Universidad de Chile

Facultad de Filosofía y Humanidades

Departamento de Filosofía

LA CONTRIBUCUÓN PRAGMÁTICA DE LAS MATEMÁTICAS A LA FORMULACIÓN DE LEYES FUNDAMENTALES EN LA FÍSICA CLÁSICA

MATÍAS MORALES LANAS

Profesor guía **Calificación**

Cristián Soto Herrera

Santiago - Chile

2017

IV. AGRADECIMIENTOS

Primero agradecer a mi madre y a mi padre por su apoyo incondicional y por constituir mis pilares fundamentales. Infinitas gracias por ofrecerme su ayuda y sus consejos.

Agradezco a todos mis profesores que han sido claves en mi formación profesional y personal. En particular, agradezco al profesor Cristian Soto por su vocación pedagógica y profesional; sus consejos, correcciones y paciencia fueron -y son- fundamentales en mi proceso de aprendizaje. Gracias por enseñarme que la filosofía puede ser un aporte propositivo. Muchas gracias por ofrecerme participar en su proyecto FONDECYT.

Finalmente, agradezco a todos aquellos que fueron incondicionales en mi camino como estudiante de filosofía. Especialmente a aquellos con quienes compartí reflexiones y discusiones filosóficas.

ÍNDICE

V. ÍNDICE DE ILUSTRACIONES Y CUADROS.

VI. RESUMEN.

El presente trabajo plantea como hipótesis que las matemáticas aplicadas a la formulación y desarrollo de los enunciados de ley en la física clásica realizan una contribución pragmática por medio de sus distintos roles metodológicos. Estos últimos son entendidos como aquellos roles que permiten establecer y determinar las relaciones inter- e intra-teóricas entre los distintos enunciados de ley. En este sentido, se plantea como objetivo general analizar críticamente la contribución de las matemáticas aplicadas para la construcción y desarrollo de las estructuras de las leyes fundamentales de la física clásica. Para abordar este objetivo, se plantean los siguientes tres objetivos específicos: (1) analizar la contribución de los roles metodológicos de las matemáticas aplicadas en la formulación de los enunciados de ley; (2) analizar la metodología aplicada en la práctica científica para la formulación de estos enunciados; y (3) analizar los puntos anteriores en un caso de estudio correspondiente a las leyes dinámicas de Newton presentadas en su *Philosophiea naturalis principia mathematica* (1687).

Este trabajo se estructura en tres capítulos. En el primero se analiza la contribución del rol metodológico de las matemáticas aplicadas en la formulación y desarrollo de los enunciados de ley de la física clásica, en términos de su relación con otros roles, el carácter instrumental de las matemáticas, la

versatilidad de aplicación de las mismas y la validez de estas por medio de la invariancia. En el segundo capítulo se analiza la metodología utilizada en las matemáticas y cómo se utiliza tal metodología en las ciencias, en particular cómo es utilizada en la práctica científica para la formulación de las leyes. En el tercer capítulo se analiza los resultados de los capítulos precedentes, teniendo a la vista la formulación de las leyes de Newton, en términos de la metodología utilizada, los fundamentos para establecer los conceptos físicos fundamentales y la formulación y desarrollo de las leyes dinámicas.

Los resultados arrojan que, (i) dada las herramientas de razonamiento que ofrecen las matemáticas para formular estructuras, que permiten inferir las consecuencias de las leyes y descubrir las conexiones entre distintas estructuras matemáticas; y (ii) dada las herramientas formales de estas, las cuales proporcionan una amplia variedad de conceptos para representar y cuantificar entidades físicas, permiten inferir las conexiones entre leyes y otras estructuras matemáticas; permiten concluir que las matemáticas realizan una contribución de carácter pragmático, tanto en la formulación de los enunciados de ley en la física clásica como en la deducción de otras leyes. En efecto, la variedad de herramientas ofrecidas por las matemáticas se adecúa a diversos contextos de investigación en la práctica científica. Esta misma contribución, a su vez, permite realizar una jerarquización formal de las leyes en términos de la deducción de leyes (generando niveles), por medio de matemáticas complejas, y de la robustez de las mismas.

Además, se muestra cómo el método axiomático de las matemáticas contribuye en la formulación de los enunciados de ley, puesto que la axiomatización semi-formal utilizado en la práctica científica permite formular de manera consistente los conceptos y axiomas físicos, establecer las relaciones pertinentes entre estos y deducir las consecuencias de estos axiomas. Esta contribución del método axiomático es pragmática debido a que la caracteriza como una axiomatización débil pragmática.

La aplicación de estos resultados se puede apreciar en la formulación y desarrollo de las tres leyes dinámicas que formuló Newton en sus *Principia*. En efecto, Newton al formular estas leyes se guía por una metodología que le permite precisar sus dos conceptos físicos claves, a saber, la *masa* y la *fuerza*, y establecer correlaciones entre estos, y, en base a esto, generar distintas estructuras matemáticas. Además, se aprecia cómo el rol metodológico contribuye a demostrar cómo las tres leyes de Newton se relacionan con la ley de Galileo y las leyes de Kepler.

En síntesis, los resultados de este trabajo permiten dar cuenta que las matemáticas aplicadas contribuyen de manera pragmática en la formulación y desarrollo de los enunciados de ley en la física clásica, puesto que el rol metodológico de estas es un rol de carácter pragmático.

0. INTRODUCCIÓN.

La física es una disciplina científica que se caracteriza por la utilización de una serie de herramientas que le permiten abordar los fenómenos físicos, experimentar con diversos modelos y evaluar sus datos observacionales o sus resultados experimentales. Dentro de la variedad de herramientas que emplea la física se encuentran las matemáticas, por medio de las cuales ha logrado articularse como una disciplina sistemática. El empleo de estas herramientas involucra, no obstante, la utilización de una gran variedad de teorías matemáticas para formular leyes físicas, establecer modelos o simulaciones computacionales, analizar datos, ofrecer criterios de confiabilidad de sus resultados, entre otros. Para tales tareas, la física ha empleado, por ejemplo, el cálculo diferencial e integral, la mecánica matricial, la mecánica de ondas, la mecánica estadística, la teoría de la probabilidad, la estadística, los espacios de Hilbert, la geometría diferencial, entre otras.

La utilización de las matemáticas en las ciencias en general, y en la física en particular, ha generado extensos y variados debates sobre su contribución a las ciencias, los roles que juegan, la naturaleza de su aplicabilidad, la indispensabilidad/dispensabilidad de las mismas, entre otros. Este último debate, no obstante, se ha posicionado como uno de gran importancia para la filosofía de las matemáticas. En efecto, la indispensabilidad o dispensabilidad de las teorías matemáticas en las teorías científicas ha conducido a establecer posiciones sobre los compromisos ontológicos, epistémicos y metodológicos que tenemos que adoptar con respecto a las entidades matemáticas. La pregunta central que se plantea en este debate es la siguiente: ¿es posible concebir a las teorías científicas sin las matemáticas? Por ejemplo, ¿es posible concebir a la mecánica cuántica sin los espacios de Hilbert? A continuación, se presentan las principales posiciones ante esta pregunta.

0.1. El argumento de la indispensabilidad de las matemáticas.

Una de las respuestas a la pregunta sobre si es posible concebir las teorías científicas sin matemáticas ha sido avanzada por el *platonismo matemático fuerte*. Su principal argumento se denomina *argumento de la indispensabilidad* (en adelante AI), inspirado por W.V. Quine y H. Putnam. Este argumento sugiere, en líneas generales, que las matemáticas son indispensables para la formulación y desarrollo de las teorías científicas. Así como se adquieren compromisos ontológicos con las entidades físicas de estas teorías, de igual manera se deben adquirir compromisos ontológicos con las entidades matemáticas. El AI puede ser esquematizado de la siguiente manera (Colyvan, 2012, p. 49):

(P1) Tenemos que comprometernos ontológicamente con todas y sólo las entidades que son indispensables para nuestras mejores teorías actuales.

(P2) Las entidades matemáticas son indispensables para nuestras mejores teorías científicas.

(C1) Tenemos que comprometernos ontológicamente con las entidades matemáticas.

De acuerdo con este argumento, se debe asumir un compromiso ontológico *robusto* de realismo matemático, es decir, un compromiso tal que, (a) los objetos matemáticos existen; (b) tales objetos son abstractos, entendiéndolos como causalmente aislados del mundo físico, puesto que no son ubicables ni espacio ni temporalmente; y (c) las teorías matemáticas son verdaderas, ya que sus términos refieren (véase Bueno, 2016, p. 2.591). A su vez, las entidades matemáticas jugarían el mismo rol epistémico que las entidades de las ciencias tales como electrones, neutrinos, quarks, hoyos negros, entre otros. Por consiguiente, la existencia de las primeras estaría justificada por la existencia y confirmación de las segundas. Es decir, las teorías se confirman como un todo. A esto se le denomina el *holismo confirmacional* (Colyvan 2012, p. 48).

Otra de las respuestas sobre la indispensabilidad o dispensabilidad de las matemáticas es la proporcionada por el *ficcionalismo radical* o *nominalismo fuerte*. Su principal representante es Hartry Field (1980), cuya respuesta rechaza a P2, sugiriendo que, a pesar de la apariencia matemática de las teorías científicas, no son indispensable para la ciencia (véase Colyvan, 2012, p. 53). Por consiguiente, el proyecto nominalista de Field busca dar cuenta que, (1) las mejores teorías científicas pueden sobrevivir sin las matemáticas sin perder su *atractivo*; y (2) que las teorías matemáticas no requieren ser verdaderas para ser útiles en sus aplicaciones, pues sólo necesitan ser conservativas[1].

El principal argumento ofrecido por Field en contra de P1 del AI se centra en criticar al *holismo confirmacional*. De acuerdo con Field, este holismo dice que, si cierta teoría matemática S es indispensable para una teoría física básica T, entonces la evidencia para T sería evidencia para S, siendo esta última confirmada empíricamente (Field 2016, p. P-32). Es decir, el argumento de Quine-Putnam busca justificar empíricamente la existencia de las entidades matemáticas de la misma manera que ocurre con las entidades físicas. Sin embargo, no es posible aplicar los mismos criterios de existencia de las entidades físicas a las entidades matemáticas (por ejemplo, no hay una forma para determinar si los números poseen propiedades causales como un electrón).

[1] Field entiende por *conservativa*, *grosso modo*, que, si se añade una teoría matemática a una teoría científica nominalista, no se derivan consecuencias nominalistas que no se seguirían sólo de la teoría científica nominalista (véase Colyvan, 2012, p. 54).

Finalmente, Field aboga que las matemáticas son dispensables. En efecto, se sostiene que cualquier justificación para la supuesta indispensabilidad de las matemáticas para la ciencia puede ser socavado, si se muestra que hay teorías y explicaciones buenas que no involucren el uso y compromisos con las entidades matemáticas. Sin embargo, esto no es realizable de manera análoga a entidades físicas como el electrón (Field 1989, p. 17). Este es el objetivo central de Field en su libro *Science Without Numbers* (2016 [1980]). Si bien este autor no logra alcanzar todo el detalle de cómo eliminar a las entidades matemáticas de cada explicación y teoría científica, al menos logra proporcionar argumentos para no aceptar al AI.

0.2. Posiciones intermedias respecto al AI.

En la filosofía de las matemáticas existen posiciones intermedias con respecto al AI. Tal es el caso de Penélope Maddy, quien considera que el AI es un argumento problemático, puesto que la posición naturalista quineana se basa en una visión prejuiciosa de la metodología científica (Maddy, 1995, p. 253). En efecto, al realizar la pregunta ¿la práctica científica actual trabaja de esta forma? Surgen los problemas que no puede solventar el naturalismo quineano. Maddy observa que las teorías científicas incluyen, por lo general, una buena cantidad de matemáticas (Maddy, 1994, p. 384). Por ejemplo, la temperatura de un gas está en función (matemática) del tiempo, la aceleración se puede obtener por medio de la segunda derivada de la velocidad de un cuerpo, entre otros casos. De esto se puede inferir la imposibilidad (aparente) de remover los componentes matemáticos de las teorías científicas (Maddy, 1994, p. 384). No obstante, Maddy se pregunta, ¿es válido el AI si se observan casos concretos? Por ejemplo, ¿las cinco virtudes teóricas de Quine (*simplicidad*, *familiaridad de principio*, *alcance*, *fecundidad* y *concordancia con los experimentos*), para adquirir compromisos ontológicos con las entidades físicas, se cumplen en casos históricos como el de la teoría atómica? De acuerdo con Maddy (1994), la historia del atomismo enseña lo siguiente: (1) las cinco virtudes teóricas no son suficientes para establecer la verdad de una hipótesis científica. (2) Las actitudes epistémicas de las comunidades científicas con respecto a sus teorías no son tan simples. Por ejemplo, Jean-Baptiste Dumas (1800-1884) creyó en la existencia de los átomos, pero que debían ser excluidos de la química (no contaba con evidencia de su existencia), mientras que Wilhelm Ostwald (1853-1932) sostuvo que la teoría atómica era falsa, pero útil para la organización de la teoría química. Ocurre en este tipo de casos que un experimento especialmente potente puede mover una teoría desde la aceptación de su utilidad a la aceptación de su verdad. En otros casos, una parte útil es desechada cuando ha servido su propósito; y en otros casos, las partes donde se desconoce el valor de verdad de una teoría pueden ser tolerados indefinidamente, siempre que produzcan ecuaciones comprobables (Maddy, 1994, p. 395).

De acuerdo con Maddy (1995, p. 254), en la práctica científica misma no se considera que el éxito empírico de una teoría confirme todas sus partes. En ciertos casos, algunas partes continúan siendo consideradas como *hipótesis útiles* hasta que sea posible una *verificación directa*. Si esto es correcto, entonces la apariencia de indispensabilidad de una entidad dada en una teoría exitosa, incluso en las mejores teorías disponibles, no es suficiente para justificar la creencia en su existencia. En efecto, en el caso de la existencia de las entidades matemáticas, no se pueden realizar conclusiones directas a partir de esta observación, es decir, no se puede establecer una analogía directa entre los números y los átomos (Maddy, 1995, p. 254). El punto de Maddy es que hay que mirar cuidadosamente el rol que las matemáticas juegan en las mejores teorías científicas, pues se necesita observar dónde y cómo las entidades matemáticas aparecen en estas teorías. Por ejemplo, Feyman (1918-1988) observa que en el análisis de las mareas *el océano es considerado infinitamente profundo* (Maddy, 1994, p. 396). Este supuesto es razonable puesto que, de lo contrario, las matemáticas serían impracticables. Cabe notar que un AI basado en este ejemplo sería inverosímil: ¿se debería creer en el infinito porque juega un rol en nuestras mejores teorías científicas de ondas de agua? En los diversos casos como este que se pueden presentar, lo falso puede ser considerado como mera hipótesis útil, aunque indispensable (para efectos del cálculo). En efecto, sin estas consideraciones las teorías no serían tratables matemáticamente. Por consiguiente, se puede observar que ser indispensables para las mejores teorías científicas no equivale a ser verdadero (Maddy, 1995, p. 254).

Finalmente, Maddy (1995, pp. 255-257) concluye lo siguiente: (1) los científicos distinguen aquellas partes de las mejores teorías que son verdaderas de aquellas que son simplemente útiles; (2) en cuanto a la examinación, las hipótesis matemáticas muy desarrolladas a menudo resultan en supuestos que no sólo no son confirmados robustamente, sino que son explícitamente falsos (aguas infinitamente profundas, por ejemplo); y (3) incluso en aquellos casos donde la matemática muy desarrollada es usada en hipótesis no conocidas explícitamente para ser falsas, las consecuencias de esa matemática muy desarrollada no son tratadas a la par con el resto de la teoría.

Otra posición intermedia dentro de la filosofía de las matemáticas con respecto al AI, es la propuesta por Otavio Bueno, quien propone que los platonistas no acomodan completamente los tres roles básicos de las matemáticas aplicadas (los roles inferencial, expresivo y representacional); y propone una explicación anti-realista de la aplicación de estas, con el objetivo de socavar su indispensabilidad en términos en que la verdad de las teorías matemáticas no juega ningún rol al respecto -aunque Bueno las considera indispensables, pero no de la misma manera que el platonista-.

La presente investigación busca profundizar la propuesta de Bueno en términos de analizar la contribución de las matemáticas aplicadas a la formulación de los enunciados de ley en la física clásica. De acuerdo con esto, ¿contribuyen las matemáticas a la formulación de las leyes fundamentales de la física? Si es así, ¿qué tipo de contribución realizan las matemáticas? ¿Cuál es el rol que pueden jugar las matemáticas al ser aplicadas en la formulación y desarrollo de las leyes fundamentales de la física? ¿Qué tipo de metodología se requiere para que las estructuras matemáticas posean objetividad o consistencia? Estas son las preguntas directrices que conducen la investigación.

0.3. Hipótesis de trabajo.

La hipótesis de trabajo afirma que las matemáticas aplicadas a la formulación y desarrollo de los enunciados de ley en la física clásica realizan una contribución pragmática por medio de su rol metodológico. En este contexto, se entiende por *rol metodológico* aquel rol que permite establecer y determinar las relaciones inter- e intra-teóricas entre los distintos enunciados de ley en la física.

El objetivo general de la investigación consiste en analizar críticamente la contribución de las matemáticas aplicadas para la construcción y desarrollo de las estructuras matemáticas de las leyes fundamentales de la física clásica. Para abordar este objetivo, se plantean tres objetivos específicos, estos son, a saber:

(1) analizar la contribución del rol metodológico de las matemáticas aplicadas en la formulación de los enunciados de ley; (2) analizar la metodología aplicada en la práctica científica para la formulación de los enunciados de ley; y (3) analizar los puntos anteriores en un caso de estudio correspondiente a las leyes dinámicas de Newton presentadas en su *Philosophiea naturalis principia mathematica* (1687).

0.4. Estructura del argumento.

La tesis se estructura en tres capítulos correlativos a los tres objetivos específicos. El primer capítulo, titulado *El carácter matemático de las leyes de la física clásica*, analiza la contribución del rol metodológico de las matemáticas aplicadas en la formulación de los enunciados de ley. En este se ofrece una definición de una ley en términos de correlaciones de eventos físicos bajo ciertas condiciones iniciales. En este caso las matemáticas jugarían un rol metodológico que contribuye a esta formulación, puesto que ofrece herramientas de razonamiento que posibilitan tal tarea. No obstante, no es el único rol que juegan las matemáticas aplicadas. En efecto, existen, al menos, otros tres roles, a saber, el inferencial, representacional y expresivo, los cuales pueden ser subsumidos en el rol metodológico (sección 1.1). Luego, se procede a analizar concretamente el rol metodológico en la formulación de los enunciados de ley. Primero, se analiza a las leyes como enunciados mixtos, es decir, constituidos de componentes físicos y matemáticos. Este último componente, formulado en términos de estructuras matemáticas, permite (1) deducir otras leyes o estructuras matemáticas por medio de las herramientas formales de las matemáticas, ofreciendo criterios para determinar si una ley es fundamental; y (2) dar cuenta de las ventajas comparativas con respecto a otras formas de enunciar una ley (sección 1.2). Posteriormente, se expone el carácter instrumental de las matemáticas y su versatilidad de aplicación (sección 1.3). Además, se analiza la versatilidad de las matemáticas en términos de robustez, noción que introduce otro criterio para determinar si una ley es fundamental (sección 1.4). Finalmente, se analiza el papel que juegan las matemáticas para asegurar la validez de aplicación de las leyes en distintos contextos, por medio de los principios y transformaciones de invariancia.

El segundo capítulo, titulado *El rol metodológico de la axiomatización en las leyes de la física*, analiza la metodología aplicada en la práctica científica para la formulación de los enunciados de ley. En este se busca responder cómo las matemáticas ofrecen consistencia y objetividad en la formulación de las leyes. Para ello, se caracteriza a la metodología utilizada por las matemáticas, a saber, el método axiomático, el cual se caracteriza, *grosso modo*, como aquel método que deduce todas las inferencias lógicas de un conjunto determinado de axiomas. De esta manera, las matemáticas logran caracterizar sus conceptos y axiomas de manera precisa y no ambigua y, por consiguiente, adquieren objetividad y consistencia sus teorías (sección 2.1). Luego, se procede a analizar la aplicación del método axiomático en la física. Su aplicación puede ser realizada de dos maneras: una aplicación heurística, la cual busca comprender las estructuras de las teorías científicas y el rol que juegan las leyes en esta. Esto se logra por medio de la utilización de herramientas formales tales como la teoría de conjuntos (sección 2.2). Finalmente, se analiza la aplicación metodológica de la axiomatización. Esta aplicación es entendida en términos de cómo es efectivamente utilizado el método axiomático en la práctica científica, con el objetivo de formular consistentemente las estructuras matemáticas de los enunciados (sección 2.3). Dicha aplicación se caracteriza por una aplicación semi-formal de la axiomatización, puesto que da espacio a que la experimentación y la intuición influyan directamente en esta. Con estos elementos, se busca dar cuenta de cómo se procede, en la práctica científica, en la formulación de los enunciados de ley en la física clásica.

El tercer capítulo, titulado *Caso de estudio: las leyes de Newton*, analiza los principales puntos expuestos en los capítulos precedentes, esta vez teniendo a la vista la formulación y aplicación de las leyes dinámicas que Newton formuló en los *Principia*. Este capítulo muestra cómo Newton requirió de la creación de un nuevo formalismo para lograr abordar los problemas físicos que buscaba resolver. Para ello, desarrolló el teorema del binomio, una nueva notación y algoritmos y la formulación del teorema fundamental del cálculo. Con estos elementos, Newton aplica su análisis de fluxiones y su método de límites para formular y demostrar sus axiomas (sección 3.1). Luego, se exponen los fundamentos para el establecimiento de los conceptos físicos fundamentales para formular sus axiomas físicos. Estos conceptos corresponden a la *masa* y a la *fuerza*, los cuales son formulados en términos empíricos (sección 3.3). Una vez establecidos sus conceptos físicos, Newton procede a formular sus axiomas físicos, a saber, sus tres leyes dinámicas (sección 3.4). Se muestra cómo las matemáticas son aplicadas a la formulación de las estructuras matemáticas de estas leyes, según corresponda. Finalmente, se muestra las deducciones y explicación de otras leyes por medio de las matemáticas (sección 3.5). Se muestra la vinculación entre las primeras dos leyes con la segunda ley de Kepler (subsección 3.5.1), la deducción de la ley de gravitación universal a partir de la segunda ley de Newton y la tercera ley de Kepler (subsección 3.5.2) y la explicación de la ley de Galileo de acuerdo con la ley de gravitación universal (subsección 3.5.3). De esta manera, se busca mostrar lo expuesto en los dos primeros capítulos.

1. CAPÍTULO 1: EL CARÁCTER MATEMÁTICO DE LAS LEYES DE LA FÍSICA CLÁSICA.

La noción de ley científica juega un rol importante en la formulación y desarrollo de las teorías científicas. En efecto, las leyes son unos de los pilares de la física que permiten relacionar distintos eventos de la naturaleza entre sí mediante enunciados que correlacionan ciertas variables de interés. Sin embargo, la noción de *evento* no es unívoca dentro de la práctica científica, pues la naturaleza de un evento depende del tipo de fenómeno al que se quiera describir. Por ejemplo, en la física clásica -desarrollada entre los siglos XVII y XIX-, un *evento* es definido como la presencia de un objeto o de un fenómeno en una posición y tiempo determinados; otra teoría clásica, el electromagnetismo clásico desarrollado por Maxwell, por ejemplo, define *evento* como la presencia de campos de fuerza específicas en todos los puntos del espacio en un instante de tiempo determinado (Wigner, 1977, p. 347). Una *ley científica* (en la física clásica) es un enunciado que establece una correlación entre distintos eventos bien definidos en términos espaciales y temporales, e.g., se puede establecer una correlación entre las distintas posiciones que puede ocupar una roca al ser lanzada desde una altura determinada: se puede definir como evento inicial el soltar la roca en un tiempo 0; luego, se puede determinar, por medio de un enunciado de ley, su posición al segundo 1, pasando a estar ubicada a 5 metros por debajo de la posición original (Wigner, 1977, pp. 347-348). Por consiguiente, la ley permite no sólo establecer una correlación entre dos eventos distintos, sino que, además, permite anticipar un evento futuro en base a un primer evento.

No obstante, la posibilidad de anticipar un evento a partir de otro dependerá de la situación que se esté considerando. Es necesario que el conjunto de eventos permita inferir otros eventos posteriores; de lo contrario, los enunciados de ley no podrían establecer correlaciones. Si tales eventos permiten realizar predicciones, entonces pasan a constituir las variables que figuran en todo enunciado de ley. Aquellos elementos que no quedan especificados en la ley, pero que ayudan a determinar la correlación entre eventos, son denominados *condiciones iniciales* (Wigner, 1967a, p. 322; Wigner, 1977, p. 348; Woodward, 2013, p. 61). En consecuencia, las leyes científicas más las condiciones iniciales especifican el comportamiento de los fenómenos en la medida en que se puedan especificar tales fenómenos (Wigner, 1967a, p. 322). En el ejemplo anterior, los eventos corresponderían a la altura y el tiempo de desplazamiento de la roca, mientras que una condición inicial sería que esta correlación es posible sólo para cuerpos relativamente pesados. A partir de esto se puede inferir que una de las propiedades centrales de las leyes en la física es describir relaciones que continuarán manteniéndose para un rango de condiciones iniciales similares, por lo cual las leyes poseen la cualidad de ser invariantes[2] bajo ese determinado rango de condiciones iniciales (Woodward, 2013, p. 60). No obstante, las leyes no sólo son invariantes bajo las condiciones iniciales, sino que, además, son invariantes en muchos otros tipos de condiciones (no iniciales), pero que no determinan a los eventos que figuran en una ley. Estas son denominadas *condiciones de trasfondo* (Woodward, 2013, p. 61)[3]. En el ejemplo mencionado, dichas condiciones corresponderían a la forma, el color, su ubicación que ocupe sobre la superficie terrestre, entre otras condiciones.

Ahora bien, puesto que las correlaciones se pueden establecer entre los eventos, tal como las coordenadas de un objeto en un tiempo *n*, no es sorprendente que las matemáticas permitan determinar tales correlaciones. En efecto, puesto que en la naturaleza se dan fenómenos físicos bastante complejos, difíciles de conectar entre sí, las matemáticas juegan un rol preponderante en la forma en que se pueden controlar tales fenómenos. Por ejemplo, en un juego como las damas existe una variedad de situaciones y

[2] La noción de *invariancia* es abordad con detalles en la sección 1.5. del presente capítulo.

[3] El análisis de Woodward comienza a partir de lo expuesto por Wigner, realizando, primero, ciertas aclaraciones y distinciones, tales como la distinción entre las *condiciones iniciales* y las *condiciones de trasfondo*; luego, y en base al punto anterior, procede a distinguir entre aquellas correlaciones generales y las correlaciones que corresponden a leyes de la física. Esta investigación no se pronuncia respecto a este último punto.

posibilidades, dadas por las propias piezas y reglas del juego. Si bien la acción de realizar una jugada no es intrínsecamente matemática, se pueden analizar las buenas y las malas jugadas posibles a partir de un razonamiento matemático, el cual permite encontrar las mejores jugadas posibles (Feynman, 2005, p. 40). Por consiguiente, las matemáticas ofrecen una forma de razonamiento inferencial para (1) la formulación de estructuras matemáticas, incluidas los enunciados de ley de la física; y (2) para inferir las consecuencias de estas leyes (en base a ciertas condiciones iniciales determinadas). Este papel que juegan las matemáticas en la formulación de enunciados de ley puede ser catalogado, preliminarmente, como *rol metodológico*. Se volverá sobre este último punto en las secciones siguientes.

1.1. El rol de las matemáticas aplicadas.

Las matemáticas aplicadas a las ciencias pueden jugar, al menos, tres roles básicos (Bueno y Colyvan, 2011; Bueno, 2016, p. 2.592). Estos son, a saber:

(1) *Rol inferencial*: las matemáticas proveen premisas sintácticamente adicionales por medio de las cuales se pueden realizar inferencias.
(2) *Rol representacional*: las estructuras matemáticas son utilizadas para representar propiedades del mundo físico, e.g., la masa de los objetos físicos. De esta manera, las matemáticas proporcionarían, (a) objetos

(matemáticos) y relaciones que pueden ser ligados con los objetos físicos, y (b) los elementos necesarios para mapear las entidades físicas facilitando la representación de diferentes postulados matemáticos y el mundo.

(3) *Rol expresivo*: las matemáticas pueden ser usadas para expresar ciertas relaciones entre los objetos físicos, e.g., la velocidad de caída de un cuerpo en base a su distancia y el tiempo recorrido.

Bueno (2016, p. 2.592) afirma que existen relaciones entre estos tres roles. Por ejemplo, el rol expresivo es obtenido, generalmente, por medio de una representación particular de ciertas estructuras matemáticas. La distinción radicaría en que ciertas representaciones no expresan conexiones entre objetos físicos, puesto que son introducidas para hacer posibles ciertas inferencias, e.g., algunas idealizaciones matemáticas permiten la realización del cálculo (tal es el caso en la explicación del movimiento de las olas, en donde se considera que el agua es infinitamente profunda para efectos de la realización del cálculo). Sin embargo, la propuesta que ofrece Bueno no establece una demarcación clara entre los tres roles que juegan las matemáticas aplicadas, sino que propone que esta distinción queda bajo consideraciones de tipo pragmáticas (Bueno, 2016, p. 2.592).

No obstante, Bueno y Colyvan (2011, p. 352) consideran que el rol fundamental de las matemáticas aplicadas recae, en última instancia, en el *rol inferencial*. Es decir, ciertas propiedades de los fenómenos empíricos se pueden subsumir dentro de estructuras matemáticas, permitiendo la obtención de inferencias que de otra manera serían muy difíciles de obtener. La importancia de este rol se debe a que otros roles de las matemáticas, tales como la unificación (de teorías científicas diferentes), la predicción y la explicación de fenómenos físicos, quedan sujetos al rol inferencial. En efecto, todos estos roles quedan ligados por medio de *relaciones inferenciales*[4] entre los fenómenos empíricos y las estructuras matemáticas o entre las mismas estructuras matemáticas[5] (Bueno y Colyvan, 2011, p. 352). Por ejemplo, se pueden establecer relaciones inferenciales entre teorías científicas diferentes por medio de la derivación de los resultados de una teoría a la otra; se pueden inferir nuevas predicciones (no contempladas originalmente en la teoría) mediante una interpretación adecuada de las teorías matemáticas; y las explicaciones pueden ser formuladas en términos de las inferencias desde el formalismo matemático a los fenómenos de la naturaleza.

[4] Para una explicación detallada de estas relaciones véase la *concepción inferencial* propuesta en Bueno y Colyvan (2011), en particular la sección 5: *The Inferential Conception at Work* (pp. 356-369).

[5] En una nota al pie de página Bueno y Colyvan (2011, p. 352) aclaran que durante el mapeo se lleva una estructura inferencial de un dominio a otro. Por ejemplo, dos estructuras isomorfas son equivalentes. De esta manera, oraciones de primer orden que son verdaderas en una estructura son verdaderas también en la otra. Por consiguiente, la similitud estructural genera un procedimiento inferencial que permite inferir un determinado resultado se mantenga también en la otra estructura.

Empero, a partir de esto se devela una propiedad bastante peculiar de las matemáticas aplicadas, a saber, a menudo las matemáticas empleadas (i) captan más estructura física que lo que se tiene previsto, o (ii) proveen soluciones con ciertos elementos no físicos, pero que resultan ser físicamente relevantes (Bueno y Colyvan, 2011, p. 350). Por consiguiente, para acomodar el rol inferencial es importante establecer cierto mapeo entre las estructuras físicas y las estructuras matemáticas apropiadas. Para ello, se debe explicitar, primero, el tipo de mapeo a utilizar en cada contexto, y, segundo, cómo se acomodará el rol inferencial de las matemáticas aplicadas (Bueno y Colyvan, 2011, p. 353). Para ello, se propone en Bueno y Colyvan (2011, p. 353) el siguiente esquema de tres etapas (ver Figura N°1):

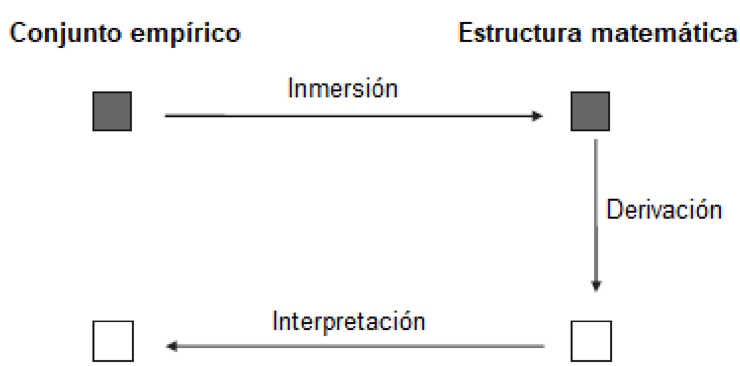

Figura N° 1. Esquema de tres etapas de la concepción inferencial de las matemáticas aplicadas: la primera etapa corresponde a la inmersión, en donde se subsume un conjunto empírico dentro de una estructura matemática; luego, en la etapa de derivación se deducen las consecuencias de la estructura matemática de la etapa anterior; y, finalmente, la etapa de la interpretación que corresponde a la lectura apropiada de las etapas previas (Bueno y Colyvan, 2011, p. 353).

Las etapas de este esquema son las siguientes (Bueno y Colyvan, 2011, pp. 353-354):

(a) *Inmersión*: en esta primera etapa se establece un mapeo desde el conjunto de fenómenos empíricos a una estructura matemática adecuada o conveniente. Su punto clave es poder relacionar aspectos relevantes de los fenómenos con el contexto matemático adecuado.
(b) *Derivación*: este paso consiste en inferir las consecuencias del formalismo de la estructura matemática obtenida en el paso anterior.
(c) *Interpretación*: la última etapa consiste en interpretar las consecuencias matemáticas conseguidas en la etapa previa, en donde las estructuras matemáticas son interpretadas de acuerdo con los fenómenos empíricos.

Un punto clave para tener en cuenta es que la elección del tipo de mapeo sea en las etapas de la inmersión y de la interpretación, pasa por consideraciones que dependen del contexto (Bueno y Colyvan, 2011, p. 354), es decir, el tipo de representación a utilizar dependerá de los objetivos de la investigación, del tipo de fenómeno a investigar, e incluso de preferencias estéticas o filosóficas. En consecuencia, la aplicación de unas estructuras matemáticas, y no otras, queda sujeta a consideraciones pragmáticas para establecer relaciones entre cantidades físicas o para establecer inferencias (Bueno, 2005, p. 473; Bueno y Colyvan, 2011, p. 355).

Los tres roles básicos (inferencial, representacional y expresivo) de las matemáticas aplicadas se pueden agrupar en otro rol, a saber, en un *rol metodológico*. En efecto, las matemáticas proporcionan los conceptos capaces de representar objetos o eventos físicos en enunciados de ley; proporcionan las herramientas para (i) establecer relaciones entre objetos o eventos físicos, e (ii) inferir relaciones entre distintas leyes. Esta segunda caracterización del *rol metodológico* se destaca el hecho de que las matemáticas ofrecen las herramientas formales que aplican los roles inferencial, expresivo y representacional.

1.2. El carácter matemático de las leyes de la física.

Como se vio inicialmente, las leyes científicas son enunciados que correlacionan eventos (o conjuntos de eventos) entre sí, los cuales se enuncian en formulaciones matemáticas que salvan similaridades estructurales. Por ejemplo, Dalla y Giuntini (2001, p. 1) definen *ley* como una representación de la relación matemática entre las variaciones de los valores de cantidades físicas, enmarcadas dentro de una clase de fenómenos similares. En el caso de la ley propuesta por Galileo, a saber, *la ley de la caída libre de los cuerpos*, esta se define (matemáticamente) como:

$$d = \frac{1}{2}Gt^2 \quad (1)$$

Esta ley[6] enuncia la relación matemática constante entre los valores de los siguientes eventos físicos: (i) *d*, la *distancia* recorrida por un cuerpo en caída libre; y (ii) *t*, el *tiempo* que transcurre durante el desplazamiento (Dalla y Giuntini, 2001, p. 2). Estas dos cantidades físicas están mediadas por una constante física de aceleración, *G*, que equivale a $6{,}67 \times 10^{-11}\, {m^3}/{kg \cdot s^2}$, y una constante matemática (sin correlato físico), ½, la cual indica que la distancia recorrida es el promedio del producto de Gt^2. Por consiguiente, la ecuación (1) dice que la distancia D que recorre un cuerpo en caída libre, el cual se encuentra inicialmente en reposo, es igual a la velocidad promedio multiplicada por el tiempo de caída.

De acuerdo con esto, se observa que las leyes científicas formuladas en términos de estructuras matemáticas están compuestas por *enunciados mixtos*, es decir, toda ley es un enunciado con un componente físico, e.g., la correlación

---

[6] Al formular la ecuación (1), Galileo la consideró como una idealización matemática, es decir, una ley que describe una situación idealizada en la cual no intervienen ni la fricción producida entre el objeto físico y el aire (debido a las limitaciones técnicas de su época al no poder cuantificar esta variable), ni a los intervalos de tiempo infinitesimalmente cortos (puesto que no contaba con las herramientas matemáticas necesarias, es decir, el cálculo infinitesimal desarrollo por Newton y Leibniz, para calcular tales intervalos de tiempo).

entre la *distancia* (*d*) recorrida por un cuerpo y la relación entre la *aceleración de gravedad* (*G*) y el *tiempo* (*t*) de desplazamiento de este cuerpo; y un componente matemático, que en este caso corresponde a la estructura matemática (la ecuación (1), que es una *ecuación cuadrática de una variable*) que relaciona las distintas variables, sean matemáticas o físicas.

Sin embargo, una ley científica entendida como un enunciado mixto debe ser verificada experimentalmente dentro de una teoría (Dalla y Giuntini, 2001, p. 2). Esta verificación permite mostrar los dominios de validez a los que está asociada una ley científica. Wigner (1960, p. 5) refleja esta diferenciación entre las leyes por medio de una metáfora de *capas de leyes*: en las leyes de la física se da una sucesión jerárquica de leyes mediante capas (o niveles), diferenciándose por la capacidad que posea una ley de *contener* otras leyes de la física. Por consiguiente, aquellas leyes que sean más generales se situarán en los niveles superiores. A partir de esta sucesión de capas, Wigner (1960, p. 5) destaca los siguientes elementos de las leyes científicas: (a) todas las leyes contienen sólo una pequeña fracción del conocimiento sobre el mundo, y (b) todas las leyes son afirmaciones condicionales. En efecto, dado (a) las leyes permiten realizar predicciones sobre la base del conocimiento presente del mundo[7], es decir, las

[7] El conocimiento presente del mundo determina las variables que entran dentro de la formulación de un enunciado de ley, correspondiendo a las condiciones iniciales. Sin embargo, existen ciertas condiciones, que forman parte del *conocimiento presente del*

leyes son útiles para la predicción de eventos sólo cuando todos los elementos determinantes del estado presente del mundo son conocidos (cuando las variables de las leyes son conocidas). Con respecto a esto último, Wigner (1960, p. 5) señala que las leyes son silenciosas con respecto del estado presente del mundo, es decir, si bien las leyes correlacionan ciertos fenómenos determinados, no implica que las leyes de por sí den información sobre la existencia de tales fenómenos. Por ejemplo, en la física clásica se pueden dar las segundas derivadas de las coordenadas posicionales de los cuerpos, pero no dan información alguna sobre la existencia, la posición presente o las velocidades de estos cuerpos. En otras palabras, la existencia de tales variables no está determinada por las leyes, sino más bien por criterios de existencia, tales como la observación, la capacidad de experimentación o manipulación, entre otros.

En dicha metáfora se pueden catalogar aquellas leyes ubicadas en las capas superiores como *leyes fundamentales*. En este mismo sentido, Feynman (2005, pp. 40-41) realiza una distinción entre las leyes fundamentales y las no fundamentales en base a la matemática requerida para su construcción. Esto lo muestra por medio de dos ejemplos:

---

mundo, pero que no son relevantes para las leyes, estas corresponden a las *condiciones de trasfondo* ya mencionadas con anterioridad.

a) Ley de Faraday de la electrólisis: esta ley establece que,

> "[E]n la electrólisis, la cantidad de material depositado es proporcional al tiempo durante el que circula la corriente y a la intensidad misma. Lo cual significa que la cantidad de material depositado es proporcional a la carga eléctrica que discurre por el sistema. Lo que realmente ocurre es que cada electrón que circula por el hilo conductor porta una carga" (Feynman, 2005, p. 40).

La ley de Faraday se formula matemáticamente de la siguiente manera:

$$m = \frac{Q}{qn} \times \frac{M}{Na} = \frac{1}{qNa} \times \frac{QM}{n} = \frac{1}{F} \times \frac{QM}{n} = \frac{1}{96.500} \times \frac{QM}{n} = \frac{I \times t}{96.500} \times \frac{M}{n} \quad (2)$$

Las variables de la ecuación son: *m* es la masa de la sustancia en el electrodo (en gramos); *Q* es la carga eléctrica total que pasó por la solución (en Coulomb); *q* es la carga del electrón ($1{,}602x10^{-19}$ culombio/electrón); *n* es el número de valencia de la substancia como ion en la solución (electrones/ion); *F* es *qNa* = 96.500 $Cxmol^{-1}$, que es la constante de Faraday; *M* es la masa molar de la sustancia (en gramos/mol); *Na* es el número de Avogadro = $6{,}022x10^{23}$ iones/mol; *I* es la corriente eléctrica (en amperios); *t* es el tiempo transcurrido (en segundos).

Para Feynman, la ley de Faraday no requiere de una formulación matemática compleja; por ejemplo, no requiere del cálculo infinitesimal para su formulación. En efecto, esta ley refleja relaciones de proporcionalidad cuantitativas entre el requerimiento de un electrón y el depósito de un átomo en la electrólisis, lo cual no requiere de herramientas matemáticas complejas para su formulación. Por consiguiente, esta ley no es una *ley fundamental*.

b) Ley de gravitación universal de Newton: esta ley, de acuerdo con Feynman, sería una ley de carácter fundamental en la física clásica, puesto que requiere de matemáticas complejas (el cálculo infinitesimal) para su formulación. Dicha ley es descrita como:

> "dos cuerpos ejercen una fuerza recíproca que varía inversamente con el cuadrado de la distancia que los separa y directamente con el producto de sus masas:

$$F = G\frac{mm\prime}{r^2} \tag{3}$$

Sólo falta agregar: que un cuerpo responde a una fuerza acelerándose, es decir, cambiando su velocidad cada segundo en relación inversa a su masa, o que el cambio de velocidad es tanto mayor cuanto menor es su masa" (Feynman, 2005, p. 41).

Sin embargo, en la distinción realizada por Feynman, el requerimiento de matemáticas complejas para determinar si una ley es fundamental o no pareciera ser contingente. En efecto, las matemáticas complejas son utilizadas en la formulación de las leyes de la física clásica en general. En consecuencia, es un criterio insuficiente por sí solo para determinar el carácter fundamental de una ley. No obstante, el requerimiento de matemáticas complejas para inferir leyes a partir de otra ley no es un hecho contingente, puesto que son indispensables para esta deducción. En el caso de la ley de la gravedad de Newton las matemáticas complejas (vale decir, el *cálculo infinitesimal*) son indispensables para deducir la segunda ley de Kepler y la ley de la caída libre de los cuerpos de Galileo. Por consiguiente, la distinción entre una ley que es fundamental (al menos en la física clásica) y una que no lo es, estaría dada por la conjugación de dos factores, a saber: (i) por la capacidad que posea una ley para dar lugar a deducciones de otras leyes, y con ello, describir una amplia variedad de fenómenos (recurriendo a la metáfora de la capa de leyes de Wigner); y (ii) las matemáticas complejas son las herramientas que permiten tal deducción. En otras palabras, el rol metodológico de las matemáticas aplicadas proporciona las herramientas para una jerarquización formal entre las leyes de la física clásica. Por ejemplo, la ley de gravitación universal de Newton es una ley fundamental debido a que su estructura matemática puede abarcar un amplio rango de fenómenos. Esta ley puede describir, al menos, desde los movimientos planetarios (descritos por las leyes de Kepler) hasta los movimientos de los objetos situados sobre la superficie terrestre (descritos por la ley de Galileo).

Por otro lado, como se puede observar en la distinción realizada por Feynman, los enunciados de ley no poseen una única formulación. En efecto, una ley puede ser enunciada por medio de estructuras matemáticas, como se aprecia en las ecuaciones (1), (2) y (3), o por formulaciones no matemáticas como, por ejemplo, un modelo que represente un sistema Sol-Tierra (ver Figura N°2), o mediante el lenguaje coloquial (observar las definiciones dadas a las leyes (2) y (3)).

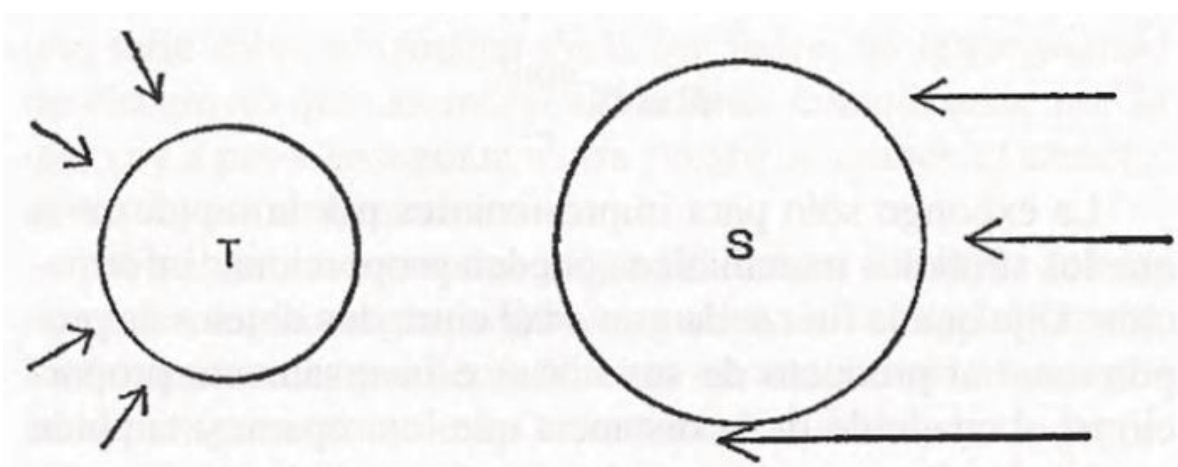

Figura N° 2. Es una reformulación de la ley de la gravitación universal de Newton, la cual consiste en considerar un sistema Sol-Tierra (*S* y *T* representan al Sol y a la Tierra, respectivamente), siendo bombardeado por partículas provenientes de todas las direcciones. Dada la presencia de S, T recibe una menor cantidad de partículas en la cara que mira a S; por el contrario, la cara opuesta de T recibe un mayor impacto de partículas. Por consiguiente, se puede establecer la relación en que, a mayor distancia de T a S, mayor será el número de impactos recibidos (imagen extraída de Feynman, 2005, p. 42).

Sin embargo, las formulaciones no matemáticas no implican las mismas virtudes que poseen aquellas formulaciones matemáticas. Por ejemplo, el sistema Sol-Tierra no sería capaz de conectar fenómenos terrestres con el comportamiento del sistema solar; o mediante una formulación en el lenguaje coloquial no se podría predecir eventos que no están contemplados en la formulación inicial. En general, estas formulaciones no matemáticas no son capaces de considerar todas las posibles conexiones entre distintos enunciados de ley, ni tampoco las posibles conexiones predictivas, ni explicativas (Feynman, 2005, p. 43). En efecto, desde la creación de las leyes de Newton, las matemáticas han jugado un rol central en la formulación de las leyes de la física (Feynman, 2005, p. 43). Es posible reformular los enunciados matemáticos, por ejemplo, traducir la ley de gravitación universal al lenguaje coloquial: *la distancia es el doble, la fuerza no es más que la cuarta parte*, y así sucesivamente. No obstante, se pierde claridad y distinción en las distintas conexiones entre los enunciados reformulados, e.g., las conexiones entre la ley de la caída libre de los cuerpos y la segunda ley de Kepler. Igualmente, las formulaciones no matemáticas pierden el rol metodológico que las matemáticas aplicadas juegan en, por ejemplo, el modelamiento o simulaciones computacionales de fenómenos naturales. Para Feynman, esto se debe a que las matemáticas son un lenguaje más una lógica, es decir, son un instrumento para razonar (2005, p. 45). Esto es posible, puesto que los enunciados matemáticos de las leyes de la física relacionan valores entre cantidades físicas, que puede ser contrastado en una teoría verificada por experimentos (Dallas y Giuntini, 2001, p. 1). Por lo tanto, las formulaciones no matemáticas no contribuyen de la misma manera que las matemáticas.

En síntesis, debido a esta caracterización matemática de las leyes, se pueden distinguir las siguientes propiedades de estos enunciados (Dalla y Giuntini, 2001, p. 2; Echeverría, 2013, pp. 62-63):

(i) Los enunciados de ley formulados por medio de estructuras matemáticas preservan el rol metodológico de estas (incluyendo los roles básicos, es decir, el rol inferencial, el representacional y el expresivo).

(ii) Las leyes fundamentales de la física, expresadas matemáticamente dentro de enunciados mixtos, pueden ser formuladas de varias formas, de acuerdo con diferentes conceptos, predicados y operadores matemáticos.

(iii) La expresión matemática representa una vía para el descubrimiento de nuevas leyes.

(iv) Las leyes son afirmaciones inexactas puesto que poseen cierto grado de precisión. Por este motivo, las leyes deben ser contrastadas por medio de observaciones, experimentos, mediciones, simulaciones, etc.

(v) Las leyes poseen cierto dominio de validez, en el sentido de concordar con las correspondientes observaciones, experimentos, mediciones y/o simulaciones.

1.3. Las matemáticas como herramientas.

La utilización de las matemáticas en la formulación de los enunciados mixtos de las leyes científicas permite lo siguiente: primero, ofrecer una forma precisa para correlacionar distintos eventos entre sí, dada las virtudes de las matemáticas aplicadas (aludiendo a los roles que juegan las matemáticas mencionados en las secciones previas). Segundo, permite cuantificar dichos enunciados, lo cual, a su vez, permite que sean evaluadas empíricamente. En efecto, las matemáticas aplicadas son las herramientas que contribuyen a realizar tal evaluación mediante la selección de los conceptos matemáticos relevantes para la formulación de las leyes y su posterior evaluación (Wigner, 1960, p. 6). Los criterios de selección para los conceptos matemáticos están dados por su simplicidad y su disposición a la manipulación formal (Wigner, 1960, p. 7), lo cual depende de la práctica científica, es decir, la elección es dependiente de criterios pragmáticos.

Este carácter instrumental de las matemáticas es lo que permite que sean buenas herramientas para establecer conexiones entre distintos tipos de enunciados mixtos. Por ejemplo, mediante las matemáticas se pueden establecer las conexiones pertinentes entre la segunda ley de Kepler y las *fuerzas orientadas hacia el sol*, como se puede apreciar en la Figura N°3:

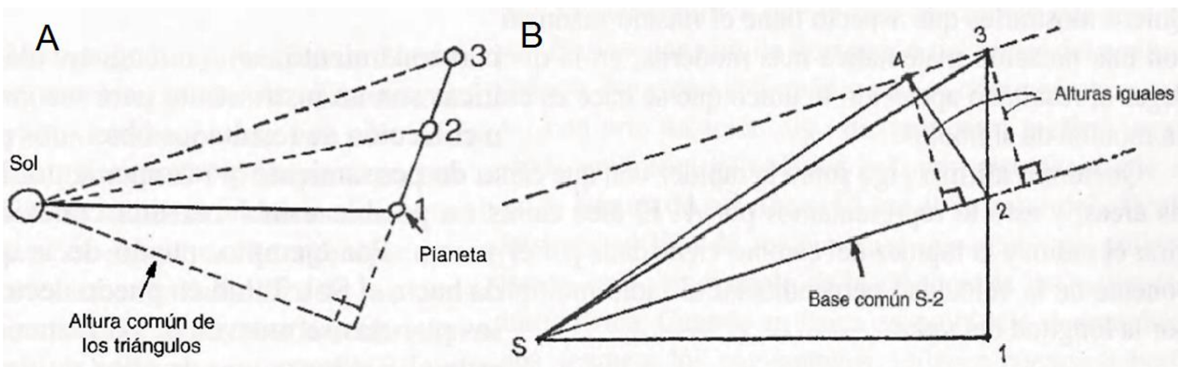

Figura N° 3. Conexión entre la segunda ley de Kepler y las fuerzas orientadas hacia el sol. (A) muestra el caso en que no existe una fuerza de atracción: el área del Δ_{s12}, cuya base es el segmento 12 y altura H, es igual al área del Δ_{s23}, cuya base es el segmento 23 y altura H. En efecto, las bases de ambos triángulos son iguales, compartiendo la misma altura. (B) muestra el mismo caso anterior, pero considerando la fuerza de atracción ejercida por S. En este caso, el Δ_{s23}, cuya base es el segmento 23 y de altura H, es igual al área del Δ_{s24}, cuya base es 24 y de altura H. En efecto, las bases de ambos triángulos poseen la misma unidad y comparten la misma altura. Recordar que el tiempo transcurrido en que el planeta se mueve de 1 a 2, de 2 a 3 y de 3 a 4, es el mismo. Por consiguiente, las áreas de los Δ_{s12}, Δ_{s23} y Δ_{s24} son iguales (imagen extraída de Feynman, 2005, pp. 46-47).

Estas conexiones se logran, además, porque las matemáticas son también herramientas de razonamiento, puesto que permiten descubrir la lógica de pasar de una afirmación a otra (Feynman, 2005, p. 48). En efecto, las matemáticas son una excelente herramienta que permite pasar de un conjunto de proposiciones a otro, puesto que la caja de herramientas de las matemáticas es lo suficientemente vasta para que los físicos de los distintos enfoques puedan abordar sus investigaciones con respecto a sus propias preferencias y, por consiguiente, generar sus propios programas de investigación (Dieks, 2005, p. 116). De esta manera, su utilidad radica en obtener consecuencias, analizar situaciones e ir cambiando las leyes para conectar las distintas proposiciones de acuerdo con el tipo de fenómenos al que se quiere referir (Feynman, 2005, p. 50).

Lo anterior se puede ver, de modo general, en el siguiente caso histórico: Newton se percata que tanto la trayectoria de los objetos lanzados sobre la superficie terrestre, como la trayectoria de la luna en el cielo describen trayectorias similares a una elipse. De esta manera, Newton busca conectar la *ley de la caída libre de los cuerpos* de Galileo (formulada para los cuerpos terrestres cayendo sobre la superficie terrestre) y la *segunda ley de Kepler* (la cual dice: *el radio vector que une un planeta y el sol barre áreas iguales en tiempos iguales* (esta ley es aplicable de igual manera en el caso de la luna orbitando alrededor de la Tierra). Posteriormente, Newton logra unir ambas leyes mediante la formulación de su *ley de gravitación universal* y la aplicación de sus tres leyes dinámicas, logrando unificar, bajo una sola ley, los fenómenos terrestres con los celestes. Este caso ejemplifica e ilustra la propiedad y la versatilidad de las formulaciones matemáticas de las leyes de la física, en términos de la selección de los conceptos adecuados (en base a su manipulación) y del tipo de razonamiento implicado para tal unificación (Wigner, 1960, p. 10).

Tal versatilidad de las matemáticas se refleja en la cantidad de técnicas y modelos matemáticos que pueden ser aplicados a una diversidad de situaciones físicas dispares (Dieks, 2005, p. 117). En otras palabras, si bien las matemáticas pueden ser usadas en contextos físicos específicos, ellas pueden ser aplicadas en áreas distintas de la física (Dieks, 2005, p. 123). Esto se debe precisamente a la neutralidad del contenido matemático de los enunciados de ley en física, entendiendo por *neutralidad* que un mismo símbolo y objeto matemático puede recibir distintas interpretaciones físicas. De esta manera, se pueden trasladar leyes entre contextos diversos (Dieks, 2005, p. 123).

1.4. La versatilidad de las matemáticas aplicadas y la robustez.

La versatilidad de las matemáticas aplicadas puede ser demostrada, por medio de argumentos matemáticos, que distintos puntos de partida pueden llegar al mismo resultado. Esto se debe a que las estructuras matemáticas, en particular aquellas estructuras utilizadas para enunciar las leyes, están construidas de manera tal, que distintas proposiciones son matemáticamente equivalentes, aunque tienen un carácter cualitativamente distinto (Feynman, 2005, p. 55). Esto se puede ilustrar por medio de la ley de la gravitación universal de Newton (Feynman, 2005, pp. 55-57):

(i) Ley de la gravitación universal: la formulación clásica, la cual afirma que la fuerza depende de algo que se halla a una distancia finita y posee un carácter no-local, es decir, la fuerza sobre un objeto depende en dónde se encuentra el otro objeto.

$$F = G\frac{mm\prime}{r^2} \tag{3}$$

(ii) Método de campo: se entiende por campo como un espacio determinado en el cual existe un número determinado en cada punto, los cuales cambian al desplazarse de un punto a otro. En el interior del campo se pueden generar diferencias de potencial o gradientes de potencial, esto quiere decir que, un objeto ubicado en un punto determinado, la fuerza que se ejerza sobre este, provocará que se mueva hacia el punto que le ofrezca la menor resistencia o que el cambio sea más deprisa. Dicha fuerza es proporcional a la rapidez del cambio de potencial. Al campo se le puede restringir en un determinado espacio confinado, por ejemplo, dentro de una esfera, lo cual implica que sólo se conoce lo que hay en el interior de dicho cuerpo. Por consiguiente, determinar el potencial en el centro de la esfera, basta con saber cuál es el potencial en su entorno y cuánta masa contiene la esfera. Esto se puede expresar de la siguiente manera:

$$Potencial\ en\ el\ centro = potencial\ medio\ sobre\ la\ esfera - \frac{G}{2a}(masa\ contenida) \qquad (4)$$

A diferencia de la ecuación (3), esta estructura matemática dice lo que ocurre en un entorno determinado, es decir, tiene un carácter local; aunque en términos espaciales, lo que ocurre en un tiempo t_1 a un t_2, el fenómeno salta de un lugar a otro. Sin embargo, ambos enunciados continúan siendo matemáticamente equivalentes.

(iii) Principio del mínimo: este enunciado es de carácter global, es decir, hay cierto número de cuerpos y se quiere saber cómo se desplaza de un sitio a otro, se analizan las posibles trayectorias, i.e., si un objeto se dirige de *X* a *Y* dentro de un plazo de tiempo determinado, se analizan las trayectorias posibles y se calcula para cada una de ellas cierta magnitud, cuyo valor corresponde a la media de la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial. De esta manera, el camino que recorrerá el objeto corresponderá a aquél que posea el menor valor.

Si se desea analizar la naturaleza en términos de causalidad, se puede usar la ley clásica de la gravitación; si se quiere analizar en términos de campos locales, el método de campo es el adecuado; y si es en términos de un principio del máximo o del mínimo, el último es el que conviene (Feynman, 2005, p. 58). Resulta que, además de ser matemáticamente equivalentes, puesto que tienen las mismas consecuencias, también son empíricamente equivalentes, ya que sus consecuencias empíricas son equivalentes. Por consiguiente, no hay forma experimental de distinguir entre estas. No obstante, según Feynman, desde un punto de vista epistémico son distintas porque pierden la equivalencia cuando se trata de derivar nuevas leyes (2005, p. 59). Por lo tanto, no hay una forma correcta. En efecto, las distintas formulaciones pueden otorgar la clave de lo que puede ocurrir en circunstancias diversas, por lo cual, en este sentido, también son diferentes. Estas características de los enunciados de ley permiten generar distintos esquemas interpretativos (Feynman, 2005, p. 60), e.g., que la ley clásica de la gravitación sea formulada en términos de la inversa al cuadrado de las distancias, permite una formulación local; así como del hecho de que sea formulada en términos de *fuerza*, permite que se relacione con la tasa de cambio de la velocidad, y, por consiguiente, posibilita la enunciación según el principio del mínimo.

Esta versatilidad de las matemáticas aplicadas devela, primero, una aplicación menos jerarquizada en términos formales (en contraste con lo que ocurre en la práctica matemática[8]); y, segundo, la generación de una estructura

---

[8] Wimsatt está teniendo en cuenta la distinción realizada por Feynman (2005, pp. 50-51) de dos enfoques distintos en la manera de proceder con las matemáticas. Por un lado, se tiene el *enfoque griego* (o *euclidiano*), donde se procede de manera axiomática, es decir, se establecen un determinado conjunto de axiomas de los cuales se derivan teoremas (de manera estricta) (Feynman, 2005, p. 51). En este enfoque, el teórico logra simplicidad realizando unas pocas suposiciones y derivando el resto (Wimsatt, 2012, p.

teórica mucho más conectada (Wimsatt, 2012, p. 64). Esta misma conectividad (Wimsatt, 2012, pp. 64-65) tiene dos consecuencias para la estructura teórica, a saber, (i) la mayoría de las leyes fundamentales (que participan dentro de una estructura teórica) resultan ser caracterizadas y derivables de múltiples maneras a partir de diferentes supuestos (como se ilustra en el caso de la ley de gravitación universal); (ii) la derivación múltiple de las leyes de la física permite que la estructura teórica general sea menos propensa a colapsar y, por consiguiente, sea una estructura confiable. Por lo tanto, las leyes de la física, en particular las fundamentales, poseen un grado de robustez que depende de esta conectividad.

En términos generales, la *robustez* se define como "el uso de *múltiples significados de determinación* para *triangular* la existencia y las propiedades de un fenómeno, de un objeto o de un resultado" (Soler, 2012, p. 2)[9]. En un sentido más técnico y específico, la *robustez* se define de la siguiente manera:

---

64). Por otro lado, está el *enfoque babilónico*, el cual consiste en saber los diferentes teoremas y las conexiones entre ellos, pero sin haber constatado que estos teoremas se pueden obtener desde un conjunto determinado de axiomas (Feynman, 2005, p. 51).

[9] Para un análisis más detallado sobre la *robustez* ver Soler, Trizio, Nickles, Wimsatt (eds) "Characterizing the Robustness of Science" (2012). En particular, ver el capítulo 1 de Soler (como una introducción a la *robustez*) y el capítulo 2 de Wimsatt (artículo seminal sobre la *robustez*).

“X es robusto = X permanece invariante bajo una multiplicidad de derivaciones independiente (al menos parcialmente)” (Soler, 2012, p. 3).

es decir, un objeto, fenómeno, resultado o, incluso, partes de una teoría, si es lo suficientemente invariante, en términos de derivaciones independientes, es robusto -en el caso de objetos o fenómenos la *robustez* es entendida de manera existencial, mientras que en el caso de las partes de una teoría se entiende de acuerdo con la estabilidad de estas con respecto a la teoría en general-. Esquemáticamente la *robustez* se puede representar por medio de un esquema que converge hacia X (ver Figura N°4).

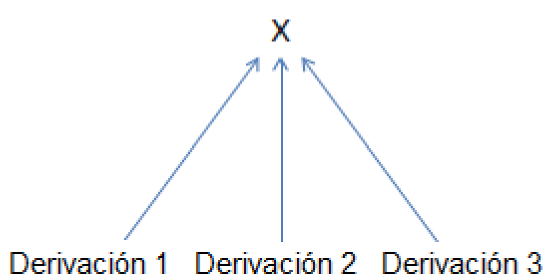

Figura N° 4. Esquema de robustez (Soler, 2012, p. 6).

La figura N°4 muestra distintas derivaciones que convergen en X -que puede ser un objeto, fenómeno físico, un resultado experimental o una teoría y sus constituyentes-, determinan su grado de *robustez*. Por consiguiente, se desprende que la robustez no es una propiedad de X, sino que depende de las relaciones que convergen hacia X (Soler, 2012, p. 6). No obstante, esta convergencia no implica que las distintas derivaciones estén al mismo nivel, puesto que también están sujetas a su robustez (por ejemplo, a su grado de independencia con respecto a las otras derivaciones) (Soler, 2012, p. 7). Por lo tanto, el *grado de robustez* de X dependerá de la cantidad de las múltiples derivaciones que convergen en X y de la *robustez* de estas mismas derivaciones[10].

De esta manera, Wimsatt (2012, p. 65) afirma que el grado de robustez confiere grados de estabilidad a una teoría científica. Por consiguiente, el análisis de los diferentes grados de robustez de las partes de una teoría científica permite detectar o medir la robustez de la teoría en general. Ahora bien, puesto que las *leyes* son componentes de una teoría científica, estas también pueden ser analizadas en términos de *grados de robustez*. En este caso, la robustez de una ley científica estaría dada por las conexiones que pueden ser establecidas entre los distintos puntos de partida, incluida las leyes científicas, que convergen en describir un mismo X -siendo X un objeto, fenómeno o un resultado-. Por ejemplo, en el caso mostrado por Feynman (2005, pp. 55-57), la ley de gravitación universal de Newton es una de las distintas derivaciones para describir los

[10] En consecuencia, la *robustez* se define de manera estricta como “X es (más o menos) robusto = un número (mayor o menor) de derivaciones (más o menos fiables) que son (más o menos independientes) conduce a un resultado (más o menos cercano) para X” (Soler, 2012, p. 12).

movimientos planetarios. Este mismo fenómeno también puede ser descrito por medio del *método de campo* o por el *principio del mínimo*, cada uno independientemente. Luego, dado que estas tres derivaciones se formulan por medio de estructuras matemáticas, se pueden conectar entre sí. En este caso se puede demostrar que tanto el principio del mínimo como el método de campo se pueden deducir desde la ley de gravitación universal. Por lo tanto, se puede establecer un determinado grado de robustez tanto a X como a cada una de las tres derivaciones (en particular a la ley de gravitación universal puesto que de ésta se deducen las otras dos), y, por consiguiente, se le otorga un grado de robustez a la teoría científica en general, y a la ley de gravitación universal en particular.

La capacidad de poder conferir determinados grados de robustez a las leyes científicas sugiere un principio de *fundamentabilidad* entre las leyes, es decir, un principio que ayuda a determinar si una ley puede ser considerada como fundamental o no. Esto se debe a que, de acuerdo con Wimsatt (2012, p.65), "las leyes más fundamentales serán aquellas que sean derivadas independientemente en un número mayor de formas". Se puede agregar, además que, de aquellas leyes formuladas en estructuras matemáticas se deducen otras estructuras matemáticas (cuyos resultados son los mismos, pero cualitativamente distintas). Por ejemplo, si bien la ley de gravitación universal, el método de campo y el principio del mínimo son matemáticamente equivalente, no obstante, pierden su equivalencia al tratar de derivar las leyes de Kepler y de Galileo.

1.5. El rol de la invariancia en la aplicabilidad de las leyes.

Hasta ahora no se ha mencionado un elemento subyacente, a saber, la importancia de los principios de invariancia, los cuales aseguran que las leyes de la física clásica logren describir fenómenos físicos regulares, puesto que otorgan sentido a estas leyes. En efecto, si se buscara correlacionar fenómenos irregulares, los enunciados de ley de la física clásica, tal como la ley de gravitación universal, no podrían describir los movimientos de las orbitas de los planetas del sistema solar, por ejemplo. Por el contrario, la regularidad de los fenómenos naturales es necesaria para que las leyes clásicas puedan describir los eventos que buscan correlacionar (Dieks, 2005, p. 116). Por consiguiente, se entiende por *regularidad* de los fenómenos de la naturaleza (en la física clásica) como aquellas similaridades estructurales entre distintos eventos bien definidos espacial y temporalmente. Por ejemplo, la regularidad de los fenómenos se puede apreciar en la ley de Galileo de la siguiente manera (Wigner, 1960, pp. 4-5):

(1) La *ley de la caída de los cuerpos* es verdadera en cualquier lugar de la Tierra, ya sea en el pasado, presente o futuro. Esta propiedad de la

regularidad puede ser especificada por medio de la *invariancia*, y sin este principio la física no sería posible.

(2) La regularidad de los fenómenos físicos es independiente de ciertas condiciones que podrían afectarla. Esta independencia también se la ha denominado invariancia. Sin embargo, este tipo de invariancia no se puede formular como un principio general, puesto que son condiciones de trasfondo que no intervienen en un enunciado de ley. Por ejemplo, en el caso de Galileo, su observación se restringe a los cuerpos relativamente pesados, lo cual acota las condiciones que permiten la experimentación física.

(3) En la afirmación del enunciado de esta ley está contenida la variable *tiempo*, la cual indica lo que le toma a un cuerpo pesado en caer desde una altura determinada, independientemente del tamaño, el material y la forma del cuerpo que es arrojado. Esta misma propiedad se aprecia en distintas leyes, e.g., las leyes del movimiento de Newton.

Para Wigner (1967c, p. 311; 1977, p. 359), que las leyes tengan sentido, se debe a que los fenómenos físicos son regulares (al menos, los que aborda la física clásica). Por consiguiente, la tarea de la física clásica sería descubrir, al menos, las correlaciones de aquellos eventos regulares del mundo por medio de enunciados bien definidos, lo cual correspondería a un refinamiento y extensión del conocimiento cotidiano del mundo, en otros casos permitirían prever algunos acontecimientos con certeza (Wigner, 1967c, p. 311). La importancia de los principios de invariancia radica en que son prerrequisitos casi necesarios para que sea posible formular o incluso clasificar las leyes científicas. Esto no significa, por supuesto, que ni la precisión ni el alcance de los principios de invariancia que se aceptan en la actualidad son requisitos previos necesarios para la existencia de leyes científicas (Wigner, 1967c, p. 312).

Esquemáticamente, se puede definir a los principios de invariancia de la siguiente manera:

> "Si se establece que la existencia de los sucesos *A, B, C, ...* implica necesariamente la aparición de *X*, entonces la ocurrencia de los sucesos *A', B', C', ...* también implica necesariamente *X'*, ssi *A', B', C', ...* y *X'* se obtienen de *A, B, C, ...* y *X* por una de las transformaciones de invariancia" (Wigner, 1967a, p. 326).

Esta definición de los *principios de invariancia* permite, por ejemplo, determinar la velocidad instantánea de la traslación de un planeta del sistema solar con respecto a una fecha determinada. En efecto, si se toman dos fechas cualesquiera (t_1 y t_2) en que el planeta se traslada una determinada distancia, y se calculan sus respectivas distancias con respecto al Sol[11] (r_1 y r_2, respectivamente), se puede determinar su velocidad areolar[12], la cual permanece constante de acuerdo con la segunda ley de Kepler (el área barrida por el planeta puede ser representada por medio de un paralelogramo en un plano cartesiano de tres ejes). Luego, se puede calcular las velocidades instantáneas del planeta en las respectivas fechas (v_1 y v_2, respectivamente), puesto que el área de un paralelogramo es equivalente al producto vectorial de dos vectores[13]. Por consiguiente, esta misma ley permite determinar nuevas velocidades instantáneas de un planeta transcurrido un tiempo x determinado ("$t_3 = t_1 + t_x$" y "$t_4 = t_2 + t_x$"). Las *transformaciones de invariancia* corresponden, entonces, a ciertas variaciones determinadas que no afectan a la correlación de los eventos. Por consiguiente, los principios de invariancia (de las estructuras matemáticas)

[11] La distancia de un planeta con respecto al Sol es también denominada como *radio vector*.

[12] La *velocidad areolar* corresponde al área barrida por el radio vector por unidad de tiempo, la cual permanece constante de acuerdo con la segunda ley de Kepler.

[13] El *producto vectorial de dos vectores* queda definido, a partir de su equivalencia con el área del paralelogramo que forma el recorrido del planeta, de la siguiente manera: $r \cdot v \cdot sin(\theta)$ (donde r, v y θ, corresponden al módulo del radio vector, al módulo de la velocidad instantánea y al ángulo que forman r y v, respectivamente). Por consiguiente, y de acuerdo con la segunda ley de Kepler, la velocidad areolar queda definida como: $r_1 \cdot v_1 \cdot sin(\theta_1) = r_2 \cdot v_2 \cdot sin(\theta_2)$ (donde r_1, v_1, r_2 y v_2 corresponden a las fechas t_1 y t_2 respectivas; mientras que θ_1 y θ_2 son los ángulos que se forman en los puntos t_1 y t_2, respectivamente).

son requeridos para establecer nuevas correlaciones entre eventos sobre la base del conocimiento de las correlaciones establecidas entre los eventos (Wigner, 1967a, p. 326). En el ejemplo precedente, la invariancia permite mantener la correlación que establece la segunda ley de Kepler con independencia del tiempo. A su vez, estos mismos principios permiten asegurar la deducción de otras leyes o estructuras matemáticas a partir del conocimiento de las leyes ya establecidas.

Dado lo anterior, se pueden mencionar, al menos, cuatro categorías de transformaciones de invariancia para la física clásica (Wigner, 1967a, p. 326; Wigner, 1977b, p, 333):

A) Transformaciones euclidianas: corresponden a transformaciones espaciales, más precisamente, corresponden a aquellas transformaciones en donde se puede trasladar eventos, puesto que tienen las mismas relaciones entre sí. Esto quiere decir que las correlaciones entre estos eventos son los mismos en todas partes.
B) Desplazamientos de tiempo: corresponde a las transformaciones temporales, es decir, aquellos eventos que poseen las mismas relaciones entre sí pueden ser separados por intervalos de tiempos iguales. En otras palabras, las correlaciones entre eventos dependen sólo de los intervalos de tiempo entre esos eventos.

C) Movimiento uniforme: corresponde a las transformaciones entre marcos de referencia con movimiento uniforme. Específicamente, aquellos eventos con movimiento uniforme descritos dentro de un sistema de coordenadas pueden ser cambiados a otro sistema de coordenadas. Esta invariancia hace referencia a que las leyes son independientes con respecto al estado de movimiento en el que se observa mientras sea uniforme.
D) Invariancia rotacional: postula la equivalencia de todas las direcciones.

Los principios A y B se daban por sentado en la física clásica. Mientras que el principio C, dado que no es evidente, fue cuestionado hasta la aparición de la teoría especial de la relatividad, la cual lo estableció como un principio incuestionable (Wigner, 1967a, p. 326). La importancia de los principios de invariancia radica en que aseguran que las leyes continuarán conservando sus aplicaciones. En efecto, la aplicación de cualquiera de estas transformaciones sobre las estructuras matemáticas de los enunciados de ley conserva la equivalencia entre dichas estructuras. Por consiguiente, las leyes seguirán siendo válidas con respecto al dominio de fenómenos que describen y al contexto donde pueden ser aplicadas.

Estos cuatro principios de invariancia son considerados *principios geométricos de invariancia* de acuerdo con un espacio-tiempo de cuatro dimensiones (Wigner, 1967a, p. 326). Lo cual dice que lo único que cambia son las ubicaciones de los eventos en el espacio y en el tiempo, además de su estado de movimiento. Estos principios, aunque dan una estructura a las leyes, se formulan en términos de los eventos mismos. Por lo tanto, la invariancia tiempo-desplazamiento, correctamente formulada, es como sigue (Wigner, 1967b, p. 300): las leyes dependen sólo de los intervalos de tiempo entre los eventos, no en el momento en que el primer evento tiene lugar. Por ejemplo, si P_1, P_2, P_3 son posiciones que un planeta cualquiera del sistema solar puede asumir en tiempos t_1, t_2, t_3, podría asumir estas posiciones también en los tiempos $t_1 + t_x, t_2 + t_x, t_3 + t_x$, siendo t_x arbitraria. Es importante destacar en este punto, a saber, que las leyes son las *estructuras* a las que se aplican las transformaciones de invariancia, no a los eventos mismos. Sin embargo, si uno observa, e.g., las posiciones de una roca lanzada en tres momentos distintos, se encontrará una relación entre esas posiciones, y esta relación será la misma en todos los puntos de la Tierra.

Los principios de invariancia poseen dos características que se deben tener en cuenta. Estas son:

- Los principios clásicos de la invariancia o de la simetría son y deben ser formulados en términos de observaciones directas (Wigner, 1967b, p. 298; Wigner, 1967c, pp. 314-315). Por ejemplo, dada la invariancia de desplazamiento temporal, si se realizan las mismas condiciones *relevantes* en momentos diferentes, las expectativas de sucesos posteriores serán las mismas, independientemente de que se hayan realizado estas condiciones *relevantes*, aunque se debe admitir que *relevante* es poco precisa (Wigner, 1967c, p. 314). A pesar de esta falta de precisión, sigue siendo cierto que los principios de invariancia se formulan directamente en términos de observaciones. Sin embargo, aunque los principios clásicos de invariancia se formulan directamente en términos de observaciones, rara vez se utilizan directamente para predecir eventos futuros. Por el contrario, se usan para probar una teoría o ley, a fin de determinar si sus consecuencias están en conformidad con los principios de invariancia. Tal prueba a menudo implica operaciones matemáticas y conceptuales de cierta complejidad, usando las mismas matemáticas con las cuales se formulan la ley o la teoría (Wigner, 1967c, p. 315).

- Estos principios clásicos son principios de invariancia y no de covariancia. Esto quiere decir lo siguiente: si *A, B, C, ...* y *X* poseen la probabilidad de ocurrencia *P*, y si *A', B', C', ...* y *X'* poseen la probabilidad de ocurrencia *P'*, entonces *P* es igual a *P'* (gracias a las transformaciones de invariancia). Si fueran principios de covariancia estarían dadas las probabilidades de la siguiente manera (Wigner, 1967a, p. 327):

$$P1' = P1(1 - P1 + \sum Pn^2) \quad (5)$$

$$P2' = P2(1 - P2 + \sum Pn^2) \qquad (6)$$

$$\ldots$$

Pero este no es el caso, puesto que siempre se tiene que *P' = P* (en la ecuación (5) $P_1' = P_1$ y en la ecuación (6) $P_2' = P_2$). Por consiguiente, todas las transformaciones de invariancia aplicadas a una ley poseen la misma probabilidad de ocurrencia.

La importancia de estas dos características está en que, primero, además de las invariancias geométricas, existe otro conjunto de tipos de invariancia denominadas *invariancias dinámicas.* Estas son invariancias de interacciones específicas, las cuales corresponden a las interacciones gravitacionales, débiles, electromagnéticas y fuertes. Su diferencia radica, además, que estas interacciones específicas no son formuladas en términos observacionales (como si ocurren las invariancias geométricas) (Wigner, 1967a, p. 327). Segundo, para diferenciarlas de otros principios de simetría, como las *relaciones cruzadas*, las cuales son principios de covariancia.

En síntesis, las regularidades (entendida en términos de similaridades estructurales) de los eventos que busca describir las leyes de la física clásica quedan aseguradas por los principios de invariancia, otorgándoles sentido a su aplicación y descripción de los fenómenos físicos. En efecto, las mismas matemáticas aplicadas para la formulación de las leyes de la física pueden ser utilizadas para las transformaciones de invariancia, las cuales permiten que las estructuras matemáticas de las leyes no afecten las correlaciones entre eventos y aseguren las deducciones de otras leyes. Esto se debe a dos factores: primero, en la física clásica, al menos, la invariancia es formulada en términos de *principios geométricos de invariancia*, es decir, en términos de observaciones directas; y segundo, dichos principios aseguran la misma probabilidad de ocurrencia que describen las leyes clásicas con independencia de las transformaciones de invariancia que se realicen. Por consiguiente, el rol metodológico de las matemáticas aplicas permite, a su vez, asegurar y dar sentido a la aplicación de las estructuras matemáticas de las leyes en distintos contextos y la deducción de otras estructuras matemáticas (incluidas otras leyes de la física), por medio de las transformaciones de invariancia.

1.6. Conclusiones del capítulo.

Las leyes de la física clásica son enunciados que permiten correlacionar distintos eventos físicos bien definidos en términos espaciales y temporales, con el fin de inferir otros eventos de acuerdo con ciertas condiciones iniciales. Sin embargo, para que estos enunciados logren especificar de manera precisa el comportamiento de los fenómenos que buscan describir, es importante considerar la contribución que realizan las matemáticas aplicadas.

La introducción de las matemáticas a las ciencias, en particular a la física, permite que estas jueguen tres roles básicos. Estos son, los roles inferencial, representacional y expresivo, los cuales son distinguibles entre sí sólo por criterios pragmáticos. Dichos roles se pueden agrupar en un *rol metodológico*. Este rol de las matemáticas aplicadas implica, al menos, dos funciones para la formulación y desarrollo de las leyes de la física clásica. Estos son:

- Ofrecer una forma de razonamiento, a saber, un razonamiento inferencial, para: (1) la formulación de estructuras matemáticas, incluidas los enunciados de ley de la física; (2) permiten inferir las consecuencias de estas leyes (en base a ciertas condiciones iniciales determinadas); y (3) permiten descubrir la lógica de pasar entre una afirmación a otra, es decir, descubrir las conexiones entre distintas estructuras matemáticas (incluidas los enunciados de ley).
- Ofrecen las herramientas formales que permiten: (1) proporcionar a los enunciados de ley de los conceptos capaces de representar objetos o fenómenos físicos; y (2) proporcionar las herramientas necesarias para: (2.1) establecer relaciones entre objetos o fenómenos físicos; e (2.2) inferir relaciones entre las distintas estructuras matemáticas de las leyes de la

física. En otras palabras, los tres roles básicos de las matemáticas aplicadas son subsumidos en el *rol metodológico*.

El *rol metodológico* es un rol de carácter pragmático, puesto que las matemáticas aplicadas -en las ciencias en general y en la física en particular- son herramientas útiles para la formulación y aplicación de las estructuras matemáticas en general y en los enunciados de ley -de la física- en particular. En efecto, la selección de las herramientas formales especificas a utilizar en la práctica científica para la formulación de enunciados de ley, así como la distinción entre los tres roles básicos de las matemáticas aplicadas, quedan determinados bajo criterios pragmáticos. Dichos *criterios pragmáticos* son, al menos, los objetivos de la investigación, el tipo de fenómeno a investigar/estudiar, las preferencias estéticas y filosóficas del investigador, entre otros factores.

Las leyes formuladas en términos de estructuras matemáticas forman enunciados mixtos, es decir, enunciados que poseen un componente matemático y un componente físico. El *rol metodológico* de las matemáticas otorga una forma de cuantificación de las variables físicas, permitiendo la posibilidad de verificación experimental de las leyes. Por consiguiente, las leyes están asociadas a ciertos dominios de validez. Dicho dominio de validez se entiende de la siguiente manera: primero, en la metáfora de las *capas de leyes*, aquellas leyes que sean capaz de *subsumir* otras leyes, es decir, sean más generales, se ubican en *niveles* superiores; y segundo, este *subsumir* es entendido en términos de que, desde una ley se puede deducir otras leyes, lo cual es logrado, formalmente, por medio de la utilización de herramientas matemáticas complejas. En consecuencia, una ley de la física clásica es fundamental si es capaz de subsumir otras leyes, las cuales pueden ser deducidas formalmente, es decir, el rol metodológico proporciona las herramientas para establecer una jerarquía formal entre las leyes de la física clásica.

Ahora bien, la cuantificación de las variables físicas por medio de las matemáticas, y su posterior evaluación experimental, es debido a la posibilidad de elegir aquellas herramientas y conceptos matemáticos adecuados y relevantes para la formulación de los enunciados. Los criterios de selección estarían dados por criterios pragmáticos. De ahí el carácter instrumental de las matemáticas, instrumental en términos de posibilitar los elementos necesarios para la cuantificación y las conexiones entre leyes, e instrumental en términos de concebirse como una herramienta de razonamiento.

Debido a esta caracterización matemática de las leyes, se pueden distinguir las siguientes propiedades de estos enunciados:

(i) Los enunciados de ley formulados por medio de estructuras matemáticas preservan el rol metodológico de las matemáticas aplicadas (incluyendo los roles básicos, es decir, el rol inferencial, el representacional y el expresivo).

(ii) Las leyes fundamentales de la física, expresadas matemáticamente dentro de enunciados mixtos, pueden ser formuladas de varias formas, de acuerdo con diferentes conceptos, predicados y operadores matemáticos.

(iii) La expresión matemática representa una vía para el descubrimiento de nuevas leyes.

(iv) Las leyes son afirmaciones inexactas puesto que poseen cierto grado de precisión. Por este motivo, las leyes deben ser contrastadas por medio de observaciones, experimentos, mediciones, simulaciones, etc.

(v) Las leyes poseen cierto dominio de validez, en el sentido de concordar con las correspondientes observaciones, experimentos, mediciones y/o simulaciones.

la robustez de una ley científica estaría dada por las conexiones que pueden ser establecidas entre los distintos puntos de partida, incluida las leyes científicas, que convergen en describir un mismo X -siendo X un objeto, fenómeno o un resultado-.

Por otro lado, la versatilidad de las matemáticas aplicadas confiere *robustez* a las leyes científicas debido a lo siguiente: las múltiples conexiones que pueden ser establecidas entre distintos puntos de partida -incluyendo a las leyes- que describen un mismo objeto, fenómeno o resultado. Si desde una de las derivaciones (la ley de gravitación universal) se puede deducir el resto de las derivaciones (el método de campo y el principio del mínimo), sugiere un cierto grado de *fundamentabilidad*.

En consecuencia, se puede establecer tres criterios, al menos, para determinar si una ley (enunciada en estructuras matemáticas) es fundamental o no. Estos son, a saber:

(1) El dominio de validez de una ley sea capaz de subsumir (o deducir) otras leyes (la metáfora de la capa de leyes).
(2) La deducción de otras leyes es llevada a cabo por medio de la utilización de matemáticas complejas.
(3) El grado de robustez de una ley.

No obstante, para que un enunciado de ley de la física clásica tenga sentido, es necesario que los eventos o fenómenos físicos que se busquen describir sean regulares. Se entiende por *regularidad* de los fenómenos físicos (en la física clásica) como aquellas similaridades estructurales entre distintos eventos bien definidos espacial y temporalmente. Esta regularidad de los fenómenos permite que las leyes de la física clásica sean invariantes bajo una serie de variaciones espaciales y temporales, cambios de marcos de referencia y del punto de vista del observador. Estas variaciones o cambios corresponden a las cuatro *transformaciones de invariancia*, las cuales son, respectivamente, las *transformaciones euclidianas*, *desplazamiento temporal*, *movimiento uniforme* e *invariancia rotacional*. Estas transformaciones son denominadas *principios geométricos de invariancia*. La importancia de estos principios radica en que son prerrequisitos casi necesarios para que sea posible descubrir o incluso clasificar las leyes de las ciencias.

Finalmente, el rol metodológico de las matemáticas aplicas permite, a su vez, asegurar y dar sentido a la aplicación de las estructuras matemáticas de las leyes en distintos contextos y la deducción de otras estructuras matemáticas (incluidas otras leyes de la física), por medio de las transformaciones de invariancia. En efecto, las mismas matemáticas aplicadas para la formulación de las leyes de la física pueden ser utilizadas en estas transformaciones, las cuales permiten que las estructuras matemáticas de las leyes no afecten las correlaciones entre eventos y aseguren las deducciones de otras leyes. Esto se debe a dos factores: primero, en la física clásica, al menos, la invariancia es formulada en términos de *principios geométricos de invariancia*, es decir, en términos de observaciones directas; y segundo, dichos principios aseguran la misma probabilidad de ocurrencia que describen las leyes clásicas con independencia de las transformaciones de invariancia que se realicen.

2. CAPÍTULO 2: EL ROL DE LA AXIOMATIZACIÓN EN LAS LEYES DE LA FÍSICA.

Como se observa en el capítulo precedente, las matemáticas juegan un papel importante en la formulación y en el desarrollo de los enunciados de ley en la física clásica. En efecto, las matemáticas realizan una contribución relevante para correlacionar de manera precisa distintos eventos entre sí. Las matemáticas aplicadas, por medio de su rol metodológico, permiten ligar distintas estructuras matemáticas, incluyendo a las leyes fundamentales de la física; proporcionan las herramientas formales para la formulación de las leyes; y ofrecen las herramientas para evaluar y asegurar que una ley sea aplicable en distintos contextos por medio de los principios de invariancia. Sin embargo, ¿cómo logran las matemáticas ofrecer consistencia en la formulación de dichos enunciados?, ¿cómo es posible que las matemáticas ofrezcan objetividad en la aplicación de las leyes en las teorías físicas? La respuesta se puede encontrar en las mismas matemáticas.

Las diversas teorías matemáticas encuentran su objetividad y consistencia en el tipo de metodología en la cual son formuladas. Esta metodología es denominada *método axiomático* o simplemente *axiomatización*. El método axiomático puede ser definido como un conjunto *T* de aseveraciones con la siguiente propiedad: toda aseveración perteneciente a *T* es una consecuencia lógica de una o más de las aseveraciones de *A* y toda consecuencia lógica de aseveraciones de *A* pertenecen a *T* (Torretti, 2013, p. 89). Según esto, la axiomatización permite realizar una precisión conceptual, es decir, cuando todos los conocimientos que se poseen, o que se van adquiriendo al respecto, se organizan en la forma de una teoría axiomática. Por este motivo, este método es de gran utilidad para la determinación precisa de conceptos abstractos ya ideados y la investigación de sus implicaciones, sin considerar su realización concreta (Torretti, 2013, p. 89). Si bien este método es utilizado en las matemáticas, puede ser utilizado de igual manera en las ciencias empíricas, cuya principal tarea es inventar los conceptos que unifiquen, deslinden y hagan inteligible cada familia de conceptos (Torretti, 2013, p. 89). En efecto, el método axiomático permite establecer exactamente las consecuencias de un concepto propuesto para entender ciertos fenómenos, ayudando a juzgar la idoneidad del mismo mediante la contrastación de dichas consecuencias mediante la experimentación (Torretti, 2013, p. 89). En el caso de la formulación de leyes en física, se requiere que los conceptos centrales que figuran en estos enunciados estén bien precisados, de manera tal que puedan ser contrastados experimentalmente por medio de las leyes.

Diversos autores (Wigner, 1960; Feynman, 2005; Redei, 2005; Moulines, 2013; Torretti, 2013) afirman que este método es aplicable en las teorías de la física. No obstante, es necesario hacer una distinción en la forma en que las leyes y las teorías físicas son axiomatizadas. Este método puede ser aplicado, al menos, de dos manera distintas, a saber, (i) la axiomatización aplicada de manera *heurística*, con el objeto de comprender las estructuras de las teorías físicas establecidas (y con ello, entender el rol que juegan las leyes en tales teorías), aplicación propia del *estructuralismo* de la filosofía de las ciencias; o (ii) la axiomatización puede ser aplicada de manera *metodológica*, en términos de cómo efectivamente se aplica este método para la construcción de nuevas teorías o leyes de la física en la práctica científica misma. Por consiguiente, es necesario esclarecer la distinción entre estas formas de aplicar el método axiomático en las teorías matemáticas y/o físicas con el objeto de establecer sus diferencias.

2.1. El método axiomático.

El método axiomático se remonta a Aristóteles, quien establece que en una ciencia se expresan dos clases de aseveraciones: (i) los *principios* o *axiomas* que no se demuestran; y (ii) los *teoremas*, los cuales son demostrados por inferencias deductivas a partir de los axiomas (Torretti, 2013, p. 90). A su vez, estas aseveraciones emplean dos tipos de términos: (1) los *términos primitivos* que no se definen; y (2) los *términos derivados*, definidos mediante los términos primitivos (Torrerri, 2013, p. 90). De esta manera procede, por ejemplo, la geometría euclidiana, la cual establece un conjunto simple de axiomas que a partir de los cuales se deducen y demuestran teoremas, e.g., el teorema de Pitágoras. La geometría moderna procede de la misma manera, aunque amplía la elección de los axiomas, por ejemplo, en la geometría desarrollada por Descartes el teorema de Pitágoras se establece como un axioma (Feynman, 2005, p. 51). La selección de los axiomas a utilizar depende de los objetivos de cada práctica matemática en particular.

Se dice que una teoría axiomática ha sido formalizada efectivamente si y sólo si es expresada mediante una escritura conceptual, por ejemplo, el tipo de escritura desarrollada por Frege (1879), quien intenta mostrar inequívocamente que las *verdades* aritméticas pueden deducirse de definiciones y *leyes lógicas*. Para ello, formula sus *reglas de inferencia* que permiten, atendiendo sólo a la figura representativa de una o dos aseveraciones (premisas), calcular la figura representativa de una aseveración (conclusión) que es una consecuencia lógica de las primeras. De esta manera, se puede decir que la regla *trasmite la verdad* de las premisas a la conclusión. Tales reglas gobiernan la construcción de una *prueba* (Torretti, 2013, p. 98). Este tipo de escritura (la conceptual) permite incluir reglas que permiten decidir inequívocamente, tras una serie de operaciones finitas, si un objeto dado es o no: (1) un símbolo elemental de la escritura; (2) un término o predicado (compuesto de símbolos elementales); (3) una oración (compuesta de predicados, términos y símbolos elementales); o (4) una prueba (compuesta de oraciones). En consecuencia, esto permite certificar si un texto constituye una prueba, y en tal caso, se dice que su conclusión es *deducible* de las oraciones admitidas como premisas (Torretti, 2013, p. 99).

En la teoría axiomática moderna se establecen ciertos axiomas y demostraciones bien delimitados, es decir, sólo se aceptan las consecuencias lógicas derivadas a partir de los axiomas (Feynman, 2005, p. 52). Por consiguiente, los axiomas deben satisfacer la siguiente condición: todas las palabras o frases utilizadas en ellos para nombrar objetos o expresar propiedades y relaciones deben (i) salir de una lista *P* de *primitivos*, es decir, palabras o frases a las que no se les asigna de antemano ningún significado; o (ii) estar definidas mediante tales primitivos (Torretti, 2013, p. 96). No obstante, es necesario que tanto las listas *A* y *P* sean *decidibles*, es decir, que haya un procedimiento efectivo que permita decidir de acuerdo con un número finito de pasos si un objeto dado pertenece o no a una de esas listas (Torretti, 2013, pp. 96-97). La presencia de los primitivos permite de esta manera conferirle un significado preciso al concepto de *consecuencia lógica*. Por consiguiente, se interpreta la teoría *T* asignándole significaciones precisas a los primitivos: objetos a los nombres, propiedades y relaciones de esos objetos a los predicados monádicos y poliádicos. Una interpretación de *T* en que todas las aseveraciones de la lista *A* resultan ser verdaderas constituye un *modelo* de *T*. De esta manera, una aseveración cualquiera *Q* es una *consecuencia lógica* de las aseveraciones de *A* si *Q* es verdadera en todo modelo de *T* (Torretti, 2013, p. 97). Sin embargo, para evitar verdades impertinentes, es necesario deslindar un fragmento del idioma en que se la formula y reconocer como aseveraciones de la teoría sólo aquellas consecuencias lógicas de los axiomas que pueden formularse en ese fragmento (Torrertti, 2013, p. 97).

Estas propiedades se pueden definir de la siguiente manera (Torretti, 2013, p. 98):

- Consistencia: sea *T* una teoría axiomática con lista de primitivos *P* y listas de axiomas *A*. Ahora, suponga que todas las aseveraciones de *T* pueden expresarse en un fragmento bien delimitado C_t del castellano. *T* es *inconsistente* si contiene tanto a una aseveración y la negación de esta. De lo contrario, *T* es *consistente*. Se puede observar que, de acuerdo con esto, *T* es inconsistente si y sólo si *T* no tiene modelos, esto es, si y sólo si *no existe* una interpretación de los primitivos *P* que haga verdaderos a *todos* los axiomas *A*. En efecto, *T* contiene una aseveración *Q* y su negación -*Q* si y sólo si tanto *Q* como -*Q* son verdaderas *a la vez en todo* modelo de *T*. Si la teoría no tiene modelos finitos, no será posible, en rigor, *producir* un modelo suyo.

- Independencia: sea *Q* uno de los axiomas *A* y *A’* la lista que se obtiene al extraer a *Q* de *A* (*A’* es igual a *A* menos *Q*). Entonces, *Q* es independiente (con respecto a *A’*) si la teoría determinada por *A’* y la negación de *Q* es consistente. Se dice que *A* es *independiente* si cada uno de sus axiomas es independiente con respecto a *A*.

En síntesis, la invención de conceptos matemáticos permite dos cosas, a saber, que no se agote la formulación de nuevos teoremas; y que la práctica matemática no se estanque en un conjunto de axiomas establecidos (Wigner, 1960, p. 2). La formulación de tales conceptos queda justificada posteriormente en la práctica matemática e, incluso, en la práctica científica (Wigner, 1960, p. 3). Esto permite inferir que no existe un conjunto de axiomas que sean *más* fundamentales que otros. Esta misma metodología se ve reflejada en el periodo de la *revolución científica*: Galileo la utiliza en su tratado *De motu locali* (1637), donde formula la cinemática moderna; Newton en sus *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687) (en adelante simplemente como los *Principia*), en donde establece las bases de la nueva dinámica y explica, con ella, los movimientos visibles de los astros (Torretti, 2013, p. 92). Aunque, no obstante, no pretendían establecer axiomas como verdades autoevidentes, sino más bien, como en el caso de Galileo, hacer concordar las conclusiones deducidas con resultados experimentales. Por consiguiente, una diferencia fundamental entre una axiomatización matemática y una no matemática, como en el caso de la física, es que en la primera *sólo* se consiguen resultados a partir de los axiomas (Feynman, 2005, p. 52), es decir, que los matemáticos sólo pueden formular conceptos desde los axiomas, y no así en la física donde se pueden formular axiomas y conceptos desde la experimentación, incluso, de acuerdo a Wigner, pueden ser formulados con un sentido estético, en términos de generalidad y simplicidad (1960, p. 3).

2.2. La aplicación heurística del método axiomático en la física.

Una de las dos formas de aplicar el método axiomático en las teorías físicas es de manera heurística, es decir, la axiomatización es utilizada para la *comprensión* de las estructuras de las teorías físicas y, por consiguiente, comprender el rol que juegan las leyes dentro de una teoría. Esta forma de ser aplicado dicho método ha sido desarrollada especialmente por el *estructuralismo* de la filosofía de la ciencia -afín al *estructuralismo matemático* desarrollado por el grupo de Bourbaki (Moulines, 2011, p. 134)-, cuyos partidarios ven al método axiomático como una ayuda para *entender* a las teorías físicas, de tal manera que buscan reconstruir a dichas teorías de manera axiomática, por medio de la utilización de instrumentos formales de la teoría de conjuntos y otras ramas de las matemáticas (Moulines, 2011, p. 137; Torretti, 2013, p. 106).

De modo muy general, el estructuralismo se fija como objetivo interpretar la *esencia* de una teoría científica, a la cual la agrupa en diferentes estructuras complejas, compuestas a su vez por estructuras más simples denominadas *modelos*. Aplicando las herramientas formales de la teoría de conjuntos, se formulan los *modelos* como *tuplas* (Moulines, 2011, p. 137):

$$\langle D_1, \ldots, D_m, R_1, \ldots, R_n \rangle$$

en donde las D_i representan los *dominios base* y los R_i son relaciones construidas (en el sentido de la teoría de conjuntos) sobre el dominio base. Estos fijan la *ontología*, es decir, los conjuntos de objetos admitidos por la teoría como *reales*. Mientras que las *relaciones* fijan las relaciones admitidas entre los objetos de estos diversos conjuntos. Los dominios y las relaciones específicas de una teoría particular son caracterizadas por cierto número de condiciones formales que determinan el *marco conceptual* de la teoría. Cuando todas las condiciones formales del *marco conceptual* son satisfechas, se dice que la estructura en cuestión es un *modelo potencial* de la teoría. *Potencial* en términos de que fija un marco posible para concebir la realidad sin que se tenga garantía de que sirva para representar algunos aspectos sustanciales de ésta, construir explicaciones o hacer predicciones (Moulines, 2011, p. 137). Para que el modelo potencial pase a ser un *modelo actual*, es necesario que, además de sus *condiciones-marco*, satisfaga *leyes científicas*, es decir, ciertos axiomas en el sentido propio del término[14] (Moulines, 2011, p. 138).

En la aplicación heurística del método axiomático realizada por el estructuralismo, se puede observar dos cualidades a tener en cuenta sobre las leyes científicas, a saber: (i) las leyes son *satisfechas* por medio de modelos de una teoría, es decir, las leyes son comprobadas empíricamente por medio de modelos; y (ii) las leyes, en particular aquellas enunciadas en estructuras matemáticas, deben ser formuladas en base a axiomas físicos que sean contrastables empíricamente, y así satisfacer a (i). Por lo tanto, la aplicación heurística de la axiomatización enseña el papel que juegan las leyes dentro de una teoría científica, y que los axiomas, sobre los cuales se erigen las leyes, deben ser *axiomas físicos*, con el objeto de ser empíricamente contrastables.

2.3. La aplicación metodológica del método axiomático en la física.

La axiomatización también puede ser aplicada de manera metodológica en la formulación y desarrollo de las leyes de la física. En este sentido, se entiende por *aplicación metodológica* la manera en cómo es aplicado el método axiomático en

[14] No se considera esencial decidir qué formulación concreta de estos axiomas se debe escoger, puesto que habrá siempre un número indeterminado de conjuntos diferentes de axiomas propios que determinan la misma clase de modelos actuales.

la práctica científica, con el objeto de formular consistentemente las estructuras matemáticas de los enunciados de ley sobre la base de axiomas físicos. Al observar la física en general, se aprecia que es desarrollada por medio de teorías matemáticas complejas que se valen del método axiomático para articular sus conceptos. Pero no en el mismo sentido en que se realiza en la formulación de las teorías matemáticas mismas. En efecto, esto se debe principalmente al escaso uso de la axiomatización en la física en contraste con su uso en las matemáticas (Torretti, 2013, p. 106). De hecho, no es fácil decidir, en la práctica científica misma, qué concepto matemático está en el centro de una teoría. Por ejemplo, en la teoría de la gravedad clásica se pueden establecer, al menos, dos axiomas como fundamentales, a saber, a la *fuerza*, la cual es ejercida en dirección al Sol; o el *barrido de áreas iguales en tiempo iguales* en el desplazamiento de un planeta a lo largo de su órbita, es decir, a la segunda ley de Kepler. Decidir cuál es el más importante sólo se determina en la práctica científica, es decir, el físico al querer referirse a cuerpos que no siguen órbitas elípticas y a sistemas de grandes cantidades de cuerpos, la *fuerza* permite establecer interacciones de acuerdo con las atracciones mutuas; pero si el físico quiere dar cuenta que en un sistema de cuerpos cuya traslación ocurre de una forma elíptica, la segunda ley de Kepler permite calcular los radios trazados por tales cuerpos (Feynman, 2005, p. 52).

No obstante, la física no se limita a la axiomatización de manera estricta como ocurre en el caso de las matemáticas -cuya validez de sus teoremas depende si estos se deducen consistentemente de un conjunto determinado de axiomas-. En efecto, en la física sucede, a veces, que se pueden deducir, a partir de una ley, otras leyes o principios que abarcan o explican una mayor cantidad de fenómenos. Recurriendo a la *metáfora de las capas de leyes* de Wigner, lo anterior dice que, a partir de una ley es posible inferir otra ley o principio ubicado en un nivel superior. Por ejemplo, a partir de la segunda ley de Kepler se puede inferir la *ley de la conservación del momentum angular*: “al contar las áreas recorridas en proporción a la masa del cuerpo que define el área y sumando todas las áreas, se encuentra que esta cantidad total no cambia con el tiempo” (Feynman, 2005, p. 53). Determinar que la ley de conservación del momentum angular esta *por sobre* la segunda ley de Kepler sólo fue posible, posteriormente, de manera experimental (Feynman, 2005, p. 54). Por consiguiente, esta visión de Feynman sugiere que la física posee un carácter axiomático en su proceder, pero no de la misma manera en que procede las matemáticas, puesto que la experimentación juega un rol en la formulación de teorías y leyes en física.

En este mismo sentido, John von Neumann distingue entre dos tipos de axiomatización, a saber: (i) una *axiomatización formal fuerte*, que se da en sistemas formales o sintácticos, como es el caso de la matemática; y (ii) una *axiomatización débil* que posee un sentido menos formal, es decir, no está bien definida, puesto que permite dar espacio a la intuición en la elaboración de estructuras conceptuales y matemáticas, tal es el caso de la física (Rédei, 2005, p. 45). Von Neumann en *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (1932) distingue tres partes en la axiomatización débil de la física (Rédei, 2005, p. 47):

- Axiomas físicos: son requerimiento semi-formales que se formulan de acuerdo con ciertas cantidades físicas y relaciones entre ellas. La base de estos es la observación y la experiencia, es decir, son de base empírica.
- Maquinaria analítica: corresponde a la estructura matemática propiamente tal, la cual contiene las cantidades físicas y sus relaciones entre ellas. Idealmente, los axiomas deben ser fuertes y suficientemente ricos para determinar la maquinaria analítica completamente.
- Interpretación física: conecta los axiomas físicos con la maquinaria analítica.

En consecuencia, la axiomatización funciona de la siguiente manera: primero, se formulan los axiomas físicos, es decir, se establecen ciertos requerimientos físicos, los cuales deben ser plausibles sobre una base empírica. Segundo, se propone y evalúa una maquinaria analítica, es decir, una estructura matemática que se adapte adecuadamente, en términos cuantitativos, con respecto a los axiomas y a sus relaciones. Finalmente, se propone una interpretación física sobre una base de requerimientos físicos, con el propósito de que sean lo suficientemente completos para determinar de manera no ambigua a la maquinaria analítica (Rédei, 2005, p. 48). Se debe tener en cuenta que, generalmente, lo que es alterado dentro de este formalismo débil es la interpretación física, la cual tiene cierta libertad y arbitrariedad de carácter pragmática (Rédei, 2005, p. 49). Por lo tanto, de acuerdo con la propuesta de von Neumann, la física se caracteriza por una axiomatización débil pragmática.

Esto se puede ver a la luz del propio trabajo de von Neumann en la génesis de la teoría cuántica moderna, la cual fue fundada en dos teorías formalmente distinta (Dieks, 2005, p. 117):

(i) Heisenberg fundó su teoría cuántica de acuerdo con la mecánica matricial, cuyo formalismo era capaz de manejar líneas espectrales de carácter discreto, por lo cual tuvo éxito en la explicación de la mayoría de los hechos experimentales cruciales que la teoría mecánica clásica no podía manejar a nivel microscópico.

(ii) Schrödinger formuló su teoría según una mecánica de ondas, cuyo formalismo también era capaz de manejar líneas espectrales de

> carácter discreta, por consiguiente, tenía el mismo éxito que la mecánica matricial de Heisenberg.

Como se observa, ambos físicos formularon sus teorías bajo maquinarias analíticas distintas (Heisenberg desde la mecánica matricial y Schrödinger desde la mecánica de ondas), de acuerdo con sus propias preferencias estéticas y filosóficas. Ambos ajustaron sus maquinarias a determinados axiomas físicos, lo cual no obstaculizó que llegaran a los mismos resultados empíricos y, por consiguiente, convergieran en definir a los objetos cuánticos como ondas. Por lo tanto, la interpretación física sólo se dará de acuerdo con las observaciones empíricas. Posteriormente von Neumann demostró que ambas teorías pueden ser vistas como dos caras de un mismo esquema matemático, es decir, proveyó un marco de trabajo unificado de ambas teorías (Dieks, 2005, p. 118). Esta unificación de las formulaciones de Heisenberg y Schrödinger es explicada por la versatilidad de las matemáticas aplicadas. En efecto, von Neumann demostró la equivalencia matemática de ambas formulaciones y, por consiguiente, ofreció una unificación de los resultados experimentales. Al mismo tiempo, demuestra que ambas formulaciones se diferencian cualitativamente, puesto que ofrecen dos formas de entender a la teoría cuántica. Por consiguiente, la demostración de von Neumann confiere una mayor robustez a la teoría cuántica.

La propuesta de von Neumann puede ser complementada con la *concepción inferencial de las matemáticas aplicadas* (ver Bueno y Colyvan, 2011, y la sección 2.1. del capítulo 2). En la etapa de *inmersión* se especifican aquellas variables empíricas que constituirán los *axiomas físicos* de la maquinaria analítica. De esta manera se asegura que estos axiomas sean de base empírica. Luego, se procede a formular la *maquinaria analítica* que satisfaga a los axiomas físicos y las relaciones entre ellos. Posteriormente, en la etapa de *derivación* se deducen las consecuencias formales de las estructuras matemáticas -la maquinaria analítica-. Por ejemplo, se pueden relacionar y/o inferir distintas leyes. Finalmente, en la etapa de *interpretación*, (i) se interpretan los axiomas físicos en base a la maquinaria analítica, y (ii) se interpretan sus consecuencias formales. Recordar que tanto la etapa de la *inmersión* como la de *interpretación* están sujetas a consideraciones pragmáticas (Bueno y Colyvan, 2011, p. 355). En efecto, en la *inmersión* la elección de los axiomas físicos y el tipo de maquinaria analítica específica a utilizar dependen del contexto de investigación y de los criterios del investigador (por ejemplo, preferencias estéticas o filosóficas). Mientras que en la *interpretación* lo que será interpretado dependerá de lo realizado en la *inmersión*, es decir, se interpretarán las relaciones entre los axiomas físicos, separando aquello que posee una interpretación física de aquello que es una idealización física, una idealización matemática o una simplificación. Nuevamente, esto también dependerá del contexto de investigación y de los criterios del investigador.

Por consiguiente, se tienen dos maneras de entender la axiomatización semi-formal de la física, a saber: (1) la axiomatización de Feynman, la cual es caracterizada en términos de dejar espacio a la experimentación; y (2) la axiomatización débil pragmática de von Neumann, la cual permite que la intuición incida sobre el formalismo. Ambas propuestas pueden ser complementadas entre sí y precisada de la siguiente manera:

- Conceptos físicos: corresponde a las cantidades físicas mencionadas por von Neumann, las cuales deben ser elaborados sobre una base empírica.
- Axiomas físicos: son las correlaciones semi-formales entre los conceptos físicos. Puesto que, en última instancia, están formulados sobre una base empírica, permiten que sean evaluables experimentalmente en la práctica científica. Los axiomas físicos corresponden a las leyes.
- Maquinaria analítica: corresponde al formalismo matemático que permite especificar las estructuras matemáticas de los axiomas físicos. Ejemplos de *formalismo matemático* son el cálculo infinitesimal, la mecánica matricial, la mecánica de ondas, entre otros. El tipo específico de formalismo a utilizar queda sujeto a la intuición, es decir, bajo preferencias estéticas o filosóficas. Siguiendo a von

Neumann, los axiomas, idealmente, deben ser fuertes y suficientemente ricos para determinar la maquinaria analítica completamente.

- Interpretación física: corresponde a la conexión entre los axiomas físicos y la maquinaria analítica. Por lo tanto, la interpretación queda sujeta a una base empírica y a la evaluación experimental.

La conjugación de las propuestas de Feynman y von Neumann funciona de la siguiente manera: se fijan los conceptos físicos relevantes para establecer los axiomas. Se procede a establecer una maquinaria analítica que determine la estructura matemática de los axiomas. Luego, se procede a su interpretación, la cual queda sujeta bajo consideraciones pragmáticas. Por consiguiente, se conserva el carácter *axiomático débil pragmático* señalado por von Neumann.

Con respecto a este último punto, se debe tener en cuenta lo siguiente: (i) tanto la elección de la *maquinaria analítica* como la *interpretación física* quedan sujeta bajo *criterios pragmáticos* (especificados en el Capítulo 1); y (ii) el *rol metodológico* de las matemáticas aplicadas subyace en la elección de la maquinaria analítica a utilizar y la especificación de la estructura matemática de los *axiomas físicos*.

Finalmente, se debe señalar que aquellos elementos formales que carecen de interpretación física, como las simplificaciones y las idealizaciones, no son desechables de la maquinaria analítica por el mero hecho de carecer de contenido físico. En efecto, tales herramientas son esenciales para la formulación y el desarrollo matemático (en particular para la etapa de la *derivación*). Esto revela que, en la práctica científica, al menos, no se requiere de nociones de verdad para la utilización de las herramientas matemáticas -aunque incluso tales idealizaciones, por ejemplo, sean compatibles con los resultados físicos-. Esto es debido a que las matemáticas no requieren ser tomadas como verdaderas para ser buenas teorías (Bueno, 2016, p. 2.601). En efecto, las matemáticas deben la consistencia y objetividad de sus enunciados gracias al método axiomático, es decir, un enunciado matemático es consistente y objetivo si éste se deduce lógicamente de un conjunto de axiomas y puede ser demostrado matemáticamente. Como Feynman afirma (2005, p. 52), sólo se aceptan las consecuencias lógicas derivadas a partir de los axiomas. Es más, las matemáticas no deben su consistencia y objetividad en que sus entidades refieran, como lo afirma, por ejemplo, el platonismo (ver Colyvan, 2011). En consecuencia, las leyes científicas no requieren de la *verdad* de las matemáticas (se debe recordar que las leyes, matemáticamente construidas, son enunciados mixtos, es decir, constan de un componente matemático y de un componente físico), sólo necesitan de su consistencia con respecto a la derivación lógica desde los axiomas físicos, es decir, que el componente matemático de una ley sea consistente con respecto a los axiomas físicos del cual derivan. La idoneidad de una ley sólo se evalúa con respecto a teorías y modelos científicos, contrastando el componente físico de estos enunciados.

2.4. **Conclusiones del capítulo.**

La utilización de las matemáticas aplicadas en el formulación y desarrollo de los enunciados de ley en la física clásica ha implicado el uso de las herramientas formales propias de las matemáticas. No obstante, la utilización de dichas herramientas no asegura, por sí solas, consistencia y objetividad a los enunciados de ley. Para ello, se requiere aplicar también el *método axiomático* o *axiomatización* en la formulación de las leyes fundamentales de la física. Esta metodología es definida como un conjunto T de aseveraciones con la siguiente propiedad: toda aseveración perteneciente a T es una consecuencia lógica de una o más de las aseveraciones de A y toda consecuencia lógica de aseveraciones de A pertenecen a T. Por consiguiente, una teoría quedaría correctamente axiomatizada si, y sólo si, se siguen correctamente sus consecuencias a partir de un conjunto determinado de axiomas. Es decir, sólo se aceptan las consecuencias lógicas derivadas desde los axiomas. Además, la axiomatización define las siguientes propiedades:

- Consistencia: toda teoría axiomatizada es *consistente* si no contiene consecuencias contradictorias, es decir, que no contenga una afirmación y su negación a la vez.
- Independencia: un axioma es independiente si, al extraerse del resto de axiomas, permanece consistente.

De esta manera, la invención de conceptos matemáticos permite, (1) que no se agote la formulación de nuevos teoremas; y (2) que la práctica matemática no se restrinja en un conjunto de axiomas determinados. La formulación de estos conceptos queda justificada, posteriormente, en la práctica matemática. Si bien esta es la manera en que procede la matemática, este método también es utilizable en la práctica científica. En efecto, este método es utilizable en todas aquellas teorías (incluyendo a las matemáticas y las ciencias como la física) donde se requiere de precisión conceptual y que aquellos conceptos puedan ser empleados de manera axiomática. Su aplicación en la física permite establecer exactamente las consecuencias de un concepto propuesto para entender ciertos fenómenos, ayudando a juzgar la idoneidad del mismo mediante la contrastación de dichas consecuencias mediante la experimentación.

No obstante, este método no posee una única aplicación en dicha ciencia, puesto que puede ser aplicado de dos formas. Puede ser aplicado de manera heurística o de manera metodológica.

- La aplicación heurística de la axiomatización en la física es utilizada con el objeto de *comprender* las estructuras de las teorías físicas y, por consiguiente, comprender el rol que juegan las leyes dentro de una teoría. Esta forma de ser aplicado dicho método ha sido desarrollada especialmente por el *estructuralismo* de la filosofía de la ciencia. Esta escuela filosófica reconstruye las teorías físicas por medio de la teoría de conjuntos, entre otras herramientas formales. De modo general, esta aplicación heurística enseña que las leyes se construyen sobre axiomas de carácter físico (contrastables experimentalmente); y que los modelos de una teoría comprueban empíricamente a las leyes.
- La aplicación metodológica de la axiomatización en la física se realiza con el objeto de formular y desarrollar sus leyes. En este sentido, se entiende por *aplicación metodológica* la manera en cómo es aplicado el método axiomático en la práctica científica, con el objeto de formular consistentemente las estructuras matemáticas de los enunciados de ley sobre la base de axiomas físicos. En efecto, la axiomatización es empleada para determinar de manera precisa los conceptos o axiomas físicos de las estructuras matemáticas, establecer las relaciones pertinentes entre los axiomas y deducir todas las consecuencias de los axiomas físicos.

Con respecto a la aplicación metodológica de la axiomatización, la práctica científica no se limita a la axiomatización estricta, como ocurren en el caso de las matemáticas. En efecto, el formalismo en la física puede quedar sujeto a la experimentación o a la intuición:

- Feynman caracteriza al método axiomático utilizado en la física como una axiomatización que no es estrictamente formal, puesto que deja espacio a la experimentación intervenga en el formalismo. En efecto, la experimentación puede ayudar a determinar la aplicabilidad de una ley, como ocurre en el caso de la segunda ley de Kepler y el principio de conservación del momentum angular. Esto se debe a que en el desarrollo de las leyes en la práctica se pueden deducir otras leyes o principios que, posteriormente, se pueden comprobar experimentalmente que estas leyes o principios deducidos poseen mayor validez (pueden describir o aplicar a un mayor número de fenómenos físicos) que la ley de la cual son deducidos.
- Von Neumann distingue entre una *axiomatización formal fuerte* (como es el caso en como proceden las matemáticas) y una *axiomatización formal débil*, puesto que da espacio para que la intuición intervenga en el formalismo. Esta axiomatización estaría caracterizada por tres elementos: los axiomas físicos, la maquinaria analítica y la interpretación física. La intuición jugaría su papel en la elección de la

> maquinaria analítica (cálculo, mecánica ondulatoria, mecánica matricial, entre otras). Es decir, en la práctica científica la formulación de sus leyes procede por medio de esta axiomatización débil, la cual conjuga el método axiomático de las matemáticas con la flexibilidad de la práctica científica. Además, von Neumann caracteriza a la *interpretación física* bajo criterios pragmáticos, por consiguiente, el formalismo utilizado en la práctica científica serían una *axiomatización débil pragmática*.

Dadas las características de la *axiomatización débil pragmática* de von Neumann, es compatible con la *concepción inferencial de las matemáticas aplicadas* de Bueno y Colyvan: en la *inmersión* se especifican los *axiomas físicos* sobre una base empírica, luego se procede a elección y la formulación de la *maquinaria analítica*. En la etapa de la *derivación* se deducen las consecuencias formales de la maquinaria analítica. Finalmente, en la *interpretación* se interpretan los axiomas físico-maquinaria analítica y sus consecuencias formales. Ambas propuestas se caracterizan por la contribución pragmática de las matemáticas aplicadas tanto en la elección de las herramientas formales como en la interpretación del contenido de las estructuras matemáticas.

Si bien ambas propuestas caracterizan a la axiomatización de la física bajo distintos términos, no obstante, pueden ser complementadas. Esto se realiza de la siguiente manera:

- Conceptos físicos: corresponde a las cantidades físicas mencionadas por von Neumann, las cuales deben ser elaborados sobre una base empírica.
- Axiomas físicos: son las correlaciones semi-formales entre los conceptos físicos. Puesto que, en última instancia, están formulados sobre una base empírica, permiten que sean evaluables experimentalmente en la práctica científica. Los axiomas físicos corresponden a las leyes.
- Maquinaria analítica: corresponde al formalismo matemático que permite especificar las estructuras matemáticas de los axiomas físicos. Ejemplos de *formalismo matemático* son el cálculo infinitesimal, la mecánica matricial, la mecánica de ondas, entre otros. El tipo específico de formalismo a utilizar queda sujeto a la intuición, es decir, bajo preferencias estéticas o filosóficas. Siguiendo a von Neumann, los axiomas, idealmente, deben ser fuertes y suficientemente ricos para determinar la maquinaria analítica completamente.

- Interpretación física: corresponde a la conexión entre los axiomas físicos y la maquinaria analítica. Por lo tanto, la interpretación queda sujeta a una base empírica y a la evaluación experimental.

Este formalismo funcionaría de la siguiente manera: se fijan los conceptos físicos relevantes para establecer los axiomas. Se procede a establecer una maquinaria analítica que determine la estructura matemática de los axiomas. Luego, se procede a su interpretación, la cual queda sujeta bajo consideraciones pragmáticas. Por consiguiente, se conserva el carácter *axiomático débil pragmático* señalado por von Neumann.

Dado lo anterior: (i) tanto la elección de la *maquinaria analítica* como la *interpretación física* quedan sujeta bajo *criterios pragmáticos* (especificados en el Capítulo 1); y (ii) el *rol metodológico* de las matemáticas aplicadas subyace en la elección de la maquinaria analítica a utilizar y la especificación de la estructura matemática de los *axiomas físicos*.

Finalmente, en la práctica científica, al menos, no se requiere de nociones de verdad para la utilización de las herramientas matemáticas. Esto es debido a que las matemáticas no requieren ser tomadas como verdaderas para ser buenas teorías. En efecto, las matemáticas deben la consistencia y objetividad de sus enunciados gracias al método axiomático, es decir, un enunciado matemático es consistente y objetivo si éste se deduce lógicamente de un conjunto de axiomas y puede ser demostrado matemáticamente. En consecuencia, las leyes científicas no requieren de la *verdad* de las matemáticas, sólo necesitan de su consistencia con respecto a la derivación lógica desde los axiomas físicos. La idoneidad de una ley sólo se evalúa con respecto a teorías y modelos científicos, contrastando el componente físico de estos enunciados.

3. CAPÍTULO 3. CASO DE ESTUDIO: LAS LEYES DE NEWTON.

En los capítulos precedentes se presentaron argumentos con respecto a: (1) las implicaciones del *rol metodológico* de las matemáticas aplicadas para la formulación y desarrollo de las leyes de la física clásica como estructuras matemáticas; y (2) el carácter axiomático de la formulación de estas leyes. A continuación, se presenta como caso de estudio el establecimiento de las tres *leyes dinámicas* de Newton. Este caso se encuentra basado en lo expuesto en *Newton's Concepts of Force and Mass, with Notes on the Laws of Motion* (Cohen, 2016, pp. 61-92). En este trabajo, Cohen explora los fundamentos que llevan a Newton (expuestos en sus *Principia*) para establecer los conceptos fundamentales sobre los cuales se erigen sus leyes del movimiento. En particular, se tiene en cuenta los fundamentos de los conceptos físicos, los cuales son fundamentales para la formulación de las leyes dinámicas, así como también las implicaciones de estas leyes.

Teniendo como base lo expuesto por Cohen, se evalúa los principales resultados expuestos en los capítulos 1 y 2. Específicamente, se tiene en cuenta lo siguiente: (1) el rol metodológico de las matemáticas aplicadas en términos de, (1.1) las matemáticas como herramientas de razonamiento; y (1.2) las matemáticas como herramientas formales; y (2) la axiomatización débil pragmática.

3.1. El establecimiento de una maquina analítica: el cálculo diferencial e integral.

En los *Principia* Newton aborda temas de gran dificultad para su época, tales como problemas de tres cuerpos, la atracción de cuerpos extendidos, movimiento en medios resistentes, la velocidad del sonido, la precisión de los equinoccios, la forma del equilibrio de una masa de fluido giratorio, el movimiento de las mareas, las irregularidades en el movimiento lunar y las perturbaciones planetarias (Guicciardini, 2016, p. 409). No obstante, para abordar estos temas, Newton requirió de nuevos conceptos mecánicos y de una mejora de las herramientas formales existentes en su época. Para lograr este cometido, utilizó el análisis matemático que él mismo creó, a saber, el *método de series y fluxiones* (hoy en día conocido como *cálculo diferencial e integral*), para la resolución de tales problemas.

En Guicciardini (2016, pp. 389-392) se subdivide el proceso de creación de este nuevo análisis matemático en tres etapas:

(1) En la primera etapa Newton formula el *teorema del binomio* (1664-1665). Identificó una forma general para los coeficientes que se dan cuando un binomio surge para un exponente entero positivo; tabuló los coeficientes y, luego, extrapoló e interpoló las tablas, encontrando los coeficientes para exponentes negativos y fraccionarios.

(2) La segunda etapa consiste en el desarrollo de una notación y de algoritmos para el cálculo de la tangente para planos curvos. Newton denominó como *fluentes* a las magnitudes generadas por el movimiento continuo y *fluxiones* a la tasa instantánea de flujo. A su vez, afirmó que, durante un *momento* infinitesimal de tiempo, la fluxión puede ser considerada como constante. El incremento infinitesimal de una cantidad fluente (por ejemplo, un punto moviéndose a lo largo de una línea recta con velocidad variable) será igual a su velocidad instantánea (o fluxión) multiplicada por un momento de tiempo. Tal incremento infinitesimal, Newton lo denominó *momento* de la cantidad fluente. Por último, calculó la pendiente de un plano curvo por la tasa del momento de la ordenada al momento de la abscisa.

(3) La tercera etapa se caracteriza por el desarrollo del *teorema fundamental del cálculo*, entendido, en la época de Newton, como una relación entre curvas (hoy en día es entendido como una relación inversa entre operadores actuando sobre funciones). Este teorema fue aprovechado para facilitar el cálculo de áreas de superficies curvilíneas y la longitud de

> arco de las curvas. Una vez establecido un algoritmo para el cálculo de la tangente, se puede construir, lo que Newton llamó, *tablas de curvas* (o tablas integrales), aplicando el algoritmo para curvas cada vez más difíciles.

De esta manera, Newton ideó una nueva metodología formal (o maquinaria analítica) que le permitía aplicarla a un amplio rango de problemas. Por ejemplo, puede ser aplicada para calcular el área y la longitud de arco de importantes curvas para la astronomía, o incluso para curvas mecánicas, tales como las cicloides, expandiendo (por medio del teorema del binomio) sus ecuaciones como una serie de potencias y, luego, integrándolas término a término. En síntesis, el cálculo desarrollado por Newton (y también por Leibniz) proporciona el marco matemático general sobre el cual se formula y desarrollan las leyes newtonianas, es decir, proporciona las formas de razonamiento (e.g., inferencias a partir de variaciones infinitesimales) y las herramientas formales (e.g., el teorema del binomio o el teorema fundamental del cálculo) para las estructuras matemáticas de los enunciados de estas leyes.

3.2. La estructura general de los *Principia*.

La estructura de los *Principia* sigue un patrón clásico de axiomatización euclidiana: el establecimiento de definiciones y de axiomas, seguido de proposiciones y sus respectivas demostraciones. A su vez, este patrón está basado en dos conceptos fundamentales, los de *masa* y *fuerza*. No obstante, la manera en que procede Newton se diferencia -con respecto a la axiomatización euclidiana- en dos aspectos: primero, en las demostraciones se procede, generalmente, apelando al *método de límites*, es decir, se establece una serie de proposiciones desde una configuración geométrica, luego, reduce sin limitaciones a uno o más parámetros, de lo cual obtiene un valor límite (*último*) de la razón geométrica (es dentro de estos límites que las pruebas de Newton son válidas); y, segundo, la validez de las proposiciones está ligada a la evidencia experimental y a la observación crítica.

Las proposiciones en los *Principia* son expuestas en tres libros. El libro 1 analiza el movimiento en espacios libres, esto es, espacios desprovistos de resistencia al fluido. Luego, el libro 2 considera varias condiciones de resistencia de fluidos y una variedad de temas relacionados. Finalmente, en el libro 3, Newton aplica los resultados del libro 1 a la física del cielo, al *sistema del mundo*. Aquí muestra que la gravedad se extiende a la luna y que la Tierra es un esferoide ovalado. Investiga el movimiento de la luna, calcula las densidades planetarias y las masas relativas, explica el movimiento de las mareas y muestra que los cometas son como los planetas y que, por lo tanto, se mueven en secciones cónicas, algunas de las cuales son elipses. El libro 3 expone la demostración del sistema copernicano modificado por Kepler.

3.3. Los conceptos físicos fundamentales de las leyes de Newton.

Newton comienza por establecer dos conceptos físicos fundamentales sobre los cuales construye sus leyes físicas. Estos conceptos son, a saber, la *masa* y la *fuerza*.

3.3.1. El concepto de *masa*.

El primer concepto que Newton define es el de *masa*, un concepto totalmente nuevo en las reflexiones de aquella época, el cual juega un rol central en la naciente física moderna. Este concepto es introducido debido a que su física demanda una medida de materia que no sea el resultado de un cuerpo que esté *ocurriendo* en un lugar u otro, o sujeto a alguna circunstancia física particular tal como una presión externa, es decir, que la masa no sea un *accidente*.

La *masa* es definida por Newton como *la medida de la cantidad de materia* (*quantitas materiaes*) *que surge de* (*orta est*) *dos factores en conjunción, la densidad y el volumen*. De esta manera, Newton define a su primer concepto sobre una base empírica. En efecto, con respecto a la *densidad*, Newton estaba fuertemente influenciado por los experimentos en neumática de Boyle y otros, y por su propio concepto de la teoría de la materia. Estaba consciente que una cantidad dada de aire podría ser expandida o contraída. Bajo tales variaciones de condiciones, la densidad cambiaría, pero la cantidad de materia permanecería fijada, dependiendo conjuntamente del volumen y la densidad. La cantidad de materia en una muestra dada, de acuerdo con Newton, permanecería inalterada si fuera transportada desde un lugar de la Tierra a otro dentro de la misma. En efecto, la cantidad de materia permanecería fijada incluso si la muestra de materia fuera transportada a la Luna o a Júpiter.

Newton establece como la medida de la materia el *pondus* o *peso*, el cual es definido (definición 2) como "la cantidad o la medida de materia a ser movida, aparte de las consideraciones de gravedad, siempre y cuando no se trate de cuerpos gravitantes". Hoy en día se entiende por *cantidad de materia* como el *momentum*, el cual surge a partir de la velocidad y la cantidad de materia en conjunto.

3.3.2. El concepto de *fuerza*.

El segundo concepto que Newton introduce -en la definición 3- es el de *fuerza*, la cual lo define en términos de los conceptos de *inercia* (*vis insita*) y de *fuerza de inercia* (*vis inertiae*). La *vis insita* era un término corriente en las discusiones sobre el movimiento en aquella época. Dicho término no es una invención de Newton, puesto que estaba en muchos libros con los cuales estaba familiarizado.

El físico Johannes Kepler sostuvo que la cualidad primaria de la materia es su *inercia*, es decir, su incapacidad para moverse a sí misma o por su propio poder interno. Por consiguiente, si una fuerza aplicada externamente que produjera movimiento cesaba, entonces -de acuerdo con Kepler- el cuerpo reposaría, sin importar en el sitio que fuere donde esto ocurriera.

Sin embargo, Newton realizó una transformación radical de este concepto de Kepler. En efecto, la *inercia* ya no sería definida en términos de llevar un cuerpo al reposo en el momento en que una fuerza externa deje de actuar; más bien, esta inercia tendería a mantener un cuerpo en cualquier *estado*, ya sea un estado de reposo o de movimiento *uniformemente rectilíneo hacia adelante*[15]. Sin embargo, se debe considerar dos factores al respecto: primero, generalmente Newton no refiere, como se hace hoy en día, a *inercia* como tal, más bien él tiende a escribir una *fuerza de inercia*, una *vis inertiae*; segundo, Newton identifica *masa* e *inercia*. La *vis insita* de un cuerpo (definición 3), es siempre proporcional al cuerpo, esto es, proporcional a la masa. Por lo tanto, puede que se dé a la *vis insita* un nuevo significado, y uno muy importante, el de *fuerza de inercia* (*vis inertiae*). Newton explica que, debido a la *inercia del cuerpo*, este sólo está *con dificultad* en hacer cambiar su *estado* de reposo o de movimiento

[15] El concepto de que *un cuerpo estuviera en un estado de movimiento* fue tomado por Newton desde los *Principia philosophiae* de Descartes.

uniforme. Es por esta razón que *vis inertiae* es un mejor nombre que *vis insita*. De acuerdo con la definición 4, la *vis inertiae* tiene la propiedad de no ser una fuerza *impresa*, una fuerza tal que pueda producir un cambio de estado o una aceleración. Por lo tanto, esta *fuerza* no puede ser combinada por medio de un triángulo de fuerza con fuerzas externas continuas o instantáneas.

Newton está interesado en aquellas *acciones* que alteran el estado de un cuerpo, en términos de alterar sus condiciones de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme. Esta acción ocurre sólo mientras la fuerza está siendo impresa, es decir, mientras la fuerza está actualmente produciendo un cambio de estado. Por el contrario, cuando esta fuerza haya cesado, esta no permanece en el cuerpo. Newton dice, explícitamente, que *un cuerpo persevera en cualquier estado nuevo solamente por la fuerza de inercia*. De esta manera, la fuerza se puede dar de tres formas, a saber, la fuerza centrípeta, la fuerza de percusión y la fuerza de presión.

Una característica importante de las fuerzas de percusión y de presión es que ambas son acciones físicas observables, puesto que en ambas hay contacto de un cuerpo con otro; mientras que la fuerza centrípeta no ocurre tal contacto. Tal como se observa en ciertos sucesos, como en el movimiento orbital, no se sabe ni se observa una fuerza actuando; la única evidencia, es que hay un cambio continuo en un estado de un cuerpo, una salida continua desde un movimiento rectilíneo uniforme. En la definición 5, Newton refiere a tres ejemplos de fuerza centrípeta. Una es la gravedad, por cual entiende a la *gravedad terrestre*, la fuerza que causa que los cuerpos desciendan hacia abajo, *hacia el centro de la Tierra*. Otra es la fuerza magnética, en la cual una pieza de hierro *busca una magnetita*. Finalmente, está la *fuerza, como sea como deba ser, por la cual los planetas están continuamente con ganas de volver* (en sentido figurado) *desde movimientos rectilíneos y compelidas a rotar en líneas curvas*.

Las restantes definiciones (de la 6 a la 8) están relacionadas con las tres medidas de la fuerza centrípeta. Estas son la cantidad absoluta (definición 6), la cantidad acelerativa (definición 7) y la cantidad movida (definición 8). La más importante de estas es la cantidad *acelerativa*, definida como la velocidad de un cuerpo en un tiempo dado. Esta medida es la taza a la cual la velocidad cambia por cada unidad de tiempo, es decir, la aceleración. En la definición 8, Newton introduce una medida que es *proporcional al movimiento* (i.e. momentum), que es una fuerza que se *genera en un tiempo dado*. Esta medida es, en otras palabras, la taza a la cual el *movimiento* (i.e., momentum) cambia.

3.4. Los axiomas físicos: las leyes del movimiento.

Luego de definir los *conceptos físicos* fundamentales, Newton procede a establecer los *axiomas físicos*, es decir, procede a la formulación de sus leyes del movimiento (o dinámicas).

3.4.1. La primera ley de Newton.

La primera ley del movimiento, también conocida como la *ley de inercia*, afirma: *todo cuerpo continúa en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme hacia adelante* (i.e., movimiento uniformemente hacia adelante en una línea recta) *excepto que sea obligado a cambiar su estado por fuerzas impresas sobre este*. En el breve parágrafo que le sigue, Newton menciona tres ejemplos de movimiento inercial, cada cual está basado en un análisis de movimiento curvado producido por la acción de una forma de fuerza centrípeta. En cada caso, el movimiento curvado es, por el análisis de Newton, compuesto de una componente lineal o tangencial de movimiento inercial y un movimiento acelerado hacia dentro producido por una fuerza centrípeta.

Así, un propósito mayor de la primera ley es hacer explicita la condición bajo la cual se infiere la acción de una fuerza centralmente dirigida y continuamente ejercida. Los tres ejemplos de Newton evocan fuerzas centrípetas. El primer ejemplo es el movimiento de proyectiles, los cuales *preservan su movimiento* (lineal hacia adelante), mientras no sean retardados por la resistencia del aire y no sean *incitados hacia abajo por la fuerza de gravedad*. El segundo ejemplo es el movimiento circular, en donde las partículas que componen la rotación de objeto tienden a *salirse* en líneas rectas a lo largo de la tangente a su curva de movimiento. No obstante, ellos no se *salen* o sueltan, sino que son conservados en orbitas circulares por las fuerzas cohesivas. El tercer ejemplo de Newton es el movimiento orbital de los planetas y los cometas.

Es importante mencionar que la *fuerza impresa*, a la cual Newton refiere en el enunciado de la ley, puede ser cualquiera de las tres variedades de fuerzas impresas: presión, percusión o fuerza centrípeta. En otras palabras, la ley es igualmente válida para fuerzas impulsivas o instantáneas y fuerzas continuas.

Matemáticamente se puede expresar a la ley de inercia de la siguiente manera:

$$\sum F = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \tag{7}$$

Esta expresión dice que la sumatoria de fuerzas (*F*) es igual a cero sí, y sólo sí, la aceleración es igual a cero (la aceleración corresponde a la primera derivada de la velocidad con respecto al tiempo, es decir, a *dv/dt*). Cabe mencionar, que esta ecuación corresponde a una *ecuación vectorial*, puesto que las fuerzas poseen dirección y sentido.

Como se puede observar, la ecuación (7) correlaciona las fuerzas con respecto a la aceleración, la cual es invariante bajo condiciones en que no intervengan fuerzas externas que cambien el estado del cuerpo. Esta ley se considera (su interpretación física) que describe condiciones ideales, puesto que no existen cuerpo que no estén sujetos a ninguna fuerza externa. Empero, esto no impide que sea utilizada junto con las otras leyes newtonianas.

3.4.2. La segunda ley de Newton.

La segunda ley afirma que un *cambio en el movimiento* es proporcional a *la fuerza impresa*, añadiendo que este cambio en el movimiento es dirigido *a lo largo de la línea recta en la cual esta fuerza está impresa*. Algunos comentadores han modificado cierto contenido a esta ley: reemplazan *cambio en el movimiento* por *taza* (o el cambio en el movimiento por unidad de tiempo) como proporcional a la fuerza. De hecho, esta es la manera actual en que es leída esta ley. No obstante, Newton no cometió algún error al respecto. En la formulación original, estaba explícitamente afirmando una ley para fuerzas impulsivas, no para fuerzas continuas. Esto quiere decir que, una fuerza impulsiva o una fuerza actuando instantáneamente o instantáneamente cercana, o actuando en una *partícula* infinitesimalmente pequeña de tiempo, produce un cambio en la cantidad de movimiento o momentum. Esta sería la lectura correcta del sentido original de Newton: el *efecto* de la acción de una fuerza es la misma *si la fuerza es aplicada inmediatamente o sucesivamente por grados*.

Considérese el siguiente ejemplo. Se tiene una fuerza impulsiva F que produce un cierto cambio en momentum $\Delta(mV)$ y que la fuerza está dividida dentro de tres partes iguales, cada cual producirá un cambio en el momentum de $1/3mV$. Entonces, la aplicación sucesiva de estas tres fuerzas producirá un cambio correspondiente total en el momentum de $3x1/3xmV = mV$. El cambio neto en momentum es el mismo si los impactos son distribuidos en serie o todos a la vez. Esto hace perfecto sentido para fuerzas impulsivas, pero no tiene sentido para fuerzas continuas, ya que el último produce un cambio neto de momentum que depende tanto de la magnitud de la fuerza como del tiempo de duración de la fuerza que actúa. Esta interpretación es confirmada en el corolario I de la ley. Aquí (ver figura N°5) Newton considera un cuerpo golpeado por un puñetazo[16]. *Un cuerpo en un tiempo dado por una fuerza M impone en A, ser llevado con movimiento uniforme desde A hasta B*. Aquí está un caso sencillo de una fuerza impulsiva generando movimiento. Después de recibido el *puñetazo*, el cuerpo

[16] La frase original versa así: “Newton considers a body struck by a blow”. No se encontró una traducción mejor.

entonces, de acuerdo con la definición 4, *continuará* en el *nuevo estado* por su fuerza de inercia.

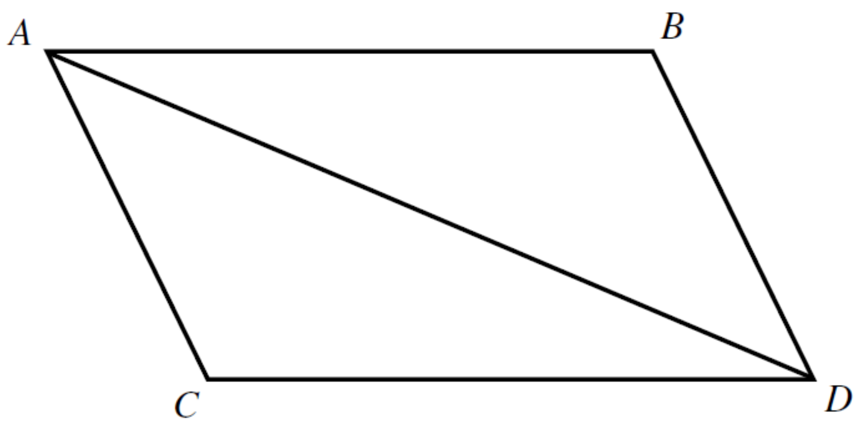

Figura N° 5. Paralelogramo de Newton resultante del movimiento producido por la fuerza impulsiva.

Por supuesto, Newton sabía que la segunda ley también podía aplicarse a fuerzas actuando continuamente. Esta forma de la segunda ley es implicada en las definiciones 7 y 8. En el libro 2, proposición 24, Newton escribe que *la velocidad que una fuerza dada puede generar en un tiempo dado en una cantidad dada de materia es como a la fuerza o el tiempo directamente y a la materia inversamente*. El factor tiempo muestra que este es un caso de la segunda ley para fuerzas continuas. Una razón de por qué Newton puede que haya dado prioridad a la forma impulsiva de la ley más que la versión continua, es que, en este caso, uno puede presenciar un acto de impacto o presión.

Esta ley es expresada matemáticamente de la siguiente manera:

$$F = m \times a \tag{8}$$

Donde *F*, *m* y *a* representan a la *fuerza resultante*, la *masa* del cuerpo y a la *aceleración*, respectivamente. En esta ecuación se correlaciona el producto de la masa y la aceleración para determinar la fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo. Puesto que la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo corresponde a la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre éste, la ecuación (8) puede ser expresada como:

$$\sum F = m \times a \tag{9}$$

Tanto de la ecuación (8) como de la (9) se desprende que la fuerza aplicada sobre un cuerpo es proporcional a la aceleración de este, siendo su masa la constante de proporcionalidad. Por consiguiente, esta formulación es aplicable a cuerpos cuya masa permanece constante (de lo contrario, no habría proporcionalidad entre la fuerza resultante y la aceleración).

Para considerar aquellos cuerpos que varían su masa, la segunda ley debe ser expresada de manera más genérica. Para ello, se define el *cambio de movimiento* (del enunciado de esta ley) en términos de *cantidad de movimiento*, también denominado *momentum*. Esta cantidad de movimiento se obtiene a partir de la ecuación (8) o (9) expresada de manera general, es decir, expresando a la aceleración como la derivada de la velocidad con respecto al tiempo:

$$F = m \times \frac{dv}{dt} \tag{10}$$

Despejando la variación en el tiempo (*dt*) se obtiene:

$$dt \times F = m \times dv \tag{11}$$

Puesto que el momentum es entendido en términos de la cantidad o cambio de movimiento, es decir, la variación de la fuerza neta con respecto al tiempo, de la ecuación (11) se obtiene la expresión del momentum:

$$P = m \times v \tag{12}$$

Donde *P*, *m* y *v* corresponden al *momentum*, a la *masa* y a la *velocidad* del cuerpo, respectivamente. Por consiguiente, se puede afirmar, en última instancia, que la segunda ley de Newton corresponde a la fuerza neta resultante de la variación de la cantidad de movimiento (o momentum) con respecto al tiempo. El cómo expresar esta ley, si en términos de momentum o de aceleración, dependerá del contexto en que será utilizada.

3.4.3. La tercera ley de Newton.

La tercera ley afirma que, la acción es siempre igual y opuesta a la reacción. En las propias palabras de Newton, *para cualquier acción hay siempre una reacción opuesta e igual*. En una formulación actual, esta ley dice: si un cuerpo *A* ejerce una fuerza F_a sobre un cuerpo *B*, entonces *B* ejercerá una fuerza igual y opuesta F_b sobre *A*. Es importante notar que, en esta formulación no hay equilibrio, puesto que la F_a y F_b son ejercidas en diferentes cuerpos, uno sobre *A* y la otra sobre *B*. Sin embargo, esta ley puede estar sujeta a malinterpretaciones, tal como lo vio el propio Newton. Es por ello, que formula una segunda versión: *las acciones de dos cuerpos unos sobre otros son siempre iguales y siempre opuestas en dirección*. Newton dice que aplica específicamente a colisiones. Muestra que la forma en la cual esta ley es relacionada a la ley de conservación de momentum, previamente anunciada por el matemático John Wallis, y conocida por Huygens. Concluye con la importante afirmación de que esta *ley es válida también para atracciones*.

Esta ley puede ser expresada por medio de la siguiente estructura matemáticas:

$$F_{12} = -F_{21} \tag{13}$$

La ecuación (13) condensa lo expresado en la formulación original de la tercera ley. Si dos cuerpos interaccionan, la fuerza ejercida por el objeto 1 sobre el objeto 2 (F_{12}) será igual, tanto en magnitud como en dirección, pero con sentidos contrario, a la fuerza ejercida por el objeto 2 sobre el objeto 1 ($-F_{21}$). La importancia de la tercera ley radica en que juega un importante rol para la derivación de la conservación del momentum, la conservación del centro de masa, entre otros.

3.5. Deducción de otras leyes a partir de las leyes dinámicas.

En las secciones previas se ha visto, (1) la metodología formal (el *análisis de fluxiones* o *cálculo diferencial e integral* y el *método de límites*) sobre el cual se construyen y demuestran las leyes newtonianas; (2) los fundamentos de los conceptos físicos claves para la formulación de los axiomas físicos, los cuales poseen una base empírica que permite su manipulación experimental; y (3) los fundamentos sobre los cuales se construyen las leyes dinámicas (o axiomas físicos) y la aplicación de las matemáticas para la formulación de las estructuras matemáticas de estos enunciados. A continuación, se presenta la aplicación de la metodología formal para la demostración de otras leyes y la aplicación de las leyes dinámicas para deducir y explicar otras leyes de la física clásica.

3.5.1. Demostración de la segunda ley de Kepler.

Luego de la formulación de las leyes dinámicas, Newton demuestra, por medio del método de límites, que las leyes de Kepler están conformes con su segunda ley. De esta manera, les confiere una mayor robustez a sus leyes al aprovechar el éxito empírico de las tres leyes de Kepler.

La demostración de Newton se basa principalmente en la transición desde la acción de fuerzas impulsivas a la acción de fuerzas continuas. El objetivo de Newton es encontrar la significancia de la ley de las áreas de Kepler (el vector posición *r* de cada planeta con respecto al Sol barre áreas (la velocidad areolar) iguales en tiempos iguales). La prueba de Newton comienza con un cuerpo (en realidad un punto masa) moviéndose libremente con un componente de movimiento inercial lineal a lo largo de una línea recta. Newton muestra (ver figura N°6) que este movimiento está conservando el área, esto es, una línea trazada desde el cuerpo en movimiento a cualquier punto *P* (no sobre la línea de movimiento) barre áreas iguales en cualquier tiempo equivalente. De esta manera, Newton reveló por primera vez la conexión entre la ley de áreas y la ley de inercia. Luego, después de un intervalo de tiempo *T*, el cuerpo está dando un flujo impulsivo que se dirige hacia el punto *P*. El cuerpo ahora se moverá sobre un nuevo camino lineal, con una nueva velocidad, de acuerdo con la segunda ley.

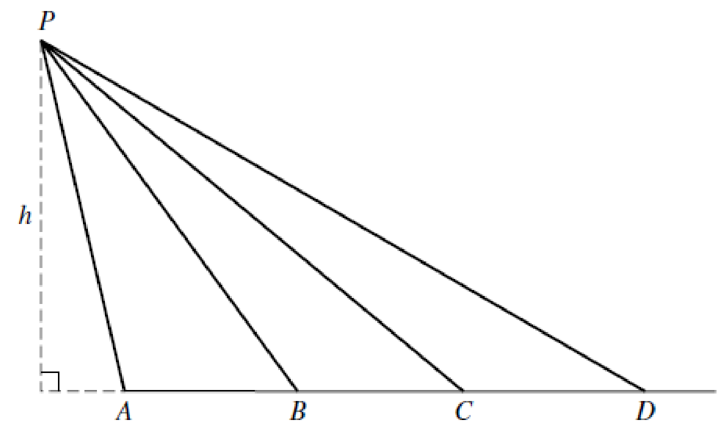

Figura N° 6. La ley del área para movimientos uniformes rectilíneos. Un cuerpo se mueve con movimiento uniforme a lo largo de la línea recta *ABCD*… Entonces en tiempo iguales la distancia *AB*, *BC*, *CD*… serán iguales. Por lo tanto, una línea desde el movimiento del cuerpo a cualquier punto *P* barrerá áreas iguales en cualquier intervalo de tiempo, ya que el triángulo *ABP*, *BCP*, *CDP*… tienen una altura *h* común y bases iguales.

Por simple geometría (ver figura N°7), Newton prueba que el área barrida en el tiempo *T* por una línea desde el cuerpo a *P* será la misma a lo largo del nuevo camino como lo fue cuando el cuerpo que se movió desde *A* a *B*. Luego, en el fragmento de otro tiempo *T* el procedimiento completo es repetido. De esta manera, Newton produce una trayectoria poligonal, cada lado correspondiendo al movimiento durante un intervalo de tiempo *T* y a cada lado de la base de un triángulo (considerando que todos los triángulos tienen las mismas áreas).

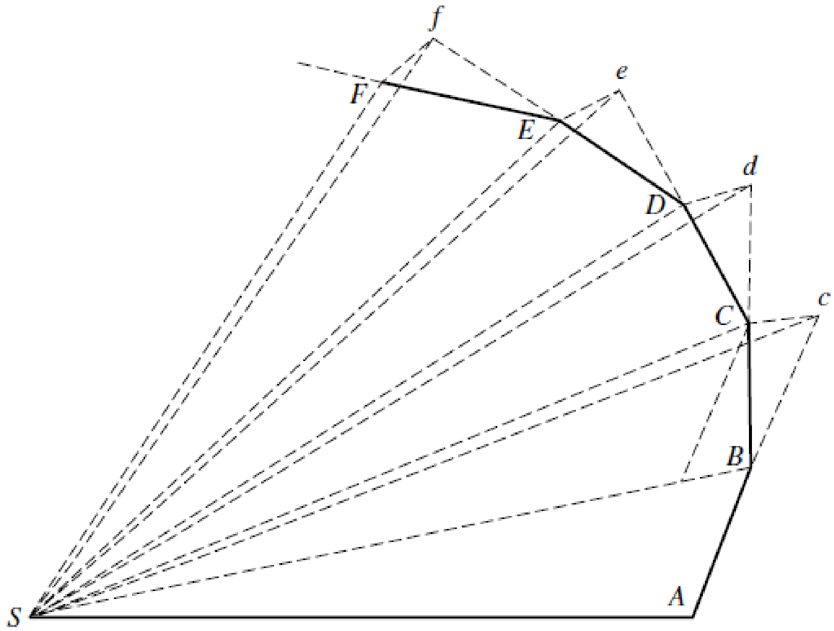

Figura N° 7. El recorrido poligonal de Newton. Durante el primer intervalo de tiempo *T*, el cuerpo se mueve desde *A* a *B*. En *B* recibe un empuje hacia *S*. Si no hubiera habido tal empuje, el cuerpo se habría movido en el segundo tiempo *T* desde *B* a *c*, donde *Bc* = *AB*. Pero, como un resultado del empuje, el cuerpo se mueve desde *B* a *C*. Por la regla del paralelogramo y por simple geometría, Newton muestra que el área del triángulo *BSC* equivale al triángulo *BSc*. De esta manera Newton construyó el recorrido poligonal *ABCDEF*…

En este punto, Newton dice en el corolario 4, *ahora, el número de triángulos se ha incrementado y su ancho decreció indefinidamente*, esto es, sin límites. Entonces, continua, *el último perímetro ADF será una línea curvada*. De esta manera, *la fuerza centrípeta por la cual el cuerpo se está continuamente retirando desde la tangente de esta curva actuará ininterrumpidamente*. Además, *cualquier área descrita, SADS y SAFS, las cuales son siempre proporcionales al tiempo de descripción, serán proporcionales a aquellos tiempos en este caso*. En otras palabras, Newton ha probado esencialmente que una fuerza centralmente dirigida siempre producirá (o es una condición suficiente para) la ley de áreas. Este ejemplo muestra cómo Newton usó su método de límites para hacer una transición desde la acción de una fuerza consistiendo en una serie de impulsos a la acción de una fuerza actuando continuamente. En otras palabras, Newton demostró que todo cuerpo que describa una trayectoria curvilínea en torno a un punto fijo y que respete la segunda ley de Kepler, se debe sí, y sólo sí, está actuando una fuerza centrípeta, la cual apunta hacia el punto fijo en línea recta.

3.5.2. Deduciendo la ley de gravitación universal.

Una vez demostrada las relaciones entre la segunda ley de Kepler con la primera y segunda ley dinámica, Newton busca determinar la naturaleza de la *fuerza centrípeta*. Para su análisis, toma como punto de partida el determinar la aceleración de un cuerpo moviéndose uniformemente de manera circular.

La demostración se sigue de un análisis por medio del método de límites de la siguiente manera: un cuerpo viaja con velocidad constante v a través del segmento AB (ver figura N°8).

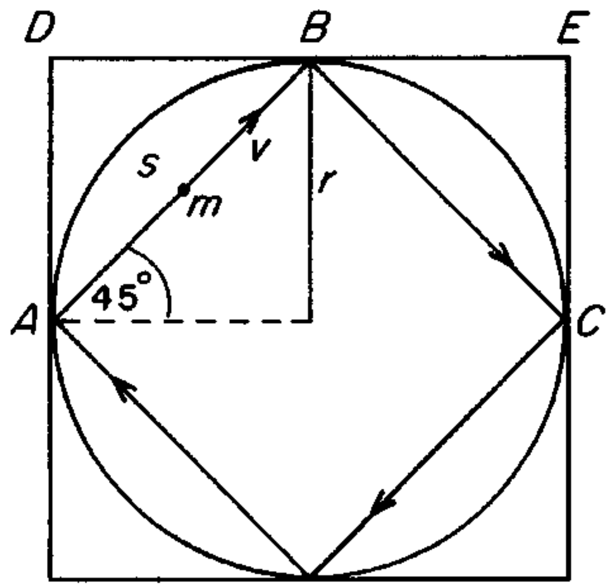

Figura N° 8. Análisis geométrico para determinar la aceleración de un cuerpo moviendo de manera circular y uniforme.

La componente perpendicular de *v* con respecto al segmento *DBE* corresponde a:

$$AD = v_{\perp} = \frac{v}{\sqrt{2}} \qquad (14)$$

Cuando el cuerpo *colisiona* con el segmento *DBE*, este es *reflejado* con la misma velocidad *v*, pero con dirección *BC*. Por consiguiente, la componente perpendicular a *DBE* de la velocidad resultante es *-v/*√*2*, de modo que:

$$\Delta v = \frac{v}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{v}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2v}{\sqrt{2}} = \frac{v}{\sqrt{2}} \qquad (15)$$

Si se denota al segmento *AB* como *s*, se tiene que el tiempo transcurrido desde *A* hasta *B* corresponde a $\Delta t = {}^{s}/_{v}$. Por geometría se obtiene que $s = r\sqrt{2}$, de modo que $\Delta t = {}^{r\sqrt{2}}/_{v}$. Por lo tanto, la aceleración de un cuerpo moviéndose uniformemente de manera circular corresponde a:

$$a = \frac{v\sqrt{2}}{\frac{v\sqrt{2}}{v}} = \frac{v^2}{r} \tag{16}$$

Finalmente, aplicando este resultado en la segunda ley de Newton, se concluye que la fuerza centrípeta corresponde a:

$$F = m \times \frac{v^2}{r} \tag{17}$$

Ahora bien, puesto que el Sol ejerce una fuerza centrípeta sobre los planetas, se puede aplicar la ecuación (17) sobre un sistema Sol-Planeta. En este caso, la distancia recorrida por el planeta es un periodo orbital *T* es de $2\pi r$. De modo tal, que $v = 2\pi r/T$. Por consiguiente, se obtiene la siguiente ecuación:

$$F = m\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \cdot \frac{1}{r} = m\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{r}{r} = \frac{4\pi^2 m}{r^2} \cdot \frac{r^3}{T^2} \tag{18}$$

Se debe notar que r^3/T^2 es la constante de Kepler que figura en su tercera ley ($C = \frac{r^3}{T^2}$). Por consiguiente, se puede denotar la constante de Kepler, para un sistema Sol-Planeta, como K_S. De esta manera se obtiene la ecuación de la fuerza centrípeta para dicho sistema como:

$$F = \frac{4\pi^2 m K_S}{r^2} \tag{19}$$

Por lo tanto, de la ecuación (19) se desprende que la fuerza centrípeta en un sistema Sol-Planeta es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre el Sol y el Planeta ($1/r^2$).

Ahora, si aplicamos un *uno conveniente* considerando a la masa del Sol (m_S), es decir, $\frac{1}{1} = \frac{m_S}{m_S}$, a la ecuación (19) y, reordenando los factores, se obtiene la siguiente ecuación:

$$F = \frac{4\pi^2 k_S}{m_S} \cdot \frac{m_S \cdot m}{r^2} \tag{20}$$

Se debe tener presente que la ecuación (20) está considerando un sistema Sol-Planeta, por consiguiente, si especificamos al sistema como Sol-Tierra, Sol-Marte, o Sol-Urano, esta ecuación sigue siendo igualmente aplicable. Incluso, si se considera un sistema Tierra-Luna o a Júpiter con cualquiera de sus satélites, la ecuación sigue siendo válida. Esto se debe a que, al reemplazar las distintas variables, según el sistema que se considera, estas permanecen en las mismas relaciones y, por ende, la estructura matemática se preserva. En otras palabras, al cambiar los referentes del sistema, lo que se cambia, en última instancia, son las distancias relativas entre los cuerpos considerados. De esta manera, Newton postula que $\frac{4\pi^2 K_i}{m_i}$ corresponde a una constante fundamental de la naturaleza. Esta constante es denotada como *G* y equivale a 6,67x10^{-11}m^3/(kg s^2). Finalmente, Newton postula que la ecuación (20), que expresa la fuerza centrípeta entre dos cuerpos, es corresponde a una *ley física*, a la cual denominó *ley de gravitación universal*, cuya expresión matemática es:

$$F = G\,\frac{m \cdot m\prime}{r^2} \qquad (21)$$

Donde se expresa que una fuerza que opera entre dos cuerpos cualesquiera, cuyas masas se denotan como *m* y *m'*, es directamente proporcional al producto de sus masas, e inversamente proporcional a la distancia al cuadrado que los separa, con *G* constante.

3.5.3. Explicando la caída de los cuerpos en la Tierra.

La ley de gravitación universal explica el por qué dos cuerpos se atraen entre sí en dirección a sus centros de masa. Si bien esta ley fue derivada desde la segunda ley de Newton y la tercera ley de Kepler, la cual describe la relación entre el periodo orbital y la distancia al Sol de un planeta, no obstante, su formulación aplica a cuerpos cualesquiera sean. Por consiguiente, dicha ley también puede explicar la atracción entre, por ejemplo, una manzana y la Tierra. En efecto, se puede calcular la fuerza con que la Tierra atrae a la manzana. De esta manera, la fuerza de atracción del sistema Tierra-manzana se puede formular de la siguiente manera:

$$F = G\frac{m_T m_m}{R_T^2} \tag{22}$$

Donde la R_T corresponde a la distancia entre la manzana y el centro de la Tierra. Para efectos prácticos, se considera que la manzana se encuentra en la superficie terrestre (para cualquier otra distancia sobre la superficie, sólo se debe considerar el radio de la Tierra más la distancia sobre la superficie en que se encuentre el cuerpo). Mientras que m_t y m_m corresponden a las masas de la Tierra y de la manzana, respectivamente.

Ahora, teniendo en cuenta a la segunda ley de Newton, se puede considerar que $\mathrm{F} = m_m\mathrm{a}$. Por consiguiente, se puede obtener la siguiente ecuación:

$$m_m a = G\,\frac{m_T m_m}{R_T^2} \qquad (23)$$

Si en la ecuación (23) se elimina m_m, se obtiene finalmente la ecuación que describe la aceleración con que la manzana, y cualquier otro cuerpo sobre la Tierra, cae hacia el centro del planeta. Esta ecuación corresponde a:

$$a = G\,\frac{m_T}{R_T^2} \qquad (24)$$

Por consiguiente, la ecuación (24) explica matemáticamente porque todo cuerpo sobre la superficie terrestre cae a la misma aceleración, sin importan la masa de tales cuerpos. En efecto, si se considera, por ejemplo, la atracción de una manzana sobre la Tierra (desde la superficie de la manzana hasta su centro), el valor de tal fuerza es despreciable en comparación con la fuerza que ejerce el planeta.

Por lo tanto, se puede apreciar, finalmente, que la ley de gravitación universal es válida tanto para los cuerpos celestres del sistema solar, como para los cuerpos ubicados en y sobre la superficie terrestre. Es, decir, a partir de las leyes dinámicas de Newton se puede deducir y explicar las leyes de Kepler y la ley de caída libre de los cuerpos de Galileo.

3.6. Conclusiones del capítulo.

El presente caso de estudio refleja la contribución de las matemáticas aplicadas de acuerdo con lo siguiente:

Newton proporcionó un marco matemático de trabajo general sobre el cual formuló sus leyes dinámicas. Para ello ideo un método de análisis que tiene por base, al menos, los siguientes elementos: el teorema del binomio, una nueva notación y algoritmos que le permitieron calcular la tangente de las curvas, y el teorema fundamental del cálculo. Estos tres elementos le ayudaron a configurar su cálculo de fluxiones y su método de límites.

La formulación de las leyes dinámicas, Newton siguió un método axiomático para: primero, ideó el marco matemático general, su método de fluxiones, es decir, generó la maquinaria analítica para abordar los problemas que buscaba resolver. Segundo, formuló conceptos físicos con una base empírica. Luego, formula sus axiomas físicos, es decir, sus tres leyes dinámicas de acuerdo con los conceptos físicos que estableció. Y, finalmente, interpreta sus leyes.

Los conceptos físicos que establece Newton son los de *masa* y *fuerza*. El primero lo define como la cantidad de materia que surge del producto de la densidad y el volumen. Para ello, tuvo en cuenta los estudios en neumática de Boyle. El segundo concepto lo define en términos de la acción ejercida sobre un cuerpo que genera un cambio de estado o una aceleración.

Newton formula tres axiomas físicos, es decir, sus tres leyes dinámicas. La primera ley o ley de inercia (*todo cuerpo continúa en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme hacia adelante*) implica que la sumatoria de fuerzas ejercidas sobre un cuerpo es igual a cero (ecuación (7)), donde las distintas fuerzas son consideradas como vectores, puesto que poseen dirección y sentido. Esta ley correlaciona las fuerzas con la aceleración, pero es interpretada como una descripción de situaciones idealizadas. La segunda ley (un *cambio en el movimiento* es proporcional a *la fuerza impresa*, añadiendo que este cambio en el movimiento es dirigido *a lo largo de la línea recta en la cual esta fuerza está impresa*), expresa la fuerza en términos de la relación entre la masa y la aceleración. No obstante, su interpretación va a depender de si los cuerpos descritos varían sus masas o no. En el caso de que los cuerpos no varían su masa, las ecuaciones (8) y (9) son válidas, si los cuerpos varían su masa es necesario considerar al *momentum*, por consiguiente, las ecuaciones (10) y (11) son las válidas. La elección del tipo de estructura matemática a utilizar dependerá de la situación a considerar. La tercera ley o ley de acción y reacción (*las* *acciones de dos cuerpos unos sobre otros son siempre iguales y siempre opuestas en dirección*), cobra relevancia considerar las fuerzas como vectores.

Luego de establecer sus conceptos y leyes, Newton demuestra que, de sus leyes, en particular las primeras dos, se deduce la segunda ley de Kepler. La demostración la realiza por medio de su método (geométrico) de límites., concluyendo que todo cuerpo que describa una trayectoria curvilínea en torno a un punto fijo y que respete la segunda ley de Kepler, se debe sí, y sólo sí, está actuando una fuerza centrípeta, la cual apunta hacia el punto fijo en línea recta.

Demostrado el punto anterior, Newton procede a describir la naturaleza de la fuerza centrípeta. Para ello recurre nuevamente a su método de límites para llegar a la formulación de la ecuación (17) que explica dicha fuerza. Luego, al aplicar esta ecuación a sistemas Sol-Planetas, Newton deduce la tercera ley de Kepler y, finalmente, lo lleva a la deducción de su ley de gravitación universal (ecuación (21)). Para lograr deducir esta ley, Newton requirió de una serie de razonamientos y de herramientas matemáticas que lo condujeron desde la ecuación (14) a la (21).

Finalmente, a partir de la deducción de su ley de gravitación universal, Newton amplia el rango de cuerpos al cual aplica dicha ley. Así, a partir de las inferencias en torno a los movimientos planetarios (las leyes de Kepler) infiere que esta ley también aplica a cuerpos que se encuentra en o sobre la superficie de la Tierra. Por consiguiente, Newton demuestra que a partir de sus leyes dinámicas se deducen y explican las leyes de Kepler (aplicadas a la cinemática de los cuerpos celestes) y la ley de la caída libre de los cuerpos de Galileo (aplicada a objetos terrestres), es decir, Newton unifica los fenómenos celestes y terrestres bajo una ley física. La interpretación de la estructura matemática de las leyes de Newton dependerá, una vez más, del contexto que se está considerando, en otras palabras, la interpretación dependerá de *criterios pragmáticos*.

En síntesis, en el caso de estudio se puede observar la contribución de las matemáticas aplicadas para la formulación y desarrollo de las leyes dinámicas. Eso se refleja, primero, en el papel que juegan el *rol metodológico* en términos de, (1) proporcionar el marco formal general (la maquinaria analítica) sobre el cual se erigen las leyes dinámicas; (2) ofrecer los razonamientos implicados para la formulación de las leyes y las derivaciones de sus consecuencias (como la deducción de otras leyes físicas). Segundo, proporcionar las herramientas formales que permiten establecer e inferir las leyes, tales como conceptos o idealizaciones matemáticas.

4. CONCLUSIÓN.

La presente investigación se planteó como objetivo analizar la contribución de las matemáticas aplicadas en la formulación y aplicación de los enunciados de las leyes de la física clásica. Los resultados muestran que las matemáticas contribuyen de manera pragmática, en términos del rol metodológico de estas en la formulación de tales enunciados y la aplicación de estos a la deducción de otras leyes físicas. Esta contribución de las matemáticas es asegurada por la aplicación del método axiomático, el cual confiere consistencia y objetividad a las leyes de la física clásica. Estos resultados se ven reflejados en cómo Newton formuló y aplicó sus leyes dinámicas.

En el capítulo 1 se mostró cómo el rol metodológico contribuye en los enunciados de ley al proporcionar las herramientas para la correlación de eventos físicos bien definidos en términos espaciales y temporales. En efecto, este rol permite, por una lado, ofrecer una forma de razonamiento inferencial para: (1) la formulación de estructuras matemáticas, incluidas los enunciados de ley de la física; (2) permiten inferir las consecuencias de estas leyes (en base a ciertas condiciones iniciales determinadas); y (3) permiten descubrir la lógica de pasar entre una afirmación a otra, es decir, descubrir las conexiones entre distintas estructuras matemáticas (incluidas los enunciados de ley). Y por otro lado, ofrecer las herramientas formales que permiten: (1) proporcionar a los enunciados de ley de los conceptos capaces de representar objetos o fenómenos físicos; y (2) proporcionar las herramientas necesarias para: (2.1) establecer relaciones entre objetos o fenómenos físicos; y (2.2) inferir relaciones entre las distintas estructuras matemáticas de las leyes de la física. En otras palabras, los tres roles básicos de las matemáticas aplicadas son subsumidos en el *rol metodológico*.

Esta contribución del rol metodológico es debida a que es un rol de carácter pragmático -es decir, el rol metodológico es un rol pragmático-, puesto que las matemáticas aplicadas son herramientas útiles para la formulación y aplicación de las estructuras matemáticas en general y en los enunciados de ley -de la física- en particular. En efecto, la selección de las herramientas formales especificas a utilizar en la práctica científica para la formulación de enunciados de ley, así como la distinción entre los tres roles básicos de las matemáticas aplicadas, quedan determinados bajo criterios pragmáticos.

A su vez, esta contribución otorga una forma de cuantificación de las variables físicas, permitiendo la posibilidad de verificación experimental de las leyes y, por consiguiente, contribuyen a determinar los dominios de validez de las leyes. Dicho dominio de validez se entiende y distingue de la siguiente manera: primero, en la metáfora de las *capas de leyes*, aquellas leyes que sean capaz de *subsumir* otras leyes, es decir, sean más generales, se ubican en *niveles* superiores; y segundo, este *subsumir* es entendido en términos de que, desde una ley se puede deducir otras leyes, lo cual es logrado, formalmente, por medio de la utilización de herramientas matemáticas complejas. De esta manera, las matemáticas permiten establecer una jerarquía formal entre las leyes de la física clásica.

Por otro lado, la versatilidad de las matemáticas aplicadas confiere *robustez* a las leyes científicas debido a los siguientes factores: (i) permiten llegar a las mismas consecuencias partiendo desde distintas estructuras matemáticas al describir un objeto o fenómeno físico o al referir resultados experimentales; (ii) las distintas derivaciones matemáticas son matemáticamente equivalentes (pero cualitativamente distintas) en el caso en que se puedan inferir entre sí. Con respecto a este último punto, si desde una de las derivaciones se puede deducir el resto de las derivaciones, sugiere un cierto grado de *fundamentabilidad*.

El rol metodológico de las matemáticas aplicas permite, a su vez, asegurar y dar sentido a la aplicación de las estructuras matemáticas de las leyes en distintos contextos y la derivación de otras estructuras matemáticas (incluidas otras leyes de la física), por medio de las transformaciones de invariancia. En efecto, las mismas matemáticas aplicadas para la formulación de las leyes de la física pueden ser utilizadas en estas transformaciones, las cuales permiten que las estructuras matemáticas de las leyes no afecten las correlaciones entre eventos y aseguren las deducciones de otras leyes. Esto se debe a dos factores: primero, en la física clásica, al menos, la invariancia es formulada en términos de *principios geométricos de invariancia*, es decir, en términos de observaciones directas; y segundo, dichos principios aseguran la misma probabilidad de ocurrencia que describen las leyes clásicas con independencia de las transformaciones de invariancia que se realicen.

En síntesis, los resultados del capítulo 1 permiten establecer que el rol metodológico contribuye de manera pragmática para la formulación y aplicación de los enunciados de ley en la física clásica.

En el capítulo 2 se mostró cómo contribuye la aplicación del método axiomático de las matemáticas en la formulación consistente de los enunciados de ley. En efecto, la aplicación metodológica de la axiomatización semi-formal (puesto que da espacio a que la experimentación y a la intuición intervengan) en la práctica científica, permite formular de manera consistente tanto los conceptos físicos como los axiomas físicos, establecer las relaciones pertinentes entre los axiomas y deducir todas las consecuencias de los axiomas físicos.

Esta contribución también es entendida en términos pragmáticos, puesto que la axiomatización semi-formal es caracterizada como una *axiomatización débil* *pragmática* (compatible con la concepción inferencial de las matemáticas aplicadas de Bueno y Colyvan, 2011). Este carácter pragmático se debe a que la elección de los conceptos físicos claves responde al contexto de investigación; el rol metodológico de las matemáticas más la base empírica de los conceptos físicos permiten la evaluación experimental de las estructuras matemáticas de las leyes de la física clásica; y, tanto la elección del tipo de maquinaria analítica a utilizar (sujeta, también, al rol metodológico), como la interpretación física, obedecen a criterios pragmáticos.

En síntesis, los resultados del capítulo 2 permiten determinar que la aplicación de la axiomatización débil pragmática sujeta al rol metodológico de las matemáticas aplicadas, realiza una contribución pragmática para la formulación de los enunciados de ley en la física clásica.

La aplicación de los principales resultados de los capítulos 1 y 2 en el caso de estudio (capítulo 3), permitió esclarecer que, (1) la maquinaria analítica creada por Newton (su análisis de fluxiones y su método de límites) contribuyó a proporcionar el marco de trabajo formal sobre el cual erigió sus leyes dinámicas; (2) la formulación de sus leyes siguió una axiomatización débil pragmática puesto que, la elaboración de sus conceptos físicos se erigen sobre una base empírica, formula sus axiomas físicos sobre la base de los conceptos físicos, los cuales se siguen de la maquinaria analítica que creó, y la interpretación física se establece conforme al contexto en el cuál son aplicadas sus leyes.

Este caso de estudio permite observar cómo el rol metodológico es aplicado en la formulación de las dos primeras leyes dinámicas, al menos. En efecto, la primera ley o ley de inercia implica que la sumatoria de fuerzas ejercidas sobre un cuerpo es igual a cero (ecuación (7)), donde las distintas fuerzas son consideradas como vectores, puesto que poseen dirección y sentido. Esta ley correlaciona las fuerzas con la aceleración, pero es interpretada como una descripción de situaciones idealizadas. Mientras que, en la segunda ley se expresa la fuerza en términos de la relación entre la masa y la aceleración. No obstante, su interpretación va a depender de si los cuerpos descritos varían sus masas o no. En el caso de que los cuerpos no varían su masa, las ecuaciones (8) y (9) son válidas, si los cuerpos varían su masa es necesario considerar al *momentum*, por consiguiente, las ecuaciones (10) y (11) son las válidas. La elección del tipo de estructura matemática a utilizar dependerá de la situación a considerar.

Además, este caso revela cómo el rol metodológico contribuye a relacionar las leyes dinámicas con otras leyes. En efecto, por medio del método de límites, Newton demuestra las conexiones entre sus dos primeras leyes con la segunda ley de Kepler. Demuestra la deducción de su ley de gravitación universal a partir de su segunda ley y la tercera ley de Kepler. Para lograr deducir esta ley, Newton requirió de una serie de razonamientos y de herramientas matemáticas que lo condujeron desde la ecuación (14) a la (21). Finalmente, a partir de la deducción de su ley de gravitación universal, Newton amplia el rango de cuerpos al cual aplica dicha ley. Así, a partir de las inferencias en torno a los movimientos planetarios (las leyes de Kepler) infiere que esta ley también aplica a cuerpos que se encuentra en o sobre la superficie de la Tierra. Por consiguiente, Newton demuestra que a partir de sus leyes dinámicas se deducen y explican las leyes de Kepler (aplicadas a la cinemática de los cuerpos celestes) y la ley de la caída libre de los cuerpos de Galileo (aplicada a objetos terrestres), es decir, Newton unifica los fenómenos celestes y terrestres bajo una ley física. La interpretación de la estructura matemática de las leyes de Newton dependerá, una vez más, del contexto que se está considerando, en otras palabras, la interpretación dependerá de *criterios pragmáticos*.

En síntesis, el caso de estudio muestra la contribución de las matemáticas aplicadas para la formulación y desarrollo de las leyes dinámicas. Eso se refleja, primero, en el papel que juegan el *rol metodológico* en términos de, (1) proporcionar el marco formal general (la maquinaria analítica) sobre el cual se erigen las leyes dinámicas; (2) ofrecer los razonamientos implicados para la formulación de las leyes y las derivaciones de sus consecuencias (como la deducción de otras leyes físicas). Segundo, proporcionar las herramientas formales que permiten establecer e inferir las leyes, tales como conceptos o idealizaciones matemáticas.

Por consiguiente, los resultados arrojados en esta investigación permiten afirmar que las matemáticas aplicadas realizan una contribución pragmática para la formulación y desarrollo de los enunciados de ley en la física clásica. Esto se logra por medio del rol metodológico que juegan las matemáticas, puesto que permiten formular de manera consistente a los enunciados de ley y, con ello, establecer relaciones entre, (1) las leyes que se formulan bajo una misma maquinaria analítica y los mismos conceptos físicos; y (2) las leyes que se formulan bajo otras maquinarias analíticas. Es decir, el rol metodológico permite establecer y determinar las relaciones inter- e intra-teóricas entre los distintos enunciados de ley en la física.

Sin embargo, los resultados de esta investigación son insuficientes para extrapolar estas ideas a otras áreas de la física, tales como la relatividad o la mecánica cuántica, en términos del tipo de contribución que realizan las matemáticas, así como también extrapolar estos resultados a la estructura general de una teoría física. Por otro lado, estos resultados no arrojan luz sobre la naturaleza de la contribución pragmática de las matemáticas, es decir, si dicha contribución es indispensable o no. Por otro lado, se requiere de una mayor precisión del carácter del rol pragmático y del método axiomático débil pragmático. Futuras líneas de investigación deben apuntar estos problemas, en particular profundizar con mayor detalle los fundamentos de las teorías físicas y profundizar las reflexiones filosóficas en torno a las matemáticas aplicadas.

5. **REFERENCIAS.**

BUENO, O. 2005. “Dirac and the Dispensability of Mathematics”. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* 36, pp. 465-490.

BUENO, O. 2016. “An Anti-realist Account of the Application of Mathematics”. *Philosophical Studies* 173, pp. 2591-2604.

BUENO, O., COLYVAN, M. 2011. “An Inferential Conception of the Application of Mathematics”. *Noûs* 45:2, pp. 345-374.

COHEN, B. 2016. “Newton’s Concepts of Force and Mass, with Notes on the Laws of Motion”, pp: 61-92. In: Iliffe, R., Smith, G. (eds). *The Cambridge Companion to Newton*. Cambridge University Press, United Kingdom. 500 p.

COLYVAN, M. 2012. “Chapter 3: Plato’s Heaven”, pp. 41-62. In: *An Introduction to the Philosophy of Mathematics*. Cambridge University Press.

DALLA, M., GIUNTINI, R. 2001. “On the Notion of ‘Law’”, pp. 1-11. In: Dalla, M., Giuntini, R. (eds). *History of Philosophy of Science. New Trends and Perspective*. Vienna Circle Yearbook. Springer-Science + Business Media B.V.

DIEKS, D. 2005. “The Flexibiliy of Mathematics”, pp. 115-130. In: Boniolo, G., Budinich, P., Trobok, M. (eds). *The Role of Mathematics in Physical Sciences*. *Interdisciplinary and Philosophical Aspects*. Springer, Holanda.

FEYNMAN, R. 2005. “La relación de las matemáticas con la física”, pp. 39-55. En: *El Carácter de la Ley Física*. Traducción: Bosch, A. Tusquets Editores, Barcelona, España.

FIELD, H. 1989. “Introduction: Fictionalism, Epistemology and Modality”, pp. 1-30. In: *Realism, Mathematics, and Modality*. Basil Blackwell.

FIELD, H. 2016. “Indispensability”, pp. P-30-P-38. In: *Science Without Numbers, A Defense of Nominalism*. Segunda edición, Oxford.

GUICCIARDINI, N. 2016. “The Mathematical Work of Isaac Newton”, pp. 382-420. In: Iliffe, R., Smith, G. (eds). *The Cambridge Companion to Newton*. Segunda edición. Cambridge University Press, United Kingdom. 500 p.

MADDY, P. 1994. “Taking Naturalism Seriously”, pp. 383-409. In: *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, N°9.

MADDY, P. 1995. “Naturalism and Ontology”, pp. 248-270. In: *Philosophia Mathematica*, N°3.

MOULINES, U. 2011. “Concepciones modelísticas y emparentadas (1970-2000)”, pp. 109-166. En: *El desarrollo moderno de la filosofía de la ciencia (1890-2000)*. Traducción: Xavier de Donato. Instituto de investigaciones filosóficas, Universidad Nacional Autónoma de México.

MOULINES, U. 2013. “Conceptos teóricos y teorías científicas”, pp. 147-162. En: Moulines, U. (ed.). *La ciencia: estructura y desarrollo*. Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía. Editorial Trotta, Madrid, España.

RÉDEI, M. 2005. “John von Neumann on Mathematical and Axiomatic Physics”, pp. 43-54. In: Boniolo, G., Budinich, P., Trobok, M. (eds). *The Role of Mathematics in Physical Sciences*. *Interdisciplinary and Philosophical Aspects*. Springer, Holanda.

TORRETTI, R. 2013. “El método axiomático”, pp. 89-110. En: Moulines, U. (ed.). *La ciencia: estructura y desarrollo*. Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía. Editorial Trotta, Madrid, España.

SOLER, L. 2012. “Chapter 1. Introduction: The Solidity of Scientific Achievements: Structure of the Problem, Difficulties, Philosophical Implications”. pp. 1-60. In: Soler, L., Trizio, E., Nickles, T., Wimsatt, W. (eds). *Characterizing the Robustness of Science. After the Practice Turn in Philosophy of Science*. Springer, volumen 292. USA.

WIGNER, E. 1960. “The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences”. *Communications on pure and applied mathematics*, Vol. XIII. pp. 1-14.

WIGNER, E. 1967a. “Events, Laws of Nature, and Invariance Principles (Nobel address)”, pp. 321-333. In: Mehra, J. (ed). 1995. *The Collected Works of Eugene Paul Wigner. Part B, Historical, Philosophical, and Socio-Political Papers. Volume VI, Philosophical Reflections and Syntheses*. Springer, USA.

WIGNER, E. 1967b. “Symmetry and Conservation Laws”, pp. 297-310. In: Mehra, J. (ed). 1995. *The Collected Works of Eugene Paul Wigner. Part B, Historical, Philosophical, and Socio-Political Papers. Volume VI, Philosophical Reflections and Syntheses*. Springer, USA.

WIGNER, E. 1967c. “The Role of Invariance Principles in Natural Philosophy”, pp. 311-320. In: Mehra, J. (ed). 1995. *The Collected Works of Eugene Paul Wigner. Part B, Historical, Philosophical, and Socio-Political Papers. Volume VI, Philosophical Reflections and Syntheses*. Springer, USA.

WIGNER, E. 1977. “Mathematical Physics”, pp. 345-377. In: Mehra, J. (ed.). *The Collected Works of Eugene Paul Wigner*. Part II, Volume VII. Springer.

WIMSATT, W. 2012. “Chapter 2. Robustness, Reliability, and Overdetermination (1981)”. pp. 61-88. In: Soler, L., Trizio, E., Nickles, T., Wimsatt, W. (eds). *Characterizing the Robustness of Science. After the Practice Turn in Philosophy of Science*. Springer, volumen 292. USA.

WOODWARD, J. 2013. “Laws, Causes, and Invariance”, pp. 48-72. In: Mumford, S., Tugby, M. (eds). *Metaphysics and Science*. Oxford University Press, UK.