



UNIVERSIDAD DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

ESTIMACIÓN DE PROPIEDADES MODALES MEDIANTE EL USO DE FUNCIONES  
DE TRANSMISIBILIDAD

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERIA, MENCIÓN INGENIERÍA SÍSMICA

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

MANUEL JAVIER RODRÍGUEZ VIVANCO

PROFESOR GUÍA:  
RUBÉN BOROSCHEK KRAUSKOPF

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
VIVIANA MERUANE NARANJO  
FABIÁN ROJAS BARRALES

SANTIAGO DE CHILE  
2017

**RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR AL  
TÍTULO DE:** Ingeniero Civil y grado de Magíster en  
ciencias de la Ingeniería, mención Ingeniería Sísmica.  
**POR:** MANUEL JAVIER RODRÍGUEZ VIVANCO.  
**FECHA:** 27/06/2017  
**PROFESOR GUIA:** RUBÉN BOROSCHEK K.  
**PROFESOR CO-GUIA:** VIVIANA MERUANE N.

## **ESTIMACIÓN DE PROPIEDADES MODALES MEDIANTE EL USO DE FUNCIONES DE TRANSMISIBILIDAD**

Este estudio presenta la implementación de una metodología desarrollada recientemente y que asegura la identificación de parámetros modales (frecuencia, amortiguamiento y forma modal), bajo el concepto de funciones de transmisibilidad. Esta técnica está concebida para ser implementada en un contexto tipo OMA (*Output Modal Analysis*), esto significa que no hay necesidad de determinar el input asociado a un sistema, permitiendo así realizar estimaciones durante el régimen operacional de una estructura. La principal ventaja de este método yace en la ausencia de suposiciones respecto a la naturaleza de la excitación, lo cual es un factor común en la mayoría de los métodos tipo OMA, donde regularmente se asume la sollicitación como un proceso estocástico de ruido blanco.

Para llevar a cabo este trabajo se analizaron los diversos aportes realizados hasta la fecha, de tal forma de generar una metodología clara y eficiente para la detección de parámetros modales. Esto involucra tanto a las funciones de transmisibilidad, así como los estimadores paramétricos que pueden ser empleados sobre dichas funciones para extraer la información modal.

Considerando los diversos experimentos realizados en cada uno de los estudios relativos al concepto de transmisibilidad, se intentó extrapolar el uso del método a una estructura de tipo civil, y por lo tanto de gran envergadura, contrariamente a lo desarrollado en la mayoría de los estudios previos, donde se ha aplicado la metodología a estructuras/componentes menores relacionados a la industria automotriz, así como aeroespacial. Para poder realizar lo anterior, se utilizaron los registros de aceleraciones existentes del monitoreo continuo del edificio Torre Central, ubicado en las dependencias de facultad de Ingeniería de la Universidad de Chile.

Tomando en cuenta el requisito principal del método, el cual corresponde a identificar más de una condición de carga presente en la estructura, se estudió la factibilidad de considerar el conjunto de respuestas frente a sollicitaciones sísmicas, uso diurno y nocturno, resultando lo suficientemente distintas en su distribución espacial, y por lo tanto útiles, para llevar a cabo el proceso de identificación de manera satisfactoria.

Los resultados muestran que el uso de funciones de transmisibilidad sólo permite conocer de manera confiable valores frecuencias naturales amortiguadas y las formas modales respectivas. La combinación de escenarios de carga con distinto nivel de excitación impide asegurar invarianza en el tiempo para sistemas cuyo nivel de amortiguamiento dependa del nivel de respuesta que éstos experimenten.

*A mis padres...*

## **Agradecimientos**

Quisiera agradecer a mi familia, quienes siempre me acompañaron, en los momentos más difíciles, brindando comprensión y palabras de aliento para poder culminar exitosamente el largo y extenuante camino que significó llevar a cabo este proceso. Mención especial a mis padres, Margarita y Enrique, quienes indudablemente también son artífices de este trabajo.

Agradezco a mis profesores guías, quienes desinteresadamente aceptaron formar parte de esta aventura, aportando experiencia y sugerencias de gran valor.

A su vez, quisiera agradecer a Valeska, quien resultó un pilar fundamental en la consecución de este proyecto. Gracias por tu amor, cariño, preocupación, paciencia e incondicionalidad.

Agradezco a Hugo Baesler, quien muy amablemente ha permitido flexibilizar mi condición laboral, entregándome total libertad para poder finalizar mi situación académica en los momentos que fue necesario.

Finalmente, quisiera agradecer a todas esas personas con la cuales compartí en la facultad y permitieron llevar de forma más amena la estadía en ella, en particular a mis amigos Jacques Bornand, Cristian Gonzalez y Luis Rivera.

# Tabla de Contenido

<b>CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>1</b>
1.1 INTRODUCCIÓN/MOTIVACIÓN .....	1
1.2 OBJETIVOS.....	3
1.2.1 <i>Objetivo General</i> .....	3
1.2.2 <i>Objetivos Específicos</i> .....	3
1.3 ORGANIZACIÓN DEL INFORME .....	3
<b>CAPÍTULO 2 MARCO TEÓRICO</b> .....	<b>6</b>
2.1 INTRODUCCIÓN.....	6
2.2 TRANSMISIBILIDAD ESCALAR - EXCITACIÓN SINGULAR.....	6
2.3 TRANSMISIBILIDAD ESCALAR - EXCITACIÓN MÚLTIPLE .....	10
2.4 ESTUDIO DE DEPENDENCIA DEL CONTENIDO ESPECTRAL ASOCIADO A LA EXCITACIÓN .....	11
2.4.1 <i>Carga en fase</i> .....	11
2.4.2 <i>Carga fuera de fase</i> .....	12
2.5 FORMAS MODALES .....	13
<b>CAPÍTULO 3 EVALUACIÓN NUMÉRICA DE FUNCIONES DE TRANSMISIBILIDAD</b> .....	<b>16</b>
3.1 INTRODUCCIÓN.....	16
3.2 FORMULACIÓN DE FUNCIONES DE TRANSMISIBILIDAD .....	17
3.3 DETECCIÓN DE POLOS FALSOS.....	21
3.3.1 <i>Detección mediante rango de matriz (alternativa 1)</i> .....	31
3.3.2 <i>Detección mediante rango de matriz (alternativa 2)</i> .....	37
3.3.3 <i>Detección mediante formulación matricial y el uso de matriz pseudo inversa</i> .....	39
<b>CAPÍTULO 4 ESTIMADORES PARAMÉTRICOS</b> .....	<b>44</b>
4.1 INTRODUCCIÓN.....	44
4.2 MODELOS PARAMÉTRICOS PARA LA ESTIMACIÓN DE PROPIEDADES MODALES .....	45
4.3 MODELO MEDIANTE FRACCIONES MATRICIALES.....	45
4.3.1 <i>Método p-LSCF (Polyreference Least Squares Complex Frequency)</i> .....	48
4.3.1.1 Relación p-LSCF y LSCF.....	53
4.3.1.2 Diagramas de estabilización.....	54
4.3.2 <i>Método ML (Maximum Likelihood)</i> .....	58
4.3.2.1 Método log-ML (logarithmic Maximum Likelihood) .....	61
4.3.2.2 Diagrama de estabilización ML .....	63
4.3.3 <i>Método p-LSCF Plus</i> .....	66
4.3.4 <i>Modelo Input/Output Multireferencial</i> .....	70
4.3.4.1 Introducción.....	70
4.3.4.2 Método .....	70
4.3.4.3 Compensación de efectos transientes y leakage para el modelo IO.....	72
4.3.5 <i>Modelos LMFD (Left Matrix Description)</i> .....	82
4.3.5.1 Estimador LMFD tipo IO.....	82
4.3.5.2 Estimador LMFD para datos FRF .....	83
<b>CAPÍTULO 5 TRANSMISIBILIDAD MULTIVARIABLE</b> .....	<b>85</b>
5.1 INTRODUCCIÓN.....	85
5.2 MÉTODO.....	86
5.3 ESTIMACIÓN DE FUENTES NO CORRELACIONADAS .....	94
5.4 DISTINCIÓN DE CONDICIONES DE CARGA .....	96
5.5 CONDICIÓN DE CARGA ÚNICA .....	99
<b>CAPÍTULO 6 TRANSMISIBILIDAD MEDIANTE ESPECTROS DE DENSIDAD DE POTENCIA (PSDT)</b> .....	<b>101</b>
6.1 INTRODUCCIÓN.....	101
6.2 MÉTODO PSDT.....	101
6.3 ANÁLISIS DE DESEMPEÑO PARA DISTINTOS TIPOS DE CARGA .....	109

6.4	DISCRIMINACIÓN FRECUENCIAS DE EXCITACIÓN .....	115
6.5	DISCRIMINACIÓN POLOS FALSOS UTILIZANDO DESCOMPOSICIÓN SVD.....	121
6.6	ESTIMACIÓN DE AMORTIGUAMIENTO.....	122
<b>CAPÍTULO 7 PROPUESTA DE METODOLOGÍA.....</b>		<b>125</b>
7.1	INTRODUCCIÓN.....	125
7.2	METODOLOGÍAS DE ANÁLISIS PARA CONDICIÓN DE CARGA MÚLTIPLE.....	125
7.2.1	<i>Descripción metodología 1</i> .....	126
7.2.2	<i>Descripción metodología 2</i> .....	130
7.2.3	<i>Descripción metodología 3</i> .....	131
7.3	METODOLOGÍAS DE ANÁLISIS PARA CONDICIÓN DE CARGA ÚNICA.....	134
7.3.1	<i>Descripción metodología 4</i> .....	135
7.3.2	<i>Descripción metodología 5</i> .....	138
7.4	IDENTIFICACIÓN MODAL OPERACIONAL MEDIANTE MÉTODO SSI-COV.....	140
7.4.1	<i>Introducción SSI-Cov</i> .....	140
7.5	SIMULACIÓN NUMÉRICA.....	146
7.5.1	<i>Descripción modelo base</i> .....	146
7.5.2	<i>Estados de carga</i> .....	148
7.6	RESULTADOS TRANSMISIBILIDAD.....	151
7.6.1	<i>Resultados Metodología1</i> .....	151
7.6.2	<i>Resultados Metodología2</i> .....	157
7.6.3	<i>Resultados Metodología3</i> .....	163
7.6.4	<i>Resultados Metodología4</i> .....	167
7.6.5	<i>Resultados Metodología5</i> .....	171
7.7	RESULTADOS SSI-COV.....	174
<b>CAPÍTULO 8 EVALUACIÓN EXPERIMENTAL .....</b>		<b>178</b>
8.1	ESTRUCTURA ENSAYADA EN LABORATORIO .....	178
8.1.1	<i>Descripción de la estructura</i> .....	178
8.1.2	<i>Escenarios de carga</i> .....	182
8.1.3	<i>Propiedades Modales</i> .....	182
8.1.4	<i>Resultados Transmisibilidad</i> .....	185
8.1.4.1	Metodología 1.....	185
8.1.4.2	Metodología 2.....	188
8.1.4.3	Metodología 3.....	191
8.1.4.4	Metodología 4.....	193
8.1.4.5	Metodología 5.....	195
8.1.5	<i>Resultados SSI-Cov</i> .....	196
8.2	EDIFICIO TORRE CENTRAL.....	198
8.2.1	<i>Descripción de la estructura</i> .....	198
8.2.2	<i>Escenarios de carga</i> .....	201
8.2.3	<i>Resultados Transmisibilidad</i> .....	202
8.2.3.1	Metodología 1.....	202
8.2.3.2	Metodología 2.....	204
8.2.3.3	Metodología 3.....	206
8.2.3.4	Metodología 4.....	207
8.2.3.5	Metodología 5.....	209
8.2.4	<i>Resultados SSI-Cov</i> .....	210
<b>CAPÍTULO 9 DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES .....</b>		<b>211</b>
9.1	COMENTARIOS Y CONCLUSIONES GENERALES .....	211
9.2	RECOMENDACIONES PARA INVESTIGACIONES FUTURAS.....	215
<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>		<b>217</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Introducción/Motivación

Durante los últimos años gran interés ha generado el estudio de las propiedades modales de diversas estructuras, la identificación de estos parámetros permite llevar a cabo diversas aplicaciones, entre las cuales se destacan el diseño/rediseño de prototipos, refinamiento de modelos de elementos finitos, detección de daños, así como el monitoreo estructural. El análisis modal experimental EMA (*Experimental Modal Analysis*) ha sido la herramienta más comúnmente usada para extraer propiedades modales, sin embargo, este enfoque requiere que las excitaciones sobre un sistema sean conocidas, y que a su vez sean capaces de excitar a la estructura estudiada en el rango de frecuencias de interés, de lo cual se desprende que el entorno en el cual se desarrollen las mediciones debe ser completamente controlado. No obstante, debido a la gran envergadura que pueden presentar diversas estructuras civiles tales como puentes y edificios, esta metodología resulta difícil, si no imposible de aplicar debido a la dificultad de poder determinar todas las excitaciones presentes, restringiendo su uso sólo a componentes/estructuras menores. Incluso, en el caso de que existiera la posibilidad de utilizar excitaciones tal como la caída libre de pesos, estas mediciones tendrían que realizarse en condiciones óptimas para tales ensayos, las cuales podrían distar considerablemente de las condiciones de operación real de la estructura. Considerando las limitaciones mencionadas para la metodología tipo EMA, surgen las técnicas que utilizan como datos de entrada sólo la respuesta de un sistema, este tipo de metodologías obedece a una forma de análisis denominada tradicionalmente como OMA (*Output-only Modal Analysis*). Debido a la naturaleza de esta técnica, las respuestas pueden ser registradas en la condición real de operación, logrando capturar fehacientemente las condiciones de borde adjuntas al sistema. Sin embargo, la principal restricción de la mayoría de los métodos tipo OMA, yace en el supuesto de que las fuerzas que exciten la estructura correspondan predominantemente a sollicitaciones de tipo ruido blanco, lo cual para diversas estructuras en sus condiciones de operación difícilmente podría considerarse como válido.

Recientemente, un grupo de investigadores ha propuesto un método tipo OMA bastante novedoso, el cual hace uso del concepto de transmisibilidad, entendiéndolo como la razón entre las respuestas, en el dominio de Laplace, entre dos puntos de la estructura (Devriendt & Guillaume, 2008) (Devriendt, De Sitter, Vanlanduit, & Guillaume, 2009). En estos trabajos se ha determinado que las funciones de transmisibilidad entre dos puntos, calculadas para distintas condiciones de carga, convergen al mismo valor cuando son evaluadas en los polos

de la estructura. Considerando el resultado anterior, y mediante una manipulación matemática es posible construir una función alternativa a la transmisibilidad, para la cual los máximos de esta nueva función se ubican exactamente en los polos del sistema, dando forma así a pseudo funciones de transferencia (FRFs, *Frequency Response Functions*), propias del análisis modal en un escenario tipo EMA. La principal ventaja de este método, es que no realiza ningún tipo de supuestos respecto a la naturaleza de las excitaciones a las cuales pueda estar sometida la estructura al momento de registrar las respuestas. De lo anterior se desprende que incluso en el caso de tener excitaciones armónicas, estos componentes no distorsionarán los resultados, tal como ocurre en la mayoría de los métodos tipo OMA, por lo que resulta una característica muy útil en caso de analizar estructuras de tipo industrial. Sin embargo, el requisito esencial para llevar a cabo esta metodología, es poder identificar condiciones de carga distintas entre sí, como por ejemplo podría resultar un cambio en la distribución espacial de las cargas.

Considerando el requisito principal del método asociado a funciones de transmisibilidad, que corresponde a reunir dos o más condiciones de carga distintas entre sí, y teniendo en cuenta la alta sismicidad del país, resulta tentador estudiar la aplicación de este método en estructuras civiles considerando la respuesta sísmica como una condición de carga claramente definida.

Recopilando los distintos aportes realizados a través del tiempo en relación a las funciones de transmisibilidad, se puede ver que en general, si bien cada publicación representa un avance y/o una alternativa a lo desarrollado anteriormente, las investigaciones no han seguido una línea secuencial definida, diversificándose así en diversos aportes para las distintas características propias del método. Lo anterior conduce a que, a pesar de existir un extenso desarrollo, no exista una metodología lo suficientemente clara que permita al usuario llegar al resultado final de manera óptima.

Por otra parte, se ha visto que, en la mayoría de los trabajos, los experimentos utilizados para validar los modelos se han realizado sobre piezas o componentes menores relacionados con la industria automotriz, y la aeroespacial, no siendo el foco las estructuras civiles.

Considerando el estado del arte en materia relacionada a funciones de transmisibilidad, se propone estudiar los diversos aportes al método presentados hasta la fecha, y generar una metodología clara y eficiente para la estimación de parámetros modales con aplicabilidad a estructuras civiles tales como edificios.

De tal forma de poder evaluar experimentalmente el uso de transmisibilidad en estructuras, se considerarán los registros de aceleraciones existentes del edificio Torre Central, ubicado en la facultad de Ingeniería de la Universidad de Chile, en conjunto con los datos capturados para una estructura montada en laboratorio.

## **1.2 Objetivos**

### **1.2.1 Objetivo General**

Desarrollar una metodología eficiente para la estimación de parámetros modales mediante el uso de funciones de transmisibilidad, que sea aplicable a estructuras civiles sometidas a excitaciones sísmicas y de uso cotidiano.

### **1.2.2 Objetivos Específicos**

- Definir una metodología clara y eficiente para la implementación del método de identificación mediante funciones de transmisibilidad.
- Evaluar si la distinción entre respuestas de uso diurno y nocturno, así como uso cotidiano y respuesta sísmica resultan suficientes para asegurar un buen desempeño del método.
- Evaluar una combinación entre las distintas formulaciones para el concepto de transmisibilidad, de tal forma que permita obtener parámetros modales utilizando sólo una condición de carga.

## **1.3 Organización del Informe**

El informe de trabajo de tesis ha sido dividido en nueve capítulos, los cuales se resumen a continuación

### **Capítulo 1: Introducción**

Se presentan la motivación, los antecedentes generales y los objetivos de la presente tesis.

### **Capítulo 2: Marco Teórico**

Se presenta una descripción general de lo que son las funciones de transmisibilidad, y su relación con la estimación de parámetros modales. Se describen los requisitos y supuestos necesarios para el asegurar un buen funcionamiento del método. Adicionalmente, se menciona la posibilidad de disponer total independencia del contenido espectral asociado a las excitaciones, además de las alternativas paramétricas y no paramétricas para la estimación de funciones de transmisibilidad.

### **Capítulo 3: Evaluación Numérica de Funciones de Transmisibilidad**

Se exponen los argumentos necesarios para justificar el empleo del dominio de Fourier en la evaluación de funciones de transmisibilidad, presentando además diversas alternativas para la formulación numérica de dichas funciones. Se considera la posibilidad de que el método arroje polos asociados a la estructura matemática del problema, y por lo tanto, no estén

ligados al sistema en estudio, se evalúan diversas metodologías para la detección de polos falsos.

#### **Capítulo 4: Estimadores Paramétricos**

En este capítulo, se detallan diferentes estimadores paramétricos que permitirán, a partir de las curvas de transmisibilidad, extraer de forma numérica los polos de un sistema. Éstos serán: LSCF (*Least Squares Complex Frequency Domain*), pLSCF (*Polyreference Least Squares Complex Frequency Domain*), ML (*Maximum Likelihood*), pLSCF-plus, y el modelo IO (Input/Output), los cuales han sido desarrollados previamente para el proceso de identificación modal en escenarios tipo EMA. Adicionalmente, se introducen los diagramas de estabilización como herramienta útil para la confirmación de los órdenes empleados en la implementación de estimadores, así como la extracción numérica de valores modales.

#### **Capítulo 5: Transmisibilidad Multivariable**

Se presenta una formulación multivariable de transmisibilidad, la cual bajo ciertos requisitos, propone eliminar la dependencia del contenido espectral del input, aún en condiciones en las cuales la sollicitación se distribuya de manera no correlacionada sobre la estructura en estudio.

#### **Capítulo 6: Método PsdT (*Power Spectral Density Transmissibility*)**

Se estudia una variación del método de funciones de transmisibilidad basado en espectros de densidad de potencia, el cual propone como gran ventaja resolver el problema de identificación modal considerando sólo una condición de carga.

#### **Capítulo 7: Propuesta de Metodología**

Considerando los resultados de los capítulos anteriores, se proponen diversas metodologías que permitan llevar a cabo el proceso de identificación de parámetros modales. Lo anterior es propuesto para las siguientes alternativas:

- Condición única de carga
- Condición múltiple de cargas

De tal forma de evaluar el desempeño de las distintas metodologías, se lleva a cabo una simulación numérica para un sistema estructural sometido a cargas dinámicas, cuya respuesta será considerada como el input para los distintos métodos. Adicionalmente, se incluyen los resultados de la implementación del método clásico de identificación modal SSI-Cov (Peeters & De Roeck, 1999).

## **Capítulo 8: Evaluación Experimental**

Se implementa la metodología propuesta utilizando como datos de entrada los registros de aceleraciones del edificio Torre Central y la respuesta vibratoria de una estructura montada en laboratorio.

## **Capítulo 9: Discusión y Conclusiones**

En este capítulo se discuten los distintos resultados obtenidos en este trabajo. Adicionalmente, se incluyen conclusiones y sugerencias para investigaciones futuras.

## Capítulo 2

### Marco Teórico

#### 2.1 Introducción

Tal como ha sido mencionado en el capítulo anterior, gran interés ha generado el sustancial avance computacional (y la reducción de costos asociados) en torno a la posibilidad de implementar nuevas metodologías que permitan identificar la mayor cantidad de parámetros modales asociados a una estructura. Los motivos principales para conocer estos valores en estructuras civiles, están directamente relacionados con el monitoreo de salud estructural, así como técnicas de detección de daños. Bajo este escenario, diversas técnicas tipo OMA han sido desarrolladas (Peak picking, métodos de subespacio, NexT ErA, etc.), sin embargo, el grado de éxito asociado a cada una de las alternativas involucra ciertos requerimientos tales como: disponer de vibraciones libres, solicitaciones carentes de contenido armónico o conocimiento previo de éstos, solicitaciones de tipo ruido blanco, etc. condiciones que difícilmente pueden ser cumplidas a cabalidad en condiciones reales de operación.

Considerando las limitaciones de las metodologías de tipo operacional descritas en el párrafo anterior, en el presente capítulo se presentarán las bases que definen un método capaz de estimar propiedades modales sin importar la naturaleza del input, reduciendo así el riesgo de malinterpretar valores modales para alguna excitación que no necesariamente corresponda a ruido blanco (Devriendt & Guillaume, 2008).

#### 2.2 Transmisibilidad Escalar - Excitación Singular

Considerando el concepto de transmisibilidad multivariable definido para sistemas lineales e invariantes en el tiempo (*Linear Time Invariant*, LTI) (Maia, Silva, & Ribeiro, 2001), donde la transmisibilidad no es más que una matriz de correspondencia entre dos sets de respuestas definidas bajo el dominio de Laplace, esto es:

$$\{x_l(s)\} = T(s)\{x_r(s)\} \quad (2-1)$$

Se define como transmisibilidad escalar a la simple razón entre dos respuestas asociadas a los grados de libertad  $i$ - $j$  respectivamente:

$$T_{ij}(s) = \frac{x_i(s)}{x_j(s)} \quad (2-2)$$

Para comprender de mejor manera las cualidades relacionadas al concepto de transmisibilidad escalar, considere en primera instancia un sistema para el cual su grado de libertad  $k$  resulta el único excitado. Considerando este supuesto, y haciendo uso de la matriz de transferencia  $H(s)$ , la expresión ( 2-2 ) puede ser escrita de la siguiente forma:

$$T_{ij}(s) = \frac{x_i(s)}{x_j(s)} = \frac{H_{ik}(s)F_k(s)}{H_{jk}(s)F_k(s)} = \frac{H_{ik}(s)}{H_{jk}(s)} \quad (2-3)$$

Al observar ( 2-3 ), se puede ver que para el escenario de excitación única, la transmisibilidad resulta totalmente independiente del contenido espectral  $F_k(s)$ , lo cual define su cualidad determinística. No obstante, aún no queda del todo claro la relación entre los parámetros modales y esta función. Para resolver esta interrogante, considere que la matriz de transferencia obedece a un modelo paramétrico<sup>1</sup> fraccional de común denominador, esto es:

$$H_{ij}(s) = \frac{B_{ij}(s)}{A(s)} \quad (2-4)$$

Con:

$B_{ij}(s)$ : Polinomio escalar asociado al numerador.

$A(s)$ : Polinomio asociado al denominador.

Considerando este modelo paramétrico, es claro que la información relativa a los polos del sistema se asocia únicamente con el polinomio  $A(s)$ , en particular los ceros de éste.

De acuerdo a este modelo, la expresión ( 2-3 ) toma la siguiente forma:

$$T_{ij}(s) = \frac{x_i(s)}{x_j(s)} = \frac{H_{ik}(s)F_k(s)}{H_{jk}(s)F_k(s)} = \frac{H_{ik}(s)}{H_{jk}(s)} = \frac{B_{ik}(s)/A(s)}{B_{jk}(s)/A(s)} = \frac{B_{ik}(s)}{B_{jk}(s)} \quad (2-5)$$

Según este resultado, se puede ver que la función de transmisibilidad, por sí sola, resulta totalmente independiente del polinomio asociado al denominador de un modelo paramétrico definido para la función de transferencia  $H(s)$ , por lo tanto, cualquier máximo que logre esta función (en amplitud), estará relacionado con los ceros de la componente  $B_{jk}(s)$  (antiresonancia de la función de transferencia con componente  $j-k$ ), no así con los polos del sistema.

Según lo expuesto hasta acá, ha quedado claro que las funciones de transmisibilidad escalar, por sí solas, resultan incapaces de entregar información relativa a los polos del sistema. No obstante a lo anterior, se puede demostrar fácilmente que la dependencia de estas funciones

<sup>1</sup> Para mayor detalle de estimadores paramétricos, dirigirse al Capítulo 4.

respecto a la distribución espacial del input ( $k$ ), resulta una propiedad clave para poder hacer uso de estas funciones en el proceso de identificación modal.

Considerando que una función de transmisibilidad escalar queda completamente definida al conocer las respuestas de dos grados de libertad, así como la condición de carga para la cual éstas son estimadas, en adelante  $T_{ij}^k(s)$ , se entenderá como la transmisibilidad entre los grados de libertad  $i$ - $j$ , correspondiente a la condición de carga  $k$ .

De tal forma de poder identificar los polos de un sistema haciendo uso de funciones de transmisibilidad, considere el siguiente modelo modal (Heylen, Lammens, & Sas, 2005):

$$H_{ik}(s) = \sum_{m=1}^{N_m} \frac{\Phi_{im}L_{km}}{(s - \lambda_m)} + \frac{\Phi_{im}^*L_{km}^*}{(s - \lambda_m^*)} \quad (2-6)$$

Tomando este modelo (amortiguamiento proporcional), y al determinar el valor de la expresión ( 2-3 ) para cuando el argumento de la función ( $s$ ) se aproxima al valor de un polo  $\lambda_r$ , se observa que:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \lambda_r} T_{ij}^k(s) &= \lim_{s \rightarrow \lambda_r} \frac{(s - \lambda_r)H_{ik}(s)}{(s - \lambda_r)H_{jk}(s)} \\ &= \frac{\lim_{s \rightarrow \lambda_r} (s - \lambda_r) \left( \sum_{m=1}^{N_m} \frac{\Phi_{im}L_{km}}{(s - \lambda_m)} + \frac{\Phi_{im}^*L_{km}^*}{(s - \lambda_m^*)} \right)}{\lim_{s \rightarrow \lambda_r} (s - \lambda_r) \left( \sum_{m=1}^{N_m} \frac{\Phi_{jm}L_{km}}{(s - \lambda_m)} + \frac{\Phi_{jm}^*L_{km}^*}{(s - \lambda_m^*)} \right)} \\ &= \frac{\lim_{s \rightarrow \lambda_r} \sum_{m=1}^{N_m} \left( (s - \lambda_r) \frac{\Phi_{im}L_{km}}{(s - \lambda_m)} + (s - \lambda_r) \frac{\Phi_{im}^*L_{km}^*}{(s - \lambda_m^*)} \right)}{\lim_{s \rightarrow \lambda_r} \sum_{m=1}^{N_m} \left( (s - \lambda_r) \frac{\Phi_{jm}L_{km}}{(s - \lambda_m)} + (s - \lambda_r) \frac{\Phi_{jm}^*L_{km}^*}{(s - \lambda_m^*)} \right)} \quad (2-7) \\ &= \frac{\lim_{s \rightarrow \lambda_r} (s - \lambda_r) \frac{\Phi_{ir}L_{kr}}{(s - \lambda_r)}}{\lim_{s \rightarrow \lambda_r} (s - \lambda_r) \frac{\Phi_{jr}L_{kr}}{(s - \lambda_r)}} \\ &= \frac{\Phi_{ir}L_{kr}}{\Phi_{jr}L_{kr}} \\ &= \frac{\Phi_{ir}}{\Phi_{jr}} \end{aligned}$$

El desarrollo anterior muestra que, al intentar evaluar una función de transmisibilidad en algún polo del sistema, ésta tiende a un valor único, independientemente de la referencia  $k$  empleada (condición de carga). Por otra parte, el valor al cual tiende esta expresión

corresponde a la razón entre las componentes  $i$ - $j$  asociadas a la forma modal correspondiente al polo evaluado ( $\lambda_r$ ).

De acuerdo a este antecedente, es posible construir una pseudo función de transferencia, de tal forma que ésta presente sus máximos coincidentemente en los polos del sistema. Para lograr esto, considere la siguiente expresión:

$$\Delta^{-1}_{ij}{}^{kl}(s) = (T_{ij}^k(s) - T_{ij}^l(s))^{-1} = \frac{1}{T_{ij}^k(s) - T_{ij}^l(s)} \quad (2-8)$$

Es claro que al intentar evaluar ( 2-8 ) en algún polo ( $\lambda_r$ ), se tiene:

$$\lim_{s \rightarrow \lambda_r} \Delta^{-1}_{ij}{}^{kl}(s) = \left( \frac{\Phi_{ir}}{\Phi_{jr}} - \frac{\Phi_{ir}}{\Phi_{jr}} \right)^{-1} \approx \infty \quad (2-9)$$

Es importante recalcar que la idea central que hay detrás de la utilización de la función  $\Delta^{-1}_{ij}{}^{kl}(s)$ , consiste en asumir que ésta diverge sólo para los polos del sistema, lo cual permitiría detectar fácilmente estos valores mediante una inspección de los máximos que presente dicha función (valor absoluto). La condición necesaria que podría asegurar lo anterior, se reduce simplemente a considerar un segundo estado de carga  $l$ , que considere un cambio de posición de la sollicitación (en este ejemplo, excitación singular).

No obstante al resultado anterior (divergencia al evaluar en algún polo), la forma en la cual ha sido concebida la función auxiliar  $\Delta^{-1}_{ij}{}^{kl}(s)$  sugiere especial atención, en particular la generación de máximos que no necesariamente correspondan a los polos del sistema, aun cuando sean escogidas dos condiciones de carga que aseguren un cambio en la distribución espacial de la carga. Para facilitar el entendimiento de este fenómeno, considere el modelo paramétrico empleado para el desarrollo de la expresión ( 2-5 ), lo cual permite escribir ( 2-8 ) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Delta^{-1}_{ij}{}^{kl}(s) &= (T_{ij}^k(s) - T_{ij}^l(s))^{-1} \\ &= \left( \frac{B_{ik}(s)}{B_{jk}(s)} - \frac{B_{il}(s)}{B_{jl}(s)} \right)^{-1} \\ &= \left( \frac{B_{ik}(s)B_{jl}(s) - B_{il}(s)B_{jk}(s)}{B_{jk}(s)B_{jl}(s)} \right)^{-1} \\ &= \left( \frac{B_{jk}(s)B_{jl}(s)}{B_{ik}(s)B_{jl}(s) - B_{il}(s)B_{jk}(s)} \right) \end{aligned} \quad (2-10)$$

Al observar la estructura final de ( 2-10 ), se puede ver que la función  $\Delta^{-1}_{ij}{}^{kl}(s)$  podría eventualmente divergir para algún valor que no necesariamente corresponda a algún polo,

en tal caso la condición necesaria para lograr esta situación, se reduce a encontrar un valor  $\bar{s}$  tal que cumpla el siguiente requerimiento:

$$B_{ik}(\bar{s})B_{jl}(\bar{s}) = B_{il}(\bar{s})B_{jk}(\bar{s}) \quad (2-11)$$

De tal forma de poder discriminar polos que efectivamente correspondan al sistema en estudio (polos de naturaleza física) y máximos que deban su aparición exclusivamente a la estructura de la función  $\Delta^{-1}_{ij}{}^{kl}(s)$  (polos de naturaleza matemática), diversas metodologías serán presentadas en el siguiente capítulo.

### 2.3 Transmisibilidad Escalar - Excitación Múltiple

El resultado de la sección anterior ha evidenciado que la manipulación de transmisibilidades escalares definidas para diferentes condiciones de carga con excitaciones aplicadas sobre un único grado de libertad, permite generar curvas con polos que correspondan exactamente a los del sistema en estudio. De tal forma de generalizar el concepto de transmisibilidad, a continuación se estudiará el comportamiento del operador descrito en ( 2-8 ) para condiciones de carga con excitación directa sobre múltiples grados de libertad.

Suponga un sistema de  $n$  grados de libertad, sujeto a una condición de carga tal que sólo los primeros  $l$  reciben directamente la sollicitación externa (desconocida). De acuerdo a esto, y considerando el uso de la matriz de transferencia, la transmisibilidad entre los grados de libertad  $n_1$  y  $n_2$  queda definida por:

$$T_{n_1 n_2}(s) = \frac{x_{n_1}(s)}{x_{n_2}(s)} = \frac{H_{n_1 1}(s)F_1(s) + H_{n_1 2}(s)F_2(s) + \dots + H_{n_1 l}(s)F_l(s)}{H_{n_2 1}(s)F_1(s) + H_{n_2 2}(s)F_2(s) + \dots + H_{n_2 l}(s)F_l(s)} \quad (2-12)$$

Al intentar determinar el límite al cual tiende esta expresión para algún polo del sistema, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \lambda_r} T_{n_1 n_2}(s) &= \lim_{s \rightarrow \lambda_r} \left[ \frac{x_{n_1}(s)}{x_{n_2}(s)} \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow \lambda_r} \left[ \frac{(s - \lambda_r)(H_{n_1 1}(s)F_1(s) + H_{n_1 2}(s)F_2(s) + \dots + H_{n_1 l}(s)F_l(s))}{(s - \lambda_r)(H_{n_2 1}(s)F_1(s) + H_{n_2 2}(s)F_2(s) + \dots + H_{n_2 l}(s)F_l(s))} \right] \\ &= \frac{(\Phi_{n_1 r} L_{1r} F_1(s) + \Phi_{n_1 r} L_{2r} F_2(s) + \dots + \Phi_{n_1 r} L_{lr} F_l(s))}{(\Phi_{n_2 r} L_{1r} F_1(s) + \Phi_{n_2 r} L_{2r} F_2(s) + \dots + \Phi_{n_2 r} L_{lr} F_l(s))} \\ &= \frac{[\Phi_{n_1 r} (L_{1r} F_1(s) + L_{2r} F_2(s) + \dots + L_{lr} F_l(s))]}{[\Phi_{n_2 r} (L_{1r} F_1(s) + L_{2r} F_2(s) + \dots + L_{lr} F_l(s))]} \end{aligned} \quad (2-13)$$

$$= \frac{\Phi_{n_1 r}}{\Phi_{n_2 r}}$$

Observando el resultado final de ( 2-13 ), se puede comprobar que aun cuando la sollicitación sobre el sistema sea tal que ésta actúe sobre múltiples grados de libertad, el límite al cual converge la función de transmisibilidad escalar para algún polo del sistema, corresponde al mismo valor indicado en ( 2-7 ).

## 2.4 Estudio de dependencia del contenido espectral asociado a la excitación

De acuerdo lo indicado en las secciones anteriores, el valor al cual tiende una razón de transmisibilidad escalar al ser evaluada en algún polo del sistema resulta un valor fijo e independiente de la condición de carga empleada para la cual haya sido definida, vale decir, tipo de excitación y/o número de grados de libertad excitados. Este fenómeno ha sugerido la utilización del operador ( 2-8 ), el cual supone divergencia sólo para los polos del sistema, o en el peor caso, para la condición descrita según ( 2-11 ).

Cabe destacar que para la condición de excitación singular (excitación aplicada en un sólo grado de libertad), los valores de la función de transmisibilidad  $T_{ij}^k(s)$  resultan totalmente independientes del contenido espectral de la excitación  $F(s)$ , lo cual define la cualidad determinística para este caso, vale decir, una función que no modifica su recorrido en caso de repetir el experimento manteniendo los mismos ajustes (aplicación de carga aleatoria). No obstante, para el caso de excitación múltiple, esta última afirmación ya no resulta del todo válida, por lo que merece un estudio en mayor profundidad, para lo cual se definirán dos escenarios: carga en fase y fuera de fase.

### 2.4.1 Carga en fase

Considere un sistema de  $n$  grado de libertad, para el cual los primeros  $l$  resultan excitados por una sollicitación múltiple y repartida espacialmente en fase, esto es:

$$\{F(s)\} = \begin{Bmatrix} f_{\mu 1} \\ f_{\mu 2} \\ \vdots \\ f_{\mu l} \end{Bmatrix} \mu(s) \quad (2-14)$$

$$f_{\mu i} \in \mathbb{R}$$

Notar que la descripción anterior corresponde al caso para el cual se dispone de sólo una fuente no correlacionada repartida espacialmente sobre la estructura. Tomando en cuenta este resultado, es fácil ver la transmisibilidad definida entre los grados de libertad  $n_1$  y  $n_2$  resulta lo siguiente:

$$\begin{aligned}
T_{n_1 n_2}(s) &= \frac{x_{n_1}(s)}{x_{n_2}(s)} = \frac{H_{n_1 1}(s)F_1(s) + H_{n_1 2}(s)F_2(s) + \dots + H_{n_1 l}(s)F_l(s)}{H_{n_2 1}(s)F_1(s) + H_{n_2 2}(s)F_2(s) + \dots + H_{n_2 l}(s)F_l(s)} \\
&= \frac{H_{n_1 1}(s)f_{\mu 1}\mu(s) + H_{n_1 2}(s)f_{\mu 2}\mu(s) + \dots + H_{n_1 l}(s)f_{\mu l}\mu(s)}{H_{n_2 1}(s)f_{\mu 1}\mu(s) + H_{n_2 2}(s)f_{\mu 2}\mu(s) + \dots + H_{n_2 l}(s)f_{\mu l}\mu(s)} \quad (2-15) \\
&= \frac{H_{n_1 1}(s)f_{\mu 1} + H_{n_1 2}(s)f_{\mu 2} + \dots + H_{n_1 l}(s)f_{\mu l}}{H_{n_2 1}(s)f_{\mu 1} + H_{n_2 2}(s)f_{\mu 2} + \dots + H_{n_2 l}(s)f_{\mu l}}
\end{aligned}$$

El resultado de la expresión anterior, revela la cualidad determinística (dependencia exclusiva sobre los parámetros del sistema) de la transmisibilidad escalar para una condición de carga de excitación múltiple, definida mediante una repartición espacial de una única fuente no correlacionada. Según este resultado, la condición necesaria para poder emplear ( 2-8 ), haciendo uso de este tipo de excitaciones, se resume a poder identificar un cambio en la distribución espacial de las cargas, esto es, modificar la selección de grados de libertad que hayan sido escogidos en una primera etapa. De acuerdo al resultado anterior, se desprende que bastaría con mover la excitación sobre un sólo grado de libertad para que el operador no diverja.

#### 2.4.2 Carga fuera de fase

Para este escenario, considere un sistema de  $n$  grados de libertad sobre el cual se aplica una excitación que resulta de combinar múltiples ( $m$ ) fuentes no correlacionadas ( $\mu$ ) sobre los primeros  $l$  grados de libertad.

$$\{F(s)\} = \begin{Bmatrix} f_{1\mu_1} & f_{1\mu_2} & & f_{1\mu_m} \\ f_{2\mu_1} & f_{2\mu_2} & \dots & f_{2\mu_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{l\mu_1} & f_{l\mu_2} & & f_{l\mu_m} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu_1(s) \\ \mu_2(s) \\ \vdots \\ \mu_m(s) \end{Bmatrix} \quad (2-16)$$

$$f_{ij} \in \mathbb{R}$$

Tomando en cuenta este escenario, la transmisibilidad escalar entre los grados de libertad  $n_1$  y  $n_2$  resulta:

$$\begin{aligned}
T_{n_1 n_2}(s) &= \frac{x_{n_1}(s)}{x_{n_2}(s)} = \frac{H_{n_1 1}(s)F_1(s) + H_{n_1 2}(s)F_2(s) + \dots + H_{n_1 l}(s)F_l(s)}{H_{n_2 1}(s)F_1(s) + H_{n_2 2}(s)F_2(s) + \dots + H_{n_2 l}(s)F_l(s)} \\
&= \frac{H_{n_1 1}(s)[f_{1\mu_1}\mu_1(s) + \dots + f_{1\mu_m}\mu_m(s)] + \dots + H_{n_1 l}(s)[f_{l\mu_1}\mu_1(s) + \dots + f_{l\mu_m}\mu_m(s)]}{H_{n_2 1}(s)[f_{1\mu_1}\mu_1(s) + \dots + f_{1\mu_m}\mu_m(s)] + \dots + H_{n_2 l}(s)[f_{l\mu_1}\mu_1(s) + \dots + f_{l\mu_m}\mu_m(s)]} \quad (2-17)
\end{aligned}$$

Se puede ver que el resultado expuesto en ( 2-17 ) resulta similar al presentado en ( 2-15 ), no obstante, para este último caso resulta imposible simplificar las diversas componentes asociadas a la excitación  $\mu(s)$ , lo que define la característica **no** determinística que presentan

las funciones de transmisibilidad definidas para condiciones con presencia de múltiples cargas en desfase.

La principal consecuencia del resultado obtenido, radica en la eventual pérdida de precisión al momento de obtener los parámetros modales de la estructura en estudio. Lo anterior se debe a que estos valores serán obtenidos mediante la aplicación de diversos estimadores paramétricos sobre curvas de transmisibilidad, las que en este escenario no portarían información exclusiva del sistema, dando lugar a una malinterpretación de datos o entorpeciendo el desempeño de los estimadores.

No obstante a lo anterior, cabe destacar que la cualidad no determinística para esta condición no compromete en absoluto el resultado obtenido en ( 2-13 ) (capacidad de converger a un valor fijo al evaluar en un polo).

## 2.5 Formas Modales

Como ha sido descrito en las secciones anteriores, el manejo de funciones de transmisibilidad permitiría identificar, mediante inspección visual de los máximos asociados a una superficie definida en el dominio de Laplace, los polos asociados al sistema que resultasen excitados producto de una sollicitación externa sobre la estructura en estudio.

Si bien aún no ha sido formalmente expuesto, la expresión empleada en ( 2-6 ) describe la dinámica de un sistema de múltiples con grados de libertad que obedece a un modelo lineal con amortiguamiento viscoso y proporcional. Dado lo anterior, es posible demostrar que la estructura matemática de los polos (parte real e imaginaria) considera información relativa tanto a las frecuencias, así como a los amortiguamientos relacionados a cada uno de los modos clásicos que obedecen al problema de valores propios del sistema dinámico. No obstante a lo anterior, estos valores por sí solos no permiten describir la forma modal asociada. Para resolver la incógnita asociada a la obtención de las formas modales, se debe tomar como referencia el resultado final de ( 2-7 ), el cual corresponde al valor fijo al cual tiende la función de transmisibilidad definida para el par de nodos  $i-j$  al ser evaluada en algún polo del sistema. Al inspeccionar este valor, el lector podrá ver que el valor obtenido no es más que la simple razón entre las componentes de la forma modal asociada a la frecuencia natural relacionada al polo en el cual es evaluada la transmisibilidad. Dado este antecedente, se propone la siguiente metodología para evaluar la forma modal asociada al polo  $\lambda_r$ .

Una vez definida la cantidad de puntos de control de sistema ( $l$ ), se deberá fijar uno de los puntos de monitoreo como referencia  $j$ , con lo cual es posible generar el siguiente vector definido para un estado de carga  $k$ :

$$\{\varphi(s)_j^k\} = \begin{Bmatrix} T_{1j}^k(s) \\ T_{2j}^k(s) \\ \vdots \\ T_{jj}^k(s) \\ \vdots \\ T_{(l-1)j}^k(s) \\ T_{lj}^k(s) \end{Bmatrix} \quad (2-18)$$

Al intentar evaluar el vector sobre algún polo del sistema, se obtiene el siguiente resultado:

$$\lim_{s \rightarrow \lambda_r} \{\varphi(s)_j^k\} = \begin{Bmatrix} \phi_{1r}/\phi_{jr} \\ \phi_{2r}/\phi_{jr} \\ \vdots \\ \phi_{jr}/\phi_{jr} \\ \vdots \\ \phi_{(l-1)r}/\phi_{jr} \\ \phi_{lr}/\phi_{jr} \end{Bmatrix} = \left( \frac{1}{\phi_{jr}} \right) \begin{Bmatrix} \phi_{1r} \\ \phi_{2r} \\ \vdots \\ \phi_{jr} \\ \vdots \\ \phi_{(l-1)r} \\ \phi_{lr} \end{Bmatrix} \quad (2-19)$$

De lo anterior, se desprende fácilmente que el arreglo de transmisibilidades, mediante el vector  $\varphi(s)_j^k$ , y evaluado en el polo  $\lambda_r$ , tiende a la forma modal asociada al modo  $r$ , con componentes normalizadas respecto a la ordenada de posición  $j$ .

Considerando el resultado obtenido, se propone identificar en primera instancia los polos del sistema, para posteriormente con una referencia fija  $j$ , tomar cada polo  $\lambda_r$  y armar sendos vectores  $\varphi(\lambda_r)_j^k$ .

Por otra parte, se debe notar que el resultado obtenido en ( 2-19 ), resulta totalmente independiente de la condición de carga  $k$  empleada para definir las transmisibilidades. No obstante a lo anterior, en la práctica la evaluación numérica de las funciones generalmente trae consigo un error que puede deberse a distintos factores, entre los cuales destacan el ruido instrumental y fenómenos asociados a las transformadas numéricas de estas funciones. Considerando esta variabilidad, se propone considerar todas las combinaciones de carga disponibles y tomar un valor promedio para representar cada modo.

$$\{\phi_r^j\} = \frac{1}{N_k} \left( \sum_{k=1}^{N_k} \lim_{s \rightarrow \lambda_r} \{\varphi(s)_j^k\} \right) \quad (2-20)$$

Adicionalmente, debido a que los modos responden a un procedimiento en el cual sus componentes resultan normalizadas respecto a una componente  $j$ , el usuario tiene la posibilidad de escoger cualquiera de los puntos restantes empleados en el monitoreo del sistema, y tratarlo como una referencia fija en la evaluación del modo. Tomando este

antecedente, y de tal forma de reducir aún más la variabilidad de los resultados, una representación final del modo podría responder al siguiente valor promedio:

$$\{\phi_r\} = \frac{1}{N_j} \left( \sum_{j=1}^{N_j} \frac{\{\phi_r^j\}}{\phi_{mr}^j} \right) \quad (2-21)$$

Donde la componente auxiliar  $\phi_{mr}^j$  permite que los distintos modos obtenidos para cada referencia  $j$  resulten comparables y promediables entre sí.

De manera alternativa a la evaluación de los promedios mencionada anteriormente, se propone el uso de la descomposición mediante valores singulares (Araújo & Laier, 2014) de la matriz conformada por todos los vectores  $\varphi(s)_j^k$ :

$$[USV^H] = [\varphi(\lambda_r)_j] = [\varphi(\lambda_r)_j^1 \quad \varphi(\lambda_r)_j^2 \quad \dots \quad \varphi(\lambda_r)_j^{N_k-1} \quad \varphi(\lambda_r)_j^{N_k}] \quad (2-22)$$

Considerando que todas las columnas de la matriz  $[\varphi(s)_j]$  tienden al mismo valor al ser evaluada en algún polo, la primera columna de la matriz  $U$  bastará para describir la forma modal asociada al modo  $r$ .

Cabe destacar que el resultado final obtenido podría eventualmente incorporar algunas componentes asociadas al plano complejo, no obstante a lo anterior, se puede demostrar que los modos relacionados a un sistema lineal y con amortiguamiento viscoso y proporcional mantiene las mismas formas modales reales relacionadas al problema dinámico clásico no amortiguado (Fu & He, 2001), por lo tanto es de esperar que las componentes imaginarias sean menores, por lo que resulta totalmente válido considerar sólo la parte real de los modos obtenidos.

## Capítulo 3

### Evaluación Numérica de Funciones de Transmisibilidad

#### 3.1 Introducción

De acuerdo a lo expuesto del capítulo anterior, el uso de funciones de transmisibilidad de tipo escalar resulta una herramienta simple y eficaz para la identificación de propiedades modales. El único requisito para emplear estas funciones, se reduce a disponer de más de un estado de carga, y realizar una simple manipulación de las respuestas de la estructura para cada uno de estos escenarios. Como se ha indicado en la sección 2.4.1, sin importar la naturaleza de la excitación, si para cada estado de carga las solicitaciones son aplicadas de manera correlacionada sobre la estructura, las funciones de transmisibilidad darán origen a pseudo funciones de transferencia con independencia del contenido espectral asociado al input (estado determinístico). Aun así, en el caso en que las excitaciones se apliquen en forma no correlacionada, las funciones del tipo  $\Delta^{-1}_{ij}{}^{kl}(s)$  mantendrán sus máximos en los polos del sistema, manteniendo así la validez del método. Finalmente, mediante la aplicación de estimadores paramétricos, los que serán presentados en el Capítulo 4, los valores modales asociados a cada modo podrán ser extraídos numéricamente a partir de la manipulación de funciones de transmisibilidad (curvas).

A pesar de parecer un método muy simple y estructurado, ciertos resguardos se deben tomar antes de emitir resultados finales. Como se mencionó en la sección 2.2, la manipulación de transmisibilidades puede llevar a la detección de polos que no necesariamente correspondan a la estructura en estudio, por lo tanto, resulta necesario definir una metodología que permita la discriminación de polos falsos y verdaderos. Este tema será tratado en la sección 3.3, donde se propondrán y detallarán soluciones para resolver este problema.

Por otra parte, no se debe olvidar el hecho que, para cualquier estructura, un cierto nivel de ruido siempre estará presente en los registros de su respuesta. Tomando en cuenta este antecedente, y considerando además, que el grado de éxito que pueda presentar la aplicación de estimadores en la etapa final del proceso, está directamente relacionado con los niveles de ruido que presenten las funciones de transmisibilidad, se proponen alternativas para mitigar los efectos del ruido en los resultados finales

De tal forma de visualizar de mejor manera cada una de las propuestas, para cada una de las secciones se adjunta un gráfico con el resultado de una simulación numérica.

### 3.2 Formulación de funciones de transmisibilidad

Según la definición del capítulo anterior, la transmisibilidad escalar  $T(s)$  se define como la razón entre las respuestas  $x(s)$  (en el dominio de Laplace) asociadas a dos puntos  $i$ - $j$  para una condición de carga dada.

$$T_{ij}(s) = \frac{x_i(s)}{x_j(s)} \quad (3-1)$$

Se debe notar que el resultado de la expresión anterior es indiferente para cualquier tipo de respuesta, sea ésta: desplazamiento, velocidad o aceleración. Para verificar esto, supongamos que  $x_i(s)$ ,  $\dot{x}_i(s)$ ,  $\ddot{x}_i(s)$  corresponden a las transformadas en el dominio de Laplace asociadas al desplazamiento, velocidad y aceleración del punto  $i$  respectivamente.

Considerando las propiedades de la transformada al ser evaluada en las derivadas de una función, se tiene:

$$T_{\ddot{x}_i \ddot{x}_j}(s) = \frac{\ddot{x}_i(s)}{\ddot{x}_j(s)} = \frac{s \dot{x}_i(s)}{s \dot{x}_j(s)} = T_{\dot{x}_i \dot{x}_j}(s) = \frac{s x_i(s)}{s x_j(s)} = \frac{x_i(s)}{x_j(s)} = T_{x_i x_j}(s) \quad (3-2)$$

Si bien hasta acá se han mencionado diversas propiedades para funciones de transmisibilidad, al ser evaluadas en algún polo del sistema, éstas han sido definidas mediante el uso de la transformada de Laplace. Como es de común conocimiento, esta transformada resulta de evaluar una función con dominio perteneciente a los números complejos, por lo que gráficamente, el recorrido de estas funciones queda determinado por superficies tridimensionales que cubren el dominio. Tomando en cuenta este antecedente, la detección numérica de polos resultaría demasiado tediosa y poco óptima desde el punto de vista computacional. Sin embargo, las magnitudes asociadas a las razones de amortiguamiento crítico que presentan las estructuras civiles, así como algunas mecánicas, permiten una alternativa numérica mucho más práctica para la identificación de polos. A continuación se detalla esta solución.

Considere la siguiente aproximación para el polo  $\lambda_m$ , asociado al modo  $m$ :

$$\lambda_m = \omega_m \beta_m \pm i \omega_m \sqrt{1 - \beta_m^2} \approx i \omega_m \sqrt{1 - \beta_m^2} = i \omega_{d_m} \approx i \omega_m \quad (3-3)$$

Con

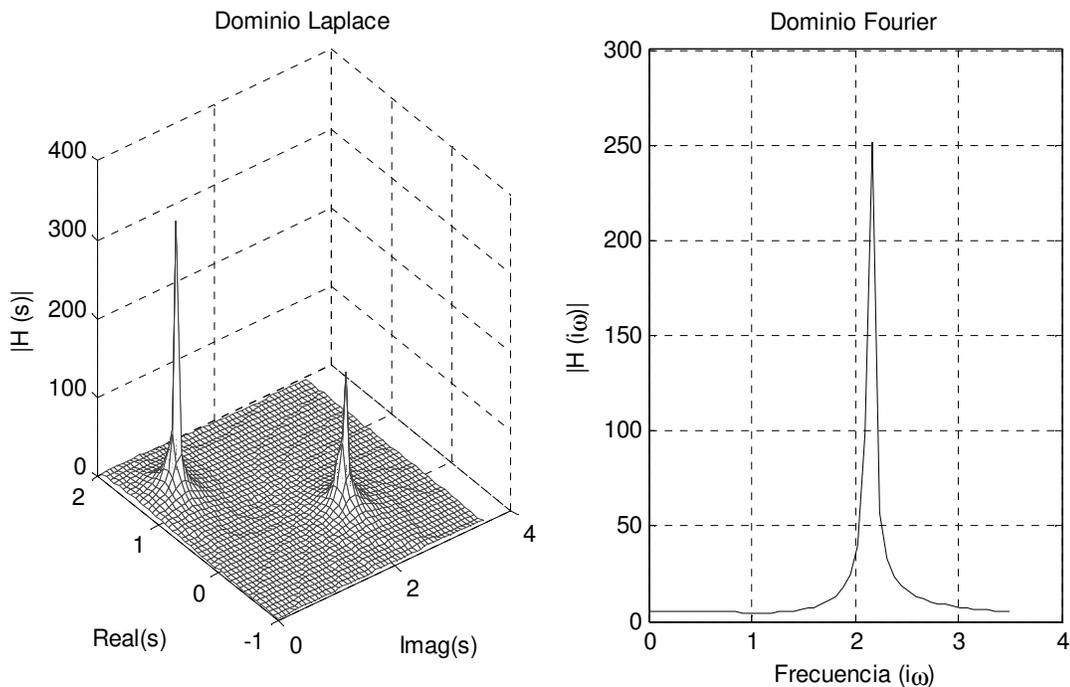
$\omega_m$ : Frecuencia natural no amortiguada del modo  $m$ .

$\beta_m$ : Razón de amortiguamiento crítico asociado al modo  $m$ .

El resultado anterior indica que la evaluación numérica de una función de transmisibilidad en un polo a través del dominio de Laplace, ( $s = \lambda_m$ ), resulta aproximadamente igual a evaluar en la parte imaginaria del polo (frecuencia natural), esto es ( $s = i \omega_m$ ). Por otra parte,

sabiendo que la transformada de Fourier corresponde a un caso particular de la transformada de Laplace haciendo ( $s = i\omega$ ), se establece que la evaluación de las funciones de transmisibilidad mediante el dominio de las frecuencias (Fourier), puede reflejar de buena manera el comportamiento de las funciones al ser evaluadas en algún polo, es decir, se pueden construir curvas del tipo  $\Delta^{-1}_{ij} (s = i\omega)$  que presenten máximos aproximadamente coincidentes con las frecuencias asociadas a los polos. De acuerdo a este análisis, y tomando en cuenta que la versión FFT (*fast fourier transform*) se encuentra disponible en diversos softwares de análisis numérico, se determina que esta herramienta resulta la más indicada para la detección de los polos pertenecientes a un sistema. Según este resultado, se destaca que en lo que sigue de esta tesis, todas las funciones  $f(s)$ , definidas en el dominio de Laplace, se analizarán numéricamente utilizando el dominio de las frecuencias.

A continuación se presentan diagramas que permiten un mejor entendimiento de la relación entre los dominios de Laplace y Fourier.



**Figura 3-1:** Relación entre dominio Laplace y Fourier

Observando la Figura 3-1, se puede apreciar de mejor manera la relación que existe entre las transformadas de Fourier y Laplace para una función de transferencia con polos ( $s_1 = 1.25 + i 0.55$ ) y ( $s_2 = 0 + i 2.15$ ). Por una parte, en la gráfica correspondiente al dominio de Laplace, se observa la superficie que define la transformada con los dos polos claramente identificados. En cambio, para la gráfica asociada a la transformada de Fourier sólo es posible vislumbrar el peak asociado a la frecuencia 2.15 rad/s (segundo polo), esto se explica por la lejanía que presenta el primer polo con respecto al eje correspondiente a la parte imaginaria del dominio.

Gráficamente, la transformada de Fourier puede entenderse como el lugar geométrico que define la intersección entre un plano vertical, ubicado en el eje imaginario ( $s = i\omega$ ), con

normal apuntando en la dirección del eje de los valores reales, y la superficie que describe la transformada asociada a la función de transferencia. Queda claro que sólo los polos se ubiquen lo suficientemente cerca del eje imaginario, lo cual es equivalente a tener polos con pequeñas razones de amortiguamiento crítico, podrán ser detectados a través del dominio de las frecuencias (Figura 3-2).

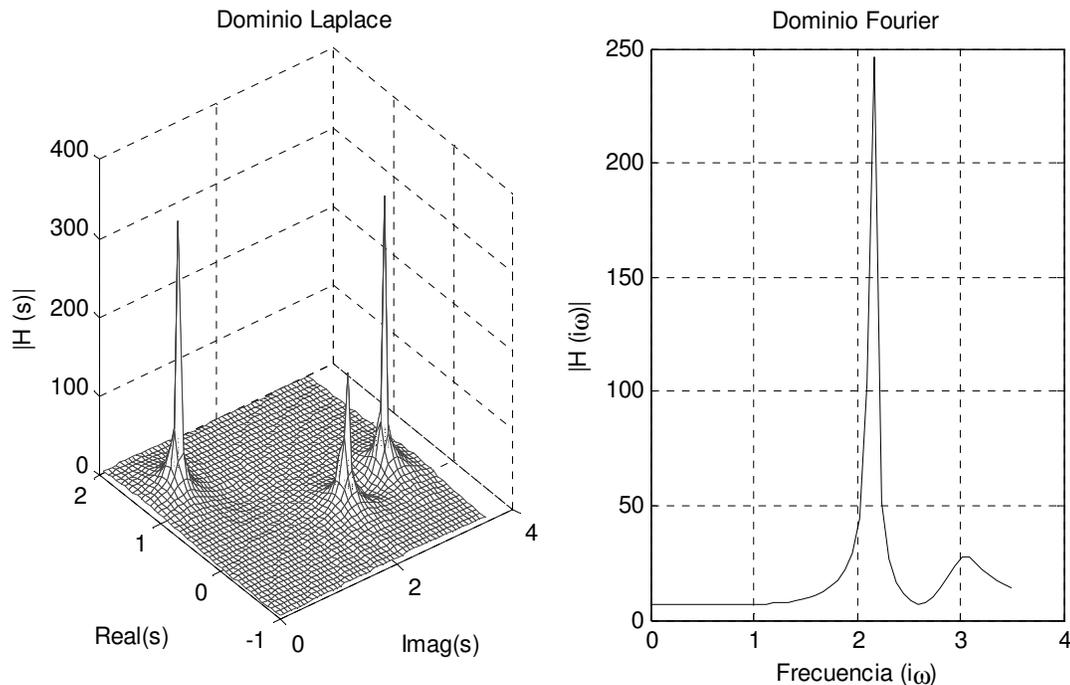


Figura 3-2: Relación entre dominio Laplace y Fourier

Si bien la manipulación de funciones de transmisibilidad permite la identificación de propiedades modales, no se debe olvidar que indudablemente existirá cierto grado de ruido en las distintas mediciones asociadas a una estructura. Por otra parte, considerando que para la detección numérica de parámetros modales, diversos estimadores paramétricos podrán ser aplicados sobre estas curvas (Capítulo 4), el éxito que se tenga en la reducción del ruido resulta crucial para que el proceso de identificación entregue resultados precisos y confiables.

Teniendo en cuenta lo expresado anteriormente, y considerando que las funciones de transmisibilidad serán evaluadas mediante el uso de la transformada de Fourier (en su versión FFT), la utilización de los estimadores tipo  $H_1 - H_2$ , propios del análisis modal experimental, en conjunto con el uso de funciones del tipo ABS (*average based spectrum*), pueden resultar una metodología válida para lograr atenuar las componentes ruidosas de los registros, así como efectos relacionados a eventual leakage propios del procesamiento de señales para registros no periódicos. Este enfoque da origen a las siguientes formulaciones para funciones de transmisibilidad (no paramétricas), alternativas a la definición presentada en ( 3-1 ):

Alternativa 2

$$T_{ij}(s) = \frac{x_i(s)x_i^*(s)}{x_j(s)x_i^*(s)} \quad (3-4)$$

Alternativa 3

$$T_{ij}(s) = \frac{x_i(s)x_j^*(s)}{x_j(s)x_j^*(s)} \quad (3-5)$$

Alternativa 4

$$T_{ij}(s) = \frac{x_i(s)x_k^*(s)}{x_j(s)x_k^*(s)} \quad (3-6)$$

Alternativa 5

$$T_{ij}(s) = \frac{S_{x_i x_i}^w(s)}{S_{x_j x_i}^w(s)} \quad (3-7)$$

Alternativa 6

$$T_{ij}(s) = \frac{S_{x_i x_j}^w(s)}{S_{x_j x_j}^w(s)} \quad (3-8)$$

Alternativa 7

$$T_{ij}(s) = \frac{S_{x_i x_k}^w(s)}{S_{x_j x_k}^w(s)} \quad (3-9)$$

Con (■\*) el complejo conjugado de ■.

$S_{\blacksquare}^w$  Espectro de potencia de ■, mediante método Welch

Tal como se puede apreciar, si bien todas estas expresiones corresponden a razones entre espectros de densidad de potencia, resultando muy similares entre sí, se ha decidido diferenciar (3-4) de (3-7), (3-5) de (3-8), así como (3-6) de (3-9) para aclarar que sólo las funciones que involucren el operador  $S_{\blacksquare}^w$ , conllevan la realización de promedios para distintos segmentos de un registro. Se debe señalar además que tal como se indica en (Welch,

1967), este tipo de funciones (ABS) puede incorporar el uso de ventanas para tratar con los efectos asociados a leakage, no obstante, el uso de éstas inevitablemente inducirá un error en la estimación final para valores de amortiguamiento. Mayor detalle acerca de los efectos del uso de ventanas se puede encontrar en los Capítulos 4 y 6.

Especial atención se debe poner a las expresiones ( 3-6 ) y ( 3-9 ), ya que si bien resultan una alternativa válida para definir la transmisibilidad entre los puntos  $i$ - $j$ , éstas además permiten desarrollar una variación del método de identificación, en la cual se relaja el único requisito necesario para poder implementarlo, esto es, la identificación de parámetros modales a partir de sólo una condición de carga (Yan & Ren, 2012). Mayor profundización de este tema se puede encontrar en el Capítulo 6.

### 3.3 Detección de polos Falsos

Como se ha determinado en la sección 2.2, el proceso de identificación de polos llevado a cabo mediante el uso de funciones del tipo  $\Delta^{-1}_{ij}{}^{kl}(s)$ , podría conducir a la detección de un conjunto de polos que no necesariamente correspondan al sistema en estudio. Considerando este antecedente, surge la necesidad de contar con alguna metodología confiable que permita discriminar polos reales de polos falsos, de tal forma de asegurar resultados libres de una eventual malinterpretación.

Para visualizar de mejor manera este fenómeno, considere el siguiente sistema compuesto por una barra prismática de sección tubular circular empotrada en su base (Figura 3-1). Para analizar la estructura frente a cargas dinámicas aplicadas horizontalmente, el modelo ha sido discretizado en 5 tramos iguales, generando 6 nodos con 3 grados de libertad cada uno (análisis plano).

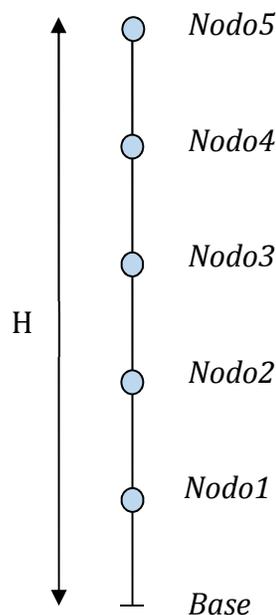


Figura 3-3: Sistema 5 DOF.

Tabla 3-1: Propiedades Sistema.

Propiedades Geométricas		Propiedades Mecánicas	
Altura (H) [m]	12	Módulo Elasticidad [kgf/m <sup>2</sup> ]	2.1x10 <sup>10</sup>
Diámetro ext [mm]	200	Módulo Poisson	0.25
Espesor[mm]	2	Densidad masa [kg/m <sup>2</sup> ]	800.203

Para poder hacer uso del concepto de funciones de transmisibilidad, se han supuesto 4 escenarios de carga claramente definidos en la estructura, esto son:

Tabla 3-2: Definición de estados de carga.

Condición de carga	Nodos cargados lateralmente
Esc1	N2
Esc2	N3
Esc3	N4
Esc4	N5

A partir de la Tabla 3-1, se puede apreciar que cada estado de carga queda definido por la aplicación de una carga puntual sobre algún nodo, por lo tanto, y de acuerdo a lo presentado en la sección 2.2, es de esperar que las funciones de transmisibilidad resulten totalmente determinísticas.

La carga empleada en cada uno de los escenarios corresponde al registro de aceleraciones obtenidos en la estación Constitución durante el terremoto 27F.

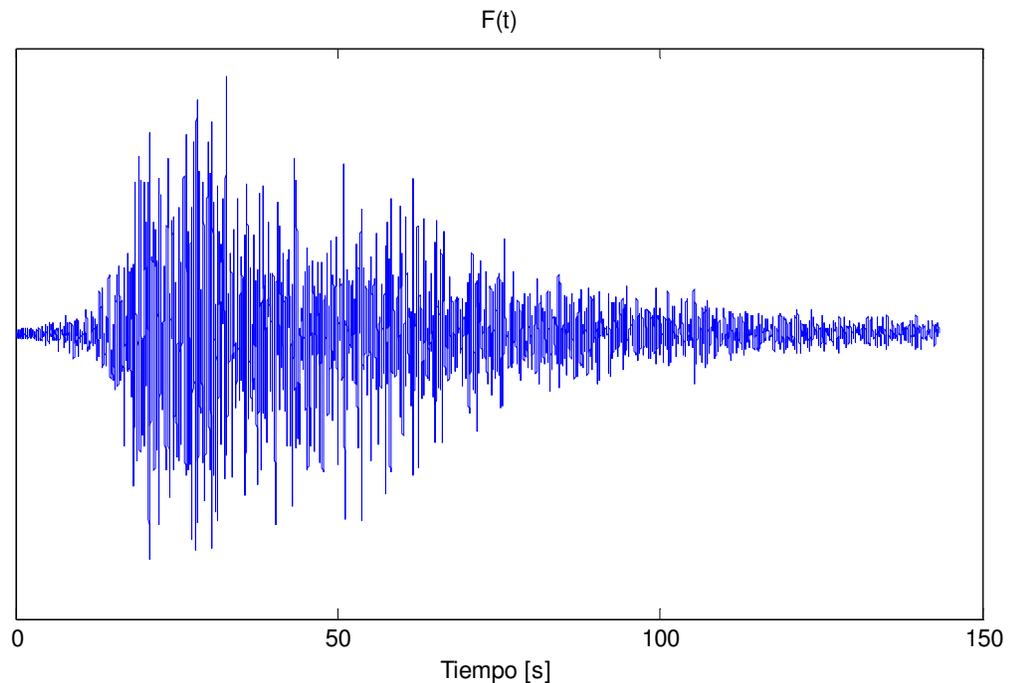
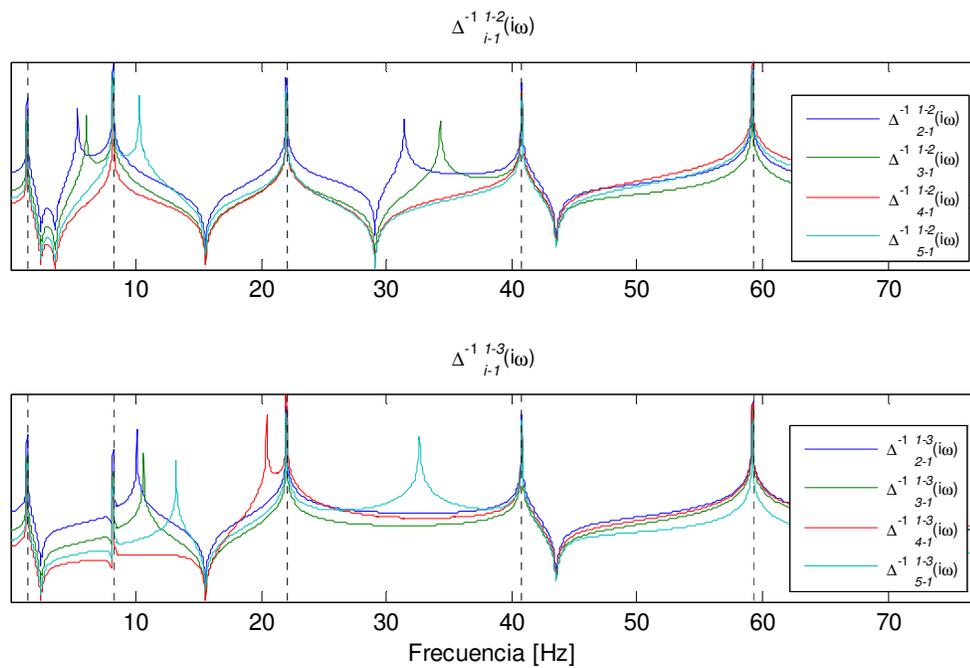


Figura 3-4: Excitación dinámica aplicada puntualmente sobre la estructura.

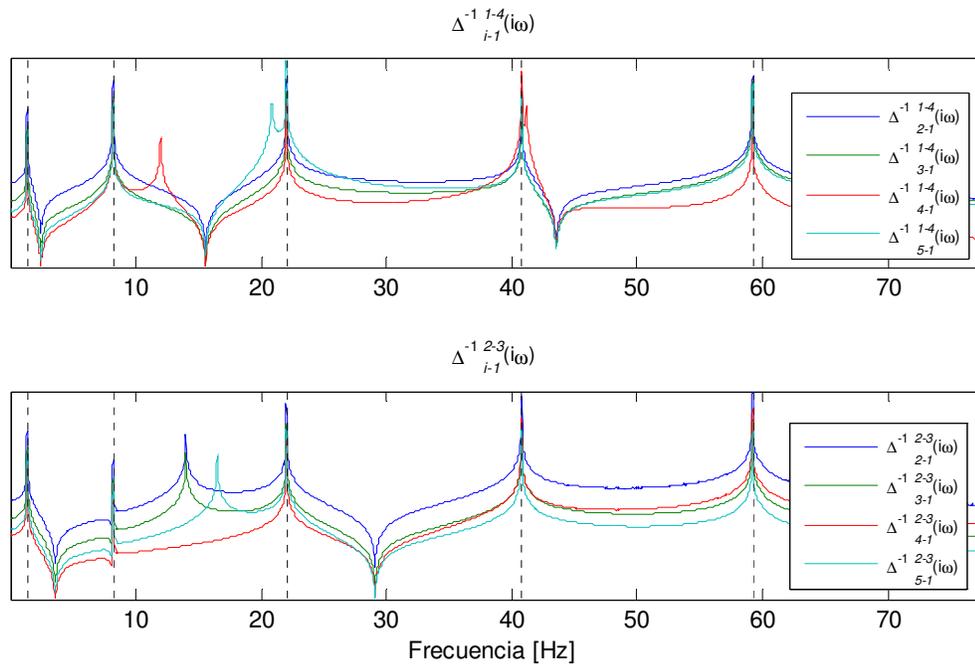
Cabe destacar que la calidad de las funciones de transmisibilidad (en esta simulación), queda determinada por el grado de precisión con la cual sean estimadas las respuestas en el dominio de tiempo discreto. Para resolver este ítem, se ha propuesto aumentar la tasa de muestreo del registro de tal forma de tener un paso de tiempo inferior al 10% del mínimo periodo traslacional horizontal de la estructura ( $T_s \leq 0.1T_j$ ) (Chopra, 2011).

Para el tratamiento en el dominio de Fourier, y reducción de efectos de leakage, los espectros fueron calculados usando el método Welch utilizando ventanas tipo Hanning con 8192 puntos y traslapeo del 50%, mientras que la formulación de transmisibilidad empleada corresponden a la presentada en ( 3-8 ).

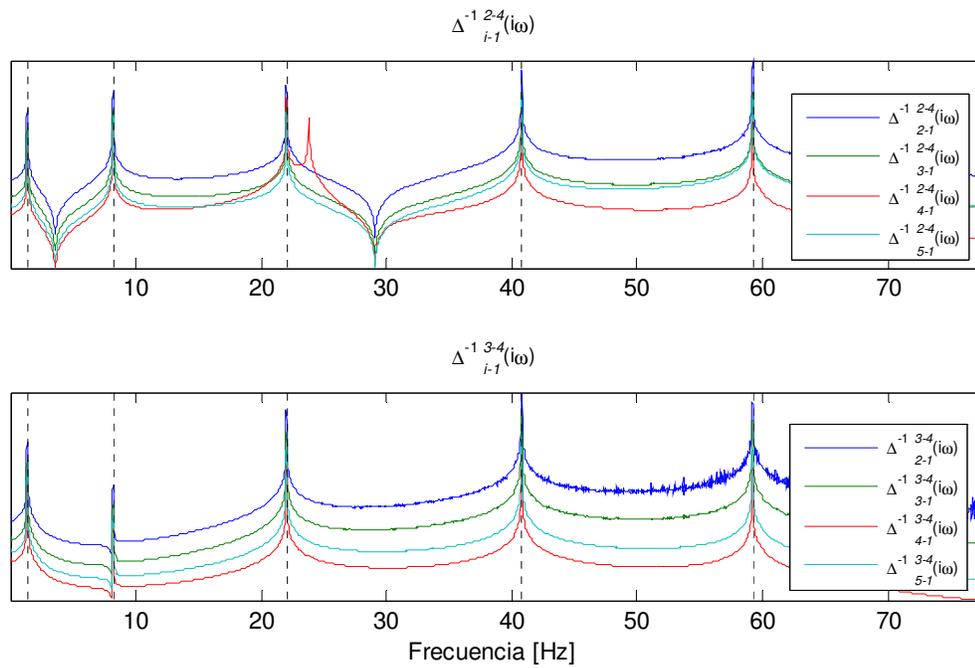
Considerando estos antecedentes, a continuación se presentan los resultados obtenidos para cada una de las combinaciones entre estados de carga, así como transmisibilidades empleadas.



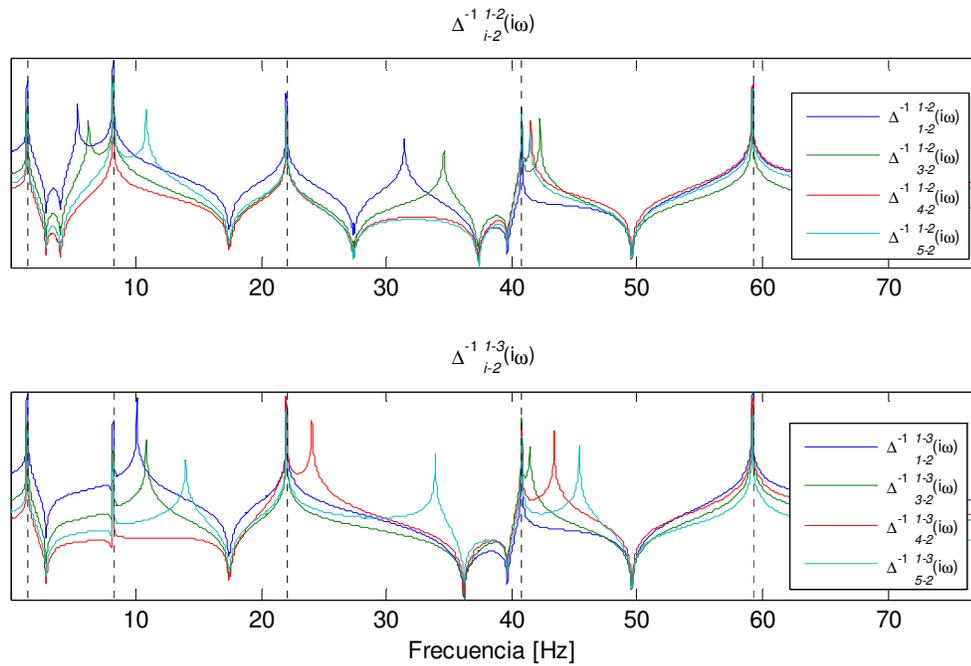
**Figura 3-5:**  $\Delta^{-1} 1-2_{i-1}(i\omega)$  Combinación de escenarios **(1-2)** y **(1-3)**. Referencia **Nodo1**.  
(:) Frecuencias naturales teóricas.



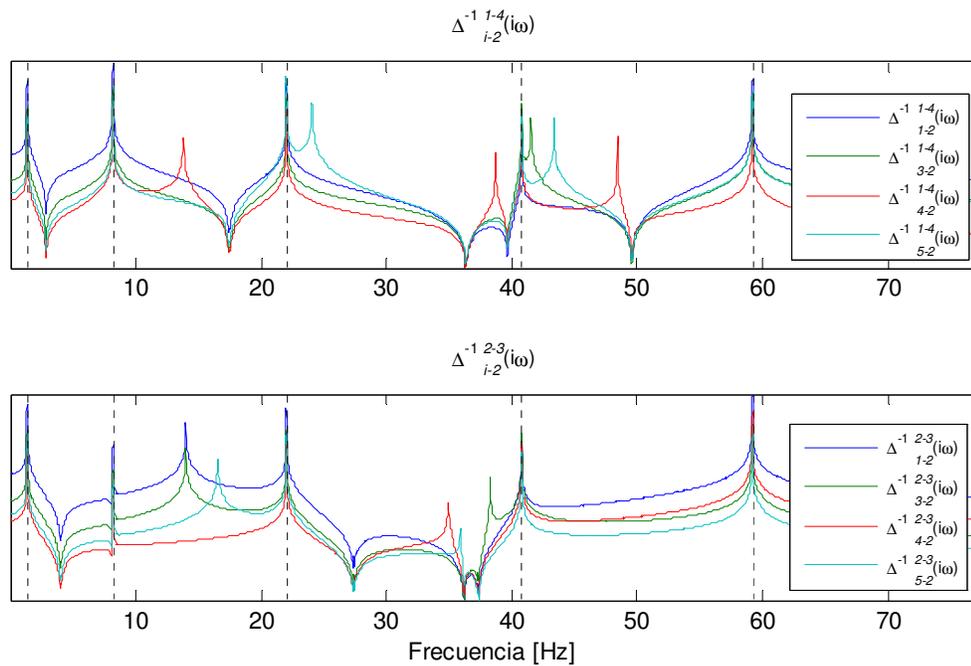
**Figura 3-6:**  $\Delta^{-1} \begin{matrix} kl \\ ij \end{matrix}(i\omega)$  Combinación de escenarios **(1-4)** y **(2-3)**. Referencia **Nodo1**.  
(:) Frecuencias naturales teóricas.



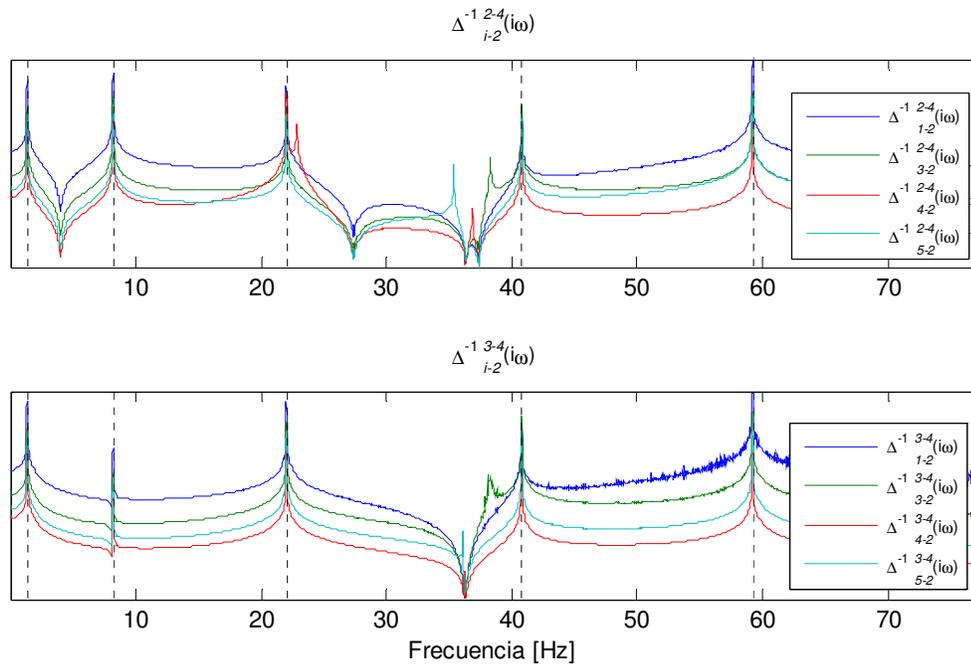
**Figura 3-7:**  $\Delta^{-1} \begin{matrix} kl \\ ij \end{matrix}(i\omega)$  Combinación de escenarios **(2-4)** y **(3-4)**. Referencia **Nodo1**.  
(:) Frecuencias naturales teóricas.



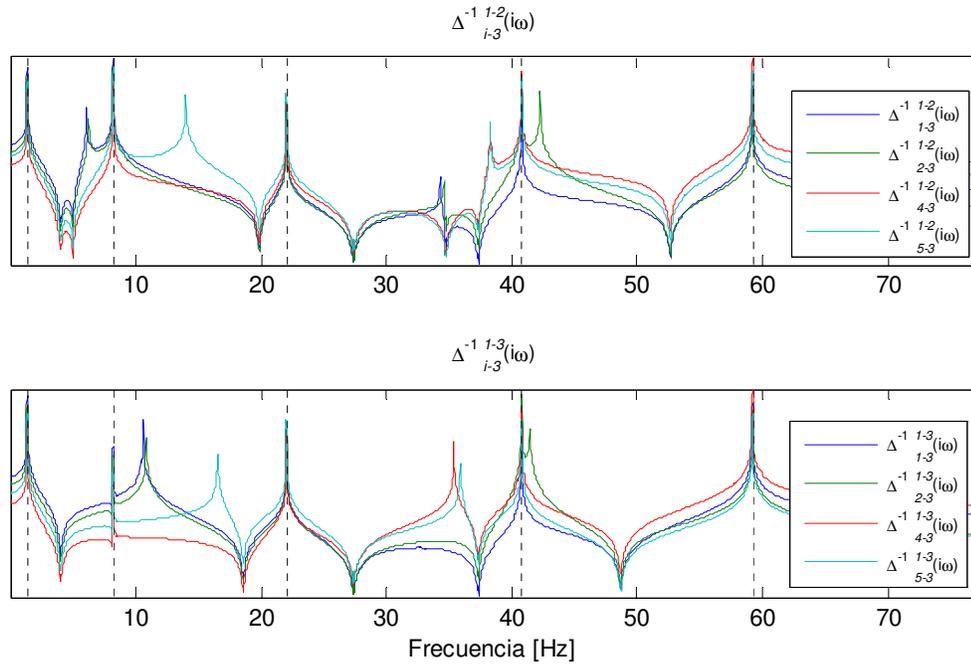
**Figura 3-8:**  $\Delta^{-1}_{ij}{}^{kl}(i\omega)$  Combinación de escenarios **(1-2)** y **(1-3)**. Referencia **Nodo2**.  
(:) Frecuencias naturales teóricas.



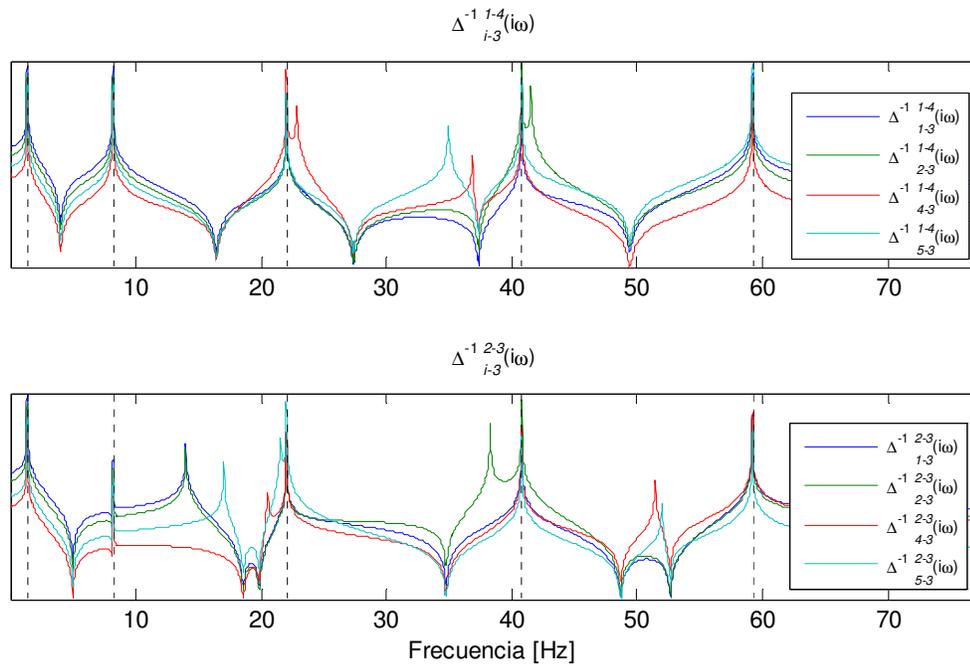
**Figura 3-9:**  $\Delta^{-1}_{ij}{}^{kl}(i\omega)$  Combinación de escenarios **(1-4)** y **(2-3)**. Referencia **Nodo2**.  
(:) Frecuencias naturales teóricas.



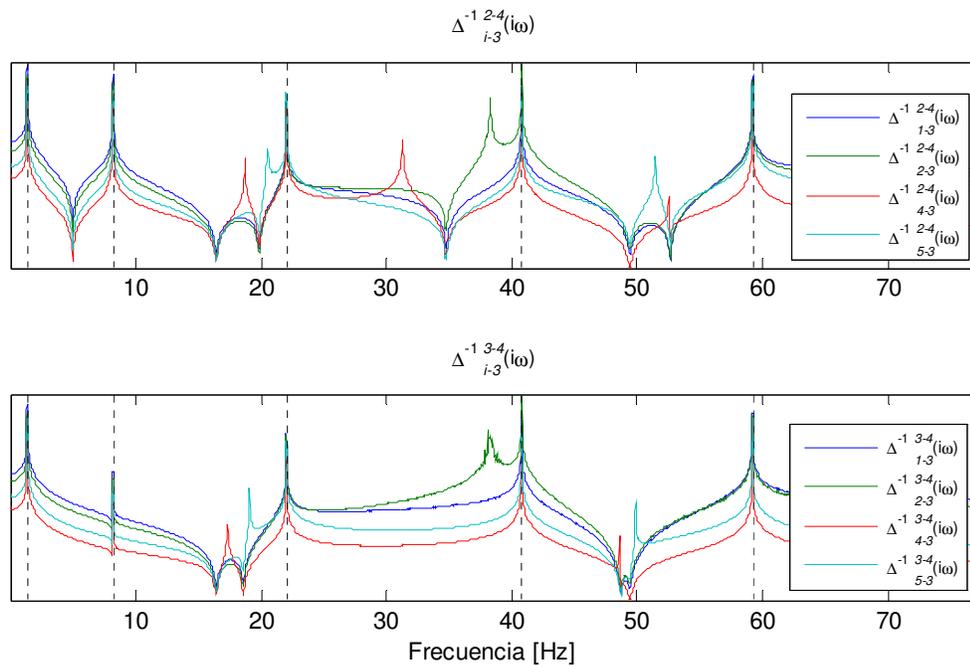
**Figura 3-10:**  $\Delta^{-1}_{ij}{}^{kl}(i\omega)$  Combinación de escenarios (2-4) y (3-4). Referencia **Nodo2**.  
(:) Frecuencias naturales teóricas.



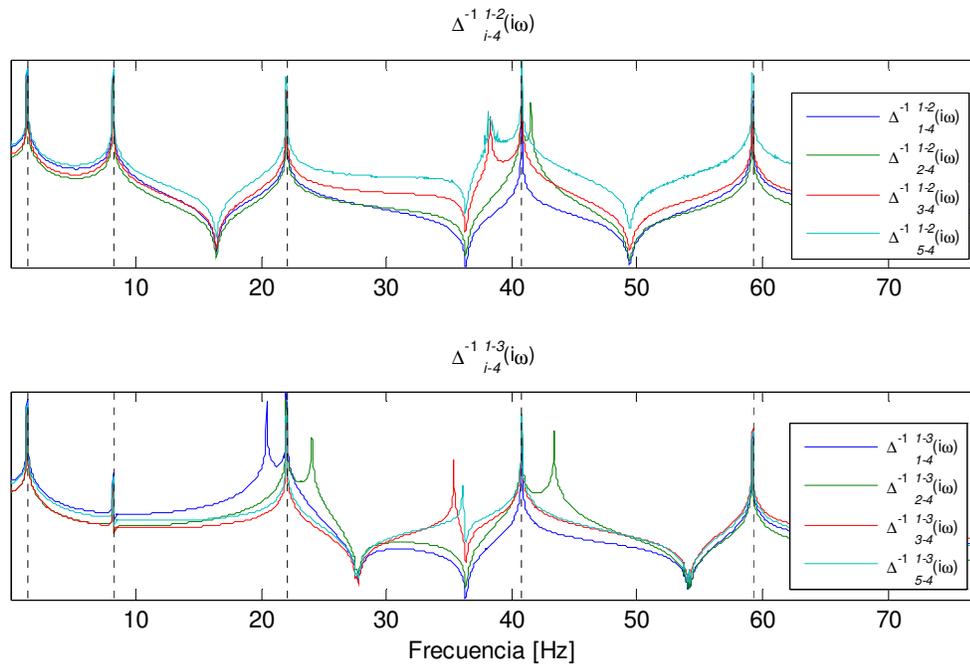
**Figura 3-11:**  $\Delta^{-1}_{ij}{}^{kl}(i\omega)$  Combinación de escenarios (1-2) y (1-3). Referencia **Nodo3**.  
(:) Frecuencias naturales teóricas.



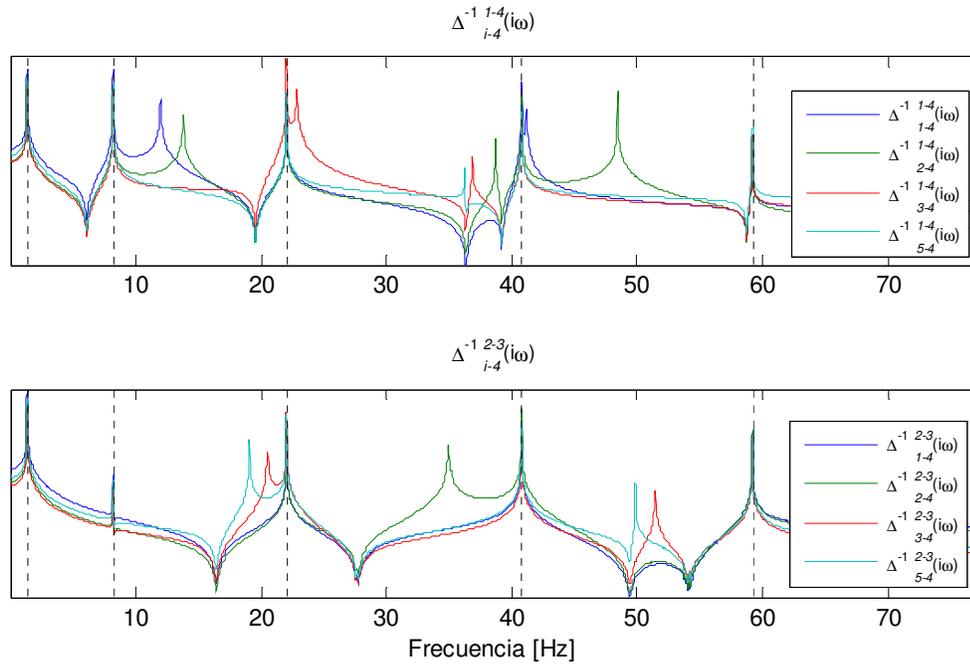
**Figura 3-12:**  $\Delta^{-1}_{ij}{}^{kl}(i\omega)$  Combinación de escenarios **(1-4)** y **(2-3)**. Referencia **Nodo3**.  
 (:.) Frecuencias naturales teóricas.



**Figura 3-13:**  $\Delta^{-1}_{ij}{}^{kl}(i\omega)$  Combinación de escenarios **(2-4)** y **(3-4)**. Referencia **Nodo3**.  
 (:.) Frecuencias naturales teóricas.



**Figura 3-14:**  $\Delta^{-1} \begin{matrix} kl \\ ij \end{matrix} (i\omega)$  Combinación de escenarios **(1-2)** y **(1-3)**. Referencia **Nodo4**.  
 (:.) Frecuencias naturales teóricas.



**Figura 3-15:**  $\Delta^{-1} \begin{matrix} kl \\ ij \end{matrix} (i\omega)$  Combinación de escenarios **(1-4)** y **(2-3)**. Referencia **Nodo4**.  
 (:.) Frecuencias naturales teóricas.

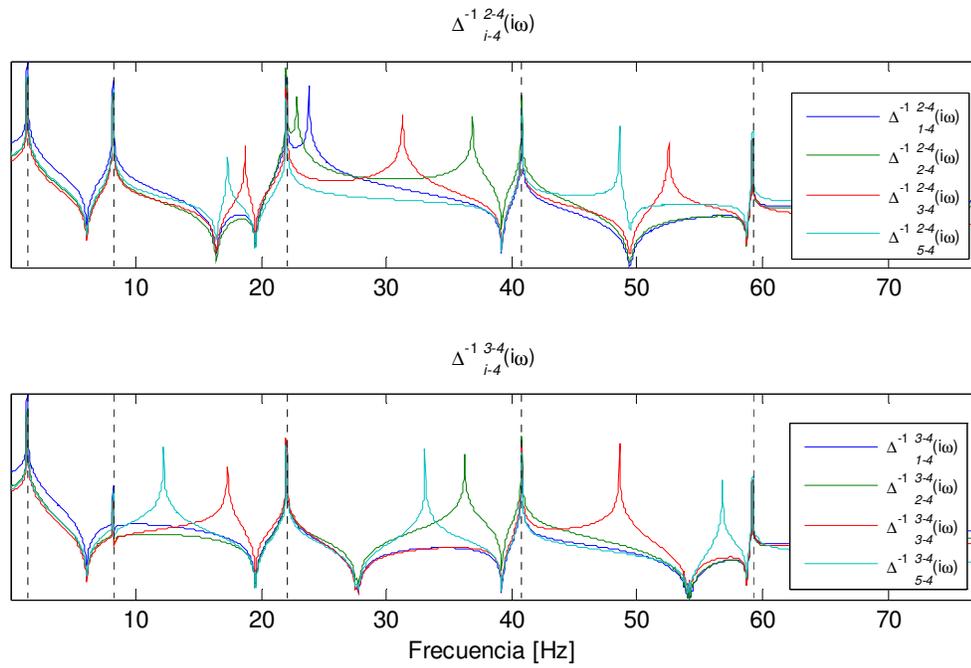


Figura 3-16:  $\Delta^{-1}_{ij}{}^{kl}(i\omega)$  Combinación de escenarios (2-4) y (3-4). Referencia Nodo4.  
(:) Frecuencias naturales teóricas.

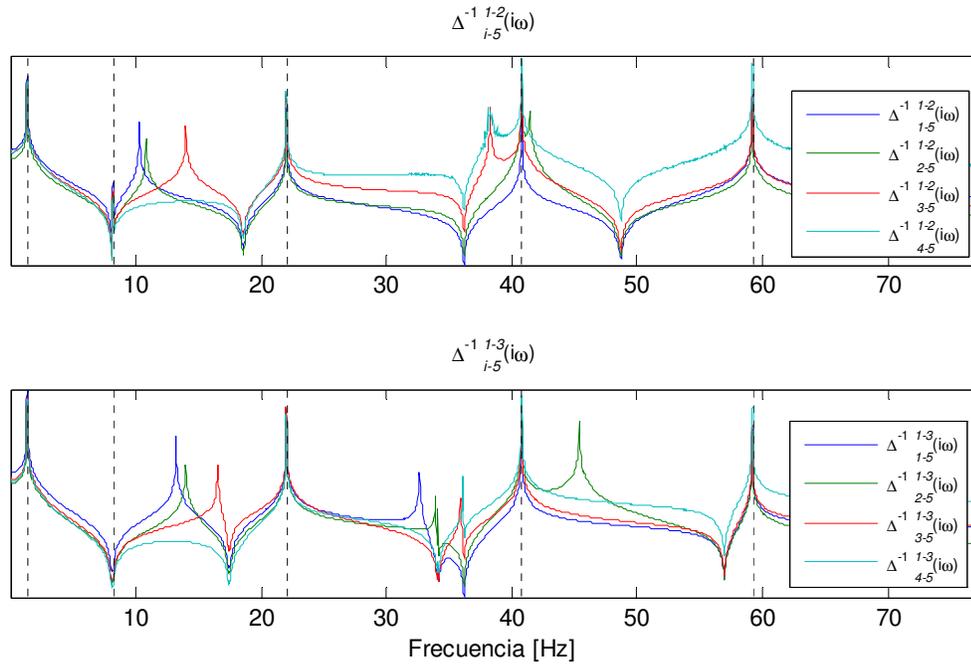
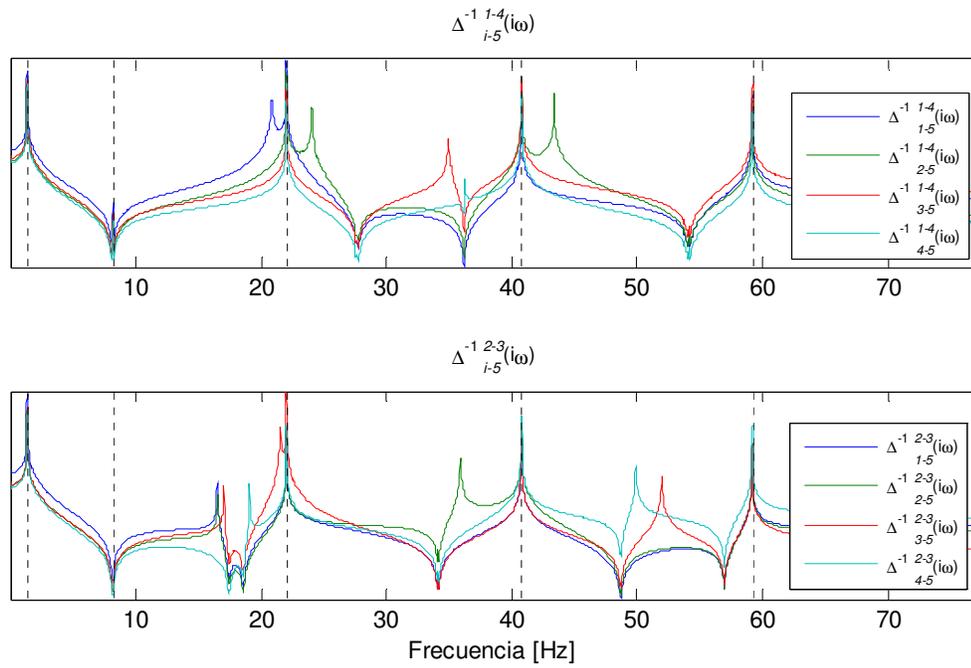
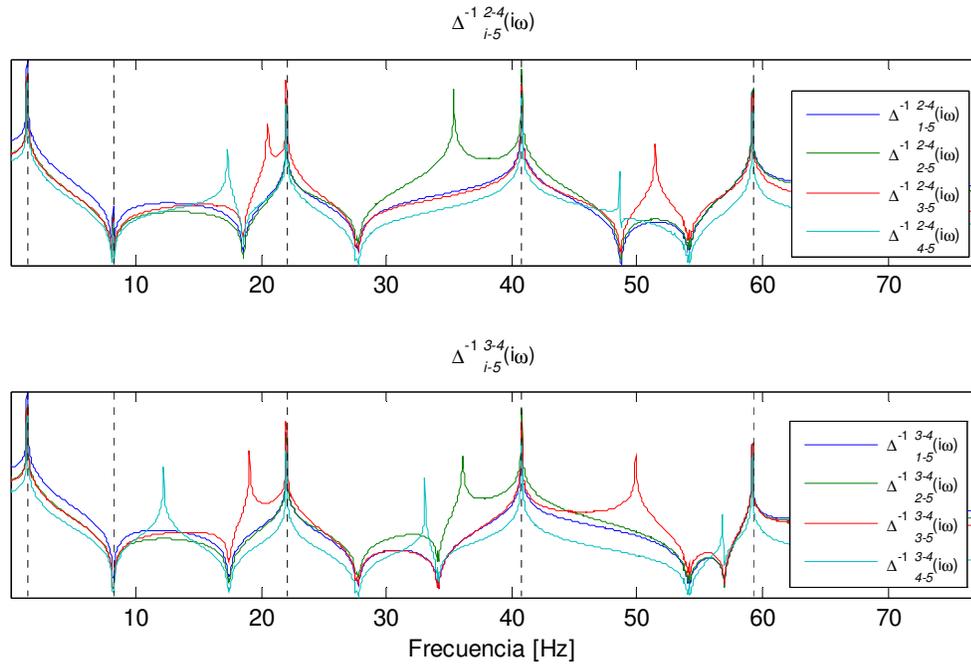


Figura 3-17:  $\Delta^{-1}_{ij}{}^{kl}(i\omega)$  Combinación de escenarios (1-2) y (1-3). Referencia Nodo5.  
(:) Frecuencias naturales teóricas.



**Figura 3-18:**  $\Delta^{-1}_{ij}{}^{kl}(i\omega)$  Combinación de escenarios **(1-4)** y **(2-3)**. Referencia **Nodo5**.  
 (:.) Frecuencias naturales teóricas.



**Figura 3-19:**  $\Delta^{-1}_{ij}{}^{kl}(i\omega)$  Combinación de escenarios **(2-4)** y **(3-4)**. Referencia **Nodo5**.  
 (:.) Frecuencias naturales teóricas.

Al observar las distintas curvas generadas considerando variadas referencias nodales ( $j$ ) para el cálculo de transmisibilidades  $T_{ij}$ , así como combinaciones de escenarios, es posible ver claramente que la manipulación de funciones de transmisibilidad escalar, en la mayoría de los casos, si no en todos, propicia la aparición de polos que no necesariamente corresponden a los del sistema en estudio (frecuencias naturales), valores que podrían llevar al usuario a interpretación errónea de resultados. Considerando este antecedente y recopilando los diversos estudios realizados hasta la fecha, a continuación se presentan las diversas alternativas desarrolladas respecto a esta materia. Adicionalmente, y de tal forma de poder evaluar el desempeño de cada metodología, una breve simulación numérica acompañará cada presentación, tomando como base el ejemplo presentado en la Figura 3-3.

### 3.3.1 Detección mediante rango de matriz (alternativa 1)

En (Devriendt & Guillaume, 2008), en conjunto con definir las propiedades asociadas a funciones de transmisibilidad, se propone por primera vez una forma de discriminar polos de naturaleza matemática. Basados en el comportamiento que exhiben las funciones de transmisibilidad al ser evaluadas en los polos, los investigadores propusieron una metodología a través de la evaluación del rango<sup>2</sup> de una matriz. A continuación, se resume la idea principal que involucra esta alternativa.

Considere en primera instancia que sólo se dispone de dos puntos para registrar la respuesta de una estructura, empleando 3 condiciones de carga claramente definidas. Dado lo anterior, se define la siguiente matriz  $T(s)$ :

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_{12}^1(s) & T_{12}^2(s) & T_{12}^3(s) \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-10)$$

Al observar las filas compuestas por unos en  $T(s)$ , se puede determinar rápidamente que la matriz propuesta presentará rango 2 para cualquier  $s$  tal que al evaluar las transmisibilidades, éstas resulten distintas entre sí. Aun así cuando exista un valor  $s$  tal que sólo dos funciones resulten iguales, la matriz mantendrá el rango 2. Por otra parte, si las tres transmisibilidades de la primera fila resultan iguales, entonces para este único caso, la matriz pasará a ser de rango 1.

Según lo expresado en el párrafo anterior, y considerando que las transmisibilidades definidas para distintos estados de carga convergen al mismo valor cuando son evaluadas en un polo, se establece que la matriz  $T(s)$  exhibirá un rango 2 para todos los valores que pueda tomar  $s$ , con excepción de los polos del sistema, donde su rango cambiará a 1.

Con este resultado, y tomando en cuenta que el proceso de descomposición SVD entrega valores singulares en forma decreciente ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \dots \geq \sigma_n$ ), el hecho de tener una matriz de rango 1, queda reflejado en que a partir del segundo valor singular, todos resultan nulos. Esto sugiere una alternativa gráfica de fácil interpretación para la identificación de polos que obedezcan exclusivamente a la naturaleza física del sistema, lo cual es graficar  $\sigma_2^{-1}(s)$ , de esta

<sup>2</sup> Una forma eficiente para determinar el rango de una matriz consiste en desarrollar una descomposición SVD (*singular value decomposition*), y contar la cantidad de valores singulares no nulos.

forma, la curva generada deberá exhibir máximos coincidentemente para cada uno de los polos del sistema.

Para generalizar esta alternativa, se establece que la forma en la cual debe ser armada la matriz  $T(s)$ , debe ser tal que ésta presente rango 1 sólo al ser evaluada en los polos. Para lograr esto, y aprovechando las propiedades de las funciones de transmisibilidad ( 2-13 ), se debe notar que no es obligatoria la utilización de las filas compuestas por unos, tal como se presenta en ( 3-10 ). Estas filas pueden ser reemplazadas por otro conjunto de transmisibilidades  $T_{kl}(s)$ , teniendo la posibilidad de añadir más filas, y generar así resultados más confiables. Por otra parte, la descomposición SVD permite trabajar con matrices rectangulares, por lo que tampoco resulta un obstáculo trabajar con un número de condiciones de carga menor (o mayor) al de combinaciones posibles de transmisibilidades.

Para visualizar de mejor manera el desempeño de esta metodología, a continuación se presentan los resultados de aplicar esta herramienta sobre el ejemplo descrito en la sección anterior Figura 3-3.

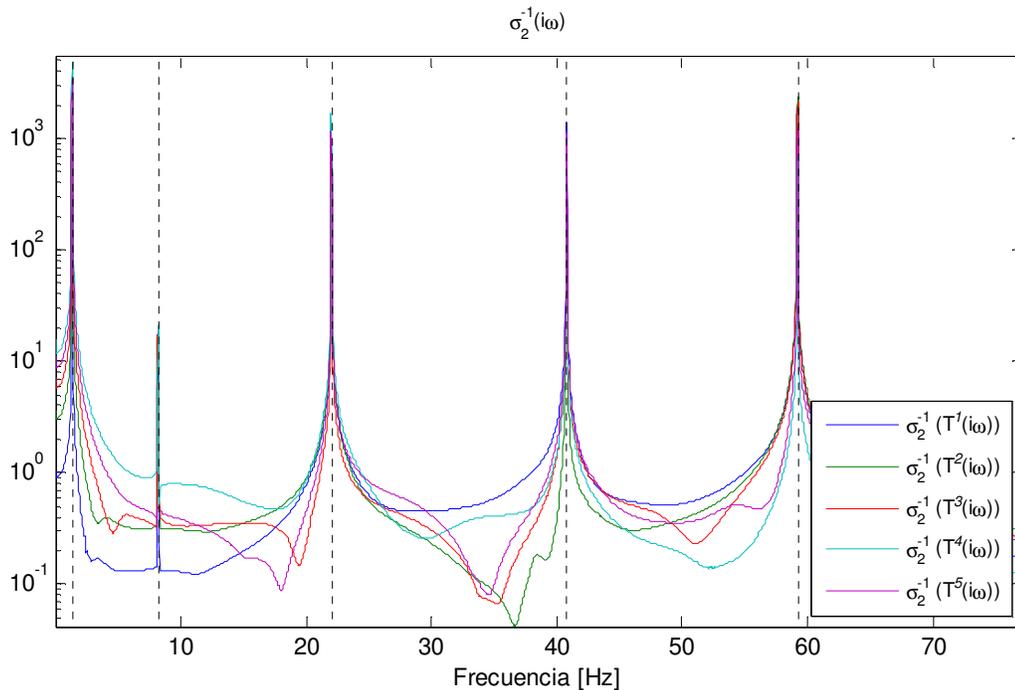
Para poder emplear esta alternativa, se han considerado los siguientes arreglos de funciones de transmisibilidad:

$$T^j(s) = \begin{bmatrix} T_{1j}^1(s) & T_{1j}^2(s) & T_{1j}^3(s) & T_{1j}^4(s) \\ T_{2j}^1(s) & T_{2j}^2(s) & T_{2j}^3(s) & T_{2j}^4(s) \\ T_{3j}^1(s) & T_{3j}^2(s) & T_{3j}^3(s) & T_{3j}^4(s) \\ T_{4j}^1(s) & T_{4j}^2(s) & T_{4j}^3(s) & T_{4j}^4(s) \\ T_{5j}^1(s) & T_{5j}^2(s) & T_{5j}^3(s) & T_{5j}^4(s) \end{bmatrix} \quad (3-11)$$

$T_{ij}^k(s)$  : Transmisibilidad entre los nodos  $i-j$  estimada para la condición de carga  $k$ .

Considerando que en el ejemplo se dispone de la respuesta dinámica para cada uno de los nodos, es posible construir 5 matrices con la forma que presenta  $T^j(s)$  ( $j = 1, 2, \dots, 5$ ). Por otra parte, resulta claro apreciar que haciendo uso de la propiedad ( 2-13 ), todas estas matrices presenten rango 1 sólo al ser evaluadas en los polos del sistema.

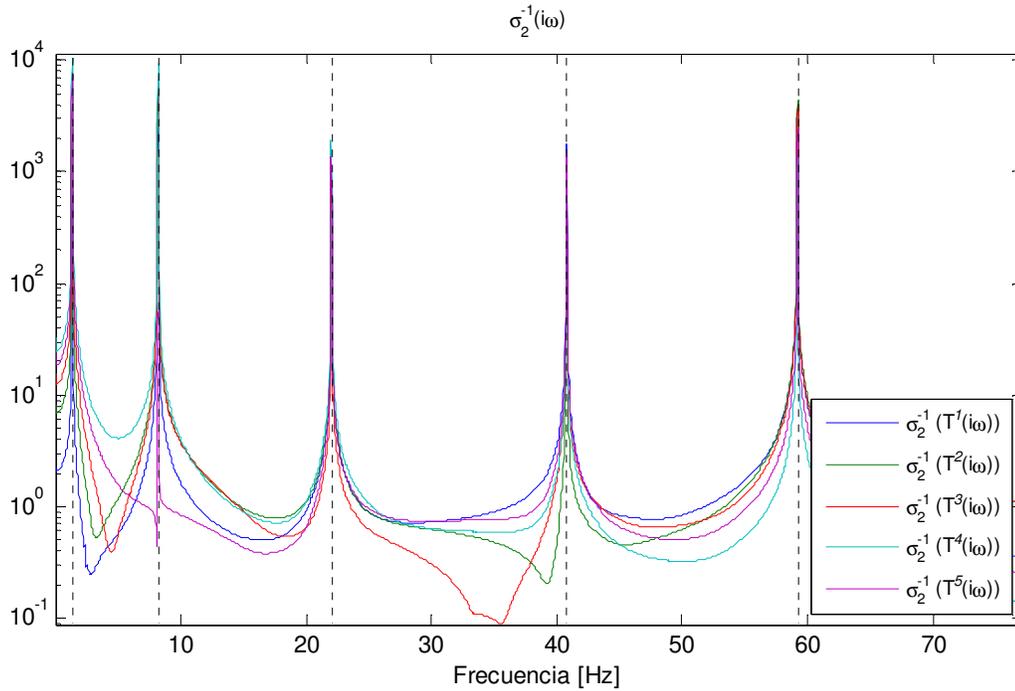
A continuación, se presentan los resultados obtenidos.



**Figura 3-20:** Distribución de  $\sigma_2^{-1}$  para cada matriz tipo  $T^j(s)$   
(:) Frecuencias naturales teóricas.

Al observar la Figura 3-20, queda claro como esta herramienta permite generar curvas que exhiban sus máximos coincidentemente con los polos del sistema, reduciendo el margen de error producto de la malinterpretación de resultados por parte del usuario.

Cabe destacar que la formulación de la matriz  $T^j(s)$  utilizada en este ejemplo, considera la totalidad de estados de carga disponibles, no obstante, ésta pudo haber sido definida considerando solamente 2 ó 3 condiciones (columnas). Si bien la incorporación de más filas en esta matriz (relaciones de transmisibilidad  $i-j$ ) propicia la identificación de un mayor número de polos, la adición de columnas podría generar una eventual distorsión en la estimación del rango de la matriz. Lo anterior se debe únicamente a problemas de tipo numérico asociados a la obtención de las respuestas en el dominio de Fourier, los que finalmente pueden hacer que las componentes de una fila no se parezcan del todo entre sí al ser evaluadas en algún polo. Lo anterior se puede ver claramente en la caracterización del segundo polo del sistema (Figura 3-20), donde pareciera haber un salto abrupto, el que eventualmente pudiera no ser capturado al usar otra resolución espectral. En la Figura 3-21 se muestra cómo cambia el comportamiento del parámetro  $\sigma_2^{-1}$  al emplear sólo dos combinaciones de carga.



**Figura 3-21:** Distribución de  $\sigma_2^{-1}$  para cada matriz tipo  $T^j(s)$  empleando sólo dos estados de carga (*Esc2-Esc4*)  
(:) Frecuencias naturales teóricas.

Tomando en cuenta lo indicado anteriormente, una alternativa válida para discriminar polos físicos, podría ser la utilización de una función del tipo promedio normalizado que sea definida a partir de múltiples curvas tipo  $\sigma_2^{-1}(s)$  obtenidas para distintas combinaciones de estados de carga. El concepto tras esta idea se puede observar en lo desarrollado por (Felber, 1993), donde se implementa el uso de un promedio normalizado para la identificación de frecuencias naturales a partir de diversos espectros de densidad de potencia. La razón de normalizar obedece a que si bien las curvas pueden presentar un comportamiento común, es decir, exhibir máximos para las mismas frecuencias, éstos pueden estar asociados a diversos niveles de energía, según cada input para el cual se determina cada curva. Debido a esto, este fenómeno sugiere normalizar las curvas para que el promedio resulte representativo para todos los máximos relacionados a los polos del sistema.

La formulación para el concepto de promedio normalizado resulta:

$$\bar{x}_n(f_k) = \left(\frac{1}{l}\right) \sum_{i=1}^l x_{n_i}(f_k) \quad (3-12)$$

Con

$$x_{n_i}(f_k) = \frac{x_i(f_k)}{\sum_{k=1}^{N_f} x_i(f_k)} \quad (3-13)$$

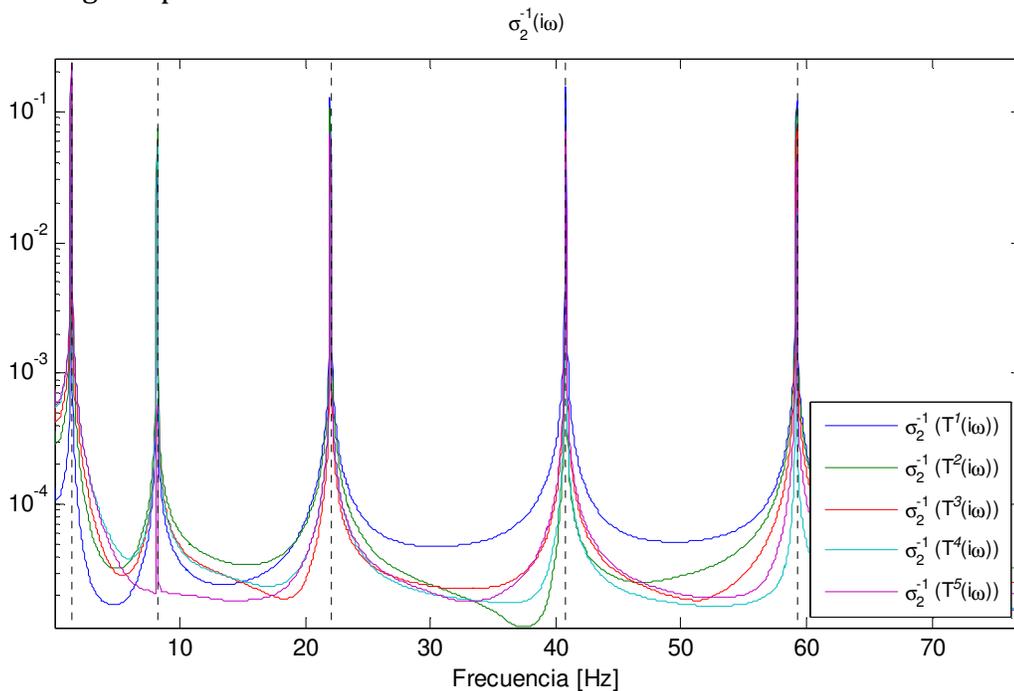
$N_f$ : Número de frecuencias.

$\bar{x}_n$ : Promedio normalizado.

$x_i$ : Curva i-esima.

Es claro que el grado de éxito en el uso de este promedio se basa en la cantidad de curvas disponibles para manipular (combinaciones de estados de carga), lo cual podría resultar muy difícil de lograr en estructuras civiles.

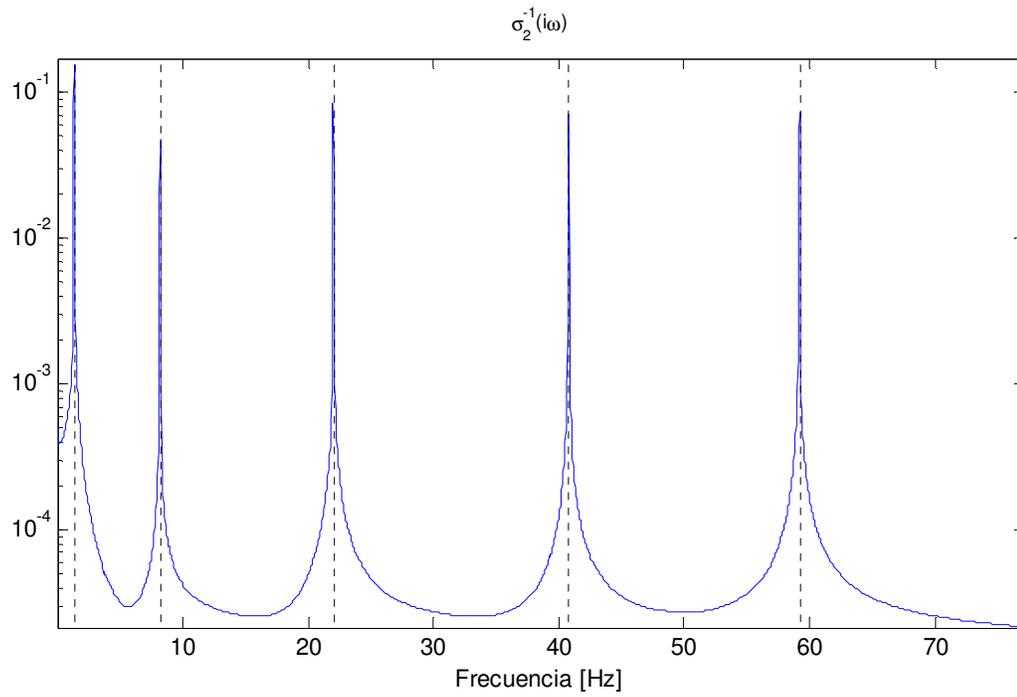
Para visualizar de mejor manera, a continuación se presenta la aplicación del concepto promedio normalizado aplicado sobre cada una de las matrices tipo  $T^j(s)$ , considerando que éstas sólo contienen la información de dos estados de carga (Figura 3-21). Para llevar a cabo este procedimiento se consideraron todas las curvas resultantes de combinar todos los estados de carga disponibles.



**Figura 3-22:** Distribución de  $\sigma_2^{-1}$  para cada matriz tipo  $T^j(s)$  empleando promedios normalizados de curvas generadas para todas las combinaciones de pares de estados de carga  $Esc_i - Esc_j$   
(:) Frecuencias naturales teóricas.

A partir de la figura anterior, se puede ver como mejora la identificación del segundo polo respecto a lo exhibido en la Figura 3-20. No obstante al buen comportamiento que presentan las curvas, se observa que al combinar estados de carga empleando la matriz con referencia en el nodo 5 ( $T^5(s)$ ), ésta aun mantiene un salto abrupto en torno al polo.

Bajo el mismo concepto de promedio normalizado, una última alternativa resulta de combinar todas las curvas generadas en el gráfico anterior, obteniendo:



**Figura 3-23:** Distribución de  $\sigma_2^{-1}$ . Curva promedio normalizado final.  
(:) Frecuencias naturales teóricas.

### 3.3.2 Detección mediante rango de matriz (alternativa 2)

Similar a lo expuesto en la sección anterior, existe otra alternativa basada en la descomposición SVD, que permite discriminar polos falsos en funciones de transmisibilidad (Araújo & Laier, 2014). Si bien en este trabajo los autores tomaron las transmisibilidades definidas según las razones de los espectros de densidad de potencia, la metodología es válida para cualquier definición de transmisibilidad. La idea principal de esta alternativa nace del resultado expuesto en la sección anterior, esto es, la construcción de una matriz que presente rango 1 sólo cuando sea evaluada en los polos del sistema. Sin embargo, a diferencia del trabajo anterior, en éste se utilizan todos los valores singulares, con excepción del primero. A continuación, se detalla el procedimiento desarrollado por este grupo.

Considere  $n$  puntos controlados en la estructura, así como  $l$  condiciones de carga distintas entre sí. Esto permite construir  $n$  matrices de la siguiente forma:

$$T^j(s) = \begin{bmatrix} T_{1j}^1(s) & T_{1j}^2(s) & \dots & T_{1j}^l(s) \\ T_{2j}^1(s) & T_{2j}^2(s) & \dots & T_{2j}^l(s) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ T_{nj}^1(s) & T_{nj}^2(s) & \dots & T_{nj}^l(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times l} \quad (3-14)$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Al evaluar cada una de las matrices  $T^j(s)$  en los polos del sistema, digamos  $\lambda_m$ , éstas presentan rango 1, lo que equivale a que a partir del segundo valor singular, todos sean nulos.

$$\sigma_k^j(\lambda_m) = 0 \quad (3-15)$$

$$k = 2, 3, \dots, \min(n, l)$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

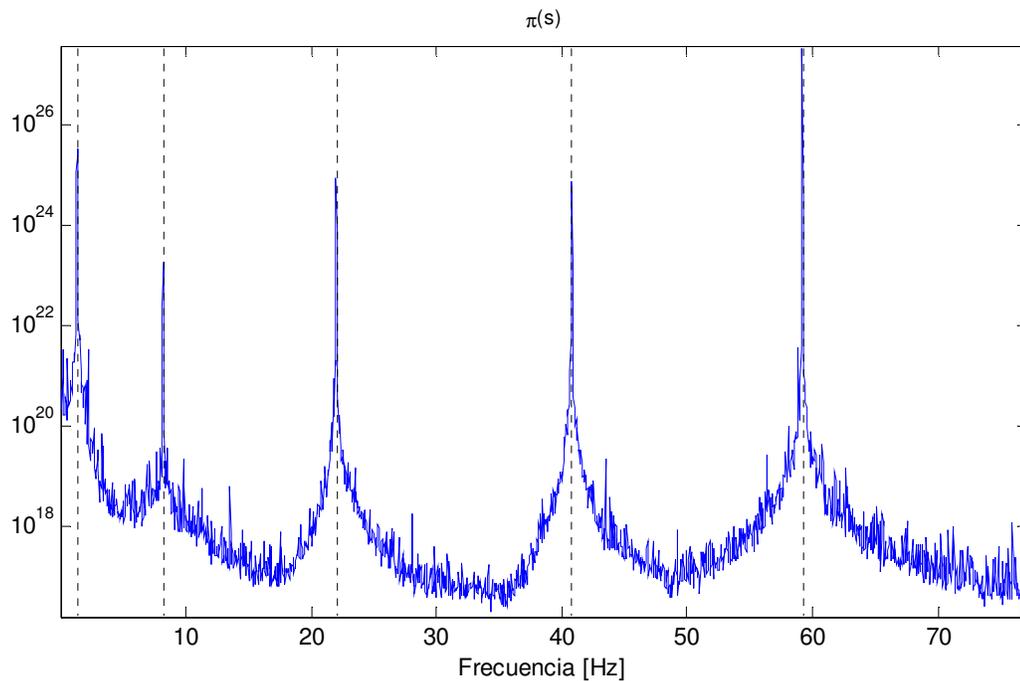
El método propone calcular el promedio del inverso de cada valor singular, producto de las  $n$  matrices  $T^j$ , y posteriormente multiplicarlos entre sí:

$$\hat{\sigma}(s) = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{\sigma_2^i(s)} \quad \frac{1}{\sigma_3^i(s)} \quad \dots \quad \frac{1}{\sigma_{\min(n,l)}^i(s)} \right] \right) \quad (3-16)$$

$$\pi(s) = \prod_{i=2}^{\min(n,l)} \hat{\sigma}_i(s)$$

Es claro que usando el resultado presentado en ( 3-15 ), la función  $\pi(s)$  presentará máximos coincidentemente con los polos del sistema. Este resultado resulta análogo a lo presentado en la sección precedente.

A continuación se presenta el resultado de emplear esta metodología sobre el ejemplo presentado en la Figura 3-3.



**Figura 3-24:** Identificación de polos mediante función  $\pi(s)$ .  
(:) Frecuencias naturales teóricas.

Tal como fue previsto anteriormente, la idea central de esta metodología radica en la propiedad que poseen las funciones de transmisibilidad de converger al mismo valor al ser evaluadas en algún polo del sistema. La forma en la cual fue concebida esta herramienta, se basa en la determinación del rango de una matriz definida de tal forma que ésta presente rango 1 sólo en los polos del sistema, y que la única diferencia respecto a la alternativa anterior (Sección 3.3.1), corresponde a la utilización de los valores singulares restantes  $\sigma_3, \sigma_4, \dots, \sigma_N$ . Notar que en caso que  $\sigma_N$  presente un valor ínfimo y casi constante en todo el rango de frecuencias de interés, éste podría entorpecer el proceso de identificación, haciendo que algunos *peaks* de  $\pi(s)$  puedan ser confundidos como máximos locales y no polos del sistema.

### 3.3.3 Detección mediante formulación matricial y el uso de matriz pseudo inversa

Conforme al pobre condicionamiento de estabilidad que presenta la matriz  $T^j(s)$  al ser evaluada en los polos del sistema ( 3-14 )( 3-15 ), y tomando en cuenta que este fenómeno puede ser cuantificado mediante el uso de la matriz pseudo-inversa de Moore-Penrose (Penrose, 1955), en (Devriendt, Weijtjens, De Sitter, & Guillaume, 2013) se propone el cálculo de la pseudo-inversa de una matriz similar a  $T^j(s)$  ( 3-11 ) como herramienta para definir funciones alternativas a las del tipo  $\Delta^{-1kl}_{ij}(s)$ . La principal ventaja de este procedimiento radica en que permite evaluar más de dos referencias  $i, j$  a la vez, así como también, libera al usuario en la determinación/elección de los estados de carga necesarios para definir las funciones de transmisibilidad. Según los resultados de los experimentos desarrollados por este grupo, esta forma de evaluar las transmisibilidades permite reducir el riesgo de identificar polos falsos. Considerando este antecedente, a continuación se detalla este procedimiento.

De la misma forma que en la sección anterior, considere  $n$  puntos controlados en la estructura, así como  $l$  condiciones de carga distintas entre sí. Esto permite construir  $n$  matrices de la siguiente forma:

$$\tilde{T}^j(s) = \begin{bmatrix} T_{1j}^1(s) & T_{1j}^2(s) & \dots & T_{1j}^l(s) \\ T_{2j}^1(s) & T_{2j}^2(s) & \dots & T_{2j}^l(s) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ T_{j-1j}^1(s) & T_{j-1j}^2(s) & \dots & T_{j-1j}^l(s) \\ T_{j+1j}^1(s) & T_{j+1j}^2(s) & \dots & T_{j+1j}^l(s) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ T_{nj}^1(s) & T_{nj}^2(s) & \dots & T_{nj}^l(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(n-1) \times l} \quad (3-17)$$

Aplicando una descomposición mediante valores singulares, se tiene:

$$\tilde{T}^j(s) = [U_j(s)][\Sigma_j(s)][V_j(s)]^H \quad (3-18)$$

Con  $\Sigma_j(s) \in \mathbb{C}^{(n-1) \times l}$  conteniendo  $N_\sigma = \min(l, n - 1)$  valores singulares en su diagonal.

$$[\Sigma_j(s)] = \begin{bmatrix} \sigma_1^j(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_{N_\sigma}^j(s) \end{bmatrix} \quad (3-19)$$

$$\sigma_1^j \geq \sigma_2^j \geq \sigma_3^j \dots \sigma_{N_\sigma}^j \geq 0$$

Utilizando esta descomposición, es posible armar la matriz pseudo-inversa de  $\tilde{T}^j(s)$ .

$$\tilde{T}^j(s)^\dagger = [V_j(s)][\Sigma_j(s)]^\dagger [U_j(s)]^H \quad (3-20)$$

Con  $[\Sigma_j(s)]^\dagger$  matriz diagonal, presentando en ella los inversos de la diagonal de  $[\Sigma_j(s)]$ .

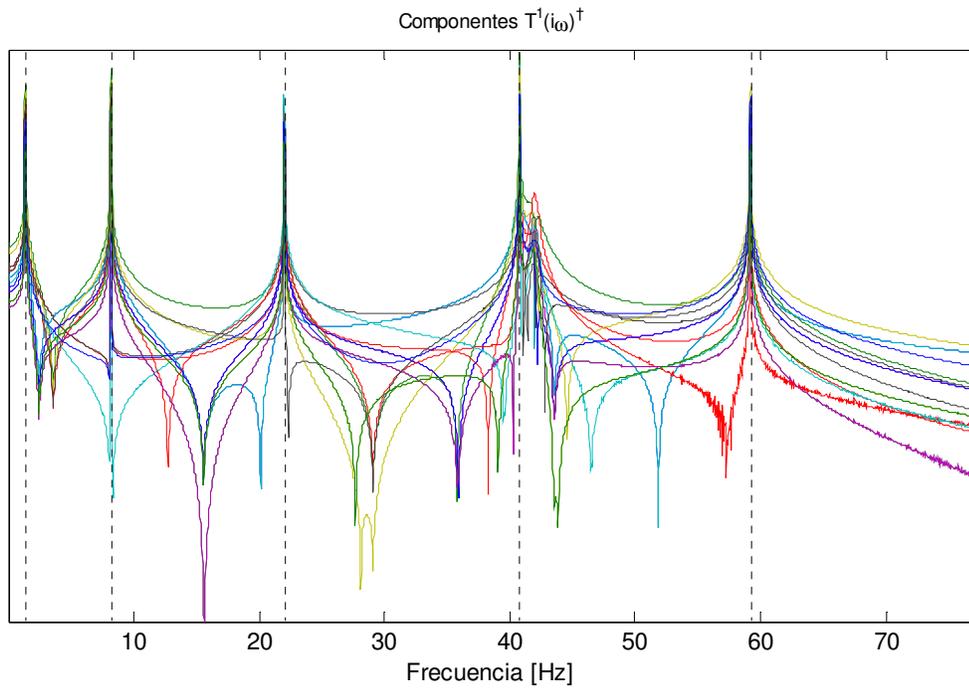
Debido a la estructura que presenta la matriz  $\tilde{T}^j(s)$ , ésta presenta rango 1 únicamente al ser evaluada en algún polo del sistema, por ejemplo  $\lambda_m$ . Tomando este resultado, y utilizando la definición ( 3-20 ), se observa que, con excepción del primer valor, todos los componentes de la diagonal de la matriz  $[\Sigma_j(\lambda_m)]^\dagger$  tenderán a infinito, lo cual se traduce en que cada componente de la matriz pseudo-inversa exhibirá la presencia de un polo asociado al sistema.

$$\tilde{T}^j(\lambda_m)^\dagger = \begin{bmatrix} \infty & \dots & \infty \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \infty & \dots & \infty \end{bmatrix} \quad (3-21)$$

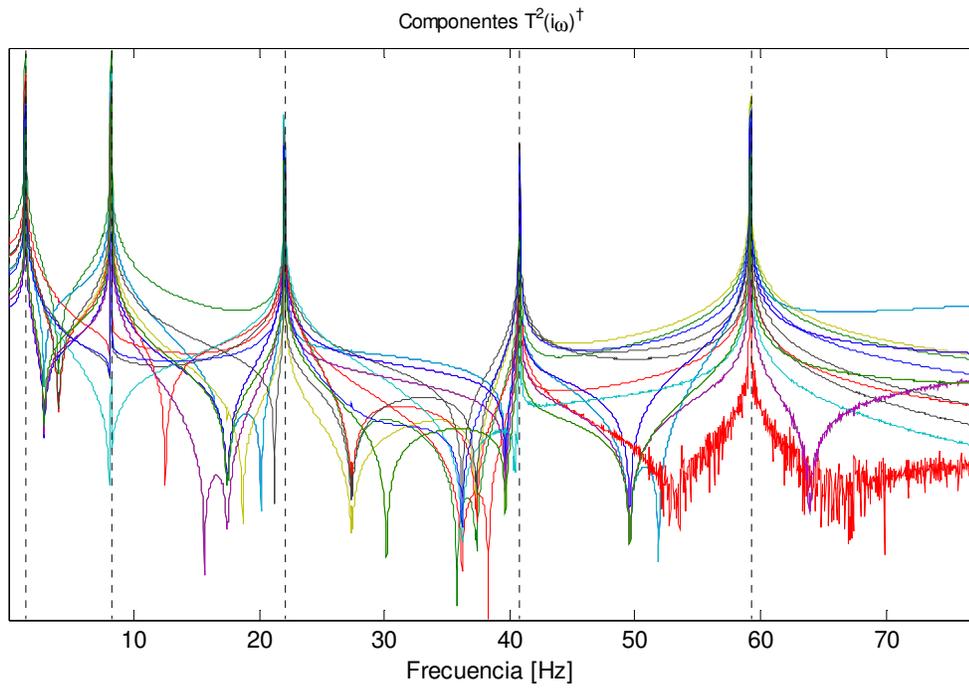
Según este enfoque, se desprende que el proceso de agrupar distintas combinaciones (i-j) a la vez en la confección de la matriz  $\tilde{T}^j(s)$ , favorece la consistencia de los resultados, reduciendo la probabilidad de aparición de polos falsos.

Un punto importante a destacar, es que la principal diferencia respecto a las alternativas anteriores corresponde a que cada una de las componentes de la matriz  $\tilde{T}^j(\lambda_m)^\dagger$  es una pseudo función de transferencia en sí, contrario a los casos anteriores, donde cada una de las curvas generadas estaban definidas en el dominio real y donde sus máximos se ubicaban en las cercanías de las frecuencias amortiguadas del sistema (parte imaginaria de cada polo).

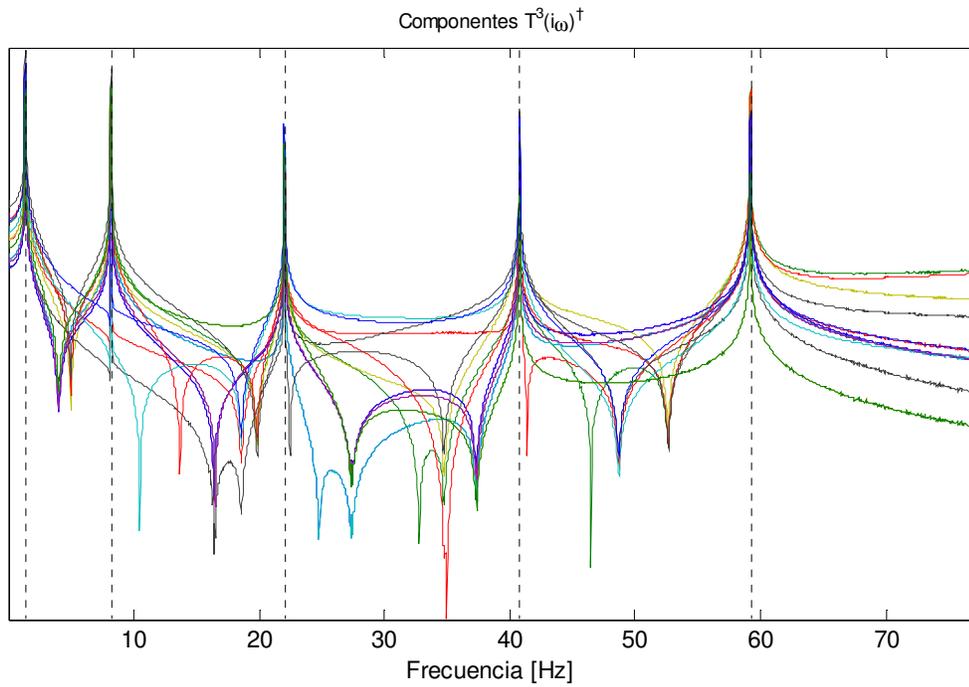
A continuación se presenta el resultado de aplicar esta herramienta sobre el ejemplo descrito en la Figura 3-3.



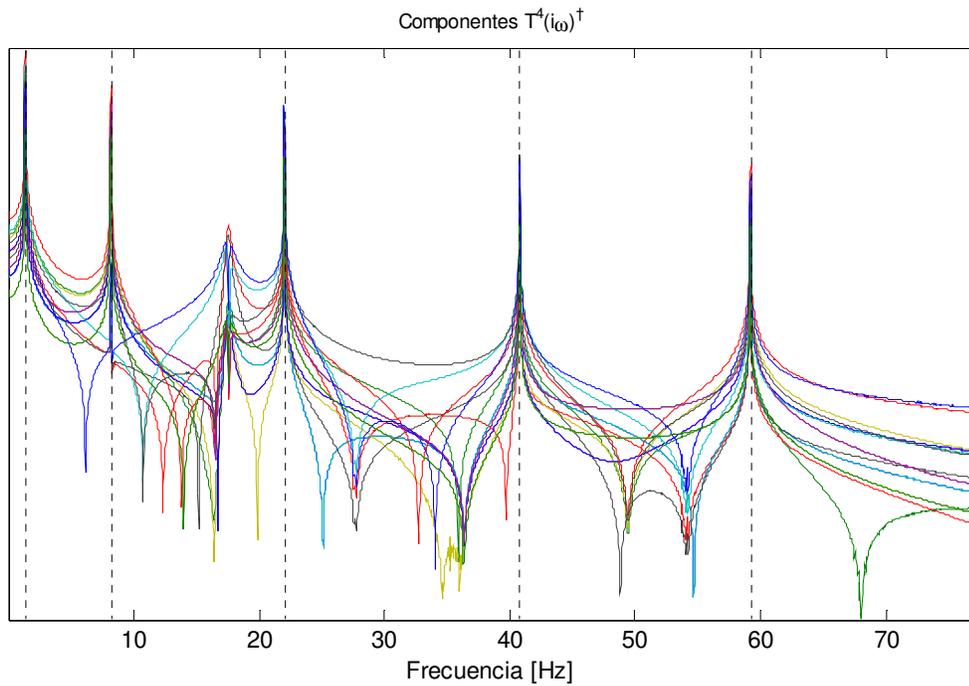
**Figura 3-25:** Identificación de polos mediante pseudo inversa  $\tilde{T}^1(s)^\dagger$ .  
 (:.) Frecuencias naturales teóricas.



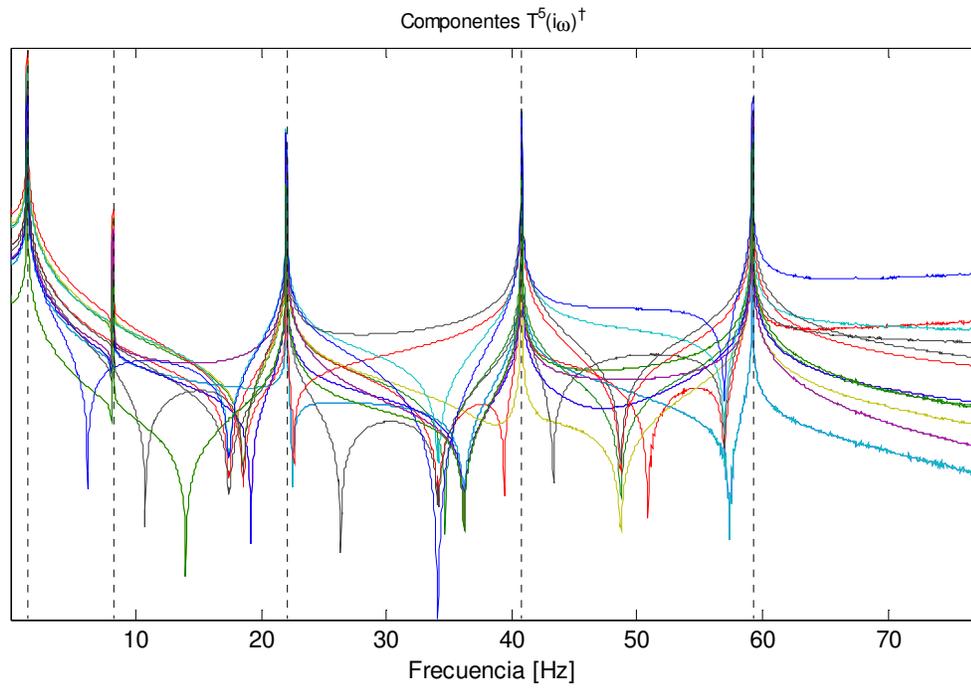
**Figura 3-26:** Identificación de polos mediante pseudo inversa  $\tilde{T}^2(s)^\dagger$ .  
 (:.) Frecuencias naturales teóricas.



**Figura 3-27:** Identificación de polos mediante pseudo inversa  $\tilde{T}^3(s)^\dagger$ .  
 (:) Frecuencias naturales teóricas.



**Figura 3-28:** Identificación de polos mediante pseudo inversa  $\tilde{T}^4(s)^\dagger$ .  
 (:) Frecuencias naturales teóricas.



**Figura 3-29:** Identificación de polos mediante pseudo inversa  $\tilde{T}^5(s)^\dagger$ .  
 (: ) Frecuencias naturales teóricas.

## Capítulo 4

### Estimadores Paramétricos

#### 4.1 Introducción

Como se ha expuesto en los capítulos anteriores, la manipulación y evaluación numérica de funciones de transmisibilidad, permite generar curvas con máximos ubicados en las proximidades de las frecuencias asociadas a cada polo del sistema. Tomando en cuenta este resultado, hasta el momento sólo sería posible identificar, mediante una inspección visual y en forma aproximada, las frecuencias naturales y formas modales respectivas que presente la estructura en estudio (Sección 2.5). Cabe destacar que los resultados que puedan ser extraídos en esta etapa, son fuertemente dependientes de la cantidad de líneas espectrales consideradas en el proceso de registro de datos. Considerando esta limitación, y el problema que representa esta característica para la identificación confiable de valores de amortiguamiento (Hernández, 2009), resulta necesario un método robusto que permita la extracción de propiedades modales a partir de las curvas generadas por funciones de transmisibilidad. Afortunadamente, considerando la cualidad de pseudo-funciones de transferencia que presentan las curvas tipo  $\Delta^{-1}_{ij}{}^{kl}(s)$ , resulta atractiva la aplicación de diversos estimadores paramétricos desarrollados para la extracción de propiedades modales en funciones de transferencia obtenidas a través de un entorno modal tipo experimental (EMA).

Por otra parte, tal como se ha mencionado en la sección 3.2, el uso de ventanas en la generación de funciones de transmisibilidad, mediante formas no-paramétricas, trae consigo un error en la estimación para valores de amortiguamiento, el que sólo podría ser compensado en caso de utilizar ventanas de tipo exponencial (Verboven, 2002). Cabe señalar además, que debido a las limitaciones de operación o almacenamiento al momento de registrar el comportamiento de una estructura, comúnmente sólo es posible capturar un número acotado de datos, esto hace que, aún en el escenario de disponer de una respuesta del tipo sinusoidal, los registros no sean necesariamente periódicos dentro de la ventana de observación, haciendo que inevitablemente el efecto de leakage esté presente. Una solución que evite el uso de ventanas, resulta la implementación de una formulación paramétrica para las funciones de transmisibilidad. Para llevar a cabo esto, se estudiará la formulación del modelo Input/Output (Pintelon, Schoukens, & Vandersteen, 1997).

De acuerdo a estos antecedentes, en este capítulo se presentarán diversos estimadores, tanto para la extracción de propiedades modales, como también para una formulación paramétrica

de funciones de transmisibilidad. La descripción de cada uno de estos algoritmos será acompañada de simulaciones numéricas, de tal forma que puedan ser entendidos de mejor manera.

## 4.2 Modelos paramétricos para la estimación de propiedades modales

Para llevar a cabo la caracterización del comportamiento dinámico de una estructura mediante la identificación de sus propiedades modales, diversos modelos pueden ser hallados en la literatura.

Intuitivamente, se podría pensar en el siguiente modelo modal como base para el proceso de identificación:

$$H(s) = \sum_{m=1}^{N_m} \left( \frac{\{\Phi_m\}\{L_m\}^T}{s - \lambda_m} + \frac{\{\Phi_m\}^*\{L_m\}^H}{s - \lambda_m^*} \right) = \sum_{m=1}^{N_m} \left( \frac{R_m}{s - \lambda_m} + \frac{R_m^*}{s - \lambda_m^*} \right) \quad (4-1)$$

Si bien esta forma resulta la más apropiada para comprender la física del comportamiento de una estructura, la obtención directa de los parámetros de este modelo resulta un problema altamente no lineal. Debido a esto, modelos originalmente ideados para aplicaciones en ingeniería eléctrica y teoría de control, tales como: ARMA, espacio estado y descripción mediante fracciones matriciales (*matrix fraction description*), etc. resultan una alternativa válida para la obtención de parámetros modales (Verboven, 2002).

En este trabajo, es de particular interés el modelo mediante fracciones matriciales, para el cual, diversos estimadores con dominio en frecuencias han sido desarrollados.

## 4.3 Modelo mediante fracciones matriciales

Como primer modelo, considere la ecuación diferencial que representa la dinámica de una estructura de N grados de libertad:

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = f(t) \quad (4-2)$$

Con M, C y K las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez respectivamente, y donde  $f(t)$  y  $u(t)$  corresponden a los vectores de carga y respuesta estructural. Si se aplica la transformada en el dominio de Laplace a la ecuación ( 4-2 ) resulta:

$$\begin{aligned} (s^2M + sC + K)U(s) &= F(s) \\ G(s)U(s) &= F(s) \end{aligned} \quad (4-3)$$

Con G(s): rigidez dinámica.

Una inversión de G(s) en ( 4-3 ) conduce a la definición de matriz de función de transferencia H(s):

$$U(s) = H(s)F(s) \quad (4-4)$$

Notar que la matriz de transferencia puede ser expresada como

$$H(s) = G(s)^{-1} = \frac{G_{adj}(s)}{\det(G(s))} \quad (4-5)$$

$$H(s) = \frac{\begin{bmatrix} B_{1,1}(s) & \dots & B_{1,N}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N,1}(s) & \dots & B_{N,N}(s) \end{bmatrix}}{A(s)} \quad (4-6)$$

Dada la estructura que presenta la definición anterior, este modelo corresponde a uno de tipo común denominador o también conocido como descripción mediante fracción matricial escalar (*scalar matrix fraction description*). Tomando en cuenta la dimensión escalar que presenta el denominador, esta estructura podría entenderse como un caso particular de los modelos denominados MFD (*Matrix fraction description*), los que en general corresponden a:

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (4-7)$$

Con  $B(s) \in \mathbb{C}^{N_o \times N_i}$ .

$N_o$ : Número de salidas

$N_i$ : Número de entradas (considerando instrumentación tipo EMA)

Según la posición que tome la matriz  $A(s)$  en ( 4-7 ), se definen los siguientes modelos:

Se dice que la relación descrita mediante ( 4-7 ) corresponde a una *Left Matrix Fraction Description (LMFD)*, si:

$$H(s) = A(s)^{-1}B(s) \quad (4-8)$$

En tal caso,  $A(s) \in \mathbb{C}^{N_o \times N_o}$ .

Por otra parte, ( 4-7 ) se dirá que corresponde a una *Rigth Matrix Fraction Description (RMFD)*, si:

$$H(s) = B(s)A(s)^{-1} \quad (4-9)$$

En este caso,  $A(s) \in \mathbb{C}^{N_i \times N_i}$ .

Cabe señalar, que en caso de disponer de valores experimentales para  $H(s = i\omega)$ , en nuestro caso, funciones  $\Delta^{-1}_{ij}{}^{kl}(i\omega)$ , como registro primario para el proceso de identificación de parámetros, ambas descripciones permiten resolver un problema de linealización en sus parámetros (coeficientes matriciales) a estimar.

El concepto que hay detrás de la identificación de propiedades modales mediante el modelo de fracciones matriciales, resulta similar para los diversos estimadores que serán presentados en la sección siguiente. La idea central, se basa en la minimización de una función error, definida como:

$$\varepsilon(\omega_k) = H(\omega_k) - \frac{B(\omega_k, \theta)}{A(\omega_k, \theta)} \quad (4-10)$$

Con  $\omega_k$ : Frecuencia angular ( $k = 1 \dots N_k$ ) y  $\theta$  parámetros a estimar (coeficientes matriciales).

A partir de ( 4-10 ), una función de costo cuadrático es definido mediante el cuadrado de la norma Euclidiana del error asociado a cada una de las líneas de frecuencia en la cual han sido registrados los datos.

$$l^{NL}(\theta) = \sum_{k=1}^{N_k} \|\varepsilon(\omega_k)\|_F^2 \quad (4-11)$$

Una manera directa para minimizar esta función con respecto a los parámetros  $\theta$ , corresponde a utilizar el enfoque de mínimos cuadrados (*Least Squares*), sin embargo este problema resulta no lineal en sus parámetros, por lo que la utilización un método iterativo, como por ejemplo el de Gauss Newton (Madsen, Nielsen, & Tingleff, 2004), permitiría dar solución a este problema. Debido a que el proceso iterativo requiere de una estimación inicial para dar curso a la recursión, una alternativa para resolver directamente un problema equivalente a ( 4-10 ), corresponde a resolver una versión linealizada del error cuadrático:

$$l^L(\theta) = \sum_{k=1}^{N_k} \|H(\omega_k)A(\omega_k, \theta) - B(\omega_k, \theta)\|_F^2 \quad (4-12)$$

Los distintos estimadores que han sido desarrollado de acuerdo al modelo de fracciones matriciales, pueden ser clasificados en dos grandes grupos: Determinísticos y Estocásticos. Los primeros, corresponden más bien a algoritmos de ajustes de curvas, sin importar el contenido de los datos que se disponga a través de los registros. Por otra parte, los de tipo estocásticos, consideran la información relativa al ruido aleatorio presente en las mediciones, logrando así resultados más precisos que su contraparte, sin embargo, la aplicación de estos métodos está sujeta a un proceso recursivo para la estimación de parámetros.

A continuación se detallarán algunos estimadores, que finalmente permitirán la extracción de la información modal de los registros.

### 4.3.1 Método p-LSCF (Polyreference Least Squares Complex Frequency)

Como fue expuesto en la sección anterior, debido al carácter global que presentan los polos en las componentes de una matriz de transferencia  $H(s)$ , modelos de común denominador (matriciales) pueden ser utilizados en el proceso de identificación de parámetros modales.

Considere la siguiente componente, asociada a la entrada  $i$  y la salida  $o$ , para una función de transferencia estimada ( $H \in \mathbb{C}^{l \times m}$ ), con  $m$  entradas y  $l$  salidas, evaluada en una línea espectral  $f$  mediante la transformada discreta de Fourier:

$$H_{oi}(\Omega_f, \theta) = \frac{B_{oi}(\Omega_f, \theta)}{A(\Omega_f, \theta)} \quad (4-13)$$

Expresando la ecuación anterior, considerando sólo fila asociada a la salida  $o$ , y utilizando la descomposición RMFD, resulta:

$$\langle H_o(\Omega_f) \rangle = \frac{\langle B_o(\Omega_f) \rangle}{A(\Omega_f)} = \langle B_o(\Omega_f, \theta) \rangle A(\Omega_f, \theta)^{-1} \quad (4-14)$$

$$\langle B_o(\Omega_f, \theta) \rangle = \sum_{j=0}^{N_n} \langle \beta_{oj} \rangle \Omega_f^j \quad (4-15)$$

$$A(\Omega_f, \theta) = \sum_{j=0}^{N_d} [\alpha_j] \Omega_f^j \quad (4-16)$$

Con el parámetro  $\theta$  determinado por  $\langle \beta_{oj} \rangle \in \mathbb{C}^{1 \times m}$  y  $\alpha_j \in \mathbb{C}^{m \times m}$ .

$N_n$  y  $N_d$  son órdenes correspondientes a los polinomios matriciales asociados al numerador y denominador respectivamente.

La base polinomial empleada  $\Omega_f$ , corresponde a la forma derivada que resulta al evaluar el dominio de las frecuencias (**DFT**, *discrete fourier transform*) a partir de un modelo de tiempo discreto (dominio  $Z$ )

$$\Omega_f = e^{-i\omega_f T_s} \quad (4-17)$$

$T_s$ : Periodo de Sampleo.

Considerando una estimación no-paramétrica de la función de transferencia  $\hat{H}(\omega_f)$ , el error asociado a la estimación considerando el modelo empleado en ( 4-13 ), queda definido de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \epsilon_o(\omega_f, \theta) &= w_o(\omega_f) \left( H_o(\omega_f, \theta) - \hat{H}_o(\omega_f) \right) \\ \epsilon_o(\omega_f, \theta) &= w_o(\omega_f) \left( \langle B_o(\omega_f, \theta) \rangle A(\omega_f, \theta)^{-1} - \hat{H}_o(\omega_f) \right) \end{aligned} \quad (4-18)$$

El error descrito en ( 4-18 ), corresponde a la diferencia que existe entre el modelo y los valores obtenidos experimentalmente, la que a su vez se encuentra ponderada por una función de peso  $w_o$ , que permite diferenciar la calidad de cada canal, en cada salida  $o$ .

El parámetro  $\theta$ , resulta de ordenar los parámetros  $\beta$  y  $\alpha$  de las expresiones ( 4-15 ) y ( 4-16 ), tal como se muestra a continuación.

$$\beta_o = \begin{bmatrix} \langle \beta_{o0} \rangle \\ \langle \beta_{o1} \rangle \\ \dots \\ \langle \beta_{oN_n} \rangle \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(N_n+1) \times m}, (\forall o = 1, 2 \dots l)$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} [\alpha_0] \\ [\alpha_1] \\ \dots \\ [\alpha_{N_d}] \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m(N_d+1) \times m} \quad (4-19)$$

$$\theta = \begin{bmatrix} [\beta_1] \\ [\beta_2] \\ \dots \\ [\beta_l] \\ [\alpha] \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(l(N_n+1)+m(N_d+1)) \times m}$$

Desarrollando la expresión ( 4-18 ) para cada una de las salidas  $o=1,2,\dots,l$  así como las  $N_f$  frecuencias, se tiene la siguiente función de costo escalar:

$$l(\theta) = \left( \sum_{o=1}^l \sum_{f=1}^{N_f} tr \left\{ \epsilon_o(\omega_f, \theta)^H \epsilon_o(\omega_f, \theta) \right\} \right) \quad (4-20)$$

■<sup>H</sup>: Complejo conjugado (Hermitian) de ■.  
tr{■}: Traza de ■.

Observando en ( 4-20 ), se puede destacar el uso de la traza, el cual representa el cuadrado de la norma de un vector. La estimación final de los parámetros  $\theta$ , resulta de minimizar esta función de costo escalar mediante la técnica de mínimos cuadrados, sin embargo, previo a la resolución de esta función, vale la pena mencionar la no linealidad existente en los parámetros que se origina al resolver el problema, debido a la presencia de variables en el denominador ( 4-18 ). Debido a esto, se propone resolver un problema aproximado al original, el cual resulta de proponer el error para cada salida  $o$  de la siguiente forma (Levy, 1959):

$$\epsilon_o^{LS}(\omega_f, \theta) = w_o(\omega_f) \left( \langle B_o(\omega_f, \theta) \rangle - \hat{H}_o(\omega_f) A(\omega_f, \theta) \right) \quad (4-21)$$

Notar que se ha multiplicado la expresión ( 4-18 ) por  $A(\omega_f, \theta)$  (por la derecha), eliminando así la no linealidad en los parámetros.

Una forma conveniente para resolver la forma linealizada de ( 4-20 ),  $l^{LS}(\theta)$ , es ordenar matricialmente todas las evaluaciones en frecuencias en una sola matriz,  $E_o^{LS}(\theta)$ :

$$E_o^{LS}(\theta) = \begin{bmatrix} \langle \epsilon_o^{LS}(\omega_1, \theta) \rangle \\ \langle \epsilon_o^{LS}(\omega_2, \theta) \rangle \\ \dots \\ \langle \epsilon_o^{LS}(\omega_{N_f}, \theta) \rangle \end{bmatrix} = (X_o \ Y_o) \begin{pmatrix} \beta_o \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N_f \times m}$$

$$X_o = \begin{bmatrix} w_{o1} \langle \Omega_1^0 & \Omega_1^1 & \dots & \Omega_1^{N_n} \rangle \\ w_{o2} \langle \Omega_2^0 & \Omega_2^1 & \dots & \Omega_2^{N_n} \rangle \\ \dots \\ w_{oN_f} \langle \Omega_{N_f}^0 & \Omega_{N_f}^1 & \dots & \Omega_{N_f}^{N_n} \rangle \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_f \times (N_n+1)} \quad (4-22)$$

$$Y_o = \begin{bmatrix} -w_{o1} \langle \Omega_1^0 & \Omega_1^1 & \dots & \Omega_1^{N_d} \rangle \otimes \langle \hat{H}_o(\omega_1) \rangle \\ -w_{o2} \langle \Omega_2^0 & \Omega_2^1 & \dots & \Omega_2^{N_d} \rangle \otimes \langle \hat{H}_o(\omega_2) \rangle \\ \dots \\ -w_{oN_f} \langle \Omega_{N_f}^0 & \Omega_{N_f}^1 & \dots & \Omega_{N_f}^{N_d} \rangle \otimes \langle \hat{H}_o(\omega_{N_f}) \rangle \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_f \times m(N_d+1)}$$

Donde  $\otimes$  denota el producto Kronecker.

Con esta nueva notación, la expresión ( 4-20 ) queda:

$$l^{LS}(\theta) = \left( \sum_{o=1}^l tr \left\{ \left( \begin{pmatrix} \beta_o \\ \alpha \end{pmatrix}^H (X_o \ Y_o)^H \right) (X_o \ Y_o) \begin{pmatrix} \beta_o \\ \alpha \end{pmatrix} \right\} \right)$$

$$l^{LS}(\theta) = \left( \sum_{o=1}^l tr \left\{ (\beta_o^H \ \alpha^H) \begin{pmatrix} X_o^H \\ Y_o^H \end{pmatrix} (X_o \ Y_o) \begin{pmatrix} \beta_o \\ \alpha \end{pmatrix} \right\} \right) \quad (4-23)$$

$$l^{LS}(\theta) = tr\{\theta^H J^H J \theta\}$$

Donde  $J$  representa la matriz Jacobiana que resuelve el problema:

$$J \begin{bmatrix} [\beta_1] \\ [\beta_2] \\ \dots \\ [\beta_l] \\ [\alpha] \end{bmatrix} \approx 0 \quad (4-24)$$

Con la matriz jacobiana presentando la siguiente estructura:

$$J = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 & Y_1 \\ 0 & X_2 & \cdots & 0 & Y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_l & Y_l \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{l(N_f) \times (l(N_n+1) + m(N_d+1))} \quad (4-25)$$

Observando la composición de la matriz  $J$ , se puede apreciar que ésta se puede descomponer utilizando las particiones  $X$  e  $Y$ , como  $J=[X,Y]$ . De acuerdo a ( 4-22 ), se observa que la partición  $X$  no presenta los errores que podrían estar asociados al proceso de registro de los datos, es por esta razón, que existen diversas alternativas para la resolución del problema de mínimos cuadrados considerando esta propiedad, estos métodos son denominados *Mixed Least Squares-Total Least Squares (LS-TLS)*. Para mayor detalle de estos métodos, leer capítulo 5 de (Verboven, 2002).

Sin embargo a lo expuesto anteriormente, existe una alternativa que permite resolver el mismo problema ( 4-20 ), que permite reducir en gran medida el número de operaciones necesarias para obtener los valores del vector  $\theta$ , estas son las denominadas ecuaciones normales. En vez de estimar los parámetros directamente a través del Jacobiano ( 4-24 ), estos pueden ser obtenidos considerando el siguiente producto:

$$J^H J = \begin{bmatrix} X_1^H X_1 & 0 & \cdots \cdots & 0 & X_1^H Y_1 \\ 0 & X_2^H X_2 & \cdots \cdots & 0 & X_2^H Y_2 \\ \vdots & \cdots \cdots & \cdots \cdots & \cdots \cdots & \cdots \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \cdots & X_l^H X_l & X_l^H Y_l \\ Y_1^H X_1 & Y_2^H X_2 & \cdots \cdots & Y_l^H X_l & \sum_{o=1}^l Y_o^H Y_o \end{bmatrix} \quad (4-26)$$

$$J^H J = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & \cdots & S_1 \\ 0 & R_2 & \cdots & S_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1^H & S_2^H & \cdots & \sum_{o=1}^l T_o \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(l(N_n+1) + m(N_d+1)) \times (l(N_n+1) + m(N_d+1))}$$

Con

$$R_k = X_k^H X_k \in \mathbb{C}^{(N_n+1) \times (N_n+1)}$$

$$S_k = X_k^H Y_k \in \mathbb{C}^{(N_n+1) \times m(N_d+1)} \quad (4-27)$$

$$T_k = Y_k^H Y_k \in \mathbb{C}^{m(N_d+1) \times m(N_d+1)}$$

Considerando el sistema

$$J^H J \begin{bmatrix} [\beta_1] \\ [\beta_2] \\ \dots \\ [\beta_l] \\ [\alpha] \end{bmatrix} \approx 0 \quad (4-28)$$

Se da origen al siguiente sistema de ecuaciones que minimiza el problema inicial ( 4-20 ):

$$(R_o \beta_o + S_o \alpha) = 0, \\ \forall o = 1, 2, \dots, l \quad (4-29)$$

$$\sum_{o=1}^l (S_o^H \beta_o + T_o \alpha) = 0$$

Mediante este set de ecuaciones, es posible determinar los distintos parámetros (coeficientes matriciales) que definen el numerador y denominador del modelo presentado en ( 4-10 ). Considerando que los polos de un sistema corresponden a los ceros que presente el denominador  $A(\Omega_f)$ , se tiene que la identificación de propiedades modales, sólo está sujeta a conocer el conjunto de parámetros  $\alpha$ . De acuerdo a esto, la determinación del otro grupo de valores ( $\beta$ ), no tienen mayor influencia en el proceso de identificación modal (frecuencia-amortiguamiento). Sin embargo, cabe destacar que estos parámetros serán necesarios en caso de querer realizar el proceso completo de ajuste de curvas, como por ejemplo, cuando el objetivo final sea sintetizar curvas paramétricas tomando como base registros con una cantidad limitada de puntos, o bien estudiar algún criterio, como por ejemplo, el presentado en ( 2-11 ).

Según lo anterior, y volviendo a ( 4-29 ), los parámetros ( $\beta$ ) pueden ser despejados e incluidos en la ecuación asociada a la derivada parcial con respecto a  $\alpha$ , lo cual conduce a las denominadas ecuaciones normales.

$$\left[ \sum_{o=1}^l (T_o - S_o^H R_o^{-1} S_o) \right] \alpha = M \alpha = 0 \quad (4-30)$$

$$M \in \mathbb{C}^{m(N_d+1) \times m(N_d+1)}$$

Si el objetivo es conocer además los valores para ( $\beta$ ), basta con realizar una sustitución de  $\alpha$  (ya conocido) en las ecuaciones asociadas a las derivadas parciales con respecto a  $\beta$  ( 4-29 ).

Previo a resolver ( 4-30 ), se debe notar que para evitar la redundancia en la solución  $\theta$  ( $H(\theta) = H(\lambda\theta)$ ), es necesario imponer una restricción al parámetro  $\alpha$ . Recientes estudios (Cauberghe, Guillaume, Verboven, Parloo, & Vanlanduit, 2004), demuestran que la restricción más apropiada que permite la obtención de mejores diagramas de estabilización, corresponde a imponer que la última componente del vector  $\alpha$  sea igual a la matriz identidad (con dimensión  $m$ ).

$$\alpha_{N_d} = I_m \quad (4-31)$$

Según este resultado, la solución concebida como un problema de minimización para los distintos coeficientes matriciales asociados al denominador resulta:

$$\begin{bmatrix} -[M(1 : N_d m, 1 : N_d m)]^{-1} [M(1 : N_d m, N_d m + 1 : (N_d + 1)m)] \\ I_m \end{bmatrix} = \alpha \quad (4-32)$$

$$\alpha \in \mathbb{C}^{m(N_d+1) \times m}$$

Una vez determinados los coeficientes matriciales asociados a  $A(\Omega_f)$ , y de la misma forma como se procede con polinomios con coeficientes escalares, los polos (ceros del denominador) pueden ser encontrados resolviendo un problema de valores propios, tomando como argumento, la matriz compañera ( $A_c$ ) asociada al problema (Gohberg, Lancaster, & Rodman, 1982), donde finalmente, los polos del sistema corresponderán a los valores propios que presente  $A_c$ .

Cabe señalar que la matriz compañera asociada un polinomio matricial de grado  $N$  y coeficientes  $A_k \in \mathbb{C}^{m \times m}$ , queda definida por:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & A'_0 \\ I_m & 0 & 0 & A'_1 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & I_m & A'_{N-1} \end{bmatrix} \quad (4-33)$$

$$A'_k = -A_N^{-1} A_k$$

#### 4.3.1.1 Relación p-LSCF y LSCF

Si bien el desarrollo del método p-LSCF (Peeters, Van der Auweraer, Guillaume, & Leuridan, 2004), es posterior al método LSCF (Verboven, 2002), se ha optado por mostrar sólo el detalle del método *polyreference*, ya que éste corresponde a la generalización del método LSCF. Este último opera de la misma manera que p-LSCF, con la excepción de que los datos de entrada,  $H(i\omega)$ , se estructuran de tal forma de completar sólo una columna. Para entender mejor, considere:

$$H_{p-LSCF} \in \mathbb{C}^{l \times m} \quad (4-34)$$

$$H_{LSCF} \in \mathbb{C}^{1 \times lm}.$$

A pesar de ser los mismos estimadores (en sus estructuras), el simple detalle presentado en ( 4-34 ), permite que la calidad de los resultados asociados a p-LSCF, difieran enormemente de los entregados por LSCF. La principal cualidad que presenta p-LSCF, se expresa en la claridad que pueden llegar a presentar los diagramas de estabilización, lo posibilita una fácil interpretación de datos para un usuario que no posea la experiencia suficiente en el tema, siendo esta su gran virtud por sobre otros estimadores (Guillaume, Verboven, Vanlanduit, Van Der Auweraer, & Peeters, 2003), (Peeters, y otros, 2004). Sin embargo, no se debe olvidar el mayor gasto computacional que este método trae consigo, el que se acentúa claramente en el proceso de inversión de la matriz  $M$  en la expresión ( 4-32 ).

#### 4.3.1.2 Diagramas de estabilización

En la sección anterior se ha presentado formalmente un estimador capaz de extraer los polos asociados a un sistema. Sin embargo, no ha quedado del todo claro cómo determinar un orden  $N_d$ , relacionado con el polinomio  $A(\Omega_f)$ , que sea suficiente para la correcta identificación de sus propiedades modales.

Debido a la presencia de ruido y el error inducido al considerar una banda acotada de frecuencias, el orden debe ser escogido de tal manera que todos los modos físicos del problema, en la banda, puedan ser identificados de manera precisa. Para lograr esto, la elección del orden debe ser sobreestimada, lo que da pie a la aparición de polos con naturaleza matemática que no necesariamente correspondan al sistema (no confundir con los máximos falsos del capítulo anterior). Para poder distinguir entre polos del sistema, y los de tipo matemático (*spurious*), se debe tener como antecedente que los polos de naturaleza física deberán ir apareciendo “establemente”, independiente del orden para el cual sea estimado el polinomio  $A(\Omega_f)$ . Se debe señalar además, que la naturaleza física de un polo queda determinada (numéricamente) por el hecho de presentar su parte real como negativa. Considerando este hecho, nace la idea de los diagramas de estabilización, los cuales se construyen posicionando la parte imaginaria de cada uno de los polos obtenidos en el eje de las abscisas (frecuencias), y el orden al cual pertenecen, sucesivamente, en el eje de las ordenadas.

Posterior a la confección del diagrama, mediante una inspección visual, el usuario puede seleccionar los polos estabilizados, lo cuales presentarán la características de estar agrupados a través de una columna.

Cabe señalar, que según la precisión deseada por el usuario, criterios adicionales de estabilidad pueden ser aplicados en el proceso de identificación. Estos podrían ser:

$$\max\left(\frac{|\omega^j - \omega^{j-1}|}{\omega^{j-1}}, \frac{|\omega^j - \omega^{j-1}|}{\omega^j}\right) \leq tol_\omega$$

( 4-35 )

$$\max\left(\frac{|\beta^j - \beta^{j-1}|}{\beta^{j-1}}, \frac{|\beta^j - \beta^{j-1}|}{\beta^j}\right) \leq tol_\beta.$$

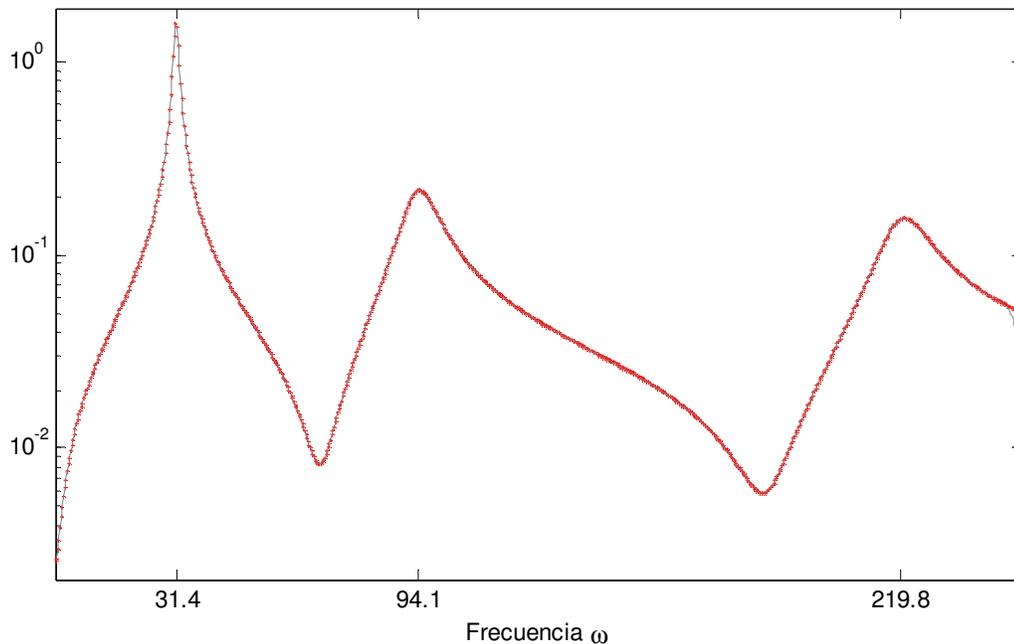
Donde:

$tol_{\omega} - tol_{\beta}$ : Tolerancias relativas fijadas por el usuario para estudiar la variación de frecuencias y amortiguamientos respectivamente, obtenidos en estimaciones correspondientes a dos órdenes sucesivos.

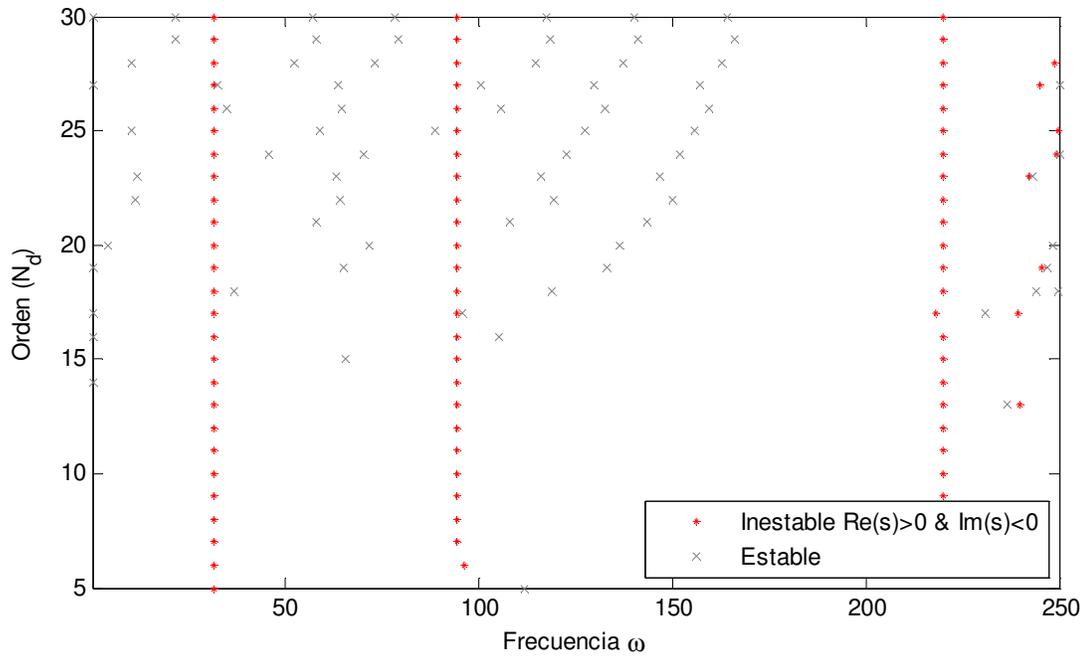
$j$ : el orden para el cual ha sido estimada la propiedad.

La aplicación de estos criterios adicionales permite estudiar la evolución de cada estimación y determinar qué información de cada polo resulta confiable (frecuencia y/o amortiguamiento). Adicionalmente, y pensando en un proceso automatizado para la extracción numérica de valores finales representativos mediante análisis de *clusters*, la aplicación de estos criterios permite reducir enormemente la cantidad de datos disponibles.

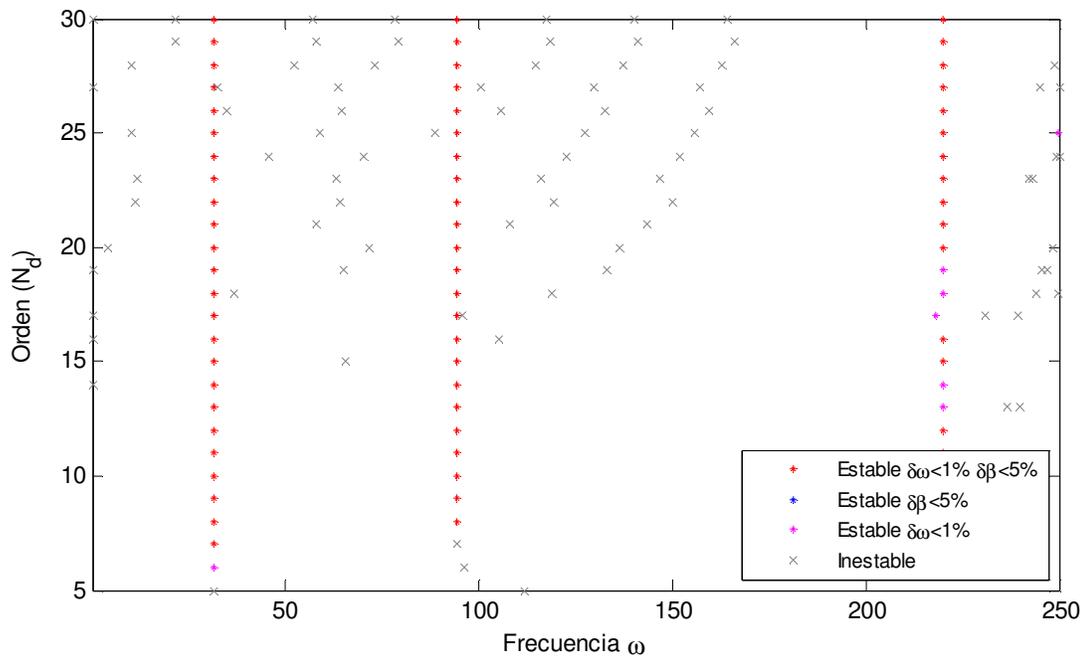
A continuación, se presenta un ejemplo con el uso del estimador p-LSCF, para la estimación de una componente de una matriz de transferencia con polos ( $s_1 = -0.63 + i 31.41$ ), ( $s_2 = -4.71 + i94.13$ ) y ( $s_3 = -0.66 + i219.81$ ), en conjunto con el diagrama de estabilización asociado.



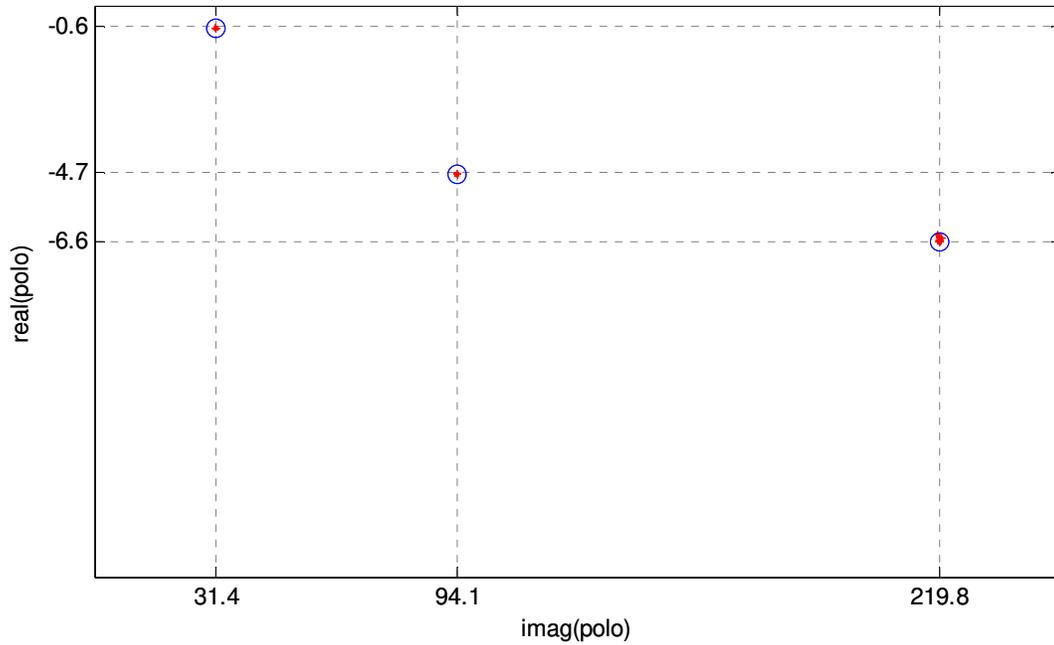
**Figura 4-1:** Ajuste de curva mediante estimación paramétrica LSCF.  
(+) Puntos función teórica, (-) curva sintetizada.



**Figura 4-2:** Diagrama de estabilización asociado.  
 (\*) Polos estables, (x) polos inestables.

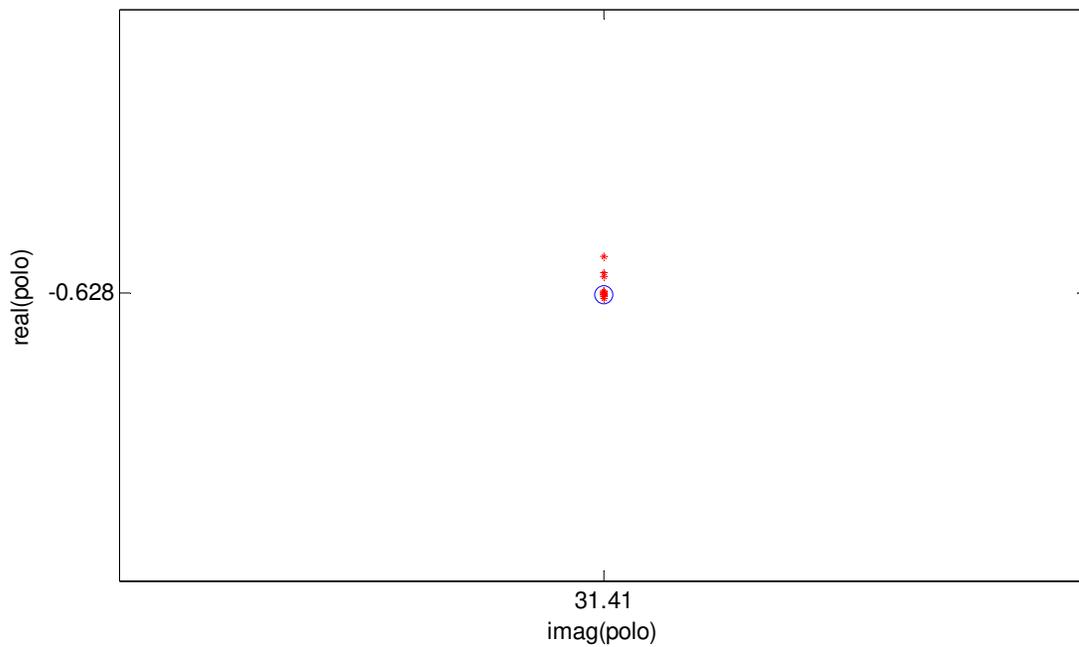


**Figura 4-3:** Diagrama de estabilización asociado.  
 Inclusion criterios de estabilidad.



**Figura 4-4:** Distribución de polos estables.  
 (\*) Polos estables, (O) polos teóricos.

Al realizar un zoom sobre el primer valor teórico, se puede ver cómo los resultados se concentran de manera precisa en torno a este valor (Figura 4-5).



**Figura 4-5:** Distribución de polos. Zoom sobre primer polo.  
 (\*) Polos estables, (O) polo teórico.

Cómo se ha podido ver en los resultados anteriores, los métodos p-LSCF y LSCF, mediante el ajuste de curvas, han resultaron ser una herramienta confiable para la determinación de polos. Sin embargo, tal como se indicó en la sección 3.2, en los casos donde el nivel de ruido sea considerable, las curvas podrían presentar importantes distorsiones que entorpecerían el proceso de extracción de polos, malinterpretando datos que no correspondan exclusivamente a parámetros del sistema. Debido a esto, surge la necesidad de incorporar algún método que sea estadísticamente eficiente, es decir, que sea capaz de tomar en cuenta la información relativa al ruido.

### 4.3.2 Método ML (Maximum Likelihood)

Bajo el supuesto que las componentes de una matriz de transferencia siguen una distribución normal, y que además resultan no correlacionadas, la función de costo de máxima probabilidad se reduce a (Guillaume, Verboven, & Vanlanduit, 1998):

$$l_{ML}(\theta) = \sum_{o=1}^{l \times m} \sum_{f=1}^{N_f} \frac{|H_o(\omega_f, \theta) - \hat{H}_o(\omega_f)|^2}{\text{var}(\hat{H}_o(\omega_f))} \quad (4-36)$$

De manera similar a lo desarrollado con ( 4-20 ), la obtención de  $\theta_{ML}$  es determinado mediante una minimización de ( 4-36 ) a través del parámetro  $\theta$ . Sin embargo, contrario a lo expuesto para el método p-LSCF, esta expresión ya no es linealizada. Considerando este antecedente, y aprovechando la forma cuadrática que presenta esta función de costo, el proceso iterativo de Gauss Newton resulta el más indicado para obtener la solución a este problema. A continuación se presenta el esquema a resolver (Pintelon, Guillaume, Rolain, Schoukens, & Van Hamme, 1994):

Considerando la función de costo:

$$l_{ML}(\theta) = e^H e \quad (4-37)$$

1. Resolver las ecuaciones normales

$$J_m^H J_m \delta_m = -J_m^H e_m \quad (4-38)$$

2. Actualizar la solución del paso anterior

$$\theta_{m+1} = \theta_m + \delta_m \quad (4-39)$$

Con:

$e_m$  el vector error asociado a la iteración m-ésima.

$J_m = \partial e(\theta) / \partial \theta |_{\theta_m}$  el jacobiano del problema.

$$e(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{|H_1(\omega_1, \theta) - \hat{H}_1(\omega_1)|}{\sqrt{\text{var}(\hat{H}_1(\omega_1))}} \\ \vdots \\ \frac{|H_1(\omega_{N_f}, \theta) - \hat{H}_1(\omega_{N_f})|}{\sqrt{\text{var}(\hat{H}_1(\omega_{N_f}))}} \\ \frac{|H_2(\omega_1, \theta) - \hat{H}_2(\omega_1)|}{\sqrt{\text{var}(\hat{H}_2(\omega_1))}} \\ \vdots \\ \frac{|H_{l \times m}(\omega_{N_f}, \theta) - \hat{H}_{l \times m}(\omega_{N_f})|}{\sqrt{\text{var}(\hat{H}_{l \times m}(\omega_{N_f}))}} \end{pmatrix} \quad (4-40)$$

El cálculo explícito del Jacobiano para este problema conduce a una matriz con una estructura similar a la expuesta en ( 4-25 ), donde las componentes, esta vez, se definen como:

$$X_o = \begin{bmatrix} \frac{\langle \Omega_1^0 \quad \Omega_1^1 \quad \dots \quad \Omega_1^{N_n} \rangle}{\sqrt{\text{var}(\hat{H}_o(\omega_1))} A(\omega_1, \theta)} \\ \frac{\langle \Omega_2^0 \quad \Omega_2^1 \quad \dots \quad \Omega_2^{N_n} \rangle}{\sqrt{\text{var}(\hat{H}_o(\omega_2))} A(\omega_2, \theta)} \\ \vdots \\ \frac{\langle \Omega_{N_f}^0 \quad \Omega_{N_f}^1 \quad \dots \quad \Omega_{N_f}^{N_n} \rangle}{\sqrt{\text{var}(\hat{H}_o(\omega_{N_f}))} A(\omega_{N_f}, \theta)} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_f \times (N_n+1)} \quad (4-41)$$

$$Y_o = \begin{bmatrix} \frac{\langle \Omega_1^0 \quad \Omega_1^1 \quad \dots \quad \Omega_1^{N_d} \rangle B_o(\omega_1, \theta)}{\sqrt{\text{var}(\hat{H}_o(\omega_1))} |A(\omega_1, \theta)|^2} \\ \frac{\langle \Omega_2^0 \quad \Omega_2^1 \quad \dots \quad \Omega_2^{N_d} \rangle B_o(\omega_2, \theta)}{\sqrt{\text{var}(\hat{H}_o(\omega_2))} |A(\omega_2, \theta)|^2} \\ \vdots \\ \frac{\langle \Omega_{N_f}^0 \quad \Omega_{N_f}^1 \quad \dots \quad \Omega_{N_f}^{N_d} \rangle B_o(\omega_{N_f}, \theta)}{\sqrt{\text{var}(\hat{H}_o(\omega_{N_f}))} |A(\omega_{N_f}, \theta)|^2} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_f \times (N_d+1)}$$

$$J = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 & Y_1 \\ 0 & X_2 & \cdots & 0 & Y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_{l \times m} & Y_{l \times m} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(l \times m)(N_f) \times ((l \times m)(N_n + 1) + (N_d + 1))} \quad (4-42)$$

Notar que se ha asumido que la estructura que presenta la matriz de transferencia, tal como sucede con el método LSCF, corresponde a tener todas sus componentes ( $l \times m$ ), agrupadas en una sola columna (ver dimensión de matriz  $J$ ).

Dada la estructura del Jacobiano, la forma matricial explícita de la expresión ( 4-38 ) queda dada por:

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 & \cdots & S_1 \\ 0 & R_2 & \cdots & S_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1^H & S_2^H & \cdots & \sum_{o=1}^{l \times m} T_o \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta\beta_1 \\ \delta\beta_2 \\ \vdots \\ \delta\beta_{l \times m} \\ \delta\alpha \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} X_1^H e_1 \\ X_2^H e_2 \\ \vdots \\ X_{l \times m}^H e_{l \times m} \\ \sum_{o=1}^{l \times m} Y_o^H e_o \end{bmatrix} \quad (4-43)$$

Con

$$R_k = X_k^H X_k \in \mathbb{C}^{(N_n + 1) \times (N_n + 1)}$$

$$S_k = X_k^H Y_k \in \mathbb{C}^{(N_n + 1) \times (N_d + 1)} \quad (4-44)$$

$$T_k = Y_k^H Y_k \in \mathbb{C}^{(N_d + 1) \times (N_d + 1)}$$

De igual manera como se realizó con el método p-LSCF, la forma que toma el producto  $J^H J$ , permite estimar en primera instancia los parámetros asociados al denominador ( $\alpha$ ), para luego, mediante una sustitución, determinar los parámetros restantes asociados al numerador ( $\beta$ ), reduciendo así el costo computacional que involucra invertir la matriz completa  $J^H J$ .

$$\sum_{o=1}^{l \times m} (T_o - S_o^H R_o^{-1} S_o) \delta\alpha = - \sum_{o=1}^{l \times m} (Y_o^H - S_o^H R_o^{-1} X_o^H) e_o \quad (4-45)$$

$$\delta\beta_o = -R_o^{-1} (X_o^H e_o + S_o \delta\alpha) \quad (4-46)$$

Según el esquema presentado en ( 4-38 ) y ( 4-39 ), el proceso iterativo se realiza hasta que la variación en los parámetros sea menor a una tolerancia definida por el usuario.

Debido a la naturaleza recursiva del método Gauss Newton, es necesario contar con un valor inicial para llevar a cabo el proceso. Una buena aproximación resulta estimar el set de parámetros  $\theta_0$  mediante la aplicación del método LSCF. Es más, tal como se indica en (Peeters, Van der Auweraer, Guillaume, & Leuridan, 2004) el desarrollo del método LSCF surge, en un principio, por la necesidad de contar con una estimación inicial rápida y precisa para estos valores.

Al comparar ( 4-20 ) y ( 4-36 ), se puede destacar que las funciones de costo de la versión LSCF y ML resultan muy similares entre sí. Tal como se ha indicado anteriormente, la inclusión del término relacionado a la varianza de las componentes de la función de transferencia, determina la eficiencia estadística que presenta el método ML al incorporar información relativa al ruido en las mediciones. Otra característica que se desprende al comparar estas expresiones, corresponde al caso particular en que se desprece el término relacionado a la varianza en ( 4-36 ), lo cual corresponde exactamente al estimador NLS (*Nonlinear Least Squares*) presentado en (Pintelon, Guillaume, Rolain, Schoukens, & Van Hamme, 1994).

Tal como se ha indicado en la sección 4.1, estos métodos han sido desarrollados con el objetivo de llevar a cabo el proceso de identificación modal, tomando como datos de entrada estimaciones no paramétricas para funciones de transferencia, llevadas a cabo en un entorno de análisis experimental (estimadores  $H_1$ ,  $H_2$ , etc). Esta condición asegura tener control/registro tanto de las excitaciones como de las respuestas de una estructura, permitiendo al usuario cuantificar la información relativa al ruido en las mediciones, mediante covarianzas entre el par input - output. Por el contrario, para el caso operacional, la imposibilidad de determinar con precisión las sollicitaciones, limita al usuario respecto a la determinación del parámetro relacionado a la varianza de los datos. Sin embargo, existen algunos estudios que permiten abordar de buena manera esta limitación, aunque restringiendo el uso a componentes producto de espectros de densidad de potencia, tomando en cuenta además la cualidad estacionaria de los datos (Guillaume, Hermans, & Van der Auweraer, 1999), (Parloo, Verboven, Guillaume, & Van Overmeire, 2001). Considerando lo anteriormente descrito se ha mostrado que el enfoque mediante el error residual resulta el más apropiado para el proceso de identificación modal operacional (Peeters, El-Kafafy, & Guillaume, 2012), (Peeters, El-Kafafy, & Guillaume, 2012), (Parloo E. , 2003). Bajo este enfoque, la varianza de los datos se determina mediante una suavización del error definido como la diferencia entre los datos relacionados a las funciones de transferencia de tipo operacional (espectros, funciones de transmisibilidad) y una aproximación paramétrica inicial, la que puede ser obtenida mediante un estimador determinístico (LSCF,p-LSCF, etc) o una versión del método ML que no incluya el término relacionado a las varianzas (estimador NLS).

#### **4.3.2.1 Método log-ML (logarithmic Maximum Likelihood)**

Con el afán de sobreponerse a los problemas de bajo condicionamiento que puede presentar el método NLS en zonas de baja ganancia para funciones de transferencia con amplio rango dinámico ( $\geq 100\text{dB}$ ), surge la versión logarítmica del método ML (Pintelon, Guillaume, Rolain, Schoukens, & Van Hamme, 1994). Si bien, inicialmente, este método fue concebido como uno del tipo no lineal determinístico, fácilmente se puede acondicionar para que sea estadísticamente eficiente. Para llevar a cabo esto, simplemente basta con incluir un término asociado a la varianza de los datos:

Considere el error logarítmico

$$\begin{aligned} e_o^{LOG}(\omega_f) &= \left( \log(H_o(\omega_f, \theta)) - \log(\hat{H}_o(\omega_f)) \right) \\ &= \log(H_o(\omega_f, \theta)/\hat{H}_o(\omega_f)) \end{aligned} \quad (4-47)$$

por lo tanto, de la misma forma que se realizó con los estimadores anteriores, utilizando la siguiente función de costo cuadrática:

$$l_{LOG-ML}(\theta) = \sum_{o=1}^{l \times m} \sum_{f=1}^{N_f} |\log(H_o(\omega_f, \theta)/\hat{H}_o(\omega_f))|^2 \quad (4-48)$$

El parámetro  $\theta_{LOG-ML}$  que minimiza (4-48), se determina siguiendo el esquema presentado para el método ML (4-38)-(4-39).

En caso de querer incluir la varianza de los datos, se debe considerar la siguiente aproximación:

$$\text{var}(e_o^{LOG}(\omega_f)) = \text{var}(\log(\hat{H}_o(\omega_f))) \approx \frac{\text{var}(\hat{H}_o(\omega_f))}{|\hat{H}_o(\omega_f)|^2} \quad (4-49)$$

De esta forma:

$$l_{LOG-ML}(\theta) = \sum_{o=1}^{l \times m} \sum_{f=1}^{N_f} \frac{|\log(H_o(\omega_f, \theta)/\hat{H}_o(\omega_f))|^2}{\text{var}(\hat{H}_o(\omega_f))/|\hat{H}_o(\omega_f)|^2} \quad (4-50)$$

Si siguiendo el algoritmo Newton Gauss sobre el modelo estocástico de la versión log-ML, se debe notar que el vector error, esta vez queda determinado por:

$$e(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{|\log(H_1(\omega_1, \theta)/\hat{H}_1(\omega_1))| |\hat{H}_1(\omega_f)|}{\sqrt{\text{var}(\hat{H}_1(\omega_1))}} \\ \dots \\ \frac{|\log(H_1(\omega_{N_f}, \theta)/\hat{H}_1(\omega_{N_f}))| |\hat{H}_1(\omega_{N_f})|}{\sqrt{\text{var}(\hat{H}_1(\omega_{N_f}))}} \\ \frac{|\log(H_2(\omega_1, \theta)/\hat{H}_2(\omega_1))| |\hat{H}_2(\omega_1)|}{\sqrt{\text{var}(\hat{H}_2(\omega_1))}} \\ \dots \\ \frac{|\log(H_{l \times m}(\omega_{N_f}, \theta)/\hat{H}_{l \times m}(\omega_{N_f}))| |\hat{H}_{l \times m}(\omega_{N_f})|}{\sqrt{\text{var}(\hat{H}_{l \times m}(\omega_{N_f}))}} \end{pmatrix} \quad (4-51)$$

Mientras que las componentes de la matriz  $J$  ( 4-42 ), se definen como:

$$X_o = \begin{bmatrix} \frac{\langle \Omega_1^0 \ \Omega_1^1 \ \dots \ \Omega_1^{N_n} \rangle |\hat{H}_o(\omega_1)|}{\sqrt{\text{var}(\hat{H}_o(\omega_1))} B_o(\omega_1, \theta)} \\ \frac{\langle \Omega_2^0 \ \Omega_2^1 \ \dots \ \Omega_2^{N_n} \rangle |\hat{H}_o(\omega_2)|}{\sqrt{\text{var}(\hat{H}_o(\omega_2))} B_o(\omega_2, \theta)} \\ \vdots \\ \frac{\langle \Omega_{N_f}^0 \ \Omega_{N_f}^1 \ \dots \ \Omega_{N_f}^{N_n} \rangle |\hat{H}_o(\omega_{N_f})|}{\sqrt{\text{var}(\hat{H}_o(\omega_{N_f}))} B_o(\omega_{N_f}, \theta)} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_f \times (N_n+1)}$$

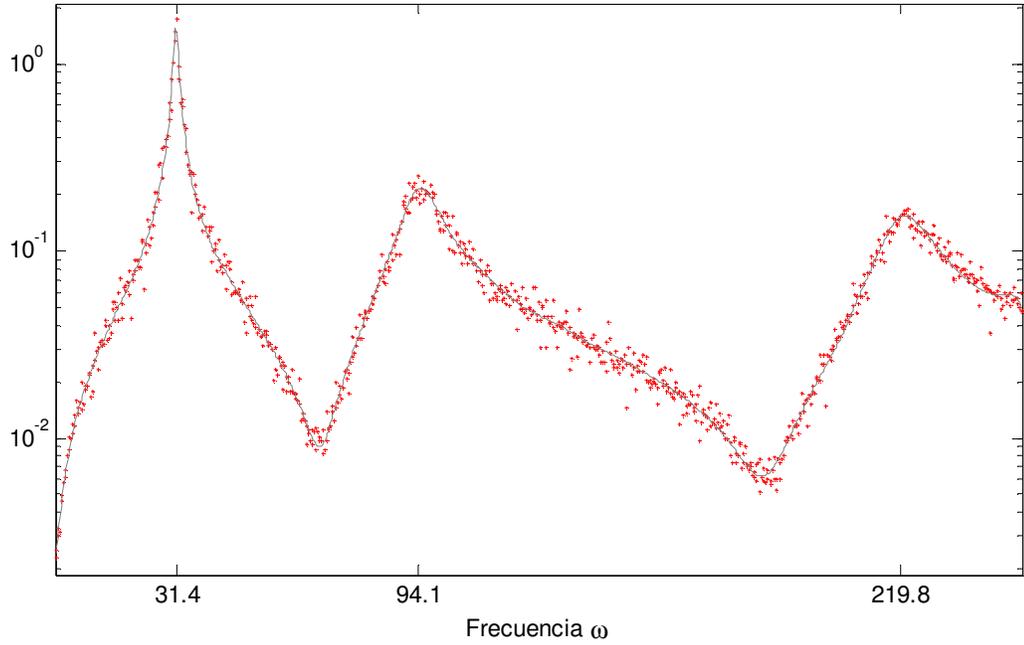
( 4-52 )

$$Y_o = \begin{bmatrix} -\frac{\langle \Omega_1^0 \ \Omega_1^1 \ \dots \ \Omega_1^{N_d} \rangle |\hat{H}_o(\omega_1)|}{\sqrt{\text{var}(\hat{H}_o(\omega_1))} A(\omega_1, \theta)} \\ -\frac{\langle \Omega_2^0 \ \Omega_2^1 \ \dots \ \Omega_2^{N_d} \rangle |\hat{H}_o(\omega_2)|}{\sqrt{\text{var}(\hat{H}_o(\omega_2))} A(\omega_2, \theta)} \\ \vdots \\ -\frac{\langle \Omega_{N_f}^0 \ \Omega_{N_f}^1 \ \dots \ \Omega_{N_f}^{N_d} \rangle |\hat{H}_o(\omega_{N_f})|}{\sqrt{\text{var}(\hat{H}_o(\omega_{N_f}))} A(\omega_{N_f}, \theta)} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_f \times (N_d+1)}$$

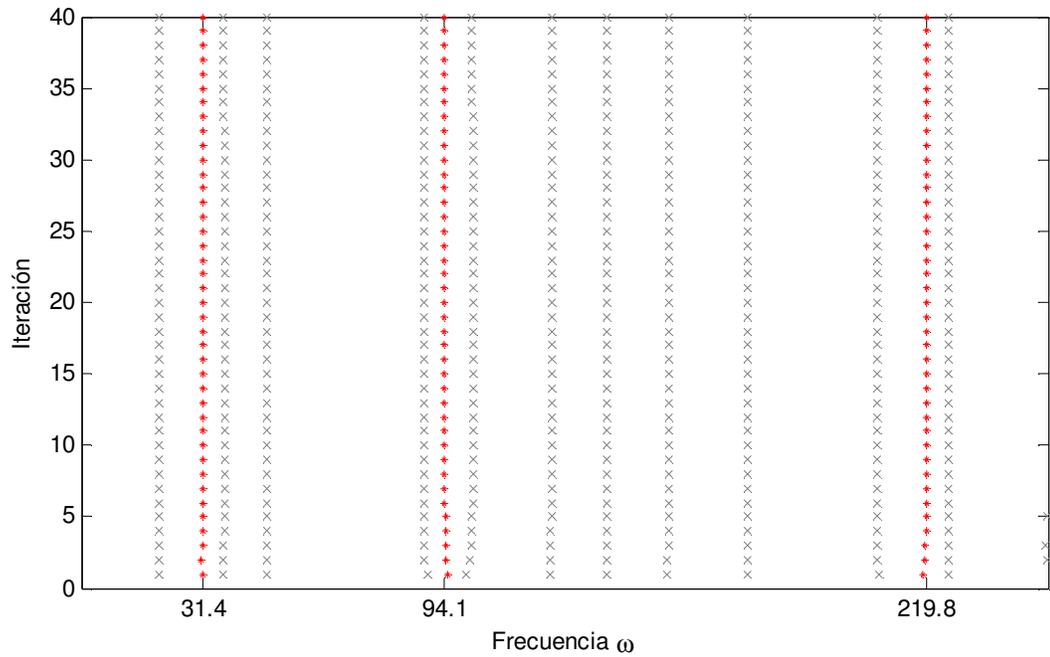
#### 4.3.2.2 Diagrama de estabilización ML

A partir de estimaciones mediante los métodos ML y log-ML, una forma alternativa al diagrama de estabilización propuesto para el método LSCF puede ser construido posicionando la parte imaginaria de los polos en el eje de las abscisas, y la iteración a la cual corresponde en el eje de las ordenadas. Considerando que para cada iteración, la estimación de polos se realiza para un orden  $N_d$  fijo, es de esperar que la cantidad de polos determinados se mantenga igual para cada una de las iteraciones, sin embargo, para poder discriminar los polos físicos del sistema, se debe tomar en cuenta que estos exhibirán una conducta más estable, lo cual se reflejará en la aparición de líneas verticales claramente demarcadas.

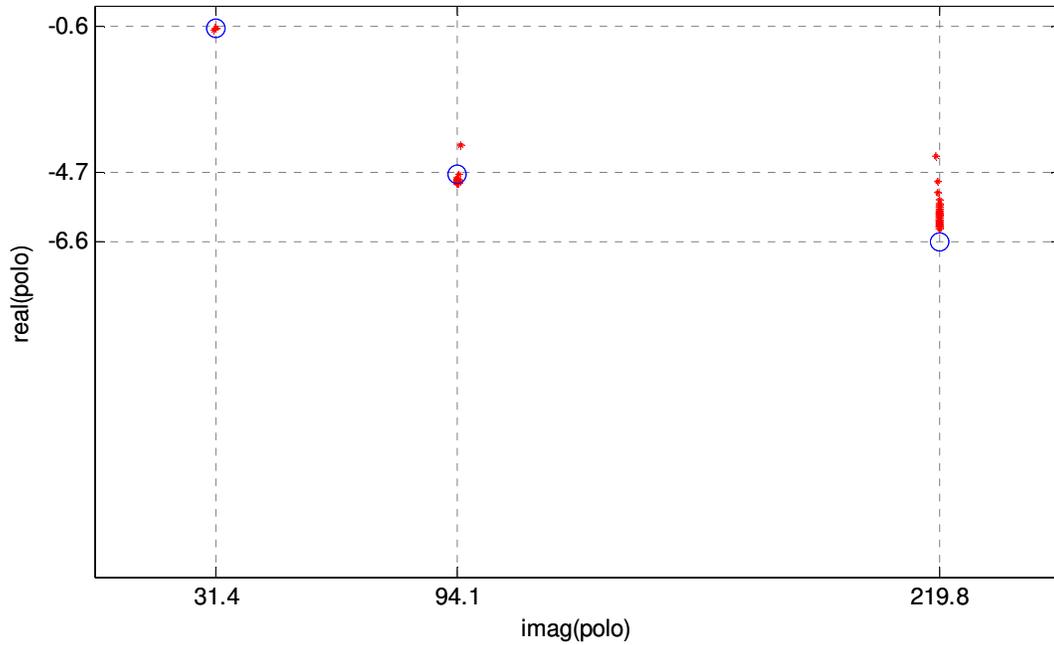
A continuación, se presenta un ejemplo con el uso del estimador log-ML (sin varianza), para la estimación de una componente de una matriz de transferencia (contaminada) con polos ( $s_1 = -0.63 + i31.41$ ), ( $s_2 = -4.71 + i94.13$ ) y ( $s_3 = -0.66 + i219.81$ ), en conjunto con el diagrama de estabilización asociado:



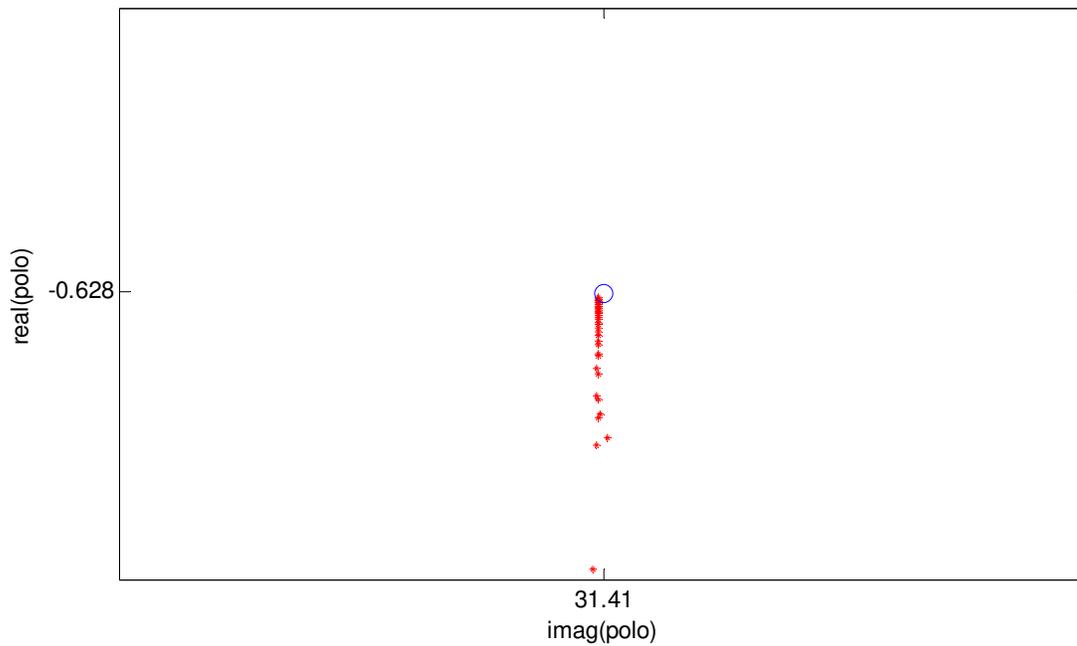
**Figura 4-6:** Ajuste de curva mediante estimación paramétrica ML-log (Orden 30).  
 (\*) Puntos función teórica, (-) curva sintetizada.



**Figura 4-7:** Diagrama de estabilización asociado.  
 (\*) Polos estables ( $\text{Re}(s) < 0$ ), (x) polos inestables



**Figura 4-8:** Distribución de polos estables.  
 (\*) Polos estables, (O) polos teóricos.



**Figura 4-9:** Distribución de polos. Zoom sobre primer polo.  
 (\*) Polos estables, (O) polo teórico.

Los resultados presentados demuestran el buen comportamiento que exhibe el estimador log-ML, en este caso, como herramienta para el ajuste de curva (recordar que no se ha añadido información relativa al ruido). Por otra parte, tal como se había indicado en la descripción de los diagramas de estabilización para estimadores tipo ML, se puede apreciar que los polos estables se exhiben de manera consistente, agrupándose en una línea perfectamente vertical, sin embargo este comportamiento tiene que ver con la convergencia del método más que la estabilidad de los polos para el orden escogido. Considerando lo anterior, se debe tener mucho cuidado con el problema de condicionamiento que pudiera generar el proceso de inversión de matrices en las expresiones ( 4-45 ) y ( 4-46 ), ya que cualquier problema de este tipo se traducirá en la interpretación errónea de un polo. Debido a esto, en caso de querer automatizar el proceso, se recomienda no utilizar diagramas de estabilización para estimadores con naturaleza recursiva (ML, log-ML y NLS).

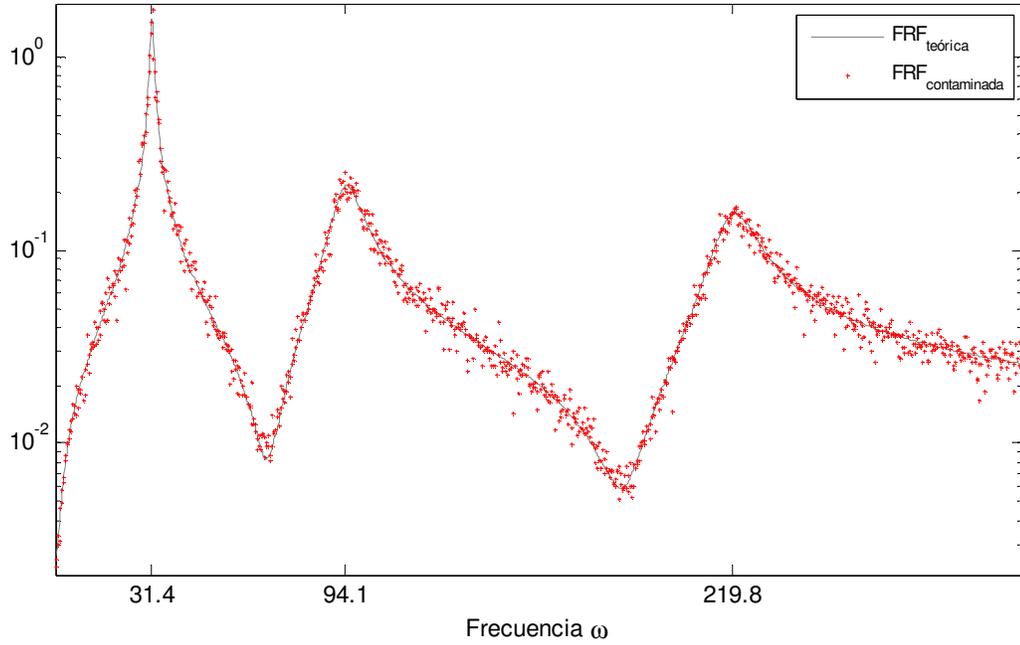
#### **4.3.3 Método p-LSCF Plus**

En un afán por recopilar lo mejor de cada estimador (p-LSCF y ML/log-ML), en (El-Kafafy, Guillaume, Peeters, Marra, & Coppotelli, 2012) y (Peeters, El-Kafafy, & Guillaume, 2012), se propone una metodología en la cual se agrupa la virtud de un estimador estadísticamente eficiente (ML), y uno que permita diagramas de estabilización lo suficientemente claros y consistentes (p-LSCF). Bajo estos requerimientos, se desarrolla el método p-LSCF Plus, el cual consiste en desarrollar el proceso de identificación a través de dos etapas, estas son:

1. Sintetizar curvas asociadas a cada componente de la matriz función de transferencia mediante cualquiera de los estimadores ML/log-ML, los cuales deberán tratar con el contenido de ruido presente en las curvas (Varianza de los datos).
2. Sobre las estimaciones paramétricas del paso anterior, con efecto de ruido atenuado, aplicar el estimador p-LSCF, y generar diagramas de estabilización.

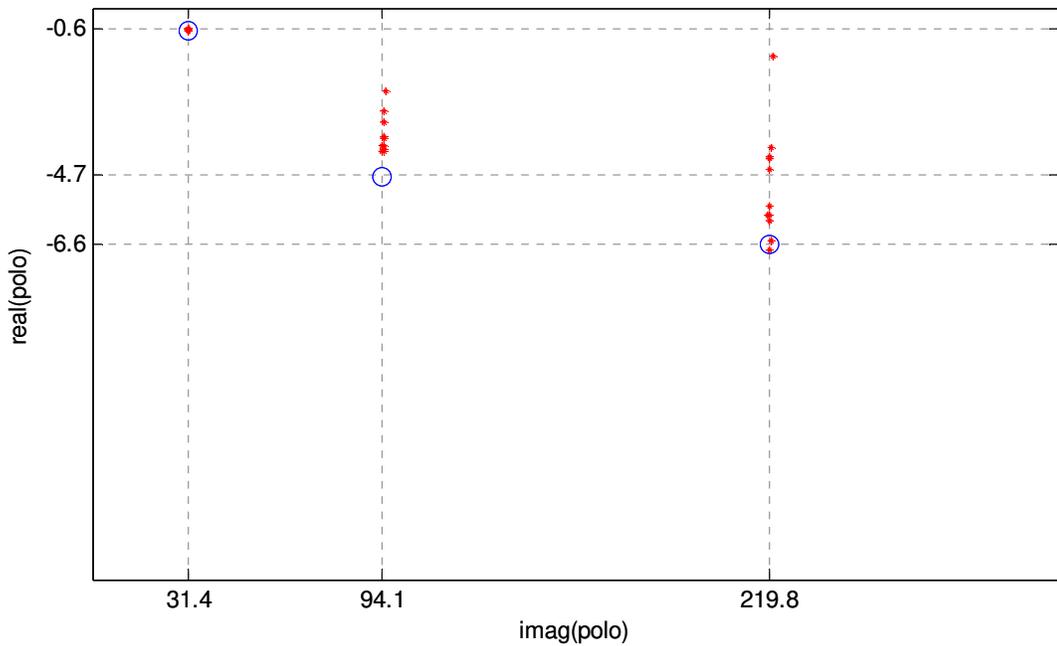
De acuerdo a resultados de las simulaciones realizadas por el equipo de investigación que elaboró este método, se destaca la eficiencia del método respecto a la estimación del amortiguamiento en curvas con alto contenido de ruido. Por otra parte, cabe señalar el menor orden necesario en la estimación para la identificación de distintos modos (paso 2), respecto a la versión original del método p-LSCF.

Para visualizar el buen desempeño de este método, considere la función de transferencia definida para los ejemplos anteriores (Figura 4-1). Para modelar un nivel de ruido que contamine esta función, se añadirá información de tal manera que en cada frecuencia ésta presente una desviación estándar del 20% de la amplitud. De acuerdo a esto, la función de transferencia contaminada resulta:

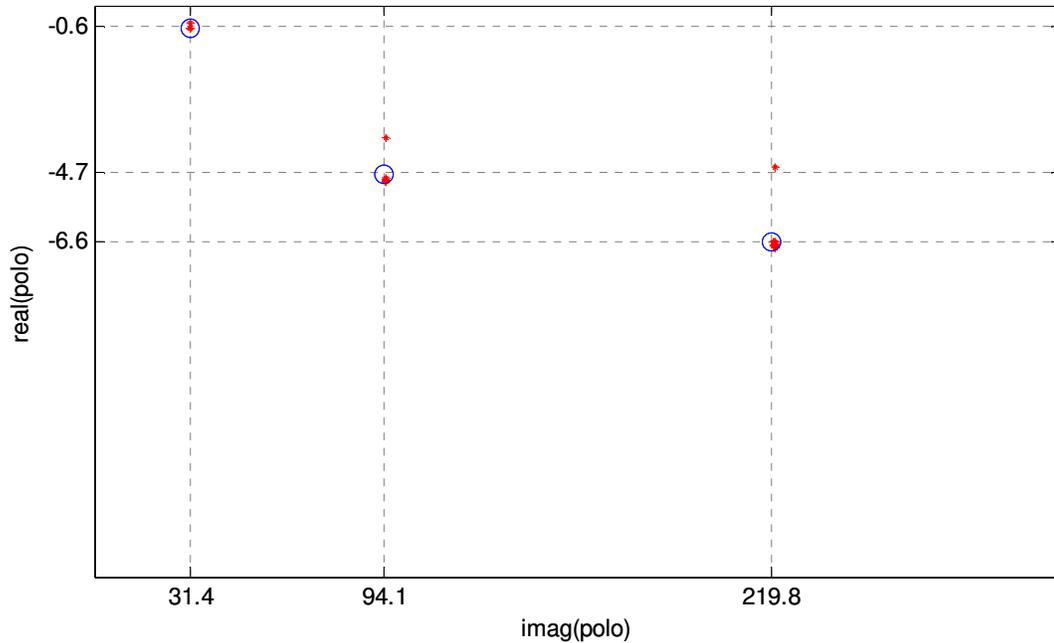


**Figura 4-10:** Adición de ruido en función de transferencia teórica.

A continuación se presenta la distribución de polos estables determinados mediante el método p-LSCF y la versión Plus respectivamente.



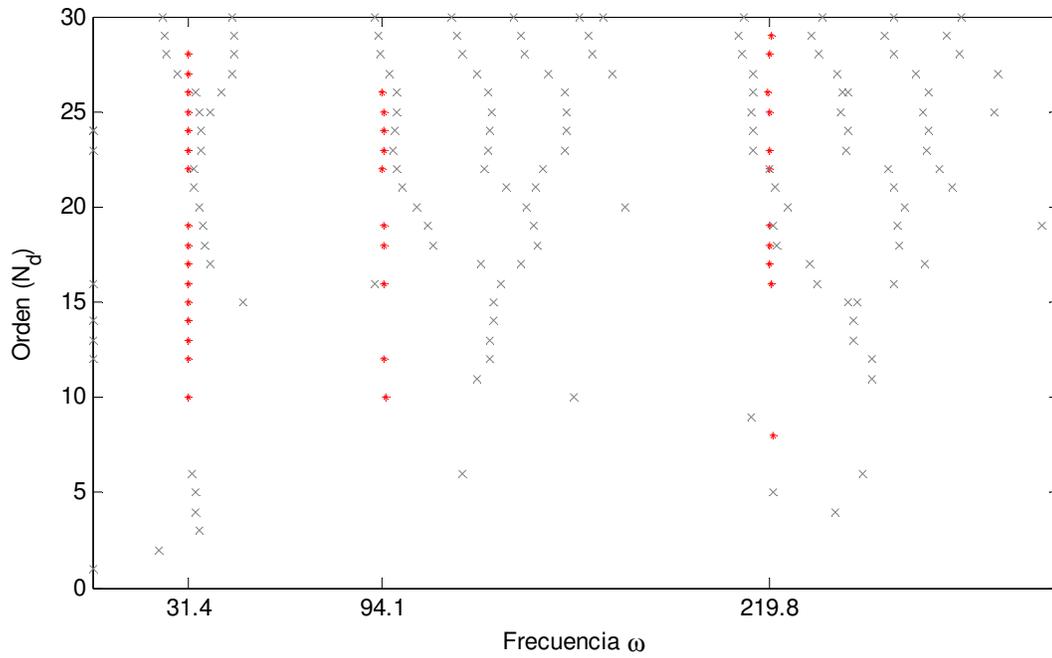
**Figura 4-11:** Distribución de polos estables, método p-LSCF.  
 (+) Polos estables, (O) polos teóricos.



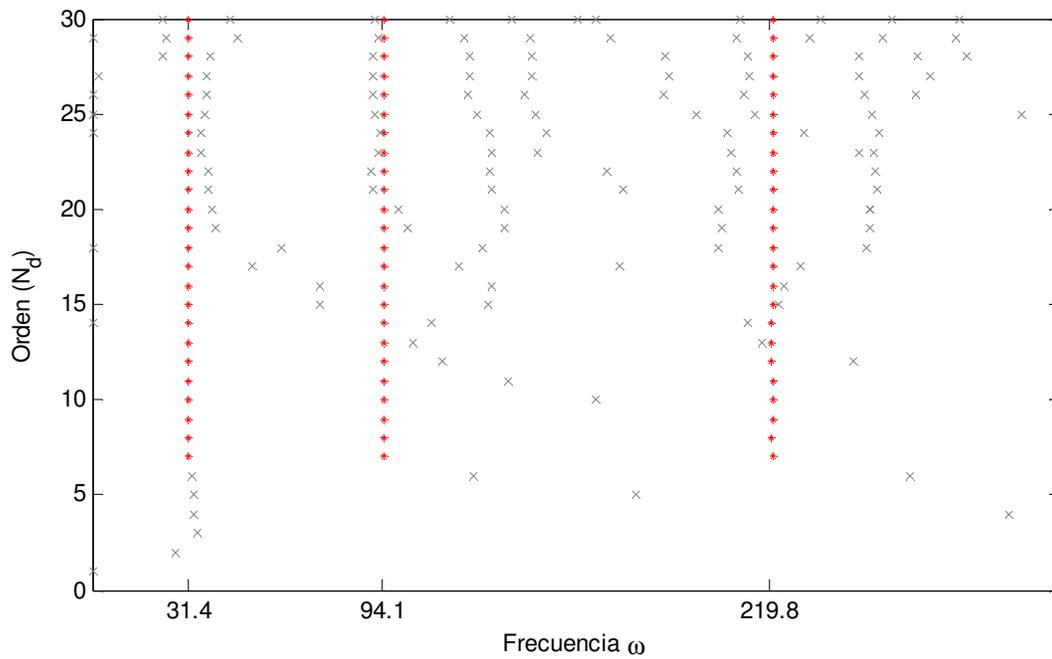
**Figura 4-12:** Distribución de polos estables, método p-LSCF Plus.  
 (+) Polos estables, (O) polos teóricos.

De acuerdo a los resultados, se puede apreciar el buen resultado que otorga la aplicación del método p-LSCF Plus. Al observar la forma en la cual se agrupan los polos estables en torno a los valores teóricos, la automatización del proceso de identificación podría llevarse a cabo fácilmente utilizando algún algoritmo de identificación de *clusters* en base a densidad de puntos, tal como el presentado en (Ester, Kriegel, Sander, & Xu, 1996).

Por otra parte, al inspeccionar los diagramas de estabilización de las alternativas contrastadas, se demuestra claramente el menor orden necesario para la correcta identificación de polos.



**Figura 4-13:** Diagrama de estabilización. Método p-LSCF.  
 (\*) Polos estables, (x) polos inestables.



**Figura 4-14** Diagrama de estabilización. Método p-LSCF plus.  
 (\*) Polos estables, (x) polos inestables.

## 4.3.4 Modelo Input/Output Multireferencial

### 4.3.4.1 Introducción

Como se ha visto en los métodos descritos hasta ahora, el proceso de identificación de propiedades modales se puede llevar a cabo mediante la minimización de diversas funciones de costo cuadrático, donde los datos de entrada corresponden a estimaciones no paramétricas de funciones de transferencia. Debido a que la eficacia de estos métodos está fuertemente ligada a la calidad que presenten los datos de entrada (niveles de ruido), por lo general las estimaciones no paramétricas están basadas en técnicas de promedios ABS (*Average based spectrum*), donde la utilización de promedios de diversos bloques permite la atenuación de componentes ajenas a los datos del sistema (ruido). A pesar de lo satisfactorio que pueda resultar esta técnica, ciertos problemas pueden suscitarse en los siguientes casos:

- La secuencia de datos disponible sea reducida.
- Efectos transientes sean capturados en los datos.

Para el primer caso, la aplicación de técnicas ABS se puede traducir en la obtención de espectros con una pobre cantidad de líneas espectrales, con lo cual se podrían omitir datos importantes acerca del comportamiento dinámico. En particular, resultaría imposible distinguir dos modos próximos y con un ancho de lóbulo inferior a la resolución de frecuencias.

Para el segundo caso, la incorporación de efectos transientes, o peor aún, una condición estocástica de los datos, como podría ser el caso para la respuesta a una excitación ambiental, inducirá el efecto leakage en los resultados. Como es sabido, la aplicación de diversas ventanas (Hanning, Hamming, Kaiser, etc) pueden reducir este efecto, sin embargo, el uso de éstas afecta notablemente la validez de los resultados, en particular los valores de amortiguamiento. Considerando estos antecedentes, a continuación se propone un método que permite lidiar con estos problemas sin comprometer la calidad de los resultados.

### 4.3.4.2 Método

A continuación se detalla el modelo Input/Output (IO), originalmente confeccionado para funciones de transferencia, el que también puede ser implementado para sintetizar funciones de transmisibilidad (Guillaume, De Troyer, Deckers, De Sitter, & Devriendt, 2008).

Para comenzar, considere el siguiente modelo paramétrico de común denominador (escalar):

$$H_{oi}(\Omega_f, \theta) = \frac{B_{oi}(\Omega_f, \theta)}{A(\Omega_f, \theta)} \quad (4-53)$$

Utilizando el par Input/Output y el modelo descrito en ( 4-53 ), se puede establecer que para la salida  $o$ , se tiene:

$$\epsilon_o(\omega_f, \theta) = \langle H_o(\Omega_f, \theta) \rangle \{ F(\omega_f) \} - X_o(\omega_f) \quad (4-54)$$

Donde  $F(\omega_f) \in \mathbb{C}^{m \times 1}$  corresponde al vector de entrada calculado en el dominio de las frecuencias (Fourier), y  $X_o(\omega_f)$  la respuesta en la salida  $o$ , evaluada en la línea espectral  $f$  como resultado de las  $m$  entradas. El vector fila  $\langle H_o(\Omega_f, \theta) \rangle \in \mathbb{C}^{1 \times m}$  corresponde a la fila  $o$ -ésima del modelo presentado en ( 4-53 ).

Alternativamente:

$$\epsilon_o(\omega_f, \theta) = \sum_{i=1}^m \frac{B_{oi}(\Omega_f, \theta)}{A(\Omega_f, \theta)} F_i(\omega_f) - X_o(\omega_f) \quad (4-55)$$

De la misma forma como se presentó en el método p-LSCF, esta expresión puede tomar una forma lineal para la determinación de los parámetros, además de incluir una función de peso para diferenciar la calidad de los canales (Levy, 1959). Multiplicando en ( 4-55 ) por el polinomio asociado al denominador, se tiene:

$$\epsilon_o(\omega_f, \theta) = w_o(\omega_f) \left( \sum_{i=1}^m B_{oi}(\Omega_f, \theta) F_i(\omega_f) - A(\Omega_f, \theta) X_o(\omega_f) \right) \quad (4-56)$$

Debido a la similitud que presentan las expresiones ( 4-21 ) y ( 4-56 ), se desprende que toda la estructura presentada en el desarrollo del estimador LSCF resulta válida para el estimador IO, esto es, resolución de ecuaciones normales para la estimación de coeficientes relativos al denominador y proceso de sustitución para la determinación de coeficientes asociados al numerador ( 4-29 )-( 4-30 ). Debido a esto, en esta sección sólo se incluirán explícitamente las matrices que definen el Jacobiano del problema.

Considerando el error en la salida  $o$ , evaluado en cada una de las frecuencias:

$$E_o(\theta) = \begin{bmatrix} \langle \epsilon_o(\omega_1, \theta) \rangle \\ \langle \epsilon_o(\omega_2, \theta) \rangle \\ \dots \\ \langle \epsilon_o(\omega_{N_f}, \theta) \rangle \end{bmatrix} = (\Gamma_o \quad \Phi_o) \begin{pmatrix} \beta_o \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N_f \times 1} \quad (4-57)$$

Donde

$$\Gamma_o = \begin{bmatrix} \Omega_{o1} F_1(\omega_1) & \Omega_{o1} F_2(\omega_1) & \Omega_{o1} F_3(\omega_1) & \dots & \Omega_{o1} F_m(\omega_1) \\ \Omega_{o2} F_1(\omega_2) & \Omega_{o2} F_2(\omega_2) & \Omega_{o2} F_3(\omega_2) & \dots & \Omega_{o2} F_m(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Omega_{oN_f} F_1(\omega_{N_f}) & \Omega_{oN_f} F_2(\omega_{N_f}) & \Omega_{oN_f} F_3(\omega_{N_f}) & \dots & \Omega_{oN_f} F_m(\omega_{N_f}) \end{bmatrix} \quad (4-58)$$

$$\Omega_{ok} = [w_{ok} \langle \Omega_k^0 \quad \Omega_k^1 \quad \dots \quad \Omega_k^{N_n} \rangle] \quad (4-59)$$

$$\Omega_k = e^{-i\omega_k T_s}$$

$N_n$ : Orden asociado al numerador en el modelo ( 4-53 ).

Notar que la formulación presentada para  $\Gamma_o$  ( 4-59 ) supone un proceso de estimación de la matriz de transferencia basado en el ajuste de polinomios para cada componente de manera individual, tal como fue presentado el estimador LSCF.

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} -w_{o1} \langle \Omega_1^0 & \Omega_1^1 & \dots & \Omega_1^{N_d} \rangle X_o(\omega_1) \\ -w_{o2} \langle \Omega_2^0 & \Omega_2^1 & \dots & \Omega_2^{N_d} \rangle X_o(\omega_2) \\ \vdots \\ -w_{oN_f} \langle \Omega_{N_f}^0 & \Omega_{N_f}^1 & \dots & \Omega_{N_f}^{N_d} \rangle X_o(\omega_{N_f}) \end{bmatrix} \quad (4-60)$$

$N_d$ : Orden asociado al denominador en el modelo ( 4-53 ).

De acuerdo a como se han expresado ( 4-58 ) y ( 4-60 ), los parámetros a determinar se ordenan de la siguiente forma:

$$\beta_o = [b_{o10}, b_{o11}, \dots, b_{o1N_n}, b_{o20}, b_{o21}, \dots, b_{o2N_n}, \dots, b_{omN_n}]^T \quad (4-61)$$

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{N_d}]^T$$

Tal como se mencionó anteriormente, las expresiones ( 4-58 ) y ( 4-60 ), son suficientes para determinar el jacobiano del problema de mínimos cuadrados.

$$J = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 & \dots & 0 & \Phi_1 \\ 0 & \Gamma_2 & \dots & 0 & \Phi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Gamma_l & \Phi_l \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{lN_f \times (l(N_n+1)m + (N_d+1))} \quad (4-62)$$

Siguiendo la misma metodología presentada para los parámetros del método p-LSCF, la solución al modelo IO se determina utilizando las ecuaciones normales presentadas en ( 4-29 )-( 4-30 ), reemplazando el par  $X_o - Y_o$  por  $\Gamma_o - \Phi_o$ , respectivamente.

#### 4.3.4.3 Compensación de efectos transientes y leakage para el modelo IO

En la presentación del modelo IO, no se ha incluido ningún supuesto acerca de la naturaleza de los datos, por lo que estos podrían ser previamente procesados mediante diversas ventanas para compensar posibles efectos asociados a leakage. Sin embargo, tal como se ha mencionado anteriormente, esta intervención podría afectar los valores de amortiguamiento en el proceso de identificación modal. Afortunadamente, para este tipo de estimador existe una forma de cuantificar este efecto e incorporarlo en las estimaciones de los parámetros, sin

la necesidad de utilizar ventanas, permitiendo así obtener resultados más precisos (Pintelon, Schoukens, & Vandersteen, 1997).

A continuación se detalla el procedimiento que demuestra que basta con la inclusión de un polinomio 'transiente' en la expresión ( 4-56 ) para eliminar errores asociados a leakage.

Considere la siguiente ecuación en diferencias para un sistema lineal invariante LTI (*Linear time-invariant System*) definido en tiempo discreto (Pintelon & Schoukens, 2012).

$$\sum_{n=0}^{N_d} a_n x(t - nT_s) = \sum_{m=0}^{N_n} b_m f(t - mT_s) \quad (4-63)$$

$$t = -\infty, \dots, -T_s, 0, T_s, \dots, \infty$$

Además, considere que los datos están completamente definidos (conocidos y discretos) en el intervalo  $[0, (N - 1)T_s]$ :

Aplicando la transformada Z unilateral sobre ( 4-63 ):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{N_d} a_n x(kT_s - nT_s) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{N_n} b_m f(kT_s - mT_s) z^{-k}$$

$$\sum_{n=0}^{N_d} a_n \sum_{k=0}^{\infty} x((k - n)T_s) z^{-k} = \sum_{m=0}^{N_n} b_m \sum_{k=0}^{\infty} f((k - m)T_s) z^{-k} \quad (4-64)$$

$$\sum_{n=0}^{N_d} a_n z^{-n} (X(z) + X_1(z)) = \sum_{m=0}^{N_n} b_m z^{-m} (F(z) + F_1(z))$$

Notar que para el último paso se ha utilizado la propiedad de desplazamiento temporal (Oppenheim, Schaffer, & Buck, 2010):

$$\sum_{k=0}^{\infty} y[k - no] z^{-k} = \sum_{l=-no}^{\infty} y[l] z^{-(l+no)}$$

$$= \sum_{l=-no}^{-1} y[l] z^{-(l+no)} + \sum_{l=0}^{\infty} y[l] z^{-(l+no)} \quad (4-65)$$

$$= z^{-no} \left( \sum_{l=0}^{\infty} y[l] z^{-l} + \sum_{l=1}^{no} y[-l] z^l \right)$$

$$= z^{-no} (Y(z) + Y_1(z))$$

Reordenando la última expresión de ( 4-64 ), se tiene:

$$\left( \sum_{n=0}^{N_d} a_n z^{-n} \right) X(z) = \left( \sum_{m=0}^{N_n} b_m z^{-m} \right) F(z) + T_1(z^{-1}) \quad (4-66)$$

Con:

$$\begin{aligned} T_1(z^{-1}) &= \sum_{m=0}^{N_n} b_m z^{-m} F_1(z) - \sum_{n=0}^{N_d} a_n z^{-n} X_1(z) \\ &= \sum_{m=0}^{N_n} b_m z^{-m} \left( \sum_{l=1}^m f(-lT_s) z^l \right) - \sum_{n=0}^{N_d} a_n z^{-n} \left( \sum_{l=1}^n x(-lT_s) z^l \right) \\ &= \sum_{m=1}^{N_n} \sum_{l=1}^m b_m f(-lT_s) z^{l-m} - \sum_{n=1}^{N_d} \sum_{l=1}^n a_n x(-lT_s) z^{l-n} \end{aligned} \quad (4-67)$$

Al observar el desarrollo de  $T_1(z^{-1})$ , se desprende que este polinomio depende de la característica que presenten los datos en 'tiempos pasados', previos al registro de datos ( $t = 0$ ), es decir, corresponden a las condiciones iniciales del problema.

Por otra parte, para poder evaluar la expresión ( 4-66 ) en el círculo unitario (Transformada discreta Fourier, DFT), se deben descontar los datos pertenecientes al intervalo  $[NT_s, \infty[$ . Para resolver este problema, se multiplica la expresión ( 4-63 ) por  $z^{-k}$ , y luego se realiza una sumatoria sobre  $k = N, N + 1, \dots, \infty$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=N}^{\infty} \sum_{n=0}^{N_d} a_n x((k-n)T_s) z^{-k} &= \sum_{k=N}^{\infty} \sum_{m=0}^{N_n} b_m f((k-m)T_s) z^{-k} \\ \sum_{n=0}^{N_d} a_n \sum_{k=N}^{\infty} x((k-n)T_s) z^{-k} &= \sum_{m=0}^{N_n} b_m \sum_{k=N}^{\infty} f((k-m)T_s) z^{-k} \\ \sum_{n=0}^{N_d} a_n z^{-n} (\tilde{X}(z) + z^{-N} X_2(z)) &= \sum_{m=0}^{N_n} b_m z^{-m} (\tilde{F}(z) + z^{-N} F_2(z)) \end{aligned} \quad (4-68)$$

para justificar el último paso, considere:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=N}^{\infty} y[k - no]z^{-k} &= \sum_{l=N-no}^{\infty} y[l]z^{-(l+no)} \\
&= \sum_{l=N-no}^{N-1} y[l]z^{-(l+no)} + \sum_{l=N}^{\infty} y[l]z^{-(l+no)} \\
&= z^{-no} \left( \sum_{l=N}^{\infty} y[l]z^{-l} + \sum_{l=N-no}^{N-1} y[l]z^{-l} \right) \\
&= z^{-no} \left( \sum_{l=N}^{\infty} y[l]z^{-l} + \sum_{j=-no}^{-1} y[j + N]z^{-(j+N)} \right) \\
&= z^{-no} \left( \sum_{l=N}^{\infty} y[l]z^{-l} + z^{-N} \sum_{j=1}^{no} y[N - j]z^j \right)
\end{aligned} \tag{4-69}$$

Reordenando los últimos términos en la expresión (4-68):

$$\left( \sum_{n=0}^{N_d} a_n z^{-n} \right) \tilde{X}(z) = \left( \sum_{m=0}^{N_n} b_m z^{-m} \right) \tilde{F}(z) + z^{-N} T_2(z^{-1}) \tag{4-70}$$

Con:

$$\begin{aligned}
z^{-N} T_2(z^{-1}) &= \sum_{m=0}^{N_n} b_m z^{-m} z^{-N} F_2(z) - \sum_{n=0}^{N_d} a_n z^{-n} z^{-N} X_2(z) \\
&= \sum_{m=0}^{N_n} b_m z^{-m} z^{-N} \sum_{k=1}^m f[(N - k)T_s] z^k - \sum_{n=0}^{N_d} a_n z^{-n} z^{-N} \sum_{k=1}^n x[(N - k)T_s] z^k \\
&= z^{-N} \left( \sum_{m=1}^{N_n} \sum_{k=1}^m b_m f[(N - k)T_s] z^{k-m} - \sum_{n=1}^{N_d} \sum_{k=1}^n a_n x[(N - k)T_s] z^{k-n} \right)
\end{aligned} \tag{4-71}$$

Al observar el desarrollo final de la expresión ( 4-71 ), se destaca la dependencia con los datos finales del proceso, es decir,  $T_2(z^{-1})$  corresponde a la influencia de las condiciones finales.

Para poder hacer uso de las transformadas discretas de Fourier, basta con restar las expresiones ( 4-66 ) y ( 4-70 ), y posteriormente evaluar a lo largo del círculo unitario en las frecuencias de Fourier , de esta forma:

$$\left( \sum_{n=0}^{N_d} a_n z^{-n} \right) \sum_{k=0}^{N-1} x[kT_s] z^{-k} = \left( \sum_{m=0}^{N_n} b_m z^{-m} \right) \sum_{k=0}^{N-1} f[kT_s] z^{-k} + T(z^{-1}) \quad (4-72)$$

Evaluando en  $w_k$ :

$$\left( \sum_{n=0}^{N_d} a_n (e^{i\omega_k T_s})^{-n} \right) X_{DFT} = \left( \sum_{m=0}^{N_n} b_m (e^{i\omega_k T_s})^{-m} \right) F_{DFT} + T(e^{-i\omega_k T_s}) \quad (4-73)$$

Con

$T(e^{-i\omega_k T_s})$  un polinomio con base  $e^{-i\omega_k T_s}$  y orden  $n_t = \max(N_d - 1, N_n - 1)$ .  
 $X_{DFT}$ ;  $F_{DFT}$ : Transformadas **discretas** de Fourier de respuestas y excitaciones respectivamente.

De acuerdo a lo indicado en (Pintelon, Schoukens, & Vandersteen, 1997), el efecto de la inclusión del polinomio  $T(e^{-i\omega_k T_s})$  en la evaluación de ( 4-73 ), se puede interpretar como si todo el transiente ocurrido en  $t \geq NT_s$ , causado por las condiciones finales, ocurriera en  $t \geq 0$ , fenómeno al cual denominan *time aliasing*.

Al comparar la expresión ( 4-55 ) correspondiente a un sistema SISO (*Single Input/Single Output*), y la formulación del error que permite determinar la solución a los coeficientes polinomiales de ( 4-73 ), se tiene:

$$\epsilon_o^{IO}(\omega_f, \theta) = \frac{B(\Omega_f, \theta)}{A(\Omega_f, \theta)} F_i(\omega_f) - X_o(\omega_f) \quad (4-74)$$

$$\epsilon_o^{IO-T}(\omega_f, \theta) = \frac{B(\Omega_f, \theta)}{A(\Omega_f, \theta)} F(\omega_f) + \frac{T(\Omega_f, \theta)}{A(\Omega_f, \theta)} - X_o(\omega_f)$$

Al observar ( 4-74 ) se desprende que la incorporación del polinomio asociado a los efectos transientes, puede ser entendido como un modelo IO, para el cual el vector fuerza (en el dominio de Fourier) se extiende agregando una componente igual a la unidad para cada una de las frecuencias en las cuales se define  $F(\omega_f)$ , así:

$$\epsilon_o^{IO-T}(\omega_f, \theta) = \sum_{i=1}^{m+1} \frac{B_{oi}(\Omega_f, \theta)}{A(\Omega_f, \theta)} F_i(\omega_f) - X_o(\omega_f) \quad (4-75)$$

$$B_{o,m+1}(\Omega_f, \theta) = T(\Omega_f, \theta)$$

$$F_{m+1}(\omega_f) = 1$$

De esta forma, el modelo IO resulta fácilmente adaptable para poder incluir los efectos transientes.

Para visualizar de mejor manera las características de este estimador, a continuación se presenta un ejemplo donde se podrán comparar las estimaciones de la matriz de transferencia mediante la estimación no paramétrica  $H_1$  y el resultado producto de estimaciones paramétricas utilizando los modelos IO.

Considere el siguiente modelo estructural:

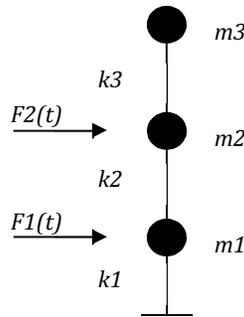


Figura 4-15: Estructura 2-DOF.

El modelo numérico propuesto consta de 3 grados de libertad, con masas, rigideces y valores de amortiguamiento crítico ( $\beta$ ), según se indican en la Tabla 4-1:

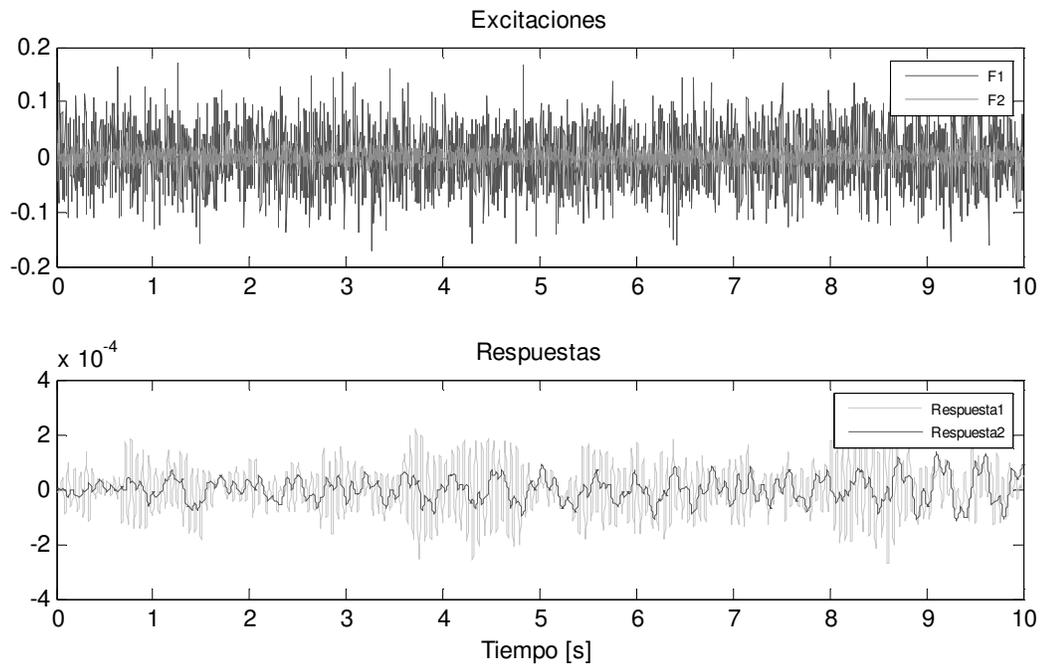
**Tabla 4-1: Propiedades Mecánicas**

Elemento	Masa	Rigidez	$\beta$ [%]
N1	0.1	600	2
N2	0.5	400	2
N3	0.5	500	2

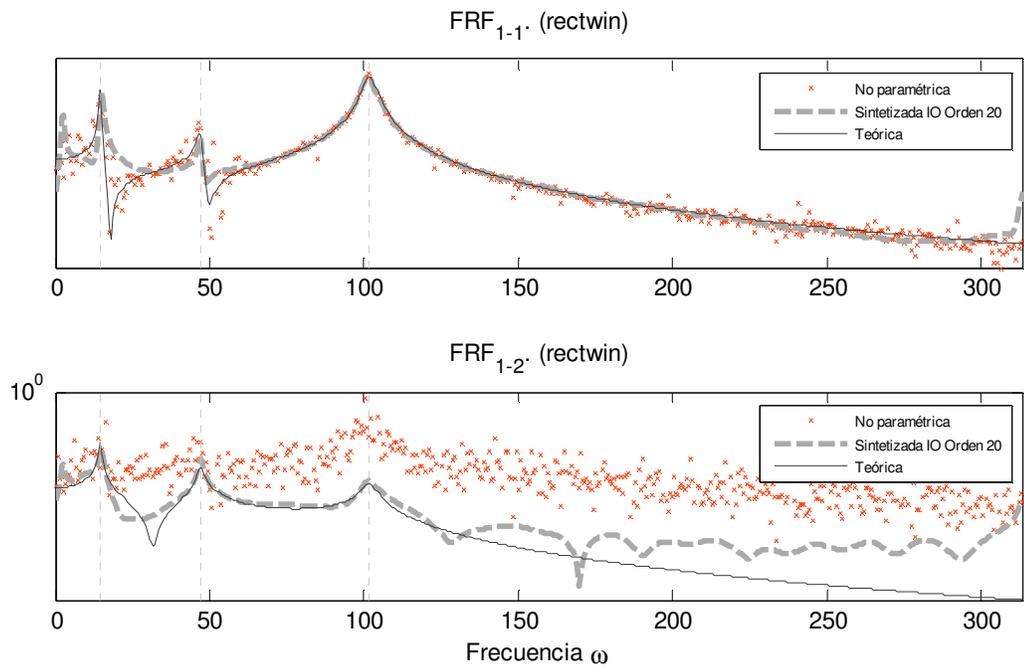
Con tal de poder verificar claramente las capacidades de los estimadores IO, las excitaciones  $F_1$  y  $F_2$  han sido modeladas como ruido blanco con desviación estándar 5 y 1% respectivamente (Figura 4-16). Por otra parte, para poder comparar las estimaciones con los valores teóricos de funciones de transferencia, la frecuencia de muestreo se ha fijado en 350Hz.

Para asegurar una componente importante de leakage, se utilizarán sólo los 10 primeros segundos del registro de respuestas. Finalmente, la estimación no paramétrica H1, se realiza utilizando todos los puntos disponibles (3500 puntos), lo cual significa que no involucra un proceso de promedio sobre ventanas sucesivas.

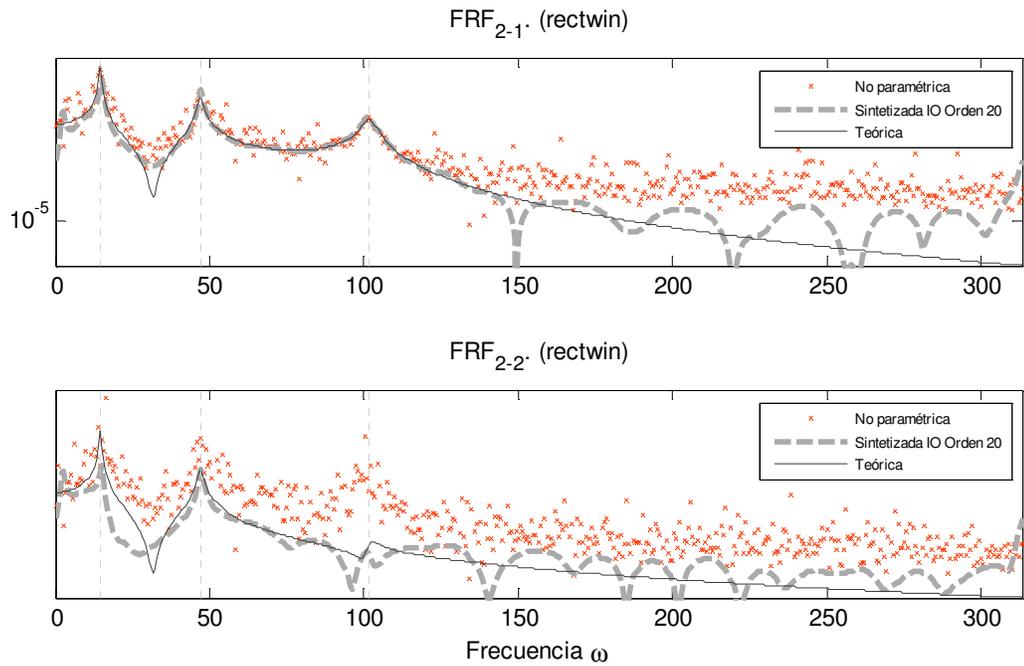
A continuación se muestran los resultados producto de las estimaciones mediante el estimador no paramétrico H1 y la aplicación del modelo IO en su versión original, así como la que incluye efectos transientes.



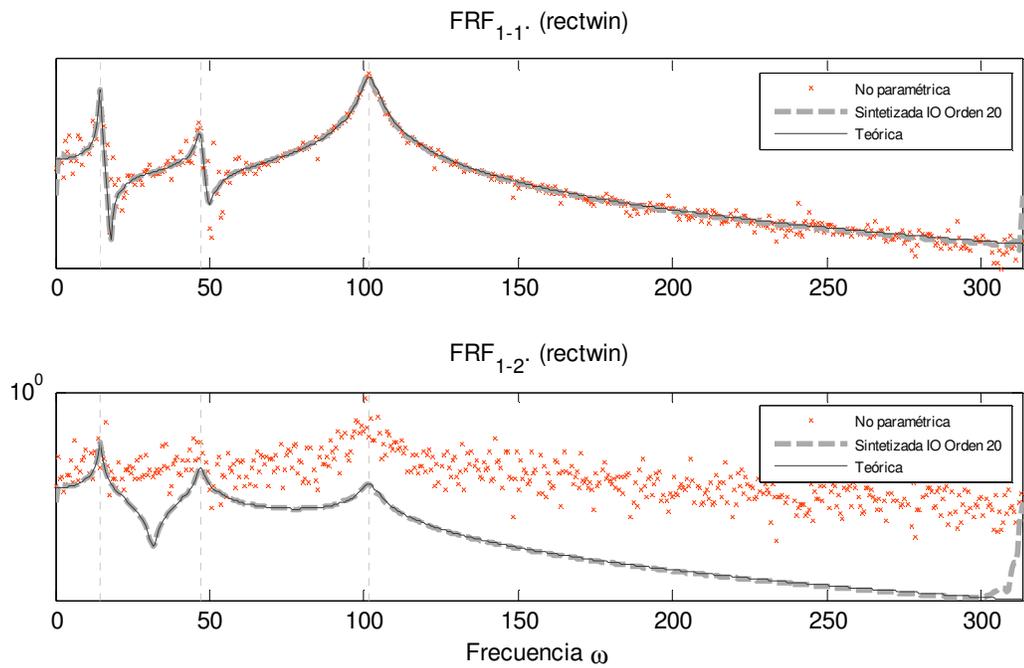
**Figura 4-16:** Simulación de excitaciones y respuestas registradas en la estructura.



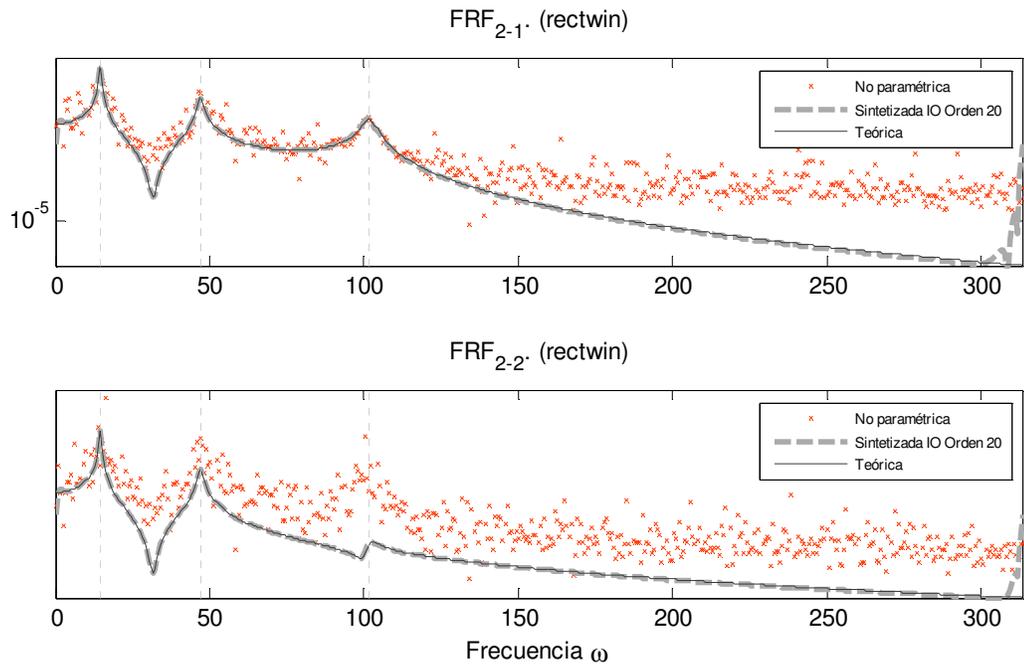
**Figura 4-17:** Comparación estimación paramétrica IO y estimación no paramétrica mediante  $H_1$ . No se incluyen efectos transientes en modelo IO.



**Figura 4-18:** Comparación estimación paramétrica IO y estimación no paramétrica mediante  $H_1$ . No se incluyen efectos transientes en modelo IO.



**Figura 4-19:** Comparación estimación paramétrica IO y estimación no paramétrica mediante  $H_1$ . Se incluyen efectos transientes en modelo IO



**Figura 4-20:** Comparación estimación paramétrica IO y estimación no paramétrica mediante  $H_1$ . Se incluyen efectos transientes en modelo IO

Como lo demuestran los resultados, se puede apreciar el buen comportamiento que presenta el estimador IO. En primera instancia, se puede ver que al no incluir los efectos transientes (Figura 4-17 y Figura 4-18), el estimador es capaz de sintetizar curvas suaves con sus máximos globales ubicados en las proximidades de las frecuencias amortiguadas del sistema (líneas segmentadas). Como se ha señalado en la introducción, el hecho de no exigir promedios de bloques sucesivos, necesario para atenuar los niveles de ruido aleatorio (metodología *ABS*), permite que las curvas sintetizadas mantengan la resolución original de los datos de entrada necesarios para implementar el método. Por otra parte, al comparar los resultados del modelo que incluye efectos transientes con los valores teóricos de las funciones de transferencia (Figura 4-19 y Figura 4-20), se puede ver que la inclusión del polinomio  $T(\Omega_f, \theta)$  permite disminuir el error de sesgo propio del fenómeno de leakage sin la necesidad de aumentar el orden de la estimación respecto a la versión que no incorpora estos efectos. Lo satisfactorio de esta estimación, aún en ausencia de ventanas tipo hanning, hamming, kaiser, etc; resulta promisorio para la obtención precisa para valores de amortiguamientos en estructuras civiles.

Cabe destacar que el modelo IO ha sido introducido de tal forma que sólo podría ser utilizado en un entorno de análisis modal experimental, es decir, teniendo claramente definidos como datos de entrada el par excitación - respuesta. No obstante, la forma en la cual opera este estimador respecto a la manipulación de sus datos de entrada, permite que también sea útil para la generación de curvas de transmisibilidad, otorgándole la cualidad de ser un método apropiado para llevar a cabo un análisis modal operacional. Para comprender de mejor manera esta afirmación, considere los siguientes vectores conformados por las respuestas del ejemplo de la Figura 4-15:

$$y_{nr}(\omega) = \begin{Bmatrix} y_1(\omega) \\ y_2(\omega) \end{Bmatrix} \quad y \quad y_r(\omega) = \begin{Bmatrix} y_3(\omega) \\ y_4(\omega) \end{Bmatrix} \quad (4-76)$$

Definiendo la siguiente matriz de transmisibilidad (Maia, Silva, & Ribeiro, 2001):

$$T(\omega) = \begin{bmatrix} T_{13}(\omega) & T_{14}(\omega) \\ T_{23}(\omega) & T_{24}(\omega) \end{bmatrix} \quad (4-77)$$

Se tiene:

$$y_{nr}(\omega) = T(\omega)y_r(\omega) \quad (4-78)$$

Esta última expresión muestra cómo es posible relacionar mediante una matriz de transmisibilidad un cierto número de respuestas con algún vector definido arbitrariamente como referencial conformado por otro set de registros. Notar que para el caso en que sólo una respuesta sea definida como referencial ( $y_r$ ), las componentes de la matriz  $T(\omega)$  corresponderán exactamente a las transmisibilidades escalares definidas en el Capítulo 2. Esta forma de relacionar respuestas en un sistema, define el concepto de transmisibilidad multivariable (Devriendt, De Sitter, & Guillaume, 2010), el que será estudiado con mayor detalle en el capítulo siguiente.

Se puede observar que el resultado de la expresión ( 4-78 ) presenta la misma estructura del análisis modal experimental que relaciona un vector de salidas con otro de entrada.

$$Y(\omega) = H(\omega)F(\omega) \quad (4-79)$$

De acuerdo a esta observación, el lector podrá entender que el proceso de generación de curvas de transmisibilidad mediante el estimador IO, puede ser llevado a cabo sin problemas haciendo el siguiente cambio de variables:

$$\{X(\omega)\} = \{y_{nr}(\omega)\} \quad y \quad \{F(\omega)\} = \{y_r(\omega)\} \quad (4-80)$$

#### 4.3.5 Modelos LMFD (*Left Matrix Description*)

A continuación se presentan dos estimadores concebidos como LMFD, los cuales resultan útiles en la implementación del método que será descrito en el capítulo siguiente. Considerando el detalle relativo al proceso de obtención de parámetros asociados a coeficientes matriciales relacionados a numerador y denominador, desarrollado anteriormente en la sección 4.3.1, en lo que sigue sólo se presentan las matrices que permiten generar el problema de ecuaciones normales. Mayor detalle puede ser encontrado en (Caugberghe B. , 2004) y (Zhang, Tamura, Wang, & Sun, 2011)

##### 4.3.5.1 Estimador LMFD tipo IO

Utilizando el par Input/Output  $F$ - $X_o$ , se tiene:

$$\epsilon_o(\omega_f, \theta) = \langle H_o(\Omega_f, \theta) \rangle \{F(\omega_f)\} - X_o(\omega_f) \quad (4-81)$$

o alternativamente, empleando un modelo *LMFD*:

$$\epsilon_o(\omega_f, \theta) = A(\Omega_f, \theta)^{-1} B(\Omega_f, \theta) \{F(\omega_f)\} - X_o(\omega_f) \quad (4-82)$$

linealizando la expresión anterior:

$$\epsilon_o(\omega_f, \theta) = A(\Omega_f, \theta) X_o(\omega_f) - B(\Omega_f, \theta) \{F(\omega_f)\} \quad (4-83)$$

Considerando el error de la componente  $O$  para cada una de las líneas frecuenciales:

$$E_o(\theta) = \begin{bmatrix} \langle \epsilon_o(\omega_1, \theta) \rangle \\ \langle \epsilon_o(\omega_2, \theta) \rangle \\ \dots \\ \langle \epsilon_o(\omega_{N_f}, \theta) \rangle \end{bmatrix} = (\Gamma_o \quad \Phi_o) \begin{pmatrix} \bar{\beta}_o \\ \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N_f \times N_i} \quad (4-84)$$

Donde:

$$\bar{\beta}_o = \begin{bmatrix} B_0^T \\ \vdots \\ B_{N_n}^T \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{\alpha} = \begin{bmatrix} A_0^T \\ \vdots \\ A_{N_d}^T \end{bmatrix} \quad (4-85)$$

Mientras que  $\Gamma_o$  y  $\Phi_o$  quedan definidas por:

$$\Gamma_o = \begin{bmatrix} -\langle \Omega_1^0 & \Omega_1^1 & \dots & \Omega_1^{N_n} \rangle \otimes F^T(\omega_1) \\ -\langle \Omega_2^0 & \Omega_2^1 & \dots & \Omega_2^{N_n} \rangle \otimes F^T(\omega_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\langle \Omega_{N_f}^0 & \Omega_{N_f}^1 & \dots & \Omega_{N_f}^{N_n} \rangle \otimes F^T(\omega_{N_f}) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_f \times N_i(N_n+1)}$$

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} \langle \Omega_1^0 & \Omega_1^1 & \dots & \Omega_1^{N_n} \rangle \otimes X_o^T(\omega_1) \\ \langle \Omega_2^0 & \Omega_2^1 & \dots & \Omega_2^{N_n} \rangle \otimes X_o^T(\omega_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \Omega_{N_f}^0 & \Omega_{N_f}^1 & \dots & \Omega_{N_f}^{N_n} \rangle \otimes X_o^T(\omega_{N_f}) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_f \times N_o(N_n+1)}$$

$\otimes$ : Operador producto de Kronecker.

matrices que definen completamente el problema de ecuaciones normales descrito anteriormente. Notar que de seguir los pasos descritos en la sección 4.3.1, los resultados corresponderán a los coeficientes matriciales transpuestos ( 4-85 ), por lo que para obtener correctamente los polinomios que describen el modelo de fracciones matriciales, éstos deberán ser corregidos mediante una transposición. De igual forma a lo mencionado en la sección 4.3.4.3, la inclusión de un término que considere efectos transientes permitirá corregir el fenómeno de *leakage* en las estimaciones.

#### 4.3.5.2 Estimador LMFD para datos FRF

De manera análoga a lo presentado anteriormente, las ecuaciones que permiten desarrollar las ecuaciones normales, que posteriormente facilitan la extracción de coeficientes polinomiales del modelo matricial son:

$$\Gamma_o = \begin{bmatrix} -\langle \Omega_1^0 & \Omega_1^1 & \dots & \Omega_1^{N_n} \rangle \otimes I_{N_i} \\ -\langle \Omega_2^0 & \Omega_2^1 & \dots & \Omega_2^{N_n} \rangle \otimes I_{N_i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\langle \Omega_{N_f}^0 & \Omega_{N_f}^1 & \dots & \Omega_{N_f}^{N_n} \rangle \otimes I_{N_i} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_i N_f \times N_i(N_n+1)}$$

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} \langle \Omega_1^0 & \Omega_1^1 & \dots & \Omega_1^{N_n} \rangle \otimes H^T(\omega_1) \\ \langle \Omega_2^0 & \Omega_2^1 & \dots & \Omega_2^{N_n} \rangle \otimes H^T(\omega_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \Omega_{N_f}^0 & \Omega_{N_f}^1 & \dots & \Omega_{N_f}^{N_n} \rangle \otimes H^T(\omega_{N_f}) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_i N_f \times N_o(N_n+1)}$$

Con H, estimación no paramétrica de la función de transferencia empleada para la parametrización mediante el modelo LMFD.

De igual forma a lo indicado en la sección anterior, en la etapa final, cada uno de los coeficientes obtenidos deberá ser transpuesto.

## Capítulo 5

### Transmisibilidad Multivariable

#### 5.1 Introducción

En el Capítulo 2 se ha definido el concepto de transmisibilidad escalar como herramienta válida para la generación de curvas que presenten un comportamiento similar a las funciones de transferencia, las cuales pueden ser generadas, simplemente, haciendo uso de las respuestas que pueda presentar una estructura sujeta a una excitación cualquiera, y de la cual no es necesario conocer a priori sus características (análisis modal operacional, *OMA*). La cualidad de pseudo funciones de transferencia que presentan las curvas generadas a partir de funciones de transmisibilidad queda reflejada al observar que éstas exhiben sus máximos coincidentemente con los polos de la estructura.

En el capítulo 4 se han presentado diversas metodologías que permiten una estimación paramétrica sobre curvas de transferencia/transmisibilidad y que permiten la obtención numérica de los polos del sistema en estudio. Sin embargo, ha quedado demostrado que la calidad en la identificación de propiedades modales queda fuertemente determinada por los niveles de ruido que puedan presentar las curvas. Debe quedar claro que el contenido de ruido que presenten las curvas de transmisibilidad puede ser originado por agentes externos como podría ser el ruido ambiental, o errores asociados tanto al sistema de adquisición de datos o procesamiento de señales.

En la sección 2.4.1, se ha determinado que las curvas generadas a partir de funciones de transmisibilidad resultarán completamente independientes del contenido espectral del input sólo si se tiene una excitación aplicada en un único punto, o si múltiples excitaciones son aplicadas en perfecta fase sobre la estructura, para cada una de las condiciones de carga empleadas en el método. El lector comprenderá que lograr este escenario resulta extremadamente difícil, si no imposible, para cualquier estructura en operación. Para solucionar este requisito, en (Devriendt, De Sitter, & Guillaume, 2010) se propuso por primera vez una forma de abordar este problema, es decir, generar pseudo curvas de transmisibilidad, mediante un enfoque multivariable, de tal forma que resultaran independientes del contenido espectral del input, sin embargo, la principal desventaja de este método radica en la necesidad de un excesivo número de condiciones de carga (por lo menos 3), lo cual resulta más complejo aún para estructuras civiles. Con el objetivo de relajar esta última condición, se ha propuesto una nueva metodología que formaliza el concepto de

transmisibilidad multivariable (Weijtjens, de Sitter, Devriendt, & Guillaume, 2014), el cual se detallará en la sección siguiente.

## 5.2 Método

A continuación, se presentan las bases del método propuesto:

Considere un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI) con salidas  $y(s) \in \mathbb{C}^{n_o \times 1}$  sometido a  $n_i$  entradas desconocidas, las que conforman el vector  $u(s) \in \mathbb{C}^{n_i \times 1}$ , con función de transferencia  $H(s)$ , satisfaciendo la relación entrada-salida:

$$y(s) = H(s)u(s) \quad (5-1)$$

Asuma además que el sistema presenta amortiguamiento proporcional, de tal forma que la función de transferencia queda determinada modalmente según (Heylen, Lammens, & Sas, 2005):

$$H(s) = \sum_{m=1}^{n_\lambda} \frac{\Phi_m \Psi_m^T}{(s - \lambda_m)} + \frac{\Phi_m^* \Psi_m^H}{(s - \lambda_m^*)} \quad (5-2)$$

Con  $\Phi_m \in \mathbb{C}^{n_o \times 1}$  y  $\Psi_m \in \mathbb{C}^{n_i \times 1}$ . Notar que en un entorno de análisis modal operacional resulta imposible determinar los vectores  $\Psi_m$ , ya que se asume desconocida la excitación.

Considere que el vector de entrada,  $u(s)$ , es resultado de la combinación lineal de  $n_r \leq n_i$  fuentes no correlacionadas  $\mu_r(s)$  y es capaz de excitar todos los modos en la banda de frecuencia de interés:

$$u(s) = [f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_{n_r}] \begin{Bmatrix} \mu_1(s) \\ \mu_2(s) \\ \vdots \\ \mu_{n_r}(s) \end{Bmatrix} = F\mu(s) \quad (5-3)$$

Donde la combinación lineal independiente de  $n_r$  vectores  $f_r \in \mathbb{C}^{n_i \times 1}$  describe la distribución espacial de las fuentes no correlacionadas sobre los puntos de aplicación de las sollicitaciones en la estructura. El número de fuentes no correlacionadas se asume conocido, el número de salidas ( $n_o$ ) estrictamente mayor que  $n_r$ .

Para definir funciones de transmisibilidad multivariable, el vector de salida se divide en dos grupos. El primer grupo con  $n_r$  componentes se denominará como salidas de referencia  $y_R(s)$ , mientras que las restantes ( $n_o - n_r$ ) > 1, serán denominadas como no-referenciales  $y_L(s)$ . De esta forma:

$$y(s) = \begin{Bmatrix} y_L(s) \\ y_R(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_L(s) \\ H_R(s) \end{bmatrix} u(s) = H(s)u(s) \quad (5-4)$$

Con  $H_L(s) \in \mathbb{C}^{(n_o - n_r) \times n_i}$ ,  $H_R(s) \in \mathbb{C}^{n_r \times n_i}$  las filas de  $H(s)$  que relacionan respectivamente a las salidas  $y_L(s)$  y  $y_R(s)$  con  $u(s)$ .

De acuerdo a (Maia, Silva, & Ribeiro, 2001), se define la transmisibilidad:

$$y_L(s) = T(s)y_R(s) \quad (5-5)$$

Combinando ( 5-2 ) y ( 5-3 ) es posible escribir:

$$y_L(s) = H_L(s)F\mu(s) \quad \text{y} \quad y_R(s) = H_R(s)F\mu(s) \quad (5-6)$$

Asumiendo invertible el producto  $(H_R(s)F)$ , es posible eliminar la componente relacionada a las fuentes no correlacionadas:

$$y_L(s) = (H_L(s)F(H_R(s)F)^{-1})y_R(s) \quad (5-7)$$

Con lo cual se verifica fácilmente que la matriz de transmisibilidad multivariable resulta totalmente independiente del contenido espectral del input  $\mu(s)$ , incluso en caso de disponer de multiples cargas no correlacionadas distribuidas sobre la estructura:

$$T(s) = H_L(s)F(H_R(s)F)^{-1} \quad (5-8)$$

Al considerar un sistema invariante en el tiempo, cualquier cambio en la matriz de transmisibilidad, a través del tiempo, estará asociado únicamente a algún cambio en la matriz asociada a la distribución espacial de las fuentes (las propiedades del sistema  $H(s)$  no varían).

Debido a que el método está basado en la manipulación de funciones de transmisibilidad definidas para distintas combinaciones de carga, las que deben converger al mismo valor sólo cuando sean evaluadas en algún polo del sistema, el autor propone como condición necesaria la siguiente afirmación de tal forma de asegurar condiciones de carga lo suficientemente distintas:

- La intersección entre los espacios vectoriales  $C_l(s)$ , definidos por todas las columnas del producto  $H(s)F_l$ , y para cada condición de carga  $l$ , debe ser vacía para todo  $s \neq \lambda_m$

Para la obtención de propiedades modales, en primer lugar, se propone realizar una estimación paramétrica de las funciones de transmisibilidad para cada condición de carga  $l$ . Al comparar las formas ( 5-5 ) y ( 4-55 ), el lector podrá identificar que es posible realizar una estimación tipo IO, tomando como input  $F(\omega)$  la componente referencial  $y_R(s)$ , y  $X_o(\omega)$  las salidas no referenciales  $y_L(s)$ . Notar que este tipo de estimadores resultan los más apropiados ya que permiten corregir los efectos de leakage en la estimación. A pesar de que el desarrollo propuesto por el autor considera una estimación mediante una forma LMFD (*Left matrix fraction description*), el método de común denominador (sección 4.3.4.3) puede ser adaptado fácilmente para poder ser implementado en este capítulo.

Considerando la descomposición LMFD sobre una matriz de transmisibilidad definida para una condición de carga  $l$ , se tiene:

$$T_l(s) = D_l^{-1}(s)N_l(s) \quad (5-9)$$

Con  $D(s)$  y  $N(s)$ , denominador y numerador del modelo paramétrico respectivamente.

Combinando ( 5-8 ) y ( 5-9 ):

$$D_l^{-1}(s)N_l(s) = H_L(s)F_l(H_R(s)F_l)^{-1} \quad (5-10)$$

$$N_l(s)H_R(s)F_l = D_lH_L(s)F_l \quad (5-11)$$

Ordenando matricialmente la última expresión:

$$[D_l(s) \quad -N_l(s)] \begin{bmatrix} H_L(s) \\ H_R(s) \end{bmatrix} F_l = 0 \quad (5-12)$$

Haciendo uso del modelo modal presentado en ( 5-2 ) y tomando el límite sobre la expresión ( 5-12 ) para  $s$  aproximándose a algún polo  $\lambda_m$  en la banda de interés, se tiene:

$$\lim_{s \rightarrow \lambda_m} (s - \lambda_m) [D_l(s) \quad -N_l(s)] \begin{bmatrix} H_L(s) \\ H_R(s) \end{bmatrix} F_l = 0 \quad (5-13)$$

$$\left( \lim_{s \rightarrow \lambda_m} [D_l(s) \quad -N_l(s)] \right) \Phi_m \Psi_m^T F_l = 0$$

Al observar ( 5-13 ) se descarta como solución  $\Psi_m^T F_l = (\Psi_m^T F_l)^* = (\Psi_m^H F_l) = 0$ , ya que en caso de ser cierto, violaría el supuesto que indica que todos los modos en la banda de interés resultan excitados. Por lo tanto, ( 5-13 ) se reduce a :

$$[D_l(\lambda_m) \quad -N_l(\lambda_m)] \Phi_m = 0 \quad (5-14)$$

$$\forall m = 1, 2 \dots n_\lambda \quad \text{y} \quad \forall l = 1, 2 \dots n_l$$

Asumiendo que el orden utilizado en la estimación paramétrica de cada función de transmisibilidad corresponde a  $n$  (igual para numerador y denominador), la expresión ( 5-14 ) puede ser escrita en función de los coeficientes empleados en la estimación, lo que finalmente permite la estimación de polos, así como formas modales:

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^n A_{k,1} e^{-i\omega T_s k} & , & - \sum_{k=0}^n B_{k,1} e^{-i\omega T_s k} \\ \sum_{k=0}^n A_{k,2} e^{-i\omega T_s k} & , & - \sum_{k=0}^n B_{k,2} e^{-i\omega T_s k} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=0}^n A_{k,n_l} e^{-i\omega T_s k} & , & - \sum_{k=0}^n B_{k,n_l} e^{-i\omega T_s k} \end{bmatrix} \Phi_m = 0 \quad (5-15)$$

Con  $A_k \in \mathbb{C}^{(n_o-n_r) \times (n_o-n_r)}$  y  $B_k \in \mathbb{C}^{(n_o-n_r) \times n_r}$ , coeficientes matriciales de la estimación paramétrica, asociados al denominador y numerador respectivamente.

Notar que la estimación paramétrica descrita en la expresión ( 5-15 ) está definida para una evaluación discreta en el espacio de las frecuencias producto de utilizar la transformada Z, por lo tanto, para evaluar en los polos basta con hacer  $s = \lambda_m = i\omega$ , resultando:

$$Y(\lambda_m)\Phi_m = \left( \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} A_{k,1} & -B_{k,1} \\ A_{k,2} & -B_{k,2} \\ \vdots & \vdots \\ A_{k,n_l} & -B_{k,n_l} \end{bmatrix} (e^{-\lambda_m T_s})^k \right) \Phi_m = 0 \quad (5-16)$$

Al observar cuidadosamente la expresión ( 5-16 ), se puede identificar que la obtención de los parámetros modales se reduce a resolver un problema polinomial de valores propios.

$$\left( \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \right) x_\lambda = 0 \quad (5-17)$$

De igual forma que con los métodos presentados en el Capítulo 4, una forma sencilla de confeccionar diagramas de estabilización consiste en evaluar la expresión ( 5-16 ) para diversos ordenes sucesivos ( $n$ ), y posicionar los polos obtenidos a partir de ( 5-17 ), lo que finalmente permitirá detectar fácilmente los polos estables del sistema.

Por otra parte, sabiendo que la estructura que poseen los coeficientes polinomiales  $A_{k,l}$  y  $B_{k,l}$ , es tal que la matriz  $Y(\lambda_m)$  presenta  $n_l(n_o - n_r)$  filas y  $n_o$  columnas, se deduce que la condición necesaria que asegure una solución única al sistema es tal que:

$$n_l(n_o - n_r) \geq n_o \quad (5-18)$$

De donde se desprende que el número de condiciones de carga necesarias para emplear el método debe satisfacer la siguiente relación:

$$n_l \geq \frac{n_o}{(n_o - n_r)} \quad (5-19)$$

Tal como ha sido destacado anteriormente, se debe notar que la formulación paramétrica asumida en el desarrollo del método obedece a una forma *Left Matrix Fraction Description*. No obstante, realizando algunos ajustes menores, se puede ver que la formulación IO presentada en el capítulo anterior (*common denominator*) también resulta apropiada para el método presentado en esta sección. A continuación se detallan tres pasos necesarios para poder emplear el método descrito:

1. Realizar una estimación paramétrica utilizando el método IO
2. Posteriormente a la obtención de los coeficientes matriciales, el usuario deberá reordenar los distintos vectores  $\beta_o$  ( 4-61 ) de tal forma de generar los coeficientes  $B_k$  ( 5-16 ). Esto se logra de la siguiente manera:

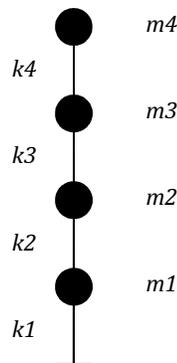
$$B_k = \begin{bmatrix} \beta_{11k} & \beta_{12k} & \cdots & \beta_{1n_rk} \\ \beta_{21k} & \beta_{22k} & \cdots & \beta_{2n_rk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{(n_o-n_r)1k} & \beta_{(n_o-n_r)2k} & \cdots & \beta_{(n_o-n_r)n_rk} \end{bmatrix} \quad (5-20)$$

3. Adicionalmente, las componentes escalares del vector  $\alpha$  ( 4-61 ) deberán ser ajustadas para lograr los valores  $A_k$  ( 5-16 ). Esto se puede resolver fácilmente tomando una matriz identidad y ponderarla por cada elemento de  $\alpha$ , de esta forma:

$$A_k = \alpha_k I_{(n_o-n_r)} \quad (5-21)$$

Para apreciar de mejor manera el desempeño del método, a continuación se presenta una breve simulación numérica.

Considere el siguiente sistema de 4 grados de libertad:



**Figura 5-1:** Estructura 4-DOF.

La estructura presentada en la Figura 5-1 se ha escogido de tal forma que permita simular el comportamiento de un poste metálico de 3m con sección transversal tubular con diámetro exterior 5 pulg y espesor 5mm. La matriz de amortiguamiento se ha modelado de tal forma que la estructura presente en todos sus modos un amortiguamiento modal de 1%.

Para simplificar la simulación numérica, la estructura ha sido discretizada considerando 4 grados de libertad traslacionales repartidos de manera uniforme a lo largo de esta, distribuyendo la masa total de la estructura en estos puntos de acuerdo a la cantidad de elementos que llegan a cada nodo. Las respuestas han sido muestreadas utilizando una tasa de 200Hz durante 120 segundos.

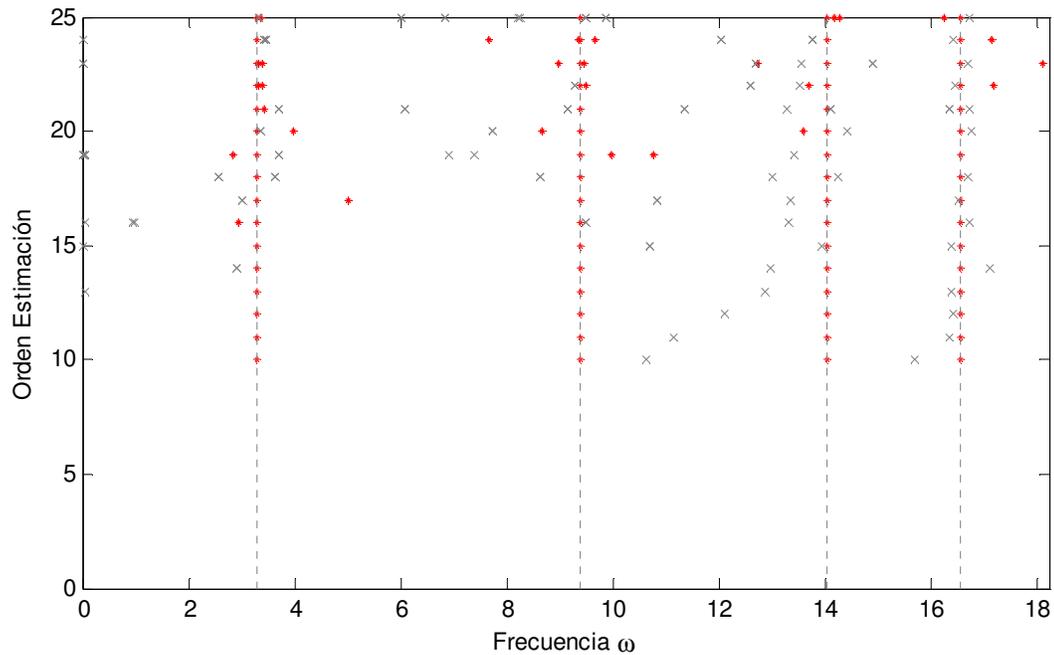
Para el estudio del método, se ha supuesto que la estructura es sometida por dos fuentes no correlacionadas ( $n_r = 2$ ), las cuales han sido modeladas como ruido blanco, y aplicadas según las matrices de distribución  $F_1$  y  $F_2$  ( 5-23 ). Definida la cantidad de fuentes, se han escogido como referencias los nodos 1 y 4 ( $y_R$ ), mientras que los nodos 2 y 3 definen el vector de respuestas no referenciales ( $y_L$ ). De acuerdo a esta elección, el número de condiciones de cargas necesario para implementar el método resulta:

$$n_l \geq \frac{n_o}{(n_o - n_r)} = \frac{4}{4 - 2} = 2 \quad (5-22)$$

De tal forma de generar cada una de las condiciones de carga, las matrices de distribución espacial ( $F$ ), se han definido de tal forma de que éstas resulten totalmente independientes:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-23)$$

Considerando los supuestos mencionados anteriormente, a continuación se presentan los resultados de la aplicación del método:



**Figura 5-2:** Diagrama de estabilización.  
 (\*) Polos estables, (x) polos inestables.

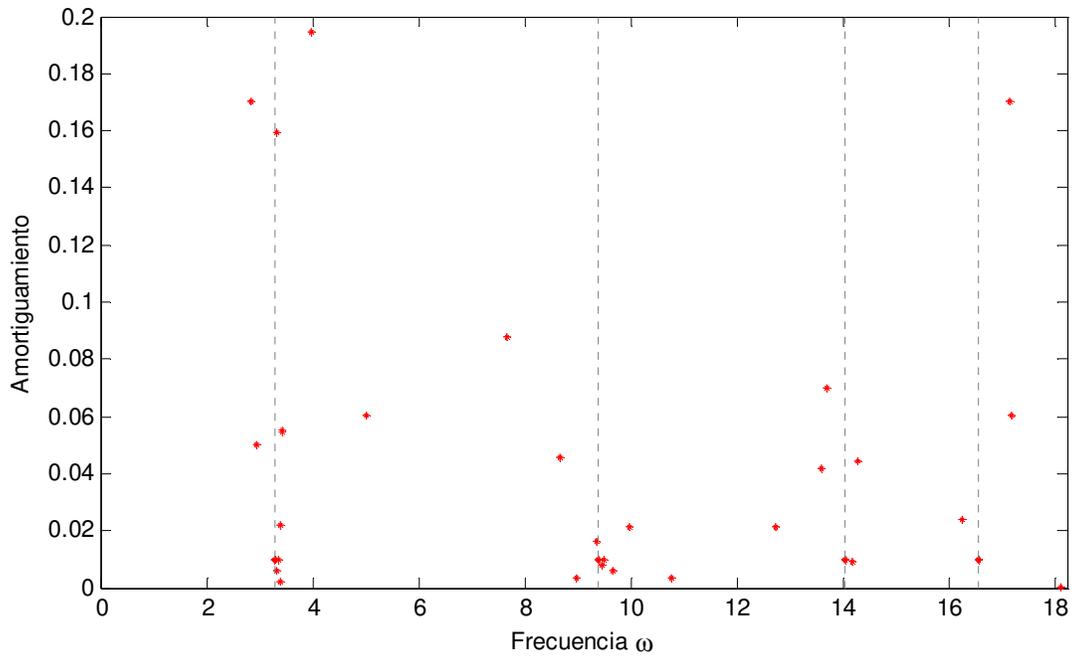


Figura 5-3: Distribución de polos estables.

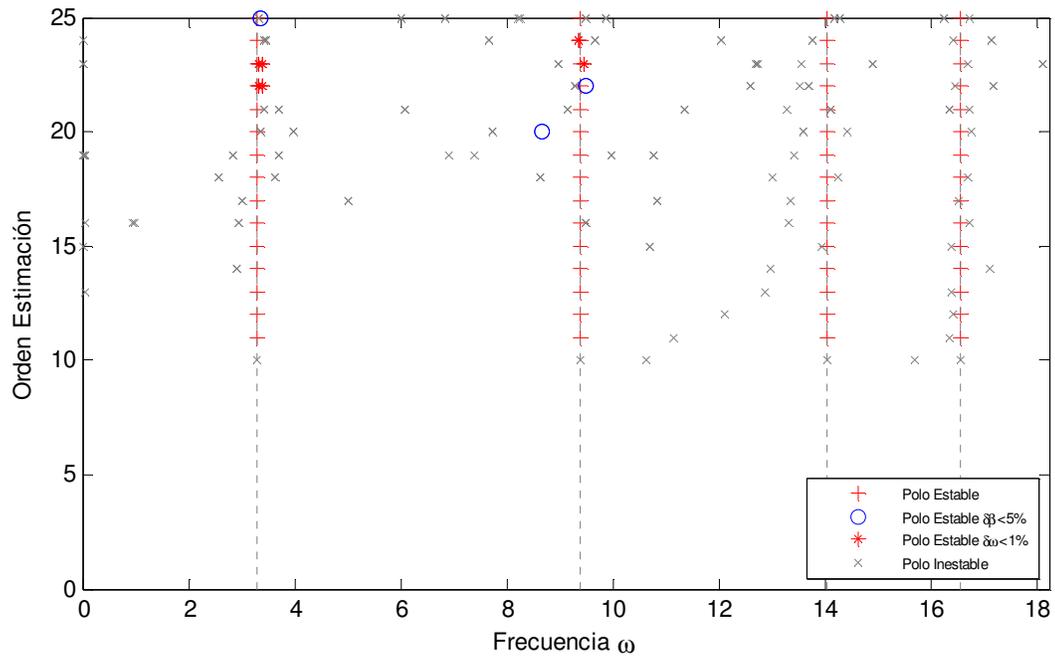
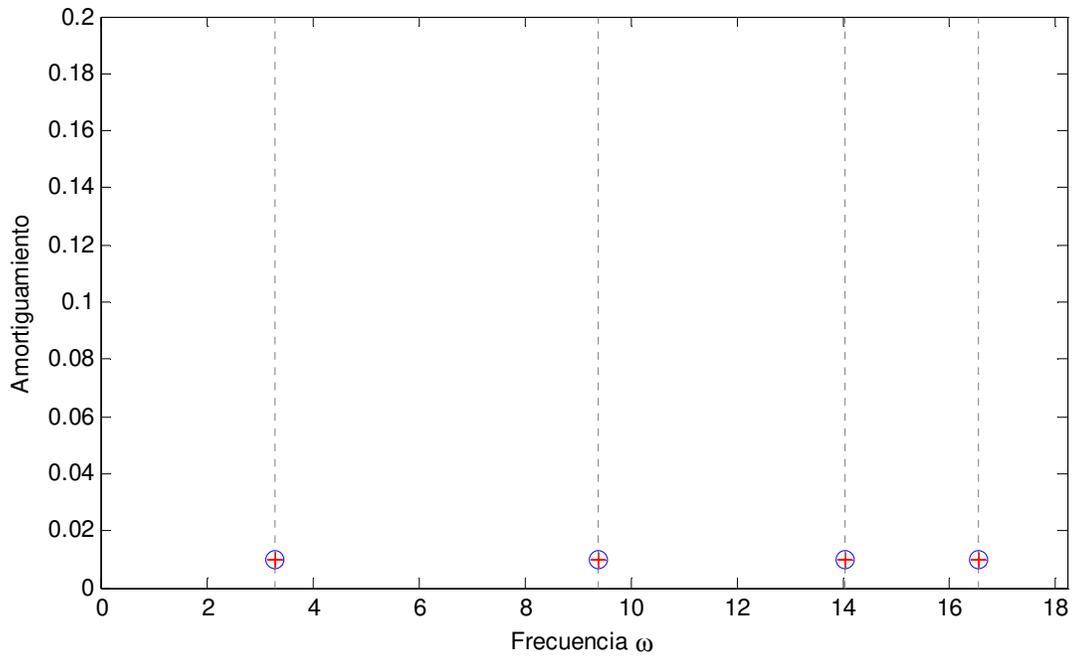
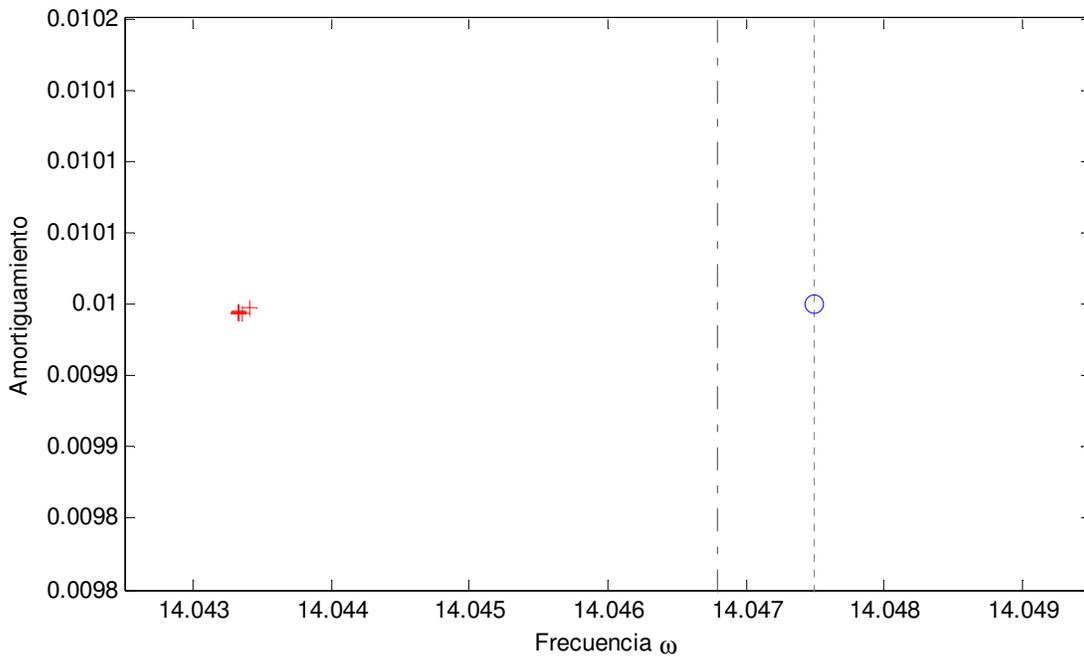


Figura 5-4: Diagrama de estabilización usando criterios adicionales.



**Figura 5-5:** Distribución de polos estables usando criterios adicionales  
 (+) Polos estables, (O) polos teóricos.



**Figura 5-6:** Distribución de polos estables. Zoom sobre segundo polo.  
 (+) Polos estables, (O) polos teórico, (:) Frecuencia natural, (-.-) Frecuencia amortiguada.

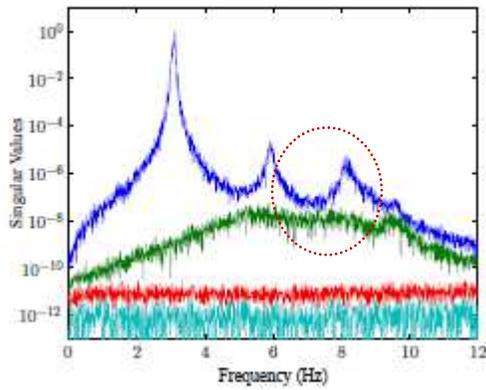
De acuerdo a los resultados exhibidos, se puede observar el buen desempeño del método. Al considerar sólo el signo de la parte imaginaria como criterio suficiente de estabilidad para un polo ( $Re(s) < 0$ ), el diagrama de estabilización es claro respecto a la ubicación de los polos

en el eje de las frecuencias (Figura 5-2), sin embargo, al observar la distribución espacial de estos, la descripción completa del polo, vale decir, tanto frecuencia como amortiguamiento, ya no resulta tan obvia (Figura 5-3). No obstante a lo anterior, la inclusión de criterios adicionales de estabilidad, tales como los presentados en la expresión ( 4-35 ), permite que la calidad de los resultados mejore considerablemente (Figura 5-4 y Figura 5-5), logrando que los polos detectados se aglomeren de forma precisa en torno a los valores teóricos (Figura 5-6).

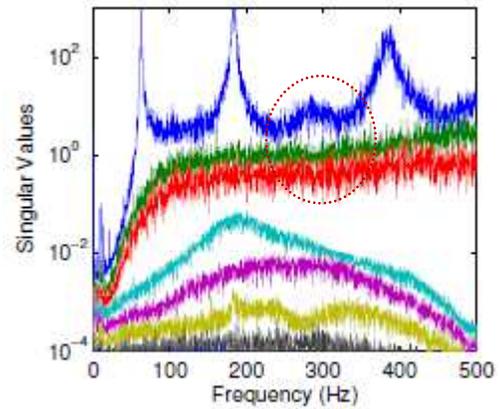
Se debe advertir que a pesar de lo promisorio que pueda parecer la implementación de esta metodología, la calidad de los resultados dependerá del cumplimiento de los supuestos indicados en la introducción del método. En particular, se debe recordar que los requerimientos principales se reducen a: conocer a priori la cantidad de fuentes no correlacionadas, así como de disponer de un número de condiciones lo suficientemente distintas y que además permitan cumplir con la restricción ( 5-19 ).

### **5.3 Estimación de fuentes no correlacionadas**

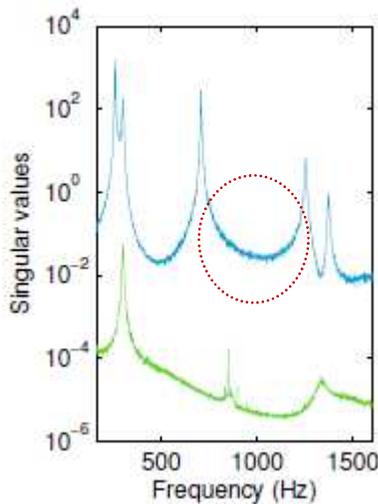
Para determinar el número de fuentes no correlacionadas, en su trabajo de tesis doctoral (Weijtjens W. , 2014) (Weijtjens W. , De Sitter, Devriendt, & Guillaume, 2013), el autor propone evaluar el comportamiento de los valores singulares de la matriz de espectros cruzados de las respuestas, para posteriormente relacionar la cantidad de fuentes con el número de valores singulares que presenten un orden de magnitud lo suficientemente mayor al resto en el dominio completo de frecuencias de la banda considerada. Sin embargo, en el mismo trabajo queda claro que esta metodología no es tan clara para datos provenientes de un sistema en operación real, donde según la banda de frecuencia analizada, distintos valores pueden ser sugeridos para estimar  $n_r$  (Figura 5-7). Adicionalmente, cabe destacar que no hay mención alguna a la diferencia necesaria que debe existir entre las magnitudes de valores singulares que permita establecer de manera confiable una estimación para  $n_r$ .



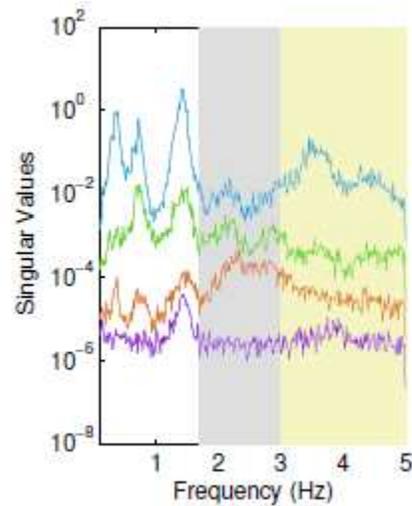
(a) Simulación ( $n_r = 2$ )



(b) Simulación ( $n_r = 3$ )



(c) Simulación ( $n_r = 1$ )



(d) Datos reales

**Figura 5-7:** Determinación de fuentes no correlacionadas ( $n_r$ ) mediante estudio de valores singulares (Weijtiens W., 2014).

Al aplicar esta metodología al ejemplo propuesto en esta sección, se puede ver que la evolución de los valores singulares correspondientes a la matriz de espectros cruzados de las respuestas de la condición N°1, permite identificar dos valores singulares con magnitudes distantes del resto (líneas azul y verde), resultado que se correlaciona perfectamente con las dos fuentes simuladas originalmente (Figura 5-8). No obstante, este resultado podría ser interpretado de otra forma si sólo se estudiara la parte inicial de la banda ( $\omega < 50$ ), donde la distancia entre las magnitudes se estrecha notablemente. Lo anterior refleja la necesidad de generar alguna metodología más clara que permita definir, sin lugar a dudas, la cantidad de fuentes no correlacionadas en el sistema.

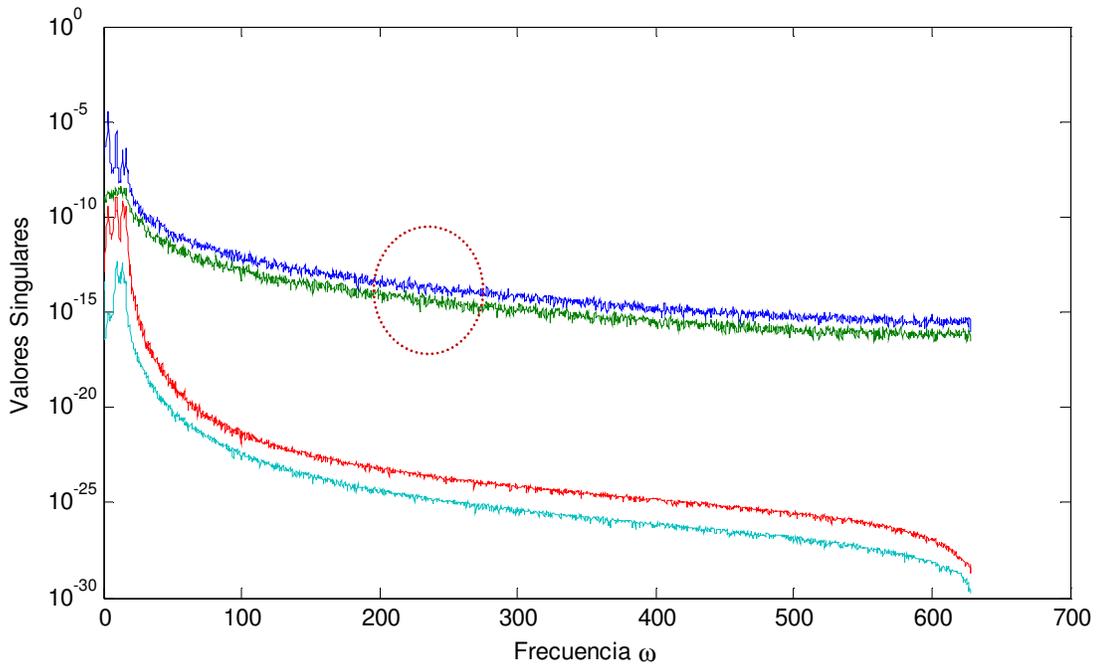


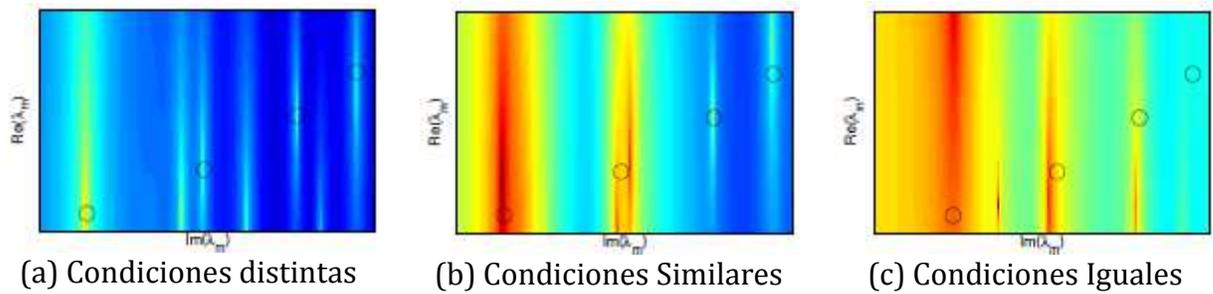
Figura 5-8: Determinación de  $n_r$  mediante valores singulares.

#### 5.4 Distinción de condiciones de carga

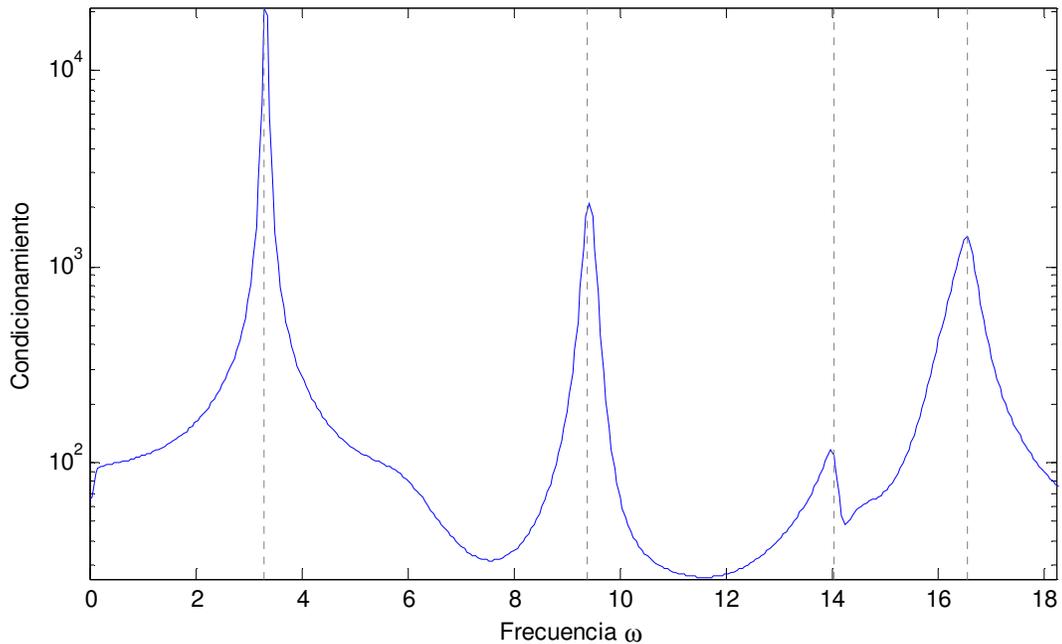
Para poder determinar qué tan distantes resultan las condiciones de carga empleadas en el método, una herramienta válida resulta la evaluación del condicionamiento de la matriz  $Y(s)$  (5-16). Lo anterior puede ser entendido de mejor forma al observar la expresión (5-12), la cual sugiere que en caso de existir un cierto grado de similitud en las condiciones de carga ( $H(s)F_l$ ), este fenómeno quedará relegado explícitamente en la estimación de los coeficientes asociados a la parametrización de las funciones de transmisibilidad ( $A_l$  y  $B_l$ ). Según esto, en caso de existir semejanza entre las condiciones de carga utilizadas, la matriz  $Y(s)$  presentará "filas" lo suficientemente parecidas para desarrollar un pobre condicionamiento en ella, independientemente del valor  $s$  para el cual ésta sea evaluada. Siguiendo este razonamiento, el autor propone evaluar, a través del dominio de Laplace, el comportamiento que presente el valor de condicionamiento<sup>3</sup> de la matriz  $Y(s)$ . Según lo establecido, un buen set de condiciones de carga, será aquel que permita exhibir singularidades relativas al condicionamiento, sólo en la ubicación de los polos del sistema, mientras que una mala elección de condiciones de carga, será aquella que origine una dispersión en el valor del condicionamiento de la matriz fuera de los polos. No obstante a lo anterior, debido a los bajos valores de amortiguamiento que presentan las estructuras civiles, así como algunas de tipo mecánicas, se recomienda una manera más eficiente, y que se traduce en evaluar el condicionamiento utilizando sólo el dominio de Fourier.

A continuación se presentan representaciones gráficas para el estudio de similitud en condiciones de carga:

<sup>3</sup> Para evaluar numéricamente el condicionamiento de una matriz se propone utilizar el comando *cond* de MATLAB.



**Figura 5-9:** Evaluación de condicionamiento en  $Y(s)$ . Dominio Laplace.  
 (o) Polos del sistema (Weijtjens W., 2014).



**Figura 5-10:** Detección de condiciones de carga mediante condicionamiento de  $Y(s)$ . Dominio Fourier.  
 (:) Frecuencias naturales.

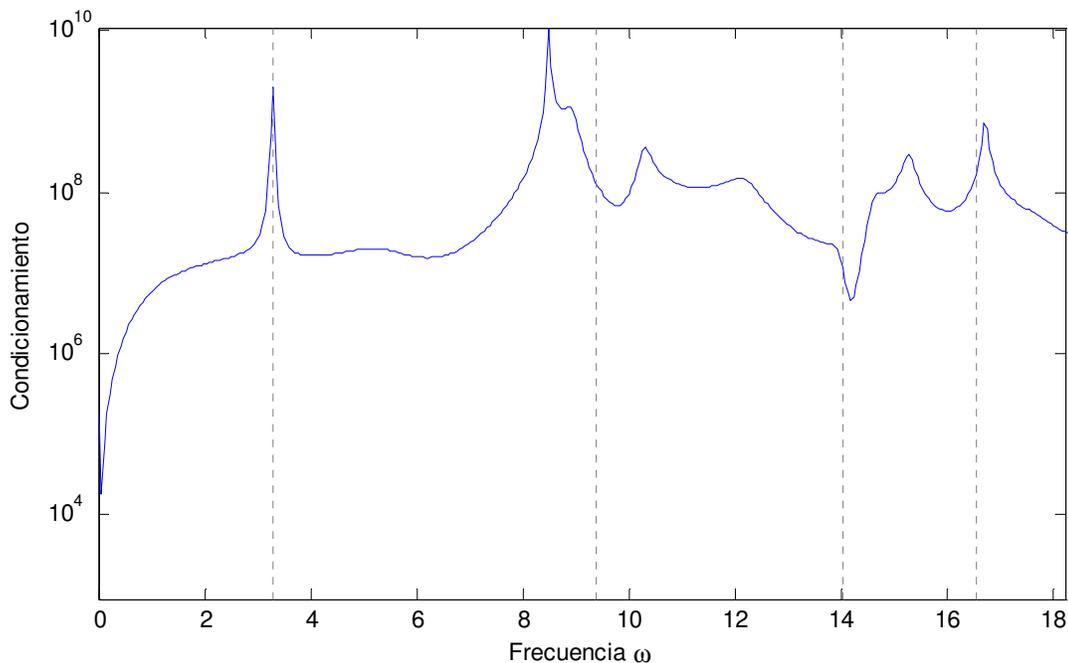
Al observar la Figura 5-9, se puede apreciar claramente que a medida que las condiciones de carga se tornan iguales, los valores de condicionamiento comienzan a expandirse por zonas distantes y alejadas de la ubicación de cada polo (Ver escenarios b) - c)).

Utilizando la simulación presentada en este capítulo, la Figura 5-10 permite apreciar como el condicionamiento de  $Y(i\omega)$  diverge sólo en la ubicación de las frecuencias del sistema, manteniendo valores cercanos a la unidad fuera de éstos (indicio de matriz bien condicionada), confirmando además la posibilidad de utilizar la transformada de Fourier para cuantificar la calidad de condiciones de carga empleadas.

Por otra parte, al intentar evaluar esta metodología para un conjunto de cargas definido por las siguientes matrices de distribución espacial:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-24)$$

Es de esperar que la repetición de la excitación sobre el grado de libertad N°1 sea capaz de entorpecer el proceso de identificación. Efectivamente, al inspeccionar la evaluación del condicionamiento (Figura 5-11), se puede ver claramente como éste se dispersa en los 3 últimos polos, presentando además, altos valores a lo largo de toda la banda de frecuencia utilizada, lo cual se condice perfectamente con lo propuesto para escenarios con condiciones de carga similares.



**Figura 5-11:** Detección de condiciones de carga mediante condicionamiento de  $Y(s)$  . Dominio Fourier.  
(:) Frecuencias naturales. Escenario condiciones de cargas similares entre sí.

Otro tema importante a analizar, resulta la solución numérica del problema polinomial de valores propios ( 5-17 ). Para resolver esto, se ha utilizado el comando *polyeig* de MATLAB, el cual tiene el inconveniente de exigir como input matrices cuadradas (matrices  $a_k$  ( 5-17 ) ). Por otra parte, el grado de éxito del método multivariable está sujeto a cumplir la relación ( 5-18 ), el cual relaciona la cantidad de filas y columnas según la cantidad de fuentes no correlacionadas identificadas y el número de salidas disponibles en la estructura. Como se podrá ver, el cumplimiento simultáneo de estas dos condiciones no siempre puede ser asegurado. Por ejemplo, considere cualquier número primo como  $n_o$ , en tal caso resultaría imposible llevar a cabo el método. Para solucionar este problema, el autor propone como mejor opción ajustar los valores  $n_o$  y  $n_r$  de tal forma de la matriz  $Y(s)$  resulte cuadrada.

Respecto a la parametrización multivariable de funciones de transmisibilidad, es claro que la forma más precisa y eficiente corresponde a la aplicación del estimador IO, la única capaz de compensar los efectos asociados de leakage. Respecto a este estimador, se recomienda que para evitar eventuales problemas de condicionamiento en la matriz  $(\Gamma_o^H \Gamma_o)^{-1}$  en ( 4-58 ), el estimador sea utilizado sólo en la banda de frecuencia dónde se esperen se ubiquen los polos del sistema.

## 5.5 Condición de carga única

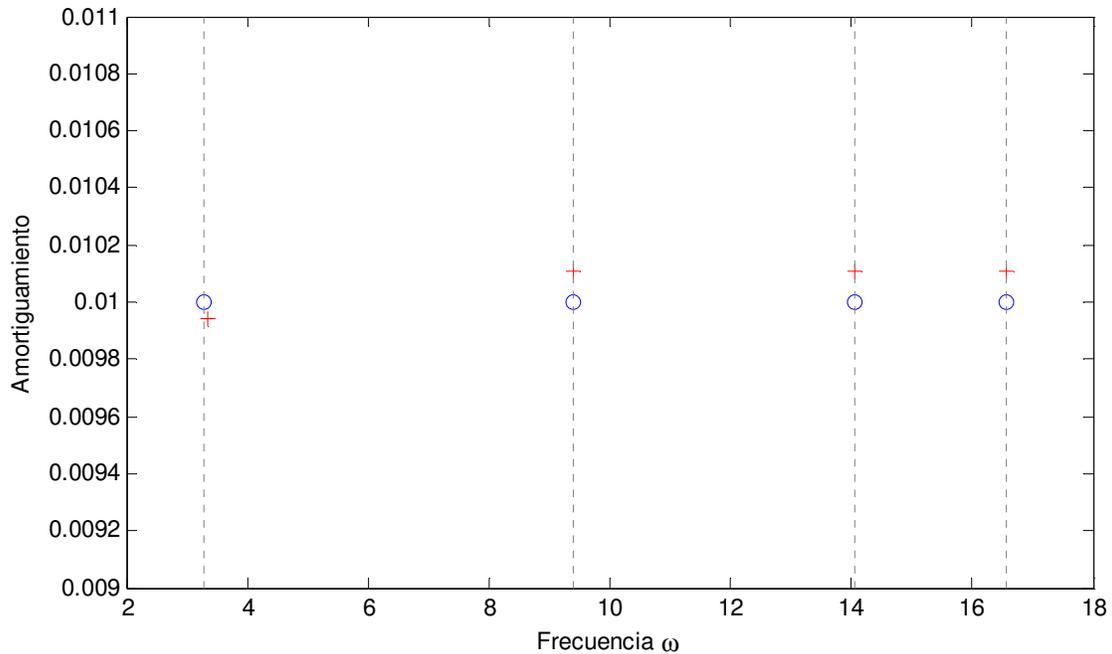
Finalmente, cabe destacar que en el escenario de disponer a priori de algunas formas modales de la estructura, las que eventualmente podrían ser extraídas de un análisis modal operacional previo, o a través de una modelación mediante elementos finitos, la expresión ( 5-14 ) sugiere el empleo del método utilizando sólo una condición de carga, relajando así una de las más grandes restricciones del concepto transmisibilidad. Al considerar este escenario, se puede ver que la extracción de los polos se reduce a resolver simplemente un set de  $(n_o - n_r)$  ecuaciones polinomiales, definido para cada forma modal  $\Phi_m$ , dónde el polo del sistema corresponderá a la solución que se presente simultáneamente para cada ecuación.

Cabe mencionar que una forma alternativa y eficiente para resolver esta última condición, corresponde a evaluar una función de costo definida por la norma de la expresión ( 5-14 ), dónde cada polo puede ser identificado como el valor que minimice esta función. No obstante, se debe advertir que para esta última alternativa, los resultados serán dependientes de la resolución utilizada por el usuario. Para hacer más eficiente el proceso, y teniendo en cuenta que la mayoría de los métodos operacionales permiten identificar frecuencias naturales con una precisión lo suficientemente aceptable, y considerando los bajos valores de amortiguamiento de estructuras civiles, se recomienda evaluar la función de costo en una vecindad definida por:

$$\begin{aligned} \text{Im}(s_m) &\in [0.95 \omega_m, 1.05 \omega_m] \\ \text{Re}(s_m) &\in [-\beta_{max} \omega_m, 0] \\ s_m &= -\beta_m \omega_m \pm \omega_m \sqrt{1 - \beta_m^2} \end{aligned} \tag{ 5-25 }$$

Con  $\beta_{max}$ , el máximo valor de amortiguamiento esperado para la estructura en estudio.

Utilizando este último recurso, y asumiendo conocidas las formas modales, a continuación se presentan los valores obtenidos para el ejemplo propuesto en esta sección, considerando una discretización de 100 puntos para los intervalos definidos en ( 5-25 ), y haciendo  $\beta_{max} = 0.05$  (Figura 5-12).



**Figura 5-12:** Identificación de polo. Condición de carga única.  
 (+)Polos Identificados, (O) Polos teóricos. (:) Frecuencias naturales

De acuerdo los resultados presentados en la Figura 5-12, se puede ver que en caso de disponer de formas modales, la metodología propuesta permite obtener valores de amortiguamiento bastante confiables.

Debido a que el grado de éxito en la estimación queda ligado a la calidad de las formas modales que eventualmente puedan ser determinadas con anterioridad, y con el afán de explorar todas las posibilidades que permite el concepto transmisibilidad, en el siguiente capítulo se presentará una metodología desarrollada recientemente, y que propone como gran ventaja respecto a los métodos desarrollados hasta acá, relajar el requisito de disponer de múltiples condiciones de carga, lo cual podría complementar de manera satisfactoria el método desarrollado en esta sección.

## Capítulo 6

### Transmisibilidad Mediante Espectros de Densidad de Potencia (PsdT)

#### 6.1 Introducción

Como se ha mencionado en los capítulos anteriores, el principal requisito para poder extraer propiedades modales bajo la implementación del concepto de transmisibilidad, corresponde a disponer de más de un estado de carga, entendiendo estas condiciones como un cambio en la distribución espacial del input sobre la estructura. Por otra parte, debido a la naturaleza del análisis modal operacional, donde el usuario puede omitir información relativa al input y extraer las características dinámicas de un sistema mediante el registro exclusivo de la respuesta estructural, resulta contraproducente exigir la identificación de dos estados de carga que cumpla con los requerimientos anteriormente mencionados.

Considerando este antecedente, diversos trabajos han sido desarrollados con el objetivo de relajar el requisito de contar con múltiples condiciones de carga (Yan & Ren, 2012), (Araújo & Laier, 2014), (Weijtjens, Lataire, Devriendt, & Guillaume, 2014), (Weijtjens, de Sitter, Devriendt, & Guillaume, 2014), (Weijtjens W. , De Sitter, Devriendt, & Guillaume, 2014).

A continuación se detalla el método de transmisibilidad definido mediante la razón de espectros de densidad de potencia (PsdT, *Power spectral density Transmissibility*), para posteriormente dar paso a la presentación de metodologías y correspondiente evaluación numérica de éstas.

#### 6.2 Método PsdT

De acuerdo a lo establecido en el punto anterior, a continuación se detalla la base del método PsdT, el cual considera la manipulación de curvas definidas como la razón entre los espectros de densidad de potencia, las que convergen al mismo valor al ser evaluadas en la parte imaginaria de un polo (frecuencia amortiguada en el dominio de Fourier).

Para comenzar, considere un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI), donde sus entradas ( $N_i$ ), así como sus salidas obedecen a procesos del tipo estacionarios y ergódicos. De acuerdo a esta descripción, es posible determinar la siguiente relación:

$$S_{x_i x_j}(\omega_f) = \sum_{r=1}^{N_i} \sum_{s=1}^{N_i} H_{ir}^*(\omega_f) H_{js}(\omega_f) S_{f_r f_s}(\omega_f) \quad (6-1)$$

Donde:

$S_{x_i x_j}$ : Espectro de densidad de potencia cruzado entre las salidas  $i-j$ .

$S_{f_r f_s}$ : Espectro de densidad de potencia cruzado entre las entradas  $r-s$ .

$H_{ir}(\omega_f)$ : Función de transferencia entre entrada  $r$  y salida  $i$ .

Para demostrar la expresión ( 6-1 ), considere inicialmente un sistema con dos salidas ( $x_1, x_2$ ) y dos entradas ( $f_1, f_2$ ).

Considerando que tanto las entradas como salidas corresponden a procesos ergódicos, la correlación entre las salidas queda determinada por (Newland, 2005):

$$R_{x_1 x_2}(\tau) = E[x_1(t)x_2(t + \tau)] \quad (6-2)$$

Con

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$$

Por otra parte, al considerar un sistema LTI, la respuesta  $x_i$ , queda determinada por la suma de las convoluciones entre la respuesta a un impulso unitario en la locación  $i$  ( $h_{ik}$ ), sujeta a la acción de múltiples sollicitaciones repartidas en  $N_i$  ubicaciones (Oppenheim, Schafer, & Buck, 2010):

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^{N_i} h_{ik}(t) * f_k(t)$$

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^{N_i} \left( \int_{-\infty}^{\infty} h_{ik}(t - \theta) f_k(\theta) d\theta \right) \quad (6-3)$$

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^{N_i} \left( \int_{-\infty}^{\infty} h_{ik}(\theta) f_k(t - \theta) d\theta \right)$$

Tomando este resultado, para poder evaluar ( 6-2 ), cada una de las salidas toma la siguiente forma. (Recordar que de manera ilustrativa, se está analizando un sistema que presenta 2 entradas y 2 salidas):

$$x_1(t) = \sum_{k=1}^2 \left( \int_{-\infty}^{\infty} h_{1k}(\theta_1) f_k(t - \theta_1) d\theta_1 \right) \quad (6-4)$$

$$x_2(t + \tau) = \sum_{k=1}^2 \left( \int_{-\infty}^{\infty} h_{2k}(\theta_2) f_k(t + \tau - \theta_2) d\theta_2 \right)$$

Notar que la nomenclatura empleada para el argumento de la integral se ha identificado según el identificador de la componente de salida. Esto se realiza sólo para que el desarrollo de las expresiones resulte claro al lector.

Desarrollando la expresión ( 6-2 ) se tiene:

$$\begin{aligned} R_{x_1x_2} = E & \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(\theta_1) f_1(t - \theta_1) d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} h_{21}(\theta_2) f_1(t + \tau - \theta_2) d\theta_2 + \right. \\ & \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(\theta_1) f_1(t - \theta_1) d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} h_{22}(\theta_2) f_2(t + \tau - \theta_2) d\theta_2 + \\ & \int_{-\infty}^{\infty} h_{12}(\theta_1) f_2(t - \theta_1) d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} h_{21}(\theta_2) f_1(t + \tau - \theta_2) d\theta_2 + \\ & \left. \int_{-\infty}^{\infty} h_{12}(\theta_1) f_2(t - \theta_1) d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} h_{22}(\theta_2) f_2(t + \tau - \theta_2) d\theta_2 \right] \quad (6-5) \end{aligned}$$

Desarrollando el valor promedio  $E(\blacksquare)$  para el primer término ubicado al lado derecho de la expresión ( 6-5 ), se tiene:

$$\begin{aligned} & E \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(\theta_1) f_1(t - \theta_1) d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} h_{21}(\theta_2) f_1(t + \tau - \theta_2) d\theta_2 \right] \\ & = E \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(\theta_1) h_{21}(\theta_2) f_1(t - \theta_1) f_1(t + \tau - \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \right] \quad (6-6) \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(\theta_1) h_{21}(\theta_2) E[f_1(t - \theta_1) f_1(t + \tau - \theta_2)] d\theta_1 d\theta_2 \end{aligned}$$

Para continuar, se debe tener presente que debido a que los procesos resultan estacionarios, el valor promedio depende sólo del espaciamiento temporal entre los procesos, más que de la evaluación absoluta a través del tiempo. De esta forma, la expresión ( 6-6 ) resulta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(\theta_1) h_{21}(\theta_2) R_{f_1f_1}(\tau - \theta_2 + \theta_1) d\theta_1 d\theta_2 \quad (6-7)$$

De acuerdo a este resultado, y realizando el mismo procedimiento sobre las demás componentes de ( 6-5 ), se tiene:

$$\begin{aligned}
R_{x_1x_2}(\tau) = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(\theta_1)h_{21}(\theta_2) R_{f_1f_1}(\tau - \theta_2 + \theta_1) d\theta_1 d\theta_2 + \\
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(\theta_1)h_{22}(\theta_2) R_{f_1f_2}(\tau - \theta_2 + \theta_1) d\theta_1 d\theta_2 + \\
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_{12}(\theta_1)h_{21}(\theta_2) R_{f_2f_1}(\tau - \theta_2 + \theta_1) d\theta_1 d\theta_2 + \\
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_{12}(\theta_1)h_{22}(\theta_2) R_{f_2f_2}(\tau - \theta_2 + \theta_1) d\theta_1 d\theta_2
\end{aligned} \tag{6-8}$$

La cual puede ser desarrollada fácilmente empleando la transformada de Fourier. Sin embargo, previo a aplicar la transformada sobre la expresión ( 6-8 ), se desarrolla en detalle la transformada asociada al primer término ubicado al costado derecho de la igualdad ( $I_1$ ):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(I_1) = & \mathcal{F} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(\theta_1)h_{21}(\theta_2) R_{f_1f_1}(\tau - \theta_2 + \theta_1) d\theta_1 d\theta_2 \right) \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(\theta_1)h_{21}(\theta_2) R_{f_1f_1}(\tau - \theta_2 + \theta_1) d\theta_1 d\theta_2 \right) e^{-i\omega\tau} d\tau \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(\theta_1)h_{21}(\theta_2) \left( \int_{-\infty}^{\infty} R_{f_1f_1}(\tau - \theta_2 + \theta_1) e^{-i\omega\tau} d\tau \right) d\theta_1 d\theta_2
\end{aligned} \tag{6-9}$$

Realizando el siguiente cambio de variables en la última expresión:

$$\alpha = \tau - \theta_2 + \theta_1 \tag{6-10}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(\theta_1)h_{21}(\theta_2) \left( \int_{-\infty}^{\infty} R_{f_1f_1}(\alpha) e^{-i\omega(\alpha - \theta_1 + \theta_2)} d\alpha \right) d\theta_1 d\theta_2 \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(\theta_1)h_{21}(\theta_2) e^{-i\omega(\theta_2 - \theta_1)} \left( \int_{-\infty}^{\infty} R_{f_1f_1}(\alpha) e^{-i\omega\alpha} d\alpha \right) d\theta_1 d\theta_2
\end{aligned} \tag{6-11}$$

Al observar los términos agrupados en el paréntesis, se puede ver que este factor corresponde a la transformada de Fourier de la correlación entre las entradas  $i$ - $j$ , en este caso la auto correlación asociada a la entrada en la ubicación 1.

Haciendo uso de las relaciones Wiener - Khintchine, este término puede ser reemplazado por el espectro de densidad de potencia entre las entradas  $i$ - $j$ , en este caso, el autoespectro asociada a la entrada 1.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(I_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(\theta_1)h_{21}(\theta_2)e^{-i\omega(\theta_2-\theta_1)} \left(S_{f_1f_1}(\omega)\right) d\theta_1 d\theta_2 \\ &= S_{f_1f_1}(\omega) \left(\int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(\theta_1)e^{i\omega\theta_1} d\theta_1\right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} h_{21}(\theta_2)e^{-i\omega\theta_2} d\theta_2\right)\end{aligned}\tag{6-12}$$

Para determinar el valor de las expresiones en cada paréntesis, considere un sistema LTI SISO (*Single Input - Single Output*), cuya salida queda determinada por la respuesta a un impulso unitario:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)f(t - \theta) d\theta\tag{6-13}$$

Al aplicar la transformada de Fourier sobre la expresión ( 6-13 ), se tiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)f(t - \theta) d\theta\right) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t - \theta) e^{-i\omega t} dt\right) d\theta\end{aligned}\tag{6-14}$$

Realizando el cambio de variables para la expresión entre paréntesis:

$$\alpha = t - \theta\tag{6-15}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) e^{-i\omega(\alpha+\theta)} d\alpha\right) d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)e^{-i\omega\theta} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) e^{-i\omega\alpha} d\alpha\right) d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)e^{-i\omega\theta} (\mathcal{F}(f)) d\theta \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)e^{-i\omega\theta} d\theta\right) \mathcal{F}(f)\end{aligned}\tag{6-16}$$

Considerando la definición para la función de transferencia, esto es:

$$X(\omega) = H(\omega)F(\omega) \quad (6-17)$$

Al comparar las expresiones ( 6-16 ) y ( 6-17 ), se determina lo siguiente:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)e^{-i\omega\theta}d\theta \quad (6-18)$$

De acuerdo a esta expresión, la función de transferencia para un sistema SISO puede entenderse como la transformada de Fourier a la respuesta de un sistema frente a la sollicitación de un impulso unitario (Newland, 2005).

De acuerdo al resultado de ( 6-18 ), es posible evaluar la expresión ( 6-12 ):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(I_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(\theta_1)h_{21}(\theta_2)e^{-i\omega(\theta_2-\theta_1)}(S_{f_1f_1}(\omega))d\theta_1d\theta_2 \\ &= (S_{f_1f_1}(\omega))H_{11}^*(\omega)H_{21}(\omega) \end{aligned} \quad (6-19)$$

resultado que, finalmente permite evaluar la transformada sobre la expresión ( 6-8 ).

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(R_{x_1x_2}) = S_{x_1x_2}(\omega) &= (S_{f_1f_1}(\omega))H_{11}^*(\omega)H_{21}(\omega) + \\ &(S_{f_1f_2}(\omega))H_{11}^*(\omega)H_{22}(\omega) + \\ &(S_{f_2f_1}(\omega))H_{12}^*(\omega)H_{21}(\omega) + \\ &(S_{f_2f_2}(\omega))H_{12}^*(\omega)H_{22}(\omega) \end{aligned} \quad (6-20)$$

Al observar la estructura que presenta la expresión ( 6-20 ), ésta puede ser extrapolada fácilmente para un sistema MIMO (*Multiple Input - Multiple Output*):

$$S_{x_ix_j}(\omega) = \sum_{r=1}^{N_i} \sum_{s=1}^{N_i} H_{ir}^*(\omega)H_{js}(\omega)S_{f_rf_s}(\omega) \quad (6-21)$$

En el método PsdT, la siguiente expresión define la transmisibilidad entre los puntos  $i$ - $j$ , con referencia dada  $k$ :

$$T_{ij}^k(\omega) = \frac{S_{x_i x_k}(\omega)}{S_{x_j x_k}(\omega)} \quad (6-22)$$

El lector podrá observar que esta formulación ya fue concebida como una de las alternativas posibles para definir funciones de transmisibilidad en el Capítulo 3 (Ver ( 3-6 ) y ( 3-9 )).

Tomando en cuenta el resultado ( 6-21 ) para un sistema LTI, la definición de transmisibilidad puede ser extendida de la siguiente manera:

$$T_{ij}^k(\omega) = \frac{\sum_{r=1}^{N_i} \sum_{s=1}^{N_i} H_{ir}^*(\omega) H_{ks}(\omega) S_{f_r f_s}(\omega)}{\sum_{r=1}^{N_i} \sum_{s=1}^{N_i} H_{jr}^*(\omega) H_{ks}(\omega) S_{f_r f_s}(\omega)} \quad (6-23)$$

Al considerar un sistema con amortiguamiento proporcional, en otras palabras, un sistema con matriz de amortiguamiento que permita desacoplar la ecuación de movimiento en un set de  $n$  (Número de modos) ecuaciones diferenciales mediante el uso de una base de vectores definida por los modos clásicos de vibración, se puede ver que cada componente de la matriz de transferencia, queda definida modalmente como (Fu & He, 2001):

$$H_{rs}(\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{\phi_{rk} \phi_{sk} (1/\bar{m}_k)}{\omega_k^2 - \omega^2 + i2\beta_k \omega_k \omega} \quad (6-24)$$

Con:

$n$ : Número de modos utilizados.

■ $_k$ : Parámetro modal relativo al modo  $k$ . (frecuencia, amortiguamiento y masa modal  $\bar{m}$ ).

Se debe notar que al utilizar una normalización de los modos respecto a la masa, la expresión ( 6-24 ) toma la siguiente forma:

$$H_{rs}(\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{\phi_{rk} \phi_{sk}}{\omega_k^2 - \omega^2 + i2\beta_k \omega_k \omega} \quad (6-25)$$

Bajo el supuesto de asumir un sistema con modos lo suficientemente espaciados entre sí, así como bajos valores de amortiguamiento modal, la evaluación de la respuesta en alguna frecuencia resonante  $\omega_l$  (natural del sistema), es dominada por la contribución del modo respectivo, lo que permite desprestigiar el aporte modal de los otros modos. De acuerdo a estos supuestos, la expresión ( 6-23 ) resulta:

$$\begin{aligned}
& \lim_{w \rightarrow w_l} T_{ij}^k(\omega) \\
& \lim_{w \rightarrow w_l} \left( \frac{\sum_{r=1}^{N_i} \sum_{s=1}^{N_i} \left( \frac{\phi_{il}\phi_{rl}}{\omega_l^2 - \omega^2 + i2\beta_l\omega_l\omega} \right)^* \left( \frac{\phi_{kl}\phi_{sl}}{\omega_l^2 - \omega^2 + i2\beta_l\omega_l\omega} \right) S_{frfs}(\omega)}{\sum_{r=1}^{N_i} \sum_{s=1}^{N_i} \left( \frac{\phi_{jl}\phi_{rl}}{\omega_k^2 - \omega^2 + i2\beta_k\omega_k\omega} \right)^* \left( \frac{\phi_{kl}\phi_{sl}}{\omega_l^2 - \omega^2 + i2\beta_l\omega_l\omega} \right) S_{frfs}(\omega)} \right) \\
& \frac{\lim_{w \rightarrow w_l} \left( \sum_{r=1}^{N_i} \sum_{s=1}^{N_i} \left( \frac{\phi_{il}\phi_{rl}}{\omega_l^2 - \omega^2 + i2\beta_l\omega_l\omega} \right)^* \left( \frac{\phi_{kl}\phi_{sl}}{\omega_l^2 - \omega^2 + i2\beta_l\omega_l\omega} \right) S_{frfs}(\omega) \right)}{\lim_{w \rightarrow w_l} \left( \sum_{r=1}^{N_i} \sum_{s=1}^{N_i} \left( \frac{\phi_{jl}\phi_{rl}}{\omega_l^2 - \omega^2 + i2\beta_l\omega_l\omega} \right)^* \left( \frac{\phi_{kl}\phi_{sl}}{\omega_l^2 - \omega^2 + i2\beta_l\omega_l\omega} \right) S_{frfs}(\omega) \right)} \quad (6-26) \\
& \frac{\left( \sum_{r=1}^{N_i} \sum_{s=1}^{N_i} \left( \frac{i\phi_{il}\phi_{rl}}{2\beta_l\omega_l^2} \right) \left( \frac{-i\phi_{kl}\phi_{sl}}{2\beta_l\omega_l^2} \right) \lim_{w \rightarrow w_l} S_{frfs}(\omega) \right)}{\left( \sum_{r=1}^{N_i} \sum_{s=1}^{N_i} \left( \frac{i\phi_{jl}\phi_{rl}}{2\beta_l\omega_l^2} \right) \left( \frac{-i\phi_{kl}\phi_{sl}}{2\beta_l\omega_l^2} \right) \lim_{w \rightarrow w_l} S_{frfs}(\omega) \right)} \\
& \left( \frac{\phi_{il}}{\phi_{jl}} \right) \frac{\left( \sum_{r=1}^{N_i} \sum_{s=1}^{N_i} \left( \frac{\phi_{rl}\phi_{sl}}{(2\beta_l\omega_l^2)^2} \right) \lim_{w \rightarrow w_l} S_{frfs}(\omega) \right)}{\left( \sum_{r=1}^{N_i} \sum_{s=1}^{N_i} \left( \frac{\phi_{rl}\phi_{sl}}{(2\beta_l\omega_l^2)^2} \right) \lim_{w \rightarrow w_l} S_{frfs}(\omega) \right)}
\end{aligned}$$

El resultado anterior muestra que la evaluación de la transmisibilidad (PsdT) en algún polo (evaluación aproximadamente equivalente en el dominio de Fourier para sistemas con bajos valores de amortiguamiento) tiende a un único valor, independiente de la referencia  $k$  utilizada. Según este antecedente, los autores proponen construir una función que corresponda al inverso de la sustracción entre las transmisibilidades definidas bajo distintas referencias, de esta forma, la nueva función deberá presentar peaks en la vecindad de las frecuencias naturales del sistema:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_l} \left( T_{ij}^r(\omega) - T_{ij}^s(\omega) \right)^{-1} = \left( \frac{\phi_{il}}{\phi_{jl}} - \frac{\phi_{il}}{\phi_{jl}} \right)^{-1} \quad (6-27)$$

Al comparar este resultado con la definición de transmisibilidad entregada en el capítulo 2, se puede observar que el uso de distintas referencias  $k$  relaja el requisito de disponer de más de una condición de carga en la estructura, lo cual corresponde a la mayor virtud de este método. Por otra parte, se debe destacar que para ambas definiciones de transmisibilidad, éstas tienden al mismo valor al ser evaluadas en algún polo, por lo que metodología de extracción de formas modales, presentada en la sección 2.5, resulta válida también para las funciones de transmisibilidad PsdT.

Cabe destacar que en los trabajos desarrollados para el método PsdT: (Yan & Ren, 2012) y (Araújo & Laier, 2014), el método ha sido concebido para la identificación de frecuencias y formas modales, omitiendo cualquier información relativa a la detección de amortiguamiento modal. Adicionalmente, las simulaciones numéricas realizadas por ambos equipos, consideraron excitaciones no correlacionadas sobre la estructura en estudio.

### 6.3 Análisis de desempeño para distintos tipos de carga

A pesar de lo satisfactoria que promete ser la implementación de este método, ciertos resguardos se deben tomar respecto al input. El grado de éxito en la detección de frecuencias naturales está fuertemente relacionado con la capacidad que tengan las funciones  $T_{ij}^k$  y  $T_{ij}^q$ , de divergir al ser evaluadas fuera de las frecuencias relacionadas al sistema, de lo contrario, los resultados podrían ser malinterpretados.

Para visualizar de mejor manera lo expresado en el párrafo anterior, considere por ejemplo la estructura presentada en la Figura 4-15, y asuma que la entrada en este sistema corresponde exclusivamente a la acción sísmica  $\ddot{u}_g(t)$ .

Al analizar el sistema respecto a la base, se tiene que la sollicitación sobre cada masa corresponde a:

$$F(t) = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m_1 \ddot{u}_g(t) \\ -m_2 \ddot{u}_g(t) \end{Bmatrix} \quad (6-28)$$

Donde:

$\ddot{u}_g(t)$ : Aceleración basal.

Al determinar la correlación entre el par de sollicitaciones  $i$ - $j$  sobre cada masa, se tiene:

$$\begin{aligned} R_{F_i F_j}(\tau) &= E[F_1(t)F_2(t + \tau)] \\ E \left[ \left( -m_1 \ddot{u}_g(t) \right) \left( -m_2 \ddot{u}_g(t + \tau) \right) \right] & \quad (6-29) \\ m_i m_j E \left[ \ddot{u}_g(t) \ddot{u}_g(t + \tau) \right] & \end{aligned}$$

Aplicando la transformada de Fourier sobre la expresión ( 6-29 ), y utilizando las relaciones Wiener - Khintchine, finalmente se tiene que el espectro de densidad de potencia cruzado entre las excitaciones aplicadas en los  $i$ - $j$ :

$$S_{F_i F_j}(\omega) = m_i m_j \mathcal{F} \left( R_{\ddot{u}_g}(\tau) \right) = \alpha_{ij} S(\omega) \quad (6-30)$$

Con:

$S(\omega)$ : auto-espectro relacionado a la aceleración basal.

Desarrollando la expresión ( 6-21 ) para los espectros cruzados  $i-k$ :

$$S_{x_i x_k}(\omega) = H_{i1}^*(\omega) \left[ H_{k1}(\omega) S_{F_1 F_1}(\omega) + H_{k2}(\omega) S_{F_1 F_2}(\omega) \right] + H_{i2}^*(\omega) \left[ H_{k1}(\omega) S_{F_2 F_1}(\omega) + H_{k2}(\omega) S_{F_2 F_2}(\omega) \right] \quad (6-31)$$

Utilizando el resultado de la expresión ( 6-30 ):

$$S_{x_i x_k}(\omega) = H_{i1}^*(\omega) [H_{k1}(\omega) \alpha_{11} + H_{k2}(\omega) \alpha_{12}] S(\omega) + H_{i2}^*(\omega) [H_{k1}(\omega) \alpha_{21} + H_{k2}(\omega) \alpha_{22}] S(\omega) \quad (6-32)$$

Considerando la estructura del factor  $\alpha_{ij}$ , el resultado anterior puede ser reducido a:

$$S_{x_i x_k}(\omega) = [H_{i1}^*(\omega) m_1 + H_{i2}^*(\omega) m_2] [H_{k1}(\omega) m_1 + H_{k2}(\omega) m_2] S(\omega) \quad (6-33)$$

Si siguiendo el mismo procedimiento, este resultado se puede ampliar al utilizar la combinación  $j-k$ , de esta forma:

$$S_{x_j x_k}(\omega) = [H_{j1}^*(\omega) m_1 + H_{j2}^*(\omega) m_2] [H_{k1}(\omega) m_1 + H_{k2}(\omega) m_2] S(\omega) \quad (6-34)$$

Con estos resultados, es posible calcular la transmisibilidad entre los puntos  $i-j$  considerando una referencia arbitraria  $k$ .

$$T_{ij}^k(\omega) = \frac{[H_{i1}^*(\omega) m_1 + H_{i2}^*(\omega) m_2]}{[H_{j1}^*(\omega) m_1 + H_{j2}^*(\omega) m_2]} \quad (6-35)$$

Se puede observar que el valor que adquiere la función de transmisibilidad resulta totalmente independiente de la referencia  $k$  utilizada, para cualquier valor de  $\omega$  comprendido en la banda de interés. Según este antecedente, resultaría imposible discriminar frecuencias naturales de la estructura al intentar visualizar los máximos de la expresión ( 6-27 ), ya que las transmisibilidades convergerían al mismo valor para cada evaluación en frecuencia, independiente de las referencias utilizadas.

Por otra parte, en los estudios nada se indica respecto a la situación en la cual un sistema sea excitado en un único punto. Para estudiar este escenario, considere que la excitación se aplica en el grado de libertad  $l$ , de esta forma, la transmisibilidad definida mediante PsdT entre los puntos  $i-j$ , con referencia  $k$ , resulta:

$$T_{ij}^k(\omega) = \frac{S_{x_i x_k}(\omega)}{S_{x_j x_k}(\omega)} = \frac{H_{il}^*(\omega) H_{kl}(\omega) S_{f_l f_l}(\omega)}{H_{jl}^*(\omega) H_{kl}(\omega) S_{f_l f_l}(\omega)} = \frac{H_{il}^*(\omega)}{H_{jl}^*(\omega)} \quad (6-36)$$

Como se puede apreciar, al igual que en el caso anterior, la transmisibilidad desarrollada para el caso en el cual la excitación es aplicada en un sólo punto, resulta totalmente independiente de la referencia utilizada.

Para generalizar la cualidad necesaria que debe presentar el input, con tal de que la manipulación transmisibilidades definidas para distintas referencias converja a un único valor sólo en las frecuencias de la estructura, se investigan los ceros de la siguiente expresión:

$$T_{ij}^k(\omega) - T_{ij}^q(\omega) = 0 \quad (6-37)$$

Para inspeccionar los ceros de la expresión anterior, se procede a desarrollar la forma fraccional considerando la razón de respuestas para cada una de las condiciones de carga ( $k-q$ ), para posteriormente evaluar el numerador resultante. De acuerdo a lo anterior, se tiene:

$$\begin{aligned} T_{ij}^k(\omega) - T_{ij}^q(\omega) &= \frac{S_{x_i x_k}(\omega)}{S_{x_j x_k}(\omega)} - \frac{S_{x_i x_q}(\omega)}{S_{x_j x_q}(\omega)} \\ &= \frac{S_{x_i x_k}(\omega) S_{x_j x_q}(\omega) - S_{x_i x_q}(\omega) S_{x_j x_k}(\omega)}{S_{x_j x_k}(\omega) S_{x_j x_q}(\omega)} \end{aligned} \quad (6-38)$$

Considerando lo presentado en ( 6-23 ), el numerador de ( 6-39 ) toma la siguiente forma:

$$\sum_{r=1}^{N_i} \sum_{s=1}^{N_i} \sum_{u=1}^{N_i} \sum_{t=1}^{N_i} H_{ir}^* H_{ju}^* (H_{ks} H_{qt} - H_{qs} H_{kt}) S_{rs} S_{ut} \quad (6-39)$$

Con  $S_{ab} = S_{f_a f_b}(\omega)$

Para facilidad de notación, el lector sabrá identificar que cada uno de los términos expuestos en la expresión anterior son funciones de ( $\omega$ ).

Estudiando en detalle la expresión ( 6-39 ), se pueden establecer los siguientes resultados:

- El aporte de la combinación con índices ( $s = t$ ) se reduce a cero. Basta con observar el término entre paréntesis.
- Para las combinaciones de índices ( $r = u$ ), el aporte del término generado por la combinación  $s-t$ , se cancela con la combinación  $t-s$ .
- Para las combinaciones ( $r \neq u$ ), el aporte de las combinaciones de índices  $s-t$  y  $t-s$ , da origen a términos, que sumados entre sí, presentan la siguiente estructura:

$$H_{ir}^* H_{ju}^* (H_{ks} H_{qt} - H_{qs} H_{kt}) (S_{rs} S_{ut} - S_{rt} S_{us}) \quad (6-40)$$

Al observar la última expresión, se puede observar que en caso de tener sollicitaciones correlacionadas ( $S_{xy} \neq 0, x \neq y$ ), el factor ( $S_{rs} S_{ut} - S_{rt} S_{us}$ ) resulta cero para toda

combinación de índices  $s-t$ , por lo tanto el resultado de evaluar ( 6-39 ) será nulo en toda frecuencia  $w$ . Este antecedente indica que resultaría imposible determinar frecuencias del sistema al hacer uso de ( 6-27 ), por lo cual definir transmisibilidades bajo distintas referencias resulta totalmente inútil. Ahora bien, considerando el caso en el cual las excitaciones resultan totalmente no correlacionadas ( $S_{xy} = 0, x \neq y$ ), los únicos términos no nulos se dan al utilizar la combinación de índices ( $s = r$ ) y ( $u = t$ ), obteniendo una suma de términos con la siguiente estructura:

$$H_{ir}^* H_{ju}^* (H_{ks} H_{qt} - H_{qs} H_{kt}) (S_{rr} S_{uu}) \quad (6-41)$$

Lo que finalmente permite aseverar que el método PsdT resulta válido sólo para casos en los cuales un sistema es excitado por múltiples solicitaciones totalmente no correlacionadas entre sí.

Por otra parte, vale la pena discutir también el comportamiento de la función de transmisibilidad para el caso en el cual el sistema esté sometido a múltiples solicitaciones, algunas de ellas de tipo armónicas. Para resolver esto, el resultado de evaluar la función de transmisibilidad, evaluada en alguna frecuencia de excitación,  $\omega_m$ , la cual se supone aplicada directamente sobre el grado de libertad  $m$ , determinada bajo el uso de una referencia  $k$ , queda determinada por:

$$T_{ij}^k(\omega_m) = \frac{\sum_{r=1}^{N_i} \sum_{s=1}^{N_i} H_{ir}^*(\omega_m) H_{ks}(\omega_m) S_{f_r f_s}(\omega_m)}{\sum_{r=1}^{N_i} \sum_{s=1}^{N_i} H_{jr}^*(\omega_m) H_{ks}(\omega_m) S_{f_r f_s}(\omega_m)} \quad (6-42)$$

Al observar la estructura de la expresión, se puede determinar que independientemente del contenido de frecuencias de eventuales excitaciones adicionales en el sistema, tanto el numerador, así como el denominador quedan definidos principalmente por el máximo de la contribución del término  $S_{f_r f_s}(\omega_m)$ , el cual se generará para la combinación ( $r = s = m$ ), es decir, el auto-espectro de la excitación en el grado de libertad  $m$ . Notar que este resultado es válido en caso de suponer la aplicación de excitaciones con frecuencias distintas entre sí. De acuerdo a esta afirmación, la evaluación de la función de transmisibilidad se reduce a:

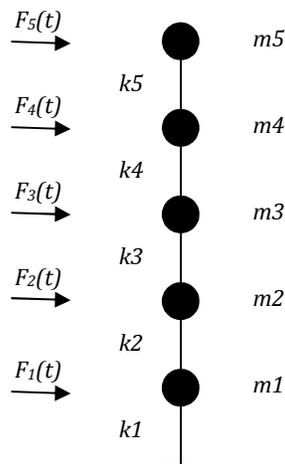
$$T_{ij}^k(\omega_m) = \frac{H_{im}^*(\omega_m) H_{km}(\omega_m) S_{f_m f_m}(\omega_m)}{H_{jm}^*(\omega_m) H_{km}(\omega_m) S_{f_m f_m}(\omega_m)} \quad (6-43)$$

Se puede apreciar claramente, que el resultado de evaluar la función de transmisibilidad entre los puntos  $i-j$ , resulta totalmente independiente de la referencia utilizada, por lo que en este caso, al hacer uso de ( 6-27 ), una frecuencia de excitación podría ser malinterpretada como una frecuencia natural del sistema en estudio.

De acuerdo a los antecedentes mencionados hasta acá, previo a la identificación de propiedades modales, deben estudiarse cuidadosamente las condiciones de excitación a las cuales está expuesta la estructura. En caso de existir excitaciones armónicas, una forma fácil de discriminar frecuencias armónicas corresponde a determinar el MAC entre las formas modales obtenidas (Pastor, Binda, & Harčarik, 2012), (Brandt, 2011).

Para reflejar de mejor manera el desempeño del uso de funciones de transmisibilidad PsdT, a continuación, se presenta un ejemplo numérico.

Considere el siguiente sistema de 5 grados de libertad:



**Figura 6-1:** Estructura 5-DOF.

La estructura presentada en la Figura 6-1 se ha escogido de tal forma que permita simular el comportamiento de un poste metálico de 3m con sección transversal tubular con diámetro exterior 5 pulg y espesor 5mm. La matriz de amortiguamiento se ha modelado de tal forma que la estructura presente en todos sus modos un amortiguamiento modal de 1%.

Para simplificar la simulación numérica, la estructura ha sido discretizada considerando 5 grados de libertad traslacionales repartidos de manera uniforme a lo largo de esta, distribuyendo la masa total de la estructura en estos puntos de acuerdo a la cantidad de elementos que llegan a cada nodo. Las respuestas han sido muestreadas utilizando una tasa de 100Hz durante 10 minutos.

Para verificar la dependencia del input, se simularán dos escenarios:

- Escenario 1 (*Esc1*):

Aplicación de múltiples cargas no correlacionadas correspondientes a ruido Gaussiano.

- Escenario 2 (*Esc2*):

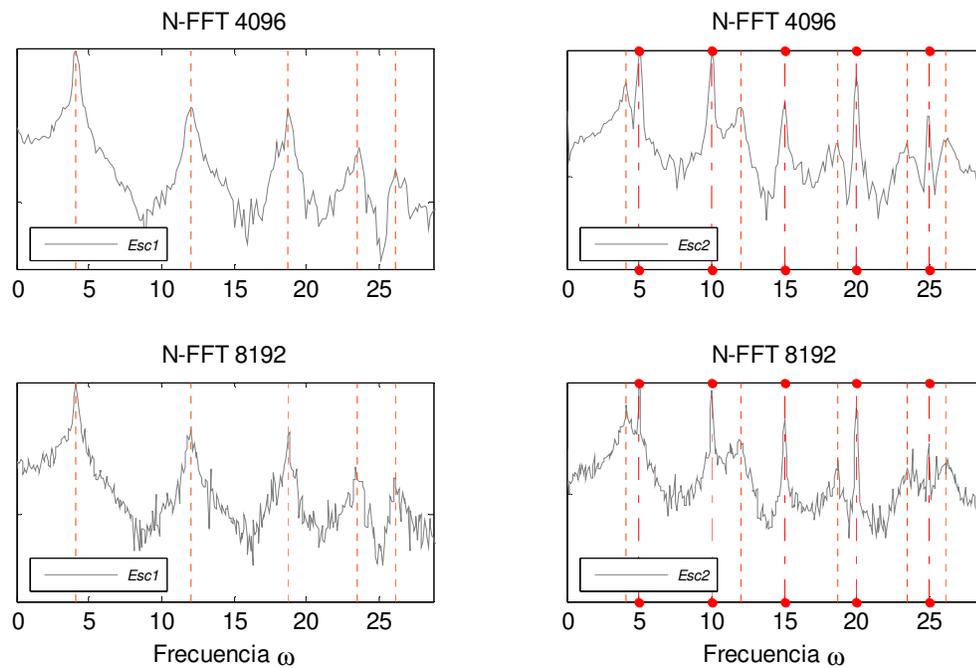
Aplicación cargas no correlacionadas, modeladas como la respuesta de un oscilador de un grado de libertad sometido a un ruido blanco. Los osciladores han sido escogidos de tal forma que sus frecuencias naturales (angulares) sean 5-10-15-20 y 25 [rad/s] respectivamente.

Para evaluación gráfica del método, se presentan los resultados obtenidos de promediar curvas generadas mediante la expresión ( 6-27 ), definidas para las combinaciones de salidas  $i-j$ , (con  $j=5$ ) y todas las referencias posibles  $k-l$ .

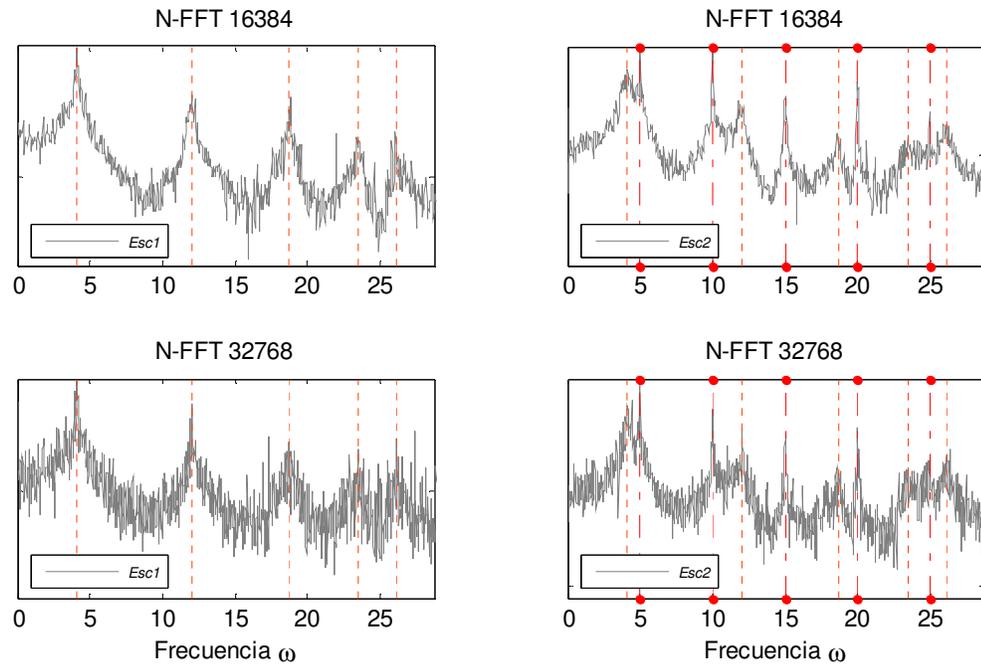
Según lo establecido en la sección anterior, es de esperar que la aplicación del método en la condición *Esc1*, permita una correcta identificación de frecuencias asociadas a la estructura. Por otra parte, la aplicación coloración mediante respuestas de tipo armónicas en la sollicitación de la condición *Esc2* sugiere una malinterpretación de las frecuencias de excitación como propias del sistema en estudio.

Previo al análisis de resultados, debido a la eventual presencia de leakage, así como la imposibilidad de generar series totalmente no correlacionadas para todas las evaluaciones, los espectros de densidad de potencia se han generado mediante el método PWelch incluyendo el uso de ventanas tipo Hanning.

A continuación se presentan resultados gráficos correspondientes al ejemplo propuesto.



**Figura 6-2:** Aplicación método PsdT. Ambos Escenarios.  
 (..) Frecuencias naturales **teóricas** del sistema. (.-) Frecuencias de excitación.



**Figura 6-3:** Aplicación método PsdT. Ambos Escenarios.  
 (..) Frecuencias naturales **teóricas** del sistema. (.-.) Frecuencias de excitación.

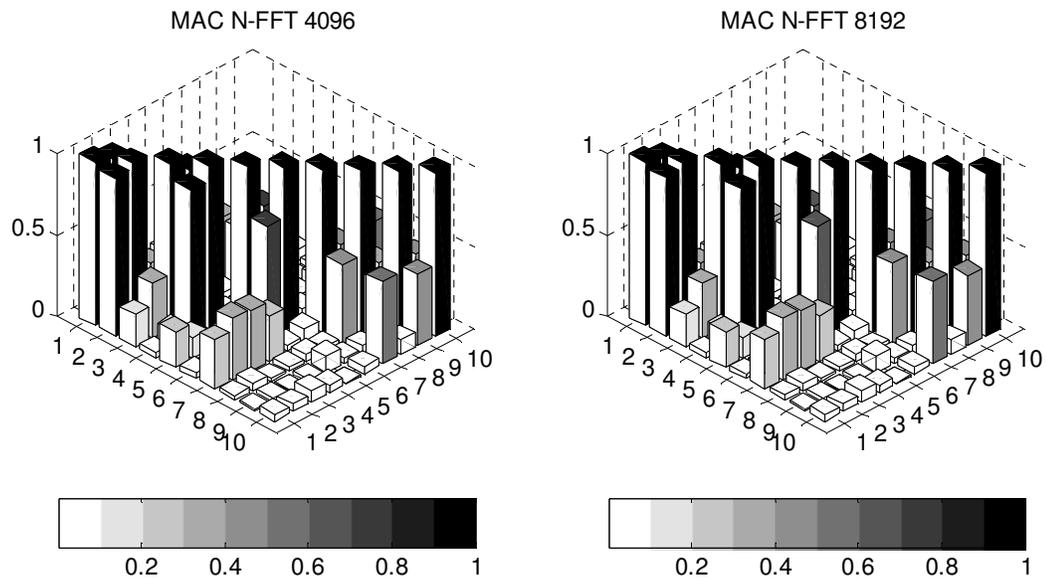
De acuerdo a los resultados de las Figura 6-2 y Figura 6-3, se puede observar el buen comportamiento del método PsdT para la detección de frecuencias naturales (*Esc1*). Sin embargo, tal como se destacó en la sección anterior, el empleo del método para condiciones en las cuales estén presentes solicitaciones de tipo armónicas (*Esc2*), puede llevar a la malinterpretación de frecuencias de excitación como propias del sistema. De acuerdo a esto, el usuario deberá estar consciente que un proceso de identificación exitoso estará fuertemente ligado con el grado de conocimiento de las condiciones de normal funcionamiento a las que esté sujeto el sistema, entendiéndose, conocer a priori las frecuencias de operación de equipos rotatorios adjuntos a la estructura en estudio.

#### 6.4 Discriminación frecuencias de excitación

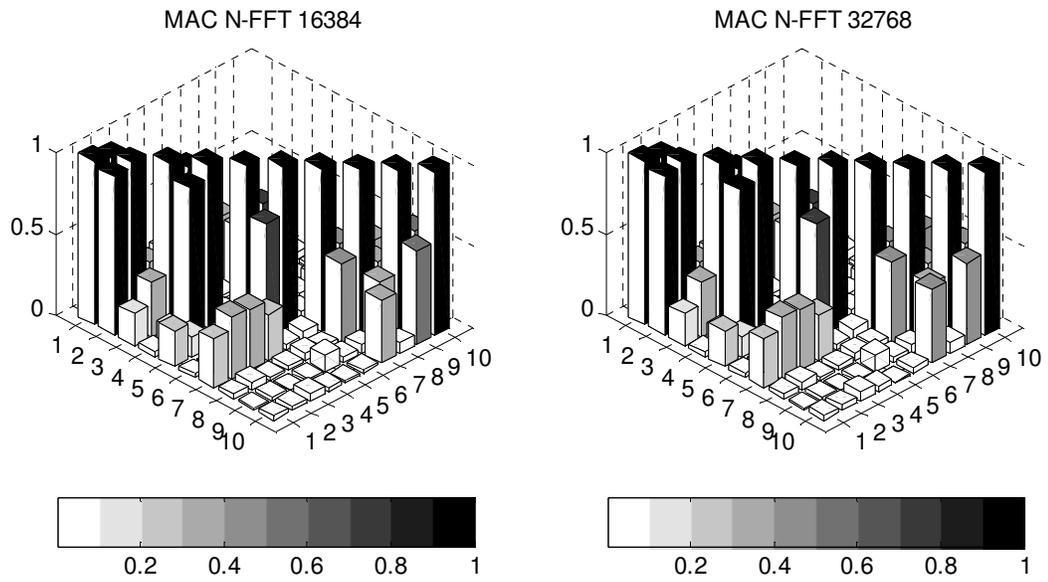
Una herramienta que podría resultar útil para discriminar las frecuencias asociadas a las excitaciones corresponde al criterio MAC (*Modal Assurance Criterion*), el cual permite cuantificar el grado de independencia de los vectores modales identificados (Pastor, Binda, & Harčarik, 2012). Si bien los modos resultan perfectamente ortogonales según la matriz de masa y rigidez, estos aún son aproximadamente ortogonales en ausencia de dichas matrices, por lo tanto, una forma de discriminar formas modales se reduce a evaluar el MAC entre todas las combinaciones posibles entre los modos disponibles. Al examinar los valores obtenidos, es de esperar que las componentes cruzadas ( $\Phi_i - \Phi_j$ ) se aproximen al valor nulo, en caso contrario, éste será un indicio de una forma modal no física. En caso de comparar modos experimentales con formas teóricas, es de esperar que el MAC sea cercano a 1.

Adicionalmente, se tiene el criterio MPC (*Modal Phase Collinearity*), el cual evalúa la relación entre la parte real e imaginaria de algún modo particular. Para el caso de estructuras con

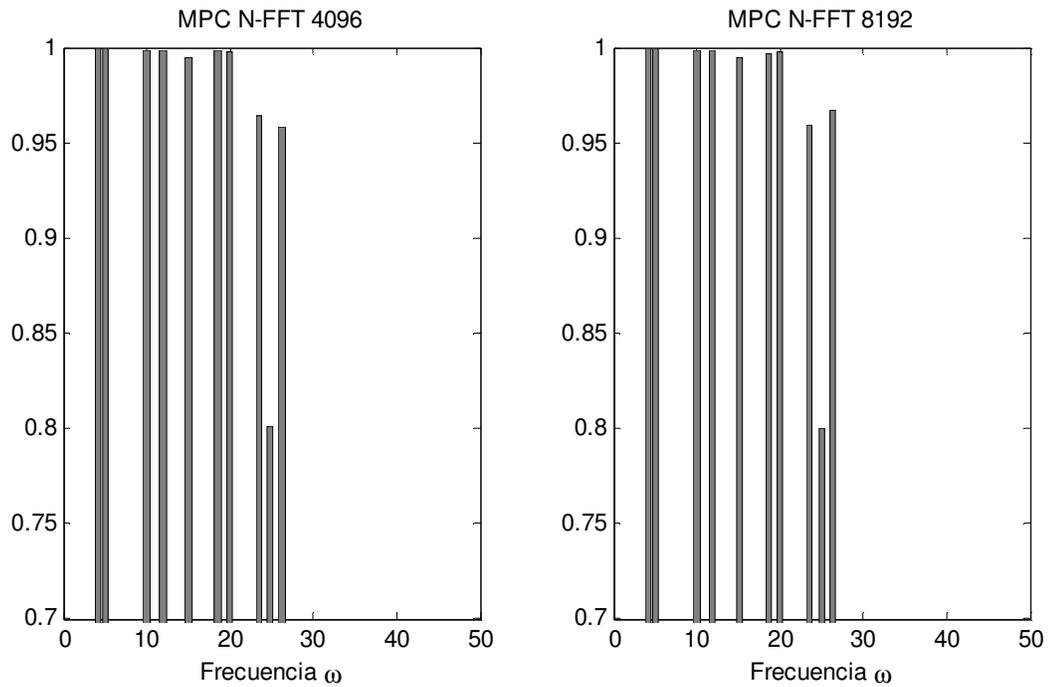
amortiguamiento proporcional o levemente amortiguadas, es de esperar que las formas modales resulten normales, vale decir, presentar sólo componentes reales, debido a esto la evaluación del índice MPC para los modos clásicos debería aproximarse a la unidad. Sin embargo, como se puede apreciar en las Figura 6-4 y Figura 6-5, estos criterios resultan insuficientes para la discriminación de formas modales propias del sistema. Cabe mencionar que uno de las principales motivaciones para desarrollar el método original de transmisibilidad (Capítulo 2) es justamente este fenómeno, realizar un análisis operacional en estructuras sometidas a cargas que no sean necesariamente ruido blanco (Devriendt, De Sitter, Vanlanduit, & Guillaume, 2009).



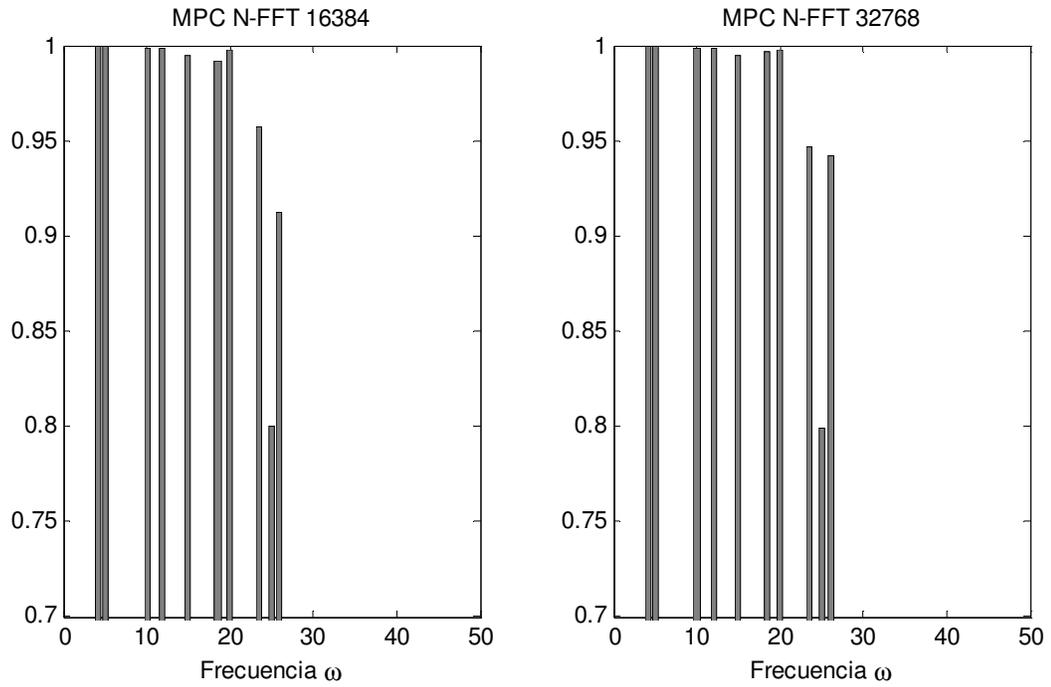
**Figura 6-4:** Aplicación método PsdT. Escenario2. Valores MAC entre modos experimentales.



**Figura 6-5:** Aplicación método PsdT. Escenario2. Valores MAC entre modos experimentales.



**Figura 6-6:** Aplicación método PsdT. Escenario2. Valores MPC modos experimentales.



**Figura 6-7:** Aplicación método PsdT. Escenario2. Valores MPC modos experimentales.

La determinación de formas modales se ha llevado a cabo utilizando el resultado de la expresión ( 6-26 ) al ser evaluada en todos los puntos (1-5; 2-5; 3-5; 4-5) y utilizando todas las referencias ( $k=1...5$ ). Las componentes finales de los modos obtenidos son producto del promedio sobre todas las formas modales obtenidas para cada referencia utilizada.

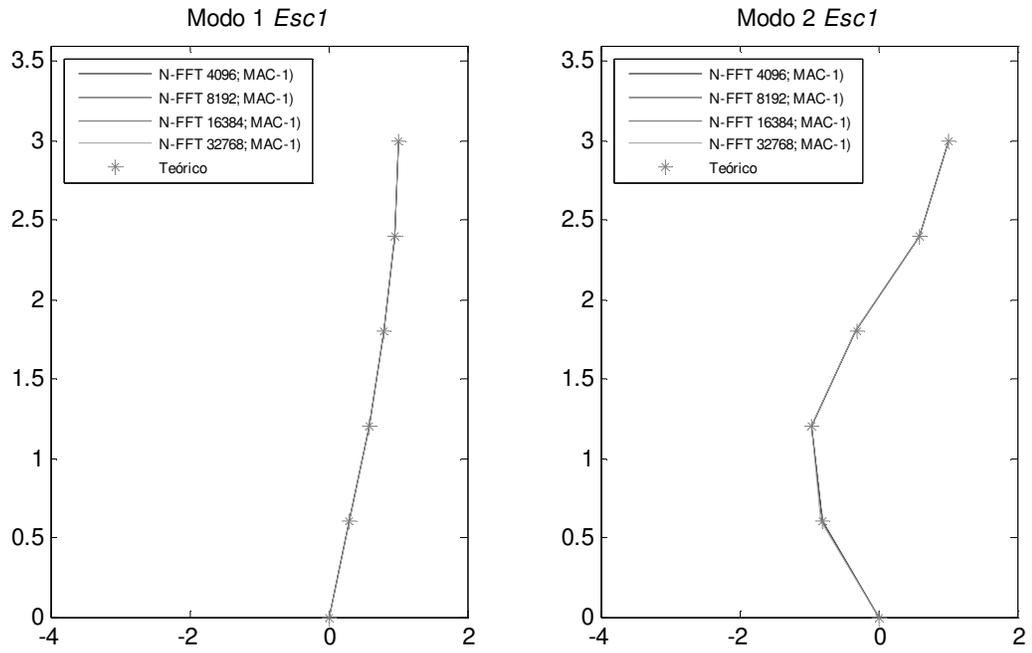


Figura 6-8: Aplicación método PsdT. Modos 1 y 2. Escenario1. Valores MAC respecto al valor teórico.

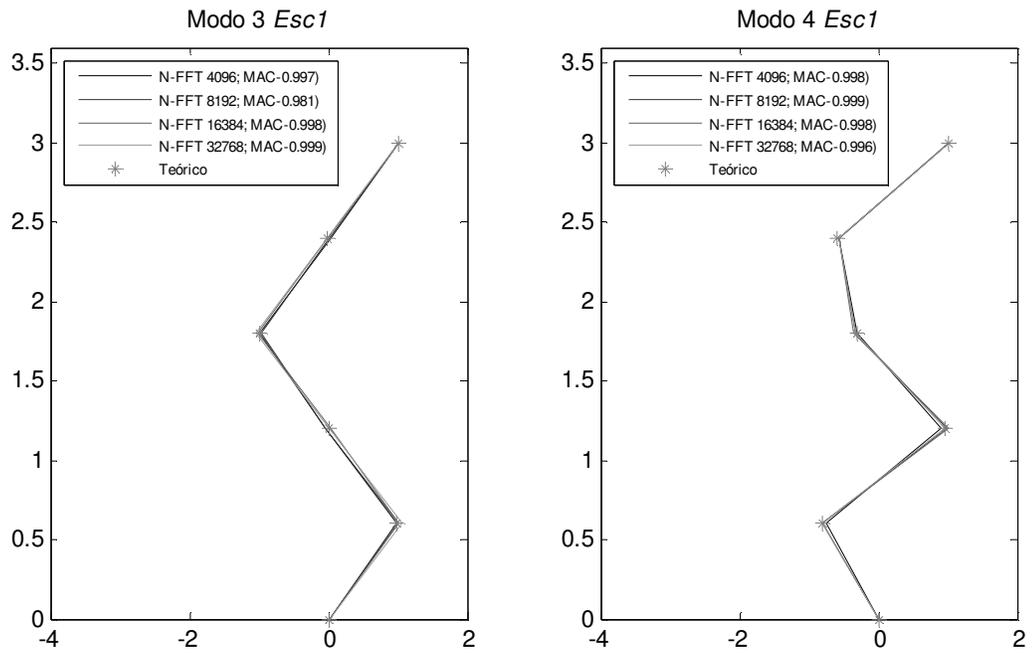
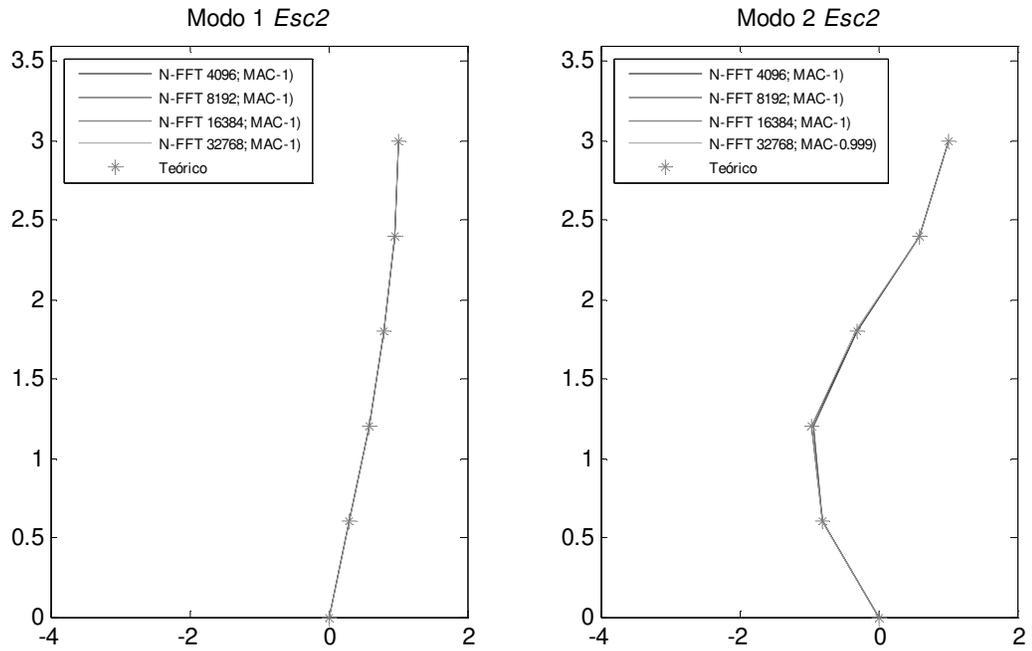
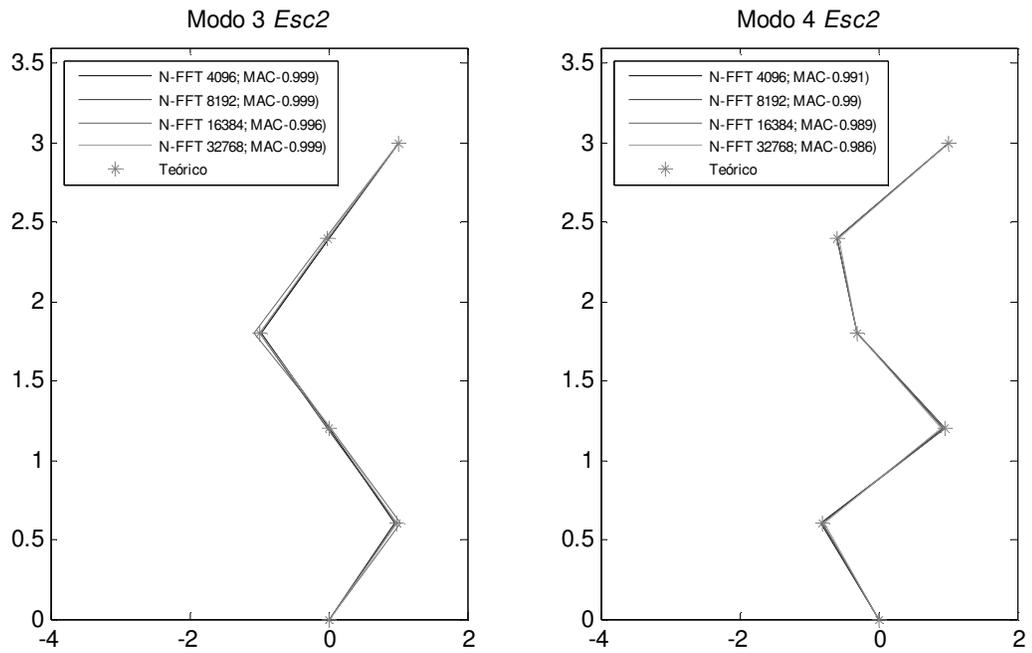


Figura 6-9: Aplicación método PsdT. Modos 3 y 4. Escenario1. Valores MAC respecto al valor teórico.



**Figura 6-10:** Aplicación método PsdT. Escenario2. Modos 1 y 2. Valores MAC respecto al valor teórico.



**Figura 6-11:** Aplicación método PsdT. Escenario2. Modos 3 y 4. Valores MAC respecto al valor teórico.

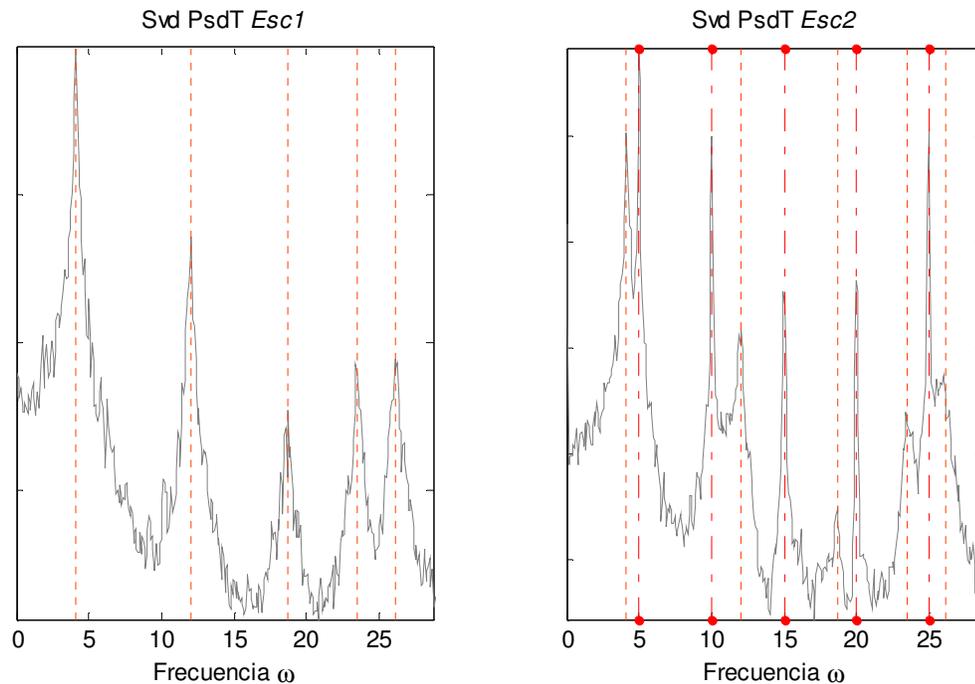
De los resultados de la Figura 6-8 y Figura 6-9 , se observa la buena correlación entre los modos experimentales y la forma modal teórica correspondiente. Respecto al número de datos empleados en la determinación de los espectros, se observa que no existe gran variación respecto a la calidad de los resultados obtenidos. Al observar detenidamente el

modo 4, incluso se observa que una mejor resolución de puntos puede llevar al usuario a la elección de un falso *peak* ubicado en la vecindad del valor correcto, empeorando la calidad del modo obtenido (N-FFT 32768).

Los resultados del Escenario 2, Figura 6-10 y Figura 6-11, muestran que de ser posible la detección a priori de frecuencias excitadoras, los modos experimentales obtenidos no resultan contaminados, presentando valores MAC cercanos a la unidad, aunque algo menores a los presentados en el Escenario1 (Modos 3 y 4).

## 6.5 Discriminación polos falsos utilizando descomposición SVD

Adicionalmente, tal como se comentó en el Capítulo 3, en (Araújo & Laier, 2014) se estudió una metodología que permitiera discriminar la aparición errónea de eventuales polos falsos que resulten de emplear la expresión ( 6-27 ) en funciones de transmisibilidad PsdT. En aquel trabajo se propone que al evaluar el promedio de los inversos de los valores singulares de las matrices definidas según ( 3-14 ), es posible generar una curva real que presente todos sus máximos ubicados coincidentemente con las frecuencias del sistema, de esta forma sería posible eliminar polos de origen matemático. La simulación realizada por este grupo de investigación propone que esta metodología favorece la correcta estimación de propiedades modales (frecuencias y modos) aún en presencia de excitaciones armónicas, sin embargo, el simple ejemplo propuesto en esta sección demuestra que esta metodología falla para este escenario (Figura 6-12).

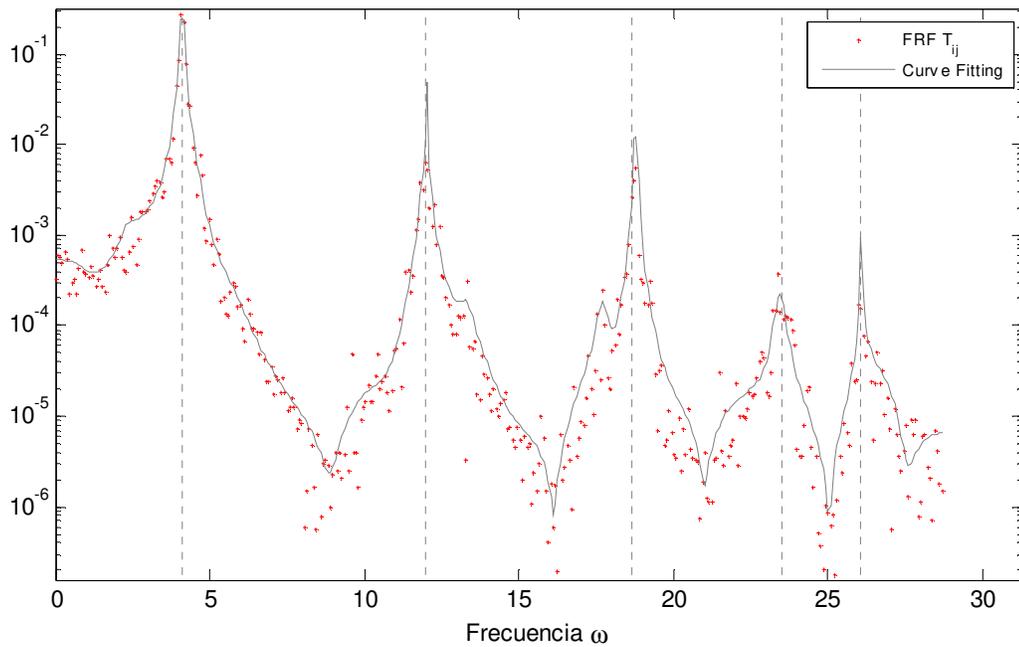


**Figura 6-12:** Aplicación método SVD-PsdT. Ambos Escenarios.  
 (..) Frecuencias naturales **teóricas** del sistema. (-.) Frecuencias de excitación.

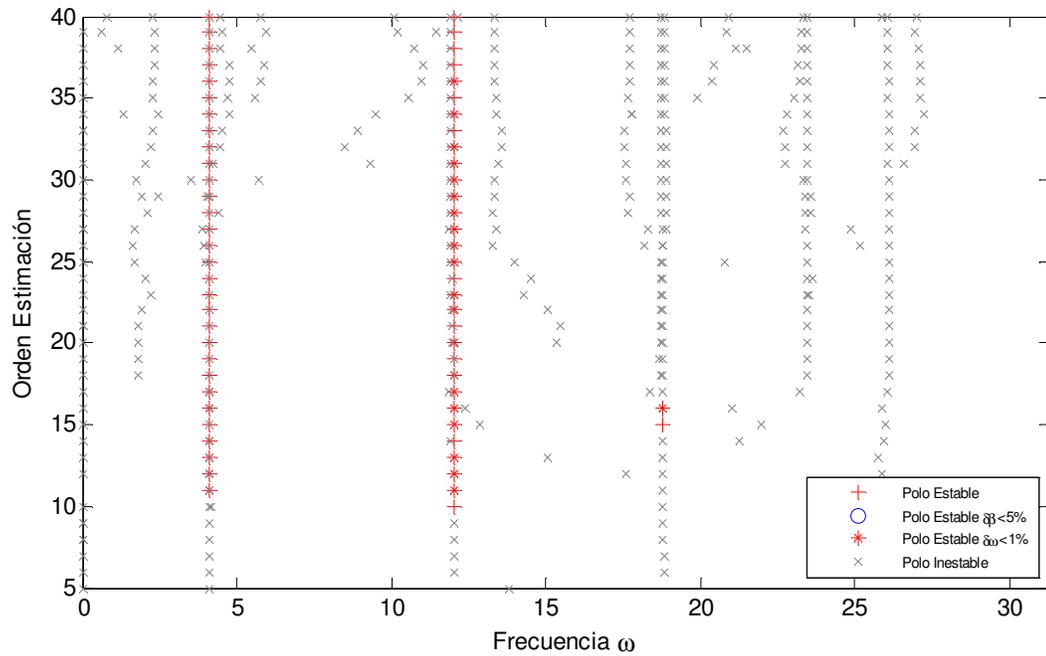
## 6.6 Estimación de amortiguamiento

En las dos investigaciones citadas para transmisibilidades PsdT, la estimación de amortiguamiento ha quedado fuera de sus alcances. Sin embargo, de acuerdo a la calidad de pseudo funciones de transferencia que poseen las curvas generadas a partir de ( 6-27 ), resulta válida la aplicación de cualquier estimador descrito en el Capítulo 4 para evaluar el amortiguamiento de cada modo detectado. Lamentablemente, debido a que las curvas generadas a través del método PsdT resultan totalmente dependientes de contenido espectral del input, es decir, no determinísticas (Figura 6-2-Figura 6-3), es de esperar que la calidad de resultados no sean lo suficientemente confiables.

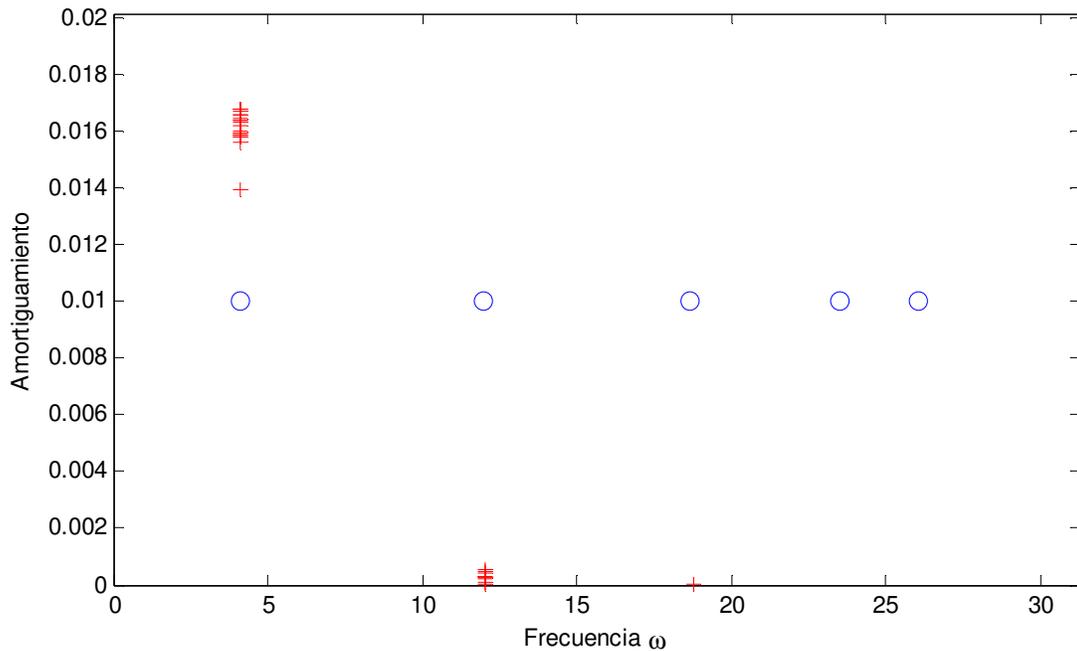
A continuación se presenta la aplicación del estimador p-LSCF Plus sobre la curva promedio obtenida para la condición *Esc1* del ejemplo anterior. De tal manera de poder minimizar el efecto de la ventana utilizada sobre la estimación final de amortiguamientos, se ha adoptado el uso de una ventana rectangular en la generación de espectros:



**Figura 6-13:** Ajuste de curva PsdT utilizando p-LSCF Plus. Escenario1 (NFFT 8192).  
(..) Frecuencias naturales **teóricas** del sistema.



**Figura 6-14:** Diagrama de estabilización de curva PsdT utilizando p-LSCF Plus. Escenario1 (NFFT 8192).



**Figura 6-15:** Distribución de polos determinados a partir de curva PsdT. Escenario1 (NFFT 8192). (+) Polos estables, (O) polos teóricos.

Al observar la Figura 6-14, se puede apreciar que para el orden utilizado, el estimador es capaz de identificar los 3 primeros polos (columnas claramente estabilizadas en frecuencia). Sin embargo, al chequear los resultados de la Figura 6-15, se observa que la estimación de

amortiguamiento resulta confiable sólo para el primer modo. Este resultado se debe principalmente a la calidad no determinística de la curva utilizada. Según este antecedente, se recomienda utilizar este método sólo para la estimación de frecuencias y formas modales.

Por otra parte, se destaca que en ambas metodologías PsdT, el resultado es totalmente dependiente del número de puntos considerados para la estimación de espectros, sin embargo, para el ejemplo propuesto en esta sección, se observa que la sensibilidad de las formas modales resulta despreciable según Figura 6-8-Figura 6-11.

## Capítulo 7

### Propuesta de Metodología

#### 7.1 Introducción

Tal como ha sido descrito en los capítulos anteriores, el uso de funciones de transmisibilidad ha resultado ser una herramienta útil y eficaz para llevar a cabo el proceso de identificación modal en sistemas lineales e invariantes en el tiempo, sin importar la naturaleza de la excitación a la cual éstos estén sujetos. Adicionalmente, variados aspectos relativos al proceso han sido ampliamente desarrollados, tales como: discriminación de polos falsos, transmisibilidades escalares, multivariable, y mediante espectros de densidad de potencia, estimadores paramétricos, así como estudio de transmisibilidad para condición de carga única. Teniendo en cuenta el extenso desglose de información presentado en este estudio, el presente capítulo tiene por objetivo reunir todos los antecedentes y elaborar propuestas metodológicas que permitan guiar al usuario a la obtención de parámetros modales de manera rápida y confiable, de acuerdo a los requisitos propios de cada método, tal como ha sido descrito en los capítulos anteriores. Para ejemplificar el desempeño del uso de funciones de transmisibilidad, simulaciones numéricas serán llevadas a cabo sobre un modelo base, cuyos resultados serán contrastados con el método de análisis modal operacional SSI-COV el cual será detallado más adelante.

#### 7.2 Metodologías de análisis para condición de carga múltiple

Tomando en cuenta lo desarrollado en las secciones precedentes, a continuación, se presentan 3 metodologías para llevar a cabo el proceso de identificación modal considerando disponibilidad de respuestas dinámicas para múltiples condiciones de carga, estas son:

- Análisis mediante funciones de transmisibilidad de tipo escalar empleando estimaciones no paramétricas (Metodología 1).
- Análisis mediante funciones de transmisibilidad de tipo escalar empleando funciones previamente parametrizadas (Metodología 2).
- Análisis mediante funciones de transmisibilidad multivariable (Metodología 3).

### 7.2.1 Descripción metodología 1

Para la formulación de esta metodología, basada en estimaciones no paramétricas de funciones de transmisibilidad, los pasos propuestos son los siguientes:

#### *Paso1: Estimación no paramétrica de funciones de transmisibilidad*

Para llevar a cabo este proceso, y en conformidad con lograr eficiencia computacional (facilitar la obtención de polos con un menor orden en diagramas de estabilización), en conjunto con evitar una malinterpretación de polos que no necesariamente correspondan a la estructura en estudio, se ha llegado a la determinación que la expresión ( 3-8 ) resulta la alternativa más adecuada para obtener funciones de transmisibilidad, cumpliendo con los requisitos descritos anteriormente. Notar que el empleo de promedios y traslapeo de ventanas mediante la metodología *Welch* en la determinación de espectros cruzados de densidad de potencia permite atenuar componentes ruidosas en las funciones que teóricamente deban resultar totalmente determinísticas, así como clarificar el comportamiento de las curvas en caso de que no lo sean. Para solucionar problemas debido a *leakage* en la estimación de las funciones, la aplicación de una ventana tipo Hanning resulta adecuada, no obstante se debe recalcar que el uso de ésta trae como consecuencia un sesgo irremediable en la determinación final para valores de amortiguamientos.

#### *Paso2: Confección de matrices $T^j$*

Una vez obtenidas todas las funciones de transmisibilidad que puedan ser generadas considerando todas las observaciones disponibles para cada una de las condiciones de carga, estas deberán ser ordenadas de manera matricial considerando la siguiente estructura:

$$T^j(\omega) = \begin{bmatrix} T_{1j}^1(\omega) & T_{1j}^2(\omega) & \dots & T_{1j}^l(\omega) \\ T_{2j}^1(\omega) & T_{2j}^2(\omega) & \dots & T_{2j}^l(\omega) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ T_{nj}^1(\omega) & T_{nj}^2(\omega) & \dots & T_{nj}^l(\omega) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times l} \quad (7-1)$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Donde

$n$  : Cantidad de observaciones disponibles.

$l$  : Número de condiciones de carga.

Notar que este ordenamiento es similar al presentado en la sección 3.3.1, y que resulta útil en la discriminación de polos falsos.

*Paso3: Confección de matrices "pseudo función de transferencia"  $\Delta^{-1}_j$*

A partir cada matriz tipo  $T^j$ , se genera una respectiva pseudo función de transferencia  $\Delta^{-1}_j \in \mathbb{C}^{(n-1) \times (l(l-1)/2)}$ , la cual presentará en cada una de sus componentes el inverso de la sustracción de cada una de las componentes de  $T^j$ , tomando todas las combinaciones posibles que resulten de agrupar dos estados de carga distintos. Cabe destacar que la primera dimensión de estas matrices corresponde a  $(n - 1)$ , lo cual se debe exclusivamente a la eliminación de la fila  $j$ -ésima en cada matriz  $\Delta^{-1}_j$ , la cual diverge para cualquier evaluación en  $\omega$ .

$$\Delta^{-1}_j(\omega) = \begin{bmatrix} \Delta^{-1}_{1j}^{12}(\omega) & \Delta^{-1}_{1j}^{13}(\omega) & \dots & \Delta^{-1}_{1j}^{(l-1)l}(\omega) \\ \Delta^{-1}_{2j}^{12}(\omega) & \Delta^{-1}_{2j}^{13}(\omega) & \dots & \Delta^{-1}_{2j}^{(l-1)l}(\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta^{-1}_{(j-1)j}^{12}(\omega) & \Delta^{-1}_{(j-1)j}^{13}(\omega) & \dots & \Delta^{-1}_{(j-1)j}^{(l-1)l}(\omega) \\ \Delta^{-1}_{(j+1)j}^{12}(\omega) & \Delta^{-1}_{(j+1)j}^{13}(\omega) & \dots & \Delta^{-1}_{(j+1)j}^{(l-1)l}(\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta^{-1}_{nj}^{12}(\omega) & \Delta^{-1}_{nj}^{13}(\omega) & \dots & \Delta^{-1}_{nj}^{(l-1)l}(\omega) \end{bmatrix} \quad (7-2)$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Con

$$\Delta^{-1}_{kl}{}^{mn}(\omega) = (T_{kl}^m(\omega) - T_{kl}^n(\omega))^{-1}$$

*Paso4: Estimación de polos*

Una vez establecidas cada una de las matrices  $\Delta^{-1}_j$ , se procede a la estimación de polos asociados a cada una de estas matrices. Para esta etapa, se ha adoptado como herramienta el estimador PLSCF-PLUS (sección 4.3.3), el cual exhibió el mejor desempeño en la obtención final de polos, permitiendo identificarlos mediante el empleo de órdenes menores respecto a los demás estimadores, y reuniendo lo mejor de Maximum Likelihood y PLSCF, vale decir, tratar variabilidad por ruido y obtención de diagramas de estabilización lo suficientemente claros respectivamente. No obstante a lo anterior, cabe destacar que la determinación de varianza en los datos mediante el enfoque de error residual no ha permitido mejorar de manera considerable los valores de amortiguamiento en la estimación final de polos para escenarios ruidosos, contrario al caso modal experimental, donde según el estimador no paramétrico empleado en la determinación previa de funciones de transferencia en frecuencia, los términos de varianza pueden ser establecidos con mayor confiabilidad. Considerando este antecedente, en conjunto con los grandes errores en los que se puede incurrir en caso de establecer de manera errónea la característica estadística de los datos, se adopta el uso del estimador PLSCF-PLUS, considerando en

su primera etapa una estimación paramétrica no lineal omitiendo el uso de varianza, el cual aún resulta un estimador consistente (Pintelon, Guillaume, Rolain, Schoukens, & Van Hamme, 1994).

Teniendo en cuenta la identificación a ciegas del sistema, para esta etapa se hace uso de diagramas de estabilización, por lo cual el estimador deberá ser aplicado la cantidad de veces que sea necesario según el barrido de órdenes que el usuario estime conveniente abarcar. Para la elaboración de los diagramas resulta provechosa la utilización de criterios adicionales de distancia relativa entre frecuencias y amortiguamientos (sección 4.3.1.2). En caso de querer emplear criterios de distancia para formas modales, como podrían ser el MAC (*Modal Assurance Criterion*) o MPD (*Modal Phase Deviation*), se debe tener en cuenta que para cada polo obtenido (no necesariamente estable), el criterio exigirá calcular el modo asociado, lo cual se traduce en un enorme gasto computacional al no disponer de una metodología que permita obtener de manera conjunta y simultánea los polos y sus respectivos modos. En caso que el usuario decida incorporar los criterios para formas modales, se dispone de dos alternativas: calcular el modo mediante una parametrización de  $T^j$  (*Curve fitting*) y posteriormente realizar un promedio de las columnas de la matriz, evaluadas en el polo y normalizadas respecto a alguna componente (2-18)(2-20), o bien, considerar los bajos amortiguamientos que presentan las estructuras civiles y tomar la parte imaginaria del polo (frecuencia natural amortiguada), para de esta forma realizar el mismo procedimiento anterior considerando sólo la evaluación de la matriz  $T^j$  en la frecuencia más cercana a la frecuencia amortiguada del polo, evitando de esta forma el proceso de parametrización de  $T^j$ . No obstante a lo anterior, y en pos de mejorar la eficiencia computacional, se recomienda no emplear criterios para formas modales, ya que como se indicó anteriormente, la obtención de los modos está ligada directamente al valor que adopte el polo, por lo cual el proceso podría resultar redundante y poco eficiente computacionalmente. Considerando el rango unitario de la matriz  $T^j$  al ser evaluada en un polo, una alternativa al promedio de las columnas de  $T^j$ , corresponde a tomar sólo la primera columna de la matriz  $U$  en una descomposición mediante valores singulares ( $USV^H = T^j$ ), la cual debería corresponder exactamente a la forma modal del polo analizado.

Una vez concluida la confección del diagrama de estabilización, se procede a visualizar los polos que reunieron todos los requisitos para ser denominados como estables, y mediante inspección visual o algún algoritmo automatizado basado en la definición de *clusters* mediante el ordenamiento jerárquico de distancias (Bilbao, 2014), se procede a la elección de polos representativos de cada aglomeración de polos  $s_j$ , donde:

$$s_j = \{s \in \Delta^{-1}_j | s \text{ estable} \} \quad (7-3)$$

$$j = 1,2,3, \dots n$$

Luego de procesar cada una de las pseudo funciones de transferencia  $\Delta^{-1}_j$ , se determina un grupo final que contiene todos los polos representativos estables de cada aglomeración  $s_{final}$

$$s_{final} = \{s_1 \cup s_2 \cup \dots \cup s_n\} \quad (7-4)$$

*Paso5: Discriminación de polos falsos*

Una vez determinado el conjunto  $s_{final}$ , se lleva a cabo el proceso de discriminación de polos falsos. Para esta labor, se emplea lo descrito en la sección 3.3.1, es decir, calcular una curva promedio que refleje la variación del inverso del segundo valor singular de las matrices  $T^j$  ( $\bar{\sigma}_2^{-1}(\omega)$ ). Una vez obtenida esta curva, se determina la ubicación de los máximos que ésta presente (detección automática o manual), los cuales deberían corresponder únicamente a los polos del sistema. Una vez determinadas las frecuencias amortiguadas asociadas a estos peaks  $f_{dp}$ , para cada uno de estos valores ( $f_{dp_i}$ ) se determina una banda de análisis que considere, por ejemplo, la tolerancia del criterio adicional para frecuencias en el diagrama de estabilización, para posteriormente dentro de ese rango, tomar los polos de  $s_{final}$  que presenten su frecuencia asociada dentro de los límites establecidos por la banda. Finalmente, del último grupo de polos estables que cumpla la restricción, se escoge el valor representativo para el polo en estudio mediante metodología DBSCAN y/o valor más próximo a  $f_{dp_i}$ .

Cabe destacar que en caso de optar por algún algoritmo de identificación automático para la ubicación de los máximos de  $\bar{\sigma}_2^{-1}(\omega)$ , se debe tener en consideración la eventual malinterpretación de máximos locales que sólo se deban a ruido propio de las funciones de transmisibilidad o bien a la dependencia del contenido espectral del input cuando éste no corresponde a una carga única o repartida sobre la estructura (función de transmisibilidad no determinística).

*Paso6: Determinación de formas modales*

Establecidos los polos del sistema, el cálculo de formas modales queda determinado mediante cualquiera de las formas sugeridas en el paso4.

Las etapas descritas anteriormente suponen la aparición de polos estables para cada uno de los modos, no obstante en caso de disponer respuestas con un alto grado de ruido o enfrentar no linealidades en los sistemas en estudio, es posible que los diagramas de estabilización no arrojen una cantidad suficiente polos estables para algún modo, en tal caso las funciones de transmisibilidad aún permiten la obtención de frecuencias y formas modales. Basados en los bajos valores de amortiguamiento que presentan las estructuras civiles, las frecuencias relacionadas a los máximos de  $\bar{\sigma}_2^{-1}(\omega)$  corresponden a la frecuencia natural amortiguada, la cual es muy próxima a la frecuencia natural correspondiente ( $(\sqrt{1 - \beta^2}) \sim 1$ ). Considerando el antecedente anterior, una vez establecidas las frecuencias del sistema, la forma modal se podrá obtener siguiendo el paso N°4 evaluando  $T^j$  en estas frecuencias. Notar que este

análisis ahorra todo el gasto computacional relativo a la implementación de estimadores paramétricos, lo cual reduce sustancialmente los tiempos de procesamiento.

## 7.2.2 Descripción metodología 2

Para esta metodología, basada en parametrizaciones previas de funciones de transmisibilidad escalar, el esquema de trabajo queda definido de acuerdo a lo establecido en la sección anterior, con la respectiva modificación del paso N°1, donde se ejecuta la parametrización para estas funciones. A continuación se presenta el detalle de esta etapa:

### *Paso1 Estimación paramétrica de funciones de transmisibilidad*

Considerando la incapacidad de disponer respuestas totalmente periódicas en la ventana de observación, así como la eventualidad de capturar registros que no sean lo suficientemente largos como para no perder resolución al emplear el comando Welch en la estimación de espectros cruzados de potencia, se presenta como alternativa, la posibilidad de sintetizar funciones de transmisibilidad haciendo uso del estimador *Input/Output* presentado en la sección 4.3.4.3, el cual puede lidiar al mismo tiempo con efectos transientes presentes en las lecturas. Teniendo en cuenta este antecedente, en esta etapa se procede a calcular todas las combinaciones de transmisibilidades posibles para cada una de las combinaciones de carga disponibles. Para lo anterior, se procede a resolver el siguiente problema:

$$y^l(\omega_f)A_j^l(\Omega_f, \theta) = B_j^l(\Omega_f, \theta)y_j^l(\omega_f)$$

$$\frac{B_j^l(\Omega_f, \theta)}{A_j^l(\Omega_f, \theta)} = \begin{bmatrix} T_{1j}^l(\omega_f) \\ T_{2j}^l(\omega_f) \\ \vdots \\ T_{jj}^l(\omega_f) \\ \vdots \\ T_{n-1j}^l(\omega_f) \\ T_{nj}^l(\omega_f) \end{bmatrix} \quad (7-5)$$

Con

$y^l(\omega_f) \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ :

Vector de respuestas para la condición de carga  $l$ .

$y_j^l(\omega_f) \in \mathbb{C}^1 \times 1$ :

Respuesta de referencia  $j$  evaluada para la condición de carga  $l$ , y que permite estimar las transmisibilidades escalares del tipo  $T_{ij} \forall i: 1, 2 \dots n$ .

$B_j^l \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ :

Polinomio matricial asociado al numerador de la estimación IO para el estado de carga  $l$ .

$A_j^l \in \mathbb{C}^1 \times 1$ :

Polinomio asociado al denominador de la estimación IO para el estado de carga  $l$ .

Notar que en el proceso descrito anteriormente, la estimación de las columnas de la matriz  $T^j$  ( 7-1 ) se realiza considerando sólo una referencia a la vez. Respecto a este punto, se debe destacar que el usuario podría pensar en hacer uso del estimador IO empleando como dato de referencia un vector que contenga todas las respuestas observadas para posteriormente seleccionar las componentes respectivas de la matriz de transmisibilidad multivariable  $\tilde{T}^l$  ( 7-51 ) y permitir el arreglo que define la matriz  $T^j$  en la etapa posterior.

$$\{y^l(\omega_f)\} = [\tilde{T}^l]\{y^l(\omega_f)\}$$

$$\tilde{T}^l = \begin{bmatrix} T_{11}^l(\omega_f) & T_{12}^l(\omega_f) & \dots & T_{1,j}^l(\omega_f) & \dots & T_{1,n-1}^l(\omega_f) & T_{1,n}^l(\omega_f) \\ T_{21}^l(\omega_f) & T_{22}^l(\omega_f) & \dots & T_{2,j}^l(\omega_f) & \dots & T_{2,n-1}^l(\omega_f) & T_{2,n}^l(\omega_f) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ T_{j1}^l(\omega_f) & T_{j2}^l(\omega_f) & \dots & T_{j,j}^l(\omega_f) & \dots & T_{j,n-1}^l(\omega_f) & T_{j,n}^l(\omega_f) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ T_{n-1,1}^l(\omega_f) & T_{n-1,2}^l(\omega_f) & \dots & T_{n-1,j}^l(\omega_f) & \dots & T_{n-1,n-1}^l(\omega_f) & T_{n-1,n}^l(\omega_f) \\ T_{n1}^l(\omega_f) & T_{n2}^l(\omega_f) & \dots & T_{n,j}^l(\omega_f) & \dots & T_{n,n-1}^l(\omega_f) & T_{n,n}^l(\omega_f) \end{bmatrix} \quad (7-6)$$

No obstante a lo anterior, se debe advertir que el uso de las componentes de  $\tilde{T}^l$  arroja resultados incompatibles con lo señalado para propiedades de funciones de transmisibilidad de tipo escalar (Devriendt, De Sitter, & Guillaume, 2010).

### 7.2.3 Descripción metodología 3

A continuación se describen los pasos que definen la metodología de análisis empleando el concepto de funciones de transmisibilidad multivariable, la que en caso de conocer a priori la cantidad de fuentes no correlacionadas actuando sobre la estructura en estudio, favorece la obtención de manera precisa para parámetros modales, producto de la independencia del contenido espectral que adquieren dichas funciones.

#### *Paso1 Elección de lecturas referenciales y no referenciales*

Una vez establecido el número de fuentes no correlacionadas actuando en la estructura ( $n_r$ ), proceso que eventualmente puede ser llevado a cabo siguiendo lo indicado en la sección 5.3, o bien mediante previa inspección de la operación relacionada al sistema y su vinculación con agentes externos, se procede a discriminar del vector de observaciones las componentes que serán tratadas como referenciales ( $y_R \in \mathbb{R}^{R \times 1}$ ) y el grupo que definirá el set de respuestas no referenciales ( $y_{NR} \in \mathbb{R}^{NR \times 1}$ ). Para este punto se debe recalcar la necesidad de cumplir la siguiente relación:

$$n_l = \frac{n_R + n_{NR}}{n_{NR}} \quad (7-7)$$

El cumplimiento de la relación anterior asegura solución única al problema ( 5-17 ), así como permitir resolver al mismo tiempo el problema de valores propios, de tipo polinomial, empleando la herramienta *polyeig* de MATLAB.

*Paso2 Estimación de coeficientes matriciales asociados a los polinomios que resuelven la parametrización de la matriz de transmisibilidad multivariable*

Habiendo seleccionado las componentes que serán tratadas como referenciales y no referenciales, se procede con la parametrización de la matriz de transmisibilidad multivariable  $\tilde{T}^l$  y la respectiva obtención de coeficientes polinomiales matriciales:

$$y_{NR}^l(\omega_f) = \tilde{T}^l(\Omega_f, \theta) y_R^l(\omega_f) \quad (7-8)$$

$$\tilde{T}^l(\Omega_f, \theta) = D_l(\Omega_f, \theta)^{-1} N_l(\Omega_f, \theta)$$

Con

$D_l(\Omega_f, \theta) \in \mathbb{C}^{NR \times NR}$ : Denominador del modelo LMFD (*Left Matrix Fraction Description*) para la matriz de transmisibilidad multivariable definida para el estado de carga  $l$ .

$N_l(\Omega_f, \theta) \in \mathbb{C}^{NR \times R}$ : Numerador del modelo LMFD para la matriz  $\tilde{T}^l$  definida para el estado de carga  $l$ .

$y_{NR}^l, y_R^l(\omega_f)$ : Transformada de Fourier de las componentes no referenciales y referenciales respectivamente. Para esta etapa, no se recomienda el uso de ventanas, de tal forma de poder compensar adecuadamente efectos de *leakage*.

Para la parametrización anterior se observa el uso de un estimador tipo *LMFD*, para esta etapa resultan válidos cualquiera de los estimadores presentados en las secciones 4.3.4.3 ó 4.3.5.1. Es claro que en caso de recurrir al estimador LMFD (sección 4.3.5.2), éste requerirá una previa estimación no paramétrica para la matriz de funciones de transmisibilidad multivariable, para lo cual el estimador más apropiado resulta *Hv*, el cual considera error tanto en las salidas referenciales como en las no referenciales (Napolitano, 2016) (Weijtjens W. , 2014). Como alternativa se propone hacer uso de un estimador tipo *common denominator*, vale decir uno que presente como común denominador un escalar, no así una matriz, tal como fue presentado el estimador IO en este trabajo (Sección 4.3.4.3). Para poder hacer uso de esta herramienta sin tener que modificar la base teórica descrita en el capítulo 5 relativo a la identificación de sistemas empleando funciones de transmisibilidad multivariable, se deben realizar los siguientes ajustes

- I. Realizar una estimación paramétrica utilizando el método IO sobre  $\tilde{T}$ , para cada condición de carga:

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} T_{NR_1R_1}^l(\omega_f) \\ T_{NR_1R_2}^l(\omega_f) \\ \vdots \\ T_{NR_1R_R}^l(\omega_f) \\ T_{NR_2R_1}^l(\omega_f) \\ \vdots \\ T_{NR_2R_R}^l(\omega_f) \\ \vdots \\ T_{NR_{NR}R_R}^l(\omega_f) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{NR \times R \times 1} \quad (7-9)$$

Notar que la expresión anterior muestra la matriz de transmisibilidad multivariable entre las componentes no referenciales y referenciales reordenada de tal forma que, de manera sucesiva, cada fila es traspuesta bajo la anterior.

- II. Posteriormente a la obtención de los coeficientes matriciales, el usuario deberá reordenar los distintos vectores  $\beta_o$  ( 4-61 ) de tal forma de generar los coeficientes polinomiales de  $N_l(\Omega_f, \theta)$ ,  $B_k$  (coeficiente relativo al orden  $k$ ), volviendo a la dimensión original de la matriz de transmisibilidad multivariable. Para lo anterior, los coeficientes se ordenan de la siguiente forma:

$$B_k = \begin{bmatrix} \beta_{11k} & \beta_{12k} & \cdots & \beta_{1n_rk} \\ \beta_{21k} & \beta_{22k} & \cdots & \beta_{2n_rk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{(n_o-n_r)1k} & \beta_{(n_o-n_r)2k} & \cdots & \beta_{(n_o-n_r)n_rk} \end{bmatrix} \quad (7-10)$$

- III. Adicionalmente, las componentes escalares del vector  $\alpha$  ( 4-61 ) deberán ser ajustadas para lograr los valores  $A_k$  ( 5-16 ) (coeficientes polinomiales relativos a  $D_l(\Omega_f, \theta)$ ). Esto se puede resolver fácilmente tomando una matriz identidad y ponderarla por cada elemento de  $\alpha$  (correspondiente a cada orden  $k$ ), de esta forma:

$$A_k = \alpha_k I_{(n_o-n_r)} \quad (7-11)$$

Una vez realizados los pasos descritos anteriormente (i-iii), y resolviendo para cada uno de los estados de carga considerados en el análisis, la solución del problema de valores propios polinomial resulta directa ( 5-17 ).

*Paso3 Confección de diagramas de estabilización*

De igual forma con las metodologías anteriores, el desconocimiento del orden que presenta sistema a analizar sugiere el uso de un diagrama de estabilización, el que permitirá identificar los polos estables que presente el sistema para distintos órdenes sucesivos. Por lo tanto, la etapa anterior se tendrá que llevar a cabo las veces que sea necesaria según el rango de órdenes que el usuario desee evaluar (recordar que cada estimación de paramétrica de la matriz  $\tilde{T}$  está ligada a un orden en particular). No obstante para esta metodología, la solución al problema polinomial de valores propios llevado a cabo en la etapa anterior, permite la obtención de formas modales de manera simultánea con los polos respectivos, por lo tanto en esta ocasión ya no resulta redundante emplear criterios de distancia modal para polos en conjunto con criterios para formas modales, tal como resultó en las metodologías 1 y 2. Debido a lo expresado anteriormente, se sugiere hacer uso de algún criterio de forma modal para esta etapa, en particular el CMF (*Complexity Modal Factor*), el cual integra los criterios MPD (*Modal Phase Deviation*) y MPC (*Modal Phase Collinearity*) (Cabboi, Magalhães, Gentile, & Cunha, 2013).

#### *Paso4 Discriminación de polos falsos*

Una vez almacenados todos los polos estables de la etapa anterior, se procede a la discriminación de polos falsos y de naturaleza matemática producto de la sobrestimación del orden empleado para materializar el diagrama de estabilización. Para lo anterior, se procede de igual forma a lo establecido en el paso N°5 de la metodología 1, donde se recomienda el uso de una curva promedio para el inverso del segundo valor singular de las matrices tipo  $\Delta^{-1}_j(\omega)$ . Para este último punto, se debe destacar que lo que se busca es simplemente la ubicación del máximo de  $\sigma_2^{-1}(\omega)$ , por lo tanto, en esta etapa no resulta necesario ajustar las matrices  $\Delta^{-1}_j(\omega)$  haciendo uso de estimaciones paramétricas para las funciones de transmisibilidad escalar.

### **7.3 Metodologías de análisis para condición de carga única**

En esta sección se presentan dos metodologías referentes al proceso de identificación de propiedades modales haciendo uso de funciones de transmisibilidad disponiendo de sólo una condición de carga:

- Análisis mediante funciones de transmisibilidad de tipo escalar empleando estimaciones no paramétricas (Metodología 4).
- Análisis mediante funciones de transmisibilidad multivariable previamente parametrizadas (Metodología 5).

### 7.3.1 Descripción metodología 4

Considerando los resultados del capítulo 6 (formulación PsdT), a continuación se describe la metodología a seguir, de tal forma de llevar a cabo el proceso de identificación modal empleando sólo una condición de carga.

El gran resultado del capítulo 6 fue que, bajo ciertos requerimientos, el uso de funciones de transmisibilidad definidas mediante la razón de los espectros de densidad de potencia según ( 3-9 ), permite relajar la necesidad de disponer de condiciones de carga múltiples. Para lo anterior, bastaba cambiar la referencia  $k$  empleada en la definición de las transmisibilidades, para así obtener una *pseudo condición de carga*, y de esta forma, continuar con los mismos resultados propios de la manipulación de funciones de transmisibilidad definidas para condiciones de carga múltiple., entendiéndose convergencia al mismo valor al evaluar en algún polo del sistema. Debido a este antecedente, el esquema de trabajo para esta metodología corresponde al mismo que fue presentado para la metodología N°1, con una pequeña modificación en las primeras tres etapas. A continuación se describen estos pasos.

#### *Paso1 Estimación no paramétrica de funciones de transmisibilidad*

Para llevar a cabo este proceso, se estiman todas las combinaciones posibles de funciones de transmisibilidades basados en la formulación:

$$T_{ij}^k = \frac{S_{x_i x_k}}{S_{x_j x_k}} \quad (7-12)$$

Considerando la incapacidad de disponer funciones determinísticas, es recomendable disponer de registros lo suficientemente largos de tal forma de poder emplear la metodología Welch en la estimación de los espectros sin perder resolución de frecuencias y al mismo tiempo reducir en parte la variabilidad del contenido espectral del input desconocido. Adicionalmente, es altamente recomendable el uso de una ventana tipo Hanning de tal forma que las funciones obtenidas puedan converger, en cierta medida, al mismo valor cuando sean evaluadas en algún polo.

#### *Paso2 Confección de matrices $T^j$*

De manera análoga a lo establecido para la metodología N°1 (sección 7.2.1), se procede a armar las matrices que permitirán, posteriormente, estimar los polos del sistema mediante alguna parametrización, así como formas modales respectivas. Para llevar a cabo esto, basta con suponer que un “estado de carga” queda definido por la elección de alguna referencia  $k$ , de esta forma:

$$T^j(\omega) = \begin{bmatrix} T_{1j}^1(\omega) & T_{1j}^2(\omega) & \dots & T_{1j}^k(\omega) & \dots & T_{1j}^{n-1}(\omega) & T_{1j}^n(\omega) \\ T_{2j}^1(\omega) & T_{2j}^2(\omega) & \dots & T_{2j}^k(\omega) & \dots & T_{2j}^{n-1}(\omega) & T_{2j}^n(\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{nj}^1(\omega) & T_{nj}^2(\omega) & \dots & T_{nj}^k(\omega) & \dots & T_{nj}^{n-1}(\omega) & T_{nj}^n(\omega) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n} \quad (7-13)$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, n$$

*Paso3: Confección de matrices "pseudo función de transferencia"  $\Delta^{-1}_j$*

Una vez armadas todas matrices  $T^j$ , para cada una se procede a armar la respectiva pseudo matriz de transferencia  $\Delta^{-1}_j(\omega)$ . Para llevar a cabo esta tarea, se pueden emplear todas las combinaciones posibles de inversos de las sustracciones entre las distintas referencias  $k$ , en tal caso, existirán  $n(n-1)/2$  combinaciones posibles, las que excluyen la combinación  $k-k$ , la cual divergiría para cualquier evaluación en  $\omega$ , resultando totalmente inútil en la identificación de polos.

$$\Delta^{-1}_j(\omega) = \begin{bmatrix} \Delta^{-1}_{1j}^{12}(\omega) & \Delta^{-1}_{1j}^{13}(\omega) & \dots & \Delta^{-1}_{1j}^{kl}(\omega) & \dots & \Delta^{-1}_{1j}^{n-1,n}(\omega) \\ \Delta^{-1}_{2j}^{12}(\omega) & \Delta^{-1}_{2j}^{13}(\omega) & \dots & \Delta^{-1}_{2j}^{kl}(\omega) & \dots & \Delta^{-1}_{2j}^{n-1,n}(\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta^{-1}_{j-1,j}^{12}(\omega) & \Delta^{-1}_{j-1,j}^{13}(\omega) & \dots & \Delta^{-1}_{j-1,j}^{kl}(\omega) & \dots & \Delta^{-1}_{j-1,j}^{n-1,n}(\omega) \\ \Delta^{-1}_{j+1,j}^{12}(\omega) & \Delta^{-1}_{j+1,j}^{13}(\omega) & \dots & \Delta^{-1}_{j+1,j}^{kl}(\omega) & \dots & \Delta^{-1}_{j+1,j}^{n-1,n}(\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta^{-1}_{nj}^{12}(\omega) & \Delta^{-1}_{nj}^{13}(\omega) & \dots & \Delta^{-1}_{nj}^{kl}(\omega) & \dots & \Delta^{-1}_{nj}^{n-1,n}(\omega) \end{bmatrix} \quad (7-14)$$

$$\Delta^{-1}_j \in \mathbb{C}^{(n-1) \times n(n-1)/2}$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, n$$

El lector podrá observar que un número reducido de respuestas disponibles, puede generar un gasto computacional considerable en las posteriores etapas de parametrización, respecto a los tiempos de procesamiento de las metodologías anteriores (N°1 y 2). Como alternativa a lo presentado en ( 7-55 ), se permite el uso de un promedio normalizado (Felber, 1993), o bien la suma de las componentes de  $\Delta^{-1}_j(\omega)$ :

- Promedio de componentes

$$\overline{\Delta^{-1}}_j(\omega) = \begin{bmatrix} \overline{\Delta^{-1}_{1j}(\omega)} \\ \overline{\Delta^{-1}_{2j}(\omega)} \\ \vdots \\ \overline{\Delta^{-1}_{j-1,j}(\omega)} \\ \overline{\Delta^{-1}_{j+1,j}(\omega)} \\ \vdots \\ \overline{\Delta^{-1}_{nj}(\omega)} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(n-1) \times 1} \quad (7-15)$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Donde

$$\overline{\Delta^{-1}}_{ij}(\omega) = \frac{\sum_m (\Delta^{-1\dagger}_j(\omega))_{im}}{n(n-1)/2} : \text{Promedio sobre componentes normalizadas previamente.}$$

$$a_{ij}^\dagger(\omega) = \frac{a_{ij}(\omega)}{\sum_k |a_{ij}(\omega_k)|} : \text{Promedio normalizado de componentes.}$$

- Suma de componentes

$$\overline{\overline{\Delta^{-1}}}_j(\omega) = \sum_m \sum_n (\Delta^{-1}_j(\omega))_{mn} \quad (7-16)$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Cabe destacar que para esta metodología, la calidad no determinística de las curvas empleadas, así como el uso de ventanas para corregir efectos asociados a leakage, pueden resultar ser un gran obstáculo para el proceso de identificación en caso de querer emplear alguna metodología de tipo automatizada, como lo es la presentada mediante análisis de *clusters* sobre polos estables (Bilbao, 2014). Lo anterior se debe a que el método PsdT exige que las fuentes de excitación sobre la estructura sean no correlacionadas, por lo tanto el contenido espectral de cada una de las fuentes inevitablemente es trasladado a las curvas de transmisibilidad con las cuales se pretende obtener los polos del sistema, requiriendo así, polinomios con un orden relativamente alto para poder parametrizar correctamente las curvas empleadas, lo cual aún en estas condiciones, no asegura la identificación de todos los polos del sistema para una situación ideal (ausencia de ruido). Considerando este antecedente, en caso de observar que la metodología mediante parametrización no arroje resultados, se propone el uso del método "manual", el que ya ha sido presentado en la metodología N°1 y que considera el uso de los máximos que exhibe  $\sigma_2^{-1}(\omega)$  :

Considerando las estimaciones no paramétricas de funciones de transmisibilidad contenidas en cada matriz  $T^j(\omega)$  ( 7-13 ), emplear la curva promedio del inverso del segundo valor singular de cada matriz  $T^j(\omega)$  y encontrar las posiciones (frecuencias naturales amortiguadas) asociadas a los máximos que ésta presente.

Posteriormente, para cada una de las frecuencias identificadas  $\omega_k$ , se determinará el vector que resulte de promediar las columnas de  $T^j(\omega_k)$ . Notar que para el promedio anterior se requiere de una normalización respecto a alguna componente. Finalmente, la forma modal corresponderá al promedio de los vectores resultantes para cada matriz  $T^j$ .

$$\Phi_k = \frac{\sum_{j=1}^N \Phi_k^j}{N} \quad (7-17)$$

$$\Phi_k^j = \frac{\sum_{n=1}^N \hat{T}_{|,n}^j(\omega_k)}{N}$$

$\hat{T}_{|,n}^j$ : Columna n-ésima de la matriz  $T^j$ , normalizada respecto a una componente.

Alternativamente, y tal como fue mencionado en la metodología N°1, el uso de la descomposición mediante valores singulares de cada matriz  $T^j(\omega_k)$  evaluada en algún polo permitiría la obtención de la forma modal correspondiente.

Es claro que al emplear una curva con recorrido real (promedio del inverso del segundo valor singular), resulta totalmente imposible cualquier intento de estimación para obtener valores de amortiguamiento.

### 7.3.2 Descripción metodología 5

Tal como fue descrito en la sección 5.5, en caso de disponer a priori de formas modales de la estructura dentro de alguna banda de interés, existe la posibilidad de relajar el requisito de contar con múltiples condiciones de carga para poder llevar a cabo la implementación del proceso de identificación mediante el uso de funciones de transmisibilidad multivariable. Para resolver esta variante del problema, basta con evaluar una función de costo asociada al problema polinomial de valores propios definido en la expresión ( 5-17 ), considerando cada una de las formas modales con las que se disponga. A continuación se presentan los pasos que describen esta metodología:

#### *Paso1 Formulación del problema polinomial de valores propios*

De acuerdo a lo expresado anteriormente, en primera instancia, se debe contar con la parametrización de la matriz de transmisibilidad multivariable entre las respuestas de referencia y no referenciales que sean adoptadas por el usuario, para esto, se deberán llevar a cabo las dos primeras etapas descritas en la sección 7.2.3, con la única salvedad de emplear sólo una condición de carga. Para esta etapa se recomienda sobreestimar el orden del sistema de tal forma de obtener parametrizaciones altamente confiables.

## Paso2 Evaluación de función de costo y selección de polo relativo a cada forma modal

Por lo general la mayoría de los métodos de identificación modal operacional permiten conocer de manera conjunta frecuencias y formas modales con un alto grado de precisión. Debido a lo anterior, y en virtud de reducir el gasto computacional, se propone evaluar esta función de costo en una vecindad acotada, y que será definida por el valor que presente cada frecuencia relacionada a la forma modal en estudio. Bajo este antecedente, se propone evaluar una distribución discreta de polos, para cada frecuencia disponible, cuyos límites queden definidos por los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \text{Imag}(s)^- &= (1 - \gamma_\omega)\omega_n \\ \text{Imag}(s)^+ &= (1 + \gamma_\omega)\omega_n \\ \text{Re}(s)^- &= -(1 + \gamma_\omega)\omega_n\beta_{max} \\ \text{Re}(s)^+ &= \beta_{min} \end{aligned} \tag{7-18}$$

Donde

- $\text{Imag}(s)^-, \text{Imag}(s)^+$ : Límites inferior y superior, respectivamente, correspondientes al dominio imaginario de los polos empleados para evaluar la función de costo empleando como referencia el valor de la frecuencia  $\omega_n$ .
- $\text{Re}(s)^-, \text{Re}(s)^+$ : Límites inferior y superior, respectivamente, correspondientes al dominio real de los polos empleados para evaluar la función de costo empleando como referencia el valor de la frecuencia  $\omega_n$ .
- $\omega_n$ : Frecuencia natural angular asociada al modo evaluado. Considerando los bajos valores de amortiguamiento que presentan las estructuras de tipo civil, no existe inconveniente considerar como alternativa la frecuencia natural amortiguada.
- $\gamma_\omega$ : Factor de desviación relativa a la frecuencia del sistema. Este valor define la banda de frecuencias que será empleado en la evaluación de la función de costo. En caso de haber empleado diagramas de estabilización en etapas previas, se recomienda emplear la misma tolerancia empleada para el criterio adicional de distancia de frecuencias.
- $\beta_{max}, \beta_{min}$ : Máximo y mínimo valor de amortiguamiento crítico esperado en la estructura.

Según lo descrito anteriormente, al discretizar ambos dominios (real e imaginario) en  $n$  puntos, se logrará evaluar la función de costo considerando  $n^2$  polos, cuyos extremos corresponderían a:

$$\begin{aligned}
s_{11} &= (-\beta_{min} + i)(1 - \gamma_f)\omega_n \\
s_{1n} &= (-\beta_{min} + i)(1 + \gamma_f)\omega_n \\
s_{n1} &= (-\beta_{max} + i)(1 - \gamma_f)\omega_n \\
s_{nn} &= (-\beta_{max} + i)(1 + \gamma_f)\omega_n
\end{aligned}
\tag{7-19}$$

Una vez definidos los potenciales polos del sistema, se procede con la evaluación de la expresión ( 5-17 ), para finalmente escoger el polo para el cual la norma euclidiana del vector generado sea la mínima.

Cabe destacar que para el proceso de minimización en la función de costo, el usuario podría pensar en encontrar las raíces del polinomio matricial, no obstante los coeficientes no son matrices cuadradas, por lo que resulta imposible el uso de la matriz compañera (*companion matrix*) en la determinación de las raíces ( 4-33 ). Finalmente, se debe advertir que al momento de formular el problema polinomial de valores propios, la forma modal ingresada debe presentar sus componentes ordenadas según la distinción entre elementos referenciales y no referenciales.

### *Paso 3 Repetición pasos anteriores*

Considerando la nula información respecto al orden necesario para llevar a cabo la estimación paramétrica del paso N°1, así como la eventualidad de la existencia de múltiples mínimos locales en la evaluación de la expresión ( 5-17 ), se sugiere evaluar los pasos N°1 y 2 para distintos órdenes, para finalmente tomar un valor representativo de los mínimos encontrados para cada modo.

## **7.4 Identificación modal operacional mediante método SSI-Cov**

### **7.4.1 Introducción SSI-Cov**

Conocidas todas las variables que definen el problema a resolver, a continuación se presenta la implementación del método SSI-Cov (*Stochastic State-Space Covariance-Driven*) (Peeters & De Roeck, 1999), el cual ha sido escogido como el método de identificación modal operacional alternativo, con el cual serán contrastados los resultados obtenidos mediante funciones de transmisibilidad.

A continuación, y de manera simplificada, se presentan los principales aspectos que definen el problema de identificación para este método<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup> Información más detallada podrá ser encontrada en (Caroca, 2012) y (Van Overschee & De Moor, 2012)

Considere la siguiente ecuación diferencia que describe el comportamiento dinámico para un sistema de  $n_2$  masas conectadas mediante resortes y amortiguadores:

$$M\ddot{U}(t) + C_2\dot{U}(t) + KU(t) = F(t) = B_2u(t) \quad (7-20)$$

Donde  $M, C_2, K \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$  son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez respectivamente.  $F(t) \in \mathbb{R}^{n_2 \times 1}$  corresponde al vector de excitación, y  $U(t) \in \mathbb{R}^{n_2 \times 1}$  el vector de desplazamiento en tiempo continuo. Notar que el vector de fuerza ha sido factorizado mediante una matriz  $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}$  que describe la distribución espacial de las entradas, y un vector  $u(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  que representa los  $m$  inputs en el tiempo.

Considerando las siguientes definiciones,

$$x(t) = \begin{pmatrix} U(t) \\ \dot{U}(t) \end{pmatrix}, A_c = \begin{pmatrix} 0 & I_{n_2} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C_2 \end{pmatrix}, B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}B_2 \end{pmatrix} \quad (7-21)$$

La expresión ( 7-20 ) puede ser descrita mediante la siguiente ecuación de estado:

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t) \quad (7-22)$$

donde  $A_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de estado ( $n = 2n_2$ ),  $B_c \in \mathbb{R}^{n \times m}$  es la matriz de entrada y  $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  el vector de estado.

Considerando que difícilmente todos los grados de libertad puedan ser monitoreados, se considerará que sólo existen  $l$  ubicaciones que permiten ser observadas mediante sensores, los cuales pueden ser acelerómetros, o transductores de velocidad o desplazamiento, por lo tanto, se define la ecuación de observación:

$$y(t) = C_a \ddot{U}(t) + C_v \dot{U}(t) + C_d U(t) \quad (7-23)$$

donde  $y(t) \in \mathbb{R}^{l \times 1}$  corresponde al vector de salidas, y  $C_a, C_v, C_d \in \mathbb{R}^{l \times n_2}$  son las matrices de salida para desplazamiento, velocidad y aceleración.

Con las siguientes definiciones,

$$C = [C_d - C_a M^{-1}K \quad C_v - C_a M^{-1}C_2], D = C_a M^{-1}B_2 \quad (7-24)$$

la ecuación de observación ( 7-23 ) puede ser descrita mediante:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (7-25)$$

con  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$  matriz de salida y  $D \in \mathbb{R}^{l \times m}$  matriz de transmisión directa.

Las expresiones ( 7-22 ) y ( 7-25 ) conforman un modelo espacio-estado determinístico en tiempo continuo. Considerando que en la práctica resulta imposible disponer de lecturas en tiempo continuo, el modelo espacio-estado discreto queda definido por:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\y_k &= Cx_k + Du_k\end{aligned}\tag{7-26}$$

con  $x_k = x(k\Delta t)$  el vector de estado en tiempo discreto.  $A = \exp(A_c\Delta t)$  matriz de estado discreta y  $B = [A - I]A_c^{-1}B_c$  matriz discreta de entrada. En caso de incluir componentes de naturaleza estocástica (ruido), el modelo combinado espacio estado determinístico-estocástico queda definido como:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + w_k \\y_k &= Cx_k + Du_k + v_k\end{aligned}\tag{7-27}$$

donde  $w_k \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  corresponde al ruido del proceso y  $v_k \in \mathbb{R}^{l \times 1}$  medida de ruido producto del sistema de adquisición de datos. Estas componentes se asumen como ruido blanco y media cero.

El modelo estocástico espacio-estado se define como:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + w_k \\y_k &= Cx_k + v_k\end{aligned}\tag{7-28}$$

Notar que la expresión anterior, no es más que el modelo definido por (7-27), al cual se le ha suprimido la componente asociada a la excitación. Adicionalmente, el proceso es asumido como tipo estacionario con media cero.

Para este último modelo, las matrices de covarianza entre las salidas, es definida como

$$A_i = E[y_{k+i} y_k^T] \in \mathbb{R}^{l \times l}\tag{7-29}$$

mientras que la covarianza *inmediata* entre las variables de estado y salidas queda representada por:

$$G = E[x_{k+1} y_k^T] \in \mathbb{R}^{n \times l}\tag{7-30}$$

Considerando los antecedentes presentado, adicionalmente puede ser deducida la siguiente expresión:

$$A_i = CA^{i-1}G\tag{7-31}$$

Una vez identificadas las salidas del sistema, el vector  $y_k$  es ordenado de tal forma de que este agrupe en sus primeras  $r$  componentes las salidas denominadas como referenciales, y en las siguientes  $(l-r)$  componentes las restantes, de esta forma:

$$y_k = \begin{pmatrix} y_k^{\text{ref}} \\ y_k^{\sim\text{ref}} \end{pmatrix} \quad (7-32)$$

Considerando el ordenamiento anterior, a continuación se definen las matrices de covarianza entre las salidas y componentes utilizadas como referencia:

$$\Lambda_i^{\text{ref}} = E \left[ y_{k+i} (y_k^{\text{ref}})^T \right] \in \mathbb{R}^{l \times r} \quad (7-33)$$

De la misma forma, se define la matriz de covarianza *inmediata* entre el vector de estado y las salidas de referencia, se tiene:

$$G^{\text{ref}} = E \left[ x_{k+1} (y_k^{\text{ref}})^T \right] \in \mathbb{R}^{n \times r} \quad (7-34)$$

Utilizando ( 7-31 ), se tiene:

$$\Lambda_i^{\text{ref}} = CA^{i-1}G^{\text{ref}} \quad (7-35)$$

Considerando todas estas definiciones, el proceso de identificación comienza por ordenar las salidas utilizando una matriz tipo Hankel con  $2i$  bloques filas y  $j$  columnas, de esta forma:

$$H = \frac{1}{\sqrt{j}} \begin{bmatrix} y_0^{\text{ref}} & y_1^{\text{ref}} & \dots & y_{j-1}^{\text{ref}} \\ y_1^{\text{ref}} & y_2^{\text{ref}} & \dots & y_j^{\text{ref}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{i-1}^{\text{ref}} & y_i^{\text{ref}} & \dots & y_{i+j-2}^{\text{ref}} \\ y_i & y_{i+1} & \dots & y_{i+j-1} \\ y_{i+1} & y_{i+2} & \dots & y_{i+j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{2i-1} & y_{2i} & \dots & y_{2i+j-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{0|i-1}^{\text{ref}} \\ y_{i|2i-1}^{\text{ref}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_p^{\text{ref}} \\ Y_f \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow ri \text{ "past"} \\ \uparrow li \text{ "future"} \end{matrix} \in \mathbb{R}^{(r+l)i \times j} \quad (7-36)$$

Reordenando las matrices de covarianza entre el vector de observación y las salidas consideradas como referencias ( $\Lambda_i$ ) en una matriz tipo Toeplitz (diagonales con repetición del mismo elemento):

$$T_{1|i}^{\text{ref}} = \begin{bmatrix} \Lambda_i^{\text{ref}} & \Lambda_{i-1}^{\text{ref}} & \dots & \Lambda_1^{\text{ref}} \\ \Lambda_{i+1}^{\text{ref}} & \Lambda_i^{\text{ref}} & \dots & \Lambda_2^{\text{ref}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Lambda_{2i-1}^{\text{ref}} & \Lambda_{2i-2}^{\text{ref}} & \dots & \Lambda_i^{\text{ref}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{li \times ri} \quad (7-37)$$

Considerando el ordenamiento de la matriz de Hankel presentado en ( 7-36 ), y asumiendo ergodicidad, la matriz  $T_{1|i}^{\text{ref}}$ , puede ser estimada mediante la siguiente expresión:

$$T_{1|i}^{\text{ref}} = Y_f (Y_p^{\text{ref}})^T \quad (7-38)$$

Considerando la definición presentada en ( 7-33 ), se tiene además que la matriz  $T_{1|i}^{\text{ref}}$  queda definida por el siguiente producto matricial:

$$T_{1|i}^{\text{ref}} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} [A^{i-1}G^{\text{ref}} \quad A^{i-2}G^{\text{ref}} \quad \dots \quad A^iG^{\text{ref}} \quad G^{\text{ref}}] = O_i C_i^{\text{ref}} \quad (7-39)$$

donde  $O_i \in \mathbb{R}^{li \times n}$  corresponde a la matriz de observabilidad extendida, mientras que  $C_i^{\text{ref}} \in \mathbb{R}^{n \times ri}$  corresponde a la matriz de controlabilidad extendida (reversa).

Considerando la evaluación numérica que permite la expresión ( 7-38 ), las matrices de observabilidad y controlabilidad extendidas pueden ser obtenidas mediante una descomposición mediante valores singulares (SVD), de esta forma:

$$T_{1|i}^{\text{ref}} = USV^T = [U_1 \quad U_2] \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} = U_1 S_1 V_1^T \quad (7-40)$$

de donde las matrices  $O_i$  y  $C_i^{\text{ref}}$  pueden ser finalmente obtenidas mediante los siguientes productos:

$$O_i = U_1 S_1^{1/2} \quad (7-41)$$

$$C_i^{\text{ref}} = S_1^{1/2} V_1^T$$

Los parámetros modales de la estructura se obtienen resolviendo el problema de valores propios de la matriz A, por lo tanto, resulta necesario conocer esta matriz en virtud de cerrar el proceso de identificación. Para resolver este ítem, se puede observar la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{i-2} \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} \quad (7-42)$$

$$O^\uparrow A = O^\downarrow$$

Notar que las matrices  $O^\uparrow$  y  $O^\downarrow \in \mathbb{R}^{l(i-1) \times n}$  pueden ser obtenidas a partir de  $O_i$ , simplemente eliminando filas adecuadamente. La obtención de la matriz A corresponde a la solución del problema de mínimos cuadrados de ( 7-42 ), el cual puede ser resuelto de la siguiente manera:

Considere la descomposición QR de  $O^\uparrow$

$$O^\uparrow = QR \quad (7-43)$$

donde  $Q \in \mathbb{R}^{l(i-1) \times n}$  matriz de columnas ortogonales, y  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matriz triangular superior. Definiendo  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ :

$$S = Q^T O^\downarrow \quad (7-44)$$

La solución al problema de mínimos cuadrados está dada por:

$$A = R^{-1}S \quad (7-45)$$

Obtenida la matriz de estado  $A$ , los valores modales son obtenidos resolviendo el problema de valores propios sobre esta matriz, donde los polos del sistema discreto corresponderán a los valores propios ( $\lambda_{m_d}$ ), mientras que las formas modales corresponderán a los vectores propios obtenidos. Para esta parte, se debe recordar que la obtención numérica de las matrices que envuelve el procedimiento, se enmarca en un entorno de tiempo discreto, por lo que los resultados deben ser ajustados de tal forma de representar el dominio de tiempo continuo. Debido a lo anterior, cada polo asociado al modo  $m$  debe ser ajustado de la siguiente forma:

$$\lambda_{m_c} = \frac{\ln(\lambda_{m_d})}{\Delta t} = -\beta_m \omega_m \pm i \omega_m \sqrt{1 - \beta_m^2} \quad (7-46)$$

Para las formas modales, los vectores propios obtenidos corresponden al problema definido en el modelo espacio estado ( $\Psi$ ), por lo que éstos deben ser ajustados mediante la matriz  $C$  (primeras  $l$  filas de la matriz de observabilidad) de tal forma de obtener una forma modal con significado físico. De esta manera, el modo  $m$  queda definido por:

$$\Phi_m = C\Psi_m \quad (7-47)$$

Para la implementación de este método cabe destacar dos aspectos relevantes, estos son la generación de la matriz de Hankel y la detección del orden del sistema. A partir de la definición de (7-36), la estimación de las matrices de covarianza  $\Lambda_i$  dependerá de la cantidad de datos que serán empleados (columnas en matriz de Hankel), por lo que estadísticamente las covarianzas serán exactas sólo si  $j \rightarrow \infty$ . Por otra parte, se ha visto que la estimación de amortiguamientos, y en menor medida frecuencias, resultan sensibles a la elección del número de filas  $i$  con la cual la matriz  $H$  es definida, no existiendo regla alguna que asegure convergencia en los resultados a partir de una elección en el valor  $i$  (Cabboi, Magalhães, Gentile, & Cunha, 2013). Para la estimación del orden del sistema, y observando (7-40), se puede inferir que éste corresponde a la cantidad de valores singulares no nulos que presente la matriz  $S$ , no obstante en presencia de ruido, puede resultar una condición para la cual los valores singulares más bajos no lleguen al cero absoluto. En tal caso el orden podría ser identificado observando algún salto entre dos valores singulares consecutivos, aunque en la realidad este procedimiento no resulta del todo confiable. Para una correcta elección del orden del sistema, y tal como se presentó en la sección 4.3.1.2 para funciones de transmisibilidad, una herramienta útil corresponde al uso de diagramas de estabilización. Para confeccionar estos diagramas de manera eficiente, se fija un orden máximo y se determinan las matrices que definen el problema de identificación, para posteriormente tomar particiones sucesivas de las matrices  $U_1, S_1$ , las que permiten obtener polos para cada uno de los ordenes evaluados y graficarlos en el diagrama de estabilización, donde los polos

del sistema deberían aparecer estabilizados en posición vertical. Para este escenario, son de trascendental importancia los criterios adicionales de estabilidad, ya sean de distancia, energía o criterios fuertes, los que permitirán reducir la aparición de polos con naturaleza matemática y que entorpecen el proceso de identificación modal para el sistema en estudio (Bilbao, 2014).

## 7.5 Simulación numérica

### 7.5.1 Descripción modelo base

Para llevar a cabo la simulación numérica y posterior evaluación del desempeño de las metodologías propuestas, se ha adoptado como ejemplo de referencia, el sistema empleado en (Cara, Juan, Alarcón, Reynders, & De Roeck, 2013), el cual describe el comportamiento dinámico de una serie de 8 masas unidos mediante 9 resortes y amortiguadores (Figura 7-1).

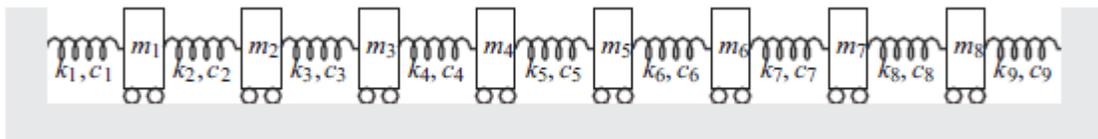


Figura 7-1: Esquema sistema empleado.

A continuación, se presentan las matrices que describen la dinámica de este problema:

Matriz de masa:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{8 \times 8} \quad (7-48)$$

Matriz de rigidez:

$$K = \begin{bmatrix} 2400 & -1600 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1600 & 4000 & -2400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2400 & 5600 & -3200 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3200 & 7200 & -4000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4000 & 8800 & -4800 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4800 & 10\,400 & -5600 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5600 & 12\,000 & -6400 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6400 & 13\,600 \end{bmatrix} \left(\frac{N}{m}\right) \quad (7-49)$$

Para confeccionar la matriz de amortiguamiento, se procede mediante una formulación tipo Rayleigh:

$$C = 0.68M + 1.743 * 10^{-4} \left(\frac{Ns}{m}\right) \quad (7-50)$$

Notar que la formulación Rayleigh (amortiguamiento proporcional) permite desacoplar el sistema matricial con N grados de libertad, en un set de N ecuaciones de un grado de libertad.

Considerando las matrices anteriores, y resolviendo el problema de valores propios, a continuación se presentan los parámetros modales que definen el sistema modal (frecuencia, amortiguamiento y formas modales):

Tabla 7-1: Propiedades Modales		
Modo	$f$ [Hz]	$\beta$ [%]
1	2.942	2.000
2	5.870	1.243
3	8.602	1.100
4	11.188	1.096
5	13.780	1.147
6	16.519	1.232
7	19.536	1.347
8	23.118	1.500

Con:

$f$ =Frecuencia natural.

$\beta$ =Razón de amortiguamiento crítico.

**Tabla 7-2:** Formas Modales normalizadas respecto a la última componente

Gdl	Modo1	Modo2	Modo3	Modo4	Modo5	Modo6	Modo7	Modo8
1	4.420	-3.740	2.650	-1.340	0.420	-0.080	0.010	-0.000
2	5.680	-2.430	-0.860	2.120	-1.340	0.410	-0.060	0.000
3	5.720	-0.180	-2.160	0.060	1.670	-1.100	0.270	-0.020
4	5.130	1.590	-1.160	-1.580	0.010	1.470	-0.750	0.100
5	4.230	2.460	0.490	-0.940	-1.340	-0.430	1.260	-0.330
6	3.170	2.490	1.560	0.560	-0.380	-1.050	-1.020	0.760
7	2.070	1.910	1.670	1.350	0.950	0.440	-0.230	-1.170
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

### 7.5.2 Estados de carga

Con el objetivo de poder explorar ampliamente el desempeño del uso de funciones de transmisibilidad en el proceso de identificación modal, cuatro escenarios de carga  $F(t)$  serán considerados como disponibles para la obtención de las respuestas de aceleración de la estructura. Para un mejor detallamiento de las condiciones a emplear, estas serán descritas mediante una matriz de repartición espacial ( $f$ )  $\in \mathbb{R}^{N \times N_\mu}$  y un vector de carga  $\mu(t) \in \mathbb{R}^{N_\mu \times 1}$  asociado a las fuentes de excitación, de esta forma, un estado de carga cualquiera queda determinado según la siguiente expresión:

$$F(t) = [f]\{u(t)\} \quad (7-51)$$

- Condición 1 (Esc1)

$$F_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} W_n(0, 1^2) \quad (7-52)$$

Con

$W_n(0, 1^2)$ : Ruido blanco Gaussiano con media cero y desviación estándar igual a la unidad.

Notar que esta condición de carga simula la acción simultánea del mismo input sobre todos los grados de libertad.

- Condición 2 (Esc2)

$$F_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} W_n(0, 1^2) \\ 2W_n(0, 1^2) \end{cases} \quad (7-53)$$

Notar que esta condición muestra la aplicación de dos cargas correlacionadas sobre la estructura (una el doble valor de la otra), actuando en los grados de libertad 3 y 6 respectivamente.

- Condición 3 (Esc3)

$$F_3(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} W_{n1_{f_1}} \\ W_{n2_{f_2}} \end{cases} \quad (7-54)$$

Esta condición refleja la acción de dos ruidos no correlacionados sobre la estructura, actuando en los grados de libertad 4 y 5 respectivamente.

- Condición 4 (Esc4)

$$F_4(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} W_{n1_{f_1}} \\ W_{n2_{f_2}} \end{cases} \quad (7-55)$$

Con

$W_{n1_{f_1}}$  : Ruido coloreado obtenido como la respuesta dinámica de un sistema con frecuencia natural  $f_1 = 10Hz$ .

$W_{n1_{f_2}}$  : Ruido coloreado obtenido como la respuesta dinámica de un sistema con frecuencia natural  $f_2 = 15Hz$ .

Estado de carga con aplicación de fuentes no correlacionadas actuando en grados de libertad 2 y 7 respectivamente.

Establecidos los parámetros modales, se procede a calcular la respuesta dinámica de la estructura para cada uno de los estados de carga establecidos. Para resolver este ítem, se ha adoptado como método de integración numérica de aceleración lineal de Newmark.

De tal forma de disponer la mayor precisión posible en las respuestas (necesario para la manipulación de funciones de transmisibilidad), se ha adoptado como paso de integración 1/1000 seg, para posteriormente, y en virtud de no incurrir en un gasto computacional en el proceso de identificación, filtrar y resamplear los registros a una tasa de muestro de 90Hz.

Cabe destacar que los grados de libertad (gdl) empleados en las posteriores implementaciones de metodologías corresponden a los gdl 1-4-5 y 8.

## 7.6 Resultados Transmisibilidad

A continuación se presentan los resultados obtenidos para cada una de las condiciones de carga definidas en la sección 7.5.2. Cabe destacar que en el proceso de selección de resultados, se ha incorporado un proceso de automatización basado en ordenamiento jerárquico de *distancias modales* para polos estables (Reynders, Houbrechts, & De Roeck, 2012), así como la elección de valores representativos mediante análisis de *clusters*, empleando la herramienta DBSCAN (Ester, Kriegel, Sander, & Xu, 1996) (Bilbao, 2014).

### 7.6.1 Resultados Metodología1

A continuación se presentan los resultados arrojados por la metodología N°1, la cual cuenta con los siguientes parámetros que definen la estimación no paramétrica de funciones, así como la obtención de polos mediante estimadores:

**Tabla 7-3:** Parámetros relacionados a la estimación no paramétrica de funciones de transmisibilidad.

Estimación no paramétrica de funciones	
N puntos ventana	4096
Tipo de ventana	Hanning
Traslapo	50%

**Tabla 7-4:** Parámetros asociados aplicación de estimador PLSCF-Plus y criterios adicionales para confección de diagramas de estabilización.

Obtención de polos	
Estimador	PLSCF-Plus
Orden inicial	10
Paso	1
Orden final	60
Banda de análisis	[0,25]Hz
$\beta_{min}$	0.1%
$\beta_{max}$	10%
$\Delta f_{crit}$ estabilización	1%
$\Delta \beta_{crit}$ estabilización	5%

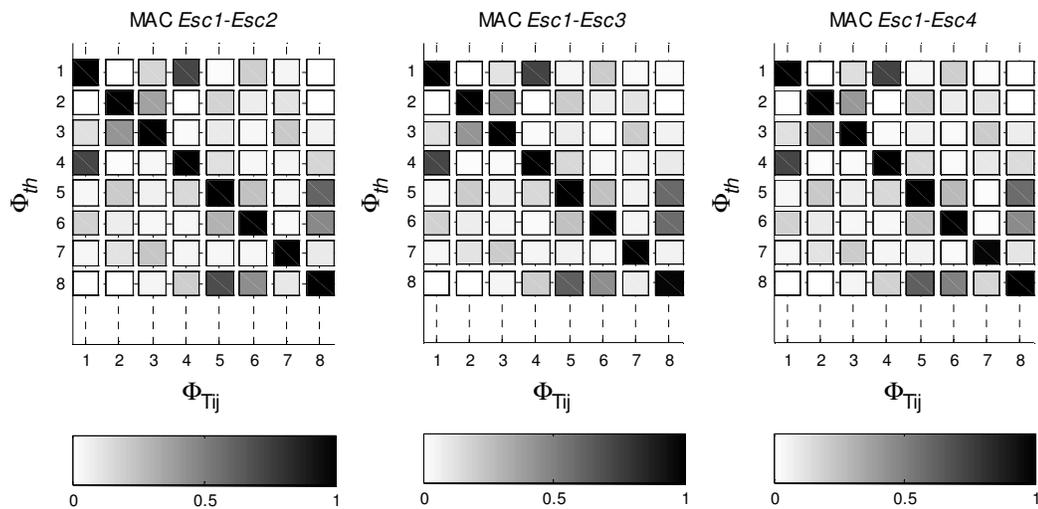
En las secciones subsecuentes, se expondrán los resultados considerando todas las combinaciones posibles entre los estados de carga señalados en la sección 7.5.2, y de esta forma poder evaluar el comportamiento de la metodología de acuerdo al grado de cumplimiento de los requisitos necesarios para poder llevar a cabo el proceso de identificación.

**Tabla 7-5:** Comparación de **frecuencias amortiguadas** teóricas (th) y frecuencias identificadas.  
Empleando sólo frecuencia amortiguadas en  $\bar{\sigma}_2^{-1}(\omega)$ . Metodología 1.

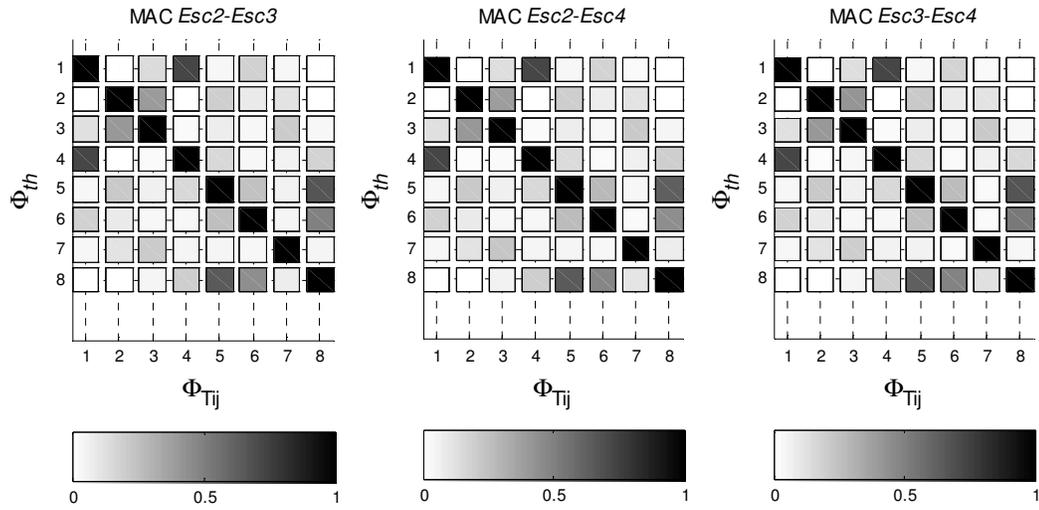
Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc1-Esc2		Esc1-Esc3		Esc1-Esc4	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	2.941	2.937	0.150	2.955	0.462	2.915	0.898
2	5.870	5.841	0.486	5.841	0.486	5.848	0.367
3	8.601	8.624	0.262	8.584	0.203	8.588	0.157
4	11.187	11.162	0.226	11.151	0.325	11.151	0.325
5	13.779	13.821	0.304	13.770	0.066	13.751	0.204
6	16.518	16.538	0.123	16.560	0.256	16.578	0.365
7	19.534	19.552	0.091	19.490	0.226	19.493	0.211
8	23.115	23.145	0.128	23.163	0.206	23.210	0.409

**Tabla 7-6:** Comparación de **frecuencias amortiguadas** teóricas (th) y frecuencias identificadas (continuación)..

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc2-Esc3		Esc2-Esc4		Esc3-Esc4	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	2.941	2.974	1.108	2.919	0.762	2.944	0.088
2	5.870	5.874	0.076	5.852	0.299	5.852	0.299
3	8.601	8.624	0.262	8.606	0.053	8.577	0.285
4	11.187	11.166	0.191	11.166	0.191	11.217	0.265
5	13.779	13.777	0.015	13.766	0.095	13.777	0.015
6	16.518	16.469	0.295	16.578	0.365	16.575	0.347
7	19.534	19.486	0.247	19.493	0.211	19.526	0.042
8	23.115	23.185	0.301	23.086	0.127	23.188	0.314



**Figura 7-2:** MAC entre modos teóricos  $\Phi_{th}$  e identificados  $\Phi_{Tij}$  para cada una de las combinaciones de escenarios de carga  
Determinación de modos a partir de frecuencias amortiguadas. Metodología1.



**Figura 7-3:** MAC entre modos teóricos  $\Phi_{th}$  e identificados  $\Phi_{Tij}$  para cada una de las combinaciones de escenarios de carga Determinación de modos a partir de frecuencias amortiguadas. Metodología1 (continuación).

**Tabla 7-7:** Valores MAC entre modos teóricos e identificados.  
Modos estimados a partir de frecuencias amortiguadas Metodología1.

Modo	Esc1-Esc2	Esc1-Esc3	Esc1-Esc4	Esc2-Esc3	Esc2-Esc4	Esc3-Esc4
1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
3	0.997	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999
4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
5	0.991	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
6	1.000	0.999	0.996	1.000	0.999	0.998
7	0.997	1.000	0.979	1.000	0.997	0.994
8	0.998	0.975	0.993	0.995	1.000	0.991

**Tabla 7-8:** Comparación de **frecuencias naturales teóricas** (th) y frecuencias identificadas.  
Discriminación de polos falsos mediante detección de máximos de  $\bar{\sigma}_2^{-1}(\omega)$ . Metodología 1.

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc1-Esc2		Esc1-Esc3		Esc1-Esc4	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	2.942	2.941	0.034	2.941	0.034	2.889	1.801
2	5.870	5.870	0.000	5.877	0.119	5.842	0.477
3	8.602	8.602	0.000	8.591	0.128	8.565	0.430
4	11.188	11.102	0.769	11.152	0.322	11.093	0.849
5	13.780	13.774	0.044	13.758	0.160	13.650	0.943
6	16.519	16.493	0.157	16.458	0.369	16.477	0.254
7	19.536	19.515	0.107	19.520	0.082	19.535	0.005
8	23.118	23.077	0.177	23.055	0.273	23.033	0.368

**Tabla 7-9:** Comparación de **frecuencias naturales teóricas** (th) y frecuencias identificadas (continuación).

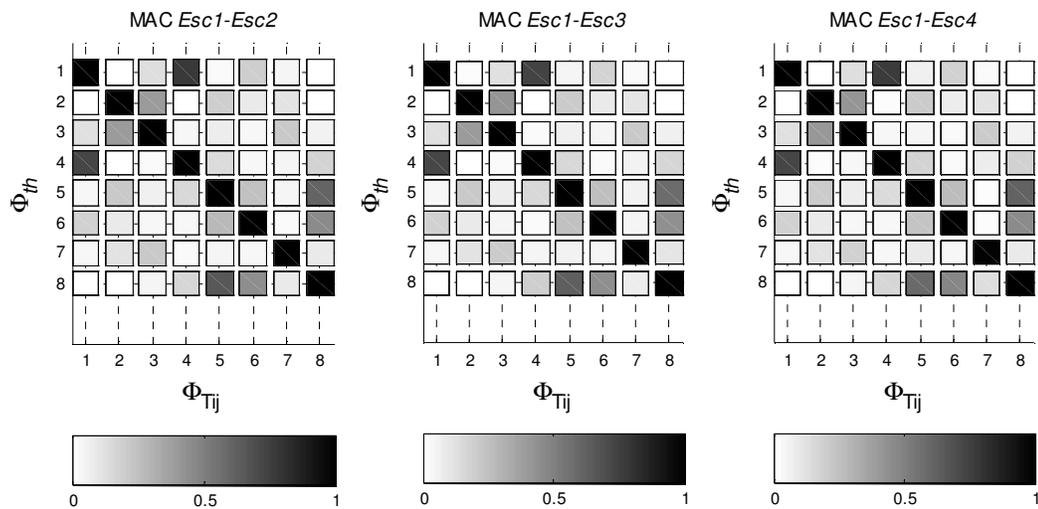
Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc2-Esc3		Esc2-Esc4		Esc3-Esc4	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	2.942	2.924	0.612	2.912	1.020	2.934	0.272
2	5.870	5.868	0.034	5.859	0.187	5.858	0.204
3	8.602	8.593	0.105	8.598	0.047	8.596	0.070
4	11.188	11.108	0.715	11.154	0.304	11.176	0.107
5	13.780	13.725	0.399	13.766	0.102	13.794	0.102
6	16.519	16.553	0.206	16.537	0.109	16.413	0.642
7	19.536	19.536	0.000	19.328	1.065	18.574	4.924
8	23.118	23.012	0.459	23.119	0.004	-	-

**Tabla 7-10:** Comparación de **amortiguamientos** teóricos (th) e identificados.  
Discriminación de polos falsos mediante detección de máximos de  $\bar{\sigma}_2^{-1}(\omega)$ . Metodología 1

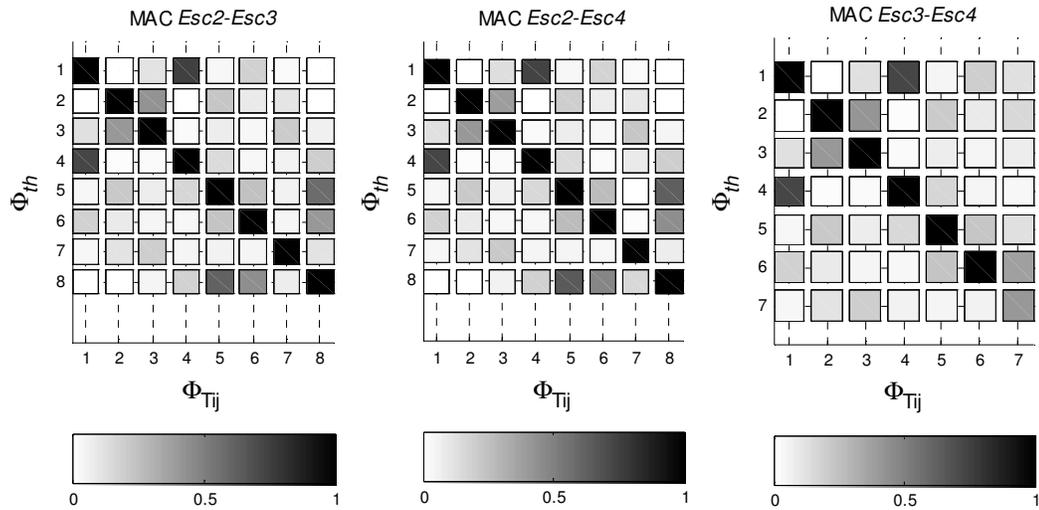
Modo	$\beta_{th}$ [%]	Esc1-Esc2		Esc1-Esc3		Esc1-Esc4	
		$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %
1	2.000	2.001	0.050	1.715	14.250	2.915	45.750
2	1.243	1.200	3.459	1.053	15.286	2.201	77.072
3	1.100	1.083	1.545	1.234	12.182	1.045	5.000
4	1.096	1.306	19.161	1.007	8.120	0.964	12.044
5	1.147	1.100	4.098	1.120	2.354	1.497	30.514
6	1.232	1.281	3.977	1.046	15.097	1.111	9.821
7	1.347	1.373	1.930	1.334	0.965	1.321	1.930
8	1.500	1.484	1.067	1.160	22.667	1.466	2.267

**Tabla 7-11:** Comparación de **amortiguamientos** teóricos (th) e identificados (continuación).

Modo	$\beta_{th}$ [%]	Esc2-Esc3		Esc2-Esc4		Esc3-Esc4	
		$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %
1	2.000	2.256	12.800	2.235	11.750	1.584	20.800
2	1.243	1.040	16.331	1.384	11.344	0.961	22.687
3	1.100	0.981	10.818	1.053	4.273	0.842	23.455
4	1.096	1.019	7.026	0.642	41.423	0.991	9.580
5	1.147	1.212	5.667	1.049	8.544	0.751	34.525
6	1.232	1.006	18.344	0.567	53.977	1.189	3.490
7	1.347	1.515	12.472	2.117	57.164	1.649	22.420
8	1.500	2.305	53.667	1.084	27.733	-	-



**Figura 7-4:** MAC entre modos teóricos  $\Phi_{th}$  e identificados  $\Phi_{Tij}$  para cada una de las combinaciones de escenarios de carga  
Determinación de modos a partir de frecuencias naturales (polos). Metodología1.



**Figura 7-5:** MAC entre modos teóricos  $\Phi_{th}$  e identificados  $\Phi_{Tij}$  para cada una de las combinaciones de escenarios de carga Determinación de modos a partir de frecuencias naturales (polos). Metodología1 (continuación).

**Tabla 7-12:** Valores MAC entre modos teóricos e identificados.  
Determinación de modos a partir de frecuencias naturales (polos). Metodología1.

Modo	Esc1-Esc2	Esc1-Esc3	Esc1-Esc4	Esc2-Esc3	Esc2-Esc4	Esc3-Esc4
1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
3	1.000	1.000	0.999	1.000	1.000	1.000
4	0.996	1.000	0.997	0.999	1.000	1.000
5	0.999	1.000	0.993	1.000	1.000	1.000
6	1.000	1.000	0.999	1.000	0.999	0.998
7	0.998	1.000	0.989	1.000	0.982	0.402
8	0.999	0.996	1.000	0.995	1.000	-

## 7.6.2 Resultados Metodología2

A continuación se presentan los resultados arrojados por la metodología N°2, la cual cuenta con los siguientes parámetros que definen la estimación paramétrica de funciones de transmisibilidad, así como la obtención de polos mediante estimadores:

**Tabla 7-13:** Parámetros relacionados a la estimación paramétrica de funciones de transmisibilidad.

Conversión de respuestas al dominio de frecuencias (Fourier)		Estimación paramétrica de funciones	
N puntos ventana	Largo del registro	Estimador	IO con efectos transientes
Tipo de ventana	rectangular	Orden polinomio	60
Traslapo	0%	Banda de interés	[0,30] Hz

**Tabla 7-14:** Parámetros asociados aplicación de estimador PLSCF-Plus y criterios adicionales para confección de diagramas de estabilización.

Obtención de polos	
Estimador	PLSCF-Plus
Orden inicial	10
Paso	1
Orden final	60
Banda de análisis	[0,25]Hz
$\beta_{min}$	0.1%
$\beta_{max}$	10%
$\Delta f_{crit}$ estabilización	1%
$\Delta \beta_{crit}$ estabilización	5%

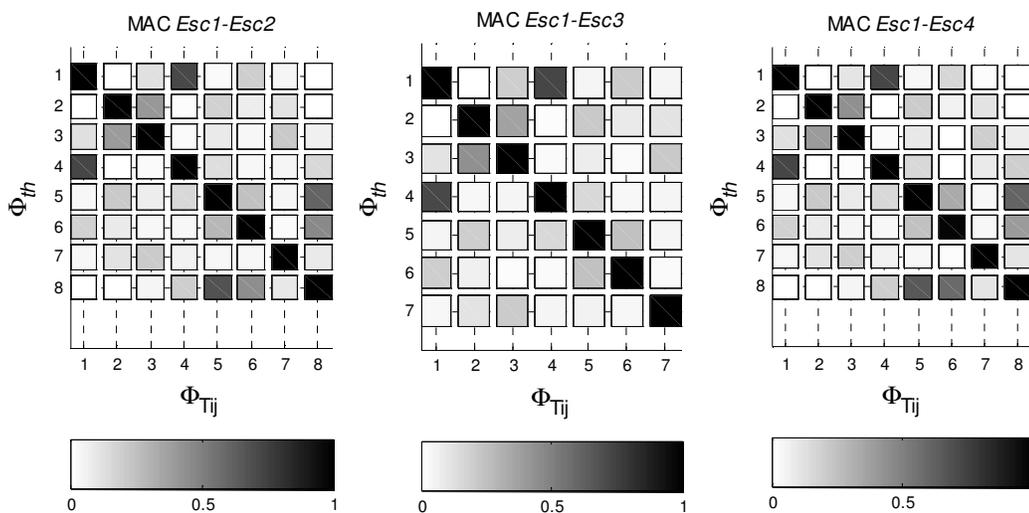
En las secciones siguientes se presentan los resultados arrojados para cada una de las condiciones de carga establecidas en la sección 7.5.2.

**Tabla 7-15:** Comparación de **frecuencias amortiguadas** teóricas (th) y frecuencias identificadas. Empleando sólo frecuencia amortiguadas en  $\bar{\sigma}_2^{-1}(\omega)$ . Metodología 2.

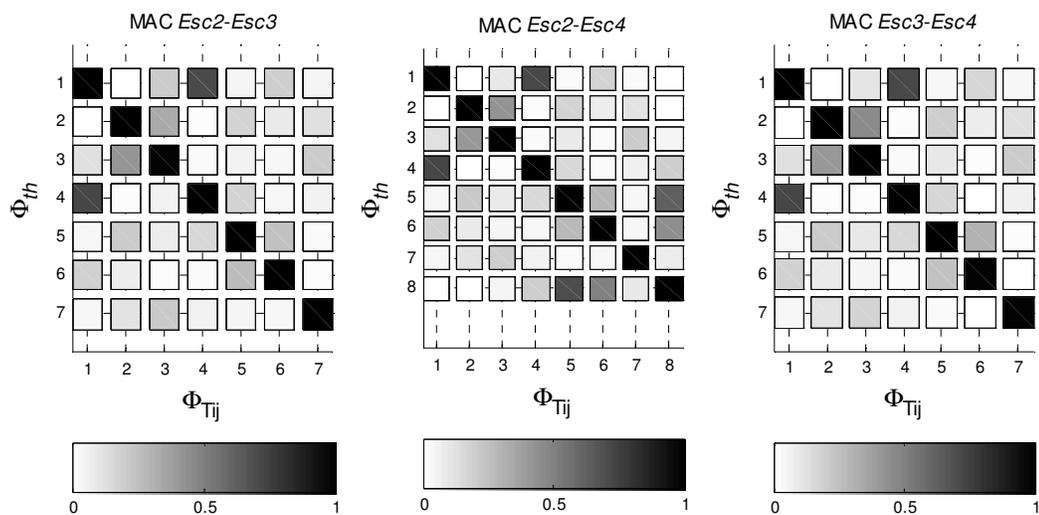
Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc1-Esc2		Esc1-Esc3		Esc1-Esc4	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	2.941	2.938	0.116	2.766	5.964	2.944	0.088
2	5.870	5.877	0.127	5.816	0.912	5.882	0.212
3	8.601	8.593	0.099	8.621	0.227	8.587	0.168
4	11.187	11.176	0.101	11.165	0.200	11.176	0.101
5	13.779	13.792	0.094	13.770	0.066	13.803	0.173
6	16.518	16.530	0.074	16.536	0.111	16.536	0.111
7	19.534	19.552	0.091	19.574	0.204	19.480	0.278
8	23.115	23.173	0.249	-	-	23.162	0.202

**Tabla 7-16:** Comparación de **frecuencias amortiguadas** teóricas (th) y frecuencias identificadas (continuación).

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc2-Esc3		Esc2-Esc4		Esc3-Esc4	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	2.941	2.944	0.088	2.938	0.116	2.872	2.360
2	5.870	5.827	0.725	5.871	0.025	5.927	0.979
3	8.601	8.610	0.099	8.587	0.168	8.543	0.680
4	11.187	11.203	0.140	11.181	0.057	11.203	0.140
5	13.779	13.803	0.173	13.797	0.130	13.842	0.457
6	16.518	16.502	0.095	16.508	0.059	16.641	0.746
7	19.534	19.796	1.340	19.463	0.365	19.469	0.334
8	23.115	-	-	23.118	0.011	-	-



**Figura 7-6:** MAC entre modos teóricos  $\Phi_{th}$  e identificados  $\Phi_{Tij}$  para cada una de las combinaciones de escenarios de carga Determinación de modos a partir de frecuencias amortiguadas. Metodología 2.



**Figura 7-7:** MAC entre modos teóricos  $\Phi_{th}$  e identificados  $\Phi_{Tij}$  para cada una de las combinaciones de escenarios de carga Determinación de modos a partir de frecuencias amortiguadas. Metodología 2 (continuación).

**Tabla 7-17:** Valores MAC entre modos teóricos e identificados.  
Modos estimados a partir de frecuencias amortiguadas. Metodología 2.

Modo	Esc1-Esc2	Esc1-Esc3	Esc1-Esc4	Esc2-Esc3	Esc2-Esc4	Esc3-Esc4
1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2	1.000	0.993	1.000	0.999	1.000	1.000
3	1.000	0.991	0.999	0.986	0.998	0.997
4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
5	0.996	1.000	0.998	0.998	0.993	0.997
6	1.000	0.999	0.979	1.000	0.998	0.982
7	0.996	0.997	0.995	0.991	0.999	0.981
8	0.997	-	0.995	-	1.000	-

**Tabla 7-18:** Comparación de **frecuencias naturales teóricas** (th) y frecuencias identificadas.  
Discriminación de polos falsos mediante detección de máximos de  $\bar{\sigma}_2^{-1}(\omega)$ . Metodología 2.

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc1-Esc2		Esc1-Esc3		Esc1-Esc4	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	2.942	2.942	0.000	2.763	6.084	2.936	0.204
2	5.870	5.868	0.034	5.786	1.431	5.818	0.886
3	8.602	8.600	0.023	8.557	0.523	8.573	0.337
4	11.188	11.184	0.036	10.991	1.761	11.179	0.080
5	13.780	13.774	0.044	13.750	0.218	13.768	0.087
6	16.519	16.510	0.054	16.533	0.085	15.604	5.539
7	19.536	19.522	0.072	20.019	2.472	19.460	0.389
8	23.118	23.095	0.099	-	-	23.089	0.125

**Tabla 7-19:** Comparación de **frecuencias naturales teóricas** (th) y frecuencias identificadas (continuación).

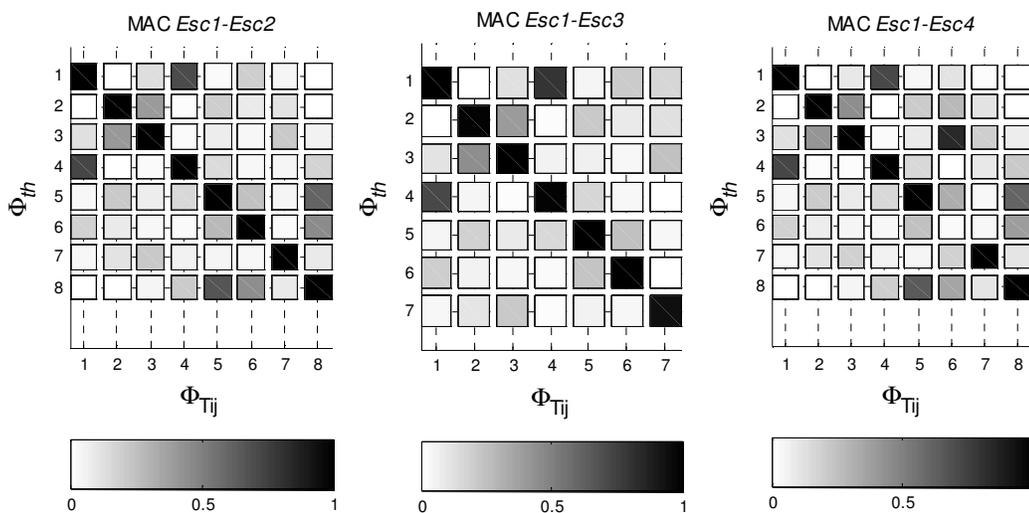
Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc2-Esc3		Esc2-Esc4		Esc3-Esc4	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	2.942	2.905	1.258	2.943	0.034	2.514	14.548
2	5.870	5.864	0.102	5.844	0.443	5.859	0.187
3	8.602	8.617	0.174	8.371	2.685	8.335	3.104
4	11.188	11.269	0.724	11.165	0.206	11.062	1.126
5	13.780	13.833	0.385	13.769	0.080	13.519	1.894
6	16.519	16.516	0.018	16.411	0.654	16.351	1.017
7	19.536	19.442	0.481	19.464	0.369	19.380	0.799
8	23.118	-	-	22.994	0.536	-	-

**Tabla 7-20:** Comparación de **amortiguamientos** teóricos (th) e identificados.  
Discriminación de polos falsos mediante detección de máximos de  $\bar{\sigma}_2^{-1}(\omega)$ . Metodología 2

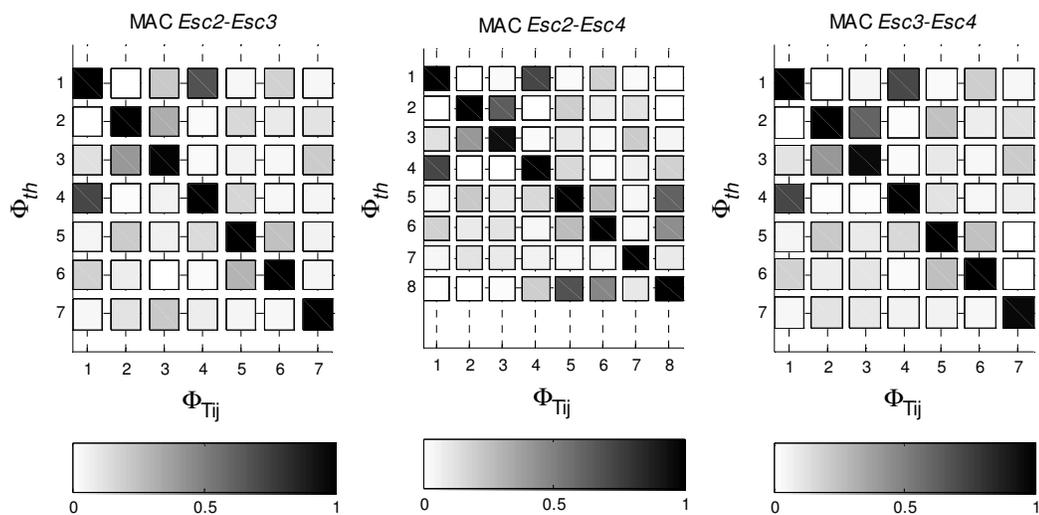
Modo	$\beta_{th}$ [%]	Esc1-Esc2		Esc1-Esc3		Esc1-Esc4	
		$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %
1	2.000	2.001	0.050	0.295	85.250	2.284	14.200
2	1.243	1.243	0.000	1.095	11.907	1.310	5.390
3	1.100	1.096	0.364	0.510	53.636	1.151	4.636
4	1.096	1.093	0.274	1.028	6.204	1.043	4.836
5	1.147	1.142	0.436	1.108	3.400	0.813	29.119
6	1.232	1.234	0.162	1.637	32.873	1.084	12.013
7	1.347	1.346	0.074	3.873	187.528	1.261	6.385
8	1.500	1.503	0.200	-	-	1.482	1.200

**Tabla 7-21:** Comparación de **amortiguamientos** teóricos (th) e identificados (continuación).

Modo	$\beta_{th}$ [%]	Esc2-Esc3		Esc2-Esc4		Esc3-Esc4	
		$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %
1	2.000	3.021	51.050	1.640	18.000	3.427	71.350
2	1.243	0.463	62.751	1.015	18.343	0.140	88.737
3	1.100	0.702	36.182	1.629	48.091	1.920	74.545
4	1.096	1.000	8.759	0.999	8.850	0.638	41.788
5	1.147	1.123	2.092	1.264	10.201	4.341	278.466
6	1.232	1.031	16.315	0.705	42.776	1.341	8.847
7	1.347	0.588	56.347	2.125	57.758	4.042	200.074
8	1.500	-	-	2.245	49.667	-	-



**Figura 7-8:** MAC entre modos teóricos  $\Phi_{th}$  e identificados  $\Phi_{Tij}$  para cada una de las combinaciones de escenarios de carga  
Determinación de modos a partir de frecuencias naturales (polos). Metodología 2.



**Figura 7-9:** MAC entre modos teóricos  $\Phi_{th}$  e identificados  $\Phi_{Tij}$  para cada una de las combinaciones de escenarios de carga Determinación de modos a partir de frecuencias naturales (polos). Metodología 2 (continuación).

**Tabla 7-22:** Valores MAC entre modos teóricos e identificados.  
Determinación de modos a partir de frecuencias naturales (polos). Metodología 2

Modo	Esc1-Esc2	Esc1-Esc3	Esc1-Esc4	Esc2-Esc3	Esc2-Esc4	Esc3-Esc4
1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2	1.000	0.985	0.999	1.000	1.000	1.000
3	1.000	1.000	0.997	0.982	0.930	0.950
4	1.000	0.987	1.000	0.996	1.000	0.999
5	0.998	1.000	0.999	0.994	0.996	0.996
6	1.000	0.999	0.024	1.000	0.999	1.000
7	0.998	0.934	0.993	1.000	0.999	0.967
8	0.999	-	0.995	-	1.000	-

### 7.6.3 Resultados Metodología3

En la presente sección se exhiben los resultados obtenidos producto de la implementación de la metodología N°3. A continuación se presentan los parámetros que definen los estimadores involucrados y la confección de diagramas de estabilización:

**Tabla 7-23:** Parámetros relacionados a la obtención de la respuesta en el dominio de Fourier

Conversión de respuestas al dominio de frecuencias (Fourier)	
N puntos ventana	Largo del registro
Tipo de ventana	rectangular
Traslapo	0%

**Tabla 7-24:** Parámetros asociados a la estimación paramétrica de matriz de transmisibilidad multivariable y criterios adicionales para diagrama de estabilización.

Obtención de polos	
Estimador	IO con efectos transientes
Orden inicial	10
Paso	1
Orden final	60
Banda de análisis	[0,25]Hz
$\beta_{min}$	0.1%
$\beta_{max}$	10%
$\Delta f_{crit}$ estabilización	1%
$\Delta \beta_{crit}$ estabilización	5%
$\Delta MAC_{crit}$ estabilización	5%
$\Delta MCF_{crit}$ estabilización	10%

Cabe destacar que las respuestas de los grados de libertad 2 y 3 han sido seleccionadas para actuar como referenciales, mientras que las restantes (1 y 4) serán consideradas como no referenciales. De acuerdo a lo anterior, el lector podrá notar que la cantidad de respuestas empleadas, así como la partición de éstas, permite la combinación de respuestas para dos estados de carga distintos entre sí ( 7-7 ).

En las secciones siguientes se presentan los resultados arrojados para cada una de las condiciones de carga establecidas en la sección 7.5.2.

**Tabla 7-25:** Comparación de **frecuencias naturales teóricas** (th) y frecuencias identificadas.  
Discriminación de polos falsos mediante detección de máximos de  $\bar{\sigma}_2^{-1}(\omega)$ . Metodología 3.

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc1-Esc2		Esc1-Esc3		Esc1-Esc4	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	2.942	2.942	0.000	2.942	0.000	2.942	0.000
2	5.870	5.869	0.017	5.869	0.017	5.869	0.017
3	8.602	8.600	0.023	8.600	0.023	8.600	0.023
4	11.188	11.185	0.027	11.185	0.027	11.185	0.027
5	13.780	13.774	0.044	13.774	0.044	13.774	0.044
6	16.519	16.510	0.054	16.510	0.054	16.510	0.054
7	19.536	19.522	0.072	19.522	0.072	19.522	0.072
8	23.118	23.096	0.095	-	-	23.096	0.095

**Tabla 7-26:** Comparación de **frecuencias naturales teóricas** (th) y frecuencias identificadas (continuación).

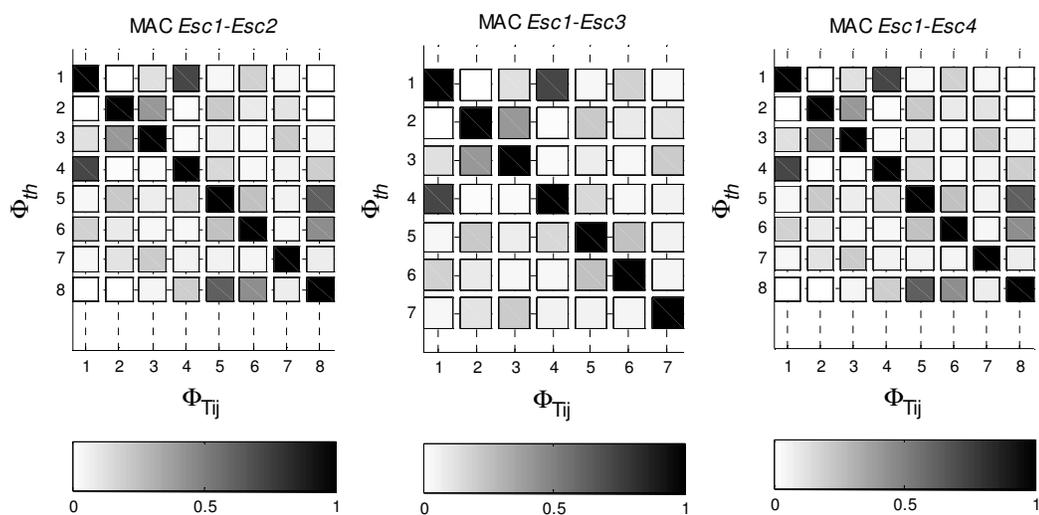
Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc2-Esc3		Esc2-Esc4		Esc3-Esc4	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	2.942	2.942	0.000	2.941	0.034	2.942	0.000
2	5.870	5.869	0.017	5.869	0.017	5.869	0.017
3	8.602	8.600	0.023	8.600	0.023	8.600	0.023
4	11.188	11.185	0.027	11.185	0.027	11.185	0.027
5	13.780	13.774	0.044	13.774	0.044	13.774	0.044
6	16.519	16.510	0.054	16.510	0.054	16.510	0.054
7	19.536	19.522	0.072	19.522	0.072	19.522	0.072
8	23.118	23.096	0.095	23.095	0.099	23.094	0.104

**Tabla 7-27:** Comparación de **amortiguamientos** teóricos (th) e identificados.  
Discriminación de polos falsos mediante detección de máximos de  $\bar{\sigma}_2^{-1}(\omega)$ . Metodología 3

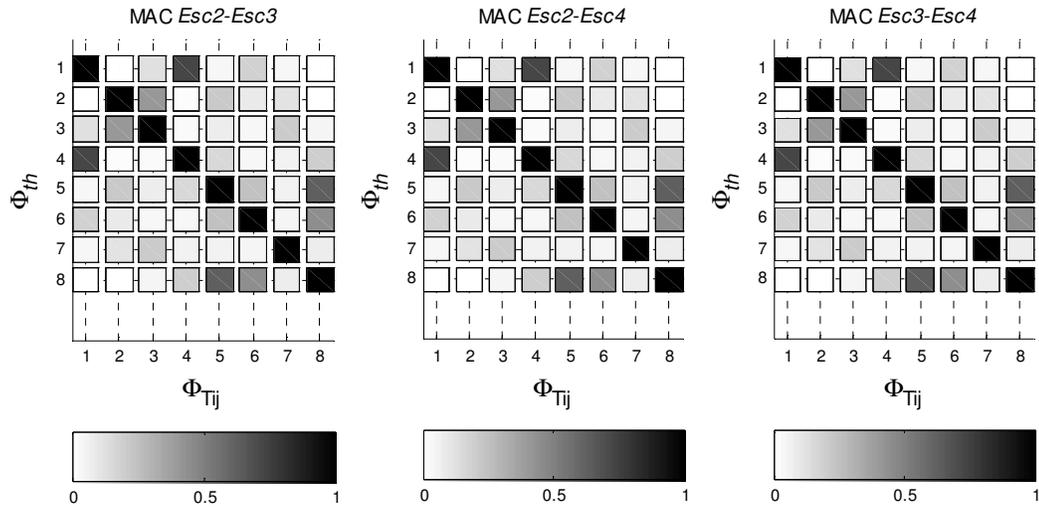
Modo	$\beta_{th}$ [%]	Esc1-Esc2		Esc1-Esc3		Esc1-Esc4	
		$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %
1	2.000	2.000	0.000	2.000	0.000	2.037	1.850
2	1.243	1.243	0.000	1.243	0.000	1.243	0.000
3	1.100	1.100	0.000	1.100	0.000	1.100	0.000
4	1.096	1.096	0.000	1.096	0.000	1.096	0.000
5	1.147	1.146	0.087	1.146	0.087	1.146	0.087
6	1.232	1.230	0.162	1.230	0.162	1.230	0.162
7	1.347	1.344	0.223	1.344	0.223	1.344	0.223
8	1.500	1.497	0.200	-	-	1.496	0.267

**Tabla 7-28:** Comparación de **amortiguamientos** teóricos (th) e identificados (continuación).

Modo	$\beta_{th}$ [%]	Esc2-Esc3		Esc2-Esc4		Esc3-Esc4	
		$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %
1	2.000	2.000	0.000	2.006	0.300	2.002	0.100
2	1.243	1.243	0.000	1.243	0.000	1.243	0.000
3	1.100	1.100	0.000	1.100	0.000	1.100	0.000
4	1.096	1.096	0.000	1.096	0.000	1.096	0.000
5	1.147	1.146	0.087	1.146	0.087	1.146	0.087
6	1.232	1.230	0.162	1.231	0.081	1.230	0.162
7	1.347	1.344	0.223	1.344	0.223	1.344	0.223
8	1.500	1.495	0.333	1.501	0.067	1.494	0.400



**Figura 7-10:** MAC entre modos teóricos  $\Phi_{th}$  e identificados  $\Phi_{Tij}$  para cada una de las combinaciones de escenarios de carga Determinación de modos a partir de frecuencias naturales (polos). Metodología 3.



**Figura 7-11:** MAC entre modos teóricos  $\Phi_{th}$  e identificados  $\Phi_{Tij}$  para cada una de las combinaciones de escenarios de carga Determinación de modos a partir de frecuencias naturales (polos). Metodología 3 (continuación).

**Tabla 7-29:** Valores MAC entre modos teóricos e identificados.  
Determinación de modos a partir de frecuencias naturales (polos). Metodología 3

Modo	Esc1-Esc2	Esc1-Esc3	Esc1-Esc4	Esc2-Esc3	Esc2-Esc4	Esc3-Esc4
1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
3	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
8	1.000	-	1.000	1.000	1.000	1.000

#### 7.6.4 Resultados Metodología4

A continuación se presentan los resultados arrojados por la metodología N°4, la cual cuenta con los siguientes parámetros que definen la estimación no paramétrica de funciones, así como la obtención de polos mediante estimadores:

**Tabla 7-30:** Parámetros relacionados a la estimación no paramétrica de funciones de transmisibilidad.

Estimación no paramétrica de funciones	
N puntos ventana	4096
Tipo de ventana	Hanning
Traslapo	50%

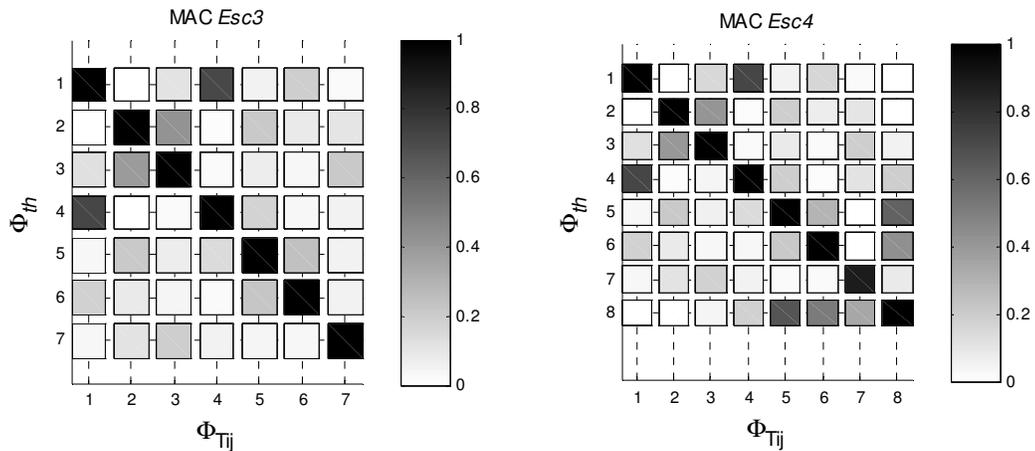
**Tabla 7-31:** Parámetros asociados aplicación de estimador PLSCF-Plus y criterios adicionales para confección de diagramas de estabilización.

Obtención de polos	
Estimador	PLSCF-Plus
Orden inicial	10
Paso	1
Orden final	60
Banda de análisis	[0,25]Hz
$\beta_{min}$	0.1%
$\beta_{max}$	10%
$\Delta f_{crit}$ estabilización	1%
$\Delta \beta_{crit}$ estabilización	5%

En las secciones subsecuentes, se expondrán los resultados correspondientes a cada uno de los estados de carga señalados en la sección 7.5.2, y de esta forma poder evaluar el comportamiento de la metodología de acuerdo al grado de cumplimiento de los requisitos necesarios para poder llevar a cabo el proceso de identificación.

**Tabla 7-32:** Comparación de **frecuencias amortiguadas** teóricas ( $\Phi_{th}$ ) y frecuencias identificadas.

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc3		Esc4	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	2.941	2.919	0.762	2.944	0.088
2	5.870	5.878	0.144	5.867	0.043
3	8.601	8.595	0.075	8.569	0.378
4	11.187	11.074	1.013	11.111	0.682
5	13.779	13.839	0.435	13.927	1.073
6	16.518	16.560	0.256	16.483	0.210
7	19.534	19.669	0.690	19.501	0.170
8	23.115	-	-	23.240	0.539
*				10.000	-
*				15.000	-



**Figura 7-12:** MAC entre modos teóricos  $\Phi_{th}$  e identificados  $\Phi_{Tij}$  para cada una de las combinaciones de escenarios de carga Determinación de modos a partir de frecuencias amortiguadas. Metodología 4.

**Tabla 7-33:** Valores MAC entre modos teóricos e identificados.  
Modos estimados a partir de frecuencias amortiguadas. Metodología 4.

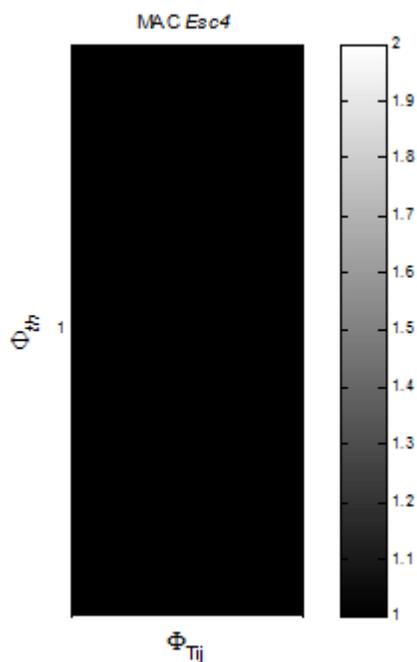
Modo	Esc1	Esc2	Esc3	Esc4
1	-	-	1.000	1.000
2	-	-	1.000	1.000
3	-	-	0.999	0.997
4	-	-	0.999	1.000
5	-	-	0.999	0.994
6	-	-	1.000	0.994
7	-	-	0.998	0.880
8	-	-	-	1.000

**Tabla 7-34:** Comparación de **frecuencias naturales teóricas** (th) y frecuencias identificadas (continuación).

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc3		Esc4	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	2.942	-	-	2.939	0.102
2	5.870	-	-	-	-
3	8.602	-	-	-	-
4	11.188	-	-	-	-
5	13.780	-	-	-	-
6	16.519	-	-	-	-
7	19.536	-	-	-	-
8	23.118	-	-	-	-

**Tabla 7-35:** Comparación de **amortiguamientos** teóricos (th) e identificados (continuación).

Modo	$\beta_{th}$ [%]	Esc3		Esc4	
		$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %
1	2.000	-	-	0.134	93.300
2	1.243	-	-	-	-
3	1.100	-	-	-	-
4	1.096	-	-	-	-
5	1.147	-	-	-	-
6	1.232	-	-	-	-
7	1.347	-	-	-	-
8	1.500	-	-	-	-



**Figura 7-13:** MAC entre modos teóricos  $\Phi_{th}$  e identificados  $\Phi_{Tij}$  para cada una de las combinaciones de escenarios de carga Determinación de modos a partir de frecuencias naturales (polos). Metodología 4.

**Tabla 7-36:** Valores MAC entre modos teóricos e identificados.  
 Determinación de modos a partir de frecuencias naturales (polos). Metodología 4

Modo	Esc1	Esc2	Esc3	Esc4
1	-	-	-	1.000
2	-	-	-	-
3	-	-	-	-
4	-	-	-	-
5	-	-	-	-
6	-	-	-	-
7	-	-	-	-
8	-	-	-	-

Notar que para esta metodología, los escenarios *Esc1*, *Esc2* y *Esc3* no han arrojado resultados que permitan ser comparados adecuadamente con los valores teóricos. Debido a este antecedente, se ha optado por omitir las figuras y tablas de resultados que incorporen exclusivamente estos escenarios.

### 7.6.5 Resultados Metodología5

En esta sección se presentan los resultados obtenidos producto de la implementación de la metodología N°5. Para esta alternativa, las formas modales empleadas en la estimación final de polos, corresponden a la solución exacta del problema de valores propios que definen la dinámica del sistema (matriz de masa y rigidez). A continuación se describen los parámetros utilizados en los estimadores involucrados:

**Tabla 7-37:** Parámetros relacionados a la obtención de la respuesta en el dominio de Fourier

Conversión de respuestas al dominio de frecuencias (Fourier)	
N puntos ventana	Largo del registro
Tipo de ventana	rectangular
Traslapo	0%

**Tabla 7-38:** Parámetros asociados a la estimación paramétrica matriz de transmisibilidad multivariable y parámetros para resolver problema de minimización  $\min(Y(s)\Phi_m)$ .

Obtención de polos	
Estimador	IO con efectos transientes
Orden polinomio	50-60
Banda de análisis	[0,25]Hz
Discretización real polos	200
Discretización real polos	200

Cabe destacar que las respuestas de los grados de libertad 2 y 3 han sido seleccionadas para actuar como referenciales, mientras que las restantes (1 y 4) serán consideradas como no referenciales.

En las secciones siguientes se presentan los resultados arrojados para cada una de las condiciones de carga establecidas en la sección 7.5.2.

**Tabla 7-39:** Comparación de **frecuencias naturales** teóricas (th) y frecuencias identificados. Metodología 5

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc1		Esc2	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	2.942	2.930	0.408	2.947	0.170
2	5.870	5.876	0.102	5.879	0.153
3	8.602	8.607	0.058	8.605	0.035
4	11.188	11.196	0.072	11.177	0.098
5	13.780	13.815	0.254	13.747	0.239
6	16.519	16.492	0.163	16.505	0.085
7	19.536	19.538	0.010	19.518	0.092
8	23.118	23.106	0.052	23.084	0.147

**Tabla 7-40:** Comparación de **frecuencias naturales** teóricas (th) y frecuencias identificados (continuación).

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc3		Esc4	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	2.942	2.935	0.238	-	-
2	5.870	5.857	0.221	5.863	0.119
3	8.602	8.596	0.070	8.597	0.058
4	11.188	11.190	0.018	11.160	0.250
5	13.780	13.759	0.152	13.803	0.167
6	16.519	16.513	0.036	16.576	0.345
7	19.536	19.491	0.230	19.520	0.082
8	23.118	23.071	0.203	23.109	0.039

**Tabla 7-41:** Comparación de **amortiguamientos** teóricos (th) e identificados. Metodología 5

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc1		Esc2	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	2.000	2.016	0.800	1.991	0.450
2	1.243	1.239	0.322	1.239	0.322
3	1.100	1.088	1.091	1.088	1.091
4	1.096	1.088	0.730	1.088	0.730
5	1.147	1.138	0.785	1.138	0.785
6	1.232	1.239	0.568	1.239	0.568
7	1.347	1.339	0.594	1.339	0.594
8	1.500	1.489	0.733	1.489	0.733

**Tabla 7-42:** Comparación de **amortiguamientos** teóricos (th) e identificados (continuación).

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc3		Esc4	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	2.000	1.991	0.450	-	-
2	1.243	1.239	0.322	1.239	0.322
3	1.100	1.088	1.091	1.088	1.091
4	1.096	1.088	0.730	1.088	0.730
5	1.147	1.138	0.785	1.163	1.395
6	1.232	1.239	0.568	1.189	3.490
7	1.347	1.339	0.594	1.339	0.594
8	1.500	1.489	0.733	1.515	1.000

## 7.7 Resultados SSI-Cov

A continuación se describen los parámetros que definen la aplicación del método SSI-Cov, en particular criterios para confección de diagramas de estabilización:

**Tabla 7-43:** Parámetros asociados a criterios adicionales para confección de diagramas de estabilización.

Obtención de polos	
Componentes referenciales empleadas	Gdl [1,4,5,8]
Orden inicial	10
Paso	1
Orden final	60
Banda de análisis	[0,25]Hz
$\beta_{min}$	0.1%
$\beta_{max}$	10%
$\Delta f_{crit}$ estabilización	1%
$\Delta \beta_{crit}$ estabilización	5%

En las secciones subsecuentes, se expondrán los resultados correspondientes a cada uno de los estados de carga señalados en la sección 7.5.2, y de esta forma poder evaluar el comportamiento de la metodología de acuerdo al grado de cumplimiento de los requisitos necesarios para poder llevar a cabo el proceso de identificación.

**Tabla 7-44:** Comparación de **frecuencias naturales teóricas (th)** y frecuencias identificadas. SSI-Cov.

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc1		Esc2	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	2.942	2.933	0.306	2.941	0.034
2	5.870	5.877	0.119	5.878	0.136
3	8.602	8.608	0.070	8.606	0.047
4	11.188	11.188	0.000	11.180	0.072
5	13.780	13.816	0.261	13.748	0.232
6	16.519	16.494	0.151	16.513	0.036
7	19.536	19.528	0.041	19.512	0.123
8	23.118	23.108	0.043	23.077	0.177

**Tabla 7-45:** Comparación de **frecuencias naturales teóricas (th)** y frecuencias identificadas (continuación).

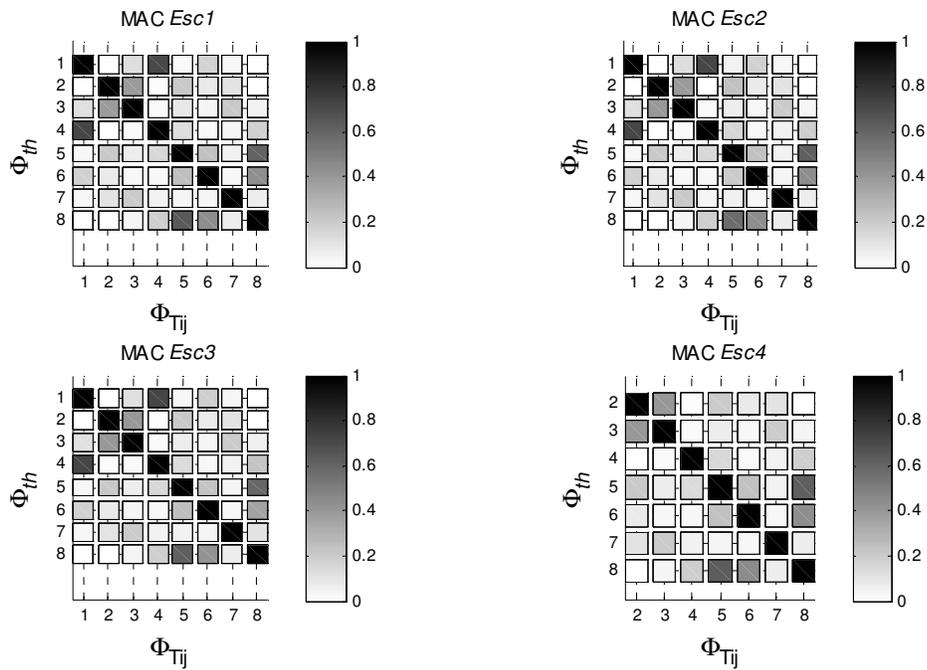
Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc3		Esc4	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	2.942	2.934	0.272	-	-
2	5.870	5.863	0.119	5.865	0.085
3	8.602	8.585	0.198	8.596	0.070
4	11.188	11.187	0.009	11.163	0.223
5	13.780	13.760	0.145	13.785	0.036
6	16.519	16.525	0.036	16.518	0.006
7	19.536	19.544	0.041	19.522	0.072
8	23.118	23.069	0.212	23.065	0.229

**Tabla 7-46:** Comparación de **amortiguamientos** teóricos (th) e identificados. SSI-Cov.

Modo	$\beta_{th}$ [%]	Esc1		Esc2	
		$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %
1	2.000	2.267	13.350	2.166	8.300
2	1.243	1.263	1.609	0.964	22.446
3	1.100	0.928	15.636	1.137	3.364
4	1.096	1.075	1.916	1.160	5.839
5	1.147	1.217	6.103	1.189	3.662
6	1.232	1.347	9.334	1.085	11.932
7	1.347	1.311	2.673	1.378	2.301
8	1.500	1.580	5.333	1.481	1.267

**Tabla 7-47:** Comparación de **amortiguamientos** teóricos (th) e identificados (continuación).

Modo	$\beta_{th}$ [%]	Esc3		Esc4	
		$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %
1	2.000	1.906	4.700	-	-
2	1.243	1.366	9.895	1.286	3.459
3	1.100	1.057	3.909	1.316	19.636
4	1.096	0.940	14.234	1.266	15.511
5	1.147	1.114	2.877	1.050	8.457
6	1.232	1.289	4.627	1.147	6.899
7	1.347	1.517	12.621	1.354	0.520
8	1.500	1.358	9.467	1.540	2.667



**Figura 7-14:** MAC entre modos teóricos  $\Phi_{th}$  e identificados  $\Phi_{Tij}$  para cada un de los escenarios de carga. SSI-Cov.

**Tabla 7-48:** Valores MAC entre modos teóricos e identificados.

Modo	Esc1-Esc2	Esc1-Esc3	Esc1-Esc4	Esc2-Esc3
1	1.000	1.000	1.000	-
2	1.000	1.000	1.000	1.000
3	1.000	1.000	1.000	1.000
4	1.000	1.000	1.000	1.000
5	0.998	0.997	1.000	1.000
6	1.000	1.000	1.000	1.000
7	1.000	1.000	1.000	1.000
8	1.000	1.000	0.992	1.000

## Capítulo 8

### Evaluación Experimental

Considerando que los resultados de las simulaciones exhibidas en el capítulo anterior obedecen a escenarios que difícilmente puedan ser replicados en alguna condición operacional para una estructura civil de gran envergadura, considerando por ejemplo una eventual no linealidad en el sistema o bien ruido instrumental, se decide incorporar el presente capítulo para intentar evaluar el desempeño de las metodologías considerando datos *reales* obtenidos para dos sistemas estructurales. Los sistemas considerados corresponden a una estructura reticulada montada y ensayada en laboratorio, así como datos provenientes del monitoreo continuo del edificio Torre Central de la facultad de Ingeniería de la Universidad de Chile.

#### 8.1 Estructura ensayada en laboratorio

##### 8.1.1 Descripción de la estructura

La estructura montada, corresponde a un sistema metálico conformado a partir de un set de barras y rótulas disponibles, que de acuerdo la distribución espacial y número de elementos empleados permite lograr la estructuración deseada<sup>5</sup>. Para este estudio la estructura empleada corresponde a la mostrada en la Figura 8-2.

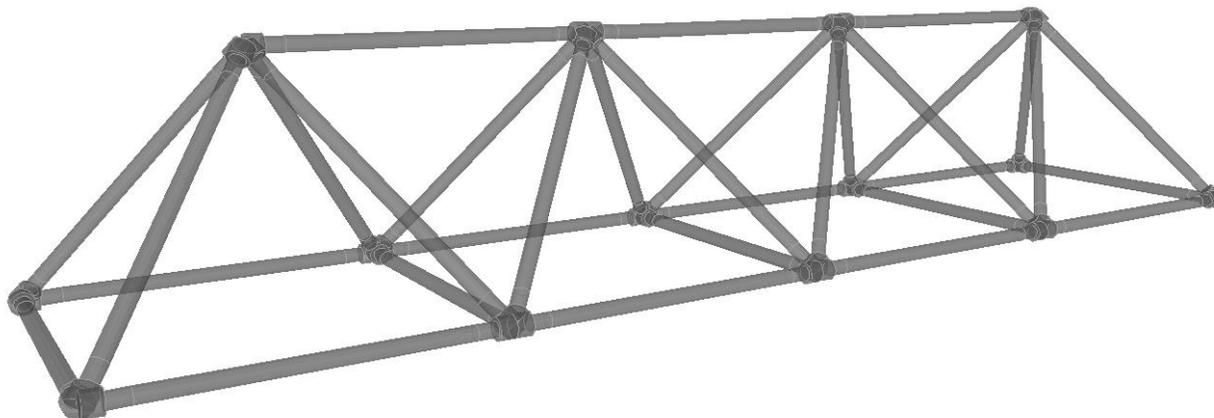
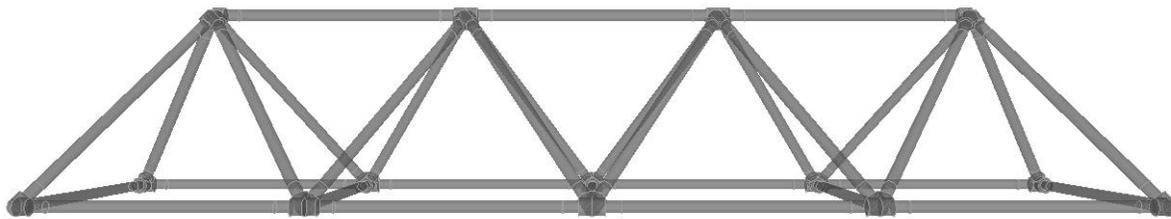
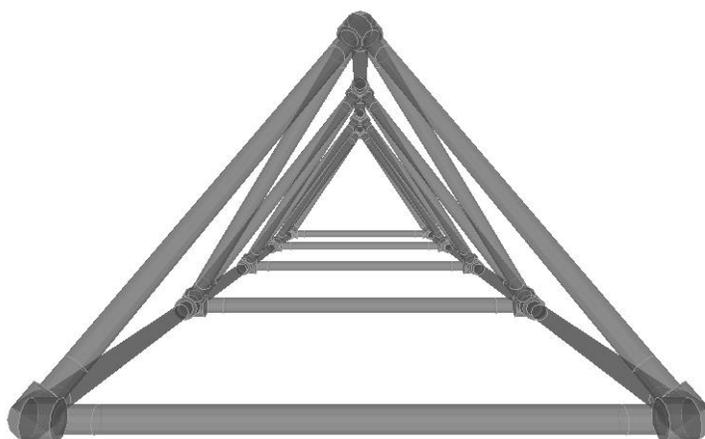


Figura 8-1: Estructura. Vista 3D.

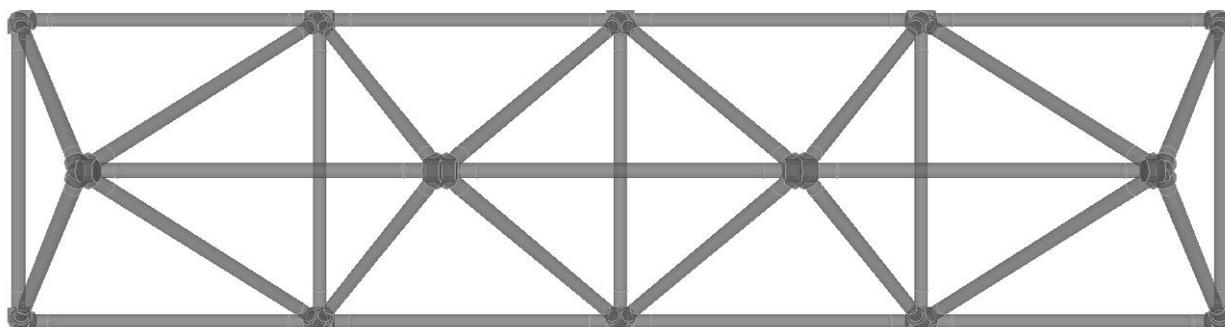
<sup>5</sup> Para mayor detalle [http://www.systemsxl.com/downloads/m12/M12\\_Catalogue.pdf](http://www.systemsxl.com/downloads/m12/M12_Catalogue.pdf)



**Figura 8-2:** Estructura. Vista frontal.



**Figura 8-3:** Estructura. Vista lateral.



**Figura 8-4:** Estructura. Vista superior.

Para el montaje de la estructura, esta fue suspendida en sus dos vértices extremos superiores de tal forma de poder capturar de mejor forma el comportamiento de cuerpo libre (Orellana, 2014). El monitoreo de la estructura se llevó a cabo empleando 6 sensores piezométricos de aceleración y 2 de fuerza (marca *PCB piezotronics Inc*), estos últimos empleados sólo para estimar los parámetros modales que serán empleados como valores referenciales considerando un escenario modal experimental (frecuencia, amortiguamiento y forma modal). A continuación se describe la enumeración de los nodos empleados (Figura 8-5), así como el posicionamiento de los sensores en la estructura (Tabla 8-1 y Tabla 8-2).

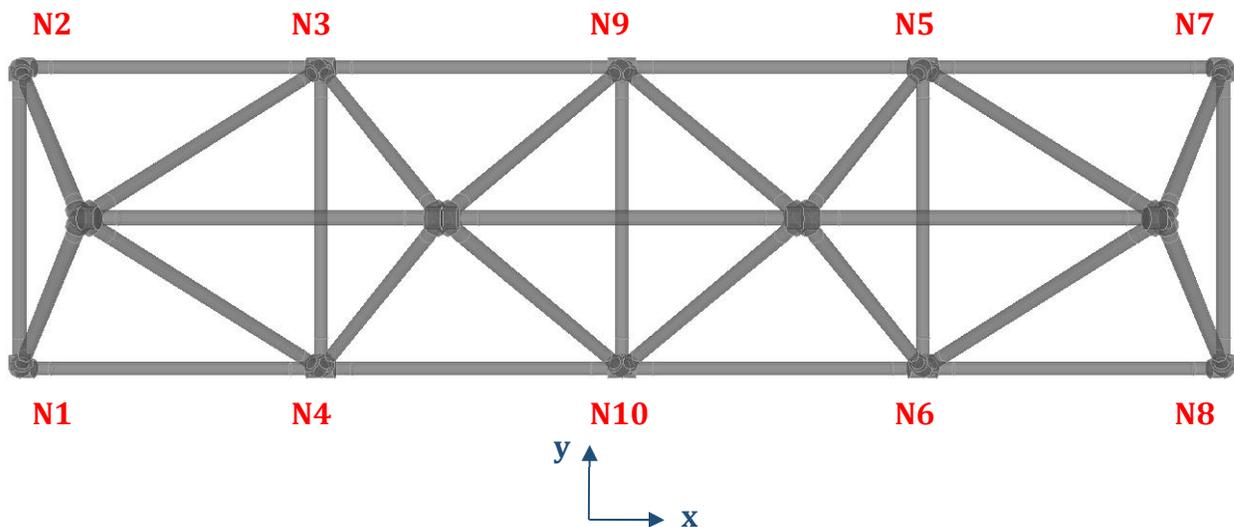


Figura 8-5: Enumeración Nodos y sistema referencial.

Tabla 8-1: Posicionamiento sensores. Montaje 1.

Sensor	Tipo	Nodo	Dirección lectura
1	Fuerza	1	+z
2	Fuerza	5	+z
3	Aceleración	1	+z
4	Aceleración	2	+z
5	Aceleración	4	-y
6	Aceleración	5	+y
7	Aceleración	7	+z
8	Aceleración	8	+z

**Tabla 8-2:** Posicionamiento sensores. Montaje 2.

Sensor	Tipo	Nodo	Dirección lectura
1	Fuerza	10	+z
2	Fuerza	3	+z
3	Aceleración	1	+z
4	Aceleración	2	+z
5	Aceleración	4	-y
6	Aceleración	5	+y
7	Aceleración	7	+z
8	Aceleración	8	+z

Notar que las últimas dos tablas describen dos montajes, lo anterior se debe a la necesidad de emplear dos condiciones de carga distintos para poder evaluar el desempeño de las metodologías N°1, 2 y 3 descritas en el capítulo anterior, por lo tanto, la posición de los dos sensores de fuerza fue modificada, en conjunto con la distribución de dos excitadores modales empleados, marca *Sinocera Piezotronics Inc.*



**Figura 8-6** Montaje estructura.

### 8.1.2 Escenarios de carga

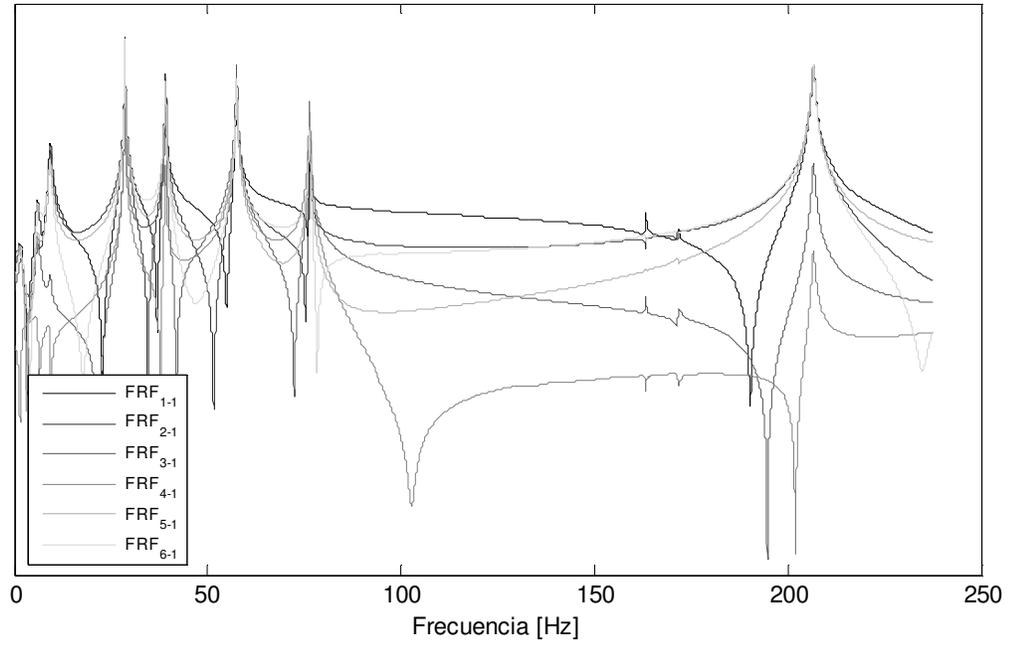
Para la simulación de los distintos escenarios de carga que serán aplicados en la estructura, se ha empleado el sistema de adquisición de datos AVANT MI-7016, marca *ECON*, el cual permite enviar distintos tipos de señales a los excitadores, así como capturar la respuesta de los distintos sensores adosados a la estructura. Para el procesamiento de señales se ha adoptado emplear una frecuencia de muestreo de 750Hz, capturando un máximo de 32768 datos para cada escenario.

A continuación se describen las condiciones de carga empleadas para llevar a cabo el proceso de identificación en esta estructura.

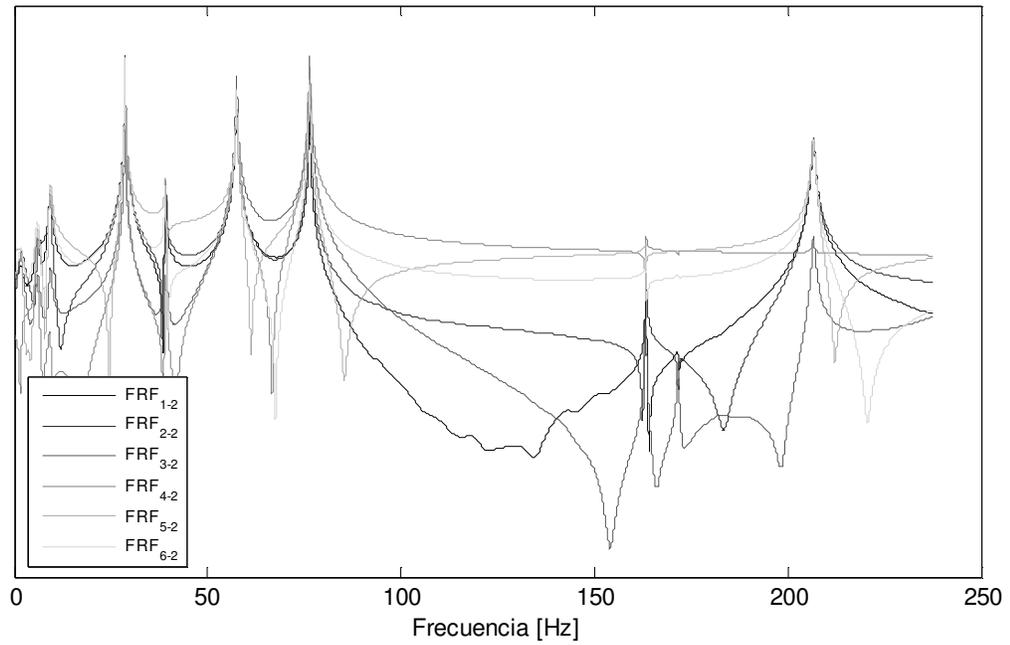
- Escenario 1: Solicitaciones de ruido blanco no correlacionadas, aplicadas en la dirección vertical de los nodos 1 y 5 respectivamente.
- Escenario 2: Ruido blanco coloreado en la banda comprendida entre 100 y 110Hz aplicado sobre la dirección vertical del nodo 5.
- Escenario 3: Ruido blanco coloreado en 50Hz aplicado en la dirección vertical del nodo 1.
- Escenario 4: Solicitaciones de ruido blanco y acción sinusoidal de doble frecuencia 100 y 150Hz aplicados en la dirección vertical de los nodos 10 y 3 respectivamente.

### 8.1.3 Propiedades Modales

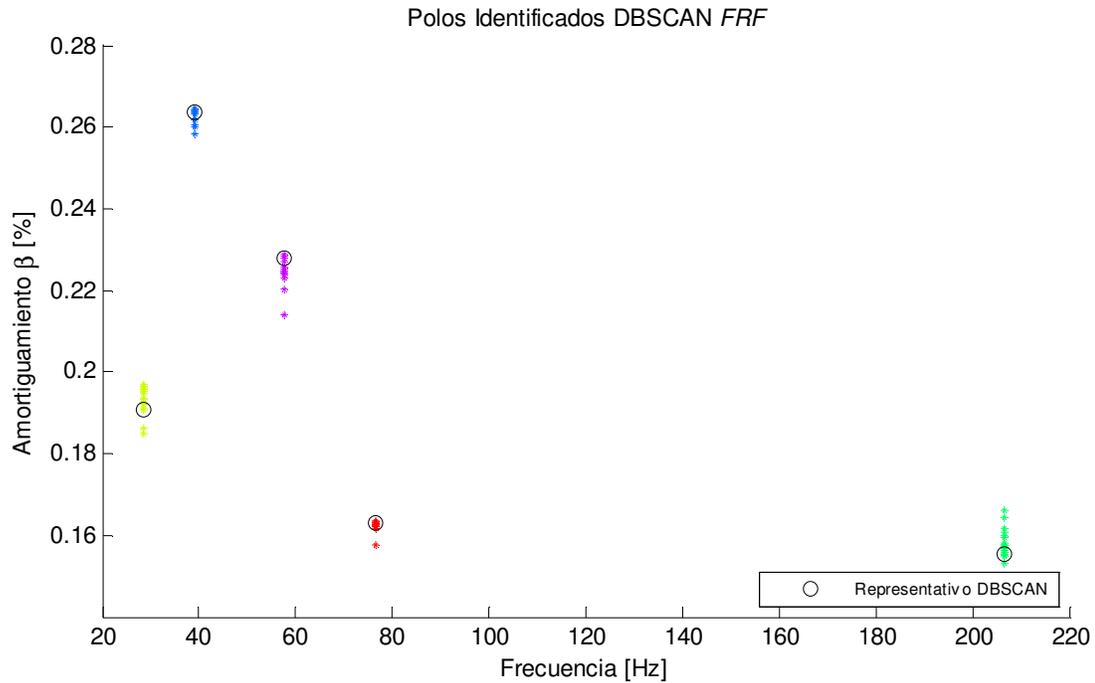
Con el fin de disponer de un set de parámetros modales que sirvan como una línea base para poder evaluar los resultados obtenidos en cada metodología, se ha adoptado el Escenario N°1 como el estado de carga a partir del cual serán estimados los valores modales empleando un entorno de análisis modal experimental. Para llevar a cabo el proceso de identificación, se consideran las respuestas en frecuencia de los distintos sensores de fuerza y aceleración puestos sobre la estructura, los cuales mediante la implementación de un estimador tipo IO (Sección 4.3.4.3), permiten generar de forma paramétrica una aproximación a la función transferencia que relacione fuerza y aceleración en frecuencia (*accelerance*), para posteriormente, haciendo uso de diagramas de estabilización, determinar los polos del sistema en conjunto con las formas modales respectivas (Harris & Piersol, 2002).



**Figura 8-7** Componentes función de transferencia  $FRF_{i1}$ .



**Figura 8-8** Componentes función de transferencia  $FRF_{i2}$ .



**Figura 8-9** Polos identificados análisis modal experimental.

**Tabla 8-3:** Valores de frecuencia y amortiguamiento modal considerando escenario N°1.

Modos	$f$ [Hz]	$\beta$ [%]	$f_d$ [Hz]
1	28.637	0.192	28.637
2	39.069	0.268	39.069
3	57.485	0.228	57.485
4	76.353	0.163	76.353
5	206.62	0.156	206.620

**Tabla 8-4** Formas Modales

Posición sensor	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 5	Modo 6
1	-1.041	1.026	-0.926	0.425	0.969
2	1.049	-1.153	1.004	-0.633	1.026
3	-0.377	-0.469	1.419	-1.523	-0.096
4	-0.316	0.126	1.044	2.019	-0.012
5	-0.988	-0.986	-1.002	-1.103	0.962
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

## 8.1.4 Resultados Transmisibilidad

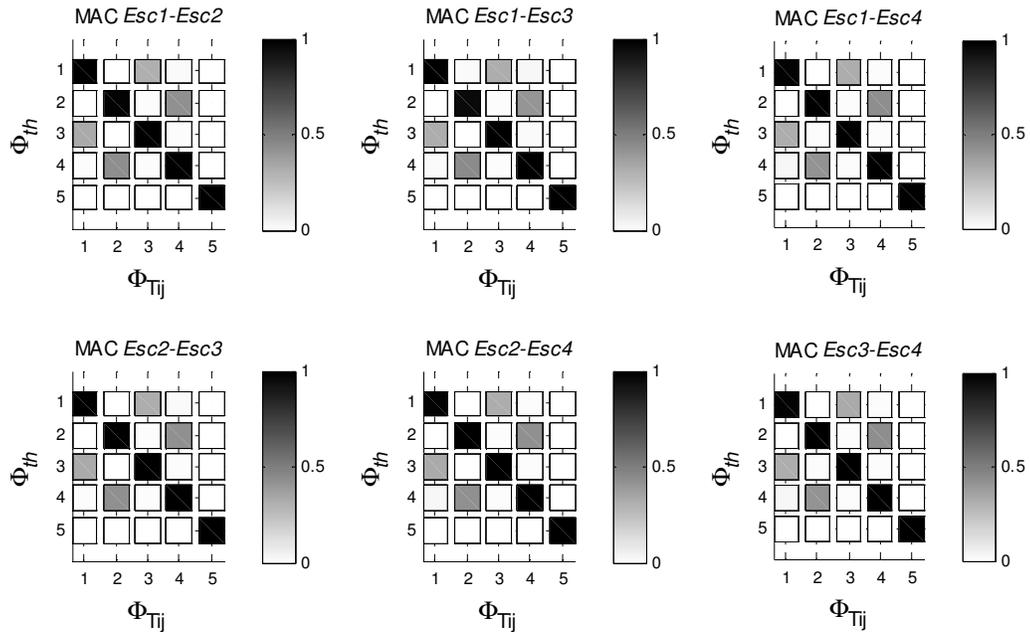
### 8.1.4.1 Metodología 1

**Tabla 8-5:** Comparación de **frecuencias amortiguadas** teóricas (th) y frecuencias identificadas. Tomando como referencia sólo máximos en  $\bar{\sigma}_2^{-1}(\omega)$ . Metodología 1.

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc1-Esc2		Esc1-Esc3		Esc1-Esc4	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	28.637	28.427	0.733	28.366	0.946	28.397	0.838
2	39.069	38.696	0.954	38.101	2.477	39.017	0.133
3	57.485	57.480	0.008	57.236	0.433	57.312	0.301
4	76.353	75.974	0.496	75.943	0.537	76.889	0.702
5	206.620	206.253	0.177	207.413	0.384	206.741	0.059

**Tabla 8-6:** Comparación de **frecuencias amortiguadas** teóricas (th) y frecuencias identificadas (continuación).

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc2-Esc3		Esc2-Esc4		Esc3-Esc4	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	28.637	28.412	0.786	28.366	0.946	28.397	0.838
2	39.069	38.727	0.875	38.742	0.837	38.895	0.445
3	57.485	57.236	0.433	57.281	0.355	57.266	0.381
4	76.353	76.202	0.198	76.614	0.342	76.202	0.198
5	206.620	206.528	0.044	206.528	0.044	206.650	0.015



**Figura 8-10:** MAC entre modos teóricos  $\Phi_{th}$  e identificados  $\Phi_{Tij}$  para cada una de las combinaciones de escenarios de carga Determinación de modos a partir de frecuencias amortiguadas. Metodología1.

**Tabla 8-7:** Comparación de **frecuencias naturales** teóricas (th) y frecuencias identificadas.  
Discriminación de polos falsos mediante detección de máximos de  $\bar{\sigma}_2^{-1}(\omega)$ . Metodología 1.

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc1-Esc2		Esc1-Esc3		Esc1-Esc4	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	28.637	28.311	1.138	28.050	2.050	28.158	1.673
2	39.069	38.611	1.172	-	-	39.009	0.154
3	57.485	57.216	0.468	56.815	1.166	57.186	0.520
4	76.353	75.945	0.534	76.149	0.267	-	-
5	206.620	206.236	0.186	-	-	206.417	0.098

**Tabla 8-8:** Comparación de **frecuencias naturales** teóricas (th) y frecuencias identificadas (continuación).

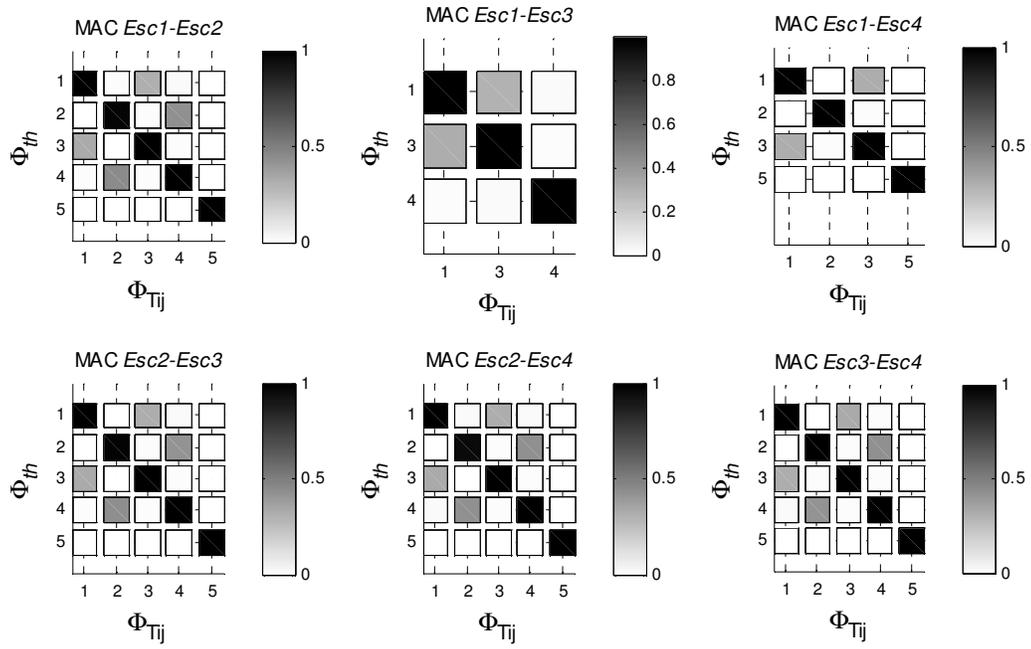
Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc2-Esc3		Esc2-Esc4		Esc3-Esc4	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	28.637	28.326	1.086	28.227	1.432	28.171	1.627
2	39.069	38.652	1.067	38.320	1.917	38.783	0.732
3	57.485	57.072	0.718	57.267	0.379	57.208	0.482
4	76.353	76.115	0.312	76.481	0.168	76.166	0.245
5	206.620	206.584	0.017	206.516	0.050	206.708	0.043

**Tabla 8-9:** Comparación de **amortiguamientos** teóricos (th) e identificados.  
Discriminación de polos falsos mediante detección de máximos de  $\bar{\sigma}_2^{-1}(\omega)$ . Metodología 1.

Modo	$\beta_{th}$ [%]	Esc1-Esc2		Esc1-Esc3		Esc1-Esc4	
		$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %
1	0.192	0.343	78.646	1.325	590.104	1.023	432.813
2	0.268	0.412	53.731	-	-	0.210	21.642
3	0.228	0.356	56.140	0.863	278.509	0.562	146.491
4	0.163	0.107	34.356	0.351	115.337	-	-
5	0.156	0.180	15.385	-	-	4.812	2984.615

**Tabla 8-10:** Comparación de **amortiguamientos** teóricos (th) e identificados (continuación).

Modo	$\beta_{th}$ [%]	Esc2-Esc3		Esc2-Esc4		Esc3-Esc4	
		$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %
1	0.192	0.320	66.667	1.312	583.333	1.317	585.938
2	0.268	0.391	45.896	0.375	39.925	0.366	36.567
3	0.228	0.476	108.772	0.523	129.386	0.579	153.947
4	0.163	0.235	44.172	0.374	129.448	0.280	71.779
5	0.156	0.184	17.949	0.174	11.538	0.238	52.564



**Figura 8-11:** MAC entre modos teóricos  $\Phi_{th}$  e identificados  $\Phi_{Tij}$  para cada una de las combinaciones de escenarios de carga. Determinación de modos a partir de frecuencias naturales obtenidas según polos identificados. Metodología1.

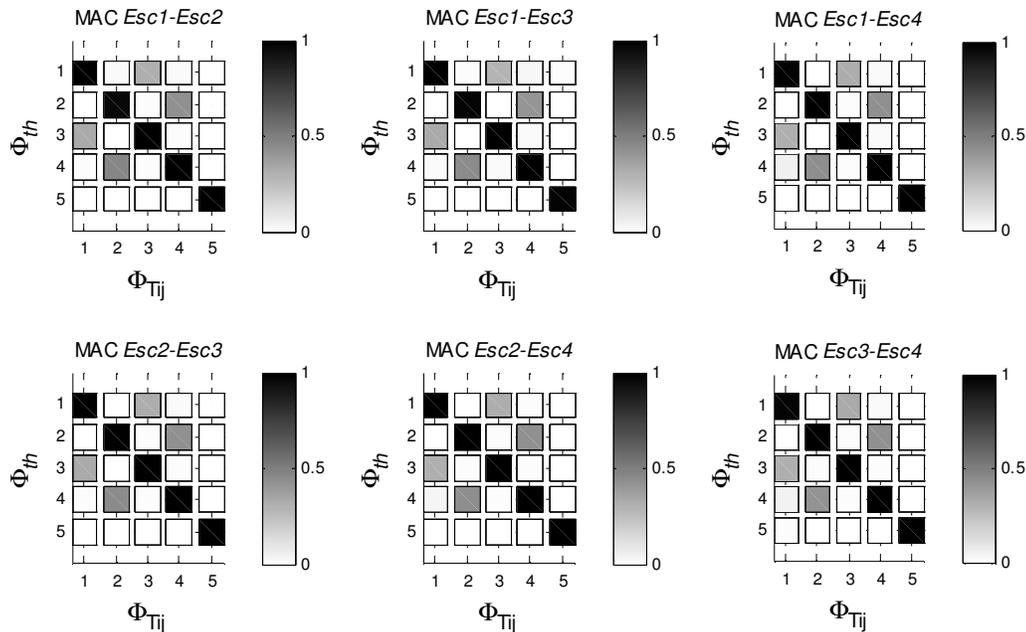
### 8.1.4.2 Metodología 2

**Tabla 8-11:** Comparación de **frecuencias amortiguadas** teóricas (th) y frecuencias identificadas. Tomando como referencia sólo máximos en  $\bar{\sigma}_2^{-1}(\omega)$ . Metodología 2.

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc1-Esc2		Esc1-Esc3		Esc1-Esc4	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	28.637	28.263	1.306	28.195	1.543	28.401	0.824
2	39.069	38.608	1.180	38.516	1.415	38.997	0.184
3	57.485	57.168	0.551	56.710	1.348	57.236	0.433
4	76.353	75.476	1.148	76.002	0.460	75.796	0.729
5	206.620	206.312	0.149	203.016	1.744	206.724	0.050

**Tabla 8-12:** Comparación de **frecuencias amortiguadas** teóricas (th) y frecuencias identificadas (continuación).

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc2-Esc3		Esc2-Esc4		Esc3-Esc4	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	28.637	28.332	1.065	28.332	1.065	28.447	0.663
2	39.069	38.608	1.180	38.631	1.121	38.814	0.652
3	57.485	57.099	0.671	57.213	0.473	57.213	0.473
4	76.353	76.094	0.339	76.437	0.110	76.071	0.369
5	206.620	206.380	0.116	206.403	0.105	206.655	0.017



**Figura 8-12:** MAC entre modos teóricos  $\Phi_{th}$  e identificados  $\Phi_{Tij}$  para cada una de las combinaciones de escenarios de carga Determinación de modos a partir de frecuencias amortiguadas. Metodología 2.

**Tabla 8-13:** Comparación de **frecuencias naturales** teóricas (th) y frecuencias identificadas. Discriminación de polos falsos mediante detección de máximos de  $\bar{\sigma}_2^{-1}(\omega)$ . Metodología 2.

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc1-Esc2		Esc1-Esc3		Esc1-Esc4	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	28.637	27.790	2.958	-	-	-	-
2	39.069	38.574	1.267	38.395	1.725	38.820	0.637
3	57.485	57.136	0.607	56.539	1.646	57.284	0.350
4	76.353	-	-	75.556	1.044	76.076	0.363
5	206.620	206.222	0.193	203.163	1.673	206.531	0.043

**Tabla 8-14:** Comparación de **frecuencias naturales** teóricas (th) y frecuencias identificadas (continuación).

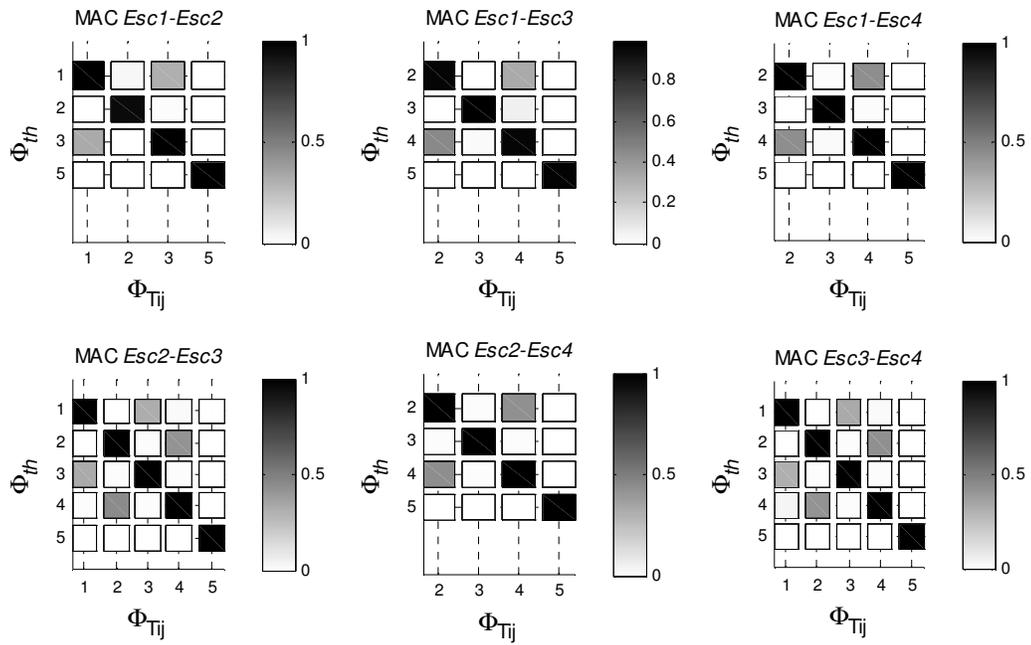
Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc2-Esc3		Esc2-Esc4		Esc3-Esc4	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	28.637	28.309	1.145	-	-	28.356	0.981
2	39.069	38.620	1.149	38.634	1.113	38.727	0.875
3	57.485	56.991	0.859	57.216	0.468	57.215	0.470
4	76.353	76.072	0.368	76.089	0.346	76.069	0.372
5	206.620	206.466	0.075	206.657	0.018	206.988	0.178

**Tabla 8-15:** Comparación de **amortiguamientos** teóricos (th) e identificados. Discriminación de polos falsos mediante detección de máximos de  $\bar{\sigma}_2^{-1}(\omega)$ . Metodología 2.

Modo	$\beta_{th}$ [%]	Esc1-Esc2		Esc1-Esc3		Esc1-Esc4	
		$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %
1	0.192	1.998	940.625	-	-	-	-
2	0.268	0.524	95.522	8.315	3002.612	0.242	9.701
3	0.228	0.051	77.632	0.228	0.000	0.685	200.439
4	0.163	-	-	0.366	124.540	0.456	179.755
5	0.156	0.367	135.256	0.014	91.026	0.243	55.769

**Tabla 8-16:** Comparación de **amortiguamientos** teóricos (th) e identificados (continuación).

Modo	$\beta_{th}$ [%]	Esc2-Esc3		Esc2-Esc4		Esc3-Esc4	
		$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %
1	0.192	0.234	21.875	-	-	0.649	238.021
2	0.268	0.262	2.239	0.467	74.254	0.357	33.209
3	0.228	0.447	96.053	0.375	64.474	0.642	181.579
4	0.163	0.243	49.080	0.234	43.558	0.245	50.307
5	0.156	0.132	15.385	0.271	73.718	0.102	34.615



**Figura 8-13:** MAC entre modos teóricos  $\Phi_{th}$  e identificados  $\Phi_{Tij}$  para cada una de las combinaciones de escenarios de carga. Determinación de modos a partir de frecuencias naturales obtenidas según polos identificados. Metodología 2.

### 8.1.4.3 Metodología 3

**Tabla 8-17:** Comparación de **frecuencias naturales** teóricas (th) y frecuencias identificadas. Discriminación de polos falsos mediante detección de máximos de  $\bar{\sigma}_2^{-1}(\omega)$ . Metodología 3.

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc1-Esc2		Esc1-Esc3		Esc1-Esc4	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	28.637	-	-	-	-	28.521	0.405
2	39.069	38.769	0.768	-	-	38.991	0.200
3	57.485	-	-	-	-	57.458	0.047
4	76.353	-	-	-	-	76.607	0.333
5	206.620	206.657	0.018	-	-	207.133	0.248

**Tabla 8-18:** Comparación de **frecuencias naturales** teóricas (th) y frecuencias identificadas (continuación).

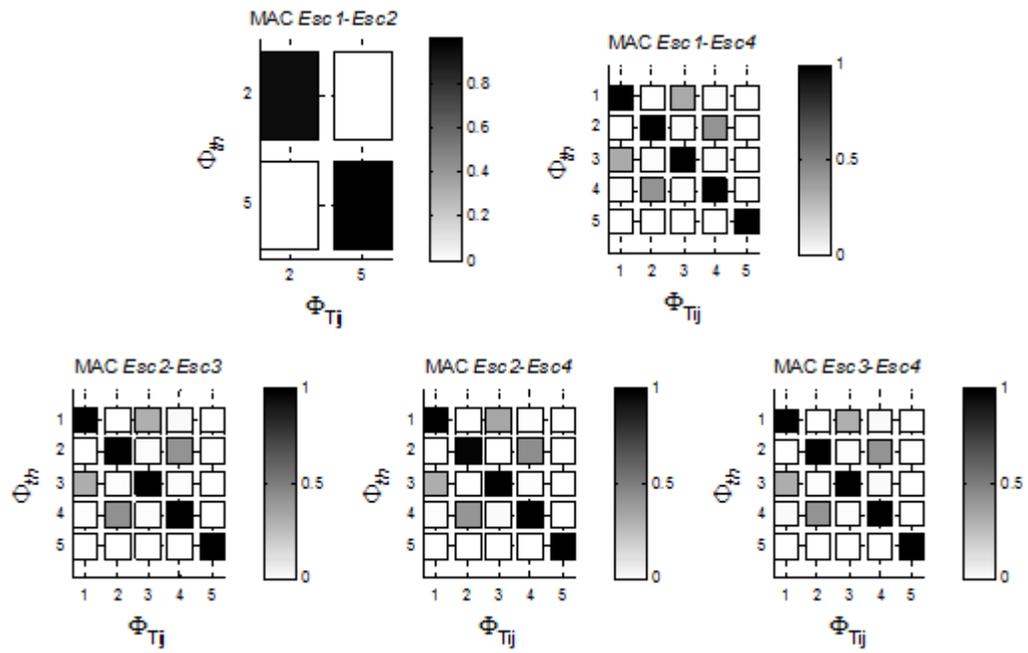
Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc2-Esc3		Esc2-Esc4		Esc3-Esc4	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	28.637	28.301	1.173	28.323	1.096	28.252	1.344
2	39.069	38.761	0.788	38.822	0.632	38.955	0.292
3	57.485	57.135	0.609	57.052	0.753	57.590	0.183
4	76.353	76.113	0.314	76.461	0.141	75.901	0.592
5	206.620	206.543	0.037	206.598	0.011	206.561	0.029

**Tabla 8-19:** Comparación de **amortiguamientos** teóricos (th) e identificados. Discriminación de polos falsos mediante detección de máximos de  $\bar{\sigma}_2^{-1}(\omega)$ . Metodología 3.

Modo	$\beta_{th}$ [%]	Esc1-Esc2		Esc1-Esc3		Esc1-Esc4	
		$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %
1	0.192	-	-	-	-	1.100	472.917
2	0.268	0.160	40.299	-	-	0.265	1.119
3	0.228	-	-	-	-	0.718	214.912
4	0.163	-	-	-	-	0.475	191.411
5	0.156	0.055	64.744	-	-	0.147	5.769

**Tabla 8-20:** Comparación de **amortiguamientos** teóricos (th) e identificados (continuación).

Modo	$\beta_{th}$ [%]	Esc2-Esc3		Esc2-Esc4		Esc3-Esc4	
		$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %
1	0.192	0.714	271.875	1.475	668.229	1.378	617.708
2	0.268	0.221	17.537	1.801	572.015	0.388	44.776
3	0.228	0.419	83.772	0.431	89.035	0.408	78.947
4	0.163	0.417	155.828	0.645	295.706	0.578	254.601
5	0.156	0.022	85.897	0.400	156.410	0.174	11.538



**Figura 8-14:** MAC entre modos teóricos  $\Phi_{th}$  e identificados  $\Phi_{Tij}$  para cada una de las combinaciones de escenarios de carga. Determinación de modos a partir de frecuencias naturales obtenidas según polos identificados. Metodología 3.

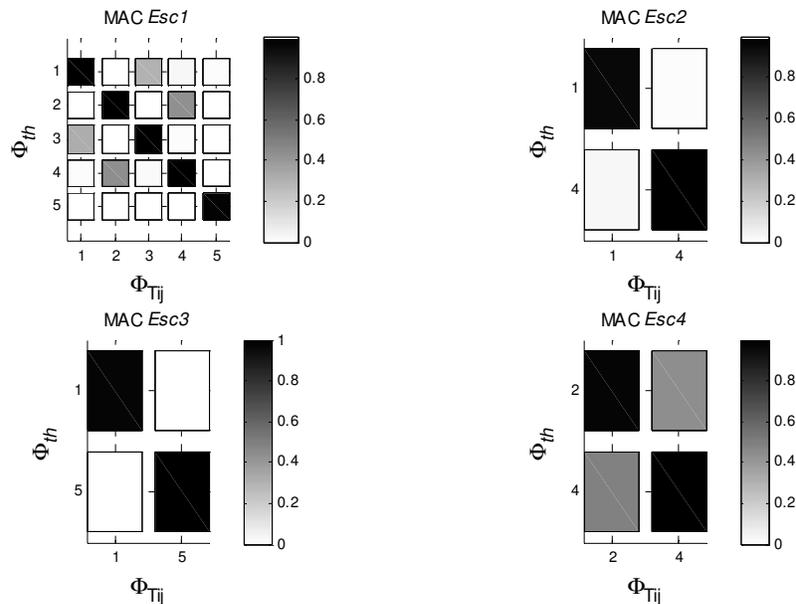
### 8.1.4.4 Metodología 4

**Tabla 8-21:** Comparación de **frecuencias amortiguadas** teóricas (th) y frecuencias identificadas. Tomando como referencia sólo máximos en  $\bar{\sigma}_2^{-1}(\omega)$ . Metodología 4.

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc1		Esc2	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	28.637	28.183	1.585	30.807	7.578
2	39.069	38.712	0.913	-	-
3	57.485	56.915	0.991	-	-
4	76.353	75.653	0.917	77.957	2.101
5	206.620	203.018	1.743	-	-
*				103.363	-

**Tabla 8-22:** Comparación de **frecuencias amortiguadas** teóricas (th) y frecuencias identificadas (continuación).

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc3		Esc4	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	28.637	30.411	6.195	-	-
2	39.069	-	-	41.214	5.491
3	57.485	-	-	-	-
4	76.353	-	-	76.736	0.502
5	206.620	206.726	0.051	196.152	5.066
*		49.149	-	100.021	-
*		63.782	-	150.055	-
*		87.128	-		



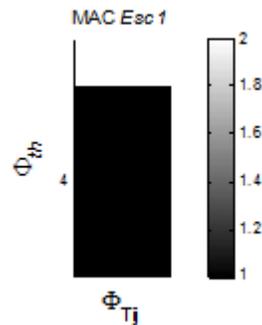
**Figura 8-15:** MAC entre modos teóricos  $\Phi_{th}$  e identificados  $\Phi_{Tij}$  para cada una de las combinaciones de escenarios de carga Determinación de modos a partir de frecuencias amortiguadas. Metodología 4.

**Tabla 8-23:** Comparación de **frecuencias naturales** teóricas (th) y frecuencias identificadas. Discriminación de polos falsos mediante detección de máximos de  $\bar{\sigma}_2^{-1}(\omega)$ . Metodología 4.

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc1		Esc2	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	28.637	-	-	-	-
2	39.069	-	-	-	-
3	57.485	-	-	-	-
4	76.353	75.623	0.956	-	-
5	206.620	-	-	-	-

**Tabla 8-24:** Comparación de **amortiguamientos** teóricos (th) e identificados. Discriminación de polos falsos mediante detección de máximos de  $\bar{\sigma}_2^{-1}(\omega)$ . Metodología 4.

Modo	$\beta_{th}$ [%]	Esc1		Esc2	
		$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %
1	0.192	-	-	-	-
2	0.268	-	-	-	-
3	0.228	-	-	-	-
4	0.163	0.210	28.834	-	-
5	0.156	-	-	-	-



**Figura 8-16:** MAC entre modos teóricos  $\Phi_{th}$  e identificados  $\Phi_{Tij}$  para cada una de las combinaciones de escenarios de carga. Determinación de modos a partir de frecuencias naturales obtenidas según polos identificados. Metodología 4.

Notar que para esta metodología, los escenarios *Esc2*, *Esc3* y *Esc4* no han favorecido la obtención de resultados que puedan ser contrastados adecuadamente con los valores teóricos. Debido a lo anterior, las tablas y figuras relativas a estos escenarios han sido omitidas.

### 8.1.4.5 Metodología 5

**Tabla 8-25:** Comparación de **frecuencias naturales** teóricas (th) y frecuencias identificadas. Metodología 5.

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc1		Esc2	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	28.637	28.234	1.407	28.438	0.695
2	39.069	-	-	-	-
3	57.485	56.838	1.126	56.819	1.159
4	76.353	75.674	0.889	-	-
5	206.620	-	-	206.144	0.230

**Tabla 8-26:** Comparación de **frecuencias naturales** teóricas (th) y frecuencias identificadas (continuación).

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc3		Esc4	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	28.637	28.178	1.603	28.527	0.384
2	39.069	-	-	-	-
3	57.485	-	-	57.331	0.268
4	76.353	76.002	0.460	-	-
5	206.620	205.411	0.585	203.303	1.605

**Tabla 8-27:** Comparación de **amortiguamientos** teóricos (th) e identificados. Metodología 5.

Modo	$\beta_{th}$ [%]	Esc1		Esc2	
		$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %
1	0.192	0.461	140.104	0.737	283.854
2	0.268	-	-	-	-
3	0.228	0.186	18.421	0.135	40.789
4	0.163	0.035	78.528	-	-
5	0.156	-	-	0.186	19.231

**Tabla 8-28:** Comparación de **amortiguamientos** teóricos (th) e identificados (continuación).

Modo	$\beta_{th}$ [%]	Esc3		Esc4	
		$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %
1	0.192	0.386	101.042	0.762	296.875
2	0.268	-	-	-	-
3	0.228	-	-	0.311	36.404
4	0.163	0.236	44.785	-	-
5	0.156	0.211	35.256	0.060	61.538

### 8.1.5 Resultados SSI-Cov

**Tabla 8-29:** Comparación de **frecuencias naturales** teóricas (th) y frecuencias identificadas. SSI-Cov.

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc1		Esc2	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	28.637	28.152	1.694	28.231	1.418
2	39.069	38.616	1.159	38.594	1.216
3	57.485	56.821	1.155	56.985	0.870
4	76.353	75.651	0.919	75.616	0.965
5	206.620	-	-	206.206	0.200

**Tabla 8-30:** Comparación de **frecuencias naturales** teóricas (th) y frecuencias identificadas (continuación).

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc3		Esc4	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	28.637	28.102	1.868	28.308	1.149
2	39.069	38.474	1.523	38.594	1.216
3	57.485	56.639	1.472	57.141	0.598
4	76.353	76.025	0.430	75.056	1.699
5	206.620	205.556	0.515	203.774	1.377

**Tabla 8-31:** Comparación de **amortiguamientos** teóricos (th) e identificados. SSI-Cov.

Modo	$\beta_{th}$ [%]	Esc1		Esc2	
		$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %
1	0.192	4.598	2294.792	1.323	589.063
2	0.268	1.085	304.851	0.185	30.970
3	0.228	1.001	339.035	0.450	97.368
4	0.163	0.471	188.957	0.481	195.092
5	0.156	-	-	0.236	51.282

**Tabla 8-32:** Comparación de **amortiguamientos** teóricos (th) e identificados (continuación).

Modo	$\beta_{th}$ [%]	Esc3		Esc4	
		$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %
1	0.192	3.271	1603.646	0.969	404.688
2	0.268	1.412	426.866	1.064	297.015
3	0.228	0.950	316.667	0.700	207.018
4	0.163	0.243	49.080	0.619	279.755
5	0.156	0.526	237.179	0.287	83.974

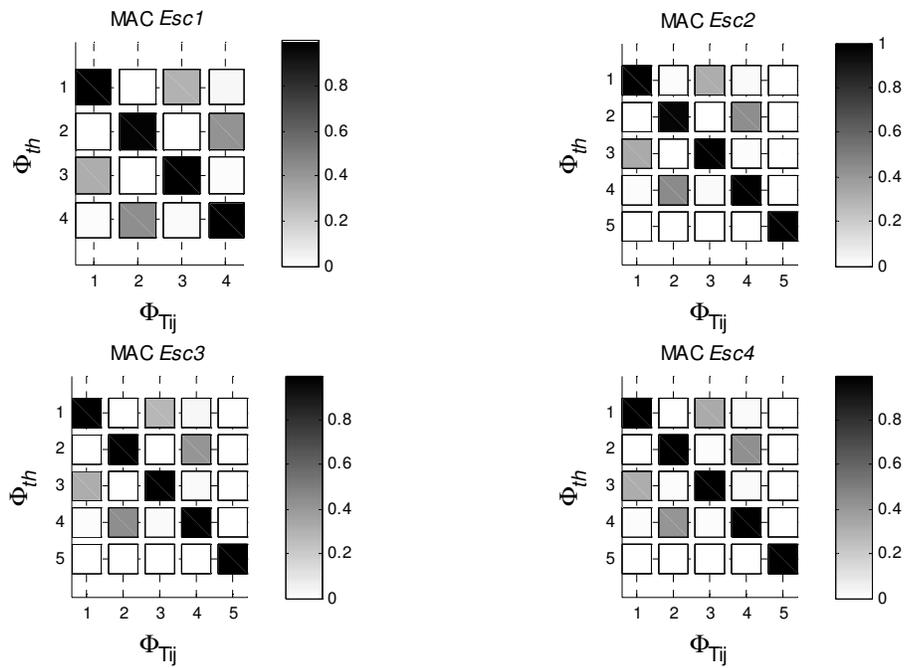


Figura 8-17: MAC entre modos teóricos  $\Phi_{th}$  e identificados  $\Phi_{Tij}$  para cada un de los escenarios de carga. SSI-Cov.

## 8.2 Edificio Torre Central

### 8.2.1 Descripción de la estructura

Con el objetivo de poder evaluar el desempeño de las distintas metodologías que involucran las funciones de transmisibilidad en una estructura civil existente, éstas son implementadas utilizando el registro continuo del edificio Torre Central, ubicado en las dependencias de la facultad de Ingeniería de la Universidad de Chile. El edificio, cuya estructuración está conformada por un sistema de muros sismo resistente, consta de 8 pisos y dos subterráneos, destinado actualmente al uso de oficinas administrativas (León, 2013) (Figura 8-18 y Figura 8-19).



a)



b)



c)



d)

**Figura 8-18:** Edificio Torre Central.

a) Elevación norte. b) Elevación poniente. c) Elevación sur. d) Elevación oriente. (Basoalto, 2013)

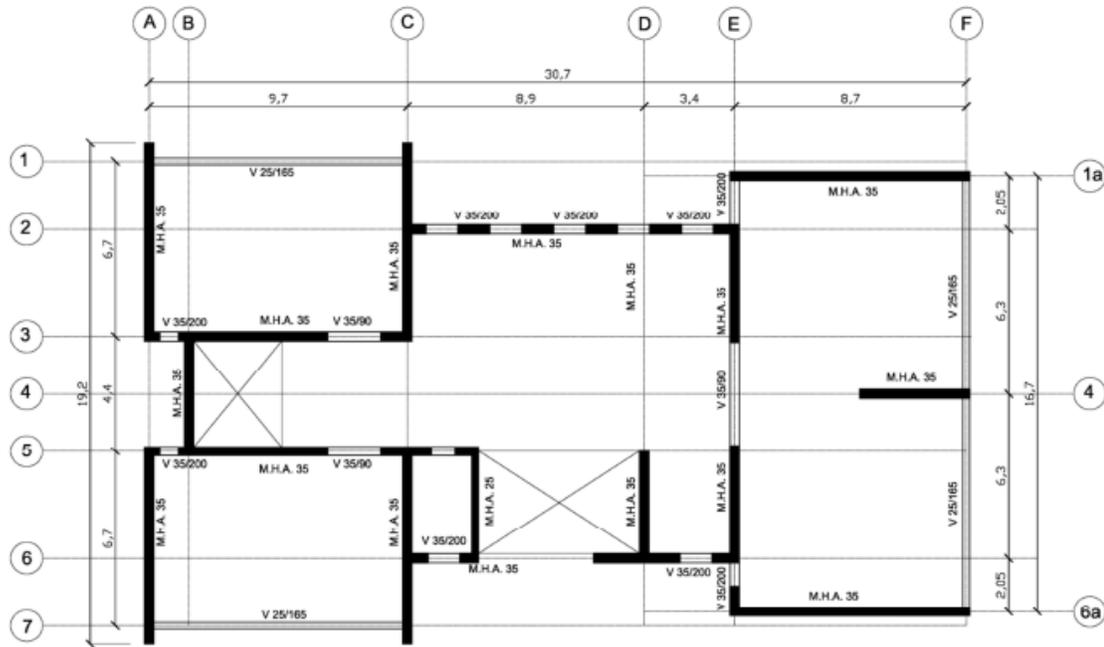


Figura 8-19: Planta tipo.

El edificio se encuentra instrumentado con 8 acelerómetros uniaxiales modelo EpiSensor ES-U2 de marca *Kinematics*, configurados en un rango 0.25g. La capacidad de estos sensores permite capturar eventos sísmicos, así como vibraciones medioambientales. La distribución de los sensores está configurada de tal forma de poder capturar desplazamientos de piso y torsión de la estructura. Cabe señalar que la frecuencia de muestro considerada para el sistema de adquisición de datos ha sido seteada en 200 Hz. El detalle de la distribución de los sensores queda descrito en la Tabla 8-33 y Figuras 8-20, 8-21 y 8-22.

Tabla 8-33: Distribución y orientación de sensores instalados en edificio Torre Central.

Ubicación	Sensor	Dirección	Observación
Piso 8	E4	Oeste-Este	-
	E5	Norte-Sur	-
	E6	Sur-Norte	Exterior
Piso 3	E7	Este-Oeste	-
	E8	Sur-Norte	-
	E9	Sur-Norte	Exterior
Subterráneo	E10	Este-Oeste	-
	E12	Sur-Norte	-

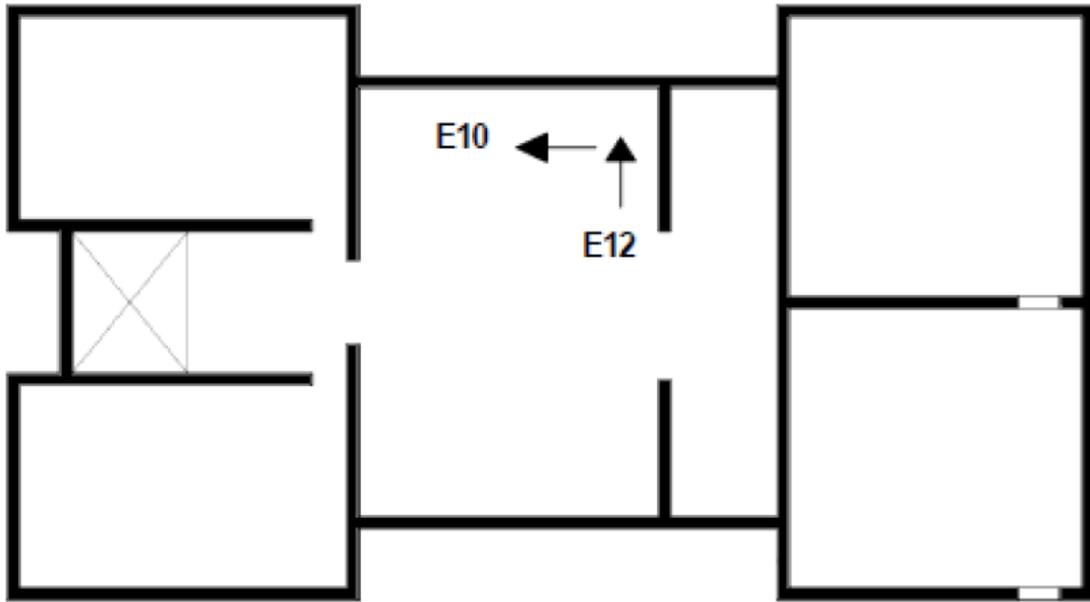


Figura 8-20: Ubicación sensores. Subterráneo.

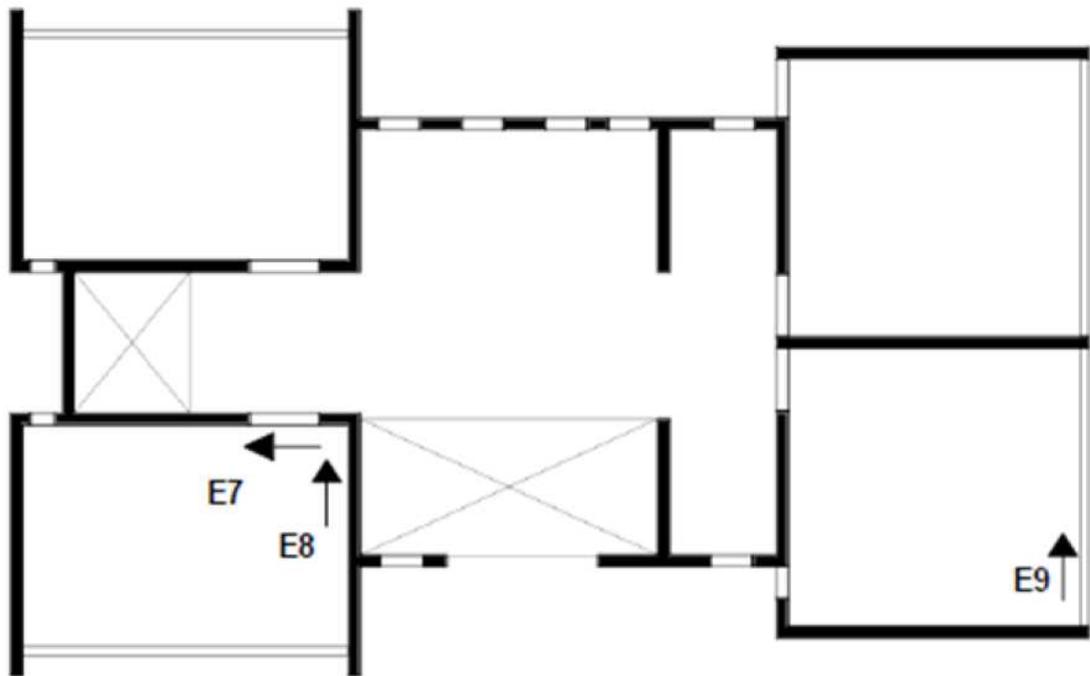


Figura 8-21: Ubicación sensores. Tercer piso.

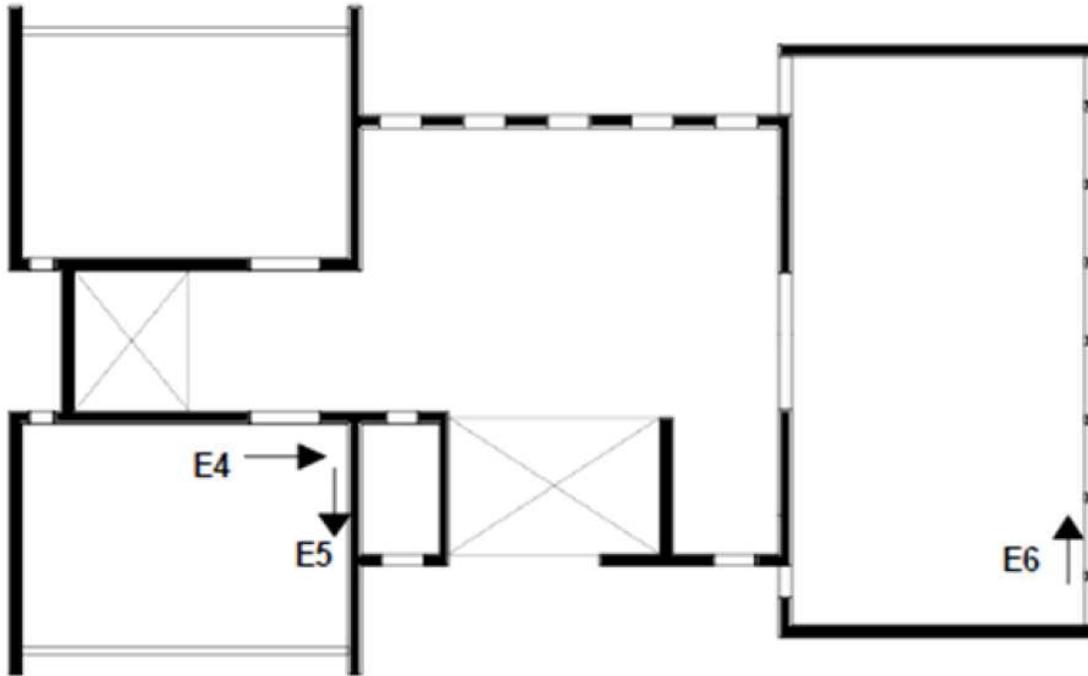


Figura 8-22: Ubicación sensores. Octavo piso.

### 8.2.2 Escenarios de carga

Considerando la disponibilidad de monitoreo continuo de vibraciones de la estructura, en conjunto con la necesidad de disponer de por lo menos dos escenarios de carga para poder implementar el uso de funciones de transmisibilidad (metodologías N°1, 2 y 3), se decide considerar los siguientes tres escenarios de carga:

- Escenario 1: Registro de respuesta en horario nocturno.
- Escenario 2: Registro de respuesta en horario diurno (uso operacional diurno).
- Escenario 3: Respuesta para solicitud sísmica.

Teniendo en cuenta la imposibilidad de conocer el input sobre la estructura, cabe señalar que la elección de los escenarios de carga para esta estructura, obedece más bien a una apuesta por parte del autor, bajo el supuesto que la distribución espacial de carga se ve modificada entre un escenario y otro.

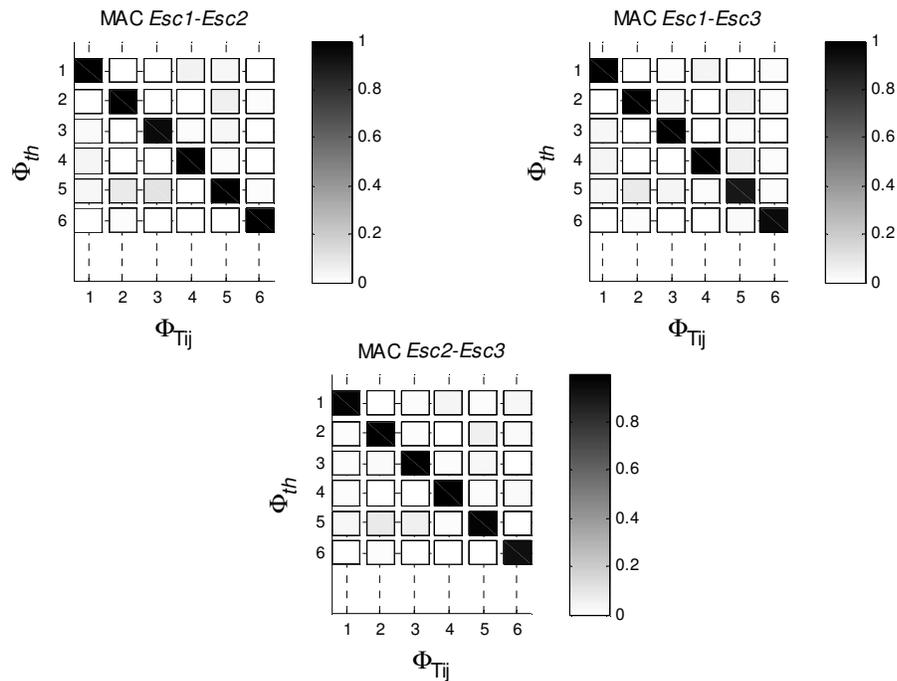
A continuación se presentan los resultados obtenidos producto de la aplicación de las distintas metodologías. De tal forma de poder evaluar cada una de estas, los valores obtenidos mediante el método SSI-Cov, para la condición *Escenario 1*, han sido escogidos como datos referenciales para la estimación de error relativo.

## 8.2.3 Resultados Transmisibilidad

### 8.2.3.1 Metodología 1

**Tabla 8-34:** Comparación de **frecuencias amortiguadas** teóricas (th) y frecuencias identificadas Metodología1.

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc1-Esc2		Esc1-Esc3		Esc2-Esc3	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	1.858	1.846	0.644	1.802	3.012	1.648	11.301
2	2.280	2.300	0.879	2.205	3.287	2.219	2.673
3	2.671	2.732	2.287	2.615	2.093	2.644	1.007
4	5.383	5.398	0.282	5.317	1.223	5.310	1.353
5	6.598	6.606	0.127	6.357	3.647	6.343	3.860
6	8.216	8.284	0.828	7.998	2.653	7.932	3.456
*						0.564	-
*						1.047	-



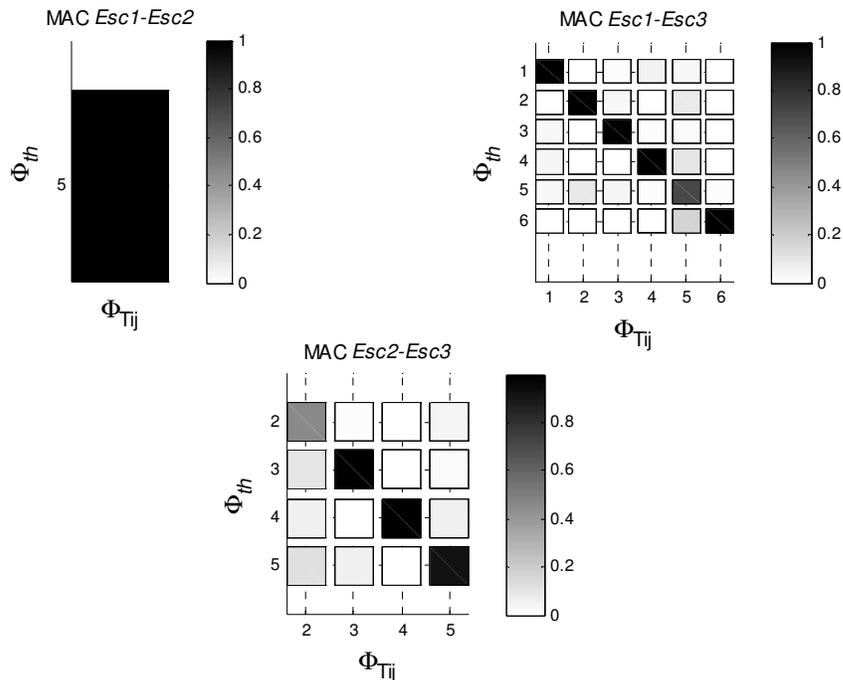
**Figura 8-23:** MAC entre modos teóricos  $\Phi_{th}$  e identificados  $\Phi_{Tij}$  para cada una de las combinaciones de escenarios de carga Determinación de modos a partir de frecuencias amortiguadas. Metodología 1.

**Tabla 8-35:** Comparación de **frecuencias naturales** teóricas (th) y frecuencias identificadas Metodología1.

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc1-Esc2		Esc1-Esc3		Esc2-Esc3	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	1.858	-	-	1.775	4.467	-	-
2	2.28	-	-	2.222	2.544	2.044	10.351
3	2.671	-	-	2.615	2.097	2.612	2.209
4	5.383	-	-	5.156	4.217	5.202	3.362
5	6.598	6.761	2.470	6.319	4.229	6.292	4.638
6	8.219	-	-	8.089	1.582	-	-
*						1.023	-

**Tabla 8-36:** Comparación de **amortiguamientos** teóricos (th) e identificados Metodología1.

Modo	$\beta_{th}$ [%]	Esc1-Esc2		Esc1-Esc3		Esc2-Esc3	
		$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %
1	0.663	-	-	1.42	114.178	-	-
2	0.666	-	-	0.969	45.495	2.967	345.495
3	0.843	-	-	0.599	28.944	1.559	84.935
4	0.763	-	-	3.843	403.670	1.76	130.668
5	1.047	3.301	215.282	0.496	52.627	0.336	67.908
6	2.709	-	-	0.497	81.654	-	-
*						0.452	-

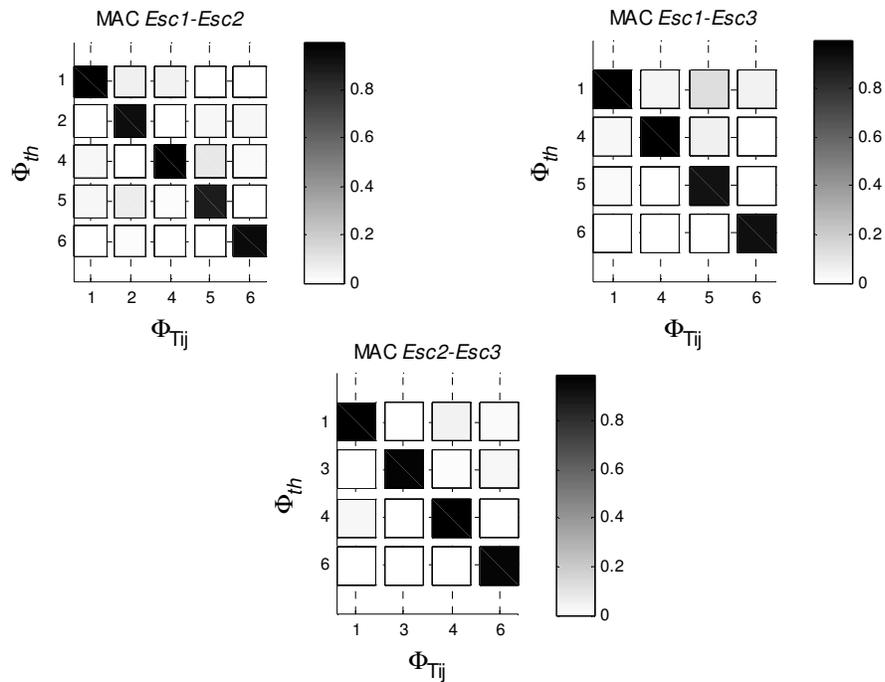


**Figura 8-24:** MAC entre modos teóricos  $\Phi_{th}$  e identificados  $\Phi_{Tij}$  para cada una de las combinaciones de escenarios de carga Determinación de modos a partir de frecuencias naturales (polos). Metodología 1.

### 8.2.3.2 Metodología 2

**Tabla 8-37:** Comparación de **frecuencias amortiguadas** teóricas (th) y frecuencias identificadas Metodología2.

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc1-Esc2		Esc1-Esc3		Esc2-Esc3	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	1.858	1.856	0.105	1.776	4.411	1.669	10.170
2	2.280	2.284	0.178	-	-	-	-
3	2.671	-	-	-	-	2.615	2.093
4	5.383	5.407	0.449	5.390	0.133	5.416	0.616
5	6.598	6.594	0.055	6.469	1.950	-	-
6	8.216	8.263	0.572	8.388	2.094	8.370	1.875
*				3.105	-	0.616	-
*				4.033	-	1.169	-



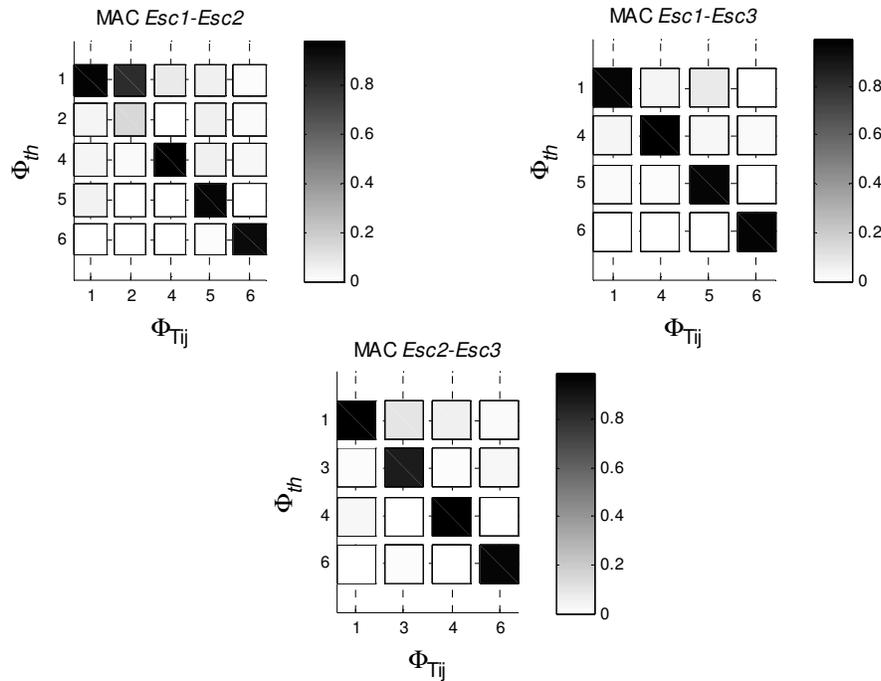
**Figura 8-25:** MAC entre modos teóricos  $\Phi_{th}$  e identificados  $\Phi_{Tij}$  para cada una de las combinaciones de escenarios de carga Determinación de modos a partir de frecuencias amortiguadas. Metodología 2.

**Tabla 8-38:** Comparación de **frecuencias naturales** teóricas (th) y frecuencias identificadas Metodología2.

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc1-Esc2		Esc1-Esc3		Esc2-Esc3	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	1.858	2.018	8.611	1.626	12.487	1.723	7.266
2	2.28	2.146	5.877	-	-	-	-
3	2.671	-	-	-	-	2.497	6.514
4	5.383	5.212	3.177	5.404	0.390	5.247	2.526
5	6.598	6.501	1.470	6.443	2.349	-	-
6	8.219	8.178	0.499	8.227	0.097	8.373	1.874
*				2.941	-	0.593	-
*				3.863	-	1.169	-

**Tabla 8-39:** Comparación de **amortiguamientos** teóricos (th) e identificados Metodología2.

Modo	$\beta_{th}$ [%]	Esc1-Esc2		Esc1-Esc3		Esc2-Esc3	
		$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %
1	0.663	1.181	78.130	0.976	47.210	2.019	204.525
2	0.666	0.018	97.297	-	-	-	-
3	0.843	-	-	-	-	9.530	1030.486
4	0.763	0.719	5.767	0.951	24.640	2.103	175.623
5	1.047	0.484	53.773	1.833	75.072	-	-
6	2.709	3.023	11.591	8.504	213.917	1.508	44.334
*				3.809	-	1.950	-
*				5.956	-	3.123	-



**Figura 8-26:** MAC entre modos teóricos  $\Phi_{th}$  e identificados  $\Phi_{Tij}$  para cada una de las combinaciones de escenarios de carga Determinación de modos a partir de frecuencias naturales (polos). Metodología 2.

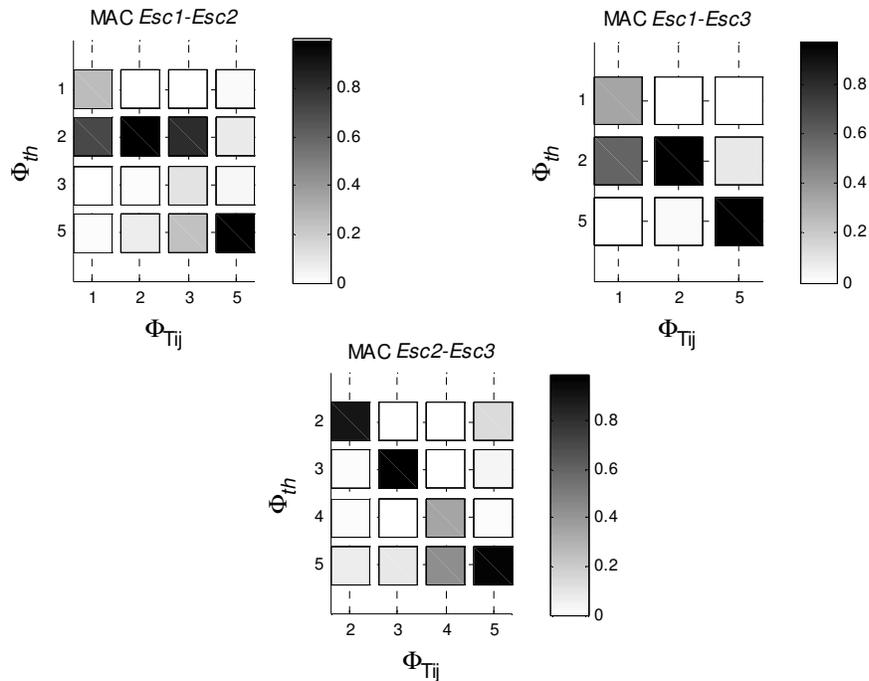
### 8.2.3.3 Metodología 3

**Tabla 8-40:** Comparación de **frecuencias naturales** teóricas (th) y frecuencias identificadas Metodología3.

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc1-Esc2		Esc1-Esc3		Esc2-Esc3	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	1.858	1.984	6.781	1.857	0.054	-	-
2	2.28	2.268	0.526	2.164	5.088	2.239	1.798
3	2.671	2.755	3.145	-	-	2.646	0.936
4	5.383	-	-	-	-	5.119	4.904
5	6.598	6.516	1.243	6.202	6.002	6.158	6.669
6	8.219	-	-	-	-	-	-
*						1.020	-

**Tabla 8-41:** Comparación de **amortiguamientos** teóricos (th) e identificados Metodología3.

Modo	$\beta_{th}$ [%]	Esc1-Esc2		Esc1-Esc3		Esc2-Esc3	
		$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %
1	0.663	0.259	60.935	4.105	519.155	-	-
2	0.666	0.639	4.054	4.330	550.150	2.188	228.529
3	0.843	4.465	429.656	-	-	0.226	73.191
4	0.763	-	-	-	-	1.252	64.089
5	1.047	0.598	42.884	1.281	22.350	1.781	70.105
6	2.709	-	-	-	-	-	-
*						9.960	-

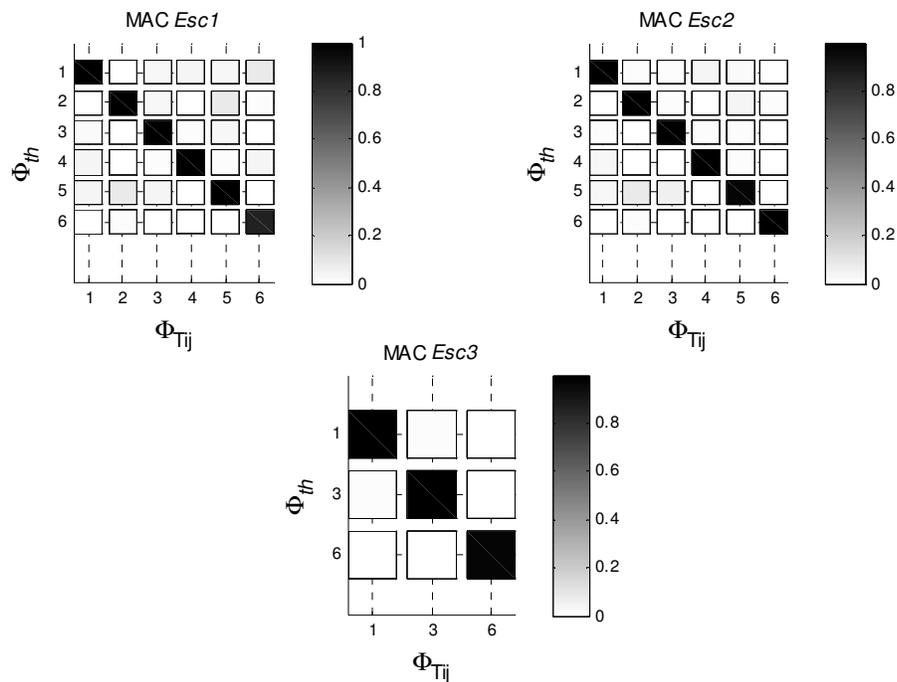


**Figura 8-27:** MAC entre modos teóricos  $\Phi_{th}$  e identificados  $\Phi_{Tij}$  para cada una de las combinaciones de escenarios de carga Determinación de modos a partir de frecuencias naturales (polos). Metodología 3.

### 8.2.3.4 Metodología 4

**Tabla 8-42:** Comparación de **frecuencias amortiguadas** teóricas (th) y frecuencias identificadas Metodología4.

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc1		Esc2		Esc3	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	1.858	1.868	0.540	1.838	1.074	1.655	10.924
2	2.280	2.263	0.743	2.263	0.743	-	-
3	2.671	2.651	0.745	2.673	0.078	2.534	5.126
4	5.383	5.391	0.152	5.369	0.257	-	-
5	6.598	6.606	0.127	6.621	0.354	-	-
6	8.216	8.181	0.426	8.276	0.730	7.961	3.104
*						4.973	-



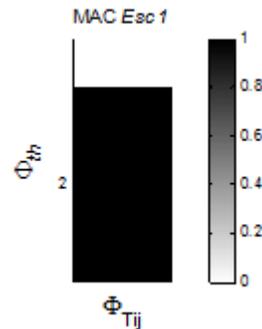
**Figura 8-28:** MAC entre modos teóricos  $\Phi_{th}$  e identificados  $\Phi_{Tij}$  para cada una de las combinaciones de escenarios de carga Determinación de modos a partir de frecuencias amortiguadas. Metodología 4.

**Tabla 8-43:** Comparación de **frecuencias naturales** teóricas ( $\theta$ ) y frecuencias identificadas Metodología4.

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc1		Esc2		Esc3	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	1.858	-	-	-	-	-	-
2	2.28	2.273	0.307	-	-	-	-
3	2.671	-	-	-	-	-	-
4	5.383	-	-	-	-	-	-
5	6.598	-	-	-	-	-	-
6	8.219	-	-	-	-	-	-
		2.273	-				

**4Tabla 8-44:** Comparación de **amortiguamientos** teóricos ( $\theta$ ) e identificados Metodología4.

Modo	$\beta_{th}$ [%]	Esc1		Esc2		Esc3	
		$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %
1	0.663	-	-	-	-	-	-
2	0.666	0.044	93.393	-	-	-	-
3	0.843	-	-	-	-	-	-
4	0.763	-	-	-	-	-	-
5	1.047	-	-	-	-	-	-
6	2.709	-	-	-	-	-	-
*		0.044	-				



**Figura 8-29:** MAC entre modos teóricos  $\Phi_{th}$  e identificados  $\Phi_{Tij}$  para cada una de las combinaciones de escenarios de carga Determinación de modos a partir de frecuencias naturales (polos). Metodología 4.

Notar que para esta metodología, las condiciones de carga *Esc2* y *Esc3* no han arrojado resultados que puedan ser contrastados adecuadamente con los valores referenciales empleados ( $f_{th}$  y  $\beta_{th}$ ).

### 8.2.3.5 Metodología 5

**Tabla 8-45:** Comparación de **frecuencias naturales** teóricas (th) y frecuencias identificadas Metodología5.

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc1		Esc2		Esc3	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	1.858	1.859	0.054	1.871	0.700	-	-
2	2.28	2.283	0.132	2.277	0.132	2.082	8.684
3	2.671	-	-	-	-	-	-
4	5.383	-	-	-	-	-	-
5	6.598	-	-	-	-	-	-
6	8.219	-	-	-	-	-	-

**Tabla 8-46:** Comparación de **amortiguamientos** teóricos (th) e identificados Metodología5.

Modo	$\beta_{th}$ [%]	Esc1		Esc2		Esc3	
		$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %
1	0.663	0.612	7.692	0.436	34.238	-	-
2	0.666	0.436	34.535	0.486	27.027	0.537	19.369
3	0.843	-	-	-	-	-	-
4	0.763	-	-	-	-	-	-
5	1.047	-	-	-	-	-	-
6	2.709	-	-	-	-	-	-

## 8.2.4 Resultados SSI-Cov

**Tabla 8-47:** Comparación de **frecuencias naturales** teóricas (th) y frecuencias identificadas SSI-Cov.

Modo	$f_{th}$ [Hz]	Esc1		Esc2		Esc3	
		$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %	$f$ [Hz]	Error %
1	1.858	1.858	0.000	1.864	0.323	1.734	6.674
2	2.280	2.280	0.000	2.274	0.263	2.101	7.851
3	2.671	2.671	0.000	2.667	0.150	2.563	4.043
4	5.383	5.383	0.000	5.412	0.539	-	-
5	6.598	6.598	0.000	6.612	0.212	6.316	4.274
6	8.219	8.219	0.000	-	-	8.021	2.409
*						5.100	-
*						6.282	-
*						7.977	-

**Tabla 8-48:** Comparación de **amortiguamientos** teóricos (th) e identificados SSI-Cov.

Modo	$\beta_{th}$ [%]	Esc1		Esc2		Esc3	
		$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %	$\beta$ [%]	Error %
1	0.663	0.663	0.000	1.153	73.906	1.431	115.837
2	0.666	0.666	0.000	0.811	21.772	4.099	515.465
3	0.843	0.843	0.000	1.069	26.809	1.373	62.871
4	0.763	0.763	0.000	1.262	65.400	-	-
5	1.047	1.047	0.000	2.099	100.478	2.726	160.363
6	2.709	2.709	0.000	-	-	2.106	22.259
*						2.275	-
*						2.481	-
*						1.936	-

## Capítulo 9

### Discusión y Conclusiones

#### 9.1 Comentarios y conclusiones generales

Considerando los distintos resultados obtenidos en los capítulos precedentes, a continuación se discute el desempeño del uso de funciones de transmisibilidad como una herramienta para el proceso de identificación modal de sistemas estructurales.

Previo al análisis de los resultados exhibidos por cada metodología, vale la pena comentar el proceso seleccionado para la discriminación de polos falsos. Tal como fue presentado en el capítulo 7, la alternativa seleccionada ha sido la descrita en la sección 3.3.1, la cual basada en el comportamiento que desarrollan las funciones de transmisibilidad al ser evaluadas en algún polo, sugiere el uso del segundo valor singular para representar gráficamente esta condición. La alternativa descrita en la sección 3.3.2 ha sido descartada por ser considerada una solución forzada al problema planteado por los autores y que no presenta ventajas a la escogida en este estudio (Araújo & Laier, 2014). Finalmente, la alternativa presentada en la sección 3.3.3, si bien permite una forma de obtener pseudo funciones de transferencia con una notable reducción en la cantidad de polos de naturaleza matemáticos, y a pesar de estabilizar de mejor manera que las funciones de transmisibilidad escalares (Devriendt, Weijtjens, De Sitter, & Guillaume, 2013), éstas no arrojan valores confiables para amortiguamientos, aún en simulaciones numéricas.

Los resultados de las simulaciones presentadas en el capítulo 7 confirman que el uso de funciones de transmisibilidad resulta una alternativa válida para la identificación de propiedades modales, vale decir: obtención de frecuencia natural, forma y amortiguamiento modal. No obstante a lo anterior, se debe recordar que el grado de precisión relacionado a cada una de las metodologías, radica exclusivamente en el fiel cumplimiento de los requerimientos exigidos por los distintos enfoques de transmisibilidad (escalar, multivariable y PsdT). Estos son:

- Transmisibilidad escalar: Escenario de carga con excitación única o repartida uniformemente sobre la estructura.
- Transmisibilidad multivariable: Conocimiento del número de fuentes no correlacionadas actuando sobre el sistema.
- PsdT: Condición de carga con solicitaciones no correlacionadas actuando sobre la estructura.

Adicionalmente, cabe señalar que los resultados obtenidos responden al estudio de un sistema lineal invariante en el tiempo, cuyo mecanismo de disipación de energía puede ser descrito mediante un modelo de amortiguamiento viscoso proporcional (Rayleigh), el mismo que fue considerado en el marco teórico que concibe las principales propiedades de las funciones de transmisibilidad (Capítulo 2). Es claro que la calidad de los resultados sea vea afectada si el ruido instrumental es considerado.

Respecto a las metodologías N°1 y 2, se puede concluir que en caso de disponer escenarios de carga con excitación única o distribuida de manera correlacionada sobre la estructura, éstas permiten la obtención de propiedades modales con un alto grado de precisión. Queda en evidencia, que en caso de emplear la metodología N°2, el error en la estimación de valores de amortiguamiento se reduce notablemente, hecho que se justifica principalmente por la consideración de la existencia de efectos transientes en la etapa de parametrización inicial de funciones de transmisibilidad, eliminando el efecto leakage propio de la manipulación no paramétrica de estas funciones (aplicación de estimador tipo IO, Sección 4.3.4.3). Por otra parte, en caso que el escenario de carga describa la aplicación de solicitaciones de manera no correlacionada sobre el sistema, la cualidad no determinística que experimentan las funciones de transmisibilidad dificulta la correcta identificación de los polos, debido principalmente a que los polos no estabilizan tan fácilmente como en el caso determinístico. Lo anterior se basa en que el proceso de ajuste de curva, mediante algún estimador paramétrico evaluado para un orden dado, debe considerar no sólo las propiedades intrínsecas del sistema (polo y forma modal), sino que también parte del contenido espectral del input aplicado a la estructura en estudio. No obstante a lo anterior, la evaluación de los máximos que exhibe la curva asociada al inverso del segundo valor singular de las matrices tipo  $T^j(\omega)$ , permite evaluar de manera satisfactoria las frecuencias naturales amortiguadas asociadas al sistema, las que pueden aproximarse a las frecuencias naturales considerando los bajos valores de amortiguamiento que experimentan las estructuras civiles, permitiendo así la obtención final de las formas modales respectivas.

En relación a la metodología N°3, se observa que en caso de disponer con un número de puntos de control sobre la estructura que excedan la cantidad de fuentes no correlacionadas actuando sobre ésta, los resultados arrojados exhiben la mejor precisión de todas las alternativas propuestas en el capítulo 7. Esto se explica por la posibilidad que otorga este método para liberar de las funciones de transmisibilidad cualquier dependencia del contenido espectral del input, aun cuando las solicitaciones presenten un carácter no correlacionado entre sí. Adicionalmente, y debido al uso de una parametrización tipo LMF, mediante el uso de algún modelo tipo IO que incorpore efectos transientes en la generación del problema de valores propios polinomial (5-17), la estimación de amortiguamientos puede obviar cualquier eventual error producto del leakage en la generación de transformadas de Fourier de los distintas respuestas del sistema.

Para la metodología N°4, se destaca que la implementación de ésta, resulta viable sólo en caso de disponer cargas actuando de manera no correlacionada sobre la estructura (Sección 6.3). De tal forma como fue mencionado en el párrafo anterior, la imposibilidad de disponer curvas de carácter determinístico, dificulta la obtención de polos mediante la aplicación de diagramas de estabilización. Vale la pena destacar que en caso de enfrentar un escenario de carga con contenido armónico, la utilización de la curva  $\sigma_2^{-1}(\omega)$  (inverso del segundo valor

singular de las matrices tipo  $T^j(\omega)$ ) como herramienta de detección de frecuencias naturales amortiguadas, pierde confiabilidad debido a la presencia irremediable de las frecuencias operacionales, pudiendo malinterpretarlas como parte del sistema. No obstante, cabe señalar que en ausencia de este tipo de solicitación, el método permite estimar fácilmente frecuencia y su respectiva forma modal, relajando el principal requerimiento de las funciones de transmisibilidad, esto es, disponer de múltiples escenarios operacionales con distribución espacial de carga diferentes entre sí.

Finalmente, para la metodología N°5, se tiene que en caso de disponer de previo conocimiento de las frecuencias y formas modales respectivas, el estudio de minimización del problema polinomial de valores propios descrito en ( 5-17 ), ha permitido identificar de manera correcta los distintos valores de amortiguamiento modal. No obstante a lo anterior, el grado de precisión exhibido radica en la ausencia de ruido instrumental, en conjunto con la estimación paramétrica de coeficientes polinomiales llevada a cabo mediante un estimador LMFD que incluye efectos transientes.

En la presentación de las metodologías N°1, 2 y 4 (capítulo 7), se han propuesto dos alternativas para la extracción final de resultados:

- *Alt1*: Inspeccionar máximos de curva promedio del inverso del segundo valor singular de cada matriz  $T^j(\omega)$ ,  $\bar{\sigma}_2^{-1}(\omega)$ , y considerar esas ubicaciones directamente como las frecuencias naturales amortiguadas del sistema.
- *Alt2*: A partir del grupo que reúne todos los polos representativos del análisis de cada matriz  $\Delta^{-1}_j(\omega)$ , seleccionar polos en una vecindad en torno a los máximos que presente la curva promedio  $\bar{\sigma}_2^{-1}(\omega)$ , para finalmente mediante un análisis de cluster tomar el polo final relativo a la frecuencia estudiada.

La segunda alternativa propuesta concibe que el análisis de cada una de las matrices  $\Delta^{-1}_j(\omega)$  ( $j=1,2,\dots,n$ ) arroja como resultado el mismo polo representativo si éste se tratase de un polo válido del sistema, y no de naturaleza matemática, por lo tanto es de esperar que estos se agrupen en torno a una pequeña vecindad, la cual puede ser fácilmente detectada mediante un análisis de cluster iterativo, tal como ha sido presentado el criterio de selección de polos para un análisis SSI-Cov (Bilbao, 2014). No obstante a lo anterior, la precisión de los resultados puede verse afectada debido a que la presencia ruido en los registros, así como una eventual característica no determinística de las curvas de transmisibilidad, dificulta el proceso de ajuste de curvas mediante algún estimador paramétrico, lo que se finalmente se traduce en un sesgo inevitable en los polos obtenidos, generando así, una dispersión espacial no deseada que dificultaría la elección final del polo representativo. Adicionalmente, en caso de disponer pocos puntos de control ( $j$ ), la probabilidad de generar el mismo polo para cada una de las matrices  $\Delta^{-1}_j(\omega)$  se reduce drásticamente, dificultando aún más el proceso.

Respecto a la evaluación experimental llevada a cabo en el capítulo 8, los resultados confirman la dificultad asociada al proceso de obtención de valores confiables para los polos, en particular, valores de amortiguamiento (*Alt2*), mientras que, en caso de optar por la selección de frecuencias naturales a partir de la inspección de máximos en  $\bar{\sigma}_2^{-1}(\omega)$ , la cantidad de modos identificados y precisión de éstos mejora considerablemente.

Las distintas condiciones de carga empleadas en el análisis de la estructura montada en laboratorio ratifican la principal característica del uso de funciones de transmisibilidad, es decir, ausencia de frecuencias operacionales malinterpretadas como propias del sistema, sin importar el tipo de excitación que sea capaz de excitar la estructura en la banda de interés de frecuencias, permitiendo así, relajar la principal exigencia de la gran mayoría de métodos modales operacionales, vale decir, disponer de excitaciones de tipo ruido blanco. Considerando el control de la distintas variables que sugiere un ensayo en laboratorio para una estructura menor como la ensayada en este estudio, era de esperar que el desempeño de las distintas metodologías replicara el grado de precisión exhibido en las simulaciones llevadas a cabo en el capítulo 7, no obstante, basta con examinar los resultados de la metodología N°3, la de mayor exactitud en las simulaciones, para darse cuenta que aun conociendo el número de fuentes no correlacionadas actuando en la estructura, no ha sido capaz de entregar buenos resultados para la razón de amortiguamiento crítico. Este fenómeno, puede ser explicado por la incapacidad de representar la dependencia de la amplitud de la respuesta estructural en la cantidad de energía disipada por un sistema frente a cargas dinámicas, propio de un modelo de amortiguamiento viscoso lineal (Alipour & Zareian, 2008). Bajo este antecedente, la obtención de una buena aproximación en la estimación de amortiguamiento sólo podrá ocurrir si el nivel de respuesta para los distintos escenarios de carga empleados para la generación de funciones de transmisibilidad resulta similar. En relación a los resultados de la metodología N°5, la incapacidad de estimar todos los valores de amortiguamiento para cada una de las frecuencias y formas modales suministradas mediante la metodología SSI-Cov, puede ser explicado por la pérdida de precisión en la obtención de estas variables de entrada. Lo anterior es confirmado al intentar obtener los polos del sistema presentado en el capítulo 7 mediante un estimador tipo LMFD que no incorpore efectos transientes, donde el sólo hecho de incluir el fenómeno de leakage en la generación de coeficientes matriciales del problema descrito en ( 5-17 ), impide la correcta identificación de los polos aun cuando el ruido instrumental no haya sido considerado.

Los resultados provenientes del análisis de los registros del edificio Torre Central confirman lo expuesto en los párrafos anteriormente descritos. No obstante a lo anterior, al realizar una comparación con los resultados obtenidos del método clásico SSI-Cov, se aprecia cierta desventaja asociada al uso de funciones de transmisibilidad para un sistema con alto contenido de ruido, el que puede estar relacionado al sistema de adquisición de datos, así como una eventual no linealidad experimentada por la estructura, fenómeno que puede ser confirmado por la variabilidad exhibida en sus propiedades en el contexto de un estudio de seguimiento modal realizado anteriormente (Bilbao, 2014). Respecto a la elección de escenarios de carga empleados para el análisis modal del edificio, se concluye que éstos presentan una distribución espacial de carga lo suficientemente diferente, y por lo tanto útiles, que permiten hacer uso de las funciones de transmisibilidad como herramienta válida para el proceso de identificación. En particular, se destaca la combinación de registros de uso diurno (condición normal de operación) y registro nocturno como la más favorable para poder identificar con mayor precisión frecuencias y formas modales, lo cual se puede explicar en gran medida por la similitud en el nivel de solicitaciones que presentan estos dos escenarios, en conjunto con asegurar que la estructura no incurra en no linealidad debido a deformación excesiva como podría ser un sismo de gran magnitud.

## 9.2 Recomendaciones para investigaciones futuras

Considerando el extenso estudio del estado del arte relativo al uso de funciones de transmisibilidad como herramienta para llevar a cabo el proceso de identificación modal, cuyo resultado ha sido materializado en la presentación de 5 diferentes metodologías de análisis, cabe señalar que aun cuando éstas fueron concebidas para operar de manera óptima y otorgar la mayor automatización posible respecto a la interpretación de datos por parte del usuario, existen diversos temas que merecen un mayor desarrollo, lo que eventualmente podrá seguir ampliando el alcance de este estudio. A continuación se presentan los principales puntos:

- El principal requisito para emplear funciones de transmisibilidad corresponde a emplear los registros de respuestas de un sistema para dos estados de carga con diferente distribución espacial de carga. Bajo el requisito anterior, es clara la necesidad de disponer de alguna herramienta certera que permita cuantificar la variación de carga sobre una estructura.
- En relación a la metodología N°3, ha quedado claro que en caso de conocer a priori la cantidad de fuentes no correlacionadas actuando en la estructura, ésta otorga la mayor precisión en la obtención de parámetros modales. Hasta ahora existe sólo un enfoque que permite predecir el número de fuentes, no obstante, cuando ha sido implementada en datos para una estructura en condición operacional real, los resultados no han sido los esperados (Weijtjens W. , 2014) (Weijtjens W. , De Sitter, Devriendt, & Guillaume, 2013). Considerando lo anterior, vale la pena estudiar alguna metodología que permita estimar de manera eficaz este dato clave.
- Considerando que el uso de funciones de transmisibilidad ha sido limitado exclusivamente a sistemas lineales e invariantes en el tiempo que presenten un modelo de amortiguamiento proporcional que permita desarrollar la teoría del análisis modal clásico, resulta interesante realizar un estudio para evaluar la precisión de los resultados en función de la diferencia entre los niveles respuesta experimentados para cada una de las condiciones de carga consideradas. La sugerencia anterior es de gran valor si el modelo estructural empleado permite representar la dependencia del amortiguamiento con el nivel de deformación que el sistema experimente, lo que finalmente permitiría entregar directrices respecto a la elección óptima de condiciones de carga para un sistema y la confiabilidad de los parámetros obtenidos.
- Conociendo la dificultad que experimentan las metodologías N° 1 y 4 en la estimación de polos mediante el uso de criterios de estabilización, bajo escenarios de carga cuyas sollicitaciones no resulten correlacionadas entre sí, vale la pena evaluar la posibilidad de generar espectros de densidad de potencia mediante una parametrización polinomial previa que reduzca el error asociado a leakage. Una alternativa puede ser la presentada en (Kanazawa & Hirata, 2005).

- De tal forma de disponer de total automatización en las metodologías presentadas en el capítulo 7, surge la necesidad de contar con alguna herramienta que permita identificar de manera automatizada la ubicación de los máximos que exhiben las curvas promedio  $\bar{\sigma}_2^{-1}(\omega)$ . Adicionalmente, y con el objetivo de reducir el gasto computacional, el estudio de un método alternativo para la elección de polos mediante algún criterio de *clusters* u otro merece especial atención.
- Teniendo en cuenta la eventual aparición de polos falsos producto de la manipulación de transmisibilidades correspondientes a dos estados de carga distintos, vale la pena consolidar alguna metodología adicional para la discriminación de éstos. Tal como fue presentado en ( 2-11 ), en caso de disponer funciones de transmisibilidad previamente parametrizadas, los coeficientes asociados al numerador, en un modelo de descripción mediante fracciones matriciales, sugieren el estudio de esta condición.
- De manera análoga al estudio del estimador Maximum Likelihood para datos operacionales en la identificación de sistemas mediante espectros de densidad de potencia (Guillaume, Hermans, & Van der Auweraer, 1999), vale la pena estudiar las propiedades estadísticas en la manipulación de funciones de transmisibilidad y sacar mejor provecho al estimador PLSCF-Plus.

## Bibliografía

- Alipour, A., & Zareian, F. (2008). Study Rayleigh damping in structures; unceratinties and treatments. *Proceedings of 14th World Conference on Earthquake Engineering*. Beijing, China.
- Araújo, I. G., & Laier, J. E. (2014). Operational modal analysis using SVD of power spectral density transmissibility matrices. *Mechanical Systems and Signal Processing*(46.1), 129-145.
- Basoalto, J. Análisis del efecto de las condiciones ambientales en las propiedades modales de un edificio de hormigón armado. *Thesis*. Universidad de Chile, Santiago.
- Bilbao, J. Interpretación automática de diagramas de estabilidad. *Thesis*. Universidad de Chile, Santiago, Chile.
- Brandt, A. (2011). *Noise and vibration analysis: signal analysis and experimental procedures*. John Wiley & Sons.
- Cabboi, A., Magalhães, F., Gentile, C., & Cunha, A. (2013). Automatic operational modal analysis: chalenges and practical application to a historical bridge. *6th ECCOMAS Conference on Smart Structures and Materials*.
- Cara, F. J., Juan, J., Alarcón, E., Reynders, E., & De Roeck, G. (2013). Modal contribution and state space order selection in operational modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 38(2), 276-298.
- Caroca, J. L. Desarrollo e implementación de un sistema de detección de daño estructural. (*M.Sc Thesis*). Universidad de Chile, Santiago, Chile.
- Cauberghe, B. Applied frequency-domain system identification in the field of experimental and operational modal analysis. *Phd Thesis*. Vrije Universiteit Brussels.
- Cauberghe, B., Guillaume, P., Verboven, P., Parloo, E., & Vanlanduit, S. (2004). The secret behind clear stabilization diagrams: The influence of the parameter constraint on the stability of the poles. *Proceedings of the 10th SEM International Congress & Exposition on Experimental and Applied Mechanics*.
- Chopra, A. K. (2011). *Dynamics of Structures Theory and Applications to Earthquake Engineering*. Prentice Hall.
- Devriendt, C., & Guillaume, P. (2008). Identification of Modal parameters from transmissibility measurements. *Journal of Sound and Vibration*, 343-356.

- Devriendt, C., De Sitter, G., & Guillaume, P. (2010). An operational modal analysis approach based on parametrically identified multivariable transmissibilities. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1250-1259.
- Devriendt, C., De Sitter, G., Vanlanduit, S., & Guillaume, P. (2009). Operational modal analysis in the presence of harmonic excitations by the use of transmissibility measurements. *Mechanical Systems and Signal Processing*(23.3), 621-635.
- Devriendt, C., Weijtjens, W., De Sitter, G., & Guillaume, P. (2013). Combining multiple single-reference transmissibility functions in a unique matrix formulation for operational modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*(40.1), 278-287.
- El-Kafafy, M., Guillaume, P., Peeters, B., Marra, F., & Coppotelli, G. (2012). Advanced frequency-domain modal analysis for dealing with measurement noise and parameter uncertainty. *Topics in Modal Analysis I*, 5, 179-199.
- Ester, M., Kriegel, H. P., Sander, J., & Xu, X. (1996). A density-based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise. *2nd International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (KDD)*, 96, págs. 226-231.
- Felber, A. J. Development of a hybrid bridge evaluation system. *Ph.D thesis*. University of British Columbia, Vancouver, Canada.
- Fu, Z. F., & He, J. (2001). *Modal analysis*. Butterworth-Heinemann.
- Gohberg, I., Lancaster, P., & Rodman, L. (1982). *Matrix polynomials* (Vol. 58). Siam.
- Guillaume, P., De Troyer, T., Deckers, K., De Sitter, G., & Devriendt, C. (2008). Identifying Multi-reference Frequency Response Matrices Using a Single Measurement. *IMAC-XXVI: Conference & Exposition on Structural Dynamics*.
- Guillaume, P., Hermans, L., & Van der Auweraer, H. (1999). Maximum likelihood identification of modal parameters from operational data. *Proceedings of the 17th International Modal Analysis Conference (IMAC17)*, 1887-1893.
- Guillaume, P., Verboven, P., & Vanlanduit, S. (1998). Frequency domain maximum likelihood identification of modal parameters with confidence intervals. *Proceedings of the International Seminar on Modal Analysis, I*, 359-366.
- Guillaume, P., Verboven, P., Vanlanduit, S., Van Der Auweraer, H., & Peeters, B. (2003). A poly-reference implementation of the least-squares complex frequency-domain estimator. *Proceedings of IMAC*, 21.
- Harris, C. M., & Piersol, A. G. (2002). *Harris' shock and vibration handbook* (Vol. 5). New York: McGraw-Hill.
- Hernández, F. Análisis de Métodos de Identificación de Variación de Propiedades Dinámicas. *MSc Thesis*. Universidad de Chile.
- Heylen, W., Lammens, S., & Sas, P. (2005). *Modal analysis theory and testing*. Katholieke Universteit Leuven.
- Kanazawa, K., & Hirata, K. (2005). Parametric estimation of the cross-power spectral density. *Journal of sound and vibration*(282.1), 1-35.

- León, P. Variación de propiedades dinámicas de la torre central debido a factores sísmicos. *Thesis*. Universidad de Chile, Santiago.
- Levy, E. C. (1959). Complex-curve fitting. *Automatic Control*, 37-43.
- Madsen, K., Nielsen, H. B., & Tingleff, O. (2004). *Methods for non-linear least squares problems*.
- Maia, N. M., Silva, J. M., & Ribeiro, A. M. (2001). The transmissibility concept in multi-degree-of-freedom systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 129-137.
- Napolitano, K. L. (2016). Using Singular Value Decomposition to Estimate Frequency Response Functions. *Topics in Modal Analysis & Testing*, 10, 27-43.
- Newland, D. E. (2005). *An Introduction to Random Vibrations, Spectral & Wavelet Analysis 3th Edition*. Dover Publications, Inc.
- Oppenheim, A., Schaffer, R., & Buck, J. (2010). *Discrete-time signal processing (2nd Ed)*. Pearson.
- Orellana, C. Identificación de daño en estructuras complejas empleando una aproximación lineal mediante el principio de máxima entropía. *Thesis*. Universidad de Chile, Santiago.
- Parloo, E. Application of Frequency Domain System Identification Techniques in the Field of Operational Modal Analysis. *Ph.D Thesis*. Vrije University, Brussels, Belgium.
- Parloo, E., Verboven, P., Guillaume, P., & Van Overmeire, M. (2001). Maximum likelihood identification of modal parameters from non-stationary operational data. *Proceedings of the 19th International Modal Analysis Conference (IMAC19)*.
- Pastor, M., Binda, M., & Harčarik, T. (2012). Modal assurance criterion. *Procedia Engineering*, 543-548.
- Peeters, B., & De Roeck, G. (1999). Reference based stochastic subspace identification for output-only modal analysis. *Mechanical systems and signal processing*, 13(6), 855-878.
- Peeters, B., El-Kafafy, M., & Guillaume, P. (2012). Dealing with Uncertainty in Advanced Frequency-Domain Operational Modal Analysis. *Eleventh International Conference on Computational Structures Technology*. Croatia.
- Peeters, B., El-Kafafy, M., & Guillaume, P. (2012). The new PolyMAX Plus method: confident modal parameter estimation even in very noisy cases. *Proceedings of the ISMA*.
- Peeters, B., Guillaume, P., Van der Auweraer, H., Cauberghe, B., Verboven, P., & Leuridan, J. (2004). Automotive and aerospace applications of the PolyMAX modal parameter estimation method. *Proceedings of IMAC*, 22.
- Peeters, B., Van der Auweraer, H., Guillaume, P., & Leuridan, J. (2004). The PolyMAX frequency-domain method: a new standard for modal parameter estimation? *Shock and Vibration*(11.3-4), 395-409.
- Penrose, R. (1955). A generalized inverse for matrices. *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*, 51(03).

- Pintelon, R., & Schoukens, J. (2012). *System identification a frequency domain approach*. John Wiley & Sons.
- Pintelon, R., Guillaume, P., Rolain, Y., Schoukens, J., & Van Hamme, H. (1994). Parametric identification of transfer functions in the frequency domain—a survey. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2245-2260.
- Pintelon, R., Schoukens, J., & Vandersteen, G. (1997). Frequency domain system identification using arbitrary signals. *IEEE Transactions on Automatic Control*(44.12), 1717-1720.
- Reynders, E., Houbrechts, J., & De Roeck, G. (2012). Fully automated (operational) modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 29, 228-250.
- Van Overschee, P., & De Moor, B. L. (2012). *Subspace identification for linear systems: Theory—Implementation—Applications*. Springer Science & Business Media.
- Verboven, P. Frequency-Domain System Identification for Modal Analysis. *Ph.D thesis*. Vrije Universiteit Brussel, Belgium.
- Weijtjens, W. Advanced Methods for Estimating and Monitoring the Modal Parameters of Operational Systems Subjected to Non-White Excitation. *Phd Thesis*. Vrije Universiteit, Brussel.
- Weijtjens, W., De Sitter, G., Devriendt, C., & Guillaume, P. (2013). A new approach to operational modal analysis based on multivariable transmissibility functions.
- Weijtjens, W., de Sitter, G., Devriendt, C., & Guillaume, P. (2014). Operational Modal Analysis Based on Multivariable Transmissibility Functions: Revisited. *Topics in Dynamics of Civil Structures*, 4(2013), 317-326.
- Weijtjens, W., De Sitter, G., Devriendt, C., & Guillaume, P. (2014). Operational modal parameter estimation of MIMO systems using transmissibility functions. *Automatica*(50.2), 559-564.
- Weijtjens, W., Lataire, J., Devriendt, C., & Guillaume, P. *Transmissibility based OMA for time-varying loading conditions*. Vrije Universiteit, Brussel.
- Welch, P. (1967). The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: a method based on time averaging over short, modified periodograms. *IEEE Transactions on audio and electroacoustics*, 70-73.
- Yan, W. J., & Ren, W. X. (2012). Operational Modal Parameter Identification from Power Spectrum Density Transmissibility. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*(27.3), 202-217.
- Zhang, L., Tamura, Y., Wang, T., & Sun, X. (2011). A New Broadband Modal Identification Technique with Applications. *Modal Analysis Topics*, 3, págs. 261-271.