UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

DESARROLLO DE SISTEMA DE TRANSPORTE, LOCALIZACIÓN ÓPTIMA Y REDIMENSIONAMIENTO DE ESCUELAS EN ZONAS RURALES

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN GESTIÓN DE OPERACIONES

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

EDUARDO ANDRÉS VILLOUTA GONZÁLEZ

PROFESOR GUÍA:
ANDRÉS WEINTRAUB POHORILLE

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
VLADIMIR MARIANOV KLUGE
CRISTIAN CORTÉS CARRILLO
MARCELO OLIVARES ACUÑA

SANTIAGO DE CHILE
2016

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL
Y GRADO DE MAGÍSTER EN GESTIÓN DE OPERACIONES
POR: EDUARDO ANDRÉS VILLOUTA GONZÁLEZ
FECHA: 2016
PROF. GUÍA: ANDRÉS WEINTRAUB POHORILLE

DESARROLLO DE SISTEMA DE TRANSPORTE, LOCALIZACIÓN ÓPTIMA Y REDIMENSIONAMIENTO DE ESCUELAS EN ZONAS RURALES

La educación en las zonas rurales del país presenta ineficiencias respecto a la distribución geográfica de las escuelas, lo que genera ocupación ociosa muy elevada y dificultad de acceso para los alumnos que deben asistir a ellas. La razón principal de este problema es la inexistencia de una planificación al momento de diseñar la forma en que se distribuirá la infraestructura educacional en estas zonas. Esto motiva a la generación de propuestas que permitan mejorar la calidad de vida de los estudiantes, disminuir la brecha de desigualdad en la conectividad y realizar un uso apropiado y eficiente de los recursos con los que se cuenta.

Para este problema, se utilizó la realidad de las escuelas rurales de la Tercera Región de Atacama, que cuenta con 44 establecimientos en esta categoría funcionando al 67 % de su capacidad, en los cuales asisten 2.761 alumnos que en promedio viajan 22,3 km para estudiar.

Este trabajo se desarrolló en dos etapas. La primera, implica un modelo de programación lineal mixta para simular y obtener una estimación de los costos operacionales y de transporte incurridos por administradores y alumnos. La segunda etapa contempla una serie de modelos de programación lineal entera y mixta, para optimizar la localización de los establecimientos educacionales, donde se restringía además la distancia máxima que podía recorrer un estudiante en 50 km.

Los resultados de la optimización indicaron una reducción del 35 % en el gasto global. Además, los beneficios para los estudiantes son significativos, pues reducen las distancias recorridas en 71 % y disminuyen los aislamientos geográficos. Para concretar los resultados obtenidos con el modelo se deben incorporar 3 nuevos establecimientos, requiriendo inversión en infraestructura, pero en total funcionan solo 31 escuelas, por lo que los costos operacionales son reducidos en 27 %, llegando a una inversión total de $1.424 millones.

Dada la distribución geográfica de las zonas rurales en las regiones extremas del país, se ve que es pertinente aumentar la distancia máxima permitida, complementándose con el desarrollo de un sistema de transporte, el cual se realizó con programación lineal mixta con un algoritmo iterativo de generación de restricciones, que se crean a partir de la resolución del Bin Packing Problem, que determina el número de vehículos que se requieren para un conjunto de paraderos y que evita la generación de rutas que no pasen por los establecimientos.

En esta nueva instancia se requiere el funcionamiento de 37 escuelas, de las cuales 8 son nuevas. Los costos operacionales son reducidos 23 % con respecto a la situación actual, sin embargo, se requiere una fuerte inversión en transporte, la que alcanza los $743 millones. Esto sumado a las operaciones e infraestructura contempla una inversión anual total de $2.157 millones, con lo que se logra una reducción de 2 % respecto a los costos totales actuales.

A mi padre.

Agradecimientos

A mi padre, por ser el mejor papá del mundo, por estar siempre cuando lo he necesitado, por ayudarme a que la vida sea un poco más fácil, por transmitirme innumerables enseñanzas y valores que me permiten ser lo que soy hoy, por ser la persona que más admiro y un ejemplo a seguir. Por eso y mucho más, gracias Papo.

A mi madre, por ayudarme a lo largo de mi vida, por preocuparse y cuidar de mi sobre todo en la etapa universitaria. Gracias por todo tu amor y preocupación.

A Kimi y Yuvi, por estar siempre para mí, por acompañarme en mis locuras y ser parte de la Barra Pop. Sin ustedes la vida sería muy aburrida.

A Daniela, por ser la mejor partner, por ayudarme a dar lo de mejor de mi y enseñarme de lo que soy capaz. Gracias por complementarme perfectamente y formar equipo conmigo para hacer nuestros sueños realidad.

A mis abuelos y mi familia, por su preocupación y cariño entregado. En especial a Tito, por entregarme tanto amor por tantos años. Te extraño, Tata.

A Nina y Lulú, por su amor incondicional y hacerme un poquito más feliz cada día.

A Mauricio, por ser un excelente amigo y un apoyo importante desde hace más de 20 años. Eres un crack, Niubi.

A todos mis amigos, que son muchos y no podría nombrarlos a todos acá, por ser parte de mi vida. Gracias a ustedes cada etapa ha sido maravillosa.

Al profe Andrés, por permitirme trabajar con él, por sus consejos, su paciencia y transmitirme sus conocimientos y experiencias.

A los profesores Vladimir, Marcelo y Cristián por su ayuda y consejos en este proyecto.

A Linda y Maritza por su ayuda para concretar este proceso.

Tabla de contenido

Índice de figuras

Capítulo 1

Introducción

La educación en Chile es un tema que ha estado en el centro de las discusiones del país en los últimos años. En particular, la calidad con la que se imparte es uno de los ejes principales del debate, por lo que se transforma en algo fundamental el desarrollo de políticas y proyectos que permitan generar mejoras en este servicio.

El sistema educacional puede clasificarse de acuerdo a la zona en la que se encuentran los establecimientos en urbanos o rurales, siendo un área rural, de acuerdo a la definición del Instituto Nacional de Estadísticas y del Ministerio de Educación [1][2], un *" conjunto de viviendas concentradas o dispersas con población menor a 1000 habitantes o entre 1.001 y 2.000 habitantes donde menos del 50 % de la población económicamente activa se dedica a actividades secundarias y/o terciarias "*. Además, los establecimientos pueden dividirse según el financiamiento que tienen, en privados, particulares subvencionados y públicos.

En la presente tesis se revisarán las escuelas que existen en las zonas rurales de una región extrema del país, los cuales principalmente se componen por escuelas municipales y particulares subvencionadas. Ambos tipos de establecimientos incumben al Estado chileno, pues es éste quien dispone recursos económicos, a través del Ministerio de Educación, para financiar sus operaciones.

1.1. Antecedentes generales

De acuerdo al último Censo en Chile del año 2013, existen 2.274.481 habitantes que viven en zonas rurales. Esto representa al 13 % de la población total del territorio chileno [1]. De este valor, 252.505 son estudiantes que reciben enseñanza básica o media, lo que representa tan sólo el 8,3 % de alumnos el país.

Por otro lado, existen 3.876 establecimientos educacionales en zonas rurales reconocidos por el MINEDUC, correspondientes al 31,9 % del total. Esto quiere decir, que casi un tercio de los establecimientos totales educan a menos de una décima parte de la población. Esto se aprecia mejor en la Figura 1.1.

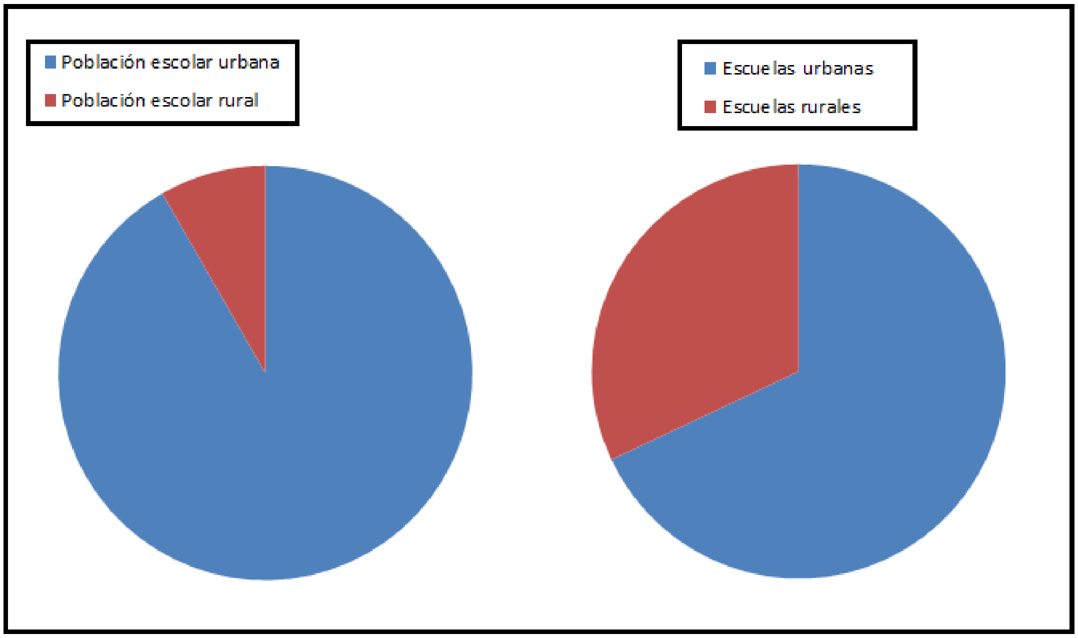

Figura 1.1: Distribución de la educación urbana y rural.

La educación en áreas rurales se caracteriza por estar compuesta principalmente por establecimientos públicos y en segundo lugar por particulares subvencionados, a diferencia de las áreas urbanas donde los roles se invierten y además el sector privado cobra mayor relevancia. Esto se puede apreciar en la Figura1.2.

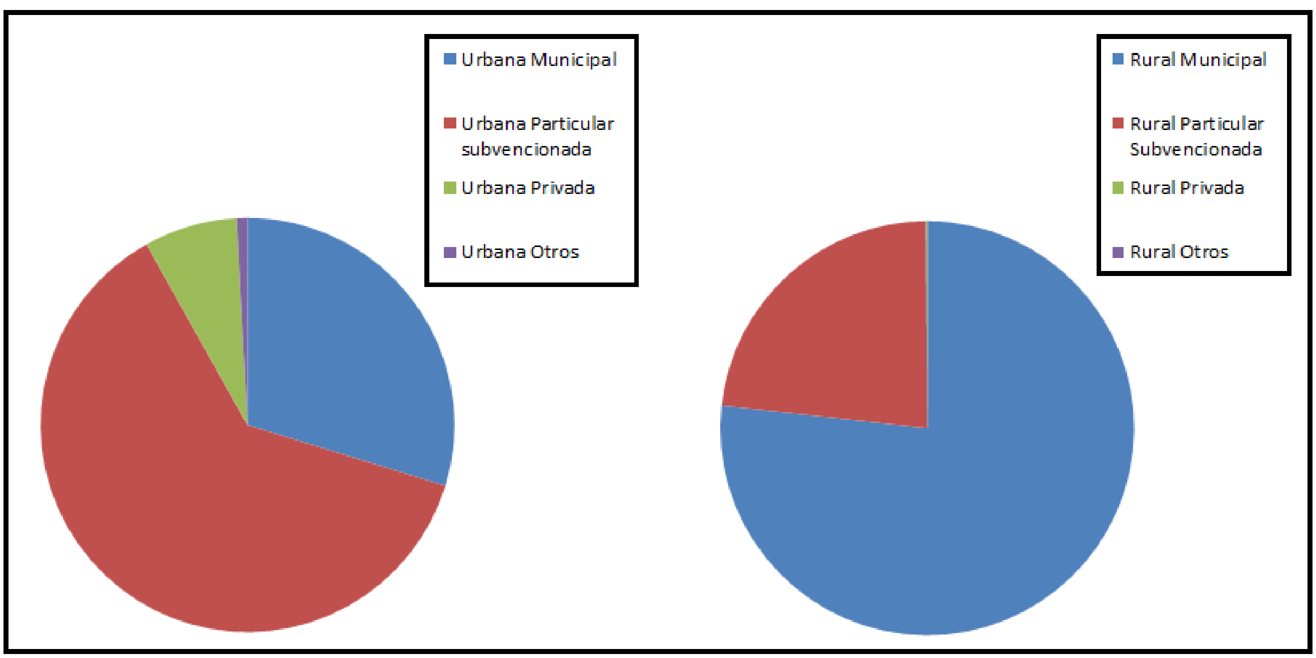

Figura 1.2: Clasificación de las escuelas según tipo de administración.

De acuerdo a esto, las ineficiencias que presenta la educación rural en Chile tiene como consecuencia perjuicios directamente sobre los municipios, debido a que son los administradores principales de las escuelas en esta zona.

Desde este punto, surge la necesidad de generar proyectos que permitan administrar de una manera más eficiente los recursos.

1.1.1. Falencias del sistema de educación rural

Actualmente, la educación en el sector rural presenta ciertas ineficiencias debido a sus características. Se ha observado que existe una gran cantidad de escuelas rurales que atienden a una pequeña parte de la población, lo que no es conveniente para el Ministerio de Educación - ni en términos monetarios, ni en términos de calidad -. Además, este sector se caracteriza por la pérdida de alumnos y una relación de estudiantes por profesor muy baja.

Las bases de estos problemas se deben a la distribución geográfica de los colegios, ya que la localización de las escuelas que están funcionando no fue planificada, lo que genera una ocupación baja y desigual en los establecimientos educacionales.

A nivel nacional, el promedio de estudiantes por colegio es de 65 en zonas rurales, mientras que en áreas urbanas es de 339. Además, en el caso de los establecimientos rurales, el número de alumnos varía mucho entre cada uno, siendo en muchos casos menor a 10 [2]. Es por esto, que resulta muy difícil determinar el tamaño adecuado de las escuelas y la ubicación idónea en la que debieran funcionar.

Otra problemática de estas zonas son las grandes distancias que recorren los alumnos para asistir a clases. En algunos casos, donde la población está muy aislada, el trayecto contempla varias decenas de kilómetros.

1.1.2. Caso regiones extremas del país

Las zonas rurales de las regiones extremas del país, se diferencian del resto por su menor concentración de población. Las regiones XV, I, II, III, XI y XII poseen en conjunto apenas el 4 % de los establecimientos educacionales del país y los estudiantes deben recorrer largas distancias para poder llegar a sus escuelas.

Al analizar la distribución de los establecimientos actuales, pareciera que el número de escuelas en estas regiones no es el adecuado y la ubicación de muchas de ellas parece ir en contra del acceso que tienen los estudiantes. Por un lado, pareciera que hay un exceso de colegios y profesores, lo que implica un gran costo operacional, mientras que por otro lado, las distancias que deben recorrer los estudiantes en promedio son muy grandes.

En general, una buena administración y planificación de la localización de los establecimientos podría reducir el número de escuelas y disminuir la capacidad ociosa de éstas [5]. Sin embargo, al reducir el número de escuelas, las distancias que deben recorrer los estudiantes, dada una asignación eficiente, tienden a incrementarse.

La tesis que se presenta tiene como objetivo analizar en particular estas zonas, y ofrecer soluciones a este problema, intentando disminuir este incremento de establecimientos a través del desarrollo de un sistema de transporte complementario.

1.2. Propuesta de administración al sistema rural

La propuesta planteada en la presente tesis tiene como objetivo ser un aporte para la administración de los establecimientos rurales y reducir los costos administrativos de estos, maximizando su uso. Para lograrlo, se realizará un modelo que resuelva el problema de localización óptima de las escuelas, un ajuste en su tamaño en caso de ser necesario y el desarrollo de un sistema de transporte complementario, considerando las características propias de este sector, en particular de las regiones extremas del país.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Desarrollar uno o varios modelos que en conjunto sean capaces de indicar tanto la localización óptima de establecimientos educacionales en zonas rurales, como el tamaño que deben tener, determinando a qué colegio debe asistir cada estudiante. Además, se debe realizar el desarrollo de un sistema de transporte que permita que cada alumno pueda asistir a la escuela correspondiente en un tiempo adecuado.

1.3.2. Objetivos específicos

- Analizar el escenario actual de la educación en las zonas rurales, identificando las posibles ineficiencias, sobre todo en las regiones extremas del país.
- Realizar un modelo utilizando la programación lineal para establecer localizaciones y tamaños óptimos para los establecimientos y la asignación adecuada de los estudiantes a éstos.
- Diseñar un sistema de transporte que contemple paraderos y que permita que todos los estudiantes puedan asistir a sus establecimientos en un tiempo razonable.
- Analizar los costos que tiene la implementación de los resultados y compararlos con la situación actual.

1.4. Metodología

En este proyecto, se propone encontrar la solución a través de modelos de programación lineal mixta, los que se desarollarán en 3 etapas: modelación del problema, análisis de datos e implementación en una instancia real.

En la primera etapa, se define el modelo base para resolver el problema. En la segunda etapa, se realiza un análisis para afinar detalles con respecto a los parámetros a utilizar. Por último, se aplica el modelo sobre datos reales y se analizan los resultados obtenidos.

1.5. Organización del contenido

La tesis estará organizada de la siguiente manera:

- En el capítulo 2 se presentan algunos modelos relacionados con cobertura, localización y ruteo de vehículos así como revisión bibliográfica para problemas relacionados a la educación.
- En el capítulo 3 se presenta la descripción y modelación de un sistema de paraderos complementario al sistema de transporte.
- En el capítulo 4 se presenta la descripción del modelo que busca encontrar las localizaciones óptimas de los establecimientos y el tamaño ideal de ellos.
- En el capítulo 5 se presenta el modelo que determina la flota de vehículos que se requiere para solucionar el problema de transporte y las rutas que deben seguir cada uno de ellos para recoger a los estudiantes.
- En el capítulo 6 se presentan los resultados en un caso aplicado y los análisis correspondientes.
- Por último, en el capítulo 7 se presentan las conclusiones y se proponen algunas mejoras para el futuro.

Capítulo 2

Marco Teórico

En el capítulo que se presenta a continuación, se realiza una revisión por los modelos típicos de localización, cobertura y ruteo de vehículos, que son la base para resolver problemas como el de la presente tesis. Además, se hace un repaso bibliográfico por otros problemas que hacen referencia a establecimientos educacionales.

2.1. Modelos de localización y cobertura

Los problemas de localización y cobertura están enfocados en asegurar que a un conjunto de clientes se les ofrezca un servicio de calidad. Un cliente se considerará adecuadamente atendido si es que está dentro de los límites de una instalación que ofrece el servicio.

En general, los límites estarán definidos de acuerdo al tiempo o a la distancia, es decir, un cliente será satisfactoriamente atendido si está a una distancia de la instalación menor a cierto valor, o si el tiempo que toma ir desde la instalación al cliente es menor a un período determinado.

Este tipo de problemas generalmente se usan en el contexto de instalaciones de emergencia, donde se requiere que toda o una parte importante de la población esté dentro del rango de oferta del servicio, como una estación de bomberos o un centro de salud.

A continuación se presentan dos tipos de enfrentar esta solución, los cuales tienen distintos objetivos, pero ambos intentan ofrecer un servicio de calidad y a tiempo para la población.

2.1.1. Location Set Covering Problem

El Location Set Covering Problem tiene como objetivo minimizar el número de instalaciones requeridas para llegar a cada uno de los clientes al menos una vez.

El número de instalaciones requeridas dependerá no sólo de la red logística, sino que también de las restricciones que tenga el encargado del proyecto, lo que podría restringir la modelación del problema de acuerdo a leyes o a peticiones especiales de privados.

Para la modelación de este problema, se cuenta con la ubicación de los clientes y un grupo de localizaciones donde es posible instalar una estación de servicio. Además, se cuenta con la distancia que los separa y la demanda que existe en cada punto con clientes.

El objetivo del problema es ubicar la menor cantidad de instalaciones de tal manera que la más cercana a cada cliente esté a una distancia no mayor a cierto valor predefinido. La formulación matemática de este problema es la siguiente:

- Parámetros
  - $\mathrm{d}_{\mathrm{i}j}$ = Distancia entre el cliente i y la estación j.
  - w_{i} = Número de clientes que hay en la localización i
  - $\bar{\mathrm{D}}$ = Distancia máxima aceptable entre un cliente y la estación que lo atiende.
- Conjuntos
  - I: Conjunto de ubicaciones de los clientes.
  - J: Conjunto de las ubicaciones potenciales a instalar una estación de servicio.
  - N_{i}: Conjunto de instalaciones que cubren al cliente ubicado en i. Formalmente se tiene $N_{\mathrm{i}} = \{j \in J | \mathrm{d}_{\mathrm{i}j} \leqslant \bar{\mathrm{D}}\ \}$
- Variables de Decisión
  - $X_j = \begin{cases} 1, & \text{si se instala una estación de servicio en el sitio } j \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$
  - $Z_{\mathrm{i}j} = \begin{cases} 1, & \text{si el cliente } i \text{ es asociado a la instalación en } j \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$
- Restricciones
  1. Cada cliente es asignado a una y solo una estación de servicio dentro del rango.

$$\sum_{j \in N_{\mathrm{i}}} Z_{\mathrm{i}j} = 1 \qquad \forall \mathrm{i} \in I \tag{2.1}$$

  2. La asignación debe realizarse sobre una estación que efectivamente se haya instalado.

$$Z_{\mathrm{i}j} \leqslant X_j \qquad \forall \mathrm{i} \in I, j \in j \tag{2.2}$$

  3. Naturaleza de las variables

$$X_j \in \{0, 1\} \qquad \forall j \in J \tag{2.3}$$

$$Z_{\mathrm{i}j} \in \{0, 1\} \qquad \forall \mathrm{i} \in I, j \in J \tag{2.4}$$

- Función objetivo

$$min z = \sum_{j \in J} X_j \tag{2.5}$$

La modelación del problema puede variar de acuerdo a las necesidades particulares de una situación. Por ejemplo, los potenciales lugares de instalación podrían tener distintos costos, por lo que habría que agregar un parámetro C_j que indica el costo de instalar en j. En este caso, la función objetivo cambiaría a

$$minz = \sum_{j \in J} C_j * X_j \tag{2.6}$$

Este problema se puede ver en profundidad en [3] Gradual Location Set Covering with service quality, Marianov & Eiselt.

2.1.2. Maximal Covering Location Problem

El Maximal covering location problem es también un problema de cobertura, sin embargo, tiene algunas diferencias con el modelo anteriormente presentado.

En este caso, el número de estaciones de servicio a instalar está determinado previamente, por lo que el problema ya no consiste en minimizar el número de estaciones tal que todos los clientes estén satisfechos, sino que se pretende maximizar la cantidad de clientes satisfechos, es decir, que cuentan con un punto de servicio dentro del rango predefinido.

Esto se podría entender como una empresa o alguna institución que tiene recursos suficientes para instalar un número determinado de estaciones de servicio y lo que quiere es determinar en qué sitios debe instalarlas para satisfacer a la mayor cantidad de clientes posibles.

La formulación matemática se presenta a continuación.

- Parámetros
  - $\mathrm{d}_{\mathrm{i}j}$ = Distancia entre el cliente i y la estación j.
  - a_{i} = Número de clientes que hay en la localización i
  - $\bar{\mathrm{D}}$ = Distancia máxima aceptable entre un cliente y la estación que lo atiende.
- Conjuntos
  - I: Conjunto de ubicaciones de los clientes.
  - J: Conjunto de las ubicaciones potenciales a instalar una estación de servicio.
  - N_{i}: Conjunto de instalaciones que cubren al cliente ubicado en i. Formalmente se tiene $N_{\mathrm{i}} = \{j \in J | \mathrm{d}_{\mathrm{i}j} \leqslant \bar{\mathrm{D}} \}$
- Variables de Decisión
  - $X_j = \begin{cases} 1, & \text{si se instala una estación de servicio en el sitio } j \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$
  - $Y_{\mathrm{i}} = \begin{cases} 1, & \text{si el cliente } i \text{ es cubierto por alguna estación de servicio} \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$

- Restricciones
  1. Un cliente solo se puede considerar cubierto si es que se instala una estación de servicio dentro del rango.

$$\sum_{j \in N_i} X_j \geq Y_i \qquad \forall i \in I \tag{2.7}$$

  2. Deben instalarse exactamente P estaciones de servicio.

$$\sum_{j \in J} X_j = P \tag{2.8}$$

  3. Naturaleza de las variables

$$X_j \in \{0, 1\} \qquad \forall j \in J \tag{2.9}$$

$$Y_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in I \tag{2.10}$$

- Función objetivo

$$minz = \sum_{i \in I} a_i * Y_i \tag{2.11}$$

En este caso, se determinará en qué localizaciones deben instalarse las estaciones de servicio. Sin embargo, pueden existir múltiples soluciones para una misma distribución de clientes y potenciales puntos de instalación, ya que sólo se considera que la mayor cantidad de clientes sea atendido, sin importar la distancia o tiempo mientras esté dentro del rango.

Este problema y análisis más profundos pueden revisarse en [7] The Maximal Covering Location Problem, Church & Re Velle.

2.2. Modelos de transporte

2.2.1. Travelling Salesman Problem

Uno de los problemas de transporte más conocidos es el Travelling Salesman Problem (TSP), o problema del vendedor viajero, en el cual una persona debe diseñar una ruta única para visitar a todos los clientes que tiene, minimizando los costos de este viaje. En la versión más básica de este problema, no hay un punto al que se debe llegar finalmente, no hay restricciones temporales de ningún cliente ni restricciones de capacidad.

Para entender mejor este problema se considera que se cuenta con un grafo de nodos y arcos, donde cada nodo representa un cliente y los arcos corresponden a los caminos que existen entre cada uno de ellos. La formulación matemática de este problema se presenta a continuación.

- Parámetros

- c_{ij} = Costo de utilizar el arco que va del nodo i al nodo j.

- Conjuntos
  - V: Conjunto de los nodos.
  - E: Conjunto de arcos existentes entre los nodos.
  - $\triangle^+(\mathrm{i})$: Conjunto de nodos adyacentes al nodo i. Formalmente se tiene $\triangle^+(\mathrm{i}) = \{j \in V | (\mathrm{i}, j) \in E\}$
  - $\triangle^-(\mathrm{i})$: Conjunto de nodos incidentes al nodo i. Formalmente se tiene $\triangle^-(\mathrm{i}) = \{j \in V | (j, \mathrm{i}) \in E\}$
- Variables de Decisión
  - $X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si se utiliza el arco que va del nodo } i \text{ al nodo } j \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$
- Restricciones
  1. La ruta debe llegar a cada nodo exactamente 1 vez.

$$\sum_{j \in \triangle^+(\mathrm{i})} X_{ij} = 1 \qquad \forall \mathrm{i} \in V \tag{2.12}$$

  2. La ruta debe abandonar a cada nodo exactamente 1 vez.

$$\sum_{\mathrm{i} \in \triangle^-(j)} X_{ij} = 1 \qquad \forall j \in V \tag{2.13}$$

  3. No pueden existir subtours

$$\sum_{\mathrm{i} \in S} \sum_{j \in \triangle^+(\mathrm{i}) \setminus S} X_{ij} \geq 1 \qquad \forall S \subset V \tag{2.14}$$

  4. Naturaleza de las variables

$$X_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall j \in J \tag{2.15}$$

- Función objetivo

$$minC = \sum_{(\mathrm{i}, j) \in E} c_{ij} * X_{ij} \tag{2.16}$$

El TSP es un problema de difícil resolución, debido a que el tiempo de cálculo necesario para resolverlo crece rápidamente a medida que aumenta el número de nodos que se consideran en la instancia. Para el caso de un grafo conexo, que corresponde al modelo más simple, el número de rutas posibles es $\frac{(n-1)!}{2}$ [6].

La solución para problemas de tamaño pequeño puede ser encontrada en tiempos razonables a través de la programación lineal entera o algoritmos exactos. Sin embargo, para instancias grandes esto ya no es posible, por lo que se debe recurrir a heurísticas o algoritmos de aproximación para encontrar una solución, que a pesar de no ser el óptimo, puede ser cercada a este y obtenerse en tiempos razonables.

En la Figura 2.1 se aprecia la solución final para el TSP.

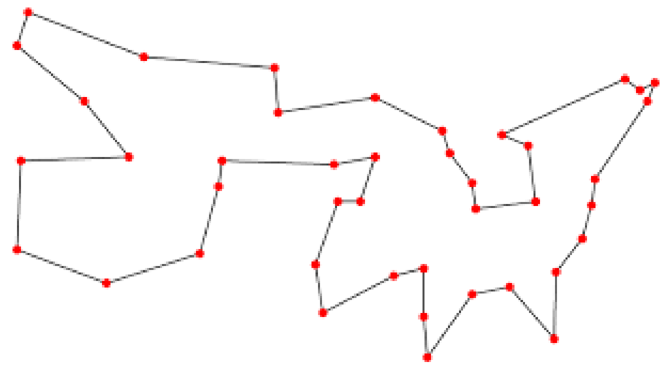

Figura 2.1: Solución al problema del vendedor viajero (Extraída de [8]).

2.2.2. Multi Depot Travelling Salesman Problem

El Multi Depot Travelling Salesman Problem es una variante del TSP, en la cual en vez de contar con un vehículo, se cuenta con un número fijo de ellos m. El objetivo del problema consiste en diseñar m rutas, es decir, una para cada vehículo, con el fin de visitar a todos los clientes.

En este caso, existe un punto de partida, de donde salen todos los vehículos inicialmente y al que deben volver luego de pasar por los clientes de su ruta. Además, cada circuito tiene un número máximo de nodos a los que puede visitar.

La formulación de este problema es la siguiente:

- Parámetros
  - $c_{\text{i}j}$ = Costo de utilizar el arco que va del nodo i al nodo j.
  - p = Número máximo de nodos a visitar por ruta.
  - m = Número de vehículos a utilizar.
- Conjuntos
  - V: Conjunto de los nodos.
  - E: Conjunto de arcos existentes entre los nodos.
  - $\triangle^{+}(\text{i})$: Conjunto de nodos adyacentes al nodo i. Formalmente se tiene $\triangle^{+}(\text{i}) = \{j \in V | (\text{i}, j) \in E\}$
  - $\triangle^{-}(\text{i})$: Conjunto de nodos incidentes al nodo i. Formalmente se tiene $\triangle^{-}(\text{i}) = \{j \in V | (j, \text{i}) \in E\}$
- Variables de Decisión
  - $X_{\text{i}j} = \begin{cases} 1, & \text{si se utiliza el arco que va del nodo } i \text{ al nodo } j \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$
- u_{i}: Variables reales auxiliares que toman un valor estrictamente creciente de acuerdo a la secuencia de la ruta, es decir, $u_j \geq u_{\text{i}} + 1$ si j es visitado inmediatamente después de i.
- Restricciones

1. Del punto inicial 0 salen exactamente m vehículos

$$\sum_{j \in \triangle^+(0)} X_{ij} = m \tag{2.17}$$

2. A cada nodo debe llegar exactamente un arco perteneciente a alguna ruta.

$$\sum_{j \in \triangle^+(i)} X_{ij} = 1 \qquad \forall i \in V \backslash \{0\} \tag{2.18}$$

3. De cada nodo debe salir exactamente un arco perteneciente a alguna ruta.

$$\sum_{i \in \triangle^-(j)} X_{ij} = 1 \qquad \forall j \in V \backslash \{0\} \tag{2.19}$$

4. No pueden existir subtours y en cada ruta no deben haber más de p nodos.

$$u_i - u_j + p * X_{ij} \leqslant p - 1 \qquad \forall (i,j) \in E, i \neq 0, j \neq 0 \tag{2.20}$$

5. Naturaleza de las variables

$$X_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall j \in J \tag{2.21}$$

- Función objetivo

$$minC = \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} * X_{ij} \tag{2.22}$$

La función objetivo en este caso se mantiene, salvo que el costo total estará definido por la suma de los costos de cada ruta.

Además, en esta modelación, se agregaron las variables auxiliares u_i, las que reducen la cantidad de restricciones de eliminación de subtour. No obstante, al realizarlo de esta manera, no es posible resolver el problema para grandes instancias a través de métodos exactos [6].

En la Figura 2.2 se puede apreciar cómo sería el tipo de solución al Multi Depot TSP.

Existen muchas otras variantes del problema del TSP, las que incluyen restricciones de capacidad, ventanas de tiempo, rutas restringidas por distancia o tiempo, con demanda estocástica, con flota heterogénea, entre otros.

2.2.3. "Localización óptima y redimensionamiento de escuelas rurales en Chile"[5]

En este trabajo se resolvió el problema de localización de establecimientos educacionales en zonas rurales de Chile, con población desagregada de acuerdo al grado escolar al que debe asistir. Esta característica particular de la modelación implica una mayor complejidad en términos de operación de las escuelas, sin embargo, no contempla un sistema de transporte complementario a la localización de los colegios y asignación de los alumnos.

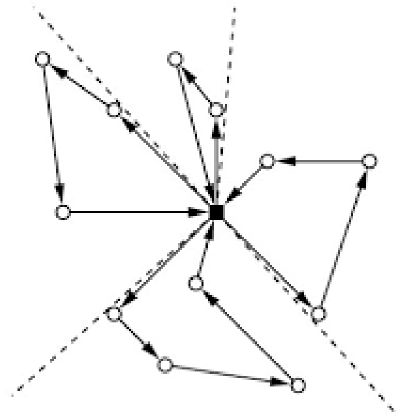

Figura 2.2: Solución al problema Multi Depot TSP (Extraída de [8]).

Entre las consideraciones de la modelación se encuentra la restricción de distancia máxima que separa a una escuela de un alumno. Sin embargo, al relajar esta restricción se encuentran mejoras considerables en algunas instancias, por lo que surge la interrogante de cómo incorporar este planteamiento sin afectar a la población, lo que pretende resolver el sistema de transporte de la presente tesis.

Este proyecto es fundamental para el desarrollo del trabajo realizado en esta tesis, ya que establece una base sobre la que se trabaja y es fuente importante de los datos de la modelación.

Capítulo 3

Sistema de Paraderos

En el presente capítulo, se presenta el diseño de una solución complementaria al ruteo de vehículos, que tiene como finalidad apoyar los trayectos realizados, a través de paraderos donde los estudiantes serán recogidos.

A continuación, se presenta una descripción del problema y cómo será resuelto, indicando las consideraciones que deben ser tomadas; además se describe el método de solución, especificando la formulación matemática de los problemas resueltos y un análisis de los parámetros utilizados.

3.1. Descripción

La distribución de la población en zonas rurales es muy distinta a la de las zonas urbanas. En estas últimas, existe una mayor concentración de personas, que por lo general viven una al lado de la otra, conectadas por diversos caminos y calles.

En cambio, los sectores rurales, cuentan con una baja densidad de población y número de habitantes. Además, sus vías de transporte no siempre son adecuadas para el uso de vehículos motorizados, debido a que en algunos casos son estrechas, oscuras y con superficies muy irregulares, como se puede ver en la Figura 3.1.

Chile cuenta con alrededor de 80.000 Km de red vial, de los cuales tan sólo 17.000 están pavimentados, mientras que el resto están formados por tierra, ripio o algunas soluciones básicas [24]. Las vías de mejor calidad se distribuyen principalmente en zonas urbanas o para unir estas, por lo que la mayor parte de los caminos de las zonas rurales no tienen esta condición.

Si bien la Dirección de Vialidad del Ministerio de Obras Públicas tiene en funcionamiento proyectos de modernización de la red, estos son a largo plazo, pues contemplan tan solo entre 400 a 500 Km de rutas al año, donde la prioridad son caminos que tengan mayor impacto en los habitantes y en la economía [24], por lo que el acceso de los vehículos de transporte es un

Figura 3.1: Ejemplo de caminos rurales (Extraídas de [23]).

tema importante para el desarrollo de esta tesis.

Estas características, propias de las zonas rurales, deben ser consideradas al desarrollar un sistema de transporte, con mayor razón si este está destinado a niños de educación básica y media, pues requieren asistir a sus escuelas de manera segura y en un tiempo apropiado.

Para recoger a cada estudiante en su casa, se destinaría más tiempo y más recursos para el transporte del vehículo comparándolo con la presencia de un sistema de paraderos. Esta propuesta funciona como la instalación de puntos de reunión para los alumnos de las distintas localidades, las cuales agrupan a las personas más cercanas.

Un diseño que contemple paraderos trae beneficios en el sistema de transporte tanto para los usuarios como para el planificador, pues se reduce la distancia total recorrida, lo que implica menos tiempo en el bus para los niños y menor gasto de combustible para los vehículos. Además, resulta imposible visitar cada hogar por tiempo y altos costos. Por otro lado, se soluciona el problema de acceso a las distintas localidades, pues el transporte desde los hogares al paradero es más fácil al hacerlo de manera particular al considerar distancias cortas (exigidas en la modelación).

Esto trae ventajas al desarrollo del sistema de transporte completo debido a que reduce el número de datos a considerar, sin perder información con ello, pues las localidades se agrupan en un sólo punto, considerando cada paradero como la suma de las poblaciones locales que reúne. En particular, las rutas de los vehículos se determinan a través de la resolución de un problema que crece de manera factorial con respecto al número de destinos que debe visitar, por lo que una reducción en esto, simplifica considerablemente el problema.

3.2. Consideraciones

Para el correcto desarrollo de un sistema de paraderos, es necesario estudiar el contexto en el que se va a realizar y en base a ello aplicar las consideraciones necesarias para que el funcionamiento de este sea el adecuado. A continuación se presentan algunas de ellas.

En primer lugar, el modelo que se desarrollará debe tener en cuenta que no todas las zonas habitadas están conectadas entre si, por lo que un estudiante no puede ir a cualquier paradero. Por lo tanto, un alumno solo podrá ir a un paradero al cual pueda ir por un camino vial seguro.

Se debe considerar además que los alumnos, en el peor de los casos, se trasladarán caminando a cada parada, por lo tanto, la distancia que debe existir entre un hogar y al paradero que es asignado no debe superar una distancia máxima razonable.

Para el caso de los paraderos, se supondrá que no tienen un límite de niños a recibir, asumiendo que cada lugar candidato, al ser un espacio de una comunidad y que en estas zonas habitan pocas personas, cuenta con el espacio suficiente para recibir a los estudiantes.

Por último, se considerará que todos los paraderos son iguales y que no hay preferencias por uno sobre otro, por lo que los estudiantes serán asignados al paradero instalado más cercano, siendo la distancia y la factibilidad de llegar a ellos los únicos factores relevantes en la decisión.

3.3. Modelación

3.3.1. Descripción y esquema de solución

Para diseñar el sistema de paraderos, se propone desarrollar un modelo en 3 etapas secuenciales, que en conjunto buscan dos cosas, encontrar el número adecuado de paraderos que deben ser instalados, y la asignación óptima de los alumnos a estos, con tal que la distancia total que caminen sea la menor posible.

Cada una de las tres etapas tienen un objetivo en particular. En la primera etapa, se busca determinar el rango de factibilidad del número de paraderos de acuerdo a las condiciones antes mencionadas. Es decir, se busca el mínimo número de paraderos que se requieren para que el problema de cobertura tenga solución, cubriendo a toda la población escolar, valor que corresponderá al límite inferior del rango de factibilidad.

El límite superior, estará dado por el número de localidades existentes, pues en el peor caso (situación que ocurriría cuando los estudiantes están lo suficientemente separados unos de otros) cada hogar con alumnos sería un paradero.

La segunda etapa corresponde a la resolución de múltiples problemas de cobertura, donde cada uno se resuelve para un valor fijo de paraderos distinto, dentro del rango encontrado en la primera etapa.

En la etapa final, se analizan los resultados obtenidos en la fase anterior y en base a un criterio definido, se determina cuál es el número óptimo de paraderos a instalar y con ello se asigna a los estudiantes al paradero correspondiente. Un esquema del diseño de la solución se puede apreciar en la Figura 3.2

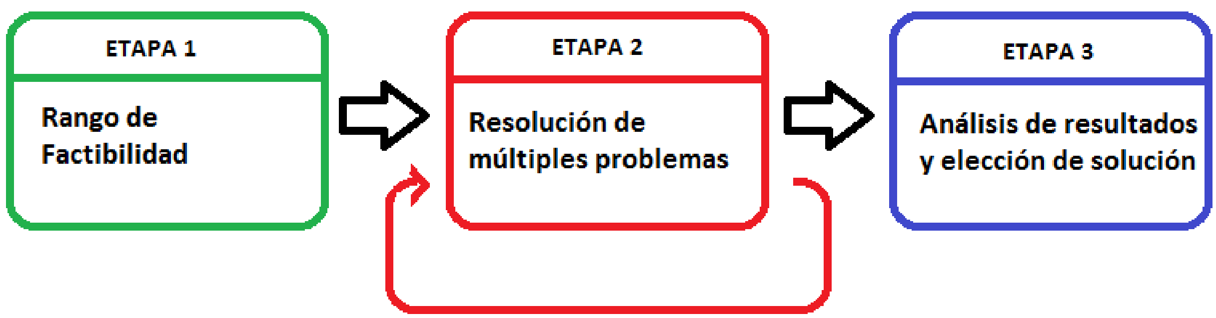

Figura 3.2: Metodología utilizada para resolver el problema referente a los paraderos.

Los modelos desarrollados en esta solución, se basan en el Location Set Covering Problem y algunas de sus variantes. Para entender mejor este tipo de modelos, se puede ver el problema como una red de nodos y arcos, donde los primeros representan a los puntos con demanda y los sitios donde es posible establecer un punto de servicio, mientras que los segundos corresponden a los caminos existentes entre ambos.

En el caso del diseño de paraderos, los puntos de demanda corresponden a las localidades con población que asiste a escuelas rurales, donde la demanda es equivalente a la cantidad de alumnos dentro de la comunidad.

Por otro lado, los puntos donde es posible instalar una estación de servicio, son los sitios candidatos a convertirse en paradero de vehículos de transporte.

Por último, los arcos corresponden a los caminos rurales que conectan a los sectores donde viven los estudiantes con los posibles paraderos, y su costo es directamente proporcional a la distancia del camino. En este caso, se considerará al arco como el camino más corto factible dentro de la red vial y seguro para el transporte de personas.

3.3.2. Etapa 1: Rango de Factibilidad

En la primera etapa se resuelve el Location Set Covering Problem, en el cual se minimiza el número de instalaciones que se pondrán en funcionamiento, asegurando que todo nodo sea atendido adecuadamente, es decir, se minimiza el número de paraderos a instalar, considerando que cada estudiante debe tener uno a una distancia menor a la máxima distancia permitida que se establece.

Al resolver el Location Ser Covering Problem, se encuentra el valor mínimo del número de paraderos que permite que el problema tenga solución. Para valores mayores a este límite, la factibilidad está asegurada.

Por otro lado, el caso límite superior corresponde a que todos los hogares con estudiantes se establezcan como paraderos, situación en la que ningún alumno tendría que caminar para esperar a los vehículos de transporte. Agregar más paraderos no tendría sentido, pues la solución seguiría siendo la misma que en el caso recién mencionado, donde la distancia total recorrida es cero.

A continuación, se presenta la formulación matemática del problema que busca encontrar el límite inferior del rango de factibilidad.

Formulación matemática

- Parámetros
  - D_{ac}: Distancia del camino entre la localidad con población a y el sitio candidato a paradero c, dado por el camino vial más corto entre ambos puntos.
  - $\bar{\mathrm{D}}$: Distancia máxima permitida que puede caminar un estudiante desde su hogar a un paradero.
- Conjuntos
  - A: Conjunto de las localizaciones con población escolar rural.
  - C: Conjunto de lugares candidatos a instalarse un paradero.
  - $Opcion_a$: Conjunto de candidatos a paraderos que, en caso de ser instalado, puede recibir a los alumnos que viven en la localidad a. Formalmente se define como $Opcion_a = \{a \in A | D_{ac} \leqslant \bar{\mathrm{D}}\}$
- Variables de decisión
  - $Par_c = \begin{cases} 1, & \text{si se instala paradero en el lugar candidato } c \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$
  - $Ir_{ac} = \begin{cases} 1, & \text{si los estudiantes que viven en } a \text{ van al paradero en } c \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$
- Restricciones
  1. Cada alumno debe ir a un y solo un paradero.

$$\sum_{c \in Opcion_a} Ir_{ac} = 1 \qquad \forall a \in A \tag{3.1}$$

2. Solo se puede asignar un alumno a un paradero si este ha sido instalado.

$$Ir_{ac} \leqslant Par_c \qquad \forall a \in A, c \in C \tag{3.2}$$

3. Naturaleza de las variables.

$$Ir_{ac} \in \{0,1\} \qquad \forall a \in A, c \in C \tag{3.3}$$

$$Par_c \in \{0,1\} \qquad \forall c \in C \tag{3.4}$$

- Función objetivo

$$min \sum_{c \in C} Par_c \tag{3.5}$$

En este caso, la función objetivo corresponde a minimizar el número de paraderos a instalar.

Este problema entrega como resultado final el número mínimo de paraderos que se deben instalar N_{min} para que todos los estudiantes puedan ser asignados a uno de ellos sin romper la restricción de distancia impuesta. Sin embargo, si se desea instalar un número fijo de paraderos, existen diversas soluciones factibles respecto a la asignación de los alumnos a las paradas que cumplen con lo pedido. Es por esto, que en las siguientes etapas se resuelve otro problema que busca minimizar las distancias recorridas por los estudiantes dado un valor fijo de paraderos.

3.3.3. Etapa 2: Distribución según número de paraderos

Ahora que se conoce el rango de factibilidad del número de paraderos que son necesarios para que todos los estudiantes puedan ser asignados a una parada se procede a resolver el problema de asignación para un número fijo de paraderos.

Se debe resolver un problema para cada valor dentro del rango anteriormente encontrado, es decir, para los valores de $\bar{\mathrm{P}} \in \{N_{min}, N_{min}+1, ..., |A|-1, |A|\}$, cubriendo todas las posibles asignaciones factibles que minimizan la distancia a recorrer por los estudiantes de acuerdo al número de paraderos que se desee instalar.

Esto se realiza con el fin de ver cómo cambia la solución de la asignación y con ello la distancia que recorren los alumnos a medida que se aumenta el número de paraderos a instalarse. En base a los resultados se decide el número óptimo de paraderos a instalar y la asignación de los alumnos a estos.

El problema a resolver se trata de una variante del Maximal Covering Location Problem, en el cual el número de paraderos no es el objetivo principal del problema, sino que se desea maximizar el número de población atendida satisfactoriamente. En este caso, se fijarán los paraderos, pero se exigirá que todos los estudiantes tengan acceso a ellos y en la función objetivo se minimizará la distancia total recorrida por los estudiantes desde sus casas a donde deben esperar el vehículo de transporte.

Formulación matemática

- Parámetros
  - D_{ac}: Distancia del camino entre la localidad con población a y el sitio candidato a paradero c.
  - $\bar{\text{D}}$: Distancia máxima permitida que puede caminar un estudiante desde su hogar a un paradero.
  - P_a: Población escolar que hay en la localidad a.
- Conjuntos
  - A: Conjunto de las localizaciones con población escolar rural.
  - C: Conjunto de lugares candidatos a instalarse un paradero.
  - $Opcion_a$: Conjunto de candidatos a paraderos que, en caso de ser instalado, puede recibir a los alumnos que viven en la localidad a. Formalmente se define como $Opcion_a = \{a \in A | D_{ac} \leqslant \bar{\text{D}}\}$
- Variables de decisión
  - $Par_c = \begin{cases} 1, & \text{si se instala paradero en el lugar candidato } c \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$
  - $Ir_{ac} = \begin{cases} 1, & \text{si los estudiantes que viven en } a \text{ van al paradero en } c \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$
- Restricciones
  1. Cada alumno debe ir a un y solo un paradero.

$$\sum_{c \in Opcion_a} Ir_{ac} = 1 \qquad \forall a \in A \tag{3.6}$$

  2. Solo se puede asignar un alumno a un paradero si este ha sido instalado.

$$Ir_{ac} \leqslant Par_c \qquad \forall a \in A, c \in C \tag{3.7}$$

  3. Se deben instalar p paraderos.

$$\sum_{c \in C} Par_c = p \tag{3.8}$$

  4. Naturaleza de las variables.

$$Ir_{ac} \in \{0,1\} \qquad \forall a \in A, c \in C \tag{3.9}$$

$$Par_c \in \{0,1\} \qquad \forall c \in C \tag{3.10}$$

- Función objetivo

$$min \sum_{c \in C} \sum_{a \in A} D_{ac} * Pob_a * Ir_{ac} \tag{3.11}$$

En este caso la función objetivo corresponde a minimizar la distancia total recorrida por los alumnos. Esta se calcula como la suma de las distancias recorridas por cada localidad de población, lo que corresponde a la distancia que hay desde esa localidad al paradero que se les asignó, multiplicado por el número de escolares que habitan en dicho lugar.

Al resolver este problema varias veces, cambiando en cada repetición el número de paraderos a instalar p, se tendrán resultados factibles y óptimos de la asignación de los estudiantes a estos, para cada valor fijado. De esta forma, se puede realizar un mejor análisis de los resultados y así determinar el número de paraderos que finalmente se instalarán.

En la Figura 3.3 se presentan los resultados de una instancia de prueba. En ella se puede observar cómo varía el resultado de interés, es decir, la cantidad de metros recorridos en total por los estudiantes a medida que cambia el número de paraderos que deben ser instalados. En esta instancia, existen 84 candidatos a paraderos, y el mínimo necesario para encontrar factibilidad es 69.

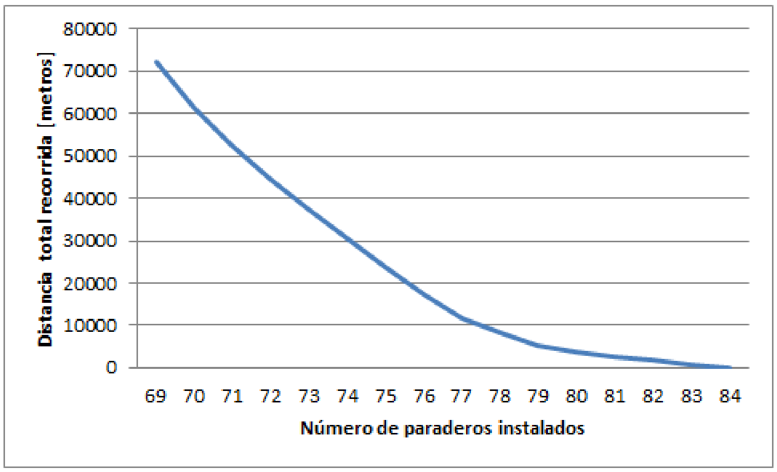

Figura 3.3: Distancia recorrida con respecto al número de paraderos en instancia de prueba.

Es claro que la distancia total a recorrer disminuye con el aumento de paraderos, sin embargo, esto a su vez genera mayor complejidad en los problemas presentados más adelante y perjudica a las rutas de los vehículos. Es por esto que es necesario establecer algún criterio que permita escoger el número de paraderos que deben ser instalados.

3.3.4. Etapa 3: Criterio de selección

Para realizar un análisis correcto de los resultados obtenidos en la parte anterior, se debe establecer un criterio que permita decidir qué valor debe tomar p, donde se pueden considerar varias medidas, como por ejemplo el total de distancia recorrida, la distancia promedio recorrida por alumno, la distancia promedio de solo los alumnos que deben caminar, entre otros.

En relación a la función objetivo del problema de asignación, lo que interesa es la distancia total recorrida por los estudiantes. Sin embargo, este valor puede variar mucho entre las distintas instancias, por lo que no es apropiado establecer esto como criterio de selección.

No obstante, la distancia promedio recorrida significa lo mismo para cualquier instancia, por lo que se trata de un dato transversal y fácil de analizar, independiente del número de estudiantes con los que cuente, y a través de ella se puede obtener directamente la distancia total recorrida, por lo que resulta ser un criterio más útil y efectivo para el caso.

Por lo tanto, se consideran todos los resultados y se elige el mínimo número de paraderos, tal que en la asignación para dicho problema, los estudiantes recorran en promedio una distancia menor a la distancia promedio máxima $DProm_{max}$.

Es importante notar que a través de este criterio en conjunto con la restricción de distancia impuesta en el modelo, se está estableciendo que el el promedio de distancia a recorrer no debe ser superior a cierto valor y que además el peor caso tampoco debe excederse una distancia.

La intuición indica que mientras más paraderos se instalen, menos distancia se recorrerá en el total de los alumnos. Sin embargo, a la vez, mientras más paraderos, mayor dificultad tendrán los problemas de localización y redimensionamiento de escuelas, y el de ruteo de vehículos, pues mientras más nodos existan, mayor será el número de variables y restricciones en cada uno, como se podrá ver en los capítulos siguientes.

En la Figura 3.4 se pueden ver los resultados de una instancia de prueba y el criterio establecido para determinar el número de paraderos a utilizar. La línea roja horizontal corresponde a la distancia promedio máxima a recorrer. La curva en azul muestra cómo varía la distancia promedio recorrida de acuerdo al número de paraderos que se pueden instalar. La intersección de ambas curvas corresponde al valor $p*$, el cual indica el número óptimo de paraderos a instalarse de acuerdo al criterio seleccionado. Los valores a la izquierda de $p*$ hacen que el problema no cumpla con los requisitos, mientras que los que están a la derecha de $p*$ cumplen con los requisitos, pero de acuerdo al criterio seleccionado, son una peor solución al problema.

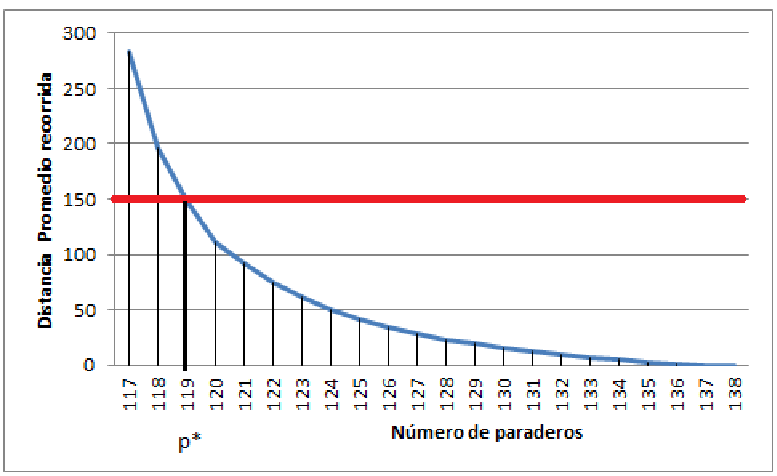

Figura 3.4: Distancia promedio recorrida según número de paraderos.

Como resultado final de estas tres etapas, se tendrá el número óptimo de paraderos que deben instalarse, se identificarán cuales son los lugares que funcionarán como paraderos y se realizará la asignación de los estudiantes a ellos, para que puedan ser pasados a buscar por los vehículos de transporte.

3.4. Análisis

3.4.1. Distancia máxima permitida $\bar{D}$

La distancia máxima permitida es un parámetro interesante de analizar, pues es un dato que puede variar dependiendo del criterio con que se mire. En efecto, 1km o 2km puede considerarse una distancia caminable razonable para alguien, sin embargo, para otra persona puede que sea excesiva.

Al resolver el problema para distintos valores de la distancia máxima permitida, la solución cambia. En general, a medida que se permite una mayor distancia, el número de paraderos a instalar va bajando, sin embargo, el total de distancia recorrida aumenta.

En la Figura 3.5 se aprecian los resultados en una instancia de prueba con 138 candidatos a paraderos. Se cuede ver que mientras más distancia se permita, menos paraderos se instalan, y que existe una tendencia al incremento de la distancia total recorrida. Sin embargo, existen espacios donde la distancia total disminuye, lo que se debe a que el aumento de distancia en el peor caso, abre nuevas posibilidades en la distribución que permiten una mejor asignación global, la cual va en perjuicio de algún estudiante.

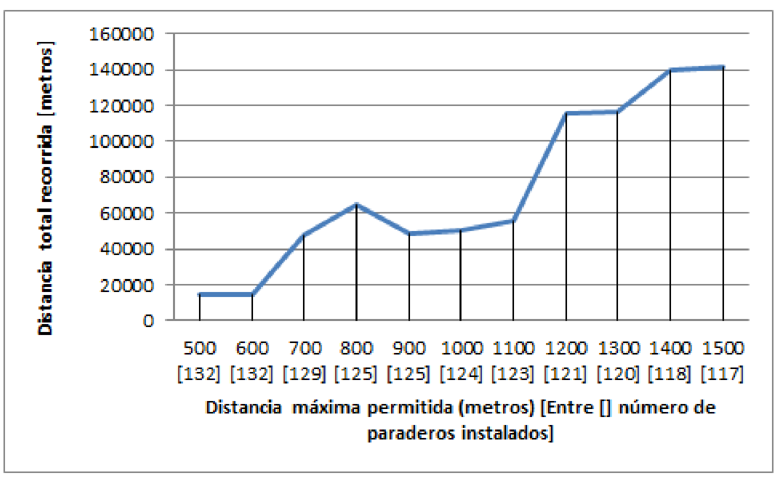

Figura 3.5: Distancia total recorrida a paraderos de acuerdo a máxima distancia caminable permitida.

Es en estos puntos donde debiera establecerse el valor de la máxima distancia caminable, siempre y cuando ésta sea un valor razonable.

Como se mencionó anteriormente, el número de variables y restricciones de los problemas de localización de escuelas y de ruteo de vehículos que se verán en los siguientes capítulos, disminuyen cuando el número de paraderos instalados es reducido. Es por esto que resulta interesante analizar el cambio en la solución al modificar la distancia permitida, en la cual hay un *trade off* entre la reducción de variables y la distancia recorrida.

Capítulo 4

Localización y redimensionamiento de escuelas

En este capítulo se presenta el diseño de la solución al problema de localización y tamaño adecuado de las escuelas en zonas rurales y la asignación de los estudiantes a cada una de ellas. En él se detallan las consideraciones especiales para el contexto en el que se trabaja, se especifica la formulación matemática del problema, se revisa la obtención de los parámetros utilizados y se realiza un análisis de éstos.

4.1. Descripción

La educación en las zonas rurales del país presenta diversos problemas, entre los que se encuentran la poca eficiencia con la que se ocupan los recursos. Esto se aprecia al comparar el número de establecimientos que existen en estas zonas a nivel nacional en contraste con lo que ocurre en los sectores urbanos. En total existen 3.786 establecimientos rurales, correspondientes al 31,9 % del número de escuelas en Chile, los que atienden a tan sólo el 9,8 % de los estudiantes. Es decir, existe un gran número de establecimientos para educar a un número reducido de personas.

Estos problemas son aún más notorios en los casos de las regiones extremas del país, correspondiente a las regiones XV, I, II, III, XI y XII, donde en conjunto habita sólo el 2,6 % de los estudiantes que reciben educación rural.

Si se observan los datos, estas regiones cuentan con un número de establecimientos excesivos para el número de estudiantes que asisten a ellas, lo que se ve reflejado en la ocupación de cada uno de ellos.

Otro de los problemas que se presentan, es que los establecimientos en muchos casos se encuentran demasiado lejos de los hogares de los estudiantes, por lo que muchos de ellos quedan aislados o deben realizar un viaje largo para asistir a clases.

Por esto, surge la necesidad de generar proyectos que permitan utilizar de mejor manera los recursos, sacándole el mayor provecho posible a cada una de las escuelas que funcionan y permitiendo que los estudiantes superen las barreras de aislamiento geográfico y de dificultad de acceso a sus escuelas.

Una solución a este problema permite contribuir a mejorar la calidad de vida de los estudiantes y sus familias, disminuyendo las brechas de desigualdad en la conectividad, y contribuye a los municipios administrando de mejor manera los recursos con los que se cuentan.

Para resolver el problema, se desarrolla un modelo de programación lineal mixta, el cual busca encontrar las posiciones óptimas donde ubicar escuelas, además del tamaño adecuado para ellas, con tal de que todos los estudiantes de la zona puedan asistir a un establecimiento recorriendo para ello la menor distancia posible. Por lo mismo, se asignará a cada alumno una escuela a la que va a asistir.

Hay que tener en consideración que hay una serie de establecimientos que ya se encuentran abiertos y en funcionamiento, por lo tanto, el modelo evaluará si cada uno de ellos está en una buena ubicación, considerando que en caso de decidir mantener la escuela, no se tendrá que invertir la misma cantidad en infraestructura.

Además, existen establecimientos educacionales que también se usan con otros fines para la comunidad, por lo tanto no se pueden cerrar. Asimismo, puede que existan escuelas que estén deterioradas o no cumplan con las condiciones mínimas requeridas para los alumnos, por lo que se puede determinar que deben cerrarse. También la modelación puede restringir el número máximo de establecimientos a abrir o cerrar.

Se considerará la demanda escolar, es decir, el número de estudiantes de escuelas rurales, de manera agregada en relación a los grados educacionales. Si bien esto no es el mejor reflejo de lo que ocurre en la realidad, en las zonas rurales de Chile el 85 % de los establecimientos cuentan con cursos multigrados, lo que se refiere a que un mismo profesor enseña a varios estudiantes de distinto nivel escolar en una misma sala de clases, por lo que esta consideración es una aproximación prudente y que permite simplificar el modelo de localización y asignación.

La modelación exigirá que todos los estudiantes deban asistir a una escuela dentro de las restricciones impuestas, para asegurar el acceso a la educación. Dentro de estas restricciones, se exige que los estudiantes tengan una escuela funcionando con capacidad dentro de un rango de distancia máximo permitido.

También se puede considerar un presupuesto límite a invertir, el cual se divide en gastos operacionales, inversión en infraestructura y en transporte. Cada uno de estos presupuestos no debe ser superado, y también existe un presupuesto global que tampoco se debe sobrepasar.

Se permitirá holgura en la capacidad de los establecimientos educacionales, aceptando estudiantes por sobre la capacidad de las escuelas, siempre y cuando no sean más que un porcentaje de la capacidad del colegio. Esto permite que en ocasiones no se abran establecimientos para unos pocos alumnos, sino que estos asisten a una escuela ya existente que esté llena, a cambio de una penalización en los costos de esta.

Sólo se considerarán los estudiantes de zonas rurales que asisten a escuelas rurales, dejando fuera del estudio aquellos que asisten a establecimientos en zonas urbanas. Tampoco se considerarán en el estudio a los alumnos de zonas urbanas, asumiéndose que estos asisten a colegios en dichas zonas.

Además, se considera que no hay preferencia por parte de los estudiantes entre un establecimiento y otro, siendo la distancia que deben recorrer y la capacidad de estos el único factor relevante para tomar la decisión.

Por último, se considera un horizonte temporal de un año escolar, por lo que todos los costos están parametrizados bajo este período. Además se considera regularidad en cuanto a la asistencia de los estudiantes y que las distribuciones de estos se mantienen constantes durante el plazo en estudio.

4.2. Modelación

La modelación del problema presentado se realiza a través de un modelo de programación lineal mixta, el cual se presenta a continuación

- Parámetros
  - $CostOpcion_{lo}$ = Costo total en que se incurre si el candidato a escuela en l toma la opción o. Este costo viene dado por la opción que tome y puede consistir en los gastos en remuneración anual en profesores y en directores, el costo del terreno, el costo de construcción y equipamiento y costo de cerrar el establecimiento si es el caso (correspondiente a indemnizaciones y liquidación de infraestructura e insumos).
  - $Dist_{pl}$ = Distancia entre el paradero p y el establecimiento en l.
  - α = Ponderación de la distancia entre un paradero y un establecimiento, para estimar el costo que tiene este traslado.
  - $CostMatricula_{lo}$ = Costo que tiene para un estudiante asistir al establecimiento en l que toma la opción o
  - $Penalizacion_{lo}$ = Costo que se incurre por recibir un estudiante por sobre la capacidad en la escuela en l que toma la opción o.
  - Pob_p = Población escolar del paradero p
  - MaxCerrar = Número máximo de establecimientos funcionando que se pueden cerrar.
  - $MaxHolgura_{lo}$ = Máxima holgura permitida para el establecimiento en l que toma la opción o.
  - Cap_{lo} = Capacidad máxima de estudiantes que puede recibir el establecimiento en l que toma la opción o.
  - $PuedeIr_{pl} = \begin{cases} 1, & \text{si los estudiantes del paradero } p \text{ pueden ir al establecimiento en } l \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$

- $PPTO_{ESC}$ = Presupuesto disponible para invertir en infraestructura y operación de las escuelas.
- $PPTO_{TR}$ = Presupuesto disponible para invertir en transporte.
- $PPTO_{TOTAL}$ = Presupuesto total disponible para un año del proyecto.

- Conjuntos
  - P: Conjunto de paraderos instalados en el modelo de paraderos.
  - L: Conjunto de localizaciones donde es posible que funcione un establecimiento, ya sea uno existente o bien un lugar donde es posible construir uno.
  - Op: Posibles opciones que tiene un candidato a establecimiento. Hay distintas opciones de tamaño y una opción de cerrar " close " en caso de que el establecimiento exista.
  - Ex: Conjunto de establecimientos existentes.
  - NoCerrar: Conjunto de establecimientos que no se deben cerrar.
  - Abrir: Conjunto de establecimientos que deben abrirse obligatoriamente.
  - Cerrar: Conjunto de establecimientos que deben cerrarse.
  - $Opcion_l$: Posibles opciones que tiene el candidato a establecimiento en l.

- Variables de decisión
  - $X_{lo} = \begin{cases} 1, & \text{si el candidato a escuela ubicado en } l \text{ toma la opción } o \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$
  - Y_{plo} = Cantidad de estudiantes que van del paradero p al establecimiento ubicado en l que toma la opción o.
  - $Holgura_{lo}$ = Número de estudiantes extra que asisten a escuela ubicada en l, que toma la opción o.

- Restricciones
  1. En cada lugar donde exista una escuela se debe escoger una y sólo una opción entre las admisibles.

$$\sum_{o \in Opcion_l} X_{lo} = 1 \qquad \forall l \in Ex \tag{4.1}$$

  2. En cada lugar candidato a instalarse una escuela, donde no existía un establecimiento previamente, se debe escoger a lo más una opción.

$$\sum_{o \in Opcion_l} X_{lo} \leqslant 1 \qquad \forall l \notin Ex \tag{4.2}$$

  3. Las escuelas que no están abiertas no se pueden cerrar.

$$X_{lo} = 0 \qquad \forall l \in Ex, o = close \tag{4.3}$$

  4. Todos los estudiantes deben asistir a un establecimiento.

$$\sum_{l \in L} \sum_{o \in Op} Y_{plo} = Pob_p \qquad \forall p \in P \tag{4.4}$$

5. Los estudiantes sólo pueden ir a un establecimiento que esté funcionando.

$$Y_{plo} \leqslant Pob_p * X_{lo} \qquad \forall p \in P, l \in L, o \neq close \tag{4.5}$$

6. No se puede ir a un establecimiento si éste se cierra.

$$Y_{plo} + Pob_p * X_{lo} \leqslant Pob_p \qquad \forall p \in P, l \in Ex, o = close \tag{4.6}$$

7. No se puede ir a un establecimiento que esté muy lejano.

$$Y_{plo} \leqslant Puede Ir_{pl} * Pob_p \qquad \forall p \in P, l \in L, o \in Op \tag{4.7}$$

8. Cada establecimiento tiene una capacidad máxima de estudiantes a recibir.

$$\sum_{p \in P} Y_{plo} \leqslant Holgura_{lo} + X_{lo} Cap_{lo} \qquad \forall l \in L, o \in Op \tag{4.8}$$

9. Solo se permite holgura en escuelas que estén funcionando. Además tiene un límite.

$$Holgura_{lo} \leqslant MaxHolgura_{lo} * X_{lo} \qquad \forall l \notin Ex, o \neq close \tag{4.9}$$

10. Si una escuela existente se cierra, entonces no puede tener holgura.

$$Holgura_{lo} + MaxHolgura_{lo} * X_{lo} \leqslant MaxHolgura_{lo} \qquad \forall l \in Ex, o = close \tag{4.10}$$

11. No se puede enviar estudiantes a escuelas cerradas.

$$Y_{plo} = 0 \qquad \forall p \in P, l \in L, o = close \tag{4.11}$$

12. Existe un límite de escuelas a cerrar.

$$\sum_{l \in L} X_{lo} \leqslant MaxCerrar \qquad o = close \tag{4.12}$$

13. Hay escuelas que no deben cerrarse.

$$X_{lo} = 0 \qquad \forall l \in NoCerrar, o = close \tag{4.13}$$

14. Hay escuelas que deben cerrarse.

$$X_{lo} = 1 \qquad \forall l \in Cerrar, o = close \tag{4.14}$$

15. Hay escuelas que deben abrirse.

$$\sum_{o \neq close} X_{lo} = 1 \qquad \forall l \in Abrir \tag{4.15}$$

16. No se puede superar el presupuesto destinado a transporte de los estudiantes.

$$\sum_{p \in P} \sum_{l \in L} \sum_{o \in Op} \alpha * Dist_{pl} * Y_{plo} \leq PPTO_{TR} \tag{4.16}$$

17. No se puede superar el presupuesto destinado a la inversión en infraestructura y operaciones.

$$\sum_{l \in L} \sum_{o \in Op} CostOpcion_{lo} * X_{lo} \leq PPTO_{ESC} \tag{4.17}$$

18. No se puede superar el presupuesto total.

$$(CostoInversion + CostoTransporte + PenalizacionHolgura)^1 \leq PPTO_{TOT} \tag{4.18}$$

19. Naturaleza de las variables.

$$X_{lo} \in \{0,1\} \qquad \forall l \in L, o \in Op \tag{4.19}$$

$$Y_{plo} \geq 0 \qquad \forall p \in P, l \in L, o \in Op \tag{4.20}$$

$$Holgura_{lo} \geq 0 \qquad \forall l \in L, o \in Op \tag{4.21}$$

- Función objetivo

$$minC = CostoInversion + CostoTransporte + PenalizacionHolgura \tag{4.22}$$

CostoInversion $= \sum_{l \in L} \sum_{o \in Op} CostOpcion_{lo} * X_{lo}$

CostoTransporte $= \sum_{p \in P} \sum_{l \in L} \sum_{o \in Op} \alpha * Dist_{pl} * Y_{plo}$

PenalizacionHolgura $= \sum_{l \in L} \sum_{o \in Op} Penalizacion_{lo} * Holgura_{lo}$

En este caso la función objetivo corresponde a la minimización de los costos dados por la inversión en infraestructura nueva y operación de los establecimientos, los costos de transporte y la penalización por tener escuelas con alumnos por sobre su capacidad.

4.3. Obtención de parámetros

4.3.1. Conjunto de candidatos a establecimientos

En cada instancia existen localizaciones con población escolar y cada uno de estos lugares es un potencial candidato a paradero. Sin embargo, dependiendo del tamaño de la instancia con la que se trabaje, puede existir un gran número de opciones, por lo tanto, es necesario aplicar un procedimiento que permita filtrar y seleccionar los mejores candidatos a través de dos criterios: demanda y cobertura.

El primer criterio a considerar tiene relación a la demanda de estos potenciales candidatos, es decir, al número de estudiantes que existe en dicho punto. Mientras mayor sea el número de estudiantes, mayor será la probabilidad de que en dicho punto se establezca una escuela, debido a la mayor densidad de población. Es por esto que se determina que cualquier

[1] Definidos en la función objetivo

punto con población escolar sobre los cien estudiantes, se transformará en un candidato a establecimiento.

El segundo criterio a considerar está relacionado con la cobertura, esto quiere decir que toda localización con población escolar que no tenga a menos de 10 kilómetros un colegio existente u otra localidad con población, pasa inmediatamente a ser candidato a escuela. Así, si una localidad está aislada, tendrá la posibilidad de tener un establecimiento educacional.

De esta forma, se cuenta con un primer conjunto de candidatos a escuela. Luego se determina que entidades con baja densidad poblacional pueden ser candidatos a establecerse un colegio, a través de un modelo de cobertura el cual tiene como objetivo asegurar que toda localidad tenga un candidato cercano, minimizando la cantidad de estos últimos. La formulación matemática del problema se presenta a continuación.

- Parámetros
  - $C_j = \begin{cases} 1, & \text{si } j \text{ es candidato a escuela dado por los criterios de demanda y cobertura.} \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$
- Conjuntos
  - I = Conjunto de localizaciones con población escolar.
  - J = Conjunto de localizaciones con población escolar y escuelas existentes.
  - N_{i} = Conjunto de localizaciones con población escolar y escuelas que están a menos de 3 km de la entidad i.
- Variables de decisión
  - $X_j = \begin{cases} 1, & \text{si la localización con población escolar } j \text{ es candidato} \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$
- Restricciones
  1. Todas las agrupaciones deben tener un candidato cercano.

$$\sum_{j \in \mathbb{N}_{\mathrm{i}}} X_j + \sum_{j \in \mathbb{N}_{\mathrm{i}}} C_j \geq 1 \qquad \forall \mathrm{i} \in I \tag{4.23}$$

  2. Naturaleza de las variables

$$X_j \in \{0, 1\} \qquad \forall j \in J \tag{4.24}$$

- Función objetivo

$$minNC = \sum_{j \in J} X_j \tag{4.25}$$

La función objetivo corresponde a minimizar el número de candidatos "NC".

Con este pequeño problema, se obtiene un conjunto de posibles candidatos que asegurarán que todas las localizaciones con población escolar tengan un candidato a establecimiento cerca.

4.3.2. Estimación de α

En la modelación del problema de localización de las escuelas rurales, un punto importante a considerar es la asignación de los estudiantes a los colegios, existiendo una relación entre los paraderos con población escolar y los establecimientos.

Cuando un estudiante debe decidir a qué escuela ir (asumiendo que todas tienen igualdad de condiciones por lo que no hay preferencia por alguna de ellas en particular), lo hará considerando la existencia del establecimiento, si este tiene capacidad y el costo que le significa trasladarse desde su hogar a él.

En la modelación, las dos primeras consideraciones se manejan a través de las restricciones, asegurando que ningún alumno asista a una escuela que no esté funcionando, con la restricción (4.5), e impidiendo que la capacidad de un establecimiento sea superada, con la restricción (4.8). El último de los puntos a considerar, sin embargo, se realiza a través de la función objetivo, pues el alumno puede manejar varias opciones factibles, sin embargo, el objetivo es que asista a la que le signifique un mayor beneficio, lo que se traduce en la modelación como un menor costo.

Existen tres posibilidades para cuantificar el costo que significa el transporte de los estudiantes a las escuelas, de las cuales dos corresponden a un transporte directo y una a través del sistema de transporte compartido.

La primera opción es considerar un valor subjetivo por kilómetro recorrido, correspondiente a una mezcla entre el costo monetario de transporte del estudiante y el costo personal asociado al tiempo de viaje. Para calcular el precio que tiene realizar este viaje, se debe estimar el costo de un kilómetro recorrido (valor subjetivo) y multiplicarlo por el número de viajes que se realizan anualmente, ya que se manejan todos los costos en un horizonte temporal de un año. Todo esto se resume en la siguiente ecuación:

$$\alpha_1 = C_{MD} * Viajes \tag{4.26}$$

Donde:

- C_{MD} = Costo por metro diario.
- Viajes = Número de viajes que realizan los estudiantes en el año, equivalente a 2 viajes diarios (ida y vuelta), 22 días al mes por 10 meses, es decir, 440 viajes en el año.

Esta opción busca incorporar la percepción que tienen los estudiantes con respecto al viaje que deben realizar. De esta forma, si su valoración por el tiempo es alta, entonces el costo de los viajes serán mayores en comparación a un escenario donde el tiempo es poco valorado, por lo que el modelo podría privilegiar la apertura de más establecimientos para reducir las distancias y con ello los costos de transporte.

En base a esto, si se considera que un viaje de un kilómetro, por ejemplo, tiene un valor de \$60, el costo por kilómetro anual corresponde a \$26.400.

Con este valor se puede calcular directamente el costo de transporte del estudiante, multiplicando la distancia que existe entre el punto de inicio del viaje y el establecimiento al que asiste. Para un grupo de estudiantes que sale del mismo punto, se multiplica por el número de estudiantes que conforman el grupo. Para calcular el costo total en transporte, se deben sumar los costos grupales entre cada par formado por un hogar y un establecimiento, como se muestra en la fórmula.

$$\sum_{p \in P} \sum_{l \in L} \sum_{o \in Op} \alpha_1 * Dist_{pl} * Y_{plo} \tag{4.27}$$

Donde:

- P = Conjunto de paraderos. En este caso, cada paradero corresponde al hogar de los estudiantes.
- L = Conjunto de establecimientos.
- Op = Conjunto de opciones posibles de las escuelas.
- $Dist_{pl}$ = Distancia entre el paradero p y la escuela l.
- Y_{plo} = Número de estudiantes que van de p a la escuela l de opción o.

La segunda opción es considerar que el costo incurrido por los estudiantes corresponde sólo al costo monetario de este. Para este caso, se debe considerar el rendimiento de los vehículos y el costo del combustible que utilice. En esta oportunidad se puede calcular el costo por kilómetro recorrido a través del rendimiento del vehículo y no del valor subjetivo del tiempo. La fórmula para obtener el costo, es la siguiente:

$$\alpha_2 = C_{MA} = \frac{P_G * Viajes}{R} \tag{4.28}$$

Donde se incorporan los siguientes parámetros:

- P_G = Precio del combustible utilizado y otros costos asociados al uso del vehículo.
- R = Rendimiento del vehículo, dado por el número de kilómetros que se pueden recorrer con 1 litro de combustible, es decir, sus unidades de medida son $\left[\frac{Km}{Lt}\right]$.

De esta forma, estimando el rendimiento mixto (en carretera y ciudad[2]) promedio de un vehículo particular pequeño que utilice gasolina 95 como combustible en $16\left[\frac{Km}{Lt}\right]$ [20], y considerando el precio de la gasolina 95 en \$721 [12], se obtiene que el costo por metro anual corresponde a \$19.800.

De igual forma que en el caso anterior, el gasto que realiza un estudiante para ir desde su hogar al establecimiento al que asiste corresponde al resultado de la multiplicación del costo por metro anual obtenido anteriormente y la distancia que los separa, y si es para calcular el

[2]Si bien se está realizando en zonas rurales, los caminos no están en las mejores condiciones por lo que el rendimiento de los vehículos baja

costo de un grupo, se multiplica además por el número de estudiantes que lo conforman, por lo que para calcular el gasto total de transporte, se deben sumar todos los pares formados por un hogar y un establecimiento.

En el tercer caso se realiza el transporte a través de un sistema de vehículos compartidos que salen desde los establecimientos y pasan a buscar a los estudiantes a los paraderos a los que fueron asignados. De esta forma, el costo de transporte va a estar dado por la inversión en vehículos de transporte y el costo del viaje que realiza cada uno de ellos.

En este caso, no existe un relación directa entre la distancia entre un paradero y el gasto en transporte que se realizará, pues la distancia efectiva que se va a recorrer depende de la ruta del vehículo. Por lo tanto, para determinar el valor de α_3 se realizará un algoritmo iterativo, el cual buscará estimar el costo total del transporte e internalizarlo en el modelo de localización y asignación de las escuelas, puesto que este valor se obtiene del resultado de la modelación del sistema de transporte, el cual se ve en el siguiente capítulo.

En la modelación del sistema de transporte se determina el número de vehículos que se requieren y las rutas que debe realizar cada uno. A partir de lo primero, se determina una inversión fija independiente de las rutas que tomen, mientras que a partir de estas últimas y en conjunto con el rendimiento de los vehículos, se determina el gasto operacional.

El algoritmo iterativo que permitirá determinar el valor de α_3, cuenta con un primer paso en el cual se estima el número de vehículos que se van a utilizar y el largo promedio de las rutas, para luego calcular el costo total de transporte a partir de estos datos. Este valor se debe dividir equitativamente por el número de estudiantes y se agrega como costo promedio de viaje de los estudiantes.

Luego se debe resolver el problema de localización y asignación de escuelas rurales y el modelo de ruteo de vehículos, para comprobar si la solución encontrada coincide o se aproxima a la estimación realizada. En caso de que los resultados no concuerden con lo esperado, entonces se reajusta el valor estimado y se repite el proceso, hasta que el costo esperado coincida con el real.

Es importante destacar que la estimación de α_3 es una aproximación muy gruesa del costo real que se va a incurrir, por lo que este corresponde a la principal deficiencia de la modelación. Sin embargo, a través de ella, se puede establecer una posible solución al problema de localización y transporte en conjunto, ya que realizar la modelación a través de un sólo problema resulta muy difícil y probablemente requiera de otras heurísticas para encontrar una solución aproximada.

Como posibles mejoras a esta estimación, se puede buscar un valor de α para cada paradero y establecimiento, es decir, α_{pl}. Esto permitiría relacionarlo a características propias de cada ubicación y estimar de mejor manera el costo de transporte que se incurrirá en cada paradero.

Por ejemplo, podría depender del número de estudiantes que hay en el paradero, ya que se sabe que mientras más cercano a la capacidad del vehículo es más probable que éste realice un viaje directo al establecimiento. También puede depender del número de paraderos cercanos a cada paradero, pues mientras más existan, es más probable que visite a otro también.

4.3.3. Inversión en infraestructura

Los costos de inversión en infraestructura corresponden a los gastos incurridos en edificar el establecimiento en el que se va a impartir la educación. En base a los costos de los proyectos ejecutados [15], se puede estimar la inversión total a realizar de acuerdo al tamaño del establecimiento. Este valor debe ser transformado a un costo anual, para tener consistencia con el resto de los costos y cálculos que se utilizarán.

Para calcular el valor anual, se debe tener en cuenta el valor total de la inversión, el que se denominará *Inv*. Por otro lado, de acuerdo al Sistema de Impuestos Internos, en su *Nueva tabla de vida útil de los bienes físicos del activo inmovilizado* [18], los establecimientos tienen una vida útil de $t = 20$ años. Por último, se considerará la tasa social de descuento usada por el MIDEPLAN a partir del 2013 la cual corresponde a $r = 8\,\%$ [19].

Con estos datos se puede calcular la inversión anual en infraestructura a través de la siguiente fórmula:

$$CostoAnual = Inv * \frac{r * (1 + r)^t}{(1 + r)^t - 1} \tag{4.29}$$

Para el caso en que un establecimiento ya existente deba incrementar su tamaño, los costos asociados son menores a los de instalar una escuela desde cero, pues esta ya cuenta con infraestructura necesaria para funcionar. El gasto incurrido corresponde principalmente a la construcción de nuevas salas.

Se estima que el 60 % de la inversión en infraestructura va destinado a las aulas [5], mientras que el resto se usa para las oficinas, sala de profesores, biblioteca, patio, etc. A partir de esto, se obtiene la inversión en salas de clases, por lo que dividiendo este valor por el número de salas que tiene el establecimiento se determina el valor unitario. Este costo debe ser anualizado de la misma manera que se realizó anteriormente.

Con este valor, se puede estimar el costo que tiene aumentar el tamaño de un colegio ya existente, dependiendo de cuántas salas extra va a tener dicho establecimiento.

4.3.4. Remuneraciones de profesores y directores

La decisión de funcionamiento de un establecimiento va a depender de la inversión en infraestructura y de sus gastos operacionales. En este último caso, los costos se deben principalmente a las remuneraciones anuales de profesores y directores, siendo el primero el más variable debido a que depende del número de docentes que se requieran en el establecimiento, lo cual está relacionado al tamaño de este.

La información de las remuneraciones de profesores y directores se obtiene del MINEDUC [15]. Sin embargo, en el caso de los profesores, se cuenta con el gasto total en remuneraciones de docentes y algunas escuelas no tienen dicha información. Para estos establecimientos se trabaja con el sueldo promedio de un profesor en la región, el cual es calculado en base a los sueldos de las escuelas que sí cuentan con la información.

Para calcular este promedio, se revisa la información de los establecimientos, los cuales indican el gasto total en remuneraciones a docentes. A partir de esto y el número de profesores con que cuenta dicho establecimiento, se puede dividir y calcular el gasto promedio por cada uno.

Es importante que el sueldo a considerar sea el promedio de la misma región, pues varían mucho entre una y otra, sobre todo si se compara una región extrema y una región central. En la Figura 4.1 se aprecia el sueldo promedio de los profesores de las distintas regiones.

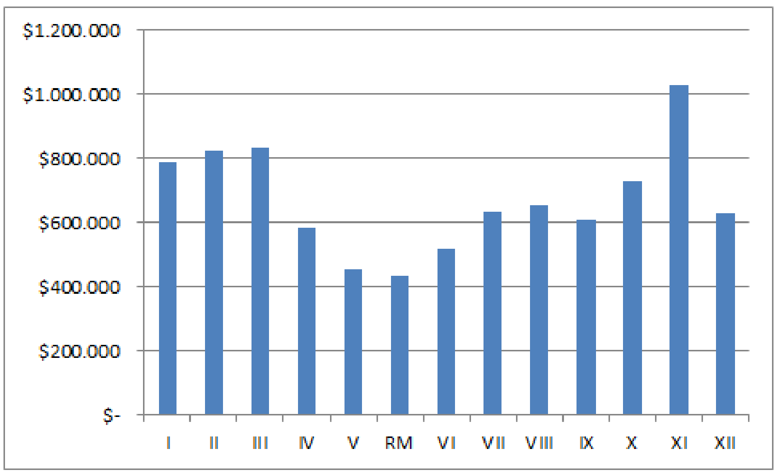

Figura 4.1: Sueldo promedio de profesores por región.

Al considerar la región con sueldos promedios más bajos y compararla con la región de los sueldos promedios más altos, se puede observar que esta última tiene salarios de 137,3 % mayores.

Si se comparan por regiones extremas y no extremas, las primeras alcanzan un valor promedio de $820.550, mientras que las más centrales tienen un promedio salarial de $508.094. Esto quiere decir que en regiones extremas los salarios son en promedio 61,5 % más altos.

También se requiere indicar el costo operacional que tendrían los establecimientos que no existen en la actualidad, pero que son opción a ser construidos, así como el gasto extra que se invertirá en docentes nuevos para las escuelas que requieran aumentar su capacidad y, por lo tanto, el número de docentes.

Para ambos casos, el sueldo de los profesores es considerado como el salario promedio de la región, sin embargo, durante la modelación, se determina que este valor corresponde al promedio de sueldo más alto de la región. Esto se realiza para evitar incentivos a cerrar los establecimientos con los sueldos más altos y sólo hacerlo en el caso que otorgue un beneficio mayor para la solución.

En el caso de los directores, al igual que para los profesores, se cuenta con el gasto en remuneraciones de estos. Para el caso de los posibles nuevos establecimientos, se considera el sueldo promedio máximo de remuneraciones de la región. Esto se hace, al igual que en el caso anterior, para evitar incentivos a cerrar los establecimientos con gastos en remuneraciones más altos; además, también se considerará el sueldo promedio de la región para los resultados de la solución.

En la Figura 4.2 se puede apreciar que los gastos en remuneraciones de directores a lo largo del país es menos variable, salvo por un par de regiones.

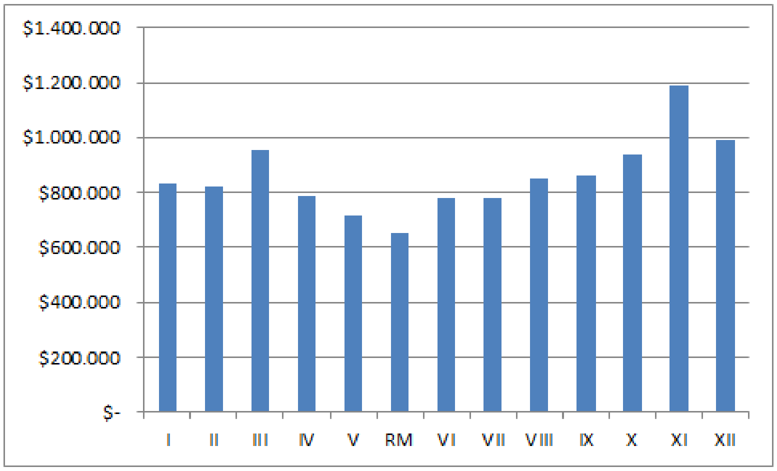

Figura 4.2: Sueldo promedio de directores por región.

Si se compara el sueldo promedio de la región con salarios más bajos y el de la región con los más altos, este último es 83,5 % mayor.

Al dividir el país es regiones extremas y no extremas, el salario de los directores corresponde a $958.417 en el primer caso, mientras que $794.449 en el segundo. Esto quiere decir, que las regiones más alejadas de la capital tienen sueldos 20,6 % más altos.

4.4. Análisis

4.4.1. Holgura

Una variable de holgura permite que un establecimiento reciba estudiantes por sobre su capacidad a cambio de un costo extra como penalización. Este sobrecupo tiene como objetivo evitar la apertura de establecimientos para recibir a pocos estudiantes.

Se realizaron pruebas en dos instancias distintas. En la primera, la solución encontrada indicaba en todas las escuelas abiertas una capacidad inferior al 80 %. Al incorporar la variable de holgura, el resultado no cambió.

En la segunda prueba, algunos de los 12 colegios funcionaban al 100 % de su capacidad. Al incorporar la variable, la solución cambió, requiriendo 2 escuelas menos. Con estos resultados, la capacidad ociosa disminuyó 13 %, la inversión en infraestructura disminuyó 40 % y los costos operacionales bajaron 8 %. Por otro lado, se produjo un aumento de la distancia total recorrida por los alumnos de un 7 %.

La variable de holgura, en el peor de los casos, deja la solución con los mismos resultados que tendría si no existiera, mientras que en un escenario favorable puede producir mejoras importantes, tanto en la reducción de costos, como en la disminución de la capacidad ociosa de los establecimientos. La penalización extra, sumado al aumento en los costos de transporte son superados por el ahorro producido al permitir sobrecupos, pues de otra forma, la solución no tomaría esta opción.

4.4.2. Distancia

Se realizó un análisis con respecto a la máxima distancia que puede separar a un estudiante de su colegio.

Al realizar la variación de este parámetro en una instancia de prueba, se observó un resultado similar a lo que ocurre en el caso de los paraderos. Como se puede apreciar en la tabla de la Figura 4.3, el promedio de la distancia tiende a incrementarse a medida que se relaja esta restricción.

El número de establecimientos funcionando disminuye, permitiendo reducir los costos de infraestructura y operaciones, sin embargo, al aumentar las distancias, los gastos en transporte crecen. De todas formas, dado que se está relajando la restricción de distancia, la inversión total disminuye, pues en el peor de los casos, tomará la misma solución que cuando lo que más se podía viajar debía ser menor.

Máxima Distancia permitida [Km]	Número de escuelas funcionando	Promedio distancia Recorrida [Km]	Máxima distancia recorrida [Km]
40	11	9,8	38,4
50	11	19,3	49,9
60	9	18,8	58,3
70	8	20,6	66,5
80	8	17,7	78,7
90	7	25,9	88,4

Figura 4.3: Análisis con respecto a la variación de la máxima distancia permitida.

Claramente, la máxima distancia recorrida aumenta, siendo siempre muy cercano al límite permitido. Este valor es muy importante de tener en cuenta, pues si bien existe un beneficio en términos económicos, esto se está realizando en perjuicio de algunos estudiantes, dejándolos más aislados y teniendo que realizar viajes más largos, lo que va en contra de los objetivos de este proyecto.

Capítulo 5

Ruteo de vehículos

5.1. Descripción

Del modelo de localización y redimensionamiento de las escuelas se obtiene como resultado un conjunto de establecimientos que se ponen en funcionamiento y también se establece a cuál de ellos debiera asistir idealmente cada estudiante. Tal como se observó en el análisis realizado en el capítulo anterior, la solución varía al modificar la máxima distancia permitida que separa a los estudiantes de las escuelas. De este punto surge la posibilidad de aumentar la máxima distancia permitida a cambio de diseñar un sistema de transporte que permita a los estudiantes asistir a escuelas que se encuentren más lejos, sin tener que preocuparse de cómo van a llegar a ellas.

Para diseñar este sistema de transporte, se propone el desarrollo de un modelo de programación lineal mixta el cual determine la cantidad de vehículos necesarios para transportar a todos los estudiantes a sus escuelas y las rutas que deben seguir, con el objetivo de minimizar el costo de transporte, es decir, la inversión en los vehículos y los costos asociados a los viajes.

Cada vehículo estará asociado a una escuela, por lo que se considerará que cada uno de ellos iniciará su viaje en la escuela a la que pertenece. Sin embargo, en la realidad esto no necesariamente será así, pues en lo que respecta al modelo, estos medios de transporte serán utilizados 2 veces durante el día, durante la mañana cuando los estudiantes ingresen a clases, y durante la tarde cuando deban regresar a sus hogares, por lo tanto, los encargados podrán disponer de los vehículos para las actividades que estimen convenientes.

Desde cada escuela, los vehículos se dirigirán hacia los paraderos que se instalaron de acuerdo a la solución del modelo de sistema de paraderos. Esto simplifica la resolución del modelo propuesto en el presente capítulo pues reduce el número de variables y restricciones a considerar, lo cual es de suma importancia como se verá más adelante.

Por otro lado, esto puede traer grandes beneficios, tanto en los costos de transporte como en los tiempos que los estudiantes deberán permanecer en los buses. Lo primero se debe a que las rutas a diseñar serán más cortas, pues en vez de ir a buscar a cada estudiante a su casa, los puntos de encuentro permitirán que el vehículo realice una sola parada. Lo segundo es debido a que los circuitos recorren menos distancia y también se reduce el número de detenciones, lo que corresponde a tiempo muerto para el vehículo.

Para simplificar el modelo lo primero que se realizará será pasar los datos por dos filtros, el primero referido a la distancia que separa a los estudiantes de los establecimientos a los que asisten, y el segundo tiene relación al número de alumnos que hay en cada paradero y que asisten a una misma escuela.

Para el primer filtro, se establece una distancia D_w como la máxima distancia caminable por los estudiantes desde el paradero a la escuela a la que asisten. Si la distancia del camino que va de del paradero donde está el alumno al establecimiento al que asiste es menor a dicha distancia, es decir, si se cumple que $Dist_{\mathrm{i}j} \leq D_w$ entonces el estudiante irá directamente, sin esperar un bus.

Esto se realiza con la intención de agilizar el transporte tanto para los estudiantes de estas localizaciones como para todo el sistema, ya que es más fácil y rápido para ellos salir de su casa y caminar una distancia corta en vez de tener que ir al paradero y esperar a que pase el bus, considerando además que probablemente luego de subirse al vehículo deba pasar por otro paradero para recoger a otro estudiante. Para el sistema completo también trae beneficios, ya que es un punto menos que visitar y eso quiere decir que se pueden realizar rutas más cortas o utilizar menos vehículos.

El segundo filtro es por la cantidad de personas que hay en un paradero con el mismo destino. Si la cantidad de alumnos que va a un mismo establecimiento desde un paradero es mayor a la capacidad del vehículo de transporte, entonces se asigna uno o más de estos que van directamente del paradero a la escuela. La cantidad de vehículos exclusivos dependerá de cuantas veces mayor sea la población del paradero que la capacidad de estos, asignándose vehículos hasta que la población restante sea inferior a la capacidad de uno de ellos.

El número de alumnos restantes es considerado para el resto del modelo, sin embargo, si luego de estos filtros el número de alumnos en un paradero es cero, obviamente este punto no es considerado.

Una vez que se tiene actualizada la información con respecto a los paraderos, se procede a resolver el problema de ruteo. La modelación de este problema se resuelve como un ruteo de vehículos con capacidad. La formulación matemática de este problema puede verse a continuación.

5.2. Formulación matemática

- Parámetros
  - $D_{\mathrm{i}j}$: Distancia del camino entre el nodo i y el nodo j.
  - D_V: Distancia máxima que puede recorrer un vehículo entre una parada y otra.
  - CostoV: Inversión anual de un vehículo de transporte, incluyendo el coste de este

y de la remuneración del chofer.

- Conjuntos
  - N(e): Conjunto de nodos asociados al establecimiento educacional e.
  - S(i): Conjunto de nodos adyacentes al nodo i, es decir, aquellos nodos que tienen un arco que sale de i y va hacia ellos. La definición formal es:

$$S(\mathrm{i}) = \{j \in N(\mathrm{e}) | D_{\mathrm{i}j} \leqslant D_V\} \tag{5.1}$$

  - E(i): Conjunto de nodos incidentes al nodo i, es decir, aquellos nodos que tienen un arco que sale de ellos y van al nodo i. La definición formal es:

$$E(\mathrm{i}) = \{j \in N(\mathrm{e}) | D_{j\mathrm{i}} \leqslant D_V\} \tag{5.2}$$

- Variables de decisión
  - $Arco_{\mathrm{i}j} = \begin{cases} 1, & \text{si se utiliza el arco que va del nodo } i \text{ al nodo } j \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$
  - V_{e} = Número de vehículos que se requieren para el escuela e.
- Restricciones
  1. De cada establecimiento sale exactamente V_{e} vehículos.

$$\sum_{j \in S(\mathrm{e})} Arco_{\mathrm{e}j} = V_{\mathrm{e}} \tag{5.3}$$

  2. De cada paradero sale exactamente un vehículo asociado al establecimiento e.

$$\sum_{j \in S(\mathrm{i})} Arco_{\mathrm{i}j} = 1 \qquad \forall \mathrm{i} \in N(\mathrm{e}) \backslash \{\mathrm{e}\} \tag{5.4}$$

  3. A cada paradero llega exactamente un vehículo asociado al establecimiento e.

$$\sum_{\mathrm{i} \in E(\mathrm{i})} Arco_{\mathrm{i}j} = 1 \qquad \forall j \in N(\mathrm{e}) \backslash \{\mathrm{e}\} \tag{5.5}$$

  4. Eliminación de subtours y control de capacidad de los vehículos.

$$\sum_{\mathrm{i} \in T} \sum_{j \in S(\mathrm{i}) \backslash T} Arco_{\mathrm{i}j} \geq r(T) \qquad \forall T \subseteq N(\mathrm{e}) \backslash \{\mathrm{e}\} \tag{5.6}$$

  5. Naturaleza de las variables.

$$Arco_{\mathrm{i}j} \in \{0,1\} \qquad \forall \mathrm{i}, j \in N(\mathrm{e}) \tag{5.7}$$

$$V_{\mathrm{e}} \geq 0 \tag{5.8}$$

- Función objetivo

$$minV * CostoV + \sum_{\mathrm{i} \in N(\mathrm{e})} \sum_{j \in N(\mathrm{e})} CostoArco_{\mathrm{i}j} * Arco_{\mathrm{i}j} \tag{5.9}$$

La función objetivo corresponde a minimizar los costos totales en el sistema de transporte, correspondientes a la inversión de los vehículos, la operación de estos y los costos de traslados, es decir, de las rutas que tomará cada bus.

El problema de ruteo tal y como se presenta, es de difícil resolución, debido principalmente al gran número de restricciones de eliminación de subtour.

Un subtour será definido como cualquier ruta que no pase por la escuela asociada al bus. Además, estas restricciones funcionan eliminando los tours que superen la capacidad del vehículo de transporte.

El número total de restricciones de este tipo corresponde a

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{i}=n} \frac{n!}{(n-\mathrm{i})!} \tag{5.10}$$

Esto quiere decir que el problema tiene del orden de $\mathcal{O}(n!)$ restricciones, sin considerar además que el valor $r(T)$ no es trivial de encontrar, para la cual debe resolverse a través de la resolución de un problema conocido como el Bin Packing Problem (BPP), el cual se revisará más adelante.

El tiempo de resolución de este problema depende del tamaño de la instancia y de la máquina que resuelva el problema de ruteo. Sin embargo, es muy probable que se acabe la memoria de ella, por lo que no se podría resolver y por ende llegar a una solución.

Es por esto que se propone un algoritmo iterativo, por generación de restricciones, el cual resuelve una parte de él en un principio, que puede ser una solución infactible del modelo original, pero que eventualmente, si el número de iteraciones es el adecuado, encontrará la solución óptima del modelo. El algoritmo propuesto se presenta más adelante.

5.2.1. Restricciones de eliminación de subtour y control de capacidad de los vehículos

Las restricciones de eliminación de subtour funcionan controlando el número de arcos que salen de un conjunto de nodos. Los conjuntos que se pueden formar se clasificarán en cuatro.

1. El conjunto de paradas de la ruta no pasa por ninguna escuela.
2. El conjunto de paradas de la ruta lleva una carga total superior a la capacidad máxima del vehículo de transporte.
3. La ruta formada por el conjunto de paradas recorre una distancia mayor a la máxima permitida.
4. La ruta formada y el conjunto de paraderos cumplen con todas las condiciones exigidas.

Las tres primeras categorías significan rutas no permitidas. Mientras que la cuarta corresponde a una ruta correcta. Además, es posible que se formen conjuntos y rutas que se puedan clasificar en varias de las tres primeras opciones.

Los conjuntos que se clasifiquen dentro de las dos primeras categorías se corrigen a través de la restricción presentada en la modelación.

La restricción funciona mediante el control de arcos que salen del conjunto. En el caso de los conjuntos que no cumplen con la restricción de capacidad, se determina el número mínimo de vehículos que son necesarios para transportar a todos los estudiantes de los paraderos. Este valor corresponde a $r(T)$, y, como ya se mencionó, corresponde a la solución del BPP.

Para las rutas que no cumplan con la condición de pasar por los establecimientos pero sí con la de capacidad, no es necesario resolver el problema interno, pues se sabe que $r(T) = 1$.

Una vez que se conoce el valor de $r(T)$, se debe incorporar la restricción que impida que este ciclo se vuelva a formar. La restricción a agregar es la siguiente:

$$\sum_{\mathrm{i} \in T} \sum_{j \in S(\mathrm{i}) \setminus T} Arco_{\mathrm{i}j} \geq r(T) \tag{5.11}$$

Donde

- T corresponde al conjunto en conflicto sin considerar el nodo correspondiente a la escuela en caso de que pertenezca.
- $Arco_{\mathrm{i}j}$ corresponde a la variable de decisión que indica 1 si se usa el arco que va del nodo i al nodo j.
- S(i) corresponde al conjunto de nodos adyacentes al nodo i, es decir, aquellos nodos que tienen un arco que sale de i y va hacia ellos.

Es importante que el conjunto en análisis se incorpore en la restricción sin incluir el nodo correspondiente al establecimiento, pues de esta manera se asegura que en alguna de las iteraciones posteriores se añada dicho punto.

En el caso de los conjuntos que se clasifiquen dentro de la tercera categoría, se debe evitar que la ruta sea una solución al problema. Para realizar esto, se incorpora una restricción de eliminación de subtour que simplemente exige que la suma de las variables $Arco_{\mathrm{i}j}$ que formaban dicha ruta sea menor al número de arcos que la forma. Esto es equivalente a desconectar el ciclo, por lo que necesariamente para cumplir con las otras restricciones del modelo se deberá formar una ruta distinta a la que está en revisión.

5.3. Algoritmo de generación de restricciones

La formulación anterior tiene el problema de contar con demasiadas restricciones, valor que aumenta de manera factorial con cada incremento de un nodo en la instancia, por lo que la resolución se vuelve bastante difícil para un computador, pues para instancias no muy grandes la memoria de esta máquina puede ser superada, y en el mejor de los casos, el tiempo de resolución sería muy grande. Por esta razón, es necesario encontrar algún método que permita encontrar la solución óptima de ella en un tiempo razonable, o al menos una aproximación.

En este caso se diseñará un algoritmo iterativo, que se resuelve muchas veces, donde en cada oportunidad se van agregando cortes o restricciones. Cada iteración se resuelve en un tiempo mucho menor al del problema completo, y si el algoritmo se resuelve la cantidad suficiente de iteraciones, finalmente se encuentra la solución óptima, es decir, la misma solución que se encontraría si se resolviera el problema entero. Si se estableciera un número máximo de iteraciones, la solución en la última iteración podría no ser factible para el problema entero, por lo que sería necesario implementar alguna heurística que modifique las rutas formadas de tal manera que cumplan con todas las restricciones.

La primera iteración consiste en la resolución del problema sin considerar las restricciones de eliminación de subtours. Al no contar con estas restricciones, la solución puede contener rutas que no pasen por las escuelas, buses que no respeten la capacidad o rutas demasiado largas, por lo que la solución al final de cada iteración debe revisarse, de donde saldrán dos posibles resultados: la solución encontrada no tiene subtours, los vehículos no sobrepasan la capacidad y las rutas tienen un largo adecuado, en cuyo caso se tendrá la solución final de ruteo para la escuela en revisión; o bien los resultados contienen subtours, los vehículos van con sobrecarga o hay rutas demasiado extensas, por lo que se tendrán que revisar las rutas formadas y agregar las restricciones para los conjuntos de paraderos correspondientes.

Para el segundo caso, se debe revisar la solución parcial del problema, que está compuesta por varios conjuntos de nodos, los que corresponden a cada una de las paradas que deba hacer un vehículo. Estas agrupaciones son las que deben revisarse y determinar cuáles son las que no cumplen con alguna de las siguientes tres condiciones:

- El número total de estudiantes de una ruta debe ser inferior a la capacidad del vehículo.
- Todo vehículo debe contener en su ruta a la escuela asignada para dicho vehículo.
- Las rutas de los vehículos no deben superar una distancia máxima permitida.

Si alguno de estos conjuntos no cumple con estas condiciones, entonces no es una ruta factible, por lo tanto debe agregarse una restricción al problema que impida que esta ruta se forme nuevamente.

Es importante notar que las condiciones se pueden revisar en tiempo lineal, pues la primera consiste en ir sumando la población escolar que asiste a la escuela en revisión de cada paradero perteneciente a la ruta. La segunda corresponde a ir verificando que el nodo correspondiente a la escuela esté en el conjunto y la tercera es solo sumar el largo de los arcos que forman la ruta.

Una vez que se identifican las rutas que no cumplen con las restricciones, se procede a resolver el BPP para cada conjunto que no cumpla con alguna de las dos primeras opciones, y con el resultado obtenido se agregan las restricciones de eliminación de subtour y capacidad al problema, terminándose la primera iteración. Por lo tanto, en cada iteración se agregan tantas restricciones como ciclos incorrectos existan en la solución actual del problema.

Para el caso de las rutas que no cumplan con la tercera condición, se debe agregar una restricción que impida que la ruta se forme nuevamente. La restricción corresponde a que la suma de arcos que forman la ruta sea menor estricto al número de nodos del conjunto, lo que se representa en la siguiente ecuación:

$$\sum_{\mathrm{i}j \in E} Arco_{\mathrm{i}j} <\mid T \mid \tag{5.12}$$

Donde:

- E: corresponde al conjunto de pares de nodos que forman los arcos de la ruta.
- $Arco_{\mathrm{i}j}$: corresponde a la variable binaria que indica 1 si se usa el arco que va del nodo i al nodo j.
- T : corresponde al conjunto de nodos que forman la ruta.

Luego de que se agregaron las restricciones, se resuelve nuevamente el problema hasta llegar al punto en que la solución obtenida cumpla con todas las restricciones, obteniéndose las rutas definitivas para la escuela que se está revisando.

La formulación de los problemas que se deben resolver en las iteraciones para cada ciclo que no cumpla con alguna de las dos primeras condiciones, se presenta a continuación.

5.3.1. Bin Packing Problem

El Bin Packing Problem indica el número mínimo de vehículos que se requieren para que un conjunto de paraderos sean satisfechos, es decir, que todos los estudiantes que van a ellos puedan subir a un vehículo que los lleve al establecimiento correspondiente.

Para resolver este problema, se tomará el conjunto de paraderos y se supondrá que se cuenta con una flota de vehículos lo suficientemente grande como para satisfacer a todos, lo que corresponde a tener al menos un vehículo para cada paradero. Luego, la solución del siguiente problema indica el número de vehículos que se requieren para dicho conjunto.

- Parámetros
  - Pob_p: Población escolar asociada a la escuela e que asiste al paradero p
  - Cap: Capacidad de los vehículos.
- Conjuntos
  - Veh: Conjunto de vehículos disponibles.
  - T: Conjunto de nodos en revisión.
- Variables de decisión
  - $Visit_{\mathrm{i}v} = \begin{cases} 1, & \text{si se utiliza el vehículo } v \text{ para visitar al nodo } i \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$
  - $V_v = \begin{cases} 1, & \text{si se utiliza el vehículo } v \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$
- Restricciones
  1. Sólo los vehículos que son utilizados pueden visitar nodos y en este caso no pueden superar la capacidad.

$$\sum_{\mathrm{i}\in T} Pob_{\mathrm{i}} * Visit_{\mathrm{i}v} \leqslant Cap * V_v \qquad \forall v \in V \tag{5.13}$$

2. Cada paradero debe ser visitado exactamente una vez.

$$\sum_{v\in Veh} Visit_{\mathrm{i}v} = 1 \qquad \forall \mathrm{i}\ inT \tag{5.14}$$

3. Naturaleza de las variables.

$$Visit_{\mathrm{i}v} \in \{0,1\} \qquad \forall \mathrm{i} \in T, v \in Veh \tag{5.15}$$

$$V_v \in \{0,1\} \qquad \forall v \in Veh \tag{5.16}$$

- Función objetivo

$$min \sum_{v\in Veh} V_v \tag{5.17}$$

  La función objetivo en este caso corresponde a minimizar el número de vehículos a utilizar y su valor corresponde a *r(T)*

Una vez que ya se resuelve este problema para el conjunto de nodos, se procede a agregar la restricción de eliminación de subtours con el valor de *r(T)* encontrado, es decir, se debe agregar al modelo la siguiente ecuación.

$$\sum_{\mathrm{i}\in T}\sum_{j\in S(\mathrm{i})\setminus T} Arco_{\mathrm{i}j} \geq r(T) \qquad \forall T \subseteq N(\mathrm{e})\setminus\{\mathrm{e}\} \tag{5.18}$$

Con estas restricciones agregadas en el modelo, la solución de la siguiente iteración deberá ser distinta a la de la última, pues las rutas que no cumplían con los requisitos ya no pueden volver a formarse.

En la siguiente solución, el algoritmo nuevamente revisará las rutas que se formaron y en caso de que existan rutas infactibles, se repite el mismo proceso.

La solución final de cada escuela estará compuesta por una mezcla de alumnos que se van caminando a ella desde sus hogares, vehículos que van exclusivamente a un paradero y vuelven a la escuela y buses que realizan múltiples paradas antes de volver al establecimiento.

5.3.2. Heurística

El número de paraderos se puede controlar, en parte, con la modelación propuesta en el capítulo 3. Al aumentar la máxima distancia caminable permitida, el número de paradas va a disminuir a cambio de un aumento en la distancia total recorrida desde los hogares a los puntos de reunión.

Sin embargo, para instancias muy grandes, no es posible disminuir el número de localidades, pues habría que aumentar mucho la máxima distancia caminable, lo que iría en contra de los objetivos de la presente tesis.

En estas instancias muy grandes, es posible que el problema de ruteo tenga dificultades en resolverse, por lo que es necesario incorporar una heurística para encontrar una solución en un tiempo razonable. Si bien esta solución no será el óptimo del problema, es una alternativa que permite obtener un resultado factible y cercano al óptimo en un tiempo prudente.

Para entender la heurística que se propone, hay que recordar que el problema se resuelve a través de un algoritmo iterativo, en el cual en cada iteración se entregan una serie de rutas que pueden o no ser factibles en el problema.

Se puede determinar un número máximo de iteraciones, por lo que si aún no se encuentra una solución que tenga todas sus rutas factibles dentro de ese rango, se establece que en la siguiente iteración que sólo una ruta no sea factible, se detenga la modelación y se resuelva el mismo problema de ruteo, pero sólo para el conjunto de nodos que forman el recorrido no permitido.

Claramente la próxima solución encontrada será peor en términos económicos, ya que estará compuesta por una mezcla entre la parte factible de la solución anterior y una nueva solución de la parte infactible.

La parte que no cumplía con las restricciones entregaba la solución más económica para dicho conjunto pero infactible. La solución ofrecida en la heurística no podrá ser más económica que la infactible, pues de ser posible, sería la opción que hubiera tomado antes la modelación.

5.4. Capacidad ociosa

En la solución encontrada se indica la ruta a seguir para cada vehículo. Dado que la escuela es el destino final para todos, el bus alcanzará su carga máxima cuando pasa por el último paradero antes del establecimiento. En la Figura 5.1 se muestra cómo es la evolución de la carga de un vehículo a medida que recorre su ruta.

Existe la posibilidad que en la solución existan vehículos que no utilicen su máxima capacidad, por lo que podría ser conveniente utilizar uno de menor capacidad que sea más económico, ya sea en la inversión de la máquina o en el costo de traslado. En caso de que la solución mejore, es decir, si bajan los costos, entonces se cambia el vehículo por la otra opción.

Con el fin de reducir los costos finales de la solución del sistema de transporte, se propone un algoritmo que revise cada una de las rutas formadas y en caso de ser factible y económicamente conveniente, se cambia el tipo de vehículo a utilizar. Para concretar esto se considerará el conjunto de rutas formadas R_{e} de los vehículos de la escuela e, y un conjunto de tipos de vehículos TV.

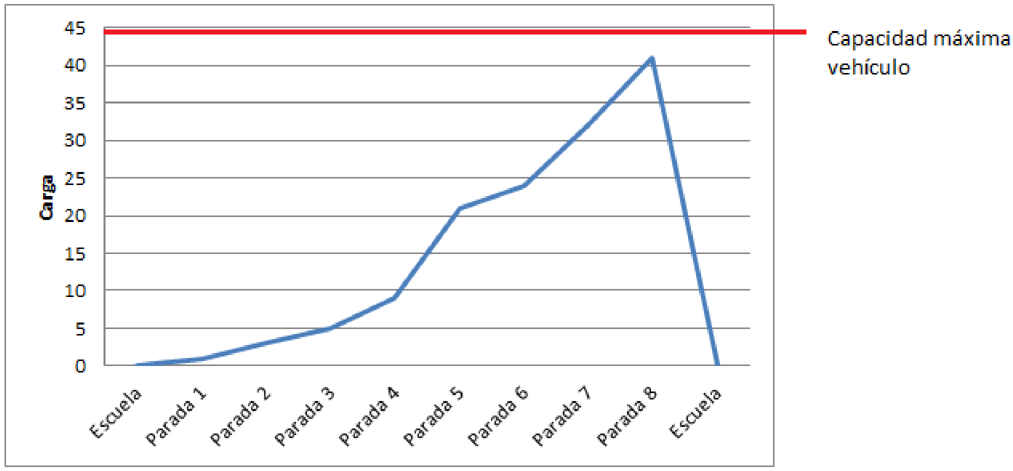

Figura 5.1: Evolución de la carga de un vehículo.

El algoritmo propuesto evalúa la situación considerando el horizonte temporal de un año, por lo tanto, en caso de cambiar vehículos, la solución ofrecida será mejorada en términos económicos para el proyecto dentro de ese plazo. Si este plazo fuera mayor, podría no ser lo más conveniente, pues la demanda va cambiando cada año, por lo que tener una holgura en la capacidad podría permitir mantener una misma solución por más tiempo.

5.5. Obtención de parámetros

5.5.1. Vehículos

Existe una gran variedad de vehículos disponibles para realizar las labores de transporte escolar. Estos deben cumplir una serie de requisitos mínimos para poder transportar a estudiantes. A continuación se detallan algunos de los requisitos más relevantes [20]:

- Cilindrada igual o superior a 1.400cc.
- Tener un letrero triangular que diga " Escolares " en el techo, de color amarillo con letras negras.
- Asientos con un ancho mínimo de 30 cm y un respaldo de mínimo 35 cm de alto.
- Presentar una tarjeta de identificación del chofer.
- Contar con extintores de incendios, entre otros instrumentos y herramientas de seguridad.
- Tener revisión técnica al día y no superar los 16 años de antigüedad.
- Estar inscrito en el Registro Nacional de Servicios de Transporte Remunerado de Escolares.

Se cotizaron distintos tipos de vehículos, con distintas capacidades. Entre estos, se seleccionaron cuatro tipos de vehículos, los que se presentan a continuación.

El primer vehículo corresponde a un bus rural Daewoo A110, con capacidad para 44 pasajeros, el cual tiene un valor de $91.053.000 [9].

El segundo vehículo corresponde a un furgón de transporte interurbano Mitsubishi Fuso Rosa, con capacidad para 25 pasajeros, el cual tiene un costo de $40.200.000 [21].

El tercer vehículo corresponde a un típico furgón escolar. Corresponde a un Maxus V80 escolar, el cual tiene capacidad para 15 niños, y tiene un valor de $ 21.790.000[13].

Por último se considera un vehículo particular, capaz de transportar a 4 pasajeros, correspondiente a un Hyundai Accent, cuyo valor corresponde a $7.890.000[16].

Es importante que este valor sea incorporado adecuadamente al modelo. Se está trabajando con un plazo anual, por lo que los valores deben anualizarse. Para ello, se debe considerar que la vida útil de furgones, automóviles, microbuses y similares es de 7 años de acuerdo a la información entregada por el SII [18]. Además, se usa la tasa de descuento usada por el MIDEPLAN equivalente a 8 %.

A continuación, se presenta una tabla en la Figura 5.2 que indica el valor anualizado de cada una de las opciones y el valor por asiento, lo que permite hacer una comparación directa.

Vehículo	Costo	Costo anual	Capacidad	Costo por asiento
Daewoo A110	$91.053.000	$17.686.603	44	$ 401.968
Mitsubishi Fuso Rosa	$40.200.000	$ 7.721.311	25	$ 308.852
Maxus V80	$21.790.000	$ 4.185.258	15	$ 279.017
Hyundai Accent	$ 7.890.000	$ 1.515.451	4	$ 378.863

Figura 5.2: Costo anual por vehículo y costo por asiento.

A partir de esta información, se puede observar que el vehículo más conveniente en cuanto a inversión por asiento es el furgón Maxus V80. Sin embargo, esta información no es concluyente, pues la inversión total va a depender del número de vehículos necesarios (lo cual no se puede determinar a partir de esto, pues no van a ir llenos necesariamente), su rendimiento y del largo de las rutas.

5.5.2. Costo de transporte

El costo anual de transporte por metro recorrido depende del rendimiento del vehículo que se esté utilizando. Para realizar este cálculo se debe multiplicar el consumo en litros por metro (en general se encuentra este valor en Litros por cada 100 km, por lo que hay que dividir por 100*1000), por el factor para transformarlo, multiplicado por el valor del combustible que utilice, por el número de viajes realizados en un año. Esto es equivalente a lo siguiente:

$$CostoTransporte((\$/m)anual) = \frac{Consumo(Lt/100km) * PrecioCombustible(\$/Lt) * Viajes}{100 * 1000(km * m)} \tag{5.19}$$

En la figura Figura 5.3 se muestran los rendimientos de los cuatro vehículos descritos anteriormente.

Vehículo	Capacidad	Rendimiento [L/100km]
Daewoo A110	44	39
Mitsubishi Fuso Rosa	25	17
Maxus V80	15	7,9
Hyundai Accent	4	4,6

Figura 5.3: Rendimiento de los vehículos.

Se puede apreciar que el rendimiento de los vehículos es peor mientras mayor sea su capacidad, puesto que se requiere más combustible para mover una máquina de más tamaño y peso.

5.5.3. Remuneraciones choferes

La estimación de las remuneraciones de los conductores de los vehículos se realiza a partir de la información del sueldo promedio de choferes de buses de transporte público. De acuerdo a un estudio del Centro de Desarrollo Urbano[17] el sueldo va desde los $400.000 a los $1.000.000 al mes, promediando $800.000. Este valor es para un trabajador a tiempo completo. En el problema a resolver, se trabaja durante dos horarios específicos, correspondientes a la hora de ingreso de los estudiantes y la hora de salida de estos, por lo que se estima que se trabaja durante el 35 % de una jornada laboral completa, lo que proporcionalmente corresponde a $280.000.

5.6. Análisis

5.6.1. Sistema de paraderos

Es interesante analizar la variación en las rutas cuando se trabaja con un sistema de paraderos complementario al sistema de transporte y cuando no.

En el caso de no existir paraderos, las rutas de los vehículos son más largas, pues deben pasar por cada hogar de los estudiantes en las rutas. Además el número de paradas realizadas se incrementa, lo que se convierte en más tiempo.

En una instancia de prueba, se analizó lo que sucedía al incorporar estas paradas, en particular en la ruta de un vehículo. En el escenario en que no se contempla, la ruta pasa por 7 nodos, recorriendo en total 13,5 km, para recoger a 18 alumnos. Al incorporar los paraderos, el recorrido contempla 5 paradas, recorriendo en total 12,1 km recogiendo a los mismos estudiantes.

Estas mejoras, si bien parecen poco relevantes, pueden en algunos casos significar la factibilidad de la ruta, por ejemplo si el máximo de una ruta es 60 km, y con los paraderos se recorre 59 km, al eliminar esta parte de la modelación, puede que la ruta se transforme en una de 63 km y ya no estar permitida.

Por otro lado, el número de detenciones corresponde a tiempo en que el vehículo está detenido, y reducir este tiempo implica una mejora en la experiencia de viaje del estudiante, al reducir el tiempo total dentro del bus, permitiendo además mejorar el rendimiento promedio del vehículo.

Por último, es importante tener en cuenta que al eliminar esta agregación de la demanda, se están eliminando algunos recorridos que podrían llegar a mejorar la solución. Sin embargo, en promedio, el agregarlo tiene mayores beneficios económicos para el problema, además de reducir la complejidad de este.

5.6.2. Flota de vehículos

La flota de vehículos a utilizar es algo que se debe seleccionar cuidadosamente, pues de ellos dependen varios de los parámetros con que cuenta el modelo, lo cual afecta fuertemente en la función objetivo y en la solución del problema. Esto se debe a que a partir de la flota se estimarán los costos del problema, pues cada vehículo tiene un valor y un rendimiento distinto. Además, la capacidad puede variar, por lo tanto las rutas que se generen pueden ser muy distintas, aumentando o disminuyendo su extensión.

Desde esta perspectiva existe un *trade off* entre la capacidad del medio de transporte y el rendimiento de este, lo que se traduce en rutas más eficientes al utilizar solo un vehículo, para ir a buscar una mayor cantidad de estudiantes, versus el gasto extra que tiene movilizar una máquina más grande o con menor rendimiento, además de la diferencia de inversión en la máquina que se utilizará.

Al comparar la modelación con vehículos con capacidad de 45, 28, 15 y 4 pasajeros, el número de vehículos a utilizar se incrementa a medida que baja la carga máxima de cada uno. Sin embargo, para cargas demasiado grandes, la capacidad de los vehículos ya no se puede aprovechar al máximo, restringiéndose por el hecho de que existe un largo máximo para las rutas o por la ausencia de pasajeros cerca.

Es por esto, que finalmente la elección de la flota adecuada va a depender de cada instancia, siendo factores relevantes en esta decisión el número de paradas, la población en cada una de ellas y la distribución con respecto a las escuelas en funcionamiento.

Capítulo 6

Resultados

A continuación se presentan los resultados de la modelación realizada sobre la zona rural de la III Región de Atacama de Chile.

Se selecciona esta región por ser una de las regiones extremas del país y por contar con una distribución geográfica que permite apreciar los efectos de la existencia de un sistema de transporte complementario a la planificación en la localización de los establecimientos educacionales.

6.1. III Región de Atacama

La Tercera Región de Atacama, la que se muestra en la Figura 6.1, cuenta con una superficie de 75.176 Km^2, los que se dividen en 3 provincias, la provincia de Chañaral, compuesta por 2 comunas; la provincia de Copiapó, compuesta por 3 comunas y la provincia de Huasco, compuesta por 4 comunas.

La región, de acuerdo al compendio realizado por el instituto nacional de estadísticas en 2013 [1], tiene una población total de 286.642 habitantes, de la cual 27.071 vive en zonas rurales, es decir, el 9,4 %. De este valor, 2671 corresponden a estudiantes de educación preescolar, primaria o secundaria.

6.2. Resultados Modelación

6.2.1. Modelación situación actual

Para recibir a los estudiantes en zonas rurales, la región cuenta con 44 establecimientos de los cuales el 94 % corresponden a establecimientos municipales, el 4 % son particulares subvencionados y el 2 % son particulares pagados.

Figura 6.1: Tercera Región de Atacama Chile.

Los establecimientos funcionan al 67 % de su capacidad, por lo que tienen capacidad ociosa de 33 %. En promedio cada escuela recibe 61 alumnos, sin embargo, la distribución es bastante desigual, donde el establecimiento con más matrículas tiene 353 estudiantes, mientras que el que menos recibe tiene 2.

En total existen 155 profesores para atender a los estudiantes, por lo que en promedio cada uno trabaja con 17,2 estudiantes.

Los gastos que se utilizan para mantener en funcionamiento estos establecimientos durante 1 año son de $1.711 millones, de los cuales $421 millones es para los directores y $1.290 millones para los profesores.

Dado el escenario actual de la región, los estudiantes recorren 22,3 km de distancia en promedio, donde el estudiante que más viaja para llegar desde su hogar a la escuela a la que asiste debe recorrer 158,4 km.

El costo estimado para que los estudiantes lleguen de su hogar a los establecimientos, de acuerdo a los parámetros propuestos anteriormente, corresponden a $477 millones.

Con esto se concluye que la inversión actual es de $2.188 millones anuales, lo que contempla el funcionamiento de los establecimientos existentes y el transporte de los estudiantes.

6.2.2. Situación actual optimizada

Dada la localización actual de los establecimientos educacionales y considerando las capacidades del momento de cada establecimiento, se puede redistribuir la asignación de los estudiantes a cada una de ellas, disminuyendo los costos de transporte.

Con una configuración en la cual cada estudiante asiste a la escuela más cercana con capacidad (tal como se hizo para el resto de los modelos), la distancia promedia recorrida por ellos disminuye a 8,1 km, lo que tiene como consecuencias una reducción en los costos de transporte a $174 millones anuales, por lo que se debe realizar una inversión total anual de $1.885 millones.

6.2.3. Localización óptima sin sistema de transporte

Antes de incorporar el sistema de transporte, se realiza una modelación en la cual se pretende determinar la distribución óptima en el caso en que el transporte siga realizándose de manera particular y no planificado de manera colectiva.

En este caso, no hay paraderos a instalarse ni una flota de vehículos dispuesta por el planificador. Además, se restringe la distancia que puede haber entre un estudiante y la escuela a la que asiste a un máximo de 50km.

Como resultado se determina que de las 44 escuelas existentes deben cerrarse 15, mientras que se incorporan 3 establecimientos nuevos, por lo tanto, funcionan un total de 31 escuelas, por lo que hay que realizar una inversión en estos nuevos colegios, sin embargo hay una reducción en los costos operacionales del total de ellos.

Esta nueva distribución de los establecimientos, permite que disminuya la capacidad ociosa de los establecimientos a tan solo el 16,5 %. En promedio los establecimientos reciben 83 estudiantes, sin embargo, al separar los establecimientos nuevos de los existentes, los antiguos reciben en promedio 92 alumnos, mientras que los recién instalados reciben 2 niños en promedio.

Esto parece ocurrir en las zonas de menor densidad poblacional y en la práctica no tiene mucho sentido, por lo que debiera permitirse una relajación de la restricción de distancia en estos casos y así evitar la apertura de escuelas, aprovechando la infraestructura y docentes de las ya existentes.

Por otro lado, al parecer existe un exceso de escuelas en las zonas con mayor densidad, por lo que al determinar en qué lugares es conveniente que funcionen se puede disminuir considerablemente el número de ellas, satisfaciendo de igual manera las necesidades de todos los niños, sin perjudicar (colectivamente) a la población.

Con la distribución ofrecida por la solución, los estudiantes deben recorrer en promedio 6,5 km, mientras la distancia máxima que se debe viajar es de 49,8 km.

Los costos para infraestructura nueva corresponden a $31 millones anuales, los de operación de los establecimientos es de $1.255 millones, mientras que los costos de transporte corresponden a $138 millones, por lo que se llega a una inversión total de $1.424 millones anuales.

Con estos resultados, se establece un ahorro anual de $764 millones con respecto a la situación actual, y de $461 millones con respecto a la situación actual con reasignación de los estudiantes.

Es importante señalar que los costos de transporte están dados por la distancia recorrida, sin embargo, no se establece una inversión en vehículo particular, como es el caso de la modelación que incluye un sistema de transporte.

6.2.4. Localización óptima con sistema de transporte incluído

A continuación se presentan los resultados de localización óptima de las escuelas rurales al incluir el sistema de transporte.

Al incorporar a la modelación el uso de vehículos se establecerá una distancia máxima entre estudiante y escuela de 80km, permitiendo una mejor distribución de las escuelas y rutas.

En un comienzo se resolverá el problema para todos los vehículos y a partir de estos resultados se determinará el tipo de vehículo adecuada para la solución final.

Posteriormente, se resuelve el problema y se aplica el ajuste de la flota de acuerdo a las características de cada una de las rutas.

Selección de flota

Como se planteó anteriormente, existe una variedad de vehículos como opciones para la solución al sistema de transporte. La modelación del problema se realiza a través de flota homogénea con una mejora posterior de la solución, por lo tanto debe definirse antes qué medio de transporte se utilizará.

Con el uso de buses, se realiza una inversión por unidad mayor a cambio de más capacidad y menos rutas al considerar que se podrán realizar trayectos más largos, pasando por más paradas. Por otro lado, al ser una máquina de mayor tamaño, el consumo de gasolina aumenta disminuyendo su rendimiento, por lo que los costos asociados a los caminos se incrementan.

El uso de furgones supone un término medio entre el rendimiento de los vehículos y la capacidad de estos, siendo el costo unitario de estos considerablemente menor al de los buses.

Por último, el uso de automóviles implica una inversión menor, sin embargo con una capacidad muy limitada, lo que tiene como consecuencia el uso de muchos vehículos para transportar a todos los estudiantes.

Se realizó la resolución para cada tipo de vehículo de manera individual. Dado que el valor de α, factor que pondera la parte de transporte del problema de localización de las escuelas, depende del resultado del ruteo de vehículos, la selección de escuelas que deben abrirse varía en cada caso.

Para el caso de utilizar buses Daewoo A110 con capacidad de 44 pasajeros, la solución óptima se daba al funcionar 43 establecimientos educacionales, utilizando un total de 59 vehículos. La inversión anual necesaria para financiar esto es de aproximadamente \$2.847 millones.

En la solución al usar los minibuses Mitsubishi Fuso Rosa con capacidad de 25 pasajeros funcionan 37 escuelas, y para el transporte se requieren 77 vehículos. La inversión anual es aproximadamente \$2.291 millones.

Al resolver el problema con la flota de furgones Maxus V80 con capacidad para 15 personas se determina que el óptimo se da cuando funcionan 37 colegios, mientras que para el transporte se utilizan 127 vehículos. Para esta solución se requiere una inversión anual de \$2.355 millones.

Por último, en el caso de usarse el tipo de vehículo más pequeño correspondiente al Hyundai Accent para 4 pasajeros, la solución óptima es que funcionen 47 establecimientos, mientras que para que los estudiantes lleguen a dichos lugares se requiere un total de 271 vehículos. En dicho caso, la inversión anual es de aproximadamente \$2.940 millones.

En la tabla de la Figura6.2 se resume de mejor manera los costos de cada escenario.

Modelo	Daewoo A110	Mitsubishi Fuso Rosa	Maxus V80	Hyundai Accent
Establecimientos	43	37	37	47
Vehículos	59	77	127	271
Inversion Infraestructura	\$ 147.718.888	\$ 86.542.949	\$ 86.542.949	\$ 86.542.949
Inversión Operaciones	\$1.393.460.370	\$ 1.327.747.780	\$1.327.747.780	\$ 1.327.747.780
Inversión Transporte	\$1.305.821.875	\$ 877.492.621	\$ 941.550.860	\$ 1.526.222.442
Inversión Total	\$2.847.001.133	\$ 2.291.783.350	\$2.355.841.589	\$ 2.940.513.171

Figura 6.2: Tabla resumen de solución de acuerdo a flota.

Como se puede apreciar, los costos operacionales de los establecimientos son los que generan el mayor costo, explicando entre el 49 % y el 56 % de la inversión anual.

Por otro lado, entre el 40 % y el 46 % es explicado por el transporte de los estudiantes, siendo el segundo punto de mayor relevancia. Por último, la inversión en infraestructura representa tan solo entre el 4 % y el 7 %, convirtiéndose en el punto que menos afecta a la solución.

Como se puede apreciar en los resultados, la mejor opción corresponde al uso de vehículos Mitsubishi Fuso Rosa, seguido por el uso de Maxus V80 con un costo 2 % superior. Los costos de las soluciones ofrecidas con los vehículos Daewoo y Hyundai son bastante superiores, siendo de 21 % y 23 % superiores respectivamente.

En el caso de que esta fuera la solución final, el óptimo se daría con el uso de los mini buses con capacidad para 25 personas, sin embargo, gracias al ajuste posterior es posible mejorar la solución.

Al realizar este proceso sobre las dos mejores soluciones encontradas, se obtiene como resultado una mejora importante en la instancia con los mini buses Mitsubishi, no así en el caso de los furgones. Esto se debe principalmente a que en el primero existe un mayor espacio de mejora debido al mayor número de opciones de reducción de tamaño.

Con este ajuste, se permite reducir los costos totales de transporte de $877 millones a $743 millones, es decir, se reduce al 77 %. Posterior a esto, el costo de transporte pasa de representar del 41 % de los costos al 32 % de estos, mientras que las operaciones de los establecimientos pasan de representar el 55 % al 62 %.

Paraderos

El primer problema resuelto determina el número de paraderos que se instalan y la ubicación de cada uno de ellos, con el fin de minimizar la distancia recorrida, preocupándose de que cada estudiante no recorra más de 500 metros y en promedio no caminen más de 150 metros.

En un comienzo se cuenta con 273 localizaciones con población escolar. En promedio cada localización tiene 9,78 estudiantes.

El número de paradas se reduce a 227, correspondiente al 83,1 % del valor inicial. Con esta nueva distribución, los estudiantes recorren en promedio 27,4 metros y un máximo de 497 metros. Cada paradero instalado tiene mayor o igual número de personas que las que tenía antes, pues reciben alumnos de las localidades más cercanas.

Gracias a esta reducción, el número de paradas promedio por escuela a considerar en las rutas disminuye de 7,3 a 6,1. De esta forma, en un problema de ruteo que tiene que considerar 7 posibles paradas, más la escuela, pasa de tener 40.320 posibles rutas, a 5.040 si es que tiene un nodo menos, lo que equivale a una reducción de 87,5 %. Esta disminución es mucho más notoria al aumentar el número de nodos.

Establecimientos educacionales

La mejor distribución de las escuelas de acuerdo a la modelación realizada indica un cambio importante con respecto a la situación actual. Inicialmente existen 44 establecimientos, de los cuales deben cerrarse 15 y abrirse 8 nuevos colegios en lugares distintos, por lo que en la situación optimizada funcionan 37 colegios.

En esta nueva situación, los establecimientos funcionan al 70,2 % de su capacidad, recibiendo en promedio 72 alumnos cada uno. El colegio con más estudiantes recibe 201 niños, mientras que el mínimo de estudiantes que se asignan a un colegio es 6.

Al separarlos en establecimientos nuevos y existentes, las instalaciones que se deben agregar funcionan al 86,7 % de su capacidad, mientras que las que ya estaban funcionan al 65,1 % de su capacidad. Esto muestra una gran diferencia con respecto a la situación optimizada sin transporte en la que las escuelas agregadas funcionaban al 2 % de su capacidad.

Al incorporar el sistema de transporte, se permite asignar a un alumno a un establecimiento más lejano, por lo que la restricción de máxima distancia se relaja a 80km. Como resultado se obtiene que en promedio los estudiantes están a 2,7 km de los colegios a los que deben asistir, mientras que el peor caso se da para un alumno que está a 60,4km de su escuela. Estos valores, sin embargo, no se refieren a la distancia a recorrer, pues los viajes pueden realizarse a través de vehículos con múltiples paradas, aumentando dicho valor.

Por el lado operacional, para el correcto funcionamiento de las escuelas se requiere de un total de 117 profesores y 37 directores. En promedio cada establecimiento cuenta con aproximadamente 3 profesores y cada uno de ellos enseña como media a 22 alumnos.

En términos económicos, se realiza una inversión total anual de $87 millones en infraestructura, mientras que se debe invertir anualmente $1.327 millones en directores y profesores. Con una inversión anual total de $1.414 millones en el funcionamiento de las escuelas, la inversión en infraestructura representa un porcentaje poco relevante dentro de esta inversión, lo que se explica en parte por el uso de escuelas ya existentes.

Transporte

Como se explicó anteriormente, la solución ofrecida para el sistema de transporte consta de una etapa inicial en la que se trabaja con flota homogénea en la modelación, para luego mejorarla a partir del ajuste de cada ruta de acuerdo al tamaño adecuado de los vehículos requeridos.

Inicialmente se define una flota total de 77 vehículos Mitsubishi Fuso Rosa, que en total transportan a 1340 estudiantes, ocupando el 69,6 % de la capacidad máxima.

Al aplicar el ajuste del vehículo indicado para cada ruta se define una flota compuesta por 49 mini buses Mitsubishi Fuso Rosa, 21 furgones Maxus V80 y 7 automóviles Hyundai Accent. Este cambio permite un uso más adecuado de los medios de transporte, llegando a ocupar el 85,5 % de la capacidad máxima.

Inicialmente se debía realizar una inversión de $595 millones en los vehículos, mientras que con el ajuste este monto disminuyó a $477 millones, lo que representa el 80 % del gasto inicial.

Por el lado de las rutas, estas tienen en promedio un largo de 39 km. Al aplicar el ajuste de flota las rutas no fueron modificadas. Sin embargo, el costo de ellas se vio disminuido, debido al uso de vehículos con mejor rendimiento. Inicialmente se debía realizar una inversión anual de \$52 millones, monto que decreció a \$36 millones, lo que representa el 77 % del gasto anual en rutas.

En términos generales, la mejora debido a la reasignación de vehículos reduce el costo total anual en \$134 millones, lo que representa el 15 % de los costos de transporte y 6 % de los costos totales del proyecto.

En total, el gasto en el sistema de transporte que se debe realizar al año es de un total de \$2.157 millones. En la Figura 6.3 se aprecia que la mayor parte de la inversión está destinada a la flota de los vehículos, seguida por las remuneraciones de los choferes, mientras que la inversión en rutas representa una parte muy pequeña de los fondos a utilizarse.

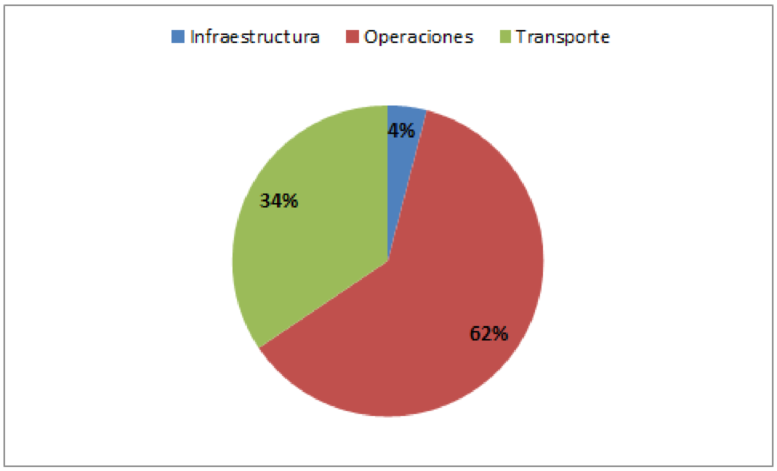

Figura 6.3: Distribución de la inversión en la solución final.

Resumen solución

En resumen, la solución final contempla 37 escuelas, de las cuales 29 son colegios que ya existían y 8 son establecimientos nuevos. Para el correcto funcionamiento de estos, se debe realizar una inversión anual de \$87 millones para la infraestructura nueva y de \$ 1.327 millones para que puedan operar durante el año.

Por el lado del transporte, se deben instalar 227 paraderos para los estudiantes y se requiere el uso de 77 vehículos de distintos tamaños, los cuales en promedio recorren 39 km.

Para ofrecer este servicio se requiere una inversión anual de \$477 millones en la flota y \$36 millones en los viajes realizados, lo cual beneficia al 50,2 % de la población escolar rural, mientras que los demás estudiantes tienen una escuela a una distancia menor a 500 m, por lo que pueden caminar a ella.

En total, para el sistema de educación y el de transporte, se requiere una inversión de \$2.157 millones anuales.

6.3. Comparación escenarios

A partir de los resultados de los distintos escenarios en los que se trabaja, se pueden analizar y comparar algunos puntos importantes como la distancia que deben recorrer los estudiantes, la capacidad ociosa de los establecimientos, la distribución de estos y los costos anuales que deben ser considerados para su correcto funcionamiento, la inversión en infraestructura nueva y por último en transporte.

Respecto a la distancia que deben recorrer los estudiantes, en los tres primeros casos corresponde al camino más corto que existe entre un alumno y la escuela a la que asiste. Sin embargo, en el último escenario, la distancia que debe recorrer un alumno corresponde al camino que debe recorrer el vehículo que lo pasa a buscar al paradero, la cual en el mejor de los casos es el camino más corto entre el paradero y la escuela, pero en general no es así, pues debe ir a buscar más estudiantes. Es por esto, que para este caso se tomará en consideración el largo de la ruta de un vehículo en vez de la distancia que debe recorrer cada estudiante.

Es importante considerar también para este último caso, que el sistema de transporte a través de los vehículos beneficia al 50,2 % de los estudiantes, mientras que el resto se dirige a su establecimiento caminando, recorriendo para ello una distancia menor a 500 m.

En la Figura 6.4 se aprecia que en la situación actual los estudiantes deben viajar en promedio una gran distancia en comparación con los otros escenarios. En particular, con la misma distribución de escuelas, pero con una reasignación de los estudiantes la distancia promedio se ve disminuida al 36,3 % del valor inicial. Si además se realiza una planificación con los establecimientos esta distancia se ve reducida al 29,1 % de la situación actual. Por último, al considerar el sistema de transporte dentro de la localización, la distancia se ve reducida a 2,7 km en promedio, lo que corresponde al 13,4 % de la distancia recorrida en la actualidad; sin embargo, el valor real recorrido por los vehículos corresponde a 39 km, lo cual es el 174 % de la situación actual, es decir, casi el doble, pero a su vez, los estudiantes pasan en promedio mucho menos en cada bus, pues no realizan el circuito completo.

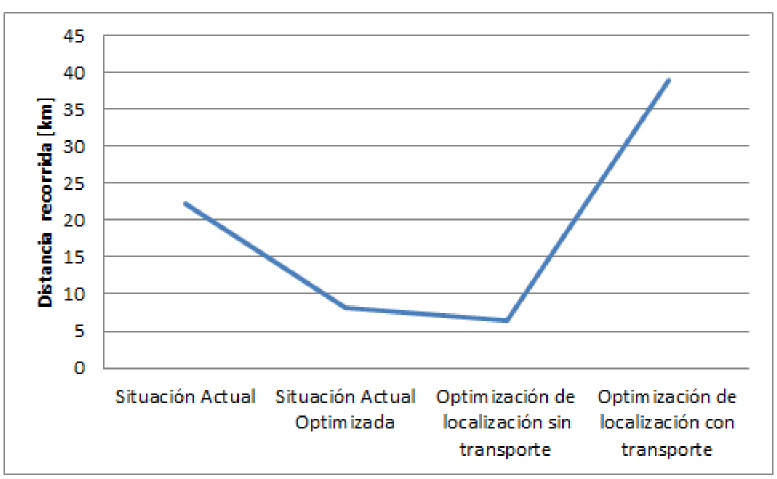

Figura 6.4: Distancia recorrida por escenario.

Con respecto al número de establecimientos, tanto en la modelación con y sin transporte se ve reducido el número de escuelas en funcionamiento. En la situación actual existen 44 colegios, mientras que en la localización óptima sin considerar el sistema de transporte son 31, es decir, se presenta una reducción de casi el 30 %. Por otro lado, cuando se considera la movilización en la modelación, el número de establecimientos es de 37, por lo que la reducción es de 16 %. Esto tiene efecto directo sobre los costos operacionales y de infraestructura, tal como se aprecia en la Figura 6.5

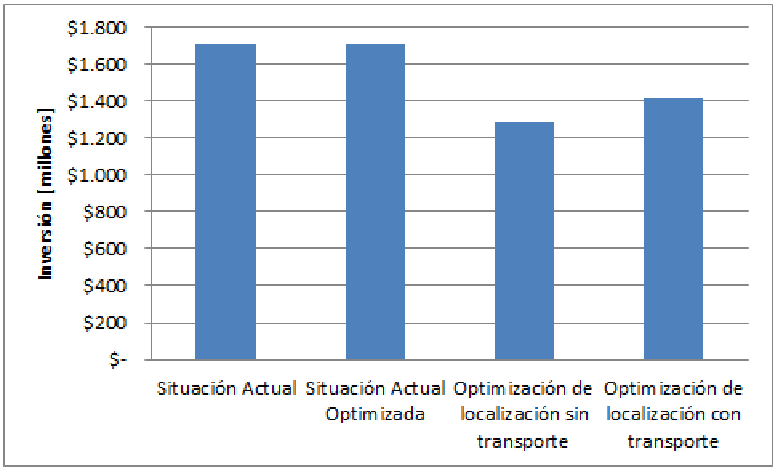

Figura 6.5: Inversión total en establecimientos por escenario.

Este aumento se debe a que los costos de transporte crecen al disminuir el número de establecimientos, debido principalmente al incremento de vehículos necesarios para transportar a todos los alumnos.

En la Figura 6.6 se puede apreciar la capacidad ociosa en cada uno de los escenarios en azul, mientras que en rojo se aprecia la ocupación de las escuelas. En ambos casos en que se genera un cambio en la localización de los establecimientos se aprecia una disminución en la capacidad ociosa. Sin embargo, el cambio más notable se da cuando no se considera el sistema de transporte, donde se usa la menor cantidad de colegios y se ocupa de mejor manera estos. Cuando sí se considera, el número de establecimientos se reduce 16 %, pero la capacidad ociosa solo disminuye 3 %.

En términos económicos, la inversión en infraestructura nueva es de $31 millones en el caso de no considerar el sistema de transporte, los cuales van destinados a 3 establecimientos. En el caso de considerar un medio de movilización colectivo, se debe realizar una inversión de $87 millones, es decir casi el triple, los cuales van destinados a 8 establecimientos nuevos.

Si bien existe una gran diferencia al comparar estas dos situaciones, en términos de la solución total, estos valores representan tan solo entre el 2 % y 4 % de la inversión total, por lo que no es tan relevante en el sentido económico.

Por otro lado, la inversión que se requiere para hacer funcionar estas escuelas durante el año escolar si tiene relevancia. En la situación actual se requieren $1.711 millones, los cuales son reducidos de manera importante en las situaciones optimizadas. En el caso en que no se consideran los vehículos, se requieren $1.255 millones, lo que equivale a 73 % del valor requerido actualmente. Cuando sí se considera transporte, la inversión es de $1.327 millones,

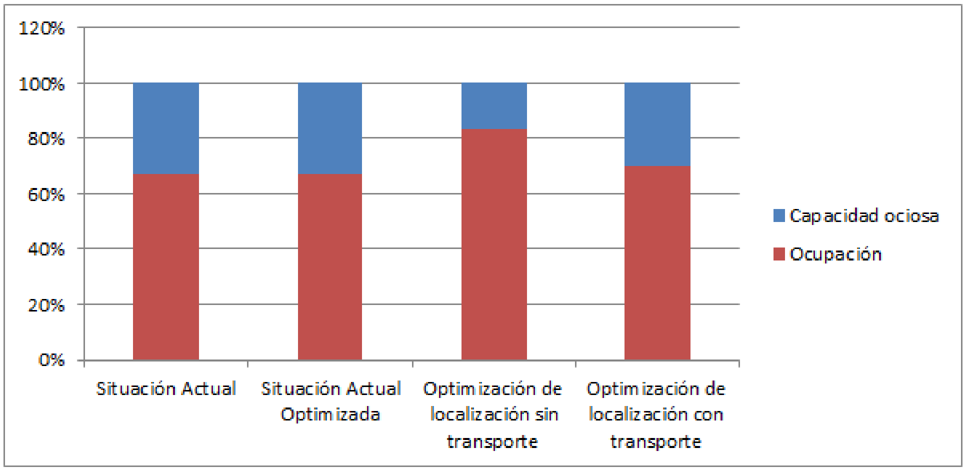

Figura 6.6: Capacidad ociosa de escuelas según escenario.

es decir, 77 % de la situación inicial.

En ambos casos se trabajan con menos escuelas, lo que reduce mucho los costos, debido a la reducción del número de directores y de profesores requeridos en cada caso. Si bien cuando se realiza la optimización con y sin transporte el número de establecimientos varía, los costos operacionales no incrementan equitativamente en ambos casos, debido a que el número de docentes es levemente mayor al aumentar el número de escuelas. Lo que explica la diferencia en los costos es el número de directores, ya que al considerar transporte se requieren 6 escuelas extra, lo que corresponde a 6 directores más.

Para los tres primeros escenarios se considera un desplazamiento de manera particular, mientras que en el último se incluye un medio de transporte colectivo, el cual requiere de vehículos y choferes. Esto se ve reflejado en la inversión que se requiere en este tema, pues el costo es considerablemente menor cuando esto no está presente.

En la Figura 6.7 se detalla la inversión realizada en transporte. La situación actual implica un costo de $477 millones. Al mantener esta distribución de los establecimientos, pero reasignando a los estudiantes a las escuelas más cercanas, se reduce a $174 millones, es decir, tan solo el 36 %. Si además se redistribuyen los establecimientos, la inversión en transporte se reduce a $138 millones, lo que equivale al 29 % del valor actual. Por último, al incluir el transporte, si bien la distancia a los establecimientos es reducida considerablemente, debido a los vehículos necesarios y las remuneraciones a personal que los conduzca el costo se incrementa a $743 millones.

Al sumar todos estos costos se obtiene la inversión total en cada caso, lo cual se resume en la Figura 6.8. La inversión total actual que se debe realizar para un año escolar es de $2.188 millones. En todos los escenarios en que se optimiza algo se obtienen mejoras. En el caso en que solo se realiza una reasignación de los estudiantes el costo se reduce a $1.885 millones, con una reducción de 14 % de los costos.

En el caso en que se realiza la optimización de la localización de los establecimientos sin considerar el sistema de transporte, los costos se reducen 35 %, llegando a $1.424 millones.

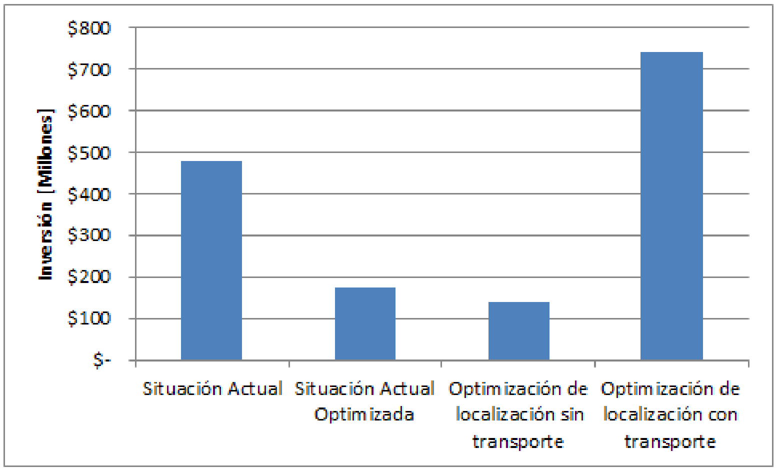

Figura 6.7: Inversión en transporte por escenario.

Esta es la situación en que más se reducen los costos.

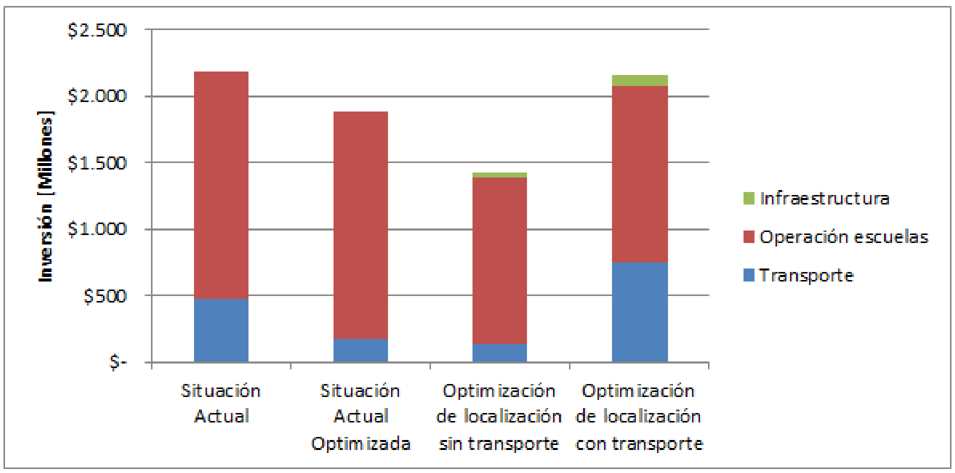

Figura 6.8: Resumen inversión total según escenario.

Por último, al considerar el medio de transporte colectivo, los costos se reducen 2 %, llegando a $2.157 millones. Esta situación no es tan atractiva económicamente como la situación anterior, sin embargo, permite disminuir las diferencias en el acceso a la educación debido a las barreras geográficas y asegura que cada estudiante tenga una forma equitativa de llegar a sus colegios.

A modo de resumen, se presenta la tabla de la Figura 6.9, la cual entrega los datos más relevantes a la hora de comparar los distintos escenarios, referentes a la distribución de las escuelas y a términos económicos.

Escenario	Situación Actual	Situación Actual Optimizada	Optimización de localización sin transporte	Optimización de localización con transporte
Distancia promedio recorrida [km]	22,3	8,1	6,5	2,7 (39 rutas)
Número de establecimientos	44	44	31	37
Capacidad ociosa	33%	33%	16,50%	29,80%
Inversión Infraestructura [millones]	$ -	$ -	$ 31	$ 87
Inversión Operaciones [millones]	$ 1.711	$ 1.711	$ 1.255	$ 1.327
Inversión Transporte [millones]	$ 477	$ 174	$ 138	$ 743
Inversión Total [millones]	$ 2.188	$ 1.885	$ 1.424	$ 2.157

Figura 6.9: Resumen solución de los distintos escenarios.

Capítulo 7

Conclusiones

La modelación matemática para simular situaciones reales es una práctica que está siendo muy útil para evaluar distintas situaciones y proponer mejoras que permitan beneficios para las personas.

A pesar de que muchas veces la modelación no permite reflejar la realidad a cabalidad, sí permite tener una estimación de lo que sucede y en base a eso proponer proyectos que permitan una mejor administración de lo que se quiere.

En esta tesis se modela la logística que existe para una parte de la educación de las zonas rurales de regiones extremas del país. Específicamente, se hace una revisión de la tercera región, y en particular se revisa la distribución geográfica de los establecimientos y la asistencia de los estudiantes a ellos, con el fin de optimizar la localización de las escuelas, su tamaño y la forma en que los estudiantes llegan a ellas.

La modelación realizada contempla cuatro escenarios distintos. En el primero se simula la situación actual, con la cual se estima el costo de operación de los establecimientos y el de transporte de los estudiantes de su hogar a la escuela, además de las distancias que deben recorrer para llegar a ellas, para luego poder evaluar los otros escenarios en base a esto.

El segundo escenario corresponde a la misma distribución de los colegios que en la actualidad, pero con una redistribución de los estudiantes con el fin de minimizar los costos de transporte.

Los otros dos casos corresponden a la optimización de la localización de las escuelas y la asignación de los alumnos, con y sin un sistema de transporte integrado, con el fin de minimizar tanto costos operacionales, de infraestructura y movilización.

Al no considerar el sistema de transporte, el resultado se obtiene a través de la modelación de un problema de localización óptima, el cual busca encontrar la ubicación de los colegios y la asignación de los estudiantes a ellos.

Al considerar la movilización de manera colectiva, la modelación se realiza en tres etapas, donde en la primera se busca diseñar un sistema de paraderos, en la segunda se busca encontrar la ubicación óptima de las escuelas y en la última se quiere definir el número adecuado de vehículos y las rutas que deben seguir.

Para la modelación del sistema de paraderos se resolvió un problema de cobertura, el cual indica cuántos puntos de reunión deben instalarse, dónde deben ser ubicados y qué alumnos deben ir a cada uno, con tal de que ninguno de ellos camine más de 500 metros, ni en promedio más de 150 metros.

La solución de este problema, permite facilitar la resolución de los dos siguientes en términos computacionales, y tiene beneficios sobre el sistema de transporte, al reducir las distancias de las rutas que deben seguir los buses y el tiempo que deben estar detenidos los vehículos.

Para modelar la optimización de la ubicación de los establecimientos, se resolvió un problema de localización y cobertura, como el anterior, pero que tiene una gran cantidad de restricciones adicionales, que tienen relación con costos de infraestructura, el presupuesto del planificador, la capacidad y sobrecupos de los establecimientos, restricción de apertura o clausura de las escuelas, además de las distancias recorridas y los costos asociados a ellas, el cual puede cambiar, dependiendo de quién se encargará de pagarlo y cómo se efectuarán los traslados.

Por último, el transporte de los estudiantes se modeló a través de un problema de ruteo de múltiples vehículos con capacidad homogénea. Este problema, sin embargo, es muy difícil de resolver computacionalmente, por lo que se recurrió a un algoritmo de generación de restricciones, en el cual no se considera la eliminación de subtours ni capacidad de los vehículos, por lo que en cada iteración se agregan las restricciones necesarias para evitar que existan rutas que no pasen por escuelas o que tengan un exceso de carga. Gracias a este método de resolución, la solución encontrada se obtiene en tiempos razonables.

Por otro lado, se agregó un algoritmo para mejorar la capacidad ociosa final de los vehículos, a través de la selección de una flota heterogénea, luego de que se resuelve el problema, la que consiste en calcular la ocupación máxima del vehículo y verificar si puede utilizarse otro más económico de entre una lista de opciones factibles, considerando inversión y costo de transporte de la ruta.

La inversión en transporte se redujo 15 % gracias a este algoritmo, debido principalmente a un gran ahorro al comprar vehículos más económicos, y en menor medida debido al mejor rendimiento de estos, lo que disminuía el costo de las rutas.

La modelación de la situación actual comparada con la optimización refleja que existen ineficiencias en la distribución que existe de los establecimientos. Con la distribución actual pero realizando una redistribución de los alumnos, se logra una disminución del desplazamiento promedio de los estudiantes de 22,3 km a 8,1 km. Más aún, realizando una planificación en la distribución de las escuelas, se logra reducir la distancia recorrida a 6,5 km, con incluso menos establecimientos.

En caso de considerar el sistema de transporte, la distancia que separa a los estudiantes de sus escuelas es de 2,7 km, sin embargo, la distancia de las rutas es en promedio de 39 km, debido a que deben realizar el desplazamiento a través de una recorrido que pasa por más de un alumno a la vez.

Otro beneficio obtenido por la optimización de la localización de los establecimientos es la reducción en la capacidad ociosa de las escuelas, la que se ve en mayor medida en el caso en que no se considera transporte, en la cual llega a 16,5 %, debido al menor número de escuelas funcionando. En el caso en que se incluye, se reduce a 29,8 %.

La planificación que no incluye el sistema de transporte significa una reducción de los costos de 35 %, y es la opción más atractiva si solo se considera este motivo. Sin embargo, los objetivos de esta tesis además contemplan desarrollar una solución que permita reducir la brecha existente actualmente en el acceso a la educación por motivos geográficos.

Al incorporar el sistema de transporte, se asegura que todos los estudiantes podrán asistir a sus escuelas independiente de su situación personal y localización geográfica. En este caso, también existe una reducción de los costos, aunque no tan relevante, ya que es cercana al 2 %, llegando a $2.157 millones.

Esta solución, a diferencia de los otros escenarios, incluye una gran inversión en vehículos, por lo que los costos de transporte se ven incrementados en más de 5 veces con respecto a la situación en que no se considera.

La modelación realizada es flexible en el sentido de que muchos de los parámetros pueden ser cambiados considerando las necesidades o restricciones del planificador. Ya sea, por ejemplo, en cuanto a la distancia caminable admisible de los estudiantes, las restricciones sobre la clausura de establecimientos existentes por su uso en otras actividades distintas de la educación, entre otras cosas.

Es importante destacar que la optimización realizada en etapas puede no ser la mejor solución al problema, ya que puede no corresponder al óptimo global, sino que un óptimo local. Si bien se realizó una estimación de los costos de transporte para incorporarlo al modelo de localización de las escuelas, esta se realizó a través de una aproximación gruesa, por lo que podría no representar correctamente la mejor distribución de los establecimientos, en términos globales.

A pesar de esto, con el método de resolución propuesto, se encuentra una cota superior de la solución óptima. Dado que ya se encuentra una mejora económica, a parte de los beneficios extra de la solución, si se realiza una modelación en una etapa, se encontrará un resultado en el que en el peor caso se obtendrán los mismos costos que los presentados.

Por último, la solución corresponde a una propuesta y no una imposición. La infraestructura utilizada para entregar educación a los estudiantes muchas veces contempla también otros fines, por lo que cerrarlas puede tener impacto en distintas situaciones para la comunidad. Además, por el lado de transporte se incrementa el número de personas trabajando, sin embargo, por el lado operacional de las escuelas, el número de personas necesarias es reducido, por lo que es un tema sensible de tratar.

Se concluye que la modelación realizada permite reducir la inversión anual que se debe realizar para ofrecer educación a la población de las zonas rurales de la Tercera Región de Atacama, facilitando además el acceso de los estudiantes a las escuelas, igualando las condiciones de transporte y disminuyendo los casos de aislamiento geográfico que existen actualmente. Esto permite mejorar la calidad de vida de los estudiantes y le permite obtener un beneficio económico a los planificadores.

Es posible mejorar de distintas formas el trabajo presentado en esta tesis. Algunas ya fueron mencionadas a lo largo de éste, y tienen que ver con una mejor estimación del parámetro relacionado a los costos de transporte que se intenta traspasar desde la modelación del ruteo hacia el problema de localización de las escuelas. Una análisis más profundo de este dato permitiría establecer una mejor relación entre ambos problemas, permitiendo al modelo tomar una mejor decisión en la búsqueda de la solución.

Otra posible mejora, y que permitiría no realizar el análisis recién mencionado, es desarrollar la modelación en una sola etapa. Esta modelación entrega una solución óptima y no una aproximación, sin embargo, tiene una complejidad mucho mayor, por lo que se requeriría una máquina mejor para resolución y posiblemente técnicas heurísticas para acercarse a la solución.

Por otro lado, como se pudo ver en la modelación de ruteo, el algoritmo que permitía acomodar la flota de vehículos significó un ahorro significativo en la inversión anual de transporte. El desarrollar desde un primer instante una modelación que contemple flota heterogénea, permite diseñar un sistema de ruteo más complejo y con posible reducción de costos, siendo en el peor caso, la misma solución encontrada. Sin embargo, al igual que en el caso anterior, esto requeriría de una modelación distinta y con mayor complejidad, por lo que surgen los mismos problemas.

Capítulo 8

Bibliografía

[1] Instituto Nacional de Estadísticas de Chile, *Compendio Estadístico 2013*, 2013.

[2] Ministerio de Educación, *Estadísticas de la educación 2013*, 2013.

[3] H.A. Eiselt, and Vladimir Marianov, *Gradual location set covering with service quality*, Socio-Economic Planning Sciences, 43: 121-130, 2009.

[4] Mayra Elizondo C., and Ricardo Aceves G., *Solución al problema de asignación-distribución*, Mosaicos Matemáticos, 20:51-57, 2007.

[5] Fernando Araya, *Localización óptima y redimensionamiento de escuelas rurales en Chile*, Tesis de Magíster, Universidad de Chile, 2011.

[6] Julio Daza, Jairo R. Montoya, and Francesco Narducci, *Resolución del problema de enrutamiento de vehículos con limitaciones de capacidad utilizando un procedimiento metaheurístico de dos fases*,EIA 12: 23-38, 2009.

[7] Richard Church, and Charles Re Velle, *The maximal covering location problem*, Papers of the regional science association, volume 32: 101-118, 1974.

[8] Alfredo Olivera, *Heurísticas para problemas de ruteo de vehículos*, 2004.

[9] Juan Ramón Caulier, Gerente Comercial de Maco Chile, Cotización telefónica, 2016.

[10] *Subsidio al transpore beneficia a cinco mil niños de la región*, Austral de Valdivia, p. 2-4, 11 de Abril de 2016.

[11] *Implementarán subsidio terrestre para conectar a vecinos de puqueldón*, La estrella de Chiloé, p. 8, 11 de Abril de 2016.

[12] Comisión Nacional de energía, *Sistema de información en línea de precios de combustibles en estaciones de servicio*, http://www.bencinaenlinea.cl/web2/buscador.php?region=3, Abril de 2016.

[13] Gellona Autos, Cotización en línea de vehículos de transporte escolar, http://gellonautos.cl/maxus-escolar/, Marzo 2016.

[14] MINEDUC, *Costos de inversión en infraestructura de proyectos ejecutados*, Base de datos 2008.

[15] MINEDUC, *Información de remuneraciones del personal docente* , Base de datos 2006.

[16] Hyundai, Cotización en línea de vehículos particulares, http://hyundai.cl/cotizar/general/accent/11, Marzo 2016.

[17] Juan Carlos Muñoz, Marco Batarce, Dario Hidalgo, *Transantiago, five years after its launch*, Research in Transportation Economics, Volume 48: 184-193, 2014.

[18] Sistema de Impuestos Internos, *Nueva Tabla de vida útil de los bienes físicos del activo inmovilizado.*, http://www.sii.cl/pagina/valores/bienes/tabla_vida_enero.htm, Marzo 2016.

[19] Ministerio de Desarrollo Social, *Precios sociales vigentes 2015*, Marzo 2015.

[20] Biblioteca del Congreso Nacional de Chile (BCN), Guía legal sobre: Transporte escolar 2014, http://www.bcn.cl/leyfacil/recurso/transporte-escolar, Marzo 2016.

[21] Carmen Gloria Mandiola, Asesora Comercial de Camiones y Buses Kaufman S.A., Cotización telefónica, 2016.

[22] California Energy Commission, Santa Barbara County Air Pollution Control District, *Demonstration of Caterpillar C-10 Dual-Fuel Engines in MCI 102DL3 Communter Buses*, National Renewable Energy Laboratory NREL/SR-540-26758, January 2000.

[23] Dirección de Vialidad, Ministerio de Obras Públicas, *Política de conservación vial, Etapa 2 - Caminos básicos*, Noviembre, 2011.

[24] Dirección de Vialidad, Ministerio de Obras Públicas, *Red Vial Nacional, Dimensionamiento y Características*, Agosto, 2015.