



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

MÓDULO DE CONTINUIDAD PARA LAS MEDIDAS DE CORRELACIÓN EN  
SISTEMAS SUBSTITUTIVOS DE TILINGS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS  
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

JUAN GUILLERMO MARSHALL MALDONADO

PROFESOR GUÍA:  
ALEJANDRO MAASS SEPÚLVEDA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
DANIEL CORONEL SOTO  
SERVET MARTÍNEZ AGUILERA  
MICHAEL SCHRAUDNER

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Centro de Modelamiento Matemático

SANTIAGO DE CHILE  
2017



RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR  
AL TÍTULO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,  
MENCION MATEMÁTICAS APLICADAS  
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO  
POR: JUAN GUILLERMO MARSHALL MALDONADO  
FECHA: 2017  
PROF. GUÍA: SR. ALEJANDRO MAASS SEPÚLVEDA

## MÓDULO DE CONTINUIDAD PARA LAS MEDIDAS DE CORRELACIÓN EN SISTEMAS SUBSTITUTIVOS DE TILINGS

Desde los inicios de la teoría ergódica la teoría espectral ha representado una herramienta potente para entender distintos aspectos de la dinámica de un sistema. La relación entre estas teorías se establece a través del operador de Koopman definido a partir de un sistema dinámico en distintos espacios funcionales. Entre los resultados notables que se han demostrado utilizando ésta idea se pueden mencionar dos atribuidos a John von Neumann: un teorema ergódico y una caracterización de los sistemas de espectro discreto (ver [29]).

Los operadores de Koopman se pueden estudiar a partir de las medidas espectrales, debido al teorema de representación espectral. Si bien ésta es una manera útil de caracterizar esos operadores, calcular las medidas espectrales es un problema difícil en el contexto general. Por esta razón es que se busca obtener información sobre ellas de forma indirecta, por ejemplo, a través de sus decaimientos asintóticos. Los sistemas dinámicos en donde ha sido posible describir las medidas espectrales son muy pocos y una categoría muy explorada es la de aquellos provenientes de sustituciones y en particular de sustituciones de largo constante [29]. Más recientemente, inspirados en [17], Bufetov y Solomyak prueban en [7] módulos de continuidad para las medidas espectrales asociadas a sistemas de tilings substitutivos unidimensionales. En [11] se generaliza uno de los resultados de [7] al contexto de sistemas de tilings substitutivos del espacio euclideo  $\mathbb{R}^d$ . Más precisamente se dan cotas del decaimiento de las medidas espectrales en torno al origen.

En el presente trabajo de tesis se generalizan las ideas de [7] encontrando un módulo de continuidad de tipo log-Hölder para las medidas espectrales en sistemas substitutivos de tilings de  $\mathbb{R}^d$ , pero para puntos alejados del origen. Entre las técnicas esenciales que se usan para la demostración están la de representar las medidas espectrales como productos de Riesz matriciales, estimaciones del crecimiento de sumas “torcidas” de Birkhoff y su relación con los decaimientos de las medidas espectrales, la descomposición en sistemas de torres del sistema substitutivo de tilings y argumentos de teoría de números de Pisot.

El resultado principal permite entender la parte continua del espectro de un sistema dinámico de tiling substitutivo. Los decaimientos de las medidas espectrales entregan tasas de débil mezcla como se hace en [23], las que son invariantes de conjugación topológica. Ésto podría ser una herramienta útil para distinguir sistemas dinámicos de espectro continuo.



*«I live my life a quarter mile at a time. Nothing else matters: not the mortgage, not the store, not my team and all their bullshit. For those ten seconds or less, I'm free.»*  
*Dominic Toretto.*



# Agradecimientos

Agradezco al Centro de Modelamiento Matemático por financiar parcialmente este trabajo de tesis a través de la Beca CMM para alumnos del Magíster en Ciencias de la Ingeniería, mención Matemáticas Aplicadas. Agradezco también a mi profesor guía Alejandro Maass, por su ayuda para realizar este documento y toda la paciencia que ha tenido.

Finalmente doy las gracias a mi familia y amigos por todo el apoyo brindado durante mi paso por la universidad.





# Tabla de Contenido

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Estudio espectral de sistemas substitutivos</b>	<b>5</b>
1.1. Elementos básicos de teoría espectral de sistemas dinámicos . . . . .	5
1.1.1. Sistemas dinámicos abstractos y topológicos . . . . .	5
1.1.2. Elementos de teoría espectral de operadores . . . . .	6
1.1.3. Teoría espectral para un sistema dinámico abstracto . . . . .	8
1.2. Sistemas substitutivos . . . . .	12
1.2.1. Substituciones uni-dimensionales . . . . .	12
1.2.2. Primeras estimaciones para $S_N^f(x, 0)$ . . . . .	13
1.2.3. Estimaciones para $\omega \neq 0$ . . . . .	18
<b>2. Sistemas dinámicos de tilings</b>	<b>21</b>
2.1. Tilings del espacio euclideo . . . . .	21
2.1.1. Definiciones básicas . . . . .	21
2.1.2. Espacios de tilings . . . . .	22
2.1.3. Sistemas dinámicos de tilings . . . . .	24
2.1.4. Tilings substitutivos y sistemas dinámicos asociados . . . . .	25
2.2. Sumas torcidas y medidas espectrales para sistemas de tilings . . . . .	27
2.2.1. Definiciones y construcciones . . . . .	27
2.2.2. Medidas espectrales de sistemas de tilings . . . . .	30
<b>3. Estimaciones sobre sumas torcidas de Birkhoff y medidas espectrales</b>	<b>33</b>
3.1. Crecimiento de $S_R^f(\mathbf{X}, \omega)$ . . . . .	33
3.1.1. Relación con el factor de estructura . . . . .	33
3.2. Módulo de continuidad para $\sigma_f$ . . . . .	39
3.2.1. Máximo tipo espectral y conjugación . . . . .	39
3.2.2. Teorema principal . . . . .	40
3.3. Ejemplos . . . . .	45
3.3.1. Ejemplo 1: caso auto-similar . . . . .	45
3.3.2. Ejemplo 2: caso diagonal real . . . . .	46
<b>Conclusión</b>	<b>47</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>49</b>



# Introducción

La **Cristalografía** es el estudio de la estructura atómica de los cristales a partir de la comunmente utilizada técnica de difracción con rayos X. Durante largo tiempo sólo se conocían materiales cuya difracción producía patrones “ordenados” que al extenderse por el espacio presentaban simetrías de traslación. Sólo en 1982 el científico de materiales Dan Schechtman observó ciertas aleaciones de aluminio-manganeso cuyos patrones de difracción presentaban simetrías rotacionales de orden 5, las que no pueden presentarse en patrones con simetrías de traslación (teorema de restricción cristalográfica). Así nacen formalmente los **cuasicristales** que tienen amplio uso en distintas áreas, desde física experimental a ciencias de los materiales, por mencionar algunas.

En cierta medida el descubrimiento físico de estos materiales se había anticipado con la aparición en la literatura de ciertos *tilings* y *conjuntos de Delone* sin simetrías de traslación. Un **tiling** es básicamente un conjunto numerable de piezas que cubren el espacio sin superponerse unas con otras. El físico británico Sir Roger Penrose publicó algunos ejemplos de tilings que presentaban difracción y carecían de este tipo de simetrías. Los problemas de difracción mencionados antes están íntimamente relacionados con el estudio espectral de sistemas dinámicos de tilings.

Por un sistema dinámico se entiende la acción de un grupo (que en este documento será  $\mathbb{Z}$  ó  $\mathbb{R}^d$ ) sobre un espacio métrico compacto con una medida preservada por la acción. El estudio espectral de los sistemas dinámicos se refiere al estudio de ciertos operadores unitarios (que surgen a partir de la acción del grupo) definidos en el espacio de Hilbert de las funciones cuadrado-integrables respecto a la medida invariante. El **Teorema de representación espectral** establece una correspondencia biunívoca entre estos operadores y ciertas medidas, denominadas **medidas espectrales**, de las cuales se puede extraer información respecto al espectro del sistema. Éste es el tipo de estudio que se desea realizar en este trabajo.

Existen ejemplos de sistemas dinámicos en donde se pueden calcular las medidas espectrales explícitamente: en [29] se hace para espacios de shift que surgen de substituciones de largo constante, mientras que en [31] se calculan para algunos ejemplos en sistemas de tilings. Trabajo relacionado también se puede encontrar en [3].

Si bien existen ejemplos particulares como los ya descritos, el cálculo de las medidas espectrales en un contexto general es un problema que aún no tiene solución. Es por esto que nace la necesidad de obtener información de estas medidas de forma indirecta. Con esta idea en mente, un aspecto de las medidas espectrales sobre el que se puede indagar es su decaimiento en vecindades de puntos distintos de sus átomos. Ésto se realiza en el

trabajo de Bufetov y Solomyak [7] para sistemas substitutivos uni-dimensionales, inspirado en trabajos de Hof (por ejemplo [17]). Los módulos de continuidad para las medidas espectrales se relacionan íntimamente con el crecimiento de una **suma torcida de Birkhoff**, cuya expresión se encuentra en la Definición 1.8. Así, un primer paso para estudiar los módulos de continuidad de las medidas espectrales es encontrar estimaciones para el comportamiento asintótico de dichas sumas torcidas.

En esta tesis se extiende el trabajo de Bufetov y Solomyak a **sistemas dinámicos de tilings substitutivos** de  $\mathbb{R}^d$ , para  $d \geq 1$ . Una primera extensión de los resultados de [7] en este contexto es la desarrollada en [11]. Aquí se caracteriza el decaimiento de la medida espectral en una vecindad del origen en términos de una medida de Radon en  $\mathbb{R}_+$ . En esta tesis se analiza el problema restante, considerando puntos lejos del origen. En el Teorema 1.15 se presenta un módulo de continuidad para la medida espectral asociada a la indicatriz de un cilindro del sistema substitutivo uni-dimensional (medida de correlación) de tipo log-Hölder. La generalización de este resultado, presentada en el Teorema 3.10, muestra el mismo tipo de módulo de continuidad para la medida espectral asociada a una función que cumple el rol análogo a la indicatriz de un cilindro en el contexto uni-dimensional, que se denomina **medida de correlación**.

Los pasos esenciales para la demostración del Teorema 3.10 son los que aparecen en [7], pero llevados a un contexto de tilings substitutivos de mayor dimensión. Se utiliza una técnica ya usada en [29], que es la de representar las medidas de correlación como un análogo matricial de productos de Riesz, reflejada en la definición de las matrices  $\Pi_n$  y  $\mathcal{M}_n$  en el Capítulo 2. Ésto se ocupa para encontrar estimaciones de las sumas torcidas de Birkhoff, las cuales conllevan a asintóticas para las medidas espectrales debido una relación establecida mediante herramientas de Análisis de Fourier y el Teorema Espectral para flujos de  $\mathbb{R}^d$ . Por último, para encontrar el módulo de continuidad log-Hölder para las medidas de correlación, es necesario resolver un problema de aproximación diofantina para acotar de manera adecuada un término en las cotas encontradas para las sumas torcidas. Ésto se resuelve utilizando un argumento proveniente de la teoría de números de Pisot.

El documento se organiza de la siguiente manera: en el Capítulo 1 se recuerdan conceptos básicos de sistemas dinámicos y de teoría espectral, necesarios para la introducción de las medidas espectrales y las sumas torcidas de Birkhoff. Se sigue con definiciones sobre sistemas substitutivos (simbólicos) uni-dimensionales y con resultados relacionados con los comportamientos asintóticos de sumas de Birkhoff. Finalmente se enuncia el teorema de [7] que se desea generalizar.

En el Capítulo 2 se introducen los sistemas de tilings substitutivos y se comentan resultados clásicos de la literatura que justifican los cálculos posteriores. Además, se vuelven a definir conceptos básicos de teoría ergódica y teoría espectral introducidos en el Capítulo 1 para sistemas provenientes de la acción de  $\mathbb{Z}$ , pues en el caso de los espacios de tilings el sistema será engendrado por la acción de  $\mathbb{R}^d$ . Además, como ya se mencionó, se introducen los productos de Riesz matriciales, indispensables para los cálculos posteriores y los análogos continuos de las sumas torcidas.

Por último, en el Capítulo 3 se realizan las estimaciones de las sumas torcidas de Birkhoff y se demuestra el resultado principal del documento, concerniente al módulo de continuidad

de las medidas de correlación presentado en el Teorema 3.10, siguiendo el argumento descrito antes. La última sección de este capítulo contiene ejemplos de sistemas de tilings donde se puede utilizar el teorema principal.



# Capítulo 1

## Estudio espectral de sistemas substitutivos

Este primer capítulo presenta la teoría básica sobre la cual se desarrolla el trabajo de memoria, además de los motivos por los cuales el estudio realizado es de interés. En primer lugar se presentan de forma breve las principales definiciones sobre sistemas dinámicos, las que pueden encontrarse en cualquier texto sobre el tema (por ejemplo [28]), con énfasis en el estudio espectral de éstos y la definición de las medidas espectrales. A continuación se muestran los sistemas de tipo substitutivo uni-dimensionales, los cuales han sido extensamente estudiados (ver [29], [13]), y en donde se ha tenido cierto éxito en la comprensión de sus medidas espectrales, lo que en el contexto general representa un desafío.

### 1.1. Elementos básicos de teoría espectral de sistemas dinámicos

#### 1.1.1. Sistemas dinámicos abstractos y topológicos

Sea  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  un espacio de probabilidad y  $T : X \rightarrow X$  una aplicación medible. Se dirá que la medida  $\mu$  es **invariante** por  $T$  si para cada  $A \in \mathcal{B}$  se cumple  $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$ . Se llama **sistema dinámico abstracto** (s.d.a.) a la tupla  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ . Se dirá que éste es **invertible** cuando  $T$  es una biyección bi-medible. Por otro lado, si  $X$  es un espacio métrico (e.m.) compacto y  $T$  es una aplicación continua, se dice que el par  $(X, T)$  es un **sistema dinámico topológico** (s.d.t.). En este caso se puede dotar a  $X$  de la tribu boreliana  $\mathcal{B}(X)$  y de una medida boreliana  $\mu$  invariante por  $T$  (cuya existencia es asegurada por el siguiente teorema) a fin de mirar el s.d.t. como un s.d.a.

**Teorema 1.1** (Krylov-Bogolyubov, [27]) *Si  $X$  es e.m. compacto y  $T$  es continua, entonces existe una medida de probabilidad boreliana invariante por  $T$ .*

Nociones clásicas en dinámica que implican comportamientos particulares de los sistemas son las que se recuerdan a continuación.

**Definición 1.2** Sea  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  un s.d.a. Diremos que el sistema es

1. **ergódico** si para cualquier  $A, B$  subconjuntos medibles de  $X$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(A \cap T^{-j}B) - \mu(A)\mu(B) \right| = 0.$$

2. **débilmente mezclador** si para cualquier  $A, B$  subconjuntos medibles de  $X$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |\mu(A \cap T^{-j}B) - \mu(A)\mu(B)| = 0.$$

3. **mezclador** si para cualquier  $A, B$  subconjuntos medibles de  $X$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu(A \cap T^{-n}B) - \mu(A)\mu(B)| = 0.$$

Es claro de la definición que un sistema mezclador es débilmente mezclador, y a su vez uno débilmente mezclador es ergódico. En la literatura existen variados contraejemplos para las recíprocas de esas implicancias en las familias de intercambio de intervalos y traslaciones en grupos compactos respectivamente. La noción de débilmente mezclador está íntimamente relacionada con el espectro del sistema, conceptos que se revisan en la siguiente sección.

Para concluir esta introducción se recuerda a continuación el concepto de conjugación y factor de sistemas.

**Definición 1.3** Sean  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ ,  $(Y, \tilde{\mathcal{B}}, \nu, S)$  dos s.d.a. Se dice que éstos son **conjugados** de existir una aplicación  $\pi : X \rightarrow Y$  bi-medible tal que

$$T \circ \pi = \pi \circ S \text{ y } \pi_*\mu = \nu,$$

donde  $\pi_*\mu$  es el push-forward de la medida  $\mu$  definido por  $\pi_*\mu(E) = \mu(\pi^{-1}(E))$ ,  $\forall E \in \tilde{\mathcal{B}}$ . Análogamente, si  $(X, T)$ ,  $(Y, S)$  son dos s.d.t. y la aplicación  $\pi$  es un homeomorfismo se dice que los sistemas son **topológicamente conjugados**.

Si  $\pi$  sólo es medible y sobreyectiva (resp. continua y sobreyectiva) se dice que  $(Y, \tilde{\mathcal{B}}, \nu, S)$  es un **factor** de  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  (resp.  $(Y, S)$  es **factor topológico** de  $(X, T)$ ).

### 1.1.2. Elementos de teoría espectral de operadores

Sea  $H$  un espacio (complejo) de Hilbert separable con producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ ,  $U : H \rightarrow H$  un operador lineal continuo y  $U^*$  el operador adjunto. Se dice que  $U$  es una **isometría** si  $U^*U = Id_H$  y se dice que es **normal** si  $U^*U = UU^*$ . Un operador que es a la vez una isometría y normal se dice que es **unitario**. En lo que sigue se definirán las medidas espectrales que representan una forma alternativa para estudiar estos operadores. Se usó de referencia [27].



Considere el conjunto de proyecciones del espacio  $H$  denotado por  $\mathcal{P}(H) = \{P : H \rightarrow H \mid P^2 = P \text{ y } P^* = P\}$ . Se dice que la aplicación  $E : B \in \mathcal{B}(\mathbb{C}) \mapsto E(B) \in \mathcal{P}(H)$  es una **medida proyección-valuada**, si  $E(\mathbb{C}) = Id_H$  y se cumple la  $\sigma$ -aditividad: para  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{C})$  disjuntos dos a dos se tiene

$$E\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} E(B_n),$$

donde la última serie se entiende como el límite puntual de las sumas parciales.

Para cada par de elementos  $u, v \in H$ , una medida proyección-valuada da origen a una medida en  $\mathbb{C}$  dada por  $B \mapsto \langle E(B)u, v \rangle_H$ , denominada **medida espectral** asociada a  $u, v$  y denotada por  $\sigma_{u,v}$ . La familia  $(\sigma_{u,v})_{(u,v) \in H \times H}$  se denomina **familia espectral**. Además se denota por  $\sigma_u$  a la medida  $\sigma_{u,u}$ ,  $u \in H$ . El soporte de una medida es el conjunto  $S \subseteq \mathbb{C}$  de los números complejos tales que cualquier vecindad de éstos tiene masa positiva por esta medida. Si cada medida de la familia espectral tiene soporte en  $S \subseteq \mathbb{C}$  compacto, entonces queda bien definida la siguiente aplicación bilineal continua, para cualquier  $\phi \in L^\infty(S)$ :

$$\begin{aligned} B(u, v) &= \int_{\mathbb{C}} \phi(z) d\langle E(z)u, v \rangle_H \\ &= \langle U^\phi u, v \rangle_H, \end{aligned}$$

donde  $U^\phi : H \rightarrow H$  es un operador lineal continuo cuya existencia y unicidad viene del teorema de representación de Riesz y la continuidad de  $B$ . La igualdad anterior para cada  $u, v \in H$  se denota

$$U^\phi = \int_{\mathbb{C}} \phi(z) dE(z).$$

Se demuestra que estos operadores son en efecto unitarios. La pregunta natural es si un operador unitario arbitrario se puede escribir de esta forma o no. El teorema espectral que se enuncia a continuación da una respuesta afirmativa a esta interrogante. Se dice que  $z \in \mathbb{C}$  pertenece al soporte de  $E$  si  $E(V) \neq 0$  (proyección a  $\{0_H\}$ ), para cualquier  $V$  que es vecindad de  $z$ . Se define el **espectro** de un operador lineal continuo  $U : H \rightarrow H$  como el conjunto de los  $\lambda \in \mathbb{C}$  tales que  $\lambda Id_H - U$  no es biyectivo.

**Teorema 1.4 (Espectral, [27])** *Para un operador normal  $U : H \rightarrow H$  existe una única medida proyección-valuada  $E$  tal que  $U = \int_{\mathbb{C}} z dE(z)$ . Además el soporte de esta medida corresponde al espectro de  $U$ . En particular  $U$  es unitario si y sólo si el soporte de  $E$  está contenido en  $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ .*

Trabajando desde el resultado anterior se puede obtener el denominado **Teorema de descomposición espectral**, que establece un isomorfismo isométrico entre un espacio de Hilbert dado y otro canónico construido a partir de un sucesión de medidas espectrales, lo que evidencia la importancia de éstas. Para una demostración de este resultado se puede revisar [29] ó [19].

Un número complejo  $\lambda$  se dice **átomo** de una medida proyección-valuada  $E$  si  $E(\{\lambda\}) \neq 0$ . Si  $E$  está asociada a un operador unitario  $U$  según el Teorema 1.4 entonces los átomos de la medida  $E$  son exactamente los valores propios de  $U$  (ver [27]). Ésto resulta importante

para los análisis de los módulos de continuidad de las medidas espectrales que se harán en el Capítulo 3.

**Ejemplo.** (Ver [27], Apéndice). Sea  $U$  un operador normal de un espacio de Hilbert  $H$  de dimensión finita  $d$ , y sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  los valores propios de  $U$  y  $V_j = \ker(U - \lambda_j Id_H)$  los espacios propios asociados a  $U$ . Estos espacios son ortogonales y generan todo  $H$ . En este caso el operador  $U$  se puede descomponer en términos de cada  $\pi_j$ , la proyección ortogonal sobre  $V_j$ , se escribe como

$$\begin{aligned} U = \sum_{j=1}^n \lambda_j \pi_j &\implies \langle Ux, y \rangle_H = \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle \pi_j x, y \rangle_H \\ \implies \langle Ux, y \rangle_H &= \sum_{j=1}^n \left( \int_{\mathbb{C}} z d\delta_{\lambda_j}(z) \right) \langle \pi_j x, y \rangle_H \\ &= \int_{\mathbb{C}} z d \sum_{j=1}^n \langle \pi_j x, y \rangle_H \delta_{\lambda_j}(z). \end{aligned}$$

Finalmente se define para  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$  la medida proyección-valuada por  $E(B) = \sum_{\lambda_j \in B} \pi_j$ . Se tiene que  $\langle E(B)x, y \rangle_H = \sum_{\lambda_j \in B} \langle \pi_j x, y \rangle_H = \sum_{j=1}^n \langle \pi_j x, y \rangle_H \delta_{\lambda_j}(B)$ . De la unicidad de la medida proyección-valuada se concluye que  $U = \int_{\mathbb{C}} z dE(z)$ .

### 1.1.3. Teoría espectral para un sistema dinámico abstracto

La teoría espectral de un s.d.a.  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  se refiere al estudio espectral del **operador de Koopman**  $U_T : L^2(X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ ,  $U_T(f) = f \circ T$ , donde  $L^2(X, \mathcal{B}, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es } \mathcal{B}\text{-medible y } \int_X |f|^2 d\mu < \infty\}$ . Si el sistema es invertible, se pueden utilizar los resultados de la sección anterior para el espacio  $H = L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$  y el operador  $U = U_T$ , que en este caso resulta ser unitario. En esta sección se analiza la teoría espectral para sistemas dinámicos en que actúa una única transformación (la acción de  $\mathbb{Z}$ ) para contextualizar los resultados de este primer capítulo. Para los capítulos que siguen será necesario generalizar esto a la acción de  $\mathbb{R}^d$  sobre un sistema.

A continuación se enuncian dos resultados clásicos que ejemplifican la importancia que tiene el espectro del operador de Koopman en el estudio de los sistemas dinámicos.

**Teorema 1.5** ([28]) *Sea  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  un s.d.a. invertible.  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  es débilmente mezclador si y sólo si las funciones constantes son los únicos vectores propios del operador de Koopman.*

**Teorema 1.6** ([13], Capítulo 1) *Dos sistemas ergódicos invertibles de espectro puramente discreto idéntico son conjugados, y además son conjugados a una rotación de un grupo compacto abeliano, equipado con su medida de Haar.*

Del primer resultado sigue que si alguna de las medidas de la familia espectral posee un átomo distinto del trivial ubicado en 1, entonces el sistema no puede ser débilmente mezcla-

dor. El segundo indica que el espectro del operador de Koopman es un invariante completo de conjugación para sistemas de espectro puramente discreto, y que además caracteriza la naturaleza de la transformación.

El cálculo de las medidas espectrales en un s.d.a. general es una tarea difícil. Un caso en el que las medidas espectrales han sido calculadas de modo satisfactorio son para sistemas dinámicos substitutivos uni-dimensionales y de largo constante. En el trabajo de M. Queffélec [29] se hacen algunos cálculos explícitos de éstas. En sistemas generales las medidas espectrales se estudian por su comportamiento asintótico, esperando obtener información sobre ellas. El siguiente lema da una primera idea de cómo realizar tal estudio.

Del Teorema 1.4 se tiene que el espectro de  $U_T$  está contenido en  $\mathbb{S}^1$ .  $\mathbb{S}^1$  se identifica con el toro  $\mathbb{T} = [0, 1]/\{0, 1\}$ , i.e. el intervalo  $[0, 1]$  con 0 y 1 identificados. Las medidas espectrales  $\sigma_{f,g}$ , para  $f, g \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ , son el push-forward de medidas en  $\mathbb{T}$  (vía la inversa de  $t \mapsto e^{2\pi it}$ ) que se denotarán de igual forma (haciendo abuso del lenguaje) y son las que se estudiarán en lo que resta del capítulo. Con esta identificación el teorema espectral asegura que para  $f, g \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$  se tiene que

$$\langle U_T^n f, g \rangle_{L^2(X, \mathcal{B}, \mu)} = \int_{\mathbb{S}^1} z^n d\sigma_{f,g}(z) = \int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i n \omega} d\sigma_{f,g}(\omega),$$

la segunda igualdad por el teorema de cambio de variables. En lo que resta del documento se utiliza la notación usual para la aplicación exponencial  $e[\lambda] = e^{-2\pi i \lambda}$  para  $\lambda \in \mathbb{R}$ . También se utiliza la notación  $\mu = e[n\omega]d\omega$  para la medida compleja  $\mu$  definida por  $\mu(A) = \int_A e[n\omega]d\omega$ , para  $A \subseteq \mathbb{T}$  boreliano y  $d\omega$  para la medida de Lebesgue en  $\mathbb{T}$

**Lema 1.7** Sean  $f, g \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ . Se tiene,

$$\sigma_{f,g} = \text{débil}^* - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n,m=0}^{N-1} \langle e[n\omega]U_T^n f, e[m\omega]U_T^m g \rangle_{L^2(X, \mathcal{B}, \mu)} d\omega.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\sigma_{f,g}^N = \frac{1}{N} \sum_{n,m=0}^{N-1} \langle e[n\omega]U_T^n f, e[m\omega]U_T^m g \rangle_{L^2(X, \mathcal{B}, \mu)} d\omega$ . Para comprobar la convergencia débil de  $\sigma_{f,g}^N$  a  $\sigma_{f,g}$  basta chequear que la sucesión de coeficientes de Fourier de las primeras medidas converjan a los de la segunda (Teorema de Fejér, ver [29] ó [16]). Por definición y utilizando el hecho que  $U_T$  es unitario se tiene que

$$\begin{aligned} e[(n-m)\omega] \widehat{\sigma}_{f,g}(m-n) &= e[(n-m)\omega] \langle U_T^{n-m} f, g \rangle_{L^2(X, \mathcal{B}, \mu)} \\ &= \langle e[n\omega]U_T^n f, e[m\omega]U_T^m g \rangle_{L^2(X, \mathcal{B}, \mu)}. \end{aligned}$$

Además, como la familia  $(e[n\cdot])_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{T}, d\omega) = \{h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\mathbb{T}} |h(\omega)|^2 d\omega < \infty\}$ , se tiene que  $(e[\widehat{n\omega}]d\omega)(-k) = \delta_{n,k}$ , que es el delta de Kronecker:  $\delta_{n,k} = 1$  si  $n = k$  y  $\delta_{n,k} = 0$  si  $n \neq k$ . Así,

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_{f,g}^N(k) &= \frac{1}{N} \sum_{n,m=0}^{N-1} (e[(n-m)\omega]d\omega)(k) \widehat{\sigma}_{f,g}(m-n) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-k-1} \widehat{\sigma}_{f,g}(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{N-k}{N} \widehat{\sigma}_{f,g}(k) \\
&\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \widehat{\sigma}_{f,g}(k).
\end{aligned}$$

Por el el Teorema de Féjer se obtiene el resultado.  $\square$

Debido al Lema 1.7 anterior es natural la siguiente definición.

**Definición 1.8** Sea  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  un s.d.a.,  $U_T$  el operador de Koopman asociado y  $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ . Para cada  $x \in X$  y  $\omega \in \mathbb{T}$  se define la **suma torcida de Birkhoff** como

$$S_N^f(x, \omega) = \sum_{n=0}^{N-1} e[n\omega] U_T^n f(x).$$

Además se denota

$$G_N(f, \omega) = \frac{1}{N} \left\langle S_N^f(\cdot, \omega), S_N^f(\cdot, \omega) \right\rangle_{L^2(X, \mathcal{B}, \mu)}.$$

Del Lema 1.7 se deduce que  $G_N(f, \omega) d\omega \xrightarrow{*} \sigma_f$  cuando  $N \rightarrow \infty$ . Una primera observación de esto último es que la medida compleja  $\sigma_f$  es de hecho una medida a valores en  $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ . Una segunda, y más interesante, es que de cierto modo si se es capaz de controlar  $|S_N^f(\cdot, \omega)|$  de manera uniforme en  $x$  entonces se puede manejar el crecimiento de la medida espectral  $\sigma_f$ . Ésto se formaliza con los siguientes resultados que se pueden encontrar en [7] y cuyas demostraciones se adjuntan por completitud.

**Lema 1.9** Sean  $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ ,  $\omega \in \mathbb{T}$  y  $r \in (0, 1/2]$ . Se tiene la estimación siguiente considerando  $N = \lfloor (2r)^{-1} \rfloor$ :

$$\sigma_f(B(\omega, r)) \leq \frac{\pi^2}{4N} G_N(f, \omega),$$

donde  $B(\omega, r)$  es la bola abierta de radio  $r$  centrada en  $\omega \in \mathbb{T}$ .

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned}
G_N(f, \omega) &= \frac{1}{N} \sum_{n,m=0}^{N-1} e[\omega(n-m)] \langle U_T^{n-m} f, f \rangle_{L^2(X, \mathcal{B}, \mu)} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n,m=0}^{N-1} e[\omega(n-m)] \int_{\mathbb{T}} e[-\lambda(n-m)] d\sigma_f(\lambda) \\
&= \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{N} \sum_{n,m=0}^{N-1} a_{n-m} d\sigma_f(\lambda),
\end{aligned}$$

donde  $a_n = e[n(\omega - \lambda)]$ . La suma en el integrando se puede escribir como

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} a_{n-m} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=-n}^n a_m.$$

De identidades clásicas del Análisis de Fourier (ver [16]) se obtiene la siguiente igualdad,

$$\begin{aligned} G_N(f, \omega) &= \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=-n}^n e[m(\omega - \lambda)] d\sigma_f(\lambda) \\ &= \int_{\mathbb{T}} K_{N-1}(\lambda - \omega) d\sigma_f(\lambda), \end{aligned}$$

donde  $K_{N-1}$  es el kernel de Fejér, que viene dado por  $K_{N-1}(y) = \left[ \frac{\text{sen}(N\pi y)}{\sqrt{N}\text{sen}(\pi y)} \right]^2$ . Si  $r$  y  $N$  son como en el enunciado, entonces  $|\omega - \lambda| \leq r$  implica que  $N\pi|\omega - \lambda| \leq \frac{\pi}{2}$ , y entonces, como  $|\text{sen}(x)| \leq |x|$  y  $\frac{2}{\pi}|x| \leq |\text{sen}(x)|$  en el intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , se obtiene  $\frac{4N}{\pi^2} \leq K_{N-1}(\lambda - \omega)$ . Finalmente se obtiene que,

$$\begin{aligned} \sigma_f(B(\omega, r)) &= \int_{B(\omega, r)} d\sigma_f(\lambda) \\ &\leq \int_{B(\omega, r)} \frac{\pi^2}{4N} K_{N-1}(\lambda - \omega) d\sigma_f(\lambda) \\ &\leq \frac{\pi^2}{4N} \int_{\mathbb{T}} K_{N-1}(\lambda - \omega) d\sigma_f(\lambda) \\ &= \frac{\pi^2}{4N} G_N(f, \omega), \end{aligned}$$

lo que prueba el resultado. □

Para expresar la desigualdad anterior sólo en términos de  $r$  se utiliza el siguiente lema.

**Lema 1.10** *Sea  $\Omega : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicación continua no decreciente con  $\Omega(0) = 0$ . Si para  $\omega \in \mathbb{T}$  existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  y una constante  $C > 0$  de modo que para  $N \geq N_0$  se cumple*

$$G_N(f, \omega) \leq CN\Omega(1/N),$$

entonces para todo  $r \leq 1/(2N_0)$

$$\sigma_f(B(\omega, r)) \leq \frac{\pi^2 C}{4} \Omega(3r).$$

DEMOSTRACIÓN. Directa del lema anterior. Sea  $r \leq 1/2N_0 \leq 1/2$  y  $N = \lfloor (2r)^{-1} \rfloor \geq N_0$ . Entonces,  $\sigma_f(B(\omega, r)) \leq \frac{\pi^2}{4N} G_N(f, \omega) \leq \frac{\pi^2 C}{4} \Omega(1/N)$ . Como  $1/N \leq 3r$ , se deduce que  $\sigma_f(B(\omega, r)) \leq \frac{\pi^2 C}{4} \Omega(3r)$ . □

## 1.2. Sistemas substitutivos

### 1.2.1. Substituciones uni-dimensionales

Un primer tipo de sistema dinámico donde se han utilizado las ideas de las secciones anteriores es en los sistemas substitutivos uni-dimensionales que se revisan brevemente a continuación (para una introducción más extensa se puede revisar [13]).

Una **substitución** es un mapeo  $\zeta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^+$ , donde  $\mathcal{A}$  es un conjunto finito denominado **alfabeto** y  $\mathcal{A}^+$  representa el conjunto de palabras finitas no vacías de elementos de  $\mathcal{A}$ . Por concatenación se extiende de manera natural la substitución a  $\mathcal{A}^+$  y de igual forma a  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  (full shift unilateral) ó  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  (full shift bilateral). Por la extensión a  $\mathcal{A}^+$  quedan bien definidos los iterados  $\zeta^n(a) = \zeta(\zeta^{n-1}(a))$ , para  $a \in \mathcal{A}$ .

#### Ejemplos.

1. **Substitución de Fibonacci:**  $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ ,

$$\zeta(0) = 01, \zeta(1) = 0.$$

2. **Substitución de Thue-Morse:**  $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ ,

$$\zeta(0) = 01, \zeta(1) = 10.$$

El **sistema dinámico substitutivo** tiene como espacio de fase al conjunto  $X_\zeta$  de las secuencias  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  (también se puede definir en  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ ) tales que cualquier patrón finito o palabra de  $x$  aparece como patrón finito de un iterado  $\zeta^n(a)$ , para cierto  $a \in \mathcal{A}$  y  $n \in \mathbb{N}$ ; y como transformación al **shift** o **traslación** a la izquierda denotado siempre por  $T$ , i.e.,  $T((x_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = (x_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$ . El espacio  $X_\zeta$  es métrico y compacto, y la transformación  $T$  es un homeomorfismo.

Para cada palabra  $w \in \mathcal{A}^+$  se denota el número de letras de  $w$  por  $|w|$ . Se puede demostrar que si para cada  $a \in \mathcal{A}$  se tiene que  $|\zeta^n(a)|$  tiende a infinito cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces existe  $u \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  y  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\zeta^k(u) = u$  (Proposición 5.1, [29]). Si  $k = 1$  se dice que  $u$  es un **punto fijo** de  $\zeta$ , i.e., que cumple  $u = \zeta(u)$ . La existencia de puntos fijos se puede garantizar si la substitución  $\zeta$  cumple: i) Para cada  $a \in \mathcal{A}$ ,  $|\zeta^n(a)| \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ; y ii) Existen  $a, b \in \mathcal{A}$  tales que  $\zeta(a)$  comienza con la letra  $a$  y  $\zeta(b)$  termina con la letra  $b$ . De ahora en adelante se asume que una substitución satisface i) y ii) de modo que siempre existen puntos fijos para esta. En el siguiente párrafo se establece una caracterización del espacio substitutivo en términos de un punto fijo de la substitución.

Si  $m = \#\mathcal{A}$ , la **matriz de incidencia**  $S_\zeta$  asociada a  $\zeta$  es la matriz de tamaño  $m \times m$  con entradas en  $\mathbb{N}_0$  tal que en la posición  $(i, j)$  va el número de veces que aparece la letra  $i$  como patrón en la palabra  $\zeta(j)$ , número que se denota por  $|\zeta(j)|_i$ . Se dice que una substitución es **primitiva** si existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $S_\zeta^k$  tiene todas sus entradas positivas. Los sistemas substitutivos que surgen de una substitución primitiva poseen varias propiedades deseables para su estudio. Son **minimales**, i.e., la órbita de cualquier  $x \in X_\zeta$ :  $O_T(x) = \{T^n x \mid n \in \mathbb{Z}\}$

es densa en  $X_\zeta$ ; y **únicamente ergódicos**, es decir, existe una única medida invariante por  $T$  (ver [13]). Si  $\zeta$  es primitiva, como se puede asumir sin pérdida de generalidad que  $\zeta$  admite un punto fijo, entonces por la minimalidad se tiene que  $X_\zeta = \overline{O_T(u)}$ .

Sea  $\zeta$  una sustitución primitiva. Que el sistema  $X_\zeta$  tenga infinitos puntos es equivalente a que  $u$ , un punto fijo de  $\zeta$ , no sea **shift-periódico**:  $\exists n \in \mathbb{N}: u = T^n u$ . En tal caso se dirá que la sustitución es **aperiódica**.

**Ejemplo.** Sea  $\zeta$  la sustitución de Fibonacci definida anteriormente. Ella es una sustitución primitiva. En efecto,

$$\mathcal{S}_\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \mathcal{S}_\zeta^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un último hecho que es importante de recordar es el siguiente. Sea  $u$  un punto fijo de una sustitución primitiva  $\zeta$ . El sistema  $(\overline{O_T(u)}, T)$  posee una única medida invariante  $\mu$  definida, para cada cilindro  $[w]_0 = [w_0 \dots w_k]_0$ , por la frecuencia de su aparición como patrón en  $u$ , i.e.,

$$\mu([w]_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(w, u_0 \dots u_{n-1})}{n},$$

donde  $N(w, u_0 \dots u_{n-1})$  denota el número de veces que aparece  $w$  en  $u_0 \dots u_{n-1}$ . Además el vector de coordenadas positivas  $(\mu([a]_0))_{a \in \mathcal{A}}$  es el vector propio de Perron de la matriz  $\mathcal{S}_\zeta$ .

### 1.2.2. Primeras estimaciones para $S_N^f(x, 0)$

Sea  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  un s.d.a. asociado a una sustitución  $\zeta$  primitiva y aperiódica. Sea  $\omega \in \mathbb{T}$  y  $x \in X$ . Estimaciones para  $S_N^f(x, \omega)$  en este contexto pueden encontrarse en el trabajo de Dumont y Thomas [9] en el caso en que  $x$  es un punto fijo para la sustitución y  $\omega = 0$ . El artículo de Adamczewski [1] establece asintóticas ajustadas en este mismo caso, relacionando éstas con la *discrepancia* de los puntos fijos. El siguiente teorema obtenido en [1] resume dichos resultados, pero antes es necesario fijar algo de notación. Para  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  y  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$  se denota por  $f(N) = \mathcal{O}(g(N))$  si existe una constante  $C > 0$ , independiente de  $N$ , y  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall N \geq N_0 \ |f(N)| \leq Cg(N)$ .

Sea  $\mathcal{S}$  una matriz cuadrada primitiva con entradas en  $\mathbb{N}_0$  y  $\Sigma(\mathcal{S}) = \{\theta_1, \dots, \theta_s\}$  su espectro ordenado como se describe a continuación: sean  $\eta_1, \dots, \eta_s$  las multiplicidades de  $\theta_1, \dots, \theta_s$  respectivamente en el polinomio minimal de  $\mathcal{S}$ . Para dos subíndices  $1 \leq i < j \leq s$  se cumple que

1.  $|\theta_i| > |\theta_j|$ , o bien
2.  $|\theta_i| = |\theta_j|$  y  $\eta_i > \eta_j$ , o bien
3.  $|\theta_i| = |\theta_j| = 1$ ,  $\eta_i = \eta_j$ , y  $\theta_j$  no es raíz de la unidad y  $\theta_i$  sí lo es.

Se tiene que  $\theta_1$  es siempre el valor propio de Perron. Con este orden quedan bien definidas las cantidades  $\theta_1, |\theta_2|$  y  $\eta_2$ .

**Teorema 1.11** (Adamczewski B. [1]) Sea  $\zeta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^+$  una substitución primitiva que admite un punto fijo  $u$ . Sean  $\theta_1$  y  $\theta_2$  el primer y segundo valor propio de  $\mathcal{S}_\zeta$  según el orden descrito en el párrafo anterior, y  $\eta_2$  la multiplicidad de  $\theta_2$  en el polinomio minimal de  $\mathcal{S}_\zeta$ . Sea  $\mathcal{C}$  el conjunto de las funciones  $f : X_\zeta \rightarrow \mathbb{C}$  que dependen sólo de la coordenada cero de cada punto y tales que  $\int_{X_\zeta} f d\mu = 0$ , donde  $\mu$  es la única medida invariante del sistema asociado a la substitución. Entonces, para toda función  $f \in \mathcal{C}$ :

- Si  $|\theta_2| < 1$ :  $S_N^f(u, 0) = \mathcal{O}(1)$ .
- Si  $|\theta_2| > 1$ :  $S_N^f(u, 0) = \mathcal{O}\left(\log(N)^{\eta_2-1} N^{\log_{\theta_1}(|\theta_2|)}\right)$ .
- Si  $|\theta_2| = 1$  y  $\theta_2$  no es raíz de la unidad:  $S_N^f(u, 0) = \mathcal{O}(\log(N)^{\eta_2})$ .
- Si  $|\theta_2| = 1$  y  $\theta_2$  es raíz de la unidad:  $S_N^f(u, 0) = \mathcal{O}(\log(N)^{\eta_2})$  ó  $\mathcal{O}(\log(N)^{\eta_2-1})$ .

El último caso del teorema anterior depende fuertemente de los aspectos combinatoriales de la substitución y no únicamente del espectro de la matriz asociada a la substitución, como se verá en los gráficos de las Figuras 1.2 y 1.3 de más adelante.

Siguiendo las mismas líneas del trabajo anterior se pueden obtener algunas de estas estimaciones para puntos arbitrarios del shift y no sólo para un punto fijo, cálculo que se realiza a continuación. Denote  $x_{[0, N-1]} = x_0 \dots x_{N-1}$ , para  $x \in X_\zeta$ . Recuerde además la notación  $|w|_a$ , para  $w \in \mathcal{A}^*$  y  $a \in \mathcal{A}$ , del número de ocurrencias de la letra  $a$  en  $w$ . Para  $f \in \mathcal{C}$  se denotará igualmente por  $f$  al vector en  $\mathbb{C}^m$  (donde  $m = \#\mathcal{A}$ ) dado por  $f(a) = f(x)$  para cualquier  $x$  con  $x_0 = a$ , pues tal  $f$  sólo depende de la coordenada cero del punto  $x$ . En este caso se puede escribir  $S_N^f(x, 0)$  en términos del producto interno usual de  $\mathbb{C}^m$ :

$$\begin{aligned} S_N^f(x, 0) &= \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) \\ &= \langle (|x_{[0, N-1]}|_a)_{a \in \mathcal{A}}, f \rangle \\ &= \sum_{k=0}^n \langle S_\zeta^k(|s_k|_a)_{a \in \mathcal{A}}, f \rangle + \sum_{k=0}^n \langle S_\zeta^k(|p_k|_a)_{a \in \mathcal{A}}, f \rangle, \end{aligned}$$

donde  $s_k, p_k$  son sufijos y prefijos (estrictos) de  $\zeta(a)$  para  $a \in \mathcal{A}$  respectivamente, que vienen dados por la descomposición que resume el siguiente teorema.

**Teorema 1.12** ([9]) Para  $x \in X_\zeta$  y  $N \geq 1$  se tiene la siguiente **descomposición prefijo-sufijo**:

$$x_{[0, N-1]} = s_0 \dots \zeta^n(s_n) \zeta^n(p_n) \dots p_0,$$

para algún  $n \geq 0$ , donde  $p_k$  y  $s_k$ , para  $k = 0, \dots, n$ , son prefijos y sufijos estrictos de las palabras  $\zeta(a)$  para  $a \in \mathcal{A}$  respectivamente, y al menos uno entre  $p_n$  y  $s_n$  es una palabra no vacía. Además  $|n - \frac{\log(N)}{\log(\theta)}| = \mathcal{O}(1)$ , donde  $\theta$  es el valor propio de Perron de  $\mathcal{S}_\zeta$ .

Este tipo de descomposiciones han sido larga y fructíferamente utilizadas en el estudio de la dinámica de los **sistemas minimales de Cantor**, que en particular engloban a los sistemas substitutivos que se han presentado en este trabajo. Para revisar la relación que existe entre estos sistemas se puede revisar [10].



Para continuar con el cálculo anterior, se descomponen los vectores  $(|s_k|_a)_{a \in \mathcal{A}}$ ,  $(|p_k|_a)_{a \in \mathcal{A}}$  en una base de vectores propios generalizados (v.p.g.) de  $\mathcal{S}_\zeta$   $(v_i^{lj})_i^{lj}$ , donde  $v_i^{lj}$  es un v.p.g. asociado al valor propio  $\theta_i$  (ordenados como en el Teorema 1.11), de la  $l$ -ésima cadena en la posición  $j$ . Con esta notación  $l = 1, \dots, l(i)$ , donde  $l(i)$  es el número de cadenas asociadas al  $i$ -ésimo valor propio; y  $j = 1, \dots, r(i, l)$ , donde  $r(i, l)$  es el rango de tal cadena. Algunos hechos del Álgebra Lineal para tener en cuenta:

- $\sum_{l=1}^{l(i)} r(i, l) = \gamma_i =$  multiplicidad de  $\theta_i$  en el polinomio característico de  $\mathcal{S}_\zeta$ ;
- $\max_{1 \leq l \leq l(i)} r(i, l) = \eta_i =$  multiplicidad de  $\theta_i$  en el polinomio minimal de  $\mathcal{S}_\zeta$ .

Se puede descomponer entonces

$$\begin{aligned} (|s_k|_a)_{a \in \mathcal{A}} &= \sum_{i=1}^s \sum_{l=1}^{l(i)} \sum_{j=1}^{r(i,l)} \alpha_{ik}^{lj} v_i^{lj}, \\ (|p_k|_a)_{a \in \mathcal{A}} &= \sum_{i=1}^s \sum_{l=1}^{l(i)} \sum_{j=1}^{r(i,l)} \beta_{ik}^{lj} v_i^{lj}. \end{aligned}$$

Notar que el vector  $f$  (fijado al inicio del cálculo) es ortogonal al único vector propio asociado a  $\theta_1$ , pues se supone que integra nulo respecto a la medida invariante del sistema, cuyos valores en los cilindros en la coordenada cero corresponden al vector propio de Perron como se recalcó anteriormente. Así,

$$S_N^f(x, 0) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=2}^s \sum_{l=1}^{l(i)} \sum_{j=1}^{r(i,l)} (\alpha_{ik}^{lj} + \beta_{ik}^{lj}) \langle v_i^{lj}, f \rangle Q_{ilj}(k) \theta_i^k,$$

donde  $Q_{ilj}(k)$  es un polinomio no nulo de grado  $r(i, l) - j$  proveniente de la acción del bloque de Jordan asociado. Dado que los  $s_k, p_k$  están en un conjunto finito, de la fórmula anterior se deduce sencillamente que,

$$S_N^f(x, 0) = \mathcal{O} \left( \sum_{k=0}^n k^{\eta_2-1} |\theta_2|^k \right).$$

Finalmente, utilizando la estimación en el Teorema 1.12 de que  $|n - \frac{\log(N)}{\log(\theta_1)}| = \mathcal{O}(1)$ , se deduce:

- Si  $|\theta_2| < 1$ , entonces  $|S_N^f(x, 0)| = \mathcal{O}(1)$ ;
- Si  $|\theta_2| = 1$ , entonces  $|S_N^f(x, 0)| = \mathcal{O}((\log(N))^{\eta_2})$ ;
- Si  $|\theta_2| > 1$ , entonces  $|S_N^f(x, 0)| = \mathcal{O}((\log(N))^{\eta_2-1} N^{\log(|\theta_2|)/\log(\theta_1)})$ .

A continuación se presentan algunos ejemplos gráficos de estos comportamientos asintóticos para las sumas de Birkhoff que fueron generados utilizando el software Sage.

**Ejemplo.** Sea  $\zeta$  una substitución en el alfabeto  $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$  definida por

$$\begin{aligned} \zeta(1) &= 13 \\ \zeta(2) &= 13223 \\ \zeta(3) &= 1323 \end{aligned}$$

El segundo valor propio de  $\mathcal{S}_\zeta$  es  $\theta_2 = 1$ . Un vector ortogonal al vector propio de Perron de la matriz de incidencia de esta sustitución es  $f = (1, -1, 0)^T$ . De esta forma tenemos que para cualquier  $x \in X_\zeta$ ,  $S_N^f(x, 0) \leq C \log(N)$ . Esto se grafica en la Figura 1.1, calculando la suma para el único punto fijo de  $\zeta$ ,  $u$ , cuyas coordenadas no negativas provienen de iterar la letra 1 una infinidad de veces por  $\zeta$ .

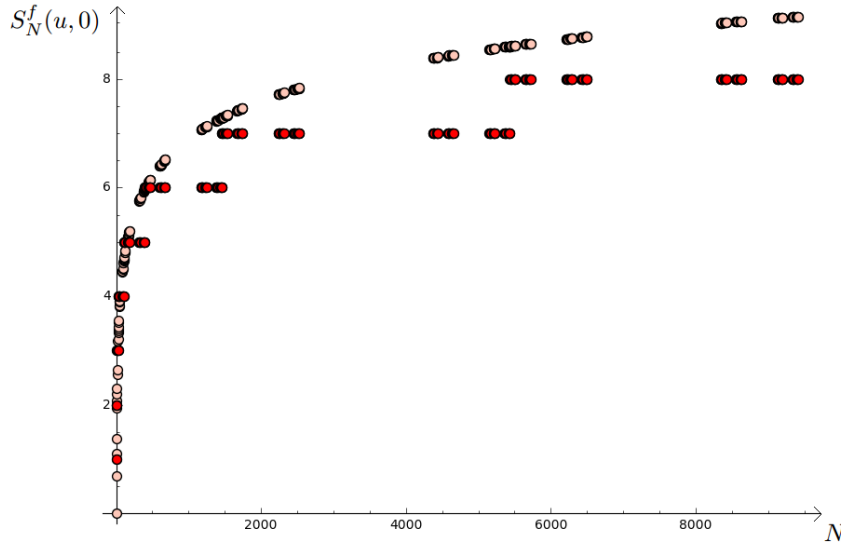


Figura 1.1: Gráfico de  $N$  vs.  $S_N^f(u, 0)$ . En rojo: máximos para la suma de Birkhoff  $S_N^f(u, 0)$  en el punto fijo de la sustitución  $\zeta$ . En gris: valores de  $\log(N)$ .

**Ejemplo.** Como se había anticipado a continuación del Teorema 1.11, en ciertos ejemplos el comportamiento de las sumas de Birkhoff depende fuertemente del orden de las letras en la sustitución y no sólo de la matriz de incidencia. En efecto, se considera una variante de la sustitución del ejemplo anterior  $\tilde{\zeta}$ , definida por

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}(1) &= 13 \\ \tilde{\zeta}(2) &= 33212 \\ \tilde{\zeta}(3) &= 2133\end{aligned}$$

Obviamente como sólo se cambió el orden en que aparecen las letras del alfabeto en la imagen de la sustitución  $\zeta$ , se tiene que sus matrices de incidencia coinciden. Pero en este caso, para punto fijo,  $\tilde{u}$ , proveniente de iterar una infinidad de veces la letra 1 por  $\tilde{\zeta}$ , se tiene que la suma  $S_N^f(\tilde{u}, 0)$  es acotada para cualquier  $f$  en el ortogonal del vector propio de Perron de  $\mathcal{S}_{\tilde{\zeta}}$ . En efecto, si  $\tau$  es dicho vector, entonces una base de  $\langle \{\tau\}^\perp$  viene dada por los vectores

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tau(1)/(\tau(1) - 1) \\ \tau(1)/(\tau(1) - 1) \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} \tau(2)/(\tau(2) - 1) \\ 1 \\ \tau(2)/(\tau(2) - 1) \end{pmatrix}.$$

Las Figuras 1.2 y 1.3 muestran los comportamientos de las sumas de Birkhoff para estos vectores.

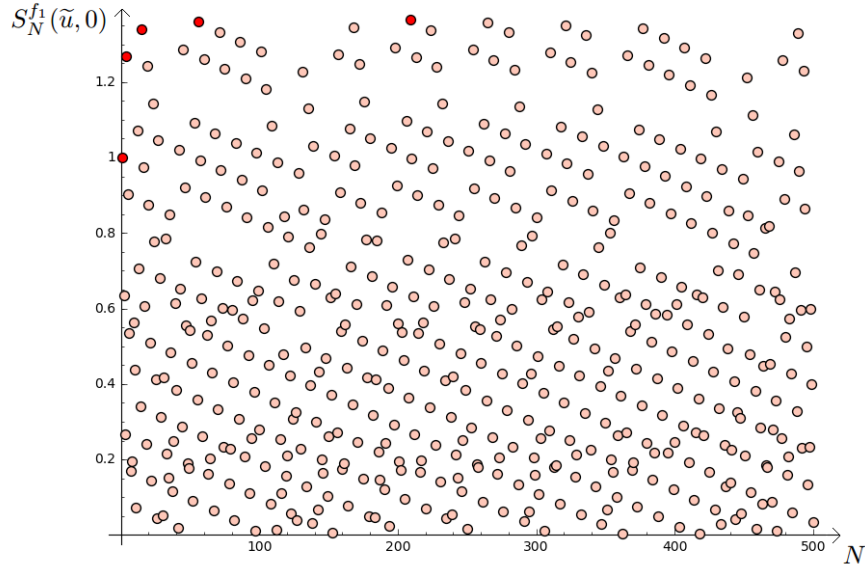


Figura 1.2: Gráfico de  $N$  vs.  $S_N^{f_1}(\tilde{u}, 0)$ . En rojo: máximos para la suma de Birkhoff  $S_N^{f_1}(\tilde{u}, 0)$  en el punto fijo de la sustitución  $\zeta$ . En gris: valores de  $\log(N)$ .

Para terminar esta sección se utilizan las estimaciones encontradas después del Teorema 1.11 para analizar las respectivas medidas espectrales. Sea  $f \in \mathcal{C}$  definida como en el Teorema 1.11. Los comportamientos asintóticos encontrados para  $S_N^f(x, 0)$  son uniformes en  $x \in X_\zeta$ , por lo cual se puede estimar  $G_N(f, 0)$  y utilizar el Lema 1.10:

$$\text{Si } |\theta_2| = 1, \text{ entonces } G_N(f, 0) < CN \frac{(\log(N))^{2\eta_2}}{N^2}.$$

$$\Omega(r) = r^2(\log(1/r))^{2\eta_2}.$$

$$\text{Si } |\theta_2| > 1, \text{ entonces } G_N(f, 0) < CN(\log(N))^{2(\eta_2-1)} N^{2(\log_{\theta_1}(|\theta_2|)-1)}.$$

$$\Omega(r) = (\log(1/r))^{2(\eta_2-1)} r^{2(1-\log_{\theta_1}(|\theta_2|))}.$$

Con estos cálculos se ha demostrado el siguiente corolario.

**Corolario 1.13** *Bajo las condiciones del Teorema 1.11 se obtienen las siguientes estimaciones:*

- Si  $|\theta_2| = 1$ , entonces  $\sigma_f(B(0, r)) = \mathcal{O}(r^2(\log(1/r))^{2\eta_2})$ .
- Si  $|\theta_2| > 1$ , entonces  $\sigma_f(B(0, r)) = \mathcal{O}\left((\log(1/r))^{2(\eta_2-1)} r^{2(1-\log_{\theta_1}(|\theta_2|))}\right)$ .

**Observación.** El caso Pisot, i.e.  $|\theta_2| < 1$ , no presenta este tipo de decaimientos para la medida espectral de la bola abierta  $B(0, r)$ , pues en tal caso el sistema tiene espectro puntual denso (ver [8]).

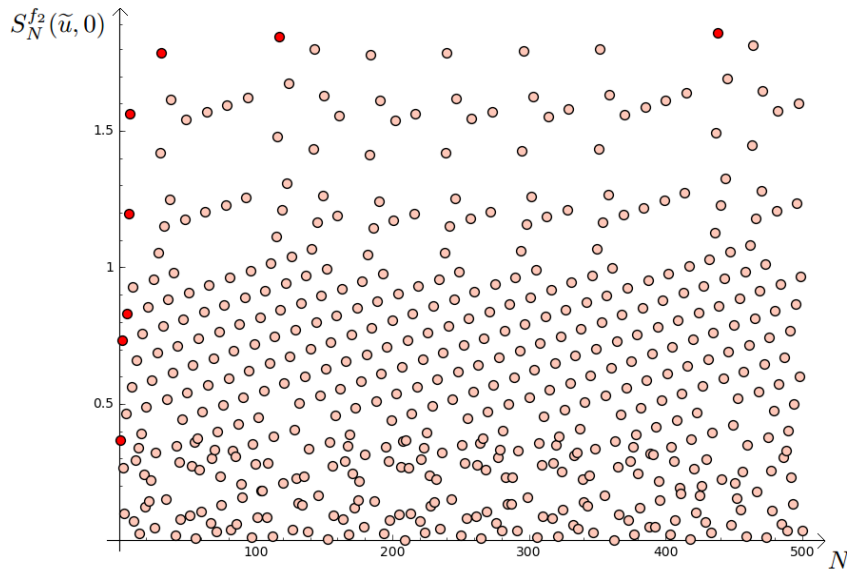


Figura 1.3: Gráfico de  $N$  vs.  $S_N^f(\tilde{u}, 0)$ . En rojo: máximos para la suma de Birkhoff  $S_N^f(\tilde{u}, 0)$  en el punto fijo de la sustitución  $\zeta$ . En gris: valores de  $\log(N)$ .

### 1.2.3. Estimaciones para $\omega \neq 0$

Recientemente se han encontrado estimaciones para  $\omega$ 's distintos de cero. En el trabajo de Bufetov y Solomyak [7] se estiman las sumas torcidas utilizando productos de Riesz matriciales, que terminan reduciéndose a productos de Riesz usuales. Esta técnica se utiliza para obtener la siguiente estimación de la suma torcida,

**Teorema 1.14** (*A. I. Bufetov y B. Solomyak [7]*) Sea  $\zeta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^+$  una sustitución primitiva y aperiódica, y  $\theta$  el valor propio de Perron de  $\mathcal{S}_\zeta$ . Suponga que existe  $v \in \mathcal{A}^+$  una palabra comenzando con la letra  $c \in \mathcal{A}$  y tal que para cada  $a \in \mathcal{A}$  se puede escribir  $\zeta(a) = p_a v c q_a$ , para ciertas palabras  $p_a$  y  $s_a$  en el alfabeto  $\mathcal{A}$  (posiblemente vacías). Sea  $f$  la función indicatriz del cilindro  $[a]_0$ ,  $a \in \mathcal{A}$ . Entonces, para cualesquiera  $a \in \mathcal{A}$ ,  $x \in X_\zeta$  y  $\omega \in \mathbb{T}$  existen constantes  $C_1, C_2 > 0$  y  $\lambda \in (0, 1)$ , sólo dependiendo de la sustitución  $\zeta$ , tales que

$$|S_N^f(x, \omega)| \leq C_1 N \prod_{j=0}^{\lfloor \log_\theta(N) - C_2 \rfloor} 1 - \lambda \|\omega | \zeta^j(v) \|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}^2,$$

donde  $\|y\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$  denota la distancia de  $y \in \mathbb{R}$  al entero más cercano.

De hecho en este artículo realizan dichos cálculos (para un análogo continuo de la suma torcida) en flujos de suspensión sobre sistemas substitutivos uni-dimensionales, y encuentran cotas de tipo Hölder uniformes para las medidas espectrales de éstos en casi todo flujo, en el sentido de las posibles configuraciones de los flujos de suspensión que consideran, ó desde el punto de vista de *tilings* de  $\mathbb{R}$ , de las dimensiones de los *tiles*. Estos conceptos son parte del siguiente capítulo.

Además de necesitar otra noción de suma torcida, es necesario generalizar la teoría espectral expuesta en este capítulo para hacer sentido las medidas espectrales en el contexto

de flujos. Cuando sólo existe una transformación invertible  $T : X \rightarrow X$  se puede considerar esta como la acción de  $\mathbb{Z}$  sobre un espacio  $X$ . Un flujo (uni-dimensional) es una familia de transformaciones  $(h_t)_{t \in \mathbb{R}}$ , con  $h_t : X \rightarrow X$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ . Se puede pensar en esta familia como la acción de  $\mathbb{R}$  sobre  $X$ . La teoría general se puede revisar en [19], y parte será expuesta en el siguiente capítulo en el caso de la acción de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ . En particular se tiene que las medidas espectrales, para el caso de flujos uni-dimensionales, tienen su soporte en  $\mathbb{R}$  y no en  $\mathbb{T}$  como en el caso de la acción de  $\mathbb{Z}$ .

Para enunciar el teorema de [7] respecto al módulo de continuidad de las medidas espectrales, se definen de forma breve los flujos de suspensión sobre sistemas substitutivos a continuación. Considere un vector de entradas positivas  $s = (s_1, \dots, s_m)$ , indexado por el alfabeto  $\mathcal{A}$  de una substitución  $\zeta$ . Sea  $(X_\zeta, T)$  el sistema substitutivo asociado a la substitución  $\zeta$  y considere la función  $F : X_\zeta \times \mathbb{R} \rightarrow X_\zeta \times \mathbb{R}$  definida por  $F((x, t)) = (T(x), t - s_{x_0})$ . El **flujo de suspensión** es el par  $(\mathfrak{X}_\zeta^s, (h_t)_{t \in \mathbb{R}})$  dado por el espacio de fase  $\mathfrak{X}_\zeta^s$  y el flujo  $(h_t)_{t \in \mathbb{R}}$  definidos por

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_\zeta^s &= (X_\zeta \times \mathbb{R}) / \sim, \\ h_t(x, t') &= (x, t' + t) \pmod{\sim}, \end{aligned}$$

donde  $\sim$  es la relación de equivalencia dada por  $(x, t) \sim (x', t')$  si y solamente si existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $F^n((x, t)) = (x', t')$ . Se puede identificar cada punto de  $\mathfrak{X}_\zeta^s$  con un cubrimiento de  $\mathbb{R}$  con intervalos de largo  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Finalmente considere el subconjunto de  $\mathfrak{X}_\zeta^s$  dado por  $\mathfrak{X}_a^s = \{(x, t) \in \mathfrak{X}_\zeta^s \mid x_0 = a \text{ y } 0 \leq t \leq s_{x_0}\}$ , para  $a \in \mathcal{A}$ . Sin entrar en mayores detalles sobre estos sistemas (que se estudiarán en mayor generalidad en el siguiente capítulo), se enuncia a continuación uno de los resultados principales de [7].

**Teorema 1.15** (*A. I. Bufetov y B. Solomyak [7]*) *Sea  $\zeta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^+$  una substitución primitiva y aperiódica. Asuma que el valor propio de Perron de la matriz de incidencia de  $\zeta$  admite un conjugado de Galois fuera del círculo unitario. Sea  $(\mathfrak{X}_\zeta^s, h_t)$  el flujo de suspensión auto-similar sobre el sistema substitutivo  $(X_\zeta, T)$ , i.e., tomando  $s$  un vector propio de Perron de la matriz  $\mathcal{S}_\zeta$ , y  $\sigma_a$  la medida espectral (en  $\mathbb{R}$ ) asociada a la función  $\mathbf{1}_{\mathfrak{X}_a^s}$ , para  $a \in \mathcal{A}$ . Entonces, existe  $\gamma > 0$  tal que para cualquier  $B > 1$  existen  $C_B, r(B) > 0$  tales que*

$$\sigma_a(B(\omega, r)) \leq C_B \log(1/r)^{-\gamma},$$

para todo  $0 < r \leq r(B)$ ,  $a \in \mathcal{A}$  y  $B^{-1} \leq |\omega| \leq B$ .

En el siguiente capítulo se introducen los conceptos básicos de sistemas de tilings de  $\mathbb{R}^d$  (que generalizan los flujos de suspensión) y se desarrollan las construcciones necesarias para obtener en el Capítulo 3 una generalización del teorema anterior en el contexto de tilings substitutivos de  $\mathbb{R}^d$ , que es el resultado principal de este documento. Claramente para hacer esto también es necesario estudiar la teoría espectral de los sistemas para acciones de  $\mathbb{R}^d$ .



# Capítulo 2

## Sistemas dinámicos de tilings

En este capítulo se resumen definiciones y resultados básicos de tilings del espacio euclideo y de los sistemas dinámicos asociados a éstos. Luego se enfoca la atención en los sistemas de tilings que emergen de una substitución. Finalmente se introducen construcciones análogas a las de [7] que servirán para generalizar en este contexto más general el Teorema 1.15 en el capítulo siguiente. Para una introducción más extensa se puede revisar por ejemplo [18] ó [14].

### 2.1. Tilings del espacio euclideo

#### 2.1.1. Definiciones básicas

Se llama **tile** (de  $\mathbb{R}^d$ ) a una tupla  $T = (supp(T), punc(T))$  donde:  $supp(T)$  se denomina **soporte** de  $T$  y es un subconjunto de  $\mathbb{R}^d$  compacto e igual a la clausura de su interior, es decir,  $\overline{int(supp(T))} = supp(T)$ ; y  $punc(T)$  es un punto del interior de  $T$  al que se le dice **marca** del tile. En el caso que fuese necesario diferenciar tiles de igual soporte y marca, se puede agregar un *tipo* a cada tile, pero por simpleza de la notación no se hará tal distinción aquí.

Un **patch**  $\mathbf{P}$  es un conjunto finito de tiles cuyos interiores son disjuntos dos a dos. Su soporte se define como  $supp(\mathbf{P}) = \bigcup_{T \in \mathbf{P}} supp(T)$ . Se define el **trasladado** de un tile  $T$  por un vector  $x \in \mathbb{R}^d$  como el tile  $T + x = (supp(T) + x, punc(T) + x)$ . Para un patch  $\mathbf{P}$ , su trasladado viene dado por  $\mathbf{P} + x = \{T + x | T \in \mathbf{P}\}$ . Dos patches  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$  se dicen **equivalentes** si existe  $x \in \mathbb{R}^d$  tal que  $\mathbf{P} + x = \mathbf{Q}$ , y se denota por  $\mathbf{P} \cong \mathbf{Q}$ .

Un **tiling**  $\mathbf{X}$  (de  $\mathbb{R}^d$ ) es un conjunto (infinito) de tiles tales que  $\mathbb{R}^d = \bigcup_{T \in \mathbf{X}} supp(T)$  y cada subconjunto finito de  $\mathbf{X}$  forma un patch (**sub-patch** ó **factor**). Se denota por  $\mathcal{P}_{\mathbf{X}}$  al conjunto de todos los sub-patches de un tiling  $\mathbf{X}$ .

Para los fines de este trabajo sólo interesarán los tilings que cubren el espacio euclideo

$\mathbb{R}^d$  con trasladados de un conjunto finito de tiles. Sean  $T_1, \dots, T_m$  tiles no equivalentes dos a dos. Se dice que el conjunto  $\mathcal{A} = \{T_1, \dots, T_m\}$  es un **alfabeto** y a sus elementos se les llama **prototiles**. Denote por  $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$  el conjunto de todos los patches formados únicamente por trasladados de los prototiles en  $\mathcal{A}$ .

**Ejemplo.** El **tiling de Penrose** es un ejemplo de tiling *aperiódico* (ver definición más abajo) cuyos prototiles vienen dados por los rombos en colores y sus (finitas) rotaciones: aquellas tales que los ángulos que forman las aristas de los rombos tengan ángulo  $2\pi n/10$ ,  $n = 0, \dots, 9$ . En particular  $\#\mathcal{A} = 20$ . En la Figura 2.1 se muestra un patch correspondiente a este tiling.

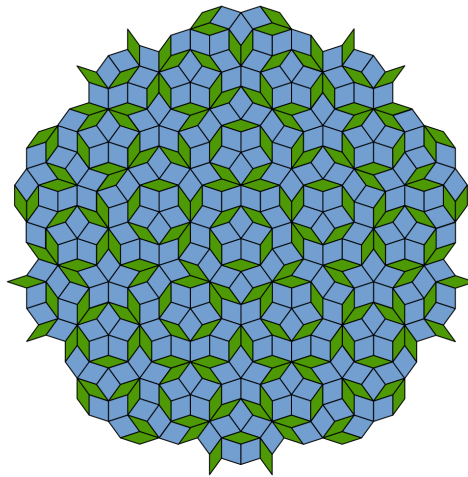


Figura 2.1: Patch correspondiente al tiling de Penrose. Figura obtenida de [https://en.wikipedia.org/wiki/Penrose\\_tiling](https://en.wikipedia.org/wiki/Penrose_tiling).

### 2.1.2. Espacios de tilings

Como se remarcó en la sección anterior, sólo serán de interés para este trabajo los tilings que se componen de traslaciones de un conjunto fijo de prototiles  $\mathcal{A} = \{T_1, \dots, T_m\}$ . Fijado tal conjunto, se puede definir el **full-tiling**  $\mathfrak{T}_{\mathcal{A}} = \{\mathbf{X} = \{X_i\}_{i \geq 1} \text{ tiling} \mid \forall i \geq 1, X_i \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}\}$ . Se dota a este espacio con la siguiente métrica. Para un conjunto acotado  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  y un tiling  $\mathbf{X}$  se denota por  $]K[\mathbf{X}$  al conjunto  $\{T \in \mathbf{X} \mid \text{supp}(T) \subseteq K\}$ . Se define la métrica  $\text{Dist} : \mathfrak{T}_{\mathcal{A}} \times \mathfrak{T}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\text{Dist}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \min \left( D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), 1/\sqrt{2} \right),$$

$$D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 \mid \exists x \in B(0, \varepsilon) : ]B(0, 1/\varepsilon)[\mathbf{X} = ]B(0, 1/\varepsilon)[\mathbf{Y} + x \right\}.$$

En términos simples la métrica anterior considera cercanos dos tiling que coinciden en una bola de radio grande después de una pequeña traslación. Se comprueba a continuación la desigualdad triangular. Sean  $0 < a' = D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq D(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = b'$  y suponga  $a' + b' < 1/\sqrt{2}$ , pues en otro caso se obtiene el resultado trivialmente. Falta ver que  $D(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) \leq a + b$ . Para



esto se eligen  $0 < \varepsilon < 1/\sqrt{2} - a' - b'$ ,  $a = a' + \varepsilon/2$  y  $b = b' + \varepsilon/2$ . Por definición de  $D$  se tiene que

$$\begin{aligned} ]B(0, 1/a)[^{\mathbf{X}} &= ]B(0, 1/a)[^{\mathbf{Y}} + t_a, |t_a| < a, \\ ]B(0, 1/b)[^{\mathbf{Y}} &= ]B(0, 1/b)[^{\mathbf{Z}} + t_b, |t_b| < b. \end{aligned}$$

Sea  $c = a + b$ . Como  $1/b < 1/a$ , entonces  $]B(0, 1/a)[^{\mathbf{Y}} \cap ]B(0, 1/b)[^{\mathbf{Y}} = ]B(0, 1/b)[^{\mathbf{X}}$ . Combinando ésto con las igualdades anteriores se concluye que  $]B(0, 1/c)[^{\mathbf{X}} = ]B(0, 1/c)[^{\mathbf{Z}} + t_a + t_b$  y  $|t_a + t_b| < c$ . En consecuencia,  $D(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) \leq c = D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + D(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + \varepsilon$ . Como  $\varepsilon$  es arbitrario se concluye.

Esta métrica no hace necesariamente a  $\mathfrak{T}_{\mathcal{A}}$  un espacio compacto (algo deseable para utilizar resultados clásicos de dinámica topológica). Para ésto es necesario una hipótesis adicional sobre los tilings. Se dice que un tiling  $\mathbf{X}$  tiene **complejidad local finita (c.l.f.)** si la cantidad de sub-patches de  $\mathbf{X}$  formados únicamente por dos tiles es finita salvo traslación. A menos que se haga expreso lo contrario, siempre se asumirá que todos los tiling de  $\mathfrak{T}_{\mathcal{A}}$  tienen c.l.f.. Con esta última suposición se obtiene la compacidad.

**Teorema 2.1** ([18]) *Si  $\mathfrak{T}_{\mathcal{A}}$  es tal que sus tilings tienen c.l.f., entonces la métrica  $Dist$  hace al full-tiling un espacio métrico compacto. Además la acción de  $\mathbb{R}^d$  sobre  $\mathfrak{T}_{\mathcal{A}}$  dada por  $\Gamma : \mathbb{R}^d \times \mathfrak{T}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathfrak{T}_{\mathcal{A}}, (s, \mathbf{X}) \mapsto \mathbf{X} - s$ , es continua.*

Una manera usual de asegurar esta condición cuando se trabaja con tiles poligonales es la de exigir que los tiles se intersecten cara a cara. Una noción más fuerte es la siguiente. Un tiling  $\mathbf{X}$  se dice **repetitivo** si para cada  $R > 0$  existe  $M > 0$  tal que para cualquier  $x \in \mathbb{R}^d$  se tiene que  $]B(x, M)[^{\mathbf{X}}$  contiene un trasladado de cualquier patch de la forma  $]B(y, R)[^{\mathbf{X}}$ , para  $y \in \mathbb{R}^d$ . Esta definición tendrá consecuencias en la dinámica (dada por la acción  $\Gamma$ ) de los sistemas que se revisarán más adelante.

**Ejemplo.** En la Figura 2.2 se muestra un patch de un tiling de  $\mathbb{R}^2$  hecho con traslaciones del cuadrado unitario  $[0, 1]^2$ . Entre cada fila existe un desplazamiento irracional entre las caras de los cuadrados. Es claro que ésto genera un tiling sin la propiedad de c.l.f.

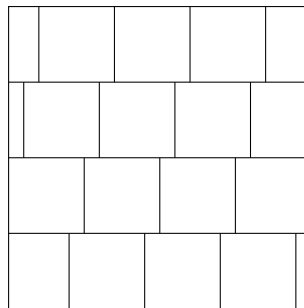


Figura 2.2: Tiling de  $\mathbb{R}^2$  sin complejidad local finita.

Una última noción que se va a exponer es la de periodicidad de los tilings. El **grupo de simetría** de un tiling  $\mathbf{X}$  es el conjunto de **periodos**  $\Lambda_{\mathbf{X}} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{X} + x = \mathbf{X}\}$ . En el caso particular en que  $\Lambda_{\mathbf{X}} = \{0\}$  se dice que  $\mathbf{X}$  es un tiling **aperiódico**. Esta propiedad

de los tilings se volverá esencial en las secciones siguientes, ésto debido al resultado en [32] que se utilizará más abajo, y que permite usar un análogo a la descomposición prefijo-sufijo (Teorema 1.12) usada en el capítulo anterior, ahora en el contexto de tilings substitutivos.

### 2.1.3. Sistemas dinámicos de tilings

Se denomina **traslación** a la acción de  $\mathbb{R}^d$  sobre  $\mathfrak{T}_{\mathcal{A}}$  dada por  $\Gamma : \mathbb{R}^d \times \mathfrak{T}_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathfrak{T}_{\mathcal{A}}$  y que se define por  $\Gamma(s, \mathbf{X}) = \mathbf{X} - s$ . Sea  $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{T}_{\mathcal{A}}$   $\Gamma$ -**invariante** (i.e.,  $\forall s \in \mathbb{R}^d \Gamma(s, \mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{X}$ ). Una medida de probabilidad  $\mu$  en  $\mathfrak{X}$  (endosado con la  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$ ) se dice **invariante** (ó  $\Gamma$ -invariante) si  $\forall s \in \mathbb{R}^d$  y  $B \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$  se cumple que  $\mu(\Gamma(s, B)) = \mu(B)$ . Se dice que la tupla  $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}(\mathfrak{X}), \Gamma, \mu)$  es un **sistema dinámico de tiling** si  $\mu$  es invariante. Al igual que en el capítulo anterior si no existe confusión también se puede denotar este sistema por  $(\mathfrak{X}, \Gamma)$ . Una sistema dinámico  $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}(\mathfrak{X}), \Gamma, \mu)$  se dice **ergódico** si para cualquier  $B \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$  que satisface  $\mu(\Gamma(s, B)) = \mu(B) \forall s \in \mathbb{R}^d$  implica que  $\mu(B) = 0$  ó  $\mu(B) = 1$ . Si existe una única medida invariante para el sistema este se dice **únicamente ergódico**.

Una función  $f \in L^2(\mathfrak{X}, \mathcal{B}(\mathfrak{X}), \mu)$  se dice que es una **función propia** si cumple que existe  $\gamma \in \mathbb{R}^d$  tal que para todo  $s \in \mathbb{R}^d$

$$f(\Gamma(s, \mathbf{X})) = e^{2\pi i \langle s, \gamma \rangle} f(\mathbf{X}) \quad \mu\text{-c.t.p. } \mathbf{X} \in \mathfrak{X}.$$

En tal caso se dice que  $\gamma$  es un **valor propio** del sistema  $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}(\mathfrak{X}), \Gamma, \mu)$ . Si las únicas funciones propias son las constantes, se dice que el sistema es **débilmente mezclador**. También se dice que el sistema  $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}(\mathfrak{X}), \Gamma, \mu)$  es **mezclador** si para cualesquiera  $A, B \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$  se cumple que

$$\lim_{\|s\| \rightarrow \infty} \mu(A \cap \Gamma(s, B)) = \mu(A)\mu(B).$$

Se define la **órbita** por  $\Gamma$  de un tiling  $\mathbf{X}$  como el conjunto  $O_{\Gamma}(\mathbf{X}) = \{\Gamma(s, \mathbf{X}) \in \mathfrak{T}_{\mathcal{A}} \mid s \in \mathbb{R}^d\}$ . Se dice que un sistema dinámico  $(\mathfrak{X}, \Gamma)$  es **minimal** si la órbita de cada  $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}$  es densa en  $\mathfrak{X}$ . A continuación se enuncian sin demostración dos resultados que revelan cómo influyen las nociones de aperiodicidad y repetitividad de un tiling  $\mathbf{X}$  en el sistema dinámico que engendra  $(\overline{O_{\Gamma}(\mathbf{X})}, \Gamma)$ .

**Teorema 2.2** ([18]) *Sea  $\mathbf{X}$  un tiling con complejidad local finita. Entonces*

$$(\overline{O_{\Gamma}(\mathbf{X})}, \Gamma) \text{ es minimal} \iff \mathbf{X} \text{ es repetitivo.}$$

**Teorema 2.3** ([20]) *Sea  $\mathbf{X}$  un tiling repetitivo. Entonces*

$$\mathbf{Y} \in \overline{O_{\Gamma}(\mathbf{X})} \text{ es aperiódico} \iff \mathbf{X} \text{ es aperiódico.}$$

Estas propiedades básicas serán satisfechas por los sistemas de tilings de tipo substitutivo que se introducen en la siguiente sección y que son para este trabajo los de principal interés. Una última observación es que en los sistemas de tilings aperiódicos y repetitivos se puede construir un **sistema de torres**, que es una generalización de la construcción de **torres de Kakutani-Rokhlin** para los sistemas minimales de Cantor [2]. Como corolario de esta construcción también se obtiene en dicho artículo el siguiente resultado.

**Teorema 2.4** ([2]) Sea  $(\overline{O_\Gamma(\mathbf{X})}, \Gamma)$  el sistema asociado a la órbita de un tiling aperiódico y linealmente repetitivo  $\mathbf{X}$ , i.e., la constante  $M = M(R)$  en la definición de tiling repetitivo satisface  $M(R) \leq LR$ , para alguna constante  $L > 0$  que no depende de  $R$ . Entonces  $(\overline{O_\Gamma(\mathbf{X})}, \Gamma)$  es únicamente ergódico, con su única medida invariante definida por las frecuencias de los patches.

## 2.1.4. Tilings substitutivos y sistemas dinámicos asociados

Sea  $L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  una aplicación lineal **expansiva**, i.e., todos los valores propios de  $L$  yacen fuera del disco unitario. Se dice que  $L$  es una **dilatación** si  $L(x) = \lambda x$ , para una constante  $\lambda > 1$ . Sea además  $\mathcal{A} = \{T_1, \dots, T_m\}$  un alfabeto en el sentido de tilings que se fija durante el resto de esta sección. A continuación se define una substitución en el contexto de tilings.

**Definición 2.5** Sean  $L$  expansiva y  $\mathcal{A}$  un alfabeto como antes. Una **substitución** con expansión  $L$  sobre el alfabeto  $\mathcal{A}$  es una aplicación  $\zeta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}_\mathcal{A}$ , que satisface  $\text{supp}(\zeta(T)) = L(\text{supp}(T))$ . En palabras simples, la imagen por  $L$  del soporte de un tile forma un patch con trasladados de los prototiles.

Se extiende la definición de la substitución  $\zeta$  a tiles que son trasladados de los prototiles por  $\zeta(T_j + x) = \zeta(T_j) + L(x)$ ,  $T_j \in \mathcal{A}$ . Esto también permite extender la definición a patches y tilings por  $\zeta(\mathbf{P}) = \bigcup_{T \in \mathbf{P}} \zeta(T)$  y  $\zeta(\mathbf{X}) = \bigcup_{T \in \mathbf{X}} \zeta(T)$  respectivamente. En particular quedan bien definidas las potencias de  $\zeta$ ,  $\zeta^n = \zeta \circ \dots \circ \zeta$ .

Una substitución  $\zeta$  con expansión  $L$  se puede interpretar como la composición entre la expansión  $L$  y una descomposición como se define a continuación. Considere el conjunto  $L^{-1}\mathcal{A} = \{L^{-1}T_1, \dots, L^{-1}T_m\}$ , donde  $L^{-1}T_j = (L^{-1}(\text{supp}(T_j)), L^{-1}(\text{punc}(T_j)))$ ,  $T_j \in \mathcal{A}$ . Es sencillo demostrar que  $L^{-1}\mathcal{A}$  es también un alfabeto en el sentido de tilings. Una aplicación  $C : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}_{L^{-1}\mathcal{A}}$  se dice una **descomposición** (perfecta) si satisface que para cualquier  $T_j \in \mathcal{A}$

$$\text{supp}(C(T_j)) = \text{supp}(T_j).$$

Así, abusando de la notación, se puede escribir  $\zeta = LC = L \circ C$ . Cabe mencionar que descomposiciones no perfectas también dan origen a substituciones (ver [18]). Un tiling  $\mathbf{X}$  se dice **auto-afín** si  $\mathbf{X} = \zeta(\mathbf{X})$  y **auto-similar** si además  $L$  es una dilatación. Se dirá que la substitución  $\zeta$  es auto-afín/auto-similar si  $\zeta$  admite un tiling auto-afín/auto-similar.

**Ejemplo.** El **Chair tiling** es un ejemplo de tiling (aperiódico) proveniente de una substitución (en este documento no se adentrará en las consideraciones técnicas para la existencia de tilings provenientes de substituciones, para aquello revisar [18]). La transformación expansiva en este caso es  $Lx = 2x$ , y la substitución  $\zeta = LC$  en cada prototile se representa en la Figura 2.3 (análogo en el resto de los prototiles dados por las rotaciones en  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$  y  $\frac{3\pi}{2}$ ).

**Ejemplo.** Una variación del tiling de Penrose es el **tiling de Penrose triangular** introducido por Raphael Robinson. El alfabeto consiste de 40 prototiles dado por las 10 rotaciones

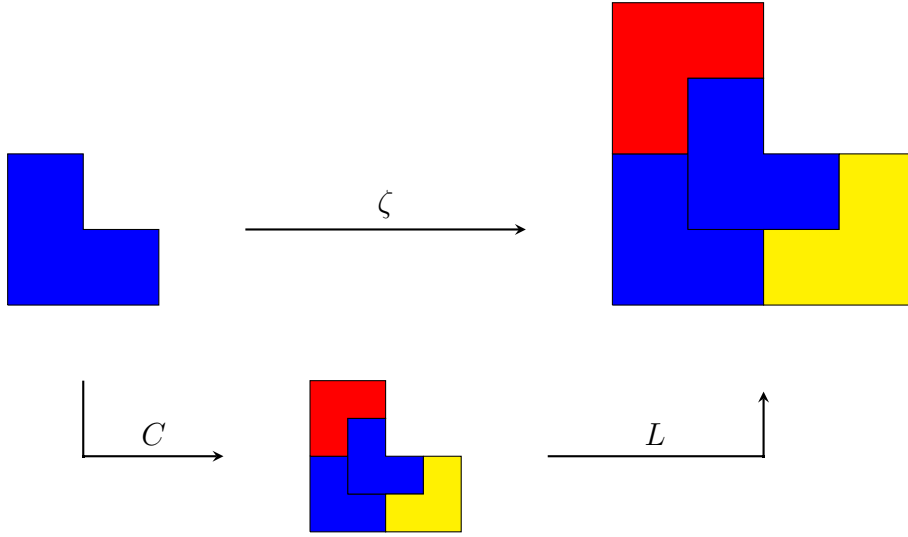


Figura 2.3: Regla de sustitución de el Chair tiling.

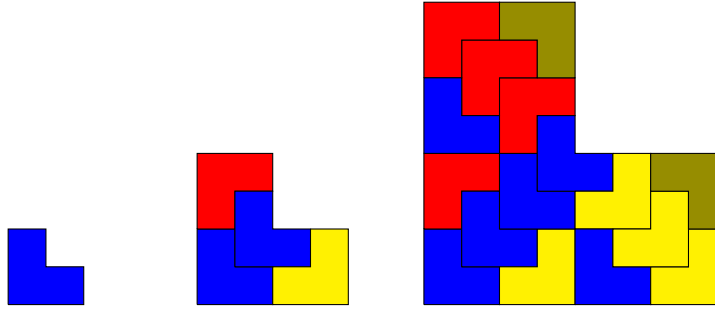


Figura 2.4: Iteraciones de la sustitución del Chair tiling.

de los tiles mostrados en la Figura 2.5. Este tiling es auto-similar y su constante de dilatación es  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , solución de  $p(x) = x^2 - x - 1$ . Una patch de este tiling se muestra en la Figura 2.6.

Otro concepto importante es el siguiente. Sea  $\zeta = LC : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$  una sustitución. Un tile  $T$  se dice que es un **tile de orden**  $k$ , para  $k \in \mathbb{Z}$ , si existe  $i = 1, \dots, m = \#\mathcal{A}$  y  $x \in \mathbb{R}^d$  tal que  $\text{supp}(T) = L^k(\text{supp}(T_i)) + x$  y  $\text{punc}(T) = L^k(\text{punc}(T_i)) + x$ . Se denotará al tile  $T$  por  $L^k T_i$ . Se puede definir la **sustitución de orden**  $k$  sobre el alfabeto  $L^k \mathcal{A} = \{L^k T_1, \dots, L^k T_m\}$  por  $L^k \zeta : L^k \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}_{L^k \mathcal{A}}$ ,  $L^k \zeta(L^k T_j) = L^k(\zeta(T_j))$ .

Al igual que en el caso de sustituciones uni-dimensionales se puede definir la **matriz de incidencia** de una sustitución  $\zeta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$  por  $\mathcal{S}_{\zeta}(i, j) = \text{Número de tiles equivalentes a } T_i \text{ en } \zeta(T_j)$ , para  $1 \leq i, j \leq m$ . Se dice que  $\zeta$  es **primitiva** si su matriz de incidencia lo es.

El **espacio de tiling substitutivo** asociado a una sustitución  $\zeta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$  se define por  $\mathfrak{X}_{\zeta} = \{\mathbf{X} \in \mathfrak{T}_{\mathcal{A}} \mid \forall \mathbf{P} \in \mathcal{P}_{\mathbf{X}}, \exists x \in \mathbb{R}^d, n \in \mathbb{N}, T_i \in \mathcal{A} : \mathbf{P} - x \subseteq \zeta^n(T_i)\}$ . Al igual que en el caso de los sistemas substitutivos uni-dimensionales del capítulo anterior, si  $\zeta$  es una sustitución primitiva se tiene que  $\mathfrak{X}_{\zeta} = \overline{O_{\Gamma}(\mathbf{X})}$  para cualquier  $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}_{\zeta}$ . En este caso ésto es consecuencia conjunta del Teorema 2.2 y el Teorema 5.8 en [18], que establece que

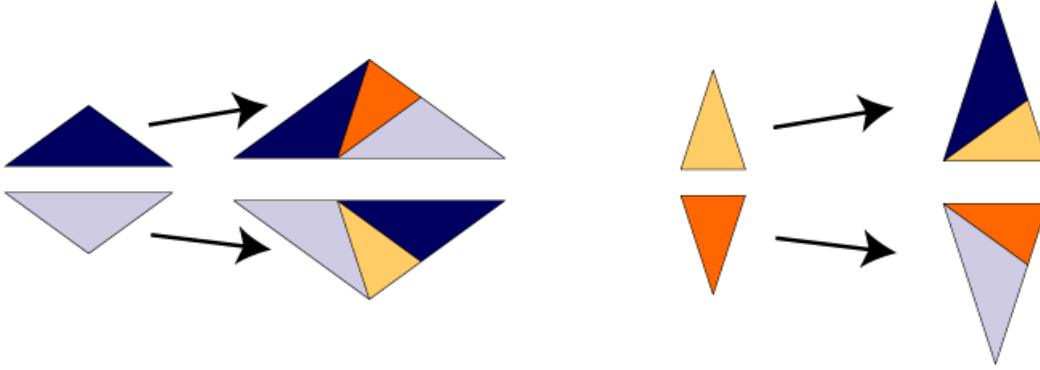


Figura 2.5: Substitución de los prototiles del tiling de Penrose triangular. Figura de <http://tilings.math.uni-bielefeld.de/substitution/robinson-triangle/>.

cualesquiera  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}_\zeta$  son **localmente isomorfos**:  $\overline{O_\Gamma(\mathbf{X})} = \overline{O_\Gamma(\mathbf{Y})}$ . Otra acotación es que si existe un tiling  $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}_\zeta$  aperiódico, entonces por el Teorema 2.3 cualquier otro tiling del sistema es aperiódico. Se dice en tal caso que la sustitución  $\zeta$  es **aperiódica**.

En la siguiente sección se utilizará la partición  $\mathfrak{X}_\zeta = \bigcup_{i=1}^m \mathfrak{X}_{T_i}$ , donde  $\mathfrak{X}_{T_i} = \{ \Gamma(s, \mathbf{X}) \in \mathfrak{X}_\zeta \mid T_i - \text{punc}(T_i) \in \mathbf{X}, s \in \text{int}[\text{supp}(T_i - \text{punc}(T_i))] \}$ . Para un análisis más extensivo sobre la estructura topológica/geométrica del espacio  $\mathfrak{X}_\zeta$  se puede revisar [5].

Si  $\mu$  es una medida  $\Gamma$ -invariante en  $\mathfrak{X}_\zeta$  entonces se dice que la tupla  $(\mathfrak{X}_\zeta, \mathcal{B}(\mathfrak{X}_\zeta), \Gamma, \mu)$  es un **sistema de tiling substitutivo** asociado a  $\zeta$ . De hecho si  $\zeta$  es primitiva y auto-similar entonces  $\mu$  está únicamente determinada: debido a que un tiling auto-similar de  $\zeta$ ,  $\mathbf{X}$ , es linealmente repetitivo (ver [32]), el Teorema 2.4 implica que  $\mu$  es la única medida invariante de  $\mathfrak{X}_\zeta = \overline{O_\Gamma(\mathbf{X})}$ . Si la sustitución es sólo auto-afín el sistema también es únicamente ergódico ([18]).

Como el interés del capítulo siguiente recaerá en los sistemas de tilings substitutivos débilmente mezcladores, no está demás mencionar que éstos nunca son mezcladores.

**Teorema 2.6** ([31]) *Sea  $\zeta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}_\mathcal{A}$  una sustitución auto-afín. Entonces el sistema  $(\mathfrak{X}_\zeta, \Gamma)$  no es mezclador.*

## 2.2. Sumas torcidas y medidas espectrales para sistemas de tilings

### 2.2.1. Definiciones y construcciones

Luego de esta breve introducción se puede pasar a las construcciones necesarias para el estudio de los análogos de las sumas torcidas definidas en el capítulo anterior y de las medidas espectrales. Las líneas siguientes son básicamente las de [7], adaptadas al caso de tilings substitutivos. Este es el contexto en el que se trabajará de aquí en adelante:  $\zeta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}_\mathcal{A}$  una

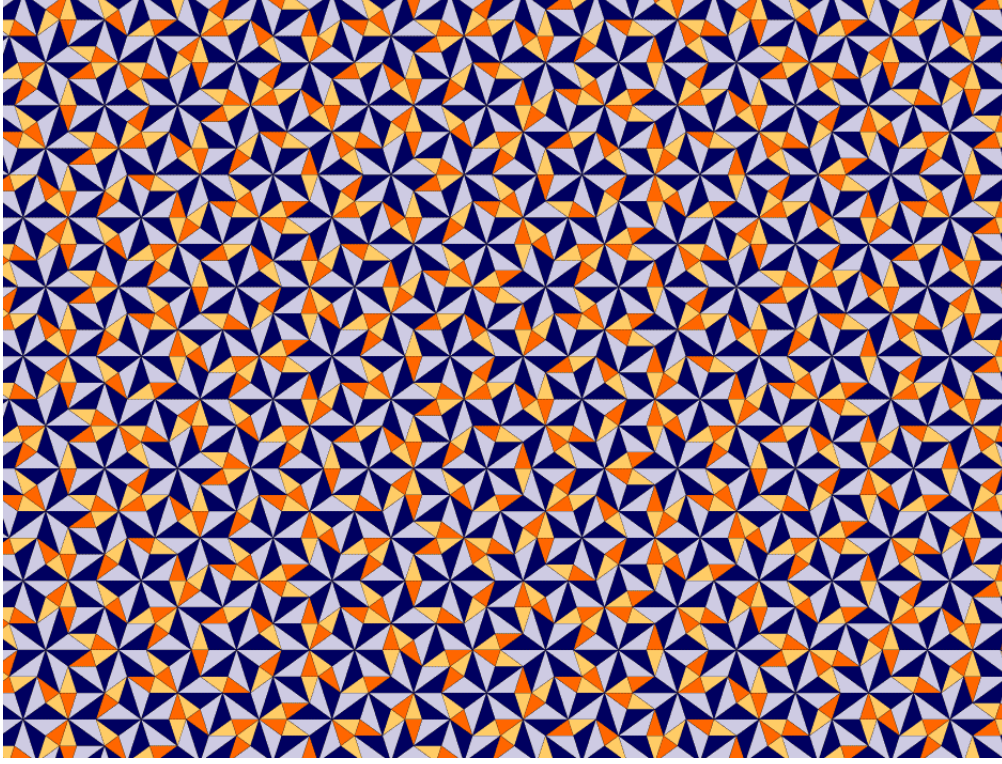


Figura 2.6: Patch correspondiente al tiling de Penrose triangular. Figura de <http://tilings.math.uni-bielefeld.de/substitution/robinson-triangle/>.

substitución primitiva, aperiódica y auto-afín de un alfabeto  $\mathcal{A} = \{T_1, \dots, T_m\}$ . El sistema dinámico substitutivo con el cual se trabajará por el resto del capítulo se denotará por  $(\mathfrak{X}_\zeta, \mathcal{B}(\mathfrak{X}_\zeta), \Gamma, \mu)$ . Las definiciones tendrán sustento en la teoría espectral que se desarrollará en la sección posterior a esta.

Se recuerda al lector que se denota por  $]F[\mathbf{X}$  al conjunto de los tiles de un tiling  $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}_\zeta$  que están contenidos en  $F \subseteq \mathbb{R}^d$ , al cubo  $[0, R]^d$  por  $C_R$  y a la aplicación  $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-2\pi it}$  por  $e[t]$ . Además se utiliza  $\cdot$  para el producto interno usual en  $\mathbb{R}^d$ . Sean  $f \in L^2(\mathfrak{X}_\zeta, \mathcal{B}(\mathfrak{X}_\zeta), \mu)$  y  $\omega \in \mathbb{R}^d$ . La **suma torcida de Birkhoff** se define por

$$S_R^f(\mathbf{X}, \omega) = \int_{C_R} e[\omega \cdot s] f \circ \Gamma(s, \mathbf{X}) ds,$$

para  $R > 0$ . También se utilizará recurrentemente:

$$G_R(f, \omega) = \frac{1}{R^d} \|S_R^f(\cdot, \omega)\|_{L^2(\mathfrak{X}_\zeta, \mathcal{B}(\mathfrak{X}_\zeta), \mu)}^2 = \frac{1}{R^d} \int_{\mathfrak{X}_\zeta} S_R^f(\mathbf{Y}, \omega) \overline{S_R^f(\mathbf{Y}, \omega)} d\mu(\mathbf{Y}).$$

Se definen a continuación puntos de referencia para tiles y patches. Sea  $\{v_1, \dots, v_d\}$  una base de  $\mathbb{R}^d$  y considere las aplicaciones  $\pi_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq d$ , que entregan la  $i$ -ésima coordenada en esta base, y los hiperplanos afines  $H_y^i = \left\{ x = \sum_{j=1}^d \alpha_j v_j \in \mathbb{R}^d \mid \alpha_i = y \right\}$ . Se define el punto de **referencia** de un patch  $\mathbf{P}$ , denotado por  $ref(\mathbf{P})$ , por

$$\pi_i(ref_{v_1, \dots, v_d}(\mathbf{P})) = \inf \{ y \in \mathbb{R} \mid H_y^i \cap \text{supp}(\mathbf{P}) \neq \emptyset \}.$$

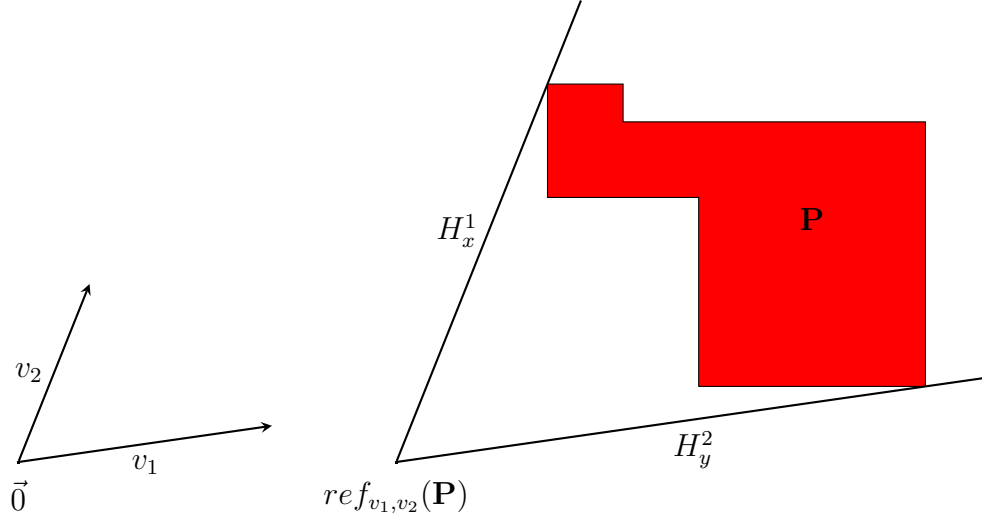


Figura 2.7: Referencia de un patch.

Se omite el subíndice de la base  $\{v_1, \dots, v_d\}$  si no hay confusión.

Sean  $\mathbf{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$  un patch,  $T_i \in \mathcal{A}$  y  $\omega \in \mathbb{R}^d$ . Se define el **factor de estructura** por

$$\Phi_i(\mathbf{P}, \omega) = \sum_{j=1}^n \delta_{T_i, P_j} e[\omega \cdot (\text{punc}(P_j) - \text{ref}(\mathbf{P}))],$$

donde se define  $\delta_{T, S} = 1$  si  $T, S$  son tiles equivalentes y cero en caso contrario. La verdad es que existe una relación sencilla para los factores de estructura dependiendo de las distintas definiciones que se pudiesen dar para la referencia de un patch: si  $\text{ref}(\cdot)$ ,  $\text{ref}'(\cdot)$  son dos elecciones de referencias para los patch y  $\Phi$ ,  $\Phi'$  son los respectivos factores de estructura calculados con esas referencias, entonces de la definición es simple obtener que  $e[\omega \cdot (\text{ref}'(\mathbf{P}) - \text{ref}(\mathbf{P}))] \Phi'_i(\mathbf{P}, \omega) = \Phi_i(\mathbf{P}, \omega)$ , de lo que se deduce  $|\Phi'_i(\mathbf{P}, \omega)| = |\Phi_i(\mathbf{P}, \omega)|$ . Debido a esto, al acotar el factor de estructura no intervendrá la referencia que se ha escogido, lo cual servirá para alivianar algunos cálculos posteriores. En este mismo sentido también se redefinen los representantes  $T_i$  de los prototiles como las traslaciones tales que  $\text{ref}(T_i) = 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$ .

A continuación se analiza la suma torcida de Birkhoff para  $f = \mathbf{1}_{\mathbb{X}_{T_i}}$ , de donde se puede apreciar cómo interviene el factor de estructura. Sean  $]C_R[\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_N\}$ ,  $x_j = \text{punc}(X_j)$  y  $y = \text{punc}(T_i)$ . Se tiene,

$$\begin{aligned} S_R^f(\mathbf{X}, \omega) &= \int_{\text{supp}(]C_R[\mathbf{X})} e[\omega \cdot s] f(\mathbf{X} - s) ds + \underbrace{\int_{C_R \setminus \text{supp}(]C_R[\mathbf{X})} e[\omega \cdot s] f(\mathbf{X} - s) ds}_{=\Delta(R)} \\ &= \sum_{j=1}^N \delta_{T_i, X_j} \int_{\text{supp}(X_j)} e[\omega \cdot s] ds + \Delta(R) \\ &= \sum_{j=1}^N \delta_{T_i, X_j} \int_{\text{supp}(X_j) - x_j + y} e[\omega \cdot (s + x_j - y)] ds + \Delta(R) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^N \delta_{T_i, X_j} \int_{\text{supp}(T_i)} e[\omega \cdot (s + x_j - y)] ds + \Delta(R) \\
&= \int_{\text{supp}(T_i)} e[\omega \cdot (s + \text{ref}(\lfloor C_R[\mathbf{X}] - y))] ds \sum_{j=1}^N \delta_{T_i, X_j} e[\omega \cdot (x_j - \text{ref}(\lfloor C_R[\mathbf{X}]))] + \Delta(R) \\
&= \int_{\text{supp}(T_i) + \text{ref}(\lfloor C_R[\mathbf{X}] - y)} e[\omega \cdot s] ds \Phi_i(\lfloor C_R[\mathbf{X}], \omega) + \Delta(R).
\end{aligned}$$

Más adelante se mostrará que  $\Delta(R)$  es un error de orden  $R^{d-1}$  (Lema 3.2). Por otro lado, la integral que multiplica el término de estructura se puede acotar por el volumen de  $\text{supp}(T_i)$ .

La propiedad principal del término de estructura, que permitirá hacer la descripción de éste, viene dada por la siguiente expresión y se deduce directo de la definición. Sean  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$  dos patches, entonces

$$\begin{aligned}
\Phi_i(\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}, \omega) &= e[\omega \cdot (\text{ref}(\mathbf{P}) - \text{ref}(\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}))] \Phi_i(\mathbf{P}, \omega) + \\
&e[\omega \cdot (\text{ref}(\mathbf{Q}) - \text{ref}(\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}))] \Phi_i(\mathbf{Q}, \omega).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Una última observación sencilla sobre el factor de estructura es que es invariante por traslación: para cada  $x \in \mathbb{R}^d$  se tiene que  $\Phi_i(\mathbf{P} + x, \omega) = \Phi_i(\mathbf{P}, \omega)$ .

Para concluir la sección se estudia el factor de estructura para tiles de orden  $n$ . Considere  $T_j \in \mathcal{A}$ . Si  $\zeta(T_j) = \{S_1, \dots, S_{N_j}\}$ , entonces  $\zeta^n(T_j) = \bigcup_{l=1}^{N_j} \zeta^{n-1}(S_l)$ . Utilizando (2.1) en esta unión se obtiene

$$\begin{aligned}
\Phi_i(\zeta^n(T_j), \omega) &= \sum_{l=1}^{N_j} e[\omega \cdot (\text{ref}(\zeta^{n-1}(S_l)) - \text{ref}(\zeta^n(T_j)))] \Phi_i(\zeta^{n-1}(S_l), \omega) \\
&= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^{N_j} \delta_{T_k, S_l} e[\omega \cdot (\text{ref}(\zeta^{n-1}(S_l)) - \text{ref}(\zeta^n(T_j)))] \Phi_i(\zeta^{n-1}(T_k), \omega).
\end{aligned}$$

Esta última expresión es el producto de dos matrices que se definen a continuación y que son esenciales para realizar las estimaciones siguientes. Sean  $T_i, T_j, T_k \in \mathcal{A}$ ,  $\omega \in \mathbb{R}^d$  y  $\zeta(T_j) = \bigcup_{l=1}^{N_j} S_l$ . Se definen las siguientes matrices de  $m \times m$  con entradas en  $\mathbb{C}$ .

$$\begin{aligned}
\Pi_n(\omega)(k, i) &= \Phi_i(\zeta^n(T_k), \omega), \\
\mathcal{M}_{n-1}(\omega)(j, k) &= \sum_{l=1}^{N_j} \delta_{T_k, S_l} e[\omega \cdot (\text{ref}(\zeta^{n-1}(S_l)) - \text{ref}(\zeta^n(T_j)))] .
\end{aligned}$$

La igualdad anterior dice que  $\Pi_n(\omega) = \mathcal{M}_{n-1}(\omega) \Pi_{n-1}(\omega)$  y por definición se tiene que  $\Pi_0(\omega) = \text{Diag}(e[\omega \cdot \text{punc}(T_1)], \dots, e[\omega \cdot \text{punc}(T_m)])$ . Se obtiene finalmente que

$$\Pi_n(\omega) = \mathcal{M}_{n-1}(\omega) \dots \mathcal{M}_0(\omega) \Pi_0(\omega).$$

### 2.2.2. Medidas espectrales de sistemas de tilings

Para concluir este capítulo se hace un pequeño recuento de teoría espectral de sistemas dinámicos. El caso en que la dinámica proviene de la acción de  $\mathbb{Z}$ , por medio de una única



transformación del espacio, se analizó en detalle en el Capítulo 1. La generalización de esta teoría a la acción de un grupo arbitrario es aún un problema sin respuesta general. Un caso en que sí se generaliza de forma satisfactoria es en el caso de un grupo localmente compacto, segundo contable y abeliano, como lo es el caso de  $(\mathbb{R}^d, +)$ .

Sin entrar en detalles (que escapan fuera de los objetivos de este trabajo y se pueden revisar en [12] y [19]), se puede mencionar que la generalización se basa en la teoría de representaciones unitarias de grupos en espacios de Hilbert: Una **representación** de un grupo  $G$  en un espacio de Hilbert  $V$  es una aplicación  $\rho : G \rightarrow \mathcal{U}(V)$  de  $G$  en el grupo de operadores unitarios de  $V$  tal que para cualesquiera  $u \in V$  y  $g \in G$  la función  $g \mapsto \rho(g)u$ , de  $G$  en  $V$ , es continua. Un teorema general de esta teoría dice en términos simples que cualquier representación se puede descomponer en una suma (posiblemente continua) de representaciones irreducibles. Para el caso de grupos abelianos, se puede demostrar que el grupo de representaciones irreducibles se identifican con el grupo de **caracteres** del grupo: los homomorfismos continuos del grupo en  $\mathbb{C}$ . En el caso de  $\mathbb{R}^d$  el grupo de caracteres es isomorfo  $\mathbb{R}^d$  y son exactamente las aplicaciones  $\xi_\omega : x \in \mathbb{R}^d \mapsto e[-\omega \cdot x]$ , para  $\omega \in \mathbb{R}^d$ .

La descomposición en representaciones irreducibles mencionada anteriormente para el caso de  $\mathbb{R}^d$  se hace por lo descrito recién a partir de los caracteres, y finalmente es lo que da origen a las medidas espectrales, que son medidas en el grupo de caracteres. Esto se puede comparar con la acción de  $\mathbb{Z}$  ya estudiada, en donde las medidas espectrales tenían soporte en  $\mathbb{T}$ , que es de hecho el grupo de caracteres de  $\mathbb{Z}$ . A continuación se enuncia el **Teorema espectral** que resume de forma más precisa los hechos generales recién comentados (se hace en el contexto de interés para este texto: sistemas de tilings provenientes una substitución).

**Teorema 2.7** ([19]) *Sea  $f \in L^2(\mathfrak{X}_\zeta, \mathcal{B}(\mathfrak{X}_\zeta), \mu)$ . Existe una medida  $\sigma_f$  en  $\mathbb{R}^d$  llamada **medida espectral** asociada a  $f$  definida por su transformada de Fourier  $\hat{\sigma}_f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e[-\omega \cdot x] d\sigma_f(\omega) = \langle f \circ \Gamma(x, \cdot), f \rangle_{L^2(\mathfrak{X}_\zeta, \mathcal{B}(\mathfrak{X}_\zeta), \mu)}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^d$ . Además la aplicación  $J : (\mathbf{X} \mapsto \Gamma(x, \mathbf{X})) \mapsto (\omega \mapsto e[-\omega \cdot x])$  se extiende a una isometría entre un subespacio cerrado de  $L^2(\mathfrak{X}_\zeta, \mathcal{B}(\mathfrak{X}_\zeta), \mu)$  y  $L^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \sigma_f)$ .*

Análogo a los Lemas 1.9 y 1.10, el siguiente lema relaciona el crecimiento de la medida espectral  $\sigma_f$  con el de la suma torcida de Birkhoff  $S_R^f(\mathbf{X}, \omega)$ .

**Lema 2.8** *Sea  $\Omega : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicación continua no decreciente con  $\Omega(0) = 0$ ,  $R_0 > 0$  tal que  $G_R(f, \omega) \leq CR^d \Omega(1/R)$ , para todo  $R \geq R_0$ ,  $f \in L^2(\mathfrak{X}_\zeta, \mathcal{B}(\mathfrak{X}_\zeta), \mu)$  y  $\omega \in \mathbb{R}^d$ . Para cada  $r \leq \frac{1}{2R_0}$  se denota  $[\omega_1 - r, \omega_1 + r] \times \cdots \times [\omega_d - r, \omega_d + r] \subseteq \mathbb{R}^d$  por  $C_r^\omega$ . Entonces se tiene que*

$$\sigma_f(C_r^\omega) \leq \frac{\pi^{2d} C}{4^d} \Omega(2r).$$

DEMOSTRACIÓN. Se realizan cálculos análogos a los ya realizados en la demostración de los

Lemas 1.9 y 1.10:

$$\begin{aligned}
G_R(f, \omega) &= \frac{1}{R^d} \langle S_R^f(\cdot, \omega), S_R^f(\cdot, \omega) \rangle_{L^2(\mathfrak{X}_\zeta, \mathcal{B}(\mathfrak{X}_\zeta), \mu)} \\
&= \frac{1}{R^d} \int_{C_R} \int_{C_R} e[\omega \cdot (s-t)] \langle f \circ \Gamma(s-t, \cdot), f \rangle_{L^2(\mathfrak{X}_\zeta, \mathcal{B}(\mathfrak{X}_\zeta), \mu)} ds dt \\
&= \frac{1}{R^d} \int_{C_R} \int_{C_R} e[\omega \cdot (s-t)] \int_{\mathbb{R}^d} e[-\lambda \cdot (s-t)] d\sigma_f(\lambda) ds dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left[ \int_{C_R} \frac{1}{R^d} \int_{C_R} e[(\omega - \lambda) \cdot (s-t)] ds dt \right] d\sigma_f(\lambda) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} K_R^d(\omega_1 - \lambda_1, \dots, \omega_d - \lambda_d) d\sigma_f(\lambda),
\end{aligned}$$

donde  $K_R^d(\omega_1 - \lambda_1, \dots, \omega_d - \lambda_d) = \prod_{i=1}^d K_R(\omega_i - \lambda_i)$  es el kernel de Fejér d-dimensional y  $K_R(x) = \frac{1}{R} \left[ \frac{\text{sen}(\pi R y)}{\pi y} \right]^2$  ([7]). Utilizando las mismas estimaciones que en el Lema 1.9 se muestra que si  $\forall i = 1, \dots, d$  se cumple que  $|\omega_i - \lambda_i| \leq 1/2R$ , entonces  $K_R^d(\omega - \lambda) \geq (4R)^d / \pi^{2d}$ . Definiendo  $r = \frac{1}{2R} \leq \frac{1}{2R_0}$  se obtiene

$$\begin{aligned}
\sigma_f(C_r^\omega) &\leq \frac{\pi^{2d}}{(4R)^d} \int_{\mathbb{R}^d} K_R^d(\omega_1 - \lambda_1, \dots, \omega_d - \lambda_d) d\sigma_f(\lambda) \\
&= \frac{\pi^{2d} C}{(4R)^d} G_R(f, \omega) \\
&\leq \frac{\pi^{2d} C}{4^d} \Omega(2r).
\end{aligned}$$

□

# Capítulo 3

## Estimaciones sobre sumas torcidas de Birkhoff y medidas espectrales

El resultado principal de este capítulo (y del documento) es el Teorema 3.10 que es una generalización del Teorema 1.15 para sistemas dinámicos de tilings substitutivos de  $\mathbb{R}^d$ , provenientes de una substitución primitiva, aperiódica y auto-afín  $\zeta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$  satisfaciendo ciertas hipótesis técnicas.

El capítulo se organiza de la siguiente forma. Primero se presentan estimaciones para las sumas torcidas y el factor de estructura, para después pasar a estimar las medidas espectrales. En la última sección se presentan ejemplos de espacios de tilings en que se pueden utilizar los resultados aquí expuestos.

Las hipótesis y notación que se asumen para cada resultado en todo el capítulo son las siguientes, a menos que se haga explícito lo contrario. Sea  $\zeta = LC : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$  una substitución primitiva, aperiódica y auto-afín de un alfabeto  $\mathcal{A} = \{T_1, \dots, T_m\}$  con prototiles  $T_j$  elegidos tales que  $\text{ref}(T_j) = 0$ ,  $j = 1 \dots, m$ . Se denotará por  $(\mathfrak{X}_{\zeta}, \mathcal{B}(\mathfrak{X}_{\zeta}), \Gamma, \mu)$  el sistema dinámico substitutivo asociado a  $\zeta$ .

### 3.1. Crecimiento de $S_R^f(\mathbf{X}, \omega)$

#### 3.1.1. Relación con el factor de estructura

En esta sección se exponen desigualdades respecto al factor de estructura y  $S_R^f(\mathbf{X}, \omega)$ , que se utilizan luego para encontrar las asintóticas para las medidas espectrales. Antes de comenzar se enuncia un aspecto importante de los sistemas de tilings substitutivos aperiódicos, que generaliza los trabajos de Mossé sobre *reconocibilidad* en substituciones uni-dimensionales y que fueron esenciales en el Capítulo 1 para realizar las estimaciones de la suma de Birkhoff. Recordar que el grupo de simetría de un tiling  $\mathbf{X}$  de  $\mathbb{R}^d$  es el conjunto  $\Lambda_{\mathbf{X}}$  es el conjunto de los  $x \in \mathbb{R}^d$  tales que  $\mathbf{X} + x = \mathbf{X}$ , y en el caso que  $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}_{\zeta}$ , como todo los tilings son

localmente isomorfos, el grupo de simetría es el mismo para cada tiling del espacio.

**Teorema 3.1** (Solomyak B., [32]) *Sea  $\zeta$  una substitución primitiva y auto-afín, y  $\Lambda$  el grupo de simetría de un tiling de  $\mathfrak{X}_\zeta$ . Entonces para cualesquiera  $X, Y \in \mathfrak{X}_\zeta$*

$$\zeta(\mathbf{X}) = \zeta(\mathbf{Y}) \iff \mathbf{X} = \mathbf{Y} + x, \quad x \in \Lambda.$$

*En particular,  $\zeta$  como aplicación de  $\mathfrak{X}_\zeta$  en sí mismo es inyectiva si y sólo si cada  $X$  es aperiódico, i.e., si  $\zeta$  es aperiódica.*

Sea  $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}_\zeta$  un tiling y  $\mathbf{P} \in \mathcal{P}_\mathbf{X}$  un sub-patch de  $\mathbf{X}$ . El Teorema 3.1 permite descomponer  $\mathbf{P}$  como la unión de tiles de orden  $k = 0, \dots, n$ . En efecto, para cada  $k \geq 0$  el siguiente mapeo queda bien definido desde que  $\zeta$  sea inyectiva.

$$\Upsilon_k : \mathfrak{X}_{L^k \zeta} \longrightarrow \mathfrak{X}_{L^{k+1} \zeta}.$$

Para el tiling  $\mathbf{X}$  se definen  $\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{X}$  y  $\mathbf{X}^{(k)} = \Upsilon_{k-1} \circ \dots \circ \Upsilon_0(\mathbf{X})$ . Se puede descomponer de manera única  $\mathbf{P} = \bigcup_{k=0}^n \mathcal{R}^k(\mathbf{P})$ , donde  $n$  es el primer entero tal que  $\mathbf{P}[\mathbf{X}^{n+1}] = \emptyset$  y se definen inductivamente

$$\mathcal{R}^n(\mathbf{P}) = \mathbf{P}[\mathbf{X}^{(n)}] \text{ y } \mathcal{R}^k(\mathbf{P}) = \mathbf{P}[\mathbf{X}^{(k)} \setminus \text{supp}(\mathcal{R}^{k+1}(\mathbf{P}))][\mathbf{X}^{(k)}].$$

En palabras,  $\mathcal{R}^k(\mathbf{P})$  es el conjunto de los tiles de orden  $k$  contenidos en  $\text{supp}(\mathbf{P})$  cuyos tiles de orden  $k+1$  en los que están contenidos no se encuentran contenidos en  $\text{supp}(\mathbf{P})$ .

El lema siguiente establece que a fin de estimar las sumas torcidas de Birkhoff basta estimar el término de estructura para patches de la forma  $\zeta^n(T_j)$ , para  $T_j \in \mathcal{A}$ .

**Lema 3.2** *Sean  $f = \mathbf{1}_{\mathfrak{X}_{T_i}}$  la indicatriz del conjunto  $\mathfrak{X}_{T_i}$  y  $\theta$  el valor propio de Perron de  $\mathcal{S}_\zeta$ . Para  $\omega \in \mathbb{R}^d$  se asume que existen  $1 < \xi < |\lambda_1|$ , donde  $\lambda_1$  es el valor propio de  $L$  de máximo valor absoluto, y una sucesión  $(F_\omega(n))_{n \geq 0}$  tal que para todo  $T_j \in \mathcal{A}$  se satisfacen*

- $\frac{F_\omega(n)}{\xi} \leq F_\omega(n+1) \leq F_\omega(n)$ .
- $|\Phi_i(\zeta^n(T_j), \omega)| \leq \#\zeta^n(T_j) F_\omega(n)$ .

*Entonces existen constantes  $C_1, C_2$ , sólo dependiendo de  $\zeta$ , tales que  $\forall \mathbf{X} \in \mathfrak{X}_\zeta$ :*

$$|S_R^f(\mathbf{X}, \omega)| \leq C_1 R^d F_\omega(\lfloor \log_{|\lambda_1|}(R) - C_2 \rfloor) + C_1 R^{d-1}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 3.1 se tiene  $\mathbf{P}[\mathbf{X}] = \bigcup_{k=0}^n \mathcal{R}^k(\mathbf{P}[\mathbf{X}])$ . Sea  $D_{\max}$  el diámetro máximo entre los soportes de los prototiles y  $V_{\min}$  el volumen mínimo de estos. Se denota además por  $U(\partial C_R, r)$  al conjunto de los puntos a distancia menor o igual de  $r$  de  $\partial C_R$ , la frontera de  $C_R$ . Note que  $C_R \setminus \text{supp}(\mathbf{P}[\mathbf{X}]) \subseteq U(\partial C_R, D_{\max})$ . En términos de la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^d$ , que se denota por  $\mathcal{L}^d$ , se deduce que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^d(C_R \setminus \text{supp}(\mathbf{P}[\mathbf{X}])) &\leq \mathcal{L}^d(U(\partial C_R, D_{\max})) \\ &\leq (R + D_{\max})^d - (R - D_{\max})^d \\ &\leq M_1 R^{d-1}, \end{aligned}$$

donde la constante  $M_1$  no depende de  $\mathbf{X}$  y se puede tomar independiente de  $R$ . Luego, como se había mencionado se puede hacer que el error  $\Delta(R) = \int_{C_R \setminus \text{supp}(\mathcal{I}C_R[\mathbf{X}])} e[\omega \cdot s] \mathbf{1}_{\mathcal{X}_{T_i}}(\mathbf{X} - s) ds = \mathcal{O}(R^{d-1})$ . Si se define  $A = \text{supp}(T_i) + \text{ref}(\mathcal{I}C_R[\mathbf{X}]) - \text{punc}(T_i)$ , este conjunto tiene volumen acotado por una constante  $K$  que no depende de  $X$  ni de  $R$  como se mencionó anteriormente. Así utilizando 2.1 y la invarianza por traslación del factor de estructura se obtiene que

$$\begin{aligned}
|S_R^f(\mathbf{X}, \omega)| &\leq \left| \int_A e[\omega \cdot s] ds \right| |\Phi_i(\mathcal{I}C_R[\mathbf{X}], \omega)| + |\Delta(R)| \\
&\leq K \sum_{k=0}^n \# \mathcal{R}^k(\mathcal{I}C_R[\mathbf{X}]) \sum_{l=1}^n |\Phi_i(\zeta^k(X_l^k) + x_l, \omega)| + \mathcal{O}(R^{d-1}); \quad X_l^k \in \mathcal{A}, x_l \in \mathbb{R}^d \\
&\leq K \sum_{k=0}^n \# \mathcal{R}^k(\mathcal{I}C_R[\mathbf{X}]) \max_{j=1, \dots, m} |\Phi_i(\zeta^k(T_j), \omega)| + \mathcal{O}(R^{d-1}) \\
&\leq K \sum_{k=0}^n \# \mathcal{R}^k(\mathcal{I}C_R[\mathbf{X}]) \max_{j=1, \dots, m} \# \zeta^k(T_j) F_\omega(k) + \mathcal{O}(R^{d-1}),
\end{aligned}$$

la última igualdad debida a la hipótesis. Como  $\zeta$  es primitiva, se puede estimar el crecimiento de  $\max_{j=1, \dots, m} \# \zeta^k(T_j)$ . Por el Teorema de Perron-Frobenius (ver [29]) existen constantes  $c_1, c_2 > 0$  tales que para  $k \geq 0$

$$c_1 \theta^k \leq \min_{j=1, \dots, m} \# \zeta^k(T_j) \leq \max_{j=1, \dots, m} \# \zeta^k(T_j) \leq c_2 \theta^k.$$

Utilizando la primera de las hipótesis sobre  $F_\omega(n)$  se obtiene

$$\begin{aligned}
|S_R^f(\mathbf{X}, \omega)| &\leq K \sum_{k=0}^n \# \mathcal{R}^k(\mathcal{I}C_R[\mathbf{X}]) \max_{j=1, \dots, m} \# \zeta^k T_j F_\omega(k) + \mathcal{O}(R^{d-1}) \\
&\leq K c_2 \sum_{k=0}^n \# \mathcal{R}^k(\mathcal{I}C_R[\mathbf{X}]) \theta^k F_\omega(k) + \mathcal{O}(R^{d-1}) \\
&\leq K c_2 \sum_{k=0}^n \# \mathcal{R}^k(\mathcal{I}C_R[\mathbf{X}]) \theta^k \xi^{n-k} F_\omega(n) + \mathcal{O}(R^{d-1}) \\
&= K c_2 \xi^n F_\omega(n) \sum_{k=0}^n \# \mathcal{R}^k(\mathcal{I}C_R[\mathbf{X}]) \theta^k \xi^{-k} + \mathcal{O}(R^{d-1}).
\end{aligned}$$

Se mayor  $\# \mathcal{R}^k(\mathcal{I}C_R[\mathbf{X}])$  con el mismo argumento usado para  $\Delta(R)$ : como  $\text{supp}(\mathcal{R}^k(\mathcal{I}C_R[\mathbf{X}])) \subseteq U(\partial C_R, D_{\max} |\lambda_1|^{k+1})$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
\# \mathcal{R}^k(\mathcal{I}C_R[\mathbf{X}]) &\leq \frac{\mathcal{L}^d(U(\partial C_R, D_{\max} |\lambda_1|^{k+1}))}{V_{\min} \theta^k} \\
&\leq \frac{1}{V_{\min} \theta^k} [(R + D_{\max} |\lambda_1|^{k+1})^d - (R - D_{\max} |\lambda_1|^{k+1})^d].
\end{aligned}$$

Introduciendo esta desigualdad en la anterior se obtiene,

$$\begin{aligned}
|S_R^f(\mathbf{X}, \omega)| &\leq \frac{Kc_2}{V_{min}} \xi^n F_\omega(n) \sum_{k=0}^n [(R + D_{max}|\lambda_1|^{k+1})^d - (R - D_{max}|\lambda_1|^{k+1})^d] \xi^{-k} + \mathcal{O}(R^{d-1}) \\
&= M_2 \xi^n F_\omega(n) \sum_{k=0}^n \frac{|\lambda_1|^{kd}}{\xi^k} \left[ \left( \frac{R}{|\lambda_1|^k} + D_{max}|\lambda_1| \right)^d - \left( \frac{R}{|\lambda_1|^k} - D_{max}|\lambda_1| \right)^d \right] \\
&\quad + \mathcal{O}(R^{d-1}) \\
&\leq M_3 \xi^n F_\omega(n) \sum_{k=0}^n \frac{|\lambda_1|^{kd}}{\xi^k} \frac{R^{d-1}}{|\lambda_1|^{k(d-1)}} + \mathcal{O}(R^{d-1}) \\
&\leq M_4 R^{d-1} F_\omega(n) |\lambda_1|^n + \mathcal{O}(R^{d-1}),
\end{aligned}$$

donde la constante  $M_4$  puede tomarse independiente de  $R$ .

Sea  $D_{min}$  el diámetro de la bola más grande que se puede inscribir en todo prototile, luego como existe al menos un tile de orden  $n$  inscrito en  $C_R$ , necesariamente el diámetro de este dominio excede  $D_{min}|\lambda_1|^n$ , i.e.,  $D_{min}|\lambda_1|^n \leq \sqrt{d}R$  implica que  $|\lambda_1|^n \leq M_5 R$ . Por otro lado, debido a que no existen patches de orden  $n + 1$  contenidos en  $C_R$ , debe cumplirse necesariamente que  $R/2 \leq D_{max}|\lambda_1|^{n+1}$ . Reordenando esto se encuentra que  $\lfloor \log_{|\lambda_1|}(R) - C_2 \rfloor \leq n$  para una constante universal  $C_2$ . Reemplazando en la última desigualdad y definiendo  $C_1$  como la constante adecuada se puede concluir:

$$\begin{aligned}
|S_R^f(\mathbf{X}, \omega)| &\leq M_4 R^{d-1} F_\omega(n) |\lambda_1|^n + \mathcal{O}(R^{d-1}) \\
&\leq M_4 R^{d-1} F_\omega(\lfloor \log_{|\lambda_1|}(R) - C_2 \rfloor) M_5 R + \mathcal{O}(R^{d-1}) \\
&\leq C_1 R^d F_\omega(\lfloor \log_{|\lambda_1|}(R) - C_2 \rfloor) + \mathcal{O}(R^{d-1}).
\end{aligned}$$

□

El siguiente resultado es clave para el resto de las estimaciones, pues es una primera cota para el factor de estructura en los patch de la forma  $\zeta^n(T_i)$ . Para  $\lambda \in \mathbb{R}$  se denotará por  $\|\lambda\| = \|\lambda\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$  la distancia  $\lambda$  al entero más cercano. Se dirá que un patch  $\mathbf{V}$  es un **patch de retorno** a un prototile  $T_i \in \mathcal{A}$  si  $\mathbf{V}$  contiene exactamente dos trasladados de  $T_i$ .

**Proposición 3.3** *Suponga existe  $T_k \in \mathcal{A}$  tal para cada prototile  $T_j$  se puede escribir  $\zeta(T_j) = \mathbf{P}^j \cup \mathbf{V}^j \cup \mathbf{Q}^j$ , donde  $\mathbf{V}^j$  es un patch de retorno a  $T_k$  equivalente a un patch de retorno a  $T_k$  fijo denotado por  $\mathbf{V}$ ,  $\forall j = 1, \dots, m$ . Denote además, para cada  $j$ ,  $\mathbf{V}^j = \{V_1^j, \dots, V_r^j\}$ , con  $r = \#\mathbf{V}^j = \#\mathbf{V}$  y  $V_1^j \cong V_r^j \cong T_k$ . Entonces existen constantes  $c \in (0, 1)$ ,  $K > 0$ , dependientes sólo de la substitución  $\zeta$ , tales que  $\forall T_i, T_j \in \mathcal{A}$  y  $\omega \in \mathbb{R}^d$ .*

$$|\Phi_i(\zeta^n(T_j), \omega)| \leq K \#\zeta^n(T_j) \prod_{l=0}^{n-1} 1 - c \|\omega \cdot (\text{ref}(\zeta^l(V_r^j)) - \text{ref}(\zeta^l(V_1^j)))\|^2.$$

**Observación.** La hipótesis de la proposición anterior de que exista un tal patch de retorno  $\mathbf{R}$  puede omitirse, pues al suponer que la substitución  $\zeta$  es primitiva eventualmente tal patch aparecerá en cada  $\zeta^l(T_j)$  para algún  $l \in \mathbb{N}$  y el sistema  $\mathfrak{X}_\zeta$  es el mismo al cambiar  $\zeta$  por  $\zeta^l$ .

DEMOSTRACIÓN. Por comodidad se escribe  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\zeta$  y se omiten los  $\omega$  de las matrices  $\mathcal{M}_n(\omega)$  y  $\Pi_n(\omega)$ . En primer lugar se estima el valor absoluto de la entrada  $\mathcal{M}_n(j, k)$  para un  $j$  arbitrario fijo. Por la descomposición que se tiene en la hipótesis se conoce dos tiles equivalentes a  $T_k$  en la descomposición de  $\zeta(T_j)$ :  $V_1^j$  y  $V_r^j$ . Por lo tanto, como el número de términos en la suma es en total  $\mathcal{S}^t(j, k)$ , se tiene que,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_n(j, k)| &\leq \mathcal{S}^t(j, k) - 2 + |e[\omega \cdot (\text{ref}(\zeta^n(V_1^j)) - \text{ref}(\zeta^{n+1}(T_j)))] + \\ &\quad e[\omega \cdot (\text{ref}(\zeta^n(V_r^j)) - \text{ref}(\zeta^{n+1}(T_j)))]| \\ &\leq \mathcal{S}^t(j, k) - 2 + |1 + e[\omega \cdot (\text{ref}(\zeta^n(V_r^j)) - \text{ref}(\zeta^n(V_1^j)))]| \\ &\leq \mathcal{S}^t(j, k) - \frac{1}{2} \|\omega \cdot (\text{ref}(\zeta^n(V_r^j)) - \text{ref}(\zeta^n(V_1^j)))\|^2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

La demostración de la desigualdad  $|1 + e[\tau]| < 2 - \frac{\|\tau\|^2}{2}$ , para  $\tau \in \mathbb{R}$ , utilizada en (3.1), se encuentra al final de la demostración.

Considere  $x \in \mathbb{R}^m$  de coordenadas positivas y denote  $\mathcal{N}^{|\cdot|}$  la matriz con entradas los valores absolutos de una matriz  $\mathcal{N}$ , entonces debido a la desigualdad anterior se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n^{|\cdot|} x(j) &\leq \sum_{l=1}^m |\mathcal{M}_n(j, l)| x(l) \\ &\leq \sum_{l=1}^m \mathcal{S}^t(j, l) x(l) - \frac{1}{2} \|\omega \cdot (\text{ref}(\zeta^n(V_r^j)) - \text{ref}(\zeta^n(V_1^j)))\|^2 x(k) \\ &\leq (1 - \xi[x] \|\omega \cdot (\text{ref}(\zeta^n(V_r^j)) - \text{ref}(\zeta^n(V_1^j)))\|^2) \mathcal{S}^t x(j), \end{aligned}$$

donde la constante  $\xi[x]$  se puede tomar como

$$\xi[x] = \frac{x(k)}{2m \max_{l, l'=1, \dots, m} \mathcal{S}^t(l, l') \max_{l=1, \dots, m} x(l)}.$$

Como  $\Pi_n = \mathcal{M}_{n-1} \dots \mathcal{M}_0 \Pi_0$  y  $\Pi_0^{|\cdot|} = Id$ , entonces

$$\Pi_n^{|\cdot|}(\cdot, i) \leq \mathcal{M}_{n-1}^{|\cdot|} \dots \mathcal{M}_0^{|\cdot|} \vec{1},$$

donde  $\vec{1}$  es el vector con todas sus entradas iguales a 1. Así, utilizando inductivamente en este producto la última desigualdad para  $x = \vec{1}$  se obtiene la desigualdad por coordenadas

$$\Pi_n^{|\cdot|}(\cdot, i) \leq (\mathcal{S}^t)^n \vec{1} \prod_{l=0}^{n-1} 1 - \xi[(\mathcal{S}^t)^l \vec{1}] \|\omega \cdot (\text{ref}(\zeta^l(V_r^j)) - \text{ref}(\zeta^l(V_1^j)))\|^2.$$

Para obtener la desigualdad requerida se nota que por Perron-Frobenius  $(\mathcal{S}^t)^n \vec{1} \leq K \# \zeta^n(T_j) \vec{1}$  para una constante  $K > 0$ , sólo dependiente de la substitución  $\zeta$ . Por el mismo teorema se tiene que  $c = \inf_{l \geq 0} \xi[(\mathcal{S}^t)^l \vec{1}] > 0$ , pues  $\# \zeta^n(T_l) \sim \theta^n$ ,  $\forall l = 1, \dots, m$ , para  $\theta$  el valor propio de Perron de  $\mathcal{S}$ . Esto concluye la demostración módulo (3.1). Para probar ésto observe que:

1.  $|1 + e[\tau]| = 2 \cos(\pi \|\tau\|) < 2 - \pi^2 \|\tau\|^2 + \frac{\pi^4 \|\tau\|^4}{12}$ , y

$$2. \frac{\|\tau\|^2}{2} < \pi^2 \|\tau\|^2 - \frac{\pi^4 \|\tau\|^4}{12} \iff \frac{\pi^4 \|\tau\|^4}{12} < (\pi^2 - \frac{1}{2}) \|\tau\|^2 \iff \frac{\pi^2}{12} < 1 \text{ y } \pi^2 \|\tau\|^2 < \pi^2 - \frac{1}{2}.$$

Reemplazando 2. en 1. se obtiene (3.1).  $\square$

Utilizando la proposición anterior se puede obtener una primera estimación de la suma torcida de Birkhoff, resultado que se establece a continuación.

**Proposición 3.4** *Considere las hipótesis y notación de la Proposición 3.3. Existe una constante  $K' > 0$  tal que para cualquier  $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}_\zeta$  y  $i = 1, \dots, m$ , si  $f = \mathbf{1}_{\mathfrak{X}_{T_i}}$  se tiene que*

$$|S_R^f(\mathbf{X}, \omega)| \leq K' R^d \prod_{l=0}^{\lfloor \log_{|\lambda_1|}(R) - C_2 \rfloor} 1 - c \|\omega \cdot (\text{ref}(\zeta^l(V_r^j)) - \text{ref}(\zeta^l(V_1^j)))\|^2,$$

donde la constante sólo depende de  $\zeta$ .

DEMOSTRACIÓN. Se define  $F_\omega(n) = \prod_{l=0}^{n-1} 1 - c \|\omega \cdot (\text{ref}(\zeta^l(V_r^j)) - \text{ref}(\zeta^l(V_1^j)))\|^2$ . Disminuyendo la constante  $c$  se puede exigir que  $c \leq (|\lambda_1| - 1)/(|\lambda_1| + 1)$ , con lo que se puede tomar  $\xi = (|\lambda_1| + 1)/2$ , y concluir directamente del Lema 3.2. En efecto, la segunda condición del Lema 3.2 se satisface por la Proposición 3.3, y como  $1 - c \geq \frac{2}{|\lambda_1| + 1}$  entonces

$$\frac{F_\omega(n)}{\xi} = \frac{2F_\omega(n)}{|\lambda_1| + 1} \leq F_\omega(n)(1 - c) \leq F_\omega(n+1).$$

Disminuyendo nuevamente la constante de ser necesario es sencillo mostrar que el error no interviene en la desigualdad para  $R \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Observación.** La proposición anterior entrega una forma de obtener decaimientos para la medida espectral de tipo Hölder uniformes en ciertos conjuntos definidos por propiedades diofantinas. Se define, para  $\varepsilon, \delta > 0$ , el conjunto

$$\Xi_{\varepsilon, \delta}(\zeta) = \left\{ \omega \in \mathbb{R}^d \mid \liminf_{n \in \mathbb{N}} \frac{\#\{0 \leq l \leq n-1 : \|\omega \cdot (\text{ref}(\zeta^l(V_r^j)) - \text{ref}(\zeta^l(V_1^j)))\| > \delta\}}{n} > \varepsilon \right\}.$$

Si  $\omega \in \Xi_{\varepsilon, \delta}(\zeta)$  se tiene que para  $n \geq n_0 = n_0(\omega)$

$$\prod_{l=0}^{n-1} 1 - c \|\omega \cdot (\text{ref}(\zeta^l(V_r^j)) - \text{ref}(\zeta^l(V_1^j)))\|^2 \leq (1 - c\delta^2)^{n\varepsilon}.$$

Por la Proposición 3.4 se deduce que para  $R \geq R_0$ ,

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{X} \in \mathfrak{X}_\zeta} |S_R^f(\mathbf{X}, \omega)| &\leq K' R^d (1 - c\delta^2)^{\varepsilon(\log_{|\lambda_1|}(R) - C_2)} \\ &= K' R^d |\lambda_1|^{(1 - c\delta^2)\varepsilon(\log_{|\lambda_1|}(R) - C_2)} \\ &= K' R^d R^{\log_{|\lambda_1|}(1 - c\delta^2)\varepsilon} \\ &\leq \tilde{K} R^\alpha, \end{aligned}$$



para  $\alpha = d + \varepsilon \log_{|\lambda_1|}(1 - c\delta^2)$ . Finalmente basta aplicar el Lema 2.8 con  $\Omega(r) = r^{2d-2\alpha}$ , para deducir que para una constante  $C > 0$  se tiene que:

$$\sigma_f(C_r^\omega) \leq Cr^\beta, \quad \beta = \beta(\zeta, \varepsilon, \delta) = 2d - 2\alpha > 0.$$

## 3.2. Módulo de continuidad para $\sigma_f$

La siguiente sección tiene por objetivo presentar el resultado principal de este trabajo que es obtener estimaciones para el decaimiento de las medidas espectrales  $\sigma_i = \sigma_{\mathbf{1}_{\mathfrak{X}_{T_i}}}$ , denominadas **medidas de correlación**, para  $\omega$ 's  $\neq 0$  y  $i = 1, \dots, m$ . Antes de enunciar el resultado se hacen algunos comentarios sobre el máximo tipo espectral y de las posibles aplicaciones de este resultado.

### 3.2.1. Máximo tipo espectral y conjugación

Antes de pasar a la demostración del resultado principal sobre el decaimiento de las medidas de correlación  $\sigma_i$ , en esta sección se muestra el hecho de que en realidad para el contexto en que se está trabajando basta con conocer cómo se comportan estas medidas, por la caracterización que se tiene del **máximo tipo espectral**  $\sigma_{max}$ : la única medida (salvo equivalencia por absoluta continuidad, denotada por  $\sim$ ) que satisface que para cualquier  $f \in L^2(\mathfrak{X}, \mathcal{B}(\mathfrak{X}), \mu)$ ,  $\sigma_f \ll \sigma_{max}$ , y que para cualquier otra medida  $\sigma$  satisfaciendo esto último se cumple que  $\sigma \ll \sigma_{max}$ . Esta medida es de mucha relevancia en el estudio de sistemas dinámicos por ser un invariante de equivalencia espectral y en conjunto con la función de multiplicidad son un conjunto completo de invariantes (ver [19]). La caracterización de ésta en términos de las medidas de correlación se establece en sistemas de tilings substitutivos uni-dimensionales en [7].

El Teorema 3.1 permite realizar la siguiente partición (en medida) del espacio  $\mathfrak{X}_\zeta$  en tiles de orden  $k$ . Para cada  $k \geq 0$  se tiene que

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_\zeta &= \bigcup_{i=1}^m \mathfrak{X}_{\zeta^k(T_i)}, \text{ con} \\ \mathfrak{X}_{\zeta^k(T_i)} &= \left\{ \Gamma(s, \mathbf{X}) \in \mathfrak{X}_\zeta \mid \zeta^k(T_i - punc(T_i)) \subseteq \mathbf{X} \text{ y } s \in \text{int}[\text{supp}(\zeta^k(T_i - punc(T_i)))] \right\}. \end{aligned}$$

Esta partición genera un sistema de torres  $\{\mathfrak{B}_k\}_{k \geq 0} = \{ \{ \Gamma(\mathfrak{U}_i^k, \mathfrak{C}_i^k) \}_{i=1}^m \}_{k \geq 0}$  para el sistema  $(\mathfrak{X}_\zeta, \Gamma)$ , donde

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_i^k &= \{ s \in \mathbb{R}^d \mid s \in \text{int}[\text{supp}(\zeta^k(T_i - punc(T_i)))] \} \\ &\text{y} \\ \mathfrak{C}_i^k &= \{ \mathbf{X} \in \mathfrak{X}_\zeta \mid \zeta^k(T_i - punc(T_i)) \subseteq \mathbf{X} \}. \end{aligned}$$

Sin entrar en detalles de esta construcción (que se pueden revisar en [2]), se puede probar que  $\mathfrak{C}_i^k$  es un espacio de Cantor cuyo diámetro  $\text{diam}(\mathfrak{C}_i^k) \searrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , para cada

$i = 1, \dots, m$ ; y que conjuntos de la forma  $\{\Gamma(B(s, \varepsilon), \mathbf{X}) \mid \varepsilon > 0, s \in \mathfrak{U}_i^k \text{ y } \mathbf{X} \in \mathfrak{C}_i^k\}$  generan la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}(\mathfrak{X}_\zeta)$  (estructura de laminación de  $\mathfrak{X}_\zeta$ ). Debido a la caracterización antes mencionada para el máximo tipo espectral en dimensión  $d = 1$ , es de esperar que se tenga una caracterización de éste del siguiente tipo, aunque no se demuestra aquí.

**Conjetura 3.5** Denote por  $\sigma_{max}$  el máximo tipo espectral, entonces

$$\sigma_{max} \sim \sum_{\substack{k \geq 0 \\ 1 \leq i \leq m}} 2^{-k} \sigma_{\mathbf{1}_{\mathfrak{X}_{\zeta^k(T_i)}}}$$

Note que las sumas torcidas de Birkhoff para las funciones de la forma  $f = \mathbf{1}_{\mathfrak{X}_{\zeta^k(T_i)}}$ , para  $k \geq 1$ , se pueden estudiar de manera análoga a la de las funciones  $\mathbf{1}_{\mathfrak{X}_{T_i}}$ .

### 3.2.2. Teorema principal

El decaimiento de las medidas de correlación no puede ocurrir en la vecindad de un valor propio del sistema, por lo que por simplicidad se trabajará en sistemas de tilings substitutivos débilmente mezcladores que carecen de valores propios además del trivial. También será necesario para la demostración del resultado principal distinguir cuales aplicaciones lineales pueden ser la expansión de una substitución. Debido a esto se presentan a continuación algunos resultados de la literatura que responden parcialmente estas interrogantes. Primero se caracterizan las expansiones de substituciones.

**Teorema 3.6** (Kenyon R., Solomyak B., [22]) Sea  $L$  una aplicación lineal de  $\mathbb{R}^d$  diagonalizable (sobre  $\mathbb{C}$ ), que es la expansión de una substitución. Entonces se satisfacen:

1. Cada valor propio de  $L$  es un entero algebraico.
2. Si  $\lambda_1$  es un valor propio de multiplicidad  $k_1$  y  $\lambda_2$  es un conjugado de Galois de  $\lambda_1$  de multiplicidad  $k_2$ , entonces  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$  ó  $\lambda_2$  es valor propio de  $L$  y  $k_2 \geq k_1$ .

**Observación.** La recíproca del Teorema 3.6 también es válida en dimensiones  $d = 1$  y  $d = 2$ . Si una aplicación  $L$  satisface la segunda condición se dice que  $L$  es una **expansión de Perron**. En este documento se trabajará en el caso diagonalizable, aunque ésta no es una condición necesaria: El siguiente resultado generaliza el anterior (se generaliza la noción de expansión de Perron en el teorema además).

**Teorema 3.7** (Kwapisz J., [24]) Si  $L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  es la expansión de una substitución para la cual existe un tiling auto-afín, entonces:

1. Los valores propios de  $L$  son enteros algebraicos.
2. La expansión es de Perron.

Los siguientes resultados exhiben condiciones para que el sistema  $(\mathfrak{X}_\zeta, \mathcal{B}(\mathfrak{X}_\zeta), \Gamma, \mu)$  sea débilmente mezclador. Se dice que un conjunto de enteros algebraicos  $\Lambda$  es una **familia de**

**Pisot** si para cada  $\lambda \in \Lambda$  se cumple que si  $\gamma$  es un conjugado de Galois y  $\gamma \notin \Lambda$  entonces  $|\gamma| < 1$ . En caso contrario se dice que  $\Lambda$  es una familia **no-Pisot**.

**Teorema 3.8** ([25]) *Sea  $\mathbf{X}_0$  un tiling de  $\mathbb{R}^d$  auto-afín de una substitución con expansión  $L$ . Suponga además que todos los autovalores de  $L$  son conjugados de Galois de igual multiplicidad. Entonces son equivalentes:*

1. Los valores propios de  $(\overline{O_\Gamma(\mathbf{X}_0)}, \Gamma)$  forman un conjunto relativamente denso de  $\mathbb{R}^d$ .
2. El espectro  $\Sigma(L)$  es una familia de Pisot.
3. El sistema  $(\overline{O_\Gamma(\mathbf{X}_0)}, \Gamma)$  no es débilmente mezclador.

Si un conjunto de enteros algebraicos  $\Lambda$  se puede particionar  $\Lambda = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_s$ , donde cada  $\Lambda_i$  es una familia no-Pisot de enteros algebraicos conjugados, se dice que  $\Lambda$  es una **familia totalmente no-Pisot**.

**Teorema 3.9** ([18]) *Sea  $\zeta = LC$  una substitución primitiva e inyectiva cuya expansión  $L$  es diagonalizable y totalmente no-Pisot. Entonces  $(\mathfrak{X}_\zeta, \Gamma)$  es débilmente mezclador.*

Ahora se puede enunciar el teorema principal del documento.

**Teorema 3.10** *Suponga que la expansión  $L$  es diagonalizable en  $\mathbb{R}$ , definida positiva y su espectro  $\Sigma(L)$  se compone de conjugados de Galois tales que existe al menos un conjugado que no está en el espectro y que se encuentra fuera del círculo unitario en  $\mathbb{C}$  (en particular  $\Sigma(L)$  es una familia no-Pisot). Suponga (s.p.g.) que para el valor propio  $\lambda_1$ , de multiplicidad  $m_1$ , se tiene que el vector  $v = \text{ref}(V_r^j) - \text{ref}(V_1^j)$  (tal y como en la Proposición 3.3) y un  $\omega \in \mathbb{R}^d$  satisfacen  $1/\varepsilon > |\omega_1 v_1 + \dots + \omega_{m_1} v_{m_1}| > \varepsilon$  para un  $\varepsilon > 0$ . Entonces existen constantes  $C_\varepsilon > 0$  y  $\gamma > 0$  tales que*

$$\sigma_f(C_r^\omega) \leq C_\varepsilon \log(1/r)^{-\gamma}, \quad r \searrow 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Para alivianar la notación, en lo que sigue se consideran los vectores siguientes para  $j = 1, \dots, m$  y  $l \geq 0$ :

$$\mathcal{V}^l = \text{ref}(\zeta^l(V_r^j)) - \text{ref}(\zeta^l(V_1^j)), \quad \mathcal{V}^0 = v.$$

En los casos siguientes, estos vectores realmente no dependen de  $j$ , por lo que se omite dicha dependencia.

**Caso 1:**  $L = \lambda Id_{\mathbb{R}^d}$ ,  $\lambda > 1$ .

En este caso se toma para la referencia los vectores canónicos de  $\mathbb{R}^d$ , con lo cual se tiene que para un tile  $T$ :  $\text{ref}(\zeta^l(T)) = L^l \text{ref}(T) = \lambda^l \text{ref}(T)$ , por lo que

$$\|\omega \cdot \mathcal{V}^l\| = \|\lambda^l \omega \cdot v\|.$$

Este caso se trata exactamente como en el trabajo [7] y en particular como el siguiente caso que se analiza a continuación.

**Caso 2:**  $L = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_b)$ , donde cada  $\lambda_i > 1$  es de multiplicidad  $m_i$ . El polinomio minimal de éstos (de la hipótesis son todos conjugados de Galois) se denota por  $q(x) = x^u - b_{u-1}x^{u-1} - \dots - b_0 \in \mathbb{Z}[x]$ .

En este caso se toma para la referencia de cada patch la base de vectores canónicos de  $\mathbb{R}^d$ , con lo cual se tiene que para un tile  $T$ :  $\text{ref}(\zeta^l(T)) = L^l \text{ref}(T)$ , por lo que

$$\begin{aligned} \|\omega \cdot \mathcal{V}^l\| &= \|\omega \cdot L^l v\| \\ &= \|\lambda_1^l \underbrace{(\omega_1 v_1 + \dots + \omega_{m_1} v_{m_1})}_{=t_1} + \dots + \lambda_b^l \underbrace{(\omega_{d-m_b+1} v_{d-m_b+1} + \dots + \omega_d v_d)}_{=t_b}\| \\ &= \|t_1 \lambda_1^l + \dots + t_b \lambda_b^l\|. \end{aligned}$$

De la hipótesis del enunciado se tiene que  $t_1 > 0$ . Por el momento se asume que  $t_1 \geq 1$ . Se puede escribir para  $l \geq 0$

$$t_1 \lambda_1^l + \dots + t_b \lambda_b^l = p_l + \varepsilon_l,$$

para  $p_l \in \mathbb{Z}$ ,  $-1/2 < \varepsilon_l \leq 1/2$ . Como  $q(\lambda_1) = \dots = q(\lambda_b) = 0$  se tiene la siguiente recurrencia entre los  $p_l$  y  $\varepsilon_l$  para  $k \geq 0$

$$\begin{aligned} p_{u+k} + \varepsilon_{u+k} &= b_{u-1}(p_{u-1+k} + \varepsilon_{u-1+k}) + \dots + b_0(p_k + \varepsilon_k) \\ \implies p_{u+k} - b_{u-1}p_{u-1+k} - \dots - b_0 p_k &= -\varepsilon_{u+k} + b_{u-1}\varepsilon_{u-1+k} + \dots + b_0\varepsilon_k. \end{aligned}$$

Como el lado izquierdo de la última igualdad es un número entero, si se cumple que  $\max_{j=0, \dots, u} |\varepsilon_{k+j}| < \delta = (1 + uH)^{-1}$  con  $H = \text{Height}(q) = \max\{|b_0|, \dots, |b_{u-1}|\}$  la altura de  $q$ , entonces esta expresión es nula y por lo tanto se puede escribir bajo esta suposición la siguiente relación entre los  $\varepsilon_l$ 's:

$$\mathcal{E}_{k+1} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{k+1} \\ \varepsilon_{k+2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{k+u-1} \\ \varepsilon_{k+u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{u-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_k \\ \varepsilon_{k+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{k+u-2} \\ \varepsilon_{k+u-1} \end{pmatrix} = \mathcal{B}\mathcal{E}_k.$$

Denote por  $\lambda_{b+1}, \dots, \lambda_u$  al resto de las raíces de  $q$ . Note que  $\mathcal{B}$  es la matriz compañera del polinomio  $q$ , por lo cual sus valores propios son exactamente  $\lambda_1, \dots, \lambda_b$  y sus conjugados, y además ellos son simples. Si se itera la propiedad mencionada arriba sobre los  $\varepsilon_l$ 's se puede asegurar que

$$\max_{j=0, \dots, n} \|\mathcal{E}_{k+j}\|_\infty < \delta \implies \mathcal{E}_{k+n} = \mathcal{B}^n \mathcal{E}_k.$$

Sean  $e_1, \dots, e_u$  los vectores propios de  $\mathcal{B}$  y la base dual  $e_1^*, \dots, e_u^*$  de vectores propios de  $\mathcal{B}^t$ . Explícitamente se calculan para  $j = 1, \dots, b$ :

$$e_j = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_j \\ \vdots \\ \lambda_j^{u-2} \\ \lambda_j^{u-1} \end{pmatrix}, \quad e_j^* = \begin{pmatrix} b_0 \lambda_j^{u-2} \\ b_1 \lambda_j^{u-2} + b_0 \lambda_j^{u-3} \\ \vdots \\ b_{u-2} \lambda_j^{u-2} + \dots + b_1 \lambda_j + b_0 \\ \lambda_j^{u-1} \end{pmatrix}.$$

Por la hipótesis que se hace sobre  $\Sigma(L)$ , s.p.g. se puede asumir que  $|\lambda_{b+1}| > 1$ . Además como la expansión es de Perron se cumple también que  $\lambda_1 > |\lambda_{b+1}|$ . Descomponiendo  $\mathcal{E}_k$  en la base de vectores propios se tiene

$$\mathcal{E}_k = \sum_{j=1}^u a_j e_j \implies a_{b+1} = \frac{\mathcal{E}_k \cdot e_{b+1}^*}{e_{b+1} \cdot e_{b+1}^*}.$$

El denominador de la última fracción no depende de  $k$ . Para el numerador se calcula por definición

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_k &= t_1 \lambda_1^k e_1 + \cdots + t_b \lambda_b^k e_b - \mathcal{P}_k, \quad \mathcal{P}_k = \begin{pmatrix} p_k \\ \vdots \\ p_{k+u-1} \end{pmatrix} \\ \implies \mathcal{E}_k \cdot e_{b+1}^* &= -\mathcal{P}_k \cdot e_{b+1}^*. \end{aligned}$$

Por la forma explícita de  $e_{b+1}^*$  expresada antes, se tiene que  $\mathcal{P}_k \cdot e_{b+1}^* = Q(\lambda_{b+1})$ , para  $Q$  un polinomio de grado  $u-1$ , pues necesariamente  $p_{k+u-1} \neq 0$  para  $k \geq k_0$  ya que  $|p_l| \rightarrow \infty$ . Además para cada  $k$ ,  $\text{Height}(Q) \leq |p_{k+u-1}| rH \lesssim t_1 \lambda_1^k$ , donde  $\lesssim$  denota la desigualdad a menos de multiplicación por una constante. Como  $q$  es el polinomio minimal de  $\lambda_{b+1}$  y es de grado  $u$ , entonces  $Q(\lambda_{b+1}) \neq 0$  y se puede aplicar la siguiente estimación que aparece en [15]:

$$|Q(\lambda_{b+1})| \geq \frac{\prod_{|\lambda_j| \neq 1, j \neq b+1} |\lambda_j| - 1}{u^{u-2} (\prod_{|\lambda_j| > 1, j \neq b+1} |\lambda_j|)^u \text{Height}(Q)^u} \gtrsim t_1^{-u} \lambda_1^{-ku}.$$

Luego  $|a_{b+1}| \gtrsim t_1^{-u} \lambda_1^{-ku}$ . Sea  $\|\cdot\|_e$  la norma de  $\mathbb{R}^u$  del supremo sobre los coeficientes en la expansión en la base  $\{e_j\}_j$ . Entonces por definición de esta norma se tiene que

$$\max_{j=0, \dots, n} \|\mathcal{E}_{k+j}\|_\infty < \delta \implies \|\mathcal{E}_{k+n}\|_e \geq |a_{b+1}| |\lambda_{b+1}|^n \gtrsim |\lambda_{b+1}|^n t_1^{-u} \lambda_1^{-ku}.$$

Las normas en  $\mathbb{R}^u$  son todas equivalentes, luego la desigualdad vale con  $\|\cdot\|_\infty$  en vez de  $\|\cdot\|_e$ , pero obviamente esto entra en contradicción con el hecho que  $\|\mathcal{E}_{k+n}\|_\infty \leq 1/2$  para  $n \geq ku \log_{|\lambda_{b+1}|}(\lambda_1) + u \log_{|\lambda_{b+1}|}(t_1) + M$ , para alguna constante  $M \in \mathbb{N}$ . A continuación se define la constante  $\beta$  que cuantifica los intervalos en que se tiene  $\max_{j=0, \dots, n} \|\mathcal{E}_{k+j}\|_\infty \geq \delta$ :

$$\begin{aligned} \beta &= \lceil u \log_{|\lambda_{b+1}|}(\lambda_1) \rceil + 1, \\ \implies k\beta - 1 &\geq ku \log_{|\lambda_{b+1}|}(\lambda_1) + u \log_{|\lambda_{b+1}|}(t_1) + M, \quad \forall k \geq k_1 = \lceil u \log_{|\lambda_{b+1}|}(t_1) \rceil + M + 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para  $k \geq \max\{k_0, k_1\} = k_2$  se tiene que

$$\max_{j=0, \dots, k\beta-1} \|\mathcal{E}_{k+j}\|_\infty \geq \delta.$$

Lo que implica que  $\exp\left(-\sum_{l=k_2}^{k_2\beta^n} \|t_1 \lambda_1^l + \cdots + t_b \lambda_b^l\|^2\right) \leq \exp(-n\delta^2)$ , y entonces para  $N \geq 1$  se tiene

$$\begin{aligned} \exp\left(-\sum_{l=0}^N \|t_1 \lambda_1^l + \cdots + t_b \lambda_b^l\|^2\right) &\lesssim \exp\left(-\delta^2 \frac{\log(N)}{\log(\beta)}\right) \\ &\lesssim N^{-\delta^2/\log(\beta)}. \end{aligned}$$

En el caso en que  $t_1 \in (0, 1)$ , se fija  $k_3$  tal que  $\tau_1 = t_1 \lambda_1^{k_3} \geq 1$  y  $\tau_j = t_j \lambda_j^{k_3}$  para el resto, entonces por la cota recién encontrada se tiene que

$$\begin{aligned} \exp\left(-\sum_{l=0}^N \|t_1 \lambda_1^l + \cdots + t_b \lambda_b^l\|^2\right) &\leq \exp\left(-\sum_{l=0}^{N-k_3} \|\tau_1 \lambda_1^l + \cdots + \tau_b \lambda_b^l\|^2\right) \\ &\lesssim N^{-\delta^2/\log(\beta)}. \end{aligned}$$

Utilizando la última desigualdad, se puede acotar  $S_R^f(\cdot, \omega)$  de manera uniforme haciendo uso de la Proposición 3.4. Así, para  $R \geq R_0 = R_0(t_1)$ , utilizando la desigualdad clásica  $1-x \leq e^{-x}$  en cada factor del producto abajo se tiene que

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{X} \in \mathfrak{X}_\zeta} |S_R^f(\mathbf{X}, \omega)| &\leq K' R^d \prod_{l=0}^{\lfloor \log_{|\lambda_1|}(R) - C_2 \rfloor} 1 - c \|t_1 \lambda_1^l + \cdots + t_b \lambda_b^l\|^2 \\ &\lesssim R^d \exp\left(-c \sum_{l=0}^{\lfloor \log_{\lambda_1}(R) - C_2 \rfloor} \|t_1 \lambda_1^l + \cdots + t_b \lambda_b^l\|^2\right) \\ &\lesssim R^d (\log_{\lambda_1}(R))^{-c\delta^2/\log(\beta)} \end{aligned}$$

Poniendo  $\Omega(r) = (\log_{\lambda_1}(1/r))^{-2c\delta^2/\log(\beta)}$  y  $\gamma = 2c\delta^2/\log(\beta) > 0$  se concluye que para una constante  $C_{t_1} > 0$ ,

$$\sigma_f(C_r^\omega) \leq C_{t_1} \log(1/r)^{-\gamma}, \quad r \searrow 0.$$

La constante  $t_1$  depende de  $\omega$  pero tal dependencia se uniformiza para los  $\omega$  que satisfacen  $1/\varepsilon > t_1 > \varepsilon$ , por lo que se puede escribir  $C_{t_1} = C_\varepsilon$ . Esto completa la demostración de este caso.

**Caso 3:**  $L = \mathcal{N}\mathcal{D}\mathcal{N}^{-1}$ , para  $\mathcal{D}$  diagonal como en el Caso 2. Sea  $\mathcal{N} = [v_1, \dots, v_d]$  (escrita por columnas) y defina para este caso la referencia utilizando la base de vectores propios dados por las columnas de  $\mathcal{N}$ . Con esta definición también se tiene que  $ref(\zeta^l(T)) = L^l ref(T)$  para un tile arbitrario  $T$ . En efecto, para  $l \geq 0$  por definición  $L^{-l}(H_y^i) = H_{y/\lambda_i^l}^i$ , por lo que

$$\begin{aligned} \pi_i(ref(\zeta^l(T))) &= \inf \{y \in \mathbb{R} \mid H_y^i \cap supp(\zeta^l(T)) \neq \emptyset\} \\ &= \inf \{y \in \mathbb{R} \mid H_y^i \cap L^l supp(T) \neq \emptyset\} \\ &= \inf \left\{y \in \mathbb{R} \mid L^l \left(H_{y/\lambda_i^l}^i \cap supp(T)\right) \neq \emptyset\right\} \\ &= \inf \left\{y \in \mathbb{R} \mid H_{y/\lambda_i^l}^i \cap supp(T) \neq \emptyset\right\} \\ &= \lambda_i^l \pi_i(ref(T)). \end{aligned}$$

Esto significa exactamente que en la base  $\{v_1, \dots, v_d\}$  se tiene  $ref(\zeta^l(T)) = \mathcal{D}^l ref(T)$  que es lo que se deseaba mostrar. Se puede entonces concluir lo mismo que en el caso anterior.  $\square$

**Observación.** Una hipótesis fundamental en la prueba anterior para hacer la estimación  $\|t_1 \lambda_1^l + \cdots + t_b \lambda_b^l\| > \delta$  es la existencia de un conjugado  $\lambda_{b+1}$  fuera del círculo unitario. Esto está íntimamente relacionado con una propiedad notable de las familias de Pisot: si  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_b\}$  cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{2\pi i \sum_{j=1}^b t_j \lambda_j^n} = 1,$$

para cierto  $(t_1, \dots, t_b) \in \mathbb{R}^b \setminus \{0\}$ , entonces  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_b\}$  es una familia de Pisot. Una demostración se puede encontrar en [26]. Otro hecho es que la hipótesis de que  $t_1 > \varepsilon$ , en realidad se puede cambiar por la que cualquier otro de los coeficientes  $t_2, \dots, t_b$  satisficiera lo mismo, simplemente repitiendo cálculos en función de  $\lambda_i$  escogido en vez de  $\lambda_1$ .

### 3.3. Ejemplos

En esta última sección se analiza en detalle algunos ejemplos particulares de sistemas dinámicos de tilings substitutivos en los que se puede utilizar el Teorema 3.10.

#### 3.3.1. Ejemplo 1: caso auto-similar

Para el primer ejemplo se utilizará un derivado del **Binary Tiling**  $\mathbf{X}_B$ . El conjunto de prototiles es el mismo que el del tiling de Penrose. Si bien éste no presenta un tiling de tipo substitutivo según se ha trabajado hasta ahora, se tiene que si presenta una composición *imperfecta*  $C_B$  (ver [18] ó [14] por ejemplo), que se representa en la Figura 3.1. En la Figura 3.2 se observan las primeras iteraciones de la substitución  $\zeta = L_B C_B$ , dada por una dilatación  $L_B = \lambda x$  para  $\lambda = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$ . La constante de dilatación  $\lambda$  es un cero de  $p(x) = x^2 - 5x + 5$

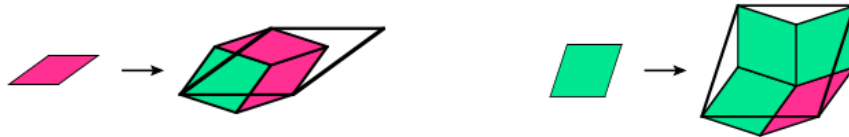


Figura 3.1: Composición imperfecta  $C_B$  para el Binary Tiling.

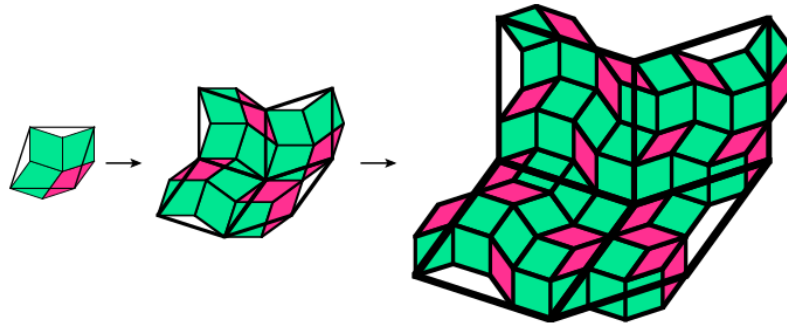


Figura 3.2: Primeras iteraciones de la substitución del Binary Tiling.

y su conjugado es  $\tilde{\lambda} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} > 1$ , por lo que una dilatación asociada a ésta es de Perron. Para llevar este tiling al contexto de substituciones que se presentó en el capítulo anterior, se puede utilizar una construcción para obtener un nuevo conjunto de prototiles que cumplan

una composición como se definió anteriormente. La construcción de estos tiles se grafica en la Figura 3.3. Se resumen estos hechos en el siguiente teorema.

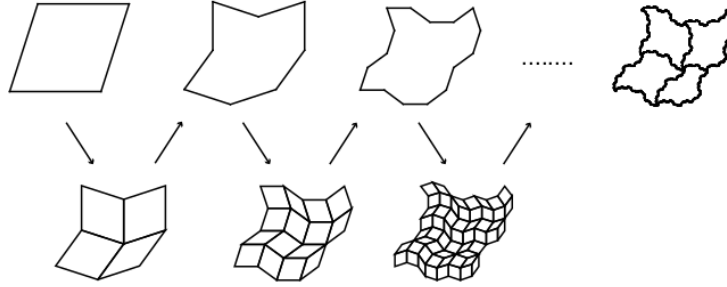


Figura 3.3: Proceso de *iterar la frontera* para obtener una sustitución perfecta.

**Teorema 3.11** (Solomyak B., [30]) *Sea  $X$  un tiling de  $\mathbb{R}^d$  pseudo-auto-afín con expansión  $L$ . Entonces para un  $k \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, existe  $\tilde{X}$  tiling auto-afín con expansión  $L^k$  y tal que  $(\overline{O_\Gamma(\mathbf{X})}, \Gamma)$  y  $(\overline{O_\Gamma(\tilde{X})}, \Gamma)$  son **topológicamente conjugados**: existe  $\pi : \overline{O_\Gamma(\mathbf{X})} \rightarrow \overline{O_\Gamma(\tilde{X})}$  homeomorfismo tal que  $\forall s \in \mathbb{R}^d, \pi \circ \Gamma(s, \cdot) = \Gamma(s, \cdot) \circ \pi$ .*

Por el teorema anterior, al trabajar en el sistema substitutivo  $(\overline{O_\Gamma(\tilde{X}_B)}, \Gamma)$  obtenido, se pueden traspasar los resultados al Binary Tiling  $\mathbf{X}_B$ . Así para la versión fractal del Binary Tiling  $\tilde{X}$  con sustitución  $\tilde{\zeta} = L_B C_B^2$  (se descompone dos veces para evitar la rotación) se puede aplicar directamente el Teorema 3.10.

### 3.3.2. Ejemplo 2: caso diagonal real

El ejemplo que se analiza aquí es auto-afín pero no auto-similar, situación que no puede acontecer en tilings substitutivos de una dimensión. Considere el polinomio  $p(x) = x^3 - 13x^2 + 52x - 61$ . Las tres raíces de éste son reales denotadas por  $x_1 \approx 2,0878$ ,  $x_2 \approx 4,7135$  y  $x_3 \approx 6,1987$ . Si se considera  $L = \text{Diag}(x_2, x_3)$  ésta es una expansión de Perron y entonces, debido a la observación del Teorema 3.6, existe un tiling auto-afín de una sustitución primitiva con tal expansión. La construcción del alfabeto de dicho tiling se puede llevar a cabo mediante el método expuesto en [21]. De esta forma, para el sistema asociado a este tiling también se puede aplicar directamente el Teorema 3.10.



# Conclusión

Desde un punto de vista general, comprender las medidas de correlación es de suma importancia debido por ejemplo la Conjetura 3.5, ya que el máximo tipo espectral es un invariante para la conjugación topológica especialmente relevante para los sistemas con espectro continuo. Se pueden entender los distintos decaimientos como “tasas cuantitativas” de débil mezcla para los sistemas y éstas tienen importancia debido a por ejemplo el cálculo de la dimensión de Hausdorff de medidas ([23] y [7]).

El resultado principal de este trabajo de tesis es una primera estimación sobre los decaimientos de las medidas espectrales en los sistemas de tilings substitutivos de  $\mathbb{R}^d$  para  $d \geq 1$ , extendiendo así las estimaciones obtenidas en [7] para el caso uni-dimensional. Además, esto se realiza en ciertos casos en que la expansión es auto-afín, noción que no es diferente de la auto-similitud en dimensión uno. Debido al resultado más reciente, enunciado en el Teorema 3.7, falta analizar en aquel contexto más general el problema de la aproximación diofantina para dicho tipo de aplicaciones lineales. Una idea se basa en utilizar el concepto de *puntos de control* ([24]) para definir las referencias de los tiles, pues éstos debiesen cumplir una propiedad similar a la que se utilizó de los puntos de referencia para los casos analizados:  $ref(\zeta^l(T)) = L^l ref(T)$ , para cualquier tile  $T$ .

La técnica para acotar la distancia a los enteros, utilizada en el Teorema 3.10, es la misma que en [7] y corresponde a una variación de un argumento de Erdős-Kahane, común en la teoría de convoluciones de Bernoulli. Para optimizar el módulo de continuidad encontrado parece ser mejor idea mejorar la cota encontrada para el crecimiento de la suma torcida de Birkhoff, pues en tal demostración la cota se basó en controlar únicamente la posición de dos términos de la suma, por lo que no se puede esperar una desigualdad ajustada. Tampoco se consideró el hecho que esta suma representa una suma de Birkhoff en un sistema dado por un *skew-product* con la rotación en el toro  $\mathbb{T}^d$ , lo que podría ser una alternativa para continuar el análisis.

Existen varias aristas de los resultados del Capítulo 3 sobre las cuales continuar trabajando. Se pueden buscar módulos de continuidad para la medida de correlación en sistemas de tilings no débilmente mezcladores en los puntos de  $\mathbb{R}^d$  que posean alguna vecindad libre de valores propios, en vez de suponer la ausencia total de éstos. Trabajo restante lo es también comprender en que otro tipo de sistemas se pueden replicar las demostraciones realizadas. En el contexto de sistemas minimales de Cantor linealmente recurrentes, el caso uni-dimensional también ha sido estudiado utilizando técnicas similares en [6]. Así utilizando la estructura de torres de sistemas de Delone linealmente recurrentes expuesta en [2], es razonable pensar que

las construcciones utilizadas en el Capítulo 3 aún son válidas cuando se consideran sistemas de tilings linealmente recurrentes de  $\mathbb{R}^d$ .

Otra dirección posible sería la de estudiar cómo se comportan las demostraciones en sistemas con menor generalidad o con características particulares. Tilings con prototiles con soporte igual a un cubo de  $\mathbb{R}^d$ , que están relacionados con las sustituciones simbólicas de  $\mathbb{Z}^d$ . De hecho, para las sustituciones análogas a las de largo constante en una dimensión, existen resultados caracterizando las medidas de correlación y el máximo tipo espectral en [4]. También sería interesante analizar sistemas Toeplitz, en que por su estructura se pudiesen simplificar o afinar las estimaciones.

# Bibliografía

- [1] Boris Adamczewski. Symbolic discrepancy and self-similar dynamics. *Ann. Inst. Fourier*, 54(7):2201–2234, 2004.
- [2] José Aliste-Prieto and Daniel Coronel. Tower systems for linearly repetitive delone sets. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 31(06):1595–1618, 2011.
- [3] Michael Baake. *Mathematical diffraction theory in Euclidian spaces*. Troisième cycle de la physique en Suisse romande, 2005.
- [4] Alan Bartlett. *Spectral Theory of  $\mathbb{Z}^d$  Substitutions*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2015. Thesis (Ph.D.)–University of Washington.
- [5] A. I. Bufetov and B. Solomyak. Limit Theorems for Self-Similar Tilings. *Communications in Mathematical Physics*, 319:761–789, May 2013.
- [6] A. I. Bufetov and B. Solomyak. The Hoelder Property for the Spectrum of Translation Flows in Genus Two. *Preprint arXiv*, January 2015.
- [7] Alexander I Bufetov and Boris Solomyak. On the modulus of continuity for spectral measures in substitution dynamics. *Advances in Mathematics*, 260:84–129, 2014.
- [8] Alex Clark and Lorenzo Sadun. When size matters: subshifts and their related tiling spaces. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 23(04):1043–1057, 2003.
- [9] Jean-Marie Dumont and Alain Thomas. Systemes de numeration et fonctions fractales relatifs aux substitutions. *Theoretical Computer Science*, 65(2):153 – 169, 1989.
- [10] Fabien Durand, Bernard Host, and Christian Skau. Substitutional dynamical systems, bratteli diagrams and dimension groups. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 19(04):953–993, 1999.
- [11] J. Emme. Spectral measure at zero for self-similar tilings. *Preprint arXiv*, June 2016.
- [12] Renato Feres and Anatole Katok. Ergodic theory and dynamics of g-spaces (with special emphasis on rigidity phenomena). *Handbook of dynamical systems*, 1:665–763, 2002.
- [13] N Fogg. *Substitutions in dynamics, arithmetics, and combinatorics*. Springer, Berlin New York, 2002.

- [14] Natalie Priebe Frank. A primer of substitution tilings of the euclidean plane. *Expositiones Mathematicae*, 26(4):295–326, 2008.
- [15] Adriano M Garsia. Arithmetic properties of bernoulli convolutions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 102(3):409–432, 1962.
- [16] Loukas Grafakos. *Classical Fourier analysis*. Springer, New York, 2014.
- [17] A. Hof. On scaling in relation to singular spectra. *Communications in Mathematical Physics*, 184(3):567–577, 1997.
- [18] E.Arthur jun. Robinson. Symbolic dynamics and tilings of  $\mathbb{R}^d$ . In *Symbolic dynamics and its applications. Lectures of the American Mathematical Society short course, San Diego, CA, USA, January 4–5, 2002*, pages 81–119. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2004.
- [19] Anatole Katok and Jean-Paul Thouvenot. *Spectral properties and combinatorial constructions in ergodic theory*, volume 1. Elsevier B. V., 2006.
- [20] Johannes Kellendonk and Ian F. Putnam. Tilings;  $C^*$ -algebras, and K-theory. In *Directions in mathematical quasicrystals, CRM Monogr. Ser., 13, Amer. Math. Soc., Provincence, RI*, pages 177–206, 2000.
- [21] Richard Kenyon. The construction of self-similar tilings. *Geometric and Functional Analysis*, 6(3):471–488, 1996.
- [22] Richard Kenyon and Boris Solomyak. On the characterization of expansion maps for self-affine tilings. *Discrete & Computational Geometry*, 43(3):577–593, 2010.
- [23] Oliver Knill. Singular continuous spectrum and quantitative rates of weak mixing. *Discrete and continuous dynamical systems*, 4:33–42, 1998.
- [24] Jarosław Kwapisz. Inflations of self-affine tilings are integral algebraic perron. *Inventiones mathematicae*, 205(1):173–220, 2016.
- [25] Jeong-Yup Lee and Boris Solomyak. Pisot family self-affine tilings, discrete spectrum, and the Meyer property. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 32(3):935–959, 2012.
- [26] Christian Mauduit. Caractérisation des ensembles normaux substitutifs. *Inventiones mathematicae*, 95(1):133–147, 1989.
- [27] Krerley Oliveira and Marcelo Viana. Fundamentos da teoria ergódica. *Sociedade Brasileira de Matemática, Coleção Fronteiras da Matemática*, 2014.
- [28] K.E. Petersen and K. Petersen. *Ergodic Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1989.
- [29] Martine Queffélec. *Substitution Dynamical Systems - Spectral Analysis*. Springer, Berlin, 2nd edition, 2009.

- [30] B Solomyak. Pseudo-self-affine tilings in  $\mathbb{R}^d$ . *Journal of Mathematical Sciences*, 140(3):452–460, 2007.
- [31] Boris Solomyak. Dynamics of self-similar tilings. *Ergodic Th. Dynam. Sys*, 17:695–738, 1996.
- [32] Boris Solomyak. Nonperiodicity implies unique composition for self-similar translationally finite tilings. *Discrete & Computational Geometry*, 20(2):265–279, 1998.