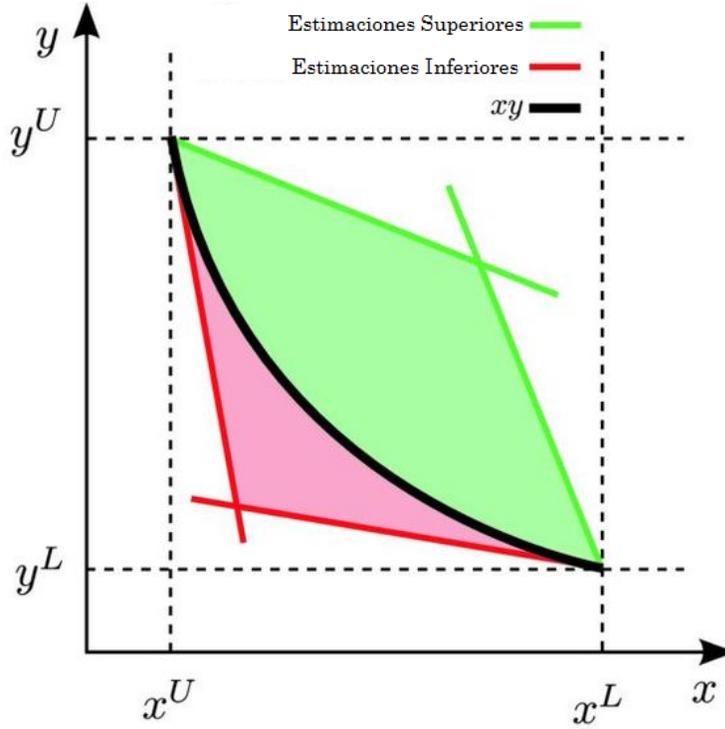
$$\begin{aligned} W_{irvc}^1 &:= V_{ivc}L_{ir} \\ W_{irvc}^2 &:= V_{iv}L_{irc} \\ i \in T, r \in R, v \in O_r, c \in C. \end{aligned}$$

Para obtener las restricciones lineales se observa que V_{iv} , V_{ivc} , L_{ir} , L_{irc} están acotadas.

$$\begin{aligned} 0 &\leq V_{ivc} \leq \bar{V}_v \\ L_r &\leq L_{ir} \leq \bar{L}_r \\ \underline{V}_v &\leq V_{iv} \leq \bar{V}_v \\ 0 &\leq L_{irc} \leq \bar{L}_r \\ \forall i \in T, c \in C, r \in R, v \in O_r \end{aligned}$$

Figura 3.4: Gráfico representando relación de McCormick

Se optimiza sobre el área entre las rectas de las estimaciones superiores e inferiores y no sobre la curva $xy = k$.



Lo cual puede ser escrito como:

$$0 \leq V_{ivc} \wedge 0 \leq \bar{V}_v - V_{ivc} \quad (3.1)$$

$$0 \leq L_{ir} - \underline{L}_r \wedge 0 \leq \bar{L}_r - L_{ir} \quad (3.2)$$

$$0 \leq V_{iv} - \underline{V}_v \wedge 0 \leq \bar{V}_v - V_{iv} \quad (3.3)$$

$$0 \leq L_{irc} \wedge 0 \leq \bar{L}_r - L_{irc} \quad (3.4)$$

$$\forall i \in T, c \in C, r \in R, v \in O_r \quad (3.5)$$

Multiplicando las desigualdades de (3.1) con (3.2) y las de (3.3) con (3.4) se hacen aparecer las variables W_{irvc}^1 y W_{irvc}^2 :

$$(L_{ir} - \bar{L}_r)(V_{ivc} - \bar{V}_v) \geq 0$$

$$(L_{ir} - \underline{L}_r)(V_{ivc} - 0) \geq 0$$

$$(\bar{L}_r - L_{ir})(V_{ivc} - 0) \geq 0$$

$$(\underline{L}_r - L_{ir})(V_{ivc} - \bar{V}_v) \geq 0$$

$$(L_{irc} - \bar{L}_r)(V_{iv} - \bar{V}_v) \geq 0$$

$$(L_{irc} - 0)(V_{iv} - \underline{V}_v) \geq 0$$

$$(\bar{L}_r - L_{irc})(V_{iv} - \underline{V}_v) \geq 0$$

$$(L_{irc} - 0)(\bar{V}_v - V_{iv}) \geq 0$$

Se despejan los términos W_{irvc}^1 y W_{irvc}^2 de cada desigualdad para obtener:

$$W_{irvc}^1 \geq V_{ivc}\bar{L}_r + L_{ir}\bar{V}_v - \bar{L}_r\bar{V}_v \quad (3.6)$$

$$W_{irvc}^1 \geq V_{ivc}\underline{L}_r \quad (3.7)$$

$$V_{ivc}\bar{L}_r \geq W_{irvc}^1 \quad (3.8)$$

$$V_{ivc}\underline{L}_r + L_{ir}\bar{V}_v - \bar{V}_v\underline{L}_r \geq W_{irvc}^1 \quad (3.9)$$

$$W_{irvc}^2 \geq V_{iv}\bar{L}_r + L_{irc}\bar{V}_v - \bar{V}_v\bar{L}_r \quad (3.10)$$

$$W_{irvc}^2 \geq L_{irc}\underline{V}_v \quad (3.11)$$

$$V_{iv}\bar{L}_r + L_{irc}\underline{V}_v - \underline{V}_v\bar{L}_r \geq W_{irvc}^2 \quad (3.12)$$

$$L_{irc}\bar{V}_v \geq W_{irvc}^2 \quad (3.13)$$

Para encontrar un punto que se acerque a la solución de la ecuación bilineal se impone:

$$W_{irvc}^1 = W_{irvc}^2, \forall i \in T, c \in C, r \in R, v \in O_r \quad (3.14)$$

Definición 3.2 Se llamará *Relajación de McCormick de (PODM)*, o $(PLM)_2$ al siguiente problema de optimización.

$$(PLM)_2 \quad \begin{array}{l} \text{máx} \quad \sum_{\substack{i \in T \\ r \in R_D}} \sum_{\substack{v \in I_r \\ c \in C}} G_c V_{ivc} \\ \text{s.a.} \quad (2.1) - (2.20) \\ \quad \quad (2.22) - (2.25) \\ \quad \quad (3.6) - (3.14) \end{array}$$

Finalmente, se observa que la relajación de McCormick es más ajustada que la primera relajación, ya que todo punto factible de $(PLM)_2$ es punto factible de $(PLM)_1$, obteniendo directamente así:

Proposición 3.3 $\text{valor}(PODM) \leq \text{valor}(PLM)_2 \leq \text{valor}(PLM)_1$.

3.3. Problema No Lineal Asociado a la Relajación

Como se mencionó al comienzo del capítulo, una vez resuelta una relajación lineal, se da paso a la resolución de un problema no lineal. Se define así el conjunto de asignaciones óptimas para la relajación i -ésima:

Definición 3.4 $\forall i \in \{1, 2\}$ el conjunto de asignaciones óptimas para la relajación i -ésima se define como:

$$\mathcal{P}_z((PLM)_i) := \left\{ Z \in \{0, 1\}^{|T||W|} \mid \begin{array}{l} \exists (S, D, V, (V_c), L, (L_c)) \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{N}} \\ \text{tal que } (Z, S, D, V, (V_c), L, (L_c)) \text{ es solución de } (PLM)_i \end{array} \right\}$$

Donde $\mathcal{N} = |T||W| + |T||W| + |T||W| + |T||W||C| + |T||R| + |T||R||C|$.

Definición 3.5 Sea $\bar{Z} \in \mathcal{P}_z((PLM)_i)$ para $i \in \{1, 2\}$, se define el problema no lineal asociado a la asignación \bar{Z} o $(PNL)_{\bar{Z}}$ como:

$$(PNL)_{\bar{Z}} \quad \begin{aligned} & \text{máx} && \sum_{\substack{i \in T \\ r \in R_D}} \sum_{\substack{v \in I_r \\ c \in C}} G_c V_{ivc} \\ & \text{s.a.} && (2.1) - (2.25) \\ & && Z = \bar{Z} \end{aligned}$$

Observación $(PNL)_{\bar{Z}}$ podría ser infactible, este fenómeno se aprecia en las tablas 3.1 y 3.2. La relajación de McCormick intenta atacar este problema.

En caso de existir la solución de $(PNL)_{\bar{Z}}$, esta acota al problema original por abajo, ya que es un punto factible del problema original. Así se obtiene la siguiente proposición.

Proposición 3.6 Sea $\bar{Z} \in \mathcal{P}_z((PLM)_i)$ para $i \in \{1, 2\}$, luego $\forall j \in \{1, 2\}$

$$\text{valor}(PNL)_{\bar{Z}} \leq \text{valor}(PODM) \leq \text{valor}(PLM)_j.$$

La proposición anterior permite estimar una brecha de optimalidad, es un porcentaje que acota qué tan lejos se está del óptimo.

Definición 3.7 Sea $i \in \{1, 2\}$ $\bar{Z} \in \mathcal{P}_z((PLM)_i)$, se define la brecha de optimalidad (B.O.) de la relajación i -ésima como:

$$\frac{\text{valor}(PLM)_i - \text{valor}(PNL)_{\bar{Z}}}{\text{valor}(PLM)_i}$$

Todos los elementos anteriores se ven ejemplificados en la siguiente resolución del problema 1 y problema 2.

Tabla 3.1: Comparación relajaciones para el Problema 1

Problema 1, se usaron $n = 10$ cupos de prioridad. T.E. es abreviación para Tiempo de Ejecución. No se utilizan quiebres de simetría

	<u>T.E. Relajación</u>	<u>Valor Relajación</u>	<u>T.E. PNL</u>	<u>Valor PNL</u>	<u>B.O.</u>
Relajación Simple	96.97 s	13985	-	Infactible	-
Relajación McCormick	118.109s	13925	0.015s	13925	0 %

Tabla 3.2: Comparación relajaciones para el Problema 2

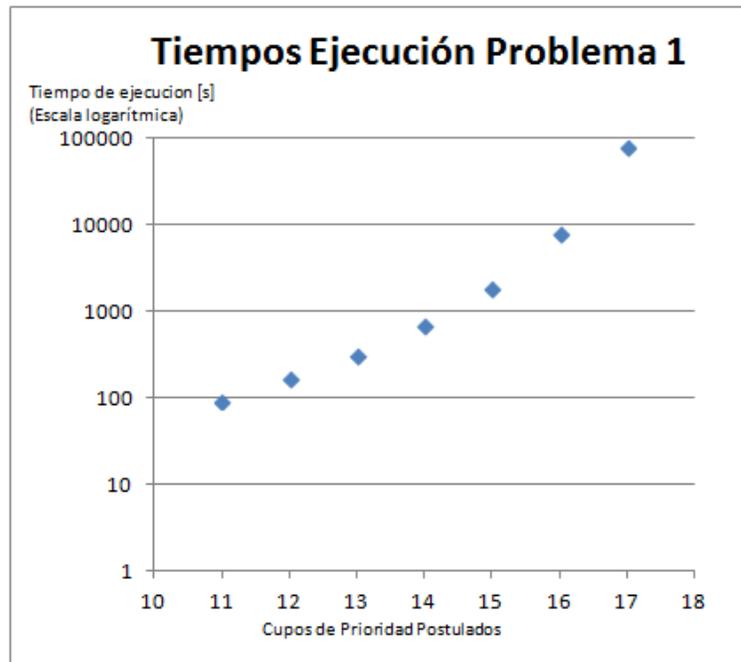
Problema 2 incluyendo costos de reducción de CO_2 (ver (4.3)) con $n = 15$ cupos de prioridad y con la implementación del AFD (ver sección 3.4.6). T.E. es abreviación para Tiempo de Ejecución. Datos en la Tabla 6.4.

	<u>T.E. Relajación</u>	<u>Valor Relajación</u>	<u>T.E. PNL</u>	<u>Valor PNL</u>	<u>B.O.</u>
Relajación Simple	51 s	8380.3	-	Infactible	-
Relajación McCormick	84.89s	8380.3	0.031s	7812.3	6.7 %

3.4. Reducción del Espacio de Búsqueda

El método de resolución presentado sufre de tiempos de ejecución que crecen super-exponencialmente con el número de cupos postulados (i.e. acotados inferiormente por la función exponencial de los cupos de prioridad), este fenómeno se muestra en la Figura 3.5.

Figura 3.5: Tiempos de ejecución total, usando la relajación de McCormick.



La explicación del fenómeno anterior proviene de las considerables simetrías que posee el planteamiento. Este es un problema común en los modelos de programación lineal mixta resueltos mediante el método *Branch and Bound* (B&B).

Informalmente, la simetría se puede entender como puntos factibles del problema que representen la misma solución en la práctica. La idea de ignorar algunos de estos puntos que definen la misma solución se engloban en el concepto de quiebre de simetría.

En [13] se hace un resumen de los tipos de quiebres de simetría que existen en la literatura de la programación lineal mixta. Esta sección se centra en cortes estáticos de simetría. Lo anterior quiere decir que se agregan restricciones a la formulación del problema, tal que algunas asignaciones quedan infactibles, sin eliminar la solución.

Para enfrentar el problema anterior se probaron cinco técnicas.

1. Introducción de un orden lexicográfico.
2. Restricción a *secuencias minimales*.
3. Imposición de una duración mínima para las operaciones (asignaciones de duración nula).
4. Perturbación de la función objetivo.
5. Codificación de las secuencias de la refinería en un automata finito determinista.

De las cinco técnicas mencionadas las primeras cuatro en conjunto logran reducir razonablemente los tiempos de ejecución, no obstante la quinta técnica por si sola presenta los mejores tiempos de ejecución como se aprecia en la Figura 3.12.

En las siguientes páginas se explica la implementación de cada una de las técnicas mencionadas.

3.4.1. Definiciones Previas

Secuencia de Operaciones

Definición 3.8 Las variables Z_{iv} definen la secuencia de operaciones a realizarse s_Z .

$$s_Z := \pi(1)\pi(2) \dots \pi(n)$$

Con $\pi : T \rightarrow W$ tal que $Z_{iv} = 1 \Leftrightarrow \pi(i) = v$.

$\forall i, j \in T$ con $i < j$ se entiende como una subsecuencia de s_Z a la secuencia

$$\pi(i)\pi(i+1) \dots \pi(j).$$

Notar que con la restricción (2.1) se tiene que la función π queda bien definida.

Ejemplo: Para el problema 2 (ver Figura 3.2) Una asignación posible con $n = 7$ cupos de prioridad que respete la restricción (2.1) podría ser:

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lo que define la secuencia: $s_Z = v_4v_1v_7v_2v_{11}v_{14}v_3$

Conjunto de Operaciones simultáneas a $v \in W$

Para cada operación $v \in W$ interesa identificar el conjunto de operaciones que pueden ocurrir en simultáneo a v .

Definición 3.9 $\forall v \in W$, se define el conjunto $S_1(v)$ de operaciones que pueden ocurrir simultáneas a v como:

$$S_1(v) := \begin{cases} W_D \cup \bigcup_{\substack{r \in R_A \\ I_r \cap \{v\} = \emptyset}} O_r & \text{si } v \in W_B \\ W_T \setminus \{v\} \cup \bigcup_{\substack{r \in R_M \\ I_r \cap \{v\} = \emptyset}} O_r \cup \bigcup_{\substack{r \in R_A \\ O_r \cap \{v\} = \emptyset}} I_r & \text{si } v \in W_T \\ W_B \cup \bigcup_{\substack{r \in R_M \\ O_r \cap \{v\} = \emptyset}} I_r \cup \bigcup_{\substack{r \in R_D \\ I_r \cap \{v\} = \emptyset}} I_r & \text{si } v \in W_D \end{cases} \quad (3.15)$$

Donde se recuerda que I_r y O_r son los conjuntos de operaciones que ingresan y egresan del recurso r respectivamente.

El conjunto anterior proviene de observar las restricciones de operaciones no solapadas (2.14), (2.15), (2.16), (2.17), (2.18), (2.19). Se explican a continuación cada uno de los términos de (3.15).

Para las operaciones de descarga de los barcos ($v \in W_B$), no hay restricción para funcionar en paralelo a las operaciones de destilación (W_D). Así mismo se observa que no hay ninguna restricción sobre operaciones que salgan ($w \in O_r$) de los estanques de almacenamiento ($r \in R_A$) que no reciben la descarga de v ($\{v\} \cap I_r = \emptyset$).

Para las operaciones de transferencia $v \in W_T$ no existen restricciones sobre las otras operaciones de transferencia ($W_T \setminus \{v\}$). Tampoco existen restricciones sobre operaciones que salgan ($w \in O_r$) de los estanques de mezclado ($r \in R_M$) que no reciban la descarga de v ($\{v\} \cap I_r = \emptyset$). Finalmente no existen restricciones sobre las operaciones que ingresen $w \in I_r$ a los estanques de almacenamiento $r \in R_A$ mientras que no lleguen al mismo estanque del que está saliendo v ($O_r \cap \{v\} = \emptyset$).

Para las operaciones de destilación ($v \in W_D$) no existen restricciones para funcionar en paralelo a las operaciones de descarga de barcos W_B . Tampoco existen restricciones sobre las operaciones que ingresen ($w \in I_r$) a las unidades de mezclado ($r \in R_M$) mientras que no lleguen al mismo estanque del que está saliendo v ($O_r \cap \{v\} = \emptyset$). Por último no existen restricciones sobre operaciones que ingresen ($w \in I_r$) a otras unidades de destilación ($I_r \cap \{v\} = \emptyset$, $r \in R_D$).

Observación Los conjuntos tienen la siguiente simetría $v \in S_1(w) \Leftrightarrow w \in S_1(v)$.

Asignaciones Equivalentes

Se entenderá informalmente el concepto de asignación equivalente, como asignaciones que definen los mismos tiempos de partida, duración y volúmenes transferidos para las mismas operaciones. A continuación se formaliza este concepto.

Definición 3.10 Se considera S_n como el grupo de permutaciones de n elementos. Sea $M \in$

$\mathbb{R}^{n \times m}$ una matriz y $\sigma \in S_n$, se entenderá por σM a la matriz resultante de permutar las filas de la matriz M según σ .

Observación Notar que una permutación σ sobre la matriz de asignación Z redefine la secuencia de operaciones a realizarse permutando los elementos de la secuencia. Es decir $S_{\sigma Z} = \pi(\sigma(1))\pi(\sigma(2)) \cdots \pi(\sigma(n))$

Definición 3.11 Se dirá que Z y \bar{Z} son asignaciones equivalentes si:

1. Existe una permutación $\sigma \in S_{|I|}$ tal que $\sigma Z = \bar{Z}$:
2. Si $(Z, S, D, V, (V_c), L, (L_c))$ es factible para (PODM) entonces $(\bar{Z}, \sigma S, \sigma D, \sigma V, (\sigma V_c), \sigma L, (\sigma L_c))$ es factible para (PODM).

Donde se entiende (σV_c) y (σL_c) como las matrices de los conjuntos $\{\sigma V_c\}_{c \in C}$ y $\{\sigma L_c\}_{c \in C}$ respectivamente.

3.4.2. Orden Lexicográfico

Si alguna secuencia s_Z contiene una subsecuencia con una operación v' que puede ocurrir en simultáneo a todas las otras operaciones de la subsecuencia, entonces la permutación que reubica v' en cualquier lugar de la subsecuencia genera una asignación equivalente. En lo que sigue se asume la existencia de un orden sobre el conjunto $(W, <)$. En las implementaciones este orden está dado por el número que define la operación.

Ejemplo Para el problema 1 si en alguna secuencia s_Z aparece la subsecuencia $v_2v_6v_7$, modificando esta subsecuencia como $v_2v_7v_6$ o $v_7v_2v_6$ genera asignaciones equivalentes al problema ya que v_7 puede ocurrir en simultáneo a v_2 y v_6 .

La siguiente proposición impone un orden lexicográfico sobre las secuencias.

Proposición 3.12 Sea Z una asignación y su secuencia $s_Z = \pi(1) \cdots \pi(n)$ con una subsecuencia $\pi(i) \cdots \pi(j)$ que cumple $\pi(k) \in S_1(\pi(i))$, $\forall k \in \{i+1, \dots, j\}$. Sea $k' \in \{i+1, \dots, j\}$ tal que $\pi(k') < \pi(i)$ entonces la siguiente restricción deja infactible a la asignación Z .

$$\sum_{\substack{w \in S_1(v) \\ v < w}} Z_{iw} + \sum_{\substack{w \in S_1(v) \\ i < k < j}} Z_{kw} \leq (j - i) - Z_{jv} \quad \forall i, j \in T, i < j, \forall v \in W \quad (3.16)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea Z cumpliendo las hipótesis de la proposición. Notar que por la observación hecha en (3.4.1) $\pi(i) \in S_1(\pi(k'))$.

Por lo tanto como

$$\sum_{\substack{w \in S_1(\pi(k')) \\ \pi(j) < w}} Z_{iw} = 1$$

y

$$\sum_{\substack{w \in S_1(\pi(j)) \\ i < k < k'}} Z_{kw} = k' - i - 1$$

Se obtiene

$$\sum_{\substack{w \in S_1(\pi(k')) \\ \pi(j) < w}} Z_{iw} + \sum_{\substack{w \in S_1(\pi(j)) \\ i < k < k'}} Z_{kw} > (k' - i) - 1 = (k' - i) - Z_{k'\pi(k')} \quad \square$$

Utilizando el orden definido por el número de la operación, en el ejemplo la restricción anterior solo deja factible a la asignación $v_2 v_6 v_7$.

3.4.3. Secuencias Minimales

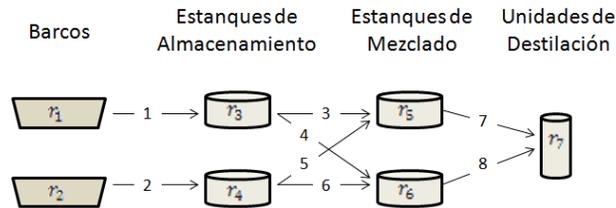
Se puede reducir el espacio de búsqueda admitiendo solo secuencias minimales. Informalmente se entenderá una secuencia minimal como una secuencia con la propiedad que entre dos operaciones iguales existe una operación al medio que no puede ocurrir en simultáneo. Se formaliza lo anterior a continuación.

Definición 3.13 Una secuencia de operaciones $s = s_1 s_2 \dots s_n$ se dirá minimal si:

$$\begin{aligned} & (\forall i, j \in T) (i < j) (\forall v \in W) (s_i = s_j = v) \\ \Rightarrow & (\exists k \in T) (i < k < j) (\exists w \in W \setminus S_1(v)) (w \neq v \wedge s_k = w) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ejemplo: Para el problema 1 la secuencia $v_2 v_4 v_2$ no es minimal, puesto que v_4 puede ocurrir al mismo tiempo que v_2 .

Figura 3.6: Configuración del problema 1



Proposición 3.14 La siguiente restricción deja infactible a cualquier asignación que defina una secuencia no minimal.

$$Z_{iv} + Z_{jv} \leq 1 + \sum_{\substack{w \in W \setminus (S_1(v) \cup \{v\}) \\ k \in T, i < k < j}} Z_{kw} \quad \forall i, j \in T, i < j \quad (3.18)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $s = s_1 s_2 \dots s_n$ una secuencia no minimal y Z la asignación que la define luego:

$$\begin{aligned} & (\exists i, j \in T) (i < j) (\exists v \in W) (s_i = s_j = v) \\ & \wedge (\forall k \in T) (i < k < j) (s_k \in S_1(v) \vee s_k = v) \end{aligned}$$

De esta manera la asignación cumple:

$$\begin{aligned} Z_{iv} = Z_{jv} = 1 \wedge \sum_{\substack{w \in W \setminus (S_1(v) \cup \{v\}) \\ k \in T, i < k < j}} Z_{kw} &= 0 \\ \Rightarrow Z_{iv} + Z_{jv} > 1 + \sum_{\substack{w \in W \setminus (S_1(v) \cup \{v\}) \\ k \in T, i < k < j}} Z_{kw} & \quad \square \end{aligned}$$

3.4.4. Asignaciones de Duración Nula

La restricción (2.25)

$$\forall i \in T, \sum_{v \in W} Z_{iv} = 1$$

hace que todo cupo de prioridad deba ser usado. Por la experiencia obtenida en las simulaciones numéricas se observa que el programa puede asignar una operación a algún cupo de prioridad, pero de duración cero. Para evitar esto se relaja la restricción (2.25):

$$\sum_{v \in W} Z_{iv} \leq 1 \quad \forall i \in T \quad (3.19)$$

y se agrega:

$$D_{min} \sum_{v \in W} Z_{iv} \leq \sum_{v \in W} D_{iv} \quad \forall i \in T \quad (3.20)$$

Donde D_{min} es un nuevo parámetro haciendo referencia a la duración mínima impuesta a las operaciones.

Observación Esta nueva restricción podría dejar el óptimo del problema fuera del espacio de búsqueda. Los resultados numéricos indican lo contrario, probablemente por la multiplicidad de óptimos globales que presenta el problema.

La relajación anterior permite que algún cupo de prioridad no le sea asignada una operación. Esto introduce una nueva simetría, ya que si existe algún cupo de prioridad no asignado, este podría ubicarse entre cualquier par de cupos asignados generando la misma secuencia de operaciones. Para lo anterior se introduce la siguiente desigualdad:

$$\sum_{v \in W} Z_{iv} \geq \sum_{v \in W} Z_{i+1v} \quad \forall i \in T, i < n \quad (3.21)$$

Esto genera que los cupos no asignados sean los últimos. Las restricciones (3.19), (3.20) y (3.21), generan finalmente que no existan asignaciones a cupos de prioridad con duración cero.

3.4.5. Modificación Función Objetivo

Las simulaciones numéricas revelan que existen puntos con el mismo valor para la función objetivo, pero distinto número de cupos asignados. Una forma de evitar esto es introducir una perturbación en la función objetivo premiando usar menos cupos de prioridad. Así se resuelve el problema utilizando la siguiente función objetivo:

$$\sum_{\substack{i \in T \\ r \in R_D}} \sum_{\substack{v \in I_r \\ c \in C}} G_c V_{ivc} - \nu \sum_{i \in T} i \sum_{v \in W} Z_{iv} \quad (3.22)$$

Donde $\nu \ll 1$. En las implementaciones se utilizó $\nu = 0.1$.

Observación Se debiera demostrar que el óptimo del problema con esta perturbación entrega un óptimo para el problema original.

3.4.6. Restricción basada en un Lenguaje Regular

En esta sección se da un resumen breve de lenguajes regulares y autómatas finitos deterministas (AFD) para posteriormente integrarlos al problema en estudio. Lo anterior está mencionado e implementado en [17]; no obstante fue necesario basarse en los artículos [20], [4], para su cabal comprensión.

Formalmente, dado Σ un conjunto finito de símbolos llamado alfabeto, una palabra se define como una secuencia finita de símbolos de Σ . El conjunto infinito de palabras se denota como Σ^* . Los subconjuntos de Σ^* se llaman lenguajes. Interesa estudiar los lenguajes regulares definidos a partir de expresiones regulares.

Una expresión regular sobre Σ se construye en base a las siguientes reglas recursivas y los símbolos ' ε ', '()', '+', y '*'.

- ε , la palabra vacía, y todo elemento de Σ son expresiones regulares.
- Si α y β son expresiones regulares, luego $(\alpha\beta)$ y $(\alpha + \beta)$ también lo son.
- Si α es una expresión regular α^* también lo es.

Las expresiones regulares definen lenguajes regulares en Σ^* al interpretar '+' y '*' como unión de conjunto y clausura de Kleene, respectivamente.

Ejemplo Considere $\Sigma = \{a, b, c\}$ y la expresión regular $((a + b)c^*)$. El lenguaje regular definido por la expresión anterior contiene a las palabras ac , acc , a , b , bc , bcc (e infinitas más), pero no contiene a abc .

Con esto se tienen los elementos para enunciar la definición de autómata finito determinista.

Definición 3.15 Un autómata finito determinista (AFD) está descrito por una 5-tupla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. En donde cada elemento representa lo siguiente:

- Q : El conjunto finito de estados.
- Σ : El alfabeto.
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$: La función de transición.
- $q_0 \in Q$: El estado inicial.
- $F \subset Q$: El subconjunto de estados finales.

Dada una palabra $a_1 \dots a_n$ de Σ , se define:

$$q_k := \delta(q_{k-1}, a_k), \quad \forall k \in \{1, \dots, n\} \quad (3.23)$$

Se dice que la palabra es aceptada por el AFD si $q_n \in F$. Es decir que al aplicar sucesivamente la función de transición sobre q_0 utilizando como letras los caracteres de la palabra se llega a algún estado final.

Un resultado importante de la teoría dice que el conjunto de palabras que acepta un AFD es un lenguaje regular. Además se tiene la recíproca: Todo lenguaje regular define un AFD [23]

Aplicación al Problema

Las variables de asignación (Z_{iv}) definen la secuencia de operaciones a realizarse. Esta secuencia de operaciones se puede interpretar como una palabra de largo $|T|$ (cardinal de los cupos de prioridad) sobre $\Sigma = W$.

Para los primeros dos casos de estudio se define un lenguaje regular sobre W , este lenguaje regular modela todos los posibles estados de operación de la refinería.

Se comienza por observar que la restricción de destilación continua (2.11) indica que siempre debe estar ocurriendo alguna operación de destilación. Para construir el lenguaje regular se descompone en otros lenguajes regulares en donde las transiciones entre estos lenguajes están definidas por alguna operación de destilación.

A continuación se precisa la construcción de lo anterior para el Problema 1 y Problema 2.

Problema 1

En este caso existe tan solo una unidad de destilación, por lo tanto siempre estará en funcionamiento las operaciones 7 y 8. Si está operando 7, solo pueden ocurrir las operaciones 4, 6, 1 y 2. Notar que 4 no puede ocurrir en simultáneo a 1, ni 6 a 2, ni 1 a 2.

Si se quiere modelar las secuencias en las que está operando 7 y se quieren realizar las transferencias 4 o 6 (pueden no realizarse) la expresión regular que define todas estas posibilidades viene dada por:

$$7(\varepsilon + 4)(\varepsilon + 6).$$

Adicionalmente se podría querer descargar el barco 1 o el barco 2 y posterior a dichas descargas volver a realizar la operación 4 o 6 respectivamente. Las secuencias definidas de estas posibilidades vienen determinadas por la expresión:

$$7(\varepsilon + 4)(\varepsilon + 6)(\varepsilon + 1(\varepsilon + 4))(\varepsilon + 2(\varepsilon + 6)).$$

Razonando de manera análoga se puede obtener la expresión regular para las posibles secuencias en el caso en que está operando 8.

$$8(\varepsilon + 5)(\varepsilon + 3)(\varepsilon + 1(\varepsilon + 3))(\varepsilon + 2(\varepsilon + 5)).$$

Para deducir el *AFD* del problema se definen los siguientes lenguajes:

$$L_1 := (\varepsilon + 4)(\varepsilon + 6)(\varepsilon + 1(\varepsilon + 4))(\varepsilon + 2(\varepsilon + 6)) \quad (3.24)$$

$$L_2 := (\varepsilon + 5)(\varepsilon + 3)(\varepsilon + 1(\varepsilon + 3))(\varepsilon + 2(\varepsilon + 5)) \quad (3.25)$$

Si se denota AFD_1 y AFD_2 a los autómatas finitos deterministas equivalentes a (3.24) y (3.25), respectivamente. Entonces el autómata finito determinista del problema 1 viene representado por el grafo de la Figura 3.7.

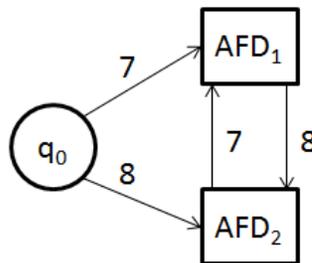
Figura 3.7: AFD del Problema 1

Las aristas entrantes a AFD_1 y AFD_2 llegan solo al nodo inicial de cada autómata, respectivamente.

Las aristas salientes de AFD_1 y AFD_2 pueden salir de cada nodo del autómata.

$\delta(q, a) = q'$ si y solo si existe una arista dirigida de q a q' con la operación a .

Todos los nodos son finales menos q_0 .



Problema 2

Para el problema 2 hay que notar que siempre están operando los pares 11 y 14 o 11 y 13 o 12 y 14.

Para el primer par, se observa que solo las operaciones de transferencia 5, 7 y 9 pueden ocurrir, además de las operaciones de descarga 1, 2 y 3. De esta manera el lenguaje regular que define las secuencias mientras está actuando 11 y 14 viene dado por:

$$11\ 14(\varepsilon + 5)(\varepsilon + 7)(\varepsilon + 9)(\varepsilon + 1(\varepsilon + 5)(\varepsilon + 2(\varepsilon + 7))(\varepsilon + 3(\varepsilon + 9)))$$

Para el segundo par, se observa que solo las operaciones de transferencia 8 y 10 pueden ocurrir, además de las operaciones de descarga 1, 2 y 3. De esta manera el lenguaje regular que define las secuencias mientras está actuando 11 y 13 viene dado por:

$$11\ 13(\varepsilon + 8)(\varepsilon + 10)(\varepsilon + 1)(\varepsilon + 2(\varepsilon + 8))(\varepsilon + 3(\varepsilon + 10))$$

Para el tercer par, se observa que solo las operaciones de transferencia 4 y 6 pueden ocurrir, además de las operaciones de descarga 1, 2 y 3. De esta manera el lenguaje regular que define las secuencias mientras está actuando 12 y 14 viene dado por:

$$12\ 14(\varepsilon + 4)(\varepsilon + 6)(\varepsilon + 1(\varepsilon + 3))(\varepsilon + 2(\varepsilon + 6))(\varepsilon + 3)$$

Notar que el primer y el segundo lenguaje definidos comparten como primera operación el 11, mientras que el primer y el tercer lenguaje comparten la operación 14.

Para deducir el *AFD* el problema se definen los siguientes lenguajes:

$$L_1 := (\varepsilon + 5)(\varepsilon + 7)(\varepsilon + 9)(\varepsilon + 1(\varepsilon + 5)(\varepsilon + 2(\varepsilon + 7))(\varepsilon + 3(\varepsilon + 9))) \quad (3.26)$$

$$L_2 := (\varepsilon + 8)(\varepsilon + 10)(\varepsilon + 1)(\varepsilon + 2(\varepsilon + 8))(\varepsilon + 3(\varepsilon + 10)) \quad (3.27)$$

$$L_3 := (\varepsilon + 4)(\varepsilon + 6)(\varepsilon + 1(\varepsilon + 3))(\varepsilon + 2(\varepsilon + 6))(\varepsilon + 3) \quad (3.28)$$

Si se denota *AFD*₁, *AFD*₂ y *AFD*₃ los autómatas finitos deterministas equivalentes a (3.26), (3.27) y (3.28), respectivamente. Entonces el autómata finito determinista del problema 2 viene representado por el grafo de la Figura 3.8.

3.4.7. Incorporación del Autómata Finito Determinista a Planificación Óptima de Descarga y Mezcla de Crudos

Dada una configuración de la refinera y su lenguaje regular *L*, se quiere restringir las secuencias definidas por *Z* a las palabras de largo $n = |T|$ (número de cupos de prioridad) pertenecientes a este lenguaje.

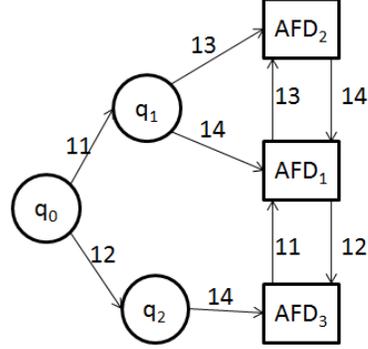
El lenguaje regular *L* define un *AFD* el cual se identifica como $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Para buscar las palabras $a_1 \dots a_n$ pertenecientes al lenguaje regular, se debe cumplir que $q_n \in F$ donde $q_k, k \in \{1, \dots, n\}$ está definido en (3.23).

Figura 3.8: AFD del Problema 2

Las aristas entrantes a AFD_1 , AFD_2 y AFD_3 llegan solo al nodo inicial de cada autómata, respectivamente. Las aristas salientes de AFD_1 , AFD_2 y AFD_3 pueden salir de cada nodo del autómata.

$\delta(q, a) = q'$ si y solo si existe una arista dirigida de q a q' con la operación a .

Todos los nodos son finales menos q_0 .



Para lo anterior se define la variable A_{ivq} $i \in T$, $v \in W$, $q \in Q$, la cual vale 1 si la operación v fue asignada al cupo i cuando $q_{i-1} = q$. Y toma el valor 0 en caso contrario.

La siguiente restricción vincula a las variables A_{ivq} con Z_{iv} .

$$\sum_{q \in Q} A_{ivq} = Z_{iv} \quad \forall i \in T, \forall v \in W \quad (3.29)$$

La siguiente restricción inicializa a $A_{1vq_0} = 1$ para algún $v \in W$.

$$\sum_{v \in W} A_{1vq_0} = 1 \quad (3.30)$$

Esta restricción permite pasar del estado q_i al q_{i+1} solamente si existe $v \in W$ tal que $q_{i+1} = \delta(q_i, v)$.

$$\sum_{\substack{v \in W, q' \in Q \\ q = \delta(q', v)}} A_{i-1vq'} - \sum_{v \in W} A_{ivq} = 0 \quad \forall i \in T, i > 1, q \in Q \quad (3.31)$$

Notar que las restricciones (3.30) y (3.31) generan que $A_{1vq_0} = 1$ solo si v sale del nodo inicial.

Finalmente la siguiente restricción fuerza a que $q_n \in F$.

$$\sum_{\substack{v \in W, q \in Q \\ \delta(q, v) \in F}} A_{nvq} = 1 \quad (3.32)$$

Las restricciones anteriores se pueden interpretar como enviar una unidad de flujo a un grafo dirigido de $n + 1$ capas, donde la primera capa corresponde al nodo inicial q_0 , las siguientes capas

tienen como nodos a los estados Q y la capa final tiene como nodos a los estados F . Las aristas de este grafo están determinadas por la función de transición: es decir las aristas son de la forma (u_1, u_2) con u_1 en la i -ésima capa, y u_2 en la $i+1$ -ésima capa, tal que existe $v \in W$, $\delta(u_1, v) = u_2$.

Así todos los caminos que salen de la primera capa y llegan a la capa final están determinados por una palabra aceptada por el AFD .

3.5. Simulaciones Numéricas

3.5.1. Calendarización de los problemas

Para los problemas presentados al principio del capítulo se generaron las siguientes calendarizaciones

Figura 3.9: Problema 1

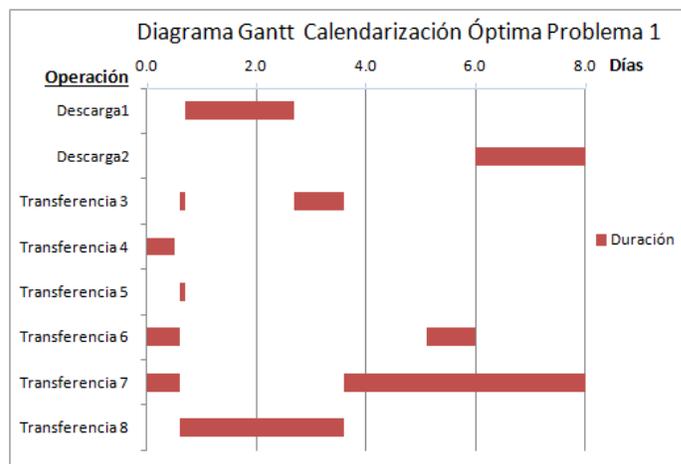


Figura 3.10: Problema 2

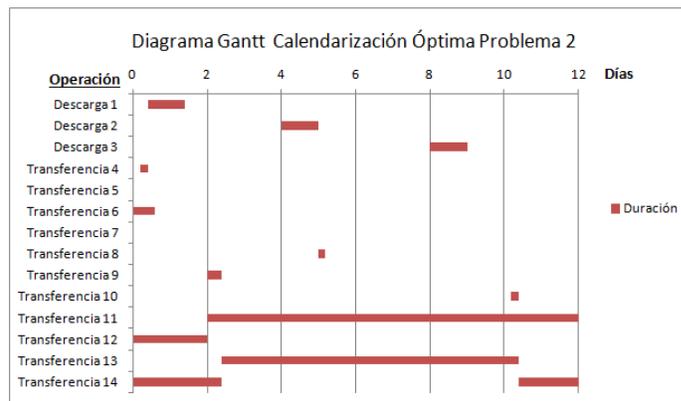
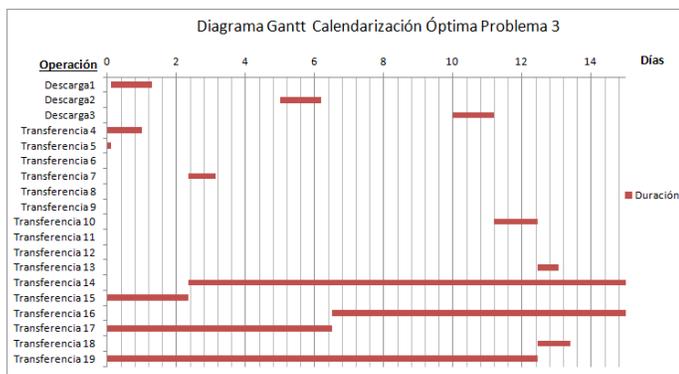


Figura 3.11: Problema 3



3.5.2. Reducción del Espacio de Búsqueda

A continuación se muestra la Figura 3.12 resumiendo los efectos de los quiebres de simetría sobre los tiempos de ejecución para el Problema 1. La Figura 3.13 compara los tiempos de ejecución del Problema 2 con los primeros cuatro quiebres de simetría, y luego con la implementación del autómatas.

Figura 3.12: Tiempos de Ejecución Problema 1

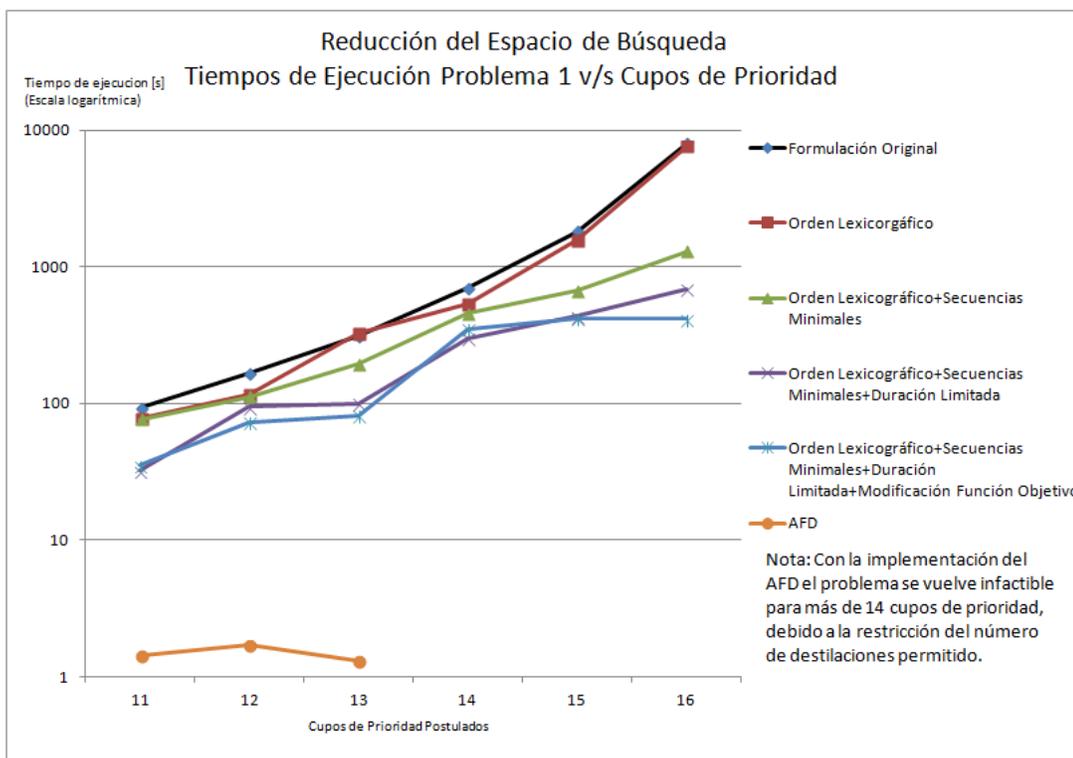
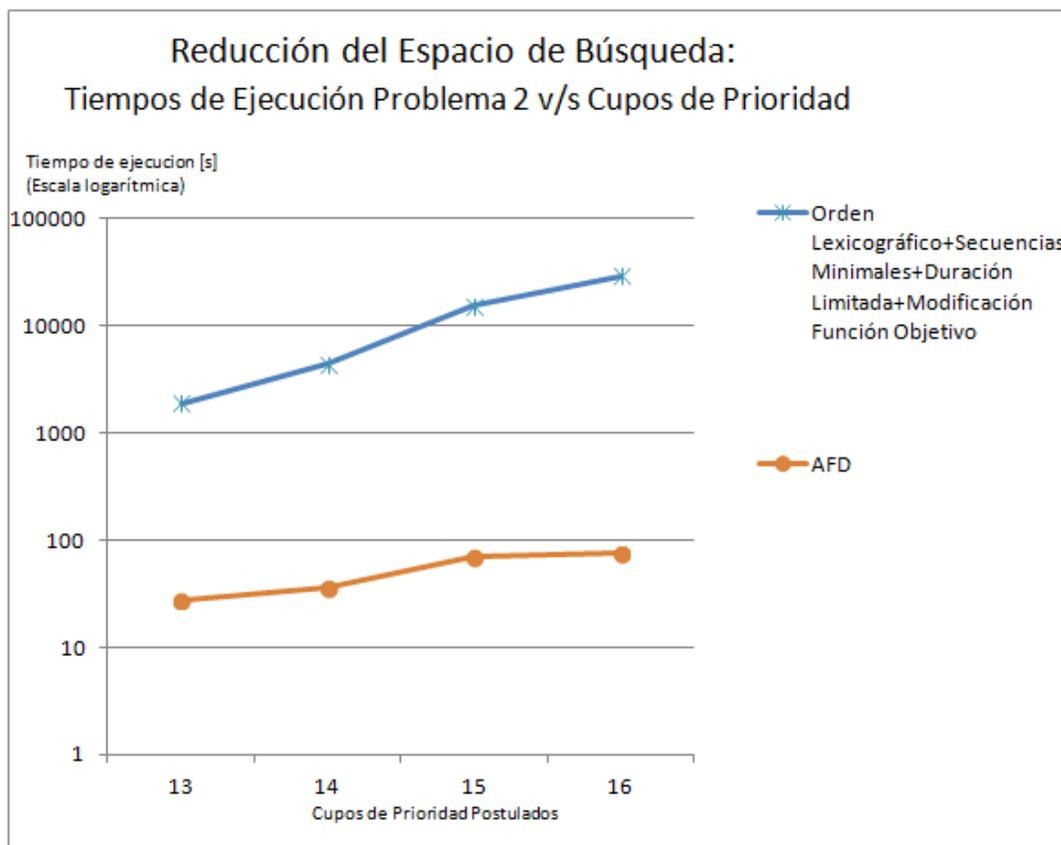


Figura 3.13: Tiempos de Ejecución Problema 2



3.6. Comentarios Finales

En este capítulo se mostraron las dificultades numéricas de la implementación de (*PODM*). Las simulaciones no incluyen los costos de reducción de CO₂, exceptuando las correspondientes a la Tabla 3.2.

Se mostró que la estrategia de descomposición en dos etapas adolece en algunos casos de problemas de factibilidad en la resolución de (*PNL*). Lo anterior justifica la relajación de McCormick, ya que al ser más ajustada ayuda a que una asignación factible para (*PLM*) lo sea para (*PNL*). Si bien los tiempos de ejecución se ven afectados por esta relajación, pareciera prudente introducirla para evitar el problema de la infactibilidad. En la siguiente sección todas las simulaciones fueron realizadas con esta relajación.

La simetría del problema fue abordada por un lado desde la introducción de cortes de algunas restricciones sobre las variables Z_{iv} y por otro lado desde la incorporación de un autómata finito determinista que contiene información de la estructura de la refinería. Los resultados numéricos de la segunda técnica muestran un mejor desempeño en tiempos de ejecución con respecto a las primeras restricciones. En la siguiente sección todas las simulaciones fueron realizadas con la incorporación del *AFD*.

Capítulo 4

Modelo Multiperiodo del Proceso de Descarga y Mezcla de Crudos

Dentro de la literatura sobre las emisiones de dióxido de carbono en refinerías de petróleo se pueden encontrar aplicaciones de programación lineal para asociar las emisiones a los productos finales (Babusiaux *et al.* [1] y *Tehrani et al.*) [24]. En particular los autores concluyen que esta técnica contribuye al análisis de ciclo de vida de productos.

Por otro lado Elkamel *et al.* desarrollan un modelo no-lineal mixto del subproceso de planificación de las unidades de producción donde maximizan utilidades respetando un porcentaje de reducción de CO₂ a través del uso de diferentes opciones de mitigación sobre las unidades de producción [10].

No se encontraron en la literatura modelos que integren los costos marginales de mitigación en el proceso de descarga y mezcla de crudos. En este capítulo se plantea una dinámica a tiempo discreto para modelar la interacción de diferentes periodos de calendarización a partir del modelo implementado en el capítulo precedente. Basado en Martinet *et al.* [15] y Bersetkas [3], se busca calcular la frontera de pareto del conjunto de ganancias y emisiones alcanzables. Al final del capítulo se muestran simulaciones numéricas del modelo multiperiodo para el caso del problema 2.

4.1. Emisiones de CO₂ asociadas a Quema de Combustibles

De acuerdo a Elkamelet *al.* [10], el 90 % de las emisiones de CO₂ de una refinería provienen de la quema de combustibles en las unidades de producción. A su vez la cantidad de combustible utilizado en cada unidad de producción depende de la cantidad de volumen de crudo a tratar en ella.

En el mismo artículo, se hace un recuento de las distintas opciones que existen para reducir las emisiones de CO₂. Entre estas se encuentran:

1. La redistribución de flujos (que permite reducir hasta en un 1 % las emisiones)
2. El uso de combustibles que liberen menos CO₂ como el caso del gas natural, que permite reducir en hasta un 30 % las emisiones.
3. La inclusión de tecnologías de captura de CO₂, las cuales permiten reducir hasta en un 90 % las emisiones.

A partir de un problema no lineal mixto encuentran las opciones óptimas sobre cada unidad de producción para minimizar los costos asociados a la reducción de emisiones de CO₂.

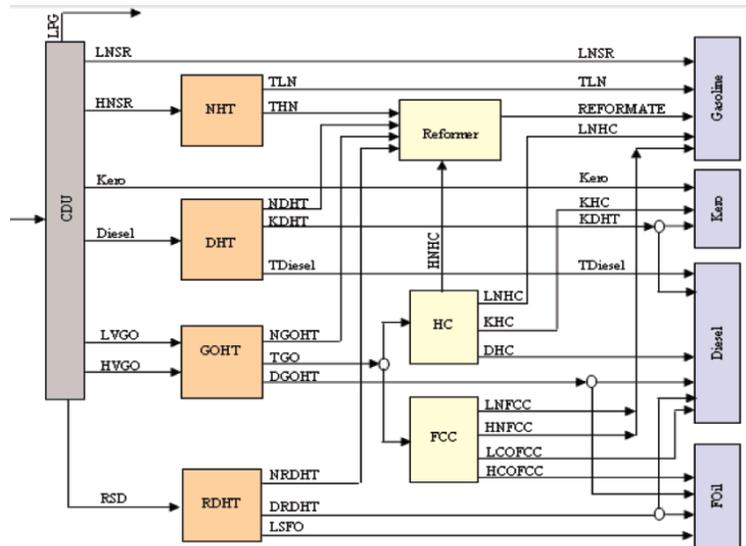


Figura 4.1: Una configuración Posible de las Unidades de Producción

Observar que el crudo entra en primera instancia por CDU, sigla para denominar la unidad de destilación

Entre las unidades de producción de una refinería todas son precedidas por las unidades de destilación (ver figura 4.1¹). Como los volúmenes que entran en cada unidad de destilación dependen del problema de descarga y mezcla de crudos, se vuelve interesante analizar la posibilidad de usar la tecnología de captura (o dejar de usarla) en las unidades de destilación. Para lo anterior se modela la interacción de varios periodos de calendarización de descarga y mezcla de crudos.

4.2. Problema de Calendarización y Emisiones de CO₂

En los capítulos anteriores se presentó un modelo de calendarización el cual determina el orden y duración de las operaciones de la refinería maximizando las ganancias marginales. Pueden existir diversos modelos de optimización del subproceso de descarga y mezcla de crudos, por lo que se dará una forma general de modelar la interacción de calendarizaciones sucesivas.

Se llamará P al vector de parámetros del proceso de calendarización. Este incluye parámetros **exógenos** a los recursos de la refinería, como lo son el tiempo de llegada de los barcos, la cantidad de crudo que traen, sus propiedades, ganancias marginales asociadas a los tipos de crudo que se

¹Imagen extraída de [10].

están trabajando y demandas a satisfacer. También incluye parámetros **endógenos** de la refinería como lo son la cantidad y propiedades de los crudos actualmente almacenados en cada estanque. Dado lo anterior se escribe $P = (P^{exo}, P^{end})$ con P^{exo} y P^{end} representando los parámetros exógenos y endógenos respectivamente.

Se denotará por X a las variables que tengan que ver con decisiones del proceso de calendarización, estas incluyen a los volúmenes que se transfieren durante cada operación y sus tiempos de ejecución. Se entenderá por \mathcal{X}_P el conjunto de posibles valores de X dados parámetros P . En la calendarización, la refinería busca maximizar sus ganancias marginales. Dado $X \in \mathcal{X}$ y parámetros P se denotará por $f(X, P)$ a las ganancias marginales de tomar la decisión X con parámetros P .

Sea $n \in \mathbb{N}$ el número de unidades de destilación de la refinería. Para $r \in \{1, \dots, n\}$ se denotará como $V^r(X)$ el volumen total de crudo que entra en la unidad de destilación r dada la decisión X . Por simpleza de notación, no se explicitará la dependencia de X , y simplemente se escribirá V^r . Adicionalmente, $V = (V^1, \dots, V^n)$ será el vector que contiene todos los volúmenes que entran a cada unidad de destilación.

Por cada unidad de destilación r , $U^r \in \{0, 1\}$ será el estado de la unidad de destilación r la cual representa el uso de la tecnología de captura sobre esa unidad. Específicamente $U^r = 1$ quiere decir que se está usando la tecnología de captura sobre esa unidad y $U^r = 0$ quiere decir que no se está usando. Adicionalmente $U = (U^1, \dots, U^n)$ será el vector que contiene el estado de todas las unidades de destilación.

Las emisiones de CO_2 dependen de la cantidad de volumen que ingresa a la unidad de destilación y si se está usando o no la tecnología de captura. Se llamará $q_{abs} \in (0, 1)$ a la fracción de CO_2 producido que la tecnología es capaz de capturar. $(FE)^r$ será el factor de emisión de CO_2 por unidad de volumen de la unidad de destilación r . De esta manera la cantidad de CO_2 liberado por cada unidad de destilación viene dado por:

$$(FE)^r V^r (1 - q_{abs} U^r) \quad (4.1)$$

La cantidad total de CO_2 liberado luego de una calendarización vendrá representado por la función $\varepsilon(V, U)$, siendo V el vector de volúmenes y U el vector de estado de las unidades de destilación:

$$\varepsilon(V, U) = \sum_{r=1}^n (FE)^r V^r (1 - q_{abs} U^r) \quad (4.2)$$

Observación : La cantidad de combustible utilizado en la unidad de destilación podría no ser lineal en el volumen que ingresa, por lo tanto tampoco lo son las emisiones. De todas maneras es creciente en esta variable, por lo que en una primera aproximación se utilizará una función lineal.

Existen costos asociados a capturar el CO_2 . Estos se modelan de manera lineal con respecto al volumen que ingresa a una unidad de destilación que está utilizando una tecnología de captura. Sea c_1 el costo por unidad de volumen que ingresa a una unidad de destilación que está utilizando la tecnología de captura. De esta manera el costo por cada unidad viene dado por $c_1 V^r U^r$. Así, el costo de capturar CO_2 vendrá representado por la función $g(V, U)$, siendo V el vector de

volúmenes y U el vector de estado de las unidades de destilación:

$$g(V, U) = \sum_{r=1}^n c_1 V^r U^r \quad (4.3)$$

Por último existen problemas asociados a cambiar de estado una unidad de destilación, estos problemas vienen dados por la calibración posterior a la modificación de una unidad de producción, esto trae como consecuencia no poder lograr mezclas con especificaciones requeridas por los clientes. Este fenómeno se modela imponiendo un costo a cambiar la refinería de estado. Para describir matemáticamente lo anterior se debe dar paso al problema multiperiodo.

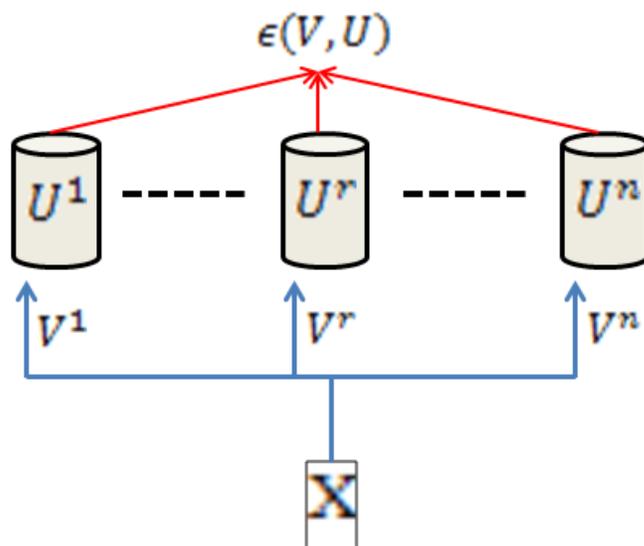


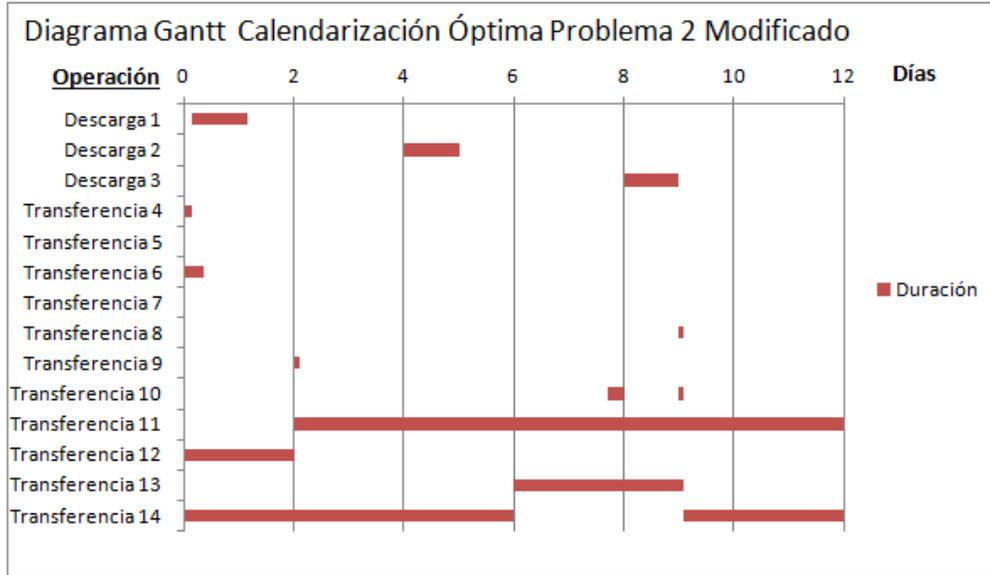
Figura 4.3: Representación de las Emisiones de CO₂ de las Unidades de Destilación

Tabla 4.1: Resumen de la notación utilizada

Símbolo	Descripción
P^{end}	Parámetros endógenos a la refinería.
P^{exo}	Parámetros exógenos a la refinería.
P	Parámetros exógenos y endógenos. $P = (P^{exo}, P^{end})$.
X	VARIABLES del proceso de decisión de calendarización.
\mathcal{X}_P	Conjunto de posible valores de X dados parámetros P .
$f(X, P)$	Ganancias marginales dada la decisión X y parámetros P .
n	Número de unidades de destilación.
V^r	Volumen de crudo que entra en la unidad de destilación r . Depende de X .
V	Vector que contiene a los V^r . $V = (V^1, \dots, V^n)$.
U^r	Estado de la unidad de destilación r . $U^r \in \{0, 1\}$.
U	Vector que contiene a los U^r . $U = (U^1, \dots, U^n)$.
$(FE)^r$	Factor de emisión de la unidad r en toneladas de carbono por barril [t/mbbbl].
$\epsilon(V, U)$	Emisiones de CO ₂ dados V y U en toneladas de carbono [t].
$g(V, U)$	Costos asociados a capturar CO ₂ dados V y U .

Figura 4.4: Calendarización Problema 2 incluyendo los costos de reducción de CO₂ (4.3)

Los datos para este problema son los mismos que los utilizados en la Figura 3.10. Observar que cambian las transferencias hacia las unidades de destilación.



4.3. Modelo Multiperiodo

4.3.1. Dinámica Asociada a Calendarizaciones Consecutivas

Se consideran $T \in \mathbb{N}$ periodos de calendarización. Sea $t \in [T] = \{0, \dots, T\}$. P_t denotará los parámetros de la calendarización para el periodo t , usando la notación anterior $P_t = (P_t^{exo}, P_t^{end})$.

Por cada periodo t existe una decisión $X_t \in \mathcal{X}_{P_t}$ del proceso de calendarización, la cual será un control del problema. X_t define los parámetros internos del periodo $t + 1$. Precisando lo anterior, dado P_t y X_t , la función $a(X_t, P_t)$ será la actualización de los parámetros internos del periodo $t + 1$:

$$P_{t+1}^{end} = a(X_t, P_t) \quad (4.4)$$

V_t^r será el volúmen de crudo que ingresa a la unidad r en el periodo t . Usando la notación anterior, $V_t = (V_t^1, \dots, V_t^n)$ representará el vector que contiene los volúmenes que entran a las unidades de destilación en el periodo t . Estos volúmenes son una función de las decisiones de calendarización. Dado X_t , la función $b(X_t)$ entrega los volúmenes que ingresan a cada unidad de destilación:

$$V_t = b(X_t)$$

U_t^r será el estado de la unidades de destilación r en el tiempo t ; usando la notación anterior, $U_t = (U_t^1, \dots, U_t^n)$ será el vector que contiene los estados de las unidades de destilación al periodo t .

Otro control del problema viene dado por las variables D_t^r , que modifican o mantienen el estado de la unidad r antes del tiempo $t + 1$. La relación que se establece viene dada por:

$$U_{t+1}^r = U_t^r + D_t^r \quad (4.5)$$

Donde $D_t^r \in \{0, 1\}$ si $U_t^r = 0$ y $D_t^r \in \{-1, 0\}$ si $U_t^r = 1$. Se denota $D_t = (D_t^1, \dots, D_t^n)$ al vector que contiene todos los controles sobre del estado de las unidades de destilación. Al conjunto de posibles valores de D_t se denotará \mathcal{D}_{U_t} , donde se explicita su dependencia del estado de las unidades de destilación.

De esta manera las ecuaciones (4.4) y (4.5) determinan el estado de los parámetros endógenos y el estado de las unidades de destilación para el periodo $t + 1$. Dado un estado de las unidades de destilación $\bar{U} = (\bar{U}^1, \dots, \bar{U}^n)$, parámetros endógenos \bar{P}^{end} , y parámetros exógenos para T periodos $\{P_t^{exo}\}_{t \in [T]}$, la **dinámica** $(D[\bar{P}^{end}, \{P_t^{exo}\}_{t \in [T]}, \bar{U}])$ se define como el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$(D[\bar{P}^{end}, \{P_t^{exo}\}_{t \in [T]}, \bar{U}]) \quad \begin{cases} P_{t+1}^{int} = a(X_t, P_t) & t \in \{0, \dots, T-1\} \\ U_{t+1} = U_t + D_t & t \in \{0, \dots, T-1\} \\ P_0^{end} = \bar{P}^{end}, U_0 = \bar{U} \\ D_t \in \mathcal{D}_{U_t} & t \in \{0, \dots, T-1\} \\ X_t \in \mathcal{X}_{P_t} & t \in \{0, \dots, T\} \end{cases} \quad (4.6)$$

Se dirá que un par $(\{X_t\}_{t \in [T]}, \{D_t\}_{t \in [T-1]})$ es admisible para $(D[\bar{P}^{end}, \{P_t^{exo}\}_{t \in [T]}, \bar{U}])$ si satisface las ecuaciones (4.6).

Anteriormente se mencionó que existe un costo asociado a cambiar el estado de las unidades de destilación. Este costo se impondrá sobre D_t . Sea c_2 al costo asociado a implementar la tecnología de captura, y c_3 al costo de dejar de utilizar la tecnología de captura. De esta manera se define la función $h(D_t)$ como el costo asociado a la modificación de las unidades de destilación:

$$h(D_t) = \sum_{r=1}^n c_2[D_t^r]_+ + c_3[D_t^r]_-, \quad (4.7)$$

donde las funciones $[\cdot]_+$ y $[\cdot]_-$ denotan la parte positiva y la parte negativa del argumento, respectivamente, es decir $[x]_+ = \max\{x, 0\}$ y $[x]_- = -\min\{x, 0\}$. Observar que si no se realiza una modificación a la unidad de destilación r el costo asociado a esa unidad es cero.

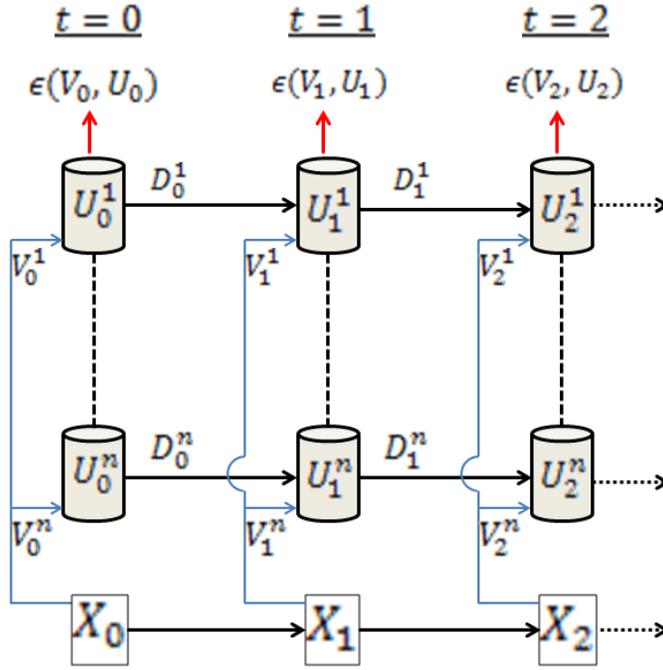


Figura 4.5: Representación del Modelo Multiperíodo

Los cilindros simbolizan las unidades de destilación, donde U_t^r es el estado de la unidad r en el periodo t . D_t^r es la decisión de cambiar el estado de la unidad de destilación r antes del periodo $t+1$. V_t^r es el volumen de crudo que entra a la unidad r en el periodo t . $\epsilon(V_t, U_t)$ representa las emisiones de CO_2 en cada periodo. Finalmente, X_t representa la decisión de calendarización tomada en el periodo t .

4.3.2. Conjunto de Ganancias y Emisiones Alcanzables

A continuación se definirá el conjunto de ganancias y emisiones alcanzables el cual contiene todos los posibles valores que pueden tomar las ganancias y las emisiones en k periodos de calendarización dados parámetros exógenos, parámetros endógenos y un estado inicial de las unidades de destilación. Este conjunto representa todos los resultados posibles dentro de las decisiones de la refinera.

Definición 4.1 Dado un estado de las unidades de destilación $\bar{U} = (\bar{U}^1, \dots, \bar{U}^n)$, parámetros internos \bar{P}^{int} , y parámetros externos $\{P_t^{ext}\}_{t \in [T]}$. Sea $k \in \{1, \dots, T\}$, se define el conjunto de ganancias y emisiones alcanzables para el periodo k , $\mathcal{F}_k(\bar{P}^{end}, \{P_t^{exo}\}_{t \in [k]}, \bar{U})$ como:

$$\mathcal{F}_k(\bar{P}^{end}, \{P_t^{exo}\}_{t \in [k]}, \bar{U}) = \left\{ (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{l} \theta_1 = \sum_{t=0}^k f(X_t, P_t) - g(b(X_t), U_t) - \sum_{t=0}^{k-1} h(D_t), \\ \theta_2 = \sum_{t=0}^k \epsilon(b(X_t), U_t), \\ (\{X_t\}_{t \in [k]}, \{D_t\}_{t \in [k-1]}) \text{ es admisible para} \\ (D[\bar{P}^{end}, \{P_t^{exo}\}_{t \in [k]}, \bar{U}]) \end{array} \right. \right\} \quad (4.8)$$

Se define también el conjunto de ganancias y emisiones alcanzables inicial, $\mathcal{F}_0(\bar{P}^{end}, P_0^{exo}, \bar{U})$ como:

$$\mathcal{F}_0(\bar{P}^{int}, P_0^{ext}, \bar{U}) = \left\{ (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{l} \theta_1 = f(X_0, P_0) - g(b(X_0), U_0), \\ \theta_2 = \varepsilon(b(X_0), U_0), \\ X_0 \in \mathcal{X}_{P_0} \\ U_0 = \bar{U}, P_0^{int} = \bar{P}^{int} \end{array} \right. \right\} \quad (4.9)$$

Finalmente, se utiliza la sigla **(CGEA)** para referirse al Conjunto de Ganancias y Emisiones Alcanzables para el periodo T .

Interesa extraer de **(CGEA)** las decisiones óptimas en el sentido de pareto. Informalmente corresponde a decisiones que al ser modificadas generarían un aumento de las emisiones, o una disminución de las ganancias. La idea fue extraída de *Dynamic Programming and Optimal Control* [3, Capítulo 2, sección 2.3.4], mientras que las definiciones se extrajeron de Martinet *et al.* [15].

Sean dos vectores $v, w \in \mathbb{R}^n$ se denota $v \leq w$ si para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $v_i \leq w_i$, en este caso se dirá que el vector v acota inferiormente al vector w . Análogamente se denota $v < w$ si para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $v_i < w_i$, en este caso se dirá que el vector v acota inferiormente de manera estricta al vector w .

Definición 4.2 Dado un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ y un vector $v = (v_1, \dots, v_n) \in S$, el vector v se dice **pareto eficiente** si cumple la condición:

$$(\forall w \in \mathbb{R}^n \setminus \{v\}) (w \leq v \Rightarrow w \notin S) \quad (\text{PE})$$

Es decir un vector pareto eficiente de un conjunto S es aquel que al disminuir cualquiera de sus componentes el vector resultante queda fuera del conjunto S . Se presenta también la definición de pareto eficiente débil.

Definición 4.3 Dado un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ y un vector $v = (v_1, \dots, v_n) \in S$, el vector v se dice **pareto eficiente débil** si cumple la condición

$$(\forall w \in \mathbb{R}^n) (w < v \Rightarrow w \notin S) \quad (\text{PED})$$

Es decir un vector pareto eficiente débil de S es aquel que no es acotado inferiormente componente a componente por otro vector de S . A partir de las definiciones anteriores se tiene directamente la siguiente proposición:

Proposición 4.4 Dado un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ y un vector $v = (v_1, \dots, v_n) \in S$. Si el vector v cumple (PE), entonces cumple (PED).

Ya se tienen los elementos para definir la frontera de pareto del conjunto S .

Definición 4.5 Dado un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$, se define la frontera de pareto $\mathcal{P}(S)$ como el conjunto de todos los puntos pareto eficientes de S .

$$\mathcal{P}(S) = \{x \in S \mid x \text{ cumple (PE)}\}$$

Análogamente se define la frontera de pareto débil $\mathcal{P}^D(S)$:

$$\mathcal{P}^D(S) = \{x \in S \mid x \text{ cumple (PED)}\}.$$

Resulta directo de la Proposición 4.4 el siguiente corolario.

Corolario 4.6 Dado $S \subset \mathbb{R}^n$ entonces se cumple:

$$\mathcal{P}(S) \subset \mathcal{P}^D(S).$$

El corolario anterior dice que la frontera de pareto se puede encontrar dentro de la frontera de pareto débil. La anterior no es difícil de encontrar en el caso en que S es discreto. En tal caso $\mathcal{P}^D(S)$ se puede encontrar con el siguiente procedimiento: Por cada elemento en S comparar a los otros elementos de S componente a componente y si no es acotado inferiormente por otro vector en todas sus componentes, entonces pertenece a $\mathcal{P}^D(S)$. Lo anterior se formaliza en el algoritmo 1.

Data: $S \subset \mathbb{R}^n$ finito.

Result: $\mathcal{P}^D(S)$.

$\mathcal{P}^D(S) := S$;

for $v \in S$ **do**

for $w \in S$ **do**

if $\forall i \in \{1, \dots, n\}, v_i > w_i$ **then**

$\mathcal{P}^D(S) = \mathcal{P}^D(S) \setminus \{v\}$

end

end

end

Algorithm 1: Procedimiento para encontrar la frontera de pareto débil.

Finalmente hay que notar que no se buscará la frontera de Pareto del conjunto (**CGEA**), sino se buscará la frontera de Pareto de otro conjunto definido a partir de este. Lo anterior se debe a que la frontera de pareto busca vectores que no sean acotados inferiormente por otro vector del conjunto, mientras que en (**CGEA**) interesa buscar vectores que no sean acotados superiormente e inferiormente en la primera y segunda componente, respectivamente, por otros vectores del conjunto. Para resolver lo anterior se introduce la siguiente notación:

Definición 4.7 Dado $S \subset \mathbb{R}^2$ se define S^{aux} :

$$S^{aux} = \{(-\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (\theta_1, \theta_2) \in S\} \quad (4.10)$$

Se buscará entonces la frontera de Pareto del conjunto **CGEA**^{aux}. Se abusará de la terminología hablando de la frontera de Pareto del conjunto **CGEA**. A una decisión que genere un vector pareto eficiente de **CGEA** se le dirá una decisión pareto óptima.

4.3.3. Discretización del Conjunto de Ganancias y Emisiones Alcanzables

Se observa que en general el conjunto \mathcal{X}_{P_t} es infinito (si no es vacío), por lo tanto también lo es el conjunto (**CGEA**), esto produce que no se pueda aplicar el algoritmo 1. En lo que sigue se propone una forma de discretizar el espacio \mathcal{X}_{P_t} (ver notación tabla 4.1).

Una opción será que X_t sea solución del siguiente problema de maximización de utilidades:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & f(X, P_t) - g(b(X), U_t) \\ \text{s.a.} \quad & X \in \mathcal{X}_{P_t} \end{aligned}$$

En tal caso se dirá que X_t toma el valor $X_{P_t}^1$.

La otra opción será que X_t sea solución del problema de minimización de emisiones.

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \varepsilon(b(X), U_t) \\ \text{s.a.} \quad & X \in \mathcal{X}_{P_t} \end{aligned}$$

En este caso se dirá que X_t toma el valor de $X_{P_t}^2$.

La decisión de discretizar el espacio \mathcal{X}_{P_t} en estos dos puntos se justifica notando que los vectores v_1 y v_2 definidos como:

$$v_1 := (f(X_{P_0}^1, \bar{U}) - g(b(X_{P_0}^1), \bar{U}), \varepsilon(b(X_{P_0}^1), \bar{U})) \quad (4.11)$$

$$v_2 := (f(X_{P_0}^2, \bar{U}) - g(b(X_{P_0}^2), \bar{U}), \varepsilon(b(X_{P_0}^2), \bar{U})) \quad (4.12)$$

son vectores pareto eficiente débil del conjunto $\mathcal{F}_0(\bar{P}^{int}, P_0^{ext}, \bar{U})$ ya que provienen de maximizar o minimizar cada componente.

Para aplicar lo anterior basta cambiar el espacio \mathcal{X}_{P_t} por $\{X_{P_t}^1, X_{P_t}^2\}$ en la dinámica (4.6). De esta manera se genera el conjunto de ganancias y emisiones discretizado (**CGEAd**) al cual se le puede aplicar el algoritmo 1.

4.3.4. Cortes de Factibilidad del Modelo Multiperiodo

Uno de los primeros problemas que se encuentra en el modelo multiperiodo, es que el conjunto \mathcal{X}_{P_t} puede resultar vacío producto de la decisión X_{t-1} .

Una de las causas de la infactibilidad proviene que la resolución de (*PODM*) puede dejar sin crudo a los estanques de mezclado. Recordando que se tiene la restricción de destilación continua (2.11), el fenómeno anterior genera que esta restricción sea violada en el periodo siguiente ya que no se puede transferir crudo hacia las unidades de destilación.

Lo anterior puede ser solucionado incluyendo restricciones sobre el volumen final de los estanques de mezclado, y sobre las propiedades que deben tener. Lo anterior, utilizando la notación de (*PODM*) significa agregar a la formulación las siguientes restricciones.

Para cada unidad de mezclado, $r \in R_M$, el volúmen final debe estar sobre M_r .

$$L_{nr} + \sum_{v \in I_r} V_{nv} - \sum_{v \in O_r} V_{nv} \geq M_r \quad \forall r \in R_M \quad (4.13)$$

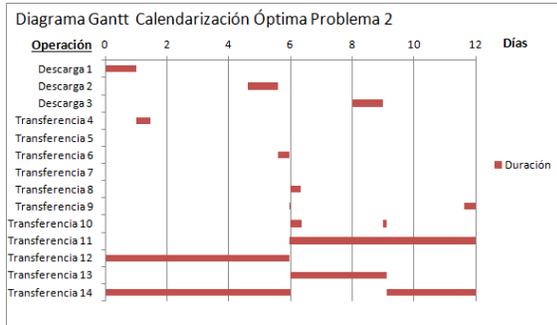
Por cada propiedad $k \in K$ y $r \in R_M$, se desea que las concentraciones finales de la propiedad k en el estanque r estén en el rango $[\underline{R}_{kr}, \bar{R}_{kr}]$. Este rango está dado por las especificaciones de la demanda del periodo siguiente.

$$\sum_{c \in C} X_{ck} \left(L_{nrc} + \sum_{v \in I_r} V_{nvc} - \sum_{v \in O_r} V_{nvc} \right) \geq \bar{R}_{kr} \left(L_{nr} + \sum_{v \in I_r} V_{nv} - \sum_{v \in O_r} V_{nv} \right) \quad \forall k \in K, r \in R_M \quad (4.14)$$

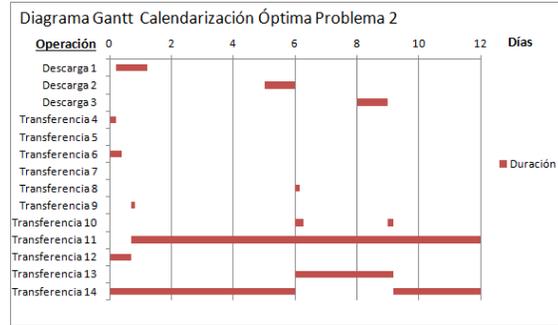
$$\sum_{c \in C} X_{ck} \left(L_{nrc} + \sum_{v \in I_r} V_{nvc} - \sum_{v \in O_r} V_{nvc} \right) \leq \underline{R}_{kr} \left(L_{nr} + \sum_{v \in I_r} V_{nv} - \sum_{v \in O_r} V_{nv} \right) \quad \forall k \in K, r \in R_M \quad (4.15)$$

Las restricciones (4.13),(4.14) y (4.15) se denominarán cortes de factibilidad de problema multiperiodo.

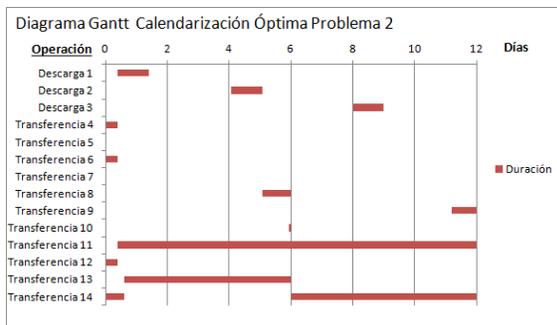
Figura 4.7: Cuatro posibles calendarizaciones del Problema 2.



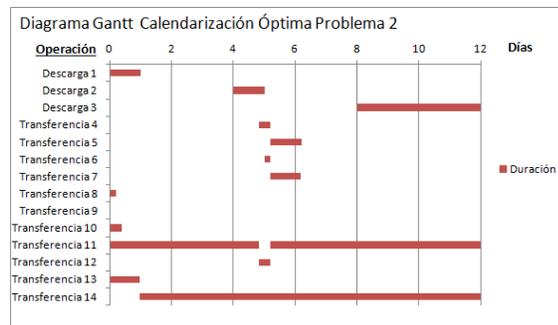
(a) Maximizando ganancias. Incluye restricciones (4.13)– (4.15). Ganancias: \$ 7812000. Emisiones: 3588 [t]. Nivel Final Estanques: r_7 : 100 [Mbb], r_8 : 200 [Mbb], r_9 : 100 [Mbb].



(b) Maximizando ganancias. **No** incluye restricciones (4.13)– (4.15). Ganancias: \$ 8302000. Emisiones: 3581 [t]. Nivel Final Estanques: r_7 : 0 [Mbb], r_8 : 64 [Mbb], r_9 : 0 [Mbb].



(c) Minimizando Emisiones. Incluye restricciones (4.13)– (4.15). Ganancias: \$ 7091000. Emisiones: 2940 [t]. Nivel Final Estanques: r_7 : 100 [Mbb], r_8 : 400 [Mbb], r_9 : 200 [Mbb].



(d) Minimizando Emisiones. **No** incluye restricciones (4.13)– (4.15). Ganancias: \$ 7140000. Emisiones: 2939 [t]. Nivel Final Estanques: r_7 : 0 [Mbb], r_8 : 993 [Mbb], r_9 : 0 [Mbb].

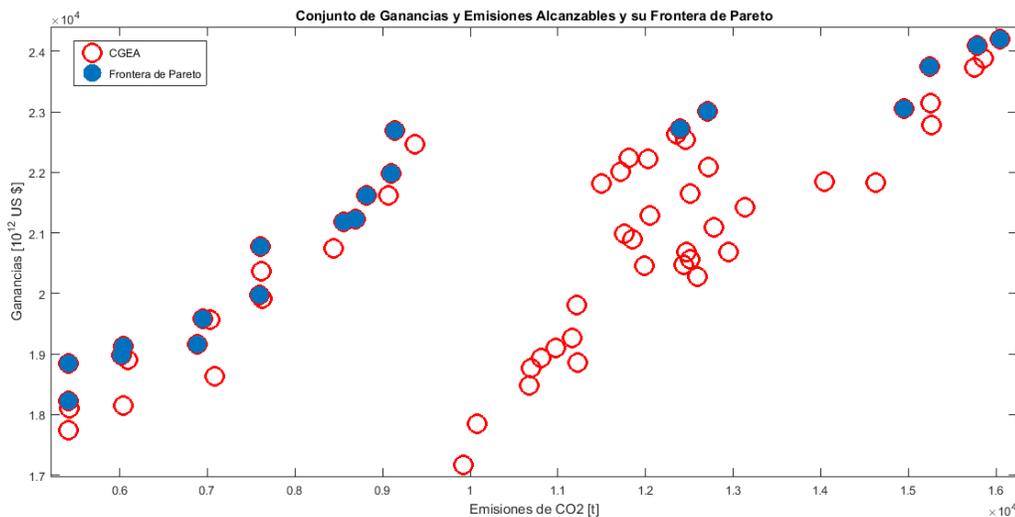
En la Figura 4.7, se pueden apreciar calendarizaciones para un solo periodo considerando el problema de maximizar ganancias o minimizar emisiones incluyendo o no las restricciones (4.13),(4.14) y (4.15). En la Figura, los casos (b) y (d) dejan infactible al siguiente periodo, pero tienen mayores ganancias que los casos (a) y (c) respectivamente.

4.4. Simulaciones Numéricas Modelo Multiperiodo Discretizado

En esta sección se explora el modelo multiperiodo discreto para una configuración como la descrita en el problema 2 (ver Figura 3.2).

El problema a resolver será para $T = 2$. Por lo tanto se deben tomar tres decisiones de calendarización. Además existen dos unidades de destilación las cuales pueden estar en dos estados, y se pueden cambiar en $t = 0$ y $t = 1$. Lo anterior da un total de $2^3 \cdot 2 \cdot 2^3 = 64$ posibilidades. Es decir (**CGEAd**) contiene a lo más 64 elementos (algunas combinaciones pueden resultar en infactibilidad). A continuación en la figura 4.8, se presenta un gráfico mostrando los puntos del conjunto (**CGEAd**) y su frontera de Pareto.

Figura 4.8: Conjunto de Ganancias y Emisiones Alcanzables Discretizado



De la figura 4.8 se pueden observar 19 puntos pareto eficientes dentro del conjunto de ganancias y emisiones alcanzables discretizado. La existencia de múltiples decisiones pareto óptimas dan una primera aproximación numérica a la complejidad del problema multiperiodo.

4.5. Comentarios Finales

En este capítulo se presentó en primer lugar una forma de incorporar los costos de reducción de CO₂ al problema de calendarización. En segundo lugar se propone un modelo multiperiodo para considerar la interacción de periodos de calendarización consecutivos. Se destaca que el modelo es independiente de la formulación matemática utilizada para resolver la calendarización del subproceso de descarga y mezcla de crudos.

La descripción y el cálculo de la frontera de pareto del conjunto de ganancias y emisiones

alcanzables es un tema que no está acabado en esta memoria. Desde el punto de vista teórico, el principio de programación dinámica se ve como una herramienta adecuada para poder caracterizar la frontera de pareto del periodo k a partir de la del periodo $k - 1$, no obstante no se obtuvieron resultados concretos en este aspecto.

Para abordarlo de manera numérica se redujeron las posibles decisiones de calendarización de la refinería mediante subproblemas de optimización (maximizar ganancias o minimizar emisiones), lo anterior generó el conjunto de ganancias y emisiones alcanzables discretizado (**CGEAd**). No es claro que la frontera de pareto del conjunto discretizado coincida con la del conjunto original. Tampoco se tiene algún resultado teórico que exprese qué tan lejos se está del original.

Finalmente los cortes de factibilidad surgieron como una necesidad para poder ejecutar el modelo multiperiodo. Como bien muestra la figura 4.7, estos cortes influyen negativamente en las ganancias, pero sin ellos no era posible encontrar pares admisibles para la dinámica.

Capítulo 5

Conclusiones y Perspectivas

5.1. Escalabilidad y Extensión de (PNLM)

En el capítulo 3 se muestra la dificultad de la implementación numérica del modelo matemático presentado en el capítulo 2. La reducción del espacio de búsqueda mediante las primeras cuatro técnicas resultó insuficiente para la escalabilidad de modelo, pero al menos permitieron reducir parcialmente los tiempos de ejecución para instancias pequeñas y permiten entender mejor la simetría que posee el planteamiento. Se destaca en particular que estas desigualdades quedaron descritas en términos de los conjuntos que definen la configuración de la Refinería.

Para la escalabilidad del modelo se propone como línea de investigación la automatización de la restricción basada en un lenguaje regular. Para lo anterior se observa que los bloques $(DFA)_i$ del problema 1 y 2 (ver Figuras 3.7 y 3.8) representan los estados de operación de la refinería y para transitar entre uno y otro bloque se debe pasar por operaciones de destilación.

El número de estados de operación de la Refinería se puede estimar haciendo la observación que, por cada unidad de destilación, siempre debe estar funcionando una operación de destilación. Luego si $|W_T|$ denota el número de operaciones de destilación y $|R_D|$ el número de unidades de destilación, entonces existen a lo más

$$\binom{|W_T|}{|R_D|}$$

estados de operación de la Refinería.

Por otro lado, para considerar relaciones de mezcla más complejas, por ejemplo polinomiales, la relajación de Lasserre pareciera ser una herramienta adecuada para enfrentar este problema. De esta manera se podría explorar la resolución de la relajación mediante la descomposición en dos etapas descrita en el capítulo tres: Primero resolver el problema lineal mixto asociado a la relajación, y en segunda instancia fijar las variables enteras y resolver un problema de optimización no lineal en variables continuas.

5.2. Factibilidad del Modelo Multiperiodo

La introducción de las restricciones denominadas cortes de factibilidad (4.13), (4.14) y (4.15) en el (*PODM*) son un primer avance para asegurar la factibilidad del modelo multiperiodo. Como se observó cuando se optimiza sin esta consideración los volúmenes de los estanques de mezclado terminan vacíos, violando la restricción de destilación continua para el siguiente periodo.

No obstante, existen otros problemas de factibilidad asociados a no poder cumplir la demanda del periodo. Esto puede ocurrir por dos motivos: (1) No se pueden satisfacer los volúmenes de la demanda y (2) No se pueden generar las mezclas con las propiedades requeridas. El caso (2) es el más complicado de lidiar, y no se han encontrado formas de abordarlo.

En el caso (1) esto se podría atacar relajando el cumplimiento de la demanda y castigando con una penalización a no cumplirla en la función objetivo. Alternativamente se podrían resolver problemas auxiliares de maximización del volumen de crudo que puede salir de cada unidad de mezclado, olvidando la restricción de demanda. En el caso que alguno de esos problemas resulte infactible, eso significaría que no existen formas de mezclar los crudos tal que se respeten las concentraciones impuestas sobre la salida de los estanques de mezclado, es decir, se está en el caso (2).

5.3. Reducción del Espacio de Búsqueda del Modelo Multiperiodo

El cálculo, o la búsqueda de la frontera de pareto, de (**CGEA**) fue realizada mediante exploración por fuerza bruta (de hecho se encontró al frontera de pareto del conjunto (**CGEAd**)). Para que el modelo sea aplicable se vuelve necesario deducir algún resultado en el espíritu de la programación dinámica.

Una de las primeras dificultades es que el espacio de control \mathcal{D}_{U_t} depende del estado de la unidad de destilación U_t , luego se vuelve complicado derivar un resultado de programación dinámica partiendo desde el tiempo final, ya que no se sabe como será el espacio de control.

Esto sugiere buscar un principio de programación dinámica partiendo desde el tiempo inicial. Para lo anterior se observa que en el capítulo 2 del libro *Dynamic Programming* [3], exhiben un principio de programación dinámica desde el tiempo inicial (*Forward DP Algorithm*). Esto es posible en el caso de sistemas deterministas (sin aleatoriedad) ya que el problema está totalmente determinado por su dinámica, y se vuelve equivalente a un problema de flujo en un grafo dirigido acíclico.

El grafo anterior consiste en un nodo inicial representando el estado inicial, T capas de nodos, y un nodo final. Cada capa tiene un número de nodos igual a los estados posibles de la dinámica. Las aristas salen desde el nodo inicial hacia la capa 1, desde la capa t hasta las capa $t + 1$ y de la capa T salen todas las aristas hacia el nodo final. El peso de cada arista viene dado por el costo de pasar de un estado a otro, salvo las aristas que van de la capa T al nodo final que tienen costo

cero. Por construcción no existen ciclos.

Por otro lado en el mismo capítulo del libro, derivan un principio de programación dinámica para encontrar la frontera de pareto de problemas con más de una función de costos cuando la dinámica está regida por solo un control u_k . El principio dice que si un vector de costos definido por la secuencia de controles u_0, \dots, u_k es pareto eficiente para el conjunto de costos alcanzables a tiempo $k + 1$, entonces el control truncado u_0, \dots, u_{k-1} define un vector pareto eficiente para el conjunto de costos alcanzables a tiempo $k - 1$.

El problema de derivar un principio de programación dinámica como el anterior, radica en el hecho de que la dinámica tiene dos controles y no uno. Luego cuando se compara el vector de costos definido por los controles truncados con otros vectores del conjunto de costos y emisiones alcanzables, no se puede decir mucho. Sin embargo, se cree que debe existir alguna relación entre las fronteras de pareto de los conjuntos de ganancias y emisiones alcanzables a tiempo $k - 1$ y k .

5.4. Extensiones

Una forma de extender este trabajo sería integrando otros elementos relegados al proceso de planificación a la calendarización. Al integrar los costos asociados a la captura de CO_2 cambia la calendarización del subproceso de descarga y mezcla de crudos. Por lo tanto es esperable que al incluir otros elementos del proceso de planificación, la calendarización también se vea afectada. Por ejemplo el modelo Multiperiodo se podría extender naturalmente para considerar emisiones de otros agentes como lo son los óxidos de azufre y de nitrógeno.

Finalmente, se observa que el modelo Multiperiodo es independiente de la formulación matemática del proceso de calendarización. Lo anterior lo hace adaptable a procesos de otras industrias en donde existan unidades que utilicen combustible de manera variable entre un periodo y otro.

Capítulo 6

Anexos

6.1. Códigos Capítulo 1

A continuación se incluye los códigos utilizados para las simulaciones de los niveles de CO2 atmosférico. Corresponden a los gráficos de la Figura 1.3. Estos fueron escritos y ejecutados en MATLAB R2016a [®].

Cálculo evolución CO2

```
%dinamica discreta

clear;
n=100;
M=zeros(1,n);
u=zeros(1,n-1);
Q=zeros(1,n);
Mp=280; %nivel preindustrial ppm
M0=399; %nivel 2015 ppm
Q0=73.4; %PIB global trillones de dolares economia 2015
q=exp(0.0587)-1; %tasa de crecimiento economico: interpolar PIB global
alfa=0.471; %conversion emisiones a concentracion
delta=1/120; %fraccion que absorbe la tierra
Mfinal=450; %objetivo
M(1)=M0; %inicializacion
Q(1)=Q0; % inicialiacion
aux=0;
for i=2:n %se calcula la trayectoria dada por algun control viable
aux=1-(i/n)^(0);
%Se hacen combinaciones convexas de los extremos del conjunto de controles viables
u(i-1)=aux*max(0,((1-delta)*(M(i-1)-((Mfinal-Mp)*(1-delta)^((i-1)-n)+Mp))
+alfa*emision1(Q(i-1)))/(alfa*emision1(Q(i-1))))+(1-aux)*1;
M(i)=M(i-1)+alfa*emision1(Q(i-1))*(1-u(i-1))-delta*(M(i-1)-Mp);
Q(i)=(1+q)*Q(i-1);
end

figure
```

```

ax1=subplot(1,2,2); plot(2015:2114,M,2015:4:2114,Mp*ones(1,25),'.',
,2015:4:2114,Mfinal*ones(1,25),'x'),
title('Evolucion Concentracion de CO2 Atmosferico'),
axis([2014 2115 250 600]),
ylabel('[ppm] de CO2'), xlabel('Ano'),
legend('CO2 Atmosferico', 'Nivel Preindustrial', 'Umbral Final')

subplot(1,2,1), plot(2015:2113,100*u, '.'),
title('Tasa de Reduccion de CO2 por ano'), axis([2014 2115 0 105]),
ylabel('% de Reduccion'), xlabel('Ano')

#emision.m
function y=emision1(Q)
    y=1.4365*log(Q)+2.069;
end

```

6.2. Códigos y Datos Capítulos 3 y 4

Esta sección contiene los distintos datos empleados en la resolución de los problemas 3 y 4.

6.2.1. Datos

Los siguientes datos fueron utilizados para generar los gráficos de las Figuras 3.9, 3.10, 3.11

Tabla 6.1: Parámetros Problema 1

	Horizonte de tiempo	8 días	
Barcos	Tiempo de Llegada	Composición	Cantidad (Mbbbl)
r_1	0	100 % A	1000
r_2	4	100 % B	1000
Estanques de Almacenamiento	Capacidad (Mbbbl)	Composición inicial	Cantidad inicial (Mbbbl)
r_3	[0,1000]	100 % A	250
r_4	[0,1000]	100 % B	750
Estanques de Mezclado	Capacidad (Mbbbl)	Composición inicial	Cantidad inicial (Mbbbl)
r_5 (Mezcla 1)	[0,1000]	100 % C	500
r_6 (Mezcla 2)	[0,1000]	100 % D	500
Tipos de Crudo	Propiedad 1	Ganancia Marginal (\$ /bbl)	
Crudo A	0.01	9	
Crudo B	0.06	4	
Crudo C	0.02	8	
Crudo D	0.05	5	
Tipos de Mezcla	Umbral de propiedad 1	Demanda (Mbbbl)	
Mezcla 1	[0.015, 0.025]	[1000,1000]	
Mezcla 2	[0.045, 0.055]	[1000,1000]	
	Flujo de descarga de barcos (Mbbbl/día)	[0,500]	
	Flujo de transferencia entre estanques(Mbbbl/día)	[0,500]	
	Flujo hacia unidades de destilación(Mbbbl/día)	[50,500]	
	Máximo número de destilaciones	3	

Tabla 6.2: Parámetros Problema 2

		Horizonte de tiempo	12 días	
Barcos		Tiempo de Llegada	Composición	Cantidad (Mbbbl)
r_1		0	100 % A	500
r_2		4	100 % B	500
r_3		8	100 % C	500
Estanques de Almacenamiento		Capacidad (Mbbbl)	Composición inicial	Cantidad inicial (Mbbbl)
r_4		[0,1000]	100 % D	200
r_5		[0,1000]	100 % E	200
r_6		[0,1000]	100 % F	200
Estanques de Mezclado		Capacidad (Mbbbl)	Composición inicial	Cantidad inicial (Mbbbl)
r_7 (Mezcla 1)		[0,1000]	100 % G	300
r_8 (Mezcla 2)		[0,1000]	100 % E	500
r_9 (Mezcla 3)		[0,1000]	100 % F	300

Tipos de Crudo	Propiedad 1	Ganancia Marginal (\$ /bbl)
Crudo A	0.01	1
Crudo B	0.085	6
Crudo C	0.06	8.5
Crudo D	0.02	2
Crudo E	0.05	5
Crudo F	0.08	8
Crudo G	0.03	3

Tipos de Mezcla	Umbrales de propiedad 1	Demanda (Mbbbl)
Mezcla 1	[0.025, 0.035]	[500,500]
Mezcla 2	[0.045, 0.065]	[500,500]
Mezcla 3	[0.075, 0.085]	[500,500]
Flujo de descarga de barcos (Mbbbl/día)		[0,500]
Flujo de transferencia entre estanques(Mbbbl/día)		[0,500]
Flujo hacia unidades de destilación(Mbbbl/día)		[50,500]
Máximo número de destilaciones		5

Tabla 6.3: Parámetros Problema 3

		Horizonte de tiempo	15 días	
Barcos		Tiempo de Llegada	Composición	Cantidad (Mbbbl)
r_1		0	100 % A	600
r_2		5	100 % B	600
r_3		10	100 % C	600
Estanques de Almacenamiento		Capacidad (Mbbbl)	Composición inicial	Cantidad inicial (Mbbbl)
r_4		[100,900]	100 % D	600
r_5		[100,1100]	100 % A	100
r_6		[100,1100]	100 % B	500
r_7		[100,1100]	100 % C	400
r_8		[100,900]	100 % E	300
r_9		[100,900]	100 % E	600
Estanques de Mezclado		Capacidad (Mbbbl)	Composición inicial	Cantidad inicial (Mbbbl)
r_{10}	(Mezcla 1)	[0,800]	100 % F	50
r_{11}	(Mezcla 2)	[0,800]	100 % G	300
r_{12}	(Mezcla 3)	[0,800]	100 % H	300
r_{13}	(Mezcla 5)	[0,800]	100 % E	300

Tipos de Crudo	Propiedad 1	Ganancia Marginal (\$ /bbl)
Crudo A	0.03	3
Crudo B	0.05	5
Crudo C	0.065	6.5
Crudo D	0.031	3.1
Crudo E	0.075	7.5
Crudo F	0.0317	3.17
Crudo G	0.0483	4.83
Crudo H	0.0633	6.33

Tipos de Mezcla	Umbral de propiedad 1	Demanda (Mbbbl)
Mezcla 1	[0.03, 0.035]	[600,600]
Mezcla 2	[0.043, 0.05]	[600,600]
Mezcla 3	[0.06, 0.065]	[600,600]
Mezcla 4	[0.071, 0.08]	[600,600]

Flujo de descarga de barcos (Mbbbl/día)	[0,500]
Flujo de transferencia entre estanques (Mbbbl/día)	[0,500]
Flujo hacia unidades de destilación (Mbbbl/día)	[20,500]
Máximo número de destilaciones	7

Los siguientes datos se usaron para generar la Figura 4.4 y la Tabla 3.2.

Tabla 6.4: Parámetros Problema 2

		Horizonte de tiempo	12 días	
Barcos		Tiempo de Llegada	Composición	Cantidad (Mbbbl)
r_1		0	100 % A	500
r_2		4	100 % B	500
r_3		8	100 % C	500
Estanques de Almacenamiento		Capacidad (Mbbbl)	Composición inicial	Cantidad inicial (Mbbbl)
r_4		[0,1000]	100 % D	200
r_5		[0,1000]	100 % E	200
r_6		[0,1000]	100 % F	200
Estanques de Mezclado		Capacidad (Mbbbl)	Composición inicial	Cantidad inicial (Mbbbl)
r_7 (Mezcla 1)		[0,1000]	100 % G	300
r_8 (Mezcla 2)		[0,1000]	100 % E	500
r_9 (Mezcla 3)		[0,1000]	100 % F	300
Unidades de Destilacion		Estado Unidad	Factor de Emisión (FE) ([t]/bbbl)	
r_{10}		0	3	
r_{11}		1	5	
Tipos de Crudo		Propiedad 1	Ganancia Marginal (\$/bbbl)	
Crudo A		0.01	1	
Crudo B		0.085	6	
Crudo C		0.06	8.5	
Crudo D		0.02	2	
Crudo E		0.05	5	
Crudo F		0.08	8	
Crudo G		0.03	3	
Tipos de Mezcla		Umbrales de propiedad 1	Demanda (Mbbbl)	
Mezcla 1		[0.025, 0.035]	600	
Mezcla 2		[0.045, 0.065]	500	
Mezcla 3		[0.075, 0.085]	600	
Flujo de descarga de barcos (Mbbbl/día)		[0,500]		
Flujo de transferencia entre estanques(Mbbbl/día)		[0,500]		
Flujo hacia unidades de destilación(Mbbbl/día)		[50,500]		
Máximo número de destilaciones		5		
Fracción absorbida (q_{abs})		0.8		
Costo Tratamiento CO2 por unidad de volumen (c_1)		1.5 (\$/bbbl)		
Costo Implementación Tecnología Captura (c_2)		1000 \$		
Costo Desimplementación Tecnología Captura (c_3)		600 \$		

Modelo Multiperiodo: En el caso del modelo Multiperiodo se utilizaron como parámetros internos iniciales los mismos de la tabla 6.4. Para los siguientes periodos se usaron los siguientes parámetros externos.

Tabla 6.5: Parámetros Externos Problema 2 $t = 1$

		Horizonte de tiempo		12 días
Barcos	Tiempo de Llegada	Composición	Cantidad (Mbbbl)	
r_1	0	100 % G	500	
r_2	4	100 % E	500	
r_3	8	100 % F	500	
Tipos de Mezcla		Umbrales de propiedad 1	Demanda (Mbbbl)	
Mezcla 1		[0.025, 0.035]	600	
Mezcla 2		[0.045, 0.065]	400	
Mezcla 3		[0.075, 0.085]	500	
Volumen Final	r_7	150 (bbl)		
Volumen Final	r_8	200 (bbl)		
Volumen Final	r_9	150 (bbl)		

Tabla 6.6: Parámetros Externos Problema 2 $t = 2$

		Horizonte de tiempo		12 días
Barcos	Tiempo de Llegada	Composición	Cantidad (Mbbbl)	
r_1	0	100 % E	400	
r_2	3	100 % F	400	
r_3	6	100 % G	400	
Tipos de Mezcla		Umbrales de propiedad 1	Demanda (Mbbbl)	
Mezcla 1		[0.025, 0.035]	500	
Mezcla 2		[0.045, 0.065]	500	
Mezcla 3		[0.075, 0.085]	500	
		Volumen Final	r_7	150 (bbl)
		Volumen Final	r_8	200 (bbl)
		Volumen Final	r_9	150 (bbl)

6.2.2. Códigos

En esta sección se adjunta el modelo más general de donde se pueden ejecutar todos los programas. Fueron escritos y ejecutados en AMPL IDE [®]. versión 3.1.1.

ModeloPNLM.mod

```
#Modelo PNLM
#Relajacion de McCormick para restriccion bilineal
#Incluye Ecuaciones simetrias
#Incluye costos asociados Captura CO2
#Incluye automata para romper simetrias

param n;
set T:=1..n; #cupos de prioridad
set W ordered;
set Wu within W; #Operaciones de descarga
set Wt within W; #Operaciones de transferencia
set Wd within W; #Operaciones hacia unidad de destilacion
set Rv ordered; #Barcos
set Rs; #Estanques de almacenamiento
set Rc; #Estanques de mezclado
set Rd; #Unidades de destilacion
set R=Rv union Rs union Rc union Rd; #recursos
set I{R} default {}; #Operaciones que ingresan al recurso r
set O{R} default {}; #Operaciones que egresan del recurso r
set C; #Tipos de Crudos
set K; #Conjunto de propiedades de los crudos
set Q; #Nodos del automata
set F within Q; #Nodos Finales p
set E{Q,Q} within W default {};

#Definicion conjuntos simetria
set S1{v in W}=union{r in Rs union Rc: v not in I[r] && v in Wu} O[r]
union union{r in Rc union Rs: v not in I[r] && v in Wt} (O[r] diff {v})
union union{r in Rs: v not in O[r] && v in Wt} I[r]
union union{r in Rc union Rs: v not in O[r] && v in Wd} I[r] union
union{r in Rd: v not in I[r] && v in Wd}I[r];

#Conjunto de operaciones simetricas
set S2{v in W} ={w in S1[v]: ord(w,W)<ord(v,W)};

param H; #Horizonte de Tiempo
param Vtinf{W}; #Volumen minimo de transferencia de la operacion v en W
param Vtsup{W}; #Volumen maximo de transferencia de la operacion v en W
param Drinf{Rc}; #Cota inferior de la demanda que tiene que salir de Rc
param Drsuf{Rc}; #Cota superior de la demanda que tiene que salir de Rc
```

```

param G{C}; #Ganancias marginales de cada crudo por unidad de volumen
param Ndinf; #cota inferior para el numero de destilaciones
param Ndsup; #cota superior para el numero de destilaciones
param Frinf{W}; #flujo minimo en la operacion v
param Frsup{W}; #flujo maximo en la operacion v
param Llegada{Rv}; #Tiempo de llegada de los barcos;
param Xkc{K,C}; #valor de la propiedad k en el crudo c
param Lrinf{Rv union Rs union Rc}; #capacidad minima del estanque r
param Lrsup{Rv union Rs union Rc}; #capacidad maxima del estanque r
param Xkvinf{K,W};
#minimo de la propiedad k transferido en la operacion v
param Xkvsup{K,W};
#maximo de la propiedad k transferido en la operacion v
param Rcinf{K,Rc};
#minimo propiedad k que debe permanecer en las unidades de mezclado
param Rcsup{K,Rc};
#maximo propiedad k que debe permanecer en las unidades de mezclado
param L0{R}; #Volumen inicial de crudo ene l recurso r
param L0c{R,C}; #Volumen inicial de crudo tipo c en el recurso R
param Ltfinal{Rs union Rc};
#Umbral para que siempre exista crudo en las unidades de mezclado

param FE{Rd};
param qabs;
param u{Rd};
param c1;
param c2;
param c3; #Parametros para captura de CO2

var Z{T,W} binary; #Variable de asignacion
var S{T,W} >=0; #Tiempos de partid
var D{T,W} >=0; #Duracion de la operacion
var V{T,W} >=0; #volumen total transferido durante la op
var Vc{T,W,C} >=0; #volumen parcial de crudo transferido durante la op
var Lt{T,R} >=0;
#Volumen total en el recurso rantes de la operacion asignada a i
var Lc{T,R,C}>=0;
#Volumen parcial de crudo en el recurso antes de la operacion asignada a i
var W1{T,W,C,R} >=0;
var W2{T,W,C,R} >=0;
var VUD{Rd} >=0;#volumen hacia unidad de destilacion
var A{T,W,Q} >=0; #variable auxiliar para el automata

#funciones objetivo
maximize ganancias:
sum{i in T, r in Rd, v in I[r], c in C} G[c]*Vc[i,v,c]

```

```

-sum{r in Rd}(c1*VUD[r]*u[r]);
minimize emisiones: sum{r in Rd} FE[r]*VUD[r]*(1-u[r]*qabs);

subject to asignacion {i in T}: sum {v in W} Z[i,v]=1;

subject to cardinalidad1 {r in Rv}: sum{i in T, v in O[r]} Z[i,v]=1;
subject to cardinalidad2: Ndinf <= sum{i in T, v in Wd} Z[i,v] <=Ndsup;

subject to Descarga {i in T, r1 in Rv, r2 in Rv: ord(r1) < ord(r2)}:
sum {j in T, v in O[r2]: j<i} Z[j,v]
+ sum {j in T, v in O[r1]: j>=i} Z[j,v] <=1;

subject to Variable1 {i in T, v in W}: S[i,v]+D[i,v]<=H*Z[i,v];
subject to Variable2 {i in T, v in W}: V[i,v]<=Vtsup[v]*Z[i,v];
subject to Variable3 {i in T, v in W}: V[i,v]>=Vtinf[v]*Z[i,v];
subject to Variable4 {i in T, v in W}: sum {c in C} Vc[i,v,c]=V[i,v];
subject to Variable5 {i in T, r in R}:
Lt[i,r]= L0[r]+sum{j in T, v in I[r]: j<i} V[j,v]
-sum{j in T, v in O[r]: j<i} V[j,v];
subject to Variable6 {i in T, r in R, c in C}:
Lc[i,r,c]= L0c[r,c]+sum{j in T, v in I[r]: j<i} Vc[j,v,c]
-sum{j in T, v in O[r]: j<i} Vc[j,v,c];
subject to Variable7{r in Rc union Rs}:
Lt[n,r]+sum{v in I[r]} V[n,v]
-sum{v in O[r]} V[n,v] >= Ltfinal[r];
#Volumen final unidades de mezclado

subject to DestContinua {r in Rd}: sum{i in T, v in I[r]}D[i,v]=H;

subject to Arribo{i in T, r in Rv, v in O[r]}: S[i,v]>=Llegada[r]*Z[i,v];

subject to Flujo1{i in T, v in W}: V[i,v] <= Frsup[v]*D[i,v];
subject to Flujo2{i in T, v in W}: V[i,v] >= Frinf[v]*D[i,v];

subject to Oposolap1{i in T, j in T: i<j}:
sum{v in Wu}(S[i,v]+D[i,v])
<= sum{v in Wu} S[j,v]+ H*(1- sum{v in Wu} Z[j,v]);
subject to Oposolap2{i in T, j in T, r in Rs union Rc: i<j}:
sum{v in O[r]}(S[i,v]+D[i,v])
<= sum{v in I[r]} S[j,v]+ H*(1- sum{v in I[r]} Z[j,v]);
subject to Oposolap3{i in T, j in T, r in Rs union Rc: i<j}:
sum{v in I[r]}(S[i,v]+D[i,v])
<= sum{v in O[r]} S[j,v]+ H*(1- sum{v in O[r]} Z[j,v]);
subject to Oposolap4{i in T, j in T, r in Rc: i<j}:
sum{v in O[r]}(S[i,v]+D[i,v])
<= sum{v in O[r]} S[j,v]+ H*(1- sum{v in O[r]} Z[j,v]);

```

subject to Opnosolap5{ i in T , j in T , r in R_d : $i < j$ }:
 $\sum\{v \text{ in } I[r]\}(S[i,v]+D[i,v])$
 $\leq \sum\{v \text{ in } I[r]\} S[j,v]+ H*(1- \sum\{v \text{ in } I[r]\} Z[j,v]);$
subject to Opnosolap6{ i in T , j in T , v in W : $i < j$ }:
 $S[i,v]+D[i,v] \leq S[j,v]+H*(1-Z[j,v]);$

subject to Umbrales1{ i in T , k in K , v in W }:
 $\sum\{c \text{ in } C\} Xkc[k,c]*Vc[i,v,c] \leq Xkvsup[k,v]*V[i,v];$
subject to Umbrales2{ i in T , k in K , v in W }:
 $\sum\{c \text{ in } C\} Xkc[k,c]*Vc[i,v,c] \geq Xkvinf[k,v]*V[i,v];$
subject to Umbrales3{ r in R_c , k in K }:
 $\sum\{c \text{ in } C\} Xkc[k,c]*(Lc[n,r,c]+\sum\{v \text{ in } I[r]\} Vc[n,v,c]$
 $-\sum\{v \text{ in } O[r]\}Vc[n,v,c]) \leq Rcsup[k,r]*(Lt[n,r]$
 $+\sum\{v \text{ in } I[r]\} V[n,v]-\sum\{v \text{ in } O[r]\}V[n,v]);$
subject to Umbrales4{ r in R_c , k in K }:
 $\sum\{c \text{ in } C\} Xkc[k,c]*(Lc[n,r,c]+\sum\{v \text{ in } I[r]\} Vc[n,v,c]$
 $-\sum\{v \text{ in } O[r]\}Vc[n,v,c])$
 $\geq Rcinf[k,r]*(Lt[n,r]+\sum\{v \text{ in } I[r]\} V[n,v]-\sum\{v \text{ in } O[r]\}V[n,v]);$
subject to Capacidad1{ i in T , r in R_v union R_c union R_s }:
 $Lrinf[r] \leq Lt[i,r] \leq Lrsup[r];$
subject to Capacidad2{ i in T , r in R_v union R_c union R_s , c in C }:
 $0 \leq Lc[i,r,c] \leq Lrsup[r];$
subject to Capacidad3{ r in R_s union R_c }:
 $Lrinf[r]$
 $\leq L0[r]+\sum\{i \text{ in } T, v \text{ in } I[r]\} V[i,v]-\sum\{i \text{ in } T, v \text{ in } O[r]\} V[i,v]$
 $\leq Lrsup[r];$
subject to Capacidad4{ r in R_s union R_c , c in C }:
 $0 \leq L0c[r,c]+\sum\{i \text{ in } T, v \text{ in } I[r]\} Vc[i,v,c]$
 $-\sum\{i \text{ in } T, v \text{ in } O[r]\} Vc[i,v,c] \leq Lrsup[r];$

subject to Demanda{ r in R_c }:
 $Drinf[r] \leq \sum\{i \text{ in } T, v \text{ in } O[r]\} V[i,v] \leq Drsupsup[r];$

subject to Composicion1{ i in T , r in R , v in $O[r]$, c in C }:
 $Vc[i,v,c]*Lt[i,r]-Lc[i,r,c]*V[i,v]=0;$
subject to Composicion2{ i in T , r in R_v union R_s union R_c , v in $O[r]$, c in C }:
 $W1[i,v,c,r]-W2[i,v,c,r]=0;$

subject to Relaj1{ i in T , r in R_s union R_c , v in $O[r]$, c in C }:
 $W1[i,v,c,r] \geq Vtsup[v]*Lt[i,r]+Vc[i,v,c]*Lrsup[r]-Vtsup[v]*Lrsup[r];$
subject to Relaj2{ i in T , r in R_s union R_c , v in $O[r]$, c in C }:
 $W1[i,v,c,r] \geq Vc[i,v,c]*Lrinf[r];$
subject to Relaj3{ i in T , r in R_s union R_c , v in $O[r]$, c in C }:
 $W1[i,v,c,r] \leq Vc[i,v,c]*Lrsup[r];$
subject to Relaj4{ i in T , r in R_s union R_c , v in $O[r]$, c in C }:
 $W1[i,v,c,r] \leq Vc[i,v,c]*Lrinf[r]+Lt[i,r]*Vtsup[v]-Lrinf[r]*Vtsup[v];$
subject to Relaj5{ i in T , r in R_s union R_c , v in $O[r]$, c in C }:

```

W2[i,v,c,r]>= Vtsup[v]*Lc[i,r,c]+V[i,v]*Lrsup[r]-Vtsup[v]*Lrsup[r];
subject to Relaj6{i in T, r in Rs union Rc, v in O[r], c in C}:
W2[i,v,c,r]>= Lc[i,r,c]*Vtinf[v];
subject to Relaj7{i in T, r in Rs union Rc, v in O[r], c in C}:
W2[i,v,c,r]<= V[i,v]*Lrsup[r]+Lc[i,r,c]*Vtinf[v]-Vtinf[v]*Lrsup[r];
subject to Relaj8{i in T, r in Rs union Rc, v in O[r], c in C}:
W2[i,v,c,r]<= Vtsup[v]*Lc[i,r,c];

#subject to simetrias{i in T,j in T, v in W: i<j}:
sum{w in S1[v]:ord(w,W)>ord(v,W)} Z[i,w]
+sum{w in S1[v], k in T: i<k<j} Z[k,w] <=(j-i)-Z[j,v];
#subject to simetrias2{i in T, j in T, v in W: i<j}:
Z[i,v]+Z[j,v] <= 1 +
sum{w in W diff (S1[v] union {v}), k in T: i<k<j} Z[k,w];
#subject to simetrias31{i in T}:
sum{v in W} Z[i,v]<= sum{v in W} 10*D[i,v];
#subject to simetrias32{i in T: i<n}:
sum{v in W}Z[i,v]>=sum{v in W}Z[i+1,v];

subj to volUD{r in Rd}: sum{i in T, v in I[r]} V[i,v]=VUD[r];

#Implementacion Automata
subject to enganche{i in T, v in W}:
sum{q in Q} A[i,v,q]=Z[i,v]; #DFA
subject to FlujoInicial:
sum{v in W} A[1,v,1]=1;
subject to ConservacionFlujo{i in T,q in Q: i>1}:
sum{q2 in Q, v in E[q2,q] } A[i-1,v,q2]-sum{v in W}A[i,v,q]=0;
subject to flujofinal:
sum{q1 in Q, q2 in F, v in E[q1,q2] } A[n,v,q1]=1;

```

Ejecucion (PNLM)

```
#Resuelve PLM, luego fija los Z y resuelve PNL.
reset;

model Refautomata.mod;
data Ref2automata.dat;
for{j in 13..16}{
option solver "C:\Users\Pablo Ugalde\Desktop\AMPL/cplex";
option cplex_options 'time=60000 mipdisplay=0';
unfix Z;
let n:=j;
#suffix sosno integer IN;
#suffix ref integer IN;
#let {i in 1..n, v in W} Z[i,v].sosno := i;
#let {i in 1..n, v in W} Z[i,v].ref := ord(v);
drop Composicion1;
solve;
display n;
display _solve_elapsed_time;

option solver "C:\Users\Pablo Ugalde\Desktop\AMPL/minos";
restore Composicion1;
#drop Composicion2;
#drop Relaj1;
#drop Relaj2;
#drop Relaj3;
#drop Relaj4;
#drop Relaj5;
#drop Relaj6;
#drop Relaj7;
#drop Relaj8;
fix Z;
solve;
display _solve_elapsed_time;}
```

Ejecucion Multiperiodo El siguiente archivo permite ejecutar el modelo multiperiodo.

```
#Resuelve PNLN para N periodos consecutivos
reset;
param N=2;
param GporPeriodo{0..N} >=0;
param EporPeriodo{0..N} >=0;
model ModeloMP.mod;
data ModeloMP0.dat;
param entrada symbolic;
param Estrategia{0..N};
param salida symbolic;
let salida:= ("Casos.txt");

printf ("Estrategia " & "Emisiones " & "Ganancias \n")>> (salida);
for {k in 3..2^(N+1)}{
update data;
data ModeloMP0.dat;
printf("\n")>> (salida);
for {j in 0..N}{
let Estrategia[j]:= (k div 2^j ) mod 2;

if Estrategia[j]=0 then
objective ganancias;
else
objective emisiones;

unfix Z;
drop Composicion1;
option solver "C:\Users\Pablo Ugalde\Desktop\AMPL/cplex";
option cplex_options 'mipdisplay=2';
solve;
display _solve_elapsed_time;

option solver "C:\Users\Pablo Ugalde\Desktop\AMPL/minos";
option presolve_eps 0.00001;
restore Composicion1;
fix Z;
solve;
display _solve_elapsed_time;

let GporPeriodo[j]:=ganancias;
let EporPeriodo[j]:=emisiones;
for {r in Rs union Rc, c in C}
{
if (L0c[r,c]+sum{i in T, v in I[r]} Vc[i,v,c]
-sum{i in T, v in O[r]} Vc[i,v,c]<0)
```

```

    then
let L0c[r,c]:=0;
else
let L0c[r,c]:=
L0c[r,c]+sum{i in T, v in I[r]} Vc[i,v,c]-sum{i in T, v in O[r]} Vc[i,v,c];
}
for{r in Rs union Rc}{
if (L0[r]+sum{i in T, v in I[r]} V[i,v]-sum{i in T, v in O[r]} V[i,v]<0) then
let L0[r]:=0;
else
let L0[r]:=L0[r]+sum{i in T, v in I[r]} V[i,v]-sum{i in T, v in O[r]} V[i,v];
}
if (j<N) then {
update data;
let entrada:= ("ModeloMP" & j+1 & ".dat");
data (entrada);}
#display L0;
#Guardar Datos
printf ("t=" & j
& " " & Estrategia[j] & " "
& EporPeriodo[j] & " " & GporPeriodo[j]
& "\n" ) >>(salida);
}
}

```

Código para Calcular Frontera de Pareto

Codigos escritos y ejecutados en MATLAB R2016a ®.

```
clear
load EmisionesCCEA.txt;
load GananciasCCEA.txt;
V=[EmisionesCCEA -GananciasCCEA];
n=length(EmisionesCCEA);
FP=[];
Indices=[];
v=0;
contador=0;
for i=1:n
    contador=0;
    v=V(i,:);
    for j=1:n
        if (v(1) <= V(j,1) || v(2) <= V(j,2))
            contador=contador+1;
        end
    end
    if contador==n
        FP=[FP;v];
    end
end

plot(EmisionesCCEA,-GananciasCCEA,'o', FP(:,1), FP(:,2),'x'),
title('Conjunto de Costos y Emisiones Alcanzables y su Frontera de Pareto'),
axis([min(EmisionesCCEA)-200 max(EmisionesCCEA)+200 min(-GananciasCCEA)-200
max(-GananciasCCEA)+200]),
ylabel('-Ganancias [$]'), xlabel('Emisiones de CO2 [t]'),
legend('CCEA','Frontera de Pareto');
```

Bibliografía

- [1] Denis Babusiaux and Axel Pierru. Modelling and allocation of co 2 emissions in a multiproduct industry: the case of oil refining. *Applied Energy*, 84(7):828–841, 2007.
- [2] Jens Bengtsson and Sigrid-Lise Nonås. Refinery planning and scheduling: an overview. In *Energy, Natural Resources and Environmental Economics*, pages 115–130. Springer, 2010.
- [3] Dimitri P Bertsekas, Dimitri P Bertsekas, Dimitri P Bertsekas, and Dimitri P Bertsekas. *Dynamic programming and optimal control*, volume 1. Athena Scientific Belmont, MA, 1995.
- [4] Marie-Claude Côté, Bernard Gendron, and Louis-Martin Rousseau. Modeling the regular constraint with integer programming. In *International Conference on Integration of Artificial Intelligence (AI) and Operations Research (OR) Techniques in Constraint Programming*, pages 29–43. Springer, 2007.
- [5] Protocolo de Kyoto. Protocolo de kyoto de la convención marco de las naciones unidas sobre el cambio climático, 2014.
- [6] Protocolo de Kyoto De la Convención. Marco de las naciones unidas sobre el cambio climático. *Naciones Unidas*, 25:27, 1998.
- [7] Michel De Lara and Luc Doyen. *Sustainable management of natural resources: mathematical models and methods*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [8] Norwegian Petroleum Directorate. Facts 2013. *The Norwegian Petroleum Sector*. Stavanger, 2013.
- [9] Luc Doyen, Patrice Dumas, and P Ambrosi. Optimal timing of co 2 mitigation policies for a cost-effectiveness model. *Mathematical and Computer Modelling*, 48(5):882–897, 2008.
- [10] A Elkamel, M Ba-Shammakh, P Douglas, and E Croiset. An optimization approach for integrating planning and co2 emission reduction in the petroleum refining industry. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 47(3):760–776, 2008.
- [11] Thomas R Karl and Kevin E Trenberth. Modern global climate change. *science*, 302(5651):1719–1723, 2003.
- [12] Heeman Lee, Jose M Pinto, Ignacio E Grossmann, and Sunwon Park. Mixed-integer linear

- programming model for refinery short-term scheduling of crude oil unloading with inventory management. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 35(5):1630–1641, 1996.
- [13] Leo Liberti. Symmetry in mathematical programming. In *Mixed Integer Nonlinear Programming*, pages 263–283. Springer, 2012.
- [14] V Marchal, R Dellink, D van Vuuren, C Clapp, J Château, E Lanzi, B Magné, and J van Vliet. *Oecd environmental outlook to 2050: the consequences of inaction*, 2012.
- [15] Vincent Martinet, Pedro Gajardo, Michel De Lara, and Héctor Ramírez Cabrera. *Bargaining with intertemporal maximin payoffs*. 2010.
- [16] Lincoln FL Moro and José M Pinto. Mixed-integer programming approach for short-term crude oil scheduling. *Industrial & engineering chemistry research*, 43(1):85–94, 2004.
- [17] Sylvain Mouret, Ignacio E Grossmann, and Pierre Pestiaux. A novel priority-slot based continuous-time formulation for crude-oil scheduling problems. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 48(18):8515–8528, 2009.
- [18] Sérgio MS Neiro and José M Pinto. A general modeling framework for the operational planning of petroleum supply chains. *Computers & Chemical Engineering*, 28(6):871–896, 2004.
- [19] Sérgio MS Neiro and José M Pinto. Multiperiod optimization for production planning of petroleum refineries. *Chem. Eng. Comm.*, 192(1):62–88, 2005.
- [20] Gilles Pesant. A regular language membership constraint for finite sequences of variables. In *International conference on principles and practice of constraint programming*, pages 482–495. Springer, 2004.
- [21] Gerhard Petschel-Held, Hans-Joachim Schellnhuber, Thomas Bruckner, Ferenc L Toth, and Klaus Hasselmann. The tolerable windows approach: theoretical and methodological foundations. *Climatic Change*, 41(3-4):303–331, 1999.
- [22] P Reddy, IA Karimi, and R Srinivasan. Novel solution approach for optimizing crude oil operations. *AIChE Journal*, 50(6):1177–1197, 2004.
- [23] Michael Sipser. *Introduction to the Theory of Computation*. Cengage Learning, 2012.
- [24] Alireza Tehrani Nejad M. Allocation of co2 emissions in petroleum refineries to petroleum joint products: a linear programming model for practical application. *Energy Economics*, 29(4):974–997, 2007.
- [25] Li Wenkai, Chi-Wai Hui, Ben Hua, and Zhongxuan Tong. Scheduling crude oil unloading, storage, and processing. *Industrial & engineering chemistry research*, 41(26):6723–6734, 2002.