



UNIVERSIDAD DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

MODELACIÓN DNS BIDIMENSIONAL DE INTERCAMBIO DE CALOR ENTRE AGUA Y  
SEDIMENTO EN SISTEMAS ACUÁTICOS SOMEROS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

JORGE PATRICIO AYALA GUERRERO

PROFESOR GUÍA:

ALBERTO DE LA FUENTE STRANGER

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:

YARKO NIÑO CAMPOS

HUGO ULLOA SÁNCHEZ

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por Fondecyt 1140821

SANTIAGO DE CHILE

2017

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR AL  
TÍTULO DE: INGENIERO CIVIL  
POR: JORGE AYALA GUERRERO  
FECHA: 20/06/2017  
PROFESOR GUÍA: ALBERTO DE LA FUENTE

## **MODELACIÓN DNS BIDIMENSIONAL DE INTERCAMBIO DE CALOR ENTRE AGUA Y SEDIMENTO EN SISTEMAS ACUÁTICOS SOMEROS**

En la región altiplánica de la Cordillera de los Andes existen lagunas someras de algunos centímetros de profundidad denominadas salares; grandes extensiones de agua salada acotadas por una cáscara de sal en sus extremos como resultado de las altas tasas de evaporación. Diversas investigaciones han demostrado que la temperatura del agua puede variar en 20-30 °C en el día y que los sedimentos cumplen la función de reservorios, reteniendo calor durante el día y liberándolo en la noche, reduciendo de esta manera la oscilación termal diaria. La situación es determinada por procesos ocurrientes a ambos lados de la interfaz agua-sedimento (IAS), perspectiva que debe usarse al proponer modelos conceptuales. Sin embargo, raramente se considera en estudios y, de hacerlo, el calentamiento de los sedimentos por absorción de radiación solar no se analiza.

La presente memoria toma como base “Flow Solve”, un modelo numérico del académico Kraig Winters (U. de California, San Diego) que utiliza el método espectral. El modelo se aplica a un sistema agua sedimento en que la capa superior de los sedimentos es calentada de manera periódica. Además, se estudia el orden de discretización espacial y temporal, así como la relación entre los números de Nusselt y Rayleigh.

A partir de los resultados se concluye que existe una relación empírica exponencial entre el calor absorbido en la capa superior de los sedimentos ( $H_s$ ), la altura del cuerpo de agua ( $h_w$ ) y la frecuencia asociada a los periodos de evaluación ( $\omega$ ) y el número adimensional  $\Pi_1$  (que cuantifica el rol de los sedimentos en el balance de calor). La amplitud térmica es directamente proporcional al calor absorbido en los sedimentos elevado a un coeficiente de orden 0,6, es decir,  $\Delta T_w$  crece sin cota a medida que aumenta el calor absorbido. En el caso de la curva  $\Delta T_w$  como función del periodo, la pendiente disminuye a medida que aumenta la duración de los ciclos, hasta estabilizarse. No se puede estimar la amplitud térmica para periodos superiores a los simulados. Para el caso de la altura de agua se aprecia una curva con pendiente decreciente. A medida que aumenta la altura del cuerpo de agua, la amplitud térmica tiende a 0°C, mientras que al disminuir  $h_w$ ,  $\Delta T_w$  crece sin cota. A partir de los 50 cm,  $\Delta T_w$  toma valores inferiores a 0,1 °C.

La escala de longitud de Kolmogorov entrega resultados que permiten estimar satisfactoriamente la distancia vertical a definir entre puntos de la grilla. Sin embargo, en el caso del paso temporal, el usar un  $\Delta t$  del orden de la escala de tiempo de Kolmogorov puede asegurar que se consideren todas las escalas físicas del proceso, pero no implica que se cumplan las condiciones matemáticas necesarias para que el programa funcione correctamente. De este modo, el requisito dominante en el caso del tiempo viene dado por una expresión empírica.

La relación entre los números de Nusselt y Rayleigh revela que el fenómeno de intercambio de calor en la IAS queda descrito por convección natural en una placa horizontal caliente a temperatura uniforme en régimen turbulento.

*Dedicado a mis padres, el pilar al cual me  
aferro cada vez que creo que ya no me  
puedo levantar.*

# Agradecimientos

*A mis padres por su total apoyo y paciencia durante toda mi vida. Por aguantar mi pereza y ayudarme a salir adelante de todos mis problemas. Aprovecho de excusarme a futuro, porque a estas alturas no creo que cambie, pero crean que lo voy a intentar. LOS AMO.*

*A mis amigos, que son pocos, pero locos. No daré nombres, porque se me puede olvidar alguno y después cobran sentimientos. También a todas las personas del piso 3 de Hidráulica que compartieron conmigo durante estos meses.*

*Y por supuesto, agradecer a los profesores de la comisión por aceptar tan cruenta tarea, en especial al Beto por darme un tema sin pedirme el BIA, lo que demuestra su confianza en mí, o al menos su piedad.*

# Tabla de Contenido

Capítulo 1.....	1
1.1    Introducción .....	1
1.2    Objetivos .....	2
1.3    Metodología .....	3
1.4    Organización del informe .....	4
Capítulo 2    Revisión bibliográfica .....	5
2.1    Números adimensionales .....	6
2.2    Turbulencia y escalas de Kolmogorov .....	7
2.3    Método espectral y convergencia .....	10
2.4    Relación entre números de Rayleigh y Nusselt.....	11
Capítulo 3    Definición del sistema y escenarios evaluados.....	13
3.1    Descripción de parámetros y relaciones importantes.....	13
3.2    Descripción de situación real que motiva el trabajo .....	15
3.3    Definición geométrica del sistema y condiciones de borde .....	16
3.4    Definición de forzantes.....	18
3.5    Definición de escenarios.....	20
3.6    Balance de masa .....	23
Capítulo 4    Análisis y Resultados .....	25
4.1    Amplitud térmica.....	26
4.2    Escalas de Kolmogorov.....	35
4.3    Números de Rayleigh y Nusselt. Flujo de calor en la IAS .....	38
Capítulo 5    Conclusiones .....	44
Capítulo 6    Bibliografía.....	46

# Capítulo 1

## 1.1 Introducción

La temperatura es un parámetro significativo de calidad del agua, influyendo en la mayoría de sus propiedades físicas y los procesos bioquímicos que ocurren en ella. A pesar de que ha sido estudiada extensivamente junto con la estratificación termal en lagos, el régimen térmico relacionado con los sedimentos ha sido omitido. Existen estudios que han demostrado que el intercambio de calor entre el medio acuático y los sedimentos en sistemas someros puede ser sustancial, no sólo a nivel estacional, sino que incluso a nivel diario (Fang y Stefan, 1998). Teniendo en consideración lo anterior, el objetivo de esta memoria es entregar un acercamiento a la comprensión de estos procesos mediante la modelación numérica directa de las ecuaciones de Navier-Stokes (DNS según sus siglas en inglés) del sistema agua-sedimento, identificando los parámetros más relevantes y las conexiones funcionales que existen entre el agua y los sedimentos.

Una modelación numérica directa es una simulación computacional en la que las ecuaciones de Navier-Stokes son resueltas numéricamente sin ningún modelo de turbulencia, es decir, considera todo el rango de escalas espaciales y temporales (Orszag, 1970). Esto implica altos costos computacionales y de tiempo de cálculo, razón por la cual se recurre a simplificaciones como el análisis bidimensional (Momen, 2015). En realidad, la turbulencia 2D nunca ocurre en la naturaleza o el laboratorio, ya que siempre está presente algún grado de tridimensionalidad. En la turbulencia 3D, la energía se transfiere de escalas grandes a pequeñas mediante un mecanismo de estiramiento e inclinación de vórtices, el que no está presente en dos dimensiones, resultando que, en condiciones típicas de fuerza y disipación, la energía es transferida de pequeñas a grandes escalas (Landhal, 1992). A pesar de ello, el modelo 2D es posiblemente más rico en su dinámica que el 3D debido a sus propiedades conservativas.

Entre los trabajos relacionados con el tema se encuentran estudios de evaporación en cuerpos de agua (Adams et al, 1990), variabilidad de temperatura en sedimentos lacustres (Fang y Stefan, 1998) y, más recientemente, de intercambio de calor y oxígeno disuelto entre agua y sedimento en salares someros (de la Fuente, 2014). De especial relevancia es la investigación de Kraig Winters y de la Fuente (2012), que expone el modelo que se usa como base en esta memoria.

El objetivo principal de esta memoria es cuantificar el intercambio de calor en la interfaz del sistema agua-sedimento en cuerpos acuáticos someros y cómo este flujo afecta la temperatura del agua. Para ello se implementa un modelo bidimensional DNS aplicado a un sistema agua-sedimento definido en base a las instalaciones experimentales de de la Fuente et al (2015), cuya motivación se encuentra en un trabajo del mismo autor sobre el intercambio de calor y oxígeno disuelto entre agua y sedimento en el salar de Huasco (de la Fuente, 2014).

## **1.2 Objetivos**

### **General**

Cuantificar el intercambio de calor en la interfaz del sistema agua-sedimento en cuerpos acuáticos someros y cómo este flujo afecta la temperatura del agua.

### **Específicos**

- Implementar un modelo DNS bidimensional que introduce forzantes en los balances de momentum y energía, permitiendo la aplicación adecuada del método espectral con condiciones de borde heterogéneas.
- Cuantificar la importancia del calor absorbido en la capa superior de los sedimentos, la altura del cuerpo de agua y los periodos de evaluación.
- Estimar un orden para las discretizaciones espaciales y temporales usadas en este tipo de simulaciones.
- Caracterización de números adimensionales que controlan el sistema y su relación con las variables que definen los escenarios.
- Determinar la relación entre números de Nusselt y Rayleigh para describir el fenómeno de convección natural.

## **1.3 Metodología**

### **Estudio de los fenómenos físicos que gobiernan el intercambio de calor y limitaciones de un modelo DNS-bidimensional**

Se identifican las ecuaciones y parámetros relevantes para analizar el proceso en estudio a partir del material en la bibliografía. De especial relevancia es el trabajo de de la Fuente (2014), que desarrolla un estudio del intercambio de calor y oxígeno disuelto entre agua y sedimento en el salar de Huasco. Este trabajo actúa como motivación de la memoria. Además, el montaje experimental definido por de la Fuente et al (2015) funciona como base para definir el sistema agua-sedimento modelado en esta memoria.

### **Desarrollo y calibración de modelo**

Se adapta el modelo numérico Flow Solve usado por Winters y de la Fuente (2012) al sistema definido en la parte anterior. Se definen las condiciones iniciales y de borde en función del trabajo de de la Fuente (2014). Como el modelo se basa en el método espectral, se introducen forzantes que permiten intercambiar heterogeneidad en las condiciones de borde por heterogeneidad en las ecuaciones diferenciales (Winters et al, 2004; Winters y de la Fuente, 2014).

### **Definición de escenarios, números adimensionales y evaluación del rol que cumplen los sedimentos**

Se definen una serie de escenarios variando el calor absorbido en la capa superior de los sedimentos, la altura del cuerpo de agua y el periodo de las simulaciones. Se definen números adimensionales para determinar la importancia del rol de los sedimentos en el intercambio de calor entre agua y sedimento (de la Fuente y Meruane, 2017). Se relacionan estos adimensionales con los parámetros que definen los escenarios.

### **Estimación de discretizaciones espaciales y temporales adecuadas**

A partir de las simulaciones se verifica la validez del uso de las escalas de Kolmogorov como guía para establecer el tamaño del espaciamiento y el paso temporal utilizado en el modelo. Se estudian las restricciones impuestas por las condiciones de convergencia de las ecuaciones diferenciales. Se propone un método empírico para estimar las dimensiones espaciales y temporales a usar en futuros trabajos.

### **Caracterización de la convección natural.**

Se establece la relación entre los números de Nusselt y Rayleigh para describir el fenómeno de convección natural y su relación con el intercambio de calor en la IAS, a partir de las ecuaciones propuestas por McAdams (1954).



## **1.4 Organización del informe**

En el capítulo 2 se presenta una revisión bibliográfica que incluye un análisis de la temperatura, el factor más relevante en el estudio. Además, se discuten los números adimensionales que dominan el intercambio de calor en la interfaz agua-sedimento. Se entrega una descripción del fenómeno de turbulencia, así como de las escalas involucradas en el proceso y del enfoque necesario al momento de determinar las discretizaciones espaciales y temporales en un modelo que pretende representar la realidad de manera adecuada. En la misma línea, se muestran las características más importantes del método espectral, base del modelo Flow Solve, y las condiciones que garanticen potencialmente la convergencia de las ecuaciones diferenciales involucradas. Por último, se definen los números de Nusselt y Rayleigh y su relación para caracterizar el proceso de convección natural.

En el capítulo 3 se presenta la definición y descripción detallada del sistema y escenarios evaluados. Se describen las ecuaciones, parámetros relevantes, condiciones iniciales y de borde, y supuestos. Se define el sistema a evaluar, así como su relación con el ecosistema real que lo motiva. Se exponen los forzantes que permiten intercambiar heterogeneidad en las condiciones de borde por heterogeneidad en las ecuaciones. Se presentan los escenarios a evaluar en función de calor absorbido en los sedimentos, altura de cuerpo de agua y periodo de evaluación. Por último, se describe un método de verificación del modelo a partir del balance de masa.

En el capítulo 4 se presentan los resultados de las simulaciones, así como un análisis de éstas. Se conectan los parámetros que definen los escenarios por medio de números adimensionales. Se presenta una forma de extrapolar los resultados. Se discute los órdenes de magnitud de las discretizaciones espacial y temporal en virtud de las escalas de Kolmogorov y condiciones de convergencia. Se determina la relación entre los números de Nusselt y Rayleigh para describir el fenómeno de convección natural.

El capítulo 5 presenta las conclusiones desarrolladas a partir del análisis presentado en el capítulo 4. Se destacan los resultados más relevantes, así como su aplicación a futuros estudios relacionados con el tema.

## Capítulo 2 Revisión bibliográfica

El factor de mayor relevancia en el fenómeno de intercambio de calor entre agua y sedimento es la temperatura, no sólo en el cuerpo de agua en sí, sino que también en los sedimentos. A pesar de que ha sido estudiada extensivamente junto con la estratificación termal en lagos, el régimen térmico relacionado con los sedimentos ha sido omitido. Esto condujo a Fang y Stefan (1998) a estudiar dicha variable. Concluyeron que la temperatura media anual en sedimentos situados en las partes profundas de un lago es menor que la de aquellos ubicados en zonas superficiales, siendo esta última típicamente 2-3° mayor que la temperatura media anual del aire de la región geográfica. Las simulaciones de Fang y Stefan (1998) determinaron que la influencia de la temperatura del agua sobre la de los sedimentos es muy grande, en especial en lagos profundos. Además, determinaron que el intercambio de calor entre el medio acuático y los sedimentos en sistemas someros puede ser sustancial, no sólo a nivel estacional, sino que incluso a nivel diario.

La temperatura de un flujo es influenciada por factores antropogénicos, climáticos e hidrogeológicos. Los intercambios de calor entre el agua y la atmósfera se producen mediante radiación de onda larga y corta, convección y evaporación a través de la superficie del agua. En flujos someros, el intercambio entre el lecho y el agua puede ser de influencia, de acuerdo a lo expresado por Sinokrot y Stefan (1993). Edinger, et al (1968) establecieron que desarrollar una ecuación de temperatura del agua para un tipo particular de cuerpo de agua era un problema difícil e interesante. En estudios anteriores de interacción flujo-atmósfera, la temperatura del aire fue usada como el único parámetro para describir condiciones atmosféricas.

de la Fuente (2014) realizó un estudio acerca de intercambio de calor y oxígeno disuelto entre agua y sedimento en lagunas del salar de Huasco, analizando los procesos que ocurren a ambos lados de la interfaz. El principal afluente a estas lagunas es el agua subterránea que aflora en los perímetros del salar. El ecosistema acuático y la flora circundante mantienen importantes poblaciones de mamíferos, peces y aves. Entre ellas hay tres especies de flamencos que se encuentran en un estado de conservación vulnerable, por lo que se hace necesario cuantificar y predecir la producción de diatomeas bentónicas, el alimento de estos animales. Esta producción define el tamaño de la población de flamencos y una de las principales variables que la controla es la temperatura. Aunque el trabajo de de la Fuente fue elaborado con datos de un salar extremadamente somero en el altiplano chileno, existen ecosistemas acuáticos similares en otras regiones de la Tierra, como en la península de Baja California, México (del Castillo and Farfán, 1997). Entre sus resultados destaca que para condiciones calmadas (escaso viento) una interfaz sobrecalentada produce convección natural inestable en la columna de agua, lo cual actúa como fuente alternativa de energía cinética que promueve el transporte vertical en ausencia de viento.

## 2.1 Números adimensionales

De la Fuente y Meruane (2017) definen dos números adimensionales para describir los regímenes termodinámicos de lagos someros y humedales. Estos números surgen del análisis de la influencia de flujos periódicos de calor en la IAS sobre la temperatura del agua, cuando el sistema es forzado por intercambios periódicos de calor con la atmósfera. El primero (designado por  $\Pi_1$ ) es la razón entre la inercia térmica de los sedimentos activos<sup>1</sup> y la de la columna de agua. Está dado por:

$$\Pi_1 = \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_w} \sqrt{\frac{\kappa_s}{2\omega h_w^2}} \quad (2.1)$$

Donde:

$(\rho c_p)_s$ : Capacidad calorífica de los sedimentos [ $J/(m^3 \cdot C)$ ].

$(\rho c_p)_w$ : Capacidad calorífica del agua [ $J/(m^3 \cdot C)$ ].

$\kappa_s$ : Difusividad térmica de los sedimentos [ $m^2/día$ ].

$\omega$ : Frecuencia de oscilación [rad/s].

$h_w$ : Altura del cuerpo de agua [cm].

$\Pi_1$  cuantifica el rol de los sedimentos en el balance de calor. La influencia del flujo de calor en la IAS ( $H_g$ ) sobre la temperatura del agua ( $T_w$ ) crece con  $\Pi_1$ . Además, se alcanzan grandes valores de  $\Pi_1$  cuando se tienen bajas frecuencias.

El segundo número adimensional (designado por  $\Pi_2$ ) es la razón entre la escala de tiempo de cambios en el forzante externo y la escala de tiempo requerida para alcanzar el equilibrio térmico en la IAS. Está dado por:

$$\Pi_2 = \frac{k_t}{\omega h_w} \quad (2.2)$$

Donde:

$k_t$ : Velocidad de transferencia de calor en la IAS [m/s].

$\Pi_2$  caracteriza la influencia que tiene la turbulencia en el cuerpo de agua sobre los intercambios de calor en la IAS. Cuantifica cómo afecta  $k_t$  a  $H_g$ , de modo que si  $\Pi_2 > 5$ ,  $k_t$  es suficientemente grande como para que  $H_g$  esté condicionado por la difusión de calor en los sedimentos y no por difusión turbulenta en el cuerpo de agua.  $\Pi_2$  es inversamente proporcional a  $\omega$ , así que el valor de  $k_t$  es importante sólo para altas frecuencias, lo que explica cambios en la temperatura del agua a la escala de tiempo horaria. Además, es

---

<sup>1</sup> Sedimentos cerca de la IAS.

importante notar que  $\Pi_2$  disminuye a medida que se incrementa la  $h_w$ , por lo que el valor de  $k_t$  se hace relevante en cuerpos de agua profundos.

De este modo, se espera que el efecto de los flujos de calor intercambiados en la IAS sea relevante para valores grandes de  $\Pi_1$ , lo que ocurre en lagos someros a frecuencias pequeñas. En consecuencia, los sedimentos pueden ser ignorados a la escala de tiempo diaria, mientras que deben ser incluidos para frecuencias asociadas a periodos estacionales o de décadas. En el caso de  $\Pi_2$ , se concluye que es proporcional a  $H_g$  y que el transporte turbulento a través de la IAS sólo es relevante cuando  $\Pi_2$  es débil (toma valores inferiores a 2) con respecto a la difusión en el lado de los sedimentos.

Por último, de la Fuente y Meruane relacionan los números adimensionales  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  con la amplitud térmica del agua ( $\Delta T_w$ ), el flujo de calor en la interfaz ( $H_g$ ), la frecuencia angular ( $\omega$ ) y la altura del cuerpo de agua ( $h_w$ ), según la ecc. (2.3) (adaptada a la terminología usada en esta memoria).

$$\frac{\Delta T_w}{H/\Omega} = \left( i + \Pi_2 \left( 1 - \frac{\Pi_2}{\Pi_2 + \Pi_1} \right) \right)^{-1} \quad (2.3)$$

$$\Omega = \omega h_w (\rho c_p)_w \quad (2.4)$$

Donde:

H: Amplitud del flujo de calor en la interfaz agua-aire cuando es expandido en serie de Fourier [ $W/m^2$ ].

Considerando que en su estudio el forzante corresponde a flujos periódicos de calor en la interfaz agua-aire (IAA), mientras que la presente memoria examina el forzante representado por una inyección periódica de calor en la capa superior de los sedimentos ( $H_s$ ), se prevé una situación análoga que permita relacionar  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  con  $\Delta T_w$ ,  $\omega$ ,  $h_w$  y  $H_s$  de forma adimensional, es decir, de la siguiente manera:

$$\frac{\Delta T_w}{H_s/\Omega} = f(\Pi_1, \Pi_2) \quad (2.5)$$

## 2.2 Turbulencia y escalas de Kolmogorov

En mecánica de fluidos, la turbulencia es un régimen caracterizado por cambios caóticos en la presión y velocidad del flujo, a diferencia del régimen laminar, que se produce cuando un fluido circula en capas paralelas sin interrupción entre ellas (Batchelor, 2000).

Se presenta comúnmente en fenómenos cotidianos como el surf, ríos caudalosos, nubes tempestuosas, el humo de las chimeneas y en la mayoría de las aplicaciones ingenieriles (Tennekes y Lumley, 1972). Es causada por excesos de energía cinética en partes de un flujo, que superan el efecto amortiguador causado por la viscosidad del fluido.

Los flujos turbulentos son siempre altamente irregulares, por lo que los problemas relacionados normalmente son tratados de manera estadística más que determinística. El inicio de la turbulencia puede predecirse por una constante adimensional conocida como número de Reynolds, que calcula el balance entre la energía cinética y la mitigación viscosa en un flujo. En contraste con el régimen laminar, la turbulencia se asocia con los altos números de Reynolds, donde las fuerzas inerciales dominan a las viscosas (George, 2013). Aparecen vórtices inestables en varias escalas que interactúan entre sí. Además, aumenta el arrastre provocado por fricción en la capa límite.

En flujos turbulentos, el suministro de energía fácilmente disponible tiende a acelerar la homogeneización de mezclas fluidas. La característica responsable de esta mezcla reforzada y del aumento de las tasas de transporte de masa, momentum y energía se conoce como difusividad. Usualmente es descrita por un coeficiente de difusión turbulenta, el cual es definido en un sentido fenomenológico por analogía con las difusividades moleculares, ya que no tiene un verdadero significado físico, pues depende de las condiciones del flujo y no de una propiedad del fluido en sí (Landhal, 2012).

Los flujos turbulentos se caracterizan por un fuerte mecanismo tridimensional generador de vórtices conocido como estiramiento de vórtices, principal proceso de la cascada de energía<sup>2</sup>. Este mecanismo, inercial y esencialmente no viscoso, implica un adelgazamiento en la dirección perpendicular al estiramiento como resultado de la conservación de volumen, provocando una disminución de la escala de longitud radial, y las estructuras más grandes se descomponen en partes más pequeñas. La transformación continúa hasta que las estructuras más diminutas son lo suficientemente chicas como para que su energía cinética sea transformada en calor por la viscosidad del fluido, lo que ocurre a la escala de Kolmogorov.

Para mantener un flujo turbulento se requiere una inyección constante de energía ya que la turbulencia se disipa rápidamente a medida que la energía cinética es convertida en energía interna por esfuerzos de corte viscosos. La turbulencia produce eddies, arremolinamientos de un fluido y la corriente reversa creada cuando éste pasa por un obstáculo, que tienen varias escalas de longitud.

Las microescalas de Kolmogorov son las escalas más pequeñas en flujo turbulento. A esta escala domina la viscosidad y la energía cinética es disipada en forma de calor. En su teoría

---

<sup>2</sup> Una cascada de energía se refiere a la transferencia de energía desde grandes escalas de movimiento a escalas más pequeñas.

de 1941, Andrey Kolmogorov introdujo la idea que las escalas más pequeñas de turbulencia son universales (similares para cada flujo turbulento) y que dependen sólo de la viscosidad cinemática y la tasa de disipación de energía cinética turbulenta (ECT), por lo que pueden ser definidas a partir de esta idea y análisis dimensional. Así, las escalas de longitud, tiempo y velocidad se definen según las ecuaciones (2.6), (2.7) y (2.8) respectivamente (Landahl y Mollo-Christensen, 1992). Para análisis bidimensional, la tasa de disipación promedio de ECT por unidad de masa ( $\epsilon$ ) puede estimarse mediante (2.9) (Hoque, 2015). En fluidos turbulentos  $\epsilon$  fluctúa en el tiempo y el espacio, por lo que es posible pensar que las microescalas son cantidades que también cambian según estas variables, sin embargo, en la práctica se usan magnitudes promedio ya que representan los valores típicos de las escalas más pequeñas en un flujo dado.

Valores típicos de la escala de longitud de Kolmogorov para movimiento atmosférico se encuentran en el rango 0,1 – 10 mm; para flujos más pequeños, tales como experimentos de laboratorio como los que se pretende modelar en este trabajo,  $\eta$  puede ser mucho menor (George, 2013).

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.6)$$

$$\tau_\eta = \left( \frac{\nu}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.7)$$

$$u_\eta = (\nu\epsilon)^{\frac{1}{4}} \quad (2.8)$$

$$\epsilon = \nu \left\{ 2 \left[ \overline{\left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2} + \overline{\left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2} \right] + 3 \overline{\left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2} + 3 \overline{\left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2} + 2 \overline{\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y}} \right\} \quad (2.9)$$

Donde:

$\eta$ : Escala de longitud [m]

$\tau_\eta$ : Escala de tiempo [s]

$u_\eta$ : Escala de velocidad [m/s]

$\epsilon$ : Tasa de disipación promedio de ECT por unidad de masa. Tasa a la cual la ECT se convierte en energía térmica interna. [J/(kg s)]

$\nu$ : Viscosidad cinemática del agua [m<sup>2</sup>/s].

Para que el modelo numérico proporcione una representación adecuada del proceso de intercambio de calor en los escenarios examinados, debe considerar todas las escalas de turbulencia. Las escalas de Kolmogorov suministran un orden potencial del espaciamiento de la grilla y el paso temporal adecuados para las simulaciones, sin embargo, presentan el problema de que actúan como verificadores en vez de predictores. Como la tasa de disipación de energía depende de las velocidades del sistema, las escalas no pueden calcularse a priori. Además, no son el único limitante del correcto funcionamiento del modelo, ya que éste depende matemáticamente de la convergencia de las ecuaciones diferenciales involucradas. Aun así, uno de los objetivos de la memoria es corroborar la efectividad de las escalas de Kolmogorov como parámetro verificador y entregar un orden de las escalas de longitud que se presentan en los experimentos relacionados con los flujos de calor en la interfaz agua-sedimento.

### **2.3 Método espectral y convergencia**

Las simulaciones se llevarán a cabo usando el modelo Flow Solve, desarrollado por el académico estadounidense Kraig Winters. Dicho modelo se basa en el uso de métodos espectrales, una clase de técnicas utilizadas en matemáticas aplicadas y computación científica para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales, involucrando el concepto de Transformada Rápida de Fourier para el cálculo de derivadas espaciales. La idea es escribir la solución como una suma de ciertas funciones básicas (por ejemplo, senos y cosenos) y luego elegir los coeficientes en la suma que satisfacen la ecuación diferencial de la mejor manera posible. A diferencia del método de elementos finitos, que aborda el problema de manera local, el método espectral ocupa un enfoque global, al usar funciones base que son no nulas en todo el dominio, en lugar de simplemente en pequeños subdominios. Por esta razón tiene excelentes características, como alcanzar una rápida convergencia cuando la solución es suave (Canuto et al, 2007), una gran precisión numérica, carecer de difusión numérica y errores de fase, y ser computacionalmente menos costoso que el método de elementos finitos. Así, el objetivo de Flow Solve es tomar ventaja de las propiedades numéricas de métodos basados en expansiones en términos de funciones trigonométricas en aplicaciones para las que se tienen condiciones de borde heterogéneas y/o dominios irregulares. El concepto subyacente es el intercambio de heterogeneidad de las condiciones de borde a partir de términos forzantes en las ecuaciones diferenciales (Winters y de la Fuente, 2012).

En general, la aplicación de métodos espectrales a grillas periódicas tiende a tener restricciones de estabilidad más estrictas que sus contrapartes en diferencias finitas. Esto es opuesto a lo que la condición CFL<sup>3</sup> podría sugerir: el dominio numérico de dependencia de un método espectral es ilimitado, así que no hay un límite de estabilidad CFL

---

<sup>3</sup> La condición de Courant–Friedrichs–Lewy es una condición necesaria para la convergencia de ciertas ecuaciones diferenciales parciales al ser resueltas numéricamente por el método de diferencias finitas. Se presenta al usar esquemas de integración explícita en el tiempo. Como consecuencia, el paso temporal debe ser inferior a un cierto tiempo en las simulaciones computacionales.

(Trefethen, 1996). A pesar de ello, los métodos espectrales permiten valores más grandes de discretización espacial ( $\Delta z$ ) que los métodos de diferencias finitas, debido a su alto orden de precisión espacial. Así, si las restricciones son de la forma  $\Delta t/\Delta z < cte$ , se requieren pasos temporales ( $\Delta t$ ) relativamente pequeños para evitar grandes errores por discretización temporal.

La elección de la discretización espacial y el paso temporal depende de dos tipos de condiciones: físicas y matemáticas. Por un lado, deben ser tan pequeñas como para considerar todas las escalas asociadas a la turbulencia, mientras que al mismo tiempo deben ser tales que garanticen la convergencia de las ecuaciones diferenciales. Como las escalas de Kolmogorov dependen de la velocidad en cada punto del sistema, primero debe resolverse el problema y luego corroborar la condición física. Aun así, es posible determinar un orden para  $\Delta z$  y  $\Delta t$  que sirva de referencia para futuras simulaciones.

## 2.4 Relación entre números de Rayleigh y Nusselt

El número de Rayleigh ( $Ra$ ) es un número adimensional asociado a flujos dominados por convección natural (también llamada convección libre). Cuando se encuentra bajo cierto valor crítico para ese fluido, la transferencia de calor se produce principalmente en forma de conducción. Cuando excede dicho valor, el calor se transfiere primordialmente por convección. Generalmente, la convección comienza para valores del número de Rayleigh mayores a mil, mientras que para valores inferiores a diez la transferencia de calor es completamente por conducción. El número de Rayleigh se define como el producto entre el número de Grashof ( $Gr$ ), que describe la relación entre flotabilidad y viscosidad dentro de un fluido, y el número de Prandtl ( $Pr$ ), que determina la relación entre difusividad de momentum y difusividad térmica (Chandrasekhar, 1961).

De acuerdo a Necati (1985), el número de Rayleigh para convección libre en una placa caliente está dado por:

$$Ra = Gr \cdot Pr = \frac{g\beta(T_{pl} - T_{\infty})L^3}{\nu\kappa} \quad (2.10)$$

Donde:

$g$ : Aceleración de gravedad [ $m/s^2$ ].

$\beta$ : Coeficiente de expansión termal [ $1/^\circ C$ ].

$T_{pl}$ : Temperatura en la placa [ $^\circ C$ ].

$T_{\infty}$ : Temperatura del fluido a una distancia lejana de la placa [ $^\circ C$ ]. Puede aproximarse por la temperatura promedio del fluido.

$L$ : Longitud característica del problema [ $m$ ].

$\nu$ : Viscosidad cinemática [ $m^2/s$ ].

$\kappa$ : Difusividad térmica [ $m^2/s$ ].



El número de Nusselt ( $Nu$ ) es un número adimensional definido como la razón entre las transferencias de calor por convección y conducción a través de una frontera. En este contexto, el término convección incluye tanto a la advección como a la difusión. Un número de Nusselt cercano a 1, es decir, para convección y conducción de magnitudes similares, es característico de flujos laminares. Asimismo, valores mayores de  $Nu$  corresponden a mayor convección activa, con valores típicos en el rango 100 – 1000 para flujos turbulentos (Cengel, 2002).

Según Necati (1985), el número de Nusselt promedio se define como:

$$Nu_m = \frac{h_m L}{k} = \frac{\text{Transferencia de calor por convección}}{\text{Transferencia de calor por conducción}} \quad (2.11)$$

Donde:

L: Longitud característica [m].

k: Conductividad térmica del fluido [ $W/(m^\circ C)$ ].

$h_m$ : Coeficiente de transferencia de calor [ $W/(m^2^\circ C)$ ].

Ambas transferencias se consideran paralelas entre sí y perpendiculares al flujo.

El número de Nusselt promedio para convección libre en una placa horizontal depende de si la superficie está boca arriba o abajo y de si está más caliente o fría que el fluido circundante. De acuerdo a McAdams (1954), el número de Nusselt promedio para convección libre en una placa caliente horizontal a temperatura uniforme se correlaciona con una expresión de la forma:

$$Nu = c(Ra)^n \quad (2.12)$$

Donde c y n son constantes que dependen de la orientación de la placa y del número de Rayleigh. Si se considera una superficie caliente mirando hacia arriba, se tiene:

Tabla 2-1: Determinación de constantes del n° de Nusselt según el n° de Rayleigh.

Ra	c	n	Tipo de régimen
$10^5 - 2 \cdot 10^7$	0,54	0,25	Laminar
$2 \cdot 10^7 - 3 \cdot 10^{10}$	0,14	1/3	Turbulento

Se plantea como hipótesis que una de las ecuaciones obtenidas con estos coeficientes puede ser aplicada al intercambio de calor en la IAS.

## Capítulo 3 Definición del sistema y escenarios evaluados

### 3.1 Descripción de parámetros y relaciones importantes

En base al objetivo principal, es decir, la influencia del intercambio de calor en la IAS, debe calcularse el flujo de calor en la interfaz, así como la temperatura promedio de la columna de agua. Para ello, se utilizan las ecuaciones de movimiento considerando la aproximación de Boussinesq (Winters et al, 2004), que asume que las fluctuaciones de densidad son pequeñas en relación al valor de referencia y en consecuencia se usa  $\rho_0$  en vez de  $\rho$  excepto cuando está multiplicada por  $g$ . De esta forma, se considera en toda la memoria que el símbolo  $\rho$  es la densidad de Boussinesq.

A continuación, se presentan las Ecuaciones de movimiento en función de la densidad.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} + \frac{g\rho}{\rho_0} \hat{z} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \vec{v} + \vec{F}_1(\vec{r}, t) + \vec{F}_3(\vec{r}, t) \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho = \kappa \nabla^2 \rho + \vec{F}_2(\vec{r}, t) \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.3)$$

Donde:

$\vec{r}$ : Vector posición [m].

$\vec{v}$ : Vector velocidad en la posición  $\vec{r}$  [m/s].

$g$ : Aceleración de gravedad. 9,8 [m/s<sup>2</sup>].

$\rho_0$ : Densidad de referencia [kg/m<sup>3</sup>].

$\rho$ : Densidad de Boussinesq [kg/m<sup>3</sup>]. Es la densidad con respecto a  $\rho_0$  en  $\vec{r}$ .

$p$ : Presión en la posición  $\vec{r}$  [Pa].

$\nu$ : Viscosidad cinemática [m<sup>2</sup>/s].

$\kappa$ : Difusividad térmica [m<sup>2</sup>/s].

$\vec{F}_1$ : Forzante densidad.

$\vec{F}_2$ : Término calor.

$\vec{F}_3$ : Término roce.

Los términos  $\vec{F}$  se describen en la sección 3.4

La variable de interés es la temperatura, por lo que se establece la relación:

$$T = \left(T_0 - \frac{1}{\beta}\right) + \frac{\rho_0}{\beta} \cdot \frac{1}{(\rho + \rho_0)} \quad (3.4)$$

Donde:

$T_0$ : Temperatura de referencia [°C].

$T$ : Temperatura en la posición  $\vec{r}$  [°C].

$\beta$ : Coeficiente de expansión termal [1/°C].

De este modo, se encuentra el valor de la densidad en cada posición con las ecuaciones (3.1) a la (3.3), para luego aplicar la transformación (3.4) obteniendo la temperatura.

### 3.2 Descripción de situación real que motiva el trabajo

En la región altiplánica de la Cordillera de los Andes existen lagunas someras de algunos centímetros de profundidad denominadas salares (Figura 3-1); grandes extensiones de agua salada acotadas por una cáscara de sal en sus extremos, como resultado de las altas tasas de evaporación. Un ejemplo de esto es el Salar de Huasco, un humedal protegido por la Convención de Humedales de Importancia y también parque nacional localizado en la región de Tarapacá. La base del salar se ubica a aproximadamente 3800 m de altura, la laguna salada tiene una superficie de aprox. 200 ha y una profundidad de unos pocos centímetros.



*Figura 3-1: Laguna en Salar del Huasco en la mañana con condiciones calmas sin viento. (de la Fuente y Meruane, 2016)*

Una parte de la radiación solar se absorbe en la columna de agua, mientras que el resto calienta directamente la capa superior de los sedimentos. Diversas investigaciones (de la Fuente, 2014) han demostrado que la temperatura del agua puede variar en 20-30 °C en el día y que los sedimentos cumplen la función de reservorios, reteniendo calor durante el día y liberándolo en la noche, reduciendo de esta manera la oscilación termal diaria. Los intercambios de calor en la IAS corresponden a un flujo difusivo cuya magnitud y dirección depende del gradiente de temperatura en la IAS, condiciones turbulentas en la columna de agua y difusión molecular de calor en los sedimentos. De este modo, la situación es determinada por procesos ocurrientes a ambos lados de la IAS, perspectiva que debe usarse al proponer modelos conceptuales. Sin embargo, raramente se considera en estudios y de hacerlo el calentamiento de los sedimentos por absorción de radiación solar no se analiza.

### 3.3 Definición geométrica del sistema y condiciones de borde

Con el fin de estudiar el efecto de los sedimentos en el intercambio de calor en la IAS, se utiliza el modelo de la Figura 3-2.

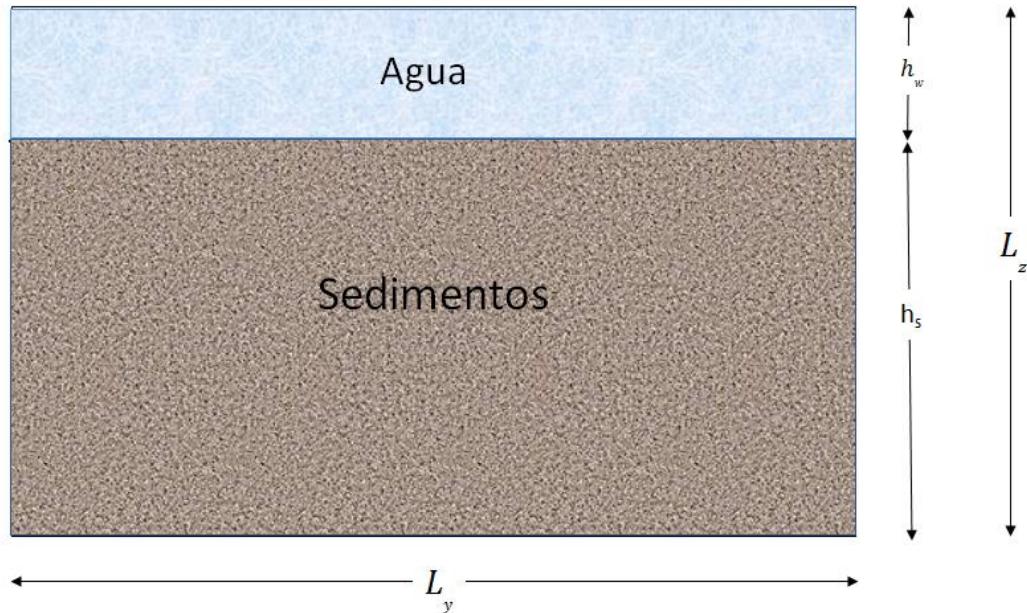


Figura 3-2: Modelo simplificado de salar.

Notación:

$h_w$ : Altura de la columna de agua [m].

$h_s$ : Altura de los sedimentos [m].

$L_z$ : Altura total, agua y sedimentos [m].

$L_y$ : Largo considerado de la laguna, tal que no incluya las costras de sal en los extremos [m].

Hay condiciones periódicas en los extremos izquierdo y derecho (lo cual permite el uso de métodos espectrales), es decir, la temperatura y las velocidades en el eje  $y$  (designada como  $v$ ) y el eje  $z$  (designada como  $w$ ) en los extremos laterales es la misma. Además, el sistema está abierto en estos bordes (se permite intercambio de masa y energía). Así, se tiene:

$$\begin{aligned}T(0, z, t) &= T(L_y, z, t) \\v(0, z, t) &= v(L_y, z, t) \\w(0, z, t) &= w(L_y, z, t)\end{aligned}\tag{3.5}$$

donde  $T$  representa la temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ ) y los parámetros se describen en función de la posición y el tiempo, es decir  $(y,z,t)$ .

En el extremo inferior el sistema está aislado, por lo que el flujo de calor es nulo. Además, al haber sedimentos, las velocidades son nulas.

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial z}(y, 0, t) &= 0 \\ v(y, z \leq h_s, t) &= 0 \\ w(y, z \leq h_s, t) &= 0\end{aligned}\tag{3.6}$$

El sistema está cerrado en el extremo superior, no hay intercambio de masa, pero sí de calor. La velocidad en  $y$  cumple la condición de resbalamiento libre. De este modo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial z}(y, L_z, t) &= 0 \\ w(y, L_z, t) &= 0\end{aligned}\tag{3.7}$$

No se considera la acción del viento y no se incluye la absorción de radiación solar (directa) en el cuerpo de agua, para analizar únicamente el efecto provocado por el calor retenido en los sedimentos.

Los sedimentos se consideran como un medio continuo no poroso. En términos del programa, los sedimentos se tratan como el agua, pero sus velocidades son anuladas por medio de forzantes.

En la IAS se inyecta calor de forma periódica, con el fin de representar el almacenamiento y expulsión de calor por parte de los sedimentos en el día y la noche respectivamente.

### 3.4 Definición de forzantes

El modelo numérico usa las ecuaciones de movimiento en función de la densidad. (Ec. (3.1) a la (3.3)). Los bordes opuestos deben tener condiciones homogéneas para que el método espectral pueda ser aplicado.

En el caso de la densidad se presenta una condición de borde de Neumann en el extremo inferior (flujo de calor nulo), mientras que en la parte superior no se conoce el flujo. Para superar este problema, se utiliza el término forzante  $F_1$  (ya visto en la ecc. (3.1)).

$$F_1 = -\frac{1}{t_{rel}} \cdot \rho \cdot e^{\left(-\left(\frac{L_z - z}{\sigma_\rho}\right)^4\right)} \quad (3.8)$$

Donde:

$t_{rel}$ : Tiempo de relajo. Corresponde al tiempo necesario para que el forzante desempeñe su labor. Es un tiempo de desfase. [s]

$\sigma_\rho$ : Escala de longitud proporcional al espaciamiento de la grilla [m].

El objetivo de esta función es lograr que  $\rho$  sea nulo en el extremo superior. De este modo las condiciones de borde arriba y abajo son del mismo tipo (Neumann), permitiendo una ejecución adecuada del método espectral.

La función de absorción de calor mencionada en la ecc. (3.2) tiene la siguiente forma (de la Fuente, 2014):

$$F_2 = -\frac{H_s \cdot k_l}{(\rho c_p)_s} \cdot \beta \cdot \rho_0 \cdot \exp(k_l \cdot (z - h_s)) \quad (3.9)$$

Donde:

$H_s$ : Radiación solar de onda corta que calienta la parte alta de los sedimentos [ $W/m^2$ ].

$k_l$ : Coeficiente de extinción. Permite simular el decaimiento de la penetración de la radiación solar en la capa superior de los sedimentos. [ $1/m$ ]

$(\rho c_p)_s$ : Capacidad calorífica de los sedimentos [ $J/(m^3 \text{ } ^\circ C)$ ]

$h_s$ : Coordenada  $z$  de la IAS (y altura de los sedimentos) [m].

Como arriba el sistema está cerrado y abajo hay sedimentos, las condiciones para  $w$  ya son del mismo tipo (Dirichlet,  $w = 0$ ). En el caso de  $v$ , en el extremo superior se tiene una condición de resbalamiento libre (Neumann) y abajo hay sedimentos (velocidad nula, Dirichlet). Con el fin de modificar la condición inferior y forzar la anulación de  $v$  (y  $w$ ) en los sedimentos, se ocupa la siguiente función:

$$\vec{F}_{3v} = \begin{cases} -k_{arr} \cdot v & ; z < z_{IAS} \\ -k_{arr} \cdot v \cdot \exp\left(-\left(\frac{z - z_{IAS}}{\sigma_{vw}}\right)^4\right); & z \geq z_{IAS} \end{cases} \quad (3.10)$$

Donde:

$k_{arr}$ : Coeficiente de arrastre. Determina el intervalo bajo la IAS donde el valor de  $v$  experimenta una transición hasta anularse. [1/s]

$\sigma_{vw}$ : Escala longitud proporcional al espaciamiento de la grilla [m].

Se ocupa una función análoga para  $w$ . Cumplen el rol de anular las velocidades en las posiciones de los sedimentos con una transición suave en la IAS.

En el caso de las condiciones de borde laterales, todas son periódicas, tal como se expresó anteriormente.



### 3.5 Definición de escenarios

A continuación, se presentan los valores considerados en las simulaciones. En el caso de la densidad, el valor inicial presentado es un promedio, alrededor del cual se toma una perturbación en cada posición cuya amplitud es  $10^{-7}$ , de este modo  $\rho(y, z, 0) \in [10^{-4} - 10^{-7}; 10^{-4} + 10^{-7}] \text{ kg/m}^3$ . La elección de este valor está basada en las mediciones de de la Fuente (2014).

La Figura 3-3 muestra la temperatura promedio del agua (línea continua) durante dos días y medio del mes de octubre del 2012. Se observa que varía entre aprox. 4 – 24 °C. Así, se toma el valor medio como temperatura característica, de modo que para la condición inicial se usa  $T=14^\circ\text{C}$ . Además, esta temperatura se ocupa para los cálculos de los parámetros fijos de la Tabla 3-2 que dependen de ésta.

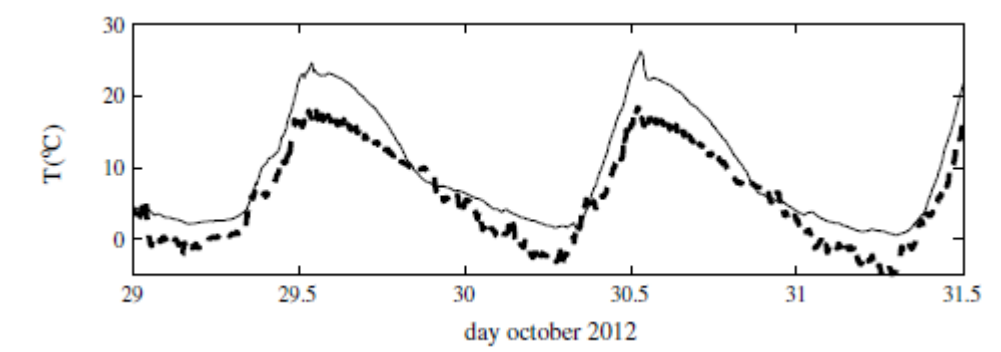


Figura 3-3: Temperatura del agua (línea continua) y del viento (línea punteada) medidas en Salar del Huasco, de la Fuente (2014).

Tabla 3-1: Condiciones iniciales.

Variable	Unidad	Valor
$v(y, z, 0)$	m/s	0
$w(y, z, 0)$	m/s	0
$\rho(y, z, 0)$	kg/m <sup>3</sup>	$10^{-4}$
$T(y, z, 0)$	°C	14

Tabla 3-2: Parámetros fijos.

Parámetro	Unidad	Valor
$k_{arr}$	1/s	0,1
$\beta$	1/°C	0,00015
$\kappa$	$m^2/s$	1,4092E-07
$L_y$	m	0,5
$h_s$	m	0,15
$g$	$m/s^2$	9,8
$\rho_0$	$kg/m^3$	999,2474
$\nu$	$m^2/s$	1,1692E-06
$t_{relaj}$	s	1/3
$k_l$	1/m	820
$(\rho c_p)_s$	$J/(m^3°C)$	2300000
$h_s$	m	0,15
Pr	-	8,3
$(\rho c_p)_w$	$J/(m^3°C)$	4178257
$\sigma_{vw}$	m	$\Delta z^4$
$\sigma_\rho$	m	$3 \Delta z$

Cada escenario queda descrito por los siguientes parámetros:

- Altura de agua ( $h_w$ ). Varía entre 5 y 20 cm.
- Periodo (P). Varía entre 20 minutos y 2 horas.
- Calor absorbido en la capa superior de los sedimentos por unidad de área ( $H_s$ ). Varía entre 133 y 1067  $W/m^2$ .

De este modo, se tienen los experimentos de la Tabla 3-3.

---

<sup>4</sup> Espaciamiento vertical.

Tabla 3-3: Definición de escenarios analizados.

Escenario	$h_w$ [cm]	P [min]	$H_s$ [ $W/m^2$ ]
1	5	20	133
2			267
3			533
4			1067
5		60	133
6			267
7			533
8			1067
9		120	133
10			267
11			533
12			1067
13	10	20	133
14			267
15			533
16		60	133
17			267
18			533
19		120	133
20			267
21	15	20	133
22			267
23			533
24		60	133
25			267
26		120	133
27			267
28	20	20	133
29			267
30		60	133
31			267
32		120	133
33			267

### 3.6 Balance de masa

El teorema de transporte de Reynolds aplicado a la conservación de masa del sistema agua-sedimento se expresa como:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \dot{M}_{entra} - \dot{M}_{sale} - R \quad (3.11)$$

Donde:

R: Absorción de calor en los sedimentos (disminución de masa) y efecto del forzante  $\vec{F}_1$  [kg/s].

La ecc. (3.11) permite corroborar que el modelo se está ejecutando adecuadamente, al verificar que las variables calculadas cumplen con el principio de conservación de masa. A modo de ejemplo, se muestra el análisis del escenario 1 en la Figura 3-4. Se observa una pequeña diferencia entre las expresiones de la ecuación, sin embargo, esto se debe al método de integración usado al efectuar las integrales involucradas en el teorema de transporte de Reynolds, no tan preciso como el ocupado en las simulaciones.

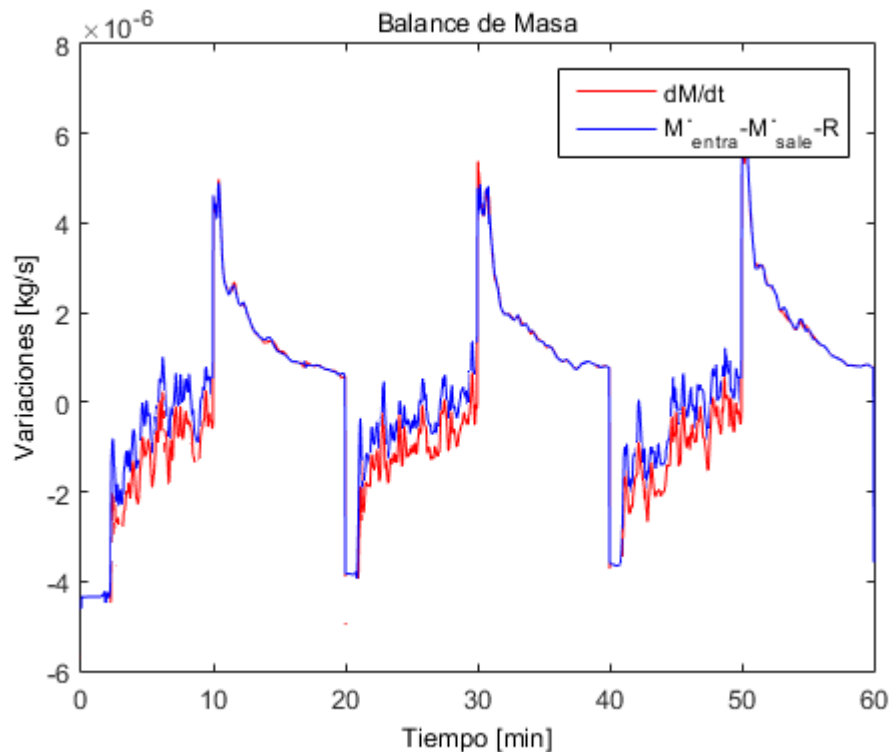


Figura 3-4: Verificación de funcionamiento del modelo mediante balance de masa. La figura corresponde al análisis del escenario 1.

Una observación importante resalta al comparar los flujos de masa laterales. Siguiendo con el escenario 1, la Figura 3-5 grafica los flujos advectivos laterales (cada punto representa un tiempo). La relación entre el flujo que sale por la derecha y el que entra por la izquierda es aproximadamente una recta que pasa por el origen de pendiente  $m \sim 1$ , es decir, son similares. De manera similar, en la Figura 3-6 se ve que los flujos difusivos laterales son semejantes en magnitud, y de un orden menor que los flujos advectivos laterales. De estas observaciones se desprende que los flujos laterales prácticamente se anulan entre sí, y eventualmente pueden ser despreciados en análisis posteriores.

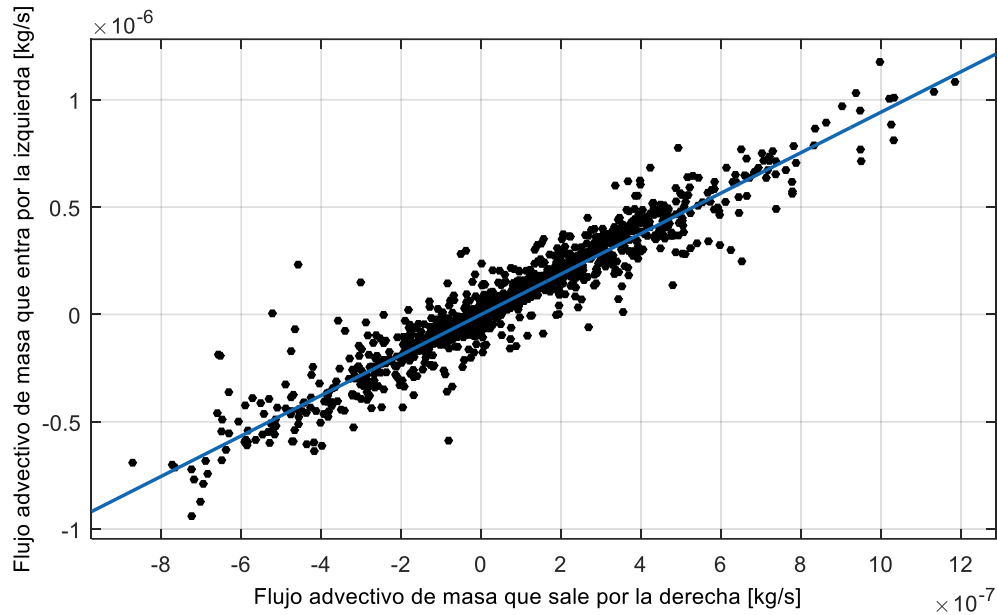


Figura 3-5: Comparación de flujos advectivos de masa laterales. La pendiente de la recta que pasa por el origen es  $m = 0,939$ , con  $R^2 = 0,91$ .

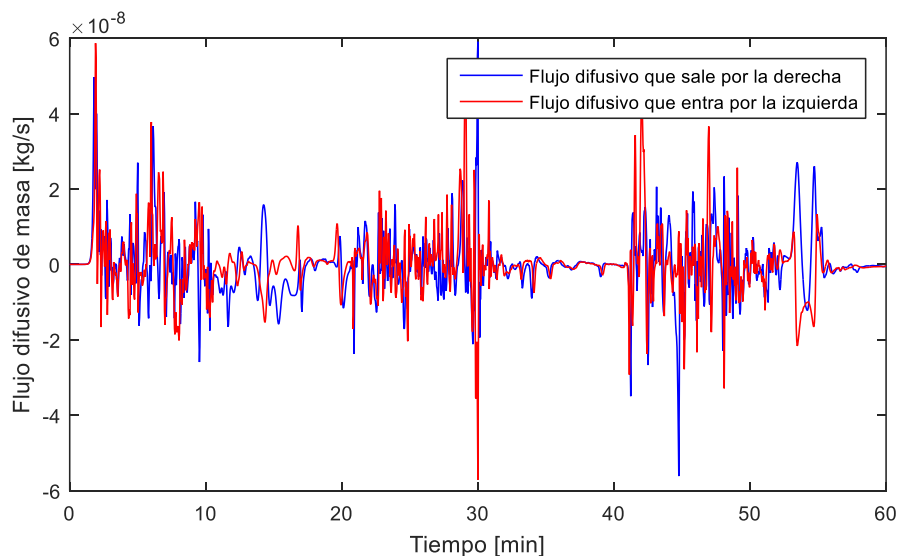


Figura 3-6: Comparación de flujos difusivos de masa laterales.

## Capítulo 4 Análisis y Resultados

La realización de las simulaciones para cada escenario entrega los valores de las diversas variables involucradas como función del tiempo y el espacio. Los resultados correspondientes al primer periodo no se consideran en el análisis, puesto que el sistema es inestable debido a las perturbaciones iniciales. A modo de formalizar la idea de estabilidad, se considera que el modelo se ha estabilizado (con respecto a una variable determinada) cuando dos periodos sucesivos presentan la misma forma en sus gráficos (inspección visual) y sus respectivos valores máximos y mínimos difieren en menos de un 1%. A modo de ejemplo, considérese la Figura 4-1. Se presenta la temperatura promedio del cuerpo de agua como función del tiempo para tres periodos del escenario 1 ( $h_w = 5 \text{ cm}$ ;  $P = 20 \text{ min}$ ;  $H_s = 133 \text{ W/m}^2$ ). Como fue mencionado, es evidente que el primer periodo corresponde a un ciclo de estabilización. Sin embargo, los periodos 2 y 3 tienen formas similares, y los valores máximos y mínimos respectivos de la variable analizada ( $T_w$ ) difieren en menos de un 1% (las diferencias se representan en la figura con los símbolos  $\Delta T_{wmax}$  y  $\Delta T_{wmin}$ ).

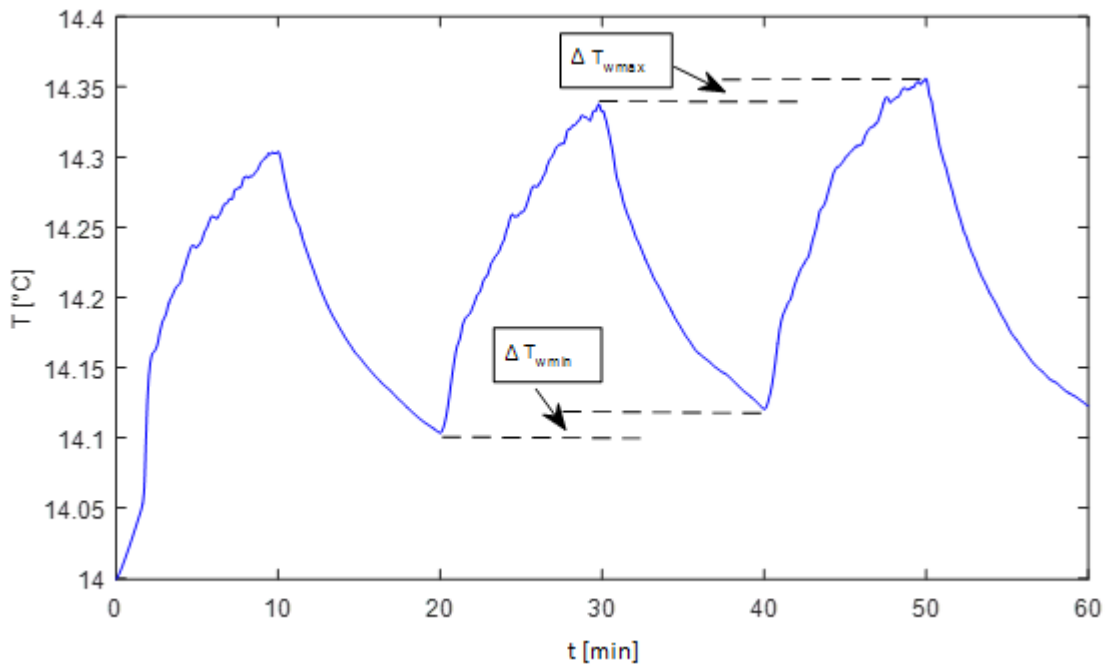


Figura 4-1: Ejemplo de estabilidad.

## 4.1 Amplitud térmica

Promediando la temperatura obtenida en cada punto del espacio ocupado por agua, se obtiene la temperatura promedio del cuerpo de agua ( $T_w$ ) en cada momento. La forma característica de la curva que describe este parámetro se observa en la Figura 4-2, que muestra  $T_w$  en función del tiempo para un periodo estable con las especificaciones del escenario 1 ( $h_w = 5 \text{ cm}$ ;  $P = 20 \text{ min}$ ;  $H_s = 133 \text{ W/m}^2$ ). Se observa que  $T_w$  crece con pendiente decreciente durante la fase de calentamiento, alcanzando un máximo ( $T_{wmax}$ ) que, en general, coincide con el momento en que deja de inyectarse calor en la capa superior de los sedimentos. A partir de este instante, la temperatura disminuye (con pendiente decreciente) hasta alcanzar la misma temperatura que tenía al comienzo del periodo ( $T_{wmin}$ ). A la diferencia entre el máximo y el mínimo que alcanza  $T_w$  se le llama amplitud térmica, y se designará por  $\Delta T_w$ . La Tabla 4-1 contiene los valores de este parámetro para cada escenario. Se observa que  $\Delta T_w$  aumenta con el periodo y el calor absorbido en los sedimentos, mientras que disminuye con la altura del cuerpo de agua.

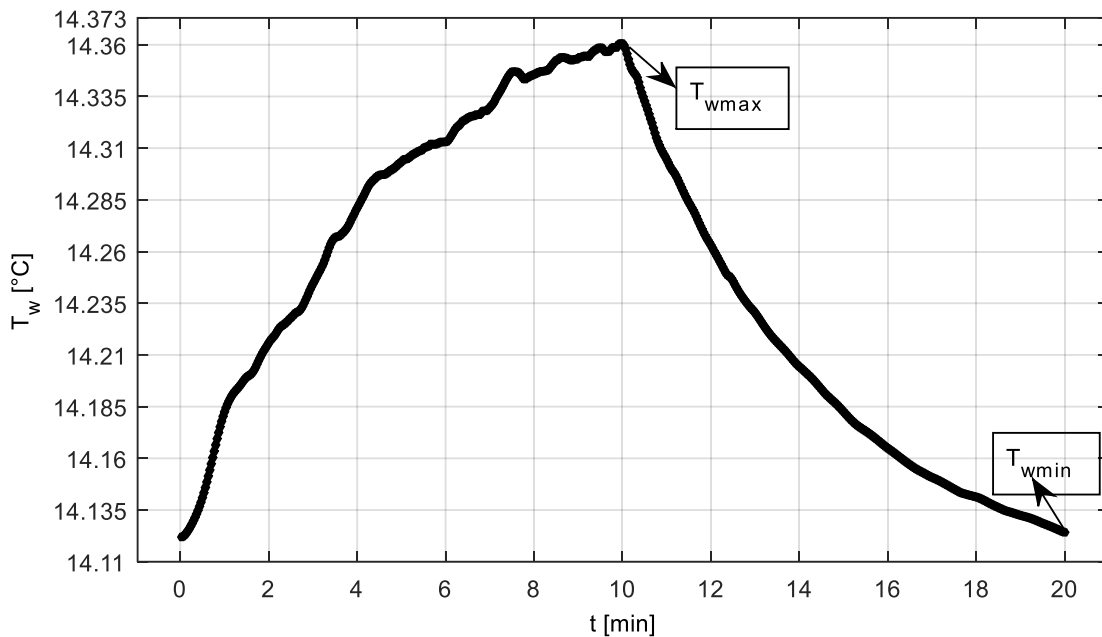


Figura 4-2: Temperatura del agua en función del tiempo. Escenario 1.

Tabla 4-1: Amplitud térmica para cada escenario.

Escenario	$h_w$ [cm]	P [min]	$H_s$ [ $W/m^2$ ]	$\Delta T_w$ [°C]
1	5	20	133	0,24
2			267	0,42
3			533	0,67
4			1067	1,08
5		60	133	0,35
6			267	0,59
7			533	0,85
8			1067	1,29
9		120	133	0,40
10			267	0,62
11			533	0,95
12			1067	1,40
13	10	20	133	0,19
14			267	0,33
15			533	0,59
16		60	133	0,36
17			267	0,56
18			533	0,93
19		120	133	0,43
20			267	0,67
21	15	20	133	0,15
22			267	0,27
23			533	0,46
24		60	133	0,31
25			267	0,51
26		120	133	0,42
27			267	0,69
28	20	20	133	0,13
29			267	0,24
30		60	133	0,28
31			267	0,53
32		120	133	0,44
33			267	0,77



En base a la discusión presentada en la revisión bibliográfica respecto a la potencial relación entre los números adimensionales  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  y las variables  $H$ ,  $h_w$  y  $\omega$  dada en (2.3), se grafican los términos de (4.1) (donde  $Re$  significa parte real), obteniéndose el ajuste exponencial de la Figura 4-3, con  $R^2 = 0,89$ .

$$\frac{2\Delta T_w}{H_s/\Omega} \mapsto f \left( Re \left( \left( i + \Pi_2 \left( 1 - \frac{\Pi_2}{\Pi_2 + \Pi_1} \right) \right)^{-1} \right) \right) \quad (4.1)$$

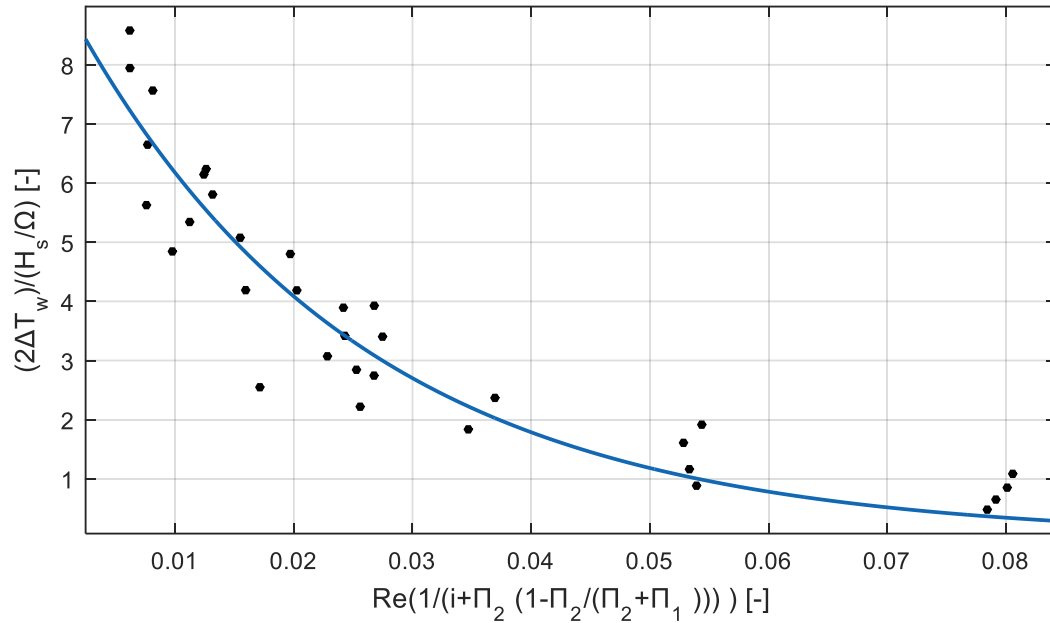


Figura 4-3: Ajuste exponencial de los términos de (4.1).

Sin embargo, si se grafica el término adimensional  $\Delta T_w/(H_s/\Omega)$  en función sólo de  $\Pi_1$  (Figura 4-4), se obtiene un ajuste empírico representado por la ecc. (4.2), una expresión mucho más sencilla que (4.1) y con mayor  $R^2$ .

$$\frac{\Delta T_w}{H_s/\Omega} = a \exp(-b\Pi_1) \quad (4.2)$$

$$a = 5,289$$

$$b = 32,88$$

El coeficiente de determinación es  $R^2 = 0,93$ , un valor alto ya que los puntos de la simulación no distan mucho de la regresión, comprobando la validez del modelo. Las líneas discontinuas muestran los límites del intervalo de confianza correspondiente a una probabilidad de acierto 95%. Sólo un punto queda fuera de este intervalo, y aun así, se encuentra cerca de éste.

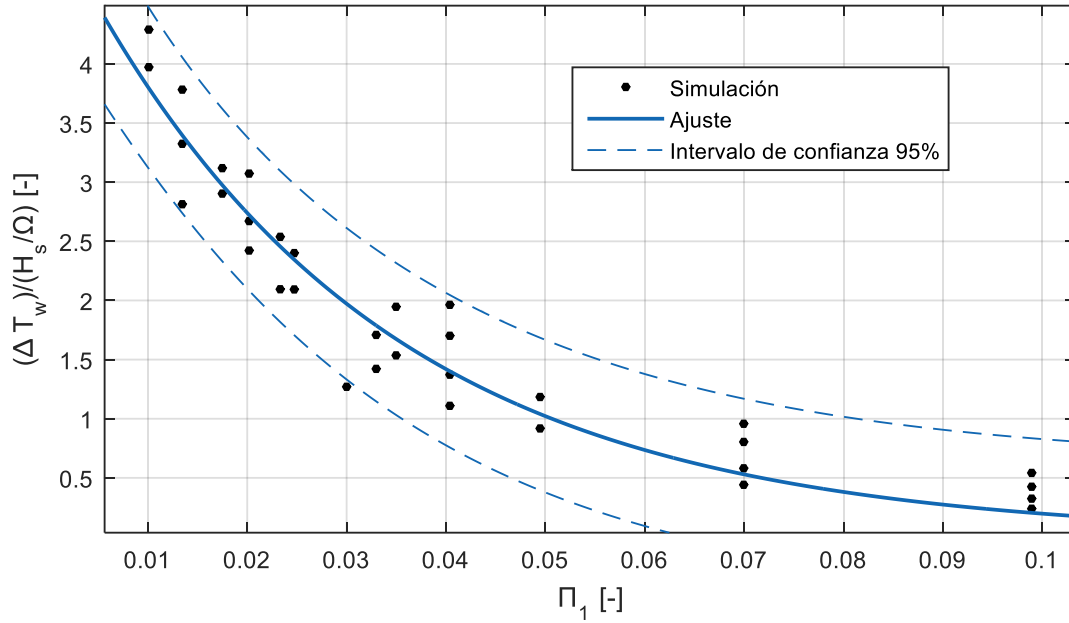


Figura 4-4: Ajuste empírico entre parámetros adimensionales del problema.

Realizando el mismo proceso, pero esta vez estableciendo un ajuste empírico en función del número adimensional  $\Pi_2$ , se obtiene la Figura 4-5, cuya curva está definida por:

$$\frac{\Delta T_w}{H_s/\Omega} = 3,738 \exp(-8,521 \cdot \Pi_2) \quad (4.3)$$

$$R^2 = 0,776$$

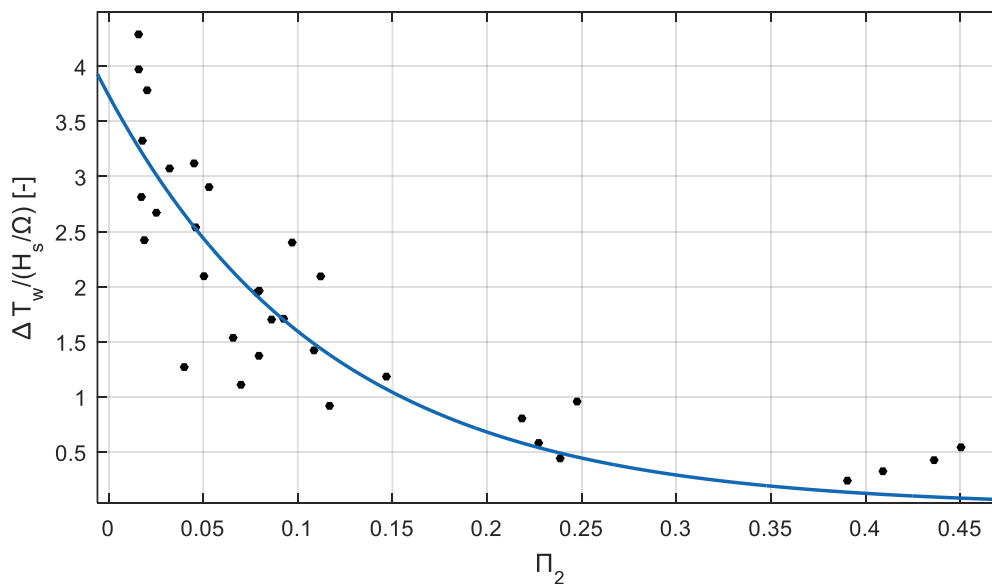


Figura 4-5: Ajuste empírico entre parámetros adimensionales del problema.

También presenta un alto coeficiente de correlación, pero es menor que el anterior. Además, el ajuste asociado a  $\Pi_1$  se adapta mejor por mera inspección visual. La Tabla 4-2 presenta los valores de  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$ , así como de la expresión adimensional  $\Delta T_w/(H_s/\Omega)$  para cada escenario.

Tabla 4-2: Valores de  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  y  $\Delta T_w/(H_s/\Omega)$  para cada escenario.

Escenario	$h_w$ [cm]	P [min]	$H_s$ [ $W/m^2$ ]	$\Delta T/(H_s/\Omega)$ [-]	$\Pi_1$ [-]	$\Pi_2$ [-]
1	5	20	133	1,963	0,040	0,080
2			267	1,701	0,040	0,086
3			533	1,372	0,040	0,079
4			1067	1,109	0,040	0,070
5		60	133	0,957	0,070	0,248
6			267	0,804	0,070	0,218
7			533	0,581	0,070	0,227
8			1067	0,441	0,070	0,239
9		120	133	0,542	0,099	0,450
10			267	0,425	0,099	0,436
11			533	0,324	0,099	0,409
12			1067	0,239	0,099	0,390
13	10	20	133	3,073	0,020	0,032
14			267	2,671	0,020	0,025
15			533	2,422	0,020	0,019
16		60	133	1,946	0,035	0,078
17			267	1,536	0,035	0,066
18			533	1,270	0,035	0,038
19		120	133	1,184	0,049	0,147
20			267	0,918	0,049	0,117
21	15	20	133	3,782	0,013	0,020
22			267	3,325	0,013	0,018
23			533	2,814	0,013	0,017
24		60	133	2,538	0,023	0,046
25			267	2,095	0,023	0,050
26		120	133	1,709	0,033	0,093
27			267	1,422	0,033	0,109
28		20	20	133	4,290	0,010
29	267			3,972	0,010	0,016
30	60		133	3,119	0,017	0,045
31			267	2,903	0,017	0,053
32	120		133	2,400	0,025	0,097
33			267	2,093	0,025	0,112

Regresando al caso  $\Pi_1$ , a partir de la ecc. (4.2) se ajusta una relación para calcular la amplitud térmica en función de los demás parámetros, conservando el término exponencial que incluye al adimensional  $\Pi_1$ . De esta manera, se llega a la siguiente expresión:

$$\Delta T_w = c_1 \left( \frac{H_s}{\Omega} \right)^{c_2} \exp(-c_3 \Pi_1) \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} c_1 &= 1,778 \\ c_2 &= 0,6418 \\ c_3 &= 13,79 \\ R^2 &= 0,98 \end{aligned}$$

Esto se muestra en la Figura 4-6.

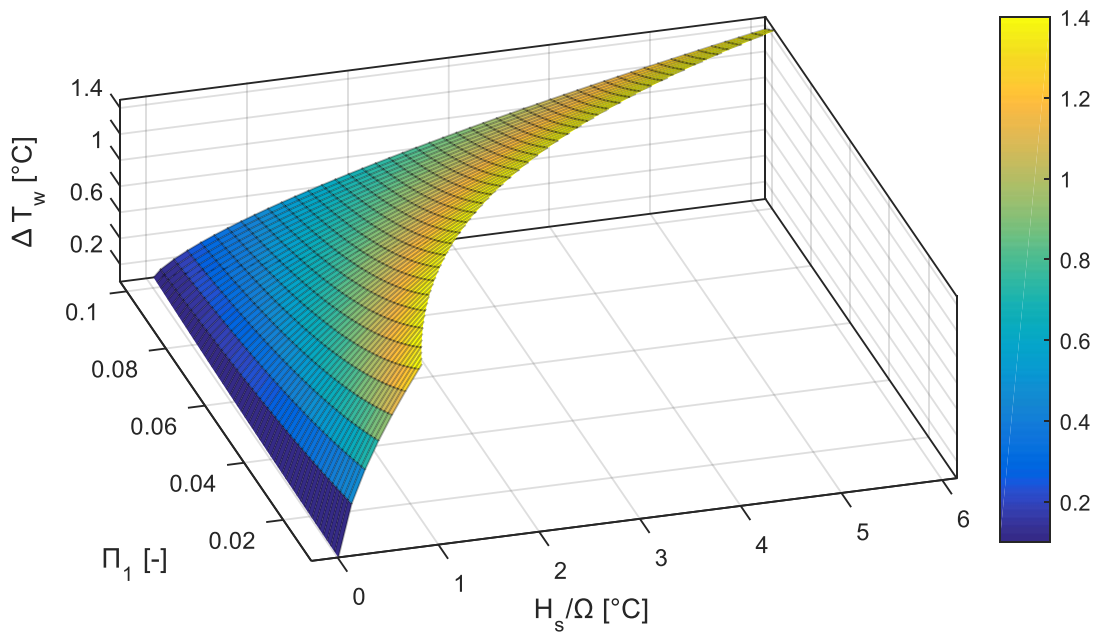


Figura 4-6: Amplitud térmica en función de dos variables.

Escribiendo la ecc. (4.4) en función de las variables independientes trabajadas en las simulaciones, queda:

$$\Delta T_w = c_1 H_s^{c_2} \left( \frac{P}{2\pi(\rho c_p)_w h_w} \right)^{c_2} \exp \left( -c_3 \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_w} \sqrt{\frac{\kappa_s P}{4\pi h_w^2}} \right) \quad (4.5)$$

Se aprecia que la amplitud térmica es directamente proporcional al calor absorbido en los sedimentos elevado al coeficiente  $c_2$ . En efecto, al fijar valores de periodo y altura de agua, se genera una curva como la mostrada en la Figura 4-7, que representa la amplitud térmica para distintos valores de  $H_s$ , con  $h_w = 5 \text{ cm}$ ,  $P = 20 \text{ min}$  (Los escenarios 1-4 están contenidos en esta situación). Notar que  $\Delta T_w$  crece sin cota a medida que aumenta el calor absorbido, lo cual es consistente con la realidad. Para valores de  $H_s$  entre 100 y 1000  $\text{W/m}^2$  la gráfica puede aproximarse por una recta de pendiente  $m = 0,0012$ , es decir, se requieren  $833 \text{ W/m}^2$  para aumentar en  $1 \text{ }^\circ\text{C}$  la amplitud térmica.

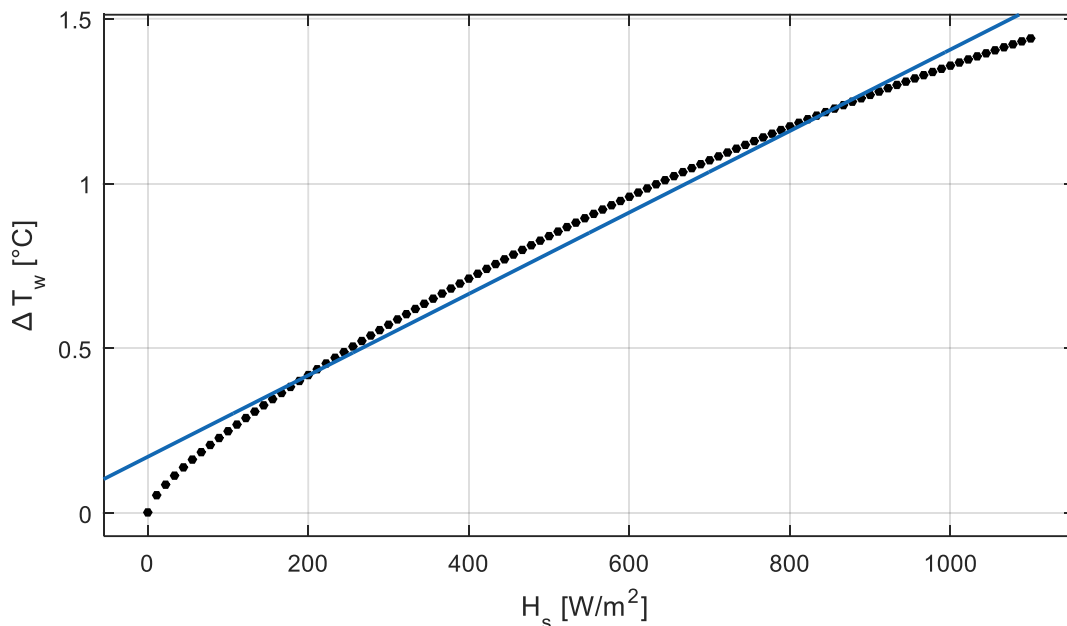


Figura 4-7: Amplitud térmica en función del calor absorbido en los sedimentos. Los puntos resultan de la ecc. (4.5), mientras que la línea azul representa una recta ajustada.

Para el caso del periodo se fijan valores de  $H_s$  y  $h_w$ . La Figura 4-8 muestra el caso representativo  $H_s = 133 W/m^2$ ;  $h_w = 5 cm$ . Se observa que la pendiente disminuye a medida que aumenta la duración de los ciclos hasta estabilizarse, por lo que incrementos de periodo a partir de los 90 *min* no modifican la amplitud térmica. Es importante señalar que para periodos mayores a los 120 *min* la curva empieza a disminuir, por lo que no puede usarse para estimar la amplitud térmica, la cual debiera crecer asintóticamente hasta un valor que puede ser determinado al realizar simulaciones con periodos superiores.

En principio, el caso ilustrado en la Figura 4-8 presenta un máximo estimado de  $0,38^\circ C$ , cercano al valor simulado para  $P = 120 min$  ( $\Delta T_w = 0,4^\circ C$ ), el cual se asume debería mantenerse para periodos mayores, sin embargo, se insiste en que la ecc. (4.5) no debe usarse para extrapolar más allá de los tiempos utilizados en los cálculos.

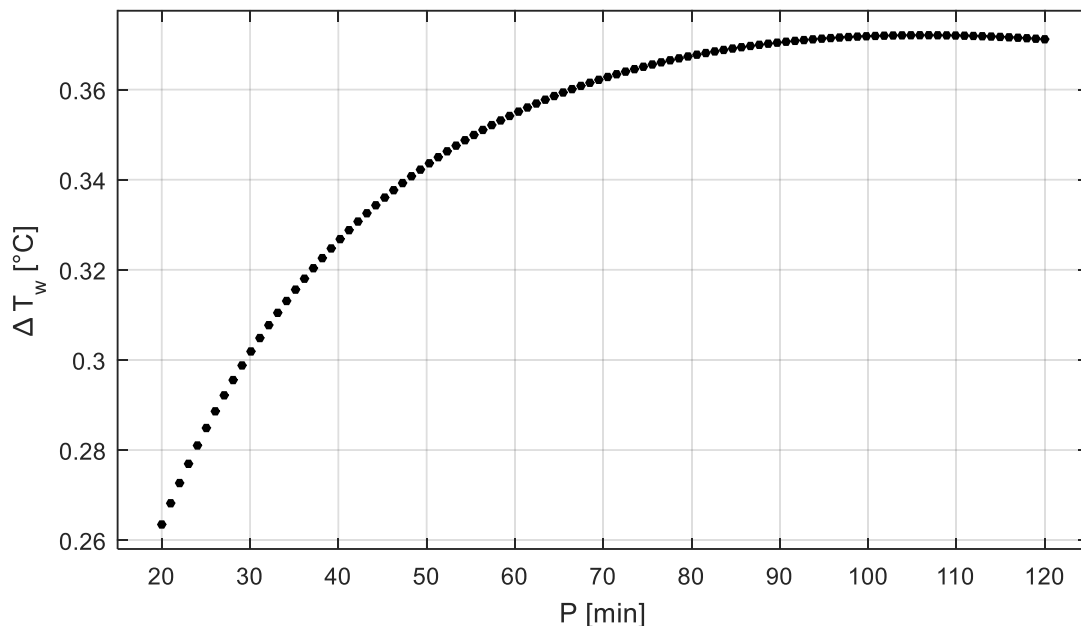


Figura 4-8: Amplitud térmica en función del periodo. Caso  $H_s = 133 W/m^2$ ;  $h_w = 5 cm$ .

Finalmente, se fijan valores de  $H_s$  y  $P$ , variando la altura del cuerpo de agua  $h_w$ . La Figura 4-9 muestra el caso representativo  $H_s = 133 \text{ W/m}^2$ ;  $P = 20 \text{ min}$ . Se aprecia una curva con pendiente decreciente. A medida que aumenta la altura, la amplitud térmica tiende a  $0^\circ\text{C}$ , mientras que al disminuir  $h_w$ ,  $\Delta T_w$  crece sin cota. A partir de los  $50 \text{ cm}$ ,  $\Delta T_w$  toma valores inferiores a  $0,1^\circ\text{C}$ . En el intervalo  $5 - 20 \text{ cm}$  la curva puede aproximarse por una recta de pendiente  $m = -0,68^\circ\text{C/m}$  (Figura 4-10), es decir, por cada  $10 \text{ cm}$  de altura incrementada la amplitud térmica disminuye  $0,07^\circ\text{C}$ .

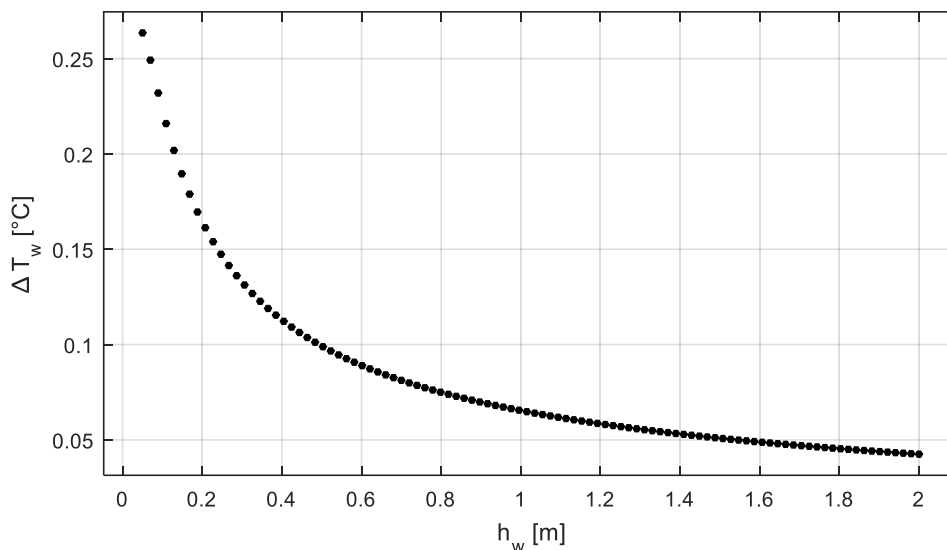


Figura 4-9: Amplitud térmica en función de la altura de agua. Caso  $H_s=133 \text{ W/m}^2$ ;  $P=20 \text{ min}$ .

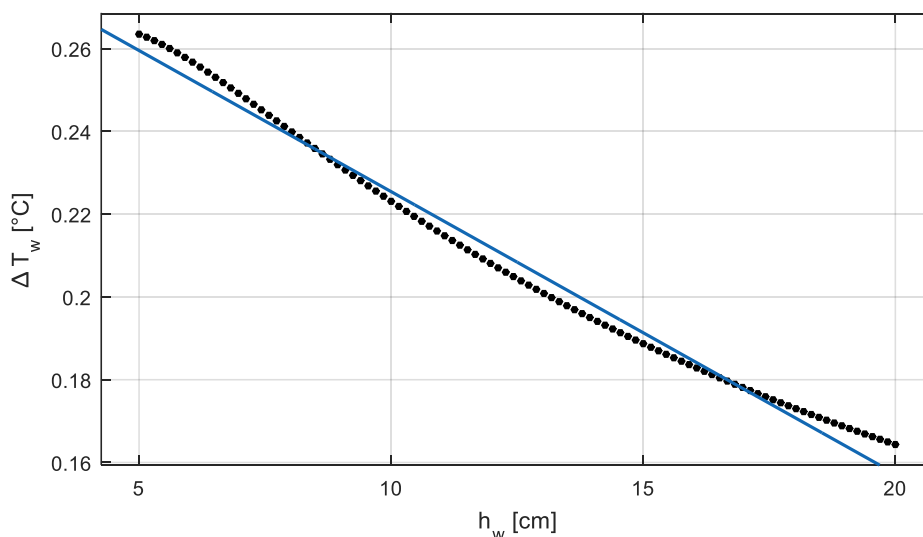


Figura 4-10: Amplitud térmica en función de la altura de agua. Caso  $H_s=133 \text{ W/m}^2$ ;  $P=20 \text{ min}$ . Rango:  $h_w = 5 - 20 \text{ cm}$ .

## 4.2 Escalas de Kolmogorov

El primer paso para determinar las escalas de Kolmogorov es estimar la tasa de disipación promedio de energía cinética turbulenta (ECT) por unidad de masa, designada por  $(\varepsilon)$  [ $W/kg$ ]. De este modo, usando la ecc. (2.9) para cada escenario, se obtiene la situación representativa expuesta en la Figura 4-11. El primer periodo presenta un valor extremadamente superior a los demás, producto de las perturbaciones iniciales. Sin embargo, esto no causa problemas, ya que las tasas relevantes son las ocurrientes durante el último periodo, puesto que la simulación ha alcanzado la estabilidad. Se elige el valor más alto, debido a que produce las escalas de longitud y tiempo más exigentes.

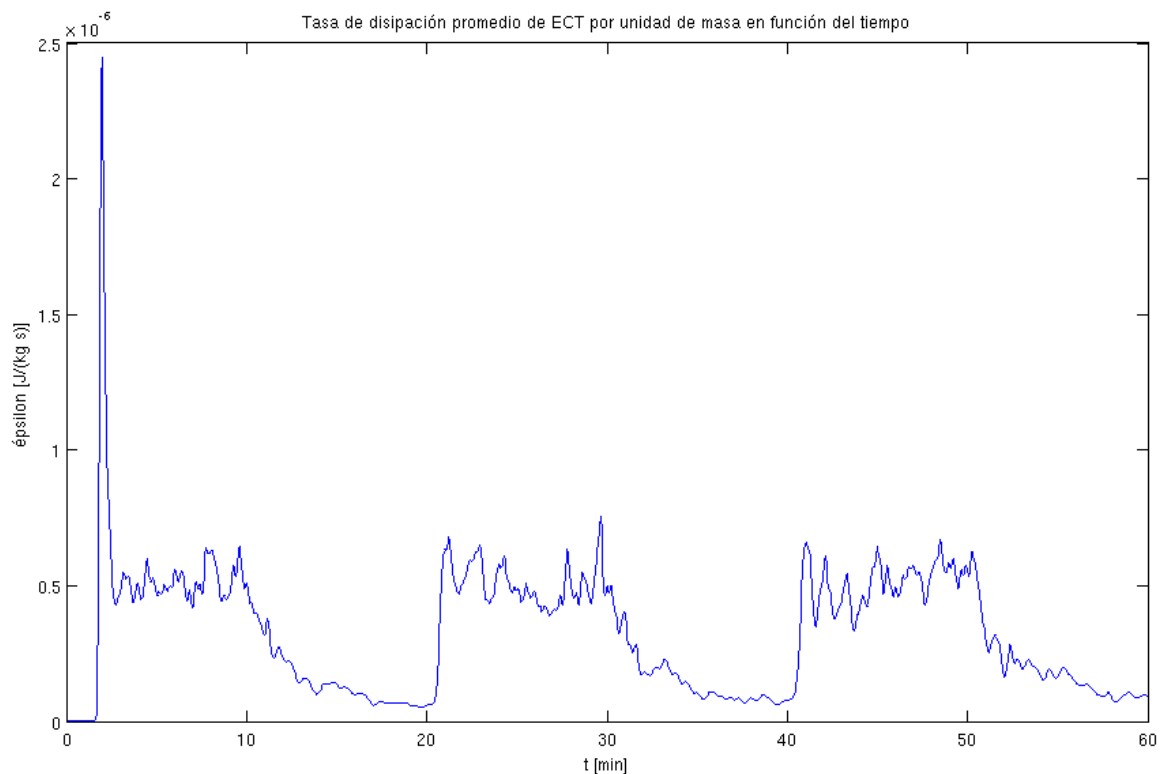


Figura 4-11: Escenario 1, tasa de disipación en función del tiempo.



A continuación, usando las ec. (2.6) y (2.7) se calculan las escalas de longitud ( $\eta$ ) y de tiempo ( $\tau_\eta$ ), respectivamente. Con esto es posible comparar las escalas de Kolmogorov con el espaciamiento ( $\Delta z$ ) y el paso temporal ( $\Delta t$ ) usados en la modelación numérica. Los detalles se encuentran en la Tabla 4-3 y en la Figura 4-12. El espaciamiento horizontal  $\Delta y$  se tomó como 2 mm en todos los escenarios, ya que no producía cambios en los resultados.

Tabla 4-3: Comparación entre dimensiones usadas y escalas de Kolmogorov.

Escenario	$\varepsilon$ [W/kg]	$\Delta z$ [mm]	$\eta$ [mm]	$\Delta t$ [s]	$\tau_\eta$ [s]
1	6,7	0,67	1,24	0,02	1,32
2	13,2	0,67	1,05	0,02	0,94
3	28,7	0,67	0,86	0,01	0,64
4	61,6	0,67	0,71	0,01	0,44
5	5,18	0,67	1,33	0,02	1,50
6	13,3	0,78	1,05	0,015	0,94
7	18	0,67	0,97	0,01	0,81
8	35,1	0,67	0,82	0,01	0,58
9	8,2	0,78	1,18	0,02	1,19
10	13,3	0,78	1,05	0,015	0,94
11	27,8	0,78	0,87	0,015	0,65
13	4,08	0,96	1,41	0,02	1,69
14	6,83	0,96	1,24	0,02	1,31
15	13	0,96	1,05	0,015	0,95
16	4,1	0,96	1,41	0,02	1,69
17	9,25	0,96	1,15	0,016	1,12
18	17,2	0,96	0,98	0,008	0,82
19	5,06	0,96	1,33	0,02	1,52
20	9,08	0,96	1,15	0,016	1,13
21	3,04	1,17	1,51	0,02	1,96
22	5,59	1,17	1,30	0,016	1,45
23	10,4	1,17	1,11	0,012	1,06
24	3,13	1,17	1,50	0,02	1,93
25	5,9	1,17	1,28	0,016	1,41
26	3,91	1,17	1,42	0,02	1,73
27	7,46	1,17	1,21	0,016	1,25
28	2	1,32	1,68	0,02	2,42
29	4,01	1,32	1,41	0,016	1,71
30	2,26	1,32	1,63	0,016	2,27
31	4,68	1,32	1,36	0,015	1,58
32	2,52	1,32	1,59	0,016	2,15

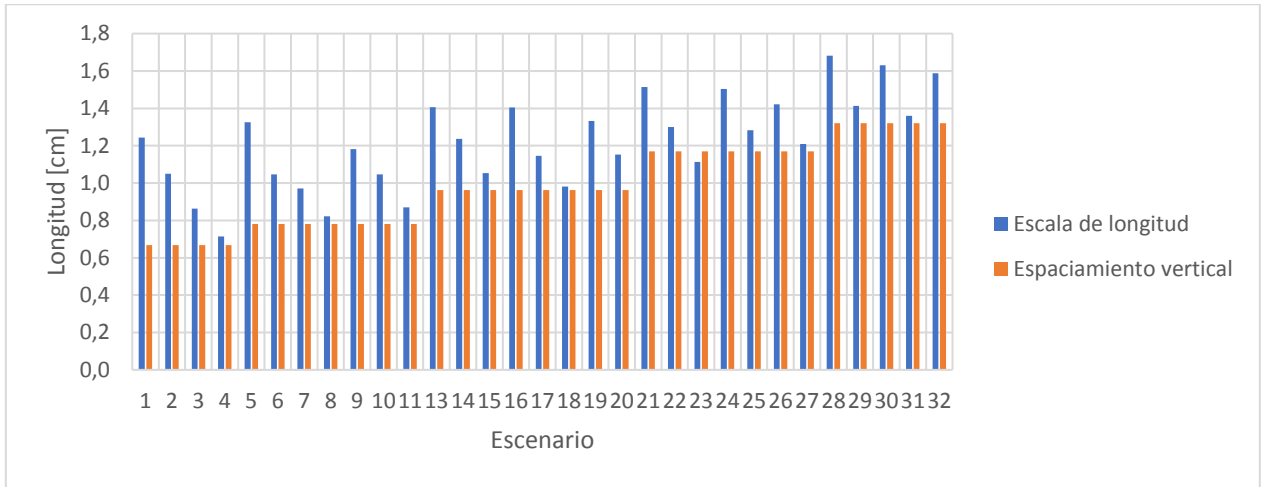


Figura 4-12: Comparación entre escala de Kolmogorov de longitud y espaciamiento vertical utilizado en cada escenario.

Teóricamente, las escalas de Kolmogorov son las más pequeñas que ocurren en procesos turbulentos. Salvo el escenario 23, el espaciamiento vertical de la grilla es siempre inferior a la escala de longitud propuesta por Kolmogorov (Figura 4-12) y, en todos los casos, ambos valores tienen el mismo orden de magnitud. Esto revela que la escala en cuestión entrega resultados que permiten estimar satisfactoriamente la distancia vertical a definir entre puntos de la grilla.

El caso del paso temporal es similar. En todos los escenarios el intervalo utilizado es inferior a la escala de tiempo (Tabla 4-3), pero esta vez por dos órdenes de magnitud. En principio, esto indicaría que nuevamente la escala de Kolmogorov establece una cota superior adecuada, sin embargo, los valores de paso temporal presentados corresponden aprox. al valor máximo que, en la práctica, permitió la convergencia de las ecuaciones diferenciales involucradas. Dicho de otro modo, el usar un  $\Delta t$  del orden de la escala de tiempo de Kolmogorov puede asegurar que se consideren todas las escalas físicas del proceso, sin embargo, esto no implica que se cumplan las condiciones matemáticas necesarias para que el programa funcione correctamente.

De este modo, el requisito dominante en el caso del tiempo viene dado por la expresión  $\Delta t/\Delta z$ , como se aprecia en la Figura 4-13. Así, la condición dominante es matemática y dada por la relación empírica (4.6).

$$\Delta t_{m\acute{a}x} \sim 0,03 \Delta z \tag{4.6}$$

Donde:

$\Delta t_{m\acute{a}x}$ : Límite superior de paso temporal [s].

$\Delta z$ : Espacio longitudinal usado [mm].

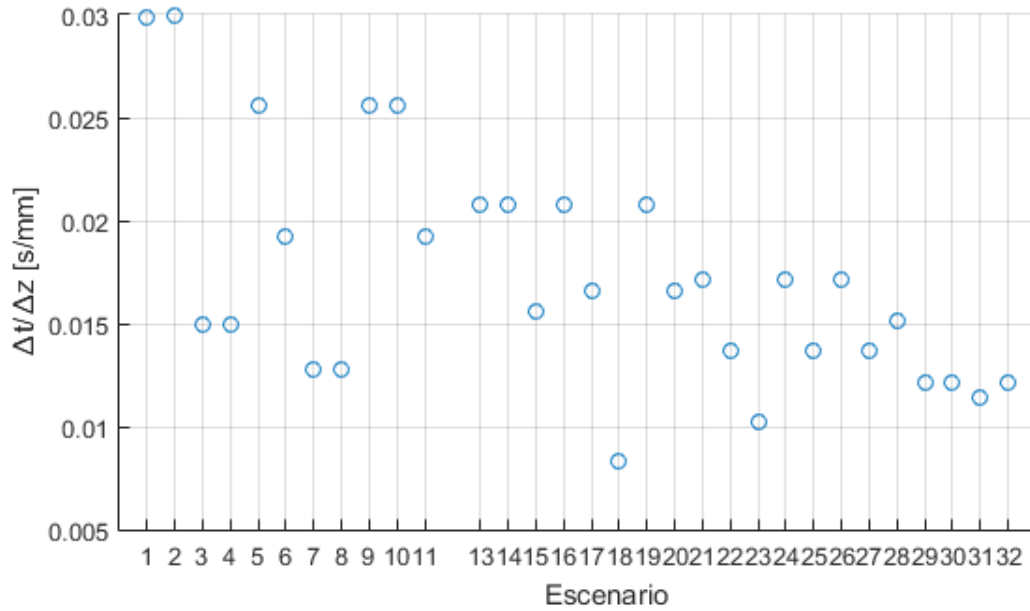


Figura 4-13: Relación  $\Delta t[s]/\Delta z[mm]$  para cada escenario.

### 4.3 Números de Rayleigh y Nusselt. Flujo de calor en la IAS

Al reescribir la ecc. (2.11) para adaptarla al problema de interés, el número de Nusselt (promedio) queda descrito por:

$$Nu_m = \frac{k_t h_w}{\kappa_w} \quad (4.7)$$

Donde:

$k_t$ : Velocidad de transferencia de calor en la IAS [ $m/día$ ].

$h_w$ : Altura del cuerpo de agua [cm].

$\kappa_w$ : Difusividad térmica del agua [ $m^2/día$ ].

De acuerdo a de la Fuente et al (2015), la velocidad de transferencia de calor ( $k_t$ ) está dada por:

$$k_t = \frac{H_g}{(\rho c_p)_w (T_{IAS} - T_w)} \quad (4.8)$$

Donde:

$H_g$ : Flujo de calor a través de la IAS [ $W/m^2$ ]. Es positivo cuando se dirige desde los sedimentos hacia el cuerpo de agua.

$(\rho c_p)_w$ : Capacidad calorífica del agua [ $J/(m^3 \cdot ^\circ C)$ ].

$T_{IAS}$ : Temperatura en la IAS [ $^\circ C$ ].

$T_w$ : Temperatura promedio del cuerpo de agua [ $^\circ C$ ].

El usar valores promedio de  $H_g$ ,  $T_{IAS}$  y  $T_w$  distorsiona el cálculo de  $k_t$ , por lo que se recurre a ajustar una recta (que pase por el origen) a la curva obtenida al graficar  $H_g$  vs  $(\rho c_p)_w (T_{IAS} - T_w)$ , como se observa en la Figura 4-14. De este modo,  $k_t$  corresponde a la pendiente de la recta. La Tabla 4-4 muestra valores promedio de  $H_g$ ,  $T_{IAS}$  y  $T_w$ , así como la velocidad de transferencia conseguida con el método mencionado.

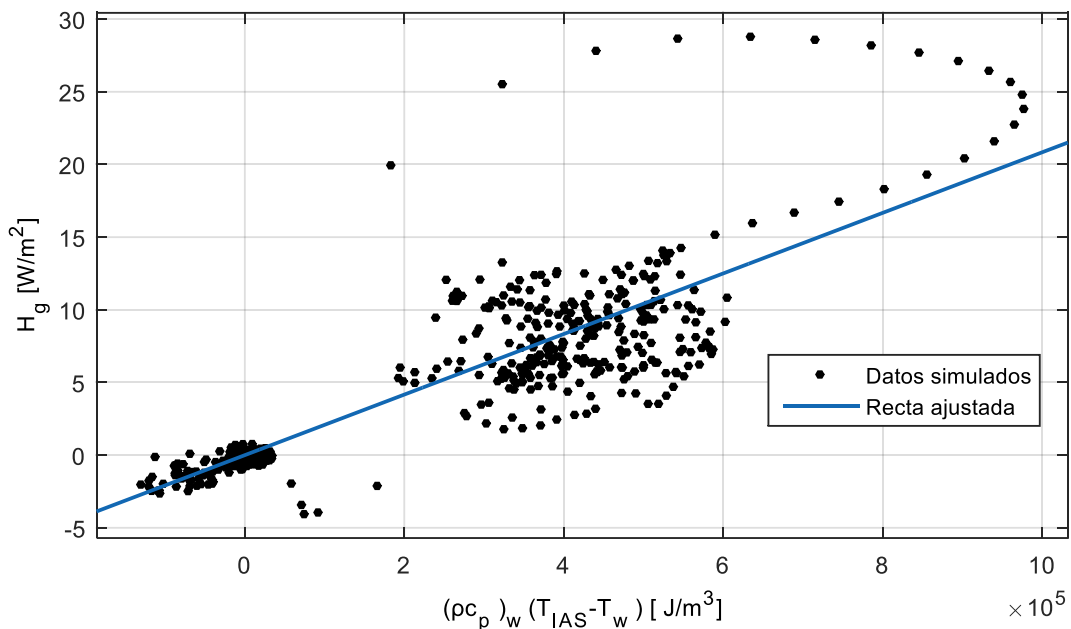


Figura 4-14: Recta ajustada para obtener  $k_t$ .

Tabla 4-4: Promedios de flujo de calor en la IAS, temperatura en la IAS y temperatura del cuerpo de agua, y Velocidad de transferencia de calor en la IAS.

Escenario	$h_w$ [cm]	P [min]	$H_s$ [ $W/m^2$ ]	$H_g$ [ $W/m^2$ ]	$T_{IAS}$ [°C]	$T_w$ [°C]	$k_t$ [m/d]
1	5	20	133	4,37	14,29	14,24	1,80
2			267	6,44	14,45	14,37	1,95
3			533	8,83	14,67	14,56	1,80
4			1067	11,72	14,99	14,82	1,58
5		60	133	4,27	14,28	14,23	1,87
6			267	0,57	14,44	14,37	1,65
7			533	8,29	14,65	14,53	1,71
8			1067	13,65	14,93	14,76	1,80
9		120	133	3,57	14,27	14,22	1,70
10			267	5,49	14,42	14,35	1,64
11			533	7,45	14,63	14,52	1,54
12			1067	11,09	14,92	14,74	1,47
13	10	20	133	4,00	14,36	14,30	1,46
14			267	2,62	14,54	14,47	1,14
15			533	2,34	14,84	14,72	0,86
16		60	133	2,49	14,35	14,30	1,18
17			267	1,83	14,51	14,44	0,99
18			533	0,83	14,75	14,64	0,57
19		120	133	2,55	14,34	14,28	1,11
20			267	1,95	14,51	14,43	0,88
21	15	20	133	3,20	14,36	14,30	1,38
22			267	4,67	14,59	14,50	1,21
23			533	4,88	14,86	14,75	1,18
24		60	133	2,23	14,37	14,32	1,04
25			267	3,23	14,55	14,48	1,14
26		120	133	3,13	14,37	14,32	1,05
27			267	3,53	14,57	14,49	1,23
28	20	20	133	4,17	14,37	14,31	1,44
29			267	6,94	14,62	14,53	1,44
30		60	133	4,03	14,41	14,35	1,36
31			267	6,44	14,66	14,58	1,60
32		120	133	3,86	14,42	14,36	1,46
33			267	6,99	14,66	14,57	1,69

Por otra parte, al reescribir la ecc. (2.10), el número de Rayleigh queda dado por:

$$Ra = \frac{g\beta(T_{IAS} - T_w)h_w^3}{\nu\kappa_w} \quad (4.9)$$

Donde:

$g$ : Aceleración de gravedad [ $m/s^2$ ].

$\beta$ : Coeficiente de expansión termal [ $1/^\circ C$ ].

$T_{IAS}$ : Temperatura en la IAS [ $^\circ C$ ].

$T_w$ : Temperatura promedio del agua [ $^\circ C$ ].

$h_w$ : Altura del cuerpo de agua [cm].

$\nu$ : Viscosidad cinemática [ $m^2/s$ ].

$\kappa$ : Difusividad térmica [ $m^2/s$ ].

La Tabla 4-5 muestra los valores calculados para el número de Nusselt y el de Rayleigh. La Figura 4-15 presenta estos resultados (puntos) y también la curva determinada por McAdams (1954) para convección libre en una placa horizontal a temperatura uniforme. A pesar que la magnitud de los números de Rayleigh se encuentran en lo que McAdams considera régimen laminar ( $200 < Ra < 2 \cdot 10^7$ ), la ecuación que se ajusta a la situación es la correspondiente a la de régimen turbulento.

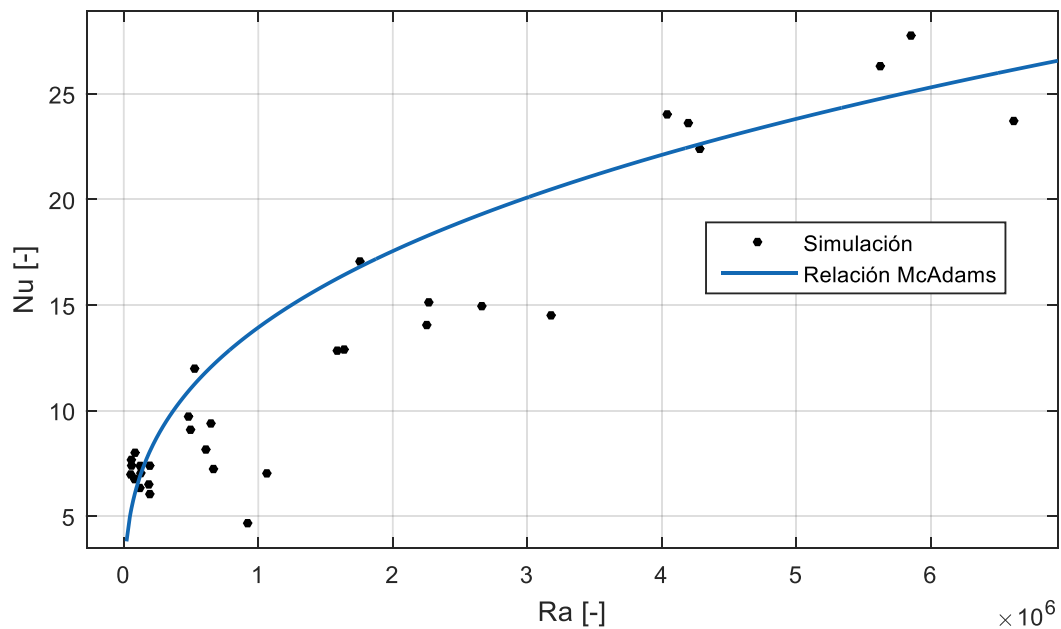


Figura 4-15: Relación entre  $k_t h_w / \kappa$  y  $Ra$ . Los puntos son los valores obtenidos a partir de las simulaciones, mientras que la curva azul es la ecuación determinada por McAdams.

Tabla 4-5: Relación entre números de Nusselt y Rayleigh.

Escenario	$Nu$ [-]	$Ra$ [-]
1	7,39	57769
2	8,00	83531
3	7,38	121784
4	6,50	185798
5	7,66	55985
6	6,76	80966
7	7,04	126468
8	7,39	193158
9	6,97	51747
10	6,75	81412
11	6,33	119442
13	6,04	193382
14	11,99	526390
15	9,39	647728
16	7,02	1063487
17	9,71	480889
18	8,15	610256
19	4,67	920737
20	9,09	496056
21	7,23	666464
22	17,06	1755489
23	14,94	2661840
24	14,51	3176743
25	12,84	1586866
26	14,05	2252326
27	12,89	1638055
28	15,13	2267382
29	23,62	4196848
30	23,72	6616459
31	22,40	4282498
32	26,31	5624347
33	24,03	4039823

De esta forma, la relación entre los números de Nusselt y Rayleigh para el fenómeno de intercambio de calor en la IAS está descrita por la ecc. (4.10), es decir, queda representado por convección natural en una placa horizontal caliente a temperatura uniforme en régimen turbulento.

$$Nu = 0,14 Ra^{\frac{1}{3}} \quad (4.10)$$

A continuación, se muestran una comparación entre las temperaturas del cuerpo de agua y la capa superior de los sedimentos (Figura 4-16) y el flujo de calor en la interfaz (Figura 4-17) para el escenario 1 en un periodo ya estabilizado. Como es de esperarse, la inyección continua de calor en la capa activa de sedimentos aumenta considerablemente su temperatura, produciendo un flujo de calor  $H_g$  positivo (hacia el agua) en la interfaz. La temperatura de los sedimentos se mantiene sobre la del agua en la fase de calentamiento, sin embargo la diferencia entre éstas empieza a estabilizarse, al igual que  $H_g$ . Una vez acabada la inyección de calor, la temperatura de los sedimentos cae rápidamente, quedando bajo la del agua. Ahora el flujo (de pequeña magnitud) es hacia los sedimentos, pero se estabiliza rápidamente, quedando sólo en pequeñas perturbaciones alrededor del valor cero.

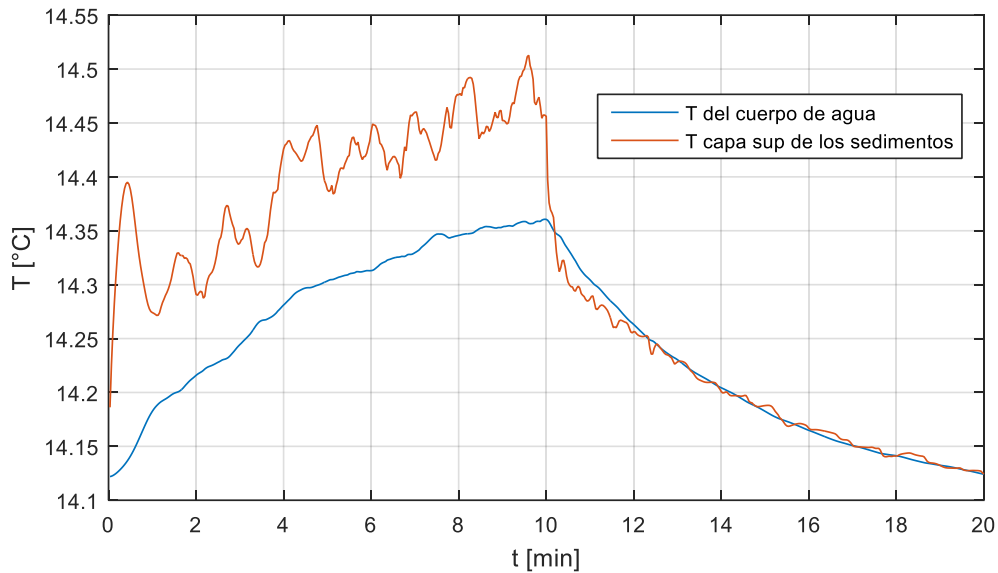


Figura 4-16: Temperaturas de cuerpo de agua y capa superior de sedimentos. Escenario 1.

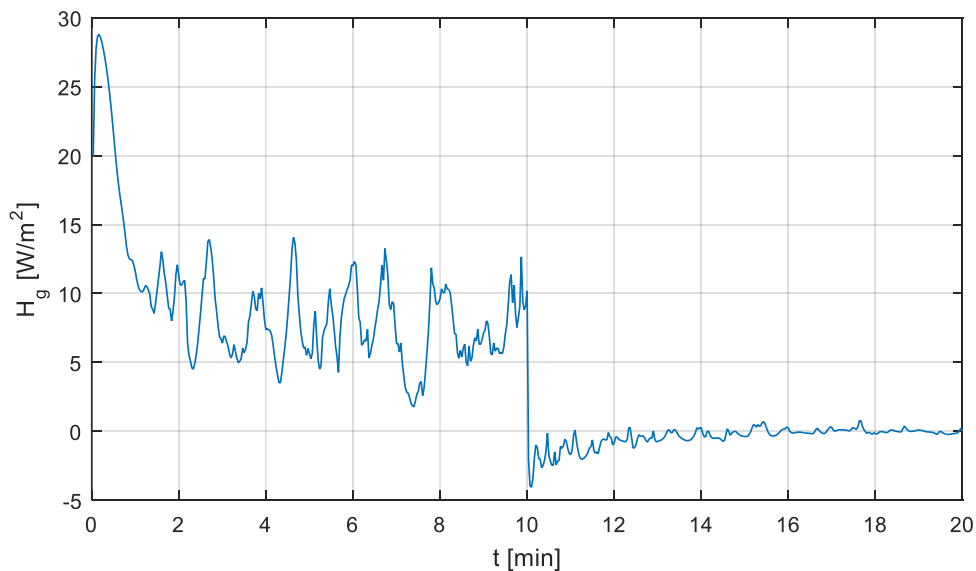


Figura 4-17: Flujo de calor en interfaz agua-sedimento. Escenario 1.



## Capítulo 5 Conclusiones

En la región altiplánica de la Cordillera de los Andes existen lagunas someras de algunos centímetros de profundidad denominadas salares. Diversas investigaciones han demostrado que la temperatura del agua puede variar en 20-30 °C en el día y que los sedimentos cumplen la función de reservorios, reteniendo calor durante el día y liberándolo en la noche, reduciendo de esta manera la oscilación termal diaria. El objetivo de esta memoria fue determinar la influencia que tiene considerar el intercambio de calor entre agua y sedimento sobre la temperatura de sistemas acuáticos someros. Para ello se usó un modelo DNS que toma como base un modelo (Flow Solve) elaborado por Kraig Winters y de la Fuente (2012).

El balance de masa derivado del teorema de transporte de Reynolds permite corroborar que el modelo se está ejecutando adecuadamente. Además, los flujos de calor laterales prácticamente se anulan entre sí, y eventualmente pueden ser despreciados en el análisis.

El análisis de la temperatura del agua ( $T_w$ ) durante un periodo estabilizado (Figura 4-2), muestra que  $T_w$  crece con pendiente decreciente durante la fase de calentamiento, alcanzando un máximo ( $T_{wmax}$ ) que, en general, coincide con el momento en que deja de inyectarse calor en la capa superior de los sedimentos. A partir de este instante, la temperatura disminuye (con pendiente decreciente) hasta alcanzar la misma temperatura que tenía al comienzo del periodo ( $T_{wmin}$ ). La amplitud térmica ( $\Delta T_w$ ) aumenta con el periodo y el calor absorbido en los sedimentos, mientras que disminuye con la altura del cuerpo de agua.

Existe una relación empírica exponencial (4.2) entre el calor absorbido en la capa superior de los sedimentos ( $H_s$ ), la altura del cuerpo de agua ( $h_w$ ), y la frecuencia asociada a los periodos de evaluación ( $\omega$ ) (en la forma adimensional  $H_s/\Omega$ ) y el número adimensional  $\Pi_1$ . También se puede establecer una relación similar con el adimensional  $\Pi_2$ , sin embargo, el coeficiente de determinación es menor y la expresión que incluye a  $\Pi_1$  se ajusta mejor visualmente.

Para poder determinar la amplitud térmica en función de los demás parámetros y extrapolar resultados, se hace uso de la relación empírica adimensional mencionada anteriormente. Luego, se propone una función de la forma (4.4), permitiendo que el exponente sobre la base ( $H_s/\Omega$ ) pueda variar. De esta forma se obtiene una expresión para ( $\Delta T_w$ ) en función de  $H_s$ ,  $h_w$  y  $\omega$  (o el periodo  $P$ ), dada por (4.5), con un coeficiente de determinación cercano a 1. A partir de ella se concluye que la amplitud térmica es directamente proporcional al calor absorbido en los sedimentos elevado a un coeficiente  $c_2$  (con las simulaciones usadas se obtuvo  $c_2 = 0,6$ ), es decir,  $\Delta T_w$  crece sin cota a medida que aumenta el calor absorbido. En el caso de la curva  $\Delta T_w$  como función del periodo (caso representado por la Figura 4-8), se observa que la pendiente disminuye a medida que aumenta la duración de los ciclos hasta estabilizarse, por lo que incrementos de periodo a

partir de los 90 *min* (para las simulaciones desarrolladas) no modifican la amplitud térmica. Es importante señalar que para periodos mayores a los 120 *min* la curva empieza a disminuir, por lo que no puede usarse para estimar la amplitud térmica, la cual debiera crecer asintóticamente hasta un valor que puede ser determinado al realizar simulaciones con periodos superiores. En conclusión, no se puede estimar la amplitud térmica para periodos superiores a los simulados haciendo uso de la ecc. (4.5). Si se desea obtener resultados para periodos superiores a 2 *hr*, deben llevarse a cabo simulaciones que consideren esos periodos y luego llevar a cabo el método descrito anteriormente. Para el caso de la altura de agua (Figura 4-10), se aprecia una curva con pendiente decreciente. A medida que aumenta la altura, la amplitud térmica tiende a 0°C, mientras que al disminuir  $h_w$ ,  $\Delta T_w$  crece sin cota. A partir de los 50 cm,  $\Delta T_w$  toma valores inferiores a 0,1 °C.

La escala de longitud de Kolmogorov entrega resultados que permiten estimar satisfactoriamente la distancia vertical a definir entre puntos de la grilla. Sin embargo, en el caso del paso temporal, el usar un  $\Delta t$  del orden de la escala de tiempo de Kolmogorov puede asegurar que se consideren todas las escalas físicas del proceso, pero no implica que se cumplan las condiciones matemáticas necesarias para que el programa funcione correctamente. De este modo, el requisito dominante en el caso del tiempo viene dado por la expresión empírica (4.5), es decir,  $\Delta t_{m\acute{a}x}[s] \sim 0,03\Delta z[mm]$ .

La relación entre los números de Nusselt y Rayleigh queda representada por la ecc. (4.10), lo que revela que el fenómeno de intercambio de calor en la IAS queda descrito por convección natural en una placa horizontal caliente a temperatura uniforme en régimen turbulento.

## Capítulo 6 Bibliografía

McAdams, W. "Heat Transmission." 3rd edition. McGraw-Hill. New York. 1954.

Chandrasekhar, S. "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability." London: Oxford University Press. 1961.

Edinger, J., Duttweiler, D. and Geyer, J. "The response of water temperatures to meteorological conditions." Water Resour. Res., Vol. 4, No. 5, pp 1137–1143, 1968.

Orszag, S. "Analytical Theories of Turbulence." Journal of Fluid Mechanics, Vol. 41, No. 2, pp. 363 – 386. 1970.

Tennekes, H.; Lumley, J. "A First Course in Turbulence." MIT Press, 1972.

Necati, M. "Heat transfer — A basic approach." McGraw-Hill, 1985.

Adams, E., Cosler D. and Helfrich K. "Evaporation From Heated Water Bodies: Predicting Combined Forced Plus Free Convection." Water Resour. Res., Vol. 26, No. 3, pp 425-435, 1990.

Landahl, M. and Mollo-Christensen, E. "Turbulence and Random Processes in Fluid Mechanics." 2ª edición. 1992.

Sinokrot, B. and Stefan, H. "Stream temperature dynamics: Measurements and modeling." Water Resour. Res., Vol. 29, No. 7, pp 2299-2312, 1993.

Trefethen. "Finite Difference and Spectral Methods for Ordinary and Partial Differential Equations." 1996.

del Castillo, E., and Farfán, C. "Hydrobiology of a salt pan from the Peninsula of Baja California, Mexico". International Journal of Salt Lake Research, Volume 6, Issue 3, pp 233–248. 1997.

Fang, X. and Stefan, H. "Temperature variability in lake sediments." Water Resour. Res., Vol. 34, No. 4, pp 717–729, 1998.

Batchelor, G. "An Introduction to Fluid Dynamics." Cambridge University Press. 2000.

Cengel, Y. "Heat Transfer: A Practical Approach." McGraw-Hill. (2nd edition). 2002.

Bogan, T., Mohseni O., and Stefan H. "Stream temperature-equilibrium temperature relationship." Water Resour. Res., 39(9), 1245, 2003.

Winters, K, MacKinnon, J. and Mills, B. "A Spectral Model for Process Studies of Rotating, Density-Stratified Flows". Journal of atmospheric and oceanic technology. Vol. 21, pp 69-94, 2004.

Canuto, C., Quarteroni, A. and Zang, T. "Spectral Methods: Evolution to Complex Geometries and Applications to Fluid Dynamics." Springer Science & Business Media. 2007.

Winters, K. and de la Fuente, A. "Modelling rotating stratified flows at laboratory-scale using spectrally-based DNS." Ocean Modelling, Vol. 49-50, pp 47-59, 2012.

George, W. "Lectures in Turbulence for the 21st Century." Department of Thermo and Fluid Engineering, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden. 2013.

de la Fuente, A. "Heat and dissolved oxygen exchanges between the sediment and water column in a shallow salty lagoon." *J. Geophys. Res. Biogeosci.*, 119, 2014.

de la Fuente, A., Meruane, C. y López, S. "Intercambios de calor entre agua y sedimentos en lagunas extremadamente someras del altiplano." XXII Congreso Chileno de Ingeniería Hidráulica. 2015.

Hoque, M. et al. "Comparison of specific energy dissipation rate calculation methodologies utilising 2D PIV velocity measurement". *Chemical Engineering Science*, Vol.137, pp 752-767, 2015.

Momen, M. "Numerical investigation of turbulence models". Massachusetts Institute of Technology. 2015.

De la Fuente, A. y Meruane, C. "Dimensionless numbers for classifying the thermodynamics regimes that determine water temperature in shallow lakes and wetlands." *Environmental Fluid Mechanics*, doi:10.1007/s10652-017-9536-x, 2017.