

# EL CRITERIO ECONOMICO EN LA DETERMINACION DE LA VIDA UTIL DE UN EQUIPO

Francisco J. Labbé O.\*

## EXTRACTO

El objetivo de este artículo es analizar, en primer lugar, las condiciones que determinan la vida útil de los equipos bajo dos escenarios: liquidando la inversión al final de la vida útil o reinvertiendo indefinidamente en un equipo similar, lo que se denomina cadena de reemplazos y, en segundo lugar, comparar la solución obtenida maximizando el valor presente neto con aquella derivada del criterio de maximizar la tasa interna de retorno, analizando las condiciones en que ambos criterios coinciden.

El artículo concluye que es la imperfección del mercado de los equipos y las diferencias en las tasas de descuento de las personas, la causa de que un mismo equipo, bajo los dos escenarios planteados, tenga vida útil diferente, y que, en un mismo escenario, un mismo equipo pueda tener diferentes vidas útiles. La imperfección en el mercado de los equipos y las diferencias en la tasa de descuento de las personas son también la causa de que los criterios, derivados de maximizar Valor Presente y Tasa Interna de Retorno, difieran.

## ABSTRACT

This article analyzes the conditions under which the economic life of capital equipment is determined assuming first that the investment concludes at the end of the economic life and second that there is reinvestment in the same, type of capital equipment. The solution obtained by the method of maximizing the net present value of the investment is compared with the one obtained by the method of maximizing the internal rate of return. The article concludes that the differences in the economic life under the two methods (with and without reinvestment) are due only to the imperfections that exists in the capital equipment market and to differences in the people's discount rate.

Documentación e Información  
BIBLIOTECA CENTRAL  
Fac. C. Económicas y Administrativas  
Universidad de Chile

\*El autor es profesor e investigador del Departamento de Economía de la Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas de la Universidad de Chile.

## EL CRITERIO ECONOMICO EN LA DETERMINACION DE LA VIDA UTIL DE UN EQUIPO\*

Francisco J. Labbé O.

El objetivo de este artículo es analizar, en primer lugar, las condiciones que determinan la vida útil de los equipos bajo dos escenarios: liquidando la inversión al final de la vida útil o reinvertiendo indefinidamente en un equipo similar, lo que se denomina cadena de reemplazos, y, en segundo lugar, comparar la solución obtenida maximizando el valor presente neto con aquella derivada del criterio de maximizar la tasa interna de retorno, analizando las condiciones en que ambos criterios coinciden.

El artículo concluye que es la imperfección del mercado de los equipos y las diferencias en las tasas de descuento de las personas, la causa de que un mismo equipo, bajo los dos escenarios planteados, tenga vida útil diferente, y que, en un mismo escenario, un mismo equipo pueda tener diferentes vidas útiles. La imperfección en el mercado de los equipos y las diferencias en la tasa de descuento de las personas son también la causa de que los criterios, derivados de maximizar Valor Presente y Tasa Interna de Retorno, difieran.

La primera parte analiza las condiciones que determinan la vida útil de un equipo que produce flujos a lo largo de ésta y bajo el supuesto de que no se desea continuar con esa actividad al fin de la vida útil, comparando la solución alcanzada con la que se obtiene maximizando la tasa interna de retorno. En la segunda parte se realiza el mismo análisis para el caso de la cadena de reemplazos y en la tercera parte se presentan las conclusiones.

### 1. VIDA UTIL DE UN EQUIPO SI SE DESEA LIQUIDAR LA INVERSION AL FIN DE LA VIDA UTIL

La vida útil de un equipo no es un concepto meramente técnico, sino fundamentalmente un concepto económico. No es solamente la capacidad de producir un bien o más bien la incapacidad física de seguir produciéndolo, lo que determina su reposición. En general, los equipos no se liquidan sólo cuan-

do ya no son aptos para producir; de hecho, la existencia de un mercado de equipos usados está demostrando no sólo que existen variables no físicas que son determinantes en la elección del momento de reemplazo del equipo, sino también que el concepto de vida útil no es absoluto, sino relativo, pues, el mismo equipo que alguien está liquidando y que, en consecuencia, la vida útil de éste ha llegado a su fin, está siendo adquirido por otra persona que considera que la vida útil de dicho equipo no ha terminado aún. No puede suponerse que es solamente la diferencia de información acerca de la capacidad del equipo de producir flujos positivos lo que determina la existencia de un comprador del equipo usado. Si fuese así, ello implicaría que los compradores jamás aprenden de sus errores. Es más lógico pensar que, además de las variables técnicas como la obsolescencia tecnológica, existen variables económicas que son determinantes en la elección del momento de liquidar una inversión. Los costos crecientes de mantención, la tasa de interés del mercado, que indica el costo alternativo de vender o comprar el equipo y el valor de venta de éste, son variables económicas que intervienen, además de la capacidad productiva, en la elección de la vida útil, es decir, en la elección del momento de liquidar o reponer un equipo.

Para determinar las condiciones que determinan la vida útil del equipo ya sea éste nuevo o en uso, se maximizará el valor actual neto del equipo, considerando como variable la vida útil.

El valor actual neto del equipo de  $n$  años de vida útil será:

$$VP_n = -I + \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{(1+r)^i} + \frac{R_n}{(1+r)^n} \quad (1)$$

Con  $I$  : monto de inversión en un equipo nuevo o valor que se obtendría por venta del equipo en el momento 0 para el caso de un equipo en uso.

$VP_n$  : valor actual del equipo si dura  $n$  años

$B_i$  : beneficio neto en el año  $i$

$r$  : tasa de descuento pertinente, igual para todos los años

$R_n$  : valor de desecho del equipo en el año  $n$

En el caso de una vida útil de  $n+1$  años la ecuación (1) se transforma en:

$$VP_{n+1} = -I + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{B_i}{(1+r)^i} + \frac{R_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} \quad (2)$$

Si  $n$  es la vida útil óptima, la maximización del valor actual neto del proyecto implica:

$$VP_n \geq VP_{n+1} \quad \text{y obviamente} \quad VP_n \geq VP_{n-1} \quad (3)$$

en consecuencia,

$$\sum_{i=1}^n \frac{B_i}{(1+r)^i} + \frac{R_n}{(1+r)^n} \geq \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{(1+r)^i} + \frac{B_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} + \frac{R_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}$$

Eliminando los términos iguales,

$$\frac{R_n}{(1+r)^n} \geq \frac{B_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} + \frac{R_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}$$

y multiplicando por  $(1+r)^{n+1}$  se obtiene:

$$(R_n - R_{n+1}) + r R_n \geq B_{n+1} \quad (4)$$

El lado izquierdo de la ecuación (4) representa los costos de ampliar la vida útil: la pérdida de valor residual y el interés anual perdido del valor residual. El lado derecho de la ecuación representa el beneficio de ampliar la vida útil,

Despejando  $r$  queda:

$$r \geq \frac{B_{n+1} - (R_n - R_{n+1})}{R_n} \quad (5)$$

La ecuación (5) indica que se ampliará la vida útil del equipo hasta que la razón  $\frac{B_{n+1} - (R_n - R_{n+1})}{R_n}$  se iguale a la tasa de descuento. En

el caso específico de la ecuación (5), la razón indicada es menor o igual que la tasa de descuento, en consecuencia, no es conveniente ampliar la vida útil del equipo. Con una vida útil de  $n$  años, el valor presente del equipo

es máximo. La razón  $\frac{B_{n+1} - (R_n - R_{n+1})}{R_n}$  se obtuvo igualando

los valores actuales netos, o lo que es equivalente, haciendo nulo el valor actual neto diferencial. Esto implica que la razón indicada es la tasa interna de retorno diferencial. El criterio para obtener la vida útil óptima será entonces ampliar dicha vida útil hasta que la tasa interna de retorno diferencial se iguale a la tasa de descuento.

La decisión óptima indicada por la ecuación (4) surge de maximizar el valor presente del equipo e incluye, entre las variables que determinan el óptimo, la tasa de descuento pertinente. Un incremento de esta última aumentará el costo alternativo de mantener al equipo en producción y acortará su vida útil.

El criterio de maximizar la tasa interna de retorno como medio para determinar la vida útil es erróneo, pues por definición la tasa interna de retorno excluye el concepto de tasa de descuento y esta última variable aparece en forma explícita en la ecuación (4), de optimización.

La tasa interna de retorno es la tasa de descuento que anula el valor presente:

$$VP_n = -I + \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{(1+\rho)^i} + \frac{R_n}{(1+\rho)^n} = 0$$

donde  $\rho \equiv$  tasa interna de retorno

Derivando la ecuación con respecto a  $n$  y anulando la derivada de la tasa interna de retorno  $\rho$  con respecto a la vida útil  $n$  se obtienen las condiciones de marginalidad que surgen de la maximización de la tasa interna de retorno.

Expresando la ecuación en tiempo continuo:

$$I = \int_1^n B(t)e^{-\rho(n).t}.dt + R(n)e^{-\rho(n).n}$$

Usando la regla de Leibnitz para derivar la integral se obtiene:

$$0 = \int_1^n -B(t)e^{-\rho(n).t} \rho'(n).t dt + B_n e^{-\rho(n).n} + R'(n)e^{-\rho(n).n} - R(n)e^{-\rho(n).n} (\rho'(n).n + \rho(n))$$

despejando  $\rho'(n)$ , se tiene

$$\rho'(n) = \frac{B_n e^{-\rho(n) \cdot n} + R'(n) e^{-\rho(n) \cdot n} - R(n) e^{-\rho(n) \cdot n} \rho(n)}{\int_1^n B(t) e^{-\rho(n)t} dt + R(n) \cdot n \cdot e^{-\rho(n) \cdot n}}$$

La condición de tasa interna de retorno máxima  $\rho^*$  se obtiene haciendo  $\rho'(n) = 0$ . Ello implica:

$$B_n e^{-\rho^* n} + R'(n) e^{-\rho^* \cdot n} - R(n) e^{-\rho^* \cdot n} \rho^* = 0$$

Simplificando y reordenando se obtiene, finalmente

$$\rho^* = \frac{B_n + R'(n)}{R(n)}$$

En términos discretos se puede expresar como:

$$\rho^* = \frac{B_{n+1} - (R_n - R_{n+1})}{R_n}$$

Esta ecuación es similar a la ecuación (5), pero, en donde se ha reemplazado la tasa de descuento  $r$  por la tasa interna de retorno máxima  $\rho^*$ .

Para cualquier valor positivo del valor presente neto, la tasa interna de retorno máxima es mayor que la tasa de descuento.

$$\rho^* > r$$

Y, en consecuencia, la vida útil resultante de maximizar la tasa interna de retorno es menor.

Habiendo sido la ecuación (4) derivada de la maximización de la riqueza, dicha ecuación representa las únicas condiciones de marginalidad que permiten obtener la duración óptima de un equipo. La vida útil resultante de la maximización de la tasa interna de retorno es pues errónea y normalmente conduce a la obtención de una vida útil menor.

Por consiguiente, ambos criterios son excluyentes, salvo que la tasa interna de retorno máxima coincida con la tasa de descuento lo que implicaría el ajuste de algunas variables para hacer que el valor presente neto sea nulo.

## 2. VIDA ÚTIL DE UN EQUIPO EN EL CASO DE UNA CADENA DE REEMPLAZO

Sea  $n$  la duración óptima de un equipo que será reemplazado por otro de iguales características en sucesión constante.

El valor presente de dicho equipo será igual que antes

$$VP_n = -I + \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{(1+r)^i} + \frac{R_n}{(1+r)^n}$$

El valor presente de la cadena sucesiva de reemplazos realizados al final de la vida útil de cada equipo será:

$$\begin{aligned}
 VP_n^T = & -I + \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{(1+r)^i} + \frac{R_n}{(1+r)^n} - \frac{I}{(1+r)^n} + \frac{I}{(1+r)^n} - \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{(1+r)^i} + \frac{R_n}{(1+r)^n} \\
 & - \frac{I}{(1+r)^{2n}} + \frac{I}{(1+r)^{2n}} - \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{(1+r)^i} + \frac{R_n}{(1+r)^n} + \dots
 \end{aligned} \tag{6}$$

en donde  $VP_n^T$  es el valor presente de la cadena sucesiva de reemplazos y  $n$  es la vida útil de cada equipo.

La ecuación (6) se puede presentar también como:

$$VP_n^T = VP_n + \frac{VP_n}{(1+r)^n} + \frac{VP_n}{(1+r)^{2n}} + \dots$$

y dado que la cadena de reemplazos es indefinida, el valor presente total  $VP_n^T$  se puede escribir como:

$$VP_n^T = VP_n + \frac{VP_n^T}{(1+r)^n}$$

despejando  $VP_n^T$  en función de  $VP_n$ , se obtiene:

$$VP_n^T = \frac{VP_n}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}$$

o:

$$VP_n^T = VP_n \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \quad (7)$$

de igual forma se puede obtener el valor presente de la cadena de reemplazos realizada cada  $n+1$  años.

$$VP_{n+1}^T = VP_{n+1} \frac{(1+r)^{n+1}}{(1+r)^{n+1} - 1} \quad (8)$$

Si  $n$  es el momento óptimo del reemplazo, entonces  $VP_n^T$  será máximo<sup>1</sup> y en consecuencia,

$$VP_n^T \geq VP_{n+1}^T \quad (9)$$

reemplazando en la ecuación (9) los valores  $VP_n^T$  y  $VP_{n+1}^T$  de las ecuaciones (7) y (8), se obtiene:

$$VP_n \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \geq VP_{n+1} \frac{(1+r)^{n+1}}{(1+r)^{n+1} - 1} \quad (10)$$

pero,

$$VP_{n+1} = VP_n - \frac{R_n}{(1+r)^n} + \frac{R_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} + \frac{B_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} \quad (11)$$

reemplazando en la ecuación (10) queda:

<sup>1</sup> que  $VP_n^T$  sea máximo no implica necesariamente que  $VP_n$  sea máximo. Si  $VP_n^T > VP_{n+1}^T$ .

$$VP_n \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} > \frac{VP_{n+1} (1+r)^{n+1}}{(1+r)^{n+1} - 1} \quad \text{y dado que,}$$

$$\frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} > \frac{(1+r)^{n+1}}{(1+r)^{n+1} - 1}$$

no puede inferirse que  $VP_n > VP_{n+1}$ .

$$VP_n \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \geq VP_n \frac{(1+r)^{n+1}}{(1+r)^{n+1} - 1} +$$

$$+ \left[ \frac{B_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} + \frac{R_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} - \frac{R_n}{(1+r)^n} \right] \frac{(1+r)^{n+1}}{(1+r)^{n+1} - 1}$$

reordenando términos,

$$VP_n \left( \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} - \frac{(1+r)^{n+1}}{(1+r)^{n+1} - 1} \right) \geq$$

$$\frac{1}{(1+r)^{n+1} - 1} [(B_{n+1} + R_{n+1} - R_n (1+r))]$$

Simplificando la expresión en paréntesis, se obtiene finalmente:

$$VP_n \cdot r \cdot \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} > B_{n+1} + (R_{n+1} - R_n) - R_n \cdot r \quad (12)$$

o:

$$(R_n - R_{n+1}) + r R_n + VP_n \cdot r \cdot \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} > B_{n+1} \quad (13)$$

El lado derecho de la ecuación (13) corresponde al beneficio de ampliar la vida útil de cada equipo, y el lado izquierdo representa los costos. Estos provienen de tres fuentes:

- pérdida de valor residual:  $R_n - R_{n+1}$
- pérdida anual de interés del valor residual:  $r R_n$
- pérdida del valor presente de los intereses de la renta derivada de cada máquina a lo largo de la cadena de reemplazos.

Este último costo de aplazar es, según la ecuación (7)  $VP_n^I \cdot r$ , lo que representa el costo anual de capital de la renta total de la cadena de reemplazo.

La ecuación (13) se reduce entonces a:

$$r VP_n^T > B_{n+1} + (R_{n+1} - R_n) - r R_n \quad (14)$$

despejando,  $r$  se obtiene:

$$r > \frac{B_{n+1} + (R_{n+1} - R_n)}{VP_n^T + R_n} \quad (15)$$

la ecuación (15) fue derivada de hacer  $VP_n^T = VP_{n+1}^T$  o, lo que es lo mismo, anular el valor presente diferencial. En consecuencia, el lado derecho de la ecuación (15) es la tasa interna de retorno diferencial que en el caso de vida útil óptima iguala a la tasa de descuento. El criterio para optimizar la vida útil de un activo en el contexto de una cadena de reemplazos continua, es, pues, maximizar el valor presente neto total en la cadena. Esto implica ampliar la vida útil del activo hasta que la tasa interna de retorno diferencial sea igual a la tasa de descuento.

Al igual que en la primera parte y en base a las mismas consideraciones, la vida útil de un equipo que se obtiene maximizando la tasa interna de retorno, no necesariamente corresponde con la vida útil óptima.

Por último, recordando la ecuación (14) queda:

$$r \left(1 + \frac{VP_n^T}{R_n}\right) > \frac{B_{n+1} - (R_n - R_{n+1})}{R_n} \quad (16)$$

La ecuación (16) indica que la vida útil óptima exige, en el caso de una cadena de reemplazos, una razón  $\frac{B_{n+1} - (R_n - R_{n+1})}{R_n}$  mayor que en el caso sin reemplazo, puesto que  $\frac{VP_n^T}{R_n} > 0$ .

En el caso en que el valor de la máquina,  $I$ , sea justamente el valor presente de los flujos para una vida útil determinada según la cadena de reemplazos, entonces  $VP_n = 0$  y  $VP_n^T = 0$  con lo que la vida útil en el caso individual y en el caso de reemplazos será la misma.

Documentación e Información  
BIBLIOTECA CENTRAL  
Fac. C. Económicas y Administrativas  
Universidad de Chile

Si el mercado de equipos fuera perfecto, e iguales las tasas de descuento de las personas, entonces, el valor residual de un equipo en el año  $i$ , sería el valor presente al año  $i$  de los flujos futuros.<sup>2</sup>

en este caso debe cumplirse:

$$R_i = \frac{B_{i+1}}{1+r} + \frac{R_{i+1}}{1+r} \quad \text{para todo } i \quad (17)$$

reordenando, se obtiene la ecuación (4)

$$(R_i - R_{i+1}) + r R_i = B_{i+1}$$

para  $i = n$  y para  $VP_n = VP_{n+1}$

Ello implica que siempre se está en el óptimo, y cualquier período es la vida útil del equipo.

Multiplicando la ecuación (17) por  $\frac{1}{(1+r)^i}$  se obtiene:

$$-\frac{R_n}{(1+r)^i} + \frac{B_{i+1}}{(1+r)^{i+1}} + \frac{R_{i+1}}{(1+r)^{i+1}} = 0$$

e introduciendo en la ecuación (11) se tiene:

$$VP_{i+1} = VP_i \quad \text{para todo } i$$

En consecuencia, todos los valores presentes son iguales y, obviamente, nulos, por lo que es indiferente liquidar la inversión en cualquier año. Sin embargo, basta que las personas tengan distintas tasas de descuento para que esta conclusión deje de ser válida.

<sup>2</sup>El caso anterior en que  $VP_n = 0$  es un caso particular puesto que ello implica que:

$$I = \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{(1+r)^i} + \frac{R_n}{(1+r)^n}$$

en el año 0.

### 3. CONCLUSION

La decisión de liquidar una inversión o de reemplazar un equipo por otro similar al fin de su vida útil en una cadena de reemplazos es una decisión que depende de los beneficios y costos involucrados en la alternativa de liquidar en el momento  $i$  o continuar con dicho equipo un período más. En dicha decisión interviene, en el caso de liquidar la inversión, la pérdida del valor residual, el interés perdido del valor residual y el beneficio del año  $i+1$ . En el caso de la cadena de reemplazo, existe además un "costo sombra" derivado del hecho de no ejecutar antes un reemplazo que implica un "proyecto" de mejor rentabilidad. En este último caso, la vida útil debe ser normalmente más corta. La decisión correcta implica ampliar la vida útil del equipo hasta que la tasa interna de retorno diferencial iguale a la tasa de descuento. Maximizar la tasa interna de retorno del equipo es incorrecto, salvo que la intención sea mantenerse dentro del mismo tipo de actividad, y, en ese caso, reinvertir en ella, en el momento que se maximiza la tasa marginal interna de retorno, significa también maximizar la riqueza. Pero ello implicaría la reinversión en el mismo tipo de actividad de la totalidad de los flujos generados a lo largo de toda la vida útil. Esto es un supuesto demasiado fuerte para ser aceptado. La ampliación año a año e indefinidamente de una inversión, manteniendo precios constantes y mercado indefinido para los productos, no parece ser un supuesto aceptable.

Que la vida útil de un equipo sea diferente para las distintas personas, diferentes maximizaciones o en escenarios distintos se debe a la no existencia de un mercado perfecto de los equipos y de una tasa de interés única para todos los inversionistas. Si la tasa de descuento fuera única y el mercado de los equipos nuevos o usados fuese perfecto, los valores residuales y, en general, el valor de un equipo sería justamente el valor presente de los flujos generados y no existiría una vida útil que optimizara el valor presente, pues este valor presente del equipo para cada vida útil diferente sería el mismo e igual a cero, con lo que la tasa interna de retorno sería igual a la tasa de descuento de los inversionistas y se estaría indiferente en la elección de la duración del activo.

## REFERENCIAS

- Ackoff, P.L y  
R.L. Churchman, *Introduction to operations research*, John  
Willey and sons, Nueva York.
- Fontaine, E., *Evaluación social de proyectos*, Ediciones  
Universidad Católica, Santiago, 1981.
- Fama, E y  
M. Miller, *The theory of finance*, Dryden Press, Hinsdale,  
Illinois, 1971.
- Masse, P., "La elección de las inversiones", Sagitario,  
S.A. de Ediciones y Distribuciones, Barcelo-  
na, 1963.
- Taylor, G., *Ingeniería Económica*, Editorial LIMUSA,  
S.A., México, 1976.
- Copcland T.E y  
J.F. Weston, *Financial Theory and Corporate Policy*,  
Addison-Wesley Publishing Company, 1980.
- Hirshleifer, J., *Investment, interest and capital*, Prentice-  
Hall, Inc., Englewood Cliffs, Nueva York,  
1970.
- Bierman H. y  
S. Smidt, *The capital budgeting decision*, MacMillan  
Publishing Co. Inc. Nueva York, 1980.
- Fabrycky W.J. y  
G.J., Thuesen *Economic decision analysis*, Prentice-Hall,  
Inc. Englewood Cliffs, Nueva York, 1974.