



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

UN NUEVO CONCEPTO DE EQUILIBRIO EN REDES: ESTABILIDAD EN STATUS QUO Y SU RELACION CON LA EFICIENCIA DE LA RED

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN
ECONOMÍA APLICADA

GONZALO ANTONIO SALAZAR CAMPOS

PROFESOR GUÍA
RAHMI ILKILIÇ

MIEMBROS DE LA COMISIÓN
JUAN ESCOBAR CASTRO
MATTEO TRIOSSI VERONDINI

ESTE TRABAJO HA SIDO PARCIALMENTE FINANCIADO POR BECA MIPP

SANTIAGO DE CHILE
2017

RESUMEN DE TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN ECONOMÍA APLICADA
AUTOR: GONZALO ANTONIO SALAZAR CAMPOS
AÑO: 2017
PROFESOR GUÍA: RAHMI ILKILIÇ

UN NUEVO CONCEPTO DE EQUILIBRIO EN REDES: ESTABILIDAD EN STATUS QUO Y SU RELACION CON LA EFICIENCIA DE LA RED

La presente tesis estudia la estabilidad en un contexto de formación dinámica de redes sociales y económicas donde los individuos son considerados egoístas al momento de adicionar o eliminar un vínculo con otro integrante de la economía. Específicamente se modela al agente económico como una persona que tiene la capacidad de evaluar las relaciones que posee en la red y así determinar si son lo suficientemente valiosas para él. De este modo, se da paso al *status quo*, concepto acuñado para referirse a la situación inicial con la cual los individuos poseen un punto de referencia al momento de examinar las posibles mejoras que le pueda reportar una nueva red.

La motivación de esta radica en los problemas económicos que se presentan cotidianamente y que no son capturados por la teoría, al menos en casos particulares donde las normas sociales emergen para sostener acuerdos informales entre: mafiosos, firmas o miembros de una coalición política, y donde la noción de estabilidad en pares ([Jackson & Wolinsky \(1996\)](#)) no se aplica al equilibrio de estos mercados. Precisamente, este hecho es capturado mediante el ejemplo de no-existencia de estabilidad en pares al interior de una economía de intercambio, presentado por [Jackson & Watts \(2002\)](#). Por consiguiente, el foco del trabajo se encuentra en definir un concepto de estabilidad robusto a estos eventos, examinando cómo el entorno propuesto erradica los ciclos encontrados y dando pié a normas sociales que son impulsadas por aquellos individuos que son indirectamente afectados por acciones directas que cometen sus vecinos contra otros.

Dentro de los principales resultados obtenidos se tiene que siempre existe al menos una red que es estable en *status quo*. Adicionalmente, se obtiene una caracterización completa de estas redes, la que depende del valor que tome el costo por generar una relación entre los individuos.

Asimismo se integra el análisis del *trade-off* entre estabilidad y eficiencia. Esto resulta ser importante puesto que una de las finalidades de buscar equilibrio -en donde la estabilidad en pares no lo logra- es alcanzar estructuras que sean socialmente eficientes. Para ello se proveen las condiciones suficientes con el fin de determinar la relación entre el conjunto de redes estables y el conjunto de redes eficientes. De igual forma, el modelo captura el concepto de reciprocidad indirecta relacionado con la norma social, el cual se interpreta como la búsqueda de ganancias en eficiencia por medio de la cooperación. Este implica que la eficiencia global se obtiene a través de la estabilidad local, siendo un hecho destacado del modelo pues muestra que si los individuos se preocupan por sus pagos entonces serán conducidos a la maximización de la utilidad promedio de la red.

Finalmente, se presentan tres aplicaciones. La primera basada en el ejemplo de [Jackson & Watts \(2002\)](#), donde se muestra que sí es posible alcanzar un equilibrio bajo el concepto planteado. La segunda tiene como objeto estudiar formas funcionales específicas para la función de beneficios obtenidos de los individuos, se examina su modularidad. Y la última, emplea la noción de estabilidad en *status quo* en el Modelo de Conexiones presentado por [Jackson & Wolinsky \(1996\)](#).

A mis padres.

Agradecimientos

Parto dando las gracias a mis padres por forjar mi carácter y apoyarme en las metas que me he planteado. A mi hermana por tenerme fe y a mi hermano por ser quien siempre me ha impulsado una competencia por el conocimiento. También quiero reconocer la comprensión, participación y constante impulso de Natalia por enfocarme en mis metas.

También deseo agradecer a todo mi círculo cercano por darme el apoyo necesario para lograr esta empresa. En particular al Cani, Martín y Seba por prestarme techo en innumerables ocasiones, además de compartir gratas conversaciones y puntos de vista, olvidando de paso las obligaciones constantes del magíster. A Fab y Dani por su simpatía y buena camaradería. Y a todos los caídos durante mi estadía en el MagCEA, en especial aquellos del primer semestre, por mostrarme la convicción y ganas que tengo por querer seguir este camino.

Por otra parte, quiero destacar la perseverancia y motivación que ha tenido mi profesor guía Rahmi Ilkılıç. Agradezco su orientación y su constante enseñanza sobre temas que no se limitan solo a la economía, haciendo desafiante y divertido el presente trabajo; imposible olvidar la canción de Plaza Sésamo que usó para introducir el ramo de Teoría de Redes.

A su vez, quiero dar las gracias a Matteo Triossi por su incesante preocupación y simpatía al discutir sobre diversos temas. A Juan Escobar por sus valiosos comentarios y disposición a discutir sobre la investigación. Y a ambos por formar parte de mi comisión y por darme la oportunidad de realizar un curso de verano en el IMPA.

Quiero agradecer y reconocer a Olga Barrera por su buena disposición y atención al momento de resolver problemas, responder dudas o favores que en varias ocasiones necesité.

Por último, deseo agradecer al Instituto Milenio para la Investigación de Imperfecciones de Mercados y Políticas Públicas (MIPP) por el financiamiento del trabajo mediante las becas para tesis de magíster.

Tabla de Contenido

1	Introducción	1
1.1	Motivación	1
1.2	Un resumen del modelo	4
1.3	Literatura relacionada	6
1.3.1	Conceptos de reciprocidad indirecta y norma social	6
1.3.2	Nociones de estabilidad	8
1.4	No-existencia de equilibrio	9
2	Modelo	12
2.1	Jugadores	12
2.2	Redes y Grafos	12
2.3	Funciones de Valor y Pagos	14
2.4	Estabilidad en Pares	15
2.5	Supermodularidad y Submodularidad	15
2.6	Entorno de <i>Status Quo</i> y Estabilidad	16
3	Resultados	18
3.1	Estabilidad	18
3.2	Eficiencia	27
4	Aplicaciones	44
4.1	Ejemplo J&W (2002)	44

4.2	Modularidad	49
4.3	El Modelo de Conexiones	52
5	Conclusiones	56
6	Bibliografía	60
7	Apéndice	64
7.1	Figuras	64
7.2	Ejemplo Modelo de Conexiones	66
7.3	Demostraciones	70

Capítulo 1

Introducción

1.1 Motivación

La economía nace como una ciencia que estudia el esfuerzo que llevan a cabo los agentes con el fin de resolver los problemas económicos que enfrenten. Por su parte, estos problemas se materializan por medio de las estrategias que deben contemplar los agentes con el objeto de encontrar un balance entre: las necesidades ilimitadas que estos poseen y los recursos escasos que enfrentan para satisfacer las mismas. De esta forma, [Charness et al. \(2011\)](#) aseveran que uno de los tantos problemas que la sociedad enfrenta nace de la búsqueda por explotar ganancias provenientes del intercambio potencialmente alcanzable dentro de alguna forma de interacción social, mas difícil de lograr debido a los incentivos individuales por maximizar los beneficios propios.

Dado lo anterior se establece que ninguna sociedad o, mejor aún, relación de intercambio puede existir sin normas o acuerdos sociales. Estos son estándares normativos de comportamiento que son impuestos por medio de sanciones sociales informales. Las normas sociales pueden variar según el contexto, por consiguiente son diversos los ejemplos que se encuentran en la vida real, así lo desarrollan en parte algunos artículos, por ejemplo: (i) grupos de trabajo en grandes empresas donde los trabajadores regularmente se coordinan para restringir su desempeño y aquellos empleados que muestran un esfuerzo sobre la media son sancionados informalmente por sus compañeros ([Homans \(2013\)](#)); (ii) ciertos agentes económicos actúan en acuerdo con el principio que los pactos/convenios deben ser honrados ([Macaulay \(1963\)](#); [Ellickson \(2009\)](#)); y (iii) en la comunidad de usuarios de internet, una regla prohíbe el uso de los correos para ser usados en promociones comerciales, siendo esta ampliamente respetada ([Fukuyama \(1995\)](#)).

Una vez definida la norma social se espera alcanzar uno o variados equilibrios con el objeto de analizar estos y establecer su relación con la posible eficiencia que los mismos tengan. De

esta manera [Voss \(2001\)](#) plantea lo siguiente:

Un concepto clave en la literatura sobre teoría de juegos resulta ser el equilibrio de Nash, definido como un perfil de acciones del cual ningún agente económico posee incentivos positivos a desviarse del mismo. Muchas aproximaciones a la teoría de juegos usan la idea básica que una norma social será cumplida si las acciones que son compatibles con esta son soportadas por un equilibrio de Nash. Luego, una de las tareas que realiza el análisis de la teoría de juegos es apuntar a las condiciones o mecanismos sociales que nos llevan a esos equilibrios.

Sin embargo, el problema surge cuando dichos conceptos no logran capturar las normas sociales que conducen a mantener relaciones de cooperación en una economía, siendo un fenómeno inexplicable mediante el concepto simple de equilibrio de Nash o su par análogo en teoría de redes, la estabilidad en pares. Lo anterior queda de manifiesto tras la presentación del ejemplo de no-existencia de estabilidad en pares mostrado por los autores [Jackson & Watts \(2002\)](#) en donde presentan una economía de intercambio que no converge a una red estable, así se establece en la literatura que no siempre es posible alcanzar una relación de equilibrio mediante la interacción entre pares, que en el caso de redes se traduce a los vecinos directos entre sí.

La importancia de buscar un concepto de equilibrio *ad-hoc* radica en que existen problemas económicos que se presentan en la realidad y que no están siendo capturados por la teoría hasta el momento, al menos en casos particulares donde la noción de equilibrio de Nash más básica o la estabilidad en pares no logran explicar el por qué de un equilibrio en mercados que vemos a diario. Tales son los casos de:

- coaliciones políticas entre partidos políticos que sostienen ideologías similares, en donde no siempre existe común acuerdo entre todos los miembros de la coalición.
- pactos informales para mantener cooperación en empresas que se coluden al interior de un mercado sin traicionarse una a la otra;
- normas implícitas que permiten a miembros de una mafia mantenerse unidos mientras existen los incentivos a eliminar a la competencia con el objeto de llegar a ser el cabecilla de esta;
- afinidades sociales entre trabajadores de una empresa que logran que las estructuras organizacionales se mantengan;
- relaciones económicas entre individuos al interior de una economía de intercambio buscando maximizar el beneficio propio;
- entre otros.

En concordancia con los hechos expuestos nace la motivación por desarrollar el presente trabajo de investigación. Su objetivo principal reside en estudiar las redes estables bajo un contexto de formación dinámica de redes en donde los individuos que compongan un grafo son considerados egoístas en sus intereses por adicionar una conexión nueva o eliminar un vínculo existente, esto bajo un entorno donde la estabilidad en pares pueda no ser alcanzable mediante la interacción de vecinos directos. El enfoque usado da luces sobre qué estructuras son alcanzables bajo estabilidad y cuándo es posible obtenerlas. Adicionalmente, se estudian las condiciones suficientes para las cuales el conjunto de redes estables coincide con el conjunto de las eficientes, mostrando que ambos conjuntos no siempre son iguales.

El foco de la investigación radica en la generalización del modelo de [Jackson & Watts \(2002\)](#), el cual es adaptado a un entorno en donde los individuos pueden re-evaluar sus conexiones, lo que genera que las terceras partes (o actores indirectos) sean tomadas(os) en cuenta. Por consiguiente, se tendrá que los conceptos de reciprocidad indirecta ([Nowak & Sigmund \(2005\)](#)) y norma social ([Charness et al. \(2011\)](#); [Lewis \(1969\)](#)) se manifiestan de manera intrínseca al interior del marco de estudio planteado. En particular, la contribución que se realiza a la literatura se resume en (1) el desarrollo de un modelo de formación dinámica de redes no dirigidas, que puede ser aplicado a un amplio rango de entornos económicos y sociales (ver el capítulo 4, para revisar el modelo de conexiones); y (2) el desarrollo de un nuevo concepto de estabilidad, más robusto que la noción de estabilidad en pares (ver capítulo 2).

Los principales resultados arrojados en la presente pesquisa, muestran que el concepto planteado, denominado estabilidad en *status quo*, existe o se manifiesta en situaciones en donde la estabilidad en pares no necesariamente se alcanza. En especial, siempre existirá al menos una red que sea estable en *status quo*, lo cual brinda una justificación teórica a hechos económicos no explicables por medio de la estabilidad en pares. Adicionalmente, bajo ciertas condiciones se arriba a que estabilidad local implica eficiencia global.

Por último, es importante destacar lo miope que resulta ser el concepto de estabilidad en pares, pues un individuo solo manifiesta su interés por modificar una conexión -existente o no- en la red actual con el fin de obtener una mejora en utilidad. Esto lo realiza sin proyectar los cambios que pueda generar aquella alteración en la estructura de la red y, por ende, en los pagos de los otros individuos. En contraste, el concepto sugerido en esta investigación permite que los individuos re-evalúen todas las conexiones que poseen actualmente, pudiendo compararlas con otras posibles configuraciones de la red. Aquello resulta ser esencial al momento de pensar en situaciones donde la estructura de la red permite conexiones redituables para todos, especialmente bajo entornos donde se pueda alcanzar un resultado socialmente óptimo desde el punto de vista de la eficiencia y, donde la estabilidad en pares no es alcanzable, mas visto como una situación de *status quo* sí lo sea.

1.2 Un resumen del modelo

Se comienza modelando un proceso de formación dinámica de redes en donde individuos egoístas pueden adicionar o eliminar conexiones basados en las posibles mejoras que les ofrece una nueva red en relación a la red previa. Bajo esta premisa, se modifica el entorno original usado por [Jackson & Watts \(2002\)](#) y es adaptado para agregar perturbaciones caracterizadas por la elección aleatoria de un individuo al que se le eliminan todas sus conexiones. Posteriormente, dicho individuo tiene la oportunidad de evaluar: si forma las mismas conexiones que mantenía inicialmente o se plantea desarrollar nuevos vínculos. De esta manera se alcanzan redes que son estables bajo un concepto de *status quo*. Este nuevo entorno también es denominado: de *status quo*.

El *status quo* referido, radica en el pago de reserva que siguen percibiendo los individuos involucrados en la formación o eliminación de vínculos conducentes a una nueva red, en caso que la última no se alcance. Ergo, el *status quo* resulta ser exógeno al proceso de formación y estará determinado por la red inicial. A su vez, el concepto acuñado forma parte de un refinamiento a la definición de estabilidad en pares a partir de modelos estáticos ([Jackson & Wolinsky \(1996\)](#)).

Las perturbaciones aludidas otorgan robustez al momento de establecer las redes que son estables bajo el entorno *status quo*. Adicionalmente, este proceso dinámico siempre termina alcanzando redes que son estables, reduciendo a cero las posibilidades de alcanzar ciclos entre estas.

Es así como se modela una red como un grafo, donde los vertices representan individuos y las aristas reflejan conexiones entre estos. Las conexiones serán no-dirigidas y por lo mismo, recíprocas. A su vez, estas pueden ser formadas solo si ambos individuos involucrados están de acuerdo, mientras que para eliminar una solamente se requiere de la voluntad de un individuo. Por su parte, los individuos perciben pagos basados en la configuración que sea establecida, en otras palabras dependen directamente de la estructura de la red.

Paralelamente, el pago de un individuo está compuesto por los beneficios generalizados que él obtiene por el tamaño del componente al que pertenece (pudiendo estar conectado directa o indirectamente a sus vecinos). De esta forma, los beneficios obtenidos pueden ser supermodulares o submodulares en el número de vecinos, reflejando así convexidad en los pagos. Esta última estará dada por las preferencias que posee cada individuo, pudiendo querer poseer un sinnúmero de conexiones o tan solo preferir mantener unas pocas ([Gilles & Sarangi \(2005\)](#)).

Dado que la formación de enlaces se trabaja a la [Jackson & Wolinsky \(1996\)](#) se llega a un punto clave en el momento que un individuo re-evalúa sus conexiones, puesto que a quien se le está proponiendo mantener el enlace puede percibir que está recibiendo una utilidad inferior a la original, e.g., producto que quien está proponiendo elimina algunas conexiones previas con

sus vecinos. Como su utilidad depende de la estructura de la red, él no acepta la propuesta del nodo que re-plantea sus conexiones a menos que se le ofrezca lo original, sino aquel nodo corta su relación con el último. Notar que esto ocurrirá con todos los nodos que observan este comportamiento y que tengan una oferta directa por parte de dicho nodo. Luego los artículos de [Hirshleifer & Rasmusen \(1989\)](#); [Schuessler \(1989\)](#); [Tullock \(1985\)](#); [Vanberg & Congleton \(1992\)](#) acerca de amenazas de salida en juegos cooperativos toman relevancia en el análisis del proceso en que los agentes condicionan los acuerdos como un grupo.

Las definiciones, entornos y ciertas propiedades en las que este modelo se basa son extraídas en su gran mayoría de: [Diestel \(2005\)](#), [Bloch & Jackson \(2006\)](#), [Calvó-Armengol & İlkılıç \(2009\)](#), [Jackson & Wolinsky \(1996\)](#), [Watts \(2001\)](#) y [Jackson & Watts \(2001, 2002\)](#).

Dentro de las herramientas que permiten analizar el entorno dinámico y en base a la cual se encuentran definidos modelos que usan la estabilidad en pares como concepto de equilibrio, destacan los “caminos de mejora” (usados en gran parte por [Jackson & Watts \(2001, 2002\)](#)). Estos resultan ser secuencias de redes que son producto de adiciones o eliminaciones de conexiones basadas en mejores pagos resultantes de la nueva red obtenida en relación a la red original. Estas secuencias tiene dos propiedades inmediatas: (1) cada red en la secuencia es distinta a una red previa por medio de la adición o eliminación de un vínculo, y (2) la adición o resta de un vínculo beneficia al(a los) individuo(s) cuya aprobación es necesaria para arribar a esta nueva red.

A diferencia de los artículos que usan los caminos de mejora para estudiar la evolución de la red, en el presente trabajo se aborda la definición del equilibrio sin tomar en cuenta aquella herramienta, pues el análisis se basa en el estudio de la estabilidad, dejando relegado a un segundo plano el aprendizaje sobre la convergencia. Aún así resulta importante comprender el concepto para así entender los ejemplos que motivan esta tesis.

Es primordial apreciar que todo camino de mejora de una red a otra debe conducir a una red estable en pares o a un ciclo. En efecto, [Jackson & Watts \(2002\)](#) establecen que dado una valor de red y una regla de asignación el resultado resulta ser cierto. Así a simple vista se puede observar que no siempre se tendrán redes estables en pares. Precisamente, los autores muestran más adelante, en el contexto de una economía de intercambio con tres o más agentes, que no existe equilibrio, pues agentes que se encuentran formando una estructura en particular tienen incentivos a agregar una conexión adicional o eliminar alguna existente, dado que obtienen una utilidad mayor. Es bajo este contexto que los autores muestran que es posible estar frente a un ciclo entre redes, por lo que existen caminos de mejora que permiten arribar a redes en donde algunos nodos mejoran sus pagos en desmedro del resto.

Para el entorno de *status quo* propuesto se muestra que siempre existirá una red estable en *status quo*, la que se vinculará con la eficiencia que pueda llegar a tener la misma.

Por último, la reciprocidad indirecta se pone de manifiesto por medio de un nodo (llámese nodo 1) indirectamente conectado con otro (nodo 2) por medio de un individuo (nodo 3) que

re-evalúa sus conexiones, quien a su vez elimina toda conexión con el nodo 2. Por su parte, el nodo 1 al verse indirectamente afectado no acepta propuestas provenientes del nodo 3 si este no ofrece la conexión original, esto conlleva a que el nodo 1 se encuentre prestando ayuda de manera desinteresada al nodo 2 (directamente afectado). Se debe tener en cuenta que este comportamiento se repite en el tiempo, lo que finalmente da cabida a la norma social. La última se constituye pues en el transcurso del tiempo los agentes pueden adquirir cierta reputación o confianza, la cual es sostenida por la información que se les provee concerniente a la historia sobre la confianza pasada de la red. A su vez, esta puede ser inferida por medio de la estructura que mantenga la red en el tiempo. En otras palabras, si la red se mantiene estable, se tiene dos posibles escenarios: (i) los individuos que pertenecen a la misma son honestos o, (ii) la amenaza de salida (castigo) es lo suficientemente poderosa para que aún los individuos que deseen desviarse no lo hagan, lo que les contribuye positivamente a su reputación.

1.3 Literatura relacionada

1.3.1 Conceptos de reciprocidad indirecta y norma social

Múltiples son las actividades económicas que resultan ser secuenciales o repetidas en el tiempo, estas se caracterizan por un agente que incurre en un costo previo a obtener beneficios, luego es una cosa de confianza sobre las utilidades futuras que pueda recibir, las que incluso pueden ser asequibles gracias a un agente que actúa de manera recíproca. Este hecho es estudiado por un sinnúmero de artículos, en particular el estudio realizado por los autores [Seinen & Schram \(2006\)](#) testea experimentalmente el modelo de [Nowak & Sigmund \(2005\)](#) -sobre reciprocidad indirecta- argumentando que si las personas tienden a comportarse bien con personas que se han comportado bien con ellas (reciprocidad directa), entonces las personas también se comportan bien con personas que fueron amables con otros (reciprocidad indirecta); llegando a obtener evidencia que sustenta la hipótesis planteada.

Lo anterior se debe al estatus social que construyen las personas, el cual posee una gran incidencia en la elección que realizan los agentes con el fin de ayudar al resto. A diferencia del artículo, en donde los individuos poseen etiquetas sobre su estatus social, en el presente trabajo los jugadores pueden inferir el comportamiento de los otros agentes pues saben que la estructura de la red se mantiene en el tiempo. Por último los autores aseveran que la reciprocidad indirecta puede conducir a regímenes cooperativos estables en los cuales la mayoría de la población ayude o colabore.

Por su parte, [Engelmann & Fischbacher \(2009\)](#) ofrecen una continuación al trabajo de [Seinen & Schram \(2006\)](#) introduciendo agentes que no poseen etiquetas que señalen su estatus social. Esto les permite enfocarse directamente en la construcción estratégica de su

reputación. Finalmente sus resultados atribuyen la mitad del efecto en acciones de ayuda a la construcción de reputación y la otra mitad a la reciprocidad indirecta de los agentes.

Por otro lado resulta relevante el trabajo planteado por [Fehr & Fischbacher \(2004\)](#), los autores estudian la aplicación de mecanismos tras normas sociales encontrando que un gran porcentaje de agentes está dispuesto a aplicar normas de cooperación aun cuando ellos no sean directamente afectados por la violación de la norma.¹ Los resultados sugieren que una sanción altruista por parte de un tercero es probablemente un mecanismo poderoso para establecer normas sociales que se mantengan en el tiempo. Asimismo, encuentran que las sanciones aplicadas por las partes que son directamente afectadas son más severas que aquellas infringidas por terceras personas, incluso pudiendo llegar a ser no-rentables; esto difiere del resultado obtenido en el modelo a presentar pues tras eliminar el enlace con un nodo cualquiera -siendo este último directamente afectado- este no tiene manera alguna de castigar al individuo que lo abandona debido a que ya no poseen relación alguna entre ellos.²

Profundizando mayormente en el tema, los autores señalan que se tiene conocimiento que la violación de las normas no afecta directamente el beneficio económico de terceros, sin embargo si solo las partes directamente afectadas impusieran sanciones, entonces escasas normas sociales se podrían aplicar debido a que la violación de las mismas a veces no afectan directamente a alguien.

Debido a los antecedentes expuestos resulta interesante valorar la importancia de terceros agentes en la economía y su participación en la implementación y mantención de normas sociales. Así lo enfatizan [Bendor & Swistak \(2001\)](#), estos señalan que la relevancia de los acuerdos informales radica en las sanciones implementadas por terceras personas (indirectas) ya que las sanciones aplicada por las personas afectadas (directas) no son evolutivamente estables en repetidas interacciones entre pares, mientras que las estrategias que involucran a terceros alcanzan la estabilidad. Resultado que también se busca obtener bajo el modelo de redes a desarrollar.

Finalmente desde el punto de vista teórico y mediante la noción de equilibrio de contagio, [Kandori \(1992\)](#) muestra que la cooperación puede ser sostenida en un dilema del prisionero de una etapa bajo una norma social que establece que un simple error (desvío, defecto) por algún miembro significa el término de la confianza en toda la comunidad. Así, el jugador que contempla este comportamiento deshonesto comienza a engañar a todos sus oponentes. En contraste, el modelo desarrollado en este trabajo resulta ser similar en las amenazas (la amenaza contra el engaño es la salida del pacto, más conocido como *exit threats*), mas no es equivalente puesto que no existe una noción de contagio. Esto producto que una vez que un jugador no cumple, o sea propone menos vínculos que los originales, entonces este se verá excluido de cualquier red en la cual desee participar.

¹A esto lo denomina *third-party sanctions*.

²Al menos de forma directa.

1.3.2 Nociones de estabilidad

En la literatura resulta relevante estudiar cómo las decisiones de los individuos pueden contribuir a la formación de redes. Es por ello que algunos autores, basados en la teoría económica, han desarrollado herramientas con el objeto de analizar en profundidad el comportamiento de estos. Los artículos más cercanos a esta tesis son tratados a continuación.

[Jackson & Wolinsky \(1996\)](#) estudian la estabilidad y eficiencia en redes sociales y económicas cuando individuos egoístas pueden formar o eliminar conexiones. Estos lo hacen por medio de dos aplicaciones sociales que luego generalizan, además muestran que no siempre existen redes estables que a su vez sean eficientes. Resultado similar al que se obtiene en la investigación. Los autores no responden la pregunta sobre qué redes se formarán, dejando esta arista abierta para posibles investigaciones a futuro.

Gran parte de su análisis lo hacen por medio de conceptos sobre teoría de juegos cooperativa tales como la caracterización de las asignaciones de valor con estructuras de comunicación. Para este caso, en el presente modelo -al igual que en el suyo- el valor de la red puede depender de cuántos individuos se encuentren conectados sin importar si están directa o indirectamente relacionados. Por último el modelo resulta ser una extensión dinámica del referido.

Por su parte, [Bala & Goyal \(2000\)](#) examinan la formación de redes en un entorno dinámico. Sin embargo, su aproximación difiere a esta, pues los autores consideran modelos donde las conexiones son formadas unilateralmente (las conexiones son dirigidas) en un juego no-cooperativo y el foco se encuentra en el aprendizaje sobre la identificación del equilibrio.

[Jackson & Watts \(2001\)](#) estudian condiciones bajo las cuales las redes convergen a estructuras estables. Específicamente, muestran condiciones necesarias y suficientes para eliminar los ciclos entre redes, lo cual se traduce en una condición suficiente para la existencia de redes estables en pares. En contraste, este trabajo muestra que siempre existe al menos una red estable bajo el nuevo concepto desarrollado.

[Watts \(2001\)](#) analiza el proceso de formación de redes en un entorno dinámico en donde los individuos pueden formar o eliminar conexiones. El autor determina a qué estructuras de red el proceso de formación convergerá. Esto ayudará a saber si dicho proceso convergerá o no a estructuras de redes eficientes. Específicamente, muestra que el proceso de formación es dependiente en el camino de mejora y por lo tanto este no necesariamente converge a redes eficientes. Resultados que contrastan [Qin \(1996\)](#) y [Dutta et al. \(1998\)](#) quienes dicen que una red eficiente casi siempre se forma.

Bajo el modelo de los autores aludidos, hay un grupo de agentes que no se encuentran conectados inicialmente y la formación de vínculos y la utilidad se trabaja *a la* [Jackson & Wolinsky \(1996\)](#) de manera tal que la red eficiente solamente se forma en el orden que los individuos se conozcan según un patrón particular, siendo más difícil obtener este patrón a

medida que el número de agentes aumenta en la red. En la investigación actual se generaliza dicho modelo sin necesidad de imponer una forma funcional a la función de beneficios obtenidos y se modifica el entorno dinámico.

Finalmente, [Jackson & Watts \(2002\)](#) también analizan la formación dinámica y la evolución estocástica de las redes no-dirigidas, tomando en cuenta los incentivos que los individuos egoístas poseen para formar o eliminar conexiones entre ellos. Los autores extienden el proceso de formación a un marco general donde los jugadores ocasionalmente forman o eliminan conexiones por error, por ende la estabilidad estocástica es usada como una manera de identificar las redes resultantes. Aun así aquella noción de equilibrio se encuentra bajo el alero de la estabilidad en pares.

Por otro lado, la formación endógena de coaliciones a modo de componentes es examinada por [Aumann & Myerson \(1988\)](#), [Qin \(1996\)](#), [Dutta et al. \(1998\)](#), y [Slikker & van den Nouweland \(2001\)](#). La diferencia clave con el nuevo modelo planteado radica en se asume un proceso dinámico de formación de redes en el cual los agentes son libres de eliminar una conexión si esta ya no es benéfica (notar que dichos autores usan conexiones dirigidas). En contraste, en [Aumann & Myerson \(1988\)](#) se asume que una vez que una conexión se forma esta no puede ser eliminada, mientras que en [Qin \(1996\)](#), [Dutta et al. \(1998\)](#) y [Slikker & van den Nouweland \(2001\)](#) se consideran juegos estáticos.

Para finalizar, la literatura en cuanto a teoría de juegos evolutiva, destacan los artículos de [Ellison \(1993\)](#), [Goyal & Janssen \(1997\)](#) y [Anderlini & Ianni \(1996\)](#). Todos evidencian que la estructura de la red afecta la ocurrencia de coordinación entre individuos. Lo que se respalda en el enfoque miope que poseen los caminos de mejora. Resultado que se busca eliminar con el entorno de *status quo* sugerido.

1.4 No-existencia de equilibrio

A continuación se describe el ejemplo de no-existencia de estabilidad en pares planteado por [Jackson & Watts \(2002\)](#). Piénsese en una economía de intercambio con un conjunto de agentes N y dos bienes, en donde cada agente posee una función de utilidad Cobb-Douglas, $U(x, y) = xy$. Adicionalmente, asúmase que cada agente posee una dotación inicial aleatoria, la que es independiente e idénticamente distribuida, pudiendo ser $(1, 0)$ o $(0, 1)$, cada una con probabilidad $1/2$, la cual se realiza una vez que la red se encuentra establecida.

Por otra parte los agentes deben incurrir en un costo por establecer y mantener una conexión que les permita intercambiar con otros agentes. Este costo es exógeno y es $c = 5/96$.

Sea $|N| = 4$, a continuación se muestra que no existe una red estable en pares. Para el análisis que sigue, no se toma en cuenta el costo de conectar con alguien, c . Nótese que la utilidad esperada para un jugador por estar conectado a otro jugador es $1/8$, de igual manera

la utilidad esperada para un jugador por estar conectado (directa o indirectamente) a otros dos jugadores es $1/6$. Por consiguiente, será de $3/16$ en caso de estar conectado a otros tres jugadores.

Observación: la utilidad esperada de cada agente es estrictamente creciente y cóncava en el número de agentes a los que se encuentra conectado (directa o indirectamente), ignorando el costo por conexión, c .

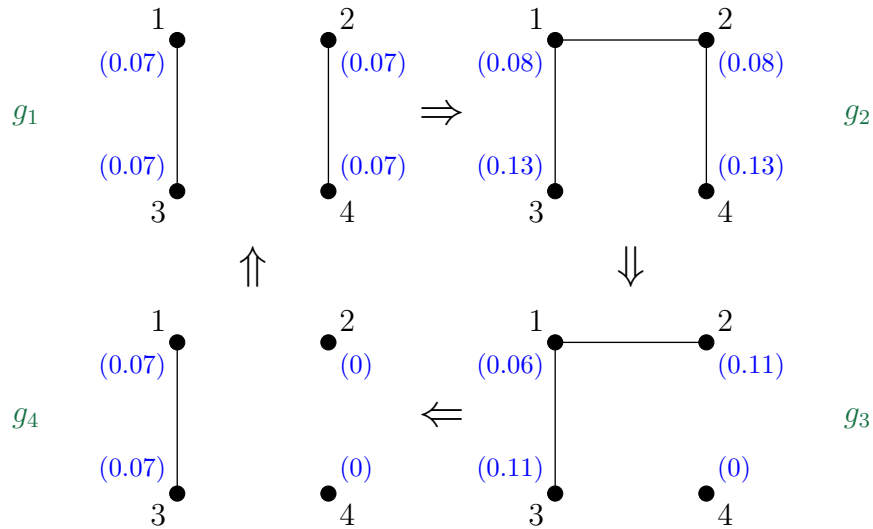


Figura 1.1: Ciclo entre redes en una economía de intercambio con $|N| = 4$ agentes.

Agregando al análisis el costo de la conexión en el que tiene que incurrir cada individuo, se debe apreciar que si existen k individuos siendo parte de una red estable, entonces esta debe tener exactamente $k - 1$ conexiones. Si existen más que las señaladas, entonces los individuos tienen incentivos a eliminar una de estas sin alterar la estructura del componente y de esta manera, se ahorran el costo del vínculo sin pérdida alguna en la utilidad esperada obtenida del intercambio.

Paralelamente, nótese que un individuo conectado a dos nodos que a su vez no están conectados con nadie más (en otras palabras, una línea de largo tres), pierde a lo más $1/6 - 1/8 = 1/24$ en utilidad esperada por eliminar una de las conexiones, pero se ahorra el costo c de mantener una de esas conexiones. Otra forma de verlo es en la figura 1.1, la red g_3 representa esta situación. Los paréntesis en azul reflejan la utilidad de cada individuo, la que asciende a 0.06 ($1/6 - 10/96$) para el nodo 1. Si se compara la utilidad anterior con la que obtendría este nodo al eliminar la conexión $\{12\}$, es posible percatarse que se arriba a la red g_4 , pues el primero tiene el incentivo a aumentar su utilidad a 0.07 ($1/8 - 5/96$). Por su parte, esta última red no es estable pues existen incentivos a formar la conexión $\{24\}$, llegando a g_1 . Es fácil notar que se está frente a un ciclo entre redes, pues en cada red a la que se llega alguno de los agentes posee incentivos a: eliminar una conexión existente o adicionar una

conexión que podría reportarle mayor utilidad. Ergo, no se está frente a una red estable en pares.

La presente tesis procede como sigue. En el Capítulo 2 se entregan las definiciones generales del modelo. En el Capítulo 3, se muestran los principales resultados encontrados, detallando las redes que son estables y las que son eficientes; al igual que en algunos artículos citados, es posible darse cuenta que estas redes difieren en muchas instancias. En el Capítulo 4 se presentan tres aplicaciones del modelo, la primera basada en el ejemplo de [Jackson & Watts \(2002\)](#); la segunda se enfoca en el tipo de modularidad que posea la función de beneficios obtenidos de los individuos; y la última estudia las semejanzas que poseen los conceptos de estabilidad en pares y en *status quo* bajo el Modelo de Conexiones planteado por [Jackson & Wolinsky \(1996\)](#).

Capítulo 2

Modelo

Este capítulo describe los elementos esenciales que serán usados a lo largo del trabajo de tesis y que facilitan la comprensión de los principales resultados encontrados. Gran parte de las definiciones son extraídas de [Jackson & Wolinsky \(1996\)](#), quienes desarrollan un modelo de redes económicas y sociales para explicar conceptos de estabilidad y eficiencia cuando individuos egoístas pueden crear o eliminar vínculos entre ellos.

2.1 Jugadores

Sea $N \doteq \{1, \dots, n\}$ un conjunto finito de jugadores o nodos, indistintamente. La relación entre los jugadores está representada por un grafo donde cada arista captura una relación de pares entre dos nodos.

2.2 Redes y Grafos

La red completa, denotada g^N , es el conjunto de todos los subconjuntos de N de tamaño 2. El conjunto de todas las posibles redes en N es $\{g | g \subset g^N\}$. El subconjunto de N que contiene a i y a j se denota ij y es referido como el vínculo o conexión ij . Lo anterior se interpreta como: si $ij \in g$, entonces los jugadores i y j están directamente conectados, mientras que si $ij \notin g$, entonces los jugadores i y j no están directamente conectados, es decir, es posible para un individuo conectar con otro sin necesariamente el segundo estarlo con el primero también.

Sea $N(g) \doteq \{i | \exists j \text{ tal que } ij \in g\}$ y $n(g)$ la cardinalidad de $N(g)$. Un camino o cadena en g conectando i_1 e i_n es un conjunto de nodos distintos $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subset N(g)$ tal que

$$\{i_1i_2, i_2i_3, \dots, i_{n-1}i_n\} \subset g.$$

El grafo $g' \subset g$ es un componente de g si para todo $i \in N(g')$ y $j \in N(g')$, con $i \neq j$, existe un camino en g' conectando i y j , y para todo $i \in N(g')$ y $j \in N(g)$, $ij \in g$ implica $ij \in g'$.

A partir de lo anterior se define \bowtie como la relación binaria de equivalencia entre dos nodos al interior del mismo componente.¹ Por otra parte, sea $N_i(g) \doteq \{jk \in g : j = i \vee k = i\}$ el conjunto de conexiones directas del jugador i que se encuentran en g y $L_i(g^N \setminus g) \doteq \{ij : j \neq i \text{ e } ij \notin g\}$ el conjunto de conexiones directas del nodo i que no se encuentran en g . Notar que $ij \notin g$ es equivalente a $ij \in L_i(g^N \setminus g)$. Además, sea $n_i(g) \doteq |\{j : g_{ij} = 1\}|$ la cardinalidad del nodo i .

Sea $g + ij$ la red obtenida por añadir el vínculo ij a la red g y sea $g - ij$ la red obtenida por eliminar la conexión ij de la red g , es decir, $g + ij \doteq g \cup \{ij\}$ y $g - ij \doteq g \setminus \{ij\}$. De forma más general, por cada colección de vínculos $l \subseteq D_i(g)$, sea $g - l$ la red obtenida de g tras eliminar todos las conexiones en l . Mientras que por cada colección de vínculos $l \subseteq L_i(g^N \setminus g)$, sea $g + l$ la red obtenida de g tras adicionar todas las conexiones en l .

Sea $I_i(g) \doteq \{j | ij \notin g \wedge i \bowtie j\}$ el conjunto de conexiones indirectas del jugador i que se encuentran en g y $T_i(g) \doteq N_i(g) \cup I_i(g)$ el conjunto de todas las conexiones de i en la red g .

Un ciclo en una red $g \in \{g | g \subset g^N\}$ es la secuencia de conexiones $i_1i_2, \dots, i_{K-1}i_K$ tal que $i_Ki_{K+1} \in g$ (esto es que, $g_{i_Ki_{K+1}} = 1$) para cada $k \in \{1, \dots, K-1\}$, con $i_1 = i_K$. También puede ser entendido como un camino que inicia y termina en el mismo nodo.

Una grafo que no contenga ningún ciclo en la red se denomina un árbol. Un bosque es aquel grafo cuyos componentes son árboles. Los nodos de grado uno en un árbol, se denominan hojas.² Todo árbol posee una hoja, es más, al remover cualquier hoja la red resultante sigue siendo un árbol. Adicionalmente, se cumple que si un árbol g tiene un número finito de nodos, n , entonces tiene $n - 1$ aristas. Sin pérdida de generalidad, un bosque también será árbol que contenga a todos los jugadores.³

Un caso particular de un bosque resulta en su caracterización como estrella. Una estrella es una red tal que existe algún nodo i para el cual toda conexión en la red lo envuelva. En este caso, el nodo i se denomina el centro de la estrella.⁴ Formalmente, $g \subset g^N$ es una estrella

¹Notar que toda relación de equivalencia es:

- Completa: $\forall i, j \in g$, luego $i \bowtie j \vee i \not\bowtie j$.
- Transitiva: $\forall i, j, k \in g$, luego $i \bowtie j \wedge j \bowtie k \Rightarrow i \bowtie k$.
- Simétrica: $\forall i, j \in g$, luego $i \bowtie j \Leftrightarrow j \bowtie i$.

²Exceptuando que la raíz de un árbol nunca es llamada así, incluso cuando posee grado 1.

³Definiciones extraídas desde [Diestel \(2005\)](#).

⁴También puede ser visto como un árbol con un nodo interno y k hojas. Esta posee $k + 1$ nodos y k

si $g \neq \emptyset$ y existe $i \in N$ tal que $jk \in g$, entonces $j = i$ o $k = i$.

Un círculo, también conocido como un grafo de ciclo, es una red que posee un ciclo simple en la red y tal que cada nodo en la red posea exactamente dos vecinos. Formalmente, $g \subset g^N$ es un círculo si $g \neq \emptyset$ y existe $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subset N$ tal que $g \doteq \{i_1 i_2, i_2 i_3, \dots, i_{n-1} i_n, i_n i_1\}$.

Una línea consiste en dos grupos de nodos, $N_1(g)$ y $N_2(g)$, con $|N_1(g)| = 2$ y $|N_2(g)| = n - 2$, donde dos nodos con un solo vínculo son los que se encuentran en los extremos de esta, mientras que los que poseen dos se encuentran al medio. La definición pareciera ser similar a un camino, mas no se deben confundir.

Sea \mathbf{g}^T el conjunto de todas las redes que conforman un árbol que incluye a todos los jugadores y \mathbf{g}^L , representará el conjunto de líneas que incluye a todos los nodos del grafo.⁵ En particular, sea \mathbf{g}_k el conjunto de redes que son formadas por k nodos.⁶

Finalmente, g^E , será la red vacía: existe $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subset N$ tal que $g \doteq \{\emptyset\}$.

2.3 Funciones de Valor y Pagos

El valor de una red es representado por $v : \{g | g \subset g^N\} \rightarrow \mathbb{R}$. El conjunto de todas las funciones de valor es V .

Definición 1 (Fuertemente Eficiente). *Un grafo $g \subset g^N$ es fuertemente eficiente si*

$$v(g) \geq v(g'),$$

para toda $g' \subset g^N$.

Es importante notar que fuertemente eficiente y eficiencia de Pareto coinciden cuando el valor es transferible.

Siguiendo Bloch & Jackson (2006), se define una función de pagos de red como un mapeo $u : \{g | g \subset g^N\} \rightarrow \mathbb{R}$ que asigna a cada red g un pago (utilidad) $u_i(g)$ por cada jugador $i \in N$. Adicionalmente, se normaliza $u_i(\emptyset) = 0$.

Finalmente, un caso particular de función de valor se caracteriza como el agregado de las utilidades individuales, $v(g) = \sum_i u_i(g)$.

vínculos.

⁵Para entender por qué se habla de conjuntos, supóngase que $|N| = 3$, posteriormente existirán distintas combinaciones para las cuales los jugadores se ubicarán en la red g . De esta forma, se tendrá que $\mathbf{g}^L = (\{12, 23\}, \{13, 32\}, \{21, 13\}, \{23, 31\}, \{31, 12\}, \{32, 21\})$. Por ende, a medida que $|N|$ aumenta, la cardinalidad de los conjuntos también lo hará.

⁶Por ejemplo para $|N| = 4$, $\mathbf{g}_2^L = (\{12, 34\}, \dots, \{13, 24\}, \dots, \{14, 32\})$. En caso que $|N|$ sea impar, siempre existirá un nodo que se quedará sin pareja.

2.4 Estabilidad en Pares

Uno de los intereses principales en la literatura radica en definir una noción de equilibrio, es así como [Jackson & Wolinsky \(1996\)](#) plantean en sus inicios un concepto denominado estabilidad en pares. Este describe una situación en que nadie se beneficiaría tras la eliminación de un vínculo, y la formación de una nueva conexión no beneficiaría a ninguno de los dos jugadores involucrados. Para estos efectos, resulta sustancial tener en cuenta que para la creación de cualquier conexión se requiere del consentimiento de todos los nodos involucrados, mientras que para la eliminación de un vínculo solo es necesaria una decisión unilateral.

Definición 2 (Estabilidad en Pares). *Una red g es estable en pares con respecto a u si*

- (i) para todo $ij \in g$, $u_i(g) \geq u_i(g - ij)$ y $u_j(g) \geq u_j(g - ij)$, y
- (ii) para todo $ij \notin g$, si $u_i(g) < u_i(g + ij)$ entonces $u_j(g) > u_j(g + ij)$.

Cuando una red g no es estable en pares se dice que es rechazada por g' si ya sea $g' \doteq g + ij$ y (ii) es violada por ij , o si $g' \doteq g - ij$ y (i) es violada por ij .

2.5 Supermodularidad y Submodularidad

Dos conceptos que serán esenciales para estudiar casos discretos en donde buscamos que los beneficios del jugador i se comporten de manera convexa o cóncava, dependiendo de los cambios que se generen al interior de los miembros del componente al que pertenece dicho jugador, son descritos a continuación.⁷

Definición 3 (Submodularidad). *La función de beneficios obtenidos por el jugador i es submodular si, y solo si*

$$B_i(g, k - 1) + B_i(g, k - 2) > B_i(g, k) + B_i(g, k - 1),$$

para toda $g \subset g^N$, $k \in \{2, \dots, n - 1\}$ e $i \in N$.

La función $B(g, k)$, $\forall k \in \{1, \dots, n - 1\}$, representa el beneficio que obtiene un nodo por estar conectado directa e indirectamente a otros k nodos.

A veces, supermodularidad y submodularidad se encuentran definidas por funciones sobre subconjuntos de conjuntos. Intuitivamente, una función submodular sobre aquellos subconjuntos representa retornos decrecientes, lo que resulta ser la análogo a tener una función cóncava para el caso continuo.

⁷Estos conceptos son extraídos del estudio de [Gilles & Sarangi \(2005\)](#), en donde analizan redes con pagos convexos. Luego es usado y adaptado por [Bloch & Jackson \(2006\)](#) y [Calvo-Armengol & İklilç \(2009\)](#) en sus respectivos artículos.

Definición 4 (Supermodularidad). *La función de beneficios obtenidos por el jugador i es supermodular si, y solo si*

$$B_i(g, k - 1) + B_i(g, k - 2) < B_i(g, k) + B_i(g, k - 1),$$

para toda $g \subset g^N$, $k \in \{2, \dots, n - 1\}$ e $i \in N$.

De igual forma que el caso submodular, una función supermodular puede ser pensada como una función convexa para el caso continuo.

2.6 Entorno de *Status Quo* y Estabilidad

En esta sección se modifica el marco propuesto por [Jackson & Wolinsky \(1996\)](#) y se introduce un entorno de *status quo*. Este último, se caracteriza por los siguientes pasos:

1. Escoger un nodo i de forma aleatoria y eliminar todas sus conexiones.
2. El nodo i , debe replantearse sus conexiones frente al *status quo*.

En cuanto al segundo punto, el nodo i puede gestar vínculos de la siguiente forma:

- (i) Generar vínculos con aquellos nodos con los cuales mantenía relaciones inicialmente, formando la red original g ,

$$g \rightarrow g - \{ij_1, \dots, ij_K\} \rightarrow g;$$

- (ii) Creando nuevos enlaces y formando la red g' ,⁸

$$g \rightarrow g - \{ij_1, \dots, ij_K\} \rightarrow g'.$$

Donde K es el número de vínculos que el nodo i poseía antes de morir.

Nótese que en (i) se alcanza tempranamente un concepto de estabilidad. Esto se debe a que el nodo i prefiere retomar las conexiones que mantenía originalmente, en busca de la maximización de su utilidad. Mas esto no implica que la red sea estable, pues para que ello ocurra todos los nodos deben preferir formar la red original.

Resulta relevante mencionar que bajo esta configuración, se está permitiendo que los nodos puedan formar más de un vínculo al momento de ingresar a la red. Pero bajo este contexto,

⁸Es importante notar que estos enlaces pueden incluir o no antiguas relaciones que haya mantenido el nodo i .

los nodos antiguos podrían eliminar una conexión existente o rechazar una proposición proveniente del nodo i escogido por el mecanismo de *status quo*. Esto produce que la red resultante g' (la red propuesta) podría reportar utilidades inferiores en comparación con la red g (la red original). Lo último conduce a que g' no sea estable, convergiendo a g a medida que el tiempo pase.

Para los resultados que sean presentados a lo largo del trabajo de investigación se necesita un concepto de estabilidad que tome en cuenta el entorno de *status quo*. La siguiente definición lo detalla.

Definición 5 (Estabilidad en *Status Quo*). *Una red g es estable en status quo si para cualquier nodo $i \in g$ no existe otra red g' donde:*

1. $\forall j, \forall k$, con $j \neq k \neq i$:

si $jk \in g'$, entonces $jk \in g$.

2. además,

$$u_i(g') \geq u_i(g) \quad \wedge \quad u_j(g') \geq u_j(g), \quad \forall j \in N_i(g).$$

De otra manera, lo que la definición señala es que: (i) los enlaces para todo nodo $j \neq i$ que no se encuentre conectado directamente a i en g' deben permanecer como en g , y (ii) la utilidad obtenida por el nodo i y sus vecinos directos es al menos la misma que en la red g .

De esta definición se puede desprender que al momento de arribar a una red estable en *status quo*, esta tendrá la misma estructura, independiente del entorno al que sea sometido.

Capítulo 3

Resultados

3.1 Estabilidad

En adelante se estudiarán las condiciones necesarias para que una red sea estable en *status quo*. En particular, se trabajará con una función de pagos de red

$$u_i(g') = B(|T_i(g')|) - \sum_{j:i,j \in g'} c,$$

donde $B(\cdot) \in \mathbb{R}_+$ representa la función beneficios obtenidos por el jugador i . Bajo este contexto, es que $B(k)$ con $k \in \{1, \dots, n-1\}$ denota que el jugador i recibe beneficios de la conexión con un componente g' que posee k vecinos.¹ Por el contrario, cuando $B(0) = 0$ el nodo i no posee ninguna conexión y por ende no obtiene beneficio alguno.²

Esto representa un entorno en donde los jugadores prestan atención al tamaño del componente sin importar si este posee conexiones directas o indirectas. Esto conlleva a poseer redes estables en *status quo* bastante particulares.

Teorema 1. *Para todo N finito, $c > 0$ y $B(\cdot)$ estrictamente creciente, siempre existe una red estable en status quo.*

Además, estas son caracterizadas como sigue, para $n \geq 2$:

1. *Cuando $c < \frac{B(n-1)}{n-1}$ todo árbol que contenga a todos los jugadores será una red estable.*
2. *Cuando $\frac{B(n-1)}{n-1} < c < \frac{B(n-1)}{2}$ la línea que contenga a todos los jugadores será la única red estable.*

¹Notar que es posible que $g' \subseteq g$.

²Notar que $B(0)$ implica $u_i = 0$. Lo anterior, se debe a que al no estar conectado con nadie tampoco existe un costo asociado.

3. Cuando $\frac{B(n-1)}{2} < c$, tendremos dos casos particulares:

(a) Si $B(1) < c$, la red vacía será la única red estable.

(b) Si $B(1) > c$ y n es par, la red consistente en $\frac{n}{2}$ componentes de dos nodos conectados entre ellos será la única red estable. En caso que n sea impar, la red caracterizada por $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ componentes (uno de ellos, estará compuesto por un solo jugador) será estable.

Demostración.

1. Cuando $c < \frac{B(n-1)}{n-1}$, se puede apreciar que el beneficio de pertenecer a un componente en el cual todos se encuentran conectados (directa o indirectamente) es superior al costo que enfrenta cualquier nodo al desear conectar con todos.

Llámesese g al árbol compuesto por $n \geq 2$ nodos. Las siguientes ecuaciones resumen las utilidades obtenidas por los nodos:

$$\begin{aligned} u_r(g) &= B(n-1) - n_r(g) \cdot c. \\ u_{h_j}(g) &= \begin{cases} B(n-1) - n_{h_j}(g) \cdot c & , \text{ si } n_r(g) < n-1 \text{ y } n_{h_j}(g) < n-1 \\ 0 & , \text{ si } n_r(g) = n-1. \end{cases} \quad \forall h_j \in H. \\ u_{l_i}(g) &= B(n-1) - c, \quad \forall l_i \in L, \end{aligned}$$

donde $H \doteq N \setminus (\{r\} \cup L)$ y $L \doteq N \setminus (\{r\} \cup H)$. Además r , h y l , representan a los nodos raíz (o *root*), intermedio y hoja (o *leaf*), respectivamente. Notar que todo árbol siempre puede ser representado como una estructura ordenada o jerárquica, luego el nodo r caracteriza la cabeza de la red, el nodo h a aquellos jugadores que se encuentran en niveles medios y, finalmente, el nodo l refleja a los nodos que se encuentran en el último nivel o donde se termina el camino que se inicia desde la raíz.³

Primero, supóngase que algún nodo l_i es escogido y a su vez, se le eliminan sus conexiones de la red g . Luego, este no querrá formar más de una conexión, sino su utilidad se vería estrictamente reducida. Por consiguiente, el nodo l_i tendrá que volver a formar su conexión original con aquel nodo al que se encontraba vinculado en un inicio. Este último gozará de la utilidad bajo la propuesta del nodo l_i y el escenario inicial, por lo que aceptará la propuesta.

Ahora se debe mostrar que el nodo l_i no posee incentivos unilaterales a desviarse, para ello se asume que propone generar un vínculo con algún nodo distinto al que originalmente estaba conectado:

³En una red directa, esto resulta más fácil de entender, pues la raíz puede representar la jefatura de una empresa y es donde nacen las decisiones. Los nodos intermedios reciben dicha información y entregan información a los siguientes niveles, repitiéndose este comportamiento hasta que se llegue a un nodo final, generalmente representado como los ejecutores de las acciones o mano de obra que acata lo señalado por sus superiores.

- Al nodo r : en este caso es fácil notar que la utilidad del nodo aludido disminuye si forma una conexión adicional, pues la diferencia en utilidad será:

$$\Delta(u_r) = \underbrace{B(n-1) - n_r(g + l_i r)c}_{u_r(g - N_{l_i}(g) + l_i r)} - \underbrace{[B(n-1) - n_r(g)c]}_{u_r(g)} = -c < 0.$$

Ergo, el nodo r terminará no aceptando dicha propuesta.

- A algún nodo h_j : al igual que el caso anterior, la utilidad para todo nodo $h_j \in H$ disminuye si forma una conexión adicional, pues la diferencia en utilidad cuando $n_{h_j}(g) < n-1$ es:

$$\Delta(u_{h_j}) = \underbrace{B(n-1) - n_{h_j}(g + h_j l_i)c}_{u_{h_j}(g - N_{l_i}(g) + h_j l_i)} - \underbrace{[B(n-1) - n_{h_j}(g)c]}_{u_{h_j}(g)} = -c < 0.$$

El caso en que $n_r(g) = n-1$ no resulta interesante, pues se está frente a una estrella. Luego no existirá nodo h_j alguno y el centro estará caracterizado por el nodo r .

Finalmente, el nodo h_j terminará no aceptando dicha propuesta.

- A algún nodo l_k (con $k \neq i$): de la misma manera, este nodo no querrá aceptar dicha propuesta, pues ahora estaría incurriendo en el costo de dos conexiones en contraste a una, lo que le representa una utilidad estrictamente inferior a la inicial.

Luego, el nodo l_i no tiene incentivos para desviarse de su escenario original.

Segundo, se debe analizar el caso en que el nodo r es escogido para re-plantearse todas sus conexiones en la red g . Supóngase que este desea formar $k < n_r(g) \leq n-1$ vínculos; es sencillo notar entonces que la propuesta será rechazada por todo nodo l_i o h_j que la reciba, respectivamente. Pues para todo p tal que $k \leq p < n-1$ y $\forall t \subseteq L_r(g^N \setminus g')$, donde $g' \doteq g - N_r(g)$, se tiene que con $\{rl_i\} \in t$

$$\Delta(u_{l_i}) = \underbrace{B(p) - c}_{u_{l_i}(g'+t)} - \underbrace{[B(n-1) - c]}_{u_{l_i}(g)} = B(p) - B(n-1) < 0, \quad \forall l_i \in L,$$

y que con $\{rh_j\} \in t$

$$\Delta(u_{h_j}) = \underbrace{B(p) - n_{h_j}(g)c}_{u_{h_j}(g'+t)} - \underbrace{[B(n-1) - n_{h_j}(g)c]}_{u_{h_j}(g)} = B(p) - B(n-1) < 0, \quad \forall h_j \in H.$$

De esta forma, estos nodos no aceptarán ninguna conexión con el nodo r si este último no les garantiza la utilidad original. Por consiguiente, el nodo raíz deberá formar

vínculos con todos sus vecinos de la red g , dado que es más beneficioso que no hacerlo con nadie. Lo anterior, muestra que independiente de las preferencias que posea este jugador, su mejor respuesta siempre será mantenerse conectado con todo nodo perteneciente a $N_r(g)$.⁴

Tercero, se debe estudiar qué sucede cuando el nodo h_j es el seleccionado para re-evaluar sus relaciones.⁵ Para este caso en particular se tienen distintas situaciones dependiendo de la ubicación del nodo h_j en la red g :

- Entre el nodo raíz y el(los) nodo(s) terminal(es);
- Entre el nodo raíz y otro(s) nodo(s) medio(s);
- Entre otro(s) nodo(s) medio(s) y el(los) nodo(s) terminal(es);
- Entre los nodos medios.

Independiente del caso, se puede predecir que ningún nodo aceptará una propuesta de conexión por parte del nodo h_j en caso que este ofrezca crear menos vínculos que los que poseía originalmente en g (dígase k conexiones). En caso que algún nodo acepte dicha propuesta, incurrirá en el mismo costo original, mas no tendrá los mismos beneficios de las conexiones directas e indirectas iniciales. Ergo, su utilidad se ve estrictamente disminuida ya que los diferenciales de utilidad son negativos para cada tipo de nodo en caso de ser vecino de h_j en la red g . Para ello, sea $k < n_{h_j}(g) < n - 1$ tal que $\forall t \subseteq L_{h_j}(g^N \setminus g')$, donde $g' \doteq g - N_{h_j}(g)$, se tiene que con $\{h_j r\} \in t$

$$\Delta(u_r) = \underbrace{B(p) - n_r(g)c}_{u_r(g'+t)} - \underbrace{[B(n-1) - n_r(g)c]}_{u_r(g)} = B(p) - B(n-1) < 0;$$

con $\{h_j l_i\} \in t$

$$\Delta(u_{l_i}) = \underbrace{B(p) - c}_{u_{l_i}(g'+t)} - \underbrace{[B(n-1) - c]}_{u_{l_i}(g)} = B(p) - B(n-1) < 0, \quad \forall l_i \in L;$$

y con $\{h_j h_k\} \in t$

$$\Delta(u_{h_k}) = \underbrace{B(p) - n_{h_k}(g)c}_{u_{h_k}(g'+t)} - \underbrace{[B(n-1) - n_{h_k}(g)c]}_{u_{h_k}(g)} = B(p) - B(n-1) < 0, \quad \forall h_k \in H \setminus \{h_j\}.$$

Donde $k \leq p < n - 1$.

⁴Las preferencias aludidas pueden ser crecientes (decrecientes) en la cardinalidad del componente a la que pertenecen. En otras palabras, se refleja a un nodo que prefiere tener muchas (pocas) conexiones frente a pocas (muchas). A esto se le denomina Supermodularidad (Submodularidad) en la función de beneficios, fenómeno que detallaremos más adelante.

⁵Notar que este caso ocurre cuando $n_r(g) < n - 1$. En caso contrario, se tendrá que $H \doteq \{\emptyset\}$ y $L \cup \{r\} \doteq N$.

Ergo, la mejor alternativa para el nodo h_j es formar los vínculos que mantuvo inicialmente en g .

Finalmente, se puede apreciar que todos los nodos pertenecientes a la red g desean mantener las conexiones que poseían originalmente dada la condición planteada. De esta forma la red g , caracterizada por una estructura de árbol que contiene a todos los jugadores, resulta ser una red estable en *status quo*.

2. Cuando $\frac{B(n-1)}{n-1} < c < \frac{B(n-1)}{2}$, se puede distinguir que el beneficio de pertenecer a un componente en el cual todos se encuentren conectados, ya no será mayor al costo que enfrenta cualquier nodo al desear conectar con todos. Por ende, bajo esta restricción no todos los árboles que contengan a todos los nodos serán redes estables. En particular, la estrella no seguirá siendo una red estable en *status quo*.

Llamemos g a la línea compuesta por $n \geq 2$ nodos ($|N| = n$). Las siguientes ecuaciones resumen las utilidades percibidas por los nodos:

$$\begin{aligned} u_{m_i} &= B(n-1) - 2c > 0, & \forall m_i \in N \setminus f_j, \forall i = \{1, \dots, n-2\}, \forall j = \{1, 2\}, \\ u_{f_j} &= B(n-1) - c > 0, & \forall f_j \in N \setminus m_i, \forall i = \{1, \dots, n-2\}, \forall j = \{1, 2\}, \end{aligned}$$

donde m_i y f_j representan a los nodos medios y finales, respectivamente. Los primeros hacen alusión a nodos que se encuentran entre dos nodos en la línea, mientras que los segundos son los nodos que se encuentra al inicio/final de la misma.

Primero, supóngase que un nodo m_i es aleatoriamente escogido por el entorno de *status quo* y se eliminan todas sus conexiones. Es sencillo observar que, independientemente de las preferencias que posea el nodo m_i , su mejor respuesta siempre será mantener la línea completa.

En particular, sea un nodo m_i conectado a otro dos nodos, específicamente el nodo m_l y el nodo $s = \{m_r, f_j\}$.⁶ En vista que al nodo m_i se le eliminan todas sus conexiones de la red g , aquel nodo m_l vecino del nodo m_i que se encontraba conectado al nodo s , no aprobará la proposición de m_i : ser vecino de m_l y no formar ningún vínculo con el nodo s original. Su razón radica en que su utilidad se vería disminuida de la siguiente manera:

$$\underbrace{(B(k) - 2c)}_{u_{m_l}(g - N_{m_i}(g) + m_i m_l)} - \underbrace{[B(n-1) - 2c]}_{u_{m_l}(g)} = B(k) - B(n-1) < 0, \quad \forall k < n-1.$$

donde

$$k = \begin{cases} n-2 & \text{si } s = f_j, \\ [1, n-2) & \text{si } s = m_r. \end{cases}$$

⁶Notar que un nodo medio puede ser vecino de otros dos nodos medios o, de un nodo medio y un nodo final.

Paralelamente, si el nodo m_i solamente deseara generar un vínculo con el nodo f_j , la utilidad de este último será $B(1) - c$, la cual es estrictamente inferior al pago que obtenía en g , $B(n - 1) - c$. Ergo, el nodo f_j rechazará todo tipo de conexión con el nodo m_i , en caso que este último no se encuentre conectado con m_l (i.e. ofreciendo las $n - 2$ conexiones indirectas a f_j).

Luego, ningún nodo m_i tiene incentivos a desviarse de la red g .

Segundo, se puede observar que todo nodo f_j estará maximizando sus pagos en la red g ,

$$u_{f_j}(g) = B(n - 1) - c, \quad \forall j = \{1, 2\},$$

y, por ende, en caso de ser escogido aleatoriamente -perdiendo todas sus conexiones- querrá generar la conexión con su vecino m_l original. En caso contrario, un vecino f_{-j} (m_r , con $r \neq l$) rechazará el vínculo, pues ahora tendría que pagar dos (tres) conexiones por el mismo beneficio recibido inicialmente. Ahora, si el nodo f_j quisiera eliminar el único vínculo que posee, este quedaría con su utilidad reducida a cero.

Luego, ningún nodo f_j tiene incentivos a desviarse de la red g .

Seguidamente, como ningún nodo tiene incentivos a adquirir nodos que sean distintos a los originales ni a eliminar los existentes, es así como la línea que contiene a todos los jugadores resulta ser una red estable en *status quo*.

Por último, la unicidad se obtiene producto que ningún jugador desea formar más de dos conexiones con sus pares. La razón radica en que la utilidad percibida por esta acción reporta menores pagos que estando unido a dos nodos que formen una línea entre todos.

3. Cuando $\frac{B(n-1)}{2} < c$, la línea que contiene a todos los jugadores ya no será estable debido a que el costo asumido por los nodos $m_i, \forall i \in \{1, \dots, n - 2\}$, supera el beneficio que reciben. Es más, una línea con $n - 2, n - 3, \dots, 3$ jugadores ya no será posible, dada la restricción en costos.

Es por ello que un nodo m_i conectado a un nodo f_j deseará eliminar dicha conexión, quedando este con una utilidad $u_{m_i}(g - m_i f_j) = B(n - 2) - c$, la cual puede o no ser positiva, pero como

$$\frac{B(n - 1)}{2} > \frac{B(n - 2)}{2} > \dots > \frac{B(1)}{2},$$

otro nodo $m_k, \forall k \in \{1, \dots, m - 1, m + 1, \dots, n - 2\}$, tampoco querrá seguir manteniendo sus conexiones con el resto de los jugadores. Ergo, eliminará estas.

Debido a lo anterior, se está frente a dos posibles situaciones a estudiar, sea $n \geq 2$:

- (a) Si $B(1) < c$, entonces ningún nodo desea formar una conexión con otro, pues el costo de esta supera el beneficio de la misma. Además, ningún nodo estará

dispuesto a ser un nodo m_i o h (en otras palabras, formar conexiones con otros dos jugadores o con todos) debido a que $c > \frac{B(n-1)}{2}$.⁷

Por tanto, la única red estable en *status quo* será la red vacía.

- (b) Si $c < B(1)$, todo nodo querrá establecer una conexión con tan solo un vecino, siendo aceptado por este último en caso de no poseer otra conexión en dicho instante.

Se debe tener presente que ningún nodo desea percibir beneficios de más de una conexión si a este se le pide conectar con más de un jugador. Esto lleva a que la única red estable en *status quo*, con n par, sea una red consistente en $\frac{n}{2}$ componentes de dos nodos conectados entre ellos. La unicidad viene del hecho que al eliminar las conexiones del nodo i , este no querrá innovar al querer conectar con otro componente; en caso de hacerlo obtendrá pérdidas. Es por ello, que el nodo i siempre preferirá conectar con el nodo $j \neq i$ al que originalmente se encontraba vinculado.

Para el caso n impar, la red resultante es estable, mas no única. En particular, la red estará caracterizada por $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ componentes, uno de los cuales estará compuesto por un solo jugador. Es precisamente, el componente con un solo miembro aquel que genera una indiferencia entre dicho nodo, denominémoslo k , y el nodo j . Luego, el nodo i podrá formar vínculos con cualquiera de ellos independientemente de con quién de ellos se encontraba conectado previo a que se le eliminaran sus conexiones, conllevando a que la estructura de la red se mantenga constante.

Finalmente, con $n = 1$, es sencillo apreciar que la única red estable será la red vacía.

Luego, es directo que siempre existe una red estable en *status quo*. ■

Con el objeto de aterrizar los resultados presentados, es útil revisar el siguiente ejemplo práctico para obtener una intuición al respecto. Sea $B(\cdot) = (\cdot)^2$ y $|N| = 4$. Por su parte, estos cuatro nodos pueden formar cualquier red imaginable. Luego, se podrá estar frente a una red vacía, una completa o una que posea dos componentes y así, sucesivamente. En resumen, son alcanzables $\sum_{i=0}^{\text{links}} \binom{6}{i} = 64$ redes posibles, mas muchas son similares entre ellas. Finalmente, solo 24 de estas caracterizan una red estable en *status quo*, en particular la línea y la estrella.

Por ejemplo en la figura 3.1 se tiene dos redes estables en *status quo*. En la red g_1 , la utilidad de los nodos que la caracterizan está descrita a continuación:

$$\begin{aligned} u_h &= (3)^2 - 3c > 0, \\ u_i &= (3)^2 - c > 0, \quad \forall i \in N \setminus \{h\}, \end{aligned}$$

⁷No olvidar que $c > \frac{B(n-1)}{2}$ implica $c > \frac{B(2)}{2}$. Y también $c > \frac{B(n-1)}{n-1}$.

donde $i \in \{2, 3, 4\}$ y $h = \{1\}$. Si se compara estas utilidades con aquellas en caso que alguno de los nodos re-evalúe todas sus conexiones, es fácil apreciar que todos desean formar la red original g_1 .

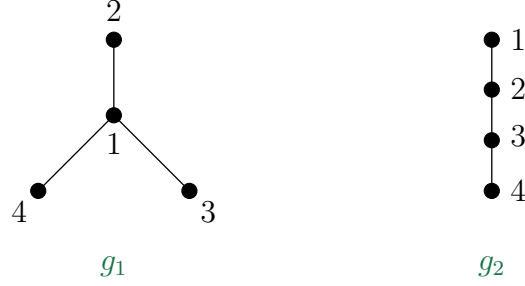


Figura 3.1: Dos redes estables en *status quo* (g_1, g_2) con $|N| = 4$.

Tomando en cuenta lo anterior, si el nodo h elimina sus conexiones de la red g_1 , es sencillo observar que nadie aceptará un vínculo que provenga de él en caso que este no conecte con todos. Para ello se sugiere ver la figura 3.2.

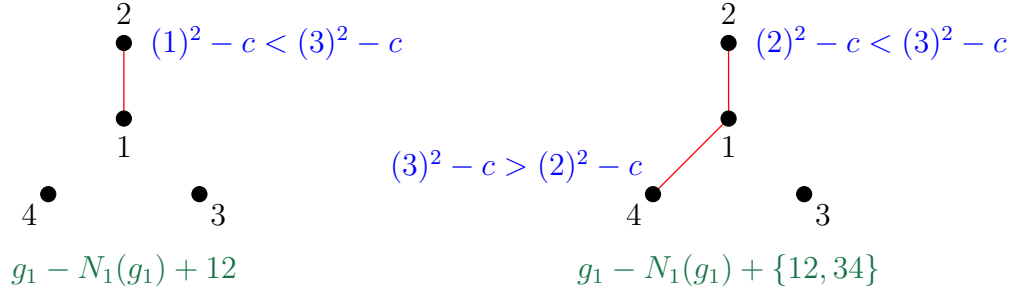


Figura 3.2: Entorno de *status quo* cuando nodo 1 re-plantea sus conexiones en g_1 .

Para el caso de un nodo i que tras ser escogido por el entorno de *status quo* desea formar un vínculo con alguien sin importar con quien, no todos estarán de acuerdo con él. Es el caso de todo nodo $j \neq i, j \neq h$, pues percibirá una utilidad $(3)^2 - 2c$, la cual es menor a la inicial. Luego, ningún nodo j acepta una conexión que provenga del nodo i . Finalmente, solo el nodo h se encontrará de acuerdo con el nodo i , pues este obtendrá la misma utilidad que en g_1 , i.e. el nodo h se encontrará indiferente (revisar figura 3.3).

Por otra parte, los nodos que componen la red g_2 tienen la siguiente utilidad:

$$u_f = (3)^2 - c > 0, \quad \forall f = \{1, 4\},$$

$$u_m = (3)^2 - 2c > 0, \quad \forall m = \{2, 3\}.$$

Ahora, si un nodo m fue elegido este querrá estar conectado en su posición original. ¿Qué sucede si el nodo m deseara algo distinto? En caso que el nodo m proponga el vínculo $\{mk\}$,

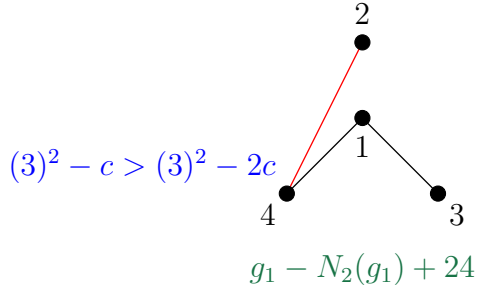


Figura 3.3: Entorno de *status quo* cuando nodo 2 re-plantea sus conexiones en g_1 .

con $k \neq m$ y $k \neq f$, $\forall f \in \{f_1, f_2\}$, la red resultante será $\{mk, kf_2\}$, pero el nodo k no lo aceptará debido a que obtendrá una utilidad $(2)^2 - 2c$ que comparada con $(3)^2 - 2c$ en g_2 es estrictamente menor. Ahora supóngase que el nodo m puede realizar otra propuesta, esta consiste en formar la conexión $\{f_1m\}$. De esto se arriba a la red $\{f_1m, kf_2\}$, en la cual el nodo f_1 rechaza el enlace propuesto ya que la utilidad que percibe es $(1)^2 - c$; que comparada con $(3)^2 - c$ en g_2 resulta ser inferior. De acuerdo con lo anterior, el nodo m terminará proponiendo sus conexiones iniciales y maximizando la utilidad de todos los nodos; atender figura 3.4.

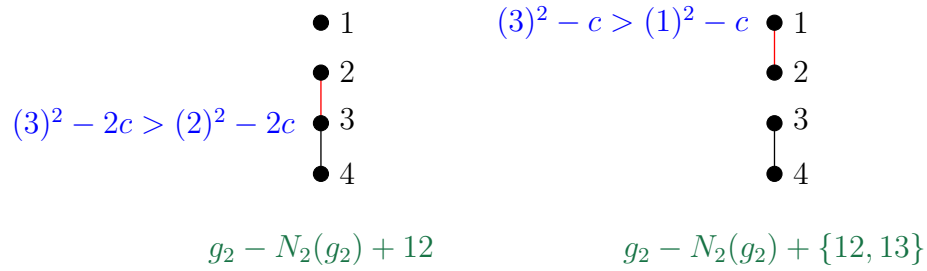


Figura 3.4: Entorno de *status quo* cuando 2 re-plantea sus conexiones en g_2 .

Por último, al igual que en la red g_1 , si un nodo f en g_2 se re-plantea sus vínculos, este siempre terminará conectando con su nodo m vecino producto que cualquier otra proposición que lleve a cabo será rechazada por los otros jugadores. Esto se debe a que disminuye estrictamente el pago percibido por aquel nodo distinto al nodo m que es vecino de f , en la red g_2 (observar figura 3.5).

Por lo tanto, g_1 y g_2 son dos posibles redes estables en *status quo* cuando $|N| = 4$. Es posible apreciar que cuando $|N|$ incrementa, el número posible de redes estables en *status quo* también lo hará.

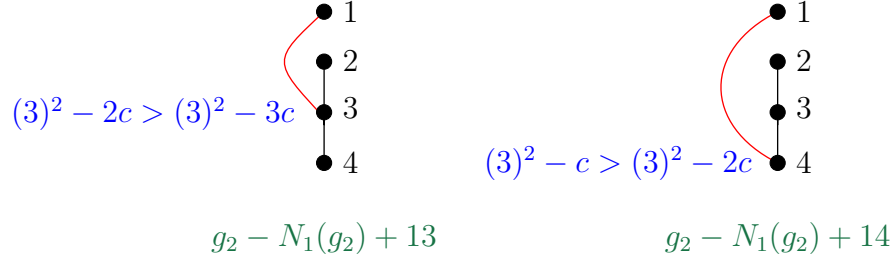


Figura 3.5: Entorno de *status quo* cuando 1 re-plantea sus conexiones en g_2 .

3.2 Eficiencia

A continuación se plantean las condiciones suficientes para las cuales el conjunto de redes estables y el conjunto de redes eficientes son equivalentes, son disjuntos, o simplemente uno es subconjunto del otro. Véase el Teorema 2.

Este resultado es relevante, pues dado que siempre existe al menos una red estable en *status quo* también se puede saber si dicha red es eficiente. De esta manera, es factible alcanzar redes que son más eficientes, o inclusive Pareto óptimas, a diferencia de aquellas a las que se pueda o no arribar mediante el concepto de estabilidad en pares, generando así una mejora en los resultados obtenidos por los agentes que componen la red. Al igual que el ejemplo planteado en el Capítulo 1, es interesante estudiar cuáles son las circunstancias en donde la nueva noción de equilibrio sugerida conduce a resultados que son fuertemente eficientes en contraste con el concepto de estabilidad en pares.

Para ello, sea $E(c, B)$ el conjunto de las redes eficientes y $S(c, B)$ el conjunto de las redes estables.

Teorema 2. *Para todo N finito, $c > 0$ y $B(\cdot)$ estrictamente creciente, las redes fuertemente eficientes son caracterizadas a continuación para $n \geq 2$:*

1. Cuando $c < \frac{B(n-1)}{n-1}$, entonces $E(c, B) = S(c, B)$. En particular, todo árbol que contengan a todos los jugadores será una red eficiente, y además estable.
2. Cuando $\frac{B(n-1)}{n-1} < c < \frac{B(n-1)}{2}$, entonces $S(c, B) \subsetneq E(c, B)$. En particular, la línea que contenga a todos los jugadores será la única red eficiente y estable.
3. Cuando $\frac{B(n-1)}{2} < c$, tendremos variados casos para $k \leq n$:

(a) Si $B(1) < c$, y

- i. $\forall k \geq 2$ se cumple que $kB(k-1) < 2c(k-1)$, entonces $E(c, B) = S(c, B)$. En particular, la red vacía será la única red eficiente y estable.

- ii. $\exists k \geq 2$ tal que $kB(k-1) > 2c(k-1)$, entonces $E(c, B) \cap S(c, B) = \emptyset$.
- iii. $\exists k \geq 2$ tal que $kB(k-1) = 2c(k-1)$, entonces $S(c, B) \subsetneq E(c, B)$.

(b) Si $B(1) \geq c$, n par,

- i. y $k = 2$, entonces $E(c, B) = S(c, B)$.
- ii. k par; k impar, donde k divide a n ; o k impar, donde k no divide a n , con $2k < n$; y adicionalmente
 - A. $\forall k > 2$ se cumple que $kB(k-1) - 2c(k-1) < k(B(1) - c)$, entonces $E(c, B) = S(c, B)$.
 - B. $\exists k > 2$ tal que $kB(k-1) - 2c(k-1) > k(B(1) - c)$, entonces $E(c, B) \cap S(c, B) = \emptyset$.
 - C. $\exists k > 2$ tal que $kB(k-1) - 2c(k-1) = k(B(1) - c)$, entonces $S(c, B) \subsetneq E(c, B)$.
- iii. k impar, donde k no divide a n , con $2k > n$, y adicionalmente

- A. $\forall k \geq 3$ se cumple que $\frac{kB(k-1) - 2c(k-1) + P(n-k)}{n} < B(1) - c$, entonces $E(c, B) = S(c, B)$.
- B. $\exists k \geq 3$ tal que $\frac{kB(k-1) - 2c(k-1) + P(n-k)}{n} > B(1) - c$, entonces $S(c, B) \cap E(c, B) = \emptyset$.
- C. $\exists k \geq 3$ tal que $\frac{kB(k-1) - 2c(k-1) + P(n-k)}{n} = B(1) - c$, entonces $S(c, B) \subsetneq E(c, B)$.

(c) Si $B(1) \geq c$, n impar,

- i. k impar, donde k divide a n , y adicionalmente
 - A. $\forall k \geq 3$ se cumple que $\frac{kB(k-1) - 2c(k-1)}{k} < \frac{n-1}{n}(B(1) - c)$, entonces $S(c, B) = E(c, B)$.
 - B. $\exists k \geq 3$ tal que $\frac{kB(k-1) - 2c(k-1)}{k} > \frac{n-1}{n}(B(1) - c)$, entonces $E(c, B) \cap S(c, B) = \emptyset$.
 - C. $\exists k \geq 3$ tal que $\frac{kB(k-1) - 2c(k-1)}{k} = \frac{n-1}{n}(B(1) - c)$, entonces $S(c, B) \subsetneq E(c, B)$.
- ii. k impar, donde k no divide a n , y adicionalmente,
 - A. $\forall k \geq 3$ se cumple que $\frac{kB(k-1) - 2c(k-1)}{k} < \frac{k-1}{k}(B(1) - c)$, entonces $S(c, B) = E(c, B)$.
 - B. $\exists k \geq 3$ tal que $\frac{kB(k-1) - 2c(k-1)}{k} > \frac{k-1}{k}(B(1) - c)$, entonces $E(c, B) \cap S(c, B) = \emptyset$.

C. $\exists k \geq 3$ tal que $\frac{kB(k-1)-2c(k-1)k}{k} = \frac{k-1}{k}(B(1) - c)$, entonces $S(c, B) \subsetneq E(c, B)$.

iii. k par, y

A. $k = 2$, entonces $S(c, B) = E(c, B)$.

B. $\forall k > 2$ se cumple que $\frac{kB(k-1)-2c(k-1)+P(n-k)}{n} < \frac{n-1}{n}(B(1) - c)$, entonces $E(c, B) = S(c, B)$.

C. $\exists k > 2$ tal que $\frac{kB(k-1)-2c(k-1)+P(n-k)}{n} > \frac{n-1}{n}(B(1) - c)$, entonces $E(c, B) \cap S(c, B) = \emptyset$.

D. $\exists k > 2$ tal que $\frac{kB(k-1)-2c(k-1)+P(n-k)}{n} = \frac{n-1}{n}(B(1) - c)$, entonces $S(c, B) \subsetneq E(c, B)$.

Para $n = 1$, se tiene que $E(c, B) = S(c, B)$. En particular, la red vacía es la única red eficiente y estable.

Donde $P(n - k) = \max \{ \sum_i u_i \text{ entre } n - k \text{ nodos} \}$.

Demostración.

1. Cuando $c < \frac{B(n-1)}{n-1}$, es sencillo notar que lo anterior implica $c < \frac{B(n-1)}{2}$; llámese a esta implicancia (\star) .

El valor de una red g , caracterizada por un árbol que incluya a todos los jugadores, será:⁸

$$v(g) = nB(n-1) - 2(n-1)c, \quad \forall g \subset \mathbf{g}^T.$$

Luego, para que una red sea eficiente debe reportar al menos un bienestar no-negativo para los nodos de la red g ($v(g) \geq 0$, $\forall g \subset \mathbf{g}^T$), ergo:

$$v(g) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n}{n-1} \frac{B(n-1)}{2} \geq c, \quad \forall g \subset \mathbf{g}^T.$$

Por (\star) , se cumple que

$$\frac{n}{n-1} \frac{B(n-1)}{2} > \frac{B(n-1)}{2} > 0, \quad \forall g \subset \mathbf{g}^T. \quad (\diamond)$$

Además bajo (\star) se tiene que $S(c, B) \doteq \{g \mid g \subset \mathbf{g}^T\}$. La restricción anterior, caracteriza al conjunto de redes eficientes como

$$E(c, B) \doteq \{g \mid g \subset \mathbf{g}^T\}.$$

Finalmente, por transitividad $E(c, B) = S(c, B)$.

⁸Este resultado es mostrado en la Proposición 3.

2. Cuando $\frac{B(n-1)}{n-1} < c < \frac{B(n-1)}{2}$. Dada la ecuación (\diamond), se tiene que $E(c, B) \doteq \{g \mid g \subset \mathbf{g}^T\}$, mas bajo esta restricción $S(c, B) \doteq \{g \mid g \subset \mathbf{g}^L\}$. Se debe notar además que $\mathbf{g}^L \subset \mathbf{g}^T$. Finalmente, $S(c, B) \subsetneq E(c, B)$, con $E(c, B) \neq S(c, B)$ y $E(c, B) \cap S(c, B) \neq \emptyset$.
3. Cuando $\frac{B(n-1)}{2} < c$.
- (a) Si $B(1) < c$, sabemos que $S(c, B) \doteq \{g^E\}$.

- i. Si para todo k mayor o igual a dos nodos se forma un componente g' con forma de árbol, al interior de la red g , tal que posea un valor promedio negativo, entonces se dirá que la utilidad agregada (valor) del grafo es negativa, o sea $v(g) < 0$. Esto pues lo mejor que pueden hacer dichos nodos es no formar ninguna conexión (mantenerse solos).

En otras palabras, se tiene que g no será eficiente para todo $k \geq 2$. Lo anterior, se reduce a

$$\frac{kB(k-1) - 2(k-1)c}{k} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k}{k-1} \frac{B(k-1)}{2} < c, \quad \forall k \geq 2. \quad (\Delta)$$

De (Δ) se obtiene que

$$E(c, B) \doteq \{g^E\}.$$

Luego, por transitividad $E(c, B) = S(c, B)$.

- ii. Ahora si (Δ) no se cumple, existirá un $k \geq 2$ tal que:

- $c < \frac{n}{n-1} \frac{B(n-1)}{2} < \frac{k}{k-1} \frac{B(k-1)}{2}$. De tal forma,⁹

$$E(c, B) \doteq \left\{ \underbrace{g}_{|N|=k} \cup \underbrace{g'}_{|N|=n-k} \mid g \subset \mathbf{g}_k^T, g' \subset \mathbf{g}_2^L, \text{ para algún } k \geq 2 \right\}.$$

- $c < \frac{k}{k-1} \frac{B(k-1)}{2} < \frac{n}{n-1} \frac{B(n-1)}{2}$. Por consiguiente,

$$E(c, B) \doteq \{g \mid g \subset \mathbf{g}^T, \text{ para algún } k \geq 2\}.$$

- $\frac{n}{n-1} \frac{B(n-1)}{2} < c < \frac{k}{k-1} \frac{B(k-1)}{2}$. Por tanto,

$$E(c, B) \doteq \left\{ \underbrace{g}_{|N|=k} \cup \underbrace{g'}_{|N|=n-k} \mid g \subset \mathbf{g}_k^T, g' \subset \mathbf{g}_2^L, \text{ para algún } k \geq 2 \right\}.$$

⁹Notar que este es un conjunto particular de redes eficientes, pueden haber distintos dependiendo de cómo se definan.

Nótese que $v(g^E) = 0$, valor que es estrictamente menor al de una red que pueda formarse por diversos componentes (parejas, árboles de tamaño k , entre otros). Por tanto, para todos los casos anteriores, se tiene que $E(c, B) \cap S(c, B) = \emptyset$.

iii. Paralelo al caso anterior, existirá un $k \geq 2$ tal que

$$kB(k-1) = 2(k-1)c.$$

Esto significa que el componente formado por k nodos reporta un valor cero, ya que el beneficio obtenido por los nodos que pertenecen al componente $g' \subset g$ es igual al costo que enfrentan por conectarse entre ellos (recordar que se está hablando de árboles). Luego tenemos que

$$v(g^E) = \underbrace{v(g)}_{|N|=k} + \underbrace{v(g')}_{|N|=n-k}, \quad \forall g \subset \mathbf{g}_k^L, \forall g' \subset \mathbf{g}_2^L \cup \mathbf{g}_k^L, \text{ para algún } k \geq 2.$$

Lo anterior se traduce en que el conjunto de redes eficientes será

$$E(c, B) \doteq \left\{ \underbrace{g}_{|N|=k} \cup \underbrace{g'}_{|N|=n-k} \mid g, g' \subset \mathbf{g}_k^T \cup \{g^E\} \cup \mathbf{g}_2^L, \text{ para algún } k \geq 2 \right\}.$$

Se deriva entonces que $S(c, B) \subsetneq E(c, B)$.

(b) Si $B(1) \geq c$, se debe recordar que $S(c, B) \doteq \{g \mid g \subset \mathbf{g}_2^L\}$. Además, si n es par

i. y $k = 2$ es sencillo notar que $E(c, B) = S(c, B)$.

ii. k es par; k es impar y k divide a n ; o k es impar y k no divide a n , con $2k < n$;

A. y si para todo k mayor a dos se tiene que $(kB(k-1) - 2c(k-1))/k < (B(1) - c)$, luego el valor promedio de un nodo que pertenece a un componente $g \subset \mathbf{g}_k^T$, representado por un árbol de k nodos, será estrictamente menor al valor promedio de un nodo perteneciente a una red estable. Luego, para cualquier k , siempre será mejor formar parejas.

Ahora si k es par, se tiene que

$$\underbrace{v(g)}_{|N|=k \lfloor n/k \rfloor} + \underbrace{v(g'')}_{|N|=n-k \lfloor n/k \rfloor} < v(g'), \quad \forall g \subset \mathbf{g}_k^T, \forall g' \subset \mathbf{g}_2^L, \forall g'' \subset \mathbf{g}_2^L \cup \mathbf{g}_k^T, \forall k > 2 \text{ par.}$$

En caso que k sea impar y k divide a n ¹⁰, tendremos que

$$v(g) < v(g'), \quad \forall g \subset \mathbf{g}_k^T, \forall g' \subset \mathbf{g}_2^L, \forall k > 2 \text{ impar.}$$

¹⁰Nótese que si k divide a n no queda ningún nodo sin conexión. Ergo, no habrá ningún componente sobrante con nodos pares. Además el análisis se realiza por un componente $g \subset \mathbf{g}_k^T$ representativo, pues el valor promedio del mismo es igual para todos los componentes.

Luego si k es impar y k no divide a n , con $2k < n$, dado que $2k$ es par, los nodos restantes también lo son.

Por consiguiente, tenemos que

$$\underbrace{v(g)}_{|N|=2k} + \underbrace{v(g'')}_{|N|=n-2k} < v(g'), \quad \forall g \in \mathbf{g}_k^T, \forall g' \in \mathbf{g}_2^L, \forall g'' \in \mathbf{g}_2^L \cup \mathbf{g}_k^T, \forall k > 2 \text{ impar.}$$

Por todo lo anterior,

$$E(c, B) \doteq \{g \mid g \in \mathbf{g}_2^L\}.$$

Finalmente, por transitividad $E(c, B) = S(c, B)$.

- B. si existe un k mayor a dos tal que $(kB(k-1)-2c(k-1))/k > B(1) - c$, entonces el valor promedio de un nodo que pertenece a un componente $g_k^T \subset \mathbf{g}^T$, será estrictamente mayor al valor promedio de un nodo perteneciente a una red estable.

Luego, si k es par, entonces si el valor promedio del primer componente supera al de los k nodos de una red estable, de manera seguida lo que hagan los nodos restantes podrá aportar de manera positiva o neutra al valor de la red final.¹¹ Dado lo anterior, llegamos a que:

$$\underbrace{v(g)}_{|N|=k \lfloor n/k \rfloor} + \underbrace{v(g'')}_{|N|=n-k \lfloor n/k \rfloor} > v(g'), \quad \forall g \in \mathbf{g}_k^T, \forall g', g'' \in \mathbf{g}_2^L, \text{ para algún } k > 2 \text{ par.}$$

Notar que $g'' \in \mathbf{g}_2^L$, pues la condición inicial se cumple para un k tal que para $k' \neq k$ lo mejor para todo nodo será formar una pareja.

En consecuencia,

$$E(c, B) \doteq \left\{ \underbrace{g}_{|N|=k \lfloor n/k \rfloor} \cup \underbrace{g'}_{|N|=n-k \lfloor n/k \rfloor} \mid g' \in \mathbf{g}_2^L, g \in \mathbf{g}_k^T, \text{ para algún } k > 2 \text{ par} \right\}.$$

Por otra parte, si k impar y k divide a n , entonces el análisis resultará análogo. Bastará analizar un componente representativo, obteniendo que

$$v(g) > v(g'), \quad \forall g \in \mathbf{g}_k^T, \forall g' \in \mathbf{g}_2^L, \text{ para algún } k > 2 \text{ par.}$$

Por tanto,

$$E(c, B) \doteq \{g \mid g \in \mathbf{g}_k^T, \text{ para algún } k > 2 \text{ impar}\}.$$

¹¹Notar que los nodos que no pertenecen al primer componente al menos pueden formar pares, lo que los deja en la misma situación que una red estable en lo que al valor promedio respecta.

Paralelamente, si k impar, k no divide a n , con $2k < n$ el análisis resulta similar. Sin pérdida de generalidad se pueden analizar los primeros dos componentes $g, g' \subset \mathbf{g}_k^T$ que puedan formarse.¹² Se aprecia que $2k$ es par, lo que implica que los $(n - 2k)$ restantes también lo son. Notar que los nodos que no pertenecen a los dos primeros componentes al menos pueden formar pares, lo que los deja en la misma situación que una red estable en lo que al valor promedio respecta. Dado lo anterior, se llega a que:

Por ende,

$$\underbrace{v(g)}_{|N|=2k} + \underbrace{v(g'')}_{|N|=n-2k} > v(g'), \quad \forall g \subset \mathbf{g}_k^T, \forall g', g'' \subset \mathbf{g}_2^L, \text{ para algún } k > 2 \text{ impar.}$$

$$E(c, B) \doteq \left\{ \underbrace{g}_{|N|=2k} \cup \underbrace{g'}_{|N|=n-2k} \mid g' \subset \mathbf{g}_2^L, g \subset \mathbf{g}_k^T, \text{ para algún } k > 2 \text{ impar} \right\}.$$

Debido a los casos analizados, las redes estables nunca serán eficientes. De este modo, $E(c, B) \cap S(c, B) = \emptyset$.

- C. si existe un k mayor a dos tal que $(k^{B(k-1)-2c(k-1)})/k = B(1) - c$, entonces el valor promedio de un nodo perteneciente a un componente $g_k^T \subset \mathbf{g}^T$, será equivalente al valor por nodo en una pareja. Luego, los nodos se encontrarán indiferentes entre formar parejas o árboles de tamaño k .¹³

En caso que k sea par se tiene

$$\underbrace{v(g)}_{|N|=k \lfloor n/k \rfloor} + \underbrace{v(g'')}_{|N|=n-k \lfloor n/k \rfloor} = v(g'), \quad \forall g \subset \mathbf{g}_k^T, \forall g', g'' \subset \mathbf{g}_2^L, \text{ para algún } k > 2 \text{ par.}$$

Es más, dado lo anterior, se llega a que

$$E(c, B) \doteq \left\{ \underbrace{g}_{|N|=k \lfloor n/k \rfloor} \cup \underbrace{g'}_{|N|=n-k \lfloor n/k \rfloor} \mid g, g' \subset \mathbf{g}_2^L \cup \mathbf{g}_k^T, \text{ para algún } k > 2 \text{ par} \right\}.$$

Al igual que con k par, si k es impar y k divide a n se aprecia que

$$v(g) = v(g'), \quad \forall g \subset \mathbf{g}_k^T, \forall g' \subset \mathbf{g}_2^L, \text{ para algún } k > 2 \text{ impar.}$$

¹²Los resultados a continuación también se cumplen si solamente se presta atención a los primeros jk árboles de tamaño k a formarse, con j par. Es importante que j sea par, pues de esta forma los $(n - jk)$ nodos restantes siempre serán pares, permitiendo que ningún nodo quede solo en caso que deseen formar parejas, por ejemplo.

¹³Notar que los casos a continuación se analizan de igual manera que en el punto 3.(b).ii.B., por lo que no se entra en mayor detalle.

De lo anterior se deriva que

$$E(c, B) \doteq \left\{ g \mid g \subset \mathbf{g}_2^L \cup \mathbf{g}_k^L, \text{ para algún } k > 2 \text{ impar} \right\}.$$

Por otro lado, si k es impar y k no divide a n , con $2k < n$ se tiene que

$$\underbrace{v(g)}_{|N|=2k} + \underbrace{v(g'')}_{|N|=n-2k} = v(g'), \quad \forall g \subset \mathbf{g}_k^T, \forall g', g'' \subset \mathbf{g}_2^L, \text{ para algún } k > 2 \text{ impar}.$$

Luego,

$$E(c, B) \doteq \left\{ \underbrace{g}_{|N|=2k} \cup \underbrace{g'}_{|N|=n-2k} \mid g, g' \subset \mathbf{g}_2^L \cup \mathbf{g}_k^T, \text{ para algún } k > 2 \text{ impar} \right\}.$$

Por esta razón, se tendrá una gran variedad de redes eficientes, entre ellas las estables, pues el valor de todas es el mismo.

Finalmente, recordar que $\mathbf{g}_2^L \subsetneq \mathbf{g}_k^L$. De esta manera, se tiene que $S(c, B) \subsetneq E(c, B)$.

- iii. k impar y k no divide a n , con $2k > n$, no se podrá formar más de un componente $g \subset \mathbf{g}_k^T$. Por ende es fácil notar que los $(n - k)$ nodos restantes son impares. En caso que estos deseen formar parejas siempre terminarán dejando a uno solo. Luego el valor promedio de la red que pueda formarse, deberá tomar en cuenta el valor por nodo del árbol de tamaño k y el máximo valor que pueda obtenerse de entre los posibles componentes a conformarse por los $(n - k)$ nodos restantes. De lo anterior, se arriba a tres casos:

- A. si para todo k mayor o igual a tres se cumple que $(kB(k-1) - 2c(k-1) + P(n-k))/n < B(1) - c$, entonces el valor promedio de un nodo que pertenece a la red compuesta por un árbol de tamaño k y el(los) componente(s) que reporte(n) el máximo valor que pueda obtenerse de entre las posibles combinaciones a formarse por los $(n - k)$ nodos restantes,¹⁴ es inferior al valor promedio que percibe un nodo perteneciente a una red donde solamente se forman parejas.¹⁵

De lo anterior, se tiene que

$$\underbrace{v(g)}_{|N|=k} + \underbrace{v(g'')}_{|N|=n-k} < v(g'), \quad \forall g \subset \mathbf{g}_k^T, \forall g' \subset \mathbf{g}_2^L, \forall g'' \subset \mathbf{g}_k^T \cup \mathbf{g}_2^L, \forall k \geq 3 \text{ impar}.$$

¹⁴Lo último es equivalente a $P(n - k) = \max \{ \sum_i u_i \text{ entre } n - k \text{ nodos} \}$.

¹⁵Notar que los nodos restantes pueden formar un árbol de tamaño $(n - k)$, independiente del primero. Inclusive, pueden formar árboles de menor tamaño. Todo dependerá de lo que les reporte mayor utilidad.

Luego,

$$E(c, B) \doteq \{g \mid g \subset \mathbf{g}_2^L\}.$$

Finalmente, por transitividad, solo las redes estables serán eficientes, $E(c, B) = S(c, B)$.

- B. si existe un k mayor o igual a tres tal que $(kB(k-1)-2c(k-1)+P(n-k))/n > B(1) - c$, el análisis será análogo. Es así como:

$$\underbrace{v(g)}_{|N|=k} + \underbrace{v(g'')}_{|N|=n-k} > v(g'), \quad \forall g \subset \mathbf{g}_k^T, \forall g', g'' \subset \mathbf{g}_2^L, \text{ para algún } k \geq 3 \text{ impar.}$$

Posteriormente,

$$E(c, B) \doteq \left\{ \underbrace{g}_{|N|=k} \cup \underbrace{g'}_{|N|=n-k} \mid g' \subset \mathbf{g}_2^L, g \subset \mathbf{g}_k^T, \text{ para algún } k \geq 3 \text{ impar} \right\},$$

concluyendo que $E(c, B) \cap S(c, B) = \emptyset$.

- C. si existe un k mayor o igual a tres tal que $(kB(k-1)-2c(k-1)+P(n-k))/n = B(1) - c$, se realiza un análisis similar a los previos. Notar que los nodos se encuentran indiferentes entre formar parejas o una red compuesta por un árbol de tamaño k y el(los) componente(s) que reporte(n) el máximo valor que pueda obtenerse de entre las posibles combinaciones a formarse por los $(n - k)$ nodos restantes. Por lo tanto.

$$\underbrace{v(g)}_{|N|=k} + \underbrace{v(g'')}_{|N|=n-k} = v(g'), \quad \forall g \subset \mathbf{g}_k^T, \forall g' \subset \mathbf{g}_2^L, g'' \subset \mathbf{g}_k^T \cup \mathbf{g}_2^T, \text{ para algún } k \geq 3 \text{ impar.}$$

Es por ello que

$$E(c, B) \doteq \left\{ \underbrace{g}_{|N|=k} \cup \underbrace{g'}_{|N|=n-k} \mid g, g' \subset \mathbf{g}_2^L \cup \mathbf{g}_k^T, \text{ para algún } k > 2 \text{ impar} \right\}.$$

Por último, $S(c, B) \subsetneq E(c, B)$.

- (c) Si $B(1) \geq c$ y n impar, se debe recordar que $S(c, B) \doteq \{g \mid g \subset \mathbf{g}_2^L\}$. Además se debe tener en cuenta que las redes estables siempre dejan a un jugador sin conectar. Bajo este nuevo escenario, el análisis comparativo frente a estas redes deberá tomar en cuenta $(n - 1)$ nodos solamente, pues aquel nodo que queda sin conexión no contribuirá al valor promedio de la red estable. Adicionalmente, si

i. k impar, k divide a n ,

A. y para todo k mayor o igual a tres se cumple que $\frac{n}{k}(kB(k-1)-2c(k-1))/n < \frac{n-1}{n}(B(1)-c)$, entonces el valor promedio de un nodo perteneciente a una red estable resulta ser estrictamente mayor al valor que obtiene un nodo por pertenecer a una red compuesta por árboles de tamaño k .

Nótese que la expresión inicial es equivalente a

$$\frac{kB(k-1)-2c(k-1)}{k} < \frac{n-1}{n}(B(1)-c), \quad \forall k \geq 3,$$

pues basta ver que cada componente $g' \subset \mathbf{g}_k^T$ posee el mismo tamaño, por lo que el valor promedio de la red $g \doteq g'_1 \cup g'_2 \cup \dots \cup g'_k$ será el mismo.

Dado lo anterior, los nodos preferirán formar parejas. Además

$$v(g) < (g'), \quad \forall g \subset \mathbf{g}_k^T, \forall g' \subset \mathbf{g}_2^L, \forall k \geq 3 \text{ impar.}$$

Luego, se tiene que

$$E(c, B) \doteq \{g \mid g \subset \mathbf{g}_2^L\}.$$

Finalmente, por transitividad se obtiene $S(c, B) = E(c, B)$, por lo que la red estable será la única eficiente.

B. y si existe un k mayor o igual a tres tal que $\frac{n}{k}(kB(k-1)-2c(k-1))/n > \frac{n-1}{n}(B(1)-c)$, entonces el valor promedio de un nodo perteneciente a una red estable será estrictamente menor al valor promedio de una red caracterizada por n/k componentes $g' \subset \mathbf{g}_k^T$. Es por ello que los nodos preferirán formar árboles de tamaño k .

En consecuencia,

$$v(g) > v(g'), \quad \forall g \subset \mathbf{g}_k^T, \forall g' \subset \mathbf{g}_2^L, \text{ para algún } k \geq 3 \text{ impar.}$$

Se tiene que

$$E(c, B) \doteq \{g \mid g \subset \mathbf{g}_k^T, \text{ para algún } k \geq 3 \text{ impar}\},$$

pudiendo apreciar que una red estable nunca será eficiente.

Por último, se observa que $E(c, B) \cap S(c, B) = \emptyset$.

C. y si existe un k mayor o igual a tres tal que $\frac{n}{k}(kB(k-1)-2c(k-1))/n = \frac{n-1}{n}(B(1)-c)$, entonces el análisis será análogo. Nótese que los agentes se encontrarán indiferentes entre formar un componente $g \subset \mathbf{g}_k^T$ o una pareja.

El valor de ambas redes se traduce en la siguiente relación:

$$v(g) = v(g'), \quad \forall g \subset \mathbf{g}_k^T, \forall g' \subset \mathbf{g}_2^L, \text{ para algún } k \geq 3 \text{ impar,}$$

de donde se desprende que habrá una gran variedad de redes eficientes, en particular las redes estables.

Como ya se ha visto,

$$E(c, B) \doteq \left\{ g \mid g \in \mathbf{g}_k^T, \text{ para algún } k \geq 3 \text{ impar} \right\}.$$

Luego, $S(c, B) \subsetneq E(c, B)$.

ii. k impar, k no divide a n ,

- A. y si para todo k mayor o igual a tres se cumple que $\frac{(kB(k-1)-2c(k-1))}{k} < \frac{k-1}{k}(B(1) - c)$, entonces el valor promedio de un nodo que pertenece a un componente $g \in \mathbf{g}_k^T$, representado por un árbol de k nodos, será estrictamente menor al valor promedio de un nodo perteneciente al componente que agrupe a $(k-1)$ nodos que formen parejas. Paralelamente, dada la restricción inicial, todos los nodos restantes van a preferir formar parejas, obteniendo el mismo valor promedio que perciben los $(n-k-1)$ nodos restantes que pertenecen a la red estable, pues para todo k distinto a dos, su utilidad por nodo será estrictamente menor.

Lo anterior, se traduce en lo que sigue

$$\underbrace{v(g)}_{|N|=k} + \underbrace{v(g'')}_{|N|=n-k} < v(g'), \quad \forall g \in \mathbf{g}_k^T, \forall g', g'' \in \mathbf{g}_2^L, \forall k \geq 3 \text{ impar}.$$

En consecuencia, se caracterizan las redes eficientes como

$$E(c, B) \doteq \left\{ g \mid g \in \mathbf{g}_2^L \right\}.$$

Finalmente, por transitividad tenemos que $E(c, B) = S(c, B)$.

A continuación, sin pérdida de generalidad se puede analizar el el primer componente $g \in \mathbf{g}_k^T$ que pueda formarse.¹⁶ Dado que k es impar, los nodos restantes serán pares. En adelante, si

- B. existe un k mayor o igual a tres tal que $\frac{(kB(k-1)-2c(k-1))}{k} > \frac{k-1}{k}(B(1) - c)$, entonces si el valor promedio del primer componente supera al de los $(k-1)$ nodos de una red estable, por consiguiente lo que hagan los nodos restantes podrá aportar de manera positiva o neutra al valor de la red final.¹⁷

¹⁶El resultado que sigue también se cumple si solamente se toman en cuenta los primeros jk árboles de tamaño k a formarse, con j impar, pues de esta forma los $(n-jk)$ nodos restantes siempre serán pares, permitiendo que ningún nodo quede solo en caso que deseen formar parejas, por ejemplo.

¹⁷Notar que los nodos que no pertenecen al primer componente al menos pueden formar pares, lo que los deja en la misma situación que una red estable en lo que a valor promedio respecta.

Para este caso, se llega a que

$$\underbrace{v(g)}_{|N|=k} + \underbrace{v(g'')}_{|N|=n-k} > v(g'), \quad \forall g \in \mathbf{g}_k^T, \forall g', g'' \in \mathbf{g}_2^L, \text{ para algún } k \geq 3 \text{ impar.}$$

de donde es directo que una red estable nunca será eficiente. De este modo,

$$E(c, B) \doteq \left\{ \underbrace{g}_{|N|=k} \cup \underbrace{g'}_{|N|=n-k} \mid g' \in \mathbf{g}_2^L, g \in \mathbf{g}_k^T, \text{ para algún } k \geq 3 \text{ impar} \right\}.$$

Por consiguiente, se tiene que $E(c, B) \cap S(c, B) = \emptyset$.

- C. existe un k mayor o igual a tres tal que $(k^{B(k-1)-2c(k-1)})/k = \frac{k-1}{k}(B(1) - c)$, entonces el análisis será análogo a casos de similares características. Así

$$\underbrace{v(g)}_{|N|=k} + \underbrace{v(g'')}_{|N|=n-k} = v(g'), \quad \forall g \in \mathbf{g}_k^T, \forall g' \in \mathbf{g}_2^L, g'' \in \mathbf{g}_k^T \cup \mathbf{g}_2^L, \text{ para algún } k \geq 3 \text{ impar.}$$

por lo que

$$E(c, B) \doteq \left\{ \underbrace{g}_{|N|=k} \cup \underbrace{g'}_{|N|=n-k} \mid g, g' \in \mathbf{g}_2^L \cup \mathbf{g}_k^T, \text{ para algún } k \geq 3 \text{ impar} \right\}.$$

En consecuencia una red estable será un caso particular de red eficiente, $S(c, B) \subsetneq E(c, B)$.

iii. k es par,

- A. y $k = 2$, entonces se formarán parejas dejando siempre a un nodo solo. Es directo que $E(c, B) = S(c, B)$.
- B. y para todo k mayor a dos se cumple que $(k^{B(k-1)-2c(k-1)+P(n-k)})/n < \frac{n-1}{n}(B(1) - c)$, entonces el valor promedio de un nodo que pertenece a la red compuesta por un árbol de tamaño k y el(los) componente(s) que reporte(n) el máximo valor que pueda obtenerse de entre las posibles combinaciones a formarse por los $(n - k)$ nodos restantes, es estrictamente menor al valor promedio que tiene un jugador que pertenece a una red donde solamente se forman parejas. Es por esto que

$$\underbrace{v(g)}_{|N|=k} + \underbrace{v(g'')}_{|N|=n-k} < v(g'), \quad \forall g \in \mathbf{g}_k^T, \forall g' \in \mathbf{g}_2^L, g'' \in \mathbf{g}_k^T \cup \mathbf{g}_2^L, \forall k > 2 \text{ par.}$$

Ergo,

$$E(c, B) \doteq \{g \mid g \subset \mathbf{g}_2^L\}.$$

Luego, por transitividad $S(c, B) = E(c, B)$.

En adelante, sin pérdida de generalidad, solamente se toma en cuenta el primer componente $g \subset \mathbf{g}_k^L$, caracterizado por un árbol de tamaño k , que pueda formarse.¹⁸ A continuación, si

- C. existe un k mayor a dos tal que $(kB(k-1)-2c(k-1)+P(n-k))/n > \frac{n-1}{n}(B(1) - c)$, entonces si el valor promedio del primer componente supera al de los k nodos de una red estable, de manera seguida lo que hagan los nodos restantes podrá aportar de manera positiva o neutra al valor de la red final.¹⁹

Por lo anterior, se obtiene

$$\underbrace{v(g)}_{|N|=k} + \underbrace{v(g'')}_{|N|=n-k} > v(g'), \quad \forall g \subset \mathbf{g}_k^T, \forall g', g'' \subset \mathbf{g}_2^L, \text{ para algún } k > 2 \text{ par.}$$

De manera seguida,

$$E(c, B) \doteq \left\{ \underbrace{g}_{|N|=k} \cup \underbrace{g'}_{|N|=n-k} \mid g' \subset \mathbf{g}_2^L, g \subset \mathbf{g}_k^T, \text{ para algún } k \geq 3 \text{ impar} \right\},$$

de lo que se llega a $E(c, B) \cap S(c, B) = \emptyset$.

- D. existe un k mayor a dos tal que $(kB(k-1)-2c(k-1)+P(n-k))/n = \frac{n-1}{n}(B(1) - c)$, entonces de manera similar a casos previos se arriba a que

$$\underbrace{v(g)}_{|N|=k} + \underbrace{v(g'')}_{|N|=n-k} = v(g'), \quad \forall g \subset \mathbf{g}_k^T, \forall g', g'' \subset \mathbf{g}_2^L, \text{ para algún } k > 2 \text{ par.}$$

Por tanto, se tiene que

$$E(c, B) \doteq \left\{ \underbrace{g}_{|N|=k} \cup \underbrace{g'}_{|N|=n-k} \mid g, g' \subset \mathbf{g}_2^L \cup \mathbf{g}_k^T, \text{ para algún } k > 2 \text{ impar} \right\}.$$

Para concluir $S(c, B) \subsetneq E(c, B)$.

¹⁸Notar que el resultado a continuación también se cumple si se analizan solo los primeros jk árboles de tamaño k a formarse (si n lo permite). Este supuesto se asemeja al utilizado en el caso con n impar y k no divide a n . De esta forma los $(n - jk)$ nodos serán impares, permitiendo que el valor promedio de estos nodos sea el mismo al de los $(n - k - 1)$ pertenecientes a una red estable, en caso que los primeros deseen formar parejas, por ejemplo.

¹⁹Notar que los nodos que no pertenecer al primer componente al menos pueden formar pares, lo que los deja en la misma situación que una red estable en lo que a valor promedio respecta.

Finalmente, con $n = 1$, es sencillo apreciar que la única red eficiente es la red vacía. A su vez, es la única estable, luego (por transitividad) $E(c, B) = S(c, B)$. ■

Para comprender los resultados expuestos es necesario analizar los siguientes tres ejemplos. Estos rescatan casos particulares que pudieran llevar a confusión al momento de analizar el Teorema 2; para los casos restantes su análisis resulta ser análogo.

Ejemplo 1: caso $\frac{B(n-1)}{2} < c$ y $B(1) < c$

Bajo este escenario se tiene conocimiento que las redes estables se caracterizan por ser vacías. A su vez la condición a evaluar para determinar si las redes eficientes son estables o no se reduce a

$$\frac{kB(k-1) - 2c(k-1)}{k} \stackrel{\geq}{\leq} 0. \tag{3.1}$$

En términos simples esta expresa el valor promedio que tiene un nodo que forma un árbol de tamaño k con otros vecinos (directos e indirectos) en contraste con el valor por nodo de una red vacía, siendo la última estable. Seguidamente, lo que el resultado planteado señala es que si para todo $k \geq 2$ dicho valor promedio resulta ser negativo, entonces cualquier componente que se forme al interior de la red g' no será eficiente. Para ello es útil advertir en la figura 3.6 que el componente g_1 posee un valor por nodo negativo. Por esto dichos nodos buscarán una mejor alternativa: quedarse solos, como es el caso del componente g_2 . Ergo, el conjunto de las redes eficientes termina siendo igual al conjunto de redes estables.

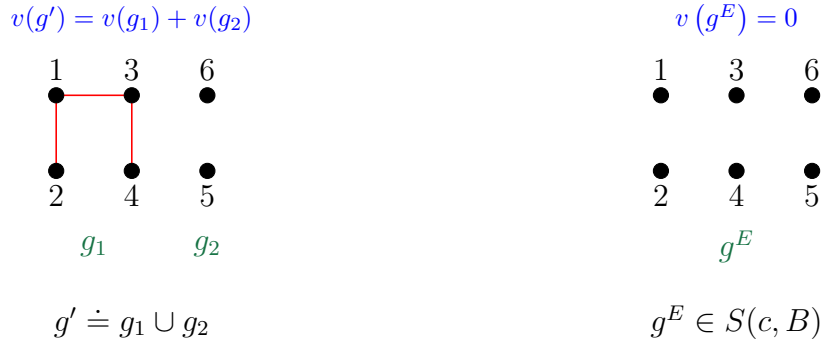


Figura 3.6: Red g' frente a una red estable en *status quo*, $S(c, B)$, con $n = 6$ y $k = 4$.

Ahora, si existiera un k tal que la ecuación 3.1 resulte en un valor por nodo superior a cero, entonces cualesquiera k nodos estos formarían un árbol -como la línea g_1 - otorgando un valor positivo a la red g' pues $v(g_1) > 0$. Ahora, en caso que no exista otro k que cumpla las mismas condiciones, entonces el componente g_2 permanece vacío como en la figura 3.6.²⁰ En caso de existir otro k , supóngase 2, entonces los nodos en g_2 podrán formar una pareja y con

²⁰Si los nodos pertenecientes a g_2 formaran una pareja, estos obtendrían un valor negativo, $v(g_2) < 0$.

ello aumentar el valor de la red $v(g')$. Paralelamente, se debe observar que para este caso, $g' \in E(c, B)$ y $g^E \notin E(c, B)$.

Finalmente, sin importar qué valor tome $v(g_2)$ basta analizar si el valor promedio de la red g_1 resulta ser superior o igual al valor promedio de red la vacía, en caso que exista un k que lo permita. En caso contrario, siempre será inferior al último (< 0); así es directo del análisis que el conjunto de redes estables o es idéntico, o es disjunto, o es simplemente un subconjunto del conjunto de redes eficientes.

El análisis para un k tal que la ecuación 3.1 se cumpla con igualdad resulta trivial.

Ejemplo 2: caso $\frac{B(n-1)}{2} < c$, $B(1) \geq c$ y n par: con k impar y k divide a n

En el presente el conjunto de redes estables muta y no sigue estando caracterizado por redes vacías. Estas ahora se representan como componentes que forman parejas. Ahora bien, la condición a evaluar para determinar si las redes eficientes parecieran ser estables o no se resume como

$$\frac{kB(k-1) - 2c(k-1)}{k} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} B(1) - c. \quad (3.2)$$

Luego si no existe un k para el cual la ecuación 3.2 se cumpla con desigualdad estricta $>$ o igualdad, entonces siempre se tendrá que la red estable será la más eficiente puesto que si se formara otro tipo de componentes que no sean parejas, estos disminuirían el valor total de la red y con ello lo que perciben los nodos en promedio. Con ello la red g' en la figura 3.7 no es eficiente ya que $v(g') < v(g)$. Luego es inmediato que $g \in E(c, B)$ y con ello $E(c, B) = S(c, B)$.

Adicionalmente, como k divide a n basta analizar un componente representativo, g_1 o g_2 , pues ambos poseen el mismo valor.

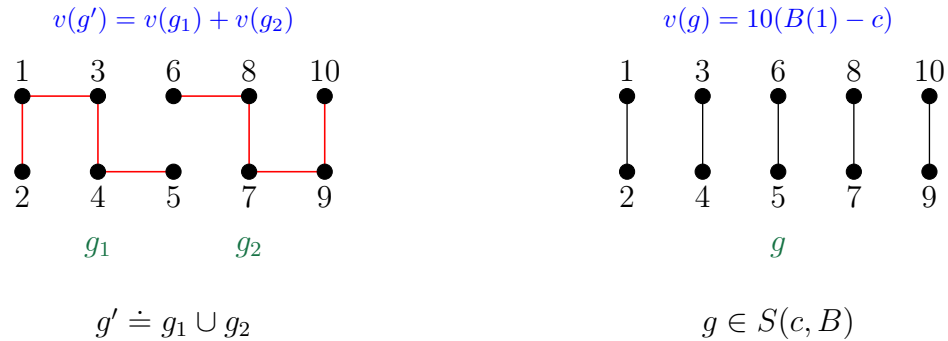


Figura 3.7: Red g' frente a una red estable en *status quo*, $S(c, B)$, con $n = 10$ y $k = 5$.

Por otra parte, si existe un k tal que $\frac{v(g_1)}{k} > \frac{v(g)}{|N|}$, entonces sí es posible alcanzar la red g' junto a sus componentes. Esto ya que es la red eficiente, definiendo de esta forma la disyunción con el conjunto de redes estables en *status quo*.

Finalmente, en caso de existir un k que permita que el valor promedio de uno de los componentes en g' sea igual al valor por nodo de una pareja, entonces se estará frente a una red estable como caso particular de red eficiente, puesto que las redes eficientes en la figura 3.2 son la red g y g' , mas la única red estable resulta ser la primera. Esto último, termina siendo un resultado generalizable a un número de ejemplos y conjuntos más amplio.

Ejemplo 3: caso $\frac{B(n-1)}{2} < c$, $B(1) \geq c$ y n impar: con k par

A continuación se tiene una variación de los ejemplos previos puesto que ahora n es impar. Debido a esto, el conjunto de redes estables estará caracterizado por componentes de dos nodos que forman parejas y un componente adicional conformado por un nodo aislado. Frente a esta situación, la condición a evaluar para determinar si las redes eficientes parecieran ser estables o no se resume en

$$\frac{kB(k-1) - 2c(k-1) + P(n-k)}{n} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \frac{n-1}{n}(B(1) - c). \tag{3.3}$$

El análisis es totalmente análogo a lo precedente, la diferencia con aquello radica en los valores promedio a considerar en cada caso. Primero, como las redes estables tienen un nodo sin conexión este no cuenta en la valorización de la red y por ello quienes realmente otorgan valor a esta son $n - 1$ nodos. Pero se debe tener en cuenta que dicho valor debe ser dividido por todos los nodos que componen la misma, aun si estos no aporten en el mismo.

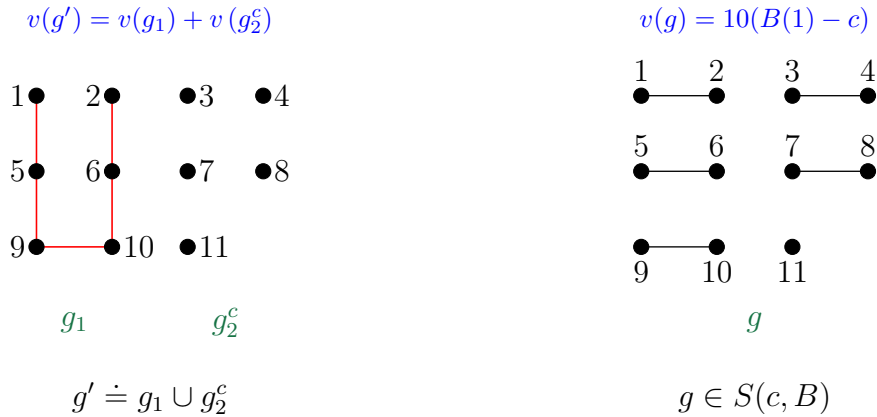


Figura 3.8: Red g' frente a una red estable en *status quo*, $S(c, B)$, con $n = 11$ y $k = 6$.

Segundo, como n es impar y k es par, independiente de lo que suceda con el primer componente que se analice, los nodos restantes tendrán un rol fundamental en la determinación de la red eficiente y en base a lo mismo es que se toma en cuenta el valor promedio de la red completa. Para ello resulta sencillo contemplar la figura 3.8 en donde se plantea un $k = 6$, pero no se toma en cuenta solamente el valor de g_1 , sino que también $v(g_2^c)$ pues si el resto de los nodos quisiera formar parejas, dejarían a un nodo aislado como en una red estable y

si, más aun, la red resultante lograra una valor mayor al valor de una red estable, entonces la última no resultará ser eficiente. Por lo mismo es que el valor del nodo que se queda aislado en caso de formar parejas en la red g' también cuenta.

Posteriormente, este último nodo podrá o no ser parte de los componentes distintos a g_1 que se formen al interior de la red g' . Dado lo anterior, lo que importa es el valor $P(n - k)$ resultante, que se traduce en el máximo valor que se obtenga de todas las permutaciones posibles entre los $n - k$ nodos que no están siendo considerados en la formación del primer componente, g_1 .

Capítulo 4

Aplicaciones

4.1 Ejemplo J&W (2002)

El objetivo de la presente sección radica en mostrar la importancia de la estabilidad en *status quo*. Para este propósito se toma en cuenta el ejemplo de no-existencia de estabilidad en pares planteado en el Capítulo 1. Para ello es útil revisar la figura 1.1.

Recordando dicho ejemplo, Jackson & Watts (2002) presentan cuatro redes alcanzables por medio de una economía de intercambio. En particular, sea la red g_1 caracterizada por las conexiones $\{13, 24\}$ y representada en la figura 4.1. Es importante destacar que en este ejemplo, la función de beneficios obtenidos para todo nodo i es estrictamente creciente y submodular en el tamaño del componente al que pertenece; esto no toma en cuenta el costo de los vínculos.

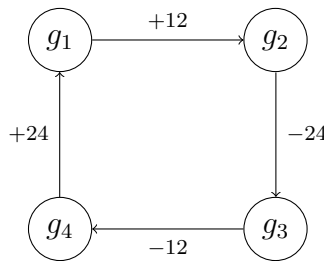


Figura 4.1: Un ciclo entre redes con $|N| = 4$.

En especial, la economía de intercambio exhibida conduce a un ciclo entre redes caracterizado por $C : g_1 \rightarrow g_2 \rightarrow g_3 \rightarrow g_4 \rightarrow g_1$, donde las expresiones (figura 4.1) con más (+) o menos (-) son usadas para denotar una adición o eliminación de conexiones. Por tanto, se puede contemplar que en cualquier red del ciclo C , todo agente posee un incentivo a restar un

vínculo existente y ahorrarse el costo de dicha conexión sin perder nada de la utilidad esperada que percibe por el intercambio; o, puede tener el incentivo de generar nuevas conexiones cuando el costo no determina su capacidad para generar beneficios positivos.

Posteriormente, se introduce el entorno de *status quo* caracterizado por la estructura dinámica y capacidad de los agentes para re-evaluar sus conexiones en la red. Bajo este entorno, se alcanza una nueva noción de equilibrio cuando la estabilidad en pares no consigue ser suficiente. Para ello se imponen ciertas condiciones sobre el modelo, de las cuales se obtiene un resultado bastante singular, siempre se arriba a redes estables en *status quo*, a diferencia de lo que plantean los autores. Para apreciar esto, el lector deberá observar las redes presentes en la figura 4.2.

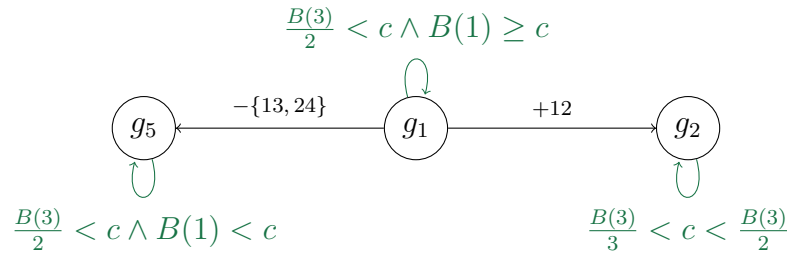


Figura 4.2: Tres redes estables en *status quo* con $|N| = 4$.

La figura retrata las redes a las que se converge luego de imponer condiciones sobre el rango de los costos en los que se incurre por mantener una relación de intercambio con otro agente. Si el lector se detiene en el detalle, encontrará que la función de beneficios obtenidos de los agentes, $B(\cdot)$, refleja las características presentes en el ejemplo estudiado en un comienzo. Es más, la figura 4.2 muestra tres redes estables en *status quo* en diferentes situaciones. Por ejemplo, g_1 está caracterizada por dos componentes en los cuales dos nodos se encuentran conectados entre ellos. Por su parte, g_2 es una línea que incluye a todos; notablemente, ambas redes son iguales a las que son presentadas en la figura 4.1. Por último, se obtiene una red adicional caracterizada por ser vacía, g_5 , pues el costo de una conexión es mayor al beneficio de pertenecer a un componente que contenga a todos los nodos miembros de la red. Esto implica que el nodo prefiere quedarse solo.

Un caso particular

Manténgase el mismo costo inicial, $c = 5/96$. Este es tal que $\frac{B(3)}{3} > c$, luego se debiera arribar a redes con forma de árbol en donde todos se encuentren conectados; resultado que se trabaja en mayor detalle en el Teorema 1. Sea la red g_1 de la figura 1.1 y sin pérdida de generalidad, sea el nodo 1 aquel escogido para re-plantearse sus conexiones, este puede proponer las siguientes modificaciones que impliquen una sola conexión (estas se representan en la figura 4.3 con aristas en rojo):

- Conexión {13}: Con esta conexión se vuelve a la red original, por que el nodo 3 no está

en desacuerdo para formar la conexión. Aún así, bajo el costo establecido, no resulta ser una red estable (\times) en *status quo* dado que el nodo 1 puede incrementar sus pagos generando una conexión adicional con el nodo 2. Luego se convergerá a g_2 (revisar figura 4.4).

- Conexión {14}: Esta conexión deja con un pago mayor al nodo 1 ($0.11 > 0.07$), pero con uno inferior al nodo 4 ($0.06 < 0.07$), motivo por el que este último no aceptará dicha propuesta. Luego g'_3 no es alcanzable, \times .
- Conexión {12}: Al igual que en el caso de g'_3 , g''_3 no resulta alcanzable, pues la conexión propuesta deja con menor utilidad al nodo 2 ($0.06 < 0.07$), por lo que este último termina rechazando la propuesta. En otras palabras, se rechaza la red g_1 , \times .

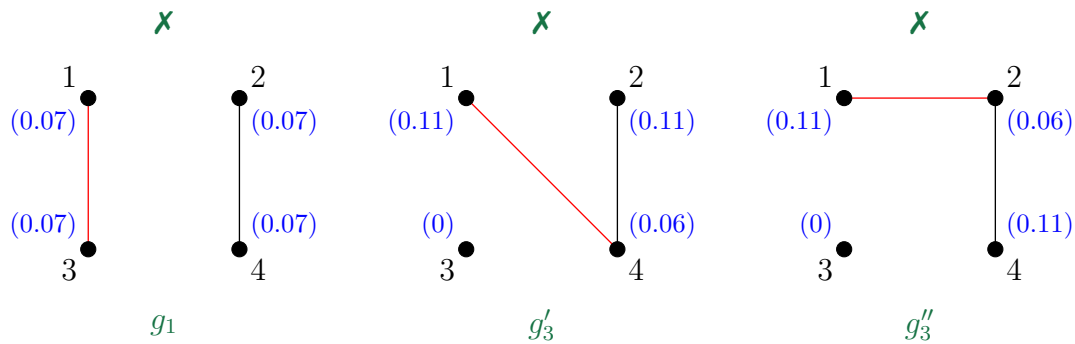


Figura 4.3: Entorno de *status quo* cuando nodo 1 re-plantea sus conexiones en g_1 .

Como las propuestas no son aceptadas o no maximizan la utilidad del nodo 1, este prefiere conectar con más nodos,¹ así (revisar figura 4.4):

- Conexiones {12, 13}: Estas conexiones dejan a todos los nodos involucrados mejor que en la red inicial, luego todos aceptan la propuesta del nodo 1. En otras palabras, se acepta la red g_2 , \checkmark .
- Conexiones {13, 14}: Ocurre lo mismo que el caso anterior (\checkmark).

Una vez alcanzada las redes g_2 y g'_2 , se debe analizar nodo por nodo con el fin de conocer si estas redes logran ser estables (\checkmark) o no (\times). Sean los nodos extremos e intermedios aquellos que componen los grafos estudiados en este ejemplo. Los primeros -en caso de ser escogidos por el entorno de *status quo*- siempre van a plantear la conexión original producto que es la única que será aceptada. Si estos ofrecen un solo vínculo a otro nodo extremo, este último

¹Notar que el nodo 1 no desea formar más de dos conexiones, pues al saber que ya existe una pareja de nodos unida, no requiere de la conexión directa con ambos, pues recibe los beneficios indirectos tras conectar tan solo con uno.

reducirá su utilidad, dado que ahora incurrirá en un costo extra por el mismo beneficio. Y si ofrece una conexión a un nodo intermedio, este tampoco aceptará pues ocurrirá lo mismo que en el caso previo, este último tendrá que incurrir en un costo adicional para mantener los mismo beneficios. Ergo, toda proposición distinta a la original no será aceptada.

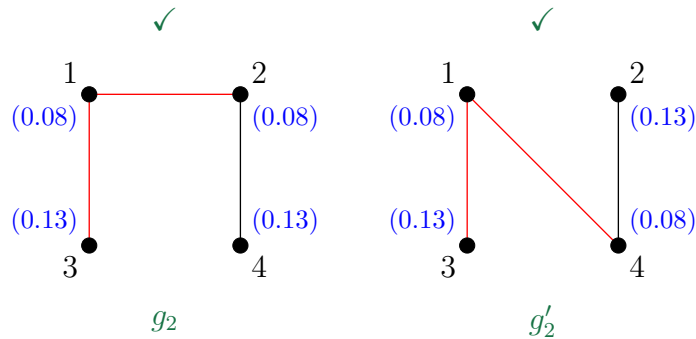


Figura 4.4: Entorno de *status quo* cuando nodo 1 re-plantea sus conexiones en g_1 . (cont.)

En cuanto a los segundos, también mantendrán sus conexiones originales intactas debido a que cualquier variación se traducirá en una utilidad estrictamente menor para aquellos nodos a los que se les está proponiendo una relación. Esto conduce al rechazo de las conexiones por parte de los mismos. Para efectos prácticos, se sugiere revisar en mayor detalle las figuras 7.1 y 7.2 presentes en el apéndice.

Finalmente, se tiene que la red g_2 y g'_2 son estables en *status quo*. En particular, la red caracterizada por una línea en la que todos se encuentran conectados, resulta ser estable.

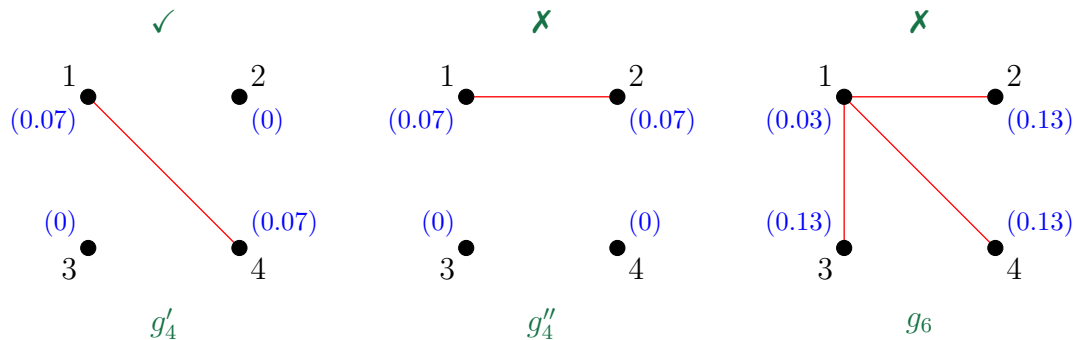


Figura 4.5: Entorno de *status quo* cuando nodo 1 re-plantea sus conexiones en g_3 .

Por su parte, sea la red g_3 de la figura 1.1. Se tendrán tres casos a analizar, dependiendo de cuál sea el nodo escogido por el entorno de *status quo*.

- Nodo 1: Este nodo busca conexiones que le reporten mayores beneficios, luego la mejor alternativa será formar el enlace $\{14\}$ que le reporta 0.01 en utilidad adicional, con

respecto a g_3 ($0.07 > 0.06$). A su vez, este enlace será aceptado por el nodo 4, pues su utilidad también se verá incrementada de 0 a 0.07. Ergo, g'_4 será asequible (\checkmark); revisar la figura 4.5.

En contraste, si el nodo 1 deseara hacer lo mismo, pero con el nodo 2 o 3, estos últimos no aceptarían dicha relación pues estarían disminuyendo su utilidad en comparación con la red original ($0.07 < 0.11$). Por lo tanto, g''_4 y sus posibles variantes no son alcanzables, \times .

Por último, en caso de querer conectar con todos, este aumenta la utilidad del resto a costa de la suya. Esta red es aceptada por sus vecinos, mas no por el nodo 1 quien está proponiendo. Resulta ser que g_6 no es factible (\times).

- Nodo 2 y 3: Sin pérdida de generalidad, sea el nodo 2 aquel escogido por el entorno estudiado. Este no está dispuesto a formar una conexión distinta a la original, dado que esto solo reduce su utilidad. Nótese que en caso de proponer las relaciones de la red g_2 en la figura 4.6, estará aumentando la utilidad de sus vecinos directos en desmedro de la suya ($0.08 < 0.11$). Adicionalmente, en caso de cortar su vínculo original y establecer una relación con aquel nodo que se encontraba solitario (nodo 4), este también terminará disminuyendo su utilidad, $0.07 < 0.11$. Finalmente, el nodo 2 no realizará una propuesta que difiera de lo original (aunque esta sea aceptada) pues su utilidad se verá estrictamente reducida.

Se aprecia que la red g_2 y g_4 no son factibles bajo este escenario, \times .

- Nodo 4: Es sencillo notar que lo mejor que puede hacer este nodo es mantenerse desconectado, pues de otra manera reduce los pagos que perciben sus vecinos directos en caso de aceptar la propuesta del primero. Finalmente, la única red factible es g_3 .

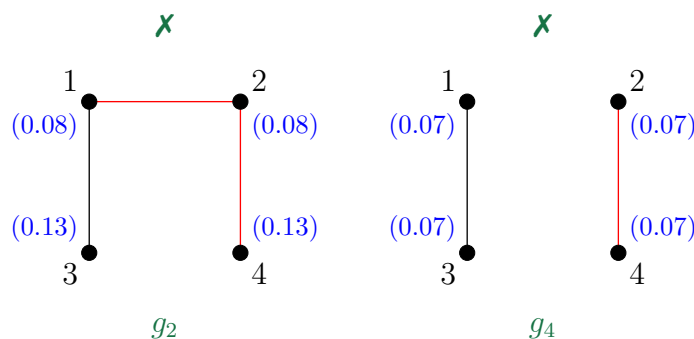


Figura 4.6: Entorno de *status quo* cuando nodo 2 re-plantea sus conexiones en g_3 .

Tras examinar lo que sucede en la red g_3 , se puede concluir que esta no resulta ser estable en *status quo* -bajo los parámetros señalados- producto que en algún punto del tiempo el nodo 1 será escogido, migrándose de manera inmediata a la red g'_4 . Una vez en esta, es evidente

que aquellos nodos que se encuentren en solitario se conectarán entre ellos, pasando a formar una variación de la red g_1 inicial. El análisis que sigue a continuación es exactamente el mismo que se hizo al principio, de esta forma se erradica el ciclo entre redes presente en el ejemplo de Jackson & Watts (2002) y por consiguiente se arriba una red estable en este caso.

A modo de síntesis, una vez que se aplica el entorno de *status quo* en el ejemplo de la economía de intercambio, independiente de la red en la que se inicie, siempre se arriba a un árbol entre redes. Es más, siempre es posible obtener a una estructura de red que resulta ser estable en *status quo*. Esto queda de manifiesto en la figura 4.7.

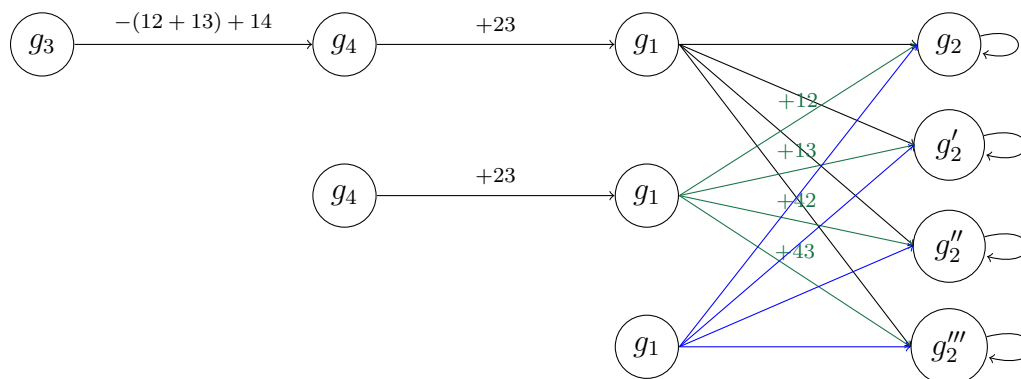


Figura 4.7: Un árbol entre redes con $|N| = 4$.

Esta sección deja establecida una diferencia de alcances entre los conceptos de estabilidad en *status quo* y estabilidad en pares. Se debe destacar la relevancia del primer concepto, puesto que gracias a este es posible alcanzar redes que son Pareto óptimas y fuertemente eficientes en situaciones en donde la estabilidad en pares aplique o no. En particular, nótese en el ejemplo de no existencia de estabilidad en pares que la red g_2 y sus variantes resultan ser los grafos que poseen mayor valor de entre los estudiados; además estos son asequibles tras hacer uso del entorno de *status quo* sugerido y estudiado en el presente trabajo de investigación.

4.2 Modularidad

Algo que está presente de manera explícita en el análisis de estabilidad realizado en la sección anterior, es el hecho que la función de beneficios obtenidos por el jugador i , $B(\cdot)$, es estrictamente creciente. Más aun, de manera implícita, es posible señalar que el Teorema 1 se cumple para funciones de beneficios obtenidos que sean supermodulares o submodulares.

El primer caso es similar al de una función continua que es estrictamente convexa, que para este contexto vendría significando que la utilidad del individuo es creciente a medida que el tamaño del componente al que pertenece crece.

Para mostrar lo anterior, desarrollamos la noción de supermodularidad en la función de beneficios definida en el Capítulo 2. Una función de beneficios se dice que es supermodular si, y solo si $B(x + y) > B(x) + B(y)$. Trabajando esto en el presente modelo se llega a

$$\begin{aligned} B(n-1) - B(n-2) &> B(n-2) - B(n-3) > \dots > B(1) - B(0) \\ B(n-1) &> 2B(n-2) - B(n-3) > \dots > B(1) - B(0) + B(n-2) \\ B(n-1) &> B(1) + B(n-2) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Se obtiene lo opuesto para el caso submodular. Esto resulta útil al momento del análisis.

Una posible interpretación de la ecuación 4.1 resulta en que para un jugador i , estar en un componente del cual pueda recibir pagos de todos los nodos es más beneficioso que estar conectado a un solo nodo y no aspirar al beneficio de los $n - 2$ restantes. En otras palabras, $B(n - 2)$ será el costo de oportunidad que enfrenta el jugador al no conectar con ellos directa o indirectamente. Notemos que esto se puede replicar para casos intermedios, donde tenemos $B(|T_i(g')|)$ con $|T_i(g')| \neq 1$. El análisis es análogo para una función de beneficios submodular.

Para el segundo caso, se tiene una función de beneficios obtenidos que es submodular. Esto es análogo a una función de beneficios obtenidos que es continua y estrictamente cóncava, por lo que a medida que el tamaño del componente al cual pertenece un nodo i aumenta, llegará un punto en el cual la utilidad del nodo i ya no es positiva. Ergo, este deseará eliminar algunas conexiones que mantenga.

El primer caso resulta trivial en el análisis, pues la utilidad de dicho nodo es estrictamente creciente, no así para el segundo caso. A continuación se plantea un ejemplo en el cual se muestra que incluso en casos donde la función de beneficios del nodo i sea submodular, esta conduce a la misma red estable en *status quo* que se obtiene mediante una función supermodular. Este resultado se obtiene producto que la manera en que se forman conexiones no solamente depende del nodo i , sino que también está sujeta a la aceptación -o no- de los vínculos que se les está proponiendo a los nodos involucrados. De esto resulta evidente que el entorno de *status quo* juega un rol fundamental en la modularidad de la función de beneficios obtenidos.

Ejemplo de estrella como red estable

En seguida, se muestra que una red de estrella es estable en *status quo*. Sea g la estrella compuesta por $n > 2$ nodos ($|N| = n$). Las siguientes ecuaciones resumen las utilidades percibidas por los nodos:

$$\begin{aligned} u_h &= B(n-1) - (n-1)c > 0, \\ u_i &= B(n-1) - c > 0, \quad \forall i \in N \setminus \{h\} \end{aligned}$$

donde h representa al nodo del central e i a los nodos ubicados a los extremos.²

²En inglés, al nodo h se le denomina *hub*.

Primero, se supone que el nodo h es escogido aleatoriamente por el entorno de *status quo*, para luego eliminar todas sus conexiones. Al momento de re-evaluar estas, su mejor respuesta será conectar con los nodos originales.

Para ver esto, se deben tomar en cuenta dos casos:

- Función de beneficios supermodular: es sencillo notar que para el nodo h que valora poseer muchas conexiones frente a pocas, siempre va a preferir conectar con todos aquellos a los que se encontraba conectado inicialmente, pues esto maximiza sus pagos. Tampoco recurrirá a cortar ningún vínculo, dado que u_h se vería estrictamente disminuida.
- Función de beneficios submodular: para aquel nodo h que valora poseer pocas conexiones frente a muchas, ya no será redituable conectar con todos a su alrededor. Por tanto tendrá el incentivo a proponer menos vínculos que los originales, el problema con ello radica en que un nodo i no aceptará una propuesta del tipo: conectar con el nodo h , sabiendo que este último se queda con menos conexiones. Esto pues u_i se vería estrictamente reducida,

$$u_i(g - l) < u_i(g), \quad \forall l \in M_h(g), \quad \forall i \in N \setminus \{h\},$$

Es sencillo apreciar que lo anterior se debe a que bajo el mismo costo, ahora un nodo i estaría recibiendo menos beneficios que los que obtenía en un inicio.

Observación: Notar que a partir de aquí el entorno de *status quo* establece que una función de beneficios obtenidos sin importar de qué características sea no posee mayor relevancia, ya que independientemente de lo que proponga el nodo escogido, si este deja con una utilidad menor a la original a los nodos que reciben propuestas, entonces los últimos no aceptarán ningún trato.

En caso que algún nodo i no se encuentre de acuerdo con lo que propone el nodo h , este no aceptará generar ningún vínculo con el último, trayendo como consecuencia que el nodo h no pueda concretar propuestas con otros nodos $j \neq i$. Para notar eso, cuando el *hub* forma un solo vínculo, dos o más, la utilidad del nodo i , quien está conectado al *hub*, será:

$$\begin{aligned} u_i(\text{cuando el } hub \text{ crea un vínculo}) &= B(1) - c, \\ u_i(\text{cuando el } hub \text{ crea dos vínculos}) &= B(2) - c, \\ &\vdots \\ u_i(\text{cuando el } hub \text{ crea } n - 2 \text{ vínculos}) &= B(n - 2) - c, \\ u_i(\text{cuando el } hub \text{ crea } n - 1 \text{ vínculos}) &= B(n - 1) - c. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Es así como se observa que la ecuación 4.2 representa la utilidad que maximiza los pagos del nodo i . Ergo, este último no aceptará conectarse con el nodo h si este posee menos de $n - 1$ conexiones.³

Segundo, sea un nodo i aquel escogido aleatoriamente por el entorno de *status quo*. Tras haber sido eliminadas sus conexiones, tendrá dos alternativas considerando el costo que posee una conexión o más: (i) formar un vínculo con un nodo $j \neq i$ y $j \neq \{hub\}$, o (ii) retomar la conexión inicial con el nodo h .

En (i), el nodo j no aceptará esta nueva conexión debido que $u_j(g') < u_j(g)$. En caso de aceptar dicha conexión, el delta en utilidad que percibe en comparación a la original será

$$\underbrace{B(n-1) - 2c}_{\text{utilidad con dos conexiones}} - \underbrace{[B(n-1) - c]}_{\text{utilidad con una conexión}} = -c < 0$$

Por último, (ii) resulta ser la mejor opción para el nodo i , pues el nodo h la aceptará, independiente del tipo de preferencias que posea.⁴ Ambos jugadores obtendrán pagos idénticos a los que se perciben en la red g .

De esta manera, la estrella que contiene a todos los jugadores resulta ser una red estable en *status quo*.

4.3 El Modelo de Conexiones

En esta sección se utiliza el Modelo de Conexiones presentado por Jackson & Wolinsky (1996) con el objeto de analizar la estabilidad en *status quo* bajo las condiciones que imponen los autores al momento de caracterizar las redes que son estables en pares. Bajo este contexto, el *status quo* será entendido como el número de vínculos que cada nodo mantiene con respecto a la red original.

Proposición 1. *En el marco del Modelo de Conexiones, las redes estables en status quo son caracterizadas a continuación:*

1. Si $\delta < c$, entonces la red vacía será la única red estable.
2. Si $c < \delta - \delta^2$, entonces la red completa será estable.
3. Si $\delta - \delta^2 < c < \delta$, entonces la estrella es estable.

Una de las principales conclusiones a extraer de esta proposición se reduce a que el conjunto de redes estables en pares y el conjunto de redes estables en *status quo* son equivalentes bajo

³En otras palabras, el nodo h vuelve a formar las conexiones que poseía en un inicio.

⁴Este hecho queda demostrado para el caso en que el nodo h desaparece de la red g .

los parámetros que plantean los autores en su artículo. Esto se explica en parte debido a la utilidad usada en el Modelo de Conexiones, la que resulta ser un caso particular de la función de pagos planteada en este estudio.

Paralelamente, en dicho artículo se presentan más condiciones que conducen a otras estructuras de red. Por ejemplo un ciclo se obtiene por medio del concepto de estabilidad en pares imponiendo las condiciones $\delta - \delta^3 > c > \delta - \delta^2$, mas este no se alcanza aplicando el entorno de *status quo*, pues siempre existirá un individuo con incentivos a cambiar sus conexiones por algunas más centrales a la estructura; se debe recordar que bajo el Modelo de Conexiones el beneficio indirecto disminuye a medida que aumenta la distancia geodésica entre el nodo que brinda este beneficio y aquel que lo recibe.

Lo anterior no quiere decir que no existan redes estables en *status quo*. Es más, existen y se puede mostrar mediante un simple ejemplo que se arriba a una estrella tras un par -no menor- de iteraciones. Sea $|N| = 6$ el número de individuos en la red y supóngase que se inicia en la red g de la figura 4.8. El proceso de iteración mediante el entorno de *status quo* es presentado en el apéndice con mayor detalle.

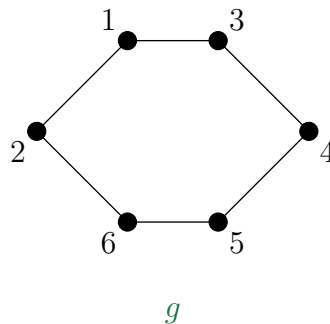


Figura 4.8: Un ciclo con $|N| = 6$

Bajo el proceso iterativo se destaca la obtención de 21 posibles redes, de las cuales 20 no son estables en *status quo*. Las redes aludidas pueden ser vistas en las figuras 4.9 y 4.10, respectivamente. Allí son identificadas con números, al igual que en el proceso iterativo, con el objeto de facilitar el seguimiento de este.

Por último se debe tener en cuenta que bajo los parámetros $\delta - \delta^3 > c > \delta - \delta^2$, el ciclo g converge a una estrella, red (21), obteniendo de esta manera una red estable en *status quo* y además dando indicios de que el entorno propuesto también erradica los ciclos en redes. Tener en cuenta que esto ya lo hace con los ciclos entre redes.

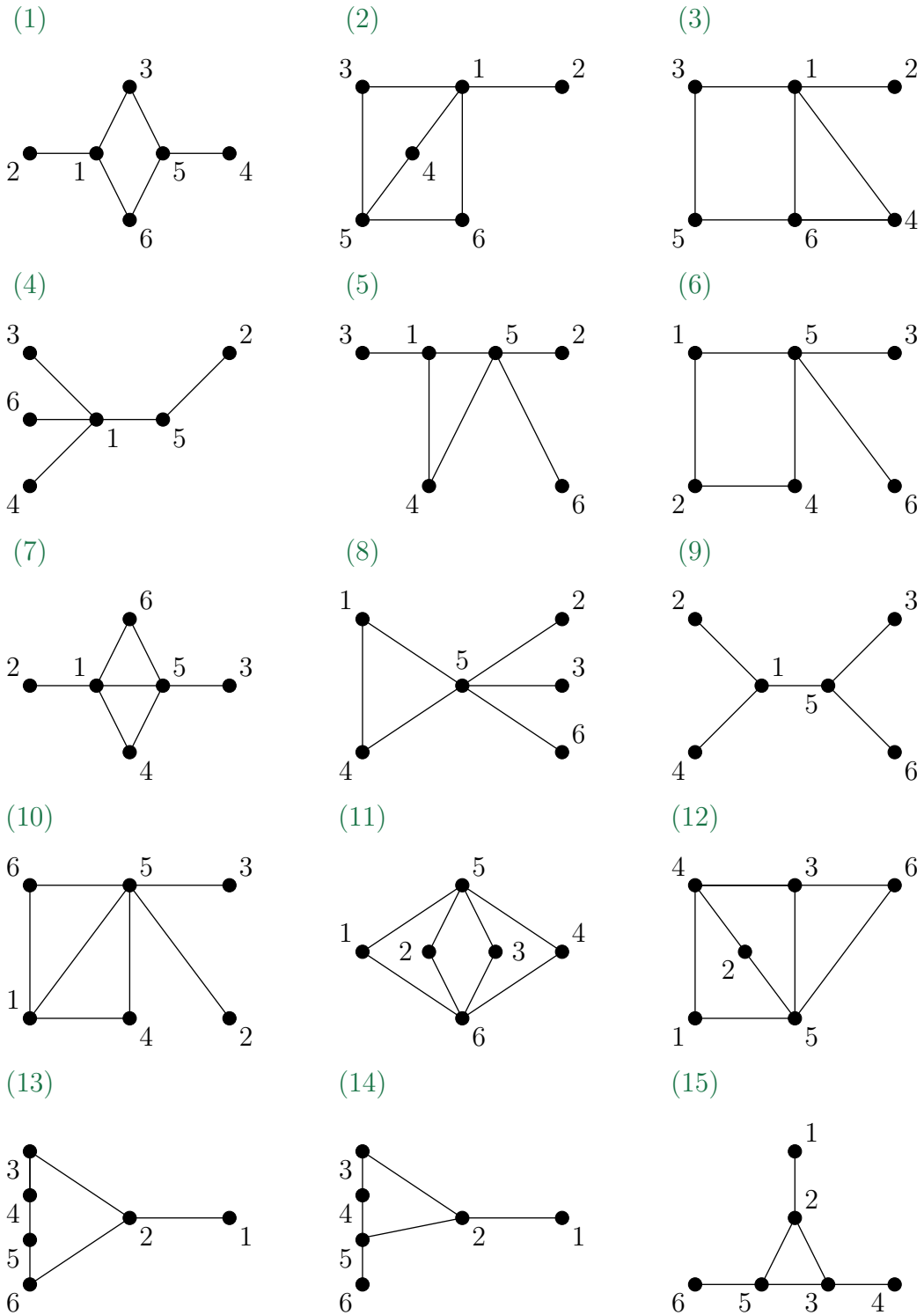


Figura 4.9: Redes en proceso de convergencia de la red g .

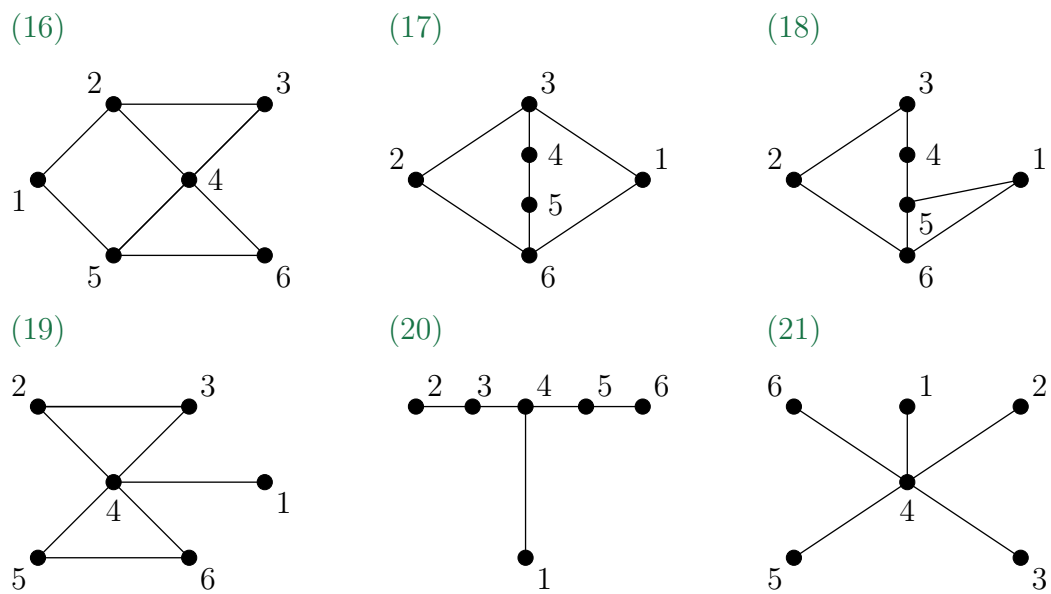


Figura 4.10: Redes en proceso de convergencia de la red g (cont.)

Capítulo 5

Conclusiones

La literatura sobre redes sociales y económicas nos explica cómo los agentes económicos interactúan dependiendo del entorno al que se encuentren sometidos. Más aun, y puntualmente, la estructura de toda red juega un rol fundamental en la determinación de los pagos provenientes de actividades económicas de toda índole. Es así como surgen diversos ejemplos a considerar en la literatura: modelos de comunicación de información en donde esta provenga de una simple invitación a una fiesta y otras formas de intercambio de amistad o también puede tomar en cuenta información sobre oportunidades de empleo (Boorman (1975), Montgomery (1991), Topa (2001), Calvo-Armengol (2004), Calvo-Armengol & Jackson (2004)), transmisión y propagación de información (Goyal (1993), Chwe (2000), Morris (2000)), problemas en el mercado del matrimonio (Gale & Shapley (1962), Roth & Sotomayor (1992)), modelamiento de la relación que poseen los compradores y los vendedores, inclusive mediante negociaciones entre las partes (Kranton & Minehart (2003), Corominas-Bosch (2004)), literatura sobre el óptimo manejo de los bienes públicos (İlkiç (2011), Bramoullé & Kranton (2007)), entre otros.

En particular, el presente trabajo de investigación toma en cuenta hechos económicos que son recurrentes en el día a día, mas no explicables -en su totalidad- mediante las herramientas existentes a la fecha. Es el caso puntual de: un grupo de mafiosos (cartel¹); un conjunto de firmas; una economía de intercambio entre agentes económicos o; incluso, partidos políticos miembros de una coalición, todos escenarios donde se sustentan relaciones redituables a lo largo del tiempo y que no pueden ser explicados por conceptos de equilibrio como la estabilidad en pares (Jackson & Wolinsky (1996)); quedando demostrado mediante el ejemplo de no-existencia presentado por Jackson & Watts (2002).

A tenor de lo expuesto, se da pie al desarrollo de un nuevo entorno en donde los agentes económicos tengan la posibilidad de re-plantearse las conexiones que han mantenido hasta

¹No confundir con el término usado para señalar un conjunto de firmas coludidas.

el momento -pudiendo adicionar nuevas o eliminar antiguas- en busca de la maximización de su utilidad. Así se pretende dar autenticidad y realismo al agente económico que se pretende modelar. Frente a ello nace el concepto acuñado: *status-quo*, el cual hace referencia al constante análisis que llevan a cabo los individuos en lo que respecta a su situación actual. El punto de conflicto se encuentra en las modificaciones que un agente realiza al interior de su círculo cercano ya que afectan directa e indirectamente a otros. Son precisamente los últimos individuos los que poseen la potestad de exigir que un acuerdo se cumpla, sino trae como consecuencia un castigo para aquellos que se desvían. Es justamente aquello lo que configura implícitamente un acuerdo o norma social al interior de la red y, paralelamente otorga el carácter de ayuda desinteresada (reciprocidad indirecta) por parte de aquel individuo que no se ve afectado de manera directa.

El principal resultado de esta tesis reside en que siempre existe una red estable en *status quo*. Para ello se planteó un nuevo concepto de equilibrio que resulta ser robusto frente a la noción inicial de estabilidad en pares planteada por los autores [Jackson & Wolinsky \(1996\)](#). Con este equilibrio se engloba el nuevo entorno dispuesto y se permite alcanzar estabilidad en donde su “semejante” lo es o, simplemente, no llega a serlo. De esta manera, se describieron las redes que se logran conseguir bajo estabilidad en *status quo*.

Asimismo, se estudia el constante *trade-off* existente en la economía entre eficiencia y estabilidad. De ello se obtuvieron condiciones suficientes para las cuales el conjunto de redes eficientes y el conjunto de redes estables culminen siendo equivalentes, disjuntos o simplemente el segundo sea un subconjunto propio del primero. Es así como se abordó la temática de eficiencia y estabilidad bajo la aplicación del ejemplo de no-existencia de estabilidad en pares por parte de los autores [Jackson & Watts \(2002\)](#). Estos plantean un economía de intercambio con dotaciones estocásticas para la cual existen redes eficientes, mas no asequibles pues la estabilidad en pares no resulta ser lo suficientemente robusta para conseguir el equilibrio. De este modo, bajo estabilidad en *status quo* se tiene la posibilidad de sí alcanzar estas redes, asegurando la máxima utilidad social posible; ciertamente bajo determinadas limitantes, mas alcanzable al fin y al cabo.

En cuanto a lo anterior, se debe tener presente que la reciprocidad fue tratada como un comportamiento que poseen los agentes en la red y por tanto no fue tomada como una preferencia. A diferencia de [Seinen & Schram \(2006\)](#), el modelo captura el concepto aludido como aquel que busca ganancias en eficiencia por medio de la cooperación ([Brandts & Schram \(2001\)](#)); esto mediante la eficiencia global que es obtenida gracias a la estabilidad local. Lo último resulta ser un hecho destacado del modelo pues muestra que si los individuos se preocupan por sus pagos esto los conducirá directamente a la eficiencia. En parte, si en cada componente de una red los individuos llegan a un acuerdo implícito de mantener las relaciones que han estado teniendo en el tiempo, esto conduce a la estabilidad en cada uno de lo componentes, además si no hay modificaciones se asegura -dependiendo de las condiciones- que la red en la que se encuentran los individuos es la eficiente. Luego, si algún

individuo deseara cortar un vínculo con otro nodo -en el caso que el costo de la conexión sea lo suficientemente bajo- o agregar una conexión -en el caso que dicho coste sea lo suficientemente alto- entonces es sencillo notar que en relación a la red original los individuos obtendrán una reducción de sus utilidades en el sentido de Pareto. Por consiguiente, el mejor escenario se obtiene cuando todos los miembros de la red conservan sus relaciones originales.

En lo que respecta a la norma social, la relación indirecta que poseen todos los individuos en la red conlleva a que se alcance un nivel de interdependencia tal que si cualquiera sea el nodo que desee desviarse del “acuerdo” (de la red), entonces este se verá fuertemente castigado por aquellos que se ven indirectamente afectados. Esto se gesta mediante las amenazas creíbles de ostracismo en contra de quien(es) se desvía(n). Luego, la mantención de estos acuerdos en el tiempo se debe a dos posibles fuentes: (i) los agentes son honestos y poseen una buena reputación que los caracteriza por prestar auxilio a un tercero en beneficio de todos, o (ii) el castigo de quedar fuera del pacto resulta demasiado severo como para cometer cualquier acto que mine la confianza de los vecinos locales.

Seguidamente, lo último se manifiesta junto a la reciprocidad indirecta que se pone de manifiesto a través de la norma social imperante. Esta es la traducción de una ayuda desinteresada por parte de un individuo que se ve indirectamente afectado por una acción directa contra otro. De esta manera, la mafia o las empresas mantienen acuerdos, incluso miembros de una coalición política que no pertenecen a un mismo partido, puesto que la colaboración de una de las partes auxilia a otra y de paso deja a quien colabora como si nada hubiera acontecido. De esta forma no se incurre en un costo explícito por generar amenazas y además la utilidad promedio de la red se maximiza.

Con el fin de englobar los puntos previos, es imperante apreciar el hecho que la gente sigue encontrando valioso invertir o mantener su nivel de honestidad (o confianza), aun cuando los pagos inmediatos por ello sean bajos (Charness et al. (2011)). Esto se pone de manifiesto en el modelo incluso en el caso que la función de beneficios obtenidos sea submodular, pues para lograr mantener una cohesión en el grupo se requiere de la aprobación de todas las conexiones que un nodo re-plantea a sus vecinos. Allí es cuando este debe aceptar que percibirá un pago inferior al que maximiza su utilidad como medida de cooperación para mantener una estructura estable que le reporte el máximo nivel de satisfacción dadas las condiciones que le impone su entorno (Revisar Capítulo 4, sección 4.2 sobre modularidad). Sabiendo lo anterior, resulta que el agente deseará mostrar cierto grado de honradez con el objeto de sostener el acuerdo común entre las partes; esto pues si el mismo rompe el acuerdo, entonces será castigado hoy y con ello romperá la confianza que posee con sus otros vecinos. De esta manera, la reciprocidad indirecta da pie a la norma social y con ellas en conjunto se alcanza la eficiencia global.

En otro ámbito, se trabajó dos aplicaciones adicionales:

- La primera tiene relación con la modularidad de la función de beneficios, en ella se

mostró que independientemente de cuál sea esta la existencia de una red estable en *status quo* no se ve modificada. El resultado anterior se debe principalmente a que en el caso que la función de beneficios sea submodular -preferencia por gozar de algunas pocas conexiones frente a un número abundante-, el individuo aun así debe mantenerse en la red original puesto que sus pagos dependen directamente de la aceptación de aquellos a quienes este propone generar enlaces. Justamente producto de esto es que los últimos rechazarán cualquier propuesta que involucre menos nodos conectados con quien se encuentre sugiriendo los enlaces, ya que el beneficio que perciben aquellos destinados a dar respuesta a esta proposición disminuye en sentido estricto.

- La segunda se basa en el Modelo de Conexiones planteado por [Jackson & Wolinsky \(1996\)](#) en donde se caracterizaron las redes que son estables en *status quo*. Bajo este entorno particular se muestra que el conjunto de redes estables en pares y el conjunto de redes estables en *status quo* coinciden para los parámetros señalados.

Por último se sugieren los siguientes tópicos a modo de extensión del trabajo de investigación: endogeneización del *status quo*; análisis dinámico del modelo; norma social sin amenaza de salida como medio de castigo y; búsqueda de aplicaciones donde el conjunto de redes estables en *status quo* sea un subconjunto propio de las redes estables en pares.

Capítulo 6

Bibliografía

- Anderlini, L. & Ianni, A. (1996). Path dependence and learning from neighbors. *Games and Economic Behavior*, 13(2):141–177.
- Aumann, R. & Myerson, R. (1988). Endogenous formation of links between players and coalitions: an application of the shapley value. *The Shapley Value*, pages 175–191.
- Bala, V. & Goyal, S. (2000). A noncooperative model of network formation. *Econometrica*, 68(5):1181–1229.
- Bendor, J. & Swistak, P. (2001). The evolution of norms 1. *American Journal of Sociology*, 106(6):1493–1545.
- Bloch, F. & Jackson, M. O. (2006). Definitions of equilibrium in network formation games. *International Journal of Game Theory*, 34(3):305–318.
- Boorman, S. A. (1975). A combinatorial optimization model for transmission of job information through contact networks. *The bell journal of economics*, pages 216–249.
- Bramoullé, Y. & Kranton, R. (2007). Public goods in networks. *Journal of Economic Theory*, 135(1):478–494.
- Brandts, J. & Schram, A. (2001). Cooperation and noise in public goods experiments: applying the contribution function approach. *Journal of Public Economics*, 79(2):399–427.
- Calvó-Armengol, A. (2004). Job contact networks. *Journal of economic Theory*, 115(1):191–206.
- Calvó-Armengol, A. & İlkılıç, R. (2009). Pairwise-stability and nash equilibria in network formation. *International Journal of Game Theory*, 38(1):51–79.

- Calvo-Armengol, A. & Jackson, M. O. (2004). The effects of social networks on employment and inequality. *The American Economic Review*, 94(3):426–454.
- Charness, G., Du, N., & Yang, C.-L. (2011). Trust and trustworthiness reputations in an investment game. *Games and economic behavior*, 72(2):361–375.
- Chwe, M. S.-Y. (2000). Communication and coordination in social networks. *The Review of Economic Studies*, 67(1):1–16.
- Corominas-Bosch, M. (2004). Bargaining in a network of buyers and sellers. *Journal of Economic Theory*, 115(1):35–77.
- Diestel, R. (2005). Graph theory, electronic. *Graduate Texts in Mathematics*, 173.
- Dutta, B., Van den Nouweland, A., & Tijs, S. (1998). Link formation in cooperative situations. *International Journal of Game Theory*, 27(2):245–256.
- Ellickson, R. C. (2009). *Order without law: How neighbors settle disputes*. Harvard University Press.
- Ellison, G. (1993). Learning, local interaction, and coordination. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 1047–1071.
- Engelmann, D. & Fischbacher, U. (2009). Indirect reciprocity and strategic reputation building in an experimental helping game. *Games and Economic Behavior*, 67(2):399–407.
- Fehr, E. & Fischbacher, U. (2004). Third-party punishment and social norms. *Evolution and human behavior*, 25(2):63–87.
- Fukuyama, F. (1995). *Trust: The social virtues and the creation of prosperity*. Free press New York.
- Gale, D. & Shapley, L. S. (1962). College admissions and the stability of marriage. *The American Mathematical Monthly*, 69(1):9–15.
- Gilles, R. P. & Sarangi, S. (2005). Stable networks and convex payoffs.
- Goyal, S. (1993). *Sustainable communication networks*. Econometric Institute, Erasmus University Rotterdam.
- Goyal, S. & Janssen, M. C. (1997). Non-exclusive conventions and social coordination. *journal of economic theory*, 77(1):34–57.
- Hirshleifer, D. & Rasmusen, E. (1989). Cooperation in a repeated prisoners' dilemma with ostracism. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 12(1):87–106.

- Homans, G. C. (2013). *The human group*, volume 7. Routledge.
- İlkılıç, R. (2011). Networks of common property resources. *Economic Theory*, 47(1):105–134.
- Jackson, M. O. & Watts, A. (2001). The existence of pairwise stable networks.
- Jackson, M. O. & Watts, A. (2002). The evolution of social and economic networks. *Journal of Economic Theory*, 106(2):265–295.
- Jackson, M. O. & Wolinsky, A. (1996). A strategic model of social and economic networks. *Journal of economic theory*, 71(1):44–74.
- Kandori, M. (1992). Social norms and community enforcement. *The Review of Economic Studies*, 59(1):63–80.
- Kranton, R. E. & Minehart, D. F. (2003). A theory of buyer-seller networks. In *Networks and Groups*, pages 347–378. Springer.
- Lewis, D. (1969). *Convention* cambridge. Mass.: Harvard UP.
- Macaulay, S. (1963). Non-contractual relations in business: A preliminary study. *American sociological review*, pages 55–67.
- Montgomery, J. D. (1991). Social networks and labor-market outcomes: Toward an economic analysis. *The American economic review*, 81(5):1408–1418.
- Morris, S. (2000). Contagion. *The Review of Economic Studies*, 67(1):57–78.
- Nowak, M. A. & Sigmund, K. (2005). Evolution of indirect reciprocity.
- Qin, C. (1996). Endogenous formation of cooperation structures. *Journal of Economic Theory*, 69(1):218–226.
- Roth, A. E. & Sotomayor, M. (1992). Two-sided matching. *Handbook of game theory with economic applications*, 1:485–541.
- Schuessler, R. (1989). Exit threats and cooperation under anonymity. *Journal of Conflict Resolution*, 33(4):728–749.
- Seinen, I. & Schram, A. (2006). Social status and group norms: Indirect reciprocity in a repeated helping experiment. *European Economic Review*, 50(3):581–602.
- Slikker, M. & van den Nouweland, A. (2001). A one-stage model of link formation and payoff division. *Games and Economic Behavior*, 34(1):153–175.
- Topa, G. (2001). Social interactions, local spillovers and unemployment. *The Review of Economic Studies*, 68(2):261–295.

CAPÍTULO 6. BIBLIOGRAFÍA

- Tullock, G. (1985). Adam smith and the prisoners' dilemma. *The Quarterly Journal of Economics*, 100:1073–1081.
- Vanberg, V. J. & Congleton, R. D. (1992). Rationality, morality, and exit. *American Political Science Review*, 86(02):418–431.
- Voss, T. (2001). *Game-theoretical perspectives on the emergence of social norms*. na.
- Watts, A. (2001). A dynamic model of network formation. *Games and Economic Behavior*, 34(2):331–341.

Capítulo 7

Apéndice

7.1 Figuras

Entorno de *status quo* en una línea con todos conectados (1)

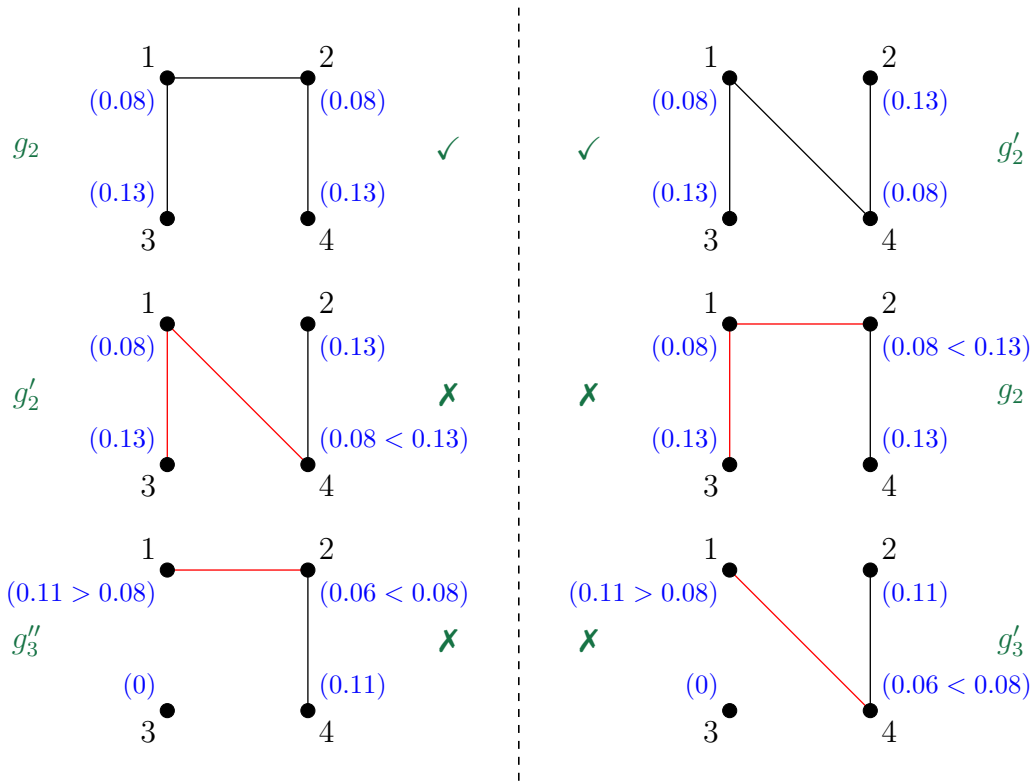


Figura 7.1: Un nodo intermedio re-plantea sus conexiones en g_2 y g'_2 , e.g. agente 1.

Entorno de *status quo* en una línea con todos conectados (2)

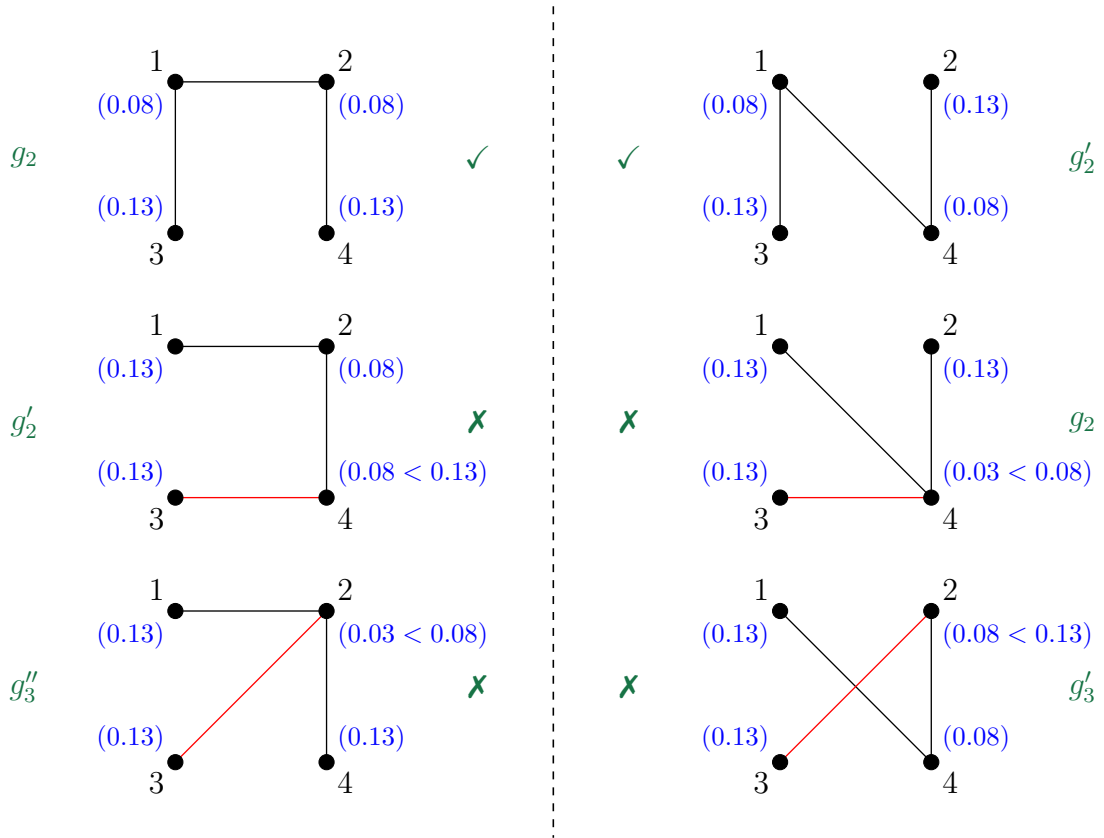


Figura 7.2: Un nodo extremo re-plantea sus conexiones en g_2 y g'_2 , e.g. agente 3.

7.2 Ejemplo Modelo de Conexiones

Proceso de iteración mediante entorno de *status quo*:¹

- Red g : Si en g cualquier nodo re-evalúa sus conexiones se converge a (1).
- Red (1):
 - Si en (1) el nodo 2 o 4 re-evalúa sus conexiones se converge a (2) o (3).
 - Si en (1) el nodo 1 o 5 re-evalúa sus conexiones se converge a (4).
 - Si en (1) el nodo 3 o 6 re-evalúa sus conexiones se converge a (1).
- Red (2):
 - Si en (2) el nodo 4, 3 o 6 re-evalúa sus conexiones se converge a (2) o (3).
 - Si en (2) el nodo 2 re-evalúa sus conexiones se converge a (11) o (12).
 - Si en (2) el nodo 1 re-evalúa sus conexiones se converge a (9).
 - Si en (2) el nodo 5 re-evalúa sus conexiones se converge a (21).
- Red (3):
 - Si en (3) el nodo 1 re-evalúa sus conexiones se converge a (13), (14) o (15).
 - Si en (3) el nodo 3 re-evalúa sus conexiones se converge a (3) o (7).
 - Si en (3) el nodo 6 re-evalúa sus conexiones se converge a (5) o (6).
 - Si en (3) el nodo 2 re-evalúa sus conexiones se converge a (16) o (17).
 - Si en (3) el nodo 4 re-evalúa sus conexiones se converge a (2) o (3).
 - Si en (3) el nodo 5 re-evalúa sus conexiones se converge a (21).
- Red (4):
 - Si en (4) el nodo 2 re-evalúa sus conexiones se converge a (21).
 - Si en (4) el nodo 1 o 5 re-evalúa sus conexiones se converge a (4).
 - Si en (4) el nodo 3, 4 o 6 re-evalúa sus conexiones se converge a (5) o (6).
- Red (5):
 - Si en (5) el nodo 3 o 6 re-evalúa sus conexiones se converge a (3) o (7).
 - Si en (5) el nodo 2 re-evalúa sus conexiones se converge a (8).

¹Este consiste en analizar las redes que se obtienen a medida que se aplica en el entorno estudiado, de esta forma es posible construir un grafo entre redes el cuál termina mostrando si se obtiene un ciclo o un árbol.

- Si en (5) el nodo 1 re-evalúa sus conexiones se converge a (4).
- Si en (5) el nodo 5 re-evalúa sus conexiones se converge a (9).
- Si en (5) el nodo 4 re-evalúa sus conexiones se converge a (5) o (6).
- Red (6):
 - Si en (6) el nodo 1 o 4 re-evalúa sus conexiones se converge a (5) o (6).
 - Si en (6) el nodo 2 re-evalúa sus conexiones se converge a (21).
 - Si en (6) el nodo 3 o 6 re-evalúa sus conexiones se converge a (2) o (3).
 - Si en (6) el nodo 5 re-evalúa sus conexiones se converge a (9).
- Red (7):
 - Si en (7) el nodo 2 o 3 re-evalúa sus conexiones se converge a (10).
 - Si en (7) el nodo 4 o 6 re-evalúa sus conexiones se converge a (3) o (7).
 - Si en (7) el nodo 1 o 5 re-evalúa sus conexiones se converge a (9).
- Red (8):
 - Si en (8) el nodo 2, 3 o 6 re-evalúa sus conexiones se converge a (8).
 - Si en (8) el nodo 1 o 4 re-evalúa sus conexiones se converge a (21).
 - Si en (8) el nodo 5 re-evalúa sus conexiones se converge a (9).
- Red (9):
 - Si en (9) el nodo 2, 3, 4 o 6 re-evalúa sus conexiones se converge a (5) o (6).
 - Si en (9) el nodo 1 o 5 re-evalúa sus conexiones se converge a (9).
- Red (10):
 - Si en (10) el nodo 4 o 6 re-evalúa sus conexiones se converge a (8).
 - Si en (10) el nodo 2 o 3 re-evalúa sus conexiones se converge a (10).
 - Si en (10) el nodo 1 re-evalúa sus conexiones se converge a (21).
 - Si en (10) el nodo 5 re-evalúa sus conexiones se converge a (9).
- Red (11):
 - Si en (11) el nodo 5 o 6 re-evalúa sus conexiones se converge a (21).
 - Si en (11) el nodo 1, 2, 3 o 4 re-evalúa sus conexiones se converge a (11) o (16).

- Red (12):
 - Si en (12) el nodo 6 re-evalúa sus conexiones se converge a (11) o (11).
 - Si en (12) el nodo 1 o 2 re-evalúa sus conexiones se converge a (16) o (17).
 - Si en (12) el nodo 4 re-evalúa sus conexiones se converge a (8).
 - Si en (12) el nodo 3 re-evalúa sus conexiones se converge a (2) o (3).
 - Si en (12) el nodo 5 re-evalúa sus conexiones se converge a (5) o (6).
- Red (13):
 - Si en (13) el nodo 1 re-evalúa sus conexiones se converge a (17) o (18).
 - Si en (13) el nodo 4 o 5 re-evalúa sus conexiones se converge a (5) o (6).
 - Si en (13) el nodo 3 o 6 re-evalúa sus conexiones se converge a (1).
 - Si en (13) el nodo 2 re-evalúa sus conexiones se converge a (13), (14) o (15).
- Red (14):
 - Si en (14) el nodo 3 o 4 re-evalúa sus conexiones se converge a (5) o (6).
 - Si en (14) el nodo 2 o 5 re-evalúa sus conexiones se converge a (13), (14) o (15).
 - Si en (14) el nodo 1 o 6 re-evalúa sus conexiones se converge a (2) o (3).
- Red (15):
 - Si en (15) el nodo 2, 3 o 5 re-evalúa sus conexiones se converge a (13), (14) o (15).
 - Si en (15) el nodo 1, 4 o 6 re-evalúa sus conexiones se converge a (3) o (7).
- Red (16):
 - Si en (16) el nodo 1 re-evalúa sus conexiones se converge a (19).
 - Si en (16) el nodo 3 o 6 re-evalúa sus conexiones se converge a (12) o (16).
 - Si en (16) el nodo 2 o 5 re-evalúa sus conexiones se converge a (3) o (7).
 - Si en (16) el nodo 4 re-evalúa sus conexiones se converge a (1) o (13).
- Red (17):
 - Si en (17) el nodo 1 o 2 re-evalúa sus conexiones se converge a (17) o (18).
 - Si en (17) el nodo 4 o 5 re-evalúa sus conexiones se converge a (2) o (3).
 - Si en (17) el nodo 3 o 6 re-evalúa sus conexiones se converge a (5) o (6).

- Red (18):
 - Si en (18) el nodo 2 o 6 re-evalúa sus conexiones se converge a (2) o (3).
 - Si en (18) el nodo 1 re-evalúa sus conexiones se converge a (17) o (18).
 - Si en (18) el nodo 3 re-evalúa sus conexiones se converge a (5) o (6).
 - Si en (18) el nodo 4 re-evalúa sus conexiones se converge a (17).
 - Si en (18) el nodo 5 re-evalúa sus conexiones se converge a (5) o (6).
- Red (19):
 - Si en (19) el nodo 2, 3, 5 o 6 re-evalúa sus conexiones se converge a (8).
 - Si en (19) el nodo 1 re-evalúa sus conexiones se converge a (19).
 - Si en (19) el nodo 4 re-evalúa sus conexiones se converge a (20).
- Red (20):
 - Si en (20) el nodo 2 o 6 re-evalúa sus conexiones se converge a (5) o (6).
 - Si en (20) el nodo 3 o 5 re-evalúa sus conexiones se converge a (14) o (15).
 - Si en (20) el nodo 4 re-evalúa sus conexiones se converge a (20).
 - Si en (20) el nodo 1 re-evalúa sus conexiones se converge a (1).
- Red (21): Si en (21) cualquier nodo re-evalúa sus conexiones se converge a (21). Por lo tanto (21) resulta ser la red estable en *status quo*.

Se dejan abiertos los cálculos para algún lector que desee aventurarse.

7.3 Demostraciones

Demostración de Proposición 1. Analizando por caso.

1. Cuando $\delta < c$: Sea $c = \delta + \varepsilon$, con $\varepsilon \rightarrow 0$ y $\varepsilon > 0$. Además, sea g la red vacía con $n \geq 2$ nodos.

Sea el nodo i aquel que es escogido aleatoriamente y cuyas conexiones son eliminadas con el objeto que este las re-evalúe. Como originalmente es una red vacía, las alternativas que maneja dicho nodo se reducen a: mantenerse sin vínculos o generar lazos (nuevos) con otros nodos. Bajo el primer escenario la utilidad para el agente será cero. Mientras que en el segundo, la utilidad que percibe el nodo i estará caracterizada por el número de conexiones que desee establecer. Esta se encuentra representada a continuación:

$$u_i(g + l) = |l| \cdot (\delta - c), \quad \forall l \subseteq L_i(g^N \setminus g), \quad \forall i \in N. \quad (\spadesuit)$$

Tomando en cuenta c en la ecuación (\spadesuit) , se obtiene una utilidad negativa. Por consiguiente, el nodo i no querrá adicionar ninguna conexión. Luego lo mejor que puede hacer es mantenerse en la situación original, sin conexiones (se prefiere el *status quo*).

Finalmente, se concluye que la red vacía es estable en *status quo*.

2. Cuando $c < \delta - \delta^2$: Sea $c = \delta - \delta^2 - \varepsilon$, con $\varepsilon \rightarrow 0$ y $\varepsilon > 0$. Además, sea g la red completa con $n \geq 3$ nodos.

Sea el nodo i aquel que es escogido aleatoriamente y cuyas conexiones son eliminadas con el objeto que este las re-piense. Además, si se toma en cuenta la estructura de la red resultante, la utilidad del nodo por formar una, dos, ..., o $n - 1$ conexiones se encuentra representada en la siguiente ecuación:²

$$u_i(g' + l) = |l| \cdot \delta + (n - |l| - 1) \cdot \delta^2 - |l| \cdot c, \quad \forall l \subseteq L_i(g^N \setminus g'), \quad \forall i \in N, \quad (\star)$$

con $g' = g - M_i(g)$.

Si se evalúa la ecuación (\star) en c , se obtiene la siguiente utilidad, $\forall l \subseteq L_i(g^N \setminus g'), \forall i \in N$:

$$u_i(g' + l) = (n - 1)\delta^2 + |l| \cdot \varepsilon > 0.$$

Esta resulta ser creciente en el número de vecinos que el nodo i desea mantener. De esta forma, el nodo i no tiene incentivos a tener menos conexiones que las iniciales, por consiguiente él maximiza su utilidad formando los enlaces originales. Notar que todos los nodos involucrados terminan aceptando formar los vínculos que mantuvieron en un principio con el nodo i .

²La utilidad por no formar ninguna conexión es cero. Mas no es beneficioso para el agente quedarse desconectado pues cualquier vínculo le reportará algo de utilidad. Esto dado que $c < \delta - \delta^2 < \delta$.

Notar que el nodo i no quiere quedarse solo, pues $0 < (n-1)(\delta-c)$; lo que proviene de $c < \delta - \delta^2 < \delta$.

Finalmente, se alcanza la estabilidad en *status quo* en la red completa.

3. Cuando $\delta - \delta^2 < c < \delta$: Sea g la red con forma de estrella con $n \geq 3$. Luego, la utilidad de los nodos que la componen se descompone a continuación:

$$\begin{aligned} u_h &= (n-1)(\delta-c) > 0, \\ u_i &= \delta + (n-2)\delta^2 - c > 0, \quad \forall i \in N \setminus \{h\}. \end{aligned}$$

Por otra parte, sea uno de los nodos escogidos aleatoriamente por el entorno de *status quo*. Por consiguiente, se tendrán dos casos dependiendo del tipo de nodo al que se aluda:

- Sea el nodo central, h , elegido: Notar que al re-pensar sus conexiones, el nodo h decide volver a conectar con todos (dado que $\delta < c$), pues de esta forma maximiza su utilidad. Además, en caso de proponer menos conexiones que las totales, los nodos extremos no aceptarán estas, pues no estarán percibiendo la misma utilidad que la original. De esta manera, el nodo h prefiere volver a la red g .
- Sea un nodo extremo, i , elegido: Es sencillo notar que el nodo i siempre va a desear retornar a la red g . En caso que este proponga formar un vínculo con un nodo que difiera del original, el primero obtendrá la misma utilidad que el original, pero el segundo estará incurriendo en el costo de dos conexiones lo que resulta ser estrictamente inferior a la utilidad original (dado que $\delta - \delta^2 < c$), por ende terminará no aceptando dicha conexión.

En contraste, si el nodo i no desea formar ninguna conexión se queda con una utilidad nula, la que es inferior a la original.

Dado esto, el nodo i posee interés en mantenerse en la red g .

Finalmente, como todos los nodos poseen preferencias hacia la red g , esta resulta ser una red estable en *status quo*.

De esta manera se concluye la demostración. ■

Proposición 2. *Toda red g caracterizada por ser un árbol, es un grafo bipartito.*

Demostración. Escojamos un nodo cualquiera para ser el nodo raíz de la red g , y organicemos los otros nodos en niveles. El nodo raíz pertenecerá al nivel uno, luego los nodos que estén directamente conectados con el nodo raíz se encontrarán en el nivel dos, y así hasta el nivel k (par o impar).

Luego, es fácil notar que todo nodo que se encuentre en un nivel impar no podrá estar conectado a otro(s) nodo(s) en un nivel impar distinto. De manera similar, cada nodo ubicado

en un nivel par tampoco podrá conectar con otro(s) nodo(s) en un nivel par distinto. Como estamos hablando de un árbol, tampoco podrán estarlo con el(los) nodo(s) de su mismo nivel.

Por lo tanto, si dividimos las conexiones de nuestro árbol entre aquellas con un nivel par y otras con un nivel impar, podremos usar estos dos conjuntos en la definición de un grafo bipartito. ■

Proposición 3. *Sea $v(g)$ la función de valor de la red g , luego*

$$nB(n-1) - \left[n_r(g) + |L| + \sum_{h_j \in H} n_{h_j}(g) \right] c = nB(n-1) - 2(n-1)c, \quad \forall n_r(g) \leq n-1.$$

Demostración. Usando el hecho que un árbol es una red bipartita, resulta sencillo apreciar que el costo en que incurren los nodos de cada conjunto es $n-1$. Finalmente, como tenemos dos conjuntos es directo que el costo total que se tiene por formar un árbol es $2(n-1)$. ■