



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

DESARROLLO DE UN ALGORITMO DE IDENTIFICACIÓN DE FUERZAS EN  
TIEMPO REAL PARA ESTRUCTURAS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MECÁNICO

MARCELO NICOLÁS RIQUELME VALENCIA

PROFESORA GUÍA:

VIVIANA MERUANE NARANJO

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:

RAFAEL RUIZ GARCÍA

ALEJANDRO ORTIZ BERNARDIN

SANTIAGO DE CHILE

2017

## RESUMEN

Para el diseño de estructuras es indispensable conocer la fuerza que actúa sobre estas con el propósito de desarrollar mejores criterios de diseño, planes de mantención, evitar fallas catastróficas o prolongar la vida útil de las estructuras.

Una forma indirecta de identificar las fuerzas que actúan sobre una estructura es mediante la medición de la respuesta dinámica de la estructura, la cual puede ser en forma de desplazamientos, velocidades, aceleración o deformaciones. Esto se conoce como el problema inverso.

Dentro de los algoritmos de identificación de fuerzas más utilizados están los métodos en el dominio de las frecuencias y los métodos en el dominio del tiempo. Ambos métodos se traducen en resolver un problema de mínimos cuadrados que busca minimizar el error entre la fuerza estimada mediante el algoritmo y la fuerza aplicada. Sin embargo, resolver este problema lleva intrínseca la inversión de una matriz que muchas veces está mal acondicionada, lo que hace que la solución no sea única y/o sea inestable ante pequeñas variaciones de la respuesta dinámica. Además, muchos de estos métodos solo entregan la fuerza en los puntos de medición, por lo que no se tiene un conocimiento completo del comportamiento de la estructura.

El objetivo del presente trabajo es desarrollar y validar un algoritmo de identificación de fuerzas dinámicas para una viga, aplicando un método de aproximación lineal. Donde una fuerza arbitraria es posible escribirla como una combinación lineal de fuerzas tipo impulso aplicadas en distintos tiempos.

En primera instancia se realiza un modelo numérico de la viga en elementos finitos mediante el software Matlab, para luego realizar el algoritmo de identificación de fuerzas dinámicas y así validarlo en forma numérica y posteriormente en forma experimental.

Se obtuvo que este algoritmo permite estimar la fuerza aplicada con bastante exactitud. Pudiendo calcular la fuerza aplicada en nodos donde no se mide la respuesta, por lo que no se requiere a priori una cantidad excesiva de sensores para tener buenas estimaciones. Además de no ser necesarias las propiedades de la viga en estudio para la determinación de la fuerza real aplicada en el análisis experimental.

Sin embargo, para fuerzas con frecuencias de excitación cercanas a las frecuencias naturales de la viga, el algoritmo pierde precisión.

Por otro lado, al disponer de una mayor cantidad de sensores midiendo la respuesta de la viga, el algoritmo disminuye los errores de estimación de la fuerza.

## AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer en primer lugar a mis padres y familia, por todo el apoyo que me han brindado a lo largo de este largo camino, que remonta desde mi gusto por la ciencia y las matemáticas en la educación media hasta el fin de esta etapa universitaria. Cada consejo, cada palabra de apoyo me ayudó a seguir firme en un camino arduo, pero muy gratificante para mi vida.

A cada una de las amistades forjadas durante esta etapa universitaria, donde cada trabajo, cada noche de estudio y cada charla contribuyeron a mi crecimiento personal y a alcanzar este objetivo final tan anhelado por quienes inician dicha etapa.

A mi polola Macarena, por el gran apoyo emocional que me ha dado durante estos últimos años, ayudando a levantarme de cada uno de los momentos difíciles que he pasado.

A los profesores del departamento de mecánica, por la formación entregada a cada uno de quienes tuvimos el agrado de pasar por sus aula, contribuyendo así con la formación de futuros ingenieros y el progreso de la ciencia en nuestro país.

Y por último, quería agradecer en forma especial a la profesora Viviana por su inmenso apoyo incondicional en esta última etapa, por la dedicación que tuvo en explicar y acoger cada una de las dudas que surgían en el camino.

## TABLA DE CONTENIDO

1.	INTRODUCCIÓN.....	1
1.1	ANTECEDENTES GENERALES .....	1
1.2	MOTIVACIÓN.....	3
1.3	OBJETIVOS .....	3
1.3.1	OBJETIVO GENERAL .....	3
1.3.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	4
1.4	ALCANCES .....	4
2.	METODOLOGÍA.....	5
3.	ANTECEDENTES ESPECÍFICOS .....	6
3.1	SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD.....	6
3.1.1	ECUACIÓN DE MOVIMIENTO.....	6
3.1.2	RESPUESTA A UN IMPULSO .....	6
3.2	SISTEMA DE MÚLTIPLES GRADOS DE LIBERTAD .....	7
3.2.1	ECUACIÓN DE MOVIMIENTO.....	7
3.2.2	MÉTODO DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA DE WILSON .....	8
3.2.3	SUPERPOSICIÓN MODAL.....	10
3.3	ELEMENTOS FINITOS .....	11
3.4	MEDICIONES EXPERIMENTALES .....	13
3.4.1	MECANISMOS DE EXCITACIÓN.....	13
3.4.2	ACELERÓMETRO PIEZOELÉCTRICO .....	14
3.4.3	TEST DE IMPACTO .....	14
4.	ANÁLISIS NUMÉRICO.....	16
4.1	PROGRAMACIÓN MODELO NUMÉRICO.....	16
4.2	CONSTRUCCIÓN DE LA BASE DE DATOS.....	17
4.3	PROGRAMACIÓN DEL MÉTODO DE WILSON .....	19
4.4	ALGORITMO DE IDENTIFICACIÓN DE FUERZAS.....	19
4.5	RESULTADOS NUMÉRICOS.....	20
4.5.1	CASO 1 .....	21
4.5.2	CASO 2 .....	22
4.5.3	CASO 3 .....	24
4.5.4	CASO 4 .....	25

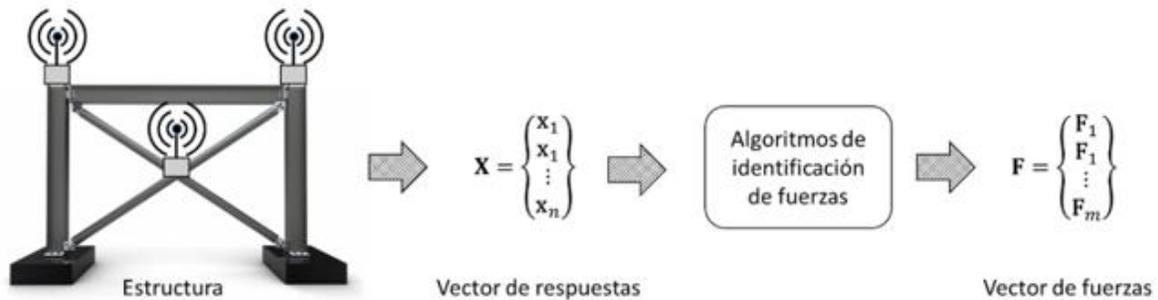
4.5.5	CASO 5 .....	27
4.5.6	CASO 6 .....	28
4.5.7	CASO 7 .....	30
4.5.8	CASO 8 .....	31
5.	ANÁLISIS EXPERIMENTAL .....	33
5.1	MONTAJE EXPERIMENTAL .....	33
5.2	RESULTADOS EXPERIMENTALES .....	36
5.2.1	CASO 1 .....	36
5.2.2	CASO 2 .....	37
5.2.3	CASO 3 .....	39
5.2.4	CASO 4 .....	40
5.2.5	CASO 5 .....	42
5.2.6	CASO 6 .....	43
5.2.7	CASO 7 .....	45
5.2.8	CASO 8 .....	46
5.2.9	CASO 9 .....	48
5.2.10	CASO 10 .....	49
6.	DISCUSIÓN.....	51
7.	CONCLUSIONES.....	54
8.	BIBLIOGRAFÍA.....	55
	ANEXO A. CÓDIGOS DE IMPORTANCIA .....	56
	ANEXO A.1. CÓDIGO DE MODELAMIENTO NUMÉRICO DE LA VIGA.....	56
	ANEXO A.2. CREACIÓN BASE DE DATOS NUMÉRICA.....	58
	ANEXO A.3. MÉTODO DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA DE WILSON .....	60
	ANEXO A.4. ALGORITMO DE IDENTIFICACIÓN DE FUERZAS NUMÉRICO ....	61
	ANEXO A.5. CREACIÓN BASE DE DATOS EXPERIMENTAL .....	64
	ANEXO A.6. ALGORITMO IDENTIFICACIÓN DE FUERZAS EXPERIMENTAL .	66

# 1. INTRODUCCIÓN

## 1.1 ANTECEDENTES GENERALES

Los métodos de identificación de fuerzas consisten en la medición de la respuesta vibracional de una estructura, la cual puede estar compuesta de desplazamientos, aceleraciones o deformaciones, para resolver el problema inverso. Esto permite determinar la fuerza real que está actuando sobre una estructura sin la necesidad de utilizar transductores de fuerzas que invaden y alteran sus condiciones de operación.

En la figura 1.1, se muestra un esquema del proceso antes mencionado.



**Figura 1.1:** Esquema típico de un problema inverso de identificación de fuerzas.

Para llevar a cabo el trabajo, se busca crear una base de datos de respuestas  $X^j$  a fuerzas tipo impulso  $F^j$ , de distinta magnitud, aplicadas en distintos nodos y en distintos tiempos. De este modo, si se mide la respuesta  $X$  de la estructura en distintos grados de libertad mediante sensores, esta puede escribirse como una combinación lineal de las respuestas de la base de datos como se muestra en la ecuación 1.1.

$$X = \sum w_j X^j \quad (1.1)$$

Por lo que la fuerza  $F$  que ocasionó la respuesta  $X$ , a su vez puede escribirse como muestra la ecuación 1.2.

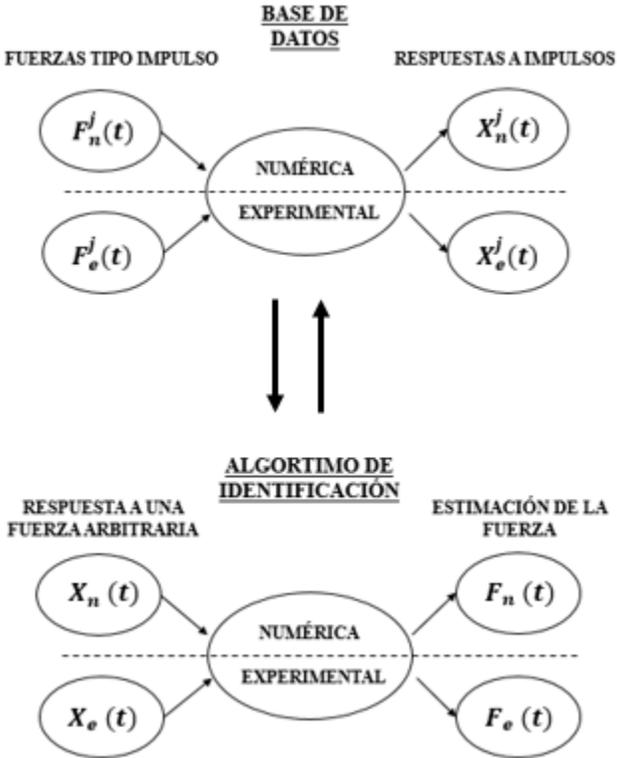
$$F = \sum w_j F^j \quad (1.2)$$

De este modo, el problema se traduce en encontrar los coeficientes lineales  $w_j$  con el principio de mínimos cuadrados penalizado.

En primera instancia, se busca validar el algoritmo de identificación de fuerzas en un modelo numérico en elementos finitos de la viga. Donde las respuestas ante fuerzas arbitrarias serán simuladas.

Posteriormente, se busca validar el algoritmo de identificación de fuerzas en forma experimental, con respuestas medidas mediante acelerómetros y fuerzas generadas mediante un agitador electromagnético.

En la figura 1.2 se muestra un esquema del algoritmo a desarrollar en el presente trabajo.



**Figura 1.2:** Esquema del algoritmo de identificación de fuerzas a desarrollar.

## 1.2 MOTIVACIÓN

La estimación correcta de las fuerzas que actúan en una estructura es crucial para realizar mejores diseños y así garantizar la vida útil de la estructura. Sin embargo, poder determinar las fuerzas reales que actúan sobre una estructura resulta muchas veces imposible debido a las distintas condiciones de operación a las cuales estas están sometidas. Es por esto, que comúnmente en la etapa de diseño se utilizan aproximaciones como considerar fuerzas de amplitud constante, y utilizando factores de seguridad. Sin embargo las estructuras usualmente están sometidas a fuerzas variables.

De este modo, una mala estimación de las fuerzas en la etapa de diseño puede llevar a vidas útiles más cortas, fallas menores o incluso fallas catastróficas que ocasionan el colapso de la estructura completa.

Una forma de monitorear las fuerzas que están actuando sobre una estructura consiste en la medición de la respuesta de la estructura mediante sensores (los cuales pueden ser de desplazamiento, velocidad, aceleración o deformaciones), para poder determinar la fuerza excitadora mediante algoritmos de identificación de fuerzas. Algunos de estos métodos de identificación de fuerzas consisten en la inversión de matrices mal acondicionadas como son el caso de algunos métodos en el dominio del tiempo y en el dominio de las frecuencias. Esto lleva a que el problema sea numéricamente insoluble o inestable. Por lo que tienen una mala precisión y no entregan una solución única del problema [4-9].

Es por este motivo que se busca implementar un algoritmo de identificación de fuerzas que compare una base de datos de respuestas a fuerzas tipo impulso con una respuesta medida mediante sensores, con el fin de encontrar una relación lineal, minimizando la norma entre ambas expresiones y poder determinar los coeficientes lineales de contribución de cada una de las respuestas de la base de datos y así poder aproximar la fuerza como una suma ponderada de un conjunto de impulsos.

## 1.3 OBJETIVOS

### 1.3.1 OBJETIVO GENERAL

Desarrollo y validación de un algoritmo de identificación de fuerzas dinámicas para una viga, aplicando un método de aproximación lineal.

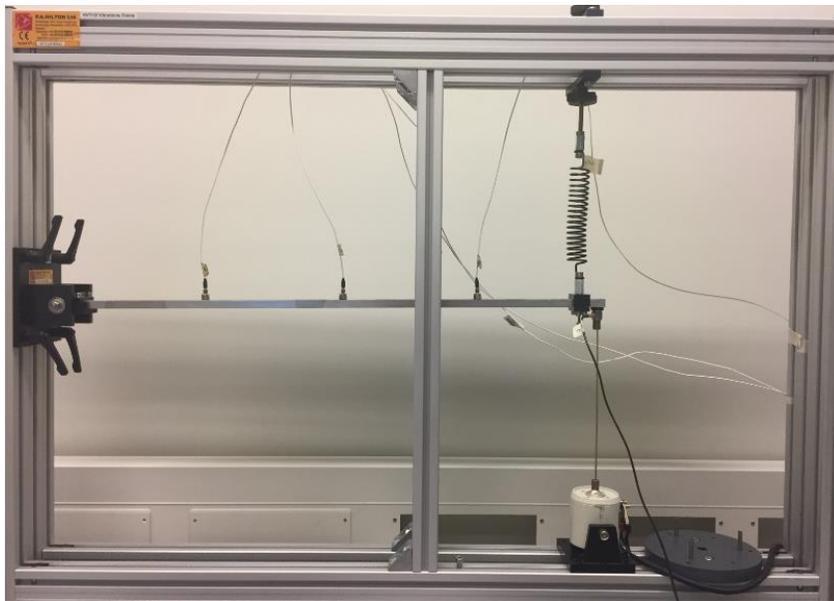
### 1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Realizar un modelo numérico de una estructura tipo viga mediante el método de elementos finitos.
- Realizar un algoritmo de identificación de fuerzas dinámicas, creando una base de datos del modelo numérico.
- Validar el algoritmo de identificación de fuerzas dinámicas en forma numérica y experimental.

### 1.4 ALCANCES

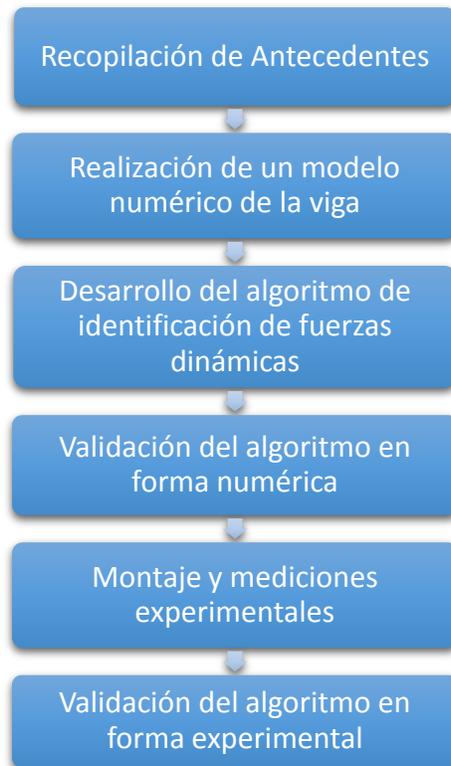
El presente trabajo se centra en el desarrollo de un algoritmo de identificación de fuerzas dinámicas para una viga, aplicando el método de aproximación lineal. Se busca validar el algoritmo en forma numérica y experimental comparando la fuerza estimada mediante el algoritmo con la fuerza real aplicada sobre la viga mostrada en la figura 1.3.

No se busca realizar una comparación entre este método y algún otro tipo de método de identificación de fuerzas.



**Figura 1.3:** Viga en estudio.

## 2. METODOLOGÍA



En primera instancia se realiza una revisión bibliográfica de los algoritmos existentes de identificación de fuerzas y una recopilación de los antecedentes que ayudarán en el desarrollo del presente trabajo.

Luego se realiza un modelo numérico en elementos finitos en el software Matlab de la viga en estudio.

Posteriormente, se realiza el algoritmo de identificación de fuerzas dinámicas en el software Matlab para validar este en su primera etapa, el análisis numérico. Aquí se utiliza un modelo numérico de la viga en estudio realizado anteriormente para estudiar varios casos de aplicación de fuerzas y respuestas simuladas.

Luego se realiza el montaje experimental de la viga en el laboratorio de vibraciones mecánicas, ubicado en el piso -2 del edificio de Beauchef 851. Aquí se realizan mediciones experimentales con el programa “Data Acquisition and Analysis”.

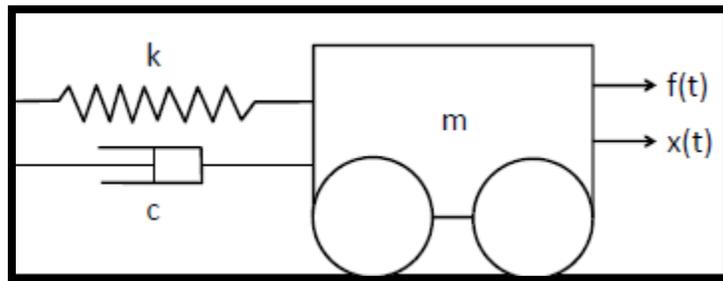
Finalmente se valida el algoritmo de identificación de fuerzas en su segunda etapa, el análisis experimental. Utilizando mediciones de fuerzas y respuestas medidas con sensores de fuerza y acelerómetros, respectivamente.

### 3. ANTECEDENTES ESPECÍFICOS

#### 3.1 SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD

##### 3.1.1 ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

Un sistema de un grado de libertad puede ser representado como el mostrado en la figura 3.1. La ecuación de movimiento de este sistema corresponde a la ecuación 3.1 [2].



**Figura 3.1:** Sistema de un grado de libertad [2].

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (3.1)$$

Donde:

- $m$ : Masa del sistema.
- $k$ : Coeficiente de rigidez del sistema.
- $c$ : Coeficiente de amortiguación del sistema.
- $x(t)$ : Desplazamiento del sistema en función del tiempo.
- $\dot{x}(t)$ : Velocidad del sistema en función del tiempo.
- $\ddot{x}(t)$ : Aceleración del sistema en función del tiempo.
- $f(t)$ : Fuerza que actúa sobre el sistema en función del tiempo.

##### 3.1.2 RESPUESTA A UN IMPULSO

Un impulso corresponde a una fuerza aplicada por un periodo breve de tiempo. La respuesta de un sistema a una fuerza tipo impulso es similar a la respuesta libre del sistema a una cierta condición inicial.

Considerando la definición matemática de una fuerza tipo impulso de acuerdo a la ecuación 3.2 [1].

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq \tau - \epsilon \\ \frac{\hat{f}}{2\epsilon} & \tau - \epsilon \leq t \leq \tau + \epsilon \\ 0 & t \geq \tau + \epsilon \end{cases} \quad (3.2)$$

Donde:

- $f(t)$ : Fuerza en función del tiempo.
- $\epsilon$ : Duración media de la fuerza (número muy pequeño).
- $\tau$ : Tiempo en el que se aplica la fuerza.
- $\hat{f}$ : Impulso.

La respuesta  $x(t)$  de un sistema con amortiguamiento débil ( $0 < \zeta < 1$ ), a un impulso  $\hat{f}$  se expresa de acuerdo a la ecuación 3.3.

$$x(t) = \hat{f} \cdot h(t) \quad (3.3)$$

La función  $h(t)$  corresponde a la respuesta a un impulso unitario en  $t = 0$  y está definida por la ecuación 3.4 [1].

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t) , \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3.4)$$

Donde:

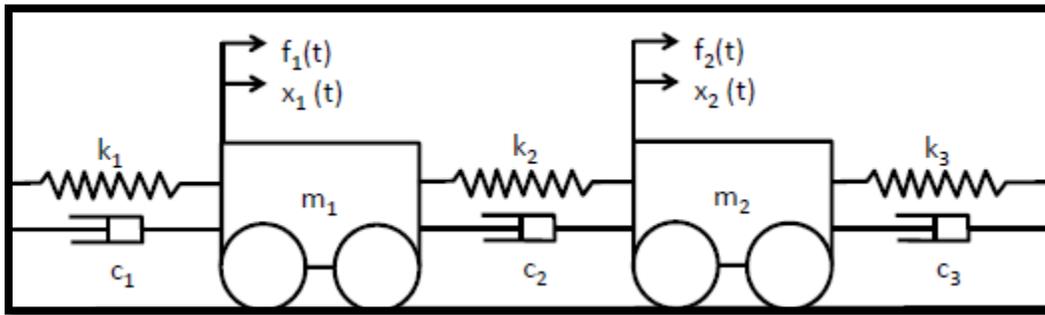
- $m$ : Masa del sistema.
- $\zeta$ : Razón de amortiguamiento del sistema.
- $\omega_n$ : Frecuencia natural del sistema.
- $\omega_d$ : Frecuencia natural amortiguada del sistema.

## 3.2 SISTEMA DE MÚLTIPLES GRADOS DE LIBERTAD

### 3.2.1 ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

La mayoría de los sistemas consisten en un ensamble de una cantidad infinita de partes (masas) móviles. Sin embargo, la cantidad de partes móviles en las que el sistema sea dividido determinará la cantidad de grados de libertad de este.

En el caso de un sistema de múltiples grados de libertad la ecuación de movimiento asociada equivale a la ecuación de un grado de libertad, pero en forma matricial, existiendo influencia entre estos. La ecuación de movimiento en forma matricial se muestra en la ecuación 3.5 [2].



**Figura 3.2:** Sistema de múltiples grados de libertad [2].

$$M\ddot{X}(t) + C\dot{X}(t) + KX(t) = F(t) \quad (3.5)$$

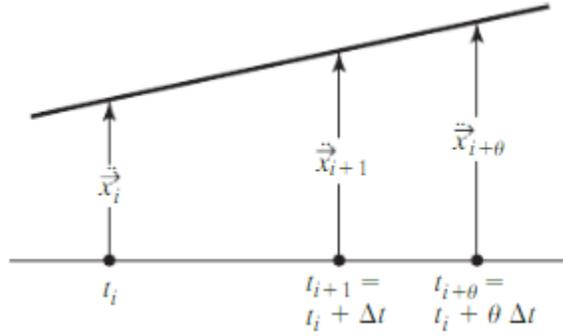
Donde:

- $M$ : Matriz de masa del sistema.
- $K$ : Matriz de rigidez del sistema.
- $C$ : Matriz de amortiguación del sistema.
- $X(t)$ : Vector de desplazamiento del sistema en función del tiempo.
- $\dot{X}(t)$ : Vector de velocidad del sistema en función del tiempo.
- $\ddot{X}(t)$ : Vector de aceleración del sistema en función del tiempo.
- $F(t)$ : Vector de fuerzas que actúan sobre el sistema en función del tiempo.

### 3.2.2 MÉTODO DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA DE WILSON

Si se tiene la ecuación de movimiento de un sistema, representada por la ecuación 3.5, es posible conocer la respuesta de un sistema en forma discreta, donde la solución está dividida en pasos de tiempo  $\Delta t$ . Para esto se debe contar con las condiciones iniciales del sistema  $\ddot{X}(0)$ ,  $\dot{X}(0)$ ,  $X(0)$ .

El método de Wilson considera que la aceleración del sistema varía linealmente entre dos pasos de tiempo  $t_i$  y  $t_i + \theta\Delta t$ , donde  $\theta \geq 1$  como se ve en la figura 3.3 [3].



**Figura 3.3:** Suposición de aceleración lineal en el método de Wilson [3].

Luego, el algoritmo del método de Wilson consiste en lo siguiente [2]:

1. Crear matrices de masa  $M$ , rigidez  $K$  y amortiguamiento  $C$ .
2. Establecer las condiciones iniciales  $\ddot{X}(0)$ ,  $\dot{X}(0)$  y  $X(0)$ .
3. Seleccionar el paso de tiempo  $\Delta t$  y el coeficiente  $\theta$  (comúnmente  $\theta = 1,4$ ).
4. Calcular constantes de integración de las ecuaciones 3.6 y 3.7:

$$a_0 = \frac{6}{(\theta\Delta t)^2}; a_1 = \frac{3}{\theta\Delta t}; a_2 = 2a_1; a_3 = \frac{\theta\Delta t}{2}; a_4 = \frac{a_0}{\theta} \quad (3.6)$$

$$a_5 = \frac{-a_2}{\theta}; a_6 = 1 - \frac{3}{\theta}; a_7 = \frac{\Delta t}{2}; a_8 = \frac{(\Delta t)^2}{6} \quad (3.7)$$

5. Formar la matriz de rigidez efectiva  $\hat{K}$ , determinada por la ecuación 3.8.

$$\hat{K} = K + a_0M + a_1C \quad (3.8)$$

6. Luego para cada paso de tiempo, se calculan las fuerzas efectivas en  $t_i + \theta\Delta t$ , definidas por la ecuación 3.9.

$$\begin{aligned} \hat{F}(t_i + \theta\Delta t) = & F(t_i) + \theta(F(t_i + \Delta t) - F(t_i)) \\ & + M(a_0X(t_i) + a_2\dot{X}(t_i) + 2\ddot{X}(t_i)) \\ & + C(a_1X(t_i) + 2\dot{X}(t_i) + a_3\ddot{X}(t_i)) \end{aligned} \quad (3.9)$$

7. Determinar los desplazamientos en  $t_i + \theta\Delta t$ , de acuerdo a la ecuación 3.10.

$$X(t_i + \theta\Delta t) = \hat{K}^{-1}\hat{F}(t_i + \theta\Delta t) \quad (3.10)$$

8. Finalmente se evalúan las aceleraciones, velocidades y desplazamientos en  $t_i + \Delta t$ , de acuerdo a las ecuaciones 3.11, 3.12 y 3.13, respectivamente.

$$\ddot{X}(t_i + \Delta t) = a_4(X(t_i + \theta\Delta t) - X(t_i)) + a_5\dot{X}(t_i) + a_6\ddot{X}(t_i) \quad (3.11)$$

$$\dot{X}(t_i + \Delta t) = \dot{X}(t_i) + a_7(\ddot{X}(t_i + \Delta t) + \ddot{X}(t_i)) \quad (3.12)$$

$$X(t_i + \Delta t) = X(t_i) + \Delta t\dot{X}(t_i) + a_8(\ddot{X}(t_i + \Delta t) + 2\ddot{X}(t_i)) \quad (3.13)$$

### 3.2.3 SUPERPOSICIÓN MODAL

La respuesta de un sistema de múltiples grados de libertad, puede calcularse a su vez utilizando análisis modal, el cual consiste en escribir la ecuación 3.5 en forma desacoplada, donde cada una de estas ecuaciones depende de una única variable. Esto se consigue realizando un cambio de variable como se muestra en la ecuación 3.14 [2]:

$$X(t) = \Phi Y(t) \quad (3.14)$$

Donde:

- $\Phi$ : Matriz de modos normales.
- $Y(t)$ : Vector de desplazamiento del sistema en coordenadas modales.

Realizando este cambio de variable y pre-multiplicando por la matriz  $\Phi^T$ , la ecuación 3.5, queda expresada como la ecuación 3.15 [2].

$$\Phi^T M \Phi \ddot{Y}(t) + \Phi^T C \Phi \dot{Y}(t) + \Phi^T K \Phi Y(t) = \Phi^T F(t) \quad (3.15)$$

Lo anterior se reduce a la ecuación 3.16.

$$\mathbf{m}\ddot{Y}(t) + \mathbf{c}\dot{Y}(t) + \mathbf{k}Y(t) = \mathbf{f}(t) \quad (3.16)$$

Donde:

- $\mathbf{m}$ : Matriz de masa modal (matriz diagonal).
- $\mathbf{k}$ : Matriz de rigidez modal (matriz diagonal).
- $\mathbf{c}$ : Matriz de amortiguamiento modal (matriz diagonal).

De este modo, se tienen  $n$  ecuaciones individuales y desacopladas pueden ser representadas para cada grado de libertad  $i$ , por la ecuación 3.17 [2].

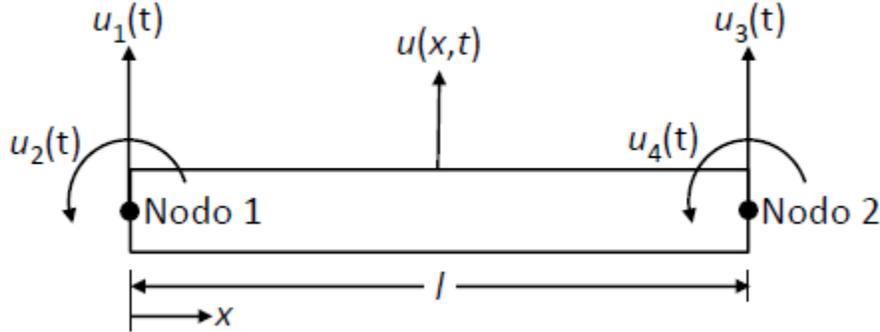
$$m_i \ddot{Y}_i(t) + c_i \dot{Y}_i(t) + k_i Y_i(t) = r_i = \Phi_i^T F(t) \quad (3.17)$$

### 3.3 ELEMENTOS FINITOS

El método de elementos finitos consiste en un método numérico que permite obtener una solución aproximada de ecuaciones diferenciales. En términos prácticos se trata al sistema en estudio como un ensamble de elementos discretos que están conectados entre sí.

Dado que el método de elementos finitos es una aproximación de la realidad, se tendrán mejores resultados al refinar la discretización del modelo, es decir, al incrementar el número de elementos que se utilizan para modelar el sistema.

En el presente trabajo se utiliza un elemento de viga como el de la figura 3.4 [1], donde se puede observar que contiene 2 nodos y cuatro grados de libertad. De estos cuatro grados de libertad,  $u_1$  y  $u_3$  corresponden a desplazamientos verticales y  $u_2$  y  $u_4$  corresponden a rotaciones.



**Figura 3.4:** Elemento de viga [1].

De este modo, se tiene que las matrices de masa  $M$  y rigidez  $K$  de cada elemento de viga están definidas por las ecuaciones 3.18 y 3.19, respectivamente. Y definen la vibración transversal de esta [3].

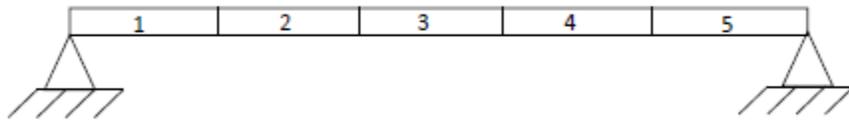
$$M = \frac{\rho Al}{420} \cdot \begin{pmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

$$K = \frac{EI}{l^3} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

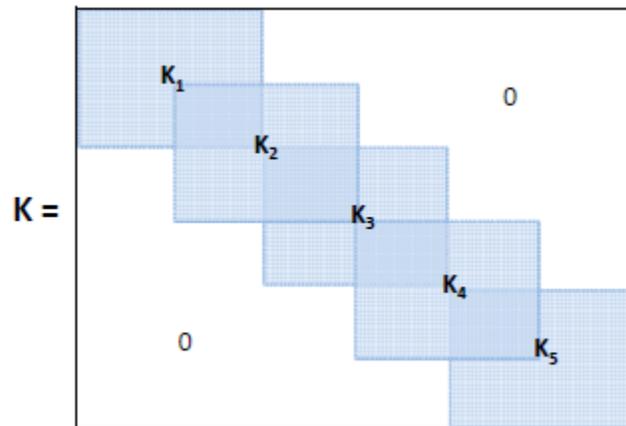
Donde:

- $\rho$ : Densidad del material.
- $A$ : Área transversal de la viga.
- $l$ : Largo del elemento de viga.
- $E$ : Módulo de Young del material.
- $I$ : Momento de inercia de la sección transversal de la viga.

Dado que se busca representar un sistema como un ensamble de varios elementos. A modo de ejemplo, para una viga de 5 elementos como se muestra en la figura 3.5 se tiene que la matriz de rigidez de la viga completa corresponde a un ensamble de las 5 matrices de rigidez de cada elemento y puede representarse como se muestra en la figura 3.6 [2].



**Figura 3.5:** Viga compuesta de 5 elementos de viga.



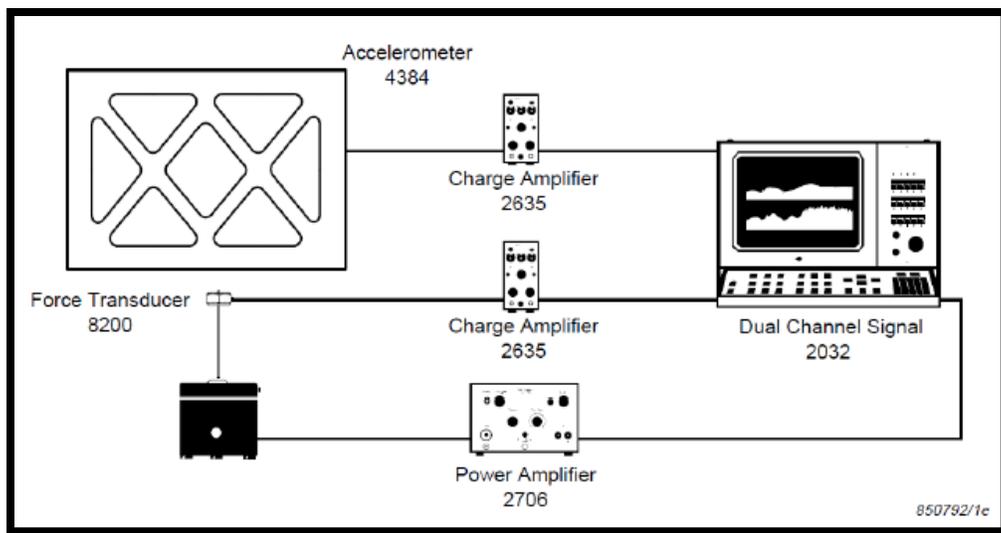
**Figura 3.6:** Ensamble de la matriz de rigidez de 5 elementos [2].

### 3.4 MEDICIONES EXPERIMENTALES

Para validar el algoritmo de identificación de fuerzas en forma experimental se deben adquirir datos experimentales de alguna variable como desplazamiento, velocidad o aceleración. De esta forma, es posible determinar la respuesta de la estructura ante distintas fuerzas de excitación y conocer los parámetros modales de la estructura.

Las mediciones experimentales consisten en excitar la estructura con una fuerza conocida y medir en forma paralela, la fuerza real aplicada y las respuestas de los distintos sensores ubicados en la estructura.

En la figura 3.7 se muestra la configuración típica de una medición experimental.



**Figura 3.7:** Configuración típica de un montaje experimental.

Una configuración típica de una medición experimental consta de un excitador, transductores de fuerzas, amplificadores de poder, acelerómetros, generador y analizador de señales.

#### 3.4.1 MECANISMOS DE EXCITACIÓN

Existen dos métodos principales de excitar una estructura. Una de ellas es mediante un martillo de impacto y la otra mediante un agitador electromagnético, también conocido como “shaker”.

El martillo de impacto, mostrado en la figura 3.8, consta de una punta (de acero, aluminio, plástico o caucho) y un sensor de fuerza, el cual ante una fuerza de impacto, transforma la fuerza en una señal eléctrica y posteriormente envía dicha señal al analizador de señales.

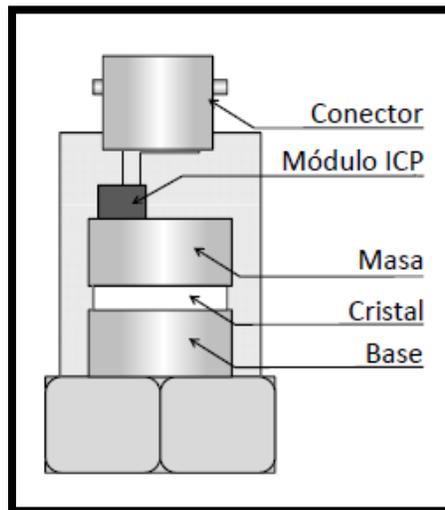


**Figura 3.8:** Martillo de impacto.

### 3.4.2 ACELERÓMETRO PIEZOELÉCTRICO

Este tipo de sensores contienen un cristal piezoeléctrico en su interior que al deformarse producen una carga eléctrica asociada. Dentro de los principales criterios de selección de acelerómetros están: el rango de frecuencias de medición, la sensibilidad, sensibilidad térmica y la masa. La sensibilidad de un acelerómetro determina la precisión de este, es decir, mientras mayor sea esta, puede captar aceleraciones con mayor precisión, pero disminuye el rango de medición de esta.

Estos sensores son capaces de captar con gran precisión frecuencias entre 1 Hz y 15.000 Hz, por lo que son muy utilizados para tomar datos de vibraciones a altas frecuencias.



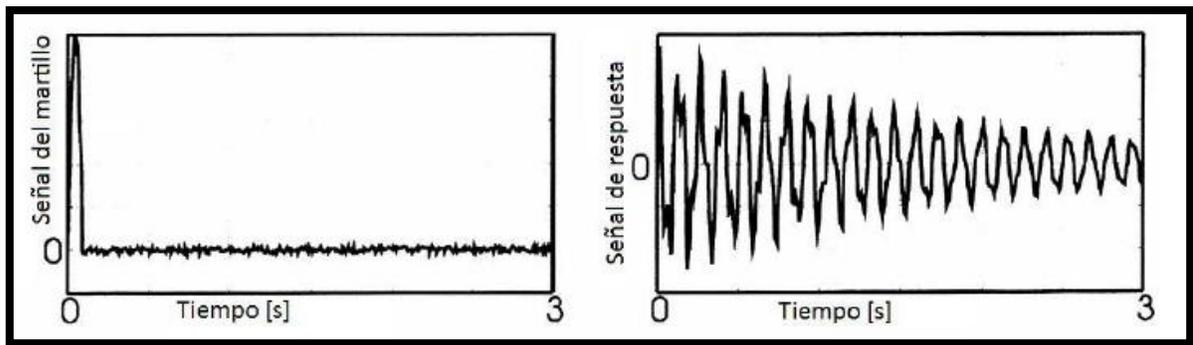
**Figura 3.9:** Esquema de un acelerómetro piezoeléctrico.

### 3.4.3 TEST DE IMPACTO

Este test consiste en golpear reiteradamente la estructura en distintos puntos de medición dispuestos en esta con el fin de disminuir el error experimental provocado por el ruido experimental, el ángulo del impacto y la intensidad del impacto, dado que los sensores de fuerzas solo miden en un rango determinado de amplitudes de fuerza. Además es muy importante verificar que los golpes sean correctos en la medida que se realicen. Esto último, se realiza utilizando el gráfico de fuerza del programa de adquisición de datos.

La realización de este test tiene como fin la creación de la base de datos con respuestas a fuerzas tipo impulso y la determinación de las frecuencias naturales de la estructura.

En la figura 3.10 se muestra una señal típica de un martillo de impacto junto a su respuesta en una cierta ventana de tiempo determinada.



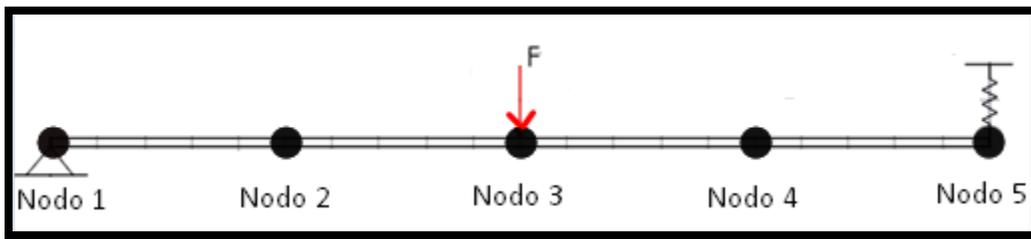
**Figura 3.10:** Señal típica de un impacto y respuesta a un impacto [2].

## 4. ANÁLISIS NUMÉRICO

### 4.1 PROGRAMACIÓN MODELO NUMÉRICO

Primero se construyeron las matrices de rigidez, masa y amortiguación de la viga por medio del método de elementos finitos.

Para esto, se determinaron las matrices de masa  $M$  y rigidez  $K$  de acuerdo a las ecuaciones (3.18) y (3.19), para una viga de 4 elementos, 5 nodos y con las condiciones de borde mostradas en la figura 4.1.



**Figura 4.1:** Viga de largo  $l$  con apoyo simple en un extremo y sujeta a un resorte en el otro.

Los parámetros de la viga utilizados para  $n$  elementos, se muestran en la tabla 4.1.

**Tabla 4.1:** Parámetros de la viga modelada numéricamente.

Símbolo	Nombre [Unidades]	Valor o Expresión
$E$	Módulo de Young [Pa]	$2,1 \cdot 10^{11}$
$\rho$	Densidad [ $\text{kg/m}^3$ ]	7850
$l$	Largo de la viga [m]	1,0
$b$	Ancho [m]	0,025
$h$	Alto [m]	0,010
$A$	Área sección rectangular [ $\text{m}^2$ ]	$bh$
$I$	Momento de Inercia [ $\text{m}^4$ ]	$bh^3/12$
$l_e$	Largo del elemento [m]	$l/n$
$k_{n5}$	Constante elástica resorte nodo 5 [N/m]	1000
$n$	Número de elementos tipo viga	4
$dt$	Paso de tiempo del modelo numérico [s]	0,005
$t_{fin}$	Horizonte de tiempo final [s]	1,0

Para obtener las matrices de masa, rigidez total de la estructura, se ensamblan las matrices de cada uno de los elementos de viga como muestra la figura 3.6.

Para determinar la matriz de amortiguamiento  $C$  de la ecuación (3.5), se considera el caso de amortiguamiento proporcional expresado por la ecuación 4.1:

$$C = \alpha M + \beta K \quad (4.1)$$

Donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes reales.

Cabe destacar que para imponer las condiciones de borde del problema, en el caso del apoyo simple (extremo izquierdo de la figura 4.1), se eliminó el primer grado de libertad al no existir desplazamiento vertical en dicho nodo. Para incorporar la condición de borde del extremo con resorte (extremo derecho de la figura 4.1), se sumó la constante elástica del resorte en el penúltimo grado de libertad de la matriz de rigidez total de la viga.

La solución de este problema se realiza programando una función en Matlab que utiliza los parámetros de la tabla 4.1, el número de elementos  $n$  y las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  (Anexo A.1).

Por otro lado se calcularon las frecuencias naturales de la viga mediante el comando “*eig(K, M)*” de Matlab, el cual utiliza las matrices de rigidez  $K$  y masa  $M$  de la estructura.

En la tabla 4.2 se muestran las frecuencias naturales de la viga modelada en forma numérica.

**Tabla 4.2:** Frecuencias naturales de la viga modelada numéricamente.

Frecuencias Naturales	Valor [Hz]
$\omega_{n_1}$	6,08
$\omega_{n_2}$	37,37
$\omega_{n_3}$	119,58
$\omega_{n_4}$	252,10
$\omega_{n_5}$	468,38
$\omega_{n_6}$	744,30
$\omega_{n_7}$	1160,90

## 4.2 CONSTRUCCIÓN DE LA BASE DE DATOS

Posteriormente se crea una base de datos con respuestas a fuerzas tipo impulso en el software Matlab. Utilizando las frecuencias naturales  $\omega_n$  y los modos normales  $\Phi$  de la viga determinados con el comando “*eig(K, M)*” en la sección anterior; se desacopla la ecuación (3.5) mediante superposición modal; de tal forma que la ecuación (3.17) se traduce en la ecuación (4.2) para cada grado de libertad  $i$ .

$$\ddot{Y}_i(t) + (\alpha + \beta\omega_{n_i}^2)\dot{Y}_i(t) + \omega_{n_i}^2 Y_i(t) = \tilde{f}_i = \frac{\Phi_i^T F(t)}{m_{ii}} \quad (4.2)$$

Definiendo  $2\zeta_i\omega_{n_i} = (\alpha + \beta\omega_{n_i}^2)$ , la ecuación 4.2 se puede escribir como la ecuación 4.3.

$$\ddot{Y}_i(t) + 2\zeta_i\omega_{n_i}\dot{Y}_i(t) + \omega_{n_i}^2 Y_i(t) = \tilde{f}_i \quad (4.3)$$

Donde:

- $\omega_{n_i}$ : Frecuencia natural de la  $i$ -ésima ecuación desacoplada (corresponde al grado de libertad  $i$ ).
- $\zeta_i$ : Razón de amortiguamiento de la  $i$ -ésima ecuación desacoplada (corresponde al grado de libertad  $i$ ).
- $m_{ii}$ : Masa generalizada obtenida a partir de  $\Phi_i^T M \Phi_i$ .

Dado que las condiciones iniciales de la viga son nulas, no existe solución homogénea. De este modo, la respuesta analítica de la ecuación (4.3) a una fuerza tipo impulso de amplitud  $\hat{F}_k$  está determinada por la solución particular representada por la ecuación (4.4).

$$Y_i(t) = \frac{\Phi_{i,k}^T \hat{F}_k}{m_{ii} \omega_{d_i}} e^{(-\zeta_i \omega_{n_i} t)} \text{sen}(\omega_{d_i} t) \quad (4.4)$$

Donde:

- $\Phi_{i,k}^T$ : Valor de la componente  $k$  del modo normal  $i$ .
- $\hat{F}_k$ : Fuerza tipo impulso aplicada en grado de libertad  $k$ .
- $\omega_{d_i}$ : Frecuencia natural amortiguada de la  $i$ -ésima ecuación desacoplada (corresponde al grado de libertad  $i$ ).

Dado que se conocen las frecuencias naturales  $\omega_{n_i}$ , las razones de amortiguamiento  $\zeta_i$  quedan determinadas por la ecuación (4.5).

$$\zeta_i = \frac{\alpha}{2\omega_{n_i}} + \frac{\beta \omega_{n_i}}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n + 1 \quad (4.5)$$

Para conocer la respuesta  $X(t)$  en todos los grados de libertad, se aplica el cambio de variable mostrado en la ecuación (3.14).

Finalmente para construir la base de datos con respuestas a fuerzas tipo impulso, se calculan las respuestas de acuerdo a las ecuaciones antes mencionadas para fuerzas de distintas magnitud, aplicadas en distintos nodos y en distintos tiempos. De este modo se logra construir una matriz como se muestra en la figura 4.2.

$$A = \left[ \begin{array}{ccc} [X_1^1(t_1) & \dots & X_1^1(t_N)] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [X_1^r(t_1) & \dots & X_1^r(t_N)] \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} [X_2^1(t_1) & \dots & X_2^1(t_N)] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [X_2^r(t_1) & \dots & X_2^r(t_N)] \end{array} \right] \dots \left[ \begin{array}{ccc} [X_s^1(t_1) & \dots & X_s^1(t_N)] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [X_s^r(t_1) & \dots & X_s^r(t_N)] \end{array} \right]$$

**Figura 4.2:** Matriz de base de datos con respuestas a fuerzas tipo impulso.

En la figura 4.2 se tiene que cada término  $X_i^j(t_k)$  corresponde a la respuesta del grado de libertad " $i$ " en el  $k$ -ésimo intervalo de tiempo para el caso " $j$ " de aplicación de fuerza tipo impulso. De este modo, cada fila corresponde a un caso de aplicación de la fuerza tipo

impulso (amplitud, nodo y tiempo específico), además de existir "N" intervalos de tiempo y "s" grados de libertad.

Del mismo modo, se genera una base de datos con las fuerzas aplicadas en cada caso (con la cual se generó la matriz  $A$ ) como se muestra en la figura 4.3, donde el término  $F_{i,tk,j}$  corresponde a la fuerza tipo impulso aplicada en el grado de libertad "i" en el k-ésimo intervalo de tiempo con la j-ésima amplitud.

$$B = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{1,t1,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & F_{1,tN,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{2,t1,i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & F_{2,tN,i} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} F_{s,t1,j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & F_{s,tN,j} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

**Figura 4.3:** Matriz de base de datos con fuerzas tipo impulso.

La creación de la base de datos se realiza con el programa de Matlab mostrado en el Anexo A.2.

### 4.3 PROGRAMACIÓN DEL MÉTODO DE WILSON

Para obtener la respuesta de la viga a fuerzas arbitrarias, se utiliza el método de integración de Wilson presentado en la sección 3.2.2.

Este algoritmo es programado en el software Matlab y la función se muestra en el Anexo A.3. Esta función requiere como parámetro de entrada un vector de fuerzas  $F$ ,  $N$  tiempos, un paso de tiempo  $dt$  y las matrices de masa  $M$ , rigidez  $K$  y amortiguamiento  $C$ .

### 4.4 ALGORITMO DE IDENTIFICACIÓN DE FUERZAS

En primer lugar, se conoce la respuesta  $X_e$  de la viga ante una fuerza determinada  $F_e$  (la que se buscará determinar mediante el algoritmo de identificación), obtenida mediante el método de Wilson (que posteriormente en la etapa experimental se medirá con sensores).

Luego, se escribe esta respuesta  $X_e$  como la respuesta  $x_e$  que tiene la estructura mostrada en la ecuación (4.6).

$$x_e = \left[ \left[ X_{e,1}(t_1) \cdots X_{e,1}(t_N) \right] \cdots \left[ X_{e,s}(t_1) \cdots X_{e,s}(t_N) \right] \right] \quad (4.6)$$

Donde el término  $X_{e,i}(t_k)$  corresponde a la respuesta simulada o medida en el grado de libertad "i" en el k-ésimo intervalo de tiempo, provocada por una fuerza arbitraria.

Posteriormente, se determinan los grados de libertad donde habrá sensores para medir la respuesta y los grados de libertad donde se excitará la estructura con la fuerza a determinar  $F_e$ . Esto con el fin de obtener los índices de las columnas y filas de la base de datos a analizar y comparar con la respuesta medida  $x_e$ .

Una vez seleccionados los índices a analizar en la base de datos, se compara la respuesta medida  $x_e$  con todos los casos de las respuestas a fuerzas tipo impulso de la base de datos, con el fin de determinar el vector de coeficientes lineales "w" que minimiza la ecuación (4.7).

$$\text{Argmín}_w\{\|A^t w - x_e^t\| + \lambda \|w\|\} \quad (4.7)$$

Una vez determinado el vector de coeficientes lineales "w", se obtiene la fuerza aplicada sobre la estructura utilizando la ecuación (4.8).

$$F_{calc}(t) = B^t w \quad (4.8)$$

En esta primera etapa, se utiliza el modelo numérico de elementos finitos de la viga, creado con el software Matlab y se realiza un análisis del algoritmo con fuerzas y respuesta **simuladas**.

Posteriormente, en la sección de análisis experimental, estas fuerzas y respuestas simuladas serán **medidas** mediante transductores de fuerza y acelerómetros piezoeléctricos, respectivamente.

Este algoritmo es programado en el software Matlab y el código se muestra en el Anexo A.4.

## 4.5 RESULTADOS NUMÉRICOS

En las siguientes subsecciones se analizarán distintos casos de aplicación de fuerzas excitadoras. En la tabla 4.3 se muestran los distintos casos a estudiar.

**Tabla 4.3:** Casos a estudiar del análisis numérico.

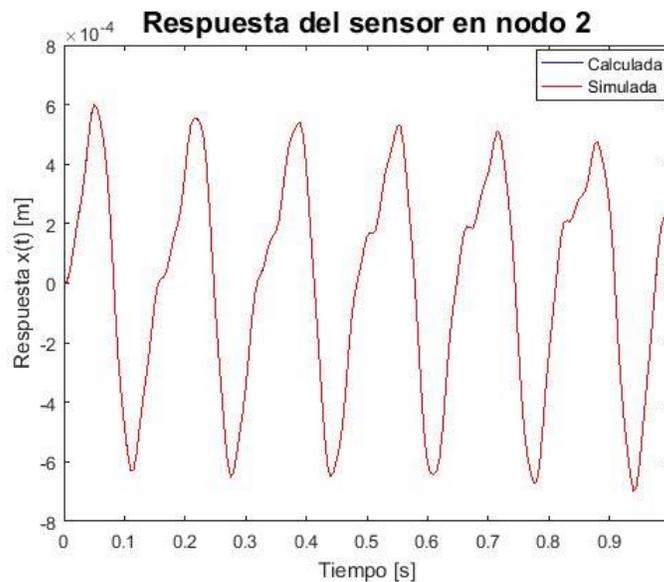
Caso	Amortiguado	Tipo de Fuerza	Ruido	Nº Sensores
1	NO	$5 \text{ sen}(2\pi \cdot 12 \cdot t)$	NO	1
2	NO	$5 \text{ sen}(2\pi \cdot 12 \cdot t)$	SI	3
3	SI	$5 \text{ sen}(2\pi \cdot 12 \cdot t)$	SI	3
4	SI	$5 \text{ sen}(2\pi \cdot 6,08 \cdot t)$	NO	1
5	SI	$5 \text{ sen}(2\pi \cdot 37,37 \cdot t)$	NO	3
6	SI	$5 \text{ sen}(2\pi \cdot 3 \cdot t) + 10 \text{ sin}(2\pi \cdot 10 \cdot t)$	NO	1
7	SI	$5 \text{ sen}(2\pi \cdot 3 \cdot t) + 10 \text{ sin}(2\pi \cdot 10 \cdot t)$	NO	3
8	SI	$5 \text{ sen}(2\pi \cdot 3 \cdot t) + 10 \text{ sin}(2\pi \cdot 10 \cdot t)$	SI	3

### 4.5.1 CASO 1

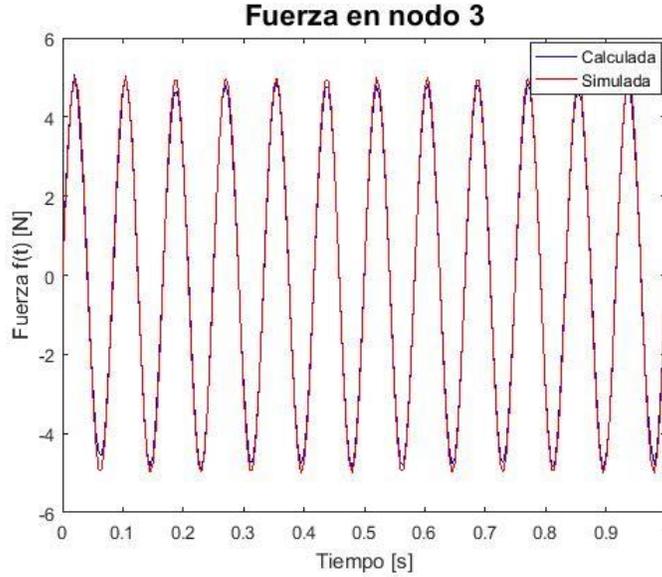
El primer caso analizado corresponde al caso sin amortiguamiento, con fuerza sinusoidal puntual, sin ruido y utilizando la respuesta simulada en un solo sensor o nodo. Los parámetros generales de la viga son los presentados en la tabla 4.1. Los parámetros específicos utilizados para este caso se muestran en la tabla 4.4.

**Tabla 4.4:** Parámetros específicos del caso 1.

Símbolo	Nombre [Unidades]	Valor o Expresión
$\alpha$	Constante de amortiguamiento proporcional	0
$\beta$	Constante de amortiguamiento proporcional	0
$nod_r$	Nodo donde se simula la respuesta medida	2
$nod_f$	Nodo donde se aplica la fuerza simulada	3
$f_e$	Fuerza sinusoidal aplicada [N]	$5 \text{ sen}(2\pi \cdot 12 \cdot t)$
$\lambda$	Parámetro de regularización de Tikhonov	0,01



**Gráfico 4.1:** Respuesta simulada y calculada en función del tiempo para el caso 1.



**Gráfico 4.2:** Fuerza simulada y calculada en función del tiempo para el caso 1.

**Tabla 4.5:** Valor de la norma para respuestas y fuerzas del caso 1.

Norma	Valor
$\ A^t w - x_e^t\ _2$	0,00048
$\ B^t w - f_e^t\ _2$	0,43202

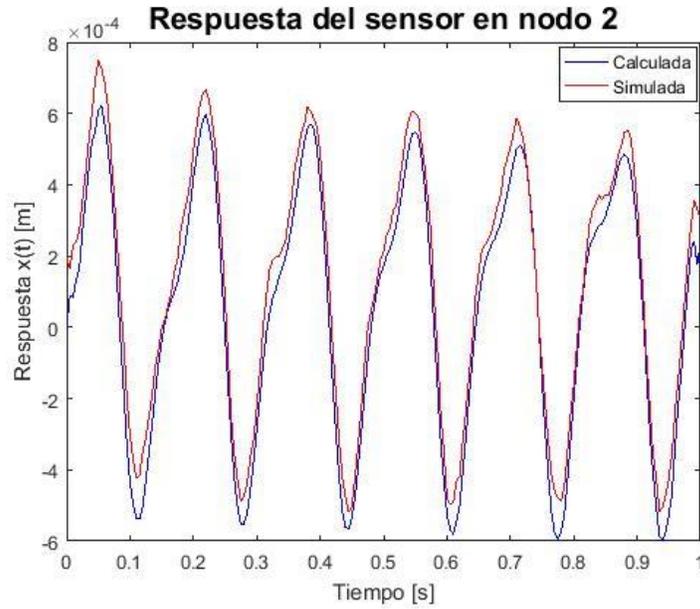
#### 4.5.2 CASO 2

El segundo caso analizado corresponde al caso sin amortiguamiento, con fuerza sinusoidal puntual, con ruido y utilizando la respuesta simulada en 3 sensores o nodos. Los parámetros generales de la viga son los presentados en la tabla 4.1. Los parámetros específicos utilizados para este caso se muestran en la tabla 4.6.

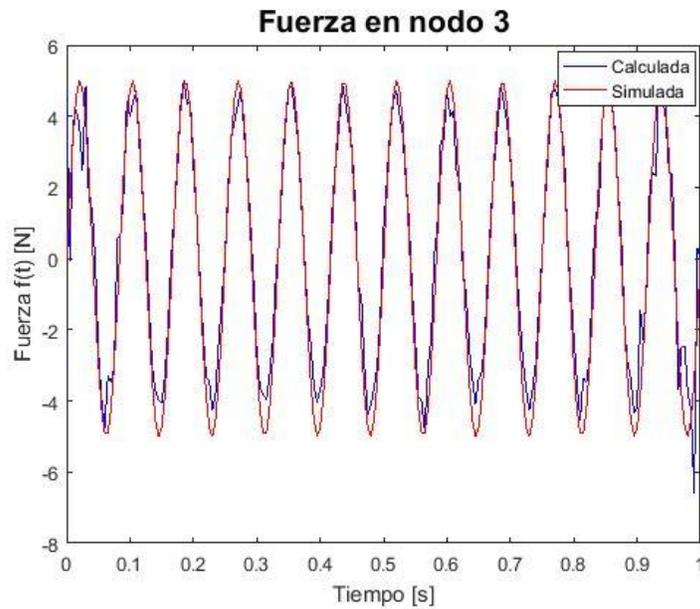
**Tabla 4.6:** Parámetros específicos del caso 2.

Símbolo	Nombre [Unidades]	Valor o Expresión
$\alpha$	Constante de amortiguamiento proporcional	0
$\beta$	Constante de amortiguamiento proporcional	0
$nod_r$	Nodos donde se simula la respuesta	2,4,5
$nod_f$	Nodo donde se aplica la fuerza simulada	3
$f_e$	Fuerza sinusoidal aplicada [N]	$5 \text{ sen}(2\pi \cdot 12 \cdot t)$
$\lambda$	Parámetro de regularización de Tikhonov	0,01
$x_{e,rand}$	Ruido simulado [%]*	10

\*El ruido simulado tiene una magnitud del 10% de la respuesta máxima simulada.



**Gráfico 4.3:** Respuesta simulada y calculada en función del tiempo para el caso 2.



**Gráfico 4.4:** Fuerza simulada y calculada en función del tiempo para el caso 2.

**Tabla 4.7:** Valor de la norma para respuestas y fuerzas del caso 2.

Norma	Valor
$\ A^t w - x_e^t\ _2$	0,00060
$\ B^t w - f_e^t\ _2$	2,37782

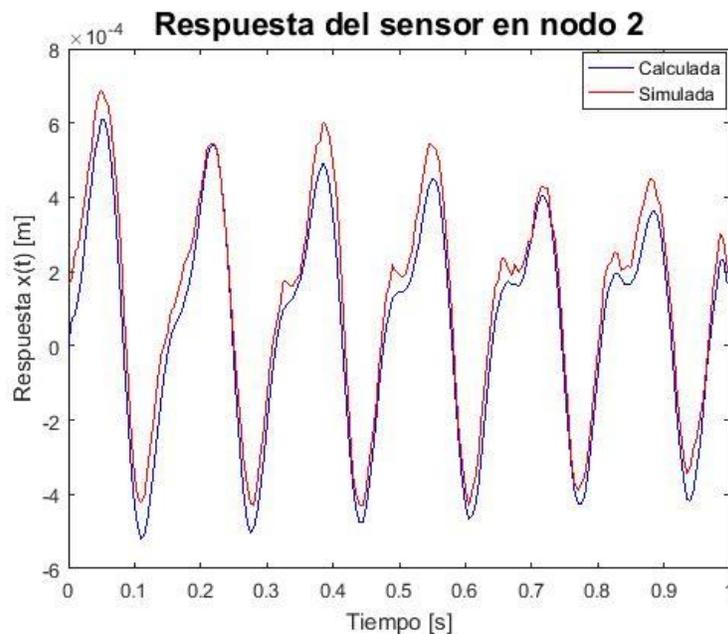
### 4.5.3 CASO 3

El tercer caso analizado corresponde al caso con amortiguamiento, con fuerza sinusoidal puntual, con ruido y utilizando la respuesta simulada en 3 sensores o nodos. Los parámetros generales de la viga son los presentados en la tabla 4.1. Los parámetros específicos utilizados para este caso se muestran en la tabla 4.8.

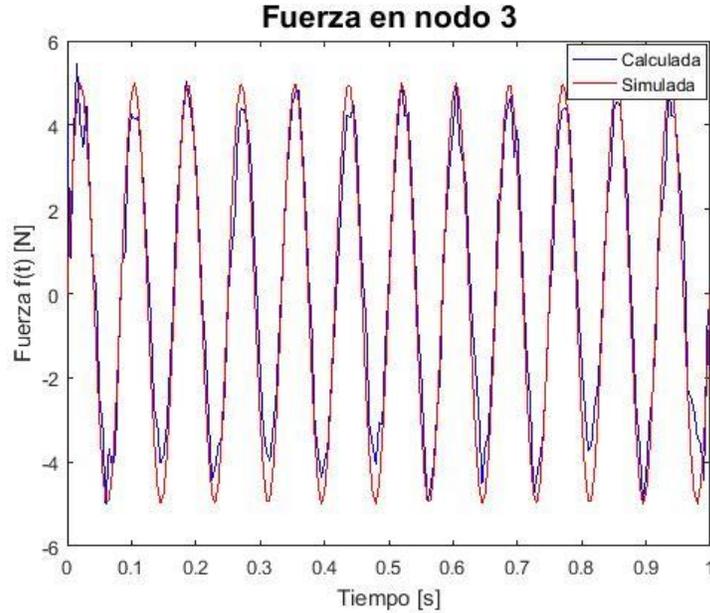
**Tabla 4.8:** Parámetros específicos del caso 3.

Símbolo	Nombre [Unidades]	Valor o Expresión
$\alpha$	Constante de amortiguamiento proporcional	1
$\beta$	Constante de amortiguamiento proporcional	$10^{-5}$
$nod_r$	Nodos donde se simula la respuesta	2,4,5
$nod_f$	Nodo donde se aplica la fuerza simulada	3
$f_e$	Fuerza sinusoidal aplicada [N]	$5 \text{ sen}(2\pi \cdot 12 \cdot t)$
$\lambda$	Parámetro de regularización de Tikhonov	0,01
$x_{e,rand}$	Ruido simulado [%]*	10

\*El ruido simulado tiene una magnitud del 10% de la respuesta máxima simulada.



**Gráfico 4.5:** Respuesta simulada y calculada en función del tiempo para el caso 3.



**Gráfico 4.6:** Fuerza simulada y calculada en función del tiempo para el caso 3.

**Tabla 4.9:** Valor de la norma para respuestas y fuerzas del caso 3.

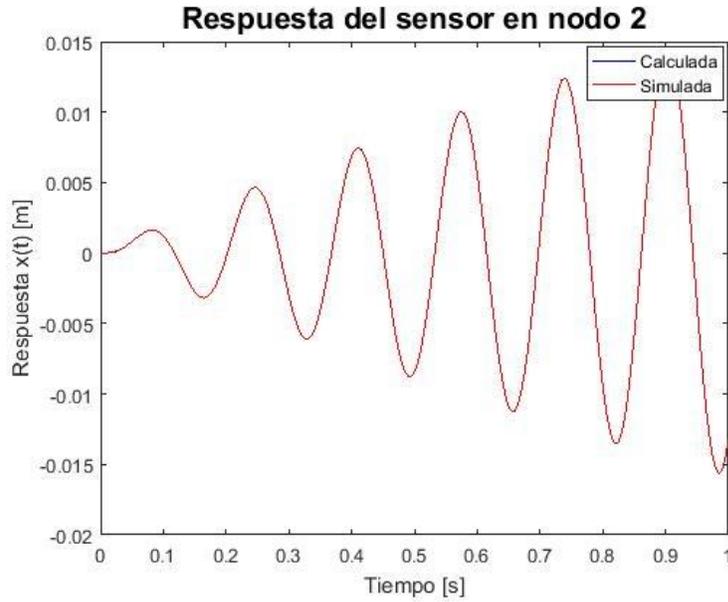
Norma	Valor
$\ A^t w - x_e^t\ _2$	0,00053
$\ B^t w - f_e^t\ _2$	2,32726

#### 4.5.4 CASO 4

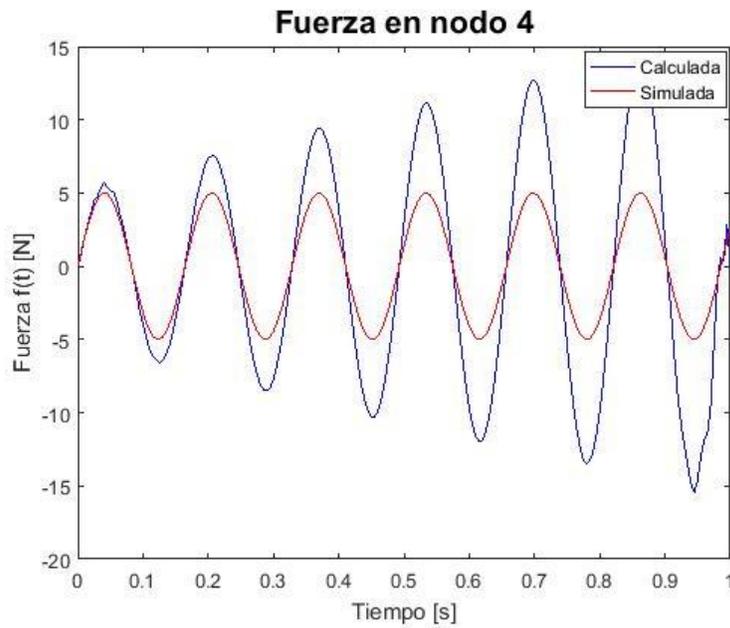
El cuarto caso analizado corresponde al caso con amortiguamiento, con fuerza sinusoidal puntual, sin ruido, en estado transiente y utilizando la respuesta simulada en un solo sensor o nodo. Los parámetros generales de la viga son los presentados en la tabla 4.1. Los parámetros específicos utilizados para este caso se muestran en la tabla 4.10.

**Tabla 4.10:** Parámetros específicos del caso 4.

Símbolo	Nombre [Unidades]	Valor o Expresión
$\alpha$	Constante de amortiguamiento proporcional	1
$\beta$	Constante de amortiguamiento proporcional	$10^{-5}$
$nod_r$	Nodos donde se simula la respuesta	2
$nod_f$	Nodo donde se aplica la fuerza simulada	4
$f_e$	Fuerza sinusoidal aplicada [N]	$5 \text{ sen}(2\pi \cdot 6,08 \cdot t)$
$\lambda$	Parámetro de regularización de Tikhonov	0,01



**Gráfico 4.7:** Respuesta simulada y calculada en función del tiempo para el caso 4.



**Gráfico 4.8:** Fuerza simulada y calculada en función del tiempo para el caso 4.

**Tabla 4.11:** Valor de la norma para respuestas y fuerzas del caso 4.

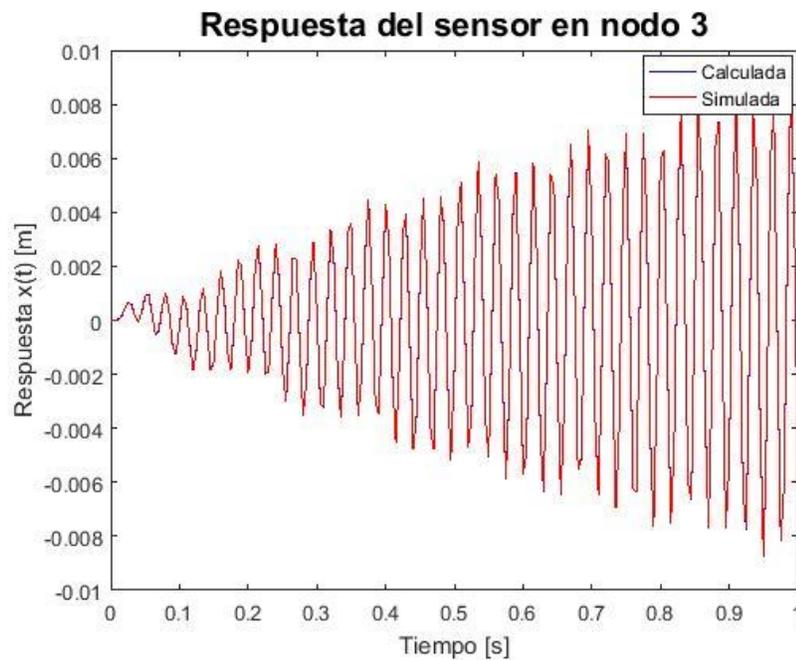
Norma	Valor
$\ A^t \mathbf{w} - \mathbf{x}_e^t\ _2$	0,00110
$\ B^t \mathbf{w} - \mathbf{f}_e^t\ _2$	12,46236

#### 4.5.5 CASO 5

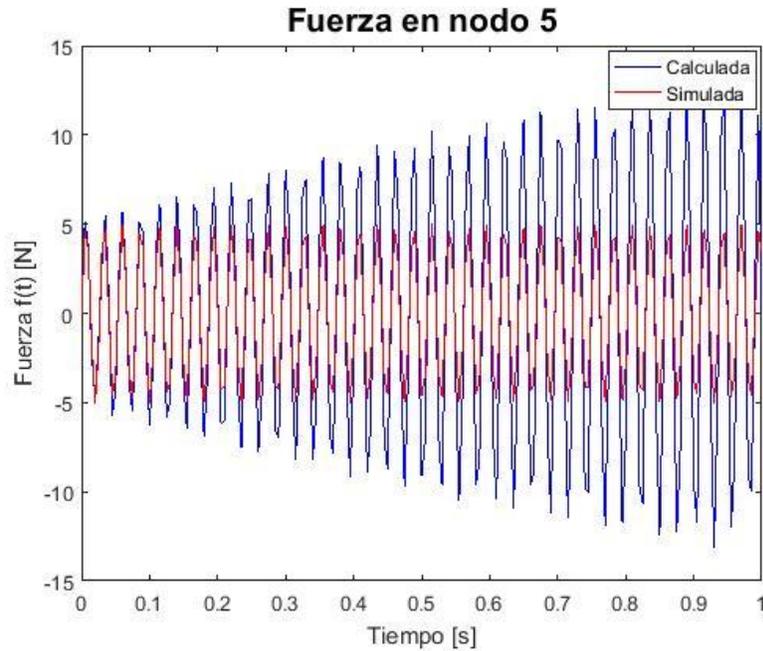
El quinto caso analizado corresponde al caso con amortiguamiento, con fuerza sinusoidal puntual, sin ruido, en estado transiente y utilizando la respuesta simulada en 3 sensores o nodos. Los parámetros generales de la viga son los presentados en la tabla 4.1. Los parámetros específicos utilizados para este caso se muestran en la tabla 4.12.

**Tabla 4.12:** Parámetros específicos del caso 5.

Símbolo	Nombre [Unidades]	Valor o Expresión
$\alpha$	Constante de amortiguamiento proporcional	1
$\beta$	Constante de amortiguamiento proporcional	$10^{-5}$
$nod_r$	Nodos donde se simula la respuesta	2,3,4
$nod_f$	Nodo donde se aplica la fuerza simulada	5
$f_e$	Fuerza sinusoidal aplicada [N]	$5 \text{ sen}(2\pi \cdot 37,37 \cdot t)$
$\lambda$	Parámetro de regularización de Tikhonov	0,01



**Gráfico 4.9:** Respuesta simulada y calculada en función del tiempo para el caso 5.



**Gráfico 4.10:** Fuerza simulada y calculada en función del tiempo para el caso 5.

**Tabla 4.13:** Valor de la norma para respuestas y fuerzas del caso 5.

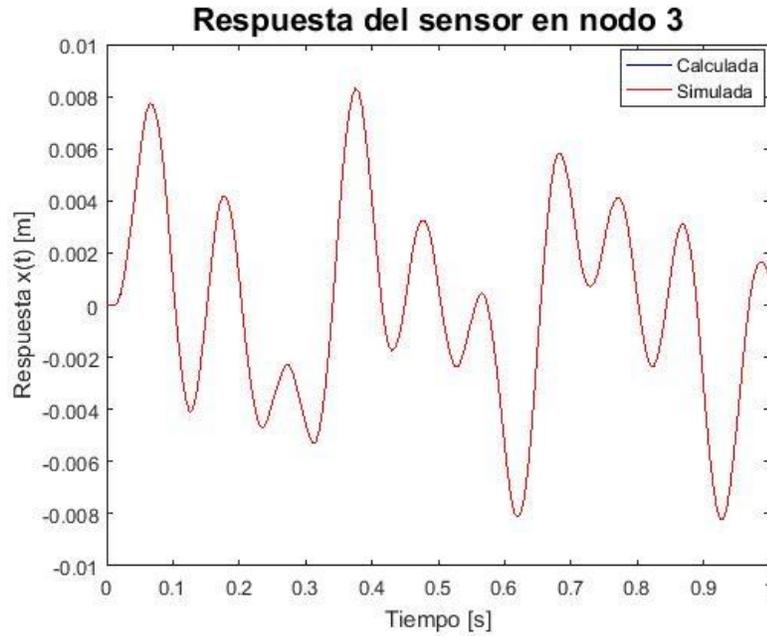
Norma	Valor
$\ A^t w - x_e^t\ _2$	0,00083
$\ B^t w - f_e^t\ _2$	10,54096

#### 4.5.6 CASO 6

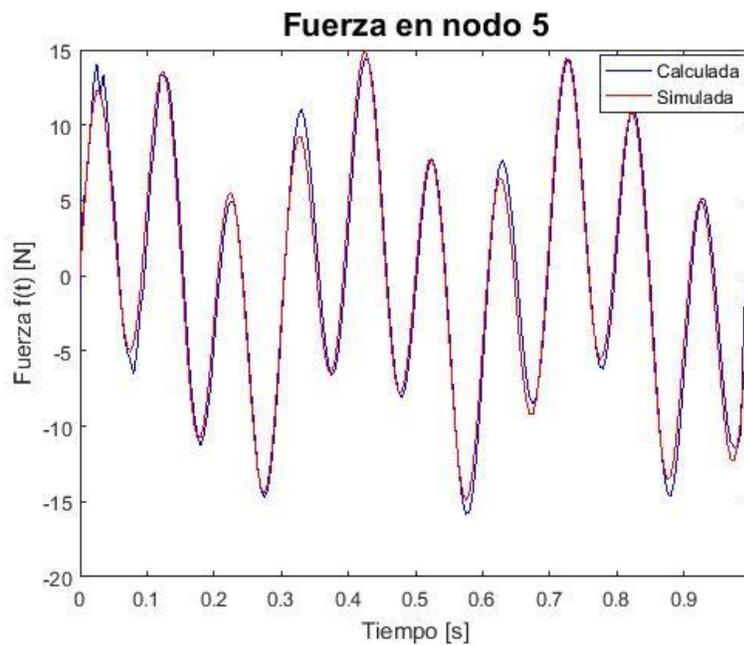
El sexto caso analizado corresponde al caso con amortiguamiento, con fuerza sinusoidal doble puntual, sin ruido y utilizando la respuesta simulada en un solo sensor o nodo. Los parámetros generales de la viga son los presentados en la tabla 4.1. Los parámetros específicos utilizados para este caso se muestran en la tabla 4.14.

**Tabla 4.14:** Parámetros específicos del caso 6.

Símbolo	Nombre [Unidades]	Valor o Expresión
$\alpha$	Constante de amortiguamiento proporcional	1
$\beta$	Constante de amortiguamiento proporcional	$10^{-5}$
$nod_r$	Nodos donde se simula la respuesta	3
$nod_f$	Nodo donde se aplica la fuerza simulada	5
$f_e$	Fuerza sinusoidal aplicada [N]	$5 \sin(2\pi \cdot 3 \cdot t) + 10 \sin(2\pi \cdot 10 \cdot t)$
$\lambda$	Parámetro de regularización de Tikhonov	0,01



**Gráfico 4.11:** Respuesta simulada y calculada en función del tiempo para el caso 6.



**Gráfico 4.12:** Fuerza simulada y calculada en función del tiempo para el caso 6.

**Tabla 4.15:** Valor de la norma para respuestas y fuerzas del caso 6.

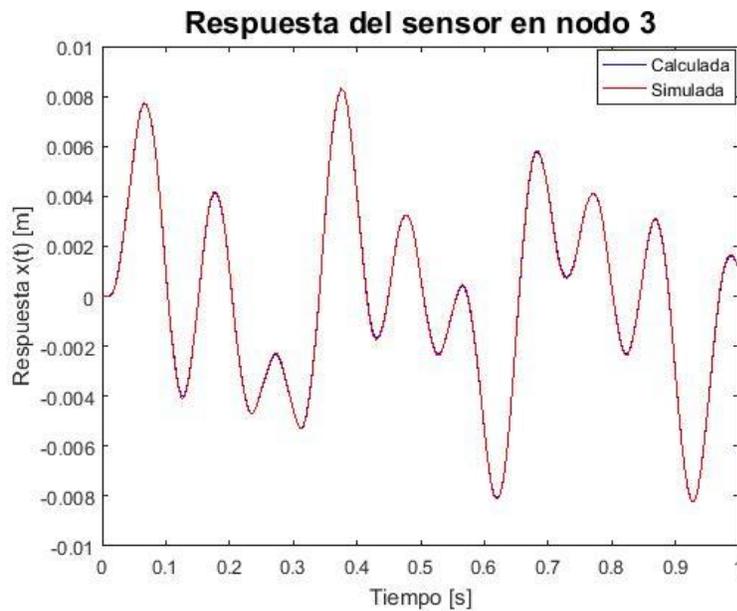
Norma	Valor
$\ A^t \mathbf{w} - \mathbf{x}_e^t\ _2$	0,0012
$\ B^t \mathbf{w} - \mathbf{f}_e^t\ _2$	1,1182

#### 4.5.7 CASO 7

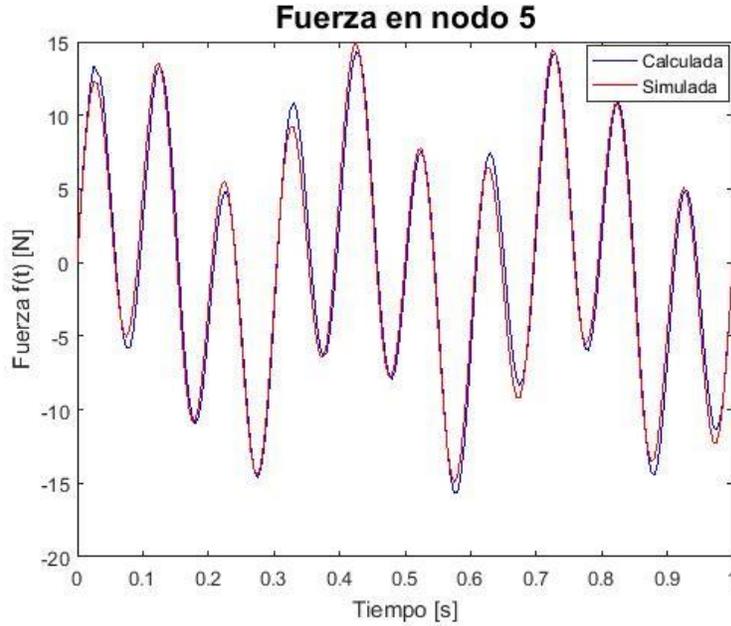
El séptimo caso analizado corresponde al caso con amortiguamiento, con fuerza sinusoidal doble puntual, sin ruido y utilizando la respuesta simulada en 3 sensores o nodos. Los parámetros generales de la viga son los presentados en la tabla 4.1. Los parámetros específicos utilizados para este caso se muestran en la tabla 4.16.

**Tabla 4.16:** Parámetros específicos del caso 7.

Símbolo	Nombre [Unidades]	Valor o Expresión
$\alpha$	Constante de amortiguamiento proporcional	1
$\beta$	Constante de amortiguamiento proporcional	$10^{-5}$
$nod_r$	Nodos donde se simula la respuesta	2,3,4
$nod_f$	Nodo donde se aplica la fuerza simulada	5
$f_e$	Fuerza sinusoidal aplicada [N]	$5 \sin(2\pi \cdot 3 \cdot t) + 10 \sin(2\pi \cdot 10 \cdot t)$
$\lambda$	Parámetro de regularización de Tikhonov	0,01



**Gráfico 4.13:** Respuesta simulada y calculada en función del tiempo para el caso 7.



**Gráfico 4.14:** Fuerza simulada y calculada en función del tiempo para el caso 7.

**Tabla 4.17:** Valor de la norma para respuestas y fuerzas del caso 7.

Norma	Valor
$\ A^t w - x_e^t\ _2$	0,00050
$\ B^t w - f_e^t\ _2$	1,03252

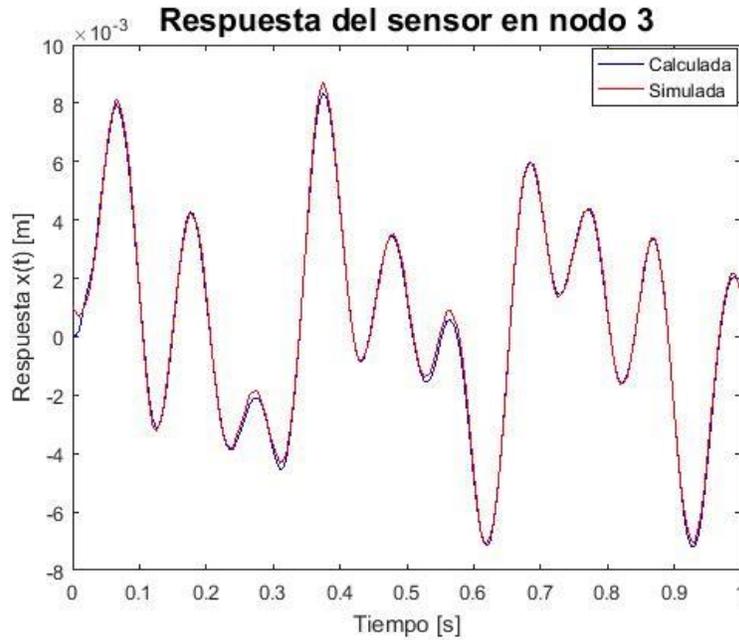
#### 4.5.8 CASO 8

El octavo caso analizado corresponde al caso con amortiguamiento, con fuerza sinusoidal doble puntual, con ruido y utilizando la respuesta simulada en 3 sensores o nodos. Los parámetros generales de la viga son los presentados en la tabla 4.1. Los parámetros específicos utilizados para este caso se muestran en la tabla 4.18.

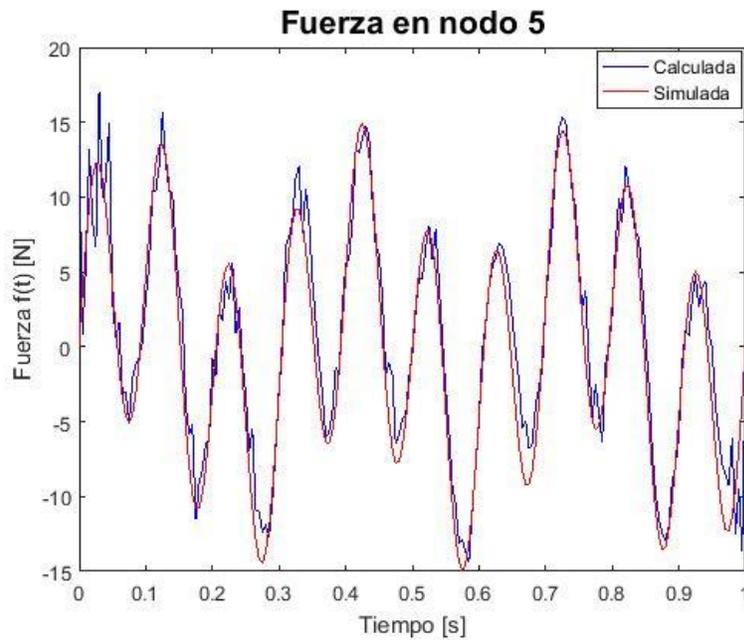
**Tabla 4.18:** Parámetros específicos del caso 8.

Símbolo	Nombre [Unidades]	Valor o Expresión
$\alpha$	Constante de amortiguamiento proporcional	1
$\beta$	Constante de amortiguamiento proporcional	$10^{-5}$
$nod_r$	Nodos donde se simula la respuesta	2,3,4
$nod_f$	Nodo donde se aplica la fuerza simulada	5
$f_e$	Fuerza sinusoidal aplicada [N]	$5 \sin(2\pi \cdot 3 \cdot t) + 10 \sin(2\pi \cdot 10 \cdot t)$
$\lambda$	Parámetro de regularización de Tikhonov	0,01
$x_{e,rand}$	Ruido simulado [%]*	10

\*El ruido simulado tiene una magnitud del 10% de la respuesta máxima simulada.



**Gráfico 4.15:** Respuesta simulada y calculada en función del tiempo para el caso 8.



**Gráfico 4.16:** Fuerza simulada y calculada en función del tiempo para el caso 8.

**Tabla 4.19:** Valor de la norma para respuestas y fuerzas del caso 8.

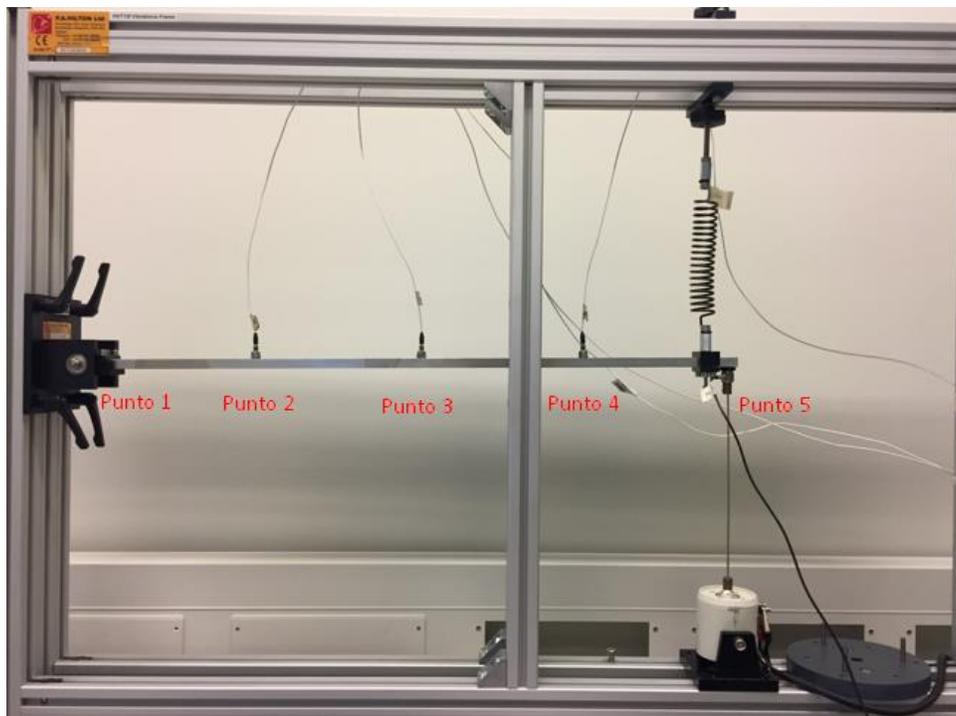
Norma	Valor
$\ A^t \mathbf{w} - \mathbf{x}_e^t\ _2$	0,00226
$\ B^t \mathbf{w} - \mathbf{f}_e^t\ _2$	2,29486

## 5. ANÁLISIS EXPERIMENTAL

### 5.1 MONTAJE EXPERIMENTAL

El análisis experimental corresponde a la segunda etapa de validación del algoritmo de identificación de fuerzas. En forma análoga al caso numérico, se dividió la viga en 4 secciones iguales, teniéndose un total de 5 nodos o puntos posibles de medición.

El montaje de la viga en estudio corresponde al mostrado en la figura 5.1. Como se puede ver, se tienen las mismas condiciones de borde expuestas en la figura 4.1, un apoyo simple en el extremo izquierdo y sujeta a un resorte en el extremo derecho.



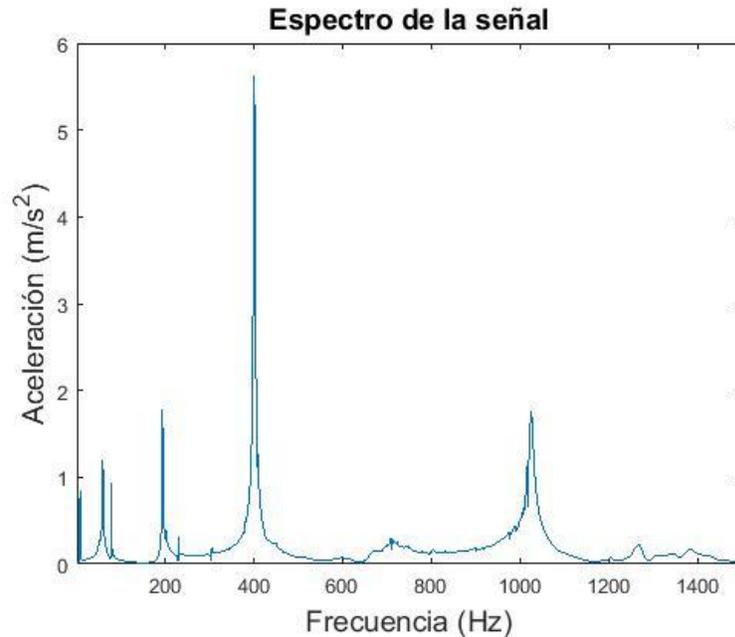
**Figura 5.1:** Montaje experimental de la viga en estudio.

En esta configuración se utilizaron 3 acelerómetros, ubicados en 3 puntos que coinciden con los nodos 2,3 y 4 del modelo numérico y un punto de excitación que coincide con el nodo 5 del modelo numérico según la notación expuesta en la figura 4.1. El agitador electromagnético fue situado en el nodo 5 de acuerdo a la notación expuesta en la figura 4.1 y lo mostrado en la figura 5.1.

En primera instancia se excitó la viga en estudio con un martillo de impacto en el nodo 5, con el fin de generar la base de datos de fuerzas y respuesta a fuerzas tipo impulso necesarias para el algoritmo de identificación de fuerzas expuesta en el capítulo 4.2.

Por otro lado se utilizó la respuesta ante un impacto de martillo, medida por uno de los acelerómetros, para realizar un análisis espectral aplicando la transformada de Fourier con el fin de obtener las frecuencias naturales de la viga.

En el gráfico 5.1 se muestra el espectro en frecuencia de la respuesta a un impulso.



**Gráfico 5.1:** Espectro en frecuencia de la respuesta a un impulso en la viga en estudio.

De acuerdo al gráfico 5.1, se determinan las frecuencias naturales de la viga, las cuales son expuestas en la tabla 5.1.

**Tabla 5.1:** Frecuencias naturales de la viga.

Frecuencias Naturales	Valor [Hz]
$\omega_{n1}$	8
$\omega_{n2}$	60
$\omega_{n3}$	80
$\omega_{n4}$	194
$\omega_{n5}$	230
$\omega_{n6}$	402
$\omega_{n7}$	1024

Los parámetros del análisis experimental tanto para la creación de la base de datos como para la medición de las fuerzas producidas por el agitador electromagnético y las respuestas de los acelerómetros, se muestran en la tabla 5.2.

**Tabla 5.2:** Parámetros generales del análisis experimental.

Símbolo	Nombre [Unidades]	Valor o Expresión
$n_m$	Número de puntos de medición	3
$n_{ex}$	Número de puntos excitados	1
$f_m$	Frecuencia de adquisición de datos [Hz]	1500
$t_{fin}$	Horizonte de tiempo final [s]	1,0

Posteriormente se excitó la estructura con distintos tipos de fuerza utilizando el agitador electromagnético y se registraron las respuestas de los 3 acelerómetros y el sensor de fuerza ubicado en el nodo 5 como se ilustra en la figura 5.1.

Cabe destacar que la viga en estudio, tiene parámetros de amortiguación intrínsecos, pero la determinación de estos no contribuye en el objetivo del presente trabajo.

En las siguientes subsecciones se analizarán distintos casos de aplicación de fuerzas excitadoras. En la tabla 5.3 se muestran los distintos casos a estudiar.

**Tabla 5.3:** Casos a estudiar del análisis experimental.

Caso	Tipo de Fuerza	Punto de excitación	Puntos de medición de la respuesta
1	$A \text{ sen}(2\pi \cdot 5 \cdot t)$	5	2
2	$A \text{ sen}(2\pi \cdot 5 \cdot t)$	5	2-3-4
3	$A \text{ sen}(2\pi \cdot 8 \cdot t)$	5	4
4	$A \text{ sen}(2\pi \cdot 8 \cdot t)$	5	2-3-4
5	$A \text{ sen}(2\pi \cdot 30 \cdot t)$	5	3
6	$A \text{ sen}(2\pi \cdot 30 \cdot t)$	5	2-3-4
7	$A \text{ sen}(2\pi \cdot 80 \cdot t)$	5	3
8	$A \text{ sen}(2\pi \cdot 80 \cdot t)$	5	2-3-4
9	$A_1 \text{ sen}(2\pi \cdot 10 \cdot t) + A_2 \text{ sen}(2\pi \cdot 50 \cdot t)$	5	4
10	$A_1 \text{ sen}(2\pi \cdot 10 \cdot t) + A_2 \text{ sen}(2\pi \cdot 50 \cdot t)$	5	2-3-4

Cabe destacar que las amplitudes  $A$ ,  $A_1$  y  $A_2$  varían de acuerdo a la ganancia impuesta en el amplificador de señales.

La creación de la base de datos experimental y el desarrollo del algoritmo de identificación experimental son programados en el software Matlab y el código se muestra en el Anexo A.5 y Anexo A.6, respectivamente.

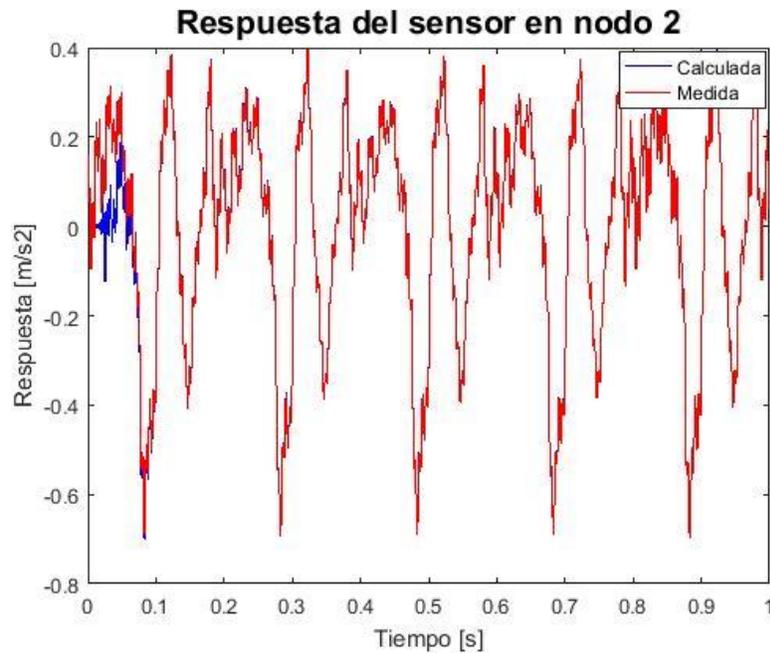
## 5.2 RESULTADOS EXPERIMENTALES

### 5.2.1 CASO 1

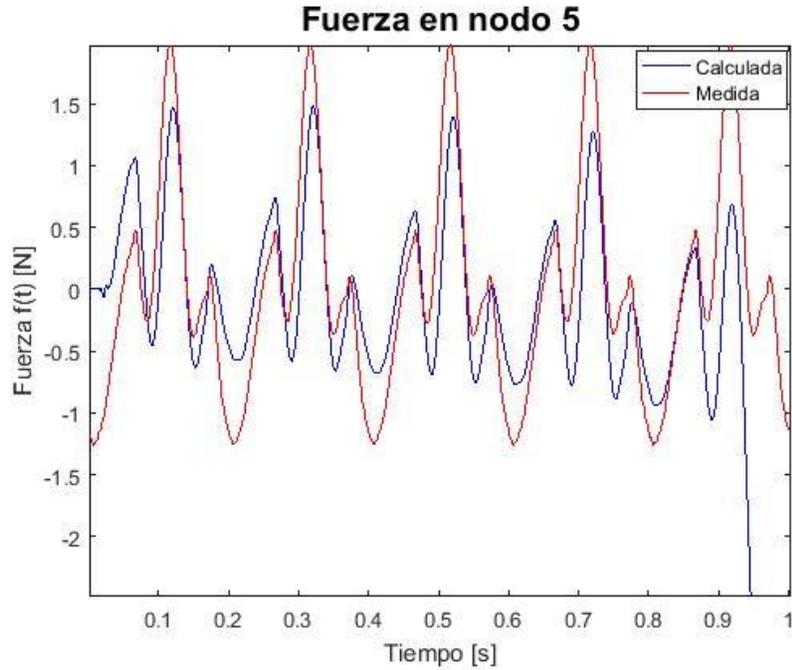
El primer caso analizado corresponde a una excitación con fuerza sinusoidal puntual y utilizando la respuesta medida de un solo sensor. Los parámetros generales del análisis son los presentados en la tabla 5.2. Los parámetros específicos utilizados para este caso se muestran en la tabla 5.4.

**Tabla 5.4:** Parámetros específicos del caso 1.

Símbolo	Nombre [Unidades]	Valor o Expresión
$p_r$	Punto donde se mide la respuesta	2
$p_f$	Punto donde se aplica la fuerza	5
$f_e$	Fuerza sinusoidal aplicada [N]	$A \text{ sen}(2\pi \cdot 5 \cdot t)$
$\lambda$	Parámetro de regularización de Tikhonov	0,01



**Gráfico 5.2:** Respuesta medida y calculada en el sensor 2 para el caso 1.



**Gráfico 5.3:** Fuerza real medida y calculada en el punto 5 para el caso 1.

**Tabla 5.5:** Valor de la norma para respuestas y fuerzas del caso 1.

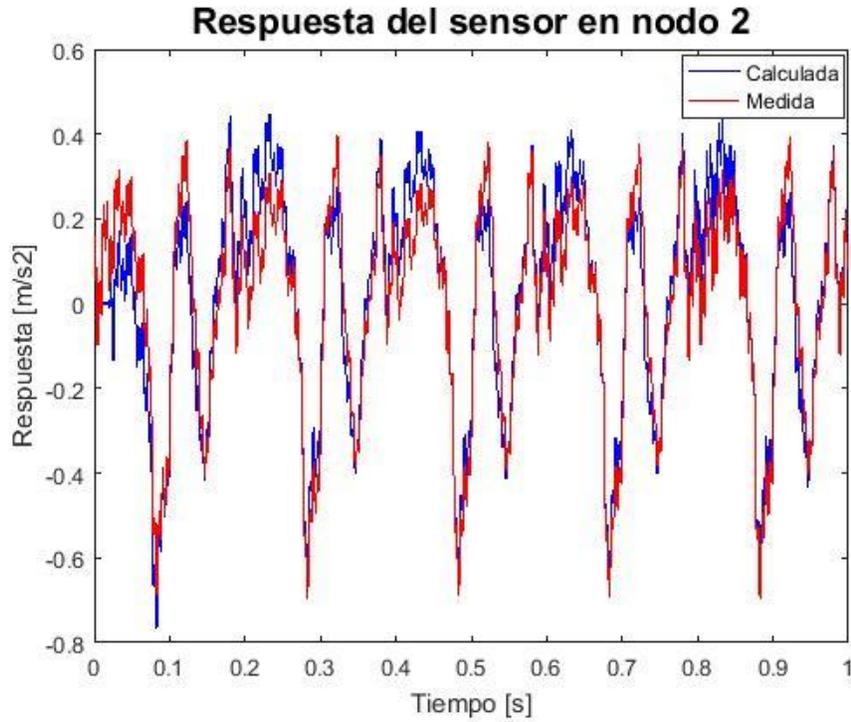
Norma	Valor
$\ A^t w - x_e^t\ _2$	1,4619
$\ B^t w - f_e^t\ _2$	43,1783

## 5.2.2 CASO 2

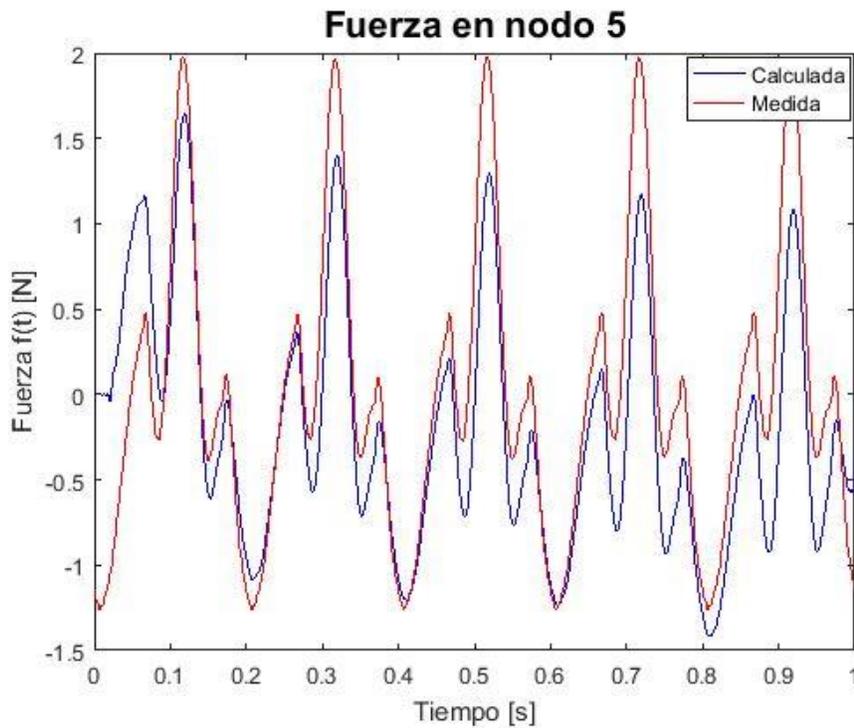
El segundo caso analizado corresponde a una excitación con fuerza sinusoidal puntual y utilizando la respuesta medida de 3 sensores. Los parámetros generales del análisis son los presentados en la tabla 5.2. Los parámetros específicos utilizados para este caso se muestran en la tabla 5.6.

**Tabla 5.6:** Parámetros específicos del caso 2.

Símbolo	Nombre [Unidades]	Valor o Expresión
$p_r$	Punto donde se mide la respuesta	2,3,4
$p_f$	Punto donde se aplica la fuerza	5
$f_e$	Fuerza sinusoidal aplicada [N]	$A \text{ sen}(2\pi \cdot 5 \cdot t)$
$\lambda$	Parámetro de regularización de Tikhonov	0,01



**Gráfico 5.4:** Respuesta medida y calculada en el sensor 2 para el caso 2.



**Gráfico 5.5:** Fuerza real medida y calculada en el punto 5 para el caso 2.

**Tabla 5.7:** Valor de la norma para respuestas y fuerzas del caso 2.

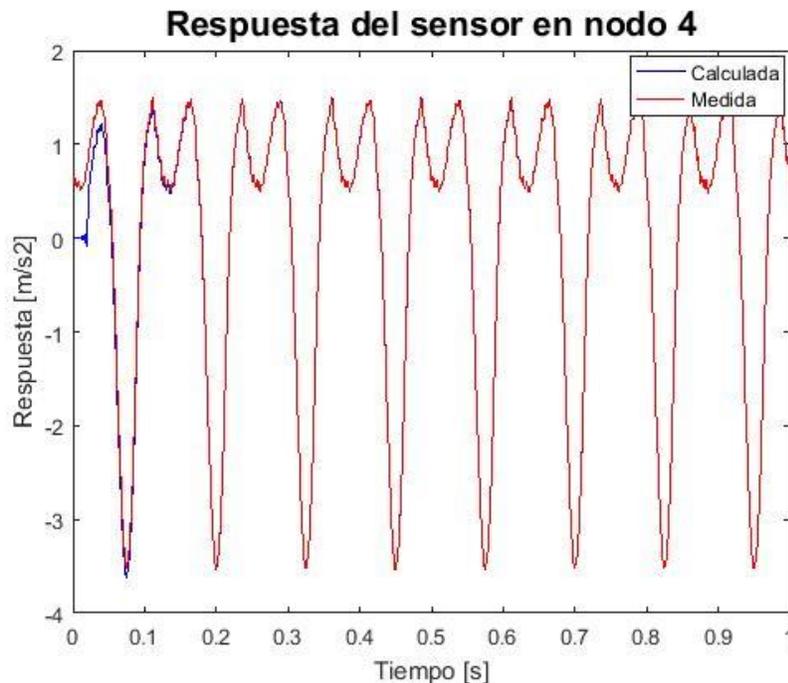
Norma	Valor
$\ A^t w - x_e^t\ _2$	2,0652
$\ B^t w - f_e^t\ _2$	9,7826

### 5.2.3 CASO 3

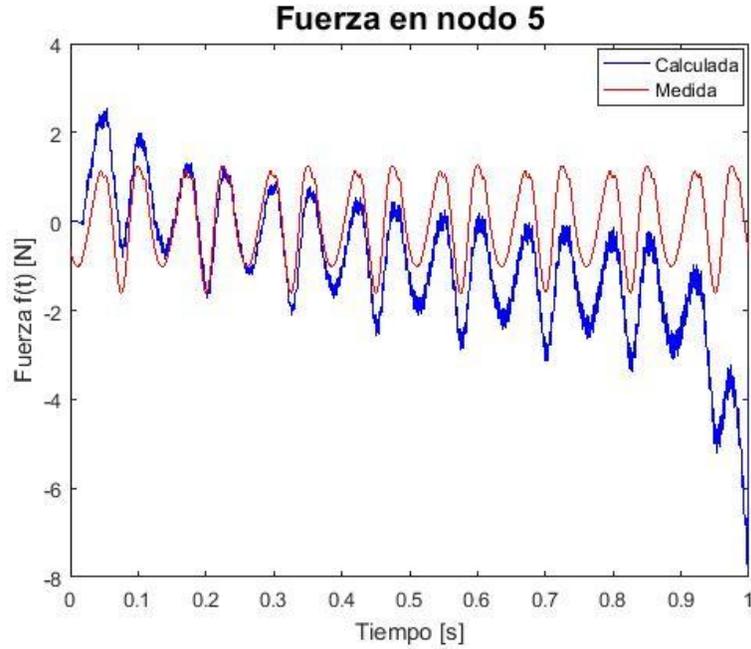
El tercer caso analizado corresponde a una excitación con fuerza sinusoidal puntual, **en estado estacionario** y utilizando la respuesta medida de un solo sensor. Los parámetros generales del análisis son los presentados en la tabla 5.2. Los parámetros específicos utilizados para este caso se muestran en la tabla 5.8.

**Tabla 5.8:** Parámetros específicos del caso 3.

Símbolo	Nombre [Unidades]	Valor o Expresión
$p_r$	Punto donde se mide la respuesta	4
$p_f$	Punto donde se aplica la fuerza	5
$f_e$	Fuerza sinusoidal aplicada [N]	$A \text{ sen}(2\pi \cdot 8 \cdot t)$
$\lambda$	Parámetro de regularización de Tikhonov	0,01



**Gráfico 5.6:** Respuesta medida y calculada en el sensor 4 para el caso 3.



**Gráfico 5.7:** Fuerza real medida y calculada en el punto 5 para el caso 3.

**Tabla 5.9:** Valor de la norma para respuestas y fuerzas del caso 3.

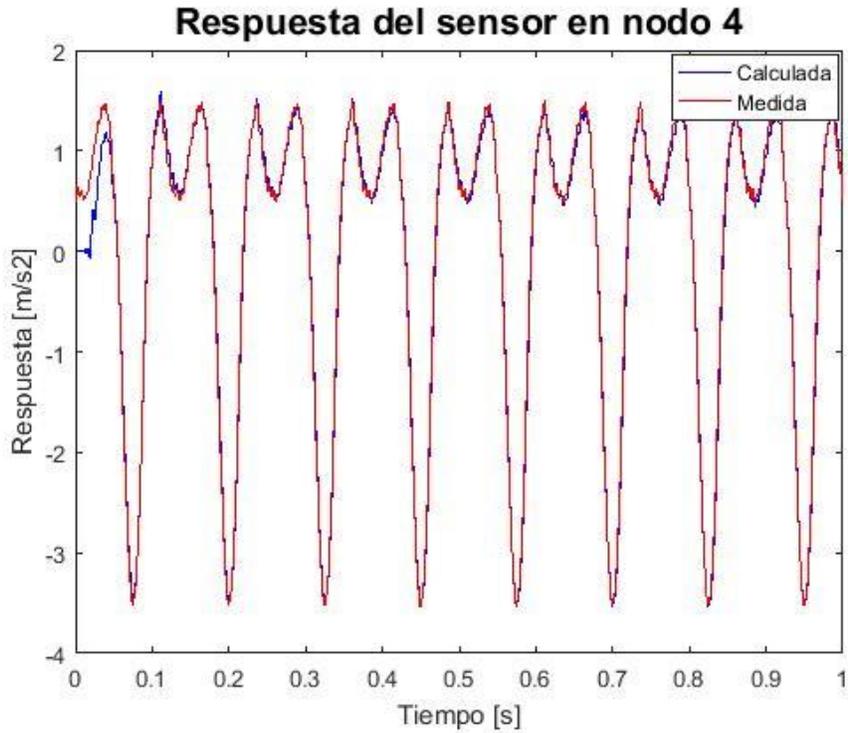
Norma	Valor
$\ A^t w - x_e^t\ _2$	4,1264
$\ B^t w - f_e^t\ _2$	39,0060

#### 5.2.4 CASO 4

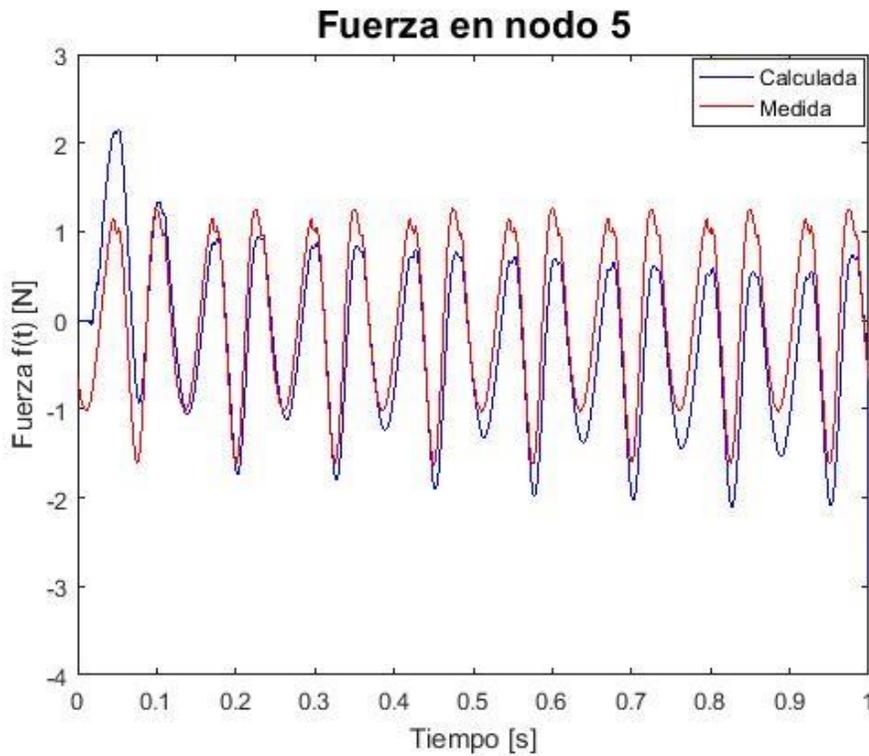
El cuarto caso analizado corresponde a una excitación con fuerza sinusoidal puntual, **en estado estacionario** y utilizando la respuesta medida de 3 sensores. Los parámetros generales del análisis son los presentados en la tabla 5.2. Los parámetros específicos utilizados para este caso se muestran en la tabla 5.10.

**Tabla 5.10:** Parámetros específicos del caso 4.

Símbolo	Nombre [Unidades]	Valor o Expresión
$p_r$	Punto donde se mide la respuesta	2,3,4
$p_f$	Punto donde se aplica la fuerza	5
$f_e$	Fuerza sinusoidal aplicada [N]	$A \text{ sen}(2\pi \cdot 8 \cdot t)$
$\lambda$	Parámetro de regularización de Tikhonov	0,01



**Gráfico 5.8:** Respuesta medida y calculada en el sensor 4 para el caso 4.



**Gráfico 5.9:** Fuerza real medida y calculada en el punto 5 para el caso 4.

**Tabla 5.11:** Valor de la norma para respuestas y fuerzas del caso 4.

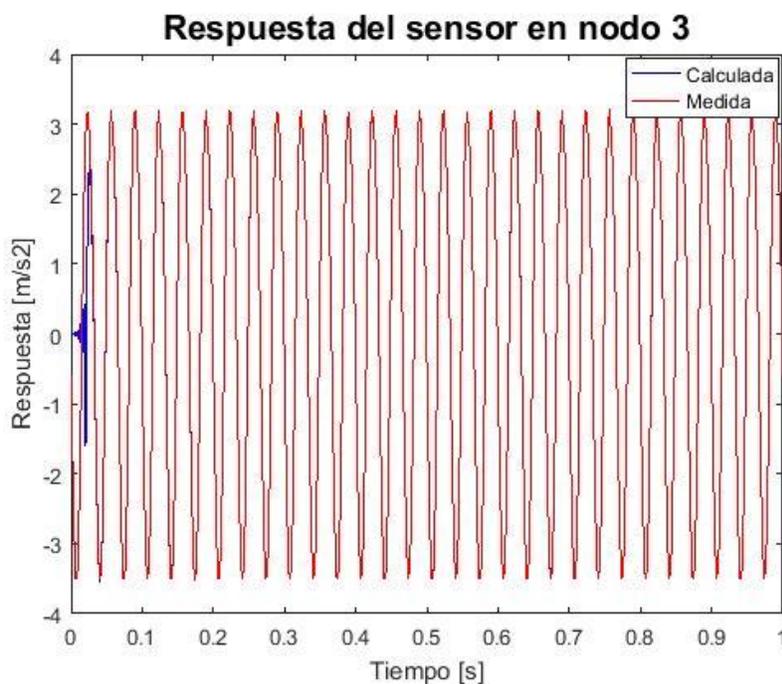
Norma	Valor
$\ A^t \mathbf{w} - \mathbf{x}_e^t\ _2$	2,4916
$\ B^t \mathbf{w} - \mathbf{f}_e^t\ _2$	12,6195

### 5.2.5 CASO 5

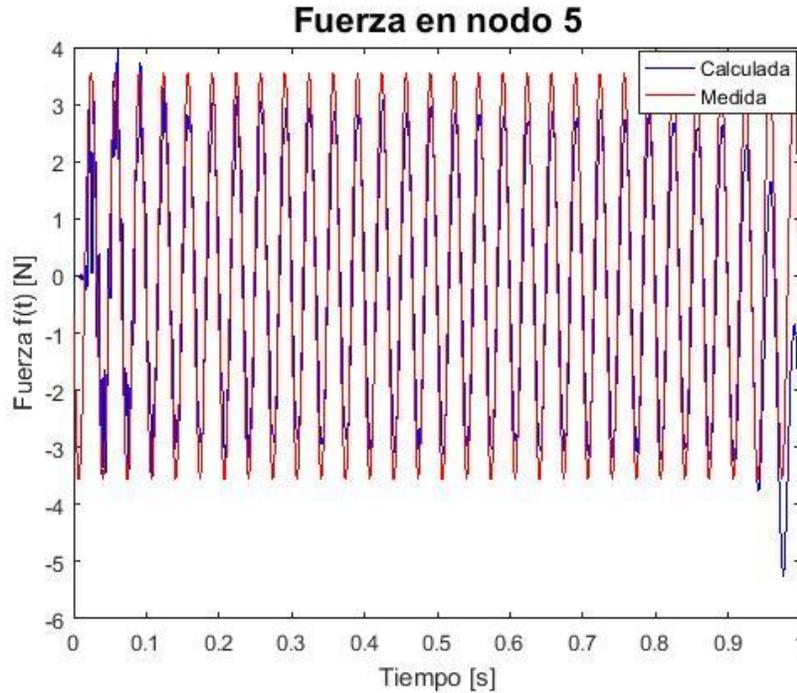
El quinto caso analizado corresponde a una excitación con fuerza sinusoidal puntual y utilizando la respuesta medida de un solo sensor. Los parámetros generales del análisis son los presentados en la tabla 5.2. Los parámetros específicos utilizados para este caso se muestran en la tabla 5.12.

**Tabla 5.12:** Parámetros específicos del caso 5.

Símbolo	Nombre [Unidades]	Valor o Expresión
$p_r$	Punto donde se mide la respuesta	3
$p_f$	Punto donde se aplica la fuerza	5
$f_e$	Fuerza sinusoidal aplicada [N]	$A \sin(2\pi \cdot 30 \cdot t)$
$\lambda$	Parámetro de regularización de Tikhonov	0,01



**Gráfico 5.10:** Respuesta medida y calculada en el sensor 3 para el caso 5.



**Gráfico 5.11:** Fuerza real medida y calculada en el nodo 5 para el caso 5.

**Tabla 5.13:** Valor de la norma para respuestas y fuerzas del caso 5.

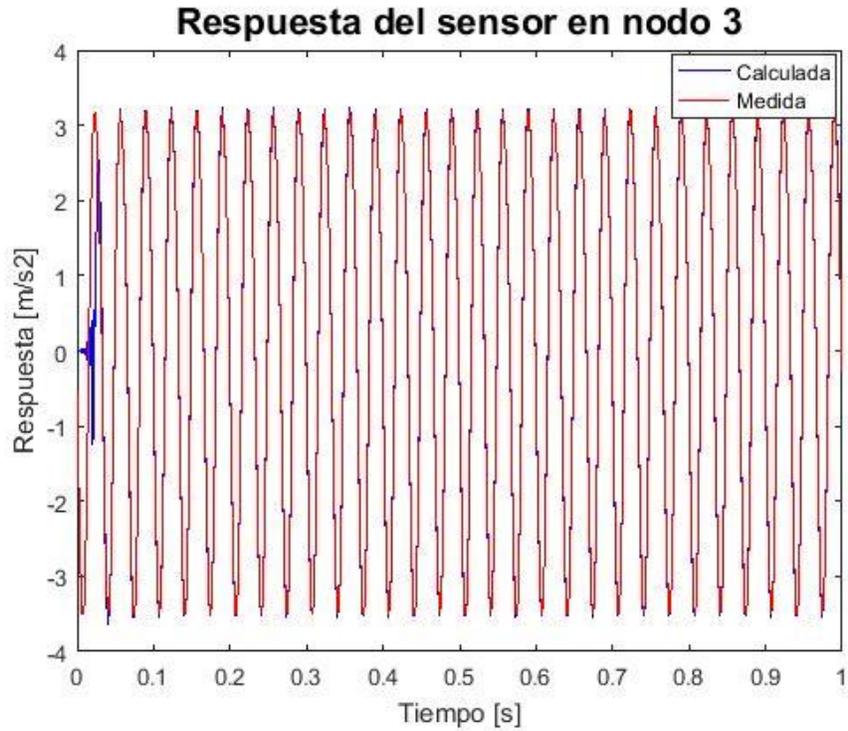
Norma	Valor
$\ A^t w - x_e^t\ _2$	15,1315
$\ B^t w - f_e^t\ _2$	10,5939

### 5.2.6 CASO 6

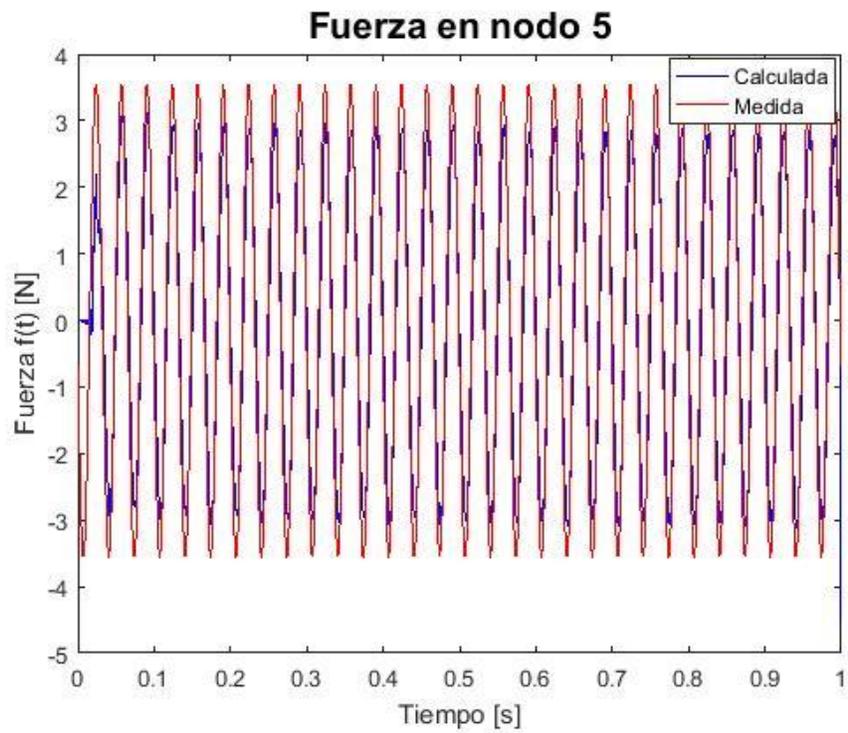
El sexto caso analizado corresponde a una excitación con fuerza sinusoidal puntual y utilizando la respuesta medida de 3 sensores. Los parámetros generales del análisis son los presentados en la tabla 5.2. Los parámetros específicos utilizados para este caso se muestran en la tabla 5.14.

**Tabla 5.14:** Parámetros específicos del caso 6.

Símbolo	Nombre [Unidades]	Valor o Expresión
$p_r$	Punto donde se mide la respuesta	2,3,4
$p_f$	Punto donde se aplica la fuerza	5
$f_e$	Fuerza sinusoidal aplicada [N]	$A \text{ sen}(2\pi \cdot 30 \cdot t)$
$\lambda$	Parámetro de regularización de Tikhonov	0,01



**Gráfico 5.12:** Respuesta medida y calculada en el sensor 3 para el caso 6.



**Gráfico 5.13:** Fuerza real medida y calculada en el punto 5 para el caso 6.

**Tabla 5.15:** Valor de la norma para respuestas y fuerzas del caso 6.

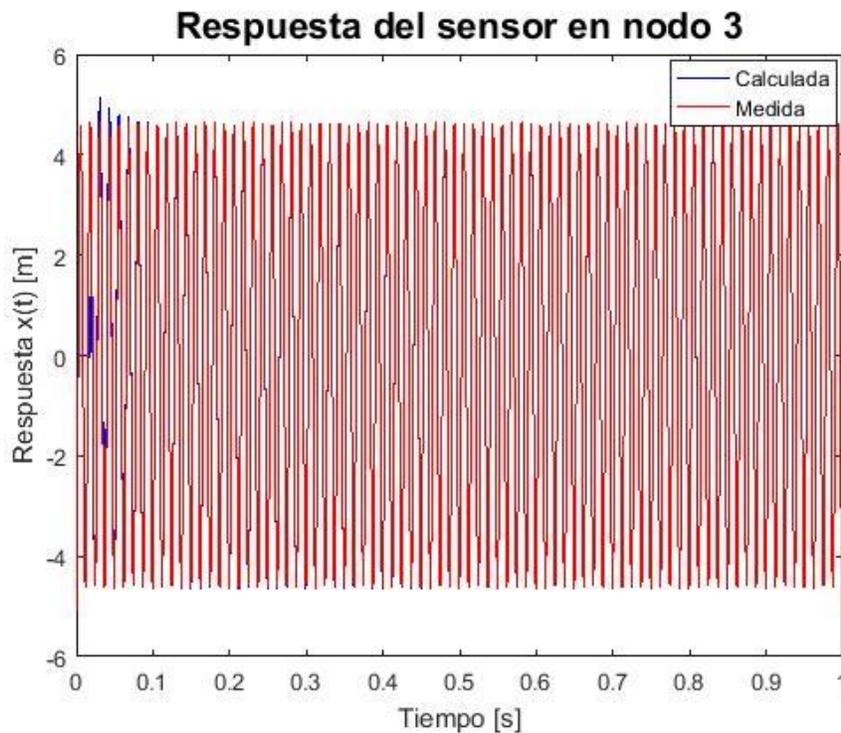
Norma	Valor
$\ A^t w - x_e^t\ _2$	8,1597
$\ B^t w - f_e^t\ _2$	7,7023

### 5.2.7 CASO 7

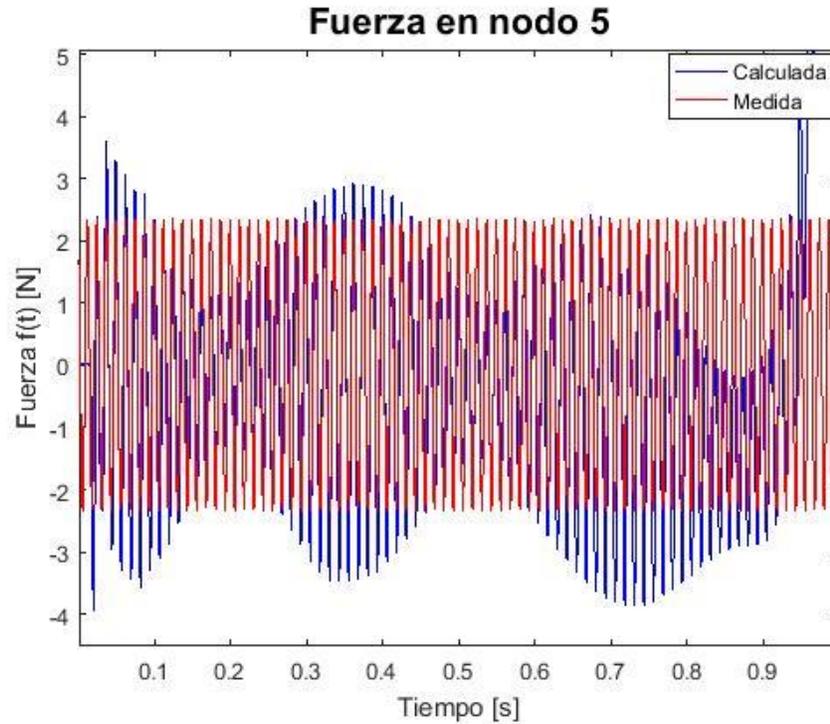
El séptimo caso analizado corresponde a una excitación con fuerza sinusoidal puntual, en estado estacionario y utilizando la respuesta medida de un solo sensor. Los parámetros generales del análisis son los presentados en la tabla 5.2. Los parámetros específicos utilizados para este caso se muestran en la tabla 5.16.

**Tabla 5.16:** Parámetros específicos del caso 7.

Símbolo	Nombre [Unidades]	Valor o Expresión
$p_r$	Punto donde se mide la respuesta	3
$p_f$	Punto donde se aplica la fuerza	5
$f_e$	Fuerza sinusoidal aplicada [N]	$A \text{ sen}(2\pi \cdot 80 \cdot t)$
$\lambda$	Parámetro de regularización de Tikhonov	0,01



**Gráfico 5.14:** Respuesta medida y calculada en el sensor 3 para el caso 7.



**Gráfico 5.15:** Fuerza real medida y calculada en el punto 5 para el caso 7.

**Tabla 5.17:** Valor de la norma para respuestas y fuerzas del caso 7.

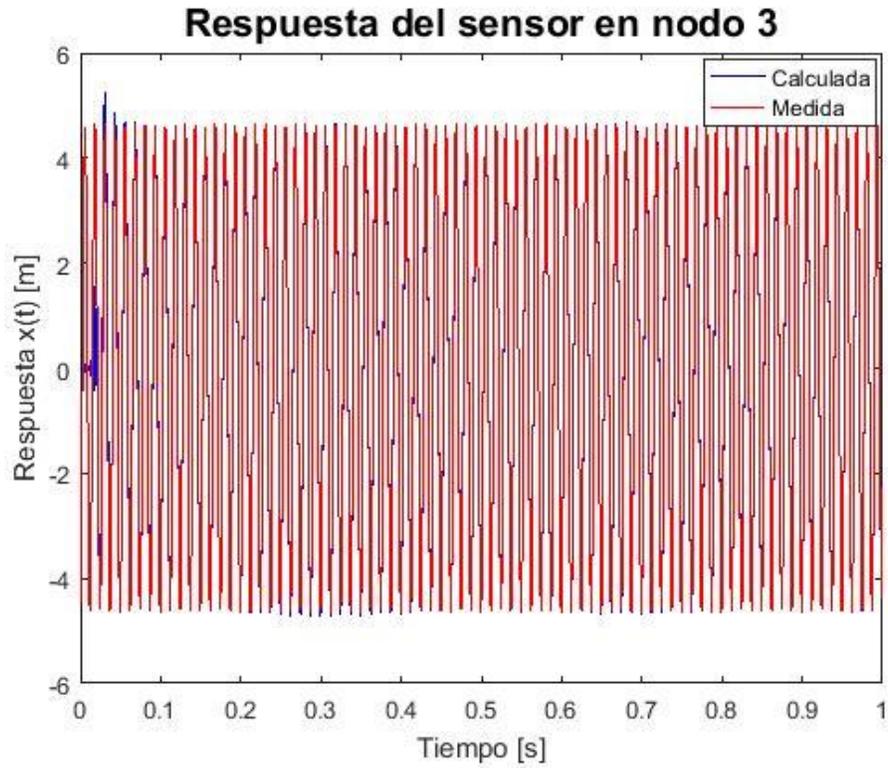
Norma	Valor
$\ A^t w - x_e^t\ _2$	6,0539
$\ B^t w - f_e^t\ _2$	48,4088

### 5.2.8 CASO 8

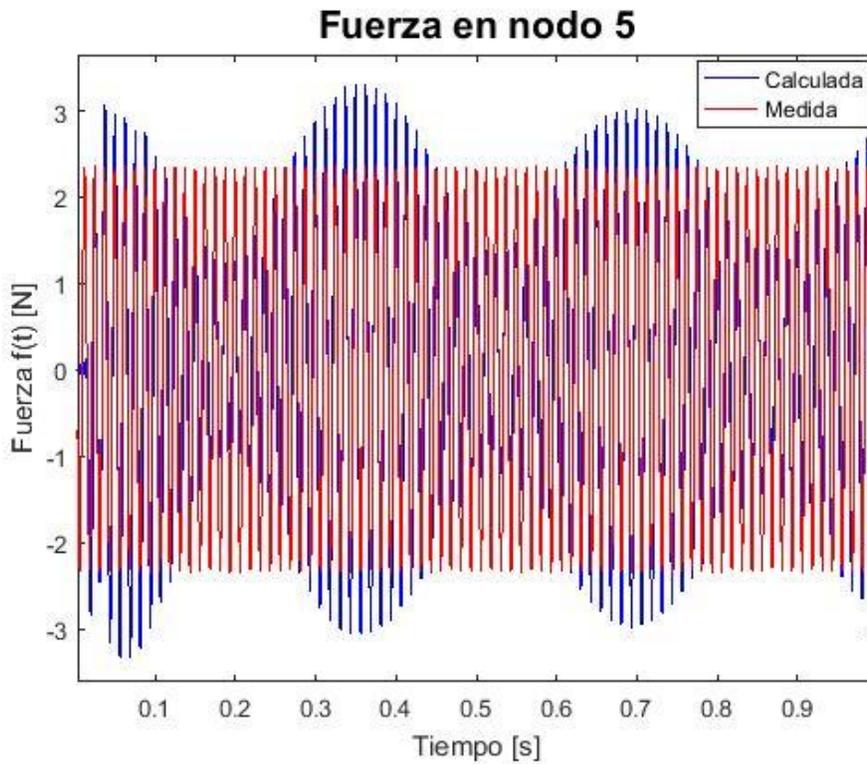
El octavo caso analizado corresponde a una excitación con fuerza sinusoidal puntual, en estado estacionario y utilizando la respuesta medida de 3 sensores. Los parámetros generales del análisis son los presentados en la tabla 5.2. Los parámetros específicos utilizados para este caso se muestran en la tabla 5.18.

**Tabla 5.18:** Parámetros específicos del caso 8.

Símbolo	Nombre [Unidades]	Valor o Expresión
$p_r$	Punto donde se mide la respuesta	2,3,4
$p_f$	Punto donde se aplica la fuerza	5
$f_e$	Fuerza sinusoidal aplicada [N]	$A \text{ sen}(2\pi \cdot 80 \cdot t)$
$\lambda$	Parámetro de regularización de Tikhonov	0,01



**Gráfico 5.16:** Respuesta medida y calculada en el sensor 3 para el caso 8.



**Gráfico 5.17:** Fuerza real medida y calculada en el punto 5 para el caso 8.

**Tabla 5.19:** Valor de la norma para respuestas y fuerzas del caso 8.

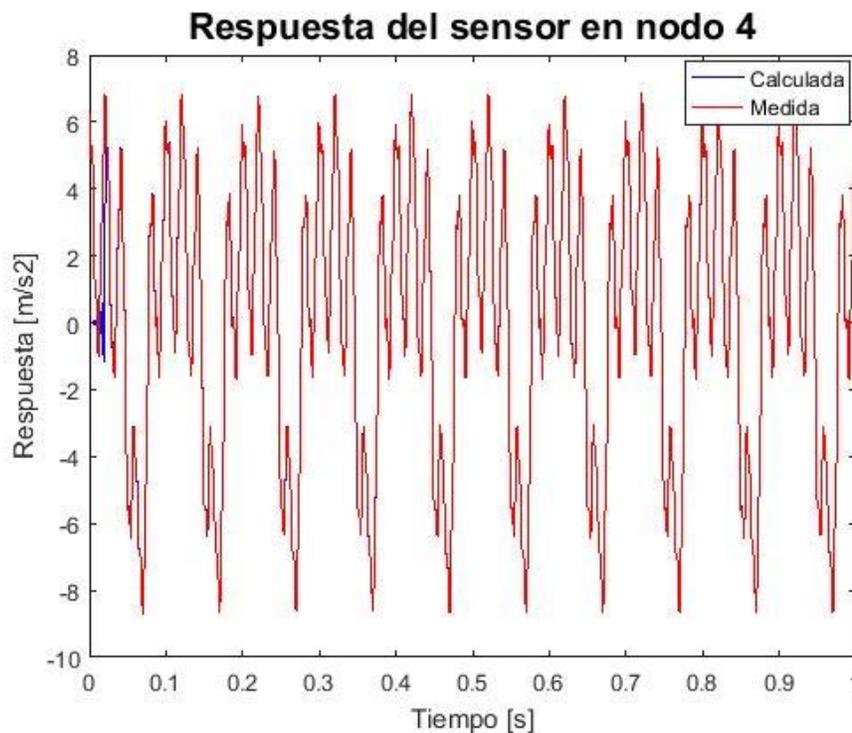
Norma	Valor
$\ A^t w - x_e^t\ _2$	9,3328
$\ B^t w - f_e^t\ _2$	12,8117

### 5.2.9 CASO 9

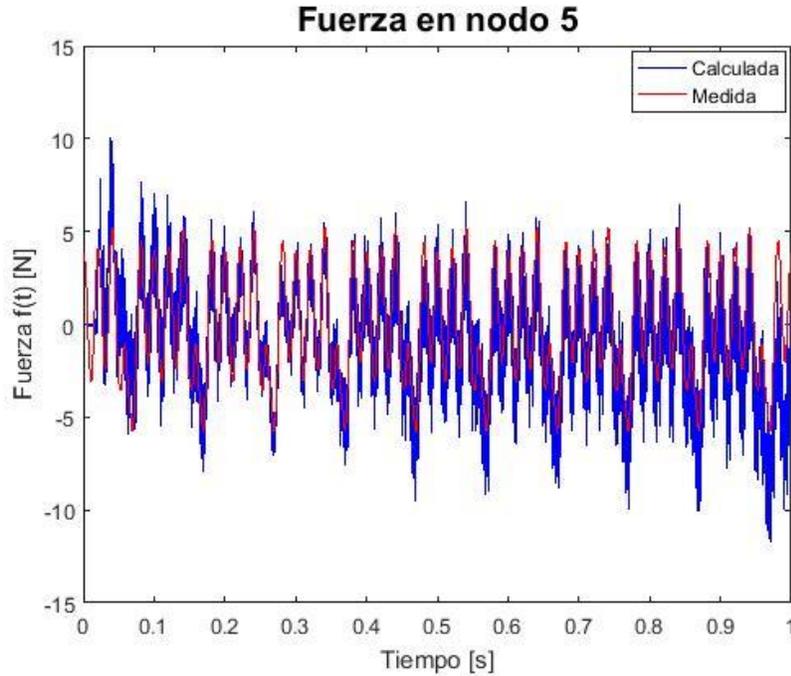
El noveno caso analizado corresponde a una excitación con fuerza sinusoidal doble, puntual y utilizando la respuesta medida de un solo sensor. Los parámetros generales del análisis son los presentados en la tabla 5.2. Los parámetros específicos utilizados para este caso se muestran en la tabla 5.20.

**Tabla 5.20:** Parámetros específicos del caso 9.

Símbolo	Nombre [Unidades]	Valor o Expresión
$p_r$	Punto donde se mide la respuesta	4
$p_f$	Punto donde se aplica la fuerza	5
$f_e$	Fuerza sinusoidal aplicada [N]	$A_1 \sin(2\pi \cdot 10 \cdot t) + A_2 \sin(2\pi \cdot 50 \cdot t)$
$\lambda$	Parámetro de regularización de Tikhonov	0,01



**Gráfico 5.18:** Respuesta medida y calculada en el sensor 4 para el caso 9.



**Gráfico 5.19:** Fuerza real medida y calculada en el punto 5 para el caso 9.

**Tabla 5.21:** Valor de la norma para respuestas y fuerzas del caso 9.

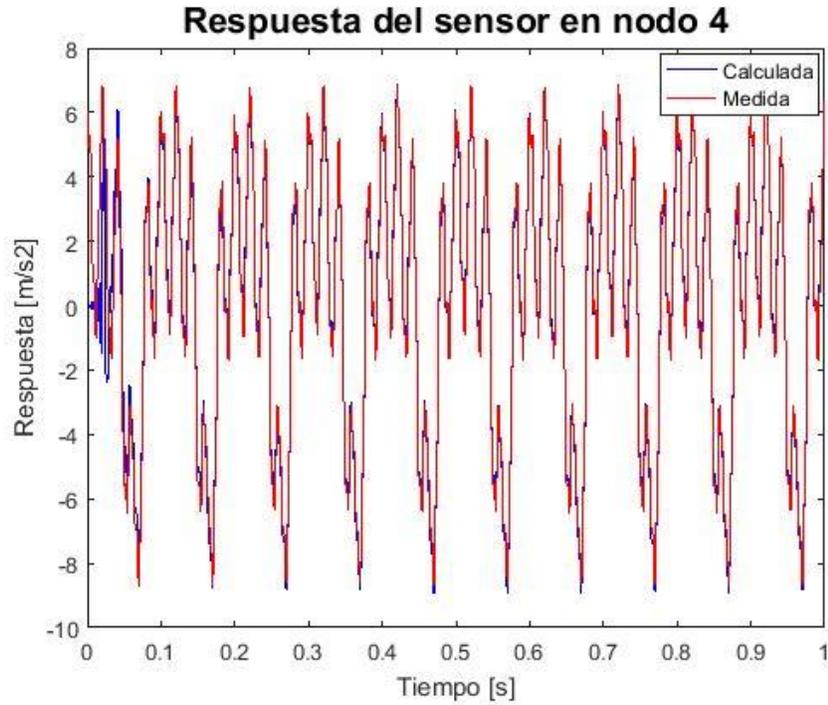
Norma	Valor
$\ A^t w - x_e^t\ _2$	21,5913
$\ B^t w - f_e^t\ _2$	17,8475

### 5.2.10 CASO 10

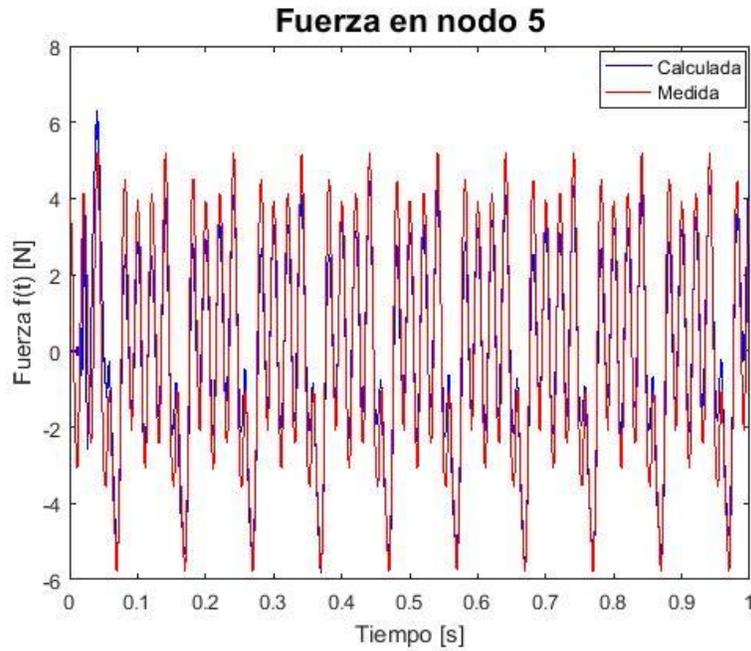
El décimo caso analizado corresponde a una excitación con fuerza sinusoidal doble, puntual y utilizando la respuesta medida de 3 sensores. Los parámetros generales del análisis son los presentados en la tabla 5.2. Los parámetros específicos utilizados para este caso se muestran en la tabla 5.22.

**Tabla 5.22:** Parámetros específicos del caso 10.

Símbolo	Nombre [Unidades]	Valor o Expresión
$p_r$	Punto donde se mide la respuesta	2,3,4
$p_f$	Punto donde se aplica la fuerza	5
$f_e$	Fuerza sinusoidal aplicada [N]	$A_1 \text{ sen}(2\pi \cdot 10 \cdot t) + A_2 \text{ sen}(2\pi \cdot 50 \cdot t)$
$\lambda$	Parámetro de regularización de Tikhonov	0,01



**Gráfico 5.20:** Respuesta medida y calculada en el sensor 4 para el caso 10.



**Gráfico 5.21:** Fuerza real medida y calculada en el punto 5 para el caso 10.

**Tabla 5.23:** Valor de la norma para respuestas y fuerzas del caso 10.

Norma	Valor
$\ A^t w - x_e^t\ _2$	18,7061
$\ B^t w - f_e^t\ _2$	6,5721

## 6. DISCUSIÓN

En las tablas 6.1 y 6.2 se muestra un resumen con los valores de las normas de respuestas y fuerzas para cada uno de los casos del análisis numérico y experimental, respectivamente.

**Tabla 6.1:** Resumen norma de respuestas y fuerzas para cada caso del análisis numérico.

Caso	Tipo de Fuerza	Ruido	Nodo Excitado	Nodo Respuesta Simulada	Norma Respuesta	Norma Fuerzas
1	$5 \text{ sen}(2\pi \cdot 12 \cdot t)$	NO	3	2	0,00048	0,43202
2		SI	3	2-4-5	0,00060	2,37782
3		SI	3	2-4-5	0,00053	2,32726
4	$5 \text{ sen}(2\pi \cdot 6,08 \cdot t)$	NO	4	2	0,00110	12,46236
5	$5 \text{ sen}(2\pi \cdot 37,37 \cdot t)$	NO	5	2-3-4	0,00083	10,54096
6	$5 \text{ sen}(2\pi \cdot 3 \cdot t) + 10 \text{ sin}(2\pi \cdot 10 \cdot t)$	NO	5	3	0,00120	1,11820
7		NO	5	2-3-4	0,00050	1,03252
8		SI	5	2-3-4	0,00226	2,29486

**Tabla 6.2:** Resumen norma de respuestas y fuerzas para cada caso del análisis experimental.

Caso	Tipo de Fuerza	Sensores	Norma Respuestas	Norma Fuerzas
1	$A \text{ sen}(2\pi \cdot 5 \cdot t)$	2	1,46	43,17
2		2-3-4	2,06	9,78
3	$A \text{ sen}(2\pi \cdot 8 \cdot t)$	4	4,12	39,00
4		2-3-4	2,49	12,62
5	$A \text{ sen}(2\pi \cdot 30 \cdot t)$	3	15,13	10,59
6		2-3-4	8,16	7,70
7	$A \text{ sen}(2\pi \cdot 80 \cdot t)$	3	6,05	48,40
8		2-3-4	9,33	12,81
9	$A_1 \text{ sen}(2\pi \cdot 10 \cdot t) + A_2 \text{ sin}(2\pi \cdot 50 \cdot t)$	4	21,59	17,84
10		2-3-4	18,70	6,57

Respecto al análisis numérico se puede observar que en el caso 4 y 5, la estimación de la respuesta por medio del algoritmo resulta prácticamente igual a la respuesta simulada, mostrando una amplificación de la respuesta en función del tiempo en los gráficos 4.7 y 4.9, propia de una respuesta transiente. Esto se debe a que se evaluó el algoritmo de identificación para fuerzas sinusoidales a frecuencias de excitación iguales a las frecuencias naturales de la viga según la tabla 4.2.

Debido a lo anterior, la fuerza estimada mediante el algoritmo adopta dicha amplificación de la respuesta, obteniéndose una mala estimación de esta. Este fenómeno puede verse en los gráficos 4.8 y 4.10.

Para el caso de fuerzas con frecuencias de excitación lejanas a las frecuencias naturales de la viga, el algoritmo no presenta mayores inconvenientes. Es más, de acuerdo a la tabla 6.1, los menores valores de la norma de fuerzas se encuentran en los casos donde las frecuencias de excitación están alejadas de las frecuencias naturales de la viga.

En el caso de la función sinusoidal con doble seno de los casos 6 y 7, se puede apreciar de acuerdo a la tabla 6.1, que al aumentar el número de respuestas simuladas de 1 a 3 sensores (o nodos) en la estimación de la fuerza del algoritmo de identificación, la norma de las fuerzas disminuye de 1,118 a 1,032 al igual que la norma de las respuestas que disminuye de 0,0012 a 0,0005. Lo anterior se puede apreciar en los gráficos 4.11 al 4.14.

Al incluir un ruido experimental del orden del 10% del valor máximo de la respuesta simulada por los sensores, se puede ver que en el caso de la función sinusoidal con doble seno de los casos 7 y 8, tanto la norma de las respuestas como la norma de las fuerzas aumentan de magnitud. Sin embargo, gráficamente la estimación de la fuerza mediante el algoritmo de identificación de fuerzas sigue siendo bastante acertada. Esto se debe en parte a que antes de aplicar el algoritmo de identificación a las respuestas simuladas con ruido, se aplicó una suavización de estas respuestas mediante el comando “*smooth()*” de Matlab, el cual consiste en tomar el promedio móvil con un espaciado de 5 datos para cada valor del vector de respuestas.

Respecto al análisis experimental, en el caso 1 y 2, se puede apreciar de acuerdo a la tabla 6.2, que al aumentar el número de respuestas medidas de 1 a 3 sensores (o nodos) en la estimación de la fuerza del algoritmo de identificación, la norma de la fuerza disminuye de 43,17 a 9,78 en contraposición de la norma de las respuestas que aumenta de 1,46 a 2,06. Lo anterior también es apreciable en los gráficos 5.2 a 5.5.

En el caso de la función sinusoidal del caso 8, donde la frecuencia de la fuerza excitadora es similar a una de las frecuencias naturales de la viga, el algoritmo pierde precisión e inclusive es posible apreciar el fenómeno de pulsos en los gráficos 5.16 y 5.17. Pese a haberse escogido un instante de tiempo alejado de la fase transiente, se sigue presenciando el fenómeno de pulso. Es probable que se requiera incorporar más amortiguamiento al sistema con el fin de alcanzar finalmente la fase estacionaria.

En el caso de la función sinusoidal con doble seno del caso 9 y 10, se tiene que el gráfico 5.19 donde se calcula la fuerza actuante utilizando solo el sensor 4 (el más cercano a la fuente de excitación, ubicada en el nodo 5) presenta un gran ruido experimental, pese a haber sido suavizada la respuesta previamente. Sin embargo al utilizarse más sensores en el algoritmo de identificación, la estimación de la fuerza mejora rotundamente. Lo anterior se puede ver en el gráfico 5.21 y al comparar la norma de la fuerza que disminuye de 17,84 a 6,57 al utilizarse 3 sensores en vez de uno.

Solo se expuso un tipo de método de suavización, debido a que los resultados mostraban un muy buen comportamiento ante este. Para futuros trabajos se podrían utilizar nuevos métodos de suavización y analizar la efectividad de estos.

Además, para la creación de la base de datos, no es necesario evaluar distintas amplitudes de fuerzas tipo impulso, es más, basta con solo una amplitud. Esto debido a que los coeficientes del vector  $w$  son lineales y no tienen una restricción de cota superior ni inferior, por lo que el algoritmo no debe interpolar entre distintas amplitudes de fuerzas. De este modo el algoritmo no pierde precisión para fuerzas que excedan las amplitudes de la base de datos.

Los valores óptimos del parámetro de regularización de Tikhonov están en el rango de  $\lambda = 0,0001 - 0,01$ . La utilización de este parámetro tiene como finalidad evitar “peaks” del vector de coeficientes lineales “ $w$ ”. En el caso del análisis experimental se utilizó solo  $\lambda = 0,01$ , dado que no influía mayormente la alteración de este.

## 7. CONCLUSIONES

El algoritmo es capaz de cuantificar la fuerza aplicada sobre la viga con gran precisión. No siendo necesarias las propiedades de la viga para su determinación. Además de entregar la solución con el mínimo global de la norma para cada parámetro de regularización de Tikhonov  $\lambda$ .

Se deben determinar las frecuencias naturales de la estructura a estudiar previamente a aplicar el algoritmo de identificación de fuerzas, debido a que ante frecuencias de excitación cercanas a las frecuencias naturales, la estimación de la fuerza pierde precisión.

Para trabajos futuros, se podría incorporar más amortiguamiento al sistema con el fin de alcanzar finalmente el estado estacionario, evitándose el fenómeno de pulso y así analizar si el algoritmo es capaz de estimar la fuerza real aplicada en frecuencias de excitación cercanas a las frecuencias naturales de la estructura.

El algoritmo arroja mejores resultados de la estimación de la fuerza aplicada al disponer de un mayor número de respuestas medidas. Sin embargo, la determinación de un número óptimo de sensores está fuera de los alcances del presente trabajo.

Para la creación de la base de datos, no es necesario evaluar distintas amplitudes de fuerzas tipo impulso, solo basta con una amplitud. Esto debido a que los coeficientes del vector  $w$  son lineales y no tienen una restricción de cota superior ni inferior, por lo que el algoritmo no debe interpolar entre distintas amplitudes de fuerzas.

El algoritmo es capaz de calcular la fuerza aplicada en nodos donde no se mide la respuesta, por lo que no se requiere a priori una cantidad excesiva de sensores para tener buenas estimaciones.

Para trabajos futuros, se puede continuar con evaluar el algoritmo de identificación de fuerzas en estructuras más complejas y variando el punto de aplicación de la fuerza puntual.

## 8. BIBLIOGRAFÍA

- [1] V. Meruane, *Vibraciones Mecánicas Apuntes para el curso ME4701*. Santiago, Chile: Departamento de Ingeniería Mecánica, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile., 2013.
- [2] V. Meruane, *Dinámica Estructural Apuntes para el curso ME706*. Santiago, Chile: Departamento de Ingeniería Mecánica, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile., 2014.
- [3] S. Pezzotti y F. Antico, «*Introducción a la teoría de elementos finitos*». Buenos Aires, Argentina: Departamento de Aeronáutica, Universidad Nacional de la Plata., 2007.
- [4] M. Corus y É. Balmes, «A priori verification of local fe model based on force identification» *International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA)*, Lovaina, 2004.
- [5] E. Jacquelin, A. Bennani y P. Hamelin, «Force reconstruction: analysis and regularization of a deconvolution problem» *Journal of Sound and Vibration*, vol. 265, p. 81–107, 2003.
- [6] L. Jankowski, «Off-line identification of dynamic loads» *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 37, n° 6, pp. 609-623, 2009.
- [7] A. D. Steltzner y D. C. Kammer, «Input Force Estimation Using an Inverse Structural Filter» de *17th International Modal Analysis Conference (IMAC XXVII)*, Florida, 1999.
- [8] Y.-m. Mao y X.-l. Guo, «Experiment study on dynamic force identification by a parameter estimation method» de *SEM Annual Conference*, Albuquerque, New Mexico, 2009.
- [9] X. Cao y Y. S. Mitsui, «Application of artificial neural networks to load identification» *Computers and Structures*, vol. 69, pp. 63-78, 1998.

## ANEXO A. CÓDIGOS DE IMPORTANCIA

### ANEXO A.1. CÓDIGO DE MODELAMIENTO NUMÉRICO DE LA VIGA.

%Función de modelo numérico de la viga.

```
function [M , C , K]=mck(n,alpha,beta)
```

%propiedades del material

```
rho=7850;           %Densidad Material [kg/m3]
E=2.1e11;          %Módulo de Young Material Acero [N/m2]
l=1;               %largo de la viga [m]
le=l/n;            %largo de un elemento
nd=n+1;            %número de nodos
ndof=nd*2;         %grados de libertad
```

%dimensiones sección viga

```
b=0.025;           %Base sección [m]
h=0.010;           %Altura sección [m]
A=b*h;             %Área sección en [m2]
Iz=(b*(h)^3)/12;   %Inercia sección [m4]
```

%Matriz de masa de un elemento

```
m=(rho*A*le)/420*[156 22*le 54 -13*le;
22*le 4*le^2 13*le -3*le^2;
54 13*le 156 -22*le;
-13*le -3*le^2 -22*le 4*le^2];
```

%Matriz de rigidez de un elemento

```
k=((E*Iz)/le^3)*[12 6*le -12 6*le;
6*le 4*le^2 -6*le 2*le^2;
-12 -6*le 12 -6*le;
6*le 2*le^2 -6*le 4*le^2];
```

%Ensamble

```
K=zeros(ndof,ndof);
M=zeros(ndof,ndof);
for i=1:n
K((1+2*(i-1)):(2*(i+1)),(1+2*(i-1)):(2*(i+1)))=K((1+2*(i-1)):(2*(i+1)),(1+2*(i-1)):(2*(i+1)))+k;
M((1+2*(i-1)):(2*(i+1)),(1+2*(i-1)):(2*(i+1)))=M((1+2*(i-1)):(2*(i+1)),(1+2*(i-1)):(2*(i+1)))+m;
end
```

```

%Condición de borde resorte
gdlr=ndof-1;           %grado de libertad condición de borde.
kr=1e3;               %constante elástica resorte lado derecho [N/m].
K(gdlr,gdlr)=K(gdlr,gdlr)+kr; %Agrega condición de borde.

% fijar primer grado de libertad
todos=1:ndof;
del=[1];              %primer nodo no tiene desplazamiento (apoyo simple).
activos=setdiff(todos,del); %elimina primer grado de libertad.
K=K(activos,activos);
M=M(activos,activos);

% Matriz de Amortiguación proporcional.
C=alpha.*M+beta.*K;

end

```

## ANEXO A.2. CREACIÓN BASE DE DATOS NUMÉRICA

```
% clear all;
% close all;
% clc;

n=4;          %Número de elementos de viga
alpha=1;     %Constante de amortiguamiento proporcional
beta=1e-5;   %Constante de amortiguamiento proporcional

[M , C , K]=mck(n,alpha,beta);%Matrices de masa, amortiguación y rigidez
[Phi,W]=eig(K,M);           %Se definen las frecuencias naturales y los modos normales
wn=sqrt(diag(W))/(2*pi);    %Frecuencias naturales en Hz
Phi=[zeros(1,length(Phi));Phi];
nm=length(Phi(1,:));       %Número de modos

chi=zeros(length(wn),1);
wd=zeros(length(wn),1);
for r=1:length(wn)
chi(r)=(alpha/(2*wn(r)))+(beta*wn(r))/2);
wd(r)=wn(r).*sqrt(1-chi(r).^2);
end

tfin=1.0;      %Horizonte final de tiempo
dt=0.005;     %Intervalo de tiempo
t=0:dt:tfin;  %Vector de tiempos
N=length(t);
A=[-1000];    %Amplitudes de la fuerza

nd=n+1;       %Número de nodos
ndof=nd*2;    %Número de grados de libertad
y0=zeros(nm,N);
k=1;         %Casos
for jj=1:length(A) %Magnitudes de la fuerza
    for i=1:ndof %Ubicaciones de la fuerza
        for p=1:N %Tiempo en que actúa la fuerza
            fp=zeros(1,N);
            fp(p)=A(jj); %Fuerza tipo impulso
            F=zeros(ndof,N); %Matriz con las fuerzas en todos los grados de libertad
            F(i,:)=fp; %Fuerza tipo impulso aplicada en el grado de libertad "i"
            tt=1;
            for kk=1:ndof %Se guarda cada uno de los casos de fuerzas tipo impulso
                fi(k,tt:kk*length(t))=F(kk,:);
                tt=kk*length(t)+1;
            end
        end
    end
end
for j=1:nm
```

```

        y0(j,:)=((Phi(i,j)*A(jj)*dt)/(2*pi*wd(j)))*exp(-
chi(j)*2*pi*wn(j).*t).*sin(2*pi*wd(j).*t);
    end
    y=zeros(nm,N);
    y(:,p:N)=y0(:,1:(N-p+1));
    x=Phi*y;
    s=1;
    for u=1:ndof %Se guarda cada uno de los casos de respuestas a fuerzas tipo impulso
        xi(k,s:u*length(t))=x(u,:);
        s=u*length(t)+1;
    end
    k=k+1; %Casos
end
end
end
end

```

## ANEXO A.3. MÉTODO DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA DE WILSON

```
function x=wilsontheta(F,N,dt,K,M,C)

NN=length(K);
t=0:dt:(N-1)*dt;      % Vector de tiempo

% Definir magnitud vectores x, dx, ddx
x=zeros(NN,N);        % Vector de desplazamientos
dx=zeros(NN,N);       % Vector de velocidades
ddx=zeros(NN,N);      % Vector de aceleraciones

% Condiciones iniciales nulas
x(:,1)=zeros(NN,1);
dx(:,1)=zeros(NN,1);
ddx(:,1)=zeros(NN,1);

% Constantes de integración
theta=1.4;
a0=6/(theta*dt)^2;
a1=3/(theta*dt);
a2=2*a1;
a3=(theta*dt)/2;
a4=a0/theta;
a5=-a2/theta;
a6=1-(3/theta);
a7=dt/2;
a8=(dt^2)/6;

% Matriz de rigidez efectiva
hK=K+a0*M+a1*C;
invhK=inv(hK);

for i=2:N
    hF=F(:,i-1)+theta.*(F(:,i)-F(:,i-1))+M*(a0*x(:,i-1)+a2*dx(:,i-1)+2*ddx(:,i-1))+C*(a1*x(:,i-1)+2*dx(:,i-1)+a3*ddx(:,i-1))); % Cálculo fuerzas efectivas
    hX=invhK*hF;
    ddx(:,i)=a4*(hX-x(:,i-1))+a5*dx(:,i-1)+a6*ddx(:,i-1); % Cálculo aceleraciones
    dx(:,i)=dx(:,i-1)+a7*(ddx(:,i)+ddx(:,i-1)); % Cálculo velocidades
    x(:,i)=x(:,i-1)+dt*dx(:,i-1)+a8*(ddx(:,i)+2*ddx(:,i-1)); % Cálculo desplazamientos
end

end
```

## ANEXO A.4. ALGORITMO DE IDENTIFICACIÓN DE FUERZAS NUMÉRICO

```

dte=0.0001; %Espaciamiento de tiempo respuesta simulada.
te=0:dte:tfin; % Vector de tiempo respuesta simulada.
Ne=length(te);
fe=5*sin(2*pi()*3.*te)+10*sin(2*pi()*10.*te); % Vector de fuerza simulada.
Fe=zeros(ndof-1,Ne);
nodfe=5; %Nodo donde se aplica la fuerza simulada.
gdlfe=2*nodfe-1-1; %Grado de libertad donde se aplica la fuerza simulada.
Fe(gdlfe,:)=fe;
Xe=wilsontheta(Fe,Ne,dte,K,M,C); % Vector de respuestas simuladas.

delta=dt/dte; %Intervalos para coincidir vectores de tiempo.
time=1:delta:Ne;
xe=zeros(1,length(time)*ndof);
fe=zeros(1,length(time)*ndof);
tt=length(time)+1;
for kk=1:ndof-1
    xe(1,tt:(kk+1)*length(time))=Xe(kk,1:delta:Ne);
    fe(1,tt:(kk+1)*length(time))=Fe(kk,1:delta:Ne);
    tt=(kk+1)*length(time)+1;
end

% Índices de los sensores y fuerzas seleccionados
sensores=[2 3 4]; %Nodos donde se conoce la respuesta simulada
gdlsensores=2.*sensores-1; %Grados de libertad donde se conoce la respuesta simulada
index=[];
for i=1:length(gdlsensores)
    index=[index (N*(gdlsensores(i)-1)+1):N*gdlsensores(i)];
end

fuerza=[5]; %Nodo donde se aplica la fuerza simulada
gdlfuerza=2.*fuerza-1; %Grados de libertad donde se aplica la fuerza simulada
indexf=[];
for i=1:length(gdlfuerza)
    indexf=[indexf (N*(gdlfuerza(i)-1)+1):N*gdlfuerza(i)];
end

xe=xe(index); %Se toman las columnas asociadas a los nodos donde se conoce la respuesta
fe=fe(indexf); %Se toman las columnas asociadas a los nodos donde se conoce la fuerza

% Índices de pesos a tomar; eliminando ceros en la respuesta
gdlx=gdlsensores;
NA=length(A);

```

```

indicex=[];
for j=1:length(gdlx)
    for i=1:NA
        indicex=[indicex (i-1)*N*ndof+(N*(gdlx(j)-1)+1):(i-1)*N*ndof+N*gdlx(j)];
    end
end

% Índices de pesos a tomar; eliminando ceros en la fuerza
gdlf=gdlfuerza;
NA=length(A);
indicef=[];
for j=1:length(gdlf)
    for i=1:NA
        indicef=[indicef (i-1)*N*ndof+(N*(gdlf(j)-1)+1):(i-1)*N*ndof+N*gdlf(j)];
    end
end

xe=xe+(0.1*max(xe))*rand(1,length(xe)); %Se agrega ruido a la respuesta simulada
xe=smooth(xe); %Se suaviza la respuesta simulada con ruido

%Para incluir más sensores en la optimización
ls=length(sensores);
lind=length(indicef);
ind=zeros(1,ls*lind);
for k=1:length(sensores)
    ind(1,(k-1)*lind+1:k*lind)=indicef;
end

A=xi(ind,index)'; %Se toman las columnas asociadas de la base de datos de respuestas
B=fi(ind,indexf)'; %Se toman las columnas asociadas de la base de datos de fuerzas

lamda=0.01 %Parámetro de regularización de Tikhonov
m=length(indicex);
cvx_precision('best')
cvx_begin
variable w(m)
minimize(norm(A*w-xe')+lamda*norm(w)); % Algoritmo de optimización
cvx_end

% Valor norma de respuestas y fuerzas
normax=norm(A*w-xe')+lamda*norm(w)
normaf=norm(B*w-fe')

Aw=A*w;

% Índices de la respuesta del sensor a graficar.
sensorgraf=3; %Nodo del sensor a graficar

```

```
isensorgraf=find(sensores==sensorgraf);  
is=(isensorgraf-1)*N+1:N*isensorgraf;
```

```
%Gráfico de la respuesta simulada y respuesta calculada mediante el algoritmo
```

```
figure  
plot(t,Aw(is),'b')  
hold on  
plot(t,xe(is),'r')  
title(['Respuesta del sensor en nodo ' num2str(sensorgraf)],'FontSize',16)  
xlabel(' Tiempo [s] '); ylabel('Respuesta x(t) [m]');  
legend('Calculada','Simulada')
```

```
Bw=B*w;
```

```
% Índices de la fuerza a graficar.
```

```
sensorgraff=fuerza; %Nodo de la fuerza a graficar  
isensorgraff=find(fuerza==sensorgraff);  
isf=(isensorgraff-1)*N+1:N*isensorgraff;
```

```
%Gráfico de la fuerza simulada y fuerza calculada mediante el algoritmo
```

```
figure  
plot(t,Bw(isf),'b')  
hold on  
plot(t,fe(isf),'r')  
title(['Fuerza en nodo ' num2str(sensorgraff)],'FontSize',16)  
xlabel(' Tiempo [s] '); ylabel('Fuerza f(t) [N]');  
legend('Calculada','Simulada')
```

## ANEXO A.5. CREACIÓN BASE DE DATOS EXPERIMENTAL

```
%clear all;
%close all;
%clc;

n=4;           %Número de elementos
nd=n+1;       %Número de nodos
ndof=nd*2;    %Número de grados de libertad

delta=1;      %Intervalos a tomar del vector de tiempo

%%% IMPULSOS Y RESPUESTAS A IMPULSOS%%%

allchannelimp=xlsread('impplastsinshaker.xlsx',1); %Se leen datos medidos del impacto

[minimp,I] =min(allchannelimp(2,:));

allchannelimp=allchannelimp(:,1:delta:length(allchannelimp(1,:)));

%Sensibilidad sensores utilizados
simp=4.0;     %Martillo pequeño
sn2=97.8245; %Sensibilidad acelerómetro del nodo 2
sn3=95.5571; %Sensibilidad acelerómetro del nodo 3
sn4=99.8557; %Sensibilidad acelerómetro del nodo 4
snf5=121.2;  %Sensibilidad sensor de fuerza del nodo 5

n2=allchannelimp(5,:); %Carga el vector de respuestas en el nodo 2
n3=allchannelimp(4,:); %Carga el vector de respuestas en el nodo 3
n4=allchannelimp(3,:); %Carga el vector de respuestas en el nodo 4
f5=allchannelimp(2,:); %Carga el vector de fuerza del nodo 5
t1=allchannelimp(1,:); %Carga el vector de tiempos
```

```
%%% CREAR BASE DE DATOS EXPERIMENTAL %%%
```

```
N1=length(t1);
columnas=N1*ndof;
filas=N1*ndof*1;           %Solo se aplica la fuerza en el nodo 5
bdf=sparse(filas,columnas); %Matriz de base de datos de fuerzas
bdr=sparse(filas,columnas); %Matriz de base de datos de respuestas
k=1;                       %Casos
for jj=1                   %Magnitudes de la fuerza
    for i=1:ndof          %Ubicaciones de la fuerza
        for p=1:N1       %Tiempo en que actúa la fuerza
            if i==9
                %Guardar fuerza en su nodo respectivo
                f=sparse(ndof,N1);
                f(i,p:N1)=f5(1,1:(N1-p+1));
                bdf(k,((i-1)*N1+1):i*N1)=f(i,:);
                %Guardar respuestas en sus nodos respectivos
                x=sparse(ndof,N1);
                x(7,p:N1)=n4(1,1:(N1-p+1));
                x(5,p:N1)=n3(1,1:(N1-p+1));
                x(3,p:N1)=n2(1,1:(N1-p+1));
                for u=1:ndof
                    bdr(k,((u-1)*N1+1):u*N1)=x(u,:);
                end

            else

                end

            k=k+1; %Avanza al siguiente caso
        end
    end
end
end
```

## ANEXO A.6. ALGORITMO IDENTIFICACIÓN DE FUERZAS EXPERIMENTAL

%Respuestas y Fuerza medida mediante acelerómetros y sensor de fuerza

```
funcion=1; % 1 = Seno Simple, 2 = Seno doble
switch funcion
case 1
allchannelsenosimple=xlsread('senosimple5hz.xlsx',1);
allchannelsenosimple=allchannelsenosimple(:,1:delta:length(allchannelsenosimple(1,:)));

rn2=allchannelsenosimple(5,:); %Carga el vector de respuesta medida en el nodo 2
rn3=allchannelsenosimple(4,:); %Carga el vector de respuesta medida en el nodo 3
rn4=allchannelsenosimple(3,:); %Carga el vector de respuesta medida en el nodo 4
fn5=allchannelsenosimple(2,:); %Carga el vector de fuerza medida del nodo 5

Fe=zeros(ndof,N1);
Xe=zeros(ndof,N1);

Xe(7,:)=rn4; %Asigna respuesta medida en el nodo 4 a la matriz de respuestas.
Xe(5,:)=rn3; %Asigna respuesta medida en el nodo 3 a la matriz de respuestas.
Xe(3,:)=rn2; %Asigna respuesta medida en el nodo 2 a la matriz de respuestas.
Fe(9,:)=fn5; %Asigna fuerza medida en el nodo 5 a la matriz de fuerzas.

xe=zeros(1,N1*ndof);
fe=zeros(1,N1*ndof);
tt=1;
for kk=1:ndof
    xe(1,tt:kk*N1)=Xe(kk,:);
    fe(1,tt:kk*N1)=Fe(kk,:);
    tt=kk*N1+1;
end
case 2
allchanneldobleseno=xlsread('senodoble10y50hz.xlsx',1);
allchanneldobleseno=allchanneldobleseno(:,1:delta:length(allchanneldobleseno(1,:)));

rn2=allchannelsenosimple(5,:); %Carga el vector de respuesta medida en el nodo 2
rn3=allchannelsenosimple(4,:); %Carga el vector de respuesta medida en el nodo 3
rn4=allchannelsenosimple(3,:); %Carga el vector de respuesta medida en el nodo 4
fn5=allchannelsenosimple(2,:); %Carga el vector de fuerza medida del nodo 5

Fe=zeros(ndof,N1);
Xe=zeros(ndof,N1);

Xe(7,:)=rn4; %Asigna respuesta medida en el nodo 4 a la matriz de respuestas.
```

```

Xe(5,:)=rn3; %Asigna respuesta medida en el nodo 3 a la matriz de respuestas.
Xe(3,:)=rn2; %Asigna respuesta medida en el nodo 2 a la matriz de respuestas.
Fe(9,:)=fn5; %Asigna fuerza medida en el nodo 5 a la matriz de fuerzas.

```

```

xe=zeros(1,N1*ndof);
fe=zeros(1,N1*ndof);
tt=1;
for kk=1:ndof
    xe(1,tt:kk*N1)=Xe(kk,:);
    fe(1,tt:kk*N1)=Fe(kk,:);
    tt=kk*N1+1;
end
otherwise
end

```

%Respuesta y fuerza calculada con el algoritmo de identificación

% Índices de los sensores y fuerzas seleccionados

```

sensores=[4]; %Nodos donde se conoce la respuesta medida
gdlsensores=2.*sensores-1; %Grados de libertad donde se conoce la respuesta medida
index=[];
for i=1:length(gdlsensores)
    index=[index (N*(gdlsensores(i)-1)+1):N*gdlsensores(i)];
end

```

```

fuerza=[5]; %Nodo donde se aplica la fuerza medida
gdlfuerza=2.*fuerza-1; %Grados de libertad donde se aplica la fuerza medida
indexf=[];
for i=1:length(gdlfuerza)
    indexf=[indexf (N*(gdlfuerza(i)-1)+1):N*gdlfuerza(i)];
end

```

```

xe=xe(index); %Se toman las columnas asociadas a los nodos donde se conoce la respuesta
fe=fe(indexf); %Se toman las columnas asociadas a los nodos donde se conoce la fuerza

```

% Índices de pesos a tomar; eliminando ceros en la respuesta

```

gdlx=gdlsensores;
NA=length(A);
indicex=[];
for j=1:length(gdlx)
    for i=1:NA
        indicex=[indicex (i-1)*N*ndof+(N*(gdlx(j)-1)+1):(i-1)*N*ndof+N*gdlx(j)];
    end
end

```

% Índices de pesos a tomar; eliminando ceros en la fuerza

```

gdlf=gdlfuerza;

```

```

NA=length(A);
indicef=[];
for j=1:length(gdlf)
    for i=1:NA
        indicef=[indicef (i-1)*N*ndof+(N*(gdlf(j)-1)+1):(i-1)*N*ndof+N*gdlf(j)];
    end
end

xe=smooth(xe); %Se suaviza el ruido de la respuesta medida

%Para incluir más sensores en la optimización
ls=length(sensores);
lind=length(indicef);
ind=zeros(1,ls*lind);
for k=1:length(sensores)
    ind(1,(k-1)*lind+1:k*lind)=indicef;
end

A=xi(ind,index)'; %Se toman las columnas asociadas de la base de datos de respuestas
B=fi(ind,indexf)'; %Se toman las columnas asociadas de la base de datos de fuerzas

lamda=0.01 %Parámetro de regularización de Tikhonov
m=length(indicex);
cvx_precision('best')
cvx_begin
variable w(m)
minimize(norm(A*w-xe')+lamda*norm(w)); % Algoritmo de optimización
cvx_end

% Valor norma de respuestas y fuerzas
normax=norm(A*w-xe')+lamda*norm(w)
normaf=norm(B*w-fe')

Aw=A*w;

% Índices de la respuesta del sensor a graficar.
sensorgraf=4; %Nodo del sensor a graficar
isensorgraf=find(sensores==sensorgraf);
is=(isensorgraf-1)*N+1:N*isensorgraf;

%Gráfico de la respuesta medida y respuesta calculada mediante el algoritmo
figure
plot(t, Aw(is), 'b')
hold on
plot(t, xe(is), 'r')
title(['Respuesta del sensor en nodo ' num2str(sensorgraf)], 'FontSize', 16)
xlabel(' Tiempo [s] '); ylabel('Respuesta x(t) [m]');

```

```
legend('Calculada','Medida')
```

```
Bw=B*w;
```

```
% Índices de la fuerza a graficar.
```

```
sensorgraff=fuerza; %Nodo de la fuerza a graficar
```

```
isensorgraff=find(fuerza==sensorgraff);
```

```
isf=(isensorgraff-1)*N+1:N*isensorgraff;
```

```
% Gráfico de la fuerza medida y fuerza calculada mediante el algoritmo
```

```
figure
```

```
plot(t,Bw(isf),'b')
```

```
hold on
```

```
plot(t,fe(isf),'r')
```

```
title(['Fuerza en nodo ' num2str(sensorgraff)],'FontSize',16)
```

```
xlabel('Tiempo [s] '); ylabel('Fuerza f(t) [N]');
```

```
legend('Calculada','Medida')
```